

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

“PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA SISTEMAS SUJEITOS A  
FALHAS ESTRUTURAIS USANDO REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA”

**Rodolpho Moreira Manesco**

**Orientador:** Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Dissertação apresentada à Faculdade de  
Engenharia - UNESP - Campus de Ilha  
Solteira, como parte dos requisitos neces-  
sários para a obtenção do título de Mestre  
em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

M274p	<p>Manesco, Rodolpho Moreira. Projeto de controladores robustos para sistemas sujeitos a falhas estruturais usando realimentação estática de saída / Rodolpho Moreira Manesco. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2013 68 f. : il.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2013</p> <p>Orientador: Edvaldo Assunção Inclui bibliografia</p> <p>1. Desigualdades matriciais lineares. 2. Realimentação estática de saída. 3. Falhas estruturais. 4. Helicóptero 3-dof.</p>
-------	---



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO:** Projeto de Controladores Robustos para Sistemas Sujeitos a Falhas Estruturais usando Realimentação Estática de Saída

**AUTOR:** RODOLPHO MOREIRA MANESCO

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica ,  
Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RICARDO CORAÇÃO DE LÉO FONTOURA DE OLIVEIRA  
Departamento de Telemática / Universidade Estadual de Campinas

Data da realização: 24 de maio de 2013.

---

Aos meus pais, Valdecir (in memoriam) e Roselane.

## AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram de forma edificante para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- À Deus, por estar presente em minha vida, sempre me abençoando e protegendo, e de alguma forma, sempre presente em minhas escolhas.
- Aos meus pais, Valdecir José Manesco (in memorian) e Roselane Moreira Manesco, pelo carinho e total apoio que sempre proporcionaram durante minha vida.
- Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pela oportunidade e pela confiança depositada em mim durante o desenvolvimento de todo o trabalho.
- Ao Prof. Dr. Marcelo C. M. Teixeira, por toda a ajuda oferecida na co-orientação deste trabalho.
- À minha namorada, Paola, por estar presente em todos os dias de minha vida, pelos gestos de carinho e momentos de alegria que sempre me motivaram.
- À todos os meus amigos do LPC e LCPC, por sempre me ajudarem e com quem muito aprendi.
- À todos os funcionários e docentes de UNESP de Ilha Solteira, em especial aos docentes do curso de Engenharia Elétrica.
- À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.
- Aos desenvolvedores do ABN<sub>T</sub>E<sub>X</sub>, um pacote de classes L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X para a criação e formatação de documentos conforme as normas da ABNT.

“A Utopia está lá no horizonte.  
Me aproximo dois passos, ela se afasta dois passos.  
Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos.  
Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei.  
Para que serve a Utopia?  
Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar.”

**Eduardo Galeano**

## RESUMO

Este trabalho trata do problema de estabilização robusta e de novas técnicas de otimização robusta de sistemas lineares contínuos no tempo sujeitos a incertezas politópicas no modelo. Todo trabalho é fundamentado em leis de controle por realimentação estática de saída. As técnicas de projetos apresentam condições suficientes na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, acrônimo inglês para *Linear Matrix Inequalities*), formuladas com base na teoria de estabilidade segundo Lyapunov. Além do mais, índices de desempenho como a taxa de decaimento também são considerados no modelo, visto que, garantir apenas a estabilidade nem sempre é suficiente para fins de engenharia. As modelagens LMIs são realizadas através de lemas largamente utilizados em diversas áreas de sistema de controle, como, por exemplo, o lema de Finsler, que permite o uso tanto de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF, acrônimo inglês para *Parameter-Dependent Lyapunov Function*) quanto o uso de LMIs clássicas baseadas na existência de uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF, acrônimo inglês para *Common Quadratic Lyapunov Function*) para assegurar a estabilidade assintótica dos sistemas. Comparações entre ambos os métodos de projeto foram realizadas, e o presente trabalho apresenta resultados menos conservadores na maior parte das ocasiões, isto é, na maioria das vezes os problemas podem ser solucionados com PDLFs e não com CQLFs. Ainda, é proposta neste trabalho uma nova técnica para otimização da norma de controladores de saída e comparações são realizadas entre os métodos como forma de verificar a sua eficácia. O desafio deste trabalho consiste em realizar projetos de controladores robustos via LMIs através da realimentação estática de saída que fossem passíveis de implementação em um sistema físico real sujeito a falhas. A partir dos controladores de saída projetados foram feitas simulações com o auxílio do *software* MatLab<sup>®</sup> e os mesmos foram implementados em um helicóptero 3-DOF (*Degrees Of Freedom* - Graus de liberdade) de bancada da marca Quanser<sup>®</sup>, sempre visando alternativas de controladores com menor norma e melhor desempenho que atendam às restrições do projeto. Por fim, o trabalho se encerra com uma seção de conclusões e perspectivas futuras.

