

**MARILIA FERNANDES VIDILLE**

**Utilização de um algoritmo acelerador para simular o desenvolvimento de esteiras de aeronaves através de um método de partículas em conjunto com um método de elementos de contorno**

**Marilia Fernandes Vidille**

**Utilização de um algoritmo acelerador para simular o desenvolvimento de esteiras de aeronaves através de um método de partículas em conjunto com um método de elementos de contorno**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato

Guaratinguetá - SP  
2022

V653u	<p>Vidille, Marília Fernandes</p> <p>Utilização de um algoritmo acelerador para simular o desenvolvimento de esteiras de aeronaves através de um método de partículas em conjunto com um método de elementos de contorno / Marília Fernandes Vidille – Guaratinguetá, 2022.</p> <p>103 f. : il.</p> <p>Bibliografia: f. 90-93</p> <p>Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2022.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato</p> <p>1. Algoritmos. 2. Métodos de simulação. 3. Aeronaves. I. Título.</p> <p>CDU 629.733</p>
-------	---

**MARILIA FERNANDES VIDILLE**

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO  
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
“GRADUADA EM ENGENHARIA MECÂNICA”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. Dr. CELSO EDUARDO TUNA  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



Prof. Dr. ALEX MENDONÇA BIMBATO  
Orientador/UNESP-FEG



Prof. Dr. THIAGO AVERALDO BIMESTRE  
UNESP-FEG



Engº. LUIS FERNANDO JUNIOR SALDAÑA  
BERNUY  
UNESP-FEG

## **DADOS CURRICULARES**

### **MARILIA FERNANDES VIDILLE**

**NASCIMENTO** 20.11.1999 – São Paulo / SP

**FILIAÇÃO** Antonio Sérgio Vidille  
Rosana Fernandes

**2017/2021** Curso de Graduação em Engenharia Mecânica  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP

Para meus pais, pela paciência, dedicação e carinho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me permitir cumprir esta etapa com saúde e por jamais me desamparar em momentos difíceis.

Aos meus pais, Rosana e Sérgio, que sempre acreditaram no meu potencial e são responsáveis pela pessoa que me tornei. Faltam-me palavras para agradecer o tanto que já fizeram e ainda fazem para me ver feliz e realizada. Vocês são o meu exemplo de resiliência, força e humanidade.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato, por ter me recebido de braços abertos para fazer iniciação científica e, posteriormente, o trabalho de graduação, me mostrando, durante esse tempo, como a mecânica dos fluidos é fantástica.

Ao Dr. Paulo Guimarães de Moraes por todas as horas, que não foram poucas, empenhadas me ajudando com programação, além de ter me mostrado o quanto a pesquisa nessa área é incrível. Este trabalho não seria o mesmo sem o seu auxílio.

Às minhas grandes amigas, Beatriz e Jaine, que são como irmãs para mim, presentes em todos os momentos da minha vida, sejam eles bons ou ruins, além de guardarem consigo partes importantes da minha história... deixo aqui o meu muito obrigada por serem os melhores ombros amigos que alguém poderia ter.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro durante a realização da minha iniciação científica (processo 2020/01212-5), cujos principais resultados também foram apresentados nesta monografia.

A todos os professores que tive durante a vida. Obrigada por terem deixado gravados em mim marcas e ensinamentos que o tempo não será capaz de apagar.

“Geralmente aqueles que sabem pouco falam  
muito e aqueles que sabem muito falam pouco.”  
Jean-Jacques Rousseau

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo realizar o estudo numérico do desenvolvimento de esteiras de aeronaves nas proximidades do solo através de uma descrição lagrangiana, a qual associa o Método de Vórtices Discretos, para a inclusão dos efeitos viscosos, com o Método de Painéis, que tem por finalidade a discretização da geometria analisada e resolver a etapa potencial do problema. A principal contribuição do presente trabalho reside na implementação de um algoritmo acelerador, o Método de Multipolos Rápidos, para calcular a parcela do campo de velocidades devido à nuvem de vórtices discretos, em alternativa à lei de Biot-Savart, etapa mais onerosa no que concerne ao tempo de processamento das simulações numéricas. O Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, utilizado para simular a difusão da vorticidade, eleva consideravelmente a quantidade de partículas no domínio computacional durante o decorrer das simulações numéricas; assim, a partir da implementação do algoritmo acelerador para computar a parcela do campo de velocidades devido à interação vórtice-vórtice, é possível realizá-las em um tempo computacional, aproximadamente, 90% menor, além de manter a acurácia do cálculo do campo de velocidades do escoamento em valores razoáveis, de até 2,54%. Ao final, os resultados obtidos a partir do algoritmo desenvolvido são comparados com aqueles existentes na literatura e pode-se concluir que o Método de Multipolos Rápidos foi implementado com sucesso.

**PALAVRAS-CHAVE:** Descrição Lagrangiana. Método de Vórtices Discretos. Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado. Método de Multipolos Rápidos. Método de Painéis.

## ABSTRACT

The present research aims to accomplish a numerical study of an aircraft wake near the ground through a lagrangian description, which associates the Discrete Vortex Method to include the viscous effects, and the Panel Method, which aims to discretize the analyzed geometry and solve the potential step of the problem. This paper main's contribution lies in the implementation of an accelerator algorithm, the Fast Multipole Method, which calculates the velocity field's portion due to the cloud of discrete vortices, as an alternative to the Biot-Savart Law, most expensive step in terms of processing time of the numerical simulations. The Core Spreading Method, used to simulate vorticity diffusion, considerably increases the number of particles in the domain during the course of numerical simulations; thus, from the implementation of the accelerator algorithm to compute the portion of the velocity field due to the vortex-vortex interaction, it is possible to perform them in, approximately, 90% less computational time, besides keeping the accuracy of the computation of the velocity field calculation at reasonable values, up to 2,54%. At the end, the results obtained using the algorithm developed are compared with those existing in the literature and it can be concluded that the Fast Multipole Method was successfully implemented.

**KEYWORDS:** Lagrangian Description. Discrete Vortex Method. Core Spreading Method. Fast Multipole Method. Panel Method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Divisão de um vórtice discreto no MCRNM.....	29
Figura 2 – Domínio computacional inicial (nível 0).....	30
Figura 3 – Divisão do domínio computacional através do algoritmo global: (a) nível 1; (b) nível 2.....	31
Figura 4 – Divisão do domínio computacional promovida pelo algoritmo adaptativo .....	31
Figura 5 – Grandezas características do problema proposto .....	33
Figura 6 – Singularidades do tipo fontes distribuídas uniformemente sobre um painel plano de comprimento $x_2-x_1$ .....	41
Figura 7 – Componentes nas direções $x$ e $y$ da velocidade induzida por um painel qualquer em um ponto $P$ do domínio computacional .....	43
Figura 8 – Geração de vórtices discretos de Lamb sobre a superfície do solo discretizada em quatro painéis planos.....	46
Figura 9 – Distribuição uniforme de partículas no domínio quadrado de lado $S$ : (a) $n = 0$ ; (b) $n = 3$ .....	50
Figura 10 – Caixas vizinhas de uma caixa qualquer $B$ do segundo nível de refinamento .....	51
Figura 11 – Lista de interação da caixa $b$ , filha da caixa $B$ , no terceiro nível de refinamento....	52
Figura 12 – Montagem dos multipolos no nível máximo de refinamento .....	53
Figura 13 – Translação da influência dos centroides das caixas do terceiro nível de refinamento para as caixas do segundo nível de refinamento ( <i>Multipole-to-Multipole</i> ) .....	55
Figura 14 – Interação entre caixas de um mesmo nível de acordo com a lista criada na etapa de pré-processamento ( <i>Multipole-to-Local</i> ).....	56
Figura 15 – Interação de caixas em diferentes níveis de refinamento (passos M2M e L2L) e de caixas em um mesmo nível de refinamento (M2L), realizadas sucessivamente .....	58
Figura 16 – Translação da influência dos centroides de uma caixa genérica do nível máximo de refinamento para as partículas internas ( <i>Local-to-Particle</i> ) .....	59
Figura 17 – Componentes da velocidade tangencial induzida em um vórtice discreto $k$ por um vórtice discreto $j$ .....	60
Figura 18 – Representação esquemática da discretização do solo .....	65
Figura 19 – Tempo de simulação numérica-em função dos níveis máximos de refinamento testados (Euler; $\Delta t = 0,025$ ; $n_z = 1,5 \times 10^4$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,5 \times 10^4$ ).....	73
Figura 20 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função dos níveis	

máximos de refinamento para o primeiro passo de tempo da simulação numérica (Euler; $\Delta t = 0,025$ ; $n_z = 1,5 \times 10^4$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,5 \times 10^4$ ) .....	75
Figura 21 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função dos passos de tempo da simulação numérica (Euler; $\Delta t = 0,025$ ; $n_z = 1,5 \times 10^4$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,5 \times 10^4$ ) .....	76
Figura 22 – Evolução do campo de vorticidades ao longo de uma simulação numérica que utiliza o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado para resolver a equação da difusão da vorticidade na ausência de fronteira sólida (Euler; $\Delta t = 0,025$ ; $\alpha = 0,2$ ; $n_z = 100$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,5 \times 10^4$ ) .....	79
Figura 23 – Evolução do campo de vorticidades ao longo da primeira simulação numérica que utiliza o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado para resolver a equação da difusão da vorticidade na presença de fronteira sólida (Euler; $\Delta t = 0,025$ ; $m = 240$ ; $\alpha = 0,2$ ; $n_z = 100$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,5 \times 10^4$ ).....	82
Figura 24 – Evolução do campo de vorticidades ao longo da segunda simulação numérica que utiliza o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado para resolver a equação da difusão da vorticidade na presença de fronteira sólida (Euler; $\Delta t = 0,05$ ; $m = 240$ ; $\alpha = 0,3$ ; $n_z = 100$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,5 \times 10^4$ ).....	83
Figura 25 - Evolução do campo de vorticidades ao longo de uma simulação numérica em que os efeitos da difusão foram contabilizados através do Método de Avanço Randômico e a geração de vorticidade no solo foi levada em consideração (Euler; $\Delta t = 0,05$ ; $m = 80$ ; $n_z = 50$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,65 \times 10^3$ ).....	86
Figura 26 – Evolução do lado direito da nuvem de vórtices discretos ao longo do tempo para a simulação considerando a pista e a geração de vorticidade (Euler; $\Delta t = 0,05$ ; $m = 80$ ; $n_z = 50$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,65 \times 10^3$ ).....	87
Figura A.1 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 1° passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos .....	95
Figura A.2 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 500° passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.....	96
Figura A.3 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 1000° passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.....	96
Figura A.4 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao	

1500° passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.....	97
Figura A.5 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 2000° passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.....	97
Figura A.6 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 2500° passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.....	98
Figura A.7 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 3000° passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.....	98
Figura B.1 – <i>Speed-up</i> em função do número de partículas presentes no domínio para cada um dos níveis máximos de refinamento.....	101
Figura C.1 – Resumo do trabalho apresentado no COBEM (2021) .....	103

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros numéricos empregados nas simulações desconsiderando a pista e os efeitos da difusão .....	72
Tabela 2 – Tempo de simulação numérica para cada um dos níveis máximos de refinamento utilizados (Euler; $\Delta t = 0,025$ ; $n_z = 1,5 \times 10^4$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,5 \times 10^4$ ) .....	73
Tabela 3 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o primeiro passo de tempo da simulação numérica (Euler; $\Delta t = 0,025$ ; $n_z = 1,5 \times 10^4$ ; $n_t = 25$ ; $Re = 7,5 \times 10^4$ ).....	74
Tabela 4 – Parâmetros numéricos empregados na simulação desconsiderando a pista e com os efeitos da difusão contabilizados através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado .....	78
Tabela 5 – Parâmetros numéricos empregados nas simulações desconsiderando a geração de vorticidade na pista e com os efeitos da difusão contabilizados através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado .....	81
Tabela 6 –Parâmetros numéricos empregados na simulação considerando a geração de vorticidade na pista .....	85
Tabela A.1 – Parâmetros numéricos empregados nas simulações para investigar o comportamento do Método de Multipolos Rápidos .....	94
Tabela B.1 – <i>Speed-up</i> em função do número de partículas presentes no domínio para cada um dos níveis máximos de refinamento.....	100

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ETV	Equação do Transporte da Vorticidade
FMM	Método de Multipolos Rápidos
MVD	Método de Vórtices Discretos
MCRNM	Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_0$	Soma das intensidades das partículas de uma caixa;
$a_k$	Coefficiente do multipolo;
$b$	Escala de comprimento;
$b_l$	Coefficiente referente ao Método de Multipolos Rápidos;
CO	Ponto de controle dos painéis;
$\epsilon$	Distância de geração de vórtices discretos de Lamb;
$h$	Altura de desprendimento do par contrarrotativo de vórtices;
$K_{ip}^S$	Elemento da matriz de influência de fontes;
$K_{ij}^V$	Elemento da matriz de influência de vórtices;
$L$	Comprimento da pista do aeroporto;
$M$	Número de Mach;
$m$	Número de painéis utilizados para discretizar a fronteira sólida;
$n$	Nível de refinamento;
$n_{partbox}$	Número de partículas dentro de uma caixa;
$n_t$	Número de termos da série de Taylor;
$o'$	Posição no espaço;
$P$	Número randômico entre 0 e 1;
$p$	Campo de pressões;
$p_{shed}$	Ponto de desprendimento de vórtices discretos;
$q$	Intensidade de partículas;
$r$	Distância;
$Re$	Número de Reynolds;
RHSS	Vetor coluna lado direito da equação de fontes;
RHSV	Vetor coluna lado direito da equação de vórtices;
$S_1$	Pista do aeroporto;
$t$	Tempo;
$U$	Velocidade do escoamento incidente;
$u$	Velocidade na direção $x$ ;
$\vec{u}$	Campo de velocidades;
$u_n$	Velocidade normal da partícula fluida;
$u_t$	Velocidade tangencial da partícula fluida;

$u_\infty$	Velocidade do escoamento na direção $x$ ;
$v$	Velocidade na direção $y$ ;
$v_n$	Velocidade normal da fronteira sólida;
$v_t$	Velocidade tangencial da fronteira sólida;
$v_\infty$	Velocidade do escoamento na direção $y$ ;
$x$	Coordenada cartesiana;
$y$	Coordenada cartesiana;
$Z$	Número de vórtices discretos presentes na nuvem;
$z$	Posição/distância complexa.

### **Letras gregas**

$\alpha$	Parâmetro que governa o processo de partição;
$\alpha_\infty$	Ângulo de incidência do escoamento;
$\beta$	Ângulo de inclinação do painel;
$\Gamma$	Intensidade do vórtice discreto de Lamb;
$\Delta\theta$	Deslocamento circunferencial;
$\Delta x$	Variação de posição na direção $x$ ;
$\Delta r$	Deslocamento radial;
$\Delta s$	Comprimento dos painéis;
$\Delta t$	Incremento de tempo;
$\Delta y$	Variação de posição na direção $y$ ;
$\theta$	Ângulo de orientação de um ponto extremo do painel até um ponto arbitrário do domínio fluido;
$\nu$	Coefficiente de viscosidade cinemática do fluido;
$\rho$	Massa específica do fluido;
$\sigma$	Densidade de fontes e sumidouros;
$\sigma_0$	Raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb;
$\phi$	Potencial;
$\omega$	Vorticidade;
$\Omega$	Domínio fluido semi-infinito.

## **Sobrescritos**

- n Nível de refinamento;
- S Fontes;
- V Vórtices;
- \* Variáveis dimensionais.

## **Subscritos**

- b Caixa que está recebendo influência;
- b' Caixa que está influenciando;
- c Centroeide da caixa de nível máximo de refinamento;
- dif Difusão;
- f Caixa filha;
- i, j, k Índices;
- n Direção normal;
- p Caixa pai;
- t Direção tangencial;
- x Componente horizontal;
- y Componente vertical;
- $\infty$  Escoamento incidente.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	19
1.1	MOTIVAÇÃO .....	22
1.2	OBJETIVOS.....	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	24
2.1	MÉTODO DE PAINÉIS .....	24
2.2	MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS .....	25
2.2.1	<b>Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado</b> .....	28
2.3	MÉTODO DE MULTIPOLOS RÁPIDOS .....	29
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA</b> .....	33
3.1	DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS .....	33
3.2	HIPÓTESES ADOTADAS .....	33
3.3	ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA.....	35
3.4	A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DA VORTICIDADE.....	36
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE SOLUÇÃO</b> .....	39
4.1	ADVECCÃO DA NUVEM DE VÓRTICES DISCRETOS .....	39
4.1.1	<b>Contribuição do escoamento incidente</b> .....	40
4.1.2	<b>Contribuição da fronteira sólida: o Método de Painéis</b> .....	40
4.1.3	<b>Geração da vorticidade</b> .....	45
4.1.4	<b>Contribuição da nuvem de vórtices discretos</b> .....	48
4.1.4.1	Método de Multipolos Rápidos .....	49
4.1.4.2	Lei de Biot-Savart.....	59
4.1.5	<b>Avanço Advectivo</b> .....	61
4.2	DIFUSÃO DA VORTICIDADE .....	62
4.3	ALGORITMO DO MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS.....	64
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DE RESULTADOS</b> .....	70
5.1	PARÂMETROS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA .....	70
5.1.1	<b>Parâmetros relacionados com o método numérico</b> .....	70
5.1.2	<b>Parâmetro relacionados com o fenômeno físico</b> .....	71
5.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DESCONSIDERANDO A PRESENÇA DA FRONTEIRA SÓLIDA.....	72
5.2.1	<b>Simulações com a rotina responsável pela difusão desabilitada</b> .....	72

5.2.2	<b>Simulação com a rotina responsável pela difusão habilitada .....</b>	<b>77</b>
5.3	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS CONSIDERANDO A PRESENÇA DA FRONTEIRA SÓLIDA.....</b>	<b>79</b>
5.3.1	<b>Simulações numéricas desconsiderando a geração de vorticidade na fronteira sólida .....</b>	<b>79</b>
5.3.2	<b>Simulação numérica considerando a geração de vorticidade na fronteira sólida .....</b>	<b>84</b>
6	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>88</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>90</b>
	<b>APÊNDICE A – ANÁLISE DA ACURÁCIA DO MÉTODO DE MULTIPOLOS RÁPIDOS IMPLEMENTADO EM CONJUNTO COM O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS .....</b>	<b>94</b>
	<b>APÊNDICE B – ANÁLISE DA REDUÇÃO DO TEMPO DE SIMULAÇÃO ATRAVÉS DO USO DO MÉTODO DE MULTIPOLOS RÁPIDOS .....</b>	<b>100</b>
	<b>APÊNDICE C – RESUMO DO ARTIGO SUBMETIDO AO COBEM 2021 .....</b>	<b>103</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em problemas de engenharia, ocorrem, frequentemente, situações em que um fluido escoar ao redor de fronteiras sólidas, fenômeno que causa a formação de esteira viscosa. A viscosidade, presente em todos os fluidos, faz com que a vorticidade gerada ao redor da fronteira sólida alcance locais em que o escoamento era, até aquele momento, irrotacional. Tal espalhamento gera um campo de vorticidades que não pode ser estudado analiticamente, por conta da complexidade destes escoamentos. Sendo assim, o campo de vorticidades deve ser estudado de forma experimental e/ou numérica, a fim de se determinar os campos de velocidade e de pressão do escoamento.

Existem duas maneiras de realizar a simulação numérica de escoamentos:

- Descrição euleriana: as propriedades do campo de escoamento são descritas como função de sua posição no espaço e no tempo (FOX et al., 2013) e a região fluida é discretizada com o auxílio de uma malha computacional, através da qual as grandezas de interesse são calculadas;
- Descrição lagrangiana: o escoamento é tratado como um conjunto de partículas fluidas seguidas individualmente em seus movimentos no domínio fluido (FOX et al., 2013), sendo as propriedades de interesse calculadas apenas em função do tempo.

Os métodos eulerianos partem da discretização do domínio fluido a ser analisado. Esta discretização acarreta em esforços computacionais por conta da geração de malhas, sendo que isso pode ser evitado mediante o uso da descrição lagrangiana. Além disso, é possível que ocorram intercorrências na discretização do domínio fluido caso o problema seja composto por geometrias mais complexas, o que pode ocasionar problemas na formulação das condições de contorno. Os métodos lagrangianos partem da discretização de uma propriedade do escoamento, a vorticidade, por exemplo. O principal método lagrangiano é o Método de Vórtices Discretos (MVD), utilizado no presente trabalho, em conjunto com o Método de Painéis.

De acordo com o Método de Vórtices Discretos, a simulação numérica da evolução do campo de vorticidades no tempo é realizada através de uma nuvem de vórtices discretos de Lamb, sendo possível dividi-la em dois processos: advecção e difusão viscosa da vorticidade. Chorin (1973) propôs o algoritmo de separação da parte viscosa da equação do transporte da vorticidade, sendo possível tratar, de maneira individual, mas em um mesmo incremento de tempo, a advecção e a difusão da vorticidade, simplificando a implementação numérica do Método de Vórtices Discretos.

A solução da etapa advectiva envolve o cálculo do campo de velocidades do escoamento sobre cada vórtice discreto em cada instante de tempo. Este cálculo é composto por três etapas: contribuição de fronteira sólidas, do escoamento incidente e da nuvem de vórtices discretos, em que cada vórtice discreto induz velocidade em todos os outros presentes no escoamento. A última contribuição é a mais onerosa em termos do tempo de processamento, uma vez que requer  $Z^2$  operações para  $Z$  vórtices discretos presentes no domínio computacional.

No que diz respeito à solução da equação da difusão da vorticidade, houve proposição de diversos métodos para obtê-la, sendo possível destacar:

1. Método de Avanço Randômico: proposto por Chorin (1973) e modificado por Lewis (1991), consiste em simular a difusão da vorticidade por meio da geração de valores aleatórios para computar os deslocamentos radial e circunferencial dos vórtices discretos;
2. Método da Redistribuição da Vorticidade (SHANKAR; VAN DOMMELEN, 1996): caracteriza-se por dividir a intensidade de um vórtice discreto entre os adjacentes por meio da solução de um sistema de equações algébricas;
3. Método da Velocidade de Difusão (OGAMI; AKAMATSU, 1991): baseia-se na inserção de uma velocidade de advecção por conta do processo de difusão;
4. Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado (ROSSI, 1996): os vórtices discretos crescem até um limite previamente determinado por parâmetros intrínsecos ao método e, então, sofrem partição em quatro novos vórtices discretos, de modo que cada um deles recebe um quarto da intensidade do vórtice discreto original.

Dos quatro métodos apresentados, apenas o primeiro é probabilístico, sendo os outros métodos de cunho determinístico. A aplicação deste fica limitada a problemas de escoamento com altos valores de número de Reynolds e o tempo de simulação deste é menor do que quando qualquer um dos outros três métodos é utilizado, porém, a precisão dos resultados obtidos na simulação pode ficar comprometida.

No presente trabalho, o algoritmo desenvolvido para acelerar o cálculo do campo de velocidades do escoamento permite simular a difusão da vorticidade de forma mais precisa, através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado (MCRNM). A característica principal deste método determinístico é simular a difusão da vorticidade através do crescimento do raio do núcleo das partículas (vórtices discretos) utilizadas na discretização desta propriedade do escoamento. O método prevê que, em um dado momento das simulações numéricas, o raio do núcleo dos vórtices discretos atinja um valor crítico e sofra um processo

de partição, no qual, cada vórtice discreto, cujo raio do núcleo atingiu o tamanho crítico, dá origem a quatro novos vórtices discretos (ROSSI, 1996). Este procedimento garante a convergência do método (que possibilita simulações em qualquer faixa de números de Reynolds), porém, aumenta demasiadamente a população de vórtices discretos presentes no domínio computacional.

O aumento na população de vórtices discretos utilizada para discretizar o campo de vorticidades impacta no tempo computacional, pois, no cômputo da etapa advectiva, contabiliza-se a influência da nuvem de vórtices discretos e, quanto maior for o número de partículas presentes no domínio computacional, mais dispendiosa é a simulação numérica.

Assim, para possibilitar a utilização de um método numérico determinístico para resolver a equação da difusão da vorticidade, tal como o MCRNM, é imperativo lançar mão de algoritmos que acelerem o cálculo do campo de velocidades do escoamento. É nesse contexto que se insere o Método de Multipolos Rápidos, do inglês *Fast Multipole Method*, FMM (GREENGARD; ROKHLIN, 1987; NISHIMURA, 2002; RICCIARDI; WOLF; BIMBATO, 2017a; RICCIARDI; WOLF; BIMBATO, 2017b).

A simulação de escoamentos ao redor de fronteira sólidas deve levar em consideração a influência destas no cálculo do campo de velocidades. Desta forma, utiliza-se o Método de Painéis (KATZ; PLOTKIN, 1991), que é um esquema numérico capaz de analisar escoamentos potenciais sub ou supersônicos ao redor de geometrias arbitrárias e é utilizado no presente trabalho para discretizar a pista de um aeroporto genérico.

Como desvantagem, o Método de Painéis traz uma deficiência na precisão das simulações, uma vez que somente é possível assegurar a satisfação das condições de contorno (impenetrabilidade e escorregamento nulo) sobre um único ponto de cada painel utilizado para discretizar a geometria, isto é, o chamado ponto de controle.

Em resumo, o presente trabalho apresenta os principais resultados obtidos a partir do desenvolvimento de um programa computacional capaz de realizar o estudo do desenvolvimento de esteiras de aeronaves. Este programa utiliza o Método de Vórtices Discretos para incluir os efeitos viscosos, em conjunto com o Método de Painéis, responsável pela solução potencial do problema a partir da discretização da geometria de interesse. A grande contribuição do presente trabalho está na implementação de um algoritmo acelerador, o Método de Multipolos Rápidos, cujo princípio é substituir, em partes, a lei de Biot-Savart, responsável por calcular a parcela do campo de velocidades do escoamento devido à nuvem de vórtices discretos (interação vórtice-vórtice), que é a etapa mais onerosa, no que concerne ao tempo de processamento do método lagrangiano.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

A indústria aeronáutica é uma das responsáveis por tornar o planeta globalizado. Sem ela, as relações internacionais seriam complexas sendo, até, inacessíveis. Por conta da alta demanda neste setor, faz-se necessário o desenvolvimento de pesquisas em diversas frentes, incluindo a Mecânica dos Fluidos.

