



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

# Inpainting Digital via Replicação por Blocos e o Método SPH

Guilherme Valderramos Montroni

Orientador: Prof. Dr. Wallace Correa de Oliveira Casaca

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Agosto de 2020



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# Inpainting Digital via Replicação por Blocos e o Método SPH

Guilherme Valderramos Montroni

Orientador: Prof. Dr. Wallace Correa de Oliveira Casaca

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Agosto de 2020

M813i

Montroni, Guilherme Valderramos

Inpainting digital via replicação por blocos e o método SPH /  
Guilherme Valderramos Montroni. -- Presidente Prudente, 2021  
88 p. : il., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente  
Orientador: Wallace Correa de Oliveira Casaca

1. Inpainting. 2. Smoothed-particle hydrodynamics. 3.  
Processamento digital de imagens. 4. Restauração. 5. Remoção de  
objetos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de  
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.



CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Inpainting Digital via Método SPH com Replicação por Blocos

**AUTOR: GUILHERME VALDERRAMOS MONTRONI**

**ORIENTADOR: WALLACE CORREA DE OLIVEIRA CASACA**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

*Wallace Correa de Oliveira Casaca*

Prof. Dr. WALLACE CORREA DE OLIVEIRA CASACA

Coordenadoria de Curso de Engenharia de Energia / Campus Experimental de Rosana

**VIDEOCONFERÊNCIA**

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

**VIDEOCONFERÊNCIA**

Prof. Dr. AFONSO PAIVA NETO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação / Universidade de São Paulo

Presidente Prudente, 09 de setembro de 2020

*Aos meus pais, Ronaldo e Elisabete.  
Dedico.*

# Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente a Deus por me dar saúde e oportunidade de estudar.

Agradeço meu pai José Ronaldo e minha mãe Elisabete, pilares da minha existência, que me ensinaram os valores da vida, por me amarem de forma incondicional e me apoiarem sem medir esforços. Aos meus irmãos Ana Beatriz e Bruno por dividirem momentos de alegria juntos da nossa família e a todos outros familiares que de alguma forma possam ter contribuído através do convívio.

Meus amigos de infância, Gabriel, Luis, Thiago e Welinton, amigos esses que me ensinaram o valor da amizade e acompanharam todas as fases da minha vida e mesmo cada um seguindo o seu caminho pessoal e profissional ainda estão presentes em todos os momentos importantes.

Aos ótimos professores de matemática que passaram por minha vida no ensino fundamental e médio, professores esses que foram inspirações e provocaram o desejo de seguir o mesmo caminho. Em especial, a professora Sueli Rossi, admirável profissional que tive a sorte de ter como docente.

A minha namorada Andressa, por todo apoio, companheirismo e incentivo demonstrado durante meu percurso acadêmico.

Agradeço aos meus amigos de república Leandro e Maurício, por proporcionarem está transição a melhor possível, pessoas que se tornaram a minha segunda família e supriram a saudade de casa.

Um agradecimento especial aos professores da FCT UNESP, obrigado por todo aprendizado transmitido durante as aulas.

Aos meus colegas de graduação Ana Laura, Amanda Todescato, Bruno Akira, Cristiam, Dinho, Felipe Itapeva, Laison e William, pessoas de bom coração que eu conheci na FCT UNESP e espero revê-los sempre que possível.

Todos os integrantes do projeto PIBID sobre a orientação da professora Maria Raquel, tornando possível a vivência de docente no período de graduação, atuando em sala de aula a partir de intervenções com o objetivo tanto de aperfeiçoar nossas práticas docentes quanto a melhoria da educação pública brasileira.

Agradeço a professora Gilcilene, além de ser uma inspiração como docente a partir do seu capricho e comprometimento, mostrou-me através da iniciação científica uma nova

visão investigativa envolvida na pesquisa, está vertente valiosa disponível em paralelo ao curso de licenciatura em matemática,

Aos colegas e amigos do mestrado em Matemática Aplicada e Computacional (pós-MAC) Alex, Bia, Carol, Enrico, Fabiano, Gustavo, Marcos, Pão, Paulo e Rafael pelos momentos compartilhados ao decorrer do curso.

Agradeço meus amigos de pesquisa Thiago e Letícia, pois partilharam dos mesmos ideias e contribuíram com o desenvolvimento desta pesquisa. Agradeço também a professora Marilaine pelas correções e sugestões no projeto.

Por fim, agradeço ao meu orientador Wallace, pela sua disponibilidade e interesse apresentado no tema da pesquisa, gerando críticas construtivas, discussões e reflexões fundamentais para o desenvolvimento ao longo do processo. Excelente pessoa que não mediu esforços me ajudando em todas as dificuldades, contribuiu tanto no meu crescimento profissional como no pessoal, sem ele esta pesquisa não seria possível.

*“Nós só sentimos a felicidade  
porque ela não é contínua”.*  
**Mario Sergio Cortella**



# Resumo

---

Técnicas de *inpainting digital*, também conhecidas na literatura como métodos de retoque digital, tem como propósito recompor as partes faltantes de uma imagem ou, ainda, remover objetos indesejados da mesma. Nessa frente, um dos problemas que tem sido enfrentado é o alto custo computacional dos métodos existentes, além do próprio aspecto visual dos resultados obtidos que, sob determinadas condições, produzem reconstruções de baixa qualidade gráfica. Visando explorar e adaptar o método clássico *Smoothed-Particle Hydrodynamics* (SPH) no contexto de *inpainting digital*, esta pesquisa focou no estudo e desenvolvimento de um novo método de restauração baseado na formulação tradicional do SPH. Como objetivos, foi aplicada a modelagem clássica do SPH na tarefa de *inpainting digital* a partir do uso do paradigma de reconstrução de imagens denominado replicação de blocos de pixels, isto é, *patch-based inpainting*, em que cada particular SPH é interpretada como um bloco (*patch*) de pixels na modelagem do problema. Os resultados obtidos demonstraram que a abordagem proposta foi capaz de reconstruir imagens com diferentes níveis de complexidade a um custo computacional inferior às estratégias de *inpainting* clássicas baseadas exclusivamente na difusão de um único pixel por vez.

Palavras-Chave: *Inpainting, Smoothed-Particle Hydrodynamics, Processamento Digital de Imagens, Restauração, Remoção de Objetos.*





# Abstract

---

Digital inpainting techniques are intended to recompose missing parts of an image or remove undesirable objects from it. Considering this study field, one of the main issues faced by inpainting methods is their high computational costs, as well as the visual aspect of the outputs under many specific occasions, leading to poor quality reconstructions. Aiming at exploiting and adapting the classic Smoothed-Particle Hydrodynamics (SPH) method in the context of digital inpainting, this research focuses on the study and development of a new inpainting technique which relies on the traditional SPH formulation. Our goal was to apply the usual SPH framework in the task of digital inpainting by using the patch-based propagation paradigm, i.e., the so-called patch-based image inpainting, where each SPH particle is interpreted as a full patch of pixels in our approach.

Keywords: *Inpainting, Smoothed-Particle Hydrodynamics, Digital Image Processing, Restoration, Object Removal.*



---

# Lista de Figuras

1.1	Imagem digital ( <i>à esquerda</i> ) e discretização de um segmento da imagem em escala de cinza ( <i>à direita</i> ). Fonte: [40]. . . . .	21
1.2	Exemplo de uma obra de arte degradada pela ação do tempo ( <i>esquerda</i> ) e posteriormente restaurada ( <i>direita</i> ). Fonte: www.junqueira220.pt. . . . .	22
1.3	Exemplo de remoção de sombras em imagens de sensoriamento remoto. (a) Imagem original. (b) Máscara binária resultante após a aplicação da técnica de detecção de sombras [2]. (c) Imagem reconstruída isenta de sombras via [3]. Fonte: [3]. . . . .	23
1.4	(a) Imagem antiga degradada. (b) Região de retoque ( $D$ ) em vermelho. (c) Imagem restaurada. Fonte: [6]. . . . .	23
1.5	Exemplo de ruído em imagens digitais. (a) Imagem original. (b) Imagem reconstruída. Fonte: [14]. . . . .	24
1.6	Representação do método SPIR. Fonte: [24]. . . . .	25
1.7	Método SPIR aplicado na tarefa de remoção de ruídos. Fonte: [24]. . . . .	25
1.8	(a) $\Lambda\Omega_p$ ( <i>partes azul e cinza</i> ) é a região dentro de $H_L(p)$ ( <i>quadrado verde</i> ) que contém os pixels candidatos. (b) Comparação entre o conteúdo de $H_n(p)$ e $H_m(\hat{q})$ . (c) Resultado após a cópia das informações de interesse, de $H(\hat{q})$ para $H(p)$ . Fonte: [15]. . . . .	27
2.1	Resultado da difusão anisotrópica Perona-Malik: imagem contendo ruído ( <i>esquerda</i> ) e imagem resultante após 10 iterações do método ( <i>direita</i> ). Fonte: [42]. . . . .	30
2.2	Aplicação do modelo <i>Harmonic Inpainting</i> : imagens danificadas ( <i>esquerda</i> ) e imagens restauradas ( <i>direita</i> ). Fonte: [40]. . . . .	31
2.3	Aplicação do modelo <i>Cahn-Hilliard</i> . (a) Imagem danificada pela região cinza. (b) Processamento ( <i>imagem em estado intermediário</i> ). (c) Imagem resultante. Fonte: [8]. . . . .	33
2.4	Remoção de texto sobreposto a imagem através do Modelo de Transporte: imagem com texto ( <i>esquerda</i> ) e imagem reconstruída ( <i>direita</i> ). Fonte: [6]. . . . .	34

2.5	Reconstrução de uma imagem sintética usando o modelo de transporte de coerência. Fonte: [40]. . . . .	35
3.1	Imagem de uma barragem. Foto: Felipe Werneck - Ascom/Ibama . . . . .	38
3.2	Diferentes tipos de comportamento do escoamento de um fluido representados pela fumaça de um cigarro. . . . .	39
3.3	Simulação de queda d'água com altura de 0.55 metros utilizando o método SPH. Fonte: [41]. . . . .	40
3.4	Animação 2D, onde um material deformável é cortado por um corpo rígido. Fonte: [23]. . . . .	40
3.5	Simulação realista do derramamento de cerveja no copo utilizando o método SPH. Fonte: [21]. . . . .	41
3.6	Método G-SPIR: a partícula $x_j$ pertence a vizinhança ( <i>partículas em azul</i> ) se a mesma se encontra dentro do suporte compacto $V(p)$ . . . . .	42
3.7	Processo de restauração de imagem utilizando o método G-SPIR. De cima para baixo: imagem degradada; máscara; determinação dos vizinhos mais próximos ( <i>pixels em azul</i> ); atribuição de cor ao pixel retocado ( <i>em vermelho</i> ) pelo método SPH. Fonte: Mazzini [33]. . . . .	44
3.8	Restauração utilizando o método G-SPIR. Fonte: Mazzini [33]. . . . .	44
4.1	Processo de síntese de textura. Através da amostra (a), é obtido o resultado da síntese de textura (b). Fonte: Casaca [14]. . . . .	46
4.2	Ilustração do processo de síntese de textura - Modelo Criminisi e colaboradores [22]. . . . .	47
4.3	Processo de <i>inpainting</i> em (a) imagem de entrada ( <i>à esquerda</i> ), região de retoque ( <i>à direita</i> ), e (b) atuação individual do termo de confiança ( <i>à esquerda</i> ) e termo de dados ( <i>à direita</i> ). . . . .	48
4.4	Após algumas iterações do processo completo de <i>inpainting</i> (a), e a finalização do algoritmo sem e com o mecanismo de ordenação, em (b). . . . .	48
4.5	Interpretação do termo de dados $D(p)$ : Computado o bloco $\Psi_p, \vec{\eta}$ representa o vetor normal no pixel $p$ no contorno da fronteira $\partial\Omega$ enquanto que $\nabla f_p^\perp$ determina a direção dos isótopos nesse mesmo <i>pixel</i> . Fonte [22]. . . . .	49
4.6	Ilustração do comportamento do (a) termo de dados, (b) termo de confiança e (c) função de prioridade para o processo de preenchimento. Fonte: Cheng [20]. . . . .	50
4.7	Ilustração da imagem a ser restaurada ( <i>à esquerda</i> ) e resultado com o modelo de Criminisi ( <i>à direita</i> ). Fonte [45]. . . . .	50
4.8	Ilustração da regularização da curva. Fonte [20] . . . . .	51

4.9	Remoção de objeto no processo de <i>inpainting</i> de Wang e colaboradores. Na sequência: Imagem original, Retoque digital utilizando a função regularizante e <i>Inpainting</i> baseado no algoritmo original, de Criminisi e colaboradores. . . . .	52
5.1	Restauração de imagem digital: Imagem de entrada ( <i>à esquerda</i> ) e regiões alvo ( <i>à direita</i> ) priorizando a intensidade ( <i>retângulo vermelho</i> ) e a proximidade ( <i>círculo verde</i> ) centralizadas no pixel $p$ central do bloco a ser restaurado. . . . .	54
5.2	Regiões de busca: (a) Possíveis blocos candidatos (b) quatro blocos vetorizados definidos pela intensidade e (c) quatro blocos vetorizados definidos pela proximidade. . . . .	54
5.3	Processo de retoque de imagem digital: Área de atuação ( <i>retângulo amarelo</i> ), (a) região do bloco alvo ( <i>vermelho</i> ), (b) região de retoque ( <i>laranja</i> ), (c) região desconsiderada ( <i>azul</i> ) e (d) retoque finalizado. . . . .	55
5.4	Esquemática da abordagem de <i>inpainting</i> proposta via replicação de blocos. . . . .	57
5.5	Ilustração da intersecções dos blocos de pixels dentro do volume compacto $V(p)$ . . . . .	57
5.6	Processo de restauração de imagem utilizando o método proposto. De cima para baixo: imagem degradada; definição do pixel de maior prioridade a ser reconstruído; bloco selecionado com relação à região de retoque ( $\Psi \cap \Omega$ ); seleção dos vizinhos de acordo com a região de amostragem do núcleo $V$ ( <i>região circular</i> ) e $\Phi$ ( <i>região retangular</i> ). . . . .	59
5.7	Restauração utilizando o método implementado. . . . .	59
6.1	(a) Imagem Original, (b) Imagem Degradada e (c) Máscara de Retoque. . .	62
6.2	Resultados de reconstrução de imagem sintética. (a) Método Harmonic Inpainting, (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método de Transporte e (d) Método G-SPIR. . . . .	62
6.3	Resultados de reconstrução de imagem sintética utilizando o modelo de Criminisi. (a) Imagem Original e (b) Modelo Criminisi. . . . .	63
6.4	Resultados de reconstrução de imagem sintética utilizando o método proposto. (a) Imagem Original e (b) Método SPH por blocos. . . . .	63
6.5	(a) Imagem Original, (b) Imagem Degradada e (c) Máscara de Retoque. . .	63
6.6	Resultados de reconstrução de imagem sintética ( <i>região de retoque menor</i> ): (a) Método Harmonic Inpainting, (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método de Transporte e (d) Método G-SPIR. . . . .	64
6.7	Resultados de reconstrução de imagem sintética utilizando o modelo de Criminisi. (a) Imagem Original e (b) Modelo Criminisi. . . . .	64

6.8	Resultados de reconstrução de imagem sintética utilizando o método SPH via blocos. (a) Imagem Original e (b) Método SPH por blocos. . . . .	65
6.9	(a) Imagem original, (b) Imagem com texto sobreposto e (c) Máscara de retoque. . . . .	65
6.10	Resultados de remoção de texto em imagem: (a) Método Harmonic Inpainting, (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método de Transporte e (d) Método G-SPIR. . . . .	66
6.11	Resultados de remoção de texto em imagem: (a) Imagem Original e (b) Método SPH com blocos. . . . .	66
6.12	(a) Imagem original, (b) Imagem degradada e (c) Máscara de retoque. . . .	67
6.13	Resultados de restauração de imagem: (a) Método Harmonic Inpainting, (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método de Transporte e (d) Método G-SPIR. . . . .	67
6.14	Resultados de restauração de imagem: (a) Imagem Original, (b) Método SPH via blocos. . . . .	68
6.15	Região dos olhos: (a) Imagem original ( <i>resultado esperado</i> ), (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método G-SPIR e (d) SPH com blocos. . . . .	68
6.16	(a) Imagem original, (b) Objeto a ser removido e (c) Máscara de retoque. . .	69
6.17	Remoção de objetos: (a) Algoritmo Harmonic, (b) Algoritmo Cahn-Hilliard, (c) Algoritmo Transporte e (d) Algoritmo G-SPIR. . . . .	70
6.18	Remoção de objetos: (a) Imagem Original e (b) SPH via replicação de blocos. . . . .	70
6.19	Comparação de métodos aplicado à remoção de objetos: (a) Modelo de Criminisi e (b) SPH com blocos. . . . .	71
6.20	Retoque em remoção de objeto: (a) Imagem Original, (b) Imagem degradada e (c) Máscara de retoque. . . . .	72
6.21	Remoção de objetos: (a) $\omega = 0, 1$ , (b) $\omega = 0, 3$ , (c) $\omega = 0, 5$ e (d) $\omega = 0, 7$ . . . . .	72
6.22	Remoção de objetos: (a) Modelo de Criminisi e (b) SPH por blocos. . . . .	73
6.23	Remoção de objetos e variação de $\omega$ : (a) Imagem Original, (b) $\omega = 0, 1$ , (c) $\omega = 0, 3$ , (d) $\omega = 0, 5$ e (e) $\omega = 0, 7$ . . . . .	73
6.24	Remoção de objetos e variação de $\omega$ : (a) Imagem Original, (b) $\omega = 0, 1$ , (c) $\omega = 0, 3$ , (d) $\omega = 0, 5$ e (e) $\omega = 0, 7$ . . . . .	74
6.25	Retoque de região degradada: (a) Imagem Original, (b) Imagem degradada e (c) Máscara de retoque. . . . .	75
6.26	Retoque de região degradada : (a) $\sigma = 0, 1$ , (b) $\sigma = 0, 3$ , (c) $\sigma = 0, 5$ , (d) $\sigma = 0, 7$ , (e) $\sigma = 0, 9$ . . . . .	75
6.27	Retoque de região de fronteira: (a) Imagem Original, (b) Imagem degradada e (c) Máscara de retoque. . . . .	76

6.28	Retoque de região de fronteira: (a) $\sigma = 0, 1$ , (b) $\sigma = 0, 3$ , (c) $\sigma = 0, 5$ , (d) $\sigma = 0, 7$ , (e) $\sigma = 0, 9$ . . . . .	76
6.29	Comparação da remoção de objetos: (a) Modelo de Criminisi e (b) SPH por blocos. . . . .	77
6.30	Remoção de objetos: (a) Imagem Original, (b) Imagem Degradada e (c) Máscara de retoque. . . . .	77
6.31	Parâmetro de restauração $k$ vizinhos mais próximos: (a) $k = 1$ , (b) $k = 2$ , (c) $k = 3$ , (d) $k = 4$ e (e) $k = 5$ . . . . .	78
6.32	Remoção de objetos: (a) G-SPIR original e (b) SPH por blocos. . . . .	78
6.33	Reconstrução de áreas degradadas: (a) Imagem Original, (b) Imagem Degradada e (c) Máscara de retoque. . . . .	79
6.34	Remoção de objetos: (a) G-SPIR original e (b) SPH por blocos. . . . .	79
6.35	Contraste da remoção de objetos: (a) Modelo de Criminisi e (b) SPH por blocos. . . . .	80
6.36	(a) Imagem original, (b) Imagem a ser preenchida e (c) Máscara de retoque. . . . .	80
6.37	Remoção de objetos: (a) SPH por blocos com reutilização de pixels e (b) SPH por blocos sem reutilização de pixels. . . . .	81





# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>9</b>
<b>Abstract</b>	<b>11</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>12</b>
<b>Capítulos</b>	
<b>1 Introdução</b>	<b>21</b>
1.1 Contextualização do Tema . . . . .	21
1.2 Objetivos . . . . .	26
1.3 Organização do Trabalho . . . . .	27
<b>2 Inpainting Digital via Métodos Baseados em EDPs</b>	<b>29</b>
2.1 Modelo Perona-Malik . . . . .	29
2.1.1 Detalhes do algoritmo . . . . .	30
2.2 Modelo <i>Harmonic Image Inpainting</i> . . . . .	31
2.2.1 Detalhes do Algoritmo . . . . .	31
2.3 Modelo de <i>Cahn-Hilliard</i> . . . . .	32
2.3.1 Detalhes do Algoritmo . . . . .	33
2.4 Equação do Transporte . . . . .	34
2.4.1 Detalhes do Algoritmo . . . . .	35
<b>3 Método de Partículas SPH</b>	<b>37</b>
3.1 Aplicação em Dinâmica dos Fluidos . . . . .	38
3.2 Aplicações em Computação Gráfica . . . . .	40
3.3 Método G-SPIR . . . . .	41
3.3.1 Detalhes do Algoritmo . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Modelo de Restauração via Replicação por Blocos</b>	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>Método SPH via Replicação por Blocos e Prioridade de Preenchimento</b>	<b>53</b>
5.1	Detalhes implementacionais do Algoritmo Proposto . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>61</b>
6.1	Testes Comparativos com Métodos de Inpainting . . . . .	61
6.1.1	Teste 1: Remoção de Objetos de Imagens Sintéticas . . . . .	62
6.1.2	Teste 2: Remoção Textual em Imagens . . . . .	65
6.1.3	Teste 3: Restauração de Imagens Degradadas . . . . .	66
6.1.4	Teste 4: Remoção de Objetos em Imagens . . . . .	69
6.2	Testes de Variação de Parâmetros: Método SPH por Blocos . . . . .	71
6.2.1	Teste 1: Parâmetro $\omega$ . . . . .	71
6.2.2	Teste 2: Parâmetro $\sigma$ . . . . .	74
6.2.3	Teste 3: Parâmetro $k$ Vizinhos Mais Próximos . . . . .	77
6.2.4	Teste 4: Prioridade em Regiões de Maior Relevância . . . . .	79
6.2.5	Teste 5: Reutilização de Pixels já Reconstruídos . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>83</b>
	<b>Referências</b>	<b>84</b>
	<b>Apêndices</b>	

# Introdução

## 1.1 Contextualização do Tema

Segundo o Michaelis Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa<sup>1</sup>, damos o nome de *Imagem* ao processo de representação visual de um objeto ou pessoa.

No que se refere a *Imagem Digital*, a mesma é obtida através da imagem original e discretizada em uma grade (*grid*), atribuindo-se valores quantizados para cada um de seus *pixels* (vide Figura 1.1), os quais podem assumir 256 tons em escala de cinza, isto é,  $\{0, 1, \dots, 255\} \subset \mathbb{N}$ . No caso de uma imagem colorida, esta possui três canais em escala de cinza representadas por um vetor  $(R, G, B)$  com tons de vermelho, verde e azul (do inglês, *Red*, *Green* e *Blue*, respectivamente).

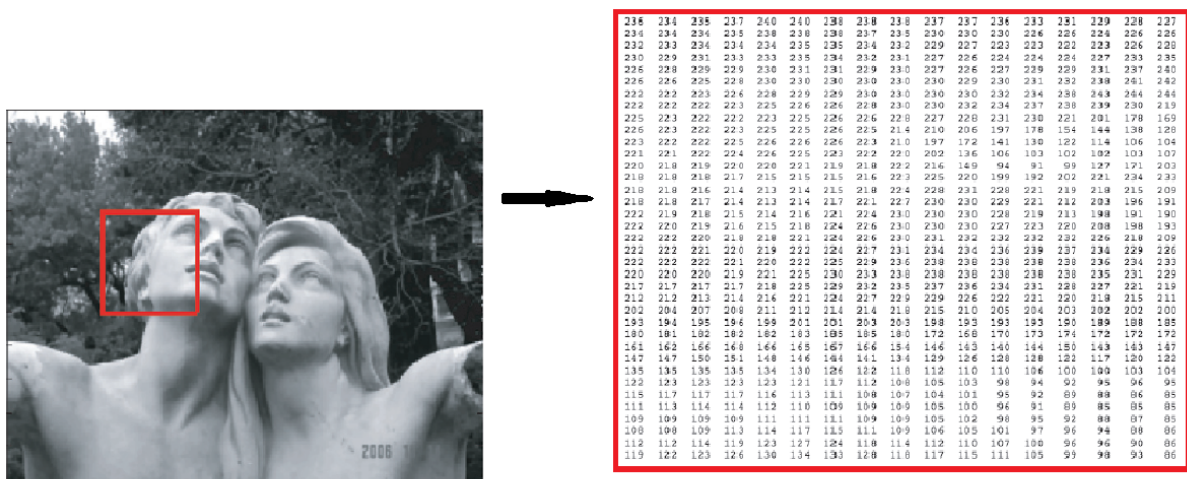


Figura 1.1: Imagem digital (à esquerda) e discretização de um segmento da imagem em escala de cinza (à direita). Fonte: [40].

<sup>1</sup>Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>. Acesso em: 20 nov. 2019.

A chamada técnica clássica de *inpainting*, também conhecida como restauração de pinturas e obras de arte, tem sido aplicada desde os primórdios, juntamente com a própria criação artística, e consiste de uma atividade subjetiva, já que varia de acordo com a concepção do artista que a emprega. A Figura 1.2 ilustra um exemplo de uma obra de arte que se encontrava danificada e o resultado do processo de restauração da mesma<sup>2</sup>.



Figura 1.2: Exemplo de uma obra de arte degradada pela ação do tempo (*esquerda*) e posteriormente restaurada (*direita*). Fonte: [www.junqueira220.pt](http://www.junqueira220.pt).

No contexto de Processamento Digital de Imagens (PDI), o propósito da restauração é de que as partes danificadas, deterioradas ou até mesmo ausentes em uma imagem sejam reconstituídas de maneira que a mesma venha a se assemelhar à sua forma original, ou seja, o processo deve preservar as características genuínas da imagem de forma a retratá-la da maneira mais fiel possível.

