UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Lucas Yudy Juang

Dinâmica topológica em equações diferenciais ordinárias generalizadas

São José do Rio Preto
2023

Lucas Yudy Juang

Dinâmica topológica em equações diferenciais ordinárias generalizadas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

Financiadora: CNPq

São José do Rio Preto
2023

J91d

Juang, Lucas Yudy
Dinâmica topológica em equações diferenciais ordinárias / Lucas Yudy Juang. -- São José do Rio Preto, 2023
69 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Equações diferenciais. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Lucas Yudy Juang

Dinâmica topológica em equações diferenciais ordinárias generalizadas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Orientadora

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
ICMC/USP

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Departamento de Matemática- IGCE/UNESP

São José do Rio Preto
06 de março de 2023

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Long e Yuko, e a minha irmã Yukie, por todo amor, carinho, educação e pelo apoio nas decisões que me trouxeram até este momento, e me tornaram quem eu sou hoje.

Um agradecimento muito especial a minha orientadora, Profª. Drª. Suzete Maria Silva Afonso, a qual eu me sinto honrado de ter sido aluno, pois a Professora sempre foi, e sempre será, uma grande inspiração para mim, agradeço por toda a paciência, conselhos e ensinamentos, que levarei pela vida, e que me ajudaram a superar grandes obstáculos, e me permitiram ter chegado até este momento, com este trabalho, que era um grande sonho meu.

Agradeço aos meus familiares e amigos que me apoiaram em momentos difíceis ao longo desta jornada, dentre eles, gostaria de citar em especial: Minhas tias e primos, Natasha, Vivi, Koji, Guilherme, Rafael, Arianne e Júlia. Além disso, ídolos que me inspiraram a não desistir, em especial, Rina, Yiren, Yunari e Taeyeon.

Ao IBILCE, ao IGCE e à Unesp, agradeço pela oportunidade de cursar Matemática na graduação e na pós-graduação.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão da bolsa de pesquisa, sob o processo nº 132278/2020-0.

"Educação não transforma o mundo.
Educação muda as pessoas.
Pessoas transformam o mundo".
Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho é dedicado ao estudo de sistemas semidinâmicos gerados por equações diferenciais ordinárias (EDOs) generalizadas. Mostramos a existência de um sistema semidinâmico local e a existência de um sistema semidinâmico impulsivo associado a uma classe de EDOs generalizadas. Para tanto, parte da teoria básica desse tipo de equações é explorada. Como consequência, apresentamos uma versão do Princípio de Invariância de LaSalle para sistemas semidinâmicos impulsivos correspondentes a uma EDO generalizada impulsiva, além de algumas propriedades recursivas, tais como minimalidade e recorrência.

Palavras-chave: Equação diferencial ordinária generalizada. Sistema semidinâmico local. Sistema semidinâmico impulsivo. Princípio de Invariância de LaSalle. Propriedades recursivas.

ABSTRACT

This work is dedicated to the study of semidynamical systems generated by generalized ordinary differential equations (ODEs). We show the existence of a local semidynamical system and the existence of an associated impulsive semidynamical system associated with a class of generalized ODEs. For that, part of the basic theory of this type of equations is explored. As a consequence, we present a version of the LaSalle Invariance Principle for impulsive semidynamic systems corresponding to an impulsive generalized ODE, besides getting some recursive properties, such as minimality and recurrence.

Keywords: Generalized ordinary differential equation. Local semidynamical system. Impulsive semidynamical system. LaSalle's Invariance Principle . Recursive properties.

Sumário

1 Introdução

A teoria das equações diferenciais ordinárias (EDOs) generalizadas teve origem na República Tcheca, mais especificamente no artigo intitulado "*Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*" [26], de autoria de Jaroslav Kurzweil, publicado em 1957, no qual o referido matemático tcheco expressa ter como objetivo a generalização de alguns resultados sobre dependência contínua com respeito a condições iniciais de soluções de EDOs clássicas, para obtenção de métodos da média. O conceito de EDO generalizada está fortemente relacionado ao conceito de integral não absoluta de Kurzweil, conforme se pode constatar nas referências [26–29].

O interesse em trabalhar com EDOs generalizadas reside no fato de que diferentes tipos de equações diferenciais podem ser tratadas via teoria dessas equações por meio de uma correspondência biunívoca. É o caso, por exemplo, das EDOs clássicas, equações diferenciais impulsivas e equações diferenciais em medida, como mencionado no livro [35] de Štefan Schwabik. Recentemente, em [20], Federson e Táboas provaram que equações diferenciais funcionais (EDFs) com retardamento podem ser relacionadas com EDOs generalizadas. Ainda, em [17], Federson e Schwabik estabeleceram uma correspondência entre EDFs com retardamento e impulsos pré-fixados e uma classe de EDOs generalizadas. Em suma, ao longo dos anos, correspondências entre diferentes tipos de equações diferenciais e EDOs generalizadas têm sido obtidas, permitindo a obtenção de novos e melhores resultados (no sentido de 'mais gerais') para as teorias das equações que podem ser relacionadas às EDOs generalizadas e fazendo com que essas equações se tornem cada vez mais objeto de estudo - veja [12] e as referências nela citadas.

Este trabalho, que teve como principal referência o artigo "*Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for differential systems with impulses at variable times*", de Afonso *et al* [1], aborda a existência de um sistema semidinâmico local associado a um problema de valor inicial para uma classe de EDOs generalizadas. Sob certas condições de perturbação, seguindo os passos dos autores de [1], mostramos que tal classe de EDOs generalizadas também gera um semifluxo descontínuo, denominado *sistema semidinâmico impulsivo.*

A teoria sobre sistemas semidinâmicos impulsivos surgiu na década de 70 com os trabalhos de V. Rozko, [32] e [33]. Em 1990, o matemático Saroop Kaul começou a construir a teoria dos sistemas semidinâmicos com impulsos em tempos variáveis. Em seu trabalho "*On impulsive semidynamical systems*" [22], o processo de evolução de um sistema semidinâmico com impulsos e algumas propriedades do conjunto limite positivo foram apresentados. A partir desse momento, outros trabalhos na teoria de sistemas semidinâmicos impulsivos em tempo variável foram publicados por Kaul, como propriedades recursivas (recorrência, quase-recorrência, órbitas periódicas e quase-periódicas) em [23], estabilidade de Lyapunov em [24] e teoria de estabilidade assintótica em [21]. Mais tarde,

K. Ciesielski [14] apresentou condições para a função que caracteriza o primeiro momento de tempo positivo para o qual uma órbita encontra a superfície de impulso ser contínua. Ciesielski também estabeleceu teoremas importantes concernentes à estabilidade em [16].

Desde 2007, a teoria de sistemas semidinâmicos impulsivos passou a ser extensivamente estudada e desenvolvida pelo matemático brasileiro Everaldo de Mello Bonotto e por seus colaboradores. Seus trabalhos [2], [7], [8], [9], [10], [11], [13], entre outros, apresentam valiosas contribuições para a teoria.

Neste trabalho, a partir da construção de um sistema semidinâmico impulsivo para uma classe de EDOs generalizadas com impulsos, apresentamos uma versão do Princípio de Invariância de LaSalle para essas equações, obtida em [1]. Ademais, devido à importância desse resultado na teoria de estabilidade de equações diferenciais, como aplicação, exibimos um resultado similar para EDOs (clássicas) autônomas impulsivas. Também estudamos propriedades topológicas recursivas relacionadas a tal sistema, como minimalidade e recorrência, tendo como base a referência [12].

A abordagem das EDOs generalizadas sujeitas a impulsos em tempos variáveis feita neste trabalho está em consonância com os conceitos e enfoques de S. K. Kaul em [24] e de K. Ciesielski em [15, 16] . No entanto, difere daquela de V. Lakshmikantham *et al.* em [30] e de A. M. Samoilenko e N. A. Perestyuk em [34].

Em [30], [34], o estudo das propriedades de equações diferenciais com impulsos variáveis é de certa forma reduzido ao caso pré-fixado pela imposição de hipóteses adicionais, como um número finito de vezes em que as superfícies de impulso são alcançadas por alguma curva integral (geralmente, não mais de uma vez). Em contrapartida, seguindo [1], aqui construímos um operador de impulso atuando em uma superfície fechada M satisfazendo uma certa condição, a qual chamamos de (C_M).

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- No **Capítulo 2**, Seções 2.2 e 2.3, apresentamos parte da teoria básica das EDOs generalizadas, fundamental para a compreensão dos capítulos subsequentes. Como o conceito de EDO generalizada está baseado no conceito de integral de Kurzweil, uma breve exposição sobre essa teoria de integração é feita na Seção 2.1.

- No **Capítulo 3**, Seção 3.2, mostramos que um problema de valor inicial para uma classe de EDOs generalizadas gera um sistema semidinâmico local. Propriedades importantes dessa classe de EDOs generalizadas são apresentadas na Seção 3.1.

- No **Capítulo 4**, consideramos um problema de valor inicial para uma EDO generalizada sujeita a perturbações. Na Seção 4.1, introduzimos o conceito de um sistema semidinâmico impulsivo e, seguindo [1], mostramos que um sistema semidinâmico impulsivo pode ser construído para tal problema. Na Seção 4.2, vemos que a existência desse sistema permite a obtenção de uma versão do Princípio de Invariância de LaSalle para EDOs generalizadas e, como consequência, permite também a obtenção de um resultado análogo para EDOs autônomas impulsivas. Para finalizar, na Seção 4.3, propriedades recursivas para o sistema semidinâmico impulsivo construído na Seção 4.1 são exploradas.

2 Teoria básica das equações diferenciais ordinárias generalizadas

Buscando generalizar certos resultados sobre dependência contínua de soluções de EDOs com respeito aos dados iniciais, em 1957, J. Kurzweil [26] introduziu a noção de equações diferenciais ordinárias (EDOs) generalizadas para funções a valores em espaços euclidianos e de Banach.

A correspondência entre EDOs generalizadas e EDOs clássicas é simples. Sabe-se que a EDO clássica de primeira ordem

$$\dot{x} = f\left(x, t\right), \tag{2.1}$$

onde $\dot{x} = dx/dt$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, é equivalente à "equação integral"

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)d\tau, \qquad t \geqslant t_0, \tag{2.2}$$

quando a integral existe em algum sentido. Sabe-se, também, que se a integral em (2.2) for no sentido de Riemann, Perron ou Henstock-Kurzweil, por exemplo, então ela poderá ser aproximada por uma soma da forma

$$\sum_{i=1}^{m} f(x(\tau_i), \tau_i)[s_i - s_{i-1}]$$

onde $t_0 = s_0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_m = t$ é uma partição do intervalo $[t_0, t]$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, $\tau_i \in [s_{i-1}, s_i]$.

Se definirmos

$$F(x, s) = \int_{s_0}^{s} f(x, \sigma)d\sigma, \qquad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

então a integral em (2.2) poderá ser aproximada por

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(x(\tau_i), \sigma)d\sigma = \sum_{i=1}^{m} \left[F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})\right]. \tag{2.3}$$

Neste caso, o lado direito de (2.3) aproxima-se da integral não-absoluta de Kurzweil a qual, quando considerada em (2.2), dá origem a uma equação diferencial do tipo (2.1), porém num sentido mais amplo. Tal equação diferencial é conhecida como EDO generalizada ou equação de Kurzweil - veja [26] e [35].

Neste capítulo, de caráter preliminar, exibiremos algumas definições básicas e apresentaremos alguns resultados sobre EDOs generalizadas que serão referenciados ao longo do trabalho.

Dividimos este capítulo em três seções. A primeira seção será dedicada a uma introdução breve sobre a integral de Kurzweil. Na segunda seção, estudaremos as EDOs generalizadas, as quais são definidas a partir da integral de Kurzweil. E a terceira seção destinar-se-á aos resultados de dependência contínua das soluções com respeito aos parâmetros iniciais para as EDOs generalizadas.

Omitiremos a maior parte das demontrações, pois o objetivo deste capítulo é fornecer uma base teórica '*suficiente*' sobre EDOs generalizadas para os capítulos subsequentes. Além disso, a existência de uma literatura abrangente sobre as equações de Kurzweil nos permite fazer tal omissão, referenciando os resultados que aqui se encontram presentes.

As principais referências para este capítulo são [1], [12], [17] e [35].

2.1 A Integral de Kurzweil

Em 1957, Jaroslav Kurzweil obteve um novo conceito de integração baseado nas ideias de Riemann, que generaliza as integrais de Riemann, Lebesgue e Perron. A integral de Kurzweil, K-integral ou integral de Perron Generalizada, como é conhecida, é definida para funções de duas variáveis e surgiu com o intuito de solucionar algumas dificuldades encontradas na teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, envolvendo, por exemplo, funções oscilatórias, descontínuas ou funções que não são de variação limitada. Em 1961, Ralph Henstock desenvolveu o mesmo conceito que Kurzweil, mas para funções de uma variável. Como a integral de Kurzweil engloba a de Henstock, encontramos em algumas referências o nome de integral de Henstock-Kurzweil ou HK-integral para o conceito que apresentaremos abaixo, uma vez que eles trabalharam independentemente um do outro, numa época de divulgação científica restrita. Neste trabalho, por seguirmos as notações de Kurzweil, manteremos somente o seu nome, por simplicidade. Mas, deixamos aqui registrado o merecido mérito de Henstock na história dessa integral.

Para começar, vamos considerar o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Definição 2.1. Dado um par (τ, J), diremos que J é um *intervalo marcado* e τ é a *marca* deste intervalo se $\tau \in \mathbb{R}$ for um ponto e $J \subset \mathbb{R}$ for um intervalo compacto. Uma coleção finita $\Delta = \{(\tau_j, J_j)\colon\ j = 1, 2, \ldots, k\}$ de intervalos marcados será dita um *sistema* em $[a, b]$, se $\tau_j \in J_j \subseteq [a, b]$ para todo $j = 1, 2, \ldots, k$ e $\operatorname{Int} J_i \cap \operatorname{Int} J_j = \varnothing$ para $j \neq i$, onde $\operatorname{Int} J$ denota o interior de um intervalo J.

Diremos que um sistema $\Delta = \{(\tau_j, J_j)\colon\ j = 1, 2, \ldots, k\}$ é uma *partição* de $[a, b]$ se

$$\bigcup_{j=1}^{k} J_j = [a, b].$$

Definição 2.2. Um *calibre* em $[a, b]$ é qualquer função $\delta\colon [a, b] \to (0, \infty)$.

Definição 2.3. Dado um calibre δ em $[a, b]$, diremos que um intervalo marcado (τ, J) com $\tau \in [a, b]$ é *δ-fino* se $J \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$.

Definição 2.4. Um *sistema* (em particular, uma *partição*) $\Delta = \{(\tau_j, J_j)\colon\ j = 1, 2, \ldots, k\}$ será dito *δ-fino* se o intervalo marcado (τ_j, J_j) for δ-fino para todo $j = 1, 2, \ldots, k$.

Observação 2.5. Conforme a Definição 2.4, dado um calibre δ em $[a, b]$, a partição $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ é δ-fina se

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = b, \quad \alpha_{j-1} \leqslant \tau_j \leqslant \alpha_j,\ j = 1, \ldots, k$$

e
$$[\alpha_{j-1},\alpha_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)],\ j=1,\dots,k.$$

Observação 2.6. Nem toda marca tornará uma partição δ-fina. Por exemplo, se considerarmos a partição $D=\left\{\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$ de $[0,1]$ e o calibre $\delta\colon[0,1]\to[0,1]$ dado por:
$$\delta(t)=\begin{cases} t, & 0<t\leqslant 1\\ \frac{1}{3}, & t=0,\end{cases}$$
veremos que a partição $D'=\left\{\left(\frac{1}{10},\left[0,\frac{1}{3}\right]\right),\left(\frac{1}{2},\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\right),\left(1,\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\right\}$ não é δ-fina, pois
$$\left[0,\frac{1}{3}\right]\not\subseteq\left[\frac{1}{10}-\delta\left(\frac{1}{10}\right),\frac{1}{10}+\delta\left(\frac{1}{10}\right)\right]=\left[0,\frac{1}{5}\right].$$

Sejam $(X,\|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $U\colon[a,b]\times[a,b]\to X$ uma função de duas variáveis $\tau,t\in[a,b]$. Usaremos a notação
$$S(U,D)=\sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})]$$
para denotar a soma de Riemman correspondente à função U e à partição marcada D.

O primeiro resultado a ser apresentado afirma que, para cada calibre δ de $[a,b]$, sempre é possível obter uma partição δ-fina de $[a,b]$. Esse resultado é conhecido como Lema de Cousin e é fundamental para a definição da integral de Kurzweil.

Lema 2.7 (Lema de Cousin - [12], Lema 2.2)**.** *Dado um calibre δ em $[a,b]$, existe uma partição δ-fina $D=\{\alpha_0,\tau_1,\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\tau_k,\alpha_k\}$ de $[a,b]$.*

Definição 2.8. Diremos que $U\colon[a,b]\times[a,b]\to X$ é uma função *Kurzweil integrável sobre* o intervalo $[a,b]$ se existir um único elemento $I\in X$ tal que, para todo $\epsilon>0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que
$$\|S(U,D)-I\|=\|\sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})]-I\|<\epsilon$$
para toda partição δ-fina
$$D=\{(\tau_j,[\alpha_{j-1},\alpha_j])\colon\ j=1,\dots,k\}=\{\alpha_0,\tau_1,\alpha_1,\dots,\tau_k,\alpha_k\}$$
de $[a,b]$.

Na definição acima, chamaremos I de *integral de Kurzweil* de U sobre o intervalo $[a,b]$ e a denotaremos por $\int_a^b DU(\tau,t)$.

Observação 2.9. Se $\int_a^b DU(\tau,t)$ existir, então definiremos $\int_a^b DU(\tau,t)=-\int_b^a DU(\tau,t)$ e quando $a=b$, definiremos $\int_a^b DU(\tau,t)=0$.

Observação 2.10. Seja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função real e defina a função $U\colon[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ por $U(\tau,t)=f(\tau)t$. Dada uma partição $D=\{(\tau_j,[\alpha_{j-1},\alpha_j])\colon\ j=1,...,k\}$ de $[a,b]$, a soma
$$S(U,D)=\sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})]=\sum_{j=1}^{k}f(\tau_j)(\alpha_j-\alpha_{j-1})$$
representa a clássica soma de Riemann da função f.

Note que, se tomarmos na Definição 2.8 a função calibre como sendo uma constante δ proveniente do $\epsilon>0$ dado, concluiremos que toda função Riemann integrável é Kurzweil integrável, porém não vale a recíproca.

Para ilustrar a generalidade do conceito apresentado na Definição 2.8, mencionamos que a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & x \in (0,1], \\ 0, \quad x = 0, \end{cases}$$

é Kurzweil integrável, mas não é Riemann, nem Lebesgue integrável (veja [25, Exemplo 2.31]).

Denotaremos por $\mathcal{K}([a,b],X)$ o conjunto de todas as funções $U\colon [a,b]\times[a,b] \mapsto X$ que são integráveis no intervalo $[a,b]$, no sentido de Kurzweil.

O próximo resultado trata da integrabilidade em subintervalos de $[a,b]$, a qual também é uma propriedade das integrais de Lebesgue e de Riemann.