**Palavras-chave:** Desigualdades matriciais lineares. Realimentação estática de saída. Sistemas lineares. Falhas estruturais. Função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF). Função de Lyapunov quadrática comum (CQLF). Otimização da norma do controlador.

## ABSTRACT

This thesis addresses the problem of robust stabilization and robust new optimization techniques for continuous-time linear systems subject to polytopic uncertainties in the model. All work is based on static output feedback control laws. The text presents sufficient conditions for control projects in the form of Linear Matrix Inequalities (LMIs), formulated in terms of the Lyapunov stability theory. Moreover, performance indices as decay rate are also considered in the model, since only ensure stability is not always sufficient for engineering purposes. The modeling is performed using LMIs widely used lemmas in several areas of control systems, such as, for example, the Lemma of Finsler, which allows the use of Parameters Dependent Lyapunov Functions (PDLFs) as the use of classic LMIs based on the existence of a Common Quadratic Lyapunov Functions (CQLFs) to ensure asymptotic stability of the systems. Comparisons between the two design methods were performed, and the present work shows less conservative results on most occasions, in other words, the problems can be solved with PDLFs and not with CQLFs in most cases. Still, this work proposes a new technique for optimizing the norm of output controllers and comparisons are made between the methods as a way to verify its effectiveness. The challenge of this work was to carry out robust controllers designs based on LMIs through static output feedback that could be implemented on a real physical system subject to failure. Thus, simulations were made and the designed output controllers were implemented in a 3-DOF (Degrees Of Freedom) helicopter bench of Quanser<sup>®</sup> trademark, always seeking alternative controllers with better performance and lower norm that comply the project constraints. Finally, the work ended with a section of conclusions and future prospects.

**Keywords:** Linear matrix inequalities (LMIs). Static output feedback. Linear systems. Structural flaws. Parameter-dependent lyapunov function (PDLF). Common quadratic Lyapunov function (CQLF). Optimization of the controller norm.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Região $S(\alpha, r, \theta)$ no plano- $s$ .	22
Figura 2 -	Região de factibilidade para o sistema incerto hipotético dado por (94) e (95) - Teorema 2 ( $\square$ ) - Teorema 3 ( $\times$ ).	40
Figura 3 -	Região de factibilidade para o sistema incerto hipotético dado por (96) e (97) - Teorema 2 ( $\square$ ) - Teorema 3 ( $\times$ ).	41
Figura 4 -	Helicóptero 3-DOF da Quanser.	43
Figura 5 -	Modelo esquemático do helicóptero 3-DOF.	43
Figura 6 -	Região de factibilidade para o sistema incerto do helicóptero 3-DOF de bancada dado por (100) e (101) - Teorema 2 ( $\square$ ) - Teorema 3 ( $\times$ ).	46
Figura 7 -	Realimentação estática de saída: curva com a otimização da norma do controlador $L$ (linha tracejada) e sem a otimização (linha contínua).	48
Figura 8 -	Realimentação estática de saída - Lei de controle $u(t) = Ly(t)$ .	51
Figura 9 -	Comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF.	52
Figura 10 -	Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados $u(t) = Kx(t)$ .	53
Figura 11 -	Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação estática de saída $u(t) = Ly(t)$ .	54
Figura 12 -	Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação estática de saída $u(t) = Ly(t)$ .	54
Figura 13 -	Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados $u(t) = Kx(t)$ ( $\times$ ) e realimentação estática de saída $u(t) = Ly(t)$ ( $\square$ ).	55
Figura 14 -	Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados $u(t) = Kx(t)$ ( $\times$ ) e realimentação estática de saída $u(t) = Ly(t)$ ( $\square$ ).	56
Figura 15 -	Realimentação estática de Saída - Lei de controle $u(t) = Ly(t)$ .	58