Com o passar do tempo e com o avanço da ciência e da tecnologia, obras de arte e fotografias passaram a ser possíveis de serem digitalizadas e, com isso, algoritmos de reconstrução (retoque), isto é, de *inpainting*, foram introduzidos no meio digital.

Estas técnicas são utilizadas em diversas aplicações, como preenchimento de partes faltantes ou danificadas em imagens [15, 11, 45], algoritmos iterativos combinados à pré-segmentadores [12] para restauração [13], remoção de sombras e demais oclusões em imagens de sensoriamento remoto [3, 5] (vide Figura 1.3 para uma ilustração), remoção de objetos e reconstrução de frames em vídeos [43, 18], entre outras aplicações de cunho computacional.

---

<sup>2</sup>Imagem disponível em: <http://www.junqueira220.pt/servicos/pintura-cavelete/tela.html>. Acesso em: 20 nov. 2019.

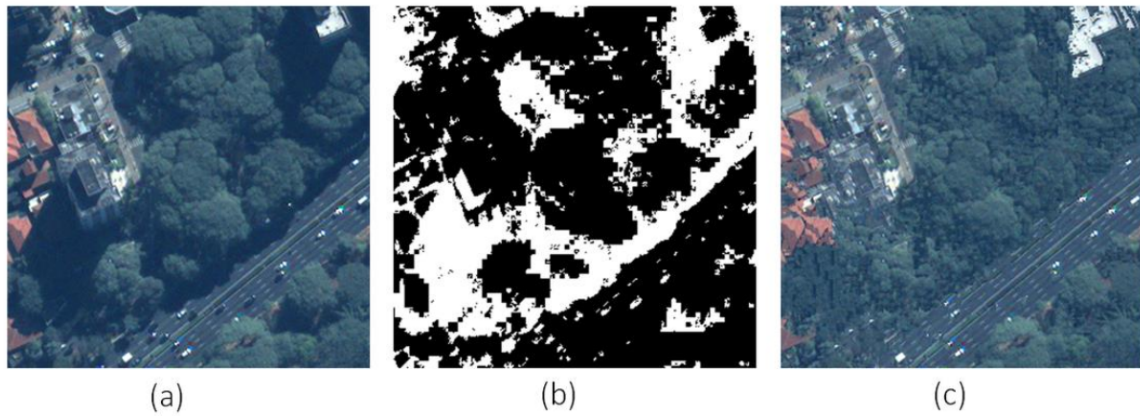


Figura 1.3: Exemplo de remoção de sombras em imagens de sensoriamento remoto. (a) Imagem original. (b) Máscara binária resultante após a aplicação da técnica de detecção de sombras [2]. (c) Imagem reconstruída isenta de sombras via [3]. Fonte: [3].

Bertalmio e colaboradores [6, 7] apresentaram um dos primeiros modelos efetivos de *inpainting* digital com o objetivo de restaurar obras artísticas antigas digitalizadas, tarefa antes realizada de forma manual. O modelo apresentado pelos autores foi bem aceito pela comunidade científica, já que a metodologia proposta assume como entrada apenas a imagem a ser restaurada,  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , além da própria máscara alvo contendo a localização da região deteriorada,  $D \subset \Omega$ , com a promessa de que, após o processo de restauração por intermédio da técnica, as características intrínsecas da imagem original serão preservadas ao máximo (vide Figura 1.4).



Figura 1.4: (a) Imagem antiga degradada. (b) Região de retoque ( $D$ ) em vermelho. (c) Imagem restaurada. Fonte: [6].

Com a tecnologia em constante evolução, temos visto o surgimento de dispositivos de aquisição de imagens cada vez mais modernos, como câmeras digitais, celulares, entre outros. Contudo, por motivos técnicos ou de ambientação, as imagens resultantes podem conter falhas, as quais damos o nome de *ruído*. A remoção de ruído (chamada também de *denoising*) é outro tópico clássico da área de PDI e, de certa forma, também está relacionado à linha geral de restauração de imagens. Os ruídos afetam as bordas da imagem que delimitam a fronteira entre as regiões sobrepostas da imagem, como por exemplo: objeto e fundo, objeto e objeto. Desta forma, se faz necessário um pré-processamento para a remoção de ruídos, a qual chamamos de *suavização* (vide Figura 1.5).



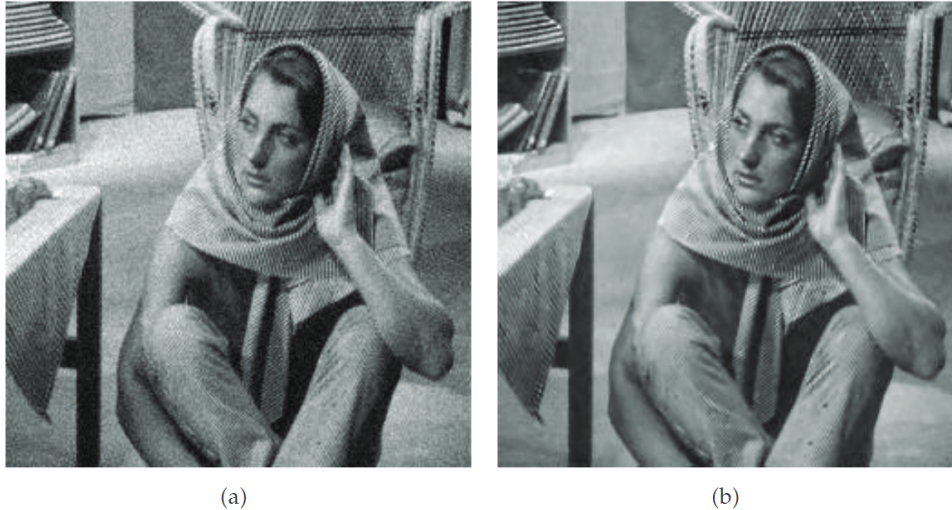


Figura 1.5: Exemplo de ruído em imagens digitais. (a) Imagem original. (b) Imagem reconstruída. Fonte: [14].

Tendo em vista o tópico de remoção de ruídos, existem métodos numéricos que fazem uso de Equações Diferenciais Parciais (*EDPs*) e que, quando aliados a processos de difusão, são empregados na tarefa de detecção de bordas e de suavização de imagens. Este grupo de métodos são, por sua vez, discretizados em uma malha computacional e formulados a partir de uma dinâmica de propagação das informações da imagem, que são então iterados e encerram suas atividades quando não houver mais dados a serem propagados. Note, ainda que essa mesma classe de métodos pode ser adaptada para atuar em problemáticas de restauração de imagens digitais, como é o caso da categoria dos métodos de *inpainting* digital discutidos na obra em formato de *Survey* [40].

A metodologia descrita nesta pesquisa, e que será apresentada nos próximos capítulos, também surgiu com o intuito de resolver Equações Diferenciais Parciais, mas difere dos métodos tradicionais usados para tratar tanto a remoção de ruídos como o *inpainting*, visto que ela não utiliza o conceito de malhas, mas sim, uma aproximação por um conjunto finito de partículas. Assim, o método SPH (do inglês, *Smoothed Particle Hydrodynamics*), que surgiu em 1977 nos trabalhos de Lucy [31] e Gingold & Monaghan [26], foi utilizado como ponto-chave de nossa metodologia a fim de desenvolver uma solução para o problema de restauração de imagens digitais. O SPH é um método Lagrangeano que não depende de malha, e que foi apresentado em uma forma numérica bastante didática por Liu e Liu [29] em 2003, sendo esta referência citada em inúmeros artigos, principalmente no contexto de modelagem de fluidos [30, 1, 45, 37].

No que diz respeito ao uso do método SPH na área de Processamento Digital de Imagens (PDI), mais especificamente acerca das linhas de retoque digital e *inpainting*, os trabalhos são mais recentes. Desta forma, foi imprescindível explorar técnicas derivadas de formulações via *EDPs* para complementar o estudo, pois ambas apresentam como ponto comum o aspecto de suavização da imagem e da própria formulação matemática do problema. Por exemplo, em [24], os autores deram destaque ao método SPIR (do inglês, *Smoothed Particle Image Reconstruction*) que, resumidamente, emprega o método SPH

para o tratamento das partículas – representadas pelos pixels da imagem – por dispersão. Através de um suporte compacto de raio  $h_j$ , as partículas mais próximas (chamadas de NNP, do inglês *Nearest Neighboring Particles*) são representadas e utilizadas no processo de reconstrução, conforme ilustrado na Figura 1.1, onde a partícula  $x_j$  compõe a NNP, já que se encontra dentro do suporte compacto gerado por  $h_j$ .

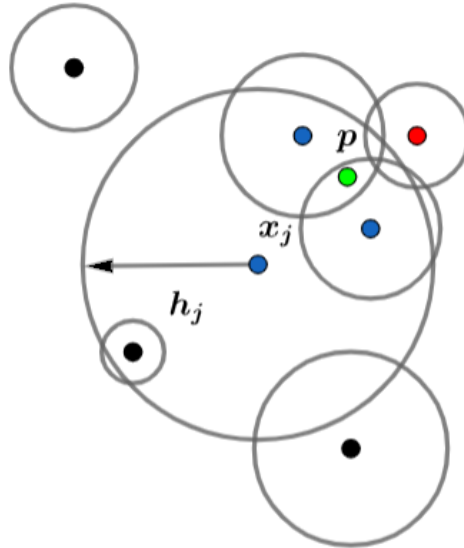


Figura 1.6: Representação do método SPIR. Fonte: [24].

O método SPIR é claramente efetivo na remoção de ruídos (veja a Figura 1.1), ou seja, quando se tem à disposição uma quantidade substancial de pixels não deteriorados em uma vizinhança próxima ao pixel a ser tratado. Por outro lado, para problemas envolvendo grandes lacunas a serem preenchidas, frequentemente explorados em problemas de *inpainting*, o método acaba não produzindo resultados satisfatórios, conforme evidenciado na seção de resultados deste trabalho.



Figura 1.7: Método SPIR aplicado na tarefa de remoção de ruídos. Fonte: [24].

Em [33], Mazzini desenvolveu uma nova técnica de retoque digital baseada no método SPIR clássico, de eliminação de ruídos, dando assim origem ao método G-SPIR (do in-

glês, *Gather Smoothed Particle Image Reconstruction*). Esse método faz uso da estratégia conhecida como abordagem por agrupamento (do inglês, *gather approach*) para a discretização da representação integral do modelo matemático SPIR. Em síntese, o suporte compacto de raio  $h_j$  agora possui centro  $p$  (*pixel degradado*) e o tamanho de  $h_j$  se altera dependendo da necessidade de se obter  $k$  pixels não-deteriorados ( $x_j$ ) (vide Capítulo 3 para mais detalhes a respeito desse algoritmo).

Limitações como o preenchimento de áreas extensas e texturizadas nas técnicas de *inpainting* apresentadas anteriormente geraram a necessidade de se criar outras estratégias para avançar na área de reconstrução de imagens. Nesse contexto, a linha de técnicas de reconstrução guiadas por *blocos de pixels* tal como foi estabelecida por Criminisi e colaboradores [22] tem produzido resultados bastantes promissores, pois além de ser eficiente no tratamento de grandes lacunas, também busca determinar uma *prioridade* entre a recomposição dos pixels deteriorados, ajudando assim na preservação de contornos e dos padrões da imagem.

## 1.2 Objetivos

Diante do apresentado, pode-se observar que, no que se refere às metodologias baseadas na técnica clássica SPH, ainda há muitas alternativas a serem exploradas na área de Processamento Digital de Imagens, em particular, na linha de *inpainting*. Sendo assim, o presente trabalho tem como objetivo primário a restauração de imagens digitais a partir da combinação de duas técnicas conhecidas na literatura: o método SPH, e a estratégia de replicação da informação via blocos de pixels.

A fim de alcançar o objetivo desejado, propõe-se estender a técnica apresentada por Mazzini [33], através do método G-SPIR, para uma aplicação de *inpainting* envolvendo mais de uma partícula simultaneamente, ou seja, pretende-se restaurar regiões degradadas de uma imagem a partir de um conjunto de blocos de partículas.

A replicação por blocos é um paradigma já explorado por métodos de retoque digital que fazem uso de malhas ou *grids* regulares. Por exemplo, Casaca e colaboradores [15] adotaram esse procedimento em imagens contendo texturas que, através de uma medida de prioridade baseada na equação do transporte de Bertalmio e colaboradores [6], é determinado qual bloco (*patch*) de pixels tem maior prioridade no processo de reconstrução da imagem. Em seguida, são selecionados blocos candidatos para o preenchimento, sendo que o bloco ótimo é determinado a partir da similaridade entre o bloco-alvo e os blocos candidatos nas proximidades da região de reconstrução (para detalhes, vide Figura 1.8).

Assim, a ideia é combinar a abordagem de difusão da informação tal como originalmente proposta pelo método SPH, tendo como protótipo base o algoritmo G-SPIR, com a estratégia de seleção e preenchimento via bloco de pixels a fim de acelerar o processo de restauração da imagem, bem como ainda preservar determinados padrões e contornos presentes na imagem.



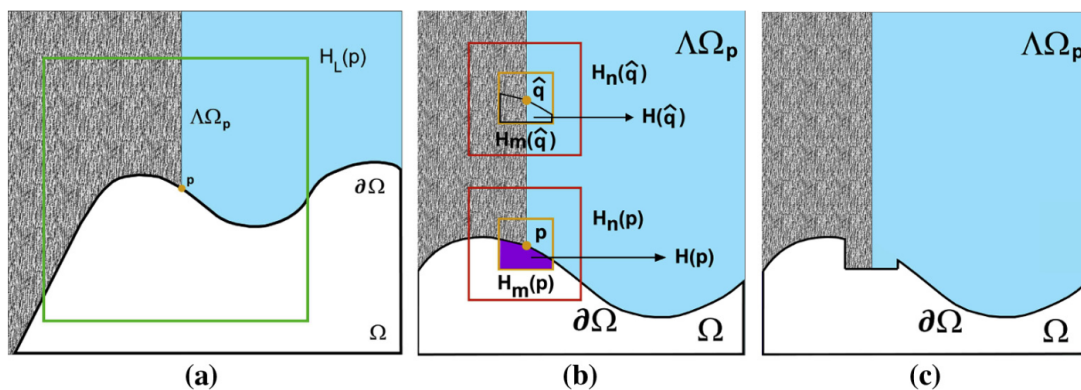


Figura 1.8: (a)  $\Lambda\Omega_p$  (partes azul e cinza) é a região dentro de  $H_L(p)$  (quadrado verde) que contém os pixels candidatos. (b) Comparação entre o conteúdo de  $H_n(p)$  e  $H_m(\hat{q})$ . (c) Resultado após a cópia das informações de interesse, de  $H(\hat{q})$  para  $H(p)$ . Fonte: [15].

Partindo desse princípio, a abordagem ora proposta de *inpainting* foi concebida para ser executada a partir de três passos básicos:

1. **Bloco Prioridade:** Determinar o bloco de pixels a ser restaurado de acordo com o grau de prioridade de cada bloco alvo a ser reconstituído.
2. **Blocos Candidatos:** Através de duas regiões, onde a primeira prioriza a distância entre os blocos de pixels – a partir do suporte compacto  $V(p)$ , de centro  $p$ , e raio  $h$  – e a segunda,  $(\Phi)$ , refere-se ao grau de similaridade das intensidades dos blocos de pixels – conforme a métrica SSD (*Sum of Squared Differences*, do inglês), são selecionados os blocos candidatos para o retoque digital da imagem.
3. **Bloco Semelhante:** Seja  $I_R$  a imagem a ser restaurada. Utilizando o parâmetro  $\sigma$ , que regula “o quanto” os blocos referentes à proximidade ( $H_L$ ) e à intensidade ( $H_I$ ) serão ponderados no processo de recuperação da região degradada ( $H_p$ ), o bloco de maior similaridade é então determinado pela expressão:

$$I_R(H_p) = \sigma H_L + (1 - \sigma) H_I, \quad \text{com } \sigma \in (0, 1), \quad (1.1)$$

O processo termina quando toda região danificada da imagem é restaurada.

### 1.3 Organização do Trabalho

Este texto foi organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2, destacam-se as principais metodologias da literatura na área de *inpainting* digital com foco em EDPs, visto a escassez de propostas que empregam SPH em suas formulações para a tarefa de *inpainting*, bem como a semelhança dessa linha – EDPs – com relação à processos de difusão e simulações derivados do SPH.

- Em seguida, no Capítulo 3, um breve resumo sobre o método SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) é apresentado, assim como alguns resultados e contribuições nas áreas de Dinâmica dos Fluidos, Computação Gráfica e Retoque Digital, através do método G-SPIR, que é derivado do método SPH e será uma das metodologias modelo no presente trabalho.
- O Capítulo 4 é destinado à apresentação da técnica proposta por Criminisi e colaboradores [22], que é uma abordagem utilizada para recriar texturas danificadas e que estabeleceu um novo paradigma na área de *inpainting* após sua origem.
- No Capítulo 5 é apresentada nossa proposta de técnica de *inpainting*, a qual faz uso do SPH e da estratégia de replicação de blocos de pixels.
- Já no Capítulo 6, são apresentados os resultados obtidos com o uso da técnica proposta, além de comparações envolvendo outros métodos do estado-da-arte em *inpainting* digital.
- Por fim, no Capítulo 7, são sumarizadas as conclusões da referida pesquisa de mestrado.

# Inpainting Digital via Métodos Baseados em EDPs

O *inpainting* digital, também conhecido na literatura como restauração, reconstrução ou retoque digital, é um método de preenchimento de partes danificadas, ou até mesmo, faltantes de uma imagem. O processo de restauração faz uso de diversas operações que tem como objetivo obter uma imagem que se assemelhe o mais próximo possível de sua versão original, ou seja, como se nenhuma danificação estivesse presente na mesma.

Neste capítulo, serão apresentados métodos de *inpainting* modelados por Equações Diferenciais Parciais (EDPs) cujas técnicas envolvem um aspecto de suavização da imagem. O intuito de utilizar esses modelos é o de refinar os resultados, pois o retoque digital de imagem via SPH apresenta as mesmas características encontradas em processos de suavização, porém, não se tem à disposição um grande acervo de técnicas na literatura que venham a empregar a modelagem SPH dentro de suas formulações.

As EDPs têm sido amplamente utilizadas no contexto de processamento de imagens digitais para preencher regiões danificadas ou, ainda, para remover objetos indesejados em fotografias e representações gráficas.

## 2.1 Modelo Perona-Malik

Em 1990, Perona e Malik [39] propuseram um modelo não linear baseado em difusão anisotrópica para PDI, tendo como objetivo, a princípio, a eliminação de ruídos. De maneira sucinta, o modelo de difusão apresentado pelos autores é definido por meio de uma EDP, que realiza o processo de difusão a fim de suavizar essas regiões de interesse ao mesmo tempo em que se preserva as bordas da imagem [4]. A Figura 2.1 ilustra os resultados da aplicação do método de Perona e Malik.



Figura 2.1: Resultado da difusão anisotrópica Perona-Malik: imagem contendo ruído (*esquerda*) e imagem resultante após 10 iterações do método (*direita*). Fonte: [42].

A teoria apresentada na EDP de Perona-Malik tem como base a Equação do Calor bidimensional que, intuitivamente, espalha o calor a partir das extremidades de uma região 2D (condições de contorno do problema matemático) para o interior da mesma.

### 2.1.1 Detalhes do algoritmo

Como mencionado anteriormente, a equação de difusão proposta em [39] foi introduzida com o objetivo de suavizar imagens de forma a preservar as bordas da mesma. A EDP que rege o modelo proposto é dada por:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \operatorname{div} (g(|\nabla u(x, y, t)|) \nabla u(x, y, t)), \quad (2.1)$$

em que, no instante inicial,  $u(x, y, 0) = I$ , e  $g$  é uma função que modela o processo de difusão, representando o coeficiente de condutividade do modelo. Existem diversas funções que podem ser adotadas para representar  $g$ . Sua escolha basicamente define que tipo de região será considerada na difusão. A seguir, podemos visualizar duas funções que podem ser consideradas boas escolhas para  $g$ :

$$g(|\nabla u(x, y)|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2} \quad (2.2)$$

$$g(|\nabla u(x, y)|) = \exp\left(-\left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2\right) \quad (2.3)$$

Detalhes da discretização da EDP (2.1) podem ser explorados em [25].

Embora o modelo de Perona-Malik tenha sido inicialmente desenvolvido para realizar a remoção de ruídos em imagens digitais, ele também pode ser facilmente ajustado para tratar o problema de *inpainting* digital [46].

## 2.2 Modelo *Harmonic Image Inpainting*

O modelo *harmonic image inpainting* é um método simples de retoque digital que faz uso da interpolação na imagem. A imagem restaurada é computada através da equação de Laplace, ou ainda a partir da minimização de um funcional de energia, de Dirichlet, sobre o domínio do retoque  $\Omega$  (vide Figura 2.2). Este processo de interpolação é suave e linear, e consiste no preenchimento dos valores ausentes na imagem com base na média dos valores dados pela borda da região de *inpainting* [40].

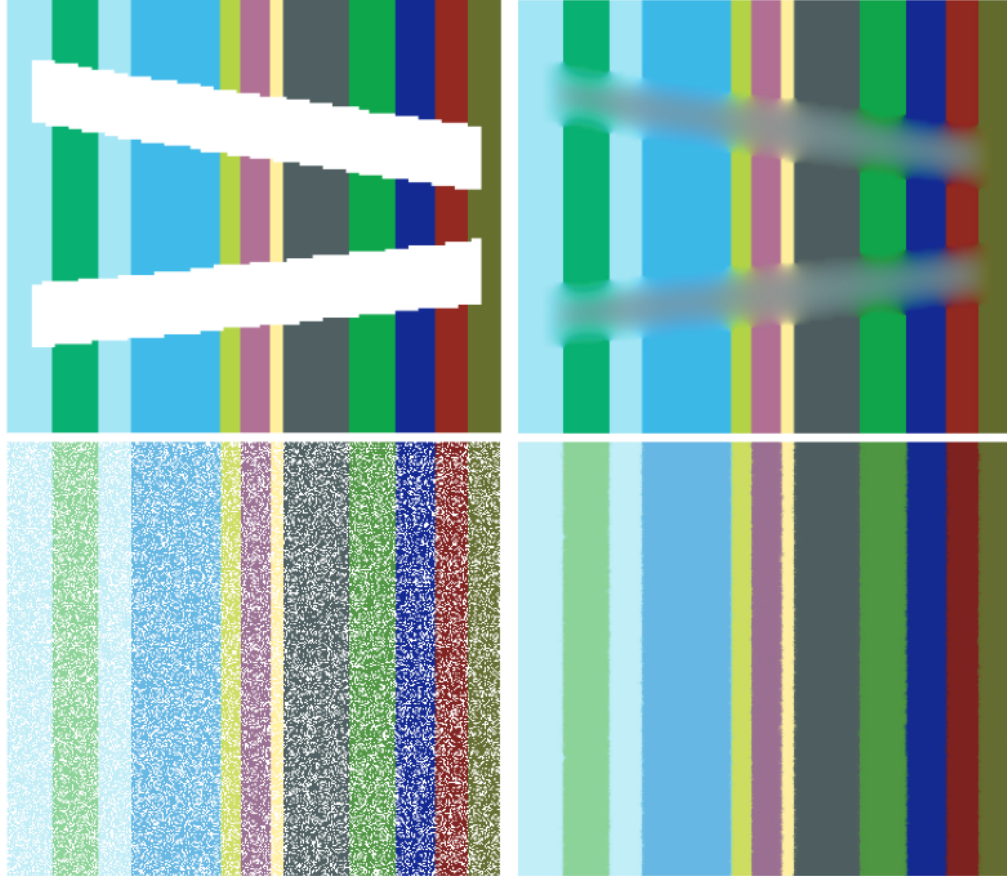


Figura 2.2: Aplicação do modelo *Harmonic Inpainting*: imagens danificadas (*esquerda*) e imagens restauradas (*direita*). Fonte: [40].

### 2.2.1 Detalhes do Algoritmo

Seja  $I \in L^2(\Omega)$  a imagem a ser restaurada e  $D \subset \Omega$  a região de retoque. Assumindo a fronteira de  $D$  como uma curva de Jordan simples e contínua, então, a imagem a ser reconstruída  $u \in H^1(D)$  é calculada como uma solução fraca da equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } D \\ u = I, & \text{em } \partial D \end{cases} \quad (2.4)$$

ou seja, vale a equação

$$\begin{cases} \int_D \Delta u \cdot \Delta \psi dx = 0, & \forall \psi \in H_0^1(D), \\ u = I, & \text{em } \partial D. \end{cases} \quad (2.5)$$

Dizemos que a solução fraca da Eq. (2.4) é uma *extensão harmônica*  $u$  de  $I$  com  $\Omega \setminus D$  para  $D$  [40]. A qualidade da extensão harmônica depende se a função  $I \in C^2(\Omega)$ , ou seja, a solução  $u$  de (2.4) pode ser entendida como a solução do problema de minimização

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \left\{ \int_D |\Delta u|^2 dx, \quad u = I \in \Omega \setminus D \right\}. \quad (2.6)$$

Em [16], Chan e Shen descrevem uma interpolação generalizada somando um termo harmônico e outro anti-harmônico aplicado a segunda fórmula de Green. Portanto, definindo  $x_0 \in D$ , e dada uma imagem suave  $g$  temos:

$$g(x_0) = \underbrace{\int_{\partial D} g(x(s)) \frac{-\partial G(x_0, x(s))}{\partial \vec{n}} ds}_{u(x_0)=g^h(x_0)} + \underbrace{\int_D G(x_0)(-\Delta g) dx}_{g^a(x_0)}, \quad (2.7)$$

com  $g^h$  a parte harmônica da função  $g$ , e  $g^a$  a anti-harmônica.

