RESSALVA

Atendendo solicitação da autora,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 10/03/2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Elaine Andressa Tavares de Lima

Dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos em domínios com um pequeno buraco

São José do Rio Preto
2023

Elaine Andressa Tavares de Lima

Dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos em domínios com um pequeno buraco

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2023

L732d

Lima, Elaine Andressa Tavares de
Dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos em domínios com um pequeno buraco / Elaine Andressa Tavares de Lima. -- São José do Rio Preto, 2023
149 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: German Jesus Lozada Cruz

1. Equações parabólicas. 2. Atratores. 3. Semicontinuidade inferior e superior. 4. Domínio com buraco. I. Título.

Elaine Andressa Tavares de Lima

Dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos em domínios com um pequeno buraco

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
Orientador

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
Universidade Estadual de Maringá

Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen
Universidade Federal de Itajubá

Prof. Dr. Rodiak Nicolai Figueroa López
Universidade Federal de São Carlos

São José do Rio Preto
10 de março de 2023

Aos meus amados pais, Dimas e Luciene
e a minha amada irmã, Ritiéli.

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, permitiram que esta tese se concretizasse. Com vocês divido a alegria desta experiência:

A Deus e Nossa Senhora, em primeiro lugar, por estarem sempre comigo, me guiando, iluminando e abençoando a cada passo de minha vida e me dando a força necessária para enfrentar todos os desafios, sem nunca desistir.

A minha família, em especial minha mãe Luciene, meu pai Dimas, minha irmã Ritiéli e meu namorado Thiago, pelo apoio, amor e carinho incondicionais, sinceras orações e, não podia deixar de citar os inúmeros momentos disponibilizados para me ouvir e acalmar meu coração. Não tenho palavras para descrever como amo vocês e sou grata de tê-los em minha vida. Tudo que sou é por vocês e para vocês!

Ao meu querido orientador Prof. Dr. German Lozada Cruz agradeço a amizade, disponibilidade, competência, paciência e, sobretudo, a confiança em mim depositada durantes estes anos. Destaco ainda, as valorosas dicas, comentários e ensinamentos durante o desenvolvimento deste trabalho que foram essenciais para que este fosse concluído.

Ao Prof. D. I. Borisov da Bashkir State Pedagogical University (Russia) pela prontidão em responder minhas dúvidas e questionamentos enquanto estava estudando alguns de seus trabalhos.

A minha querida Dona Dalva, pessoa de coração gigante, que me acolheu em Rio Preto. Agradeço por todos os ensinamentos, preocupação e amor que me deu. E, ainda, através dela pude conhecer uma querida amiga, a Rafa, a quem agradeço por todos momentos e por ter conhecido.

Aos todos meus amigos da matemática. Em especial, meus queridos amigos: Matheus Barnabé, Luana, Ronísio, Thais e Yino. A vocês quero deixar registrado meu agradecimento pelo companheirismo no decorrer de toda minha vida acadêmica.

Por todo suporte acadêmico durante minha graduação e mestrado agradeço a UNIFEI e, agora, durante o doutorado ao IBILCE-UNESP. Em especial, aos funcionários e ao corpo docente do programa de doutorado em Matemática do IBILCE-UNESP por todo apoio, paciência e prontidão em me atender, desde de os formulários a serem preenchidos até as inúmeras perguntas em relação a dúvidas nos conteúdos disciplinares nestes anos do doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"I can't think of anything to say except...
I think it's marvellous! HaHaHa!"
Pink Floyd

RESUMO

Neste trabalho estudaremos a dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos semilineares com condição de contorno de Dirichlet em domínios com um pequeno buraco, cujo tamanho é proporcional a um parâmetro ε positivo pequeno. Em outras palavras, veremos que a família de atratores se comportam continuamente quando o parâmetro $\varepsilon \to 0$, bem como, obteremos as taxas de convergência em termos do parâmetro.

Palavras-chave: Equações Parabólicas. Atratores. Semicontinuidade Inferior e Superior. Domínio com Buraco.

ABSTRACT

In this work we will study the asymptotic dynamics for a class of semilinear parabolic problems with Dirichlet boundary conditions in domains with a small hole whose size is proportional to a small positive parameter ε. In other words, we will prove that the family of attractors behave continuously as $\varepsilon \to 0$, as well as we will provide the convergence rates in terms of the parameter.

