



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

## **Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional**

**ROSELAINE SANTOS DE MORAIS**

**A CONTRIBUIÇÃO DO ESTUDO DAS SEQUÊNCIAS RECURSIVAS PARA CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS NO  
ENSINO MÉDIO**



**PROFMAT**

RIO CLARO

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

ROSELAINÉ SANTOS DE MORAIS

A CONTRIBUIÇÃO DO ESTUDO DAS SEQUÊNCIAS RECURSIVAS PARA  
CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora:

Profa. Dra. Sidineia Barrozo

Rio Claro – SP

2018

M827c      Morais, Roseline Santos de  
              A Contribuição do Estudo das Sequências Recursivas  
              para a Construção de Modelos Matemáticos no Ensino  
              Médio / Roseline Santos de Morais. -- Rio Claro, 2018  
              68 p. : il., tabs.

              Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista  
              (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio  
              Claro  
              Orientadora: Sidineia Barrozo

              1. Sequências Matemáticas. 2. Recorrências Lineares. 3.  
              Ensino Médio. 4. Modelos Matemáticos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo  
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

# TERMO DE APROVAÇÃO

Roselaine Santos de Moraes

## A Contribuição do Estudo das Sequências Recursivas para Construção de Modelos Matemáticos no Ensino Médio

Dissertação **APROVADA** como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

---

Profa. Dra. Sidineia Barrozo  
Orientadora

---

Profa. Dra. Erika Capelato  
FLC/UNESP/Araraquara (SP)

---

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento  
IQ/UNESP/Araraquara-SP

Rio Claro, 26 de outubro de 2018



*Dedico este trabalho a todos os amigos e familiares cuja amizade e presença fora negligenciada durante o período deste curso, especialmente para o meu filho, Vitor Henrique, pelos momentos importantes de sua vida em que estive presente em corpo, porém não em pensamentos.*



# Agradecimentos

A Deus, pela bênção da inteligência.

Aos amigos do plano espiritual pela energia e intuição de pensamentos.

À minha orientadora, Sidineia Barrozo, por não desistir de mim.

À Unesp - Rio Claro e aos idealizadores do Profmat pela oportunidade de aprender.

Ao Professor, meu mestre, Marcos Ardenghi, pelos ensinamentos durante a graduação.

Ao meu noivo, Isaías Artigno Wolfshorndl, pelos ensinamentos e apoio na confecção deste trabalho.

Ao meu ex-marido, Claudinei Braz da Silva, pelo apoio incondicional durante quase toda a trajetória deste mestrado.

Aos meus alunos da 1ª série do Ensino Médio, turmas de 2017, pela cooperação e energia, inerente aos jovens e transmitida a mim, em especial, Júlia Plens, Maisa Moretti, Naylla Yanne, Vivian Estequi, Frederico Ribeiro e João Barbarossa.





*"Alguns homens veem as coisas como são, e dizem 'Por quê?' Eu sonho com as coisas que nunca foram e digo 'Por que não?'"*  
George Bernard Shaw



# Resumo

Inspirada na Modelagem Matemática proposta por Bassanezi, mas entusiasmada com a possibilidade de aplicação proposta por Burak, neste trabalho busquei entender como o estudo das Recorrências Lineares de Primeira Ordem poderia contribuir para a construção de modelos matemáticos, em especial, fórmulas inerentes à Matemática Financeira, com alunos da 1ª série do Ensino Médio, utilizando, para isso, Matemática acessível aos mesmos e inteiramente imersa em um tema único e em suas ramificações, envolvendo no processo, simultaneamente, aprendizagem matemática – símbolos, algoritmos e técnicas de resolução –, interação entre a Matemática desenvolvida e a realidade do aluno – contexto sociocultural –, auxílio da tecnologia – *Excel* e *Geogebra* para observação de regularidades e compreensão dos processos e interpretação dos dados, além de *Word* e *Power Point* para escrita e apresentação da atividade, respectivamente –, o desenvolvimento do aluno como protagonista de seu processo de aprendizagem e, por fim, a interdisciplinaridade. Os resultados foram tão positivos que repercutiram na comunidade escolar e culminaram no convite feito pela Diretoria de Ensino de Piracicaba para que o trabalho fosse adaptado para exposição em uma competição de pesquisas nos moldes de Iniciação Científica na Universidade Metodista de Piracicaba – Unimep.

**Palavras-chave:** Sequências Matemáticas, Recorrências Lineares, Ensino Médio, Modelos Matemáticos.



# Abstract

Inspired by the mathematical modeling proposed by Bassanezi, but enthusiastic about the possibility of application proposed by Burak, in this work I tried to understand how the study of Linear Recurrences of First Order could contribute to the construction of mathematical models, especially formulas inherent to Financial Mathematics, with students of the 1st grade of the High School, using, for this, Mathematics accessible to them and entirely immersed in a single theme and its ramifications, involving in the process simultaneously mathematical learning - symbols, algorithms and resolution techniques - interaction between developed mathematics and student reality - sociocultural context -, technology assistance - Excel and Geogebra for observation of regularities and understanding of processes and interpretation of data, in addition to Word and Power Point for writing and presentation of the activity, respectively -, the development of the student as the protagonist of their learning process and, finally, interdisciplinarity. The results were so positive that they reverberated in the school community and culminated in the invitation made by the Teaching Board of Piracicaba so that the work was adapted for exhibition in a competition of research in the form of Scientific Initiation at the Methodist University of Piracicaba - Unimep.

**Keywords:** Mathematical Sequences, Linear Recurrences, High School, Mathematical Models.



# Lista de Figuras

4.1	Exercício 1 – Sequência . . . . .	52
4.2	Recomendação Pedagógica . . . . .	52
4.3	Recomendação Pedagógica . . . . .	53
4.4	Sequência . . . . .	53
4.5	Tabela contagem recursiva . . . . .	53
4.6	Sequência: Número de diagonais de um polígono. . . . .	54
4.7	Exercícios: Termo Geral e Lei de Recorrência . . . . .	55
4.8	Exercícios: Termo Geral e Lei de Recorrência . . . . .	55
4.9	Programando o <i>Excel</i> . . . . .	59
4.10	Programando o <i>Excel 2</i> . . . . .	59
4.11	Programando o <i>Excel 2</i> . . . . .	60
4.12	Simulação 1 . . . . .	60
4.13	Simulação 2 . . . . .	61
4.14	Simulação 3 . . . . .	61
4.15	Simulação 4 . . . . .	62
4.16	Simulação 5 . . . . .	62





# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Sequências Recursivas - A construção de Modelos aplicados à Matemática Financeira</b>	<b>25</b>
3.1	O conjunto dos números naturais e a Indução Matemática . . . . .	25
3.2	Sequências . . . . .	26
3.3	Recorrências . . . . .	27
3.3.1	Recorrências Lineares de Primeira Ordem . . . . .	27
3.3.2	Resolução de Equações de Recorrências Lineares de Primeira Ordem . . . . .	28
3.4	Progressões . . . . .	34
3.5	Juros Simples e Juros Compostos . . . . .	38
3.5.1	Conceitos Gerais . . . . .	39
3.5.2	Juros Simples a partir da Recorrência Linear . . . . .	39
3.5.3	Juros Compostos a partir da Recorrência Linear . . . . .	40
3.5.4	Juros Compostos em outros contextos . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Relato de Experiência</b>	<b>47</b>
4.1	Reflexões . . . . .	47
4.2	Características das Turmas . . . . .	48
4.3	Adaptação do Currículo do Estado de São Paulo . . . . .	48
4.4	Motivações para a escolha da atividade proposta . . . . .	49
4.5	Aplicação da Atividade . . . . .	50
4.6	Desenvolvimento do Conteúdo Matemático . . . . .	51
4.6.1	Sequências no Ensino Fundamental e Médio . . . . .	52
4.6.2	Leis de Recorrência na 1ª série . . . . .	54
4.6.3	Modelos – Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas . . . . .	56
4.6.4	Modelos – Juros Compostos em Diferentes Contextos . . . . .	57
4.6.5	Simulações no Excel . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>63</b>
	<b>Referências</b>	<b>65</b>



# 1 Introdução

Ao se ensinar Tópicos de Matemática Financeira no Ensino Médio, os modelos matemáticos inerentes a este conteúdo são, em geral, trabalhados mecanicamente – o aluno decora as fórmulas e aplica em exercícios padronizados – desconsidera, portanto, o seu processo de construção e, conseqüentemente, distancia-se da significação.

Nesse contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [4] alertam que se deve evitar a simples transposição analógica – memorização de exercícios e técnicas –, pois ela dispensa o pensar e o fazer matemático, o que torna o aluno passivo no processo, desmotivando-o. A insistência em manter, única e exclusivamente, este tipo de metodologia distancia o aluno de habilidades e competências a serem desenvolvidas durante o Ensino Médio, mais especificamente, a capacidade de elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações cotidianas, adquirindo, assim, uma compreensão de mundo da qual a Matemática é parte integrante.

O estudo das seqüências abre caminho para a discussão de vários conceitos matemáticos e possibilita, através de recursos algébricos, reconhecer e expressar a lei de formação de determinadas seqüências, generalizando-as. Segundo Panossian e Moura [5], os egípcios, os pitagóricos e os chineses antigos já apresentavam ideias sobre o estudo de seqüências, pois consideravam necessário entender fenômenos da natureza com vistas a estruturarem a vida cotidiana.

Para os autores, é possível identificar momentos em que as seqüências se apresentam como instrumentos da Matemática para apreensão da realidade fluente e outros em que as seqüências são tratadas e estudadas como conceitos próprios da Matemática, sendo, portanto, seu próprio objeto de estudo, como por exemplo, o detalhamento das Progressões Aritméticas e das Geométricas.

Na mesma linha de raciocínio, o Currículo do Estado de São Paulo [6] propõe o estudo simultâneo dessas seqüências através de "Situações de Aprendizagem" que objetivam, em um primeiro momento, que o tratamento conceitual se desfoque do formalismo algébrico para construção de significado real e importante das características da regularidade de cada seqüência. Somente posteriormente dar-se-á o tratamento formal utilizando-se do estudo sobre Juros Simples e Juros Compostos para justificar a necessidade de se construir um modelo para a Soma dos Termos das PAs e das PGs. Comumente, o estudo dos Juros Simples e Compostos são abordados distanciando-se de sua caracterização como PA e PG, respectivamente.

O material fornecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – "Caderno do Professor", que contém recomendações pedagógicas e respostas das atividades propostas no "Caderno do Aluno" (apostila semestral) – aborda Sequências Recursivas, Progressões Aritméticas e Geométricas, Juros Simples e Compostos, nesta ordem, porém a ideia da recursividade e de PA e PG são retomados constantemente em todo o

material, tornando o processo de ensino espiralado sem, portanto, haver fragmentação de seu conteúdo.

Apesar de o Currículo do estado de São Paulo propor em suas situações de aprendizagem um processo de construção não-fragmentado que permite, teoricamente, ao aluno, relacionar sequências em progressão a fórmulas que constituem a Matemática Financeira, o processo não é tão simples quando se está inserido no contexto da sala de aula. Além dos fatores já bastante discutidos pela sociedade – salas de aula lotadas, alunos desmotivados e, muitas vezes, indisciplinados, entre outros – existe, ainda, o despreparo do professor, pois o estudo de Sequências Recursivas raramente é contemplado na formação do professor de Matemática [7].

Exatamente por entender-me não preparada para as abordagens matemáticas propostas por [4] e [6], busquei, através de estudos bibliográficos, entender como se dá a construção de modelos matemáticos obtidos recursivamente. A partir desses estudos e a fim de contribuir para a minha prática em sala de aula realizei uma análise dos exercícios propostos no material do [6] trilhando o caminho que liga o estudo das Sequências à construção das fórmulas da Matemática Financeira. Por outro lado, fez-se necessário atrelar ao ensino das Sequências uma adaptação da ideia de Modelagem Matemática a fim de motivar os alunos a participarem do processo.

Seguindo as cinco etapas de Burak [8] para a aplicação de Modelagem Matemática no Ensino Médio, o tema escolhido foi a "Reforma da Previdência Social no Brasil" sob a visão de que, dada a instabilidade que se apresenta, é preciso buscar formas de se investir para garantir um futuro com qualidade de vida ao mesmo tempo que se deve buscar conhecer o funcionamento de investimentos e, também, financiamentos oferecidos no Brasil.

O objetivo é que, partindo do estudo de sequências definidas recursivamente, especialmente as sequências organizadas em Progressão Aritmética ou Geométrica até a construção das fórmulas dos Juros Simples e Compostos, esta última abordada em diferentes contextos, o aluno seja capaz, se não de construir, ao menos de entender como que as fórmulas, constantemente utilizadas, possuem seus fundamentos e importância na necessidade que a sociedade tem de representar-se matematicamente, além de entendê-la como essencial no desenvolvimento e uso das tecnologias utilizadas no dia a dia.

Assim, este trabalho apresenta, inicialmente, algumas considerações que acredito serem pertinentes para uma visão didático-pedagógica acerca do relato de experiência apresentado no último capítulo. Para tanto, o capítulo traz uma breve conceituação sobre a possibilidade de aplicação da Modelagem Matemática no Ensino Básico proposta por Burak [9] e discorro sobre a contribuição do uso da tecnologia para o processo de ensino-aprendizagem do aluno.

Em seguida, apresento um estudo sobre Sequências Recursivas, Recorrências Lineares e sua contribuição para a construção das Fórmulas dos Juros Simples e Compostos.

Apresento, na sequência, um relato de experiência de uma atividade aplicada na 1ª série do Ensino Médio, cujo objetivo foi complementar e dar maior significação às atividades sobre Sequências já trabalhadas em anos anteriores, porém a serem aprofundadas nessa série. A aplicação foi desenvolvida inteiramente sob a temática: "*A instabilidade da Previdência Social no Brasil – investir para um futuro melhor*" e ocorreu durante todo o segundo bimestre do ano de 2017 em uma escola estadual localizada na cidade de Piracicaba-SP.

Por fim, apresento as considerações finais.

## 2 Considerações Iniciais

A preocupação em tornar o processo de ensino-aprendizagem de Matemática eficiente na Educação Básica é um fator que inquieta professores comprometidos com sua prática pedagógica. Documentos oficiais tratam de prerrogativas inerentes ao trabalho do professor e diversas literaturas propõem ferramentas metodológicas que, teoricamente, capacitam-no para o cumprimento de seu papel de educador. Porém, de modo geral, apesar de haver grande preocupação em considerar todas as variáveis do processo, o que se nota é que estas só poderão ser analisadas pelo docente inserido em seu contexto escolar. Portanto, trabalhar uma disciplina tão complexa como a Matemática no Ensino Médio é um desafio ainda maior e requer do profissional, além de conhecimento abrangente de sua disciplina específica, o conhecimento de grande diversidade de métodos de ensino.

Apesar da aparente autonomia que os professores possuem em sala de aula, durante o Ensino Médio, o docente deverá propiciar um ambiente de ensino que desenvolva no aluno habilidades e competências previstas em documentos oficiais<sup>1</sup> e, portanto, seu planejamento de aula deverá contemplar muito mais que conteúdos matemáticos, mas também metodologias que o auxiliem no cumprimento de seus objetivos.