A Mecânica dos Fluidos é uma ciência que estuda o efeito de forças em escoamentos de fluidos. Dominar esta ciência é imprescindível no que diz respeito ao desenvolvimento seguro e competitivo da indústria aeronáutica, viabilizando o uso dos recursos da melhor maneira possível.

Com o crescimento desta indústria, o tráfego aéreo se tornou mais intenso nas últimas décadas, sendo frequente, então, o acúmulo de aeronaves para realizar os procedimentos de pouso e decolagem em um único aeroporto, quase que simultaneamente.

Para realizar os procedimentos de pouso e decolagem no menor tempo possível, mantendo a segurança, é necessário fazer a análise da esteira viscosa das aeronaves, garantindo, assim, que haja tempo hábil para a dissipação dos vórtices antes de a aeronave seguinte utilizar a pista.

É nesse contexto que se encaixa o presente trabalho: viabilizar, através de um algoritmo acelerador, simulações mais próximas da realidade do comportamento de esteiras viscosas de aeronaves próximas do solo, em que são necessários mais vórtices discretos para obter uma melhor acurácia do método, além de simular a difusão viscosa da vorticidade através de um método numérico determinístico, que garante maior precisão numérica.

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo estudar o desenvolvimento de esteiras de aeronaves nas proximidades do solo empregando o Método de Vórtices Discretos em conjunto com o Método de Painéis.

Para possibilitar simulações com uma maior quantidade de vórtices discretos no domínio, o que aumenta a acurácia, implementa-se um algoritmo acelerador, o Método de Multipolos Rápidos, principal contribuição do presente trabalho. Este algoritmo é capaz de reduzir a utilização da lei de Biot-Savart, responsável por contabilizar a parcela do campo de velocidades devido à nuvem de vórtices discretos, e tornar a simulação numérica viável no que concerne ao tempo de processamento.

A implementação deste algoritmo acelerador permite simular a difusão viscosa da vorticidade através de uma abordagem determinística, com a utilização do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, que aumenta demasiadamente a quantidade de partículas no domínio. Sem este algoritmo acelerador, as simulações que utilizam este método ficam inviáveis por conta dos longos tempos de simulação.

Quanto ao Método de Painéis, são utilizadas singularidades do tipo fonte com densidade de distribuição constante, que são adequadas para discretizar a pista do aeroporto, garantindo a validade da condição de contorno de impenetrabilidade; a condição de contorno de não escorregamento é garantida, no presente trabalho, pelo Método de Vórtices Discretos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 MÉTODO DE PAINÉIS

O Método de Painéis é originado a partir de uma classe de métodos numéricos muito utilizada em Mecânica dos Fluidos, o Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984), baseado na discretização da superfície de contorno.

Este método tem larga utilização na indústria aeronáutica, pois viabiliza a análise de escoamentos potenciais ao redor de geometrias arbitrárias, podendo ser utilizado para análise de escoamentos através de corpos rombudos ou aerodinâmicos. Os primeiros passos para o desenvolvimento deste método foram dados por Martensen (1959), em que é descrita uma forma de analisar perfis aerodinâmicos em escoamentos potenciais para aplicações aeronáuticas.

O princípio deste método numérico é dividir o corpo em painéis (que, para o caso bidimensional, são segmentos de reta e, para o caso tridimensional, superfícies) que podem ser curvos ou planos, sob os quais são dispostas singularidades fundamentais que podem ser de três tipos: fontes, dipolos ou vórtices, cujo propósito é garantir a validade das condições de contorno. Pereira, Silva e Bodstein (2004) apresentam um estudo comparativo das possibilidades de escolha de singularidades e a forma como estas são distribuídas sobre a superfície discretizada do corpo.

O Método de Painéis pode ser dividido em dois tipos no que diz respeito à ordem das singularidades distribuídas sobre os painéis planos: ordem superior e ordem inferior (ERICKSON, 1990). O primeiro é caracterizado, como o nome diz, por singularidades distribuídas em ordem superior, através de funções lineares ou quadráticas, e o segundo diz respeito às singularidades distribuídas de maneira constante. Aplicações de singularidades de maior ordem podem ser encontradas em Pereira e Bodstein (2004).

É possível utilizar diversas combinações de singularidades para representar um fenômeno físico e gerar a solução do problema de escoamento potencial. Além disso, a geometria é discretizada em  $m$  painéis, que influenciam na convergência do método. Hess (1973) estudou a precisão do método através de uma modelagem utilizando singularidades do tipo fontes com distribuição constante, concluindo que a velocidade calculada convergia a uma taxa de  $1/m^2$ , enquanto o efeito da curvatura do corpo sobre o cálculo das velocidades é da ordem de  $1/m$  (BELLAMY-KNIGHTS et al., 1988).

Para apresentações didáticas a respeito do Método de Painéis e das teorias potenciais

aplicadas aos escoamentos bidimensionais e incompressíveis ao redor de corpos esbeltos, cita-se as obras de Katz e Plotkin (1991) e Moran (1984).

A utilização de singularidades do tipo fontes só pode ser aplicada a geometrias específicas, como aerofólios simétricos e com ângulo de ataque nulo ou contornos abertos, como é o caso da geometria do presente trabalho. Escoamentos assimétricos devem ser representados pelas outras singularidades: vórtices e dipolos. O presente trabalho utiliza o Método de Painéis de ordem inferior, com distribuição constante de fontes sobre painéis planos.

## 2.2 MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

Nascido nos anos de 1970, o Método de Vórtices Discretos moderno foi desenvolvido por Alexander Chorin e Anthony Leonard, nos Estados Unidos, e Conrad Rehbach, na França. Inicialmente, durante os anos de 1980, foi utilizado para aspectos matemáticos, como as propriedades de convergência, porém, mais tarde, houve grande desenvolvimento para utilizá-lo como ferramenta para inclusão dos efeitos viscosos, condições de contorno sobre fronteiras sólidas e a busca pela redução dos custos computacionais para tornar o método apto a simular escoamentos em regime não permanente.

A principal característica do Método de Vórtices Discretos, quando comparado aos métodos numéricos tradicionais (Método de Volumes Finitos, Método de Elementos Finitos, etc.) é que, nele, a discretização é feita somente para o campo de vorticidades, ou seja, apenas as regiões em que há atividades relevantes do escoamento é que se concentram os esforços computacionais. Sendo assim, as regiões onde há pouco ou nenhum evento relevante para o escoamento não são consideradas.

Com a discretização do campo de vorticidades de forma lagrangiana, as condições de contorno no infinito são satisfeitas automaticamente, pois os vórtices discretos têm a característica de marchar no tempo, simulando a dinâmica da vorticidade. Além disso, o avanço temporal dos vórtices discretos é simples, uma vez que estas partículas não possuem massa.

Dessa forma, os métodos que não discretizam o domínio fluido através de malhas (métodos Lagrangianos) são mais vantajosos em relação àqueles que o fazem (métodos Eulerianos), pois a geração de malhas necessita de cuidados, principalmente em regiões do escoamento que sofrem os maiores gradientes de velocidade e de pressão.

Os modelos de vórtices disponíveis para discretizar a vorticidade em duas dimensões incluem os vórtices de Rankine e de Lamb (SARPKAYA, 1994) e ambos suavizam as velocidades induzidas a partir de uma distância ao centro do vórtice. O núcleo é a região circular

que suaviza as velocidades induzidas pela região potencial do vórtice. A definição de vórtice é dada por uma região cuja vorticidade é não nula circundada por uma região com vorticidade nula. A região rotacional do escoamento só é representada corretamente pela inserção de núcleos de vórtices.

No modelo de Rankine, o vórtice gira internamente, como um corpo rígido, na região do núcleo e assume comportamento de vórtice potencial fora desta região. Já no modelo de Lamb, o vórtice possui uma distribuição Gaussiana de vorticidade, que é uma solução exata da equação da difusão da vorticidade.

Conforme já mencionado, a utilização do Método de Vórtices Discretos para simular numericamente escoamentos de fluidos viscosos é baseada na discretização do campo de vorticidades através de vórtices discretos; no presente trabalho será utilizado o modelo do vórtice de Lamb (PANTON, 1984), devido ao fato de este ser um modelo mais realista. Existem três características fundamentais na abordagem numérica do Método de Vórtices Discretos-para a simulação de escoamentos, a saber:

- A formulação das Equações de Navier-Stokes se dá em termos do campo de vorticidades, não do campo de velocidades;
- Utiliza-se o teorema de Helmholtz (BATCHELOR, 1967) para criar uma correspondência entre os elementos de vorticidade, representados pelos vórtices discretos, e as partículas materiais de fluido. A partir desta característica, os vórtices discretos são submetidos ao processo de advecção com a mesma velocidade das partículas fluidas, conferindo uma abordagem totalmente lagrangiana ao método;
- Para obter a velocidade do fluido, é necessário definir o vetor vorticidade por  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ ; integrando-se o campo de vorticidades, determina-se o campo de velocidades,  $\vec{u}$ . Esta operação define a lei de Biot-Savart, capaz de descrever o escoamento através do acompanhamento dos vórtices discretos presentes no domínio fluido durante toda a simulação numérica (BATCHELOR, 1967).

Aplicando-se o operador rotacional nas Equações de Navier-Stokes, obtém-se a equação do transporte da vorticidade (ETV) e o termo de pressão desaparece. É possível, ainda, tomar o divergente das Equações de Navier-Stokes, e recuperar, através de uma formulação integral oriunda de uma equação de Poisson para a pressão, o cálculo das cargas aerodinâmicas (SHINTANI; AKAMATSU, 1994).

Alguns aspectos que envolvem o Método de Vórtices Discretos são destacados pelos pesquisadores, dentre eles:

- Necessidade da redução do tempo de processamento no que se refere ao cálculo da velocidade induzida na nuvem de vórtices discretos através da lei de Biot-Savart, que requer  $Z^2$  operações do processador para  $Z$  vórtices discretos;
- Utilização de menores incrementos de tempo, uma vez que os efeitos da evolução lagrangiana no tempo são mais precisamente computados quanto menores os incrementos de tempo utilizados; porém, tal abordagem deixa as simulações mais onerosas no que diz respeito ao tempo de processamento;
- Contabilização dos efeitos viscosos em uma formulação lagrangiana via métodos determinísticos ou estatísticos, uma vez que a difusão é facilmente computada a partir dos métodos de malha.

No que diz respeito ao primeiro aspecto mencionado, o principal desafio é o cálculo da etapa advectiva, que necessita de  $Z^2$  operações do processador para calcular o campo de velocidades do escoamento na posição ocupada por cada um dos  $Z$  vórtices discretos presentes no domínio computacional para simular a dinâmica da vorticidade, através da lei de Biot-Savart. Dessa forma, desenvolveram-se algoritmos para acelerar a etapa do cálculo da etapa advectiva, dentre eles, é possível destacar o algoritmo partícula-caixa (BARNES; HUT, 1986) e o algoritmo caixa-caixa, batizado de Método de Multipolos Rápidos (GREENGARD; ROKHLIN, 1987; CARRIER; GREENGARD; ROKHLIN, 1988; NISHIMURA, 2002; RICCIARDI; WOLF; BIMBATO, 2017a; RICCIARDI; WOLF; BIMBATO, 2017b), utilizado no presente trabalho para tornar o Método de Vórtices Discretos menos oneroso no que diz respeito ao tempo de simulação. Este método tem como princípio a redução do uso da lei de Biot-Savart, possibilitando que o processador realize  $Z \log Z$  operações para  $Z$  vórtices discretos ou, na hipótese mais ideal,  $Z$  operações para cada  $Z$  vórtices discretos presentes no domínio computacional (KOUMOUTSAKOS, 1993).

Além disso, é possível destacar que a precisão das simulações depende da quantidade de vórtices discretos utilizados para representar o campo de vorticidades, ou seja, aumentar a quantidade de partículas no domínio assegura a precisão do método, porém deixa o tempo de processamento ainda maior. Além do Método de Multipolos Rápidos, destaca-se a utilização da lei de Biot-Savart Modificada (MUSTTO; HIRATA; BODSTEIN 1998), a fim de tornar o tempo de processamento menor.

O segundo aspecto destacado aborda questões de tempo de processamento elevado para garantir a precisão do método. Da mesma maneira que o aumento do número de vórtices discretos no domínio garante melhores resultados, a redução no incremento de tempo da

simulação numérica, também. Sendo assim, faz-se necessário o uso de técnicas que reduzam o tempo de processamento, a fim de que este não se torne fator impeditivo para a realização das simulações numéricas lagrangianas.

O terceiro aspecto mencionado refere-se à correta inclusão dos efeitos da difusão viscosa, que pode ser feita através de diversas abordagens, conforme citado anteriormente. Neste momento, destacam-se duas: o Método de Avanço Randômico (LEWIS, 1991) e o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado (ROSSI, 1996).

O Método de Avanço Randômico foi o primeiro a ser desenvolvido para a inclusão dos efeitos da difusão viscosa no Método de Vórtices Discretos. Tem por característica ser de fácil implementação e de rápida execução, porém, não é satisfatório quanto à taxa de convergência ( $1/\sqrt{Z}$ , sendo  $Z$  o número total de vórtices discretos presentes no domínio computacional). Este é um método de abordagem probabilística, por isso, não possui uma acurácia tão elevada. Por conta disso, foram desenvolvidos outros métodos com abordagem determinística para contabilizar estes efeitos, como é o caso do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado.

### 2.2.1 Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado

Leonard (1980) propôs o Método do Crescimento do Núcleo, que estabelece uma solução aproximada para a evolução no tempo do campo de vorticidades devido à difusão, através do crescimento do núcleo dos vórtices discretos, de acordo com a equação (1):

$$\frac{\partial \sigma_0^2}{\partial t} = \nu \quad (1)$$

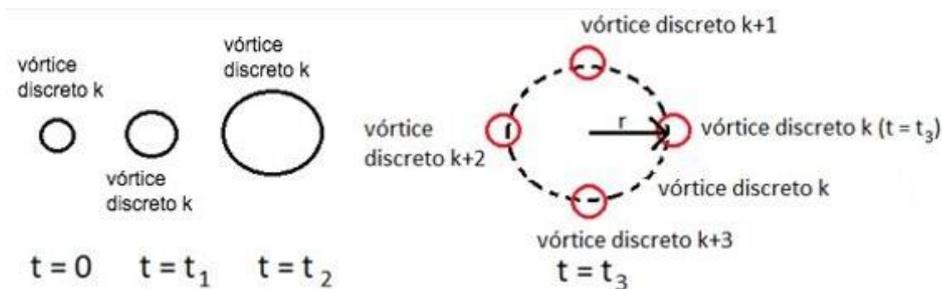
sendo  $\sigma_0$  o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb e  $\nu$  o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido que está escoando.

Greengard (1985) provou que, para longos tempos de simulação, o Método do Crescimento do Núcleo não convergia para solucionar as equações de Navier-Stokes. Rossi (1996) propôs uma modificação que tornou o método de Leonard (1980) convergente.

A modificação proposta por Rossi (1996), batizada de refinamento espacial, é baseada na escolha de parâmetros numéricos capazes de controlar a evolução temporal do raio do núcleo dos vórtices discretos utilizados para discretizar o campo de vorticidades. Dessa forma, quando

o raio do núcleo do vórtice discreto atinge um valor máximo arbitrado, ocorre uma partição do vórtice discreto, formando quatro novos vórtices discretos com intensidades iguais a 25% da intensidade do vórtice discreto original. A Figura 1 exemplifica o refinamento espacial proposto por Rossi (1996). O procedimento de divisão dos vórtices discretos é fundamental no que diz respeito à convergência do método, porém, torna-o extremamente oneroso em termos de tempo de processamento.

Figura 1 – Divisão de um vórtice discreto no MCRNM.



Fonte: Autoria própria.

A equação (2) determina a posição em que os vórtices discretos oriundos do processo de partição são arranjados (conforme ilustrado na Figura 1), visando a garantia da conservação do momento de segunda ordem.

$$r = 2\sigma_0\sqrt{1 - \alpha^2} \quad (2)$$

sendo  $0 < \alpha < 1$  o parâmetro numérico que governa o processo de partição.

### 2.3 MÉTODO DE MULTIPÓLOS RÁPIDOS

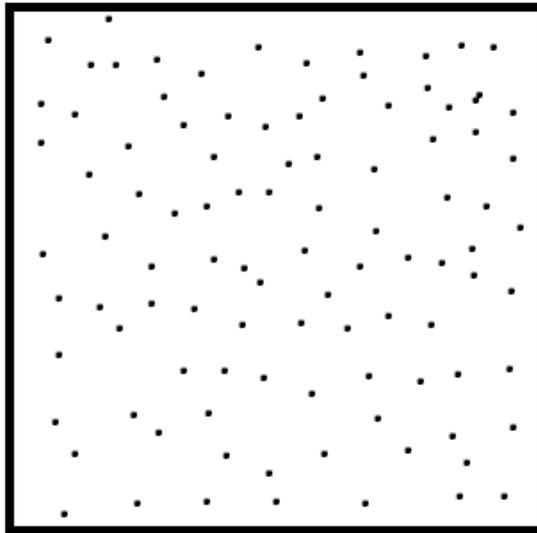
O Método de Multipolos Rápidos é uma ferramenta utilizada para acelerar a solução do Método de Vórtices Discretos, sendo possível aumentar o número de vórtices discretos presentes no domínio e resolver problemas envolvendo múltiplos corpos, além de viabilizar simulações numéricas mais refinadas, que fazem uso de esquemas de marcha no tempo de ordem superior.

O método pode ser dividido em dois algoritmos principais: algoritmo global e algoritmo adaptativo. O algoritmo global (GREENGARD; ROKHLIN, 1987) é ideal para os casos de distribuição próxima da uniforme entre as partículas presentes no domínio, sendo utilizado no

presente trabalho.

O objetivo do método é dividir o domínio computacional, inicialmente uma caixa quadrada contendo todas as partículas (Figura 2), em caixas menores, processo conhecido como refinamento espacial, até um nível de refinamento,  $n$ , específico, o que viabiliza as interações entre caixas e substitui a utilização da lei de Biot-Savart em grande parte do processo de cálculo do campo de velocidades do escoamento.

Figura 2 – Domínio computacional inicial (nível 0).

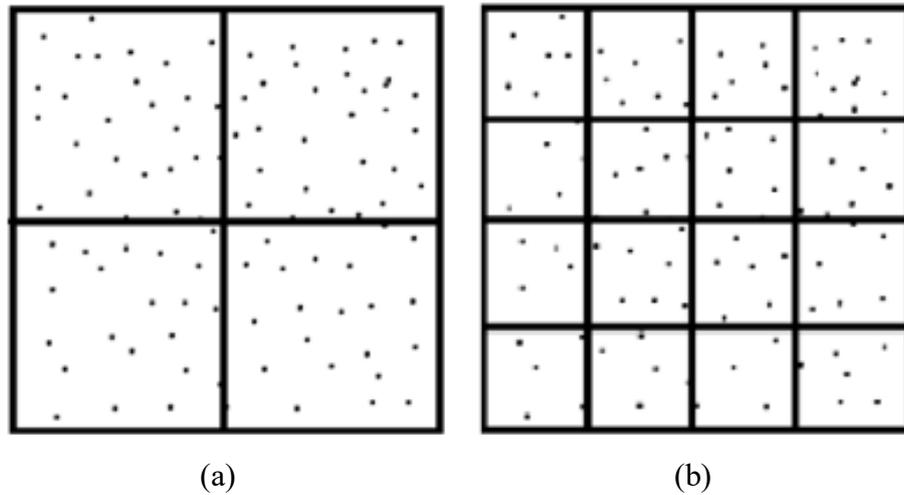


Fonte: Autoria própria.

Para refinar o domínio computacional original, divide-se a caixa da Figura 2 em quatro caixas idênticas entre si, denominadas filhas, conforme apresentado na Figura 3; na Figura 3(a) são ilustradas as caixas-filhas no nível 1, oriundas da divisão do domínio computacional (Figura 2) em quatro partes iguais, e na Figura 3(b) são apresentadas as caixas-filhas no nível 2, oriundas da divisão das caixas do nível 1 em quatro partes iguais.

Dessa forma, as caixas do nível  $n$ , tal que  $n > 0$ , são obtidas através da partição do domínio em  $4^n$  caixas idênticas. O domínio é refinado quando o número de partículas internas a uma caixa for superior a um limite preestabelecido ou até um nível de refinamento máximo determinado. Com o algoritmo global, são criadas duas listas de interação (veja seção 4.1.4.1).

Figura 3 – Divisão do domínio computacional através do algoritmo global: (a) nível 1; (b) nível 2.

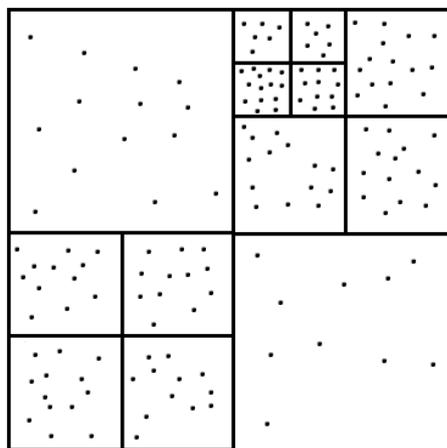


Fonte: Autoria própria.

O algoritmo adaptativo (CARRIER; GREENGARD; ROKHLIN, 1988) é utilizado em situações em que as partículas presentes no domínio se concentram em determinadas regiões do espaço, fazendo com que outras regiões fiquem vazias, uma vez que não há necessidade de fazer a divisão de caixas que não possuem partículas, evitando o desperdício de tempo computacional.

Este algoritmo permite que existam caixas de diferentes tamanhos dentro do domínio, conforme ilustrado na Figura 4, pois, nele, só ocorre refinamento espacial se o número de partículas internas a uma caixa for superior a um número preestabelecido, sendo possível dividir apenas a caixa em questão, não o domínio como um todo.

Figura 4 – Divisão do domínio computacional promovida pelo algoritmo adaptativo.



Fonte: Autoria própria.

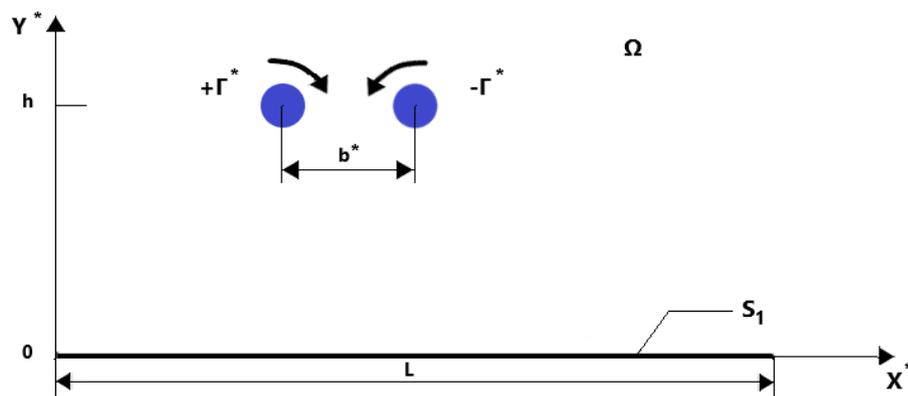
A principal dificuldade deste método é a criação de cinco listas distintas de caixas, visto que as interações não acontecem mais somente entre caixas do mesmo nível de refinamento, tal como ocorre com o algoritmo global. Assim, este método resolve problemas em menos tempo, porém, demanda uma maior complexidade de implementação.

### 3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

#### 3.1 DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS

Esta seção apresenta as definições geométricas do problema. A Figura 5 ilustra um par contrarrotativo de vórtices de pontas de asas representado por um total de  $Z$  vórtices discretos de Lamb, com distribuição gaussiana de vorticidade (e circulação  $+\Gamma^*$  e  $-\Gamma^*$ , dada pela lei de Kutta-Joukowski), os quais têm sua evolução governada pela equação do transporte da vorticidade, apresentada na seção 3.4 do presente trabalho.

Figura 5 – Grandezas características do problema proposto.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 5,  $h$  é a altura em que se desprende o par contrarrotativo de vórtices discretos,  $b^*$  é a envergadura da aeronave,  $\Omega$  é o domínio fluido e  $S_1$  é a fronteira sólida, nesse caso, a pista do aeroporto, de comprimento  $L$ .

#### 3.2 HIPÓTESES ADOTADAS

A fim de facilitar a modelagem do problema, algumas hipóteses simplificadoras a respeito do fluido, da geometria e do escoamento analisados são adotadas. Tais hipóteses são vantajosas, uma vez que não comprometem a qualidade dos resultados, pois o modelo ainda concentra os fenômenos físicos mais importantes; elas podem ser divididas em três classes:

**a) Hipóteses relativas à geometria:**

H1 – A região fluida é bidimensional e semi-infinita;

**b) Hipóteses relativas às propriedades do fluido:**

H2 – Fluido Newtoniano;

H3 – As propriedades do fluido em escoamento são constantes, ou seja, a massa específica e a viscosidade não variam com o tempo;

**c) Hipóteses relativas às propriedades do escoamento:**

H4 – Escoamento incompressível, uma vez que  $M < 0,3$ , sendo  $M$  o número de Mach;

H5 – O escoamento, apesar de turbulento, é tratado com uma abordagem laminar, uma vez que modelagem alguma de turbulência é empregada.

Os princípios de conservação da massa (equação (3)) e de conservação da quantidade de movimento linear (equação (4)) devem ser respeitados durante a simulação numérica.

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}^* p^* + \nu \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad (4)$$

A equação do transporte da vorticidade (veja seção 3.4) é obtida aplicando-se o operador rotacional nas equações de Navier-Stokes (equação (4)), com o auxílio da equação da continuidade (equação (3)).