Keywords: Parabolic equations. Attractors. Lower and Upper semi-continuity. Domain with hole.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Um pequeno buraco é um exemplo simples de uma pertubação geométrica no domínio que são relatados da teoria de pertubação singular. Os principais resultados hoje em dia, se concentram na convergência de soluções no sentido que a solução do problema perturbado converge para a solução do problema limite no sentido da norma L^2 para norma H_0^1.

Neste trabalho consideramos uma classe de problemas parabólicos em um domínio com um pequeno buraco com condição de contorno de Dirichlet homogênea.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in C^2$, e $\varepsilon \in (0,1]$ um parâmetro pequeno. Dados $\omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira, $\partial\omega$, suficientemente suave e um ponto $x_0 \in \Omega$, considere

$$\omega_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon^{-1}(x - x_0) \in \omega \right\}.$$

Denota-se por Ω_ε o domínio obtido retirando-se um buraco ω_ε do domínio Ω, isto é, $\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \omega_\varepsilon$, cuja fronteira é dada por $\partial\Omega_\varepsilon := \partial\Omega \cup \partial\omega_\varepsilon$.

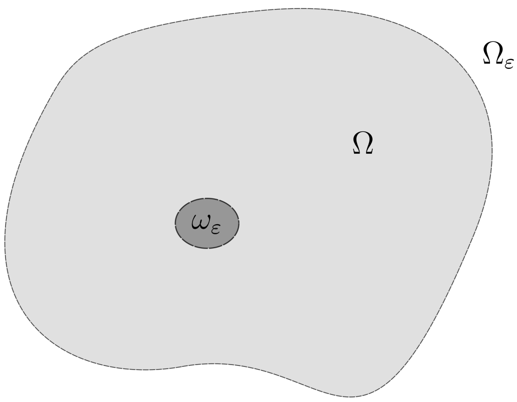

Figura 1: Domínio Ω_ε.

Considere a equação parabólica semilinear

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(x) u_\varepsilon = f(u_\varepsilon), \ x \in \Omega_\varepsilon, t > 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_\varepsilon = 0, \ x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

onde as funções $a_{ij}, V : \Omega \to \mathbb{R}$, para $1 \leq i, j \leq n$, satisfazem as seguintes condições:

(**a**) $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \ \forall x \in \Omega$;
(**b**) *Condição de elipticidade:*

$$\exists\, \vartheta_0 > 0 : \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \vartheta_0 \left|\xi\right|^2, \ \forall\, x \in \Omega, \ \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n;$$

(**c**) $V \in C(\overline{\Omega})$, tal que $V(x) \geq 0, \forall\, x \in \Omega$;

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não linear que satisfaz:
(**d**) $f \in C^2(\mathbb{R})$;
(**e**) *Condição de crescimento:*

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \ \exists\, \vartheta_1 > 0 : |f'(s)| \leq \vartheta_1 \left(1 + |s|^{\gamma - 1}\right), \ 1 \leq \gamma < \tfrac{n+2}{n-2}, \ n \geq 3;$$

(**f**) *Condição de dissipatividade:* $\limsup\limits_{|u| \to +\infty} \ \frac{f(u)}{u} \ \leq \ 0.$

Quando $\varepsilon \to 0$, o "domínio limite", Ω_0, consiste no domínio Ω e a equação limite é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} - \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) + V(x)u_0 = f(u_0), \ x \in \Omega, t > 0 \\ \hfill u_0 = 0, \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Em espaços de funções adequados $X_\varepsilon, \ \varepsilon \in [0, 1]$, escreveremos os problemas (1) e (2), como uma equação de evolução do tipo

$$\begin{cases} \dot{u}_\varepsilon + A_\varepsilon u_\varepsilon &= F(u_\varepsilon), \ t > 0 \\ u_\varepsilon(0) &= u_\varepsilon^0 \ \in X_\varepsilon, \end{cases} \tag{3}$$

onde F é o operador de Nemitskii associado a f e o operador $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ é dado por

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \left\{u_\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) : u_\varepsilon = 0 \text{ em } \partial\Omega_\varepsilon\right\},$$
$$A_\varepsilon u_\varepsilon = -\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\cdot)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) + V(\cdot)u_\varepsilon.$$

E denotando por $u_\varepsilon := u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)$ a solução de (3) e por $T_\varepsilon(t, u_0^\varepsilon)$ o semigrupo não-linear associado a (3) obtido pela fórmula da variação das constantes

$$T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) = e^{-tA_\varepsilon}u_\varepsilon^0 + \int_0^t e^{-(s-t)A_\varepsilon}F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0))\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geq 0,$$

veremos que o semigrupo $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ associado problema (3) possui um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$.