Nesse contexto, a Matemática, preconizada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [4], deve servir de instrumento para lidar com situações da vida cotidiana e contribuir para uma visão de mundo, formando cidadãos capazes de ler e interpretar a realidade de modo a desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Segundo o documento, deve-se evitar a simples transposição analógica – memorização de exercícios e técnicas –, pois ela dispensa o pensar e o fazer matemático, o que torna o aluno passivo no processo, desmotivando-o. A sugestão é que o professor proponha situações-problema relacionados ao dia a dia do aluno, que se configure em desafios capazes de estimulá-lo a construir estratégias mobilizando diferentes conhecimentos e levando-o a perseverar na busca da solução. De modo geral, o que se busca é que o aluno seja protagonista em seu processo de aprendizagem.

Consequentemente, cabe ao professor propiciar um cenário no qual os alunos desen-

---

<sup>1</sup>Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [4] e o Currículo do Estado de São Paulo [6], no caso dos professores que lecionam em escolas públicas deste Estado.

volvam a capacidade de representar e comunicar-se matematicamente, ou seja, capaz de reconhecer e de utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas específicas da Matemática; ler e interpretar informações, apresentadas em diferentes linguagens, como em tabelas, gráficos e equações; acompanhar e analisar informações, inclusive as veiculadas pela mídia, com criticidade matemática, compreendendo e emitindo juízos próprios.

Além disso, ao final do processo de aprendizagem, os alunos deverão estar aptos a investigar e a compreender situações-problema identificando, a partir daí, regularidades e, conseqüentemente, estabelecer regras, algoritmos e propriedades. De modo mais abrangente, deverá ser capaz de elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações cotidianas, adquirindo, assim, uma compreensão de mundo da qual a Matemática é parte integrante.

Por outro lado, inseridos em um contexto sociocultural, é necessário que se compreenda a construção do conhecimento matemático como processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época. Portanto, a compreensão das formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual e da responsabilidade social associada à aquisição e uso do conhecimento matemático deve nos mobilizar para diferentes ações, seja em defesa de nossos direitos como consumidor, dos espaços e equipamentos coletivos ou da qualidade de vida.

As habilidades e competências citadas acima são apenas parte de uma infinidade contemplada pelos PCNEM, porém o documento deixa claro que cabe à comunidade escolar estabelecer metas de acordo com sua realidade sociocultural. Essa flexibilização permite que se utilize a Modelagem Matemática, conforme adaptação promovida por Burak, como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Burak [9], a Modelagem Matemática é uma metodologia introduzida no Brasil por Bassanezi [10], na década de 80, que propõe o rompimento com o ensino através da "memorização de exercícios e técnicas". Para o autor, *"é comum observar-se, nos cadernos dos alunos de qualquer nível, 1º e 2º graus (sic), modelos e, a seguir, uma lista de exercícios relativos àqueles modelos"*.

D'Ambrósio [10] explica que a Modelagem Matemática

[...] constitui-se em um processo para se enfrentar situações, permitindo a solução efetiva do problema real e não uma simples resolução de um problema artificial.

Bassanezi, inicialmente, propõe a Modelagem Matemática como estratégia de ensino empregado a cursos superiores nos diversos campos da Ciência. Burak, orientado pelo próprio Bassanezi, apresenta uma adaptação dessa metodologia para se trabalhar com alunos do Ensino Médio e propõe, para tanto, cinco etapas de aplicação [8]:

- 1ª **Escolha do tema:** A escolha parte dos estudantes envolvidos, segundo o interesse que manifestam, pela curiosidade ou mesmo para a resolução de uma situação-problema. Os temas inicialmente podem não ter nada de Matemática e, muitas vezes os estudantes não têm muita noção do que realmente com o tema.
- 2ª **Pesquisa exploratória:** Uma vez escolhido o tema, dependendo do nível de ensino em que se esteja trabalhando, conhecer mais e melhor o assunto, buscar informações no local de interesse do grupo de pessoas envolvidas, além de ser uma

---

das premissas para o trabalho nessa visão de Modelagem, é uma etapa importante na formação de um estudante mais crítico para conhecer melhor alguma coisa, de forma a se organizar, saber o que e como enunciar questões produtivas.

- 3<sup>a</sup> **Levantamento dos problemas:** Os dados coletados na pesquisa exploratória dão sustentação à etapa de levantamento do problema relativo ao tema. É a etapa em que se inicia a ação matemática, propriamente dita, pois é o início do levantamento dos problemas, como resultado da pesquisa exploratória. Neste momento, o professor deve desenvolver no aluno a capacidade de articular os dados e formular problemas provindos da situação pesquisada e a capacidade de levantar e propor problemas, advindos dos dados coletados. É, sem dúvida, um privilégio educativo. Constitui-se nos primeiros passos para desenvolver no estudante a capacidade cidadã de traduzir e transformar situações do cotidiano em situações matemáticas. O desenvolvimento da autonomia do estudante perpassa pela liberdade de conjecturar, construir hipóteses, analisar as situações e tomar decisões.
- 4<sup>a</sup> **Resolução dos problemas e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema:** A resolução do problema confere à Modelagem Matemática a etapa em que se faz uso de todo o ferramental matemático disponível. Na resolução de um problema, os conteúdos matemáticos ganham importância e significado. Outro aspecto positivo e significativo para o estudante é a perspectiva de resolução do problema, diferente da forma encontrada na maioria dos livros textos. No contexto a resolução de problemas ganha contornos e significados diferentes, a forma ou maneira usual de se resolver problemas: os problemas são elaborados a partir dos dados coletados em campo; prioriza a ação do estudante na elaboração; parte sempre de uma situação contextualizada; favorece a criatividade; confere maior significado ao conteúdo matemático usado na resolução; favorece a tomada de decisão.
- 5<sup>a</sup> **Análise crítica das soluções:** Esta etapa possibilita tanto o aprofundamento de aspectos matemáticos como dos aspectos não matemáticos envolvidos no tema. Sob o aspecto da matemática pode-se analisar a coerência e a consistência lógica da solução encontrada. É uma etapa em que se discute com o grupo os cuidados com a linguagem, com as restrições que se fazem necessárias em muitas ocasiões. É um momento propício para se mostrar a importância de alguma formalização, de justificativa de procedimentos, enfim é um momento de interação, de trocas de ideias e de reflexões.

De modo geral, a Modelagem trata de propor aos alunos situações reais do seu cotidiano que despertem-lhes o interesse em utilizar Matemática como instrumento. O professor, hoje visto como o detentor do saber, atua como mediador, e o aluno passa a ser corresponsável pelo conhecimento desenvolvido. As diversas pesquisas mostram que, apesar da dificuldade do professor em aplicar integralmente o Método, os alunos sentem-se motivados, há melhor compreensão dos conceitos, ajuda a desenvolver o senso crítico e a autonomia.

Outro ponto a se considerar é o impacto do desenvolvimento tecnológico na sociedade; este exigirá do ensino de Matemática uma nova perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades, como selecionar e analisar informações e, a partir disso, tomar decisões e procedimentos e formas de pensar matemáticos com os



quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. Araújo [11] destaca, dentre outras tecnologias, a importância do uso do *software Excel* como ferramenta auxiliar no ensino da Matemática. A autora fundamenta sua pesquisa nos próprios PCNEM, que pressupõem

o impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. É necessário aprender continuamente em um processo coletivo, imerso em um mar de informações ligado a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos.

Para Bettiga (2010), citada por [11], novas informações jorram a todo instante pela televisão, pelo rádio e pela internet. As mudanças promovidas pelas Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) são marcantes e seus efeitos acabam se espalhando por todos os campos do saber e da vida humana.

Visto como ferramenta para o ensino da Matemática, o uso do *Excel* auxiliaria na elaboração de conjecturas, no estímulo à busca de regularidades, à generalização de padrões, à capacidade de argumentação que se configuram como elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.

Especificamente para professores do Ensino Básico e público do Estado de São Paulo, porém não restrito a estes, considerar-se-á o Currículo do Estado de São Paulo [6]. O documento estabelece que, no Ensino Médio, dentre outros objetivos, amplie-se a ideia das relações entre grandezas que dependem umas das outras, abrindo assim, portas para o estudo mais sistematizado de um tipo particular de interdependência, que são as funções. Estende-se, portanto, a ideia básica de proporcionalidade direta ou inversa para outros tipos de relações de interdependência.

Seguindo o que preconiza os PCNEM, o Currículo centraliza-se em uma estratégia muito fecunda que visa à problematização, à formulação e ao equacionamento de problemas, cuja tradução de situações concretas através de perguntas formuladas em diferentes contextos é transformada em equações a serem resolvidas e constituem, portanto, um poderoso exercício da capacidade de inquirir, de perguntar.

Consequentemente, as fontes principais de interesse não devem ser os próprios conteúdos disciplinares, mas se encontram, primordialmente, nas relações interdisciplinares – mais de uma disciplina se une em um projeto comum –, com um planejamento que as relacione, ou mesmo nas temáticas transdisciplinares, onde não há mais disciplinas segmentadas, mas o propósito da vida e do conhecimento é a relação complexa dos diversos saberes sendo que nenhum é mais importante que o outro.

Todas essas prerrogativas, estabelecidas pelos currículos, parecem tornar o processo de ensino-aprendizagem utópico e causam, no professor comprometido com sua prática pedagógica e com o cumprimento das metas estabelecidas<sup>2</sup>, certa ansiedade.

A realidade de uma escola é bastante complexa e seu funcionamento depende de muitas variáveis não contempladas em documentos oficiais ou até mesmo em literaturas

---

<sup>2</sup>A Secretaria da Educação do Estado de São Paulo estabelece metas anuais a serem alcançadas, cuja métrica se dá através de avaliações de Língua Portuguesa e Matemática aplicadas, também anualmente, a alunos do 5º e 9º do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio.

---

que sugerem diversas metodologias de ensino. Porém, o estudo dessas literaturas é importante, pois ter em mente os objetivos a serem alcançados pelo professor e conhecer uma variedade de estratégias passíveis de serem adotadas em um cenário construído por diversos contextos socioculturais, dentre os quais se destacam: salas de aula superlotadas, falta de materiais didáticos, desinteresse do aluno pela aprendizagem efetiva, omissão da família, entre outros problemas amplamente discutidos pela sociedade.

Neste sentido, as Diretrizes Curriculares para a formação de Professores para a Educação Básica citadas por Dias [12], esclarece que "ser professor"

[...] é um tipo de conhecimento que não pode ser construído de outra forma senão na prática profissional e de modo algum pode ser substituído pelo conhecimento "sobre" essa prática. Saber e aprender um conceito, ou uma teoria é muito diferente de saber e aprender exercer um trabalho. Trata-se, portanto, de aprender a "ser" professor. Perceber as diferentes dimensões do contexto, analisar como as situações se constituem e compreender como a atuação pode interferir nelas é um aprendizado permanente, na medida em que as questões são sempre singulares e novas respostas precisam ser construídas.[...]

Assim, cabe ao professor refletir continuamente sobre sua prática didático-pedagógica na busca por adequações a serem adotadas, visando sempre à aprendizagem do aluno. Neste sentido, as Diretrizes destacam que

[...] A competência profissional do professor é, justamente, sua capacidade de criar soluções apropriadas a cada uma das diferentes situações complexas e singulares que enfrenta. O conhecimento experiencial pode ser enriquecido quando articulado a uma reflexão sistemática. Constrói-se, assim, em conexão com o conhecimento teórico, na medida em que é preciso usá-lo para refletir sobre a experiência, interpretá-la, atribuir-lhe significado.

Todas essas questões que, em grande parte, responsabilizam o professor pelo sucesso do processo de ensino-aprendizagem, têm me colocado, durante uma década, em uma posição de constante busca por aprimoramento, tanto pedagógico quanto de formação específica, a fim de atender a todas as expectativas, especialmente as minhas.

Portanto, considerando as colocações feitas anteriormente, segue o resultado das pesquisas e das aplicações que se desenvolveram durante todo o processo.



# 3 Sequências Recursivas - A construção de Modelos aplicados à Matemática Financeira

## 3.1 O conjunto dos números naturais e a Indução Matemática

Antes de começarmos falar sobre sequências, devemos estabelecer algumas definições e propriedades pertinentes ao entendimento de recorrências, referentes ao conjunto dos números naturais, pois veremos mais adiante que uma sequência é definida como uma função de  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . As considerações aqui apresentadas são encontradas, mais detalhadamente, no livro "A Matemática do Ensino Médio – Volume 1"[13].

Essencialmente, um conjunto é caracterizado por seus elementos. Sendo mais comum, na Educação Básica, os conjuntos numéricos e os que derivam desses.

Denomina-se  $\mathbb{N}$  o conjunto cujos elementos são os números naturais que se caracterizam, essencialmente, pela ideia de "sucessão". Não há definição explícita para o conjunto  $\mathbb{N}$ . Porém, sabe-se que o mesmo foi descrito pelos Axiomas de Peano<sup>1</sup> apresentados a seguir:

- a) Todo número natural tem um único sucessor;
- b) Números Naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- d) Seja  $X$  um conjunto de números naturais (isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ . Se  $1 \in X$  e se, além disso, o sucessor de todo elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

Assim, tudo o que se sabe sobre números naturais pode ser demonstrado como consequências desses Axiomas. Com menor rigor matemático, podemos explicar cada elemento do conjunto dos números naturais: "*Cada número tem um sucessor único e, exceto o 1, tem também um antecessor (número do qual é sucessor)*". Essa descrição caracteriza o conjunto  $\mathbb{N}$  como números ordinários.

---

<sup>1</sup>Consulte biografia em [14], página 30

O último dos Axiomas – item d) supracitado – de Peano é conhecido como Axioma da Indução e será enunciado sob a forma de propriedades. Segue uma adaptação de [15]:

Seja  $P(n)$  uma sentença aberta sobre o número natural  $\mathbb{N}$  e  $s(n)$  o sucessor de  $n$ . Se valem as duas condições:

- (i)  $P(1)$  é verdadeira;
  - (ii) Para todo  $n$ , se  $P(n)$  é verdadeira, então  $P(s(n))$  é verdadeira;
- então  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Seja  $S = \{ n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ verdadeira} \}$ . Vamos mostrar que  $S = \mathbb{N}$ . Da hipótese (i) temos que  $1 \in S$ . Supondo que  $n \in S$ , temos que  $P(n)$  é verdadeira. Por (ii),  $P(s(n))$  é verdadeira. Logo,  $s(n) \in S$ . Assim,  $n \in S$  implica  $s(n) \in S$ . Pelo quarto Axioma de Peano (item d),  $S = \mathbb{N}$ . Logo,  $P(n)$  é verdadeira, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

As propriedades enunciadas acima são a base da demonstração de proposições referentes a números naturais, ditas Demonstração por Indução ou por Recorrência. Mais adiante utilizaremos tais propriedades para demonstrar que os Modelos Matemáticos obtidos recursivamente são válidos para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## 3.2 Sequências

Por uma questão de ordem, considere-se  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , ou seja, 0 não pertence ao conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais.

Abaixo, definiremos sequência segundo [13].

**Definição 3.1.** *Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais. Utilizaremos a notação  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  para definir a sequência, ou seja,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Assim,  $1 \rightarrow x_1, 2 \rightarrow x_2, \dots, n \rightarrow x_n$  caracteriza a função onde cada número natural  $n$  corresponde a um número real  $x_n$*

Assim, em [16] podemos ver que uma sequência nada mais é do que uma lista ordenada infinita de  $n$  números reais

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

em que  $x_1$  é o primeiro termo e  $x_n$  é o  $n$ ésimo termo ou termo de ordem  $n$ . Em que, se tratando de uma linha infinita, cada termo  $x_n$  tem o sucessor  $x_{n+1}$  e uma sequência pode ser representada pelo seu termo geral ou explicitando-se seus primeiros termos.