Na superfície do corpo,  $S_1$ , deve ser verificada a condição de aderência, que pode ser desmembrada em duas:

- Condição de impenetrabilidade, a qual impõe que o componente normal da velocidade da partícula fluida ( $u_n^*$ ) em contato com a fronteira sólida seja igual ao componente normal da velocidade da fronteira  $S_1$  ( $v_n^*$ ), conforme a equação (5):

$$u_n^* - v_n^* = 0 \quad (5)$$

- Condição de escorregamento-nulo, a qual impõe a mesma condição para os componentes tangenciais das respectivas velocidades (equação 6):

$$u_t^* - v_t^* = 0 \quad (6)$$

em que  $u_t^*$  e  $v_t^*$  são os componentes tangenciais das velocidades da partícula fluida em contato

com a fronteira sólida e da fronteira, respectivamente.

O símbolo \* indica que as variáveis apresentadas até então estão em sua forma dimensional.

### 3.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

A análise dimensional visa reduzir a complexidade das variáveis envolvidas em um fenômeno físico, além de facilitar a comparação de resultados obtidos com outros já existentes na literatura. Nesta etapa, é feita a adimensionalização das equações governantes e das condições de contorno do problema.

A adimensionalização tem início com a escolha de três grandezas características, que podem ser observadas na Figura 5, sendo elas:

$b^*$  - Escala de comprimento;

$\frac{\Gamma^*}{b^*}$  - Escala de velocidade;

$\frac{b^{*2}}{\Gamma^*}$  - Escala de tempo.

Partindo destas três grandezas, faz-se a adimensionalização das demais:

$x = \frac{x^*}{b^*}$ , que representa a medida da abscissa do sistema de referência  $x0y$ ;

$y = \frac{y^*}{b^*}$ , que representa a medida da ordenada do sistema de referência  $x0y$ ;

$L = \frac{L^*}{b^*}$ , que representa o comprimento da pista do aeroporto;

$h = \frac{h^*}{b^*}$ , que representa a altura de desprendimento do par contrarrotativo de vórtices;

$u = \frac{u^* b^*}{\Gamma^*}$ , que representa o componente x da velocidade induzida em um vórtice discreto de Lamb;

$v = \frac{v^* b^*}{\Gamma^*}$ , que representa o componente y da velocidade induzida em um vórtice discreto de Lamb;

$t = t^* \frac{\Gamma^*}{b^{*2}}$ , que representa um instante de tempo da simulação numérica;

$\Delta t = \Delta t^* \frac{\Gamma^*}{b^{*2}}$ , que representa o incremento de tempo da simulação numérica;

$\nabla = \nabla^* b^*$ , que representa o operador gradiente;

$\nabla^2 = \nabla^{*2} b^{*2}$ , que representa o operador laplaciano;

$\Delta s = \frac{\Delta s^*}{b^*}$ , que representa o comprimento de cada painel utilizado para discretizar a fronteira sólida;

$p = \frac{p^* b^{*2}}{\rho \Gamma^{*2}}$ , que representa o campo de pressões;

$\omega = \omega^* \frac{b^{*2}}{\Gamma^*}$ , que representa o único componente não nulo do vetor vorticidade no plano de referência  $x_0y_0$  (hipótese de escoamento bidimensional);

$\sigma_0 = \frac{\sigma_0^*}{b^*}$ , que representa o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb;

$\text{eps} = \frac{\text{eps}^*}{b^*}$ , que representa a distância de geração de vórtices discretos de Lamb;

$\sigma = \frac{\sigma^* b^*}{\Gamma^*}$ , que representa a densidade de fontes/sumidouros utilizados para discretizar a pista do aeroporto;

$\text{Re} = \frac{\Gamma^*}{\nu}$ , é o número de Reynolds do escoamento.

Na sequência do trabalho, as definições de algumas das grandezas apresentadas nesta seção ficarão mais claras.

A partir da adimensionalização destas grandezas, as equações que representam o princípio da conservação da massa e da quantidade de movimento linear passam a ser escritas como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u} \quad (8)$$

Além disso, as equações referentes às condições de contorno tornam-se:

$$u_n - v_n = 0, \text{ em } S_1 \quad (9)$$

$$u_t - v_t = 0, \text{ em } S_1 \quad (10)$$

### 3.4 A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DA VORTICIDADE

O processo de adimensionalização realizado resultou na equação da continuidade (equação (7)) e nas equações de Navier-Stokes (equação (8)) na forma adimensionalizada. A presença do termo de pressão nas equações de Navier-Stokes dificulta a manipulação das equações na tentativa de obter uma solução. Dessa forma, aplicando-se o operador rotacional em ambos os lados da equação (8) e utilizando-se a definição matemática da vorticidade, obtém-

se:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (11)$$

sendo:

$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$ - taxa de variação local da vorticidade;

$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}$ - taxa de variação advectiva da vorticidade;

$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ - taxa de deformação dos tubos de vorticidade;

$\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega}$ - taxa de variação difusiva da vorticidade.

Levando em consideração a hipótese de escoamento bidimensional (H1), em que o vetor vorticidade passa a ser escalar, possuindo apenas a componente normal ao plano de escoamento, é obtida a forma bidimensional da equação do transporte da vorticidade (BATCHELOR, 1967):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (12)$$

Observa-se que o termo referente à taxa de deformação dos tubos de vorticidade é nulo no escoamento bidimensional.

A equação (12) governa a evolução da vorticidade, sendo o lado esquerdo responsável por representar o processo de advecção da vorticidade, a partir da sua variação temporal, enquanto o lado direito contém informações essenciais para a difusão da vorticidade, a partir dos efeitos da viscosidade.

A partir destas informações e da própria equação (12), Chorin (1973) propôs o algoritmo de separação da parte viscosa da equação do transporte da vorticidade. Com este algoritmo, é possível calcular, dentro de um mesmo incremento de tempo, a advecção e a difusão da vorticidade de maneira separada. A advecção e a difusão da vorticidade são regidas, respectivamente, por (CHORIN, 1973):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega = \frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (14)$$

No limite do incremento de tempo tendendo a zero, a solução das equações (13) e (14) converge para a solução da equação do transporte da vorticidade original (equação (12)); os processos de advecção e de difusão são realizados de maneira sucessiva, porém, dentro do mesmo incremento de tempo da simulação numérica. A presença do termo de derivada material,  $D\omega/Dt$ , na equação (13), a qual descreve a advecção da vorticidade, indica que esta é resolvida de maneira puramente lagrangiana.

## 4 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Com a utilização de uma descrição lagrangiana, através do Método de Vórtices Discretos, o cálculo do campo de velocidades é realizado apenas nos locais em que se encontram vórtices discretos distribuídos. O cálculo do campo de velocidades leva em consideração três influências:

- Escoamento incidente, cujo cálculo é simples, pois o escoamento incidente induz a mesma velocidade em todos os vórtices discretos da nuvem;
- Fronteira sólida, também é responsável por induzir velocidade na nuvem de vórtices discretos;
- Nuvem de vórtices discretos de Lamb (interação vórtice-vórtice), parcela mais onerosa do cálculo do campo de velocidades, pois cada vórtice discreto induz, em cada incremento de tempo, velocidade em todos os outros vórtices discretos presentes na nuvem.

O algoritmo desenvolvido neste trabalho utiliza um esquema de avanço de primeira ordem de Euler (FERZIGER, 1981) para simular a advecção da nuvem de vórtices discretos, o Método de Avanço Randômico (LEWIS, 1991) ou o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado (ROSSI, 1996) para simular a difusão da vorticidade e o Método de Painéis para representar a fronteira sólida, em que são distribuídas singularidades do tipo fontes com densidade constante sobre os painéis planos (KATZ; PLOTKIN, 1991).

Além disso, para viabilizar o uso do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado no presente trabalho, utiliza-se o Método de Multipolos Rápidos (GREENGARD; ROKHLIN, 1987) para acelerar os cálculos da interação vórtice-vórtice, em que as interações passam a ocorrer, primordialmente, entre caixas, e não mais entre cada uma das partículas presentes no domínio.

### 4.1 ADVECÇÃO DA NUVEM DE VÓRTICES DISCRETOS

A equação da trajetória de uma partícula de vorticidade é dada por:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (15)$$

Nota-se, portanto, que, para simular a advecção da vorticidade, é necessário conhecer o

campo de velocidades do escoamento na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos de Lamb utilizados para representar a vorticidade presente no domínio fluido. Dessa forma, a solução da etapa advectiva pode ser seccionada em duas partes:

- Determinação do campo de velocidades do escoamento na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos de Lamb, presentes no domínio fluido para discretizar o campo de vorticidades, a cada instante de tempo da simulação numérica;
- Com o campo de velocidades encontrado, resolve-se a equação da trajetória da vorticidade para cada vórtice discreto presente no domínio fluido (equação (15)).

#### 4.1.1 Contribuição do escoamento incidente

Os componentes de velocidade do escoamento incidente são dados por:

$$u_{\infty} = U \cos \alpha_{\infty} \quad (16)$$

$$v_{\infty} = U \sin \alpha_{\infty} \quad (17)$$

sendo  $\alpha_{\infty}$  o ângulo de incidência do escoamento,  $u_{\infty}$  e  $v_{\infty}$  os componentes da velocidade do escoamento incidente,  $U$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

No presente trabalho, opta-se por não considerar a contribuição do escoamento incidente em nenhuma das simulações desenvolvidas, para efeitos de simplificação do problema físico.

#### 4.1.2 Contribuição da fronteira sólida: o Método de Painéis

A solução potencial do problema é dada a partir da utilização do Método de Painéis (KATZ; PLOTKIN, 1991), cujo princípio é discretizar a superfície de corpos utilizando painéis, que podem ser retos ou curvos, de acordo com a geometria a ser analisada, sobre os quais são dispostas singularidades (funções algébricas), que podem ser de três tipos: vórtice, dipolo ou fonte, utilizadas de forma a satisfazer a equação de Laplace ( $\nabla^2 \phi = 0$ ), sendo  $\phi$  a função potencial do escoamento.

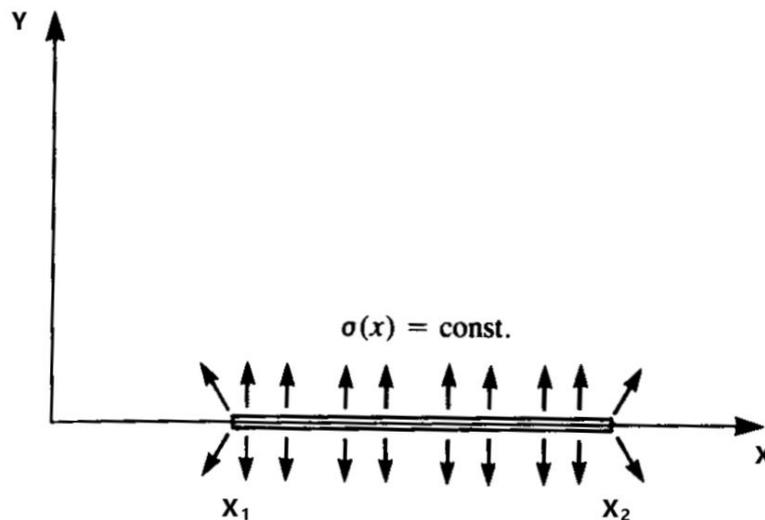
Qualquer uma das três singularidades pode estar distribuída das seguintes maneiras:

- Distribuição concentrada, na qual as singularidades estão aglomeradas nos pontos de

controle dos painéis; o ponto de controle de um painel corresponde ao ponto central deste e é o local em que as condições de contorno são impostas;

- Distribuição constante, em que as singularidades se distribuem com densidade constante sobre os painéis, descrição utilizada no presente trabalho (Figura 6);
- Distribuição linear, em que as singularidades se distribuem com densidade linear sobre os painéis.

Figura 6 – Singularidades do tipo fontes distribuídas uniformemente sobre um painel plano de comprimento  $x_2 - x_1$ .



Fonte: Adaptado de Katz e Plotkin (1991).

A escolha das singularidades adequadas para a modelagem do problema em estudo deve ser feita de acordo com cada uma das situações físicas consideradas. Existe um certo grau de arbitrariedade na escolha, desde que o conjunto de equações seja capaz de representar o fenômeno físico em questão. Para discretizar a geometria de interesse, no caso do presente trabalho, a única opção possível é a de singularidades do tipo fontes, pois a aplicação da condição de contorno de Dirichlet (velocidade tangencial nula) é limitada a corpos de contorno fechado (MARTENSEN, 1959), enquanto a aplicação da condição de contorno de Neumann (velocidade normal nula) não impõe tal exigência (HESS; SMITH, 1967).

Geometrias de contorno fechado podem ser discretizadas de acordo com ambas as condições de contorno, desde que não se deseje calcular nenhuma força de sustentação. Para escoamentos externos ao redor de aerofólios, por exemplo, utiliza-se a singularidade do tipo

fonte apenas se este for simétrico e com ângulo de ataque nulo. Dessa forma, para situações em que as forças de sustentação devem ser encontradas, utilizam-se singularidades que possibilitam o estudo de assimetrias no escoamento, tal como vórtices e dipolos. Neste trabalho, o solo, presente nos procedimentos de pouso e decolagem de aeronaves, é discretizado a partir da utilização de singularidades do tipo fonte, que serão distribuídas de maneira constante (Figura 6).

As fontes são singularidades que geram um campo de velocidades apenas na direção radial, cujo significado físico da intensidade é ser igual à vazão volumétrica rejeitada (fonte) ou absorvida (sumidouro) pela singularidade.

Partindo de um sistema de coordenadas fixo em um painel, conforme exemplificado na Figura 7, os componentes  $u$  e  $v$  da velocidade induzida por uma distribuição com densidade constante de fontes,  $\sigma(x)$ , de um painel sobre um ponto  $P$ , localizado nas vizinhanças, são, respectivamente (KATZ; PLOTKIN, 1991):

$$u = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 \quad (18)$$

$$v = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 \quad (19)$$

Resolvendo as integrais, obtém-se, respectivamente:

$$u = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (20)$$

$$v = \frac{\sigma(x)}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (21)$$

sendo:

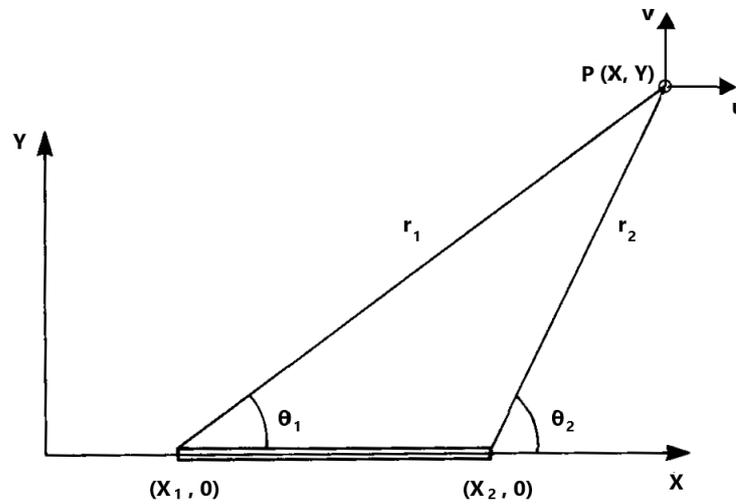
$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}$$

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1} \left( \frac{y}{x - x_1} \right)$$

$$\theta_2 = \text{tg}^{-1} \left( \frac{y}{x - x_2} \right)$$

Figura 7 – Componentes nas direções  $x$  e  $y$  da velocidade induzida por um painel qualquer em um ponto  $P$  do domínio computacional.



Fonte: Adaptado de Katz e Plotkin (1991).

As equações (20) e (21) representam os componentes da velocidade induzida por um painel com distribuição constante de singularidades do tipo fonte em um ponto  $P$ , qualquer, do domínio computacional. A condição de impenetrabilidade (veja equação (9)) é obtida decompondo-se, na direção normal ao painel, os componentes  $u$  e  $v$  da velocidade induzida no ponto de controle de cada painel e impondo-se que o somatório desses componentes seja nulo.

A velocidade induzida na direção de  $y$ , quando  $y \rightarrow 0^\pm$ , de um painel sobre ele mesmo, condição conhecida como autoindução, é dada por:

$$v(x; 0^\pm) = \pm \frac{\sigma(x)}{2} \quad (22)$$

Cada painel utilizado para discretizar a superfície induz velocidade normal nos outros painéis. Quando aplicada aos  $m$  pontos de controle, sendo  $m$  a quantidade de painéis utilizados para discretizar a fronteira sólida, a condição de impenetrabilidade (condição de contorno de Neumann) pode ser descrita de acordo com a equação (23), sendo que cada linha desta equação impõe que a velocidade normal no ponto de controle do respectivo painel seja igual a zero.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(1)(1)}^S & \mathbf{K}_{(1)(2)}^S & \dots & \mathbf{K}_{(1)(M-1)}^S & \mathbf{K}_{(1)(M)}^S \\ \mathbf{K}_{(2)(1)}^S & \mathbf{K}_{(2)(2)}^S & \dots & \mathbf{K}_{(2)(M-1)}^S & \mathbf{K}_{(2)(M)}^S \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{(M-1)(1)}^S & \mathbf{K}_{(M-1)(2)}^S & \dots & \mathbf{K}_{(M-1)(M-1)}^S & \mathbf{K}_{(M-1)(M)}^S \\ \mathbf{K}_{(M)(1)}^S & \mathbf{K}_{(M)(2)}^S & \dots & \mathbf{K}_{(M)(M-1)}^S & \mathbf{K}_{(M)(M)}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_{M-1} \\ \sigma_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{RHSS}_1 \\ \text{RHSS}_2 \\ \dots \\ \text{RHSS}_{M-1} \\ \text{RHSS}_M \end{Bmatrix} \quad (23)$$

sendo:

$\mathbf{K}_{ip}^S$ : elemento da matriz de influência de fontes que representa a velocidade normal induzida no ponto de controle do painel  $i$  pela distribuição de fontes constante e unitária do painel  $p$ ;

$\sigma_p$ : densidade de fontes distribuídas sobre o painel  $p$ ; trata-se da incógnita do problema potencial que, uma vez determinada, indica o valor da distribuição de fontes que cada painel deve ter para garantir a condição de contorno de impenetrabilidade;

$\text{RHSS}_i$ : vetor coluna lado direito, que representa a velocidade normal total induzida no ponto de controle do painel  $i$  pelo escoamento incidente e pela nuvem de vórtices discretos.

A atualização, a cada passo de tempo, do vetor coluna lado direito da equação matricial de fontes é dada por:

$$\text{RHSS}_i = u_\infty \sin \beta_i - v_\infty \cos \beta_i + \sum_{j=1}^Z (u_{ij} \sin \beta_i - v_{ij} \cos \beta_i) \quad (24)$$

sendo  $u_\infty$  e  $v_\infty$  os componentes da velocidade do-escoamento incidente (equações (16) e (17)) e  $\beta_i$  o ângulo de inclinação do painel  $i$ . O cálculo dos componentes  $u_{ij}$  e  $v_{ij}$ , da velocidade induzida pelo vórtice discreto  $j$  no ponto de controle do painel  $i$ , é apresentado a seguir (seção 4.1.3)

Para completar a formulação do problema potencial, deve-se impor a condição de conservação da massa, ou seja:

$$\sum_{i=1}^M \sigma_i \Delta S_i = 0 \quad (25)$$

Portanto, a equação matricial que deve ser resolvida pelo Método de Painéis é dada por:

$$\begin{bmatrix}
 0,5 & K_{(1)(2)}^S & \dots & K_{(1)(M-1)}^S & K_{(1)(M)}^S \\
 K_{(2)(1)}^S & 0,5 & \dots & K_{(2)(M-1)}^S & K_{(2)(M)}^S \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_{(M-1)(1)}^S & K_{(M-1)(2)}^S & \dots & 0,5 & K_{(M-1)(M)}^S \\
 K_{(M)(1)}^S & K_{(M)(2)}^S & \dots & K_{(M)(M-1)}^S & 0,5 \\
 \Delta S_1 & \Delta S_2 & \dots & \Delta S_{M-1} & \Delta S_M
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \sigma_1 \\
 \sigma_2 \\
 \dots \\
 \sigma_{M-1} \\
 \sigma_M
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 RHSS_1 \\
 RHSS_2 \\
 \dots \\
 RHSS_{M-1} \\
 RHSS_M \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (26)$$

Nota-se que a imposição de conservação da massa torna o sistema sobredeterminado e, para resolvê-lo, utiliza-se o Método dos Mínimos Quadrados e o Método de Eliminação de Gauss.

De maneira geral, pode-se escrever o sistema linear de equações algébricas oriundo da aplicação do Método de Painéis, como:

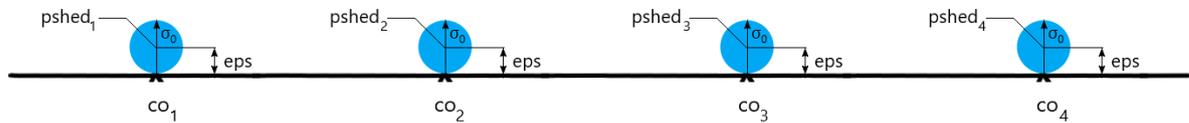
$$[COUPS]\{\sigma\} = \{RHSS\} \quad (27)$$

### 4.1.3 Geração da vorticidade

O escoamento de um fluido próximo a uma fronteira sólida ocasiona a formação de camada limite, por conta da condição de não deslizamento (ver seção 3.2). Com a formação da camada limite, ocorrem fenômenos de geração de vorticidade (rotação das partículas fluidas) e a separação do escoamento (que ocorre no caso de escoamento ao redor de corpos rombudos ou esbeltos, caso estes possuam um ângulo de ataque considerável). Nestes casos, a vorticidade se concentra na região da camada limite e na esteira viscosa a jusante do corpo.

Na solução numérica do problema, a vorticidade é gerada a cada incremento de tempo ( $\Delta t$ ) da simulação com o objetivo de anular o componente tangencial da velocidade em alguns locais (pontos de controle) da superfície discretizada do corpo. Dessa forma, vórtices discretos são posicionados de forma a tangenciar o ponto de controle de cada painel plano utilizado para discretizar a fronteira sólida. A Figura 8 ilustra o processo de geração de vorticidade a partir da superfície do solo discretizada em quatro painéis planos.

Figura 8 – Geração de vórtices discretos de Lamb sobre a superfície do solo discretizada em quatro painéis planos.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 8, tem-se:

$co_1, co_2, co_3$  e  $co_4$ : pontos de controle dos painéis;

$pshed_1, pshed_2, pshed_3$  e  $pshed_4$ : pontos de desprendimento de vórtices discretos;

$eps$ : distância de geração dos vórtices discretos, que, no caso do presente trabalho, é igual ao raio do núcleo dos vórtices discretos de Lamb ( $\sigma_0$ ), impondo que o núcleo dos vórtices discretos nascentes sempre tangencie o ponto de controle do painel onde ele é gerado (ALCÂNTARA PEREIRA, 1999).

De modo similar à equação matricial de fontes, obtida a partir da condição de impenetrabilidade, resolve-se a seguinte equação matricial de vórtices para garantir a condição de escorregamento nulo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(1)(1)}^V & \mathbf{K}_{(1)(2)}^V & \dots & \mathbf{K}_{(1)(M-1)}^V & \mathbf{K}_{(1)(M)}^V \\ \mathbf{K}_{(2)(1)}^V & \mathbf{K}_{(2)(2)}^V & \dots & \mathbf{K}_{(2)(M-1)}^V & \mathbf{K}_{(2)(M)}^V \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{(M-1)(1)}^V & \mathbf{K}_{(M-1)(2)}^V & \dots & \mathbf{K}_{(M-1)(M-1)}^V & \mathbf{K}_{(M-1)(M)}^V \\ \mathbf{K}_{(M)(1)}^V & \mathbf{K}_{(M)(2)}^V & \dots & \mathbf{K}_{(M)(M-1)}^V & \mathbf{K}_{(M)(M)}^V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \dots \\ \Gamma_{M-1} \\ \Gamma_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{RHSV}_1 \\ \text{RHSV}_2 \\ \dots \\ \text{RHSV}_{M-1} \\ \text{RHSV}_M \end{Bmatrix} \quad (28)$$

sendo:

$\mathbf{K}_{ij}^V$ : elemento da matriz de influência de vórtices que representa a velocidade tangencial induzida no ponto de controle do painel  $i$  por um vórtice discreto nascente localizado no ponto de desprendimento  $j$ , considerando que este tenha intensidade unitária;

$\Gamma_j$ : intensidade do vórtice discreto nascente localizado no ponto de desprendimento  $j$ ; trata-se da incógnita do problema viscoso que, uma vez determinada, indica o valor da intensidade que cada vórtice discreto deve ter para garantir a condição de contorno de não deslizamento;

$\text{RHSV}_i$ : vetor coluna lado direito, que representa a velocidade tangencial total induzida no ponto

de controle do painel  $i$  pelo escoamento incidente e pela nuvem de vórtices discretos.

A atualização, a cada passo de tempo, do vetor coluna lado direito da equação matricial de vórtices é dada por:

$$\text{RHSV}_i = -u_\infty \cos \beta_i - v_\infty \sin \beta_i + \sum_{j=1}^Z (-u_{ij} \cos \beta_i - v_{ij} \sin \beta_i) \quad (29)$$

sendo  $u_{ij}$  e  $v_{ij}$  os componentes da velocidade induzida pelo vórtice discreto  $j$  no ponto de controle do painel  $i$ ; veja as equações (33) e (34).

Para completar a formulação do problema viscoso, deve-se impor a condição de conservação de circulação:

$$\sum_{i=1}^M \Gamma_i = 0 \quad (30)$$

Portanto, a equação matricial que deve ser resolvida pelo Método de Vórtices Discretos é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(1)(1)}^v & \mathbf{K}_{(1)(2)}^v & \dots & \mathbf{K}_{(1)(M-1)}^v & \mathbf{K}_{(1)(M)}^v \\ \mathbf{K}_{(2)(1)}^v & \mathbf{K}_{(2)(2)}^v & \dots & \mathbf{K}_{(2)(M-1)}^v & \mathbf{K}_{(2)(M)}^v \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{(M-1)(1)}^v & \mathbf{K}_{(M-1)(2)}^v & \dots & \mathbf{K}_{(M-1)(M-1)}^v & \mathbf{K}_{(M-1)(M)}^v \\ \mathbf{K}_{(M)(1)}^v & \mathbf{K}_{(M)(2)}^v & \dots & \mathbf{K}_{(M)(M-1)}^v & \mathbf{K}_{(M)(M)}^v \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \dots \\ \Gamma_{M-1} \\ \Gamma_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{RHSV}_1 \\ \text{RHSV}_2 \\ \dots \\ \text{RHSV}_{M-1} \\ \text{RHSV}_M \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Nota-se que a imposição de conservação da circulação torna o sistema sobredeterminado e, para resolvê-lo, utiliza-se o Método dos Mínimos Quadrados e o Método de Eliminação de Gauss.