CONCLUSÕES

Nesta tese começamos com o estudo da dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos semilineares em um domínio com um pequeno buraco, $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Mais especificamente quando consideramos o problema de valor de contorno com condição de Dirichlet, mostramos que os atratores associados a esta classe de problemas se comportam continuamente quando o parâmetro envolvido se torna pequeno.

Pretende-se como próximo passo estudar a dinâmica assintótica da mesma classe de problemas parabólicos semilineares considerando agora a condição de Dirichlet na fronteira de Ω, i.e., $u_\varepsilon = 0$ em $\partial\Omega$ e condição de Neumann na fronteira do buraco, i.e., $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} = 0$ em $\partial\omega_\varepsilon$, bem como considerar ainda o caso com condição de Dirichlet na fronteira de Ω, i.e., $u_\varepsilon = 0$ em $\partial\Omega$ e condição de Robin na fronteira do buraco, i.e, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + \alpha u_\varepsilon = 0$ em $\partial\omega_\varepsilon$, onde $\frac{\partial}{\partial N}$ é a derivada com respeito a normal e $\alpha > 0$. Salientamos, ainda, que neste estudo será abordado o caso $n \geq 2$ e que o caso $n = 2$, ainda em aberto deste estudo inicial, será também desenvolvido para condição de Dirichlet tanto na fronteira de Ω como na fronteira do buraco.

Um outro problema de estudo para o futuro é considerar o domínio Ω com mais de um buraco (veja, por exemplo, Figura 4.4) e estudar a dinâmica assintótica para a mesma classe de problemas parabólicos semilineares que consideramos nesta tese com as respectivas condições de contorno na fronteira dos pequenos buracos.

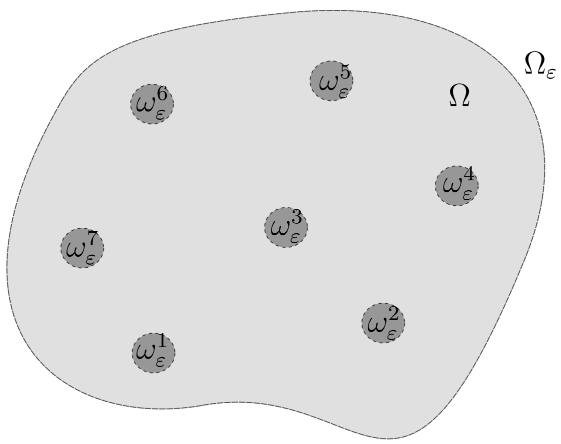

Figura 4.4: Domínio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{7} \omega_\varepsilon^i$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arrieta, J. M.; Bezerra, F. D. M.; Carvalho, A. N. *Rate of convergence of global attractors of some pertubed reaction-diffusion problems*, Topol. Methods Nolinear Anal., 41 2 (2013), 229–253.

[2] Arrieta, J. M.; Carvalho, A. N. *Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction–diffusion equations under perturbations of the domain*, J. Differential Equations, 199 (2004), 143–178.

[3] Arrieta, J. M.; Carvalho, A. N.; Lozada-Cruz, G. *Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria*, J. Differential Equations, 231 (2006), 551–597.

[4] Arrieta, J. M.; Carvalho, A. N.; Lozada-Cruz, G. *Dynamics in dumbbell domains III. Continuity of attractors*, J. Differential Equations, 247 (2009), 225–259.

[5] Babin, A. V.; Vishik, M. I. *Attractors in evolutionary equations*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1992. (Studies in mathematics and its applications, v. 25).

[6] Bezerra, F. D. M. *Taxa de convergência de atratores de algumas equacões de reação-difusão perturbadas*, 2009. 147 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-06042010-142547/pt-br.php>. Acesso em: 19 ago. 2021.

[7] Borisov, D. I. *Norm resolvent convergence of elliptic operators in domains with thin spikes*, Journal of Mathematical Sciences, 261, No. 3 (2022), 366–391.