Teorema 2.11. *Se $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$, então para todo $[c,d] \subset [a,b]$ teremos $U \in \mathcal{K}([c,d],X)$.*

Outras propriedades das integrais de Lebesgue e de Riemann também valem para a integral de Kurzweil, como as propriedades usuais de aditividade e linearidade. Indicamos a referência [12] para a verificação desses fatos - veja os Teoremas 2.3 e 2.6.

O resultado que enunciaremos abaixo é conhecido como Lema de Saks-Henstock e é devido ao polonês Stanislaw Saks e ao inglês Ralph Henstock, ambos matemáticos. Grosso modo, o Lema de Saks-Henstock garante que o mesmo "grau" de aproximação da soma de Riemann de U para a sua integral vale para qualquer subpartição de $[a,b]$.

Lema 2.12 (Saks-Henstock - [12], Lema 2.7)**.** *Seja $U\colon [a,b]\times[a,b] \to X$ integrável sobre $[a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, seja δ uma função calibre em $[a,b]$ tal que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \epsilon \tag{2.4}$$

para toda partição δ-fina $D = \{(\tau_j,[\alpha_{j-1},\alpha_j])\colon\ j = 1,2,\ldots,k\}$ de $[a,b]$. Se

$$a \leqslant \beta_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_m \leqslant \xi_m \leqslant \gamma_m \leqslant b$$

representar um sistema δ-fino $\{(\xi_j,[\beta_j,\gamma_j])\colon j = 1,2,\ldots,m\}$, isto é,

$$\xi_j \in [\beta_j,\gamma_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)), \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

então teremos

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \left[U(\xi_j,\beta_j) - U(\xi_j,\gamma_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau,t) \right] \right\| < \epsilon. \tag{2.5}$$

O próximo resultado é uma versão da extensão de Cauchy da integral generalizada de Perron. Para maiores detalhes, veja [12, p. 62].

Teorema 2.13 ([12], Teorema 2.9)**.** *Seja $U\colon [a,b]\times[a,b] \to X$ uma função tal que, para todo $c \in [a,b)$, U é integrável em $[a,c]$ e o limite*

$$\lim_{c\to b-} \left[\int_a^c DU(\tau,t) - U(b,c) + U(b,b) \right] = I \in X$$

existe. Então, a função U é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b DU(\tau,t) = I.$$

Analogamente, se a função U for integrável em $[c,b]$ para todo $c \in (a,b]$ e o limite

$$\lim_{c\to a+}\left[\int_c^b DU(\tau,t) + U(a,c) - U(a,a)\right] = I \in X$$

existir, então a função U será integrável sobre $[a,b]$ e

$$\int_a^b DU(\tau,t) = I.$$

Se $U\colon [a,b]\times[a,b] \to X$ for integrável sobre $[a,b]$, a função definida por

$$s \in [a,b] \longmapsto \int_a^s DU(\tau,t) \in X,$$

ou seja, a *integral indefinida de U*, poderá não ser contínua, conforme poderemos contatar pelo próximo lema.

Lema 2.14 ([12], Teorema 2.12)**.** *Sejam $U\colon [a,b]\times[a,b]\to X$ uma função integrável em $[a,b]$ e $c \in [a,b]$. Então*

$$\lim_{s\to c}\left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)\right] = \int_a^c DU(\tau,t). \tag{2.6}$$

Cabe ressaltar que, nas condições enunciadas acima, também vale o seguinte resultado análogo

$$\lim_{s\to c}\left[\int_s^b DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)\right] = \int_c^b DU(\tau,t).$$

Para a integral de Kurzweil, também temos um teorema de mudança de variável, o qual enunciaremos abaixo. Um caso particular desse resultado pode ser encontrado em [35, Teorema 1.18], para funções a valores em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.15 (Mudança de variável - [12], Teorema 2.18)**.** *Suponhamos que $-\infty < c < d < +\infty$ e que $\varphi\colon [c,d]\to\mathbb{R}$ seja uma função contínua estritamente monótona em $[c,d]$. Seja $U\colon [\varphi(c),\varphi(d)]\times[\varphi(c),\varphi(d)]\to X$ uma função dada. Se uma das integrais*

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau,t), \quad \int_c^d DU(\varphi(\sigma),\varphi(s))$$

existir, então a outra também existirá e teremos a igualdade

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} DU(\tau,t) = \int_c^d DU(\varphi(\sigma),\varphi(s)).$$

A demonstração do Teorema 2.15 segue de forma similar à demonstração do Teorema 1.18 encontrado em [35], conforme observado em [12, p. 66].

No Capítulo 1 de [35], há uma descrição detalhada da integral de Kurzweil para o caso em que $X = \mathbb{R}^n$ e de suas propriedades. No Capítulo 2 de [12], os autores apresentam a teoria da integral de Kurzweil considerando X um espaço de Banach qualquer. Ao leitor interessado em buscar mais detalhes dessa teoria, recomendamos as duas referências mencionadas. Encerramos a nossa exposição sobre ela aqui, pois exibimos todos os conceitos e resultados suficientes para a compreensão dos próximos tópicos.

2.2 Noções básicas de EDOs generalizadas

Vamos considerar o conjunto $\Omega = \mathcal{O} \times [0, \infty)$, onde $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto de X, e $G\colon \Omega \to X$ uma função. Lembramos ao leitor que estamos considerando X como sendo um espaço de Banach, dotado de uma norma $\|\cdot\|$.

Definição 2.16. Uma função $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ será dita uma *solução* da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x, t) \tag{2.7}$$

no intervalo $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$ se $(x(t), t) \in \Omega$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e se a igualdade

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DG(x(\tau), t) \tag{2.8}$$

for válida, para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

A integral do lado direito da igualdade (2.8) deve ser entendida como sendo a integral de Kurzweil definida anteriormente (veja a Definição 2.8).

Observação 2.17. Considerando a notação da Definição 2.16, seja $U(\tau, t) = G(x(\tau), t)$. Note que, na definição da integral $\int_a^b DG(x(\tau), t)$ (Definição 2.8), existem somente diferenças da forma

$$U(\tau_j, s_j) - U(\tau_j, s_{j-1}) = G(x(\tau_j), s_j) - G(x(\tau_j), s_{j-1}),$$

onde $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j])\colon j = 1, 2, \ldots, k\}$ é uma partição marcada δ-fina do intervalo $[a, b]$. Sendo assim, se adicionarmos a $G(x, t)$ uma função variando somente em x, as soluções de (2.7) não mudarão. Com efeito, dada uma função $\Phi\colon X \to X$, temos

$$\sum [(G(x(\tau_j), s_j) - \Phi(x(\tau_j))) - (G(x(\tau_j), s_{j-1}) - \Phi(x(\tau_j)))] =$$
$$= \sum [G(x(\tau_j), s_j) - G(x(\tau_j), s_{j-1})]$$

Assim,

$$\int_a^b D[G(x(\tau), t) - \Phi(x(\tau))] = \int_a^b DG(x(\tau), t).$$

Logo, se $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ for solução da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[G(x, t) + \Phi(x)], \tag{2.9}$$

então x será solução da EDO generalizada (2.7) no intervalo $[\alpha, \beta]$. E a afirmação recíproca também se verifica. Em particular, subtraindo $G(x, 0)$ de $G(x, t)$, obtemos uma *representação normalizada* G_1 de G satisfazendo $G_1(x, 0) = 0$, para todo $x \in O$.

Observação 2.18. É importante mencionar que a notação presente em (2.7) é apenas simbólica. A letra D indica que (2.7) é uma equação diferencial generalizada. Além disso, o símbolo $\frac{dx}{d\tau}$ na igualdade (2.7) não significa necessariamente que a solução de uma EDO generalizada tenha uma derivada. Por exemplo, se $b\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que não possui derivada em ponto algum do intervalo $[0, 1]$, definindo $G(\tau, t) = b(t)$, temos

$$\int_{s_1}^{s_2} DG(x(\tau), t) = \int_{s_1}^{s_2} Db(t) = b(s_2) - b(s_1)$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [0, 1]$, pela definição da integral de Kurzweil. Isso significa que a função $x\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $x(s) = b(s)$ para $s \in [0, 1]$ é solução da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = DG(x, t) = Db(t)$.

Dada uma condição inicial $(z_0, t_0) \in \Omega$, a seguinte definição de solução de um problema de valor inicial para a equação (2.7) será usada.

Definição 2.19. Uma função $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ será uma solução da EDO generalizada (2.7) com condição inicial $x(t_0) = z_0$ no intervalo $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$, se $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $(x(t), t) \in \Omega$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e se a igualdade

$$x(v) - z_0 = \int_{t_0}^{v} DG(x(\tau), t)$$

for satisfeita para todo $v \in [\alpha, \beta]$.

A seguir, introduziremos uma classe especial de funções $G\colon \Omega \to X$ para a qual é possível obter informações mais específicas sobre as soluções da EDO generalizada (2.7).

No que segue, h denotará uma função real não decrescente definida em $[0, \infty)$.

Definição 2.20. Diremos que uma função $G\colon \Omega \to X$ pertence à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$ se

$$\|G(x, t_2) - G(x, t_1)\| \leqslant |h(t_2) - h(t_1)| \tag{2.10}$$

para quaisquer $(x, t_2), (x, t_1) \in \Omega$ e

$$\|G(x, t_2) - G(x, t_1) - G(y, t_2) + G(y, t_1)\| \leqslant \|x - y\| |h(t_2) - h(t_1)| \tag{2.11}$$

para quaisquer $(x, t_2), (x, t_1), (y, t_2), (y, t_1) \in \Omega$.

Nos capítulos posteriores, consideraremos uma subclasse de $\mathcal{F}(\Omega, h)$ que será definida abaixo.

Definição 2.21. Diremos que uma função $G\colon \Omega \to X$ pertence à classe $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ se $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, em que $h\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não decrescente e $G(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathcal{O}$.

As definições seguintes serão utilizadas ao longo deste capítulo.

Definição 2.22. Diremos que $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é *função escada finita* se existir uma partição finita $a = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_m = b$ tal que, em cada intervalo aberto $(\beta_{i-1}, \beta_i), i = 1, 2, \ldots, m$, f é identicamente igual a uma constante $c_i \in \mathbb{R}$.

Definição 2.23. Diremos que $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma *função regrada* no intervalo $[a, b]$, se os limites laterais $f(s-) = \lim_{t \to s^-} f(t)$ e $f(u+) = \lim_{t \to u^+} f(t)$ existirem para todo $s \in (a, b]$ e $u \in [a, b)$, respectivamente.

Observação 2.24. Toda função regrada em $[a, b]$ é limitada neste intervalo e é o limite uniforme de funções escada finitas. Ademais, toda função de variação limitada em $[a, b]$ é regrada em $[a, b]$. Tais fatos podem ser comprovados em [12, p. 3–5].

O próximo resultado implicará que as soluções de (2.7) são de variação limitada se G satisfizer a condição (2.10).

Lema 2.25 ([12], Lema 4.5). *Suponha que $G\colon \Omega \to X$ satisfaça a condição (2.10). Se $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$ e $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ for tal que $(x(s), s) \in \Omega$ para todo $s \in [\alpha, \beta]$ e $\int_\alpha^\beta DG(x(\tau), t)$ existir, então*

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DG(x(\tau), t) \right\| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)|, \tag{2.12}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

Lema 2.26 ([12], Lema 4.9)**.** *Suponha que $G\colon \Omega \to X$ satisfaça a condição (2.10). Se $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$ e $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ for uma solução de (2.7), então valerá a desigualdade*

$$\|x(s_1) - x(s_2)\| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)|, \tag{2.13}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

Demonstração. Se $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ é solução da EDO generalizada (2.7), então

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DG(x(\tau), t), \tag{2.14}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

Como $G\colon \Omega \to X$ satisfaz a condição (2.10), segue pelo Lema 2.25 que

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DG(x(\tau), t) \right\| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)|, \tag{2.15}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

Logo, por (2.14) e (2.15), concluímos que

$$\|x(s_2) - x(s_1)\| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)|,$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$, completando a prova. □

Denotaremos a variação de uma função $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ por $\operatorname{var}_\alpha^\beta x$ e o espaço de Banach das funções de variação limitada $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ por $BV([\alpha, \beta], X)$ com a norma usual da variação dada por

$$\|x\|_{BV} = \|x(\alpha)\| + \operatorname{var}_\alpha^\beta x.$$

O Lema 2.26 implica a seguinte propriedade das soluções de (2.7), cuja prova segue da relação (2.13) e do fato de h ser não decrescente.

Corolário 2.27 ([35], Corolário 3.11)**.** *Suponha que $G\colon \Omega \to X$ satisfaça a condição (2.10). Se $[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$ e $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ for uma solução de (2.7), então x será de variação limitada em $[\alpha, \beta]$ e*

$$\operatorname{var}_\alpha^\beta x \leqslant h(\beta) - h(\alpha) < \infty.$$

Além disso, todo ponto em $[\alpha, \beta]$ no qual a função h é contínua também é um ponto de continuidade da solução $x\colon [\alpha, \beta] \to X$. Em particular, se $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ e $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ é uma solução de (2.7), então x é contínua.

O próximo resultado descreve a relação entre as descontinuidades de uma solução da EDO generalizada (2.7) e as descontinuidades da função G do lado direito de (2.7).

Lema 2.28 ([12], Lema 4.10)**.** *Se $x\colon [\alpha, \beta] \to X$ for uma solução de* (2.7) *e $G\colon \Omega \to X$ satisfizer a condição* (2.10)*, então*

$$x(\sigma+) - x(\sigma) = \lim_{s \to \sigma+} x(s) - x(\sigma) = G(x(\sigma), \sigma+) - G(x(\sigma), \sigma)$$

para $\sigma \in [\alpha, \beta)$ e

$$x(\sigma) - x(\sigma-) = x(\sigma) - \lim_{s \to \sigma-} x(s) = G(x(\sigma), \sigma) - G(x(\sigma), \sigma-)$$

para $\sigma \in (\alpha, \beta]$, onde

$$G(x, \sigma+) = \lim_{s \to \sigma+} G(x, s), \quad \textit{para } \sigma \in [\alpha, \beta)$$

e

$$G(x, \sigma-) = \lim_{s \to \sigma-} G(x, s), \quad \textit{para } \sigma \in (\alpha, \beta].$$

O próximo resultado, enunciado inicialmente em [1], garante a existência da integral $\int_\alpha^\beta DG(x(\tau),t)$ quando x é uma função regrada. Cabe destacar que sua demonstração não é análoga à prova apresentada em [35, Teorema 3.14], para funções a valores em $\mathbb{R}^n$, onde foi usado o conceito de equi-integrabilidade e um teorema de convergência para funções equi-integráveis. Para provar o Teorema 2.29, usa-se fortemente o fato da função x ser o limite uniforme de funções escada finitas. Em [35], por outro lado, usou-se convergência pontual.

Teorema 2.29 ([1], Proposição 2.13)**.** *Seja $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$. Se $x\colon [\alpha,\beta] \to X$, com $[\alpha,\beta] \in [0,\infty)$, for o limite uniforme de uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções escada finitas $x_k\colon [\alpha,\beta] \to X$ tais que $(x(s),s) \in \Omega$ e $(x_k(s),s) \in \Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $s \in [\alpha,\beta]$, então a integral $\int_\alpha^\beta DG(x(\tau),t)$ existirá e a igualdade*

$$\int_\alpha^\beta DG(x(\tau),t) = \lim_{k\to\infty} \int_\alpha^\beta DG(x_k(\tau),t)$$

será válida.

Ao leitor interessado em verificar uma prova mais detalhada do Teorema 2.29, indicamos a referência [12, Teorema 4.7].

O corolário abaixo é uma generalização do Corolário 3.16 encontrado em [35].

Corolário 2.30 ([12], Corolário 4.8)**.** *Se $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$ e $x\colon [\alpha,\beta] \to X$, $[\alpha,\beta] \subset [0,\infty)$, for uma função regrada (em particular, uma função de variação limitada) em $[\alpha,\beta]$ tal que $(x(s),s) \in \Omega$ para todo $s \in [\alpha,\beta]$, então a integral*

$$\int_\alpha^\beta DG(x(\tau),t)$$

existirá.

Demonstração. Como toda função regrada é o limite uniforme de funções escada finitas (veja a Observação 2.24), então todas as hipóteses do Teorema 2.29 estão satisfeitas e o resultado segue. □

A seguir, vamos considerar a EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x,t), \tag{2.16}$$

onde $G\colon \Omega \to X$ pertence à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$ descrita anteriormente e h é uma função não decrescente e contínua à esquerda definida em $[0,\infty)$. Nessas condições, uma solução de (2.16) é uma função de variação limitada (veja o Corolário 2.27) que, pelo Lema 2.26, também é contínua à esquerda, e pelo Lema 2.28 tem descontinuidades de primeira espécie. Dessa forma, se para algum $t_0 \in [0,\infty)$, o valor da solução x de (2.16) for $x(t_0) = \tilde{x}$, então o limite à direita no ponto t_0 satisfará

$$x(t_0+) = x(t_0) + G(x(t_0), t_0+) - G(x(t_0), t_0) = \tilde{x} + G(\tilde{x}, t_0+) - G(\tilde{x}, t_0).$$

Como estamos considerando a possibilidade de (2.16) admitir solução descontínua, pode acontecer o fato de que, para algum $\tilde{x} \in \mathcal{O}$, isto é, para algum $(\tilde{x}, t_0) \in \Omega$, o valor

$$\tilde{x}+ = \tilde{x} + G(\tilde{x}, t_0+) - G(\tilde{x}, t_0)$$

não pertença a O. Assim, para provar o teorema de existência local de uma solução de (2.16), satisfazendo a condição inicial $x(t_0) = \tilde{x}$, foi preciso fazer a seguinte hipótese:

$$\tilde{x}+ = \tilde{x} + G(\tilde{x}, t_0+) - G(\tilde{x}, t_0) \in O,$$

conforme podemos observar no enunciado abaixo.

Teorema 2.31 ([17], Teorema 2.15). *Seja $G\colon \Omega \to X$ uma função pertencente à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$. Então, para todo $(\tilde{x}, t_0) \in \Omega$ satisfazendo*

$$\tilde{x}+ = \tilde{x} + G(\tilde{x}, t_0-) - G(\tilde{x}, t_0) \in O,$$

teremos $(\tilde{x}+, t_0) \in \Omega$ e existirá um $\Delta > 0$ tal que, no intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$, existirá uma única solução $x\colon [t_0, t_0 + \Delta] \to X$ da EDO generalizada (2.16) satisfazendo $x(t_0) = \tilde{x}$.

Uma prova detalhada do Teorema 2.31 acima pode ser encontrada em [12, Teorema 5.1].

Para finalizar esta seção, veremos o conceito de solução maximal de um problema de valor inicial para EDOs generalizadas e um resultado a respeito desse conceito, que será utilizado no próximo capítulo.

Definição 2.32. Diremos que $x\colon [t_0,\, t_0 + b) \to X$ é uma solução maximal de (2.16), com $x(t_0) = u \in \mathcal{O}$, se x for uma solução de (2.16) em todo intervalo $[t_0,\, t_0 + \beta]$, $\beta < b$, e x não puder ser estendida ao intervalo $[t_0,\, t_0 + b]$. Neste caso, usamos as notações: $b = \omega(u,\, G) = \omega$.