De maneira geral, pode-se escrever o sistema linear de equações algébricas oriundo da aplicação do Método de Vórtices Discretos, como:

$$[\text{COUPV}]\{\Gamma\} = \{\text{RHSV}\} \quad (32)$$

Os vetores  $RHSS$  e  $RHSV$  devem ser calculados a cada instante da simulação numérica, pois, desde o início da simulação numérica, existem vórtices discretos no domínio fluido. Considerando, ainda, as ações de advecção e difusão, que deslocam os vórtices discretos no domínio fluido, principalmente em regiões próximas de fronteira sólidas, o campo de velocidades induzido no ponto de controle dos painéis será ligeiramente diferente daquele que agia anteriormente, de modo que os sistemas lineares de equações de fontes (equação (26)) e de vórtices discretos nascentes (equação (31)) devem ser novamente resolvidos, para garantir a condição de aderência sobre a fronteira sólida.

Dessa forma, para considerar as componentes da velocidade tangencial induzida pelo vórtice discreto localizado no ponto de desprendimento  $j$ , no ponto de controle do painel  $i$ , tem-se (ALCÂNTARA PEREIRA, 1999):

$$u_{ij} = \frac{\Gamma_j(y_i - y_j)}{2\pi r_{ij}^2} \left[ 1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{ij}^2}{\sigma_{0j}^2}\right) \right] \quad (33)$$

$$v_{ij} = \frac{-\Gamma_j(x_i - x_j)}{2\pi r_{ij}^2} \left[ 1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{ij}^2}{\sigma_{0j}^2}\right) \right] \quad (34)$$

sendo:

$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  (módulo da distância entre o vórtice discreto  $j$  e o ponto de controle do painel  $i$ ).

#### 4.1.4 Contribuição da nuvem de vórtices discretos

Uma vez determinadas as influências do escoamento incidente e da fronteira sólida no cálculo do campo de velocidades, resta contabilizar a parcela relativa à nuvem de vórtices discretos, etapa que consome maior tempo de CPU.

A vorticidade presente no escoamento é modelada por elementos discretos de vorticidade, transportados respeitando-se a equação (12) e induzindo velocidade em todo o campo. Tal discretização do campo de vorticidades, fundamental para obtenção de uma modelagem matemática que permita uma solução numérica acurada, deve ser feita de modo a representar a continuidade deste campo, com a maior fidelidade possível, porém, sem resultar em problemas

de baixa resolução ou alto custo computacional. A relação entre custos computacionais e resultados deve ser avaliada, considerando as ferramentas disponíveis para solucionar o problema.

Não é viável discretizar o campo de vorticidades buscando a solução exata do equacionamento, pois isto seria impeditivo no que concerne ao tempo de processamento para aplicações na engenharia. Por outro lado, uma discretização de baixa resolução do campo de vorticidades acarreta em resultados insatisfatórios.

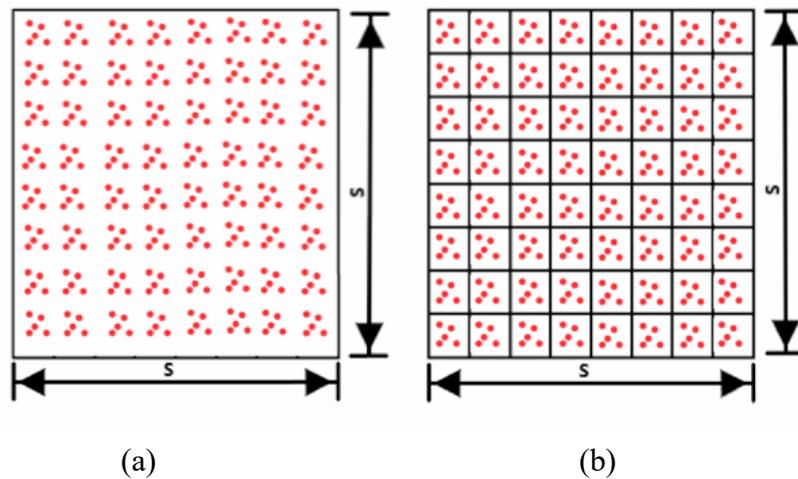
Para reduzir o tempo de simulação e viabilizar o uso de um método determinístico na etapa do processo de difusão da vorticidade (ver seção 4.2), implementa-se um algoritmo acelerador, o Método de Multipolos Rápidos, para que a interação que ocorre entre cada um dos vórtices discretos presentes no domínio (como quando a lei de Biot-Savart é utilizada) passe a ocorrer entre caixas, as quais contêm as partículas. Este método não abandona o uso da lei de Biot-Savart por completo, porém, faz com que as interações ocorram majoritariamente entre caixas, e não entre partículas individuais.

Todo o equacionamento apresentado na seção 4.1.4.1 pode ser visto em detalhes nos trabalhos de (GREENGARD; ROKHLIN, 1987; NISHIMURA, 2002; RICCIARDI; WOLF; BIMBATO, 2017a; RICCIARDI; WOLF; BIMBATO, 2017b).

#### 4.1.4.1 Método de Multipolos Rápidos

O modelo hierárquico utilizado é o de refinamento global (GREENGARD; ROKHLIN, 1987), sendo mais conveniente em casos de distribuição uniforme das partículas no domínio (no caso do presente trabalho, os vórtices discretos de Lamb); vide Figura 9(a). A Figura 9(b) exemplifica o domínio, com distribuição uniforme de partículas, dividido até o terceiro nível de refinamento.

Figura 9 – Distribuição uniforme de partículas no domínio quadrado de lado  $S$ : (a)  $n = 0$ ; (b)  $n = 3$ .



Fonte: Autoria própria.

É possível dividir a implementação numérica do método em algumas etapas:

a) Pré-processamento:

Para implementar o método, é necessário passar por uma etapa prévia, chamada de pré-processamento. Nela, o domínio (inicialmente uma caixa quadrada) é analisado, a fim de fracioná-lo em partes menores, criando, assim, as caixas.

As caixas são criadas a partir da divisão do domínio em quatro partes iguais, o que possibilita a criação das caixas do primeiro nível. Para passar o domínio para o segundo nível de refinamento, divide-se as quatro caixas obtidas com a primeira divisão, novamente, em quatro partes iguais, obtendo-se dezesseis caixas. Nota-se, então, que a quantidade de caixas presentes no domínio é igual a  $4^n$ , sendo  $n$  o nível de refinamento. Sucessivamente, divide-se o domínio até um nível desejado previamente estabelecido ou cada vez que o número de partículas internas a uma caixa, no último nível de refinamento, ultrapassar um limite arbitrado no início da simulação.

Depois de criar as caixas, são calculadas as posições dos vértices e dos centroides de cada uma delas, pois estes são utilizados no mapeamento de partículas, na criação das listas de interação e na translação de influências das partículas para o centroide da caixa que as contém (e vice-versa) no nível máximo de refinamento.

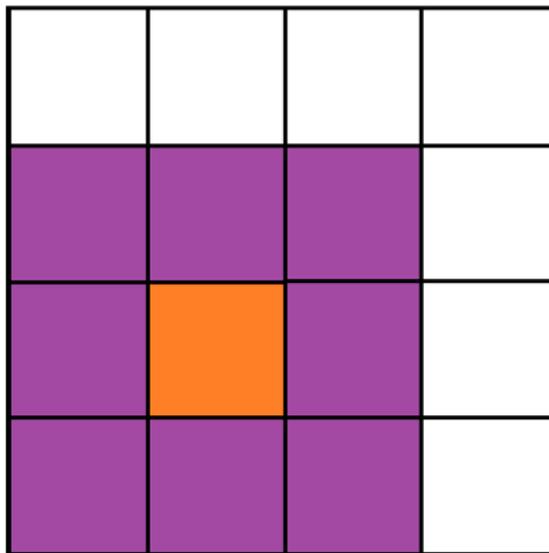
Quando uma caixa é dividida em quatro partes iguais, diz-se que a caixa-pai (do nível de refinamento  $n$ ) deu origem a quatro caixas-filhas (do nível de refinamento  $n+1$ ).

Com a criação das caixas e cálculo dos vértices e dos centroides, é possível gerar listas que ditam as relações entre as caixas presentes no domínio. No algoritmo adaptativo existem cinco listas de interação (CARRIER; GREENGARD; ROKHLIN, 1988), enquanto que, no algoritmo global, existem duas. No caso do presente trabalho, utiliza-se o algoritmo global, portanto, as caixas são organizadas da seguinte maneira:

- Lista de vizinhas: é composta por, no máximo, nove caixas, sendo oito delas caixas que compartilham pelo menos um vértice com a caixa de interesse, além da própria caixa de interesse;
- Lista de interação: é composta pelas, no máximo, vinte e sete caixas suficientemente distantes da caixa de interesse (ou seja, que não compartilham nenhum vértice com esta) e que são filhas das caixas vizinhas da caixa-pai (nível de refinamento  $n$ ) da caixa de interesse (nível de refinamento  $n+1$ ).

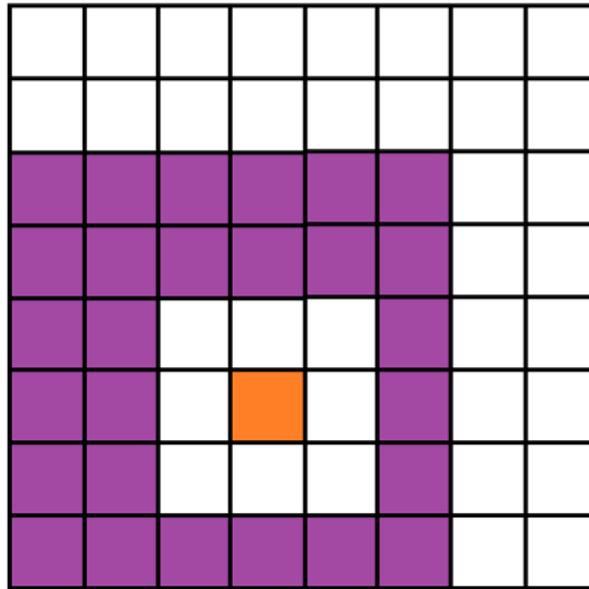
A Figura 10 exemplifica a lista de caixas vizinhas, pintadas em roxo, de uma caixa qualquer  $B$ , destacada em laranja, no segundo nível de refinamento. A Figura 11 indica a lista de interação, cuja caixas também estão pintadas em roxo, de uma das quatro filhas da caixa  $B$ , chamada de  $b$  (pertencente ao terceiro nível de refinamento), também destacada em laranja. Nota-se que todas as caixas que interagem com a caixa  $b$  são filhas das caixas que fazem parte da lista de vizinhas da caixa  $B$ .

Figura 10 – Caixas vizinhas de uma caixa qualquer  $B$  do segundo nível de refinamento.



Fonte: Autoria própria.

Figura 11 – Lista de interação da caixa  $b$ , filha da caixa  $B$ , no terceiro nível de refinamento.



Fonte: Autoria própria.

É possível notar, também, que existem caixas suficientemente distantes da caixa  $b$  que não fazem parte de sua lista de interação. Isso acontece porque a caixa  $B$ , pai de  $b$ , já interage com as caixas-pai daquelas caixas, sendo que tal interação é transladada de um nível de refinamento para outro em um passo chamado *Local-to-Local* (L2L), que será explicado adiante.

Por fim, para encerrar a etapa de pré-processamento, faz-se o mapeamento das partículas dentro do domínio. No mapeamento, cada vórtice discreto é localizado dentro de sua respectiva caixa, em cada nível de refinamento. Isto serve para que, no último nível de refinamento, seja possível transferir a intensidade de cada partícula para o centroide da caixa que a contém.

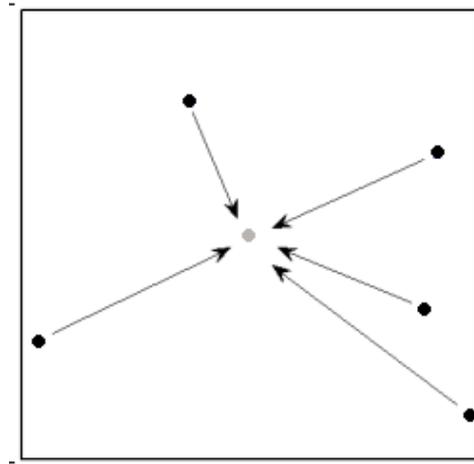
É importante frisar que o mapeamento de partículas é feito a cada passo de tempo da simulação numérica, pois as partículas podem mudar de caixa conforme a simulação avança. A cada passo de tempo é preciso, também, checar se todas as partículas estão dentro do domínio e, caso não estejam, o domínio é aumentado e são calculadas, novamente, as posições dos vértices e dos centroides das caixas. Verifica-se, ainda, o número máximo de vórtices discretos em cada caixa no nível máximo de refinamento, sendo possível refinar o domínio, reduzindo, assim, o número médio de partículas por caixa; este procedimento é realizado para promover mais interações entre as caixas, diminuindo, portanto, a utilização da onerosa lei de Biot-Savart.

b) *Particle-to-Multipole* (P2M):

Este passo consiste em fazer a montagem dos multipolos no maior nível de refinamento,

após a etapa de pré-processamento. A montagem dos multipolos é feita através da translação e agrupamento das influências das partículas para o centroide da caixa que as contém. A Figura 12 ilustra uma caixa qualquer, pertencente ao nível máximo de refinamento, para a qual são passadas as influências das partículas internas, em preto, até o respectivo centroide, em cinza.

Figura 12 – Montagem dos multipolos no nível máximo de refinamento.



Fonte: Autoria própria.

O potencial de uma única partícula em um ponto específico no espaço é apresentado na equação (35):

$$\phi_i(o') = q_i \cdot \log(z_i) \quad (35)$$

sendo  $q_i$  a intensidade da partícula  $i$ ,  $o'$  a posição no espaço em que se deseja encontrar o potencial e  $z_i$  a posição complexa da partícula  $i$ .

A equação (35) pode ser reescrita, tornando-se:

$$\phi_i(o') = q_i \cdot \log(z_c) + q_i \cdot \log\left(1 - \frac{z}{z_c}\right) \quad (36)$$

sendo  $z_c$  a posição complexa do centroide das caixas do nível máximo de refinamento e  $z = z_c - z_i$ .

A influência das partículas presentes dentro de uma caixa é calculada a partir de um somatório, de acordo com a equação (37):

$$\phi_A = \sum_{i=1}^{\text{npartbox}} \phi_i = \sum_{i=1}^{\text{npartbox}} q_i \cdot \log(z_c) + \sum_{i=1}^{\text{npartbox}} q_i \cdot \log\left(1 - \frac{z}{z_c}\right) \quad (37)$$

sendo  $\phi_A$  a translação das intensidades de todas as partículas contidas em uma dada caixa (npartbox).

É possível reescrever o último termo da equação (37) de outra forma, expandindo o logaritmo em série de Taylor:

$$\sum_{i=1}^{\text{npartbox}} q_i \cdot \log\left(1 - \frac{z}{z_c}\right) = \sum_{i=1}^{\text{npartbox}} \left( q_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{z}{z_c}\right)^k \cdot \frac{1}{k} \right) \quad (38a)$$

$$\sum_{i=1}^{\text{npartbox}} \left( q_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{z}{z_c}\right)^k \cdot \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^{\text{npartbox}} (-q_i) \cdot \left(\frac{z^k}{k}\right)}{z_c^k} \right) \quad (38b)$$

Dessa forma, o potencial é equacionado de acordo com a equação (39):

$$\phi_A = a_0 \cdot \log(z_c) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{z_c^k} \right) \quad (39)$$

sendo  $a_0$  a soma das intensidades das partículas dentro da caixa e  $a_k$  o coeficiente do multipolo:

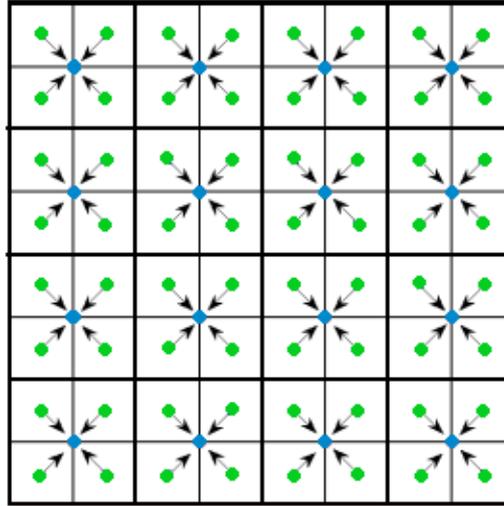
$$a_k = \sum_{i=1}^{\text{npartbox}} \frac{(-q_i) \cdot z^k}{k} \quad (40)$$

c) *Multipole-to-Multipole (M2M)*:

Após a criação dos multipolos no maior nível de refinamento, faz-se a mudança do centro da expansão dos multipolos, ou seja, a influência é passada do centroide das caixas de nível mais fino para o centroide das caixas de nível mais grosseiro, sendo transladada do centroide das caixas-filhas para o centroide das respectivas caixas-pai. A Figura 13 exemplifica a translação da influência dos centroides das caixas do terceiro nível de refinamento para o

centroide das caixas do segundo nível de refinamento.

Figura 13 – Translação da influência dos centroides das caixas do terceiro nível de refinamento para as caixas do segundo nível de refinamento (*Multipole-to-Multipole*).



Fonte: Autoria própria.

A equação (41) representa a influência, ou seja, a expansão em multipolos, em um ponto  $z_p$  (centroide da caixa pai, no nível  $n$ ) devido a um conjunto de partículas, cuja intensidade localiza-se em  $z_f$  (centroide da caixa filha, no nível  $n+1$ ):

$$\phi(z_p) = a_0^{(n+1)} \cdot \log(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{(n)}}{(z)^k} \quad (41)$$

sendo  $a_0^{(n+1)}$  a soma das intensidades das partículas dentro da caixa filha, no nível de refinamento  $n+1$ , e  $z = z_f - z_p$  (GREENGARD; ROKHLIN, 1987).

É possível reescrever a equação (41), obtendo:

$$\phi(z_p) = a_0^{(n+1)} \cdot \log(z_p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_k^{(n)}}{z_p^l} \quad (42)$$

sendo  $a_k^{(n)}$  o coeficiente de multipolos da caixa de interesse, no nível de refinamento  $n$ , representado por:

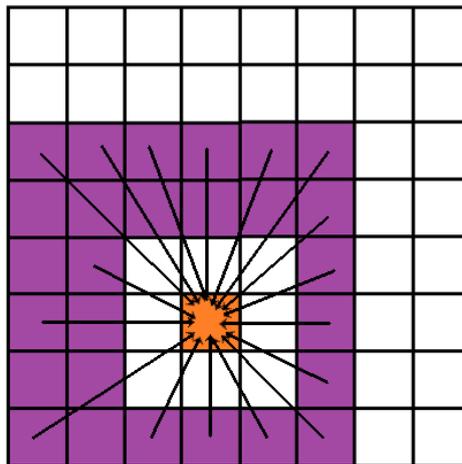
$$a_k^{(n)} = \frac{-a_0^{(n+1)} \cdot z^1}{1} + \sum_{k=1}^l a_k^{(n+1)} \cdot z^{1-k} \cdot \binom{l-1}{k-1} \quad (43)$$

Este passo é feito apenas até o segundo nível de refinamento, que é o menor nível em que existem caixas suficientemente distantes para interagir. Os passos *Particle-to-Multipole* e *Multipole-to-Multipole*, realizados em sequência, fazem parte do chamado *upward pass*, pois eles se iniciam no maior nível de refinamento e sobem a árvore genealógica.

d) *Multipole-to-Local* (M2L):

É neste passo que se iniciam, de fato, as interações entre caixas do mesmo nível de refinamento (no caso do algoritmo global), de acordo com as listas que foram criadas na etapa de pré-processamento, conforme exemplificado na Figura 14.

Figura 14 – Interação entre caixas de um mesmo nível de acordo com a lista criada na etapa de pré-processamento (*Multipole-to-Local*).



Fonte: Autoria própria.

A influência de um conjunto de partículas, cujo centro está no mesmo local do centroide da caixa  $b'$  (pertencente a lista de interação, em roxo, na Figura 14), em um ponto suficientemente distante para validar o FMM, que, neste caso, seria o centroide da caixa  $b$  (caixa de interesse, em laranja, na Figura 14), é dada por:

$$\phi(z_b) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot z^l \quad (44)$$

sendo  $z = z_{b'} - z_b$ .

As equações (45) e (46) representam o primeiro termo do somatório para  $l = 0$  e  $l \geq 1$ , respectivamente:

$$b_0 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \cdot (-1)^k \right) + a_0 \cdot \log(-z) \quad (45)$$

$$b_l = \left( \frac{1}{z^l} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \cdot \binom{l+k-1}{k-1} \cdot (-1)^k \right) - \frac{a_0}{l \cdot z^k} \quad (46)$$

sendo  $a_0$  a soma das intensidades das partículas da caixa  $b'$ .

e) *Local-to-Local (L2L)*:

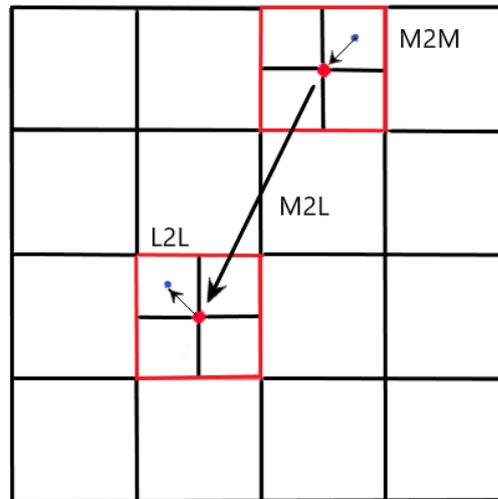
Esta etapa consiste em passar a influência dos centroides das caixas-pai (do nível de refinamento  $n$ ) para o centroide das caixas-filhas (do nível de refinamento  $n+1$ ) após o passo M2L. Este passo faz o contrário daquilo feito no M2M e não há necessidade de ser feito no maior nível de refinamento, pois as caixas deste nível não possuem filhas. A Figura 15 exemplifica os passos M2M, M2L e L2L, realizados em sequência, entre o segundo e terceiro nível de refinamento.

A translação da influência do centroide da caixa pai, do nível  $n$ , para o centroide da caixa-filha, do nível  $n+1$ , é dada por:

$$b_l^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} b_l^{(n)} \cdot \binom{l}{k} \cdot [-(z)]^{l-k} \quad (47)$$

sendo  $z = z_p - z_f$ .

Figura 15 – Interação de caixas em diferentes níveis de refinamento (passos M2M e L2L) e de caixas em um mesmo nível de refinamento (M2L), realizadas sucessivamente.



Fonte: Autoria própria.

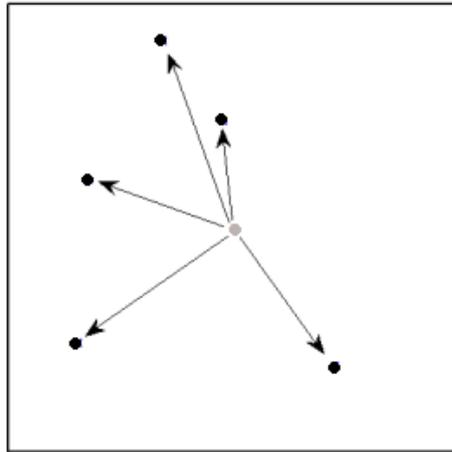
Os passos *Multipole-to-Local* e *Local-to-Local*, realizados em sequência, fazem parte do *downward pass*, pois iniciam no segundo nível de refinamento e descem até o nível máximo de refinamento.

f) *Local-to-Particle* (L2P):

O último passo do Método de Multipolos Rápidos consiste em calcular, de fato, o campo de velocidades do escoamento. Este cálculo é dividido em duas partes, que são somadas para se obter o campo de velocidades; a primeira consiste em transferir a influência dos centroides das caixas do maior nível de refinamento de volta para as partículas e a segunda consiste na interação entre as partículas de uma mesma caixa e de caixas vizinhas, no nível máximo de refinamento, realizada através da lei de Biot-Savart (veja a seção 4.1.4.2).

A Figura 16 exemplifica o processo de transladar a influência do centroide, em cinza, de uma caixa genérica, do nível máximo de refinamento, para as partículas, em preto, contidas nela.

Figura 16 – Translação da influência dos centroides de uma caixa genérica do nível máximo de refinamento para as partículas internas (*Local-to-Particle*).



Fonte: Autoria própria.

A translação da influência do centroide da caixa para uma partícula interna a ela é dada por:

$$\phi(z_i) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot z^l \quad (48)$$

sendo  $z = z_i - z_c$  e  $b_l$  o coeficiente calculado através da equação (46).

Os apêndices A e B contidos no presente trabalho apresentam o erro intrínseco ao cálculo do campo de velocidades devido à contribuição da nuvem de vórtices discretos e a redução no tempo de simulação numérica, respectivamente, quando se faz uso de um algoritmo do Método de Multipolos Rápidos; os dados apresentados nos apêndices mencionados referem-se a simulações com diferentes quantidades de vórtices discretos utilizados para discretizar o campo de vorticidades em um problema que consiste em um par contrarrotativo de vórtices desprendido das pontas das asas de uma aeronave em procedimento de pouso/decolagem, porém, sem levar em consideração a fronteira sólida e nem os efeitos da difusão viscosa da vorticidade.

#### 4.1.4.2 Lei de Biot-Savart

A última etapa da obtenção da contribuição da nuvem de vórtices discretos no cálculo do campo de velocidades do escoamento consiste em realizar as interações vórtice-vórtice entre as

partículas pertencentes à lista de caixas vizinhas, no nível máximo de refinamento, através da lei de Biot-Savart.