Muitas sequências são definidas recursivamente, ou seja, por uma "Lei de Recorrência". As definições apresentadas abaixo são encontradas em [13] ou [7].

**Definição 3.2.** *A Lei de Recorrência determina uma regra que permite calcular qualquer termo  $x_{n+1}$ , a partir do termo anterior  $x_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Definição 3.3.** *Para que uma sequência seja completamente definida por uma relação de recorrência, é necessário que sejam informados também os primeiros termos a partir dos quais os demais serão obtidos.*

**Definição 3.4.** *Uma relação de recorrência é linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é do 1º grau.*

### 3.3 Recorrências

De modo geral, a resolução de recorrências gera uma função – geralmente funções Lineares, Afim, Exponenciais ou Polinomiais – que depende apenas de  $n$ . Para tanto, é necessário conhecer ao menos um termo  $x_n$  dessa recorrência. Porém, existem recorrências que exigem o conhecimento de, ao menos, dois termos –  $x_1$  e  $x_2$  – para que se estabeleça uma fórmula que dependa apenas de  $n$ .

Os casos em que é necessário ter definidos os termos  $x_1$  e  $x_2$  são referentes a recorrências lineares de segunda ordem. Estas não serão contempladas neste trabalho por não possuírem aplicabilidade às leis de recorrências que serão apresentadas durante o desenvolvimento do texto matemático. Porém, o tema pode ser encontrado em [7] e [13].

#### 3.3.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

**Definição 3.5.** *As Recorrências são ditas lineares de primeira ordem quando a lei de recorrência  $x_{n+1}$  é expressa em função apenas de  $x_n$ .*

Consequentemente, as recorrências lineares de primeira ordem ficam completamente determinadas quando definido  $x_1$ . Essas são, ainda, classificadas como Homogêneas ou Não-Homogêneas.

**Definição 3.6.** *Recorrências lineares de primeira ordem são **homogêneas** quando não possuem termos independentes de  $x_n$ .*

**Definição 3.7.** *Recorrências lineares de primeira ordem são **não-homogêneas** quando não forem homogêneas.*

De modo geral, as recorrências lineares de primeira ordem são homogêneas quando  $x_{n+1} = f(n)x_n$  e são não-homogêneas quando  $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ . Seguem alguns exemplos a fim de ilustrar e, portanto, facilitar o entendimento das definições apresentadas.

**Exemplo 3.1.** São homogêneas as recorrências lineares de primeira ordem:

- $x_{n+1} = 2x_n$ ;
- $x_{n+1} = 5nx_n$ ;
- $x_{n+1} = 10^n x_n$

**Exemplo 3.2.** São não-homogêneas as recorrências lineares de primeira ordem:

- $x_{n+1} = 5x_n + 8$
- $x_{n+1} = 3nx_n - 2^n$
- $x_{n+1} = x_n + 10n$

**Exemplo 3.3.** Classifique e expresse os cinco primeiros termos da lei de recorrência  $x_{n+1} = x_n + 2$  definido  $x_1 = 2$ .

**Solução:**

Trata-se de uma recorrência linear de primeira ordem não-homogênea, pois possui termo independente de  $x_n$ .

$$x_1 = 2.$$

$$x_2 = x_1 + 2 = 2 + 2 = 4.$$

$$x_3 = x_2 + 2 = 4 + 2 = 6.$$

$$x_4 = x_3 + 2 = 6 + 2 = 8.$$

$$x_5 = x_4 + 2 = 8 + 2 = 10.$$

Então, os primeiros cinco termos do conjunto determinado por essa lei de recorrência são  $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ , ou seja,  $x_{n+1} = x_n + 2$  define o conjunto dos números pares.

**Exemplo 3.4.** Classifique e expresse os cinco primeiros termos da lei de recorrência  $x_{n+1} = 4nx_n$  definido  $x_1 = 1$ .

**Solução:**

Trata-se de uma recorrência linear de primeira ordem homogênea, pois não possui termo independente de  $x_n$ .

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = 4.1.x_1 = 4.1.1 = 4.$$

$$x_3 = 4.2.x_2 = 4.2.4 = 32.$$

$$x_4 = 4.3.x_3 = 4.3.32 = 384.$$

$$x_5 = 4.4.x_4 = 4.4.384 = 6144.$$

Então, os primeiros cinco termos do conjunto determinado por essa lei de recorrência são  $\{1, 4, 32, 384, 6144, \dots\}$ .

Uma vez definido  $x_1$  é possível calcular, um a um, todos os termos de uma recorrência, porém não há nenhuma praticidade no processo quando se deseja saber um termo  $x_n$  para  $n$  estritamente grande. Entretanto, é possível apresentar, como solução de uma lei de recorrência, uma função que dependa apenas de  $n$  possibilitando, assim, encontrar soluções para qualquer  $n$  muito rapidamente.

Apresentaremos, a seguir, a resolução de três casos de equações de recorrências lineares de primeira ordem.

### 3.3.2 Resolução de Equações de Recorrências Lineares de Primeira Ordem

**1º Caso:** Recorrência Homogênea  $x_{n+1} = f(n)x_n$ , definido  $x_1$ , com  $x_1 \neq 0$ .

$$x_2 = f(1)x_1.$$

$$x_3 = f(2)x_2.$$

$$x_4 = f(3)x_3.$$

$$\vdots$$

$$x_n = f(n-1)x_{n-1}.$$

Multiplicando as igualdades, teremos:

$$x_1.x_2.\cdots.x_n = x_1.f(1)x_1.f(2)x_2.\cdots.f(n-1)x_{n-1}.$$

$$x_n = x_1.f(1).f(2).\cdots.f(n-1).$$

$$x_n = x_1.\prod_{k=1}^{n-1} f(k).$$

**Observação 3.1.** O resultado da dedução acima está enunciado no teorema (3.1), a seguir, e realizar-se-á uma demonstração mais formal, utilizando o princípio da indução finita.

**Teorema 3.1.** Definido  $x_1$ , a solução da recorrência  $x_{n+1} = f(n)x_n$ , é  $x_n = x_1.\prod_{k=1}^{n-1} f(k)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Provemos, por indução, que  $x_n = x_1.\prod_{k=1}^{n-1} f(k)$  é válido para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

Tomando  $n = 2$ , temos que  $x_2 = x_1.\prod_{k=1}^{2-1} f(k)$ , logo  $x_2 = x_1.f(1)$ . Por outro lado, utilizando a lei de recorrência  $x_{n+1} = f(n)x_n$ , tem-se que  $x_2 = f(1)x_1$ .

De fato, é válido para  $n = 2$ . Supondo que o resultado seja válido para  $n$ , ou seja, que  $x_n = x_1.\prod_{k=1}^{n-1} f(k)$ , mostremos que é válido para  $n + 1$ , ou seja, que  $x_{n+1} = x_1.\prod_{k=1}^n f(k)$ .

Considerando a expressão  $x_n = x_1.\prod_{k=1}^{n-1} f(k)$ , multiplicando-se a ambos os lados  $f(n)$ , teremos

$$f(n)x_n = x_1.[\prod_{k=1}^{n-1} f(k)].f(n).$$

Como  $f(n)x_n = x_{n+1}$ , podemos reescrever a expressão acima

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1.f(1).f(2).\cdots.f(n-1).f(n) \\ x_{n+1} &= x_1.\prod_{k=1}^n f(k). \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da indução finita,  $x_n = x_1.\prod_{k=1}^{n-1} f(k)$ , é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Exemplo 3.5.** Resolva a equação de recorrência homogênea  $x_{n+1} = nx_n$ , sabendo que  $x_1 = 3$ , em seguida, calcule o termo  $x_{100}$

**Solução:** De acordo com a resolução genérica do 1º caso, tomando  $f(n) = n$  e  $x_1 = 3$ , tem-se:

$$x_n = 3.\prod_{k=1}^{n-1} k.$$

$$x_n = 3.(n-1)!.$$

Logo,  $x_{100} = 3.(100-1)! = 3.99!$ .

**2º Caso:** Recorrência Não-Homogênea  $x_{n+1} = x_n + f(n)$ , definido  $x_1$ .



$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + f(1). \\
x_3 &= x_2 + f(2). \\
x_4 &= x_3 + f(3). \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + f(n-1).
\end{aligned}$$

Somando as igualdades, teremos:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 + f(1) + x_1 + f(2) + x_2 + \cdots + f(n-1) + x_{n-1}.$$

$$x_n = x_1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Logo, a solução da equação de recorrência  $x_{n+1} = x_n + f(n)$  é  $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ .

**Observação 3.2.** O resultado da dedução acima está enunciado no teorema (3.2), a seguir, e realizar-se-á uma demonstração mais formal, utilizando o princípio da indução finita.

**Teorema 3.2.** Definido  $x_1$ , a solução da recorrência  $x_{n+1} = x_n + f(n)$ , é  $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Provemos, por indução, que  $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$  é válido para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

Tomando  $n = 2$ , temos que  $x_2 = x_1 + \sum_{k=1}^{2-1} f(k)$ , logo  $x_2 = x_1 + f(1)$ . Por outro lado, sendo  $x_{n+1} = x_n + f(n)$ , temos que  $x_2 = x_1 + f(1)$ .

De fato, é válido para  $n = 2$ . Supondo que o resultado seja válido para  $n$ , ou seja, que  $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ , mostremos que é válido para  $n + 1$ , ou seja, que  $x_{n+1} = x_1 + \sum_{k=1}^n f(k)$ .

Considerando a expressão  $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ , somando-se a ambos os lados  $f(n)$ , teremos

$$x_n + f(n) = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n).$$

Como  $x_n + f(n) = x_{n+1}$ , podemos reescrever a expressão acima

$$x_{n+1} = x_1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

$$x_{n+1} = x_1 + \sum_{k=1}^n f(k).$$

Logo, pelo princípio da indução finita,  $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ , é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exemplo 3.6.** Resolva a equação de recorrência não-homogênea  $x_{n+1} = x_n + 4^n$ , definido  $x_1 = 2$ , em seguida, calcule o termo  $x_{50}$ .

**Solução:**

De acordo com a resolução genérica do 2º caso, tomando  $f(n) = 4^n$  e  $x_1 = 2$ , tem-se:

$$x_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k.$$

Está claro que o somatório  $\sum_{k=1}^{n-1} 4^k$  expressa a soma dos termos de uma PG; porém, nesse momento, supomos desconhecidas as definições de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas. Ainda assim, é possível apresentar solução para a soma dos termos<sup>2</sup>.

$$x_n = 2 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1}. \tag{3.1}$$

Multiplicando a equação por 4, teremos:

$$4x_n = 8 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^n. \tag{3.2}$$

Subtraindo (3.1) de (3.2)

$$\begin{aligned} 3x_n &= 6 - 4^1 + 4^n. \\ x_n &= \frac{2 + 4^n}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } x_{50} = \frac{2 + 4^{50}}{3} = \frac{2 + 2^{100}}{3}$$

**3º Caso:** Recorrências não-homogêneas da forma  $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ , com  $x_n \neq 0$ .

A resolução apresentada para o 3º caso é encontrada em [7] que faz referência a [13].

Consideremos o teorema abaixo:

**Teorema 3.3.** *Se  $x_n$  é solução não nula da equação de recorrência  $a_{n+1} = g(n)a_n$ , então a substituição  $a_n = x_n y_n$ , transforma a recorrência  $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$  em  $y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)x_n}$ .*

*Demonstração.* Tomando  $a_n = x_n y_n$  e substituindo na equação  $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ , temos  $x_{n+1} y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$ .

Como, por hipótese,  $x_n$  é solução não nula de  $a_{n+1} = g(n)a_n$ , então  $x_{n+1} = g(n)x_n$ .

Substituindo  $x_{n+1} = g(n)x_n$  em  $x_{n+1} y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$  tem-se  $g(n)x_n y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$ .

Como  $g(n)x_n$  é não nulo, podemos dividir ambos os lados da igualdade  $g(n)x_n y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$  por  $g(n)x_n$ , logo  $y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)x_n}$ . □

---

<sup>2</sup>Sugiro que este método para a soma dos termos de uma PG, apesar de não contemplado no [6], seja trabalhado com o aluno do Ensino Médio a fim de facilitar, futuramente, o entendimento da construção do Modelo da soma dos termos de uma PG.

O objetivo da substituição acima é transformar a recorrência  $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$  em uma recorrência do tipo  $x_{n+1} = x_n + f(n)$  – resolvida no 2º caso – facilitando, assim, a resolução.

**Exemplo 3.7.** Resolva a equação de recorrência  $x_{n+1} = 3x_n + n3^n$

**Solução:** Iremos utilizar a substituição  $x_n = a_n y_n$ , onde  $a_n$  é uma solução da equação homogênea  $a_{n+1} = 3a_n$  e, para isso, devemos inicialmente resolver esta equação homogênea:

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1. \\ a_3 &= 3a_2. \\ a_4 &= 3a_3. \\ a_5 &= 3a_4. \\ &\vdots \\ a_n &= 3a_{n-1}. \end{aligned}$$

Logo, tem-se  $a_n = a_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} 3$ . Resolvendo o produtório, obtemos  $a_n = a_1 \cdot 3^{n-1}$ .

Tomando  $a_1 = 1$ , tem-se  $a_n = 3^{n-1}$ , substituindo esse em  $x_n = a_n y_n$ , então  $x_n = 3^{n-1} y_n$ .

Agora, substituindo  $x_n = 3^{n-1} y_n$  na recorrência inicial  $x_{n+1} = 3x_n + n3^n$ , encontramos

$$\begin{aligned} 3^n y_{n+1} &= 3 \cdot 3^{n-1} \cdot y_n + n3^n. \\ 3^n y_{n+1} &= 3^n y_n + n3^n. \\ y_{n+1} &= y_n + n. \end{aligned}$$

Logo, tem-se  $y_{n+1} = y_n + n$ . Utilizando o método apresentado no teorema (3.2), segue que  $y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$ . Vamos mostrar que o somatório é igual

$$y_n = y_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1). \quad (3.3)$$

Reescrevendo a soma

$$S_n = (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1. \quad (3.4)$$

Somando-se termo a termo, as equações (3.3) e (3.4), temos

$$2S_n = n + n + \cdots + n.$$

com  $(n - 1)$  parcelas iguais a  $n$ , logo

$$S_n = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Conclui-se que

$$y_n = y_1 + \frac{n \cdot (n - 1)}{2}.$$

**Observação 3.3.** A veracidade da afirmação de que a soma dos termos simétricos das equações (3.3) e (3.4) pode ser verificada no teorema (3.4).

Tendo encontrado  $a_n = 3^{n-1}$  e  $y_n = y_1 + \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ , podemos substituir na recorrência  $x_n = a_n y_n$ , assim  $x_n = 3^{n-1} \left[ y_1 + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \right]$ .

Como  $x_1 = 1$  encontramos  $y_1 = 1$  que, quando substituído na equação, obtém-se a solução da recorrência  $x_n = 3^{n-1} \left[ 1 + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \right]$ .