O método *Harmonic Inpainting* funciona de forma satisfatória desde que a região de retoque  $D$  possa ser definida por uma função suave  $g \in D$ . Entretanto, para casos que apresentam grandes saltos de descontinuidades, este método não produz resultados com boa qualidade visual. Tal problemática inclui domínios de retoque demasiadamente largos na imagem, bem como imagens carregadas de texturas.

## 2.3 Modelo de *Cahn-Hilliard*

Quando uma mistura de dois componentes metálicos é aquecida e, na sequência, rapidamente resfriada a uma baixa temperatura, há como resultado uma breve separação de fases, a qual é denominada de *decomposição espinodal*. John Cahn e John Hilliard [10] propuseram um modelo para o tratamento de interface para problemas similares ao ora descrito.

A equação obtida nesse estudo foi acoplada à técnica de *inpainting* digital proposta por Bertozzi et al. [8]. A equação de Cahn-Hilliard é uma EDP não linear, de quarta ordem, e que tem sido adaptada para explorar problemas de retoque digital. Tal equação foi denominada *Cahn-Hilliard modificada*. A Figura 2.3 evidencia a reconstrução em uma imagem utilizando o Modelo de Cahn-Hilliard.

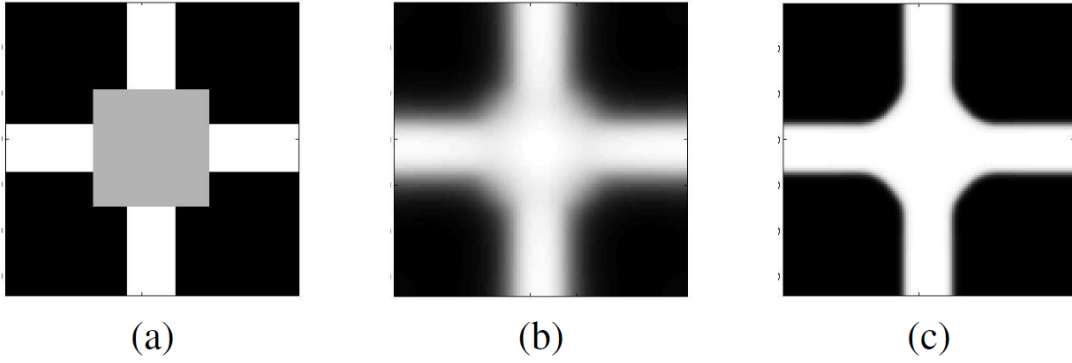


Figura 2.3: Aplicação do modelo *Cahn-Hilliard*. (a) Imagem danificada pela região cinza. (b) Processamento (*imagem em estado intermediário*). (c) Imagem resultante. Fonte: [8].

### 2.3.1 Detalhes do Algoritmo

Seja  $g(u) \in L^2(\Omega)$  uma função pertencente ao domínio da imagem. O problema de evolução pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} u_t = \Delta(-\epsilon \Delta u + \frac{1}{\epsilon} F'(u)) + \lambda 1_{\Omega \setminus D}(g - u), & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial \Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

em que  $F(u)$  é um poço de potencial duplo<sup>1</sup>, ou seja, se  $F(u) = u^2(u - 1)^2$  e  $\lambda \gg 1$ , obtemos dois poços com valores de  $u$  usados pela maioria dos valores em escala de cinza. É possível determinar um poço de potencial nos valores para 0 (preto) e 1 (branco), sendo  $\epsilon$  o parâmetro de transição entre esses valores. Tem-se ainda que,

$$1_{\Omega \setminus D}(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in \Omega \setminus D \\ 0, & x \in D \end{cases} \quad (2.9)$$

é a chamada função indicadora de  $\Omega \setminus D$ . Um possível refinamento deste método é feito generalizando a função  $g \in L^2(\Omega)$ , com a variação de  $|g| \leq 1$ . Logo, a versão sem retoque  $u(x)$  evolui da seguinte forma

$$u_t = -\Delta \left( \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) + 1_{\Omega \setminus D} \lambda (g - u), \quad (2.10)$$

em que,

$$p \approx \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \quad (2.11)$$

<sup>1</sup>O poço de potencial representa a energia potencial em forma de poço envolvida num certo sistema. Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Poço\\_de\\_potencial](https://pt.wikipedia.org/wiki/Poço_de_potencial). Acesso em: 21 nov. 2019

$$p \approx \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}} \right), \quad (2.12)$$

com  $0 < \epsilon \ll 1$  uma versão mais relaxada para a Equação (2.10).

## 2.4 Equação do Transporte

A equação do transporte (também conhecida como *transport inpainting*) foi proposto por Bertalmio et al. [6], que foram pioneiros na reconstrução e tratamento de imagens por equações diferenciais parciais visando simular o transporte das informações de interesse ao longo das linhas de mesma tonalidade de cores presentes na imagem (vide Figura 2.4).



Figura 2.4: Remoção de texto sobreposto a imagem através do Modelo de Transporte: imagem com texto (*esquerda*) e imagem reconstruída (*direita*). Fonte: [6].

Esse modelo tem como base a Equação Diferencial geral do transporte, dada por:

$$u_t = \vec{c} \cdot \nabla u, \quad (2.13)$$

em que  $\vec{c}$  representa o campo direcional da imagem. O método realiza o transporte do gradiente do laplaciano da imagem na direção das linhas de mesma tonalidade de cinza (chamadas de *linhas de nível*), onde, posteriormente, é feito o prolongamento dessas linhas de nível sobre as lacunas das bordas da imagem, sendo, então, preenchidas pelas regiões adjacentes.

Neste caso, o modelo definitivo de *inpainting* de Bertalmio et al. é dado pela seguinte Equação Diferencial Parcial:

$$u_t = \nabla^\perp u \cdot \nabla \Delta u, \quad (2.14)$$

sendo  $u$  a função intensidade da imagem,  $\nabla^\perp$  o gradiente ortogonal, e o símbolo  $\Delta$  o operador Laplaciano. Após a discretização da Equação (2.14), o algoritmo computacional resultante se encerra quando é atingido o estado estacionário da equação, ou seja, quando



$$\nabla^\perp u \cdot \nabla \Delta u = 0. \quad (2.15)$$

Para que o campo direcional esteja sempre apontando para a direção correta, ou seja, para evitar os cruzamento de linhas de nível conforme a equação do transporte é aplicada em sua versão discreta, é necessária a aplicação intercalada de um processo de difusão anisotrópica, resultando assim na Equação Composta (2.16):

$$u_t = \underbrace{\nabla^\perp u \cdot \nabla \Delta u}_{\text{transporte suave}} + \nu \underbrace{\nabla \cdot (g(|\nabla u|) \nabla u)}_{\text{difusão anisotrópica}}. \quad (2.16)$$

sendo  $\nu > 0$  o termo de difusão anisotrópica.

Cabe aqui mencionar que, na presença de regiões muito grandes a serem restauradas, outros métodos de *inpainting* mais sofisticados, mas que derivam do modelo de transporte, podem ser utilizados, como o modelo de Transporte de Coerência (do inglês, *Coherence Transport Inpainting*), apresentado em [32] e que tem um de seus resultados ilustrado na Figura 2.4.

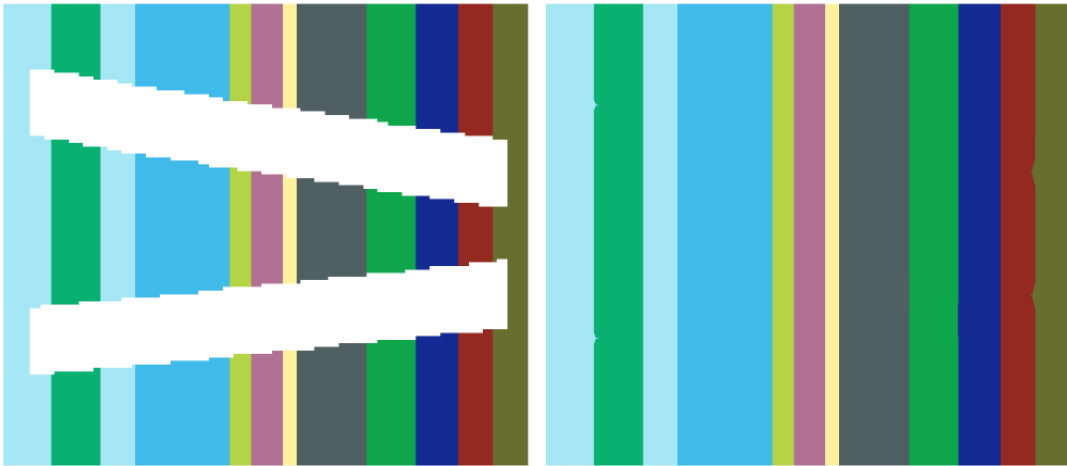


Figura 2.5: Reconstrução de uma imagem sintética usando o modelo de transporte de coerência. Fonte: [40].

### 2.4.1 Detalhes do Algoritmo

Sejam  $\Omega = [0, M] \times [0, N]$  o domínio da imagem e  $F = F(i, j) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma imagem em escalas de cinza, sendo  $D \subset \Omega$  a região danificada. Podemos então discretizar a derivada da  $F$  com relação ao tempo  $t$  tal como segue:

$$U^{n+1}(i, j) = U^n(i, j) + \Delta t U_t^n(i, j), \quad \forall (i, j) \in D, \quad (2.17)$$

onde  $\Delta t$  é chamado passo de iteração. Note que,  $U^0(i, j) = F(i, j)$  e quando  $n \rightarrow \infty$  temos  $U^n(i, j) = U^*(i, j)$  a imagem retocada. Em seguida, discretizando a Equação (2.16) sendo o primeiro termo à direita da igualdade  $\nabla^\perp u \cdot \nabla \Delta u$  escrito da forma

$$U^{n+1}(i, j) = U^n(i, j) + \Delta t \delta \vec{\Delta} U^n(i, j) \cdot \nabla^\perp U^n(i, j), \quad \forall (i, j) \in D. \quad (2.18)$$

Da mesma forma, podemos escrever o segundo termo à direita da Equação (2.16), como:

$$U^{n+1}(i, j) = U^n(i, j) + \Delta t \lambda_\epsilon(i, j) \cdot \Delta \cdot \left( \frac{\nabla U^n}{|\nabla U^n| + \epsilon} \right) (i, j) \cdot |\nabla U^n|(i, j), \quad (2.19)$$

em que  $\lambda_\epsilon$  é a função indicadora que impõe condições de contorno Dirichlet em  $D^\epsilon \setminus D$ :

$$\begin{cases} \lambda_\epsilon = 1, & \text{em } D \\ \lambda_\epsilon = 0, & \text{em } \partial D^\epsilon \end{cases} \quad (2.20)$$

com  $D^\epsilon$  sendo a dilatação de  $D$  em um círculo de raio  $\epsilon$ .

Os modelos descritos acima empregam em suas formulações EDPs para a tarefa de restauração de imagens. Embora estas se diferenciam das técnicas baseadas no método SPH, há similaridades quanto ao uso de “mecanismos de interpolação” a fim de criar novos valores de tonalidades de cores para preencher os pixels presentes no domínio de retoque. Assim, devido a tal similaridade, esses métodos foram escolhidos para serem analisados no contexto de *inpainting* deste trabalho, o qual utiliza o paradigma SPH de dinâmica de partículas para a realização da restauração.

A seguir introduzimos os métodos especificamente construídos sob a concepção do método SPH para retoque digital de imagens, além de uma visão mais geral sobre a utilização do método SPH em outras linhas de estudo.

## Método de Partículas SPH

O método SPH (do inglês *Smoothed Particle Hydrodynamics*) é um modelo numérico Lagrangeano que não utiliza malha em sua formulação, além de ser relativamente simples do ponto de vista da modelagem matemática. Dessa forma, tal método vem sendo extensivamente empregado em problemas de dinâmica dos fluidos e modelagem de fenômenos naturais.

De forma sucinta, pode-se afirmar que o método SPH determina uma aproximação para uma função e suas derivadas a partir de uma média local, fazendo uso da interpolação numérica. Sua formulação principal pode ser dividida em dois estágios: representação por integral e aproximação por partículas.

Na representação por integral, uma função  $f$  definida em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é formulada pela convolução de  $f$  por uma função suave  $W_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f^h(u) = \int_{\Omega} f(x)W_h(u-x)d\Omega, \quad (3.1)$$

onde  $W_h$  representa o núcleo suave (ou apenas núcleo) e, em geral, é uma função diferenciável com suporte compacto e integral unitária. Dessa forma, tem-se:

$$W_h = W(R), \quad (3.2)$$

onde  $R = \|x\|/h$ , com  $W(r) = 0$  se  $r > k$ , e  $k \in \mathbb{R}$  sendo o fator de escala suave associado ao núcleo  $W$ .

No caso da aproximação por partículas, por se tratar de um número finito de elementos (que, no caso de imagens, podem ser os pixels), o método SPH é abordado pela discretização da integral, ou seja, a partir do somatório de uma coleção de partículas distribuídas aleatoriamente sobre o domínio  $\Omega$  do problema. Sendo assim,  $f$  pode ser obtida por intermédio de uma vizinhança de partículas  $x$  de  $u$  da forma:

$$f^h(u) = \sum_{x \in V(u)} f(x) W_h(u-x) V_x, \quad (3.3)$$

sendo  $V_x$  o volume finito substituindo  $d\Omega$ . Assim, um número finito de partículas são consideradas na aproximação. Esta condição é definida por

$$V(u) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - u\| \leq kh\}, \quad (3.4)$$

onde  $V(u)$  é chamado de suporte compacto de  $u$ , e  $kh$  o raio de influência da função  $W$ . Note que, o valor de  $h$  deve ser escolhido de forma adequada, pois ele está relacionado diretamente ao número de vizinhos selecionados. Se o valor de  $h$  for muito pequeno, o número de vizinhos pode ser insuficiente, impactando assim na acurácia do método. Da mesma forma, se  $h$  for absurdamente grande, o esforço computacional será alto, além da perda de propriedades importantes pela suavização excessiva. Por isso, existem algumas abordagens para determinar uma suavização adequada de  $h$ , sendo uma alternativa a aplicação de uma técnica de agrupamento.

### 3.1 Aplicação em Dinâmica dos Fluidos

Fenômenos envolvendo fluxo de fluidos estão presentes em nosso cotidiano, tanto em tarefas mais usuais como ao abrir uma torneira, ou até mesmo em desastres naturais, como por exemplo, no rompimento de uma barragem (vide Figura 3.1). Esses fenômenos são amplamente estudados e geram contribuições nas mais diversas áreas do conhecimento (alguns exemplos envolvendo os tópicos supracitados podem ser melhor explorados em [27], [19] e [17]).



Figura 3.1: Imagem de uma barragem. Foto: Felipe Werneck - Ascom/Ibama

Com a finalidade de reunir estudos teóricos e experimentais com a prática, tem-se investido arduamente em métodos computacionais para modelar equações que possam governar a dinâmica de fluidos como, por exemplo, as equações de Navier-Stokes. Alguns fatores físicos como convecção, difusão, tensão superficial e turbulência podem trazer complexidade adicional para essas simulações, os quais são devidamente ajustados e estudados a partir do avanço de pesquisas em cada uma dessas frentes.

De maneira geral, podemos classificar o comportamento do escoamento de fluidos de duas formas:

- **Estacionário ou laminar:** sem variações bruscas de comportamento, o fluido escoava como lâminas.
- **Turbulento:** comportamento imprevisível, podendo assumir qualquer forma ou direção.

Em alguns casos, existe uma junção desses dois comportamentos, separados por uma transição denominada de *escoamento transicional*. A representação desses comportamentos podem ser vistas na Figura (3.2), exemplificada pela fumaça de um cigarro<sup>1</sup>.

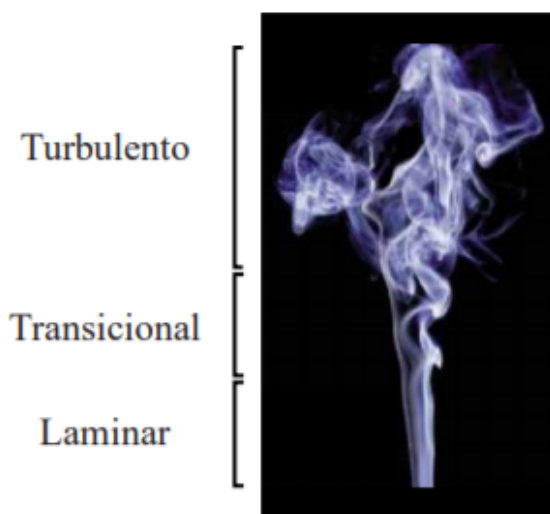


Figura 3.2: Diferentes tipos de comportamento do escoamento de um fluido representados pela fumaça de um cigarro.

O método SPH tem sido amplamente utilizado nas mais diversas aplicações envolvendo dinâmica de fluidos, tanto para escoamentos do tipo laminar [28], quanto para escoamentos do tipo turbulento [44]. Alguns trabalhos relacionados podem ser citados, como o uso do método SPH para simulação de escoamentos multifásicos e da tensão superficial [34], simulação de quedas d'água [41] (ver Figura 3.3), modelagem do fluxo sanguíneo ventricular [9], entre outros.

<sup>1</sup>Imagem disponível em: <https://www.nuclear-power.net/nuclear-engineering/fluid-dynamics/turbulent-flow/>. Acesso em: 20 nov. 2019.

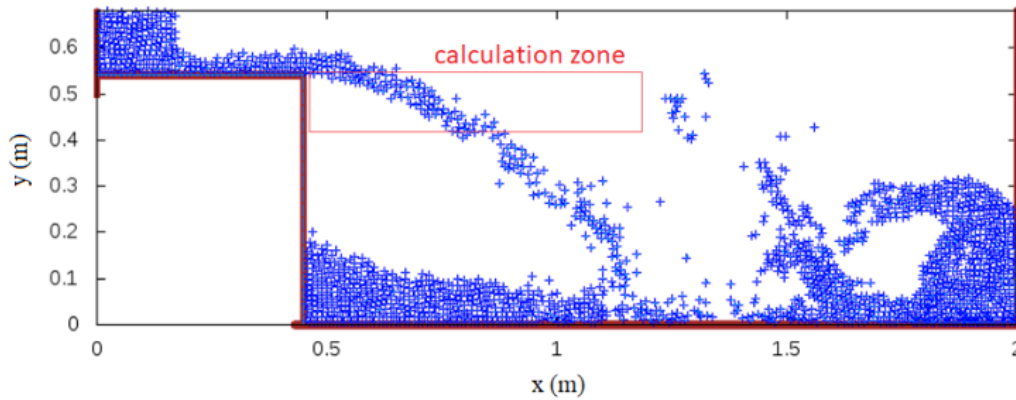


Figura 3.3: Simulação de queda d'água com altura de 0.55 metros utilizando o método SPH. Fonte: [41].

## 3.2 Aplicações em Computação Gráfica

Atualmente, existem muitos trabalhos na literatura que relacionam aplicações da área de dinâmica dos fluidos com a área de computação gráfica a partir do uso do método SPH, sendo uma dessas aplicações a modelagem e deformação de corpos. Corpos elásticos, que recuperam a forma original após qualquer deformação, são usualmente modelados por métodos via malhas, como, por exemplo, estratégias de diferenças finitas. No entanto, essa classe de métodos não é eficaz para corpos inelásticos, casos em que o uso do método SPH se torna vantajoso, já que possui maior facilidade em lidar com superfícies livres e trata condições de contorno de forma mais simples e eficiente [23].

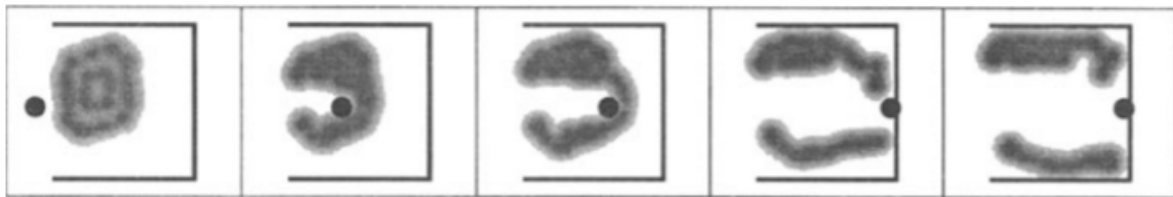


Figura 3.4: Animação 2D, onde um material deformável é cortado por um corpo rígido. Fonte: [23].

O método de SPH tem sido utilizado para simulações de fluidos, tanto monofásicos quanto bifásicos. Em [36], os autores resolveram as equações de Navier-Stokes utilizando o método SPH, desencadeando diversos trabalhos importantes relacionados, que descrevem fenômenos não simulados por métodos que fazem uso de malha computacional. Dentre esses fenômenos, pode-se citar: a modelagem bifásica de fluidos como água e ar que ocorrem ao ferver a água [35]; simulação da transição de fluidos não newtonianos de alta para baixa viscosidade [38]; modelagem de espumas e borrifos d'água e; simulação de líquidos gasosos que forma bolhas, desenvolvendo animações realistas que mostram o derramar de cerveja em um copo (vide Figura 3.5) [21].



Figura 3.5: Simulação realista do derramamento de cerveja no copo utilizando o método SPH. Fonte: [21].

### 3.3 Método G-SPIR

Um problema recorrente em PDI é a restauração de uma grande quantidade de pixels aglomerados em uma imagem, tal como é o propósito de nosso estudo. Nesse sentido, em 2017, o método clássico SPH foi modificado de forma a funcionar com uma abordagem de agrupamento para problemas de retoque digital. A essa modificação foi dada o nome de método *G-SPIR* [33].

Neste contexto, dado um suporte compacto de centro  $p$  e de raio  $h_j$ , a vizinhança é formada pelas partículas  $x_j$  mais próximas do centro (chamadas de NNP). Neste caso, a suavização de  $h_j$  é determinada gradativamente variando-o até que se alcance as  $k$  primeiras partículas vizinhas mais próximas no suporte compacto (vide Figura 3.3).



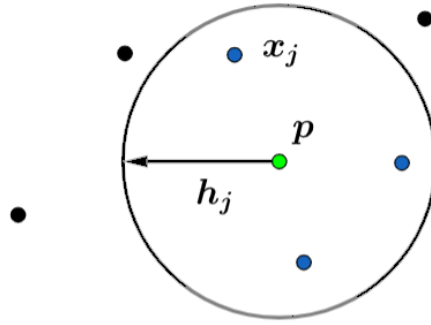


Figura 3.6: Método G-SPH: a partícula  $x_j$  pertence a vizinhança (*partículas em azul*) se a mesma se encontra dentro do suporte compacto  $V(p)$ .

### 3.3.1 Detalhes do Algoritmo

O método G-SPH recebe a imagem degradada, a máscara que define o local de restauração ( $\Omega$ ), o valor de  $k$  para determinar as partículas vizinhas e, conseqüentemente, o raio de suavização  $h = h_j$ . A imagem degradada pode ser representada por

$$I : [1, a] \times [1, b] \subset \mathbb{N}^2 \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

ou seja, uma imagem de dimensões  $a \times b$ , discretizada em  $p_n$  partículas (*pixels*) de coordenadas  $(i_k, j_k) \in [1, a] \times [1, b]$ , onde  $I_k = I(i_k, j_k)$  é a cor do pixel e  $n = a \cdot b$ .

A máscara, por sua vez, é dada por

$$M : [1, a] \times [1, b] \subset \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

sendo a região de retoque ( $\Omega$ ) formada apenas com os valores iguais a zero, ou seja,

$$M(i_k, j_k) = 0 \Leftrightarrow p_k \in \Omega. \quad (3.7)$$

Para cada partícula  $p_k \in \Omega$ , é necessário determinar as  $k$  partículas vizinhas mais próximas, formando assim um conjunto dessa vizinhança, denotado por  $N_k$ . Este cálculo deve ser feito antes de qualquer outro na referida abordagem de retoque digital.

O valor de  $h$  é determinado por

$$h_i = \alpha \max\{d_{ij} : j \in N_i\}, \quad (3.8)$$

em que  $\alpha$  é um parâmetro (de comprimento suave) que evita uma baixa contribuição das partículas distantes de  $p_i$ , e  $d_{ij}$  é a distância euclidiana entre  $p_i$  e  $p_j$ .



Após determinados os valores  $N_i$  de cada partícula  $p_i$  do domínio de retoque digital, a restauração é feita através da seguinte equação discreta:

$$I_k = \sum_{j \in N_k} I_j W_{kj} V_j, \quad (3.9)$$

onde  $V_j = 1/k$  é chamado de elemento de área da partícula  $q_j$ , tendo sido definido da mesma forma para todas as partículas  $q_j$ , com o intuito de não gerar desequilíbrio na Equação (3.9).

A função de núcleo suave  $W_{kj}$  pode ser aplicada com base em duas propostas distintas:

- Através da seguinte gaussiana

$$W(R_j, h_i) = \frac{1}{\pi h_i^2} e^{-R_j^2}, \quad (3.10)$$

- Através do uso de uma *spline* de quinta ordem, dada por

$$W(R_j, h_i) = \frac{7}{478\pi h_i^2} \begin{cases} (3 - R_j)^5 - 6(2 - R_j)^5 - 15(1 - R_j)^5, & \text{se } 0 \leq R_j < 1 \\ (3 - R_j)^5 - 6(2 - R_j)^5, & \text{se } 1 \leq R_j < 2 \\ (3 - R_j)^5, & \text{se } 2 \leq R_j < 3 \\ 0, & \text{se } R_j \geq 3 \end{cases} \quad (3.11)$$

com  $R_j = ||p_i - q_j||$ .

A Figura 3.7 ilustra, resumidamente, o processo de restauração de uma imagem a partir do uso do G-SPIR, enquanto a Figura 3.8 mostra o resultado da restauração de uma imagem mediante à aplicação do referido método de retoque digital.