Proposição 2.33 ([12], Corolário 5.15). *Suponha que $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, $h\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua à esquerda e não-decrescente, e $\Omega = \Omega_G$, com*

$$\Omega_G = \Big\{(x, t) \in \Omega\colon\ x + G(x, t^+) - G(x, t) \in O\Big\}. \tag{2.17}$$

Tome $(u, t_0) \in \Omega$ e seja $x\colon [t_0, \omega) \to X$ a solução maximal da EDO generalizada (2.16) com condição inicial $x(t_0) = u$ e $y = \lim\limits_{t \to \omega^-} x(t)$. Se $\omega < \infty$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) o limite $\lim\limits_{t \to \omega^-} x(t)$ existe;

(ii) $(y, \omega) \in \partial\Omega$ e $\lim\limits_{t \to \omega^-} (x(t), t) = (y, \omega)$.

2.3 Dependência contínua para EDOs generalizadas

Nesta seção, apresentaremos resultados sobre dependência contínua de soluções de EDOs generalizadas com respeito aos dados iniciais, extraídos de [1] e [35], que serão importantes para os capítulos subsequentes.

No que segue, consideraremos $\Omega = O \times [c, d]$, com $[c, d] \subset [0, \infty)$ e $h\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente e contínua à esquerda em $[0, \infty)$. Além disso, suporemos que $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência que representa os pontos de descontinuidade de h, tal que

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots,$$

com $t_k \xrightarrow{k \to \infty} \infty$.

Denotaremos por $G([c,\, d],\, X)$ o espaço normado das funções regradas definidas em $[c,\, d]$ tomando valores em X, com a norma da convergência uniforme (ou do supremo): $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{c\leqslant t\leqslant d} \|\psi(t)\|$, $\psi \in G([c,\, d],\, X)$.

Para abordar os próximos resultados, é importante entender como ocorre a convergência de sequências no conjunto de funções $\mathcal{F}(\Omega, h)$. Para isso, observaremos que o conjunto $\mathcal{F}(\Omega, h)$ é um espaço métrico.

Pois bem, como $\Omega = \mathcal{O}\times[0,\infty)$ e $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, podemos considerar uma sequência de conjuntos compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Ω tal $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ e $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, onde $\operatorname{Int} K_{n+1}$ denota o interior de K_{n+1}. Dessa forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos definir a função $\|\cdot\|_n \colon \mathcal{F}(\Omega, h) \times \mathcal{F}(\Omega, h) \to [0, \infty)$ por

$$\|(F, G)\|_n = \sup\{\|F(x, t) - G(x, t)\| \colon (x, t) \in K_n\},$$

para $F, G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$. Então, a pseudo-métrica

$$\rho_n(F, G) = \frac{\|(F, G)\|_n}{1 + \|(F, G)\|_n}, \quad F, G \in \mathcal{F}(\Omega, h),$$

está bem definida. Agora, definindo

$$\rho(F, G) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(F, G), \quad F, G \in \mathcal{F}(\Omega, h), \tag{2.18}$$

temos que $(\mathcal{F}(\Omega, h), \rho)$ é um espaço métrico. Embora a métrica ρ dependa da escolha da sequência $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qualquer outra sequência de conjuntos compactos gera uma métrica equivalente, conforme consta em [36].

Seja $(G_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(\Omega, h)$ uma sequência e seja $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$.

Observação 2.34. A convergência $\rho(G_k, G) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ é equivalente à convergência uniforme

$$\|G_k(x, t) - G(x, t)\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

em cada subconjunto compacto de Ω. Com efeito, para verificar isso, basta considerar a imersão isométrica $\zeta \colon (\mathcal{F}(\Omega, h), \rho) \to (\prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}(K_i,\, h), D)$ dada por

$$\zeta(G) = (G|_{K_1}, G|_{K_2}, G|_{K_3}, \ldots) = (G_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

onde $D(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\|f_i - g_i\|}{1+\|f_i - g_i\|}$, $f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}}, g = (g_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}(K_i,\, h)$, com $\|f_i - g_i\| = \sup_{(x,t)\in K_i} \|f(x, t) - g(x, t)\|$. Observe que, dado um subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_i$.

Lema 2.35 ([1], Lema A.1)**.** *Suponha que* $G_k \colon \Omega \to X$ *pertença à classe* $\mathcal{F}(\Omega,\, h)$, *para* $k = 0, 1, 2, ...$ *e que* $G_k \xrightarrow{k\to\infty} G_0$ *em* $\mathcal{F}(\Omega,\, h)$. *Seja* $\psi_k \in G([c,\, d],\, X)$, $k = 1, 2, \ldots$, *tal que* $\|\psi_k - \psi_0\|_\infty = \sup\limits_{c\leqslant t\leqslant d} \|\psi_k(t) - \psi_0(t)\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$. *Então,*

$$\left\| \int_c^d DG_k(\psi_k(\tau),\, s) - \int_c^d DG_0(\psi_0(\tau),\, s) \right\| \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Demonstração. Primeiramente, note que $\psi_0 \in G([c,\, d],\, X)$, pois $G([c,d],X)$ com a norma do supremo é um espaço de Banach (veja [12, p. 4]) e ψ_0 é, por hipótese, o limite uniforme de funções regradas em $[c,d]$. Pelo Corolário 2.30, todas as integrais $\int_c^d DG_k(\psi_k(\tau),\, s)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ existem.

Tome $\epsilon > 0$. Então, existe uma função escada finita $y\colon [c,d] \to X$ tal que

$$\|y - \psi_0\|_\infty = \sup_{c \leqslant t \leqslant d} \|y(t) - \psi_0(t)\| < \epsilon,$$

uma vez que $\psi_0 \in G([c,\, d],\, X)$ e, portanto, pode ser aproximada uniformemente por uma função escada finita (Observação 2.24).

Como $\|\psi_k - \psi_0\|_\infty \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, existe um inteiro positivo N_0, tal que

$$\|\psi_k - \psi_0\|_\infty < \epsilon,$$

para todo $k > N_0$.

Seja $k > N_0$. Então,

$$\begin{aligned} \left\| \int_c^d DG_k(\psi_k(\tau),\, s) - \int_c^d DG_0(\psi_0(\tau),\, s) \right\| &\leqslant \left\| \int_c^d D[G_k(\psi_k(\tau),\, s) - G_k(\psi_0(\tau),\, s)] \right\| + \\ &+ \left\| \int_c^d D[G_k(\psi_0(\tau),\, s) - G_k(y(\tau),\, s)] \right\| + \left\| \int_c^d D[G_k(y(\tau),\, s) - G_0(y(\tau),\, s)] \right\| + \\ &+ \left\| \int_c^d D[G_0(y(\tau),\, s) - G_0(\psi_0(\tau),\, s)] \right\|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Vamos considerar o primeiro termo do lado direito da desigualdade (2.19).

Seja δ um calibre em $[c,d]$ correspondente ao ϵ da definição da integral $\int_c^d D[G_k(\psi_k(\tau),\, s) - G_k(\psi_0(\tau),\, s)]$ e seja $(\tau_i, [s_{i-1}, s_i])_{1 \leqslant i \leqslant p}$ uma partição marcada δ-fina de $[c,d]$. Temos

$$\begin{aligned} &\left\| \int_c^d D[G_k(\psi_k(\tau),\, s) - G_k(\psi_0(\tau),\, s)] \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_c^d D[G_k(\psi_k(\tau),\, s) - G_k(\psi_0(\tau),\, s)] - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^p [(G_k(\psi_k(\tau_i),\, s_i) - G_k(\psi_k(\tau_i),\, s_{i-1})) - (G_k(\psi_0(\tau_i),\, s_i) - G_k(\psi_0(\tau_i),\, s_{i-1}))] \right\| + \\ &\left\| \sum_{i=1}^p [(G_k(\psi_k(\tau_i),\, s_i) - G_k(\psi_k(\tau_i),\, s_{i-1})) - (G_k(\psi_0(\tau_i),\, s_i) - G_k(\psi_0(\tau_i),\, s_{i-1}))] \right\| \leqslant \\ &< \epsilon + \sum_{i=1}^p \|G_k(\psi_k(\tau_i),\, s_i) - G_k(\psi_k(\tau_i),\, s_{i-1}) - G_k(\psi_0(\tau_i),\, s_i) + G_k(\psi_0(\tau_i),\, s_{i-1})\| \leqslant \\ &\stackrel{(*)}{\leqslant} \epsilon + \sum_{i=1}^p \|\psi_k(\tau_i) - \psi_0(\tau_i)\|\, |h(s_i) - h(s_{i-1})| \leqslant \\ &\leqslant \epsilon + \|\psi_k - \psi_0\|_\infty \sum_{i=1}^p [h(s_i) - h(s_{i-1})] \leqslant \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \epsilon + \epsilon[h(d) - h(c)] = \epsilon(1 + [h(d) - h(c)]), \end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos a desigualdade (2.11) e em $(**)$ usamos o fato de h ser não decrescente. Para os segundo e quarto termos do lado direito de (2.19), podemos mostrar analogamente que

$$\left\| \int_c^d D[G_k(\psi_0(\tau),\, s) - G_k(y(\tau),\, s)] \right\| < \epsilon(1 + [h(d) - h(c)])$$

e

$$\left\| \int_c^d D[G_0(y(\tau),\, s) - G_0(\psi_0(\tau),\, s)] \right\| < \epsilon(1 + [h(d) - h(c)]),$$

ou seja, temos

$$\left\| \int_c^d DG_k(\psi_k(\tau),\, s) - \int_c^d DG_0(\psi_0(\tau),\, s) \right\| <$$

$$< 3\epsilon(1 + [h(d) - h(c)]) + \left\| \int_c^d D[G_k(y(\tau),\, s) - G_0(y(\tau),\, s)] \right\|. \tag{2.20}$$

Agora, vamos considerar a integral $\int_c^d D[G_k(y(\tau),\, s) - G_0(y(\tau),\, s)]$.

Como $y\colon [c,d] \to X$ é uma função escada finita, existe um número finito de pontos $c = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{p-1} < r_p = d$ tais que, para $\tau \in (r_{j-1}, r_j)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, temos $y(\tau) = c_j \in X$, isto é, y assume um valor constante c_j em cada intervalo aberto (r_{j-1}, r_j), $j = 1, 2, \ldots, p$. Neste caso, uma fórmula explícita para a integral $\int_\alpha^\beta DG_k(y(\tau),\, s)$, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$, pode ser dada por

$$\int_c^d DG_k(y(\tau),\, s) = \sum_{j=1}^{p} \int_{r_{j-1}}^{r_j} DG_k(y(\tau),\, s)$$

e, usando o Teorema 2.13 e escolhendo uma partição de $[r_{j-1}, r_j]$, obtemos

$$\int_{r_{j-1}}^{r_j} DG_k(y(\tau), t) = G_k(c_j, r_j-) - G_k(c_j, r_{j-1}+) + G_k(y(r_{j-1}), r_{j-1}+) -$$

$$-G_k(y(r_{j-1}), r_{j-1}) - G_k(y(r_j), r_j-) + G_k(y(r_j), r_j).$$

Olhando para a diferença das somas do lado direito para G_k e G_0 na última igualdade, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{r_{j-1}}^{r_j} D[G_k(y(\tau), t) - G_0(y(\tau), t)] = 0, \tag{2.21}$$

pois como $G_k \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, vale

$$\|G_k(x, t_2) - G_k(x, t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)|$$

para quaisquer $(x, t_1), (x, t_2) \in \Omega$, e isso implica $\lim\limits_{\rho\to 0+} G_k(x, t + \rho) = G_k(x, t+)$ e $\lim\limits_{\rho\to 0+} G_k(x, t - \rho) = G_k(x, t-)$ para todo $(x, t) \in \Omega$ uniformemente com respeito a $k = 0, 1, \ldots$.

Como por hipótese $G_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} G_0$, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} G_k(x, t+) &= \lim_{k\to\infty} \lim_{\rho\to 0+} G_k(x, t + \rho) = \\
&= \lim_{\rho\to 0+} \lim_{k\to\infty} G_k(x, t + \rho) = \\
&= \lim_{\rho\to 0+} G_0(x, t + \rho) = G_0(x, t+),
\end{aligned}$$

desde que $(x, t) \in \Omega$.

Voltando em (2.20), como (2.21) ocorre e $\epsilon > 0$ pode ser escolhido suficientemente pequeno, concluímos o desejado. □

Como consequência do Lema 2.35, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.36 ([1], Corolário A.2). *Sejam* $G_k, G_0 \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, *para* $k = 1, 2, \ldots$, *tais que* $G_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} G_0$. *Seja* $\psi_k \in BV([c,d], X)$, $k = 1, 2, \ldots$, *com* $[c,d] \subset [0, \infty)$, *tal que* $\|\psi_k - \psi_0\|_{BV} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. *Então,*

$$\left\| \int_c^d DG_k(\psi_k(\tau), s) - \int_c^d DG_0(\psi_0(\tau), s) \right\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Como $BV([c,d], X) \subset G([c,d], X)$ (veja a Observação 2.24) e, para todo $t \in [c,d]$, vale

$$\begin{aligned} \|\psi_k(t) - \psi_0(t)\| &\leq \|\psi_k(c) - \psi_0(c)\| + \|\psi_k(t) - \psi_0(t) - [\psi_k(c) - \psi_0(c)]\| \leq \\ &\leq \|\psi_k(c) - \psi_0(c)\| + \operatorname{var}_c^t(\psi_k - \psi_0) \leq \\ &\leq \|\psi_k(c) - \psi_0(c)\| + \operatorname{var}_c^d(\psi_k - \psi_0) = \|\psi_k - \psi_0\|_{BV}, \end{aligned}$$

podemos concluir que $\|\psi_k - \psi_0\|_\infty \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Assim, o resultado segue do Lema 2.35. □

O teorema seguinte é um resultado sobre dependência contínua que generaliza o Teorema 8.2 encontrado em [35] para funções a valores em espaço de Banach.

Proposição 2.37 ([1], Proposição A.3). *Suponha que* $G_k \colon \Omega \to X$ *pertença à classe* $\mathcal{F}(\Omega, h)$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *e que*

$$\lim_{k\to\infty} G_k(x, t) = G_0(x, t),$$

para $(x, t) \in \Omega$. *Sejam* $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$ *e* $x_k \colon [\alpha, \beta] \to X$, $k = 1, 2, \ldots$, *soluções das EDOs generalizadas*

$$\frac{dx}{d\tau} = DG_k(x, t),$$

em $[\alpha, \beta]$ *de forma que*

$$\lim_{k\to\infty} x_k(s) = x_0(s), \qquad s \in [\alpha, \beta], \tag{2.22}$$

e $(x(s), s) \in \Omega$ *para* $s \in [\alpha, \beta]$. *Então* $x_0 \colon [\alpha, \beta] \to X$ *satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| \leqslant h(s_2) - h(s_1)$, *se* $s_1 \leqslant s_2$ *e* $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$;

(ii) $\lim_{k\to\infty} x_k(s) = x_0(s)$ *uniformemente em* $[\alpha, \beta]$;

(iii) x_0 *é uma solução da EDO generalizada* $\frac{dx}{d\tau} = DG_0(x, t)$ *em* $[\alpha, \beta]$.

Demonstração. ⋄ *Prova de* (i): Suponhamos que $\alpha \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \beta$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| \leqslant \|x_0(s_2) - x_k(s_2)\| + \|x_k(s_2) - x_k(s_1)\| + \|x_k(s_1) - x_0(s_1)\|. \tag{2.23}$$

Tome $\epsilon > 0$. Pela hipótese (2.22), existe um $\ell \in \mathbb{N}$ tal que, para $k > \ell$, tem-se

$$\|x_k(s_2) - x_0(s_2)\| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \|x_k(s_1) - x_0(s_1)\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.24}$$

Usando o Lema 2.26, temos

$$\|x_k(s_2) - x_k(s_1)\| \leqslant h(s_2) - h(s_1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.25}$$

Voltando em (2.23), por (2.24) e (2.25), obtemos

$$\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| < \epsilon + h(s_2) - h(s_1).$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser tomado suficientemente pequeno, concluímos que

$$\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| \leqslant h(s_2) - h(s_1),$$

obtendo o desejado.

$\diamond$ *Prova de* (ii): Vamos dividir essa prova em duas partes. Na primeira parte suporemos que h é contínua e, na segunda parte, consideraremos que h é não decrescente, contínua à esquerda em $[0, \infty)$ e $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$, com $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, é a sequência dos pontos de descontinuidades de h.

Parte I. Aqui, vamos supor que $[\alpha, \beta]$ não contém pontos de descontinuidades da função h, ou seja, $h\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ é contínua. Como $[\alpha, \beta]$ é compacto, sabemos que h é uniformemente contínua em $[\alpha, \beta]$. Isso significa que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|h(s) - h(t)| < \epsilon$, sempre que $|s - t| < \delta$.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário e seja $\delta > 0$ correspondente ao ϵ na definição da continuidade uniforme. Então, intervalos da forma $(t - \delta, t + \delta)$, com $t \in [\alpha, \beta]$, cobrem $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta]$ é compacto, existe um conjunto finito de pontos $r_1, \ldots, r_\ell$ tal que $[\alpha, \beta]$ é coberto por um número finito de intervalos $(r_j - \delta, r_j + \delta)$, $j = 1, \ldots, \ell$[1].

Tomemos $k^* \in \mathbb{N}$ tal que (por (2.22)), para $k > k^*$, tenhamos

$$\|x_k(r_j) - x_0(r_j)\| < \epsilon,$$

para todo $j = 1, \ldots, \ell$. Dado $s \in [\alpha, \beta]$, podemos afirmar que existe $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que $s \in (r_j - \delta, r_j + \delta)$. Logo, para $k > k^*$, temos

$$\begin{aligned}
\|x_k(s) - x_0(s)\| &\leqslant \|x_k(s) - x_k(r_j)\| + \|x_k(r_j) - x_0(r_j)\| + \|x_0(r_j) - x_0(s)\| \leqslant \\
&\leqslant |h(s) - h(r_j)| + \epsilon + |h(s) - h(r_j)| < 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Como s foi tomado arbitrariamente em $[\alpha, \beta]$, concluímos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(s) = x_0(s)$ uniformemente em $[\alpha, \beta]$.

Parte II. Agora, vamos considerar que h é não decrescente, contínua à esquerda em $[0, \infty)$ e $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$, com $t_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, é a sequência dos pontos de descontinuidades de h.

Se $[\alpha, \beta] \cap (\cup_{k=1}^{\infty}\{t_k\}) \neq \varnothing$, como $t_k \to \infty$, podemos inferir que existe um número finito de pontos t_j's em $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leqslant t_m < t_{m+1} < \ldots < t_{m+p} \leqslant \beta$, com $m, p \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 1$ e $p \geqslant 0$.

Dado $\epsilon > 0$, existe um $k^* \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j \in \{m, m+1, \ldots, m+p\}$, temos

$$\|x_k(t_j) - x_0(t_j)\| < \epsilon,$$

sempre que $k > k^*$, por (2.22).