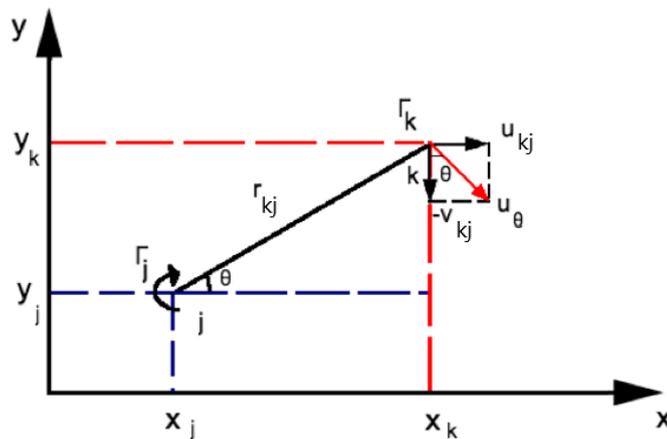
A equação (49) expressa a lei de Biot-Savart, a qual relaciona o campo de velocidades induzido por um campo de vorticidades (BIMBATO, 2012):

$$\vec{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \quad (49)$$

sendo  $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j}$  a velocidade induzida em cada vórtice discreto utilizado para representar o campo de vorticidades,  $\vec{\omega}$  o campo de vorticidades,  $\vec{r}$  a distância entre os vórtices discretos de Lamb e  $\Omega$  o domínio fluido.

No caso do presente trabalho, utiliza-se o modelo do vórtice discreto de Lamb, que possui o conceito do núcleo viscoso. Considerando dois vórtices discretos ( $j$  e  $k$ ), conforme indicado na Figura 17, é possível obter os componentes da velocidade tangencial induzida em um vórtice discreto  $k$  por um vórtice discreto  $j$  através das equações (50) e (51).

Figura 17 – Componentes da velocidade tangencial induzida em um vórtice discreto  $k$  por um vórtice discreto  $j$ .



Fonte: Autoria própria.

$$u_{kj} = \sum_{j=1}^Z \Gamma_j U_{kj}, j \neq k \quad (50)$$

$$v_{kj} = \sum_{j=1}^Z \Gamma_j V_{kj}, j \neq k \quad (51)$$

sendo:

$$U_{kj} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y_k - y_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r_{kj}^2}{\sigma_{0j}^2}\right) \right] \quad (52)$$

$$V_{kj} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r_{kj}^2}{\sigma_{0j}^2}\right) \right] \quad (53)$$

As equações (50) e (51) revelam que um vórtice discreto não induz velocidade sobre ele mesmo.

A contribuição do presente trabalho reside em utilizar o Método de Multipolos Rápidos na maior parte da simulação numérica, em vez de se utilizar a lei de Biot-Savart, responsável por transformar o cálculo da parcela do campo de velocidades devido à nuvem de vórtices discretos na etapa mais onerosa do Método de Vórtices Discretos.

Mesmo com o uso do Método de Multipolos Rápidos, ainda é necessário utilizar a lei de Biot-Savart, para contabilizar a interação de partículas de uma mesma caixa e de caixas próximas, porém, com a correta implementação do método, essa interação tende a ser reduzida, fazendo com que o tempo de simulação numérica diminua (veja APÊNDICE B).

#### 4.1.5 Avanço Advectivo

A partir da determinação do campo de velocidades do escoamento, tem-se o valor da velocidade total induzida em um vórtice discreto qualquer  $k$ , a partir da equação (15).

O avanço advectivo de todos os vórtices discretos que compõem a nuvem simula o efeito da advecção da vorticidade. A posição de cada vórtice discreto, em cada incremento de tempo da etapa advectiva, pode ser calculada numericamente por diversos esquemas de avanço. Neste trabalho, utiliza-se um esquema de avanço de primeira ordem de Euler (FERZIGER, 1981):

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + u_{tk}(t)\Delta t \quad (54)$$

$$y_k(t + \Delta t) = y_k(t) + v_{tk}(t)\Delta t \quad (55)$$

onde  $u_{t_k}$  e  $v_{t_k}$  são as componentes da velocidade induzida no vórtice discreto  $k$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

## 4.2 DIFUSÃO DA VORTICIDADE

Conforme o algoritmo de separação da parte viscosa da equação do transporte da vorticidade (CHORIN, 1973), a difusão da vorticidade é governada pela equação (14). Quando resolvida pelo Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, proposto por Leonard (1980) e modificado por Rossi (1996), a difusão da vorticidade é simulada através de aumentos sucessivos no raio do núcleo dos vórtices discretos a uma taxa dada por:

$$\sigma_{0k}(t + \Delta t) = \sqrt{\sigma_{0k}^2(t) + \frac{\Delta t}{\text{Re}}} \quad (56)$$

Quando o raio do núcleo do vórtice discreto atinge um tamanho crítico, o qual é governado pelo parâmetro  $\alpha$ , a partícula sofre o processo de partição segundo a equação (2) – ver, também, Figura 1. Este processo de partição faz com que o vórtice discreto inicial  $k$  se divida em quatro novos vórtices discretos,  $k$ ,  $k+1$ ,  $k+2$ ,  $k+3$ , posicionados de acordo com:

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + r \quad (57a)$$

$$x_{k+1}(t + \Delta t) = x_k(t) \quad (57b)$$

$$x_{k+2}(t + \Delta t) = x_k(t) - r \quad (57c)$$

$$x_{k+3}(t + \Delta t) = x_k(t) \quad (57d)$$

$$y_k(t + \Delta t) = y_k(t) \quad (58a)$$

$$y_{k+1}(t + \Delta t) = y_k(t) + r \quad (58b)$$

$$y_{k+2}(t + \Delta t) = y_k(t) \quad (58c)$$

$$y_{k+3}(t + \Delta t) = y_k(t) - r \quad (58d)$$

É evidente que o processo de partição, o qual é necessário para garantir a convergência do método, aumenta demasiadamente o número de vórtices discretos no domínio computacional no decorrer da simulação numérica. Desse modo, o cálculo da interação vórtice-vórtice via lei de Biot-Savart torna-se impraticável, por conta do tempo excessivo de simulação, especialmente nos problemas práticos de engenharia. Uma alternativa é reduzir a utilização da lei de Biot-Savart ao mínimo possível; essa é a justificativa para a implementação do Método de Multipolos Rápidos, apresentada anteriormente.

No algoritmo desenvolvido para a obtenção dos resultados, existe a possibilidade de simular a difusão da vorticidade através do Método de Avanço Randômico, proposto por Chorin (1973) e modificado por Lewis (1991).

O Método de Avanço Randômico consiste em simular a difusão da vorticidade concedendo, a cada vórtice discreto presente no domínio computacional, um deslocamento radial e um deslocamento circunferencial (equações (59) e (60), respectivamente):

$$\Delta r_k = \sqrt{\frac{4\Delta t}{\text{Re}} \ln \frac{1}{P'}} \quad (59)$$

$$\Delta \theta_k = 2\pi P'' \quad (60)$$

sendo que  $P'$  e  $P''$  são números randômicos gerados entre 0 e 1. Portanto, os deslocamentos devido à difusão da vorticidade, nas direções  $x$  e  $y$ , são dados, respectivamente, por:

$$\Delta x_{\text{dif}} = \Delta r_k \cos \Delta \theta_k \quad (61)$$

$$\Delta y_{\text{dif}} = \Delta r_k \sin \Delta \theta_k \quad (62)$$

Dessa forma, quando se utiliza o Método de Avanço Randômico, o avanço temporal de um vórtice discreto  $k$  presente na nuvem é dado por:

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + u_{t_k}(t)\Delta t + \Delta x_{\text{dif}_k} \quad (63)$$

$$y_k(t + \Delta t) = y_k(t) + v_{t_k}(t)\Delta t + \Delta y_{dif_k} \quad (64)$$

### 4.3 ALGORITMO DO MÉTODO DE VORTICES DISCRETOS

Esta seção apresenta o algoritmo utilizado para simular numericamente esteiras de aeronaves desenvolvidas em processo de pouso e decolagem.

A seguir, apresenta-se o roteiro de funcionamento do código computacional:

a) Entrada de Dados:

Este passo é responsável por realizar a leitura dos seguintes dados de entrada necessários para a realização da simulação numérica e é feito em uma rotina chamada *Input.for*:

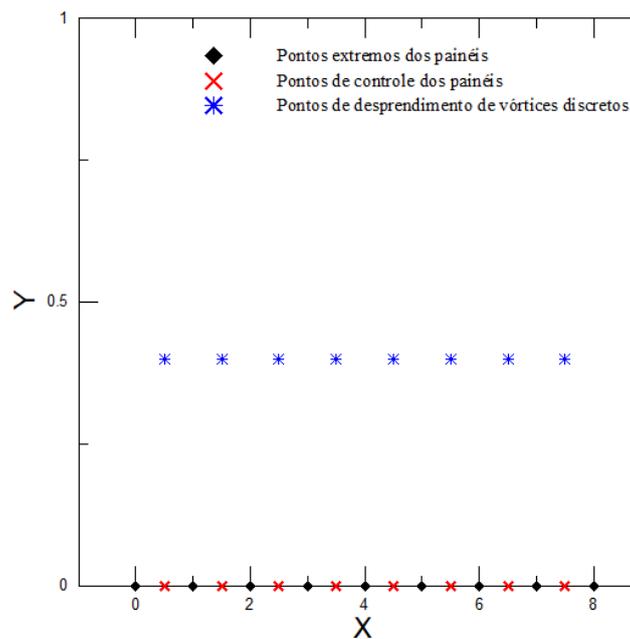
<b>stop</b>	número de incrementos de tempo da simulação numérica;
<b>l</b>	comprimento da pista do aeroporto;
<b>option</b>	o programa disponibiliza ao usuário a escolha de fazer a difusão viscosa da vorticidade através do Método de Avanço Randômico ( <i>option</i> = 1) e através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado ( <i>option</i> = 2);
<b>m</b>	número de painéis utilizados para discretizar a pista do aeroporto;
<b>h</b>	altura de desprendimento do par contrarrotativo de vórtices da ponta das asas;
<b>d</b>	deslocamento de um vórtice de ponta de asa para a direita (comprimento das asas da aeronave);
<b>nz</b>	número de vórtices discretos em cada ponta de asa;
<b>re</b>	número de Reynolds do escoamento;
<b>delt</b>	incremento de tempo da simulação numérica;
<b>uinf</b>	componente <i>x</i> da velocidade do vento lateral;
<b>vinf</b>	componente <i>y</i> da velocidade do vento lateral;
<b>core</b>	raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb;
<b>alfa</b>	parâmetro que governa a partição no MCRNM;
<b>coremin</b>	raio mínimo do núcleo do vórtice discreto (imediatamente após a partição);
<b>coremax</b>	raio máximo do núcleo do vórtice discreto (imediatamente antes da partição);
<b>nrefin</b>	nível máximo de refinamento do domínio computacional para a utilização do Método de Multipolos Rápidos;
<b>naccur</b>	número de termos-utilizados na série de Taylor;

**zfmm** parâmetro que governa o início do cálculo da influência da nuvem de vórtices discretos através do Método de Multipolos Rápidos.

b) Discretização da Fronteira Sólida e Criação do Par Contrarrotativo de Vórtices:

Em uma rotina chamada *Dataprgp.for*, discretiza-se a superfície do solo em  $m$  painéis planos posicionados sobre o eixo das abscissas, além de se realizar o cálculo de parâmetros dos painéis, dentre eles: ângulo de orientação, posição do ponto de controle e comprimento de cada painel e ponto de desprendimento de cada vórtice discreto que será gerado. A Figura 18 ilustra uma situação em que o solo, de comprimento adimensional igual a 8, é discretizado em 8 painéis planos.

Figura 18 – Representação esquemática da discretização do solo.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 18, observa-se que o ângulo dos painéis é igual a zero e são identificados os pontos extremos, os pontos de controle dos painéis e os locais de desprendimento dos vórtices discretos.

O par contrarrotativo de vórtices desprendido das pontas das asas de uma aeronave em seu procedimento de pouso/decolagem é criado em uma rotina chamada *Pair\_Cloud.for*, em que os vórtices discretos iniciais são gerados randomicamente e posicionados de acordo com parâmetros lidos na rotina responsável pela entrada de dados.

c) Montagem das Matrizes de Influência:

Nesta etapa, calculam-se os coeficientes das matrizes de influência de fontes,  $K_{ip}^S$  (equação (26)), e de vórtices,  $K_{ij}^V$  (equação (31)), em rotinas chamadas de *Coups.for* e *Coupv.for*, respectivamente.

Para considerar a conservação de massa e de circulação no sistema, uma rotina chamada *Modcoup.for* é utilizada. Esta rotina é responsável por acrescentar uma linha na matriz de influência de fontes (em que cada coluna desta linha recebe o comprimento de cada painel) e na matriz de influência de vórtices (em que cada coluna desta linha recebe o número 1), para que, ao resolver os sistemas de equações, a massa e a circulação sejam conservadas (equações (25) e (30)).

Uma rotina chamada *Compumvm.for* é responsável por calcular a velocidade induzida no ponto de controle de cada painel por conta da nuvem de vórtices discretos de Lamb, já existente desde o passo inicial da simulação numérica.

d) Solução do Sistema de Equações de Fontes:

Calcula-se o vetor  $RHSS$  através da equação (24), em uma rotina chamada *Rhss.for*. É necessário, também, acrescentar uma linha no vetor gerado nesta rotina para impor a conservação da massa (equação (25)), passo realizado na rotina chamada *Modrhs.for*.

Em seguida, resolve-se a equação matricial de fontes (equação (27)). Para isso, é necessário aplicar o Método dos Mínimos Quadrados, para tornar o sistema possível e determinado, a partir da rotina *Mini\_quad.for*, e resolver o sistema pelo Método de Eliminação de Gauss através da rotina *Gausspiv.for*.

e) Solução do Sistema de Equações de Vórtices:

Calcula-se o vetor  $RHSV$  através da equação (29), em uma rotina chamada *Rhsv.for*. É necessário, também, acrescentar uma linha no vetor gerado nesta rotina para impor a conservação da circulação (equação (30)), passo realizado na rotina chamada *Modrhs.for*.

Em seguida, resolve-se a equação matricial de vórtices (equação (32)) utilizando as rotinas *Mini\_quad.for*, para transformar o sistema sobredeterminado em possível e determinado, e a rotina *Gausspiv.for*, que resolve, de fato, o sistema linear de equações.

f) Geração de Vorticidade:

São gerados, a cada instante de tempo da simulação numérica,  $m$  novos vórtices discretos de Lamb com intensidades dadas pela solução do sistema de equações de vórtices. Essa geração é feita pela rotina *Generat.for*.

g) Obtenção da Condição de Aderência:

A geração de novos vórtices discretos induz velocidade tangencial nos pontos de controle dos painéis utilizados para discretizar a superfície sólida, violando, assim, a condição de impermeabilidade.

Para restaurar a condição de impermeabilidade anteriormente violada, resolve-se o sistema de equações de fontes novamente, porém, considerando a influência dos vórtices discretos gerados na rotina *Generat.for* no cálculo do vetor  $RHSS$  (equação (24)).

Entretanto, as novas distribuições de fontes induzem velocidade radial nos pontos de controle dos painéis utilizados para discretizar a superfície, o que viola a condição de não deslizamento garantida até então. Para sanar o problema, utiliza-se um processo iterativo, de solução do sistema de equações de vórtices seguida da solução do sistema de equações de fontes, por dez iterações, garantindo, assim, a condição de aderência.

h) Método de Multipolos Rápidos:

O Método de Multipolos Rápidos tem início quando o número de vórtices discretos presentes no domínio computacional é maior do que a variável  $zfm$ , lida na rotina responsável pela entrada de dados. Caso o número de partículas no domínio seja inferior a essa variável, o campo de velocidades obtido pela interação vórtice-vórtice é calculado através da lei de Biot-Savart.

A partir do momento em que o Método de Multipolos Rápidos é utilizado, é possível dividir esta etapa do algoritmo em sub-rotinas utilizadas para realizar o pré-processamento e o desenvolvimento do método propriamente dito.

As rotinas de pré-processamento são responsáveis pela criação das caixas em cada um dos níveis de refinamento (através da rotina *Boxes.for*), geração das listas de interação (através da rotina chamada *Listint.for*) e de vizinhas (através da rotina *Listviz.for*), bem como o cálculo da posição dos vértices das caixas (através das rotinas *Vertices.for* e *Coordvertices.for*) e

centroides das mesmas (através da rotina *Coordcent.for*); nesta etapa, faz-se, ainda, o mapeamento e a verificação das partículas no interior do domínio (através das rotinas *Mapeamento.for* e *Dimensao.for*).

Após a passagem pelas rotinas de pré-processamento, inicia-se, de fato, o Método de Multipolos Rápidos. Faz-se o passo *Particle-to-Multipole*, em uma rotina chamada *P2M.for*, responsável por calcular o coeficiente do multipolo no nível máximo de refinamento (equação (40)). O passo chamado *Multipole-to-Multipole* é feito em uma rotina chamada *M2M.for*, responsável por calcular o coeficiente do multipolo para níveis de refinamento mais grosseiros, partindo de níveis de refinamento mais finos (equação (43)). São feitos, em sequência, os passos *Multipole-to-Local*, em que é calculada a influência de uma caixa em outra suficientemente distante para validar o FMM (equação (44)), e o *Local-to-Local*, em que é feita a translação de influências de caixas-pai, no nível  $n$ , para as respectivas filhas, no nível  $n+1$  (equação (47)), em uma única rotina chamada *M2LeL2L.for*. Por último, faz-se a passagem das interações dos centroides das caixas para as partículas, passo denominado *Local-to-Particle* (equação (48)), e a interação entre as partículas pertencentes a caixas da lista de vizinhas no nível máximo de refinamento, através da lei de Biot-Savart (equação (49)), em uma rotina chamada *L2PeP2P.for*.

Caso o domínio ainda não esteja com uma população de vórtices discretos suficientemente grande para iniciar o uso do Método de Multipolos Rápidos, faz-se o cálculo do campo de velocidades por conta da interação vórtice-vórtice exclusivamente através da lei de Biot-Savart, a partir da rotina *Compuavvav.for*.

i) Advecção da Vorticidade:

A advecção da nuvem de vórtices discretos é realizada através do esquema de avanço de primeira ordem de Euler (ver seção 4.1.5), em uma rotina chamada *Advec.for*.

j) Difusão da Vorticidade:

O processo de difusão da vorticidade pode ser realizado pelo Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, através de uma rotina chamada *Mcrnm.for*, ou pelo Método de Avanço Randômico (ver seção 4.2), através de uma rotina chamada *Diffus.for*, de acordo com a opção lida na entrada de dados.

k) Reflexão de Vórtices Discretos:

Os vórtices discretos que penetrarem para baixo da superfície do solo são refletidos para o domínio fluido na rotina chamada *Reflecg.for*, em que são avaliadas as posições dos vórtices discretos e, caso a coordenada em  $y$  seja negativa, estes são reposicionados acima da superfície.

l) Impressão de Resultados:

Todos os resultados necessários para as análises realizadas na seção 5 são impressos em uma rotina chamada *Print.for*.

m) Solução do Sistema de Equações de Vórtices:

Por conta dos processos de advecção e difusão da vorticidade viola-se a condição de aderência garantida até então.

Dessa forma, atualiza-se o vetor  $RHSV$ , através da equação (29), e resolve-se a equação matricial de vórtices (equação (32)), considerando-se, também, a equação referente à condição de conservação global da circulação (equação (30)).

## 5 ANÁLISE DE RESULTADOS

Esta seção apresenta os principais resultados obtidos das simulações numéricas de esteiras de aeronaves formadas durante procedimentos de pouso e decolagem.

O computador utilizado na execução de todas as simulações numéricas possui a seguinte configuração: processador Intel Core i7-6700 (3,40GHz) e memória RAM de 16 Gb.

### 5.1 PARÂMETROS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Existem duas classes de parâmetros a serem levados em consideração: aqueles relacionados ao método numérico e aqueles relacionados ao fenômeno físico em questão.

#### 5.1.1 Parâmetros relacionados com o método numérico

A seguir, são esclarecidas as influências que os parâmetros relacionados ao método numérico têm sobre os resultados das simulações numéricas.

##### a) Número de painéis planos (m)

O número de painéis planos utilizados para discretizar a superfície do solo no problema tem influência direta na precisão dos resultados das simulações numéricas, pois as condições de contorno são satisfeitas apenas em um ponto específico de cada um dos painéis (o ponto de controle), de modo que, ao elevar o número de painéis presentes na discretização da geometria, o número de pontos da superfície em que as condições de contorno são satisfeitas também aumenta.

Conforme explicado na seção 4.1.3, a cada instante de tempo da simulação numérica, vórtices discretos são gerados de forma a tangenciar o ponto de controle do painel que lhe dá origem para satisfazer a condição de não deslizamento. Dessa forma, quanto mais painéis são utilizados para discretizar a fronteira sólida, mais vórtices discretos são gerados durante a simulação numérica.

O aumento no número de partículas no domínio computacional faz com que sejam demandados mais esforços e maiores tempos de CPU, por conta da contribuição da nuvem de vórtices discretos no cálculo da etapa advectiva. A utilização do Método de Multipolos Rápidos

faz com que o tempo gasto nesta etapa seja reduzido (APÊNDICE B), porém, ainda assim, existe uma limitação para a quantidade de painéis a se discretizar o corpo.

b) Incremento de tempo ( $\Delta t$ )

Conforme apresentado na seção 2.2, a utilização de incrementos de tempo menores faz com os efeitos da evolução lagrangiana no tempo sejam mais precisamente computados, porém, quanto menores os incrementos de tempo, mais custosas são as simulações no que diz respeito ao tempo de processamento.

c) Nível máximo de refinamento ( $n$ )

O nível máximo de refinamento utilizado no Método de Multipolos Rápidos impacta diretamente na precisão numérica das simulações (veja APÊNDICE A). Conforme se utiliza um nível máximo de refinamento maior, o tempo de simulação decresce, porém, ocorre um aumento no erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento e, conseqüentemente, na posição de cada um dos vórtices discretos utilizados para discretizar a vorticidade. Sendo assim, deve haver um balanço no nível máximo de refinamento utilizado para que o erro intrínseco ao método não se torne fator impeditivo na acurácia das simulações.

### 5.1.2 Parâmetro relacionados com o fenômeno físico

A seguir, são esclarecidas as influências que os parâmetros relacionados ao fenômeno físico têm sobre os resultados das simulações numéricas.

a) Número de Reynolds ( $Re$ )

Os valores adotados para o número de Reynolds nas simulações apresentadas nesta seção representam um regime de escoamento turbulento. No caso do presente trabalho, o escoamento é tratado com uma abordagem laminar, uma vez que nenhum modelo de turbulência é empregado.

b) Altura em que se desprende o par controrrotativo de vórtices ( $h$ )

Este parâmetro é importante para definir de que modo a fronteira sólida (solo) irá influenciar o desenvolvimento da nuvem de vórtices discretos.

## 5.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DESCONSIDERANDO A PRESENÇA DA FRONTEIRA SÓLIDA

### 5.2.1 Simulações com a rotina responsável pela difusão desabilitada

Inicialmente, foram realizados testes com a rotina de difusão desabilitada para validar o funcionamento do Método de Multipolos Rápidos e avaliar a aplicabilidade e o comportamento de cada um dos níveis máximos de refinamento.

Estes testes utilizam os parâmetros descritos na Tabela 1. Para efeitos de comparação, a simulação foi realizada utilizando, exclusivamente, a lei de Biot-Savart para calcular a contribuição da nuvem de vórtices discretos na determinação do campo de velocidades do escoamento, e, depois, utilizou-se o Método de Multipolos Rápidos, em outras quatro simulações distintas, cada uma delas com um nível máximo de refinamento diferente, mantido desde o início até término da simulação.

Tabela 1 – Parâmetros numéricos empregados nas simulações desconsiderando a pista e os efeitos da difusão.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Incremento de tempo	$\Delta t$	0,025
Número total de incrementos de tempo	stop	1000
Tempo adimensional	t	25
Altura de desprendimento do par contrarrotativo de vórtices	h	2,2
Raio do núcleo do vórtice discreto	$\sigma_0$	0,001
Número de vórtices discretos em cada ponta de asa durante toda a simulação numérica	nz	15000
Número de termos da série de Taylor	nt	25
Número de Reynolds	Re	75000

Fonte: Autoria própria.

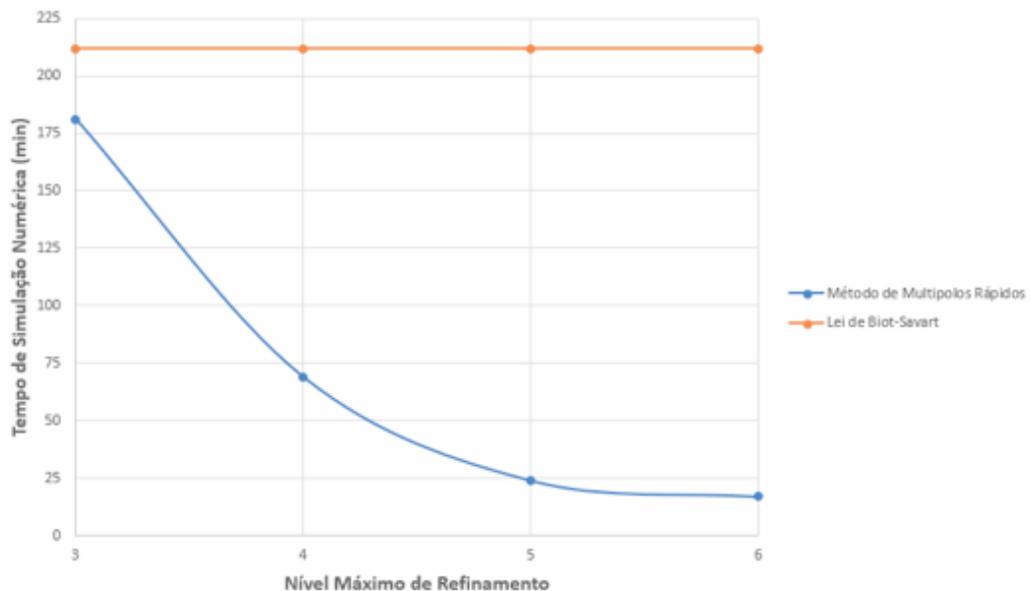
Foi avaliado como o tempo de simulação numérica variou de acordo com os níveis máximos de refinamento, conforme descrito na Tabela 2 e na Figura 19.