- Figura 16 - Comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF. 59
- Figura 17 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$ . 60
- Figura 18 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação estática de saída  $u(t) = Ly(t)$ . 61
- Figura 19 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$  ( $\times$ ) e realimentação estática de saída  $u(t) = Ly(t)$  ( $\square$ ). 61

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Parâmetros do helicóptero.

44

## ABREVIATURAS E ACRÔNIMOS

LMI *Linear Matrix Inequalitie*

MatLab<sup>®</sup> *MATrix LABoratory*

CQLF *Common Quadratic Lyapunov Function*

PDLF *Parameter-Dependent Lyapunov Function*

BMI *Bilinear Matrix Inequalitie*

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES CONTÍNUOS NO TEMPO - REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	17
2.1	Controlabilidade de estado completa de sistemas contínuos no tempo	17
2.2	Lei de realimentação considerando taxa de decaimento	17
2.3	Estabilidade robusta de sistemas lineares contínuos no tempo	19
2.4	Restrição da taxa de decaimento para sistemas lineares incertos contínuos no tempo	20
2.5	CrITÉrio da $\mathcal{D}$ -estabilidade e redução da norma do controlador $K$	21
3	REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA - SISTEMAS CONTÍNUOS	24
3.1	Propriedades e conceitos iniciais da realimentação estática de saída	24
3.1.1	Controlabilidade de saída completa de sistemas contínuos no tempo	24
3.1.2	Lema de Finsler	25
3.2	Lei de realimentação estática da saída	26
3.3	Realimentação estática de saída - Formulação LMI	27
3.3.1	Realimentação estática de saída - Caso sem incertezas	27
3.3.2	Realimentação estática de saída - Caso incerto	32
3.3.3	Extensão do resultado para o caso incerto utilizando PDLFs	34
3.4	Otimização da norma do controlador de saída	36
4	COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE PROJETO	38

4.1	Região de factibilidade - Sistema hipotético	38
4.2	Região de factibilidade - Helicótero 3-DOF de bancada	42
4.2.1	Sistema de aplicação - Helicótero 3-DOF de bancada	42
4.2.2	Região de factibilidade	45
4.3	Otimização da norma do controlador - Helicótero 3-DOF de bancada	47
5	<b>SIMULAÇÕES E IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA</b>	49
5.1	Projeto de controladores de saída robustos	49
5.2	Projeto de controladores de saída robustos com otimização da norma	57
6	<b>CONCLUSÕES</b>	63
	<b>REFERÊNCIAS</b>	65

# 1 INTRODUÇÃO

O projeto de controladores de saída estáticos ou dinâmicos atraiu e continua a atrair uma grande quantidade de atenção. Isto pode ser justificado simplesmente pelo fato de que para uma grande quantidade de aplicações o vetor de estados não é completamente acessível (MEHDI; BOUKAS; BACHELIER, 2004; XIE; SYRMOS, 1997).

A realimentação dinâmica da saída consiste no projeto de um observador de estados, ou seja, os estados estimados é que são utilizados na matriz de realimentação do sistema. Já a realimentação estática de saída utiliza apenas ganhos nos elementos da matriz de realimentação, logo os estados da planta é que são usados diretamente na realimentação do sistema, sem a dinâmica intermediária.