Denotemos por $[a, b]$ um dos intervalos $[\alpha, t_m], [t_m, t_{m+1}], \ldots, [t_{m+p-1}, t_{m+p}]$ ou $[t_{m+p}, \beta]$, e definamos

$$h^*(s) = \begin{cases} h(s), & s \in (a, b] \\ h(a+), & s = a. \end{cases}$$

[1] Como $[\alpha, \beta]$ é um conjunto compacto, toda cobertura aberta de $[\alpha, \beta]$ admite uma subcobertura finita.

Pelas hipóteses de h, a função $h^*\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ é não decrescente e contínua.

Para cada $k = 0, 1, \ldots$, seja $x_k^*(a) = x_k(a+)$ e $x_k^*(s) = x_k(s)$, $s \in (a,\, b]$. Então, por (2.22), temos

$$\lim_{k\to\infty} x_k^*(s) = x_0^*(s), \qquad s \in (a,\, b],$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k^*(a) = \lim_{k\to\infty} x_k(a+) = x_0(a+) = x_0^*(a)$$

e

$$\|x_k^*(s_2) - x_k^*(s_1)\| \leqslant |h^*(s_2) - h^*(s_1)|,$$

para $a \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant b$.

Usando a Parte I, podemos afirmar que $x_k^* \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0^*$ uniformemente em $[a,\, b]$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $k_* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k(s) - x_0(s)\| = \|x_k^*(s) - x_0^*(s)\| < \epsilon,$$

sempre que $s \in (a,\, b]$, $\|x_k(a) - x_0(a)\| < \epsilon$, $k > k_*$ e $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ uniformemente em $[a,\, b]$. Como isso pode ser feito para um número finito de intervalos do tipo $[a,\, b]$, obtemos a prova de (ii).

◇ *Prova de* (iii): Pela definição de solução da EDO generalizada $\dfrac{dx}{d\tau} = DG_k(x,\, t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, temos

$$x_k(s_2) - x_k(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DG_k(x_k(\tau),\, t), \tag{2.26}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha,\, \beta]$. Pelo Corolário 2.36, temos

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DG_k(x_k(\tau),\, s) - \int_{s_1}^{s_2} DG_0(x_0(\tau),\, s) \right\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.27}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha,\, \beta]$. Usando (2.26), temos

$$\left\| x_0(s_2) - x_0(s_1) - \int_{s_1}^{s_2} DG_0(x_0(\tau),\, t) \right\|$$

$$= \left\| -x_k(s_2) + x_k(s_1) + [x_k(s_2) - x_k(s_1)] + x_0(s_2) - x_0(s_1) - \int_{s_1}^{s_2} DG_0(x_0(\tau),\, t) \right\|$$

$$= \left\| -x_k(s_2) + x_k(s_1) + \left[\int_{s_1}^{s_2} DG_k(x_k(\tau),\, t) \right] + x_0(s_2) - x_0(s_1) - \int_{s_1}^{s_2} DG_0(x_0(\tau),\, t) \right\|$$

$$\leqslant \| -x_k(s_2) + x_0(s_2)\| + \|x_k(s_1) - x_0(s_1)\| + \left\| \int_{s_1}^{s_2} DG_k(x_k(\tau),\, s) - \int_{s_1}^{s_2} DG_0(x_0(\tau),\, s) \right\|.$$

Então, fazendo $k \to \infty$, por (2.22) e (2.27), obtemos

$$x_0(s_2) - x_0(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DG_0(x_0(\tau),\, t),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha,\, \beta]$, o que mostra que x é solução da EDO generalizada $\frac{dx}{d\tau} = DG_0(x,\, t)$ em $[\alpha,\, \beta]$. Isso finaliza a prova. □

O último resultado deste capítulo, restrito a funções que tomam valores em $\mathbb{R}^n$, diz respeito à dependência contínua de uma solução de uma EDO generalizada com respeito a parâmetros que são apresentados na forma de sequências. Sua demonstração é bastante extensa e, por isso, será omitida aqui. O leitor interessado poderá encontrá-la em [35, Teorema 8.6].

Proposição 2.38. *Seja* $\Omega = \mathcal{O} \times [c,\, d]$ *e suponha que* $G_k \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *pertença à classe* $\mathcal{F}(\Omega,\, h)$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *onde* $[c, d] \subset [0,\, \infty)$. *Assuma que*

$$\lim_{k\to\infty} G_k(x,\, t) = G_0(x,\, t), \quad (x,\, t) \in \mathcal{O} \times [c,\, d].$$

Sejam $[\alpha,\, \beta] \subset [c,\, d]$ *e* $x_0 \colon [\alpha,\, \beta] \to \mathbb{R}^n$ *a única solução de*

$$\frac{dx}{d\tau} = DG_0(x,\, t), \quad x(\alpha) = y_0,$$

com $y_0 \in \mathcal{O}$, *em* $[\alpha, \beta]$. *Assuma, ainda, que exista uma sequência* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}$ *tal que*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y_0.$$

Então, existe um inteiro positivo k_1 *tal que, para todo* $k > k_1$, *existe uma solução* x_k *da EDO generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DG_k(x,\, t)$$

em $[\alpha,\, \beta]$, *com* $x_k(\alpha) = y_k$ *e* $\lim_{k\to\infty} x_k(s) = x_0(s)$, $s \in [\alpha,\, \beta]$.

Para outras propriedades de EDOs generalizadas e suas aplicações, recomendamos ao leitor motivado em estudá-las que consulte as referências [12, 17–19, 35].

3 Sistemas semidinâmicos gerados por EDOs generalizadas

Um sistema semidinâmico local relacionado a uma EDO generalizada foi considerado pela primeira vez por Zvi Artstein em [3]. Em 2011, motivados por [3], os autores de [1] construíram um sistema semidinâmico impulsivo relacionado a uma classe de EDOs generalizadas que será explorado no próximo capítulo, por meio da construção de um sistema semidinâmico contínuo a ser exibido neste presente capítulo.

Usando as notações e a abordagem de [1], dedicaremos este capítulo ao estudo dos sistemas semidinâmicos locais contínuos gerados por EDOs generalizadas. Dividimo-lo em apenas duas seções. Na primeira seção, iniciaremos o estudo sobre os sistemas semidinâmicos para as EDOs generalizadas, apresentando conceitos, notações e resultados preliminares. Na segunda seção, provaremos que um problema de valor inicial para uma classe de EDOs generalizadas gera um sistema semidinâmico local.

As principais referências para este capítulo são [1], [3], [12, Capítulo 14] e [37].

3.1 Conceitos, notações e resultados preliminares

Daqui para frente, vamos considerar o espaço de Banach X, tratado no Capítulo 2, como sendo o espaço euclidiano n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, dotado de uma norma $\|\cdot\|$ e $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Por $|r|$ denotaremos o valor absoluto de um número real r.

Consideraremos a EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x,\, t), \tag{3.1}$$

onde $G\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ pertence à classe de funções $\mathcal{F}_0(\Omega,\, h)$, em que $\Omega = \mathcal{O} \times [0,\, \infty)$ e h é uma função real contínua e não decrescente definida em $[0, \infty)$. Recordamos ao leitor que $G\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ pertence à classe de funções $\mathcal{F}_0(\Omega,\, h)$ se

$$G(x,0) = 0, \tag{3.2}$$

$$\|G(x,s_2) - G(x,s_1)\| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)| \quad \text{e} \tag{3.3}$$

$$\|G(x,s_2) - G(x,s_1) - G(y,s_2) + G(y,s_1)\| \leqslant \|x-y\| |h(s_2) - h(s_1)| \tag{3.4}$$

para quaisquer (x, s_2), (x, s_1), (y, s_2), $(y, s_1) \in \Omega$ (veja a Definição 2.21).

Atentamos para o fato de que se G pertencer à classe de funções $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$, então G será uma função contínua nas duas variáveis, por conta das desigualdades (3.3) e (3.4), já que a função h é contínua.

O resultado mais importante desta seção atesta que a classe $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto compacto. Inicialmente, observamos que $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um espaço métrico com a métrica induzida de $\mathcal{F}(\Omega, h)$ (veja (2.18)).

Para provar que a classe $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto compacto, usaremos um resultado clássico concernente à compacidade de conjuntos de funções contínuas, provado pelo matemático italiano Ascoli. Enunciá-lo-emos na sequência. Ao leitor interessado em sua prova, indicamos a referência [31, Teorema 45.4]. Cabe lembrar que a recíproca do Teorema de Ascoli também é válida e foi provada pelo matemático italiano Arzelà.

Lema 3.1 (Teorema de Ascoli)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Um subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$, onde $C(X, \mathbb{R}^n)$ denota o espaço métrico das funções contínuas de X em $\mathbb{R}^n$ com a métrica uniforme, é compacto se é uniformemente limitado e equicontínuo.*

A fim de aplicar o Teorema de Ascoli para provar a compacidade da classe $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$, demonstraremos os seguintes resultados na sequência:

(I) $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto equicontínuo em subconjuntos compactos de Ω;

(II) $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto fechado;

(III) $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é uniformemente limitado em subconjuntos compactos de Ω.

Por (I) e (III) e pelo Teorema de Ascoli, poderemos inferir que qualquer sequência $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ admite uma subsequência $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em subconjuntos compactos para alguma função G_0. Mas, pela Observação 2.34, poderemos garantir que $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para G_0 em $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$. Por fim, por (II), concluiremos que $G_0 \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ e, consequentemente, que $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto compacto.

Lema 3.2 ([1], Lema 3.1)**.** *$\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto equicontínuo em subconjuntos compactos de $\Omega = \mathcal{O} \times [0, \infty)$, onde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.*

Demonstração. Sejam $A \subset \mathcal{O}$ e $C \subset [0, \infty)$ conjuntos compactos e $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$.

Tomemos $x \in A$ e $t \in C$ arbitrariamente. Como G satisfaz as condições (3.2) e (3.4), temos

$$\begin{aligned} \|G(x,t) - G(y,t)\| &= \|G(x,t) - G(x,0) - G(y,t) + G(y,0)\| \\ &\leqslant \|x-y\||h(t) - h(0)| \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \|x-y\|(|h(t)| + |h(0)|), \end{aligned} \tag{3.5}$$

para $y \in A$, onde em $(*)$ usamos a desigualdade triangular.

Adicionalmente, pela condição (3.3), para todo $(y, s) \in A \times C$, temos

$$\|G(y,t) - G(y,s)\| \leqslant |h(t) - h(s)|. \tag{3.6}$$

Por conseguinte, usando as relações (3.5) e (3.6), para todo $(y, s) \in A \times C$, obtemos

$$\begin{aligned} \|G(x,t) - G(y,s)\| &\leqslant \|G(x,t) - G(y,t)\| + \|G(y,t) - G(y,s)\| \\ &\leqslant \|x-y\|(|h(t)| + |h(0)|) + |h(t) - h(s)|. \end{aligned}$$

Em contrapartida, a continuidade de h (e, consequentemente, a continuidade uniforme de h em C), garante que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|h(t) - h(s)| < \frac{\epsilon}{2},$$

sempre que $|t-s|<\delta$, $t,s\in C$.

Ademais, como C é compacto, existe $M>0$ tal que $|h(s)|\leqslant M$ para todo $s\in C$. Então, $\|x-y\|<\frac{\epsilon}{2}(M+|h(0)|)^{-1}$ e $|t-s|<\delta$, com $(y,s)\in A\times C$ implicam

$$\|G(x,t)-G(y,s)\|<\epsilon,$$

o que completa a prova. □

Observação 3.3 ([12], Observação 14.2)**.** Sejam $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}_0(\Omega,h)$ e $G\in\mathcal{F}_0(\Omega,h)$. Como uma consequência do Lema 3.2, podemos concluir que a convergência $\rho(G_k,G)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ equivale à convergência pontual $\|G_k(x,t)-G(x,t)\|\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ para cada $(x,t)\in\Omega$. De fato, conforme descrito na Observação 2.34, a convergência $\rho(G_k,G)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ é equivalente à convergência uniforme $\|G_k(x,t)-G(x,t)\|\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ em cada subconjunto compacto de Ω. Dessa forma, para concluir a equivalência das referidas convergências, basta verificar que a convergência pontual implica a convergência uniforme, uma vez que a convergência uniforme implica diretamente a pontual.

Vamos supor que $\|G_k(x,t)-G(x,t)\|\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ para cada $(x,t)\in\Omega$. Sejam $\epsilon>0$ e $K\subset\Omega$ um subconjunto compacto. Para cada $(x,t)\in K$, existe $N_{x,t}\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|G_k(x,t)-G(x,t)\|<\frac{\epsilon}{3}\quad\text{sempre que}\quad k>N_{x,t}. \tag{3.7}$$

Pelo Lema 3.2, existe $\delta>0$ tal que

$$\|G_k(x,t)-G_k(y,s)\|<\frac{\epsilon}{3}\quad\text{e}\quad\|G(x,t)-G(y,s)\|<\frac{\epsilon}{3}, \tag{3.8}$$

sempre que $\|x-y\|<\delta$ e $|t-s|<\delta$, com $(x,t),(y,s)\in K$.

Como K é compacto, existem $(x_1,t_1),\ldots,(x_m,t_m)\in K$ tais que

$$K\subset B((x_1,t_1),\delta)\cup\ldots\cup B((x_m,t_m),\delta),$$

onde $B((x,t),\delta)=\{(y,s)\colon\|y-x\|<\delta,\ |s-t|<\delta\}$.

Para $(x,t)\in K$ arbitrário, existe (x_p,t_p) com $1\leqslant p\leqslant m$ tal que $(x,t)\in B((x_p,t_p),\delta)$. Se $k>\max\{N_{x_1,t_1},\ldots,N_{x_m,t_m}\}$, por (3.7) e (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|G_k(x,t)-G(x,t)\|\\
&\leqslant\|G_k(x,t)-G_k(x_p,t_p)\|+\|G_k(x_p,t_p)-G(x_p,t_p)\|+\|G(x_p,t_p)-G(x,t)\|\\
&<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|G_k(x,t)-G(x,t)\|<\epsilon$ para todo $(x,t)\in K$ e $k>\max\{N_{x_1,t_1},\ldots,N_{x_m,t_m}\}$. Isso prova a convergência uniforme $\|G_k(x,t)-G(x,t)\|\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ em cada subconjunto compacto de Ω.

Seguindo o roteiro descrito acima, provaremos agora o resultado (II).

Lema 3.4. *$\mathcal{F}_0(\Omega,h)$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Para provar este lema, é suficiente mostrar que $\overline{\mathcal{F}_0(\Omega,h)}\subset\mathcal{F}_0(\Omega,h)$. Façamos isso.

Sejam $G \in \overline{\mathcal{F}_0(\Omega, h)}$ e $(G_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ uma sequência tal que $G_k \xrightarrow{k\to\infty} G$. Para mostrar que $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, devemos concluir que G satisfaz as condições (3.2), (3.3) e (3.4).

Pois bem, pela Observação 3.3 e pelo fato de que $G_k \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$G(x, 0) = \lim_{k\to\infty} G_k(x, 0) = 0,$$
$$\|G(x, s_2) - G(x, s_1)\| = \lim_{k\to\infty} \|G_k(x, s_2) - G_k(x, s_1)\| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)| \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}\|G(x, s_2)-G(x, s_1)-G(y, s_2)+G(y, s_1)\| &= \lim_{k\to\infty} \|G_k(x, s_2)-G_k(x, s_1)-G_k(y, s_2)+G_k(y, s_1)\| \\ &\leqslant \|x - y\||h(s_2) - h(s_1)|.\end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in \mathcal{O}$, $s_1, s_2 \in [0, \infty)$. Dessa forma, $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ e o resultado está provado. □

A seguir, provaremos o resultado (III).

Lema 3.5. *$\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto uniformemente limitado em subconjuntos compactos de Ω.*

Demonstração. Usando as condições (3.2) e (3.3), temos

$$\|G(x, t)\| = \|G(x, t) - G(x, 0)\| \leqslant |h(t) - h(0)| \leqslant |h(t)| + |h(0)| \tag{3.9}$$

para quaisquer $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathcal{O}$ e $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$.

Sejam $A \subset \mathcal{O}$ e $C \subset [0, \infty)$ conjuntos compactos, e $(x, t) \in A \times C$ arbitrário. Pela continuidade de h e pela compacidade de C, existe $M > 0$ tal que $|h(s)| \leqslant M$ para todo $s \in C$. Voltando na relação (3.9), obtemos

$$\|G(x, t)\| \leqslant M + |h(0)|$$

para quaisquer $(x, t) \in A \times C$ e $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, de onde segue o resultado. □

Finalmente, estamos prontos para provar que a classe $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto compacto e encerrar esta seção preliminar.

Teorema 3.6 ([1], Teorema 3.2)**.** *A classe $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. O Lema 3.2 garante a equicontinuidade de $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ em subconjuntos compactos de $\Omega = \mathcal{O} \times [0, \infty)$, enquanto o Lema 3.5 garante $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é um conjunto uniformemente limitado em subconjuntos compactos de Ω. Portanto, o Teorema de Ascoli (Lema 3.1) assegura que qualquer sequência $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ admite uma subsequência $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em subconjuntos compactos para alguma função G_0. Pela Observação 2.34, podemos inferir que $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para G_0. Por fim, como $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é fechado (pelo Lema 3.4), concluímos que $G_0 \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, o que completa a prova. □

3.2 Existência de um sistema semidinâmico local

Nesta seção, mostraremos a existência de um sistema semidinâmico local gerado por uma EDO generalizada da forma

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x,\, t), \tag{3.10}$$

em que $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, $\Omega = \mathcal{O} \times [0,\, \infty)$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $h\colon [0,\, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não decrescente. Todos os resultados aqui presentes foram extraídos de [1].

Observação 3.7. O Corolário 2.27 permite-nos afirmar que as soluções de (3.10) são contínuas, já que h é uma função contínua.

De acordo com a Observação 3.3, a sequência $(G_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ converge para uma função $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ se

$$G_k(x,\, t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} G(x,\, t)$$

em $\mathbb{R}^n$ para cada $(x, t) \in \Omega$, isto é,

$$\|G_k(x,\, t) - G(x,\, t)\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

para todo $(x,\, t) \in \Omega$. Neste caso, escrevemos $G_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} G$. Adicionalmente, dada uma sequência $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ e dado $v \in \mathbb{R}^n$, temos

$$(v_k, G_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (v, G) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \mathcal{F}_0(\Omega, h),$$

se, e somente se, $\|v_k - v\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\|G_k(x,\, s) - G(x,\, s)\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $(x,\, s) \in \Omega$.

Na sequência apresentaremos o conceito de um sistema semidinâmico local.

Dado $(v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, denotaremos por $I_{(v,G)}$ um intervalo do tipo $[0,\, b) \subset \mathbb{R}$, com $b > 0$. Vamos considerar o seguinte conjunto

$$S = \{(t, v, G) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)\colon t \in I_{(v,G)}\},$$

onde $\mathbb{R}_+$ denota o conjunto dos números reais não negativos.