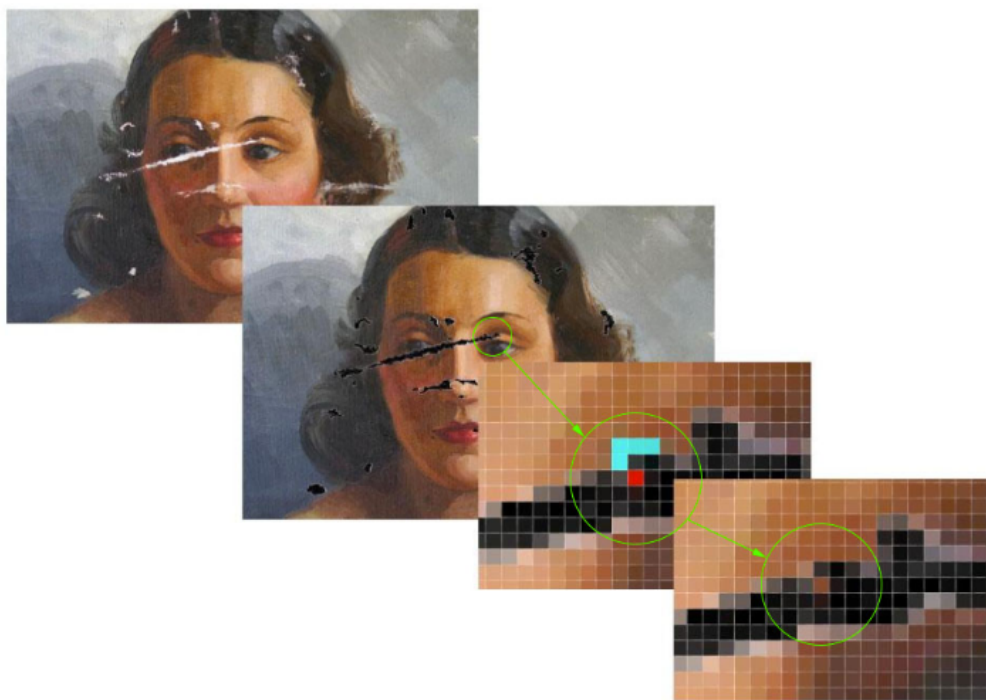


Figura 3.7: Processo de restauração de imagem utilizando o método G-SPIR. De cima para baixo: imagem degradada; máscara; determinação dos vizinhos mais próximos (*pixels em azul*); atribuição de cor ao pixel retocado (*em vermelho*) pelo método SPH. Fonte: Mazzini [33].



Figura 3.8: Restauração utilizando o método G-SPIR. Fonte: Mazzini [33].

É válido salientar que, até o presente momento, os métodos ora apresentados fazem uso de abordagens de reconstrução *pixel-a-pixel*. Assim, no próximo capítulo, discutiremos técnicas de *inpainting* baseadas na chamada abordagem de replicação da informação via blocos de pixels. Além de tratarem o problema sob a perspectiva da reconstrução de vários pixels de forma simultânea, tais técnicas usualmente utilizam estratégias de ordenação de prioridade durante o processo de reconstrução, conforme discutido no capítulo seguinte.

# Modelo de Restauração via Replicação por Blocos

As técnicas de restauração de imagens discutidas anteriormente como o G-SPIR e aquelas baseadas em EDPs apresentam como limitação a questão de não serem adequadas para preencher áreas extensas de pixels faltantes, uma vez que resultam na suavização excessiva dos elementos na imagem, ou ainda, acabam por danificar certas características naturais da mesma (ver Capítulo 6, de resultados experimentais).

Neste capítulo, apresentamos abordagens de síntese da informação por blocos de pixels, as quais visam contornar as limitações acima, uma vez que se mostram adequadas para recuperar grandes áreas e regiões texturizadas da imagem.

De modo a melhor contextualizar essa linha de estudo e fomentar as discussões futuras, apresentamos a ilustração a seguir, vista em Casaca [14], que representa o retoque das áreas que é realizado por intermédio da reprodução de padrões de regiões de textura da própria imagem.

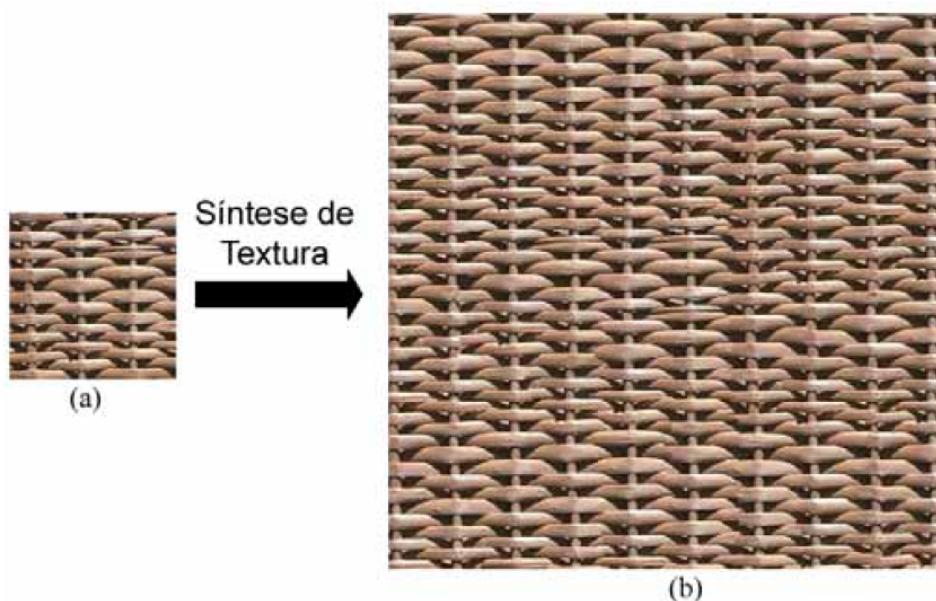


Figura 4.1: Processo de síntese de textura. Através da amostra (a), é obtido o resultado da síntese de textura (b). Fonte: Casaca [14].

Na prática, a ideia acerca desse tipo de algoritmo – para o caso de tratamento de textura – é bastante simples: localizar o “melhor” pixel na imagem amostra e copiá-lo para a região degradada (ou a área que se quer estender, como no caso da figura anterior). Dessa forma, o objetivo é encontrar o melhor conjunto de pixels (*bloco de pixels*) que se ajusta à área-alvo, a partir de uma medida de similaridade de pixels.

Contudo, mesmo demonstrando-se conveniente na realização de muitas tarefas como o preenchimento de objetos, recuperação de imagens, compressão de vídeos, etc, a forma como a síntese de texturas é aplicada pode resultar em falhas na recomposição da imagem. Por exemplo, uma região composta por diferentes tipos de texturas, isso dá-se pois a região de amostragem dos pixels é determinada por toda imagem. Além disso, o alto custo computacional também é outro ponto que deve ser ponderado na aplicação desse tipo de estratégia, uma vez que a cada iteração do processo de síntese, é selecionado o pixel mais adequado na imagem a fim de recompor a região que se quer restaurar.

Para contornar os problemas discutidos acima, os autores Criminisi et al. [22] apresentaram um tratamento melhorado do processo de síntese de texturas. No referido método, ao invés de uma perspectiva de retoque **pixel a pixel**, foi proposto uma técnica de síntese via blocos de pixels, além de uma região de amostragem menor ( $\Phi$ ) com a preocupação de utilizar apenas os pixels da vizinhança da região de reconstrução. Além dessas melhorias, foi também adotado uma ordem de prioridade durante o processo de preenchimento dos pixels, o qual procura respeitar as variações de intensidades locais da imagem e as limitações de fronteiras.

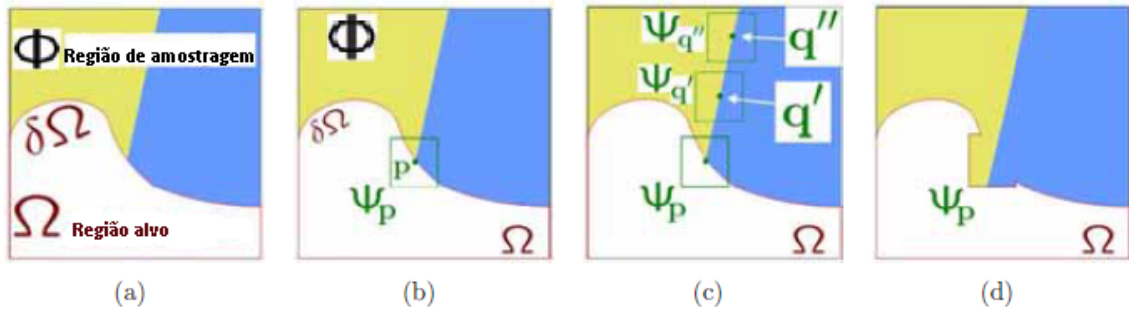


Figura 4.2: Ilustração do processo de síntese de textura - Modelo Criminisi e colaboradores [22].

O esboço da estratégia adotada de replicação da informação via blocos de pixels, representada na Figura 4.2, mostra em (a) a imagem original, que contém a região alvo ( $\Omega$ ) onde será aplicado o processo de *inpainting*, sua região de contorno ( $\partial\Omega$ ) e a região de amostragem ( $\Phi$ ), o pixel  $p \in \Omega$ , o qual é obtido a partir de uma seleção de prioridade, gerando assim o bloco  $\Psi_p$ , de centro  $p$ , representado na (Figura 4.2(b)). Tem-se como proposta sintetizar a região de  $\Psi_p$  com o objetivo de se determinar o bloco mais similar dentre os blocos candidatos  $\Psi_{q'}$  e  $\Psi_{q''}$ , como mostra (c). Ao fim, a seleção de retoque  $\Psi_p$  é restaurada copiando o bloco mais similar (Figura 4.2(d)), e o processo finaliza quando a região alvo ( $\Omega$ ) é totalmente restaurada.

O mecanismo de prioridade para a ordenação de preenchimento dos pixels é descrito pela Equação 4.1 a seguir:

$$P(p) = C(p).D(p) \quad (4.1)$$

onde a prioridade  $P(p)$  equilibra tanto a continuidade das estruturas básicas da imagem, quanto a direção das intensidades dos isótopos da região, que são formadas pelas linhas de mesma intensidade de cor na imagem.

O termo de confiança,  $C(p)$ , atribui um maior grau de influência ao pixel  $p$  próximo de formas topológicas da imagem, geralmente definidas ao longo da fronteira da região de retoque, garantindo assim sua preferência no processo de restauração, enquanto o termo de dados,  $D(p)$ , garante a orientação de acordo com a direção e intensidade de cores dos isótopos nessa região. O autor [22] ilustra uma representação dos termos de dados e confiabilidade atuando de forma separada.

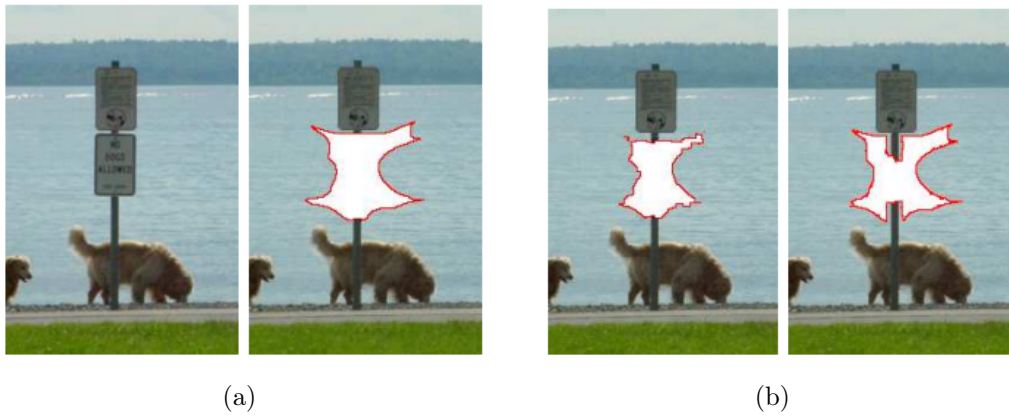


Figura 4.3: Processo de *inpainting* em (a) imagem de entrada (à esquerda), região de retoque (à direita), e (b) atuação individual do termo de confiança (à esquerda) e termo de dados (à direita).

Após o método receber a imagem de entrada e a máscara da região de retoque, respectivamente apresentados em (Figura 4.3 (a)), as primeiras iterações em (Figura 4.3 (b)) demonstram como o componente  $D(p)$  (à esquerda) faz a restauração a partir das bordas (de fora para dentro), enquanto que  $C(p)$  (à direita) atua nas regiões de prioridades presentes próximas a placa.

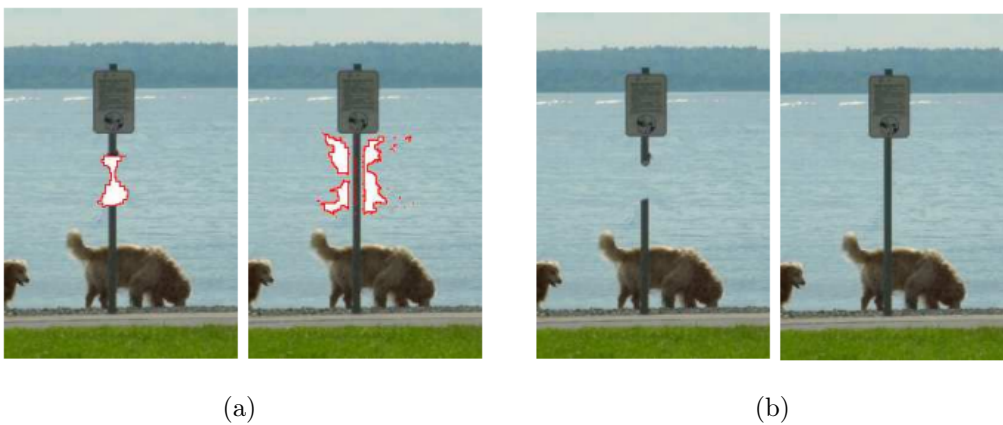


Figura 4.4: Após algumas iterações do processo completo de *inpainting* (a), e a finalização do algoritmo sem e com o mecanismo de ordenação, em (b).

Ao longo do processo, os extremos da região de retoque estão praticamente preenchidos pelo termo de dados  $D(p)$ . Já o termo de confiabilidade se preocupou em retocar a placa para, depois, dissipar os pixels para o restante da região em (Figura 4.4 (a)). No final do processo de *inpainting* (Figura 4.4 (b)), o termo de dados – sem se preocupar com a prioridade – acabou preenchendo as lacunas de forma incorreta. Um questionamento intuitivo que poderia ser levantado é o por que utilizar o produto dessas duas variáveis e não apenas o termo de confiabilidade  $C(p)$ , já que ele aparentemente apresenta resultados satisfatórios. A resposta para essa questão é que o termo de confiabilidade garante precisão até certo ponto e, essa explicação é melhor detalhada mais adiante.

Os termos do produto da Equação (4.1) são matematicamente descritos tal como segue:



$$C(p) = \frac{\sum_{q \in \Psi_p \cap (D-\Omega)} C(q)}{|\Psi_p|}, \quad D(p) = \frac{|\nabla f_p^\perp \cdot \vec{\eta}_p|}{\alpha}, \quad (4.2)$$

em que  $f$  é a imagem de entrada,  $D$  seu domínio,  $|\Psi_p|$  é o número de pixels da área predeterminada do bloco  $\Psi_p$ , de centro  $p$ ,  $C(q)$  representa o termo de confiança para o bloco com prioridade máxima,  $\alpha$  é um fator de normalização (255 para imagem em escala de cinza),  $\vec{\eta}_p$  é um vetor normal unitário em relação à fronteira  $\partial\Omega$  no ponto  $p$  da região alvo  $\Omega$  e  $\perp$  denota o operador ortogonal.

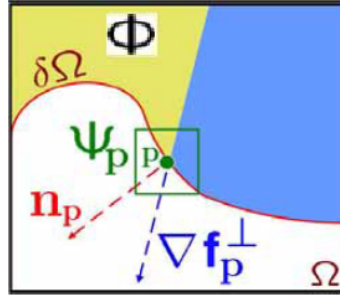


Figura 4.5: Interpretação do termo de dados  $D(p)$ : Computado o bloco  $\Psi_p$ ,  $\vec{\eta}$  representa o vetor normal no pixel  $p$  no contorno da fronteira  $\partial\Omega$  enquanto que  $\nabla f_p^\perp$  determina a direção dos isófotos nesse mesmo *pixel*. Fonte [22].

Na prática, é atribuído um “chute inicial” para o termo  $C(q) = 1$  para cada um dos pixels presentes na região  $\Phi$ , a qual irá prover os blocos de pixels para a reconstrução dos pixels alvo (localizados nas regiões de bordas) e, inicializa-se  $C(q) = 0$  para os pixels alvos que serão reconstruídos em  $\Omega$ . A cada iteração do método, após um conjunto de pixels serem restaurados, os respectivos valores de  $C(p)$  calculados não se modificam nas iterações seguintes, e cada pixel alvo irá receber um rótulo  $C(p)$ , que determinará o nível de confiança  $p$  ao longo do processo de restauração da imagem.

No ajuste de seleção da melhor escolha para o bloco alvo a ser preenchido, é aplicada uma determinada métrica e, todos os dados do bloco ótimo selecionado são então atribuídos à região alvo. Este cálculo é representado pela Equação (4.3) a seguir:

$$\Psi_{\hat{q}} = \arg \min_{\Psi_q \in \Phi} d(\Psi_p, \Psi_q), \quad d(\Psi_p, \Psi_q) = \sum_{i \in \Phi} (\Psi_{q_i} - \Psi_{p_i})^2, \quad (4.3)$$

sendo que  $\Psi_{\hat{q}}$  refere-se ao bloco ótimo escolhido, e  $d$  a métrica SSD (*Sum of Squared Differences Metric*).

No entanto, em alguns casos, o processo de preenchimento por prioridade pode acabar considerando simultaneamente mais de uma estrutura na informação da imagem (Figura 4.7). Isto está relacionado ao termo de confiabilidade  $C(p)$ , o qual pode não funcionar de forma satisfatória em regiões internas às bordas. Assim, uma dificuldade com o cálculo do termo de prioridade na abordagem original de Criminisi e colaboradores é que  $C(p)$  tende

a se aproximar de valores muito pequenos rapidamente quando os pixels de prioridades maiores já foram utilizados.

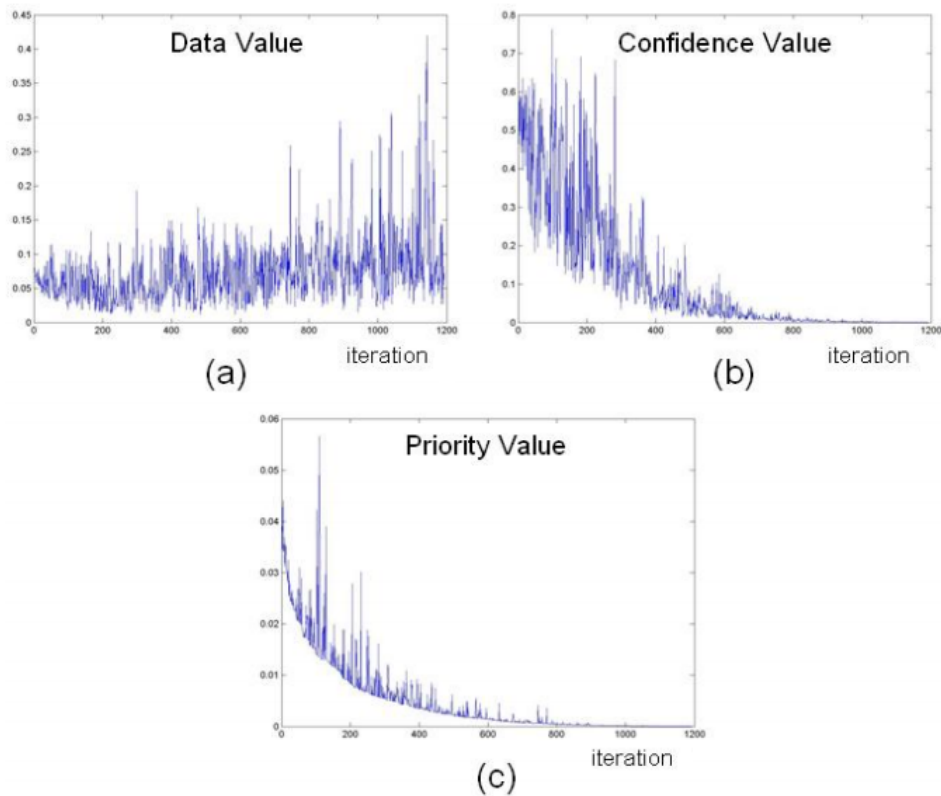


Figura 4.6: Ilustração do comportamento do (a) termo de dados, (b) termo de confiança e (c) função de prioridade para o processo de preenchimento. Fonte: Cheng [20].

Desta forma, o fenômeno conhecido como **efeito de queda** (do inglês *Dropping Effect*), torna as prioridades calculadas irreconhecíveis e, portanto, leva a uma ordem de preenchimento incorreta. Os erros se propagam continuamente e a incerteza dos valores de prioridades fazem com que a região alvo comece a ser aleatoriamente preenchida, ocorrendo uma quebra nas estruturas norteadoras para a parte central da imagem reconstruída. O efeito de tal fenômeno fica perceptível em Figura (4.7).

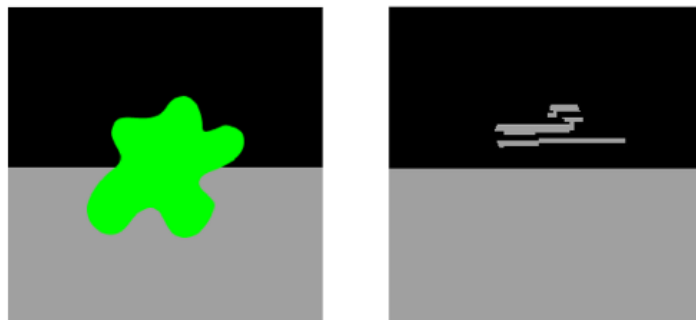


Figura 4.7: Ilustração da imagem a ser restaurada (*à esquerda*) e resultado com o modelo de Criminisi (*à direita*). Fonte [45].



A fim de alcançar melhores resultados e evitar a deficiência prescrita, em [45] um termo regularizador foi inserido no termo de confiança com a intenção de suavizar (visto em Figura 4.9) para que a função de prioridade (4.1) disponibilize a ordem de seleção dos pixels da melhor forma possível.

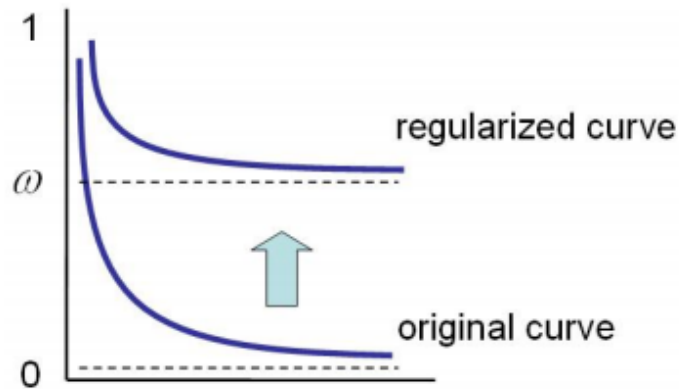


Figura 4.8: Ilustração da regularização da curva. Fonte [20]

Os autores Wang e colaboradores [45] utilizaram uma função regularizante  $R_c(p)$  para que a queda no termo de confiabilidade seja menos acentuada corrigindo os erros na estrutura de busca, da forma:

$$R_c(p) = (1 - \omega)C(p) + \omega \quad (4.4)$$

sendo  $\omega$  o fator de regularização que suaviza a curva de confiabilidade do termo  $C(p)$ . Usando esta nova formulação (isto é,  $R_c$  como termo de confiança), o valor da referida métrica é regularizada para o intervalo  $[\omega, 1]$ . Assim, a prioridade é dada por:

$$P(p) = R_C(p).D(p) . \quad (4.5)$$

Com esse ajuste, mesmo o termo de confiança  $C(p)$  refletindo as regiões de textura em torno do pixel  $p$ , sendo elas consistentes ou não, o fator regularizador  $\omega$  pode ser utilizado para melhorar o processo de preenchimento da imagem, servindo assim como um parâmetro de ajuste, onde após um estudo empírico, o autor definiu  $\omega \in [0.1, 0.7]$ .



Figura 4.9: Remoção de objeto no processo de *inpainting* de Wang e colaboradores. Na sequência: Imagem original, Retoque digital utilizando a função regularizante e *Inpainting* baseado no algoritmo original, de Criminisi e colaboradores.

Com a atualização do termo de confiabilidade, a proposta de Wang e colaboradores foi capaz de promover a seleção dos melhores *patches* – blocos de pixels – originados a partir da ordem de prioridade entre os pixels (centro dos blocos), trazendo assim consistência para o retoque digital da imagem (Figura 4.9), principalmente na região central, onde o método apresentava maior dificuldade.

Na sequência, apresentamos nossa proposta de abordagem adaptada para operar a partir do paradigma de replicação via blocos de pixels e do método SPH, motivado pelos estudos anteriores discutidos nesse e no capítulo anterior.

## Método SPH via Replicação por Blocos e Prioridade de Preenchimento

O método SPH adaptado para operar com blocos de pixels é uma tentativa de aperfeiçoar o método G-SPIR original, onde as boas características da técnica tal como apresentadas na Seção 3.3 continuam sendo válidas, porém, com a vantagem de que novas funcionalidades e características são incorporadas em um novo algoritmo, incluindo uma melhor performance computacional, bem como ainda a possibilidade de se trabalhar com regiões texturizadas na imagem.