**3º Caso: – Situação Particular** – Recorrências não-homogêneas da forma  $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ , com  $g(n)$  e  $h(n)$  funções constantes e  $x_1$  definido.

Dada a recorrência  $x_{n+1} = s \cdot x_n + t$ , com  $s$  e  $t$  constantes reais, devemos encontrar um  $k$  tal que  $x_n = y_n + k$  torne a recorrência homogênea, cuja resolução é apresentada no caso 1.

Se  $x_n = y_n + k$ , então  $y_{n+1} + k = (y_n + k) \cdot s + t$ . Logo  $y_{n+1} = s \cdot y_n + sk - k + t$ .

Para tornar  $y_{n+1}$  homogênea, basta tomar  $(s - 1)k + t = 0$ . Portanto  $k = \frac{-t}{s-1}$ , para todo  $s \neq 1$ .

Resolvendo a recorrência  $y_{n+1} = s \cdot y_n$ , tem-se  $y_n = y_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} s$ . Logo,  $y_n = y_1 \cdot s^{n-1}$ .

Substituindo  $y_n$  em  $x_n$ , teremos  $x_n = y_1 \cdot s^{n-1} - \frac{t}{s-1}$ .

Como  $x_1$  está definido é possível calcular  $y_1$ . Segue que,

$$x_1 = y_1 \cdot s^0 - \frac{t}{s-1}.$$

$$y_1 = \left[ x_1 + \frac{t}{s-1} \right].$$

Substituindo  $y_1$  em  $x_n$ .

$$x_n = \left[ x_1 + \frac{t}{s-1} \right] \cdot s^{n-1} - \frac{t}{s-1}.$$

$$x_n = x_1 \cdot s^{n-1} + \frac{t}{s-1} \cdot s^{n-1} - \frac{t}{s-1}.$$

## 3.4 Progressões

**Progressões** é uma série de números ou de quantidades que derivam sucessivamente umas das outras segundo uma mesma lei, ou seja, de acordo com o que foi estudado anteriormente, trata-se de uma lei de recorrência.

No campo da Matemática, há duas progressões que se destacam, dadas suas aplicabilidades, as Progressões Aritméticas e as Progressões Geométricas.

Ressalte-se que, apesar de estar apresentando uma seção introdutória do assunto, no Ensino Médio, sugiro realizar a introdução a essas progressões naturalmente, utilizando sua lei de recorrência como parte integrante do assunto Recorrência e, apenas depois, expor ao aluno a relevância desse tema, bem como suas propriedades.

### Termo Geral de uma Progressão Aritmética

**Definição 3.8.** *Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , onde cada termo a partir do segundo é dado pela recorrência  $x_{n+1} = x_n + r$ , com  $r$  constante e  $r \neq 0$ .*

A definição acima trata de uma lei de recorrência do tipo  $x_{n+1} = x_n + f(n)$ , resolvida no 2º caso apresentado anteriormente. Notemos que, neste caso, temos  $f(n) = r$ , ou seja, a função  $f(n)$  é constante.

Logo, utilizando-se o 2º caso para resolver a equação de recorrência, tem-se que

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} r$$

$$x_n = x_1 + (n - 1)r$$

Dizemos que  $x_n = x_1 + (n - 1)r$  é o **Termo Geral da Progressão Aritmética**,  $x_1$  é chamado primeiro termo e  $r$ , de razão da PA.

### Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

As PAs são, como vimos anteriormente, exemplos particulares de recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas do tipo  $x_{n+1} = x_n + f(n)$  com  $f(n) = r$ . Na resolução de muitos problemas que recaem em uma progressão deste tipo faz-se necessário calcular a soma de seus termos, ou seja, a solução é expressa por  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ .

Em geral, os materiais didáticos trabalhados com aluno do Ensino Médio realizam esta soma após apresentar um história na qual uma criança<sup>3</sup>, por volta dos dez anos, teria somado todos os termos da sequência  $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$  em poucos minutos, após perceber que os resultados da soma dos números que ocupavam posições simétricas na sequência resultavam sempre no mesmo valor.

**Teorema 3.4.** *Dada uma sequência  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  em progressão aritmética temos a soma de termos que ocupam posições simétricas na sequências expressam sempre o mesmo resultado.*

<sup>3</sup>O Matemático a que se refere a história é Carl Friedrich Gauss (1777-1855) – garoto prodígio. [17]

*Demonstração.* Tomando a soma dos termos simétricos de uma sequência  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  em progressão aritmética, temos  $(x_1 + x_n), (x_2 + x_{n-1}), (x_3 + x_{n-2}), \dots, (x_k + x_{n-(k-1)})$ , com  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Provemos que  $(x_k + x_{n-(k-1)}) = (x_1 + x_n)$  para todo  $k$ .

Como  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  é uma PA, temos que  $x_k = x_1 + (k - 1)r$  - Termo Geral da PA -, da mesma forma que  $x_{n-(k-1)} = x_1 + (n - (k - 1) - 1)r$ . Então

$$\begin{aligned} & (x_k + x_{n-(k-1)}) \\ = & x_1 + (k - 1)r + x_1 + (n - (k - 1) - 1)r \\ = & x_1 + kr - r + x_1 + nr - kr \\ = & x_1 + (x_1 + nr - r) \\ = & (x_1 + [x_1 + (n - 1)]r) \\ = & x_1 + x_n \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.1.** *A soma dos termos de uma PA,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , cuja lei de formação é dada por  $x_{n+1} = x_n + f(n)$  sendo  $f(n) = r$  a razão é dada pela fórmula  $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$*

*Demonstração.* Considere  $S_n$  a soma dos  $n$  termos dessa sequência, ou seja,

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \quad (3.5)$$

Podemos inverter a ordem da sequência sem que o resultado  $S_n$  seja modificado. Assim, temos

$$S_n = x_n + x_{n-1} + \dots + x_2 + x_1. \quad (3.6)$$

Somando (3.3) a (3.4), de modo que os termos simétricos sejam agrupados, teremos

$$2S_n = (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1} + \dots + (x_k + x_{n-(k-1)}))$$

Como  $(x_1 + x_n) = (x_k + x_{n-(k-1)})$  para todo  $k$ , podemos reescrever  $S_n$ .

$$2S_n = (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + \dots + (x_1 + x_n).$$

Logo,

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$$

□

O modelo encontrado para a soma dos termos da PA é, mais comumente, demonstrado usando indução, como segue abaixo.

**Teorema 3.5.** *A soma dos  $n$  termos de uma sequência em progressão aritmética é  $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$ . Onde  $S_n$  é a soma dos  $n$  termos,  $x_1$ , primeiro termo,  $x_n$  é o  $n$ ésimo termo e  $n$ , o número de termos da sequência.*

*Demonstração.* Provemos, por indução, que  $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$  é válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Tomando  $n = 1$ , temos que  $S_1 = \frac{(x_1 + x_1) \cdot 1}{2}$ , logo  $S_1 = x_1$ .

De fato, é válido para  $n = 1$ . Supondo que o resultado seja válido para  $n$ , ou seja, que  $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$ , mostremos que é válido para  $n + 1$ , ou seja, que  $S_{n+1} = \frac{(x_1 + x_{n+1}) \cdot (n + 1)}{2}$ .

Considerando a expressão  $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$ , somando-se a ambos os lados  $x_{n+1}$ , teremos

$$S_n + x_{n+1} = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2} + x_{n+1}.$$

Como  $S_n + x_{n+1} = S_{n+1}$ , podemos reescrever a expressão acima

$$S_{n+1} = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n + 2x_{n+1}}{2}.$$

Vamos mostrar que  $(x_1 + x_n) \cdot n + 2x_{n+1} = (n + 1) \cdot (x_1 + x_{n+1})$ .

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_n) \cdot n + 2x_{n+1} \\ &= nx_1 + nx_n + 2(x_1 + nr) \\ &= nx_1 + \{n[x_1 + (n - 1)r] + x_1 + nr\} + (x_1 + nr) \\ &= nx_1 + [nx_1 + n^2r - nr + nr] + x_1 + (x_1 + nr) \\ &= nx_1 + n(x_1 + nr) + x_1 + x_{n+1} \\ &= nx_1 + nx_{n+1} + x_1 + x_{n+1} \\ &= (n + 1)x_1 + (n + 1)x_{n+1} \\ &= (n + 1)(x_1 + x_{n+1}). \end{aligned}$$

Assim,

$$S_{n+1} = \frac{(x_1 + x_{n+1}) \cdot (n + 1)}{2}.$$

Logo, pelo princípio da indução finita,  $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$   $\square$

## Termo Geral de uma Progressão Geométrica

**Definição 3.9.** Uma Progressão Geométrica é uma sequência  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , onde cada termo a partir do segundo é dado pela recorrência  $x_{n+1} = x_n \cdot q$ , com  $q$  constante e  $q \neq 0$ .

A definição acima trata de uma lei de recorrência do tipo  $x_{n+1} = x_n \cdot f(n)$ , resolvida no 1º caso apresentado anteriormente. Notemos que  $f(n) = q$ , logo  $f(n)$  é constante.

Assim, utilizando-se o 1º caso para resolver a equação de recorrência, tem-se que

$$x_n = x_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} q$$

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$$

Dizemos que  $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$  é o **Termo Geral da Progressão Geométrica**,  $x_1$  é chamado primeiro termo e  $q$ , razão da PG.

## Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Finita

**Teorema 3.6.** A soma de todos os  $n$  termos de uma PG Finita é dada por  $S_n = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ , para todo  $q \neq 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Provemos, por indução, que  $S_n = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$  é válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Tomando  $n = 1$ , temos que  $S_1 = x_1 \cdot \frac{1 - q^1}{1 - q}$ , logo  $S_1 = x_1$ .

De fato, é válido para  $n = 1$ . Supondo que o resultado seja válido para  $n$ , ou seja, que  $S_n = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ , mostremos que é válido para  $n+1$ , ou seja, que  $S_{n+1} = x_1 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

Considerando a expressão  $S_n = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ , somando-se a ambos os lados  $x_{n+1}$ , teremos

$$S_n + x_{n+1} = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} + x_{n+1}.$$

Como  $S_n + x_{n+1} = S_{n+1}$  e  $x_{n+1} = x_1 q^n$ , podemos reescrever a expressão acima

$$S_{n+1} = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} + x_1 q^n.$$

$$S_{n+1} = \frac{x_1(1 - q^n) + (1 - q)x_1 q^n}{1 - q}.$$

$$S_{n+1} = \frac{x_1 - x_1 q^n + x_1 q^n - x_1 q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$S_{n+1} = \frac{x_1 - x_1 q^{n+1}}{1 - q}.$$



$$S_{n+1} = x_1 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Logo, pelo princípio da indução finita,  $S_n = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Observação 3.4.** O teorema (3.6) é um dos poucos a ser demonstrado para alunos do Ensino Médio, porém não por indução finita. Segue a demonstração que, em geral, é apresentada.

*Demonstração.* Reescrevendo a sequência  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  em função de  $x_1$ , temos

$$x_1, x_1q, x_1q^2, \dots, x_1q^{n-1}.$$

Considere  $S_n$  soma dos  $n$  termos da PG, então

$$S_n = x_1 + x_1q + x_1q^2 + \dots + x_1q^{n-1}. \quad (3.7)$$

Multiplicando (3.5) por  $q$ , obteremos

$$qS_n = x_1q + x_1q^2 + x_1q^3 + \dots + x_1q^n. \quad (3.8)$$

Subtraindo (3.5) de (3.6), temos

$$(1 - q) \cdot S_n = x_1(1 - q^n).$$

$$S_n = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ para todo } q \neq 1.$$

Assim, a soma de todos os  $n$  termos de uma PG Finita é dada por  $S_n = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ , para todo  $q \neq 1$ .  $\square$

## 3.5 Juros Simples e Juros Compostos

Nesta seção, passaremos a considerar  $\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , portanto, incluiremos 0 (zero) no conjunto dos Números Naturais. Denotaremos por  $x_0$  aplicações/empréstimos realizados no tempo zero, ou seja, quando não decorrido tempo algum. Nos distanciaremos, em um primeiro momento, da linguagem aplicada à Matemática Financeira; assim, a linguagem aqui adotada será a mesma apresentada anteriormente. Consideraremos, ainda,  $n \in \mathbb{N}$  onde  $n$  representará período de tempo preestabelecido não permitindo fracioná-lo, ou seja, pagar-se-á o juro apenas para períodos inteiros de tempo.

### 3.5.1 Conceitos Gerais

Segundo Assaf Neto [18], a Matemática Financeira trata do estudo do valor ao longo do tempo, ou seja, analisa e compara os diversos fluxos de entrada e saída de dinheiro – Fluxo de Caixa – em diferentes momentos. Nesse contexto, Juros equivalem à recompensa paga pela postergação de uma entrada de caixa e induzem o adiamento do consumo ao permitir formação de poupança e de novos investimentos.

De modo menos formal, Sá [19] explica que Juros é a remuneração exigida na utilização de um capital de terceiros e complementa que juros recebidos representam um rendimento – é o caso em que se aplica o dinheiro em poupanças ou em outros investimentos oferecidos pelo mercado –, e os juros pagos representam um custo – pagos a bancos quando se realizam financiamentos de bens móveis, imóveis ou empréstimos, por exemplo.

O cálculo do valor a ser pago é realizado a partir de uma **Taxa de Juros**, definida por [19], como sendo a razão entre o valor dos juros de um período e o capital emprestado ou aplicado. Para Neto, o valor dessa taxa deverá considerar o risco envolvido conforme a incerteza com relação ao futuro, a perda de poder de compra e o capital emprestado ou aplicado. Dessa forma, é a taxa de juros que determina qual será a remuneração do fator capital durante certo período de tempo.

Considerar-se-á  $x_0$  o capital investido/emprestado,  $i$  a taxa de juros unitária – rendimento de cada unidade de capital, ou seja,  $i \in \mathbb{R}_+^*$  – cobrada a cada período  $n$ , sendo  $n$  em anos, semestres, meses, semanas, ou outros períodos de tempo; conseqüentemente, os juros recebidos/pagos serão  $x_0 \cdot i$ .

No caso dos juros simples, os juros recebidos/pagos são constantes, dado que a taxa de juros incide apenas sobre o capital investido/emprestado, ou seja, não se aplica aos juros recebidos/pagos. Enquanto que, nos Juros Compostos, a taxa incidirá, inclusive sobre os juros.

### 3.5.2 Juros Simples a partir da Recorrência Linear

Retomando os conceitos acima, os juros  $x_0 \cdot i$ , onde  $x_0$  é o capital inicial investido, são pagos ao credor a cada  $n$  período de tempo. Assim, podemos representar essa situação pela lei de recorrência  $x_{n+1} = x_n + x_0 \cdot i$ , em que  $x_n$  é o saldo no início do período correspondente.

Matematicamente, a seqüência  $x_1, x_2, \dots, x_k$  com  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  representa a quantia a ser recebida pelo credor considerando o período  $n$  do investimento.

Note que,  $x_{n+1} = x_n + x_0 \cdot i$  é uma recorrência não-homogênea com  $f(n) = x_0 \cdot i$ , ou seja,  $f(n)$  é constante, logo, a seqüência  $x_1, x_2, \dots, x_k$  é uma progressão aritmética. Tem-se, portanto, que a solução da recorrência, apresentada no 2º caso, é

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^n x_0 \cdot i.$$

$$x_n = x_0 + nx_0 \cdot i.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1 + n \cdot i).$$

**Exemplo 3.8.** Qual a quantia final de uma aplicação de R\$ 5.000,00 a juros simples contratados a uma taxa de 1,5% ao mês, por 1 ano?