Tabela 2 – Tempo de simulação numérica para cada um dos níveis máximos de refinamento utilizados (Euler;  $\Delta t = 0,025$ ;  $n_z = 1,5 \times 10^4$ ;  $n_t = 25$ ;  $Re = 7,5 \times 10^4$ ).

Nível máximo de refinamento	Tempo de simulação numérica (min)
Exclusivamente via lei de Biot-Savart	212
3	181
4	69
5	24
6	17

Fonte: Autoria própria.

Figura 19 – Tempo de simulação numérica-em função dos níveis máximos de refinamento testados (Euler;  $\Delta t = 0,025$ ;  $n_z = 1,5 \times 10^4$ ;  $n_t = 25$ ;  $Re = 7,5 \times 10^4$ ).



Fonte: Autoria própria.

Através da Tabela 2 e da Figura 19, percebe-se que o tempo de simulação numérica é reduzido com o aumento do nível máximo de refinamento. A utilização do Método de Multipolos Rápidos, apesar de diminuir o tempo de simulação numérica, faz com que haja um erro no cálculo do campo de velocidades do escoamento em função do processo de expansão em série de Taylor; o erro numérico em questão é avaliado através da equação (65) (CARRIER; GREENGARD; ROKHLIN, 1988):

$$E = \left[ \frac{\sum_{i=1}^Z (V_{FMM_i} - V_{BS_i})^2}{\sum_{i=1}^Z (V_{BS_i})^2} \right]^{1/2} \quad (65)$$

sendo:

- $V_{FMM_i} = \sqrt{(u_{FMM_i})^2 + (v_{FMM_i})^2}$
- $V_{BS_i} = \sqrt{(u_{BS_i})^2 + (v_{BS_i})^2}$
- $E$ : erro;
- $Z$ : número de vórtices discretos presentes no domínio computacional;
- $u_{FMM_i}$ : componente  $u$  da velocidade da partícula  $i$  calculada através do Método de Multipolos Rápidos;
- $u_{BS_i}$ : componente  $u$  da velocidade da partícula  $i$  calculada através da lei de Biot-Savart;
- $v_{FMM_i}$ : componente  $v$  da velocidade da partícula  $i$  calculada através do Método de Multipolos Rápidos;
- $v_{BS_i}$ : componente  $v$  da velocidade da partícula  $i$  calculada através da lei de Biot-Savart.

A Tabela 3 apresenta os valores do erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento, calculados através da equação (65), para cada um dos níveis máximos de refinamento, no primeiro passo de tempo da simulação numérica.

Tabela 3 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o primeiro passo de tempo da simulação numérica (Euler;  $\Delta t = 0,025$ ;  $n_z = 1,5 \times 10^4$ ;  $n_t = 25$ ;  $Re = 7,5 \times 10^4$ ).

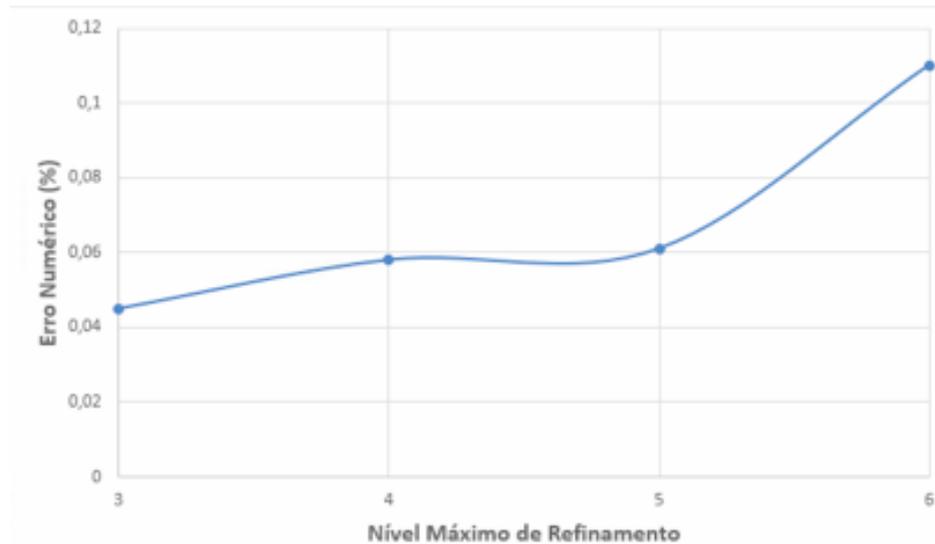
Nível máximo de refinamento	Erro numérico (%)
3	0,045
4	0,058
5	0,061
6	0,11

Fonte: Autoria própria.

A Figura 20 apresenta um gráfico do erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função dos níveis máximos de refinamento, plotado a partir das informações obtidas na

Tabela 3.

Figura 20 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função dos níveis máximos de refinamento para o primeiro passo de tempo da simulação numérica (Euler;  $\Delta t = 0,025$ ;  $n_z = 1,5 \times 10^4$ ;  $n_t = 25$ ;  $Re = 7,5 \times 10^4$ ).



Fonte: Autoria própria.

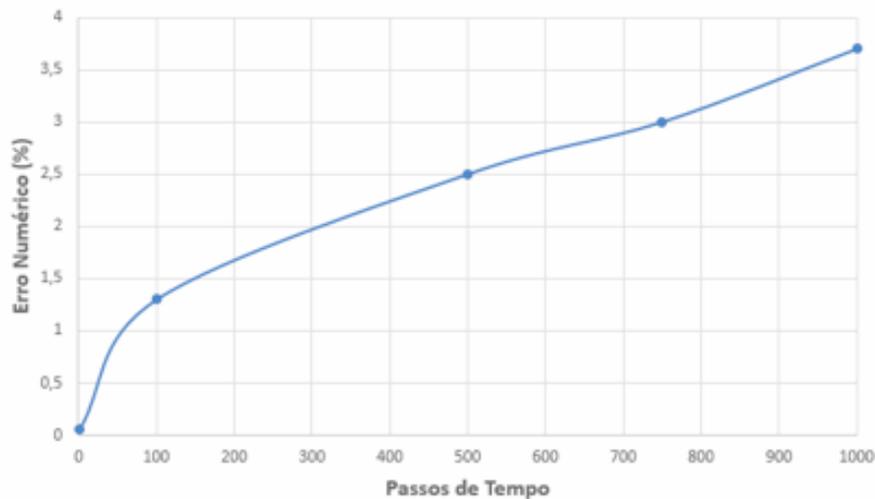
Percebe-se, através do que é apresentado na Tabela 3 e na Figura 20, que o erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento cresce conforme o nível máximo de refinamento utilizado aumenta. Isso ocorre porque, quanto maior o nível de refinamento, há um maior número de operações entre caixas do que de operações entre partículas.

Outra observação importante pode ser obtida a partir da análise conjunta das Figuras 19 e 20. Nota-se que o tempo de simulação varia pouco entre os níveis de refinamento 5 e 6. Por outro lado, o mesmo não se pode dizer a respeito do erro numérico. Isso acontece porque o custo total do Método de Multipolos Rápidos, em termos de tempo de processamento, é composto por operações entre caixas e por operações entre partículas. Assim, à medida que o nível de refinamento aumenta, o número de operações que utilizam a lei de Biot-Savart diminui (o que reduz o tempo de processamento), mas são necessárias mais operações entre caixas (o que aumenta o erro numérico). Portanto, é preciso encontrar um equilíbrio entre o tempo de simulação e o erro numérico; este equilíbrio pode ser alcançado utilizando-se, neste caso, 5 níveis de refinamento.

É importante avaliar, também, como o erro numérico no cálculo do campo de velocidades varia ao longo da simulação numérica. Para isso, apresenta-se um gráfico em que o nível máximo de refinamento foi fixado em cinco durante todo o tempo de simulação numérica

(Figura 21).

Figura 21 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função dos passos de tempo da simulação numérica (Euler;  $\Delta t = 0,025$ ;  $n_z = 1,5 \times 10^4$ ;  $n_t = 25$ ;  $Re = 7,5 \times 10^4$ ).



Fonte: Autoria própria.

Percebe-se, conforme apresentado na Figura 21, que o erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento cresce conforme a simulação numérica avança, iniciando em 0,061% e chegando em 3,7% no milésimo passo de tempo.

Maiores detalhes a respeito do erro no cálculo do campo de velocidades do escoamento (em particular, da contribuição da nuvem de vórtices discretos) e da redução do tempo de simulação numérica a partir do uso do Método de Multipolos Rápidos são apresentados nos APÊNDICES A e B, respectivamente.

No APÊNDICE A, é apresentada uma análise a respeito da acurácia do Método de Multipolos Rápidos em conjunto com o Método de Vórtices Discretos a partir de algumas simulações sem levar em consideração a presença da fronteira sólida e com as rotinas responsáveis pela difusão desabilitadas. Para isso, foram apresentados gráficos que indicam o erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função da quantidade de vórtices discretos presentes no domínio, para alguns passos de tempo da simulação numérica e diferentes níveis máximos de refinamento.

No APÊNDICE B, é apresentada uma análise a respeito da redução do tempo de simulação numérica viabilizada pelo uso do Método de Multipolos Rápidos. Para isto, compara-se o tempo de simulação numérica quando o cálculo da interação vórtice-vórtice é realizado exclusivamente através da lei de Biot-Savart com os tempos de simulação obtidos a partir do

uso do Método de Multipolos Rápidos, para diferentes níveis máximos de refinamento.

O APÊNDICE C contém o resumo do trabalho publicado no 26<sup>th</sup> *ABCM International Congress of Mechanical Engineering* (COBEM 2021), em que se apresentou parte dos resultados desta monografia.

### **5.2.2 Simulação com a rotina responsável pela difusão habilitada**

Foi realizado, ainda desconsiderando a presença da fronteira sólida, um teste para avaliar o uso do Método de Multipolos Rápidos com a difusão habilitada e contabilizada através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado. Os parâmetros desta simulação são apresentados na Tabela 4.

Para isso, a simulação foi feita a partir de duas maneiras: exclusivamente através da lei de Biot-Savart e com o Método de Multipolos Rápidos, em que, no início da simulação numérica, a parcela do campo de velocidades devido à nuvem de vórtices discretos era calculada através da lei de Biot-Savart e, quando o número de partículas no domínio atingiu o valor de 50000, por conta da divisão dos vórtices discretos devido ao processo de difusão, aumentou-se, gradualmente, o nível máximo de refinamento até o sexto, de acordo com a quantidade de vórtices discretos presentes no domínio.

Dessa forma, a partir de o instante em que a quantidade de partículas no domínio atingiu o valor de 50000, o Método de Multipolos Rápidos passou a ser utilizado, partindo-se do nível máximo de refinamento igual a 4 e, quando a razão entre o número de partículas no domínio computacional e o total de caixas no nível máximo de refinamento atingia o limite de 197 partículas por caixa, o domínio era refinado.

É importante ressaltar que este é um valor médio, ou seja, existem caixas com uma população de vórtices discretos maior do que este valor, assim como há outras vazias durante o decorrer da simulação numérica.

Tabela 4 – Parâmetros numéricos empregados na simulação desconsiderando a pista e com os efeitos da difusão contabilizados através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado.

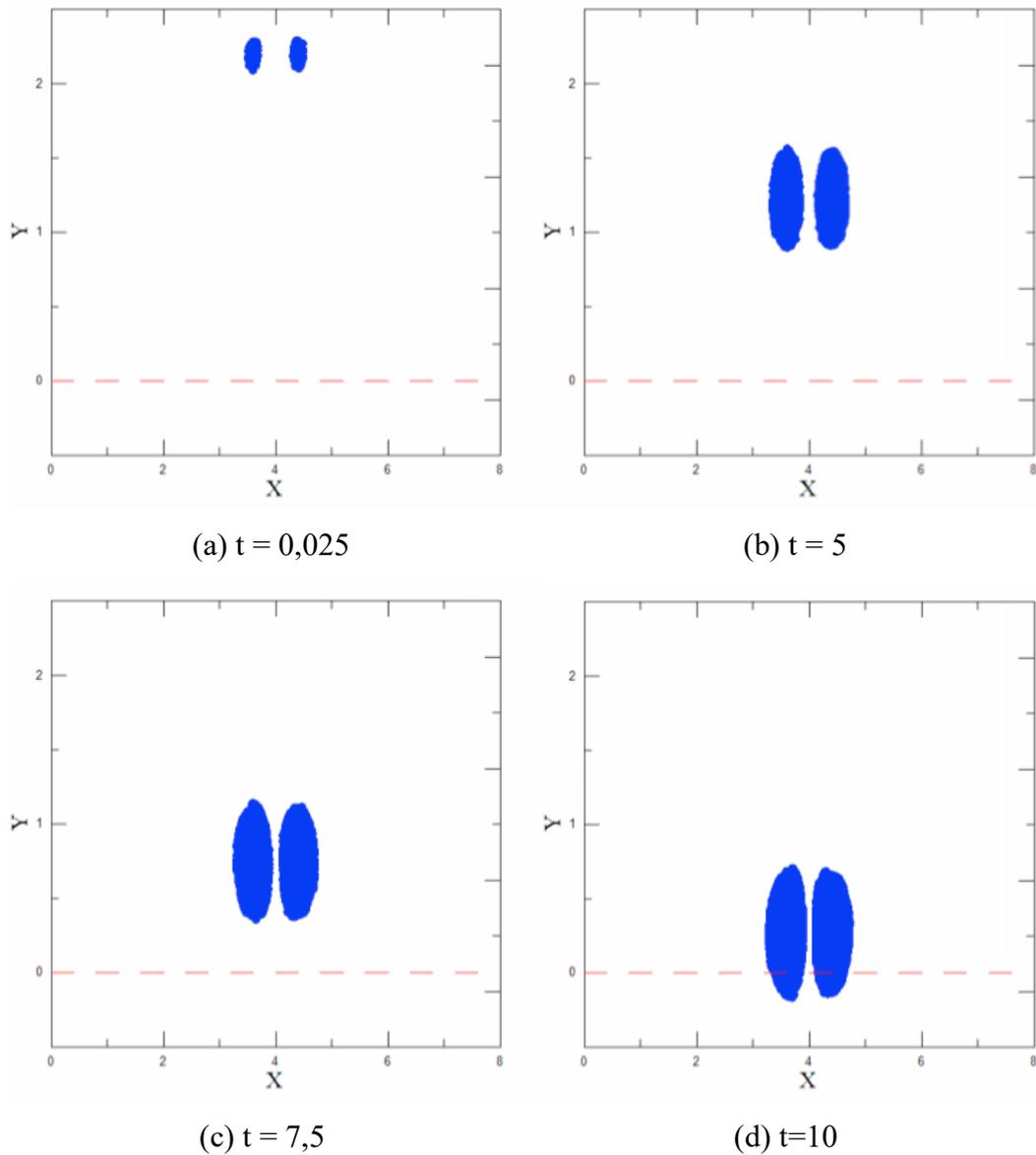
<b>Parâmetro</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>
Incremento de tempo	$\Delta t$	0,025
Número total de incrementos de tempo	stop	400
Tempo adimensional	t	10
Altura de desprendimento do par contrarrotativo de vórtices	h	2,2
Raio mínimo do núcleo do vórtice discreto	$\sigma_0$	0,001
Raio máximo do núcleo do vórtice discreto	$\sigma_{\max}$	0,005
Parâmetro que governa a partição	$\alpha$	0,2
Número de vórtices discretos em cada ponta de asa no instante inicial da simulação numérica	nz	100
Número de termos da série de Taylor	nt	25
Número de Reynolds	Re	75000

Fonte: Autoria própria.

O tempo de simulação numérica com o uso exclusivo da lei de Biot-Savart foi de 3 horas e 27 minutos, enquanto que, com o Método de Multipolos Rápidos, a simulação levou 8 minutos para ser concluída, representando uma redução de 96,1% no tempo computacional. Ao final da simulação, o erro numérico no cálculo do campo de velocidades por conta do uso do Método de Multipolos Rápidos foi de 0,45%.

A Figura 22 ilustra a evolução do campo de vorticidades em quatro instantes de tempo distintos da simulação numérica. Ao final, havia um total de  $Z = 204800$  vórtices discretos no domínio computacional.

Figura 22 – Evolução do campo de vorticidades ao longo de uma simulação numérica que utiliza o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado para resolver a equação da difusão da vorticidade na ausência de fronteira sólida (Euler;  $\Delta t = 0,025$ ;  $\alpha = 0,2$ ;  $nz = 100$ ;  $nt = 25$ ;  $Re = 7,5 \times 10^4$ ).



Fonte: Autoria própria.

### 5.3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS CONSIDERANDO A PRESENÇA DA FRONTEIRA SÓLIDA

#### 5.3.1 Simulações numéricas desconsiderando a geração de vorticidade na fronteira sólida

Nesta seção, são apresentadas duas simulações numéricas que desconsideram a geração de vorticidade no solo, ou seja, o solo foi tratado apenas como uma barreira física, impedindo que a nuvem de vórtices discretos ultrapasse este limite. A difusão foi contabilizada através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, variando-se os parâmetros numéricos intrínsecos a este método. Para efeitos de comparação, cada uma das simulações foi feita a partir de duas maneiras: exclusivamente através da lei de Biot-Savart e com o Método de Multipolos Rápidos.

No início das simulações numéricas em que o algoritmo acelerador foi utilizado, a parcela do campo de velocidades devido à nuvem de vórtices discretos era calculada através da lei de Biot-Savart até o instante em que o número de partículas no domínio atingiu o valor de 50000. Então, o Método de Multipolos passou a ser utilizado, aumentando-se, gradualmente, o nível máximo de refinamento até o sexto, de acordo com a quantidade de vórtices discretos presentes no domínio, seguindo o mesmo critério utilizado na simulação numérica da seção 5.2.2.

Os parâmetros numéricos destas simulações são apresentados na Tabela 5, sendo os subscritos (1 e 2) designados para indicar aqueles que diferem ambas. A primeira simulação apresentada nesta seção possui os mesmos parâmetros daquela apresentada na seção 5.2.2, porém, agora, com a presença da barreira física, discretizada em 240 painéis planos. A intenção é comparar ambas, a fim de compreender de que maneira o solo influencia o comportamento da nuvem de vórtices discretos.

A segunda simulação apresentada nesta seção possui diferentes parâmetros relacionados ao Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, além de um tempo adimensional maior do que a primeira, a fim de verificar o que acontece com a nuvem de vórtices discretos quando esta atinge a barreira física.

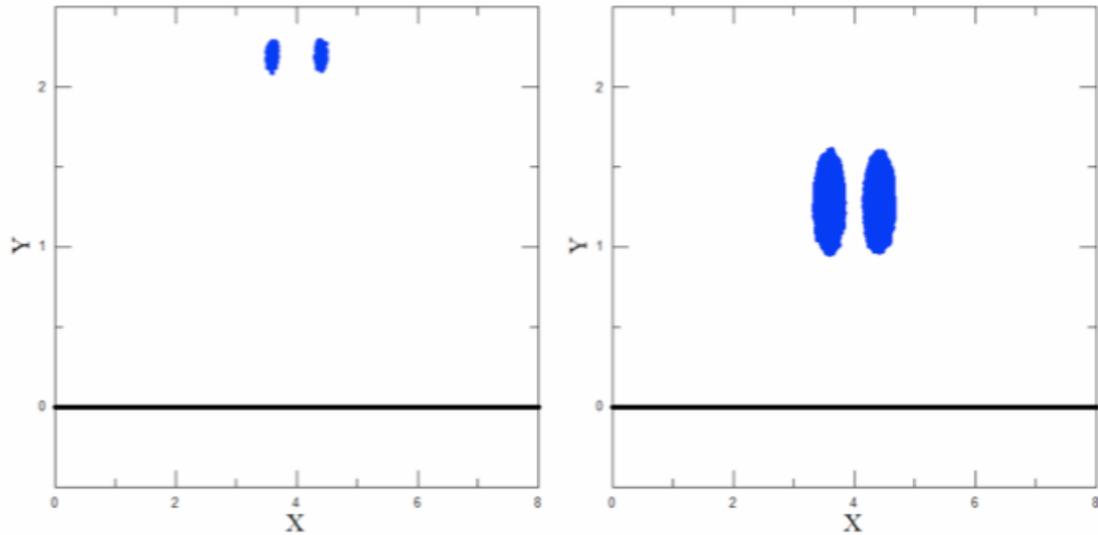
As Figuras 23 e 24 apresentam a evolução do campo de vorticidades em quatro instantes de tempo distintos das duas simulações numéricas.

Tabela 5 – Parâmetros numéricos empregados nas simulações desconsiderando a geração de vorticidade na pista e com os efeitos da difusão contabilizados através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado.

<b>Parâmetro</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>
Incremento de tempo	$\Delta t_1$	0,025
	$\Delta t_2$	0,05
Número total de incrementos de tempo	stop	400
Tempo adimensional	$t_1$	10
	$t_2$	20
Comprimento da pista	l	8,0
Número de painéis utilizados para discretizar a fronteira sólida	m	240
Altura de desprendimento do par contrarrotativo de vórtices	h	2,2
Raio mínimo do núcleo do vórtice discreto	$\sigma_0$	0,001
Raio máximo do núcleo do vórtice discreto	$\sigma_{\max 1}$	0,005
	$\sigma_{\max 2}$	0,0033
Parâmetro que governa a partição	$\alpha_1$	0,2
	$\alpha_2$	0,3
Número de vórtices discretos em cada ponta de asa no instante inicial da simulação numérica	nz	100
Número de termos da série de Taylor	nt	25
Número de Reynolds	Re	75000

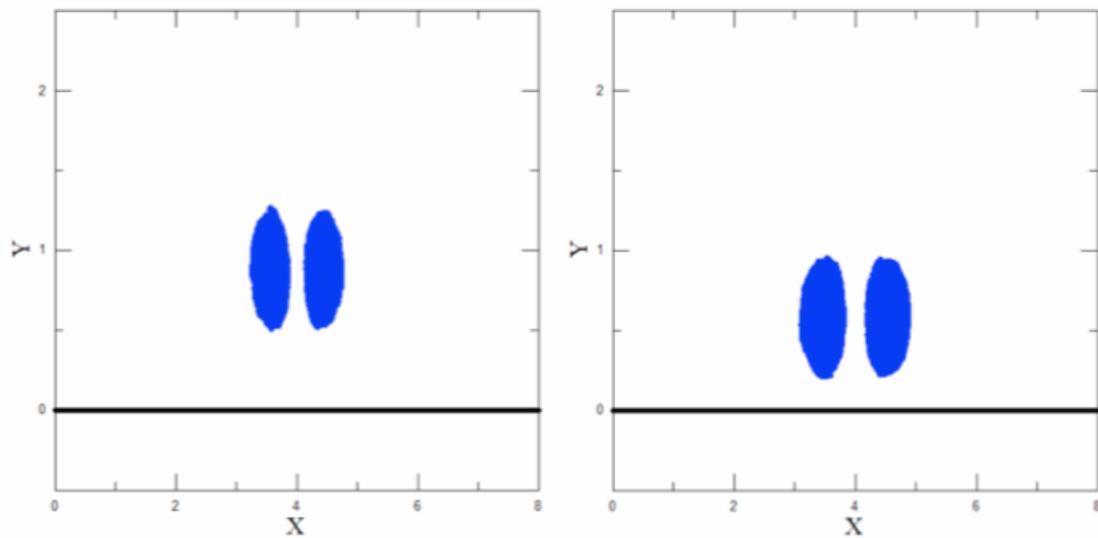
Fonte: Autoria própria.

Figura 23 – Evolução do campo de vorticidades ao longo da primeira simulação numérica que utiliza o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado para resolver a equação da difusão da vorticidade na presença de fronteira sólida (Euler;  $\Delta t = 0,025$ ;  $m = 240$ ;  $\alpha = 0,2$ ;  $nz = 100$ ;  $nt = 25$ ;  $Re = 7,5 \times 10^4$ ).



(a)  $t = 0,025$

(b)  $t = 5$

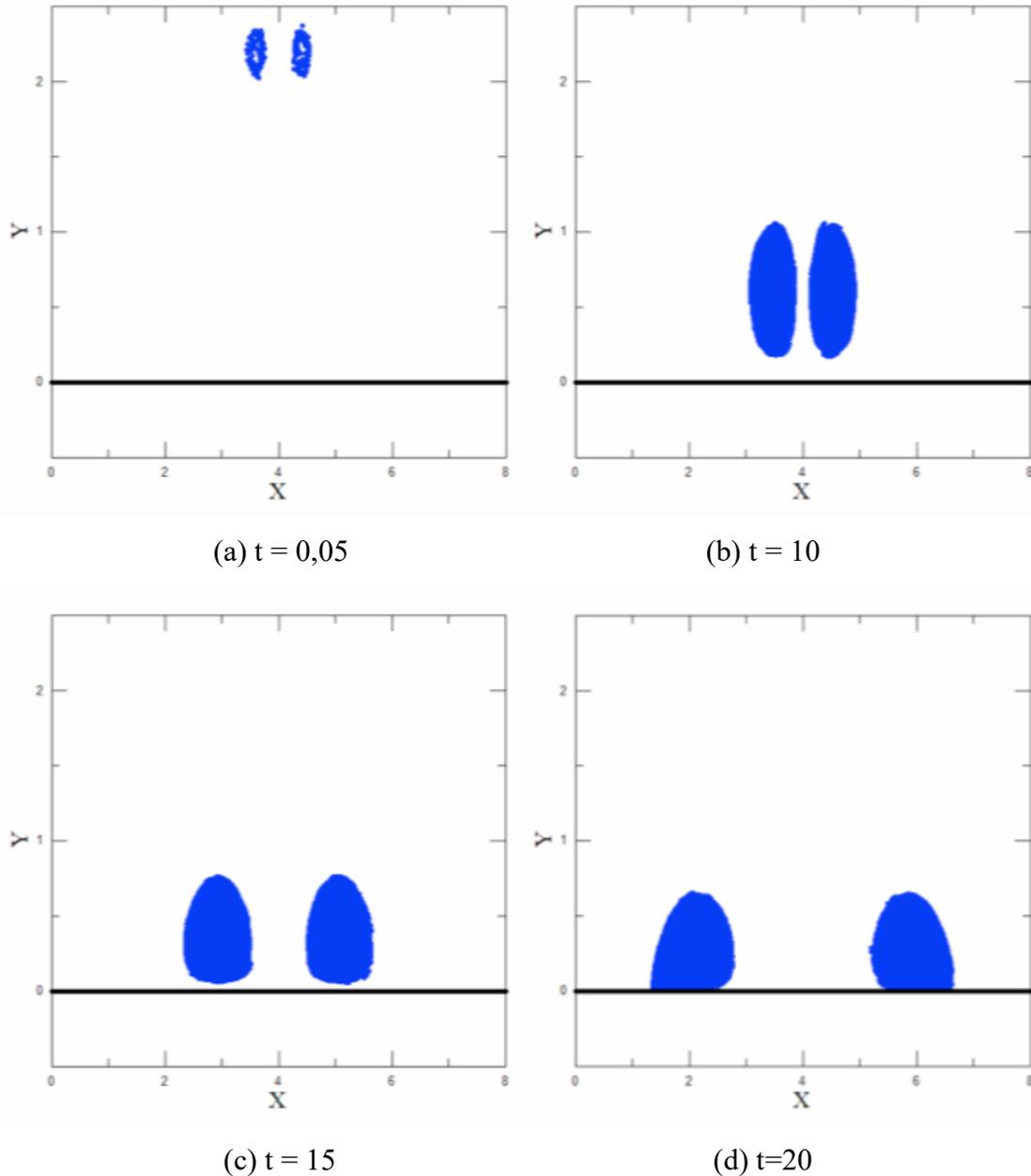


(c)  $t = 7,5$

(d)  $t = 10$

Fonte: Autoria própria.