Desta forma, a realimentação estática de saída está entre os mais importantes problemas de controle para o qual uma solução completa ainda não está disponível (CRUSIUS; TROFINO, 1999). Sendo assim, uma infinidade de trabalhos podem ser encontrados na literatura tratando dos mais variados casos em que a realimentação estática de saída é interessante como, por exemplo, no tratamento adequado para sistemas discretos considerando incertezas politópicas (MEHDI; BOUKAS; BACHELIER, 2004), realimentação estática de saída utilizando funções de Lyapunov polinomiais (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2010b), controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas incertos contínuos no tempo (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2010c) e controle  $\mathcal{H}_2$  (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001). Apesar de muito interessante devido sua simplificada implementação prática, a formulação baseada em desigualdades matriciais lineares (LMIs, acrônimo inglês para *Linear Matrix Inequalities*), para a realimentação estática de saída ainda oferece condições muito restritivas (DABBOUSSI; ZRIDA, 2012). Assim técnicas de relaxações destas condições são estudadas, como pode ser visto em (ARZELIER; PEAUCELLE; SALHI, 2003; GEROMEL; GAPSKI, 1996; OLIVEIRA; GEROMEL, 2001).

Recentemente, as *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) vem emergindo como uma ferramenta útil para resolver um grande número de problemas práticos de controle (BOYD et

al., 1994). As LMIs podem ser facilmente resolvidas utilizando técnicas de programação convexa (BOYD et al., 1994; GAHINET et al., 1995). Neste contexto, os problemas de otimização convexa envolvendo LMIs representam um método de solução atrativo, devido à sua flexibilidade e simplicidade ao se fazer a análise de sistemas, como por exemplo, no domínio de incertezas politópicas, que podem representar falhas estruturais (ASSUNÇÃO et al., 2007).

Com o desenvolvimento de sistemas cada vez mais complexos e em larga escala, como aeronaves, helicópteros, veículos automotores, sistemas de potência, entre outros, a necessidade de se conseguir sistemas de controle que consigam aliar acessibilidade, confiabilidade e segurança é cada vez mais requerida (CHRIFI-ALAOUI; RACHID, 1995). Além da exposição a falhas estruturais, esses sistemas, também denominados de sistemas incertos, comumente possuem em sua estrutura não linearidades e outros parâmetros não fixos, obtidos experimentalmente e com uma certa porcentagem de erro. Dentro desta problemática, a pesquisa voltada para soluções inovadoras que garantam a estabilidade robusta de sistemas e que contemplem todos estes fatores está crescendo cada vez mais nas últimas décadas (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989; GAHINET; APKARIAN, 1994; SKELTON; IWASAKI; GRIGORIADIS, 1998).

Para a realimentação da saída encontra-se na literatura um método constituído de dois estágios de projeto, no qual uma matriz de realimentação de estados é obtida no primeiro estágio. Essa matriz é então utilizada como parâmetro de entrada no segundo estágio, que retorna uma outra matriz com ganhos estáticos de realimentação de saída (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2010c; MEHDI; BOUKAS; BACHELIER, 2004; PEAUCELLE; ARZELIER, 2001; ARZELIER; PEAUCELLE; SALHI, 2003).

Neste trabalho, são propostas novas condições LMIs suficientes para o projeto de controladores através da realimentação estática da saída para sistemas contínuos no tempo considerando a inclusão da taxa de decaimento em sua formulação, utilizando-se os dois estágios de projeto. Inicialmente, não serão consideradas incertezas politópicas no modelo. Posteriormente, baseando-se em estudos feitos para sistemas incertos discretos (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2010a; MOREIRA, 2009), serão propostas condições suficientes para sistemas incertos contínuos no tempo. Serão estudadas também metodologias que utilizam como ponto de partida condições baseadas na existência de uma função de Lyapunov quadrática comum (acrônimo inglês para *Common Quadratic Lyapunov Function* (CQLF)) para garantir a estabilidade do sistema. A estabilidade quadrática (CQLF) já mostrou ser muito eficiente, tendo solucionado muitos problemas através de otimização