Desta forma, a busca sobre os pixels alvos no processo de retoque de uma imagem digital é feito a partir de duas vias: o domínio da intensidade da imagem, e o domínio geométrico do problema. A inspeção definida em termos do volume compacto ( $V$ ) é mais sofisticada, fazendo uma busca local levando-se em consideração características pontuais das suas proximidades. Portanto, a região de rastreamento necessita ser mais compacta. Note que, as duas regiões de buscas são centralizadas no bloco a ser restaurado (Figura 5.1), com isso, a cada iteração, os setores de busca acompanham esta localização do bloco de referência.



Figura 5.1: Restauração de imagem digital: Imagem de entrada (à esquerda) e regiões alvo (à direita) priorizando a intensidade (retângulo vermelho) e a proximidade (círculo verde) centralizadas no pixel  $p$  central do bloco a ser restaurado.

Na proposta inicial do G-SPIR, os autores consideraram um conjunto de todos os volumes compactos ( $N_k$ ), pois o cálculo desses volumes eram realizados antecipadamente. Entretanto, em nossa abordagem, tal situação inviabiliza o uso dos pixels reconstruídos nas próximas iterações. Portanto, foi necessário ajustar o modelo computando apenas um volume compacto a cada iteração referente ao bloco de prioridade em questão.

Já com relação à escolha dos blocos dado os dois critérios discutidos anteriormente: intensidade e proximidade, todos os possíveis blocos candidatos para o reconstrução da região alvo da Figura 5.1 foram dispostos lado a lado, na forma vetorizada, na Figura 5.2 (a). Assim, a partir desse processo de amostragem, são selecionados os melhores blocos candidatos referentes ao critério de intensidade dos pixels (Figura 5.2 (b)), e ao de proximidade (Figura 5.2 (c)).

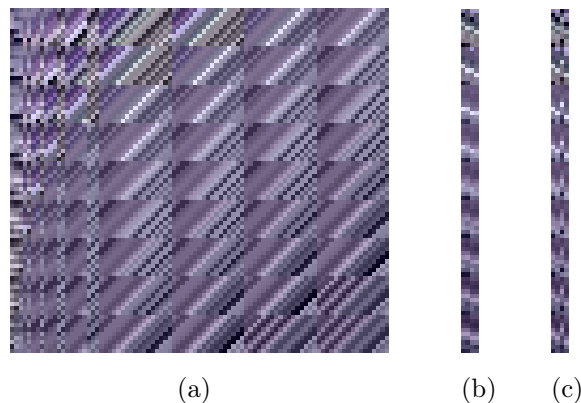


Figura 5.2: Regiões de busca: (a) Possíveis blocos candidatos (b) quatro blocos vetorizados definidos pela intensidade e (c) quatro blocos vetorizados definidos pela proximidade.

Em resumo, a partir da seleção realizada em (b) e (c) da Figura 5.2, uma média resulta dois blocos definitivos, definidos pela semelhança de intensidade das cores e proximidade da região de retoque. Na sequência, uma ponderação é empregada a qual prioriza a importância desses dois blocos e o quanto será contabilizado de cada um na região de

retoque. Mais detalhes a respeito desse procedimento serão apresentados na próxima seção.

O número  $k$  de candidatos que foram selecionados possui relação direta com a necessidade de se suavizar ou não a região de retoque, pois com o cálculo da média envolvendo esses blocos, possíveis blocos com maior nível de detalhes podem acabar se perdendo e, a depender da imagem, esta ausência de detalhes pode influenciar de maneira negativa no desfecho do retoque digital. Na Seção 6.2.3 apresentamos um análise da variação do número de  $k$  de blocos mais adequados.

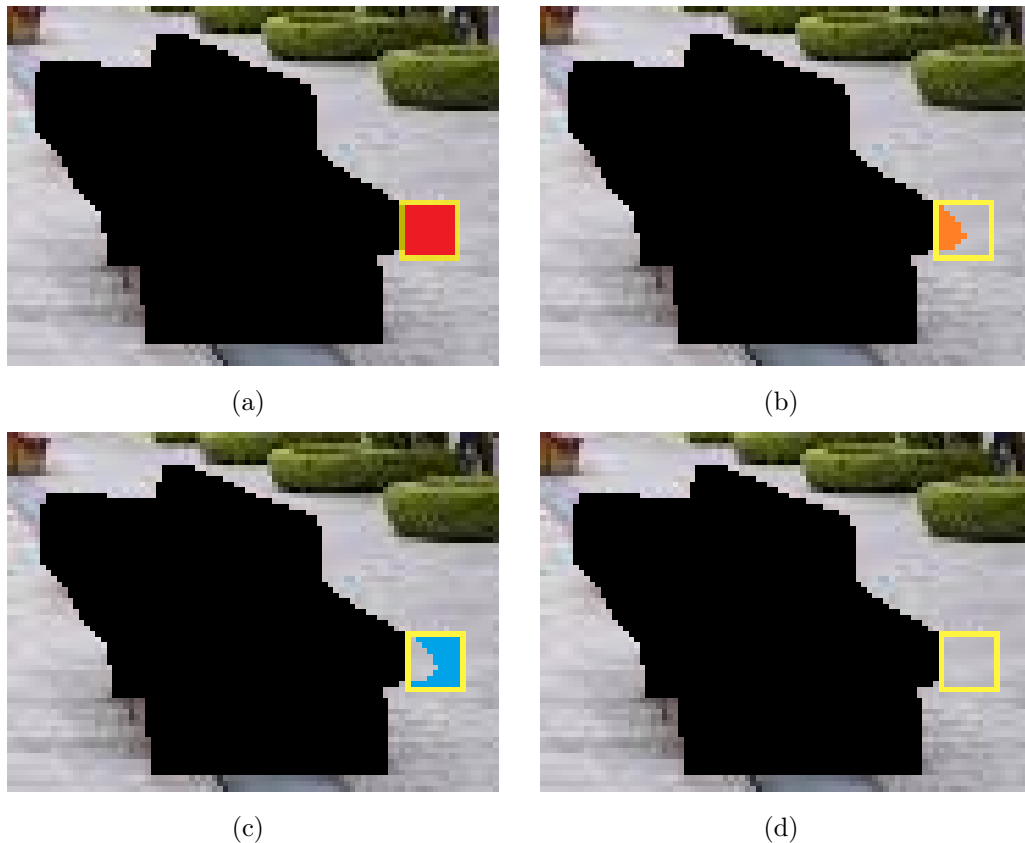


Figura 5.3: Processo de retoque de imagem digital: Área de atuação (*retângulo amarelo*), (a) região do bloco alvo (*vermelho*), (b) região de retoque (*laranja*), (c) região desconsiderada (*azul*) e (d) retoque finalizado.

Na Figura 5.3 (a), o bloco alvo, representa a totalidade da região de prioridade no processo de *inpainting*, (b) descreve apenas a região (*laranja*) que é utilizada em todos os cálculos do método proposto, enquanto a região (*azul*) representa os pixels descartados no processo (c), encerrando-se com a aplicação do bloco resultante no local degradado em (d).

## 5.1 Detalhes implementacionais do Algoritmo Proposto

O método SPH via replicação de blocos de pixels recebe a imagem a ser recuperada, ( $I$ ), a máscara de retoque  $\Omega$ , que define o local de restauração, o valor de  $k$ , que determina

a quantidade de blocos de partículas vizinhas, e a região de amostragem por intensidade,  $\Phi$ .

Assim, seja a imagem degradada, de dimensões  $a \times b$ , discretizada em  $p_n$  partículas (*pixels*) de coordenadas  $(i_k, j_k) \in [1, a] \times [1, b]$ :

$$I : [1, a] \times [1, b] \subset \mathbb{N}^2 \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

e a máscara

$$M : [1, a] \times [1, b] \subset \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

$$M(i_k, j_k) = 0 \Leftrightarrow p_k \in \Omega. \quad (5.3)$$

Seja o conjunto dos pixels  $p \in \Omega$  que posteriormente serão alocados como centros nos blocos alvo durante o processo de restauração da imagem. A ordem de preenchimento de um dado pixel  $p$  é definida a partir da seguinte medida de prioridade:

$$P(p) = R(p) \cdot D(p), \quad (5.4)$$

em que:

$$R(p) = (1 - \omega)C(p) + \omega, \quad D(p) = \frac{|\nabla f_p^\perp \cdot \vec{\eta}_p|}{\alpha}, \quad (5.5)$$

sendo  $R(p) \in [\omega, 1]$  o termo de confiabilidade com  $\omega$  definido tal como no trabalho de Wang e colaboradores [45], que tem como propósito suavizar o processo iterativo de reconstrução, e  $D(p) < 1$  determina a direção de propagação computada de acordo com a orientação e intensidade de cores dos isótopos na vizinhança do pixel  $p$ . A relevância de cada componente deste produto pode ser observada na Figura 4.3.

A partir da Equação (5.4), um pixel  $p$  é então selecionado dentre um conjunto ordinário de todos os pixels a serem reconstruídos na máscara  $\Omega$ . Assim, o propósito da referida equação é priorizar as partículas que estão mais próximas do contorno ( $\partial\Omega$ ) e das regiões críticas que demandam maior cuidado no processo de reconstrução da imagem.

Uma vez determinado  $p$ , obtém-se um bloco de dimensão  $m \times m$ , de centro  $p$ , denotado aqui por  $H_m(p)$  e, assim, é calculado os  $k$  blocos de partículas vizinhas mais próximas ( $H_m(q)$ ), isto é, blocos de dimensão  $m \times m$ , de centro  $q$  referenciando os melhores blocos das partículas vizinhas.

Esses blocos dão origem a uma vizinhança de centro  $p$  e raio  $h$ , denotado aqui por volume compacto ( $V$ ), já visto anteriormente (Seção 3.3). A partir desse ponto, adotaremos a nomenclatura  $H_m(p) = H_p$ , deixando a dimensão do bloco de forma implícita para obter maior clareza na notação.

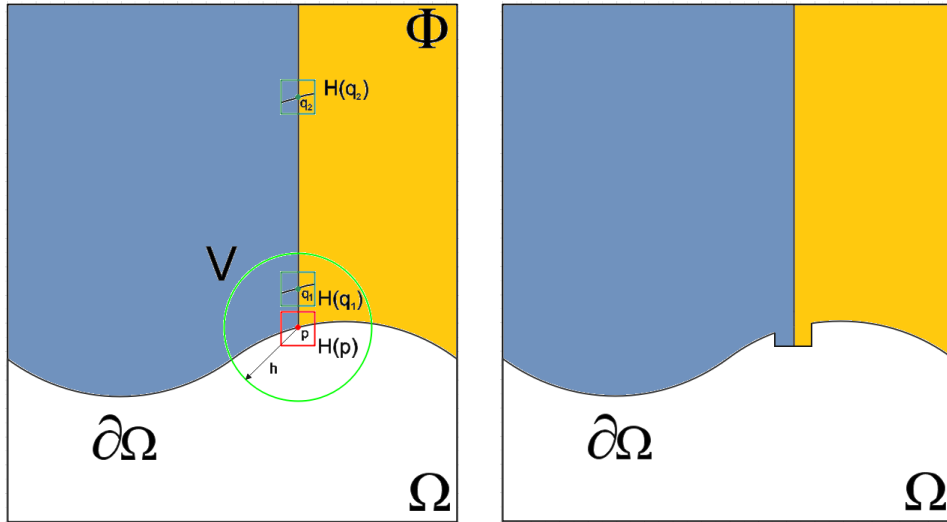


Figura 5.4: Esquemática da abordagem de *inpainting* proposta via replicação de blocos.

No esquema anterior (Figura 5.4), identificado o bloco a ser reconstruído a partir do pixel de prioridade  $p$ , inicia-se a busca pelo  $k = 1$  melhores blocos vizinhos, ou seja, um bloco referente a região proximal e outro de acordo com a intensidade, sendo  $q_1 \in V$  e  $q_2 \in \Phi$  originando os blocos  $H(q_1)$  e  $H(q_2)$ , respectivamente.

O processo iterativo do método se desenvolve através dos  $k$  melhores blocos vizinhos mais próximo ( $H_{q_i}$ ) e, a fim de preservar as características da proposta original do G-SPIR, empregamos como núcleo do volume compacto (núcleo de proximidade) a seguinte função gaussiana:

$$W(R_j, h_i) = \frac{1}{\pi h_i^2} e^{-R_j^2}, \quad (5.6)$$

com  $R_j = ||p_i - q_j||$  tal que  $p_i$  e  $q_j$  são definidos como sendo os pixels centrais do bloco a ser restaurado e os blocos vizinhos que serão utilizados neste processo, respectivamente, e  $h_i = \max\{\alpha d_{ij} : j \in V\}$ , sendo  $d_{ij}$  a distância euclidiana entre  $p_i$  e  $q_j$  e  $\alpha$  um parâmetro para que todos blocos candidatos  $H_q$  pertençam ao núcleo de proximidade  $V$ .

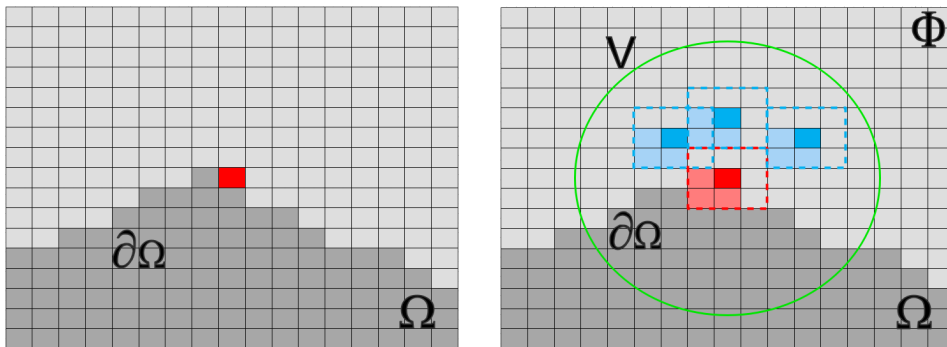


Figura 5.5: Ilustração da intersecções dos blocos de pixels dentro do volume compacto  $V(p)$ .

Note que, como o cálculo do núcleo de proximidade se baseia na distância do centro de um bloco ao outro, é possível que ocorra intersecções entre os blocos, como é representado na Figura 5.5

A média computada sobre os melhores blocos relacionados à longitude é denominada por Bloco Longitudinal ( $H_L$ ), e é dada por:

$$H_L = \sum_{j \in V_k} H_{kj} W_{kj} V_j, \quad (5.7)$$

em que  $H_{kj} = H(q_j)$  representa os  $k$  blocos vizinhos bons com  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $W_{kj}$  o núcleo por proximidade e  $V_j = 1/k$  é o elemento de área da partícula  $q_j$  que considera o mesmo peso para cada um dos blocos.

Já no caso da região de amostragem que está relacionada à similaridade de cores, esta visa ponderar o efeito das intensidades dos pixels, lembrando que para essa busca, é determinado uma área ( $\Phi$ ) menos restritiva. Em razão disso, a métrica das partículas  $p_k$  mencionada em questão é dada por:

$$H_{\hat{q}} = \arg \min_{H_q \in \Phi} d(H_p, H_q), \quad (5.8)$$

em que  $d(H_p, H_q)$  representa a distância definida pela soma das diferenças ao quadrado (SSD), isto é:

$$d(H_p, H_q) = \sum_{i \in \Phi} (H_{q_i} - H_{p_i})^2. \quad (5.9)$$

Novamente, a média é relacionada aos  $k$  blocos mais adequados vizinhos. Assim, o bloco resultante relacionado à intensidade, denominado aqui de Bloco de Intensidade ( $H_I$ ), é computado a partir de seguinte expressão:

$$H_I = \sum_{j \in \Phi_k} H_{kj} V_j. \quad (5.10)$$

Após determinados os blocos mais adequados referente à distância ( $H_L$ ) e à intensidade ( $H_I$ ) dos pixels, respectivamente, a restauração é então realizada através da seguinte equação discreta:

$$I_R(H_p) = \sigma H_L + (1 - \sigma) H_I, \quad \text{com } \sigma \in (0, 1). \quad (5.11)$$

Note que, diferente da proposta original do G-SPIR, o método descrito é aplicado de forma iterativa, onde não é necessário calcular o conjunto de todos os volumes compactos ( $N_k$ ). Desta forma, é possível utilizar os blocos restaurados no processo de retoque digital, o que influencia positivamente nos resultados (vide Seção 6.2.5).



Além disso, existem agora duas regiões de amostragem: A região do volume compacto ( $V$ ), que necessita ser mais compacta para que o valor de  $h_i$  não interfira de forma negativa nos cálculos, e ( $\Phi$ ), que é responsável pela ponderação da intensidade, podendo ser mais “maleável”, pois necessita de uma região maior de confiabilidade.

A Figura 5.6 ilustra, resumidamente, o processo de restauração de uma imagem a partir do uso do método proposto, isto é, que combina a formulação SPH, o processo de replicação via blocos, e a ordenação de prioridade de preenchimento, enquanto a Figura 5.7 evidencia o resultado da restauração de uma imagem mediante à aplicação do referido método de retoque digital.

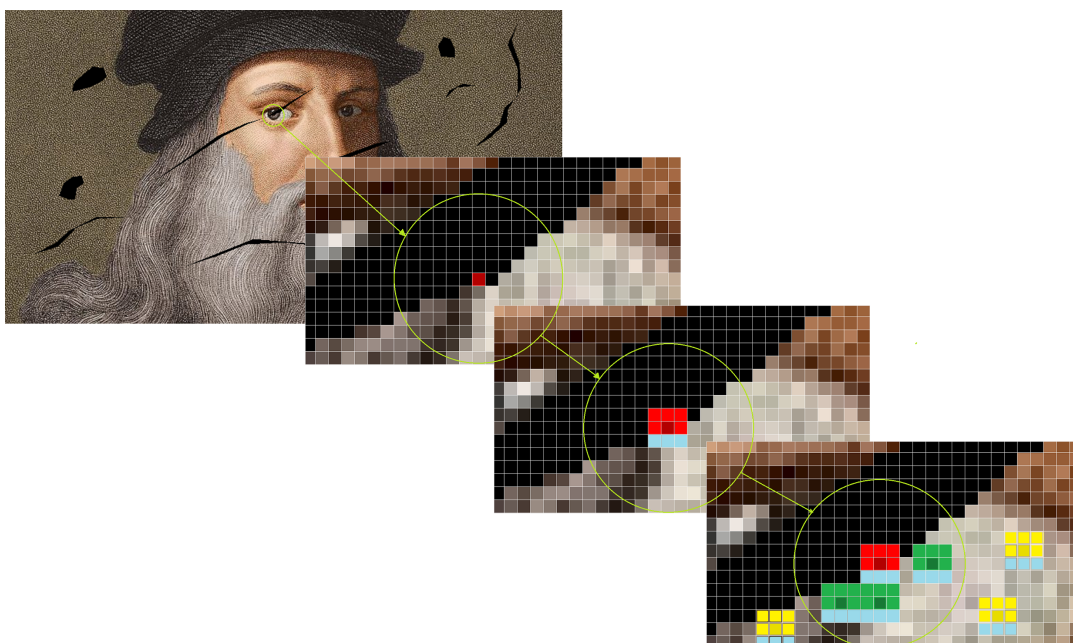


Figura 5.6: Processo de restauração de imagem utilizando o método proposto. De cima para baixo: imagem degradada; definição do pixel de maior prioridade a ser reconstruído; bloco selecionado com relação à região de retoque ( $\Psi \cap \Omega$ ); seleção dos vizinhos de acordo com a região de amostragem do núcleo  $V$  (*região circular*) e  $\Phi$  (*região retangular*).



Figura 5.7: Restauração utilizando o método implementado.

**Input:**  $I$  = imagem degradada,  $\Omega$  = máscara,  $k$  = número de vizinhos mais próximos,  $m$  = dimensão do bloco,  $\Phi$  = região de amostragem

**Output:**  $I_R$  = imagem restaurada

```

1 /* Inicialization */
2 while até todos  $p_i \in \Omega$  serem restaurados do
3     /* Determinar o conjunto de prioridade dos pixels  $p$  em processo
4         de retoque */
5      $P(p_i) = R(p_i) \cdot D(p_i)$ 
6     /* Obter o conjunto dos  $k$  vizinhos mais próximos de  $p_i$  referente
7         a intensidade e a proximidade */
8      $H_{q_j} = d(H_{p_i}, H_{q_j})$ 
9     /* Montagem de blocos */
10    for  $H_{q_j} \in V_i$  do
11        | Determinar  $H_L$  através da equação (5.7)
12    end
13    for  $H_{q_j} \in \Phi \cap \Omega = \emptyset$  do
14        | Determinar  $H_I$  através da equação (5.8)
15    end
16    /* Gerar bloco a ser restaurado  $H(p_i)$  com  $p_i \in \Omega$  */
17     $H_{p_i} = \sigma H_L + (1 - \sigma) H_I$ 
18    Determinar  $H_p$  com a equação (5.11)
19    /* Restauração e atualização da região de retoque */
20     $I_R = I(H_{p_i})$ 
21 end

```

**Algorithm 1:** Modelo de *inpainting* implementado via replicação de blocos.

A seguir, é apresentado os resultados obtidos, incluindo as comparações envolvendo os métodos discutidos no capítulo de revisão bibliográfica e a abordagem proposta via replicação de blocos e ordem de preenchimento.

## Resultados e Discussão

Nesta seção, são apresentados os resultados experimentais obtidos a partir da metodologia proposta, *Método SPH por blocos e ordem de preenchimento*, bem como comparações envolvendo os seguintes métodos de restauração: *Harmonic Inpainting*, *Cahn-Hilliard*, *Método de Transporte*, *Método G-SPIR*, e o *Modelo de Criminisi*.

A análise dos resultados será realizada de forma qualitativa, comparando-se os resultados de cada algoritmo. Em seguida, novos testes são apresentados e discutidos com o método proposto, com o propósito de melhor explorar as características da referida técnica. Os protótipos foram implementados usando o software MATLAB.

### 6.1 Testes Comparativos com Métodos de Inpainting

Para todos os testes realizados, além dos parâmetros usuais, como a imagem degradada  $I$  e a máscara ( $D \subset \Omega$ ), foram definidos para cada método os seguintes parâmetros adicionais:

- **Harmonic Inpainting:**  $\lambda = 10$ ,  $\Delta t = 0.1$ , tolerância =  $10^{-4}$  e número máximo de iterações = 500.
- **Método de Transporte:**  $\epsilon = [100, 1]$ ,  $\lambda = 10$ , número máximo de iterações = 4000 e  $\Delta t = 1$ .
- **Cahn-Hilliard Inpainting:**  $\epsilon = 10^{-9}$ ,  $\Delta t = 0.1$ , tolerância =  $10^{-4}$  e número máximo de iterações = 50.
- **Método G-SPIR:**  $k = 8$  (esse valor de parâmetro foi escolhido por apresentar um resultado mais acurado nos testes empíricos realizados).
- **Modelo de Criminisi:**  $m = 9$  (dimensão  $m \times m$  dos blocos de *pixels* atualizados na região de retoque).

- **Método SPH por bloco:** Os parâmetros foram alternados de acordo com a necessidade e serão retratados durante os testes.

### 6.1.1 Teste 1: Remoção de Objetos de Imagens Sintéticas

O primeiro teste é realizado com uma imagem sintética (Figura 6.1.1) visando a recuperação do contorno retangular da imagem. O tamanho da imagem é dado por  $50 \times 100$  pixels, e  $D$  contém 1953 pixels.

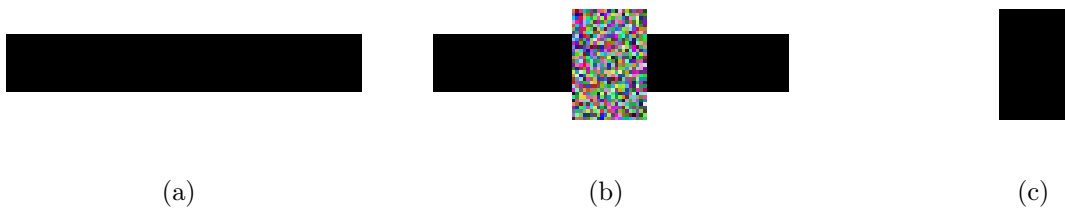


Figura 6.1: (a) Imagem Original, (b) Imagem Degradada e (c) Máscara de Retoque.

Os resultados de reconstrução da Figura 6.1.1 utilizando os métodos supracitados podem ser visualizados na Figura 6.2.



Figura 6.2: Resultados de reconstrução de imagem sintética. (a) Método Harmonic Inpainting, (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método de Transporte e (d) Método G-SPIR.

Neste primeiro experimento, o método Harmonic Inpainting foi incapaz de preencher com clareza a região de retoque, afinal, como já discutido anteriormente, o método sofre dificuldades de reconstruir imagens quando a região de *inpainting* apresenta grandes descontinuidades. Já o método Cahn-Hilliard, comparado seu resultado com a imagem original (Figura 6.1.1(a)), originou um resultado satisfatório, apresentando apenas leves borrões na borda. No caso do método de Transporte, este resultou no mesmo problema,

mas com um realce um pouco maior nas bordas. O método G-SPIR teve dificuldades em reconhecer as bordas e acabou interpretando a região como sendo homogênea.

Os métodos de Criminisi e SPH via blocos foram satisfatórios no tratamento da imagem, pois preservaram as características da imagem após o retoque. Diferente dos antecessores, o modelo de Criminisi não apresentou borrões ou falhas de preenchimento, tal com pode ser observado na Figura 6.3.