Figura 24 – Evolução do campo de vorticidades ao longo da segunda simulação numérica que utiliza o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado para resolver a equação da difusão da vorticidade na presença de fronteira sólida (Euler;  $\Delta t = 0,05$ ;  $m = 240$ ;  $\alpha = 0,3$ ;  $nz = 100$ ;  $nt = 25$ ;  $Re = 7,5 \times 10^4$ ).



Fonte: Autoria própria.

Comparando-se as Figuras 22 e 23, é possível perceber que a trajetória da nuvem de vórtices discretos foi modificada, fazendo com que as partículas demorassem mais para atingir valores de ordenadas menores. Isso ocorre por conta da velocidade induzida pelos painéis em cada um dos vórtices discretos da nuvem (equações (20) e (21)).

Após encontrar a fronteira sólida, a nuvem de vórtices discretos se desloca na direção do eixo das abscissas, sendo que o lado direito da nuvem se desloca no sentido positivo, enquanto o esquerdo, no sentido negativo, conforme apresenta a Figura 24.

Na primeira simulação, o tempo gasto com o uso exclusivo da lei de Biot-Savart foi de 3 horas e 29 minutos, enquanto que, com o Método de Multipolos Rápidos, a simulação levou 13 minutos para ser concluída, representando uma redução 93,8% no tempo computacional; o erro numérico no cálculo do campo de velocidades por conta do uso do Método de Multipolos Rápidos, ao final da simulação, foi de 0,23%. Na segunda simulação, o tempo gasto com o uso exclusivo da lei de Biot-Savart foi de 26 horas e 38 minutos, enquanto que, com o Método de Multipolos Rápidos, a simulação levou 2 horas e 33 minutos para ser concluída, representando uma redução 90,4% no tempo computacional; o erro numérico no cálculo do campo de velocidades por conta do uso do Método de Multipolos Rápidos, ao final da simulação, foi de 2,54%. Ao final da primeira simulação tem-se  $Z = 204800$  vórtices discretos de Lamb compondo a nuvem de vórtices; por outro lado, ao final da segunda simulação verifica-se a presença de  $Z = 819200$  vórtices discretos. Nota-se, portanto, um aumento expressivo no tempo computacional quando o parâmetro  $\alpha$  varia de 0,2 para 0,3, o que decorre do processo de partição, o qual tem sua frequência aumentada com o aumento do valor do parâmetro  $\alpha$ .

Conforme dito anteriormente, além do incremento de tempo ( $\Delta t$ ), o que difere ambas as simulações numéricas apresentadas nesta seção são os parâmetros relacionados ao Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado. Na primeira simulação, o parâmetro que governa a partição ( $\alpha$ ) é menor e o valor máximo do raio do núcleo do vórtice discreto ( $\sigma_{max}$ ) é maior do que na segunda, fazendo com que os vórtices discretos, na primeira simulação, demorem mais para sofrer o processo de partição. Portanto, na segunda simulação, a quantidade de partículas presentes no domínio aumenta mais rápido do que na primeira; dessa forma, o Método de Multipolos Rápidos passa a ser utilizado mais cedo, ou seja, em passos de tempo inferiores. Além disso, o domínio computacional é refinado com intervalos menores de tempo, prolongando o uso do Método de Multipolos Rápidos com níveis de refinamento mais elevados. Por estas razões, o erro numérico no cálculo do campo de velocidades é maior ao final da segunda simulação do que ao final da primeira.

### 5.3.2 Simulação numérica considerando a geração de vorticidade na fronteira sólida

Por fim, foi realizada uma simulação numérica considerando a geração de vorticidade no

solo. Como o objetivo desta seção é o de demonstrar a capacidade que o Método de Vórtices Discretos tem de reproduzir resultados experimentais de escoamentos complexos, optou-se por utilizar um esquema de difusão de vorticidade mais simples, a fim de realizar uma simulação numérica mais longa. Assim, a difusão foi contabilizada através do Método de Avanço Randômico. No que tange à contribuição da nuvem de vórtices discretos no cálculo do campo de velocidades do escoamento, no início da simulação, usou-se a lei de Biot-Savart até o momento em que a quantidade de partículas no domínio computacional atingiu o valor de 90000; a partir deste instante, o Método de Multipolos Rápidos passou a ser utilizado com o nível máximo de refinamento igual a 5, e, quando a razão entre o número de partículas no domínio computacional e o total de caixas no nível máximo de refinamento ultrapassou o limite de 197 partículas por caixa, o domínio foi refinado e o nível máximo de refinamento permaneceu fixado em 6 até o término da simulação.

Os parâmetros utilizados nestas simulações são apresentados na Tabela 6.

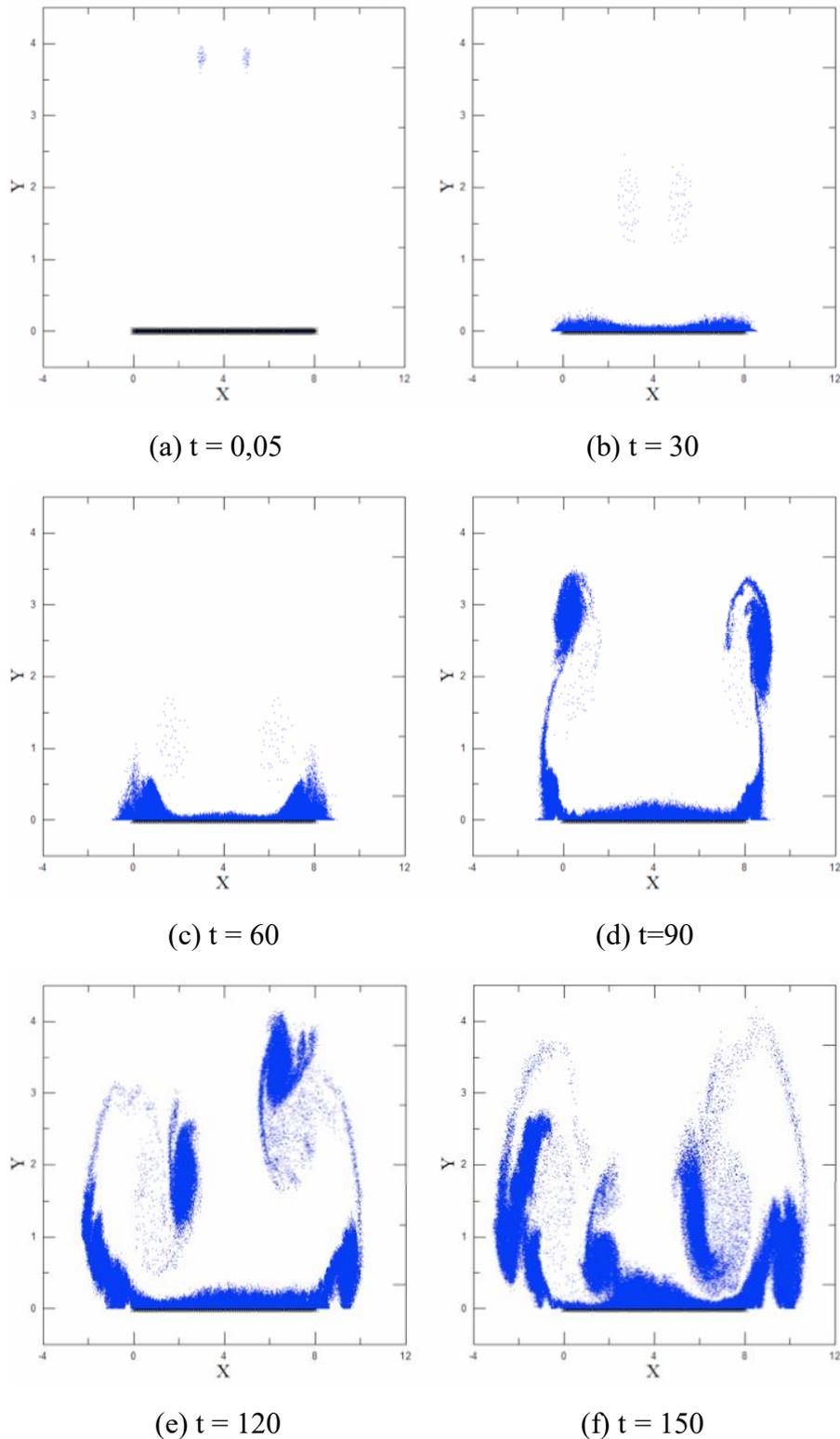
Tabela 6 –Parâmetros numéricos empregados na simulação considerando a geração de vorticidade na pista.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Incremento de tempo	$\Delta t$	0,05
Número total de incrementos de tempo	stop	3000
Tempo adimensional	t	150
Comprimento da pista	l	8,0
Número de painéis utilizados para discretizar a fronteira sólida	m	80
Altura de desprendimento do par contrarrotativo de vórtices	h	3,8
Raio do núcleo do vórtice discreto	$\sigma_0$	0,001
Número de vórtices discretos em cada ponta de asa	nz	50
Número de termos da série de Taylor	nt	25
Número de Reynolds	Re	7650

Fonte: Autoria própria.

A Figura 25 apresenta a evolução do campo de vorticidades em seis instantes de tempo distintos da simulação numérica.

Figura 25 - Evolução do campo de vorticidades ao longo de uma simulação numérica em que os efeitos da difusão foram contabilizados através do Método de Avanço Randômico e a geração de vorticidade no solo foi levada em consideração (Euler;  $\Delta t = 0,05$ ;  $m = 80$ ;  $n_z = 50$ ;  $nt = 25$ ;  $Re = 7,65 \times 10^3$ ).

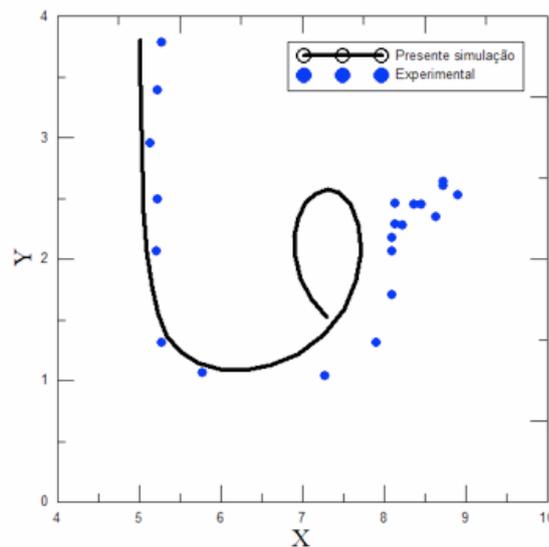


Fonte: Autoria própria.

O par contrarrotativo de vórtices desce, desde a altura em que foi despreendido (Figuras 25(a) e 25(b)), até próximo ao solo (Figura 25(c)); ao aproximar-se do solo, o par de vórtices induz a formação de duas estruturas vorticosas: uma anti-horária, no lado direito, e outra horária, no lado esquerdo (Figura 25(d)). Estas estruturas vorticosas se desenvolvem (Figura 25(e)) e induzem, também, a formação de novas estruturas vorticosas na pista (Figura 25(f)).

A Figura 26 apresenta a trajetória do lado direito da nuvem de vórtices discretos a partir dos resultados da presente simulação numérica, a fim de comparar com resultados experimentais encontrados na literatura.

Figura 26 – Evolução do lado direito da nuvem de vórtices discretos ao longo do tempo para a simulação considerando a pista e a geração de vorticidade (Euler;  $\Delta t = 0,05$ ;  $m = 80$ ;  $n_z = 50$ ;  $nt = 25$ ;  $Re = 7,65 \times 10^3$ ).



Fonte: Autoria própria.

Nota-se, com base na Figura 26, que a presente simulação está em boa concordância com os resultados experimentais de Zheng e Ash<sup>1</sup> (1996, apud LIU; SRNSKY, 1990).

No entanto, verifica-se uma discrepância na trajetória da nuvem de vórtices, principalmente quando esta começa a subir. Espera-se que a utilização de um esquema de difusão de vorticidade mais preciso, como o Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, promova resultados de trajetória ainda mais próximos dos dados experimentais, especialmente com a utilização de  $\alpha > 0,6$ .

<sup>1</sup> LIU, H.T.; SRNSKY, R.A. Laboratory investigation of atmospheric effects on vortex wakes. **Flow Research, Inc.**, Belleville, WA, 1990.

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou a análise numérica do desenvolvimento de esteiras de aeronaves formadas a partir de procedimentos de pouso e decolagem; na modelagem do problema, tratou-se o fluido como newtoniano e com propriedades constantes; o escoamento foi considerado incompressível e estudado de maneira bidimensional. Para a análise numérica, utilizou-se uma abordagem lagrangiana, através do Método de Vórtices Discretos, enquanto o Método de Painéis foi empregado para discretizar a fronteira sólida.

A fim de reduzir o tempo computacional das simulações numéricas, um algoritmo acelerador, o Método de Multipolos Rápidos, foi implementado. Observou-se, a partir da comparação entre as simulações numéricas que contam com a utilização do algoritmo acelerador para computar a parcela do campo de velocidades devido à nuvem de vórtices discretos e aquelas em que este cálculo é realizado exclusivamente através da lei de Biot-Savart, que o erro numérico no cálculo do campo de velocidades cresce conforme o nível máximo de refinamento utilizado aumenta, bem como com o avanço da simulação. Ainda assim, este método se mostrou eficaz na redução do tempo computacional e foi capaz de calcular o campo de velocidades do escoamento mantendo a acurácia em níveis toleráveis.

Foram realizadas duas simulações numéricas considerando a presença do solo, porém, sem geração de vorticidade, sendo este considerado apenas como uma barreira física, para avaliar o comportamento do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, responsável por contabilizar os efeitos da difusão da vorticidade. A utilização do Método de Multipolos Rápidos permitiu simular a evolução do campo de vorticidades com um tempo computacional aproximadamente 90% menor do que com o uso exclusivo da lei de Biot-Savart. O maior erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento foi de 2,54% e foi verificado ao final da simulação em que o parâmetro  $\alpha$  recebeu o valor de 0,3; este valor de erro numérico pode ser considerado aceitável.

Para efeitos de validação do algoritmo desenvolvido, foi realizada uma simulação numérica considerando a presença do solo e a geração de vorticidade. A equação da difusão da vorticidade foi resolvida através do Método de Avanço Randômico e a parcela do campo de velocidades devido à nuvem de vórtices discretos foi calculada com o uso do Método de Multipolos Rápidos, em alternativa à lei de Biot-Savart, a partir do instante em que a quantidade de partículas no domínio ultrapassou um limite preestabelecido. Os resultados obtidos nesta simulação se mostraram satisfatórios quando comparados com resultados experimentais

presentes na literatura. Assim, é possível dizer que os resultados obtidos são promissores, sendo que o presente trabalho pode ser um ponto de partida para outros com diferentes situações físicas a serem exploradas.

É possível, a partir do presente trabalho, estudar o comportamento de esteiras viscosas de aeronaves levando em consideração a geração de vorticidade na pista e com a difusão viscosa da vorticidade contabilizada através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado. Para isso, faz-se necessário implementar um critério de coalescência de vórtices discretos, de forma a reduzir a população de partículas presentes no domínio computacional. Além disso, é desejável que seja implementado um critério que estabeleça que vórtices discretos com intensidade abaixo de um valor mínimo não sofram o processo de partição; este critério evitará que haja uma população muito grande de vórtices discretos com intensidades ínfimas.

A coalescência de vórtices discretos se dá por meio da substituição, em uma dada região, de um conjunto de vórtices discretos, que estão fisicamente próximos, por um único vórtice discreto, capaz de representar aquele conjunto, conservando, ainda, o momento e a circulação. É conveniente utilizá-la, principalmente, ao simular o processo de difusão da vorticidade através do Método do Crescimento do Raio do Núcleo do Vórtice Modificado, pois o número de partículas no domínio cresce demasiadamente, tornando a simulação bastante demorada.

É possível, ainda, levar em consideração a influência de escoamento incidente em futuras simulações que abordam o mesmo problema físico estudado no presente trabalho. Além disso, o algoritmo acelerador implementado para ser uma opção à custosa lei de Biot-Savart pode ser utilizado no estudo de outros problemas físicos, como a análise de escoamentos externos ao redor de corpos de geometrias arbitrárias.

## REFERÊNCIAS

- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. **Simulação numérica do escoamento em torno de um corpo de forma arbitrária utilizando o método de vórtices discretos**. 1999. Dissertação (Mestrado) - EFEI/IEM/DME, Itajubá, MG, 1999.
- BARNES, J. E.; HUT, P. A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm. **Nature**, London, v. 324, p. 446-449, 1986.
- BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. Nova Delhi: Cambridge University Press, 1967. 615 p.
- BELLAMY-KNIGHTS, P. G. *et al.* Convergence properties of panel methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 76, p. 171-178, 1988. Disponível em: <https://ur.booksc.eu/book/8524763/258aae>. Acesso em: 5 jul. 2021.
- BIMBATO, A. M. **Estudo de escoamentos turbulentos em torno de um corpo rombudo de superfície hidraulicamente lisa ou rugosa utilizando o método de vórtices discretos**. 2012. 165 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2012.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Berlin-Heidelberg: Springer, 1984.
- CARRIER, J.; GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. Multipole algorithm for particle simulations. **SIAM Journal of Scientific Statistics and Computation**, Philadelphia, v. 9, n. 4, p. 669-686, 1988. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0909044>. Acesso em: 10 de jun. 2021.
- CHORIN, A. J. Numerical study of slightly viscous flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 57, p. 785-796, 1973. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/numerical-study-of-slightly-viscous-flow/4E4FE6AE32F826FFFD6F46E3E86F330A>. Acesso em: 20 de jun. 2021.
- ERICKSON, L. L. Panel method - an introduction. **NASA Technical Paper 2995**, Moffett Field, dez. 1990. 68p. Disponível em: <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19910009745.pdf>. Acesso em: 30 out. 2021.
- FERZIGER, J.H. **Numerical methods for engineering application**. New York: John Wiley & Sons, 1981. Disponível em: <https://www.bookdepository.com/Numerical-Methods-for-Engineering-Application-Joel-H-Ferziger/9780471063360>. Acesso em: 16 jun. 2021.
- FOX, R. W. *et al.* Introdução à mecânica dos fluidos. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 876 p.
- GREENGARD, C. The core spreading method approximates the wrong equation. **Journal of Computational Physics**, Maryland Heights, v. 61, p. 345-348, 1985. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999185900919?via%3Dihub>. Acesso

em: 2 jun. 2021.

GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast algorithm for particle simulations. **Journal of Computational Physics**, Maryland Heights, v. 73, p. 325-348, dez. 1987. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999187901409>. Acesso em: 17 jun. 2021.

HESS, J. L. Higher order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 2, p. 1-15, 1973. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0045782573900182>. Acesso em: 2 jul. 2021.

HESS, J. I.; SMITH, A. M. O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. **Progress in Aeronautical Sciences**, Oxford, v. 8, p. 1-138, 1967. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0376042167900036>. Acesso em: 3 jul. 2021.

KATZ, J.; PLOTKIN, A. **Low speed aerodynamics: from wing theory to panel methods**. Cambridge: McGraw Hill Inc, 1991. 632 p.

KOMOUTSAKOS, P. D. **Direct numerical simulations of unsteady separated flows using vortex methods**. 1993. Thesis (Ph.D.) - California Institute of Technology, 1993.

LEONARD, A. Vortex methods for flow simulation. **Journal of Computational Physics**, Maryland Heights, v. 37, p. 289-335, 1980. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999180900406>. Acesso em: 2 jun. 2021.

LEWIS, R. I. **Vortex element method for fluid dynamic analysis of engineering systems**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. Disponível em: <https://www.cambridge.org/br/academic/subjects/engineering/thermal-fluids-engineering/vortex-element-methods-fluid-dynamic-analysis-engineering-systems?format=PB>. Acesso em: 15 jun. 2021.

MARTENSEN, E. Berechnung der druckverteilung an gitterprofilen in ebener potentialströmung mit einer Fredholmschen integralgleichung. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v. 3, p. 235-270, 1959. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00284179> - citeas. Acesso em: 30 jul. 2021.

MORAN, J. **An introduction to theoretical and computational aerodynamics**. New York: John Wiley & Sons, 1984.

MUSTTO, A. A.; HIRATA, M. H.; BODSTEIN, G. C. R. Discrete vortex method simulation of the flow around a circular cylinder with and without rotation. *In*: AIAA APPLIED AERODYNAMICS CONFERENCE, 16., 1998, Virginia. **Anais [...]**. Rio de Janeiro, 1998. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/271369983\\_Discrete\\_vortex\\_method\\_simulation\\_of\\_the\\_flow\\_around\\_a\\_circular\\_cylinder\\_with\\_and\\_without\\_rotation](https://www.researchgate.net/publication/271369983_Discrete_vortex_method_simulation_of_the_flow_around_a_circular_cylinder_with_and_without_rotation). Acesso em: 16 jun. 2021.

NISHIMURA, N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. **Applied**

**Mechanics Reviews**, New York, v. 55, n. 4, p. 299-324, 2002.

OGAMI, Y.; AKAMATSU, T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model - the diffusion velocity method. **Computers & Fluids**, Oxford, v. 19, p. 433-441, 1991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/004579309190068S>. Acesso em: 6 jun. 2021.

PANTON, R. L. **Incompressible flow**. Austin: John Wiley & Sons, 1984.

PEREIRA, L. H. G.; BODSTEIN, G. C. R. Método dos painéis com distribuições de singularidade quadráticas aplicados a escoamentos bidimensionais sobre aerofólios. *In*: ENCIT – CONGRESSO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS TÉRIMICAS, 10., 2004, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro, 2004.

PEREIRA, L. H. G.; SILVA, D. F. C.; BODSTEIN, G. C. R. Estudo numérico do escoamento potencial em torno de um aerofólio utilizando o método de painéis. *In*: ENCIT – CONGRESSO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS TÉRIMICAS, 10., 2004, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro, 2004.

RICCIARDI, T. R.; WOLF, W. R.; BIMBATO, A. M. Fast multipole method applied to Lagrangian simulations of vortical flows. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Amsterdam, v. 51, p. 180-197, 2017a. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/159542>. Acesso em: 4 jun. 2021.

RICCIARDI, T. R.; WOLF, W. R.; BIMBATO, A. M. A fast algorithm for simulation of periodic flows using discrete vortex particles. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Heidelberg, v. 39, p. 45-55, 2017b. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/159889?locale-attribute=en>. Acesso em: 4 jun. 2021.

ROSSI, L. F. Resurrecting core spreading vortex methods: a new scheme that is both deterministic and convergent. **SIAM Journal on Scientific Computing**, Philadelphia, v. 17, n. 2, p. 370-397, 1996. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/247404841\\_Resurrecting\\_Core\\_Spreading\\_Vortex\\_Methods\\_A\\_New\\_Scheme\\_that\\_is\\_Both\\_Deterministic\\_and\\_Convergent](https://www.researchgate.net/publication/247404841_Resurrecting_Core_Spreading_Vortex_Methods_A_New_Scheme_that_is_Both_Deterministic_and_Convergent). Acesso em: 3 jun. 2021.

SARPKAYA, T. Vortex element methods for flow simulation. **Advances in Applied Mechanics**, Maryland Heights, v. 31, p. 113-247, 1994. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0065215608702564>. Acesso em: 3 jun. 2021.

SHANKAR, S.; VAN DOMMELEN, L. A new diffusion procedure for vortex methods. **Journal of Computational Physics**, Maryland Heights, v. 127, p. 88-109, 1996. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999196901606?via%3Dihub>. Acesso em: 7 jun. 2021.

SHINTANI, M ; AKAMATSU, Y. Investigation of two-dimensional discrete vortex method with viscous diffusion model. **Computational Fluid Dynamics Journal**, Japão, v. 3, n. 2, p. 237-254, 1994.

ZHENG, Z. C.; ASH, R. L. Study of aircraft wake vortex behavior near the ground. **AIAA Journal**, Reston, v. 34, n. 3, p. 580-588, 1996. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/Study-of-aircraft-wake-vortex-behavior-near-the-Zheng-Ash/d434a0d558ed1e5e27fa0a8f0c0dd8a375da6f33>. Acesso em: 9 jan. 2022.

## APÊNDICE A – ANÁLISE DA ACURÁCIA DO MÉTODO DE MULTIPÓLOS RÁPIDOS IMPLEMENTADO EM CONJUNTO COM O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

Além das simulações apresentadas na seção 5.2 do presente trabalho, foram realizados outros testes para avaliar o funcionamento do Método de Multipolos Rápidos sem levar em consideração a presença da fronteira sólida e com a rotina responsável pela difusão viscosa da vorticidade desabilitada. A Tabela A.1 apresenta quais foram os parâmetros escolhidos nestas simulações.