Definição 3.8. Um *sistema semidinâmico local* em $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é uma aplicação $\pi\colon S \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\pi(0, v, G) = (v, G)$, para todo $(v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$;

(ii) dado $(v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, se $t \in I_{(v,G)}$ e $s \in I_{\pi(t,v,G)}$, então $t + s \in I_{(v,G)}$ e $\pi(s,\, \pi(t, v, G)) = \pi(t + s, v, G)$;

(iii) $\pi\colon S \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ é contínua;

(iv) $I_{(v,G)} = [0,\, b_{(v,G)})$ é maximal no seguinte sentido: ou $I_{(v,G)} = \mathbb{R}_+$ ou, se $b_{(v,G)} \neq \infty$, então a órbita positiva $\{\pi(t, v, G)\colon t \in [0,\, b_{(v,G)})\} \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ não pode ser estendida ao intervalo $[0,\, b_{(v,G)} + c)$, $c > 0$;

(v) se $(v_k, G_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (v, G)$, onde (v, G) e $(v_k, G_k) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, $k \in \mathbb{N}$, então $I_{(v,G)} \subset \liminf I_{(v_k,G_k)}$.

Observação 3.9. A definição de um sistema semidinâmico local presente em [5] consiste das condições (i), (ii), (iii) e (iv) da Definição 3.8. A condição (v) de [5], conhecida como *Axioma de Kamke*, afirma que o domínio de π é um conjunto aberto. Seguindo [1], substituímos a condição (v) de [5] por uma propriedade de semicontinuidade inferior, que é equivalente ao Axioma de Kamke. Para verificar tal equivalência, o leitor pode consultar [5, Lema 1.8].

Observação 3.10. Se o domínio de π for $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, então as condições (iv) e (v) da Definição 3.8 são satisfeitas imediatamente.

Levando em conta a Observação 3.10, temos a definição a seguir.

Definição 3.11. Se o domínio de π for $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, então π será dito um *sistema semidinâmico global*.

Dados $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ e $t \geqslant 0$, definimos a *transladada* G_t *of* G por

$$G_t(x,\, s) = G(x,\, t+s) - G(x,\, t), \quad (x,\, s) \in \Omega. \tag{3.11}$$

O próximo resultado, provado primeiramente em [3, p. 234], descreve algumas propriedades básicas da transladada G_t, $t \geqslant 0$.

Lema 3.12. *Dados $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ e $t \geqslant 0$, a transladada G_t de G satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $G_0 = G$ *(normalização de G);*

(ii) $G_{t+\tau} = (G_t)_\tau$ *para quaisquer $t, \tau \geqslant 0$ (propriedade de semigrupo);*

(iii) *a aplicação $(t, G) \mapsto G_t$ é contínua.*

Demonstração. ⋄ *Prova de* (i): Pela definição de G_t dada em (3.11), temos

$$G_0(x,\, s) = G(x,\, 0+s) - G(x,\, 0) = G(x, s) \quad \text{para todo } (x,\, s) \in \Omega.$$

⋄ *Prova de* (ii): Dados $t, \tau \geqslant 0$ e $(x,\, s) \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned}
(G_t)_\tau(x, s) &= G_t(x, \tau + s) - G_t(x, \tau)\\
&= G(x, t+\tau+s) - G(x, t) - G(x, t+\tau) + G(x, t)\\
&= G(x, t+\tau+s) - G(x, t+\tau)\\
&= G_{t+\tau}(x, s),
\end{aligned}$$

concluindo o desejado.

⋄ *Prova de* (iii): Sejam $t, t_k \geqslant 0$ e $G, G_k \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $G_k \xrightarrow{k\to\infty} G$ e $t_k \xrightarrow{k\to\infty} t$.

Se $(x,\, s) \in \Omega$, usando (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\|(G_k)_{t_k}(x, s) - G_t(x, s)\| &\leqslant \|(G_k)_{t_k}(x, s) - (G_k)_t(x, s)\| + \|(G_k)_t(x, s) - G_t(x, s)\|\\
&\leqslant \|G_k(x, s+t_k) - G_k(x, s+t)\| + \|G_k(x, t_k) - G_k(x, t)\|\\
&\quad + \|G_k(x, t+s) - G(x, t+s)\| + \|G_k(x, t) - G(x, t)\|\\
&\leqslant |h(s+t_k) - h(s+t)| + |h(t_k) - h(t)|\\
&\quad + \|G_k(x, t+s) - G(x, t+s)\| + \|G_k(x, t) - G(x, t)\|.
\end{aligned}$$

Como h é contínua, $G_k \xrightarrow{k\to\infty} G$ e $t_k \xrightarrow{k\to\infty} t$, concluímos que $(G_k)_{t_k} \xrightarrow{k\to\infty} G_t$. Isso prova que a aplicação $(t, G) \mapsto G_t$ é contínua, como queríamos demonstrar. □

Dados $t \geqslant 0$ e $G \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$, não se pode garantir que $G_t \in \mathcal{F}_0(\Omega, h)$ para qualquer função h que seja contínua e não decrescente. Por essa razão, consideraremos um subconjunto de $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$, fazendo uma restrição sobre a função h, a fim de obter um subconjunto invariante de $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ sob a translada G_t. A próxima definição contempla as características desse subconjunto.

Definição 3.13. Seja $h\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não decrescente. Diremos que uma função $G\colon \Omega \to X$ pertence à *classe* $\mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ se G pertencer à classe $\mathcal{F}_0(\Omega, h)$ e a função h satisfizer a relação

$$|h(t_1 + s) - h(t_2 + s)| \leqslant |h(t_1) - h(t_2)|, \tag{3.12}$$

para quaisquer $t_1, t_2, s \in [0, \infty)$.

O próximo resultado é uma consequência do Teorema 3.6.

Corolário 3.14. *Se $h\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não decrescente, então $\mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ é um conjunto compacto.*

A seguir mostraremos que $G_t \in \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ para todo $t \geqslant 0$, desde que $G \in \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$.

Lema 3.15 ([1], Lema 4.6)**.** *Se $G \in \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$, então a transladada G_t de G pertence à classe $\mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ para todo $t \geqslant 0$.*

Demonstração. Sejam $G \in \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ e $t \geqslant 0$. Devemos mostrar $G_t \in \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$. Com efeito:

(i) $G_t(x, 0) = G(x, t) - G(x, t) = 0$ para todo $x \in \mathcal{O}$;

(ii) dados $(x, s_2), (x, s_1), (y, s_2), (y, s_1) \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} \|G_t(x, s_2) - G_t(x, s_1)\| &= \|G(x, t + s_2) - G(x, t + s_1)\| \\ &\leqslant |h(t + s_2) - h(t + s_1)| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)|, \end{aligned}$$

já que G satisfaz a condição (3.3) e h satisfaz (3.12).

(iii) dados $(x, s_2), (x, s_1), (y, s_2), (y, s_1) \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} &\|G_t(x, s_2) - G_t(x, s_1) - [G_t(y, s_2) - G_t(y, s_1)]\| \\ = {}& \|G(x, t + s_2) - G(x, t + s_1) - G(y, t + s_2) + G(y, t + s_1)\| \\ \leqslant {}& \|x - y\||h(t + s_2) - h(t + s_1)| \\ \leqslant {}& \|x - y\||h(s_2) - h(s_1)|, \end{aligned}$$

uma vez G satisfaz a condição (3.4) e h satisfaz (3.12).

Por (i), (ii) e (iii), concluímos que $G_t \in \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$, finalizando a prova. □

Observação 3.16. A função G_t, definida em (3.11), é contínua para todo $t \geqslant 0$, já que estamos assumindo que $G \in \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$, em que h é uma função contínua e não decrescente.

Finalizaremos este capítulo com a construção de um sistema semidinâmico local relacionado à EDO generalizada (3.10). Antes, exibiremos um resultado preliminar que será referenciado na prova, a saber, uma generalização do Princípio da Escolha de Helly. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [4, p. 356–360].

Lema 3.17 ([4], Teorema 1)**.** *Sejam* (X, d) *um espaço métrico arbitrário e* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *um intervalo fechado não degenerado. Uma família infinita pontualmente relativamente compacta de funções* $\varphi\colon [a, b] \to X$ *de variação uniformemente limitada contém uma sequência que converge pontualmente em* $[a, b]$ *para uma função* $f\colon [a, b] \to X$ *de variação limitada.*

O último teorema e o mais importante deste capítulo foi estabelecido pelos autores de [1], generaliza o [3, Teorema 6.3] e o [20, Teorema 4.1], e segue abaixo.

Teorema 3.18 ([1], Teorema 4.7)**.** *Suponha que, para cada* $u \in \mathcal{O}$ *e cada* $G \in \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$*,* $x(t,\, u,\, G)$ *seja a única solução maximal do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG(x,\, t), \\ x(0) = u. \end{cases} \tag{3.13}$$

Seja $[0,\, \omega(u,\, G))$*,* $\omega(u,\, G) > 0$*, o intervalo maximal de definição da solução* $x(\cdot\,, u, G)$ *e defina* $\pi\colon S \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ *por*

$$\pi(t,\, u,\, G) = (x(t,\, u,\, G),\, G_t), \tag{3.14}$$

onde $S = \{(t, u, G) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)\colon t \in I_{(u,G)}\}$*. Então,* π *é um sistema semidinâmico local em* $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$*.*

Demonstração. Inicialmente, note que a segunda componente G_t de π em (3.14) está definida para todo $t \in [0, \infty)$. Então, o intervalo maximal $I_{(u,G)}$ do sistema semidinâmico dado em (3.14) coincide com $[0,\, \omega(u,\, G))$. Para futuras referências nesta prova, deixemos registrado que

$$I_{(u,G)} = [0,\, \omega(u,\, G)). \tag{3.15}$$

Para provar que π é um sistema semidinâmico local em $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$, devemos verificar que as cinco condições da Definição 3.8 são satisfeitas. Vamos provar que as condições (i), (ii), (iv) e (v) são satisfeitas e, por fim, mostraremos que a condição (iii) também é.

$\diamond$ *Prova de* (i): Seja $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$. Como $G_0(x, s) = G(x, s)$ para todo $(x, s) \in \Omega$ (veja o Lema 3.12-(i)) e $x(0,\, u,\, G) = u$ para todo (u, G), temos

$$\pi(0,\, u,\, G) = (x(0,\, u,\, G),\, G_0) = (u,\, G).$$

$\diamond$ *Prova de* (ii): Sejam $t \in I_{(u,\,G)}$, $\sigma \in I_{\pi(t,u,\,G)}$ e $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$.

Para $\tau \in I_{(u,\,G)}$, sejam

$$x(\tau) = x(\tau,\, u,\, G), \quad \psi(\tau) = x(\tau,\, x(t),\, G_t) \quad \text{e} \quad \xi(\tau) = x(\tau + t),$$

onde x é a solução maximal do problema (3.13) e ψ é uma solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{d\tau} = D[G_t(\psi,\, s)], \\ \psi(0) = x(t) = x(t,\, u,\, G). \end{cases} \tag{3.16}$$

Vamos mostrar que ξ é uma solução do problema (3.16). Inicialmente, observamos que

$$\xi(\sigma) - \xi(0) = x(\sigma + t) - x(t) = \int_t^{\sigma+t} DG(x(\tau),\, s). \tag{3.17}$$

Por outro lado, usando a mudança de variável $\phi(s) = s + t$ e o Teorema 2.15, obtemos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\sigma} DG(x(\tau), s) &= \int_{\phi(0)}^{\phi(\sigma)} DG(x(\tau), s) = \int_0^{\sigma} DG(x(\phi(\varsigma)), \phi(\mu)) \\ &= \int_0^{\sigma} DG(x(\varsigma + t), \mu + t). \end{aligned} \tag{3.18}$$

De (3.17) e (3.18) segue que

$$\xi(\sigma) - \xi(0) = \int_0^{\sigma} DG(x(\tau + t), s + t) = \int_0^{\sigma} DG_t(\xi(\tau), s).$$

Além disso, como $\xi(0) = x(t) = x(t,\, u,\, G)$, o Teorema de Existência e Unicidade para o problema de valor inicial (3.16) (veja o Teorema 2.31) garante que

$$\psi(\sigma) = \xi(\sigma) = x(\sigma + t), \quad \text{para todo } \sigma \in I_{\pi(t,\, u,\, G)} = [0, \omega(u,\, G)). \tag{3.19}$$

Usando (3.19), obtemos

$$\begin{aligned} \pi(\sigma,\, \pi(t,\, u,\, G)) &= \pi(\sigma,\, x(t,\, u,\, G),\, G_t) = \pi(\sigma,\, x(t),\, G_t) \\ &= (x(\sigma,\, x(t),\, G_t),\, (G_t)_\sigma) = (\xi(\sigma),\, (G_t)_\sigma) \\ &= (\xi(\sigma),\, G_{\sigma+t}) = (x(\sigma + t),\, G_{t+\sigma}) \\ &= (x(\sigma + t,\, u,\, G),\, G_{t+\sigma}) = \pi(\sigma + t,\, u,\, G). \end{aligned}$$

$\diamond$ *Prova de* (iv): Vimos que (3.15) ocorre. Se $\omega = \omega(u, G) = \infty$, não há o que provar. Suponha que $\omega = \omega(u, G) < \infty$. Como h é contínua, temos $\Omega = \Omega_G$, onde $\Omega_G = \{(x, t) \in \Omega\colon\ x + G(x, t^+) - G(x, t) \in O\}$ (veja (2.17)). Portanto, se $x(t, u, G) \to z$ quando $t \to \omega^-$, segue pelo Corolário 2.33 que $z \notin \mathcal{O}$. Isso implica que a solução $x(t, u, G)$ não pode ser estendida ao intervalo $[0, \omega]$ e, portanto, não pode ser estendida a qualquer intervalo da forma $[0,\, \omega + c)$, com $c > 0$.

$\diamond$ *Prova de* (v): Como (3.15) ocorre, devemos mostrar que $\omega(u,\, G)$ é semicontínuo inferiormente em $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$.

Pois bem, sejam $(y_0,\, G_0) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ e $((y_k,\, G_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ uma sequência tal que $(y_k,\, G_k) \xrightarrow{k\to\infty} (y_0,\, G_0)$. Seja, ainda, $x(s) = x(s,\, y_0,\, G_0)$ a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG_0(x,\, s), \\ x(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.20}$$

definida no intervalo maximal $[0,\, \omega(y_0,\, G_0))$, com $\omega(y_0,\, G_0) > 0$.

A Proposição 2.38 permite-nos afirmar que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geqslant k_1$, existe uma solução $x_k(s,\, y_k,\, G_k)$ da EDO generalizada

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG_k(x,\, s), \\ x(0,\, y_k,\, G_k) = y_k, \end{cases} \tag{3.21}$$

definida em $[0,\, \gamma]$, $0 < \gamma < \omega(y_0,\, G_0)$, satisfazendo $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(s,\, y_k,\, G_k) = x(s,\, y_0,\, G_0)$ para todo $s \in [0,\, \gamma]$. Pela Proposição 2.38, γ não depende de $k \geqslant k_1$.

Agora, vamos definir um conjunto $A \subset [0, \infty)$ da seguinte forma:

$$A = \{b \geqslant 0\colon\ \text{para } k \geqslant k_1,\ \text{as funções } x_k(s,\, y_k,\, G_k) \text{ estão definidas em}$$

$$[0,b] \text{ e são equicontínuas em } [0,b]\}. \tag{3.22}$$

Afirmação 1. As funções $x_k(\cdot,\, y_k,\, G_k)$, $k \geqslant k_1$, são equicontínuas em $[0,\, \gamma]$.
Com efeito, pelo Lema 2.26 temos

$$\|x_k(s_2,\, y_k,\, G_k) - x_k(s_1,\, y_k,\, G_k)\| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)|, \quad s_1,\, s_2 \in [0,\, \gamma].$$

Portanto, a equicontinuidade de $x_k(s,\, y_k,\, G_k)$ segue imediatamente, uma vez que h é contínua e não depende de k. Daí, $\gamma \in A$ e, por conseguinte, $A \neq \varnothing$.

Seja $\beta = \sup A$. Para provar a semicontinuidade inferior de ω, mostraremos que $[0,\, \beta)$ é o intervalo maximal de definição da solução $x(\cdot,\, y_0,\, G_0)$.

Afirmação 2. A sequência de funções $x_k(\cdot,\, y_k,\, G_k)$ é uniformemente limitada para $k > k_2$, com k_2 suficientemente maior do que k_1.

De fato, seja $0 \leq b < \beta$. Novamente pelo Lema 2.26, temos

$$\begin{aligned}
\|x_k(s,\, y_k,\, G_k)\| &\leqslant \|y_k\| + \|x_k(s,\, y_k,\, G_k) - y_k\| \\
&= \|y_k\| + \|x_k(s, y_k, G_k) - x_k(0, y_k, G_k)\| \\
&\leqslant \|y_k\| + [h(s) - h(0)] \\
&\leqslant \|y_k\| + [h(b) - h(0)],
\end{aligned}$$

para todo $s \in [0,\, b]$. Como $y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_0$, temos a validade da Afirmação 2.

Pelas Afirmações 1 e 2 e pelo Teorema 3.1, podemos atestar que $(x_k(\cdot,\, y_k,\, G_k))_{k>k_2}$ é uma família pontualmente relativamente compacta de funções de variação uniformemente limitada. Por conseguinte, pelo Lema 3.17, a sequência $(x_k(\,\cdot\,,\, y_k,\, G_k))_k$ é relativamente compacta em $C([0,b],\mathbb{R}^n)$ para $k > k_2$.

A Proposição 2.37 garante que todo ponto limite da sequência $(x_k(\,\cdot\,,\, y_k,\, G_k))_{k>k_2}$ é uma solução do sistema (3.20) definida em $[0,b]$. Ademais, da unicidade de soluções dessa equação, obtemos exatamente um ponto limite da sequência $(x_k(\cdot,\, y_k,\, G_k))_{k>k_2}$. Então, a sequência converge uniformemente para a solução $x(\cdot,\, y_0,\, G_0)$ em $[0,b]$.

Suponha, por absurdo, que $x(\beta) = x(\beta,\, y_0,\, G_0)$ está definido. Dessa forma, $x(\beta) \in \mathcal{O}$ e, pelo Teorema 2.31, existe $\Delta_\beta > 0$ tal que $x(s,\, y_0,\, G_0)$ está definido para cada $s \in [\beta,\, \beta + \Delta_\beta]$. Além disso, a Proposição 2.38 garante a existência de um inteiro $\overline{k}$ tal que a sequência $x_k(s,\, y_k,\, G_k)$ está definida e é equicontínua em $[0,\, \beta + \Delta_\beta]$ para todo $k \geqslant \overline{k}$. Porém, isso contradiz o fato de que $\beta = \sup A$. Logo, $x(\cdot,\, y_0,\, G_0)$ não está definido em β e $\beta = \omega(y_0,\, G_0)$.

⋄ *Prova de* (iii): Inicialmente, observe que, para cada $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ fixo, $\pi(t,\, u,\, G)$ é contínua em $t \in I_{(u,G)}$. Esse fato segue das Observações 3.7, 3.16 e do Lema 3.12-(iii).