[8] Borisov, D. I.; Cardone, G.; Durante, T. *Homogenization and norm-resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 146A (2016), 1115–1158.

[9] Borisov, D. I.; Mukhametrakhimova, A. I. *The norm resolvent convergence for elliptic operators in multi-dimensional domains with small holes*, J. Math. Sci.(N.Y.) 232 (2018), no. 3, Problems in mathematical analysis. No. 92 (Russian), 283–298.

[10] Borisov, D. I.; Mukhametrakhimova, A. I. *Uniform convergence and asymptotics for problems in domains finely perforated along a prescribed manifold in the case of the homogenized Dirichlet condition*, Sbornik: Mathematics 212:8 (2021), 1068–1121.

[11] Borisov, D. I.; Sharapov, T. F. *On the resolvent of multidimensional operators with frequently alternating boundary conditions with the Robin homogenized condition*, J. Math. Sci. 213 (2016), no. 4, 461–503.

[12] Brenner, S. C.; Scott, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer New York, 1996.

[13] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[14] Carbone, V. L.; Carvalho, A. N.; Schiabel–Silva, K. *Continuity of attractors for parabolic problems with localized large diffusion*, Nonlinear Analysis 68 (2008), 515–535.

[15] Carvalho, A. N.; Cholewa, J. W. *Exponential global attractors for semigroups in metric spaces with applications to differential equations*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Cambridge, v. 31, n. 6, (2011), 1641–1667.

[16] Carvalho, A. N.; Langa, J. A. *An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation*, J. Differential Equations, 246 (2009), 2646–2668.

[17] Carvalho, A. N.; Langa, J. A. *Non-autonomous pertubation of autonomous semilinear differential equations: Continuity of local stable and unstable manifolds*, J. Differential Equations, 233 (2007), 622–653.

[18] Carvalho, A. N.; Langa, J. A.; Robinson J. C. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Volume 182, Springer New York Heidelberg Dordrecht London 2013.

[19] Carvalho, A. N.; Piskarev, S. *A general approximations scheme for attractors of abstract parabolic problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization, New York, v. 27, n. 7/8, (2006), 785–829.

[20] Cholewa, J. W.; Dlotko, T. *Global attractors in abstract parabolic problems*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[21] Çevik, E. O.; Ismailov, Z. I. *Spectrum of the Direct Sum os Operators*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 210, 1–8.

[22] Engel, K. J.; Nagel, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, New York: Springer–Verlag, (Graduate texts in mathematics, v.194) (2000).

[23] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, 2nd ed. (Graduate studies in mathematics; v. 19) (2010).

[24] Figueroa–López, R. N.; Lozada–Cruz, G. J. *Dynamics os parabolic equations via the finite element method I. Continuity of the set equilibria*, J. Differential Equations, 261 (2016), 5235–5259.

[25] Figueroa–López, R. N.; Lozada–Cruz, G. J. *On Global Attractors for a Class of Parabolic Problems*, J. Differential Equations, Appl. Math. Inf. Sci. 8, No. 2, (2014), 493–500.

[26] Fujita, H.; Saito, N.; Suzuki, T. *Operador Theory and Numerical Methods*, V. 30., Elsevier Science B.V., (2001).

[27] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 ed. Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York (2001).

[28] Guo, D.; Cho, Y. J.; Zhu, J. *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems*, Nova Science Publishers, Inc. New York (2004).

[29] Hale, J. K. *Asymptotic behavior of dissipative systems*, American Mathematical Society, 1988.

[30] Hale, J. K.; Raugel, G. *Lower Semicontinuity of Attractors of Gradient Systems and Applications*, Ann. Mat. Pura Appl., v. CLIV (1988), 281–326.

[31] Henrot, A. *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Birkhauser Verlag, Basel–Boston–Berlin (2006).

[32] Henry, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Berlin: Springer–Verlag (1981).

[33] Kesavan, S. *Topics in functional analysis and applications*, New Delhi: New Age International (2003).

[34] Ladyzhenskaya, O. A.; Uraltseva, N. N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York etc. (1968).

[35] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York (1983)

[36] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press, (1980).

[37] Rudin, W. *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., Second Edition (1991).

[38] Triebel H., *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, Berlin: VEB Deutscher, (1978).

[39] Vainikko, G. *Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem)*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Oxford, v. 2, n. 6 (1978), 647–687.