**Solução:**

$$i = 1,5\% = 0,015 \text{ a.m.}$$

$$n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses.}$$

$$x_0 = 5000$$

$$x_{12} = 5000 \cdot (1 + 0,015 \cdot 12) = 5000 \cdot 1,18 = 5900$$

Logo, a quantia final a ser recebida será de R\$ 5.900,00, sendo R\$ 5.000,00 referentes à aplicação inicial e, R\$ 900,00 referente aos juros.

### 3.5.3 Juros Compostos a partir da Recorrência Linear

São raras as operações financeiras e comerciais que adotam o regime de Juros Simples. Este restringe-se principalmente às operações praticadas no curto prazo, pois possui muitas restrições técnicas. Dessa forma, os Juros Compostos é o regime de capitalização comumente praticado no mercado. Neste regime, incorpora-se ao capital, juros sobre juros, ou seja, a taxa de juros incidirá sempre sobre o saldo apurado no início do período correspondente e não, unicamente, sobre o capital inicial [18].

Neste modelo, os juros  $x_n \cdot i$ , onde  $x_n$  é o saldo apurado no início do período, são pagos ao credor a cada  $n$  período de tempo. Assim, podemos representar essa situação pela lei de recorrência  $x_{n+1} = x_n \cdot i + x_n$ , ou seja,  $x_{n+1} = x_n \cdot (1 + i)$ .

Matematicamente, a sequência  $x_1, x_2, \dots, x_k$  com  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  representa a quantia a ser recebida pelo credor considerando o período  $n$  do investimento.

Note que, diferentemente dos Juros Simples, a lei de recorrência  $x_{n+1} = x_n \cdot (1 + i)$  é homogênea com  $f(n) = (1 + i)$ , ou seja,  $f(n)$  é constante e  $x_0$  – capital inicial – é definido; logo, a sequência  $x_1, x_2, \dots, x_k$  é uma progressão geométrica. Tem-se, portanto, que a solução da recorrência, apresentada no 1º caso, é

$$x_n = x_0 \cdot \prod_{k=1}^n (1 + i).$$

$$x_n = x_0 \cdot (1 + i)^n.$$

**Exemplo 3.9.** Qual valor a ser sacado de uma aplicação de R\$ 12.000,00 em um título pelo prazo de 8 meses a taxa de juros composta de 0,6% ao mês?

**Solução:**

$$x_0 = 12000,00$$

$$n = 8 \text{ meses}$$

$$i = 0,6\% = 0,006 \text{ a.m}$$

$$x_8 = 12000 \cdot (1 + 0,006)^8 = 12.588,24$$

Logo, a quantia final a ser recebida será de R\$ , sendo R\$ 12.588,24 referentes à aplicação inicial e, R\$ 588,24 referente aos juros.

### 3.5.4 Juros Compostos em outros contextos

#### Investimentos com Depósitos Fixos Mensais

Existem várias opções de investimento, oferecidas por instituições financeiras. O modelo encontrado acima considera uma única aplicação  $x_0$  durante todo o período de aplicação. Porém, existem aplicações nas quais se realizam depósitos de valores variáveis em diferentes momentos, como no caso da Poupança, por exemplo.

Mais comumente, tanto as taxas de juros quanto os valores depositados periodicamente são fixos, como no caso de financiamentos de bens de consumo, empréstimos ou investimentos em alguns títulos de capitalização. Deter-nos-emos ao caso presente, em detrimento do primeiro, haja vista este ser facilmente modelado.

Esse tipo de investimento faz uso do regime dos juros compostos; porém, a taxa incidirá sobre o saldo apurado até o momento, somado ao valor depositado no início do período correspondente. Dessa forma podemos considerar a lei de recorrência  $x_{n+1} = x_n \cdot (1+i) + d_n$ , onde  $x_n$  é o saldo apurado no início do período e  $d_n$  trata-se do depósito de valor fixo realizado periodicamente a partir do primeiro período  $n$ , ou seja,  $n = 1$ .

A recorrência apresentada para modelar este tipo de investimento é uma recorrência linear de primeira ordem não-homogênea do tipo  $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ , porém trata-se do tipo particular apresentado no 3º caso da seção de resolução de recorrências, pois  $g(n) = (1+i)$  e  $h(n) = d_n$  são funções constantes. Segue a solução, utilizando o caso particular:

#### Solução:

Seja  $x_n = x_1 \cdot s^{n-1} + \frac{t}{s-1} \cdot s^{n-1} - \frac{t}{s-1}$  a solução do caso particular, podemos tomar  $s = (1+i)$  e  $t = d_n$ . Logo,

$$x_n = x_1 \cdot (1+i)^{n-1} + \frac{d_n}{(1+i) - 1} \cdot (1+i)^{n-1} - \frac{d_n}{(1+i) - 1}.$$

$$x_n = x_1 \cdot (1+i)^{n-1} + \frac{d_n}{i} \cdot (1+i)^{n-1} - \frac{d_n}{i}.$$

Como  $x_0$  está definido, então  $x_1 = x_0 \cdot (1+i) + d_n$  também está definido. Substituindo  $x_1$  na equação, teremos

$$x_n = [x_0 \cdot (1+i) + d_n] \cdot (1+i)^{n-1} + \frac{d_n}{i} \cdot (1+i)^{n-1} - \frac{d_n}{i}.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n + d_n \cdot (1+i)^{n-1} + \frac{d_n}{i} \cdot (1+i)^{n-1} - \frac{d_n}{i}.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n + \frac{[d_n i + d_n] \cdot (1+i)^{n-1}}{i} - \frac{d_n}{i}.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n + \frac{d_n \cdot (1+i) \cdot (1+i)^{n-1}}{i} - \frac{d_n}{i}.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n + \frac{d_n}{i} \cdot (1+i)^n - \frac{d_n}{i}.$$

Temos, então, que o modelo matemático que representa o tipo de investimento com depósitos fixos e periódicos é  $x_n = x_0 \cdot (1+i)^n + \frac{d_n}{i} \cdot (1+i)^n - \frac{d_n}{i}$ , onde  $x_0$  representa depósito inicial,  $d_n$ , o valor dos depósitos feitos a cada período  $n$  e  $i$ , a taxa de juros praticada.

**Exemplo 3.10.** Rose, 35 anos, está preocupada com a instabilidade por que passa a Previdência Social no Brasil. Decidiu, então, iniciar uma aplicação na Poupança, cuja taxa de juros média atual é de 0,6% ao mês. A pretensão é possuir renda complementar à da aposentadoria social, que se dará, se a regra vigente permanecer, aos 50 anos. Fará, para tanto, um depósito inicial de R\$ 5000,00; com posteriores depósitos fixos mensais de R\$ 300,00. Considerando que a taxa de juros média permaneça a mesma, qual saldo que Rose terá ao final dos 15 anos de aplicação?

### Solução:

Utilizando a fórmula  $x_n = x_0 \cdot (1+i)^n + \frac{d_n}{i} \cdot (1+i)^n - \frac{d_n}{i}$  e tomando  $x_0 = 5000$ ,  $i = 0,006$  a.m,  $n = 180$  meses e  $d_n = 300$  segue que

$$x_n = 5000 \cdot (1 + 0,006)^{180} + \frac{300}{0,006} \cdot (1 + 0,006)^{180} - \frac{300}{0,006}.$$

$$x_n = 5000 \cdot (1,006)^{180} + \frac{300}{0,006} \cdot (1,006)^{180} - \frac{300}{0,006}$$

$$x_n = 14.675,96 + 146.759,60 - 50.000$$

$$x_n = 111.435,56$$

Ao completar 50 anos, Rose terá saldo de R\$ 111.435,56.

### Investimentos com Retiradas Fixas Mensais

Após realizar investimento, o investidor terá algumas alternativas em relação ao saldo da aplicação. Poderá sacar integralmente, em geral, para compra de bens móveis ou imóveis; realizar saques esporádicos, conforme a necessidade; ou programar-se para realização de saques de valores fixos e periódicos, como é o exemplo de alguns planos de previdência complementar.

Por outro lado, existe a alternativa de se realizar o saque integral da aplicação e o mesmo ser reaplicado, parcial ou integralmente, em um plano em que se incidam juros periódicos sobre o saldo aplicado na poupança, por exemplo. Nesse caso, seria possível realizar saques fixos e periódicos, porém continuaria a incidir uma taxa de juros sobre o saldo residual do investimento. Modelaremos este último caso.

Seja  $x_0$  o saldo ao se encerrar o período de aplicação e decidindo, a partir do próximo período  $n$ , realizar saques  $s_n$  fixos e periódicos deixando o saldo residual  $x_n$  depositado a uma taxa  $i$  capitalizada, também, a cada período  $n$ , temos que a lei de recorrência que modela este processo é  $x_{n+1} = x_n \cdot (1+i) - s_n$ .

A lei de recorrência  $x_{n+1} = x_n \cdot (1+i) - s_n$  é linear de primeira ordem não-homogênea, ou seja,  $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ . Como  $g(n) = (1+i)$  e  $h(n) = s_n$ , ambas funções constantes, concluímos tratar-se da situação particular apresentada no 3º caso. Logo, podemos resolvê-la utilizando-se o mesmo processo adotado no caso dos investimentos com depósitos fixos e periódicos.

**Solução:**

Seja  $x_n = x_1 \cdot s^{n-1} + \frac{t}{s-1} \cdot s^{n-1} - \frac{t}{s-1}$  a solução do caso particular, podemos tomar  $s = (1+i)$  e  $t = -s_n$ . Logo,

$$x_n = x_1 \cdot (1+i)^{n-1} + \frac{-s_n}{(1+i)-1} \cdot (1+i)^{n-1} - \frac{-s_n}{(1+i)-1}.$$

$$x_n = x_1 \cdot (1+i)^{n-1} - \frac{s_n}{i} \cdot (1+i)^{n-1} + \frac{s_n}{i}.$$

Como  $x_0$  está definido, então  $x_1 = x_0 \cdot (1+i) - s_n$  também está definido. Substituindo  $x_1$  na equação, teremos

$$x_n = [x_0 \cdot (1+i) - s_n] \cdot (1+i)^{n-1} - \frac{s_n}{i} \cdot (1+i)^{n-1} + \frac{s_n}{i}.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n - s_n \cdot (1+i)^{n-1} - \frac{s_n}{i} \cdot (1+i)^{n-1} + \frac{s_n}{i}.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n - \frac{[s_n i + s_n] \cdot (1+i)^{n-1}}{i} + \frac{s_n}{i}.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n - \frac{s_n \cdot (1+i) \cdot (1+i)^{n-1}}{i} + \frac{s_n}{i}.$$

$$x_n = x_0 \cdot (1+i)^n - \frac{s_n}{i} \cdot (1+i)^n + \frac{s_n}{i}.$$

Temos, então, que o modelo matemático que representa o tipo de investimento com retiradas fixas e periódicas é  $x_n = x_0 \cdot (1+i)^n - \frac{s_n}{i} \cdot (1+i)^n + \frac{s_n}{i}$ , onde  $x_0$  representa saldo inicial,  $s_n$ , o valor das retiradas realizadas a cada período  $n$  e  $i$ , a taxa média de juros praticada na operação.

**Exemplo 3.11.** Voltando ao caso da Rose, abordado no exemplo anterior, caso nossa personagem decida deixar o saldo aplicado na poupança, cuja taxa média é de 0,6% ano mês, realizando saques mensais fixos de R\$1500,00 a fim de complementar a renda da aposentadoria social. Considerando que não haja outros saques intermediários, quanto tempo levará para que o saldo residual seja zerado?

**Solução:**

Utilizando a fórmula  $x_n = x_0 \cdot (1+i)^n - \frac{s_n}{i} \cdot (1+i)^n + \frac{s_n}{i}$  e tomando  $x_0 = 111.435,56$ ,  $i = 0,006$  a.m.,  $s_n = 1500$ . Como queremos calcular  $n$  quando  $x_n = 0$ , segue que

$$0 = 111.435,56.(1 + 0,006)^n - \frac{1500}{0,006} \cdot (1 + 0,006)^n + \frac{1500}{0,006}.$$

$$0 = [111.435,56 - \frac{1500}{0,006}].(1,006)^n + \frac{1500}{0,006}.$$

$$0 = -138.564,44.(1,006)^n + 250.000.$$

$$250.000 = 138.564,44.(1,006)^n.$$

$$\frac{250.000}{138.564,44} = 1,006^n.$$

$$1,8042 \simeq 1,006^n.$$

Aplicando log a ambos os lados da equação, temos

$$\log 1,8042 \simeq \log 1,006^n.$$

$$n \simeq \frac{\log 1,8042}{\log 1,006}.$$

$$n \simeq \frac{0,2563}{0,0026}.$$

$$n \simeq 98,6 \text{ meses.}$$

Rose poderá realizar saques de R\$ 1.500,00 por, aproximadamente, 8 anos e 2 meses, sendo que, no 99º mês, caber-lhe-á sacar o saldo residual, zerando a conta.

**Observação 3.5.** Cabe observar que, apesar da utilização de logaritmo para resolver o problema acima, o aluno do Ensino Médio, neste momento, não tem conhecimento deste conteúdo. Pode-se, portanto, confeccionar uma tabela para diferentes valores de  $n$  cujos cálculos devem ser realizados na calculadora científica. Caberá ao professor direcionar o aluno para o intervalo de meses em que provavelmente  $n$  estaria.

## Séries Uniformes

O grande problema em Matemática Financeira é o deslocamento de quantias no tempo. Deslocar estas quantias no tempo ocorre, comumente, quando parcelamos um bem ou serviço. Um conjunto de quantias (parcelas ou pagamentos) referidas a épocas diversas é chamado de série. Se as parcelas forem fixas e igualmente espaçadas no tempo, dizemos tratar-se de uma Série Uniforme [13].

De modo geral, um bem ou serviço é adquirido hoje, porém o valor a ser pago por ele será parcelado de modo que a quitação ocorra ao fim do prazo de parcelamento. Claramente, o credor que dispos de quantia  $Q$ , hoje, não deverá receber, depois de  $n$  períodos de tempo, a mesma quantia  $Q$ , pois considerar-se-á o valor do dinheiro no tempo ou o credor terá prejuízo.

Consideremos, então, uma compra efetuada hoje, cujo valor do bem seja de  $D_0$ , ou seja, o comprador possui, hoje, uma dívida cujo saldo devedor é  $D_0$  e o primeiro de  $P$  pagamentos será realizado após um período  $n$ . Teremos que considerar o valor de  $D_0$  após decorrido o período  $n$ , ou seja, o valor do dinheiro no tempo  $n$ . Após o

pagamento da primeira parcela, que não quitará o bem adquirido, o saldo devedor será de  $D_0 \cdot (1 + i) - P$ , onde  $i$  é taxa estipulada pelo credor para cada período  $n$ .

Uma lei de recorrência que modela a situação apresentada é  $x_{n+1} = x_n \cdot (1 + i) - P$ , onde  $x_n$  expressa o saldo devedor no início de cada período  $n$ ,  $P$  o valor da parcela fixa e  $i$  a taxa de juros estipulada que retrata o valor do dinheiro a cada período de tempo  $n$ .