Sejam $(t_0, u_0, G_0) \in I_{(u_0,G_0)} \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}^*(\Omega,\, h)$ e $((t_k, u_k, G_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset I_{(u_k,G_k)} \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}^*(\Omega,\, h)$ uma sequência tal que $(t_k, u_k, G_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (t_0, u_0, G_0)$. Segue da prova do item (v) que

$$x(s, u_k, G_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x(s, u_0, G_0), \tag{3.23}$$

uniformemente em intervalos compactos de $[0, \beta)$, onde $\beta = \sup A$, com A definido em (3.22), $x(s, u_0, G_0)$ é a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG_0(x,\, s), \\ x(0) = u_0, \end{cases}$$

e, para cada k, $x(s, u_k, G_k)$ é a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG_k(x,\, s), \\ x(0) = u_k. \end{cases}$$

Note que $x(t_k, u_k, G_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x(t_0, u_0, G_0)$. Com efeito, isso segue do item (v), da continuidade de $\pi(\cdot, u_0, G_0)$, da relação (3.23) e da desigualdade

$$\begin{aligned} \|x(t_k, u_k, G_k) - x(t_0, u_0, G_0)\| \leqslant\ & \|x(t_k, u_k, G_k) - x(t_k, u_0, G_0)\| \\ & + \|x(t_k, u_0, G_0) - x(t_0, u_0, G_0)\|. \end{aligned}$$

Por fim, como $(G_k)_{t_k}$ converge para $(G_0)_{t_0}$ pelo Lema 3.12-(iii), obtemos a continuidade de π. Assim, a prova está completa. $\square$

4 Sistemas semidinâmicos impulsivos gerados por EDOs generalizadas

Neste capítulo estudaremos propriedades da seguinte EDO generalizada impulsiva associada ao problema de valor inicial (3.13):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG(x, s) \\ \mathrm{I}\colon \mathrm{M} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \\ x(0) = u, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $G \in \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$, $\Omega = \mathcal{O} \times [0,\, \infty)$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, $u \in \mathcal{O}$, $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ é um subconjunto fechado e I é uma função contínua, tal que $\mathrm{I}(\mathrm{M} \cap \mathcal{O}) \subset \mathcal{O} \setminus \mathrm{M}$.

Seguindo a abordagem de [1], assumiremos que M satisfaz a seguinte condição:

(C_M) se para $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG(x,\, t), \\ x(0) = u \end{cases} \tag{4.2}$$

é tal que $x(t_0, u, G) \in \mathrm{M}$ para algum $t_0 > 0$, então existe $\epsilon = \epsilon(u, G) > 0$ tal que

$$x(t, u, G) \notin \mathrm{M} \quad \text{para} \quad t \in (t_0 - \epsilon, t_0) \cup (t_0, t_0 + \epsilon).$$

A condição (C_M) significa que os pontos de M são isolados em cada trajetória do sistema (4.2).

A seguir, definiremos uma função que representa o menor tempo positivo para o qual a trajetória positiva de (u, G) encontra M. Essa função, que denotaremos por $\varphi\colon \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h) \to (0, \infty]$, é dada por

$$\varphi(u, G) = \begin{cases} s, & \text{se } \ x(s, u, G) \in \mathrm{M} \ \text{ e } \ x(t, u, G) \notin \mathrm{M} \ \text{ para } \ 0 < t < s, \\ \infty, & \text{se } \ x(t, u, G) \notin \mathrm{M} \ \text{ para todo } \ t > 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

A partir de agora, neste capítulo, assumiremos que

(C_φ) a função φ definida em (4.3) é contínua em $(\mathcal{O} \setminus \mathrm{M}) \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$.

A suposição (C_φ) se ampara no fato de que, em [15], Ciesielski obtém condições suficientes para a função φ, associada a um sistema semidinâmico impulsivo, ser contínua - ou seja, (C_φ) é uma suposição razoável, haja vista que existem condições que podem tornar a função φ contínua.

Usando a função φ, estaremos aptos a descrever a trajetória impulsiva do sistema (4.1). Seja $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ um elemento arbitrário. No que segue, caracterizaremos a solução $\tilde{x}(t, u, G)$ da EDO generalizada impulsiva (4.1).

(i) Se $\varphi(u, G) = \infty$, definimos $\tilde{x}(t, u, G) = x(t, u, G)$ para todo $t \geqslant 0$, onde $x(t, u, G)$ é a solução do sistema (4.2). Porém, se $\varphi(u, G) = s_0$, então $u_1 = x(s_0, u, G) \in \mathrm{M}$. Assim, definimos $\tilde{x}(t, u, G)$ em $[0, s_0]$ por

$$\tilde{x}(t, u, G) = \begin{cases} x(t, u, G), & 0 \leqslant t < s_0, \\ u_1^+, & t = s_0, \end{cases}$$

onde $u_1^+ = \mathrm{I}(u_1)$. Vamos considerar $u = u_0^+$. O processo continuará de u_1^+ em diante.

(ii) Se $\varphi(u_1^+, G) = \infty$, definimos $\tilde{x}(t, u, G) = x(t - s_0, u_1^+, G)$ para $t \geqslant s_0$, onde $x(\cdot, u_1^+, G)$ é a solução da EDO generalizada

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG(x, s), \\ x(0) = u_1^+. \end{cases}$$

Mas, se $\varphi(u_1^+, G) = s_1$, então $u_2 = x(s_1, u_1^+, G) \in \mathrm{M}$. Neste caso, definimos $\tilde{x}(t, u, G)$ em $[s_0,\ s_0 + s_1]$ por

$$\tilde{x}(t, u, G) = \begin{cases} x(t - s_0, u_1^+, G), & s_0 \leqslant t < s_0 + s_1, \\ u_2^+, & t = s_0 + s_1, \end{cases}$$

onde $u_2^+ = \mathrm{I}(u_2)$.

(iii) Suponha que $\tilde{x}(t, u, G)$ está definida no intervalo $[t_{n-1}, t_n]$ com $\tilde{x}(t_n, u, G) = u_n^+$, onde $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$, $n \in \mathbb{N}$. Se $\varphi(u_n^+, G) = \infty$, definimos

$$\tilde{x}(t, u, G) = x(t - t_n, u_n^+, G)$$

para todo $t \geqslant t_n$. Porém, se $\varphi(u_n^+, G) = s_n$, então

$$\tilde{x}(t, u, G) = \begin{cases} x(t - t_n, u_n^+, G), & t_n \leqslant t < t_{n+1}, \\ u_{n+1}^+, & t = t_{n+1}, \end{cases}$$

onde $u_{n+1}^+ = \mathrm{I}(u_{n+1})$ e $u_{n+1} = x(s_n, u_n^+, G) \in \mathrm{M}$.

A solução $\tilde{x}(t, u, G)$ está definida em cada intervalo $[t_n,\ t_{n+1}]$, onde $t_0 = 0$ e $t_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} s_i$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Consequentemente, $\tilde{x}(t, u, G)$ está definida no intervalo $[0,\ t_{n+1}]$.

Se $\varphi(u_n^+, G) = \infty$ para algum n, o processo descrito acima terminará depois de um número finito de passos. Mas, se $\varphi(u_n^+, G) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, então o processo continuará infinitamente e, neste caso, $\tilde{x}(t, u, G)$ estará definida em $[0,\ T(u, G))$, onde $T(u, G) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$.

Sistemas semidinâmicos impulsivos onde o movimento é definido para todo $t \geqslant 0$ são os mais importantes e interessantes. Além disso, segundo Ciesielski (veja [16]), em muitos casos, os sistemas definidos em $[0, \omega)$, com $\omega < \infty$, podem ser estendidos a $[0, \infty)$, via isomorfismos. Por essa razão, seguindo [1], vamos nos restringir a tais sistemas e, a partir de agora, suporemos que

(C_{SM}) as soluções das equações (4.1) e (4.2) estão definidas em todo o intervalo $[0, \infty)$.

A suposição (C_{SM}) também é razoável e está fundamentada no [12, Capítulo 5], onde os autores apresentam condições suficientes para prolongar a solução de uma EDO generalizada ao intervalo $[0, \infty)$.

Pelo Teorema 3.18 e pela Definição 3.11, a aplicação

$$\pi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h) \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),$$

dada por

$$\pi(t,\, u,\, G) = (x(t,\, u,\, G),\, G_t),$$

define um sistema semidinâmico global associado à EDO generalizada (4.2). Por simplicidade de notação, denotaremos um sistema semidinâmico global por $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h), \pi)$ e a ele nos referiremos como sistema semidinâmico, simplesmente.

Definição 4.1. Seja $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$.

(i) O *movimento de* (u, G) é a função contínua $\pi_{(u,G)}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ definida por $\pi_{(u,G)}(t) = \pi(t, u, G)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) A *órbita positiva* de (u, G) é dada pelo conjunto $\pi^+(u, G) = \{\pi(t, u, G) \colon t \geqslant 0\}$.

Neste capítulo queremos mostrar a existência de um sistema semidinâmico impulsivo associado ao problema de valor inicial para a EDO generalizada impulsiva (4.1). Faremos isso na primeira seção. Na segunda seção, apresentaremos uma versão do Princípio de Invariância de LaSalle para EDOs generalizadas e uma consequência desse resultado para EDOs autônomas com impulsos em tempos variáveis. Na última seção, exibiremos outras propriedades topológicas do sistema semidinâmico impulsivo que exploraremos na primeira seção.

4.1 Existência de um sistema semidinâmico impulsivo

Iniciaremos esta seção apresentando o conceito de um sistema semidinâmico impulsivo relacionado a uma EDO generalizada que foi introduzido em [1, Seção 5].

Definição 4.2. Um *sistema semidinâmico impulsivo* em $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ é uma aplicação $\tilde{\pi}\colon \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h) \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\tilde{\pi}(0, u, G) = (u, G)$ para todo $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$;

(ii) $\tilde{\pi}(s, \tilde{\pi}(t, u, G)) = \tilde{\pi}(t+s, u, G)$ para quaisquer $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ e $t, s \in [0,\, \infty)$;

(iii) para cada $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$, a aplicação $\tilde{\pi}(\cdot, u, G)$ é contínua à direita em todo ponto do intervalo $[0, \infty)$ e o limite lateral à esquerda $\tilde{\pi}(t^-, u, G)$ existe para todo $t > 0$.

Definição 4.3. Seja $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$. A *órbita positiva impulsiva* de (u, G) é dada pelo conjunto $\tilde{\pi}^+(u, G) = \{\tilde{\pi}(t, u, G) \colon t \geqslant 0\}$.

Vamos considerar um sistema semidinâmico $(\mathcal{O}\times\mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\pi)$ associado ao sistema (4.2) e $\pi(t,u,G) = (x(t,u,G), G_t)$ seu movimento, onde $x(t,u,G)$ é a única solução de (4.2) definida no intervalo $[0,\infty)$. Associada a esse movimento, definimos uma aplicação $\tilde{\pi}\colon \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h) \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ por

$$\tilde{\pi}(t,u,G) = \pi(t-t_n, u_n^+, G) \qquad \text{para } \ t_n \leqslant t < t_{n+1} \ \text{ e } \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.4}$$

onde $u = u_0^+$, $t_0 = 0$, $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$, $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \varphi(u_n^+, G)$, $n \in \mathbb{N}_0$ e φ foi definida em (4.3).

Note que

$$\tilde{\pi}(t,u,G) = (\tilde{x}(t,u,G), G_{t-t_n}) \qquad \text{para } \ t_n \leqslant t < t_{n+1} \ \text{ e } \ n \in \mathbb{N}_0,$$

onde $\tilde{x}(t,u,G)$ é a solução de (4.1).

O próximo resultado garante que a aplicação $\tilde{\pi}$ definida em (4.4) é um sistema semidinâmico impulsivo associado à EDO generalizada impulsiva (4.1).

Teorema 4.4 ([1], Teorema 5.2). *A aplicação $\tilde{\pi}$ dada por (4.4) é um sistema semidinâmico impulsivo associado à EDO generalizada impulsiva (4.1). Tal sistema será denotado por $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\, \tilde{\pi})$.*

Demonstração. ⋄ *Prova de* (i): Dado $(u,G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$, segue de (4.4) que

$$\tilde{\pi}(0,u,G) = \pi(0-0, u_0^+, G) = \pi(0-0,u,G) = (u,G).$$

⋄ *Prova de* (ii): Segue as mesmas ideias da prova do item (ii) da [7, Proposição 2.1], fazendo certas adaptações. O leitor motivado a escrevê-la deve se atentar ao fato de que π satisfaz a condição (ii) da Definição 3.8.

⋄ *Prova de* (iii): Seja $(u,G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$. Como $\tilde{x}(t,u,G)$ e G_t são contínuas à direita em todo ponto $t \in [0,\infty)$ e os limites laterais à esquerda $\tilde{x}(t-,u,G)$ e G_{t^-} existem para todo $t > 0$, concluímos que a aplicação $\tilde{\pi}(\cdot,u,G)$ é contínua à direita em todo ponto do intervalo $[0,\infty)$ e o limite lateral à esquerda $\tilde{\pi}(t^-,u,G)$ existe para todo $t > 0$. □

Embora $\tilde{\pi}$ não seja contínua, inspirados em [24, Lema 2.3], os autores de [1] obtiveram o seguinte resultado a respeito da convergência de $\tilde{\pi}$.

Lema 4.5 ([1], Lema 6.1). *Seja $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\, \tilde{\pi})$ um sistema semidinâmico impulsivo. Assuma que $u \in \mathcal{O} \setminus \mathrm{M}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência em $\mathcal{O}$ que converge para u. Seja $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ tal que $G_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} G$. Então, para todo $t \geqslant 0$, existe uma sequência de números reais $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que*

$$\tilde{\pi}(t+\epsilon_n, v_n, G_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t,u,G).$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $x(t, v_n, G_n)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DG_n(x,s) \\ x(0) = v_n, \end{cases} \tag{4.5}$$

definida para todo $t \geqslant 0$. Pela Proposição 2.38, temos $x(t,v_n,G_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t,\, u,\, G)$, onde $x(t,u,G)$ é a solução da EDO generalizada (4.2). Então,

$$\pi(t,v_n,G_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(t,u,G)$$

para cada $t \geqslant 0$, já que $(G_n)_t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} G_t$.

Se $\varphi(u, G) = \infty$, o resultado segue tomando $\epsilon_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Se $\varphi(u, G) < \infty$, então, seguindo as ideias de [24, Lema 2.3], dividimos a prova em três casos.

<u>Caso 1</u>. $0 \leqslant t < s_0 = \varphi(u, G)$.

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < s_0 - t$. Como φ é contínua em $(\mathcal{O} \setminus \mathrm{M}) \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ (veja (C_φ)), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-\epsilon < \varphi(v_n, G_n) - \varphi(u, G)$ para todo $n \geqslant n_0$. Daí, $t < s_0 - \epsilon < \varphi(v_n, G_n)$ para $n \geqslant n_0$. Tomando $\epsilon_n = 0$, obtemos

$$\tilde{\pi}(t + \epsilon_n, v_n, G_n) = \tilde{\pi}(t, v_n, G_n) = \pi(t, v_n, G_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(t, u, G) = \tilde{\pi}(t, u, G).$$

<u>Caso 2</u>. $t = s_0 = \varphi(u, G)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\epsilon_n = \varphi(v_n, G_n) - \varphi(u, G)$. Assim, temos

$$\tilde{\pi}(t + \epsilon_n, v_n, G_n) = \tilde{\pi}(\varphi(v_n, G_n), v_n, G_n) = \pi(0, \mathrm{I}((v_n)_1), G_n),$$

onde $(v_n)_1 = x(\varphi(v_n, G_n), v_n, G_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Mas, como $\mathrm{I}((v_n)_1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{I}(u_1)$, obtemos

$$\tilde{\pi}(t + \epsilon_n, v_n, G_n) = \pi(0, \mathrm{I}((v_n)_1), G_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(0, u_1^+, G) = \tilde{\pi}(t, u, G).$$

<u>Caso 3</u>. $t > \varphi(u, G)$.

Neste caso, podemos escrever

$$t = \sum_{i=0}^{m-1} s_i + t',$$

para algum $m \in \mathbb{N}$ e algum $0 \leqslant t' < s_m$. Agora, seja $t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi((v_n)_i^+, G_n)$, onde

$$\begin{aligned}
&(v_n)_0^+ = v_n,\\
&(v_n)_i = x(\varphi((v_n)_{i-1}^+, G_n), (v_n)_{i-1}^+, G_n) \quad \text{e}\\
&\mathrm{I}((v_n)_i) = (v_n)_i^+, \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant m-1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{\pi}(t_n, v_n, G_n) = ((v_n)_m^+, G_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u_m^+, G).$$

Definindo $\epsilon_n = t_n + t' - t$, $n \in \mathbb{N}$, e levando em conta que $u_m^+ \notin \mathrm{M}$, posto que $\mathrm{I}(\mathrm{M} \cap \mathcal{O}) \subset \mathcal{O} \setminus \mathrm{M}$ e $t' < s_m = \varphi(u_m^+, G)$, segue do Caso 1 que

$$\tilde{\pi}(t + \epsilon_n, v_n, G_n) = \tilde{\pi}(t', \tilde{\pi}(t_n, v_n, G_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t', u_m^+, G) = \tilde{\pi}(t, u, G),$$

finalizando a prova. □

Definição 4.6. Diremos que um subconjunto Θ de $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ é *positivamente invariante* se, para todo $(v_0,\, G_0) \in \Theta$ e todo $t \in [0, \infty)$, tem-se $\tilde{\pi}(t,\, v_0,\, G_0) \in \Theta$.

A órbita positiva de um ponto $(v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ é positivamente invariante (pela definição de órbita positiva e pela condição (ii) da Definição 4.2). Porém, não é verdade que o fecho da órbita positiva $\tilde{\pi}^+(v, G)$, com $(v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$, seja sempre positivamente invariante. Mas, pode-se garantir o seguinte o resultado.

Lema 4.7 ([12], Lema 14.20)**.** *Para cada $(v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$, o conjunto $\overline{\tilde{\pi}^+(v, G)} \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h))$ é positivamente invariante.*

Demonstração. Sejam $(u, F) \in \overline{\tilde{\pi}^+(v, G)} \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h))$ e $t \geqslant 0$ arbitrários. Então, existe uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{\pi}(t_n, v, G) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, F)$. Como $u \notin \mathrm{M}$, segue do Lema 4.5 que existe uma sequência de números reais $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que

$$\tilde{\pi}(t + t_n + \epsilon_n, v, G) = \tilde{\pi}(t + \epsilon_n, \pi(t_n, v, G)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{\pi}(t, u, F).$$

Por conseguinte, $\tilde{\pi}(t, u, F) \in \overline{\tilde{\pi}^+(v, G)} \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h))$. Como $(u, F) \in \overline{\tilde{\pi}^+(v, G)} \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h))$ e $t \geqslant 0$ foram tomados arbitrariamente, concluímos que o conjunto $\overline{\tilde{\pi}^+(v, G)} \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h))$ é positivamente invariante. □

4.2 Princípio de Invariância de LaSalle

Nesta seção vamos apresentar a versão do Princípio de Invariância de LaSalle no contexto das EDOs generalizadas que foi provada em [1]. Veremos que a existência de um sistema semidinâmico impulsivo $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\, \tilde{\pi})$ (garantida pelo Teorema 4.4) será fundamental para obter tal resultado.

Antes de abordar o Princípio de Invariância de LaSalle para EDOs generalizadas, alguns conceitos e resultados preliminares se farão necessários.