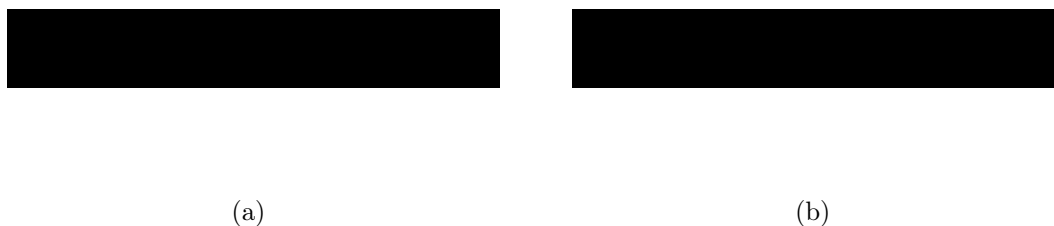


Figura 6.3: Resultados de reconstrução de imagem sintética utilizando o modelo de Criminisi. (a) Imagem Original e (b) Modelo Criminisi.

Para o método SPH por blocos, os parâmetros foram  $k = 1$ ,  $m = 7$ ,  $\Phi = 31$ . Neste caso, para garantir que o método preenche com êxito toda a região degradada, foi utilizado  $\omega = 0.7$ , o que resultou em uma imagem reconstruída idêntica à imagem original.



Figura 6.4: Resultados de reconstrução de imagem sintética utilizando o método proposto. (a) Imagem Original e (b) Método SPH por blocos.

Um segundo teste, similar ao anterior, foi proposto, neste caso, com a região de retoque reduzida à  $D$  contendo 360 pixels (vide Figura 6.5).

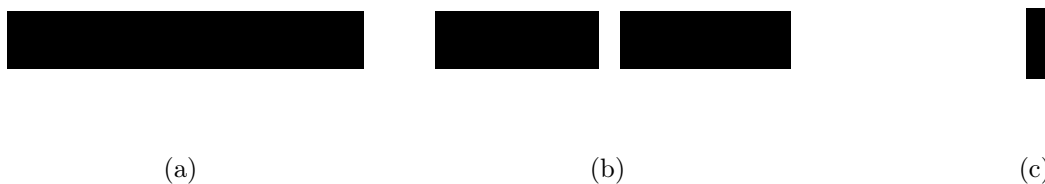


Figura 6.5: (a) Imagem Original, (b) Imagem Degradada e (c) Máscara de Retoque.

Como esperado, devido à redução da região de retoque, todos os algoritmos obtiveram resultados mais acurados em comparação com o caso anterior (vide Figura 6.6). Em

particular, o método G-SPIR corrigiu o retoque em uma das bordas (Figura 6.6(d)), demonstrando, assim, que a utilização de um pré-processamento a fim de prolongar as bordas pode ser uma estratégia válida para melhorar a acurácia do modelo.

Neste caso, é possível concluir que boa parte das técnicas da literatura não conseguem absorver a reconstrução de grandes áreas de retoque, sendo mais adequados para tratar regiões cujo alvo a ser reconstruído é menor.



Figura 6.6: Resultados de reconstrução de imagem sintética (*região de retoque menor*): (a) Método Harmonic Inpainting, (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método de Transporte e (d) Método G-SPIR.

Para o referido teste (isto é, com região de retoque reduzida), o modelo de Criminisi e o método SPH por blocos novamente se mostraram bastante acurados, já que anteriormente estes também foram os modelos que obtiveram os resultados mais precisos quando a lacuna a ser preenchida era muito maior. Além disso, no caso do método SPH por blocos, foi considerado um aumento na dimensão do bloco sendo  $m = 15$ , gerando assim o resultado da (Figura 6.8(b)) em apenas três iterações com um tempo computacional de 0,033 segundos.



Figura 6.7: Resultados de reconstrução de imagem sintética utilizando o modelo de Criminisi. (a) Imagem Original e (b) Modelo Criminisi.

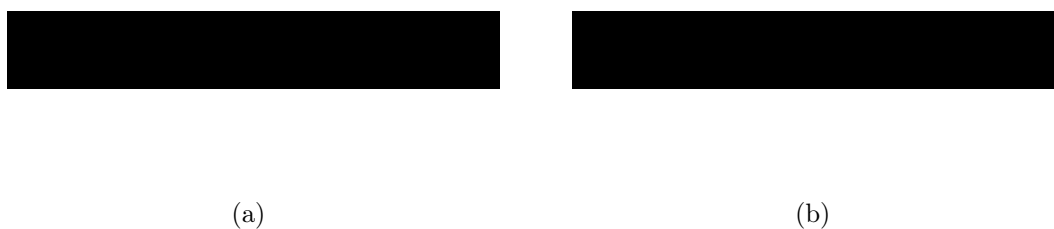


Figura 6.8: Resultados de reconstrução de imagem sintética utilizando o método SPH via blocos. (a) Imagem Original e (b) Método SPH por blocos.

### 6.1.2 Teste 2: Remoção Textual em Imagens

A segunda abordagem tem como objetivo verificar a capacidade de restauração dos métodos implementados na tarefa de remoção de textos em uma imagem fotográfica. O tamanho da imagem de teste é de  $318 \times 500$  pixels, e a área de retoque  $D$  apresenta 53424 pixels, com um aspecto bastante irregular devido à presença do texto sobreposto (vide Figura 6.9).

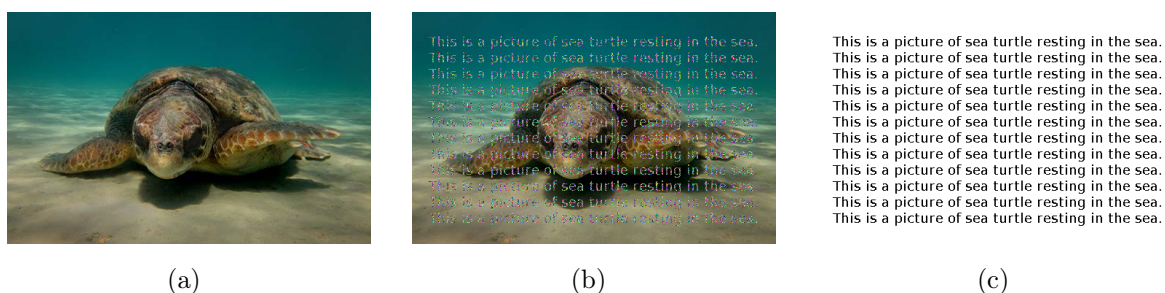


Figura 6.9: (a) Imagem original, (b) Imagem com texto sobreposto e (c) Máscara de retoque.

Os resultados das reconstruções após a aplicação dos métodos de *inpainting* podem ser visualizados na Figura 6.10. Para este caso, pode-se notar que todos os modelos de retoque digital se mostraram eficientes, não aparentando problemas com as fronteiras da região a ser preenchida.

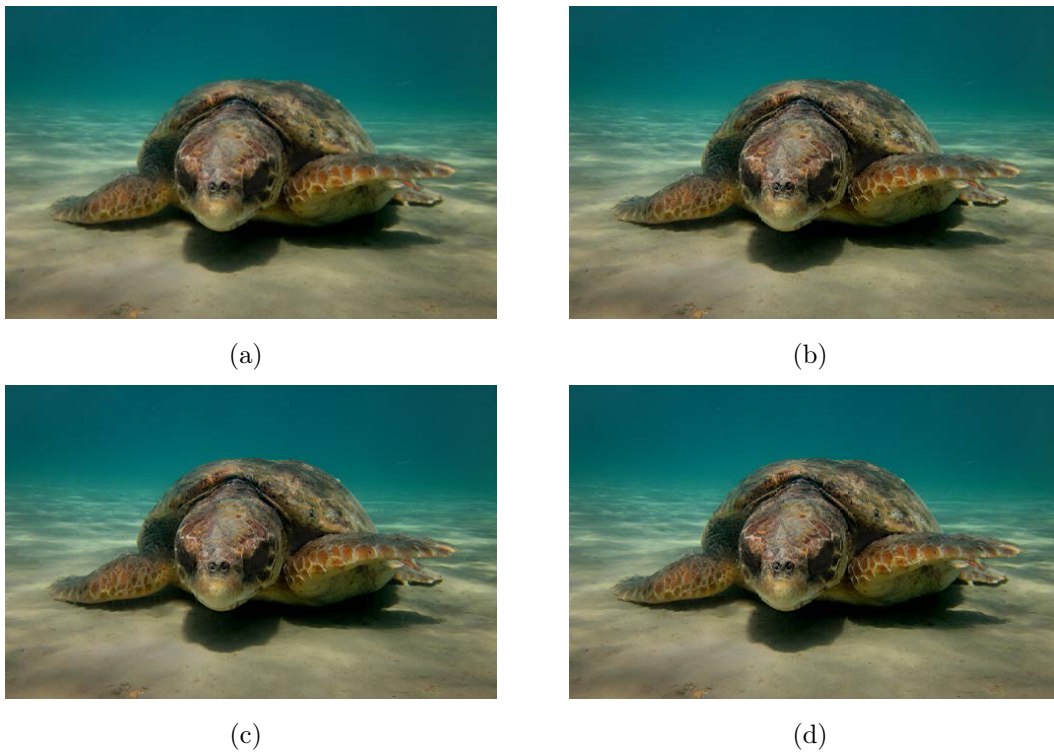


Figura 6.10: Resultados de remoção de texto em imagem: (a) Método Harmonic Inpainting, (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método de Transporte e (d) Método G-SPiR.

Da mesma forma, para o problema de remoção de textos, o método SPH por blocos se provou eficiente e gerou um resultado bastante acurado quando comparado com as outras técnicas da literatura.



Figura 6.11: Resultados de remoção de texto em imagem: (a) Imagem Original e (b) Método SPH com blocos.

### 6.1.3 Teste 3: Restauração de Imagens Degradadas

O objetivo desse experimento é avaliar os métodos na tarefa de recuperação de fotografias danificadas. Para tal, foi usada uma imagem do rosto de John Lennon<sup>1</sup>. O tamanho da imagem utilizada é de  $225 \times 225$  pixels, com  $D$  contendo 3000 pixels (vide Figura 6.12).

<sup>1</sup>Imagem disponível em: <http://twixar.me/kn0T>. Acesso em: 22 nov.2019.



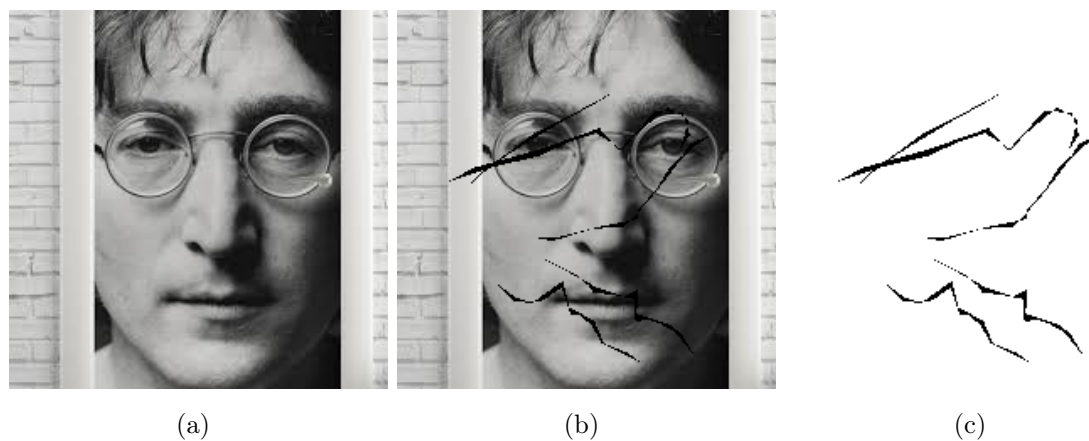


Figura 6.12: (a) Imagem original, (b) Imagem degradada e (c) Máscara de retoque.

Como pode ser visto na Figura 6.13 e Figura 6.14, embora todos os resultados mostraram-se satisfatórios, os métodos Harmonic Inpainting, Transporte e SPH por blocos tiveram resultados mais acurados quando comparados aos métodos Cahn-Hilliard e G-SPIR, já que corrigiram os danos, inclusive em zonas de fronteiras.

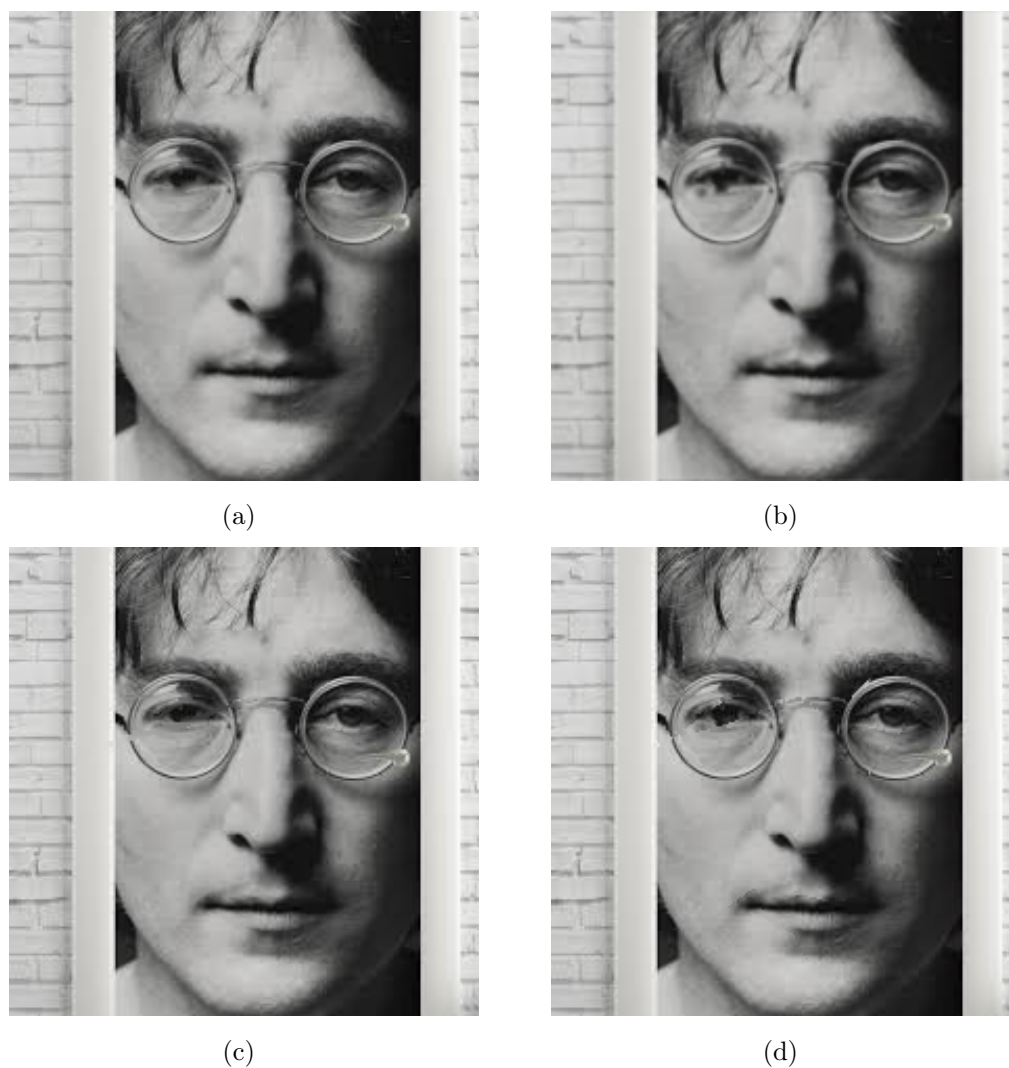


Figura 6.13: Resultados de restauração de imagem: (a) Método Harmonic Inpainting, (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método de Transporte e (d) Método G-SPIR.



Figura 6.14: Resultados de restauração de imagem: (a) Imagem Original, (b) Método SPH via blocos.

A Figura 6.15 elucida o resultado da restauração da imagem com um *zoom* na região dos olhos, onde se encontra a maior falha nos métodos citados. O método Cahn-Hilliard sobrepôs a região da borda, causando um efeito de “borrão” na região da fronteira, enquanto o método G-SPIR gerou um pequeno prolongamento da região sobre os olhos. Já o método SPH via replicação de blocos apresentou uma melhora da região do contorno dos olhos, no entanto, o método causou uma pequena diferença de intensidade na região da sombrancelha do olho direito.

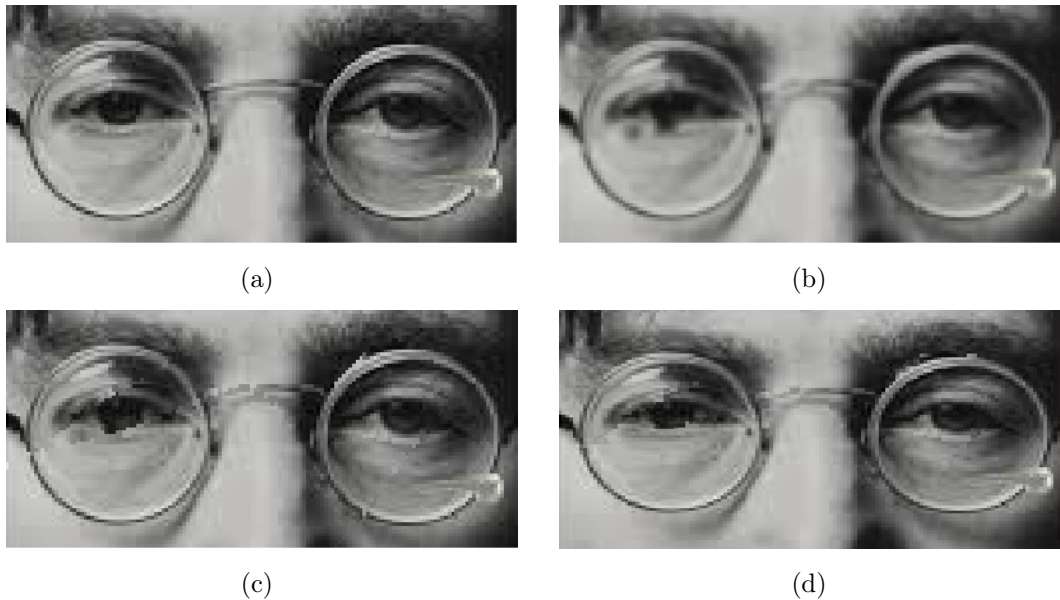


Figura 6.15: Região dos olhos: (a) Imagem original (*resultado esperado*), (b) Método Cahn-Hilliard, (c) Método G-SPIR e (d) SPH com blocos.

### 6.1.4 Teste 4: Remoção de Objetos em Imagens

Para este caso, foi realizado um experimento com o objetivo de verificar como os métodos já citados anteriormente se comportam na tarefa de remoção de objetos em uma imagem, e se os mesmos são capazes de preservar a naturalidade da qualidade da mesma. Para esse fim, uma imagem do Cristo Redentor - RJ<sup>2</sup>, com tamanho de  $408 \times 652$  pixels e região de retoque  $D$ , de tamanho 19911 pixels foi utilizada (vide Figura 6.16).

Como pode ser observado na Figura 6.17, por se tratar de uma região de retoque de tamanho relativamente grande, e sabendo que o método Harmonic Inpainting não se comporta bem para esse tipo de imagem, o mesmo não realizou a restauração de maneira adequada. A mesma conclusão é válida para o método Cahn-Hillard que, mesmo havendo uma tentativa de reconstruir o fundo com cores similares ao da imagem, falhou no processo de reconstrução da imagem.

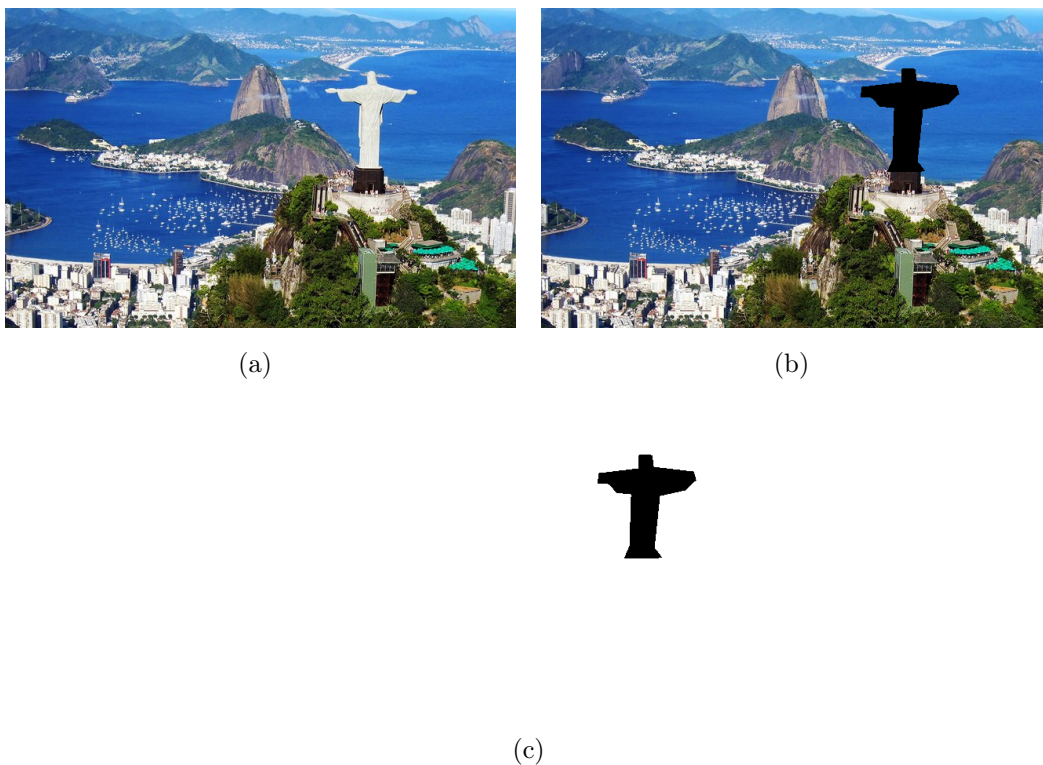


Figura 6.16: (a) Imagem original, (b) Objeto a ser removido e (c) Máscara de retoque.

<sup>2</sup>Imagem disponível em: <https://turismo.ig.com.br/destinos-internacionais/2018-05-28/monumentos-historicos-mundo-brasil.html>. Acesso em: 22 de out. 2019.



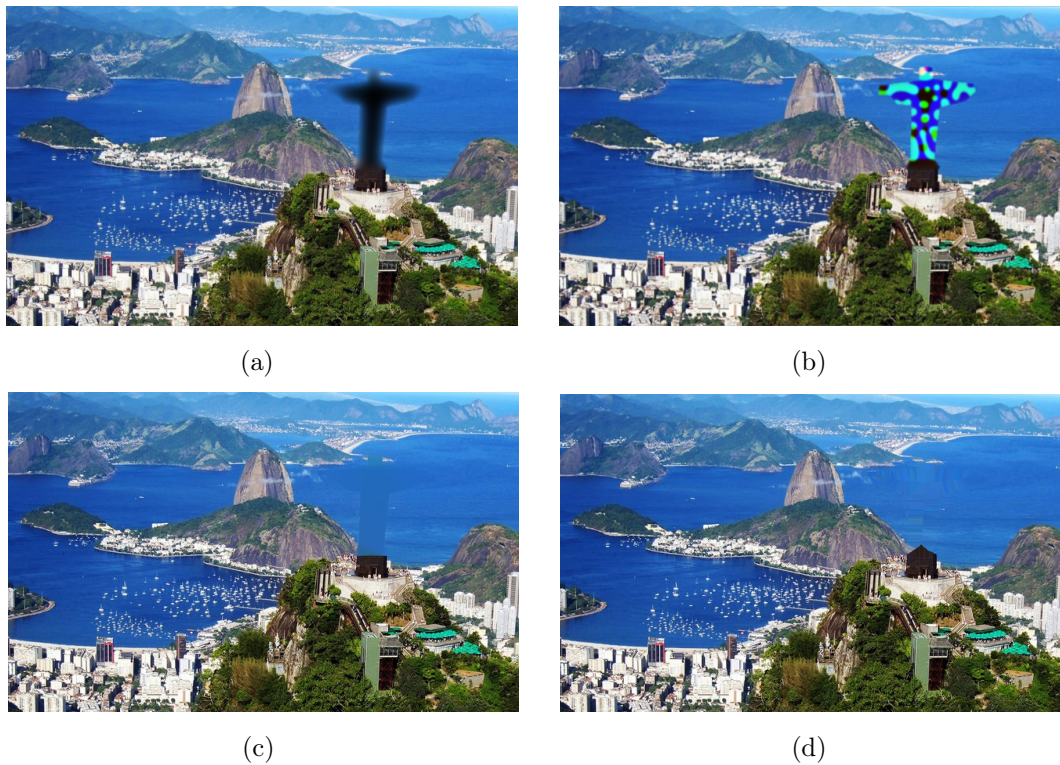


Figura 6.17: Remoção de objetos: (a) Algoritmo Harmonic, (b) Algoritmo Cahn-Hilliard, (c) Algoritmo Transporte e (d) Algoritmo G-SPIR.

No caso do método de Transporte, o mesmo conseguiu gerar um resultado satisfatório do ponto de vista visual humano, embora a textura da região de retoque tenha sido totalmente modificada, deixando nítida a região em que o objeto foi removido. Por fim, o método G-SPIR produziu um resultado bastante acurado e visualmente apresentável, já que, mesmo prolongando levemente a borda (Palanque do Cristo Redentor), conservou parte da textura e dos detalhes da imagem de maneira adequada.

Finalmente, a partir do resultado da Figura 6.18, o método SPH por blocos conseguiu obter uma reconstrução bastante satisfatória, incluindo a região de contorno do palanque tal como o método do Transporte. Além disso, a textura da região de retoque foi otimizada usando-se uma vizinhança de  $k = 3$ , com o bloco de dimensão  $m = 7$  e  $\omega = 0.1$  referente à prioridade dos pixels.