Logo, o modelo a ser apresentado para esta situação é o mesmo utilizado para modelar o caso anterior – investimentos com retiradas mensais fixas. Dessa forma, realizar-se-á apenas a mudança do símbolo  $s_n$ , que passará a ser  $P$  e ressignificaremos  $x_n$ , que passa a ser o valor residual da dívida, conseqüentemente,  $x_0$  é o valor inicial da dívida. Logo,

$$x_n = x_0 \cdot (1 + i)^n - \frac{P}{i} \cdot (1 + i)^n + \frac{P}{i}.$$

A ideia implícita nesses casos é que  $x_n$  seja zerado, ou seja, a dívida seja integralmente quitada. Assim, fazendo  $x_n = 0$ , teremos

$$0 = x_0 \cdot (1 + i)^n - \frac{P}{i} \cdot [(1 + i)^n - 1].$$

$$x_0 \cdot (1 + i)^n = \frac{P}{i} \cdot [(1 + i)^n - 1].$$

$$i = \frac{P}{x_0} \cdot \left[ \frac{(1 + i)^n}{(1 + i)^n} - \frac{1}{(1 + i)^n} \right].$$

$$i = \frac{P}{x_0} \cdot [1 - (1 + i)^{-n}].$$

Podemos, ainda, escrever

$$P^{-1} = \frac{1}{x_0 \cdot i} \cdot [1 - (1 + i)^{-n}].$$

**Exemplo 3.12.** Isaías comprou um aparelho de celular, cujo valor à vista é de R\$ 900,00. Como não dispunha desse montante para pagar no ato, o vendedor ofereceu-lhe parcelar o pagamento em 6 vezes, porém, cobrará uma taxa de juros de 6% ao mês, sendo apenas a primeira paga no ato da compra. Qual o valor da parcela a ser paga mensalmente por Isaías?

**Solução:**

Neste caso, devemos perceber que apenas o saldo residual da compra será financiado, ou seja, será deslocado no tempo. Assim,  $x_0 = 900 - P$ ,  $i = 0,06$ ,  $n = 5$ . Segue que

$$900 - P = \frac{P}{0,06} \cdot [1 - (1 + 0,06)^{-5}].$$



$$900 - P = \frac{P}{0,06} \cdot 0,2527.$$

$$900 - P = 4,2124.P.$$

$$900 = 5,2124.P.$$

$$P = \frac{900}{5,2124}.$$

$$P = 172,66.$$

Assim, Isaías pagará 1 entrada mais 5 parcelas de R\$ 172,66, ou seja, pagará pelo produto um total de R\$ 1.035,99.

**Observação 3.6.** Muitas peças publicitárias divulgam parcelamentos supostamente sem juros, porém, o que acontece é que a empresa vendedora embute os juros sobre o valor do produto à vista. Por exemplo: no caso do celular vendido ao Isaías, ao invés de divulgar o produto por R\$ 900,00, o mesmo seria divulgado por R\$ 1.035,99 e o hipotético parcelamento sem juros seria em 6 vezes de R\$ 172,66. Algumas, no caso do Brasil, não oferecem desconto para pagamento à vista e, quando o fazem, costumam oferecer entre 3% e 5%; ou seja, o celular à vista – considerando-se o desconto máximo, de 5% – seria, nesse caso, R\$ 984,19.

# 4 Relato de Experiência

## 4.1 Reflexões

Em 2017, foram-me atribuídas quatro turmas da 1<sup>a</sup> série do Ensino Médio. Propus-me a buscar metodologias para a realização de um trabalho que motivasse o aluno, contribuindo para a sua formação como jovens protagonistas em seu ambiente escolar e, futuramente, em seu meio social, capazes de interagir com a Matemática, atribuindo-lhe real significado a fim de que a mesma fosse instrumento para aplicação e análise em situações cotidianas às quais seria submetido durante a vida e, com isso, subsidiassem decisões em seu contexto social e econômico.

Era o momento propício para analisar meu trabalho, desenvolvido nos dois anos anteriores, na busca por criar um ambiente que favorecesse à aprendizagem dos meus alunos e a manter a motivação que alguns deles traziam do Ensino Fundamental. Cabe informar que uma turma era reduzida – apenas 30 alunos – por conter um aluno especial, portador de Síndrome de Down.

Busquei criar um cenário que atendesse a tal objetivo, utilizando diferentes metodologias em diferentes momentos do ano letivo e, muitas vezes, fazendo adaptações a propostas pedagógicas para mesclar algumas delas de modo que houvesse aprendizagem efetiva por parte dos alunos.

Ressalte-se que a essa altura eu iniciara a disciplina de Modelagem Matemática, que compunha a grade curricular do Mestrado Profissional em Matemática para o Ensino Médio – Profmat. Logo percebi que poderia adaptar para o aluno do Ensino Médio a abordagem metodológica proposta por Bassanezi [10] para o Ensino Superior. Em estudos posteriores, encontrei autores que já haviam realizado essa adaptação [9] e que traziam diferentes propostas de aplicação para a sala de aula.

É pertinente esclarecer que em momento algum esse trabalho visa a narrar uma aplicação de Modelagem Matemática ou qualquer outra metodologia isoladamente. Ele narra uma experiência com alunos da 1<sup>a</sup> série do Ensino Médio com a qual ocorreu uma mescla de várias propostas metodológicas apresentadas por diferentes autores estudados por mim ao longo do curso universitário, da pós-graduação e da vida profissional, que auxiliaram na minha reflexão sobre as práticas empregadas por mim em sala de aula em oito anos de trabalho docente exclusivamente em escolas públicas estaduais.

A modelagem matemática, a utilização de tecnologias, o trabalho em grupo, a interdisciplinaridade, a iniciação científica, o protagonismo do jovem diante da aprendizagem etc. estão intrínsecos na experiência que levou um grupo de alunos – não ligados aos programas de iniciação científica conveniados com a escola ou a escolas de ensino integral – a participarem de um Decatlo para escolas públicas de Piracicaba representando as quatro turmas da 1<sup>a</sup> série, que tinham aula de matemática comigo, e

que havia desenvolvido a atividade narrada aqui brevemente.

## 4.2 Características das Turmas

Iniciei, como todos os professores fazem, realizando uma avaliação diagnóstica que pretendia, além de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos nas séries anteriores, aferir a interação com as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), pois na turma da 1ª série para qual lecionei em 2016, nenhum dos alunos havia trabalhado com *Excel*, *Geogebra* ou outro *software* matemático.

Nesse contexto, os alunos que haviam tido aula comigo no ano anterior traziam na bagagem familiaridade com a tecnologia e com a aprendizagem contextualizada; enquanto que o restante, alunos matriculados naquele ano, tinha conhecimento matemático tradicional – aplicação de fórmulas e técnicas de resolução –, alguns tinham familiaridade com a resolução de problemas.

As turmas traziam consigo indícios de motivação e bom comprometimento com a disciplina – acredito que o comportamento apresentado se deve ao fato de a turma já conhecer meu trabalho, pois lecionei para eles no 9º ano do Ensino Fundamental e havia uma expectativa de que eu permanecesse com as turmas na 1ª série do Ensino Médio. O desafio desse ano seria manter e aproveitar este "estado de espírito" a fim de promover a aprendizagem como prevista no PCNEM – além de conceitual, que seja capaz de formar cidadãos aptos a conviver, contestar e a transformar o meio em que vivem.

## 4.3 Adaptação do Currículo do Estado de São Paulo

Por se tratar de uma atividade desenvolvida no Estado de São Paulo, os conteúdos, as habilidades e as competências a serem trabalhadas no primeiro semestre constam do Currículo [6], cuja utilização é obrigatória, porém as recomendações pedagógicas abrem margem a adaptações que o professor achar pertinentes.

O material pedagógico é organizado em Sequências Didáticas, cuja ideia construtivista está parcialmente implícita e aborda superficialmente: Sequências em diferentes contextos; Progressões Aritméticas; Progressões Geométricas; Juros Simples e Compostos; Funções Afins e Lineares; Funções Exponenciais e termina com Funções Quadráticas.

A atividade proposta aos alunos contemplou a maior parte dos conteúdos a serem trabalhados durante o 1º semestre letivo.

Sob uma temática única – A Previdência Social no Brasil: investir para garantir renda extra ao chegar à 3ª idade – trabalharam-se modelos matemáticos (Fórmulas) a partir da análise de sequências matemáticas construídas recursivamente, em especial, algumas fórmulas associadas ao cálculo de juros compostos em diferentes contextos. Consequentemente, a narrativa abordará Sequências, Progressões Geométricas e Juros Compostos e Funções Exponenciais – estas últimas, apesar de trabalhadas pelo aluno em diferentes momentos, não foram conceituadas como Função Exponencial, sendo esta definição realizada em oportunidade posterior ao trabalho.

## 4.4 Motivações para a escolha da atividade proposta

O tema escolhido para ser trabalhado com os alunos foi "A instabilidade da Previdência Social no Brasil – Investir para um futuro melhor". Havia grande preocupação e uma discussão muito ampla à época, em âmbito nacional, quanto à aposentadoria – Reforma da Previdência Social – paga pelo INSS (Instituto Nacional de Seguridade Social), fato que motivou a escolha do tema para o trabalho, pois até mesmo os alunos da 1ª série já estavam falando sobre o assunto, em suas conversas paralelas – em um momento inoportuno, do ponto de vista da temática da aula –, apesar de não entenderem exatamente do que se tratava, mas sabiam que seus pais, por exemplo, estavam preocupados.

Ponderei ser melhor interromper a aula para discutirmos o tema tão em voga naquele momento. Fiz uma explanação sobre Modelagem Matemática e a pertinência de conciliar este método em cima do tema que eles tanto queriam conhecer. Isso ocorreu na turma da 1ª série C, considerada "desmotivada e descomprometida" com a aprendizagem. Após a decisão de se adotar o tema, as demais turmas se envolveram no processo.

Então, estruturamos uma atividade que, sob meu ponto de vista, realizasse a passagem do conhecimento de sequências em progressões geométricas para a dedução de fórmulas matemáticas pertencentes ao conteúdo de Matemática Financeira e, do ponto de vista dos alunos, que respondessem às suas inquietações. Entrevistar os idosos, por exemplo, foi uma das ideias apresentadas pelos alunos.

Basicamente, ficou combinado que os alunos buscariam entender a importância do conhecimento de matemática para tomar decisões quanto a investimentos a longo prazo – proposta feita por mim – e realizariam a passagem do conhecimento de progressões geométricas para as funções exponenciais, além de analisar situações-problema apresentadas no contexto social a partir de pesquisas para entender quem são e como vivem os aposentados em Piracicaba - SP.

Para tanto, o trabalho deveria seguir um roteiro composto por cinco etapas: pesquisa bibliográfica sobre a Previdência Social (auxiliados, também, pelo professor de Sociologia); entrevista com aposentados e gerentes de bancos; análise matemática de investimentos a longo prazo; digitação do trabalho conforme normas da ABNT, composta por uma produção textual na modalidade dissertativo-argumentativa (orientados pelo professor de Língua Portuguesa) e apresentação de um seminário.

Note que as etapas acima são uma adaptação das etapas apresentadas por Burak [8].

Ao professor de Sociologia coube abrir uma discussão sobre o tema "Mudanças no cálculo da previdência social no Brasil" à luz dos conceitos trabalhados nessa disciplina, bem como os acontecimentos políticos e sociais da época e principais mudanças que ocorreram após a criação da aposentadoria no Brasil. Enquanto que, ao de Língua Portuguesa, trabalhar os principais elementos de um texto dissertativo.

Inicialmente, os alunos mostraram-se resistentes, e logo disseram que era muito extenso, complicado, e que não conseguiriam realizar a atividade dentro do prazo estabelecido nem tampouco dentro do padrão de qualidade que eu, em geral, exigia em atividades propostas; mas, logo ao iniciar a atividade, a grande maioria mostrou-se empolgada com as aulas e com o tema, principalmente após a conversa com idosos, haja vista os resultados terem sido surpreendentes, causando grande repercussão tanto

na escola como na comunidade.

Tal repercussão culminou no convite feito pela Diretoria de Ensino para que o trabalho fosse adaptado para exposição em uma competição de trabalhos nos moldes de Iniciação Científica na Universidade Metodista de Piracicaba – Unimep. Para tanto, cinco alunos foram selecionados, inclusive um da 3ª série do Ensino Médio – pois era pré-requisito; a estes alunos coube a tarefa de sintetizar os trabalhos feitos pelas quatro turmas da 1ª série, bem como aprofundar o tema.

## 4.5 Aplicação da Atividade

Durante o processo de construção do trabalho, utilizaram o *Excel* como ferramenta essencial na simulação, comparação e análise gráfica de investimentos. O *Word* e o *Power Point* para digitação e exposição, respectivamente, dos resultados. A internet para pesquisas bibliográficas, simulações de investimentos em *sites* de bancos, entre outros. O Geogebra, para representação de gráficos após a conjectura das fórmulas.

Dentro do contexto da Previdência Social, os alunos entenderam que há diferença quanto à idade da mulher e do homem para aposentar-se e os possíveis motivos para isso; a existência de diferentes modalidades de aposentadoria, por idade, invalidez, tempo de contribuição ou pensão por morte, por exemplo; no caso do tempo por contribuição, entenderam que há regras – as vigentes e as propostas – e como elas funcionam para aquisição do benefício.

No que se refere à experiência vivenciada junto aos idosos, através de entrevistas e visitas, entenderam o tipo de benefício que cada pessoa conseguiu dentro de suas especificidades; se o valor do benefício recebido supre suas necessidades básicas – típicas da 3ª idade ou da deficiência – e agrega qualidade de vida ao aposentado; se houve preocupação e possibilidade de se realizar investimento(s) que servisse(m) de renda complementar para essa fase da vida e o impacto da aposentadoria nas finanças – se houve mudança no padrão de vida após a aposentadoria, bem como se, na visão do aposentado, o valor recebido seria justo.

Em visitas aos bancos ou em *sites* bancários, o aluno conheceu alguns investimentos a longo prazo destinados à pessoa física: poupança e previdência privada; como se constituem, quais são as taxas e os principais elementos do contrato. Puderam optar por fazer outras pesquisas sobre investimentos: tesouro direto e investimento em ações, por exemplo, foram temas abordados superficialmente por alguns alunos.

O capítulo de Matemática foi construído passo a passo em conjunto – professor e aluno. Os tópicos trabalhados – não necessariamente na ordem apresentada – trataram de simulações de investimentos na poupança e previdência privada realizadas inicialmente utilizando calculadora científica e, posteriormente, o *Excel*. A simulação de casos concretos direcionou às conjecturas dos modelos – termo geral da PG, soma dos termos de uma PG finita, juros compostos, dentre outros. Quando de posse das fórmulas, utilizaram o Geogebra para a confecção dos gráficos para análise comparativa dos investimentos na poupança e na previdência privada. Todas as fórmulas conjecturadas foram trabalhadas, também, em outros exercícios propostos não relacionados diretamente ao tema do trabalho.

A digitação do trabalho foi realizada no *Word* utilizando a ferramenta auxiliar *Microsoft Equation*, para escrever a parte matemática, seguindo as normas da ABNT, inclusive, as que dizem respeito à legenda de gráficos, figuras e tabelas. Nas considerações finais, desenvolveram um texto dissertativo-argumentativo considerando os

investimentos estudados e o contexto social em que se inserem os aposentados entrevistados, ou seja, justificar matemática e socialmente, a escolha do tipo de investimento que fariam, ou, se não fariam.