Definição 4.8. Seja $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\, \tilde{\pi})$ um sistema semidinâmico impulsivo. O *conjunto de todos os pontos limites* de $\tilde{\pi}(t,\, u,\, G)$, quando $t \to \infty$, é dado por

$$\Omega^+(u,\, G) = \{(u^*,\, G^*) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)\colon \tilde{\pi}(\lambda_n,\, u,\, G) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (u^*,\, G^*)$$
$$\text{para alguma sequência de números reais positivos} \quad \lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\}.$$

Diremos que $\Omega^+(u,\, G)$ é o *conjunto limite positivo* de $\tilde{\pi}(t,\, u,\, G)$.

O próximo resultado segue diretamente do Lema 4.5.

Lema 4.9 ([12], Lema 14.22)**.** *O conjunto $\Omega^+(u,\, G) \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h))$ é positivamente invariante. Em particular, se $\Omega^+(u,\, G) \cap (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)) = \varnothing$, então $\Omega^+(u,\, G)$ é positivamente invariante.*

O próximo resultado apresenta condições sob as quais o conjunto limite positivo é não vazio.

Proposição 4.10 ([1], Proposição 6.3)**.** *Seja $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\, \tilde{\pi})$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $\tilde{x}(t,\, u,\, G)$ permanecer num subconjunto compacto $\mathcal{C}$ de $\mathcal{O}$ para todo $t \in [0,\, \infty)$, então $\Omega^+(u,\, G)$ será não vazio.*

Demonstração. Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência tal que $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos garantir que existe $p(n) \in \mathbb{N}^*$ de forma que $t_{p(n)} \leqslant \lambda_n < t_{p(n)+1}$, onde $t_{p(n)} = \sum_{i=0}^{p(n)-1} s_i$. Pela definição de $\tilde{\pi}$, temos

$$\tilde{\pi}(\lambda_n, u, G) = \pi(\lambda_n - t_{p(n)}, u^+_{p(n)}, G) = (x(\lambda_n - t_{p(n)}, u^+_{p(n)}, G), G_{\lambda_n - t_{p(n)}}).$$

Como $\mathcal{C}$ e $\mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ são conjuntos compactos ($\mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ é compacto pelo Corolário 3.14), existem uma subsequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $u^* \in \mathcal{C}$ e $G^* \in \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ tais que

$$\tilde{x}(\lambda_{n_k}, u, G) = x(\lambda_{n_k} - t_{p(n_k)}, u^+_{p(n_k)}, G) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} u^* \quad \text{e}$$
$$G_{\lambda_{n_k} - t_{p(n_k)}} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} G^* \quad \text{em} \quad \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h).$$

Logo, $\tilde{\pi}(\lambda_{n_k},\, u,\, G) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} (u^*,\, G^*)$ e, como $\lambda_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, podemos inferir que $(u^*,\, G^*) \in \Omega^+(u,\, G)$. Logo, $\Omega^+(u,\, G) \neq \varnothing$. □

Na sequência temos o conceito de um funcional de Lyapunov associado ao sistema semidinâmico impulsivo $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\, \widetilde{\pi})$.

Definição 4.11. Um *funcional de Lyapunov associado ao sistema semidinâmico impulsivo* $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h),\, \widetilde{\pi})$ é uma função não negativa $V \colon \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h) \to \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) V é contínua em $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$;

(ii) $\dot{V}(u, G) \leqslant 0$ para $(u, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$, onde

$$\dot{V}(u,\, G) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{V(\widetilde{\pi}(h, u, G)) - V(u, G)}{h}.$$

Observação 4.12. A condição (ii) da Definição 4.11 assegura que $V(\widetilde{\pi}(t, u, G)) \leqslant V(u, G)$ para todo $t \geqslant 0$.

Já temos as preliminares necessárias para abordar o Princípio de Invariância de LaSalle para EDOs generalizadas, resultado que segue abaixo.

Teorema 4.13 (Princípio de Invariância de LaSalle - [1], Teorema 6.5)**.** *Seja* $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\, \widetilde{\pi})$ *um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que* $\widetilde{x}(t,\, u,\, G)$ *permaneça num subconjunto compacto* $\mathcal{C}$ *de* $\mathcal{O}$ *para todo* $t \in [0,\, \infty)$*. Seja* $V \colon \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h) \to \mathbb{R}_+$ *um funcional de Lyapunov como definido na Definição 4.11. Defina*

$$E = \{(v, H) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h) \colon \dot{V}(v, H) = 0\}.$$

Seja W *o maior subconjunto de* E *positivamente invariante. Se*

$$\Omega^+(u,\, G) \cap (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)) = \varnothing,$$

então $\Omega^+(u,\, G)$ *está contido em* W*.*

Demonstração. Pelo Lema 4.9 e pela Proposição 4.10, podemos afirmar que $\Omega^+(u,\, G) \neq \varnothing$ e $\Omega^+(u,\, G)$ é positivamente invariante. Como $\Omega^+(u,\, G) \neq \varnothing$, para continuar a prova, vamos considerar dois casos: quando $\Omega^+(u,\, G)$ é um conjunto unitário e o caso contrário.

<u>Caso 1</u>. $\Omega^+(u,\, G)$ é um conjunto unitário.

Neste caso, digamos que $\Omega^+(u, G) = \{(u^*, G^*)\}$, com $(u^*, G^*) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$. Da invariância positiva de $\Omega^+(u,\, G)$ segue que

$$\widetilde{\pi}(t, u^*, G^*) = (u^*, G^*) \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Dessa forma,

$$\dot{V}(u^*,\, G^*) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{V(\widetilde{\pi}(t, u^*, G^*) - V(u^*,\, G^*)}{h} = 0,$$

de onde segue que $\Omega^+(u, G) \subset E$. Como W é o maior subconjunto positivamente invariante contido em E, concluímos que $\Omega^+(u,\, G) \subset W$.

<u>Caso 2</u>. $\Omega^+(u,\, G)$ não é um conjunto unitário.

Sejam $(u_1, G_1), (u_2, G_2) \in \Omega^+(u,\, G)$. Vamos mostrar que $V(u_1, G_1) = V(u_2, G_2)$. De fato, pela definição de conjunto limite positivo (veja Definição 4.8), existem sequências $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}_+$, com $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\kappa_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que

$$\widetilde{\pi}(\lambda_n, u, G) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u_1, G_1) \quad \text{e} \quad \widetilde{\pi}(\kappa_n, u, G) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u_2, G_2).$$

Podemos escolher subsequências $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\kappa_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\lambda_{n_k} \leqslant \kappa_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Então, a condição (ii) da Definição 4.11 implica que

$$V(\widetilde{\pi}(\kappa_{n_k}, u, G)) \leqslant V(\widetilde{\pi}(\lambda_{n_k}, u, G)). \tag{4.6}$$

Como V é contínua (pela condição (i) da Definição 4.11), temos

$$V(u_2, G_2) \leqslant V(u_1, G_1) \quad \text{quando} \;\; k \to \infty \;\; \text{em (4.6)}. \tag{4.7}$$

Similarmente, podemos escolher subsequências $(\kappa_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ e $(\lambda_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ tais que $\kappa_{n_m} \leqslant \lambda_{n_m}$, $m \in \mathbb{N}$, e concluir que

$$V(u_1, G_1) \leqslant V(u_2, G_1). \tag{4.8}$$

Por (4.7) e (4.8), obtemos $V(u_1, G_1) = V(u_2, G_1)$, provando que V é constante em $\Omega^+(u, F)$, já que $(u_1, G_1), (u_2, G_2)$ foram escolhidos de modo arbitrário em $\Omega^+(u,\, G)$.

Como $\Omega^+(u, G)$ é positivamente invariante, a derivada de V satisfaz $\dot{V}(u^*, G^*) = 0$ para todo $(u^*, G^*) \in \Omega^+(u, G)$. Logo, $\Omega^+(u, G) \subset E$ e, como W é o maior subconjunto positivamente invariante contido em E, concluímos que $\Omega^+(u,\, G) \subset W$, finalizando a prova. $\square$

4.2.1 Uma aplicação para EDOs autônomas

Nesta subseção apresentaremos uma versão do Princípio de Invariância de LaSalle para EDOs autônomas com impulsos em tempos variáveis, obtida também em [1]. Vale observar que esse princípio é também válido na ausência de impulsos.

Vamos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \mathrm{I}\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.9}$$

onde

(i) $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$;

(ii) $f\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ é uma função;

(iii) $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$;

(iv) M é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$;

(v) $\mathrm{I}\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ é uma aplicação contínua, denominada *operador de impulso* tal que $\mathrm{I}(\mathrm{M}) \cap \mathrm{M} = \varnothing$.

A teoria básica das equações diferenciais impulsivas, relacionada ao problema (4.9), pode ser encontrada em [30, 34], por exemplo.

Vamos denotar a solução de (4.9) por $x(t, x_0, f)$. Também vamos admitir que M satisfaz a seguinte condição:

($\widetilde{C}_M$) Se $x(t_0, x_0, f) \in \mathrm{M}$ para algum $t_0 > 0$, onde $x(t) = x(t, x_0, f)$ é solução de (4.9), então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$x(t, x_0, f) \notin \mathrm{M}, \quad \text{para} \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \cup (t_0, t_0 + \varepsilon).$$

Com a condição ($\widetilde{C}_M$), impomos que a solução $x(t_0, x_0, f)$ de (4.9) encontre M somente em pontos isolados.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as funções $f\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ que satisfazem as seguintes condições:

(A) existe uma constante positiva $K > 0$ tal que

$$\|f(x)\| \leqslant K, \quad \text{para todo } \ x \in \mathcal{O};$$

(B) existe uma constante positiva $L > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\|, \quad \text{para quaisquer } \ x, y \in \mathcal{O};$$

Agora, vamos definir uma função $\phi\colon \mathcal{O} \times \mathcal{A} \to (0, \infty]$ associada ao problema (4.9) por

$$\phi(u, f) = \begin{cases} s, & \text{se } \ x(s, u, f) \in \mathrm{M} \ \text{ e } \ x(t, u, f) \notin \mathrm{M} \ \text{ para } \ 0 < t < s, \\ \infty, & \text{se } \ x(t, u, f) \notin \mathrm{M} \ \text{ para todo } \ t > 0. \end{cases}$$

Lema 4.14 ([1], Lema 7.1)**.** *Seja $f \in \mathcal{A}$. Para cada $x \in \mathcal{O}$ e cada $t \geqslant 0$, defina*

$$F(x, t) = f(x)t.$$

Então, $F \in \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$, onde $\Omega = \mathcal{O} \times [0, \infty)$ e $h(t) = (K + L)t$.

Demonstração. Devemos mostrar que F satisfaz as condições da Definição 3.13, sendo h contínua, não decrescente e tal que $|h(t+s_2) - h(t+s_1)| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)|$, para quaisquer $s_1, s_2, t \in [0, \infty)$.

(a) Inicialmente, note que $h(t) = (K + L)t$ é crescente, contínua e

$$|h(t + s_2) - h(t + s_1)| = |(K + L)(s_2 - s_1)| = |h(s_2) - h(s_1)|,$$

para quaisquer $s_1, s_2, t \in [0, \infty)$.

(b) Dado $x \in \mathcal{O}$, temos $F(x, 0) = f(x) \cdot 0 = 0$.

(c) Dados (x, s_2), $(x, s_1) \in \Omega$, temos

$$\|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| = \|f(x)\|\,|s_2 - s_1| \leqslant K|s_2 - s_1| \leqslant$$

$$\leqslant (K + L)|s_2 - s_1| = |h(s_2) - h(s_1)|.$$

(d) Por fim, dados (x, s_2), (x, s_1), (y, s_2), $(y, s_1) \in \Omega$, obtemos

$$\|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1)\| = \|(f(x) - f(y))(s_2 - s_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant L\,\|x - y\|\,|s_2 - s_1| \leqslant (K + L)\,\|x - y\|\,|s_2 - s_1|$$
$$= \|x - y\|\,|h(s_2) - h(s_1)|.$$

De (a), (b), (c) e (d) e da Definição 3.13 segue que $F \in \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$. $\square$

Seja $x(t, x_0, f)$ a solução de (4.9) definida em $[0, \infty)$. O conjunto de todos os *pontos limites* de $x(t, x_0, f)$, quando $t \to \infty$, é definido por

$$\omega(x_0, f) = \{x^* \in \mathcal{O}\colon\ x(\lambda_n, x_0, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*, \text{ para alguma sequência}$$
$$\text{de números reais positivos } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\}.$$

O conjunto $\omega(x_0, f)$ é dito o *conjunto ω-limite* da solução $x(t, x_0, f)$.

Diremos que um subconjunto B de $\mathcal{O}$ é *positivamente invariante* com respeito ao sistema (4.9) se, para cada $x_0 \in B$, $x(t,\, x_0, f) \in B$ para todo $t \in [0,\, \infty)$.

O próximo lema será importante para provar que, sob uma certa condição, o conjunto ω-limite de $x(t, x_0, f)$ é positivamente invariante, resultado este que será provado na sequência.

Lema 4.15. *Suponha que $x_0 \in \mathcal{O} \setminus \mathrm{M}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência em $\mathcal{O}$ que converge para um ponto x_0. Seja $x(t) = x(t, x_n, f)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \mathrm{I}\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}, \\ x(0) = x_n, \end{cases}$$

definida no intervalo $[0, \infty)$. Então, para todo $t \geqslant 0$, existe uma sequência de números reais $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que

$$x(t + \varepsilon_n, x_n, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t, x_0, f).$$

A prova do Lema 4.15 é análoga à prova do Lema 4.5.

Lema 4.16. *Seja $x_0 \in \mathcal{O}$. Se $\omega(x_0, f) \cap \mathrm{M} = \varnothing$, então o conjunto ω-limite $\omega(x_0, f)$ é positivamente invariante com respeito ao sistema* (4.9).

Demonstração. Dado $x^* \in \omega(x_0, f)$, existe uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, tal que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e

$$x(\lambda_n, x_0, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^* \in \mathcal{O}.$$

Pelo Lema 4.15, existe uma sequência de números reais $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que

$$x(t + \varepsilon_n, x(\lambda_n, x_0, f), f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t, x^*, f) \in \mathcal{O},$$

para qualquer $t \geqslant 0$. Como $x(t + \varepsilon_n, x(\lambda_n, x_0, f), f) = x(\lambda_n + \varepsilon_n + t, x_0, f)$ (uma vez que a EDO é autônoma) e $t + \varepsilon_n + \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, obtemos o resultado. □

Antes de introduzirmos a versão do Princípio de Invariância de LaSalle para uma EDO autônoma impulsiva, vamos apresentar o conceito de função de Lyapunov com respeito ao sistema (4.9).

Definição 4.17. Diremos que uma função não negativa $U\colon \mathcal{O} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ é uma *função de Lyapunov* associada ao sistema (4.9) se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) U é contínua em $\mathcal{O} \times \mathcal{A}$,

(ii) $\dot{U}(x_0, f) \leqslant 0$, para $(x_0, f) \in \mathcal{O} \times \mathcal{A}$, onde

$$\dot{U}(x_0, f) = \limsup_{\eta\to 0^+} \frac{U(x(\eta, x_0, f), f) - U(x_0, f)}{\eta}.$$

Teorema 4.18 (Princípio de Invariância de LaSalle - [1], Teorema 7.5)**.** *Suponha que* $x(t) = x(t, x_0, f)$ *permaneça num subconjunto compacto de* $\mathcal{O}$ *para todo* $t \in [0, \infty)$*, onde* $x(t) = x(t, x_0, f)$ *é a solução de* (4.9) *com* $f \in \mathcal{A}$*. Suponha que* U *seja uma função de Lyapunov definida como na Definição 4.17. Defina* $H_f = \{\widetilde{x} \in \mathcal{O} \colon \dot{U}(\widetilde{x}, f) = 0\}$ *e seja* $\mathcal{N}$ *o maior subconjunto positivamente invariante de* H_f*. Se* $\omega(x_0, f) \cap \mathrm{M} = \varnothing$*, então* $\omega(x_0, f) \subset \mathcal{N}$*.*

Demonstração. Seja $z(t)$ a solução do sistema não impulsivo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Sabemos que z satisfaz a equação integral

$$z(t) = x_0 + \int_0^t f(z(s))ds, \quad t \geqslant 0,$$

já que f satisfaz as condições (A) e (B) e é, portanto, limitada e contínua - a integral que aparece no lado direito da igualdade acima é no sentido de Riemann.

Definindo

$$F(x, t) = f(x)t, \qquad (x, t) \in \mathcal{O} \times [0, \infty),$$

podemos afirmar que $z(t)$ é também a solução da EDO generalizada

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,\, t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Para se certificar dessa última afirmação, solicitamos ao leitor que recorde sobre o que foi dito na introdução do Capítulo 2.

O Lema 4.14 garante que $F \in \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$, onde $h(t) = (K + L)t$ e $\Omega = \mathcal{O} \times [0, \infty)$.

Pelo Teorema 3.18, a aplicação $\pi \colon [0, \infty) \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h) \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ dada por

$$\pi(t,\, x_0,\, F) = (z(t,\, x_0,\, F),\, F_t), \tag{4.11}$$

é um sistema semidinâmico em $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$ associado ao sistema (4.10). Pelo Teorema 4.4, $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h), \widetilde{\pi})$ é o sistema semidinâmico impulsivo associado ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,\, t) \\ \mathrm{I} \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N} \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.12}$$

onde

$$\widetilde{\pi}(t,\, x_0,\, F) = (x(t,\, x_0,\, F),\, F_{t-t_n}),$$

com $x(t) = \widetilde{z}(t)$ sendo a única solução maximal de (4.9), para $t_n \leqslant t < t_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ com $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \sum_{i=0}^n s_i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ e $s_i = \varphi((x_0)_i^+, F)$.

Defina $V \colon \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h) \to \mathbb{R}_+$ por

$$V(x(t), F) = U(x(t), f), \quad t \geqslant 0.$$

Note que

$$F_h(x, t) = F(x, t + h) - F(x, h) = f(x)t = F(x, t),$$

para quaisquer $x \in \mathcal{O}$ e $t, h \geqslant 0$. Dessa forma, $V(x(t), F_h) = V(x(t), F) = U(x(t), f)$ para todo $h \geqslant 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t),\, F) &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{V(x(h,\, x(t),\, F),\, F_h) - V(x(t),\, F)}{h} \\ &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{U(x(h,\, x(t),\, f), f) - U(x(t),\, f)}{h} \\ &= \dot{U}(x(t), f).\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}V(\mathrm{I}(u_1), F) &= V(u_1^+, F) = V(x(\varphi(u, F), u, F), F) \\ &= V(x(\varphi(u, F), u, F), F_{\varphi(u,F)}) \\ &= V(\pi(\varphi(u, F), u, F)),\end{aligned}$$

para todo $(u, F) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)$.

Agora, seja

$$E = \{(v, H) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h) \colon \dot{V}(v, H) = 0\}$$

e seja $W \subset E$ o maior subconjunto positivamente $\tilde{\pi}-$invariante de E. Sabendo que $\omega(x_0, f) \cap \mathrm{M} = \varnothing$, podemos inferir que $\Omega^+(x_0,\, F) \cap (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h)) = \varnothing$. Então, pelo Teorema 4.13, temos $\Omega^+(x_0,\, F) \subset W$. Para completar a prova, vamos provar a seguinte asserção.