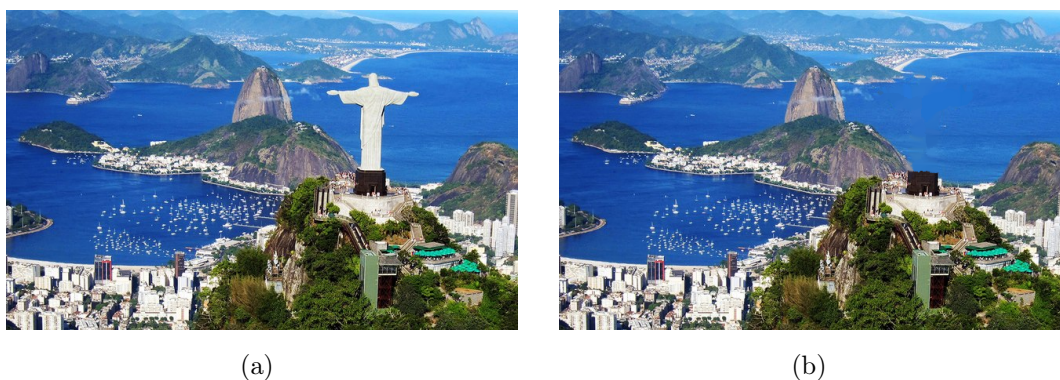


Figura 6.18: Remoção de objetos: (a) Imagem Original e (b) SPH via replicação de blocos.

Uma comparação entre o modelo Criminisi e o método SPH por blocos foi proposto (Figura 6.19), em que houve uma dificuldade na remoção do objeto em (a), onde a região mais próxima do centro deixou a desejar e, acabou prolongando a área próxima ao palanque do cristo gerando uma reconstrução incorreta.



(a)

(b)

Figura 6.19: Comparação de métodos aplicado à remoção de objetos: (a) Modelo de Criminisi e (b) SPH com blocos.

Os próximos testes tem como intuito avaliar o método SPH por blocos a partir da perspectiva da variação de seus parâmetros.

## 6.2 Testes de Variação de Parâmetros: Método SPH por Blocos

Nesta seção, os testes serão conduzidos a partir da variação dos parâmetros, ocasionando a identificação de algumas características relevantes em cada teste e que poderão ser exploradas em trabalhos posteriores.

### 6.2.1 Teste 1: Parâmetro $\omega$

Nesse primeiro teste, o objetivo foi avaliar como a alteração do parâmetro  $\omega$  pode interferir nas características da imagem. Para tal, usaremos imagens dotadas de grandes níveis de textura e com regiões de retoque demasiadamente grandes, pois os resultados visuais gerados pelo método se tornam mais perceptíveis para tecer comparações qualitativas.

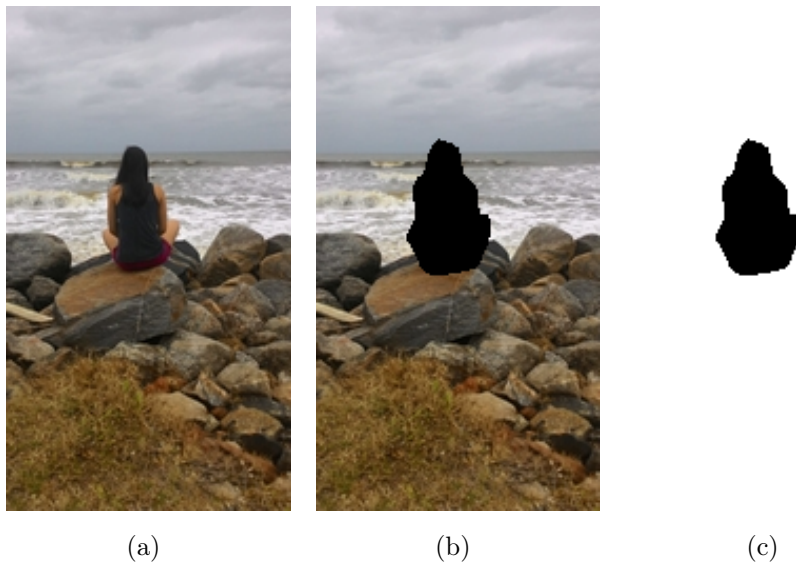


Figura 6.20: Retoque em remoção de objeto: (a) Imagem Original, (b) Imagem degradada e (c) Máscara de retoque.

O referido parâmetro está ligado à prioridade do *patch* (bloco) de pixels. Neste caso, iremos variar  $\omega \in [0.1, 0.7]$  pois, como vimos no Capítulo 4, os estudos com propostas anteriores mostraram maior relevância neste intervalo.

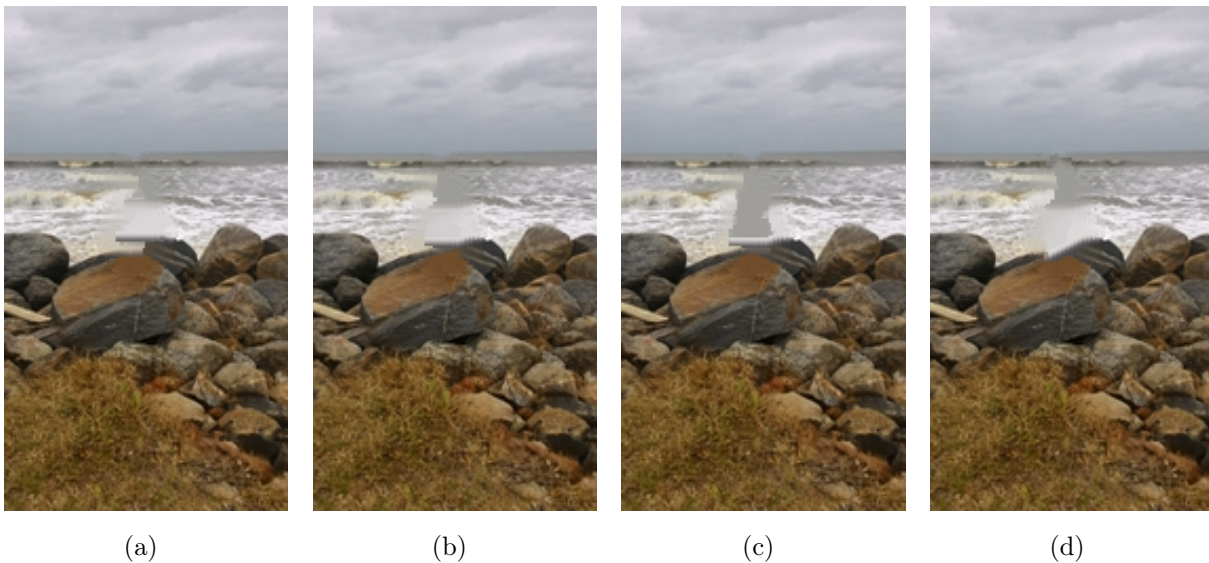
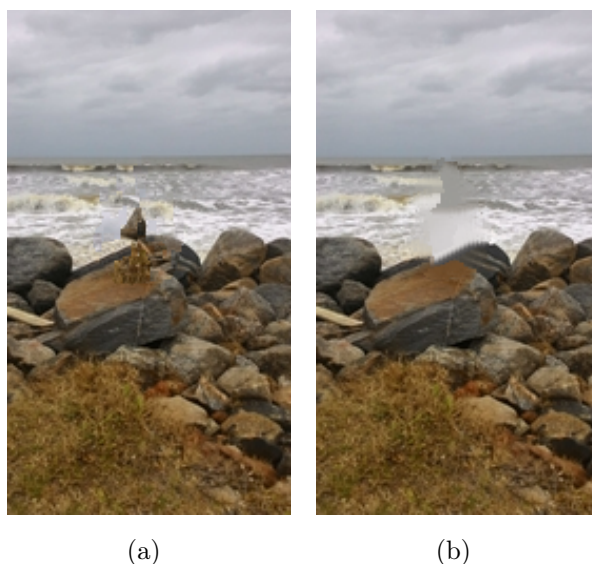


Figura 6.21: Remoção de objetos: (a)  $\omega = 0,1$ , (b)  $\omega = 0,3$ , (c)  $\omega = 0,5$  e (d)  $\omega = 0,7$ .

Na Figura 6.21 a região da máscara para remover o alvo (a moça na fotografia) é de  $D = 1752$  pixels, com  $m = 7$  a dimensão do bloco e  $k = 4$  vizinhos mais próximos. Note que, quando  $\omega$  se intensifica, a região de contorno (*pedras*) é modelada, a ponto de remover o prolongamento dessas regiões visto na (Figura 6.21(d)).

Comparando o modelo de Criminisi com o retoque exibido em (Figura 6.21 (d)), vemos que na Figura 6.22 à esquerda em um certo momento, após uma busca por similaridade, o algoritmo acabou adotando um critério de prioridade que reproduziu pixels artificiais, retocando a região do mar com texturas e características da região da grama.





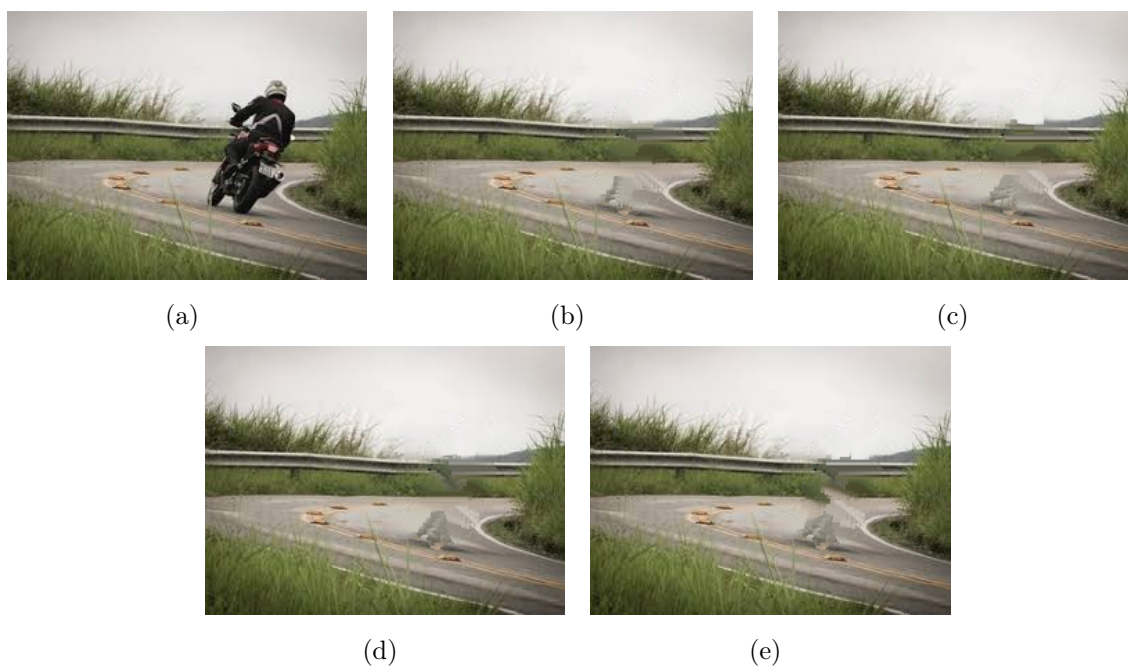
(a)

(b)

Figura 6.22: Remoção de objetos: (a) Modelo de Criminisi e (b) SPH por blocos.

Outros exemplos da variação desse parâmetro podem ser vistos a seguir, como na remoção feita na Figura 6.23.

Observe que o objeto<sup>3</sup> em questão está próximo de regiões de contornos. Assim, com o crescimento de  $\omega$ , essas regiões serão ressaltadas de forma a seguir uma direção linear.



(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Figura 6.23: Remoção de objetos e variação de  $\omega$ : (a) Imagem Original, (b)  $\omega = 0, 1$ , (c)  $\omega = 0, 3$ , (d)  $\omega = 0, 5$  e (e)  $\omega = 0, 7$ .

Já em regiões homogêneas<sup>4</sup>, o resultado se torna satisfatório em ambos os casos, com destaque para a Figura 6.24(d), que garante a preservação da intensidade da região de forma mais aprimorada.

<sup>3</sup><http://twixar.me/ILZm>

<sup>4</sup><http://twixar.me/gLZm>

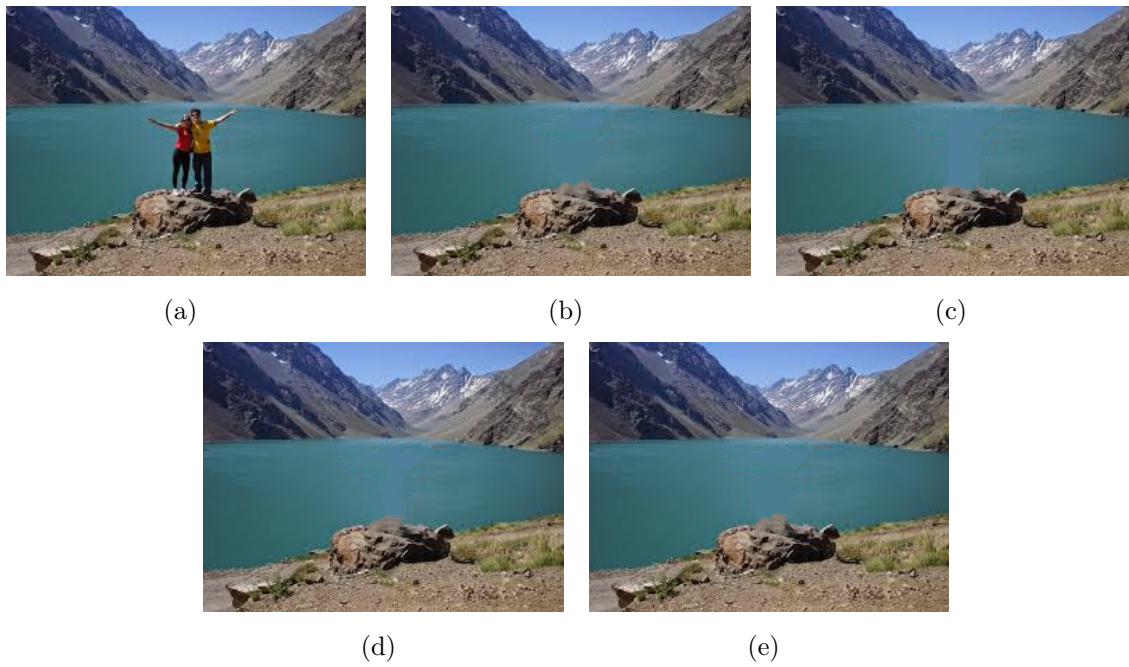


Figura 6.24: Remoção de objetos e variação de  $\omega$ : (a) Imagem Original, (b)  $\omega = 0,1$ , (c)  $\omega = 0,3$ , (d)  $\omega = 0,5$  e (e)  $\omega = 0,7$ .

A variação de  $\omega$  pode ser bastante benéfica em casos pontuais, no entanto, os parâmetros extremos como  $\omega = 0,1$  e  $\omega = 0,7$  foram os que mostraram melhor desenvoltura nos testes.

### 6.2.2 Teste 2: Parâmetro $\sigma$

O parâmetro  $\sigma$  controla o quanto relevante será o peso de cada uma das métricas presentes na Equação (5.11).

A escolha desse parâmetro depende do seguinte aspecto, a ser considerado ou não no processo de reconstrução: se o objetivo é preencher a imagem <sup>5</sup> sem se preocupar com regiões de fronteira,  $\sigma$  mais próximo de 1 é a melhor opção, pois a partir da região de amostragem ( $\Phi$ ), é possível selecionar as melhores tonalidades compatíveis com a área alvo, do contrário, é necessário uma atenção maior na escolha desse parâmetro.

<sup>5</sup><http://twixar.me/J3Zm>



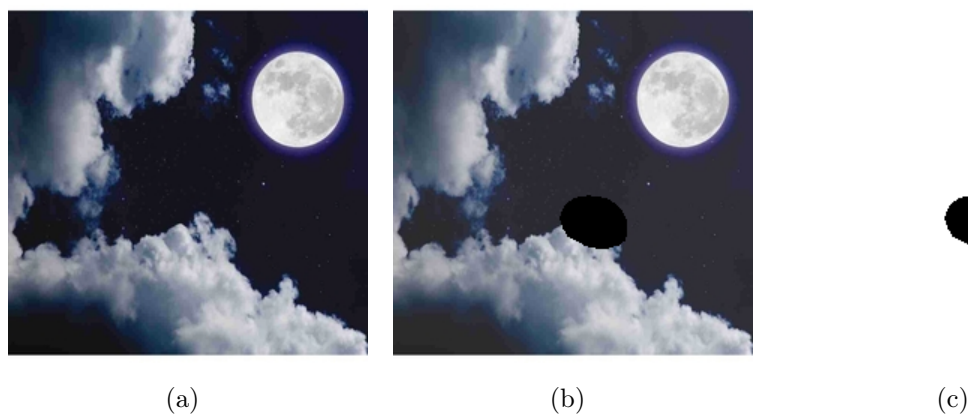


Figura 6.25: Retoque de região degradada: (a) Imagem Original, (b) Imagem degradada e (c) Máscara de retoque.

No processo de retoque da região degradada, foi usado  $k = 3$  vizinhos mais próximos, dimensão do bloco  $m = 7$ , região de amostragem ( $\Phi = 21 \times 21$ ), com  $\omega = 0,3$ . Note que, como citado anteriormente, a relação de  $\sigma$  se torna mais positiva quanto mais próximo de 1, pois mesmo ultrapassando as regiões de fronteira, o aspecto visual na (Figura 6.26(e)) aparenta certa naturalidade.

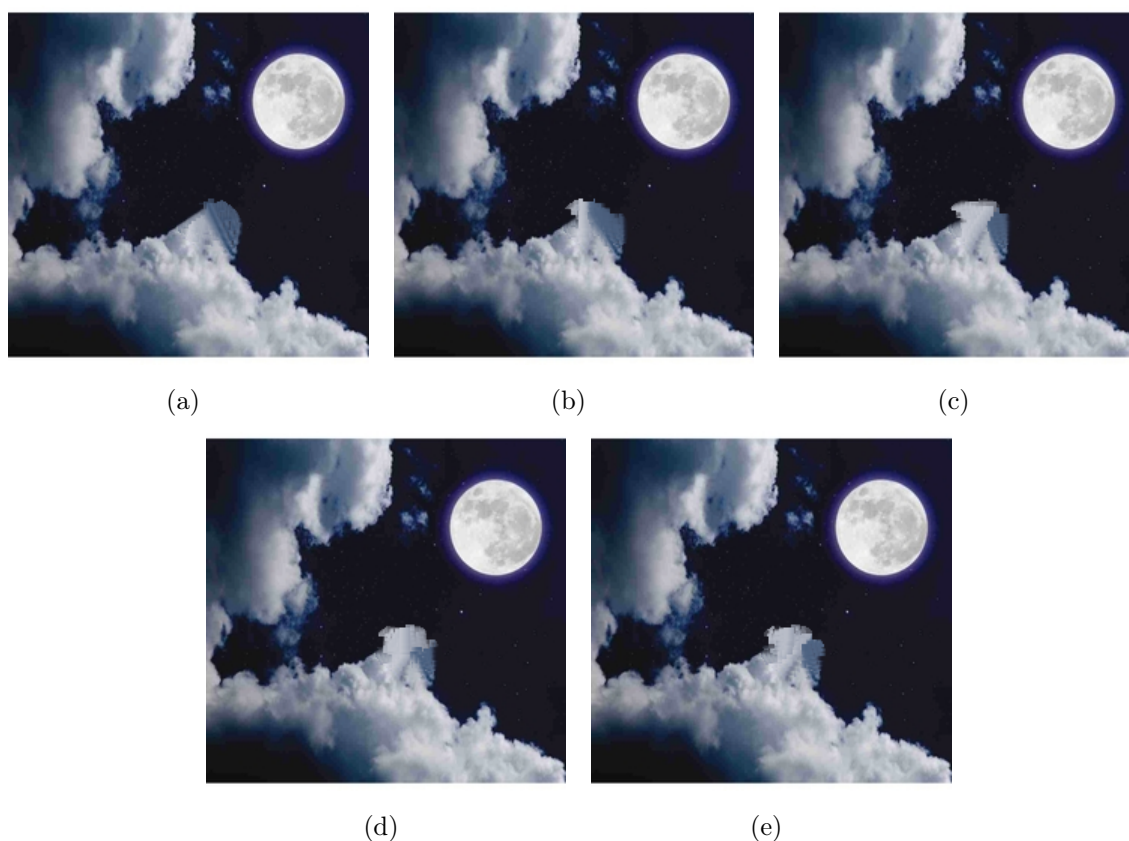


Figura 6.26: Retoque de região degradada : (a)  $\sigma = 0,1$ , (b)  $\sigma = 0,3$ , (c)  $\sigma = 0,5$ , (d)  $\sigma = 0,7$ , (e)  $\sigma = 0,9$ .

O referido experimento retrata de forma bastante satisfatória o comportamento do parâmetro  $\sigma$ , em que foi adotada uma região de retoque  $D = 1067$  pixels com  $\sigma$  variando

em diferentes momentos, com  $k = 3$  vizinhos mais próximos, dimensão do bloco  $m = 3$ , região de amostragem ( $\Phi = 51 \times 51$ ) e  $\omega = 0,3$ .

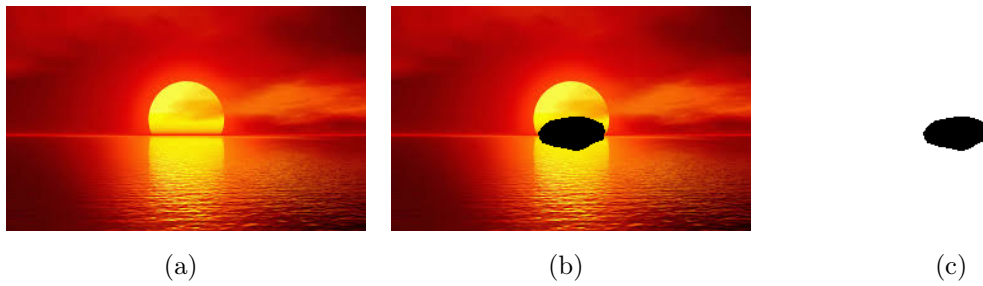


Figura 6.27: Retoque de região de fronteira: (a) Imagem Original, (b) Imagem degradada e (c) Máscara de retoque.

É possível constatar que, nesta situação, a região entre o sol <sup>6</sup> e sua sombra entra em contraste e, a Figura 6.28 evidencia a diferença na escolha de  $\sigma$  para tratar essa região da imagem em particular. Quando  $\sigma = 0,3$  (Figura 6.28(b)), o método obtém maior êxito, enquanto que nos casos posteriores é apresentada falhas grosseiras no preenchimento.

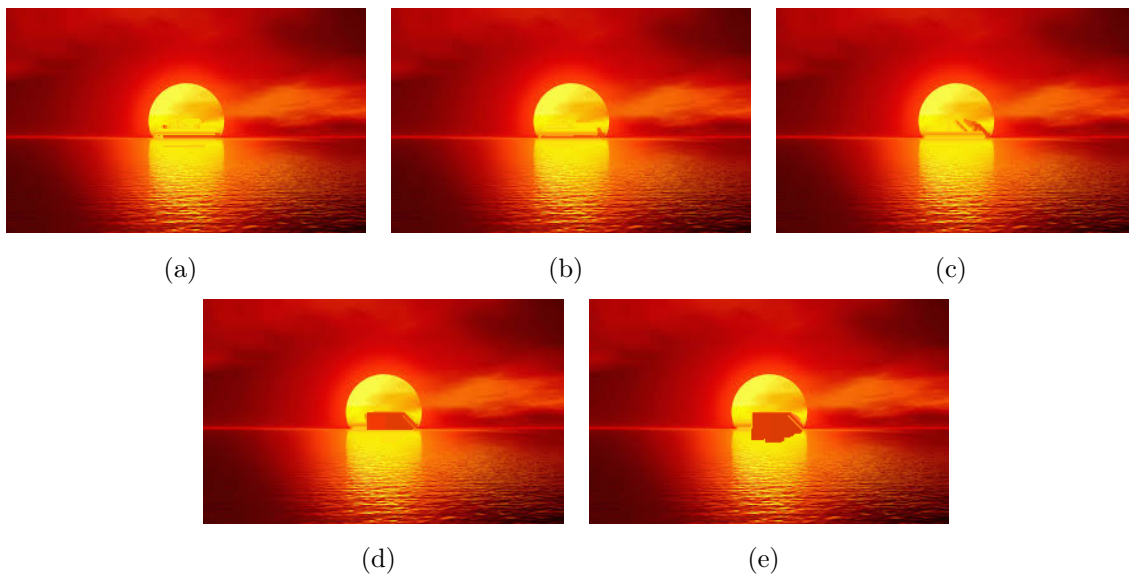


Figura 6.28: Retoque de região de fronteira: (a)  $\sigma = 0,1$ , (b)  $\sigma = 0,3$ , (c)  $\sigma = 0,5$ , (d)  $\sigma = 0,7$ , (e)  $\sigma = 0,9$ .

A variação do parâmetro  $\sigma$  coloca em equilíbrio o preenchimento correto da imagem próximo as regiões de fronteiras e a semelhança de intensidade. Assim, no método SPH por blocos, podemos ajustar os parâmetros e customizar nosso algoritmo de acordo com a necessidade. Já com relação ao modelo de Criminisi, o resultado fica próximo aos obtidos pelo SPH por blocos com  $\sigma \in [0,7, 0,9]$ .

<sup>6</sup><http://twixar.me/M3Zm>



Figura 6.29: Comparação da remoção de objetos: (a) Modelo de Criminisi e (b) SPH por blocos.