Por fim, a apresentação do trabalho foi realizada em *Power Point*, e alguns grupos puderam expor as entrevistas em vídeo, realizadas com os idosos, deixando claro ao público qual decisão havia sido tomada no momento da redação, a partir da qual entregaram o trabalho escrito, como preconizam as normas da ABNT.

## 4.6 Desenvolvimento do Conteúdo Matemático

Nesta seção, apresento uma síntese das atividades, de cunho matemático, trabalhadas com os alunos.

Apesar de haver um planejamento de quais objetivos alcançar ao final do processo e quais conteúdos deveriam ser contemplados, não houve, necessariamente, uma abordagem na qual se seguiam tópicos a serem trabalhados. Muitas decisões pedagógicas tiveram de ser tomadas durante o processo, geralmente porque os alunos, adquirindo novos conhecimentos, principalmente após conversas com os pais ou com os idosos, apresentavam muitas indagações e, portanto, abriam-se, constantemente, discussões sobre outras temáticas que, sempre que possível, eu associava à Matemática.

Um dos casos discutidos tratava de investir em imóveis para alugar em vez de colocar dinheiro na poupança ou previdência privada, por exemplo. O fator que gerou essa discussão foi a entrevista realizada com um pedreiro aposentado – aposentou-se por idade, pois não contribuía periodicamente para a previdência – que construiu, durante mais de quarenta anos de profissão, vinte e três casas – a maioria, casas de dois ou três cômodos agrupadas em um mesmo terreno. O aluguel das casas rende em torno de R\$ 5.000,00 (cinco mil reais) e complementam uma aposentaria de R\$ 957,00 (novecentos e cinquenta e sete reais) – um salário mínimo. Realizaram-se, então, algumas simulações nesse sentido.

Cronologicamente, o conteúdo matemático iniciou-se a partir do entendimento de diversos tipos de sequências construídas recursivamente. Em seguida limitou-se à exploração das características das sequências em progressão – aritmética ou geométrica –, e conjecturou-se o termo geral das PAs e das PGs. Para se trabalhar a aplicação técnica dos modelos encontrados, utilizou-se da fórmula para descobrir outros termos da sequência – inclusive sequências que exploravam aplicação de juros sobre algum capital –, fez-se necessário então conjecturar a fórmula da soma dos termos de uma PA e também de uma PG.

Realizaram-se simulações dos investimentos, mês a mês, agregando a percepção de que os valores encontrados tratavam do montante a ser sacado no mês de referência. Conjecturaram a fórmula do montante a ser sacado tanto para investimentos com depósitos únicos quanto para investimentos com depósitos mensais fixos sem retiradas e, por fim, construiu-se o modelo para o cálculo das retiradas mensais.

Assim como já mencionado, seguir o Currículo, em especial o Caderno do Aluno, é obrigatório. Logo, fez-se necessário adaptar o tema escolhido às Situações de Aprendizagens contidas na apostila do 1º semestre. Apresento, portanto, a seguir, algumas propostas de atividades trabalhadas.

### 4.6.1 Sequências no Ensino Fundamental e Médio

O estudo das Sequências consta no material didático do Estado de São Paulo, a partir do 8º ano. Porém, os alunos relatam que os professores das séries anteriores não costumam trabalhar as sequências ou, quando o fazem, "corrigem" sem que eles tenham tentado resolvê-las.

Por este motivo, para iniciar o estudo de Sequências – Situação de Aprendizagem 1 – com a 1ª série do Ensino Médio, retorno aos "Cadernos do Aluno" dos anos anteriores e monto uma lista de exercícios contendo diversas sequências retiradas desses materiais. O objetivo é o de apresentar as diferentes formas para encontrar o modelo matemático que descreve a sequência. Seguem alguns exemplos dessas sequências.

#### Exemplo 1 – Sequência 1

4. Observe a sequência de bolinhas e crie duas fórmulas que expressem o total de bolinhas em função do número da figura. (**Observação:** chame o número da figura de  $n$ .)

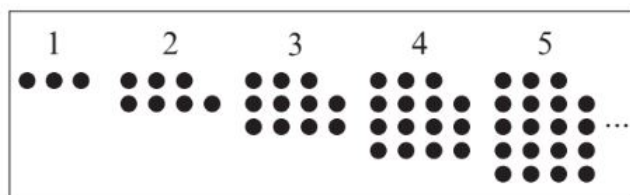


Figura 4.1: Exercício 1 – Sequência

Fonte: Caderno do Professor [1] – 8º ano – 1º semestre, 2014, p. 44.

Como sugestão para resolução, as recomendações pedagógicas da Secretaria Estadual da Educação apresentam dois métodos:

#### Método 1 - Decomposição

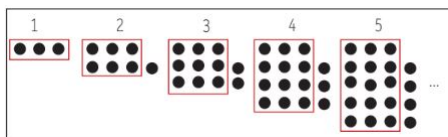


Figura 4.2: Recomendação Pedagógica

Fonte: Caderno do Professor [1] – 8º ano – 1º semestre, 2014, p. 44.

O aluno fecha retângulos de 3 colunas e conta as linhas notando que o número de linhas é igual ao número da posição em que se encontra a figura, ou seja,  $n$ , por outro lado, conta as bolinhas restantes e nota que há sempre uma a menos que o número da posição. Assim, o aluno conclui que há  $3n + (n - 1)$  bolinhas na  $n$ ésima posição.

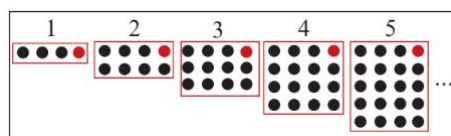


Figura 4.3: Recomendação Pedagógica

Fonte: Caderno do Professor [1] – 8º ano – 1º semestre, 2014, p. 44.

### Método 2 - Completamento

Neste método, o aluno completa a figura, de modo a torná-la um retângulo. Ele então calcula o número de bolinhas fazendo *linha*  $\times$  *coluna* e subtrai a quantidade de bolinhas que acrescentou. Logo,  $4n - 1$  bolinhas na  $n$ ésima posição.

### Método 3 - Montar Tabela

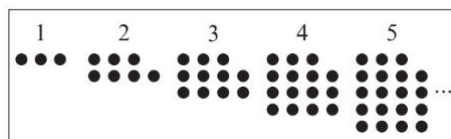


Figura 4.4: Sequência

Fonte: Caderno do Professor [1] – 8º ano – 1º semestre, 2014, p. 44.

Posição	Quantidade de bolinhas
1	3
2	3 + 4
3	3 + 4 + 4
4	3 + 4 + 4 + 4
...	...
10	3 + 4.9
...	...
20	3 + 4.19
...	...
n	3 + 4.(n - 1)

Figura 4.5: Tabela contagem recursiva

Fonte: Imagem gerada pela autora.

Claramente, as equações  $3 + 4.(n - 1)$ ,  $4n - 1$  e  $3n + (n - 1)$  são equivalentes entre si.

O método recursivo, nesses casos, não é proposto pela Secretaria, porém utilizo nos 9ºs anos e 1ª série do Ensino Médio, por entender que, em muitas sequências propostas, os dois métodos iniciais são de difícil entendimento para o aluno.

**Observação 4.1.** Como parte de minha experiência de dois anos junto a alunos do 8º ano, posso afirmar que deixá-los livres para encontrar padrões é uma experiência muito rica. Valorizar o raciocínio de cada aluno torna-os confiantes e motivados a apresentar soluções diversas a este tipo de exercício, conseqüentemente, é possível trabalhar a equivalência entre as equações encontradas de modo significativo.



## Exemplo 2 – Sequência 2

Na sequência abaixo, apresentada ao 9º ano do EF como introdução para as equações do 2º grau, o aluno deverá modelar o número de diagonais de um polígono qualquer. O mesmo exercício é encontrado no material do 8º ano, porém reformulado. Outras sequências, bastante interessantes, podem ser encontradas nesses materiais, como os números triangulares, os quadrangulares, os pentagonais, número de ângulos internos de um polígono, entre outros, e as mesmas costumam se repetir em séries diferentes e em contextos diferentes.

A sugestão para o 8º ano é que se construam os polígonos iniciais; para o 9º, espera-se ser desnecessária a construção das figuras, porém, dificilmente é. Neste exercício, raramente o aluno chega à fórmula, inclusive na 1ª série.

5. A diagonal de um polígono convexo é o segmento que une dois vértices não consecutivos. Por exemplo: na figura a seguir, os vértices C, D, E, F e G não são consecutivos ao vértice A.

b) Complete a tabela apresentada a seguir

Número de lados de um polígono	Número de diagonais de um polígono
3	0
4	2
5	
6	
7	
...	...
n	

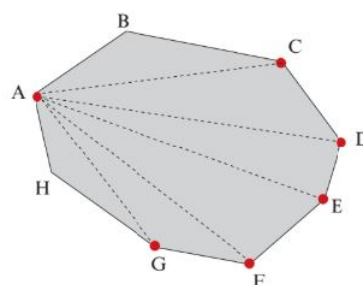


Figura 4.6: Sequência: Número de diagonais de um polígono.

Fonte: Caderno do Professor [2] – 9º ano – 1º semestre, 2014, p. 89.

A sugestão é deixar que o aluno conte todas as diagonais e depois, orientado pelo professor, perceba que as diagonais  $AB$  e  $BA$  são um único segmento de reta.

A partir da confecção da tabela, não é difícil levar o aluno à conclusão de que o número de diagonais é dado por  $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ .

**Observação 4.2.** O *exemplo 1* pode ser descrito pela lei de recorrência  $x_{n+1} = x_n + 4$  com  $x_1 = 3$ , além de ser uma progressão aritmética. O *exemplo 2* pode ser descrito pela lei de recorrência  $x_{n+1} = x_n + (n - 1)$  com  $x_4 = 2$ , ou seja, sendo  $n$  o número de lados ou vértices, tem-se  $n \geq 4$ . Na lista inicial da 1ª série, trabalhada com os alunos, o exemplo 2 foi resolvido como apresentado aqui, porém, foi retomado e resolvido por recorrência após terem aprendido a somar os termos de uma progressão aritmética.

### 4.6.2 Leis de Recorrência na 1ª série

Como vimos, é oportuno aos alunos desde o 8º ano desenvolver a habilidade de observar padrões e relacioná-los a leis matemáticas. Na 1ª série aparecem, pela primeira vez, leis de recorrência, porém isso ocorre em poucos exercícios.

Neste primeiro, pede para se obter os cinco primeiros termos.

**6. Considere as sequências dadas por seus termos gerais:**

**I)**  $a_n = 4 \cdot n + 1$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ;

**II)**  $a_n = 4 \cdot n^2 - 1$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ;

**III)**  $a_1 = 2$  e  $a_n = a_{n-1} \cdot 3$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ;

**IV)**  $a_1 = 2$  e  $a_n = a_{n-1} + 3$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

Figura 4.7: Exercícios: Termo Geral e Lei de Recorrência

Fonte: Caderno do Professor [3] – 1ª Série – 1º semestre, 2014, p. 27.

Note que, apenas os itens III e IV são leis de recorrências, os itens I e II são os termos gerais.

Em uma segunda aparição, e novamente em meio a termos gerais, o material pede para identificar os primeiros termos e classificar a sequência como PA ou PG.

**8. Considere as sequências:**

**I)**  $a_n = 3 \cdot n + 1$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ;

**II)**  $a_n = 3 \cdot n^2 - 1$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ;

**III)**  $a_n = 3 \cdot n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ;

**IV)**  $a_1 = 3$  e  $a_n = a_{n-1} \cdot 2$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ;

**V)**  $a_1 = 3$  e  $a_n = a_{n-1} + 2$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

Determine os cinco primeiros termos de cada sequência e destaque a razão daquelas que forem PGs ou PAs.

Figura 4.8: Exercícios: Termo Geral e Lei de Recorrência

Fonte: Caderno do Professor [3] – 1ª Série – 1º semestre, 2014, p. 27.

Note que não se solicita a resolução da lei de recorrência, além disso, não há mais atividades que tratam do assunto. Apesar disso, resolvi, com os alunos da 1ª série do Ensino Médio de 2017, todas as sequências recursivamente, inclusive nas atividades propostas paralelamente ao que era proposto no Caderno e que, visavam a desenvolver o tema da Previdência Social.

Os modelos apresentados a seguir foram desenvolvidos após serem trabalhadas uma infinidade de sequências a título de exemplo e situações-problema relacionados ao contexto social do aluno, sem se falar em Termo Geral de Progressões, Soma dos Termos das Progressões ou Fórmulas de Juros Compostos. Todo esse processo fez com que alguns alunos fossem capazes de desenvolver os modelos que seguem, por si só, outros por intermédio do professor e outros, ainda, não demonstraram dificuldade em entender as

variáveis contidas nos modelos depois de terem sido corrigidos na lousa pelo professor. Segue, assim, a maneira como foram construídos pelos alunos.

### 4.6.3 Modelos – Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Os exemplos abaixo são, na verdade, exercícios propostos para os alunos, inclusive nas avaliações formais. As construções, em sua maioria, foram feitas a partir de discussões conjuntas: aluno-aluno, aluno-professor e turma-professor.

**Exemplo 4.1.** Considere  $a_1$  o primeiro termo de uma sequência, a partir daí soma-se  $r$  para se encontrar cada um dos termos seguintes, ou seja,  $a_2$  é a soma do termo  $a_1$  a  $r$ , o  $a_3$  é a soma do termo  $a_2$  também a  $r$  e assim por diante. Determine o  $n$ ésimo termo desta sequência.

#### Solução:

Inicialmente contruímos detalhadamente para que a maior parte dos alunos entenda.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1. \\ a_2 &= a_1 + r. \\ a_3 &= a_1 + r + r. \\ a_4 &= a_1 + r + r + r. \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + r + r + \dots + r. \end{aligned}$$

Para melhorar a visualização e trabalhar a capacidade de generalizar, somamos os "r", apagamos e reescrevemos, realizando "adivinhações" para valores maiores de  $n$ .

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1. \\ a_2 &= a_1 + 1r. \\ a_3 &= a_1 + 2r. \\ a_4 &= a_1 + 3r. \\ &\vdots \\ a_{10} &= a_1 + 9r. \\ &\vdots \\ a_{20} &= a_1 + 19r. \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n - 1)r. \end{aligned}$$

Concluiu-se, então, que o  $n$ ésimo termo é  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ . Denominou-se,  $a_1$  como sendo o primeiro termo e  $r$  a razão. Finalmente, apresentou-se o modelo como sendo o **Termo Geral de uma Progressão Aritmética**.

**Observação 4.3.** Outras propriedades foram, também, modeladas recursivamente. Por exemplo, quantas razões  $r$  devo somar a um termo  $a_n$ , para chegar a um termo  $a_{n+k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $n > k$ .

**Exemplo 4.2.** Considere  $a_1$  o primeiro termo de uma sequência, a partir daí multiplica-se por uma razão  $q$  para encontrar cada um dos termos seguintes, ou seja,  $a_2$  é a multiplicação do termo  $a_1$  por  $q$ , enquanto que, o  $a_3$  é a multiplicação do termo  $a_2$  também pela razão  $q$  e assim por diante. Determine o  $n$ ésimo termo desta sequência.