Afirmação: $\omega(x_0, f) \subset \mathcal{N}$.

Com efeito, dado $x^* \in \omega(x_0, f)$, existe uma sequência de números reais positivos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e

$$x(\lambda_n) = x(\lambda_n, x_0, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*.$$

Note que $V(x(\lambda_n), F_{\lambda_n}) = U(x(\lambda_n), f)$. Como o conjunto $\mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ é compacto, a menos de uma subsequência de $(F_{\lambda_n})_n \in \mathbb{N}$, existe $F^* \in \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ tal que $F_{\lambda_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F^*$. Daí,

$$\limsup_{n\to\infty} V(x(\lambda_n), F_{\lambda_n}) = \limsup_{n\to\infty} U(x(\lambda_n), f),$$

de onde segue que

$$\dot{U}(x^*, f) = \dot{V}(x^*, F^*).$$

Como $(x^*, F^*) \in \Omega^+(x_0,\, F)$, pelo Teorema 4.13 extraímos que $\dot{V}(x^*, F^*) = 0$. Sendo assim,

$$\dot{U}(x^*, f) = \dot{V}(x^*, F^*) = 0$$

e $x^* \in H_f$. Por conseguinte, $\omega(y_0, f) \subset H_f$.

Como $\omega(y_0, f)$ é positivamente invariante e $\mathcal{N}$ é o maior subconjunto positivamente invariante de H_f, concluímos que $\omega(y_0, f) \subset \mathcal{N}$, provando a afirmação e finalizando a prova. □

4.3 Propriedades recursivas

Finalizaremos este capítulo apresentando algumas propriedades topológicas de um sistema semidinâmico impulsivo $(\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega,\, h),\, \tilde{\pi})$ como o que foi definido na Seção 4.1.

Esta seção está fundamentada nas referências [6], [13] e [12, Capítulo 14].

No conjunto $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$, vamos considerar a seguinte métrica

$$\varrho((x, F_1), (y, F_2)) = \|x - y\| + \rho(F_1, F_2),$$

para quaisquer $(x, F_1), (y, F_2) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$, onde ρ foi definida em (2.18).

Adicionalmente, vamos considerar a seguinte condição (T):

(T) Se $(u, F) \in \mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$, $(v, H) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência tal que $\widetilde{\pi}(t_n, v, H) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, F)$, então existe uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que $\pi(\alpha_n, \widetilde{\pi}(t_n, v, H)) \in \mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ para n suficientemente grande, ou seja, $\widetilde{\pi}(t_n + \alpha_n, v, H) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathrm{I}(u), F)$.

A seguir, temos os conceitos de minimalidade e recorrência. Para sistemas semidinâmicos impulsivos gerais, esses conceitos podem ser encontrados em [13].

Definição 4.19. Diremos que um subconjunto $\Sigma \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ é *minimal* quando $\Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)) \neq \varnothing$, Σ é fechado, $\Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ é positivamente invariante e Σ não contém nenhum subconjunto próprio satisfazendo todas essas condições.

Definição 4.20. Diremos que um ponto $(u, F) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ é *recorrente* se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $T = T(\epsilon) > 0$ tal que, para quaisquer $t, s \geqslant 0$, o intervalo $[0, T]$ contém um número $\tau > 0$ tal que

$$\varrho(\widetilde{\pi}(t, u, F), \widetilde{\pi}(s + \tau, u, F)) < \epsilon.$$

Diremos que um subconjunto $\Sigma \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ é *recorrente* se cada ponto $(u, F) \in \Sigma$ é recorrente.

Os próximos resultados apresentam caracterizações dos conjuntos minimais de $\mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$.

Teorema 4.21 ([12], Teorema 14.28)**.** *Um subconjunto $\Sigma \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ é minimal se, e somente se, $\Sigma = \overline{\widetilde{\pi}^+(u, F)}$, para todo $(u, F) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$.*

Demonstração. $\diamond$ *Prova de* ($\Rightarrow$): Suponha que Σ seja minimal e tome $(u, F) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ arbitrariamente.

Como $\Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ é positivamente invariante e Σ é fechado, temos

$$\overline{\widetilde{\pi}^+(u, F)} \subset \overline{\Sigma} = \Sigma.$$

Sabendo que $\overline{\widetilde{\pi}^+(u, F)} \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)) \neq \varnothing$, $\overline{\widetilde{\pi}^+(u, F)}$ é fechado e $\overline{\widetilde{\pi}^+(u, F)} \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ é positivamente invariante (pelo Lema 4.7), a minimalidade de Σ implica $\Sigma = \overline{\widetilde{\pi}^+(u, F)}$.

$\diamond$ *Prova de* ($\Leftarrow$): Agora, suponha que $\Sigma = \overline{\widetilde{\pi}^+(u, F)}$ para todo $(u, F) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$. Seja $\Theta \subset \Sigma$ tal que $\Theta \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)) \neq \varnothing$, Θ seja fechado e $\Theta \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ seja positivamente invariante. Tome $(v, G) \in \Theta \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$. Então $(v, G) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$, o que implica $\Sigma = \overline{\widetilde{\pi}^+(v, G)}$. Finalmente, como $\Theta \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ é positivamente invariante e Θ é fechado, obtemos

$$\Theta \subset \Sigma = \overline{\widetilde{\pi}^+(v, G)} \subset \overline{\Theta} = \Theta,$$

ou seja, $\Sigma = \Theta$. Isso prova que Σ é minimal. $\square$

Teorema 4.22 ([12], Teorema 14.29). *Seja* $\Sigma \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ *e suponha que, para todo* $(u, F) \in \Sigma$, $\Omega^+(u, F) \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)) \neq \varnothing$. *Então,* Σ *é minimal se, e somente se,* $\Sigma = \Omega^+(u, F)$ *para todo* $(u, F) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$.

Demonstração. ◇ *Prova de* (⇒): Assuma que Σ seja minimal e tome $(u, F) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ arbitrariamente.

Sabendo que $\Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ é positivamente invariante, $\Omega^+(u, F) \subset \overline{\tilde{\pi}^+(u, F)}$ e Σ é fechado, temos

$$\Omega^+(u, F) \subset \overline{\tilde{\pi}^+(u, F)} \subset \overline{\Sigma} = \Sigma.$$

Como $\Omega^+(u, F) \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)) \neq \varnothing$, $\Omega^+(u, F)$ é fechado e $\Omega^+(u, F) \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ é positivamente invariante (pelo Lema 4.9), a minimalidade de Σ implica $\Sigma = \Omega^+(u, F)$.

◇ *Prova de* (⇐): Agora, suponha que $\Sigma = \Omega^+(u, F)$ para todo $(u, F) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$. Seja $\Theta \subset \Sigma$ tal que $\Theta \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)) \neq \varnothing$, Θ seja fechado e $\Theta \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ seja positivamente invariante. Tome $(v, G) \in \Theta \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$. Então $(v, G) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$, o que implica $\Sigma = \Omega^+(v, G)$. Finalmente, como $\Theta \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ é positivamente invariante e fechado, obtemos

$$\Theta \subset \Sigma = \Omega^+(v, G) \subset \overline{\tilde{\pi}^+(v, G)} \subset \overline{\Theta} = \Theta,$$

de onde segue que $\Sigma = \Theta$, concluindo que Σ é minimal. □

O próximo teorema atesta que conjuntos minimais e compactos são recorrentes. Sua prova foi inspirada na prova do [13, Teorema 4.17].

Teorema 4.23 ([12], Teorema 14.30). *Se o conjunto* $\Sigma \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$ *for minimal e compacto, então o conjunto* $\Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ *será recorrente.*

Demonstração. Seja Σ um conjunto compacto e minimal. Suponha, por absurdo, que $(u, F) \in \Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ não seja um ponto recorrente. Então, existem $\epsilon > 0$ e sequências $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e

$$\varrho(\tilde{\pi}(t_n, u, F), \tilde{\pi}(s_n + \tau, u, F)) \geqslant \epsilon, \text{ para quaisquer } \tau \in [0, \lambda_n] \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Note que $\tilde{\pi}(t_n, u, F), \tilde{\pi}\left(s_n + \frac{\lambda_n}{2}, u, F\right) \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que $\Sigma \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ é positivamente invariante. Como Σ é compacto, podemos assumir que existem (u_1, F_1), $(u_2, F_2) \in \Sigma$ tais que

$$\varrho(\tilde{\pi}(t_n, u, F), (u_1, F_1)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{e} \quad \varrho\left(\tilde{\pi}\left(s_n + \frac{\lambda_n}{2}, u, F\right), (u_2, F_2)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Para continuar, vamos considerar dois casos, a saber, quando $u_2 \notin \mathrm{M}$ e quando $u_2 \in \mathrm{M}$.

<u>Caso 1</u>. $u_2 \notin \mathrm{M}$.

Seja $t \geqslant 0$ tal que $t \neq \sum_{j=0}^{k} \varphi((u_2)_j^+, F)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, ou seja, t não é um momento de impulso. Usando a continuidade de π e I, obtemos $\delta > 0$ de forma que, se $\varrho((w, I), (u_2, F_2)) < \delta$, então

$$\varrho(\tilde{\pi}(t, w, I), \tilde{\pi}(t, u_2, F_2)) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.14}$$

Agora, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\lambda_{n_0}}{2} > t$,

$$\varrho(\tilde{\pi}(t_{n_0}, u, F), (u_1, F_1)) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad \varrho\left(\tilde{\pi}\left(s_{n_0} + \frac{\lambda_{n_0}}{2}, u, F\right), (u_2, F_2)\right) < \delta. \tag{4.15}$$

Por (4.13), (4.14) e (4.15), obtemos

$$\begin{aligned}\varrho(\widetilde{\pi}(t,u_2,F_2),(u_1,F_1)) &\geqslant \varrho\left(\widetilde{\pi}(t_{n_0},u,F),\pi\left(s_{n_0}+\frac{\lambda_{n_0}}{2}+t,u,F\right)\right)\\ &\quad-\varrho\left(\widetilde{\pi}(t,u_2,F_2),\widetilde{\pi}\left(t,\pi\left(s_{n_0}+\frac{\lambda_{n_0}}{2},u,F\right)\right)\right)\\ &\quad-\varrho(\widetilde{\pi}(t_{n_0},u,F),(u_1,F_1))\\ &> \epsilon-\frac{\epsilon}{3}-\frac{\epsilon}{3}=\frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Como t foi escolhido de modo arbitrário, podemos inferir que

$$\varrho(\widetilde{\pi}(t,u_2,F_2),(u_1,F_1)) > \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $t \geqslant 0$, com $t \neq \sum_{j=0}^{k}\varphi((u_2)_j^+,F)$, $k\in\mathbb{N}_0$.

Por outro lado, se existir $k\in\mathbb{N}$ tal que $t=\sum_{j=0}^{k}\varphi((u_2)_j^+,F)$, então poderemos escolher uma sequência $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+$ tal que

$$\beta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=0}^{k}\phi((u_2)_j^+,F) \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{k}\varphi((u_2)_j^+,F) < \beta_n < \sum_{j=0}^{k+1}\varphi((u_2)_j^+,F).$$

Pelo que foi constatado anteriormente, podemos afirmar que

$$\varrho(\widetilde{\pi}(\beta_n,u_2,F_2),(u_1,F_1)) > \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para } n\in\mathbb{N}.$$

Fazendo $n\to\infty$, obtemos

$$\varrho\left(\widetilde{\pi}\left(\sum_{j=0}^{k}\phi((u_2)_j^+,F),u_2,F_2\right),(u_1,F_1)\right) \geqslant \frac{\epsilon}{3},$$

posto que $\widetilde{\pi}$ é contínua à direita. Dessa forma,

$$\varrho(\widetilde{\pi}(t,u_2,F_2),(u_1,F_1)) \geqslant \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } t\geqslant 0,$$

de onde podemos afirmar que $(u_1,F_1)\notin\overline{\widetilde{\pi}^+(u_2,F_2)}$. Mas, como Σ é minimal, temos $\Sigma=\overline{\widetilde{\pi}^+(u_2,F_2)}$ pelo Teorema 4.21. Então, $(u_1,F_1)\notin\Sigma$, o que é uma contradição.

Caso 2. $u_2\in\mathrm{M}$.

Pela condição (T), existe uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+$, tal que $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\varrho\left(\widetilde{\pi}\left(\alpha_n+s_n+\frac{\lambda_n}{2},u,F\right),(\mathrm{I}(u_2),F_2)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\Sigma\setminus(\mathrm{M}\times\mathcal{F}_0^*(\Omega,h))$ é positivamente invariante e $(u,F)\in\Sigma\setminus(\mathrm{M}\times\mathcal{F}_0^*(\Omega,h))$, temos $(\mathrm{I}(u_2),F_2)\in\overline{\Sigma}=\Sigma$. Vamos, portanto, considerar o movimento $\widetilde{\pi}(t,\mathrm{I}(u_2),F_2)$ para todo $t\geqslant 0$. Sabendo que $\mathrm{I}(\mathrm{M})\cap\mathrm{M}=\varnothing$, podemos atestar que $\mathrm{I}(u_2)\notin\mathrm{M}$. Seguindo as ideias do Caso 1, obtemos

$$\varrho(\widetilde{\pi}(t,I(u_2),F_2),(u_1,F_1)) \geqslant \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } t\geqslant 0,$$

implicando $(u_1,F_1)\notin\overline{\widetilde{\pi}^+(\mathrm{I}(u_2),F_2)}$, o que também é uma contradição, já que Σ é minimal.

Pelo que provamos nos Casos 1 e 2 concluímos que $(u,F)\in\Sigma\setminus(\mathrm{M}\times\mathcal{F}_0^*(\Omega,h))$ deve ser um ponto recorrente. Sendo (u,F) arbitrário, deduzimos que $\Sigma\setminus(\mathrm{M}\times\mathcal{F}_0^*(\Omega,h))$ é um conjunto recorrente. $\square$

Como consequência imediata do Teorema 4.23, temos o seguinte resultado, com o qual finalizamos este capítulo e este trabalho.

Corolário 4.24. *Seja* $(u, F) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h)$. *Se* $\Omega^+(u,\, F)$ *é compacto e minimal, então* $\Omega^+(u,\, F) \setminus (\mathrm{M} \times \mathcal{F}_0^*(\Omega, h))$ *é recorrente.*

Índice Remissivo

Referências

[1] S. M. Afonso, E. M. Bonotto, M. Federson, and Š. Schwabik. Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for differential systems with impulses at variable times. *Journal of Differential Equations*, 250(7):2969–3001, 2011.

[2] S. M. Afonso, E. M. Bonotto, and M. Z. Jimenez. Negative trajectories in impulsive semidynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 259(3):964 – 988, 2015.

[3] Z. Artstein. Topological dynamics of ordinary differential equations and Kurzweil equations. *Journal of Differential Equations*, 23(2):224–243, 1977.

[4] S. A. Belov and V. V. Chistyakov. A selection principle for mappings of bounded variation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 249(2):351–366, 2000.

[5] N. P. Bhatia and O. Hajek. *Local Semi–Dynamical Systems*. Lecture Notes in Mathematics. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[6] N. P. Bhatia and G. P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Classics in Mathematics. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 1970.

[7] E. M. Bonotto. Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 332(1):81–96, 2007.

[8] E. M. Bonotto. LaSalle's theorems in impulsive semidynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(5):2291–2297, 2009.

[9] E. M. Bonotto and M. Federson. Topological conjugation and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(2):869–881, 2007.

[10] E. M. Bonotto and M. Federson. Limit sets and the Poincaré-Bendixson theorem in impulsive semidynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 244(9):2334–2349, 2008.

[11] E. M. Bonotto and M. Federson. Poisson stability for impulsive semidynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12):6148–6156, 2009.

[12] E. M. Bonotto, M. Federson, and J.G. Mesquita. *Generalized Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces and Applications*. Wiley, 2021.

[13] E. M. Bonotto and M. Z. Jimenez. On impulsive semidynamical systems: minimal, recurrent and almost periodic motions. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 44(1):121–141, 2014.

[14] K. Ciesielski. On semicontinuity in impulsive dynamical systems. *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Mathematics*, 52:71–80, 01 2004.

[15] K. Ciesielski. On semicontinuity in impulsive dynamical systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, 52(1):71–80, 2004.

[16] K. Ciesielski. On time reparametrizations and isomorphisms of impulsive dynamical systems. *Annales Polonici Mathematici*, 84(1):1–25, 2004.

[17] M. Federson and Š. Schwabik. Generalized ODEs approach to impulsive retarded differential equations. *Differential Integral Equations*, 19(11):1201–1234, 2006.

[18] M. Federson and Š. Schwabik. Stability for retarded functional differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 60(1):121–140, 2008.

[19] M. Federson and Š. Schwabik. A new approach to impulsive retarded differential equations: stability results. *Functional Differential Equations*, 16(4):583–607, 2009.

[20] M. Federson and P. Táboas. Topological dynamics of retarded functional differential equations. *Journal of Differential Equations*, 195(2):313–331, 2003.

[21] S. K. Kaul. Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 7:509 – 523, 01 1994.

[22] S. K. Kaul. On impulsive semidynamical systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 150(1):120 – 128, 1990.

[23] S. K. Kaul. On impulsive semidynamical systems. II: Recursive properties. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 16(7):635 – 645, 1991.

[24] S. K. Kaul. On impulsive semidynamical systems. III. Lyapunov stability. In *Recent trends in differential equations*, volume 1 of *World Sci. Ser. Appl. Anal.*, pages 335–345. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[25] D. S. Kurtz and C. W. Swartz. *Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock–Kurzweil, and McShane.* World Scientific Publishing Company, River Edge, NJ, 2nd edition, 2011.

[26] J. Kurzweil. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 07(3):418–449, 1957.

[27] J. Kurzweil. Generalized ordinary differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 08(3):360–388, 1958.

[28] J. Kurzweil. Unicity of solutions of generalized differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 08(4):502–509, 1958.

[29] J. Kurzweil. Addition to my paper "Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter". *Czechoslovak Mathematical Journal*, 09(4):564–573, 1959.

[30] V. Lakshmikantham, D. Bainov, and P. S. Simeonov. *Theory of Impulsive Differential Equations*, volume 6 of *Series In Modern Applied Mathematics*. World Scientific, Singapore, 1989.

[31] J. R. Munkres. *Topology*. Topology. Prentice–Hall, New Jersey, 2000.

[32] V. Rozko. A class of almost periodic motions in pulsed system. *Differentsial'nye Uravneniya*, 8:2012 – 2022, 1972.

[33] V. Rozko. Stability in terms of Lyapunov discontinuous dynamic systems. *Differentsial'nye Uravneniya*, 11:1005 – 1012, 1975.

[34] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk. *Impulsive differential equations*, volume 14 of *World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1995.

[35] Š. Schwabik. *Generalized ordinary differential equations*, volume 5 of *Series in Real Analysis*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1992.

[36] G. R. Sell. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I. The basic theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 127:241–262, 1967.

[37] G. R. Sell. *Topological dynamics and ordinary differential equations*. Van Nostrand Reinhold mathematical studies. Van Nostrand-Reinhold, 1971.