### 6.2.3 Teste 3: Parâmetro $k$ Vizinhos Mais Próximos

O Teste 3 foi conduzido em imagens com texturas, pois ao se tratar de um bloco de pixel ao invés de um único ponto, é de se esperar que uma quantidade aceitável de propriedades da imagem sejam perdidas e, essa perda pode aumentar com a adição de  $k$  vizinhos mais próximos. Portanto, é necessário uma escolha bastante apropriada para tal parâmetro em casos onde a imagem apresenta traços de grande realce.

Nesta situação, a imagem <sup>7</sup> apresenta uma textura regular e com algumas perturbações, sendo a área de *inpainting* dada por  $D = 750$  pixels, e a dimensão do bloco  $m = 9$ ,  $\omega = 0.3$  e  $\sigma = 0.3$ .

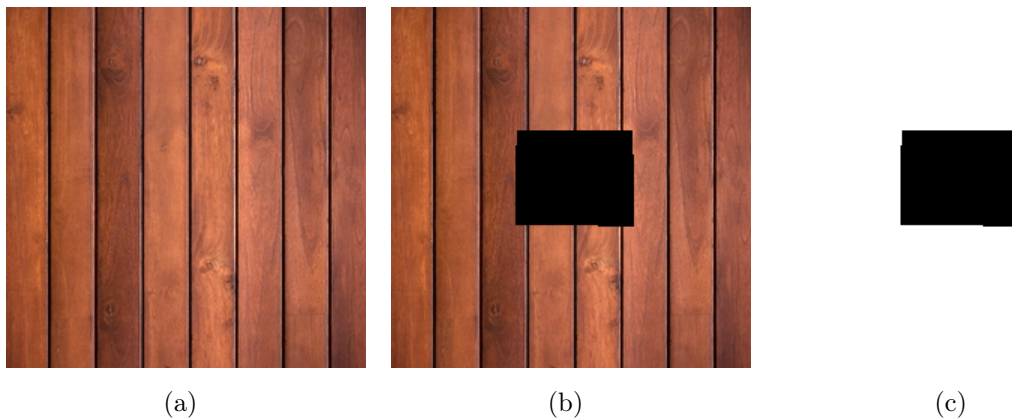


Figura 6.30: Remoção de objetos: (a) Imagem Original, (b) Imagem Degradada e (c) Máscara de retoque.

A partir desse experimento, é possível notar que, mesmo com uma alta incidência de textura, a estratégia de replicação por blocos aliada à formulação SPH se mostrou positiva (Figura 6.31(e)), pois conservou tanto as regiões de bordas (espaçamento entre as madeiras) como os padrões de textura da imagem, sendo ambas as características não usuais de serem observadas em outras técnicas de *inpainting* como aquelas discutidas no início deste capítulo.

<sup>7</sup><http://twixar.me/MfZm>

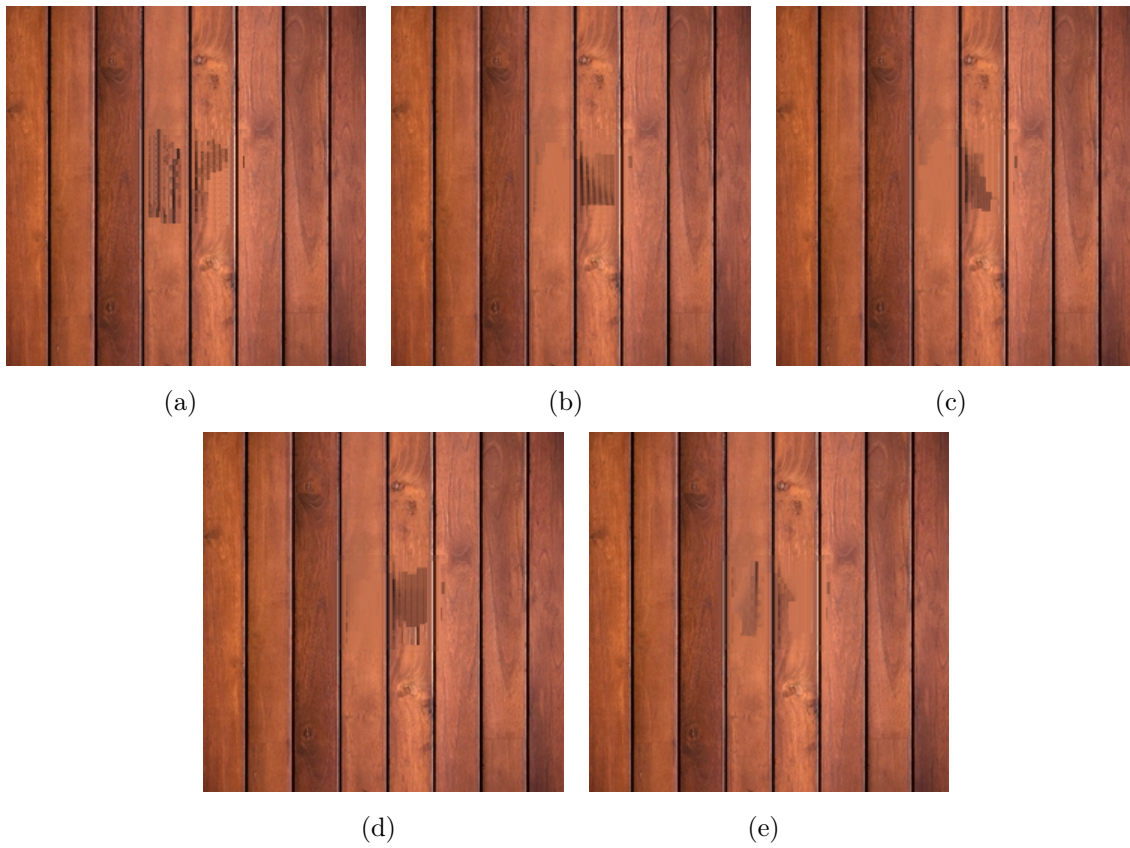


Figura 6.31: Parâmetro de restauração  $k$  vizinhos mais próximos: (a)  $k = 1$ , (b)  $k = 2$ , (c)  $k = 3$ , (d)  $k = 4$  e (e)  $k = 5$

Comparando-se a técnica G-SPIR com o método SPH por blocos, com  $k = 5$  vizinhos mais próximos tal como visto na (Figura 6.31(e)), é nítido a discrepância entre os resultados no qual o G-SPIR original transpôs as regiões limitantes da madeira da (Figura 6.32(a))



Figura 6.32: Remoção de objetos: (a) G-SPIR original e (b) SPH por blocos.

### 6.2.4 Teste 4: Prioridade em Regiões de Maior Relevância

No teste de prioridade na ordem de preenchimento, selecionamos uma imagem <sup>8</sup> com diferentes texturas, onde a região de retoque possui  $D = 26104$  pixels e, para padronizar, nos dois testes foi adotado  $k = 1$  vizinhos mais próximos,  $m = 15$  como sendo a dimensão do bloco, e  $\omega = 0,7$

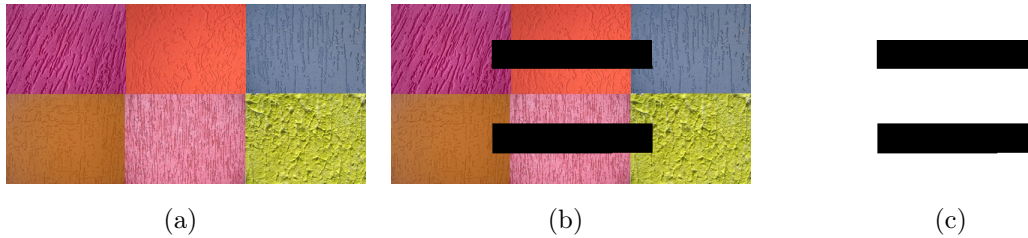


Figura 6.33: Reconstrução de áreas degradadas: (a) Imagem Original, (b) Imagem Degradada e (c) Máscara de retoque.

Na Figura 6.34, é realizado um comparativo no qual a (Figura 6.34(a)) representa o resultado produzido pelo método G-SPIR original, que não faz uso da técnica de prioridade apresentada pela Equação 5.4. Neste caso, percebe-se que a área que delimita cada uma das texturas não é respeitada, além de aparentar uma leve suavidade da região. Já no caso da (Figura 6.34(b)), o método preserva as bordas e a reprodução das texturas.

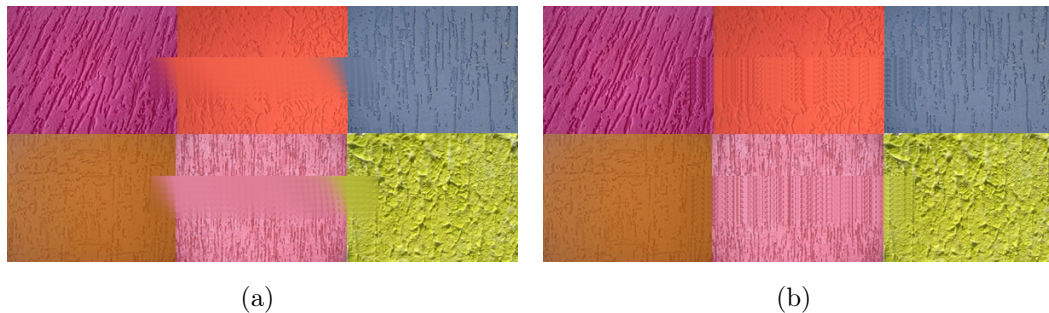


Figura 6.34: Remoção de objetos: (a) G-SPIR original e (b) SPH por blocos.

Em contraste, utilizamos o método de Criminisi para fins de comparação. Dessa vez, a qualidade da reprodução das texturas foi relativamente satisfatória na região de retoque da imagem em (Figura 6.35 (a)), no entanto, há falhas que são determinadas pela intensidade aplicada nas lacunas da imagem texturizada.

<sup>8</sup><http://twixar.me/LyZm>



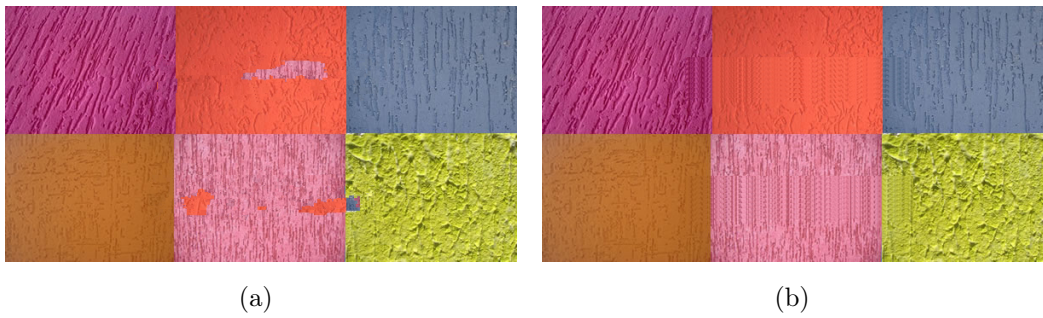


Figura 6.35: Contraste da remoção de objetos: (a) Modelo de Criminisi e (b) SPH por blocos.

### 6.2.5 Teste 5: Reutilização de Pixels já Reconstruídos

Por fim, é importante ressaltar que o parâmetro discreto do tempo no método está relacionado à este reutilizar ou não os pixels reconstruídos, o que pode impactar na performance computacional do mesmo. Assim, neste caso, os pixels já recuperados em iterações anteriores entram nos cálculos dos próximos blocos a serem recompostos. Então, um questionamento que pode surgir é: a partir do uso dos pixels já reconstruídos nas iterações anteriores, é possível preservar o aspecto natural da imagem?

Na Figura 6.36, a região a ser recomposta é constituída por uma flor<sup>9</sup>, com  $D = 2703$  pixels e a dimensão do bloco  $m = 3$  e vizinhos mais próximos  $k = 4$ .

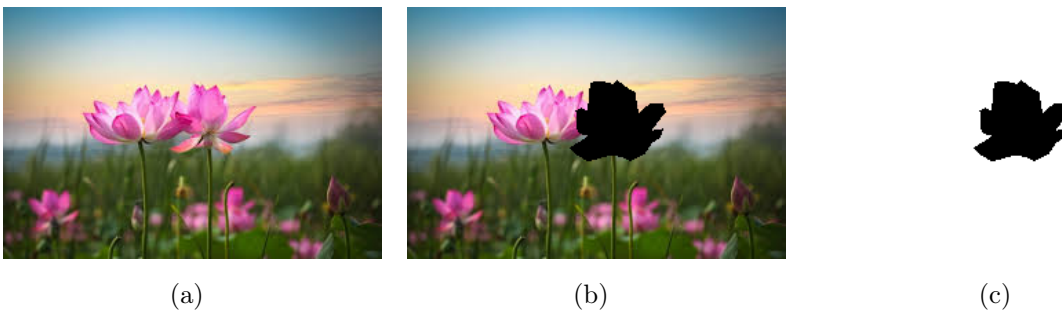


Figura 6.36: (a) Imagem original, (b) Imagem a ser preenchida e (c) Máscara de retoque.

O método que aproveita os pixels restaurados na (Figura 6.37(a)) chegou ao fim em 209 iterações em 3,5 segundos, enquanto que o algoritmo sem a reutilização dos pixels restaurados ilustrado em (Figura 6.37(b)) realizou 1204 iterações em um tempo de 25.9 segundos, ou seja, para um resultado visual aparentemente próximo, o método SPH por blocos com reutilização de pixels apontou um comportamento bastante positivo.

<sup>9</sup>Imagem disponível em: <http://twixar.me/MkWm>. Acessado em: 22.ago.2020

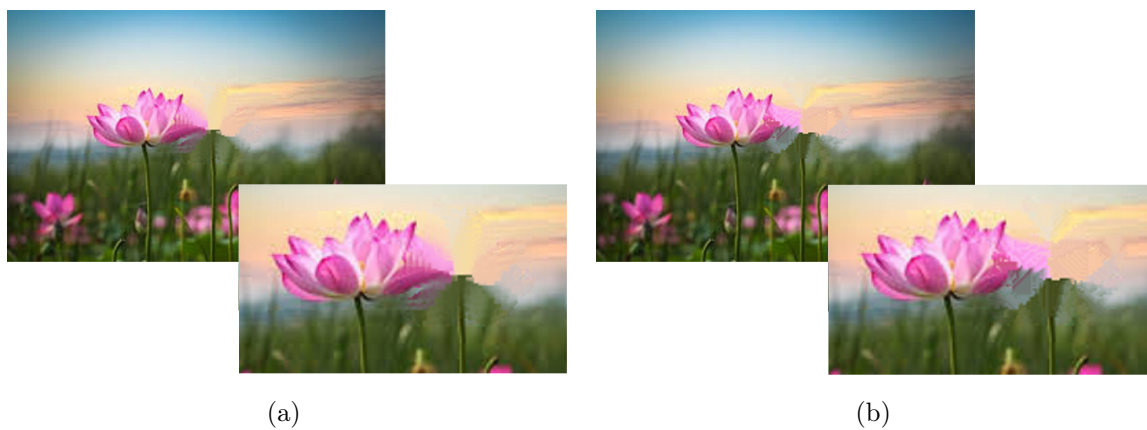


Figura 6.37: Remoção de objetos: (a) SPH por blocos com reutilização de pixels e (b) SPH por blocos sem reutilização de pixels.





## Conclusão

Neste trabalho, foram apresentados e discutidos alguns dos métodos já existentes na literatura para resolver o problema de retoque digital de imagens (*inpainting* digital). A partir dos resultados discutidos no Capítulo 6, foi possível observar que cada um dos métodos possui diferentes particularidades, podendo funcionar de forma mais ou menos satisfatória dependendo da imagem e da área de retoque apresentada.

Como mencionado nos capítulos anteriores, o levantamento bibliográfico dos métodos formulados a partir de EDPs para a tarefa de retoque digital foi de extrema importância, resultando em um conjunto de técnicas já consolidadas para fins de comparação e análise do método proposto neste trabalho.

Também foi possível constatar que o método *Harmonic Inpainting* se mostrou eficiente no retoque de pequenas lacunas, mas produziu resultados não acurados em problemas onde a área de retoque é mais extensa. Já o método *Cahn-Hilliard* apresenta grande precisão em problemas com grandes descontinuidades, mas é limitado à aplicações com imagens em tons de cinza. No caso do método de Transporte, este possui boas características, o qual gerou resultados satisfatórios na tarefa de reconstrução de imagens, entretanto, dependendo da fronteira a ser explorada, é possível notar que os resultados vem acompanhados de pequenos “borrões”. Por fim, apesar de não ter originado imagens reconstruídas com alta acurácia visual em alguns dos testes conduzidos, o método G-SPIR e o modelo de Criminisi provaram ser algoritmos robustos e acurados para tratar a maioria dos casos, porém, quando a região de retoque é extensa, os métodos acabaram produzindo reconstruções com aspectos gráficos artificiais.

Acerca do método implementado neste trabalho de mestrado – SPH via replicação de blocos de pixels e critério de prioridade no preenchimento – este foi capaz de produzir restaurações de alta acurácia visual, mesmo quando aplicado em imagens com diferentes alvos a serem restaurados. Conforme evidenciado pelos resultados experimentais, o método foi efetivo tanto no tratamento de regiões homogêneas como de áreas texturizadas nas imagens, sendo esta última uma característica não presente nas demais técnicas baseadas em difusão da informação como EDPs e a proposta original do G-SPIR. Ainda sobre

a abordagem implementada, foi realizado uma bateria de testes de variação de parâmetros a fim de evidenciar as diferenças na escolha dos mesmos, auxiliando assim pesquisas futuras e usuários que estejam interessados na utilização prática da técnica proposta.

Finalmente, em razão da escassez de pesquisas voltadas para o uso do método SPH no contexto de *inpainting* digital, acredita-se que é possível obter resultados ainda mais acurados a partir do emprego de outras técnicas e estratégias já conhecidas na literatura em conjunto com o SPH. A partir desse olhar, o método proposto foi desenvolvido de forma a preservar as características já existentes em outras técnicas de *inpainting* ao mesmo tempo em que novas funcionalidades foram acrescentadas, em especial, na questão do tratamento de texturas e na recomposição dos detalhes mais finos da imagem.

## Referências

---

- [1] L. F. d. S. Andrade; M. Sandim; F. Petronetto; P. Pagliosa; A. Paiva. Sph fluids for viscous jet buckling. In *2014 27th SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images*, pages 65–72, 2014.
- [2] S. C. Azevedo; E. Silva; M. Colnago; R. G. Negri; W. Casaca. Shadow detection using object area-based and morphological filtering for very high-resolution satellite imagery of urban areas. *Journal of Applied Remote Sensing*, 13(3):1 – 16, 2019.
- [3] S. Azevedo; R. F. de Oliveira; W. Casaca; E. Silva. Deshadowing of high spatial resolution imagery applied to urban area detection. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 25(SPE), 2019.
- [4] C. A. Z. Barcelos; M. Boaventura; E. C. Silva . A well-balanced flow equation for noise removal and edge detection. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(7):751–763, 2003.
- [5] D. P. Basso; M. Colnago; W. Casaca. Remoção de obstruções textuais via inpainting digital em imagens de sensoriamento remoto. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, Uberlândia, Brasil, 2020.
- [6] M. Bertalmio; G. Sapiro; V. Caselles; C. Ballester. Image inpainting. In *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH '00*, pages 417–424, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [7] M. Bertalmio; L. Vese; G. Sapiro; S. Osher. Simultaneous structure and texture image inpainting. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12:882–889, 2003.
- [8] A. L. Bertozzi; S. Esedoglu; A. Gillette. Inpainting of binary images using the cahn-hilliard equation. *Trans. Img. Proc.*, 16(1):285–291, January 2007.
- [9] A. Caballero; W. Mao; L. Liang; J. Oshinski; C. Primiano; R. McKay; S. Kodali; W. Sun. Modeling left ventricular blood flow using smoothed particle hydrodynamics. *Cardiovascular engineering and technology*, 8(4):465–479, 2017.
- [10] J. W. Cahn; J. E. Hilliard. Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy. *jcp*, 28(2):258–267, Feb 1958.

- 
- [11] W. Casaca. *Graph Laplacian for Spectral Clustering and Seeded Image Segmentation*. Phd thesis, University of São Paulo, 2015.
- [12] W. Casaca, J. P. Gois, H. C. Batagelo, G. Taubin, and L. G. Nonato. Laplacian coordinates: Theory and methods for seeded image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 1–17, 2021.
- [13] W. Casaca; D. Motta; G. Taubin; L. G. Nonato. A user-friendly interactive image inpainting framework using laplacian coordinates. In *2015 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 862–866. IEEE, 2015.
- [14] W. Casaca; M. Boaventura. A decomposition and noise removal method combining diffusion equation and wave atoms for textured images. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, 2010.
- [15] W. Casaca; M. Boaventura; M. P. De Almeida; L. G. Nonato. Combining anisotropic diffusion, transport equation and texture synthesis for inpainting textured images. *Pattern Recognition Letters*, 36:36–45, 2014.
- [16] T. F. Chan; J. Shen. Mathematical models for local nontexture inpaintings. *SIAM J. Appl. Math.*, 62:1019–1043, 2002.
- [17] T. Chang; H. Kao; K. Chang; M. Hsu. Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Hydrology*, 408(1-2):78–90, 2011.
- [18] Y. Chang; Z. Y. Liu; K. Lee; W. Hsu. Free-form video inpainting with 3d gated convolution and temporal patchgan. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 9066–9075, 2019.
- [19] W. Cheng; B. Hu; C. Yang; W. Cheng. The velocity field of multiphase flow and efficiency of biological aeration filter. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 22(2):260–264, 2010.
- [20] W. Cheng; C. Hsieh; S. Lin; C. Wang; J. Wu. Robust algorithm for exemplar-based image inpainting. 2005.
- [21] P. W. Cleary; S. H. Pyo; M. Prakash; B. K. Koo. Bubbling and frothing liquids. *ACM Trans. Graph.*, 26(3), July 2007.
- [22] A. Criminisi; P. Perez; K. Toyama. Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(9):1200–1212, 2004.
- [23] M. Desbrun; M. Gascuel. Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies. In *In Computer Animation and Simulation 96 (Proceedings of EG Workshop on Animation and Simulation)*, pages 61–76. Springer-Verlag, 1996.
- [24] G. Di Blasi; E. Francomano; A. Tortorici; E. Toscano. A smoothed particle image reconstruction method. *Calcolo*, 48(1):61–74, 2011.

- [25] E. A. d. S. Galvanin; E. A. Silva. Detecção de bordas em imagens digitais através de um processo de difusão anisotrópica não linear. *Ciencia y Engenharia/Science and Engineering Journal*, pages 73–78, 2006.
- [26] R. A. Gingold; J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(3):375–389, 12 1977.
- [27] B. Illés. Comparing 2d and 3d numerical simulation results of gas flow velocity in convection reflow oven. *Soldering & Surface Mount Technology*, 26(4):223–230, 2014.
- [28] C. Liang; J. Huang; W. Shi. A new treatment for boundary of laminar flow inlet or outlet in sph. *Journal of Software Engineering*, 8(4):321–327, 2014.
- [29] G. R. Liu; M. B. Liu. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. World Scientific Publishing Company, 01 2003.
- [30] M. B. Liu; W. P. Xie; G. R. Liu. Modeling incompressible flows using a finite particle method. *Applied mathematical modelling*, 29(12):1252–1270, 2005.
- [31] L.B. Lucy. Numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. J.; (United States)*, 82:12(1), 12 1977.
- [32] T. März. Image inpainting based on coherence transport with adapted distance functions. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(4):981–1000, 2011.
- [33] F. A. Mazzini. Retoque digital com o método sph. Master’s thesis, Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017.
- [34] J. P. Morris. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics. *International journal for numerical methods in fluids*, 33(3):333–353, 2000.
- [35] M. Müller; B. Solenthaler; R. Keiser; M. Gross. Particle-based fluid-fluid interaction. In *Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, SCA ’05, pages 237–244, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [36] M. Müller; D. Charypar; M. Gross. Particle-based fluid simulation for interactive applications. In *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, SCA ’03, pages 154–159, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2003. Eurographics Association.
- [37] H. Nasiri; M. Y. A. Jamalabadi; R. Sadeghi; M. R. Safaei; T. K. Nguyen; M. S. Shadloo. A smoothed particle hydrodynamics approach for numerical simulation of nano-fluid flows. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 135(3):1733–1741, 2019.
- [38] A. Paiva; F. Petronetto; T. Lewiner; G. Tavares. Particle-based non-newtonian fluid animation for melting objects. In *Sibgrapi 2006 (XIX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing)*, pages 78–85, Manaus, AM, october 2006. IEEE.

- 
- [39] P. Perona; J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 12(7):629–639, 1990.
- [40] C. B. Schönlieb. *Partial Differential Equation Methods for Image Inpainting*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2015.
- [41] M. G. Suwardi; D. Tarwidi; et. al. Smoothed particle hydrodynamics method for simulating waterfall flow. *Journal of Physics: Conference Series*, 971(1):012035, 2018.
- [42] S. Tebini; Z. Mbarki; H. Seddik; E. B. Braiek. Rapid and efficient image restoration technique based on new adaptive anisotropic diffusion function. *Digital Signal Processing*, 48:201–215, 2016.
- [43] M. V. Venkatesh; S. S. Cheung; J. Zhao. Efficient object-based video inpainting. *Pattern Recognition Letters*, 30(2):168–179, 2009.
- [44] D. Violeau; R. Issa. Numerical modelling of complex turbulent free-surface flows with the sph method: an overview. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(2):277–304, 2007.
- [45] J. Wang; K. Lu; D. Pan; N. He; B. Bao. Robust object removal with an exemplar-based image inpainting approach. *Neurocomputing*, 123:150 – 155, 2014. Contains Special issue articles: Advances in Pattern Recognition Applications and Methods.
- [46] Qing Zou. An image inpainting model based on the mixture of perona–malik equation and cahn–hilliard equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1(8), 2020.