**Solução:**

Assim como feito na construção da PA, seguiu-se aqui o mesmo procedimento

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1. \\ a_2 &= a_1 \cdot q. \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2. \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3. \\ &\vdots \\ a_{10} &= a_1 \cdot q^9. \\ &\vdots \\ a_{20} &= a_1 \cdot q^{19}. \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}. \end{aligned}$$

Concluiu-se, então, que o  $n$ ésimo termo é  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ . Denominou-se,  $a_1$  como sendo o primeiro termo e  $q$  a razão. Finalmente, apresentou-se o modelo como sendo o **Termo Geral de uma Progressão Geométrica**.

Posteriormente, foram apresentadas as definições e propriedades formalmente e realizaram-se algumas aplicações em resolução de situações-problema e em exercícios técnicos.

**Observação 4.4.** Muitos alunos não aplicaram a fórmula nos exercícios propostos, assim como sugerido, pois, segundo eles, era mais fácil fazer "de cabeça". Na realidade, utilizavam o pensamento recursivo para resolver as situações-problema. Houve resistência em se utilizar a fórmula e, portanto, dificuldade em se trabalhar o processo algébrico, ou seja, aplicação em exercícios mais técnicos.

**Observação 4.5.** Encontrar o modelo do Termo Geral foi relativamente fácil para a maior parte dos alunos; há, obviamente, certa dificuldade em se transcrever os modelos passando do pensamento recursivo para a linguagem algébrica, porém o entendimento da função de cada uma das variáveis, utilizadas nas fórmulas, ocorreu muito naturalmente.

#### 4.6.4 Modelos – Juros Compostos em Diferentes Contextos

**Exemplo 4.3.** Uma pessoa realiza investimento de  $D_0$  que rende a juros compostos a uma taxa fixa de  $i\%$  ao mês. Calcule o saldo  $S$  do investimento após  $n$  meses, sabendo que não houveram outros depósitos.

**Solução:**

Por se tratar de aumento percentual, a taxa a ser aplicada mensalmente será de  $100\% + i\% = (1 + i)$

$$\begin{aligned}
S_0 &= D_0. \\
S_1 &= D_0.(1+i). \\
S_2 &= D_0.(1+i).(1+i). \\
S_3 &= D_0.(1+i)(1+i).(1+i). \\
&\vdots \\
S_{10} &= D_0.(1+i)^{10}. \\
&\vdots \\
S_{20} &= D_0(1+i)^{20}. \\
&\vdots \\
S_n &= D_0.(1+i)^n.
\end{aligned}$$

**Exemplo 4.4.** Maria realizou um investimento cujo depósito inicial foi de  $D_0$  e faria depósitos mensais fixos no valor de  $D_m$  durante  $n$  anos. O investimento rendia a juros compostos de  $i\%$  ao mês. Qual o saldo  $S$  a ser sacado por Maria, após o tempo  $n$  de investimento?

$$\begin{aligned}
S_0 &= D_0. \\
S_1 &= D_0.(1+i) + D_m. \\
S_2 &= D_0.(1+i)^2 + D_m.(1+i) + D_m. \\
S_3 &= D_0.(1+i)^3 + D_m.(1+i)^2 + D_m.(1+i) + D_m. \\
&\vdots \\
S_n &= D_0.(1+i)^n + D_m.(1+i)^{n-1} + D_m.(1+i)^{n-2} + \dots + D_m.(1+i) + D_m. \\
S_n &= D_0.(1+i)^n + D_m.[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1].
\end{aligned}$$

Note que  $[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1]$  é a soma de uma PG de  $n$  termos, cujo primeiro termo é 1 e a razão é  $(1+i)$ , utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG apresentada anteriormente nesse texto, temos

$$\begin{aligned}
S_n &= D_0.(1+i)^n + D_m \cdot \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)}. \\
S_n &= D_0.(1+i)^n + D_m \cdot \frac{1 - (1+i)^n}{-i}. \\
S_n &= D_0.(1+i)^n + \frac{D_m.(1+i)^n}{i} - \frac{D_m}{i}
\end{aligned}$$

O exemplo 4.3 foi facilmente resolvido pela maior parte dos alunos – a atividade foi dada em duplas de alunos, porém o 4.4 precisei realizar algumas intervenções, principalmente em relação a perceber que a  $[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1]$  tratava-se da soma dos termos de uma PG. Após a conjectura do modelo 4.4, eles realizaram o mesmo procedimento para conjecturar o modelo para calcular o saldo quando há retiradas fixas e mensais.

Utilizando as fórmulas, simularam alguns cenários – com valores e tempo escolhidos por eles – onde realizavam depósitos fixos por  $n$  anos e depois iniciavam o processo de saques. Os alunos, apesar do uso da calculadora científica, tiveram dificuldades em realizar os cálculos, pois os valores eram muito altos, então, utilizamos as fórmulas para programar o *Excel* para realizar os cálculos.

### 4.6.5 Simulações no Excel

Nesta seção, apesar de não tê-la digitado acima, utilizaremos, também, o modelo das retiradas. Cabe ressaltar que todas as fórmulas – Termo Geral da PA e PG, Soma dos termos da PA e PG, Juros Simples e Juros Compostos em diferentes contextos – foram trabalhadas, também no *Excel*. A programação do *software* foi realizada pelos alunos com orientação do professor. Aqui apresentarei as projeções realizadas com as duas últimas.

As figuras, 4.11 e 4.12 mostram o processo de programação do *Excel* – a escola possui *Datashow* na sala de informática, logo o aluno acompanhava o passo a passo na tela e repetia os procedimentos.

SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N DEPÓSITOS		
Depósito inicial:	1000	Saldo
Depósito mensal:	200	=F4*(1+F6)^F7+
Taxa de Juros (a.m):	0,60%	
Tempo (em meses):	300	

Figura 4.9: Programando o *Excel*  
Fonte: Imagem gerada pela autora

SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N DEPÓSITOS		
Depósito inicial:	1000	Saldo
Depósito mensal:	=F4*(1+F6)^F7+F5*(((1+F6)^F7)/F6)]	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%	
Tempo (em meses):	300	

Figura 4.10: Programando o *Excel 2*  
Fonte: Imagem gerada pela autora

A figura 4.13 mostra o processo de digitação finalizado e a fórmula para cálculo do saldo após  $n$  depósitos mensais  $F4*(1+F6)^F7+F5*(((1+F6)^F7)/F6)-F5/F6$ .

A primeira simulação, figura 4.14, faz-se depósito inicial de R\$ 1.000,00 e depósitos mensais de R\$ 300,00 por 30 anos. Após este período é possível realizar saques mensais de R\$ 1500,00 por 15 anos e ainda restará dinheiro para gastos extras com viagens, por exemplo.

Na simulação 2, figura 4.15, faz-se depósito inicial de R\$ 1.000,00 e depósitos mensais R\$ 250,00 por 25 anos. Após este período é possível realizar saques mensais de R\$ 2000,00 por 14 anos sem muita margem para despesas extras.

Na simulação 3, figura 4.16, faz-se depósito inicial de R\$ 1.000,00 e depósitos mensais R\$ 50,00 por 25 anos. Após este período é possível realizar saques mensais de

SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N DEPÓSITOS			
Depósito inicial:	1000	Saldo	
Depósito mensal:	200		R\$173.257,09
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	300		
Digitação da fórmula do saldo para aplicações com depósitos mensais			
$=F\$4*(1+F\$6)^F\$7+F\$5*(((1+F\$6)^F\$7)/F\$6)-F\$5/F\$6$			

Figura 4.11: Programando o *Excel 2*

Fonte: Imagem gerada pela autora

SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N DEPÓSITOS			
Depósito inicial:	1000	Saldo	
Depósito mensal:	300		R\$389.382,99
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	360		
SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N RETIRADAS			
Saldo inicial:	R\$389.382,99	Saldo	
Retiradas Mensais	1500		R\$659.115,84
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	180		

Figura 4.12: Simulação 1

Fonte: Imagem gerada pela autora

R\$ 500,00 por 10 anos com alguma margem para despesas extras. Algumas simulações como essa foi realizada para mostrar aos alunos que mesmo pessoas que possuem renda baixa poderia guardar uma quantia pequena, pois teria algum rendimento futuro.

Nas simulações 4 e 5. figuras 4.17 e 4.18, o objetivo dos alunos era guardar dinheiro para comprar um carro quando completassem 18 anos. Alguns alunos já trabalhavam e outros recebiam mesada dos pais ou bolsa de iniciação científica. Alguns relataram já possuir poupança a algum tempo, porém apenas os pais ou os avós realizavam depósitos e eles não possuem autorização para sacar dinheiro.

SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N DEPÓSITOS			
Depósito inicial:	1000	Saldo	
Depósito mensal:	250	R\$215.067,06	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	300		
SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N RETIRADAS			
Saldo inicial:	R\$215.067,06	Saldo	
Retiradas Mensais	2000	R\$6.356,02	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	170		

Figura 4.13: Simulação 2  
 Fonte: Imagem gerada pela autora

SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N DEPÓSITOS			
Depósito inicial:	1000	Saldo	
Depósito mensal:	50	R\$47.827,17	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	300		
SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N RETIRADAS			
Saldo inicial:	R\$47.827,17	Saldo	
Retiradas Mensais	500	R\$10.545,06	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	120		

Figura 4.14: Simulação 3  
 Fonte: Imagem gerada pela autora



SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N DEPÓSITOS			
Depósito inicial:	1000	Saldo	
Depósito mensal:	200	R\$9.250,36	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	36	Saque:	9250,36
SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N RETIRADAS			
Saldo inicial:	R\$0,00	Saldo	
Retiradas Mensais		R\$0,00	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):			

Figura 4.15: Simulação 4  
Fonte: Imagem gerada pela autora

SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N DEPÓSITOS			
Depósito inicial:	1000	Saldo	
Depósito mensal:	500	R\$29.050,11	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):	48	Saque:	29050,11
SIMULAÇÃO DOS SALDOS APÓS N RETIRADAS			
Saldo inicial:	R\$0,00	Saldo	
Retiradas Mensais		R\$0,00	
Taxa de Juros (a.m):	0,60%		
Tempo (em meses):			

Figura 4.16: Simulação 5  
Fonte: Imagem gerada pela autora

## 5 Conclusão

O estudo de Recorrências Lineares contribuiu muito para minha formação específica e também para minha prática pedagógica, pois me apresentou várias possibilidades de abordagens junto aos alunos da 1ª série do Ensino Médio, turmas que, em geral, são atribuídas a mim na escola onde leciono.

O trabalho com sequências, da maneira como foram abordadas, motivou os alunos a aprender. Acredito que essa motivação se deu por haver entendimento do significado de muitas variáveis contidas em fórmulas que, em geral, os alunos aprendiam mecanicamente.

Cabe ressaltar que os problemas encontrados em relação a dificuldades com operações matemáticas, principalmente os procedimentos algébricos, não foram resolvidos em um bimestre, ao contrário, percebeu-se que mesmo quando houve total interesse do aluno em resolver os problemas, este encontrou dificuldade no processo algébrico.

Apesar da grande repercussão deste trabalho na comunidade escolar – envolveu pais, gestão e alguns professores – e dos grandes avanços em relação à motivação e aprendizagem dos alunos, acredito que os elementos que levaram a um resultado positivo são muito particulares das turmas, do contexto social em que estavam inseridos, da relação que tinham com a professora, dentre outros fatores, ou seja, repeti-lo em outros momentos, inclusive na mesma escola, como receita, provavelmente levariam a resultados muito diferentes. Dessa forma, citando novamente as Diretrizes e Bases da Educação,

[...] A competência profissional do professor é, justamente, sua capacidade de criar soluções apropriadas a cada uma das diferentes situações complexas e singulares que enfrenta. O conhecimento experiencial pode ser enriquecido quando articulado a uma reflexão sistemática. Constrói-se, assim, em conexão com o conhecimento teórico, na medida em que é preciso usá-lo para refletir sobre a experiência, interpretá-la, atribuir-lhe significado.

conclui-se que não há receita fechada para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem, porém buscar conhecer diferentes metodologias; ler relatos de práticas de outros profissionais; aprofundar-se no conhecimento de sua disciplina específica e, mais importante, entender que, o único objetivo dentro desse processo, é a aprendizagem do aluno, mesmo que estes tragam consigo uma complexidade e uma resistência que pareça impossível transpor, o seu papel como professor é ensiná-lo.



# Referências

- [1] CADERNO do Professor – 8º Ano. <https://docs.google.com/file/d/1JreW69kGJGpZjn2Z9uplq4gsB8CHCzqI/view>. Acessado em 20/07/2018.
- [2] CADERNO do Professor – 9º Ano. <https://docs.google.com/file/d/1GEVeAS4YXYDh18f3TSu2j0j11aEvaCW4/view>. Acessado em 20/07/2018.
- [3] CADERNO do Professor – 1ª Série. [https://docs.google.com/file/d/12E-nSBdW3rWrLrxkY9\\_1Eq6ly6qap0\\_G/view](https://docs.google.com/file/d/12E-nSBdW3rWrLrxkY9_1Eq6ly6qap0_G/view). Acessado em 20/07/2018.
- [4] NACIONAIS, M. P. C. Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio). *Secretaria da Educação Média e Tecnológica/Brasília: MEC/SEMT*, 2002.
- [5] LUCIA, M. Entre o movimento lógico-histórico e o ensino da álgebra: O caso particular das sequências.
- [6] FINI, M. I.; MICELI, P. *Currículo do Estado de São Paulo: ciências humanas e suas tecnologias*. [S.l.]: São Paulo: SEE, 2010.
- [7] PINTO, F. L. O uso das recorrências e do raciocínio recursivo no ensino médio. Instituto de Matemática. Departamento de Matemática., 2017.
- [8] BURAK, D. Modelagem matemática sob um olhar de educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Modelagem na Educação Matemática*, v. 1, n. 1, p. 10–27, 2010.
- [9] BURAK, D. et al. Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. [sn], 1992.
- [10] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002.
- [11] ARAUJO, R. M. L.; BARALDI, I. M.; LOURENÇÃO, M. J. A planilha excel como instrumento pedagógico na formação do professor de matemática. *Zetetike*, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educacao, Circulo de Estudo, Memoria e Pesquisa em E, v. 13, n. 23, p. 137–159, 2005.
- [12] DIAS, R. E.; LOPES, A. C. Nas políticas de currículo para a formação de professores. *Currículo sem fronteiras*, v. 9, n. 2, p. 79–99, 2009.
- [13] LIMA, E. L. et al. *Matemática no Ensino Médio, vol. 1*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [14] SCHÖN, M. C. et al. Número: reflexões sobre as conceituações de russell e peano. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

- [15] GEQUELIM, H. F. Axiomas de peano e os números naturais. *Curitiba: UTFPR*, 2012.
- [16] MATOS, P. M.; SÉRIES, E. *Equações Diferenciais*. [S.l.]: Prentice Hall, São Paulo, 2001.
- [17] BOYER, C. B.; PÉREZ, M. M. *Historia de la matemática*. [S.l.]: Alianza ^ eMadrid Madrid, 1986.
- [18] NETO, A. A. *Matemática Financeira e suas Aplicações*. São Paulo: Atlas, 2012.
- [19] SÁ, E. P. de. *A Matemática Financeira para Educadores Críticos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2011.