Tabela A.1 – Parâmetros numéricos empregados nas simulações para investigar o comportamento do Método de Multipolos Rápidos.

<b>Parâmetro</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>
Incremento de tempo	$\Delta t$	0,025
Número total de incrementos de tempo	stop	3000
Tempo adimensional	t	75
Raio do núcleo do vórtice discreto	$\sigma_0$	0,001
Número de vórtices discretos no domínio	Z	100; 2000; 20000; 40000 e 80000
Número de termos da série de Taylor	nt	25
Número de Reynolds	Re	75000
Níveis máximos de refinamento	n	2, 3, 4, 5 e 6

Fonte: Autoria própria.

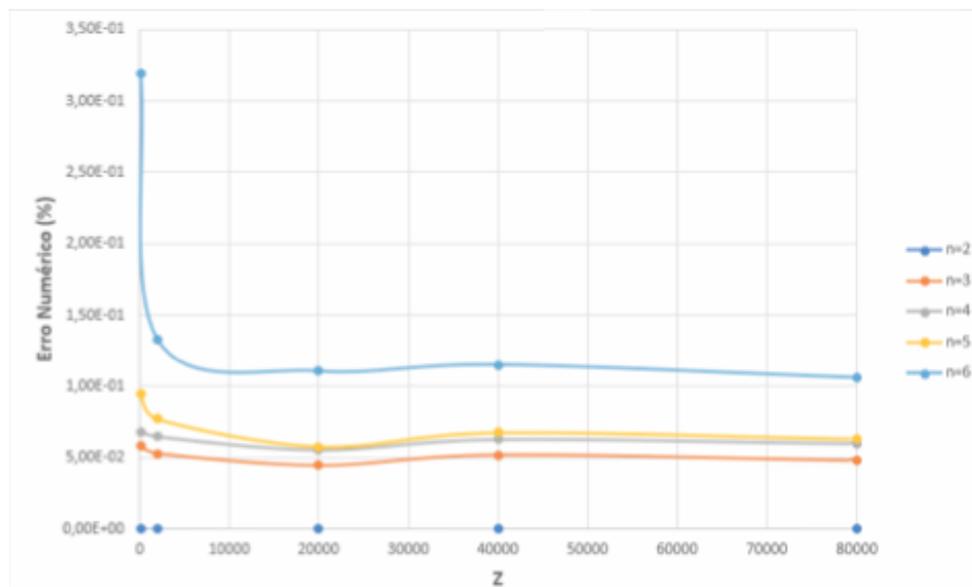
Inicialmente, foram feitas simulações completas, com os mesmos parâmetros, em que o cálculo do campo de velocidades foi feito, exclusivamente, através da lei de Biot-Savart, para efeitos de comparação com os testes realizados através do Método de Multipolos Rápidos.

É importante salientar que o nível máximo de refinamento arbitrado, no início, permanece o mesmo durante o decorrer da simulação numérica e para cada uma das situações, ou seja, para cada valor de Z, foram feitas seis simulações: cálculo do campo de velocidades do escoamento

exclusivamente através da lei de Biot-Savart e com o Método de Multipolos Rápidos, em que os níveis máximos de refinamento são fixados em 2, 3, 4, 5 e 6, durante todo o tempo de simulação.

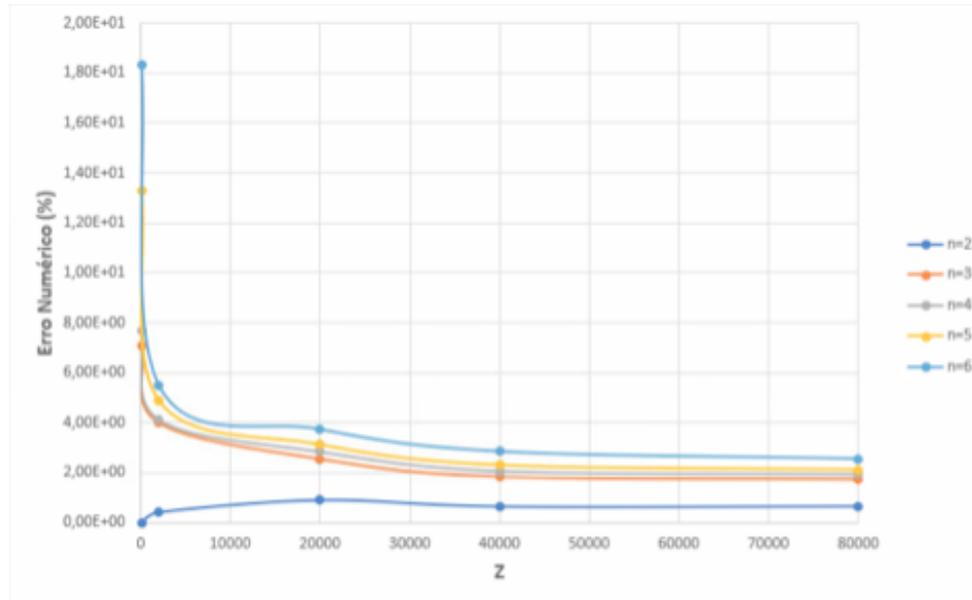
As Figuras A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6 e A.7 indicam o erro numérico contabilizado, respectivamente, no 1º, no 500º, no 1000º, no 1500º, no 2000º, no 2500º e no 3000º passos de tempo da simulação numérica para cada um dos diferentes níveis máximos de refinamento.

Figura A.1 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 1º passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.



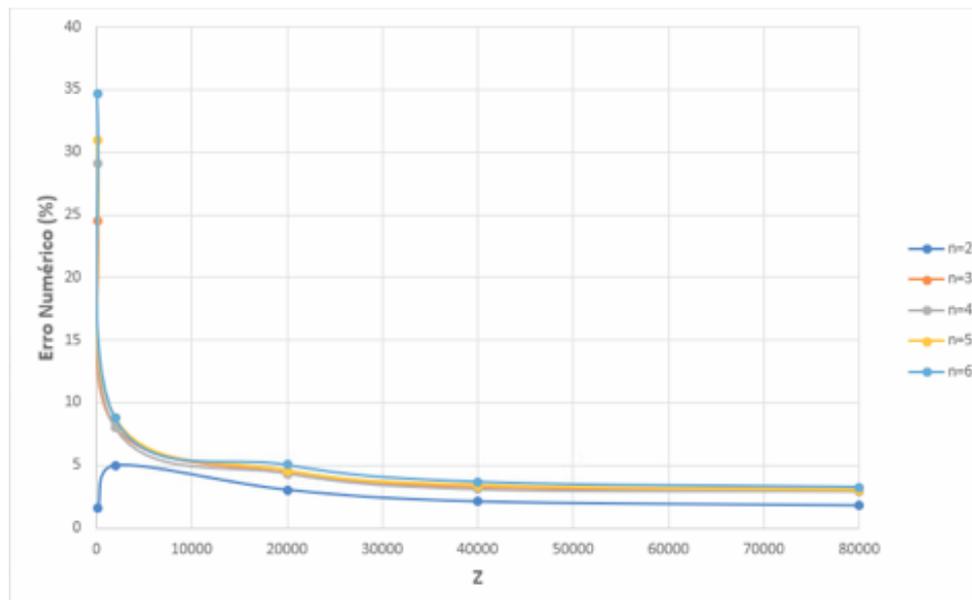
Fonte: Autoria própria.

Figura A.2 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 500° passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.



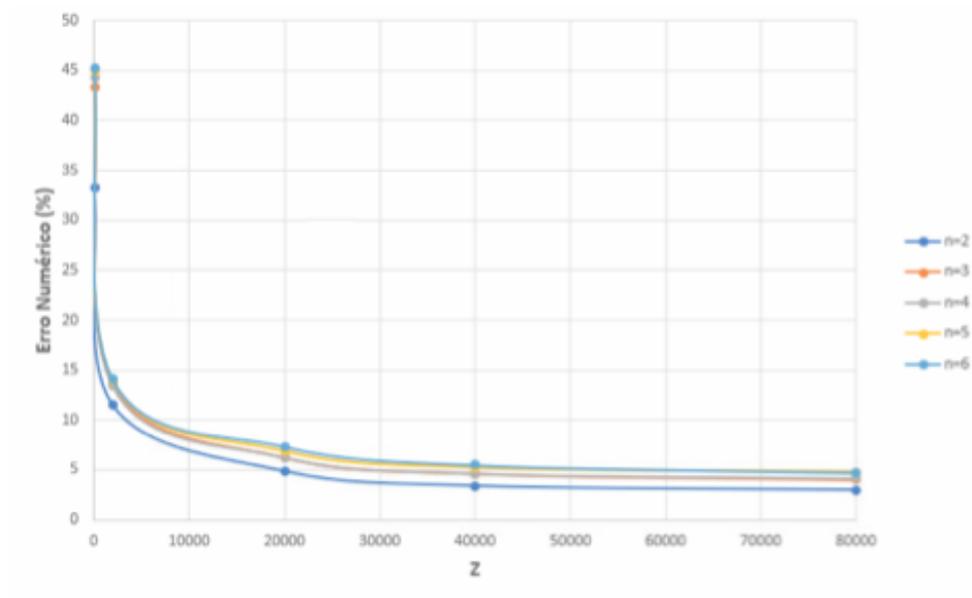
Fonte: Autoria própria.

Figura A.3 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 1000º passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.



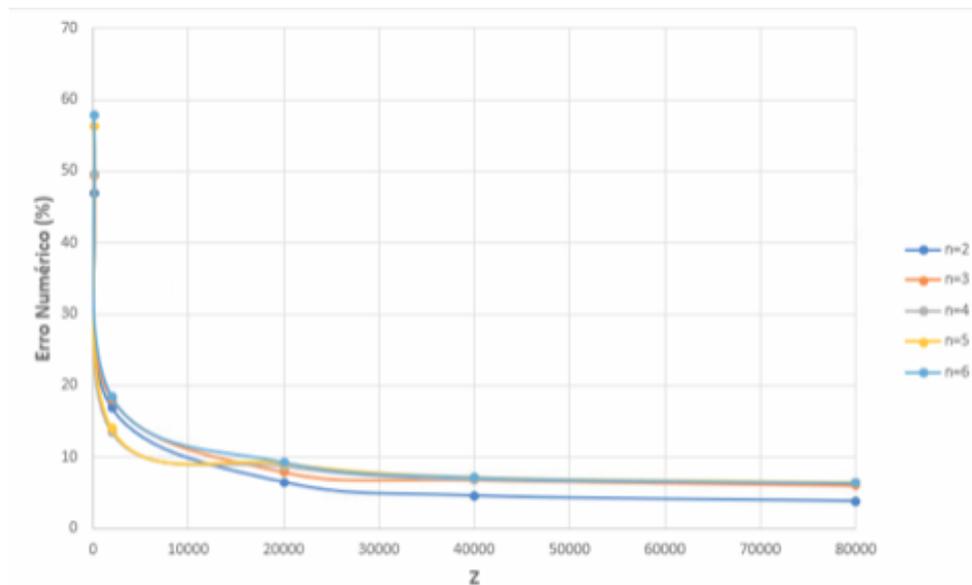
Fonte: Autoria própria.

Figura A.4 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 1500º passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.



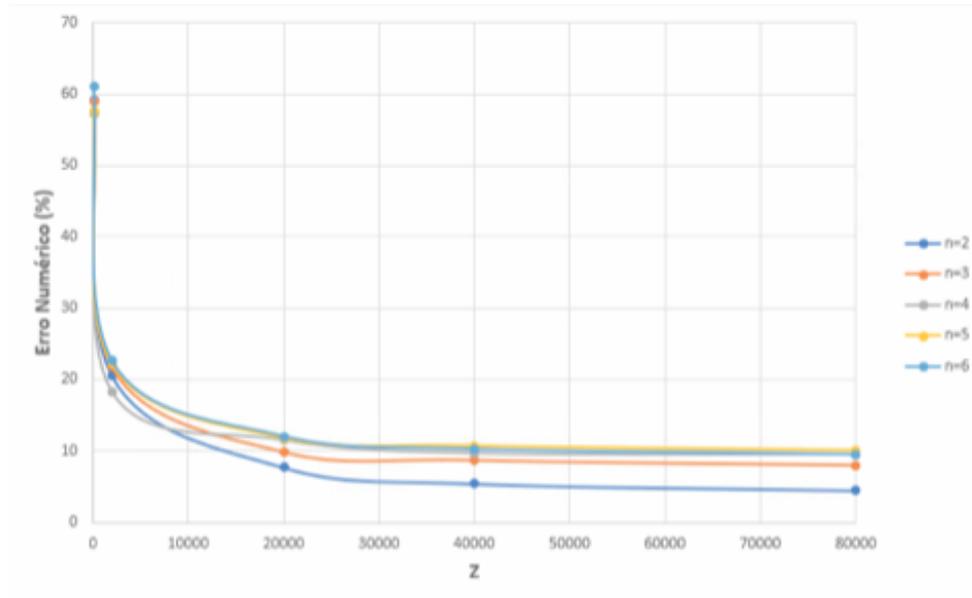
Fonte: Autoria própria.

Figura A.5 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 2000º passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.



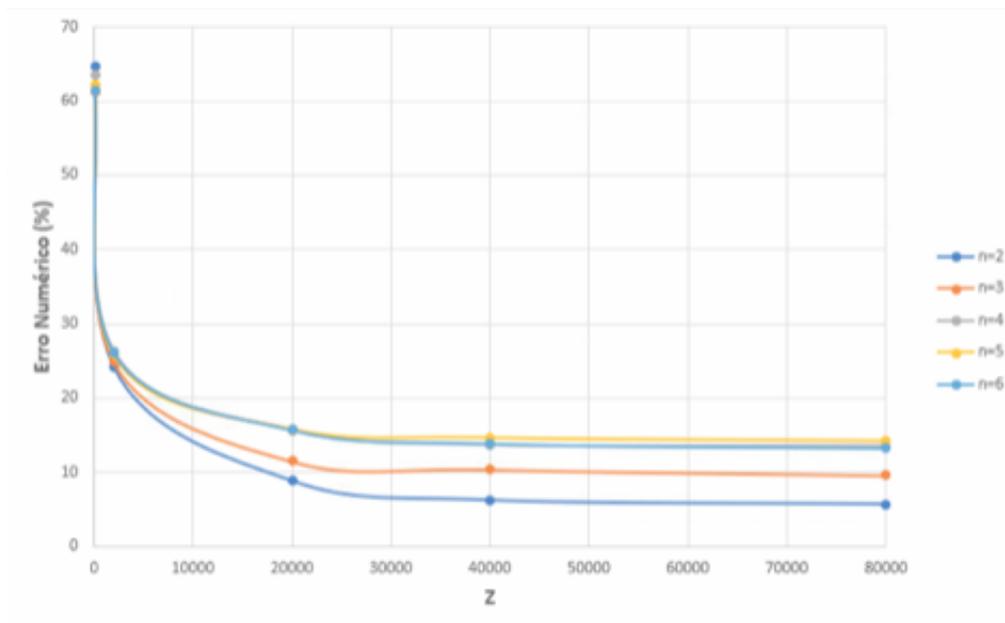
Fonte: Autoria própria.

Figura A.6 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 2500º passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.



Fonte: Autoria própria.

Figura A.7 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento referente ao 3000º passo de tempo da simulação numérica realizada através do Método de Multipolos Rápidos.



Fonte: Autoria própria.

Com base nas Figuras A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6 e A.7, conclui-se que, na maior parte dos passos de tempo da simulação numérica apresentados, o erro numérico no cálculo do campo

de velocidades para uma mesma quantidade de partículas cresce conforme o nível máximo de refinamento aumenta, exceto para os passos 2500 e 3000, em que o erro numérico no cálculo do campo de velocidades com o nível máximo de refinamento fixado em 5 é maior do que quando o nível máximo de refinamento é fixado em 6.

No geral, quanto maior o nível máximo de refinamento empregado, maior o erro no cálculo do campo de velocidades. Nota-se, também, que, para um mesmo nível máximo de refinamento e em todos os passos de tempo da simulação numérica, o erro diminui conforme o número de partículas no domínio computacional aumenta.

Além disso, o erro é acumulativo, ou seja, com o avanço da simulação numérica, o erro aumenta de maneira considerável. Por exemplo, para o nível de refinamento máximo fixado em 6 e  $Z = 80000$ , o erro no 1º passo de tempo da simulação numérica, é de, aproximadamente, 0,11% (Figura A.1), enquanto que, no 3000º passo de tempo (Figura A.7), é de, aproximadamente, 13,2%. O mesmo acontece para os outros níveis máximos de refinamento e quantidades de partículas presentes no domínio.

## APÊNDICE B – ANÁLISE DA REDUÇÃO DO TEMPO DE SIMULAÇÃO ATRAVÉS DO USO DO MÉTODO DE MULTÍPOLOS RÁPIDOS

O principal intuito do uso do Método de Multipolos Rápidos é a redução do tempo de simulação numérica, muitas vezes impeditivo no caso de simulações complexas envolvendo o cálculo do campo de velocidades através da lei de Biot-Savart.

Para analisar como o Método de Multipolos Rápidos diminui o tempo computacional, define-se o parâmetro *speed-up*, calculado a partir da razão entre o tempo de simulação numérica com a parcela do campo de velocidades devido à nuvem de vórtices discretos computada exclusivamente através da lei de Biot-Savart (*BS*) e o tempo de simulação numérica com este cálculo realizado através do Método de Multipolos Rápidos (*FMM*), para cada um dos níveis máximos de refinamento (*n*) utilizados, conforme a equação (B.1):

$$speed - up = \frac{\text{tempo de simulação (BS)}}{\text{tempo de simulação (FMM)}} \quad (\text{B.1})$$

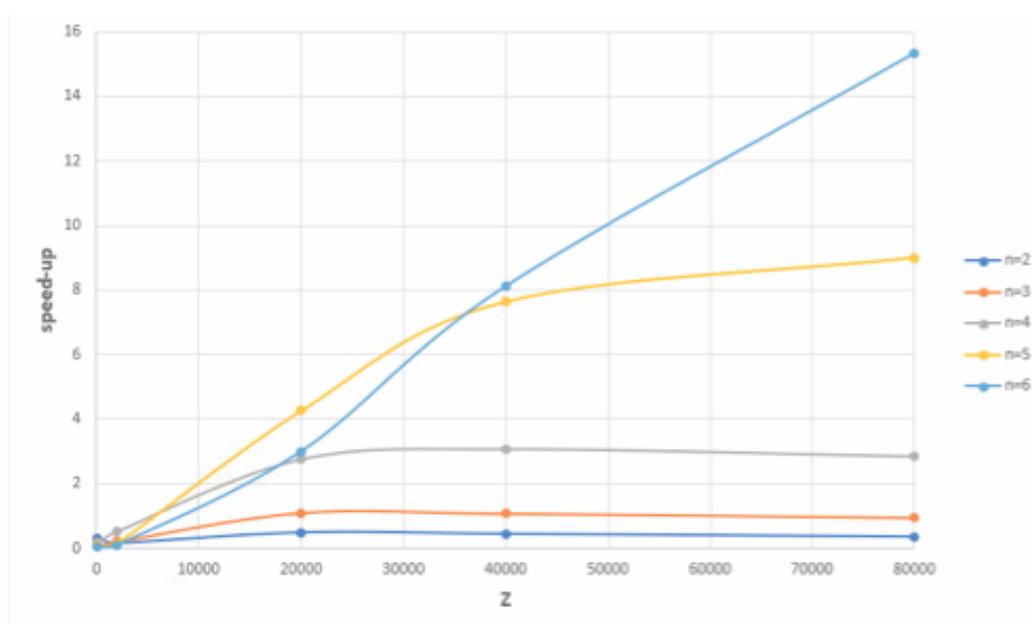
A Figura B.1 exemplifica graficamente o comportamento do parâmetro *speed-up* em função do número de vórtices discretos (*Z*) presentes na simulação numérica para cada um dos níveis máximos de refinamento, com base na Tabela B.1.

Tabela B.1 – *Speed-up* em função do número de partículas presentes no domínio para cada um dos níveis máximos de refinamento.

<b>Z</b>	<b>n = 2</b>	<b>n = 3</b>	<b>n = 4</b>	<b>n = 5</b>	<b>n = 6</b>
100	0,296578	0,075239	0,185009	0,087054	0,038424
2000	0,174115	0,19802	0,508475	0,15121	0,103734
20000	0,47728	1,090433	2,765163	4,26472	3,0034
40000	0,441221	1,067297	3,08469	7,64034	8,12594
80000	0,355652	0,940884	2,856893	9,00678	15,3465

Fonte: Autoria própria.

Figura B.1 – *Speed-up* em função do número de partículas presentes no domínio para cada um dos níveis máximos de refinamento.



Fonte: Autoria própria.

Nota-se, a partir da Tabela B.1 e da Figura B.1, que, com o nível máximo de refinamento fixado em 2, para qualquer quantidade de partículas presentes no domínio, o *speed-up* encontrado foi menor do que 1, ou seja, o tempo para realização destas simulações numéricas através de FMM foi maior do que através da lei de Biot-Savart. Com o nível máximo de refinamento fixado em 3, o *speed-up* foi maior do que 1 apenas para  $20000 \leq Z \leq 40000$ , sendo menor do que 1 para os demais valores de  $Z$ , ou seja, o Método de Multipolos Rápidos, nestes casos, não foi de nenhuma valia.

Para os níveis máximos de refinamento fixados em 4, 5 e 6, o *speed-up* passa a ser maior do que 1 para  $Z \geq 20000$ . Para o nível máximo de refinamento igual a 4, o seu ápice é de 3,08469, em  $Z = 40000$ , caindo, logo depois, até 2,856893, em  $Z = 80000$ ; para o nível máximo de refinamento igual a 5, os valores de *speed-up* para  $Z = 20000$ ,  $Z = 40000$  e  $Z = 80000$  são: 4,26472; 7,64034 e 9,00678, respectivamente, enquanto que, para o nível máximo de refinamento igual a 6, os valores de *speed-up* são: 3,0034; 8,12594 e 15,3465, para os respectivos valores de  $Z$ .

É necessário realizar um balanço entre a quantidade de partículas presentes no domínio computacional e o nível máximo de refinamento utilizado, de modo que deve haver um equilíbrio entre o *speed-up* desejado e o erro no cálculo do campo de velocidades do escoamento, para que este não se torne excessivo, comprometendo os resultados das simulações.

Sendo assim, é possível iniciar a simulação numérica exclusivamente através da lei de Biot-Savart, para realizar o cálculo da parcela do campo de velocidades relativa à interação vórtice-vórtice e, quando a quantidade de partículas no domínio se torna excessiva, deve-se lançar mão do Método de Multipolos Rápidos, aumentando o nível máximo de refinamento utilizado conforme a população de vórtices discretos no domínio cresce. Assim, é possível manter o erro numérico no cálculo do campo de velocidades em valores aceitáveis e reduzir o tempo de simulação numérica.

## APÊNDICE C – RESUMO DO ARTIGO SUBMETIDO AO COBEM 2021

Parte dos resultados apresentados neste trabalho foram submetidos e apresentados no 26<sup>th</sup> *ABCM International Congress of Mechanical Engineering* (COBEM 2021). Na Figura C.1, é apresentado o resumo do trabalho publicado no congresso.

Figura C.1 – Resumo do trabalho apresentado no COBEM (2021).



**COBEM**  
2021 Florianópolis - Brasil



26<sup>th</sup> ABCM International Congress of Mechanical Engineering  
November 22-26, 2021. Florianópolis, SC, Brazil

### IMPLEMENTATION OF AN ACCELERATOR ALGORITHM TO REDUCE THE COMPUTATIONAL COSTS IN LAGRANGIAN SIMULATIONS

**Marília Fernandes Vidille**

School of Engineering, São Paulo State University (UNESP), Guaratinguetá, SP, Brazil  
marilia.f.vidille@unesp.br

**Luiz Antonio Alcântara Pereira**

Mechanical Engineering Institute, Federal University of Itajubá (UNIFEI), Itajubá, MG, Brazil  
luizantp@unifei.edu.br

**Alex Mendonça Bimbato**

School of Engineering, São Paulo State University (UNESP), Guaratinguetá, SP, Brazil  
alex.bimbato@unesp.br

**Abstract.** *The purely lagrangian discrete vortex method is a computation technique in which meshes are avoided. The method is used to represent a flow property as the vorticity field. In order to represent such property, the vorticity transport equation is obtained from the Navier-Stokes and continuity equations and the viscous splitting algorithm is used; according to it, one can solve the advection and diffusion equations separately but in the same time increment, just to make the vortex method implementation easier. The diffusion equation is solved by the classical random walk method; according to it, each discrete vortex used to represent the vorticity field is dislocated in a radial and circumferential direction to simulate vorticity scattering. The advection equation is solved using the material derivative in a classical lagrangian approach. One of the most problems when using lagrangian simulations concerns to the solution of advection equation, since it is necessary to compute the velocity field in the position occupied by each one of Z discrete vortex present in the computational domain. In a typical problem the velocity field is composed by three contributions: (i) the incident flow; (ii) the boundary surfaces; (iii) the vortex-vortex interaction. The vortex-vortex interaction is especially expensive since its computational cost is proportional to  $Z^2$  when the Biot-Savart law is used. The aim of the present work is to implement a fast multipole method to reduce the computational costs associated to the Biot-Savart computations. The fast multipole method divides the computational domain using boxes which contains the discrete vortices; the goal of the algorithm is to promote more interactions between boxes than interactions between particles. One hopes that the computational costs can be proportional to  $Z \log Z$  or even to  $Z$ . In order to simplify the numerical implementation of the fast multipole method the physical situation investigated is the vortices detached from airplane wings; there are no incident flow and solid boundaries in the problem. The pair of vortices is represented by Lamb discrete vortices and the velocity field is composed only by the vortex-vortex interaction which is computed using only the Biot-Savart law and using the fast multipole method to verify the CPU time reduction.*

**Keywords:** *discrete vortex method, fast multipole method, CPU time reduction, lagrangian description*

Fonte: Autoria própria.