convexa. No entanto, resultados recentes da literatura provaram que CQLFs conduzem a efeitos conservadores no contexto de sistemas incertos, ou seja, em certos casos não é possível encontrar uma CQLF que assegure a estabilidade do sistema (OLIVEIRA; PERES, 2006). Desta forma, tem surgido na literatura trabalhos que utilizam funções de Lyapunov alternativas visando obter condições de estabilidade menos conservadoras. Dentre os resultados existentes destacam-se as funções de Lyapunov dependente de parâmetros (acrônimo inglês para *Parameter-Dependent Lyapunov Function* (PDLF)) (OLIVEIRA; GEROMEL, 2005; KAU et al., 2005; GEROMEL; KOROGUI, 2006; PIPELEERS et al., 2009), propondo uma forma de solução mais atrativa. Neste trabalho são propostas novas condições LMI para a realimentação estática de saída baseando-se nos métodos de projeto utilizando CQLFs e PDLFs, a partir de técnicas de relaxação baseadas no lema de Finsler (OLIVEIRA; SKELTON, 2001; FINSLER, 1937). Comparações entre ambos os métodos de projeto são feitas com o intuito de verificar a eficácia de cada método proposto.

Ainda, será proposta uma técnica de otimização da norma do controlador de saída (ASSUNÇÃO et al., 2007; BUZACHERO et al., 2010), buscando a redução das amplitudes dos elementos do controlador projetado, além do procedimento comumente conhecido como o critério da  $\mathcal{D}$  – *estabilidade* (CHILALI; GAHINET, 1996).

Por fim, a técnica de projeto da realimentação da saída proposta é aplicada em um helicóptero de bancada com três graus de liberdade. Utilizando o *software* MatLab<sup>®</sup> por meio do solver "LMILAB", interfaceado pelo YALMIP (*Yet Another LMI Parser*) (LOFBERG, 2004), são projetados controladores que garantam a estabilidade do sistema e satisfaçam as condições de projeto impostas. Serão realizadas simulações via MatLab<sup>®</sup> para verificação dos resultados obtidos e implementação prática em bancada, como forma de comprovar a teoria proposta.

Os capítulos deste trabalho se apresentam da seguinte forma:

- Capítulo 1: Apresentação das teorias de estabilidade segundo Lyapunov, estabilidade robusta com taxa de decaimento, projeto de controladores robustos utilizando os conceitos de estabilidade quadrática e o critério da  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Os conceitos enunciados neste capítulo são fundamentais para o desenvolvimento do restante do trabalho.
- Capítulo 2: Aborda propriedades e conceitos iniciais, definindo a controlabilidade da saída e lei de realimentação. Serão apresentadas também as propriedades do lema de Finsler que serão fortemente utilizadas nas demonstrações dos teoremas.

Apresentação dos conceitos e definições da realimentação estática de saída dependente de ganhos de estado (matrizes de realimentação de estados) estabilizantes para sistemas contínuos com a inclusão de índices de desempenho como a taxa de decaimento. Serão realizadas demonstrações para o caso de sistemas sem incertezas. Posteriormente, serão feitas extensões para o caso incerto considerando uma matriz de Lyapunov quadrática comum (CQLF) e também uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF). Nesse capítulo também é proposta uma nova técnica para a otimização da norma do controlador de saída.

- Capítulo 3: O sistema do helicóptero 3-DOF de bancada utilizado para fins de implementação prática será apresentado. A sua modelagem matemática, detalhes técnicos e considerações necessárias de projeto serão abordadas. Comparações entre os métodos de projeto utilizando as CQLFs e PDLFs serão feitas. Ambos os métodos serão aplicados em um modelo hipotético e também no modelo do helicóptero 3-DOF de bancada. Serão feitas comparações entre ambos os métodos com relação à influência no valor da norma dos controladores projetados em função do parâmetro da taxa de decaimento.
- Capítulo 4: Serão apresentados os resultados dos projetos com e sem as LMIs de otimização da norma do controlador de saída. Serão apresentados os controladores projetados, simulações através do *software* MatLab<sup>®</sup> e resultados das implementações práticas. Além disso, análise da nuvem de autovalores do sistema realimentado serão apresentadas, a fim de verificar se os controladores projetados atendem às especificações de projeto.

**Notações:** Ao decorrer desse texto, letras maiúsculas denotam matrizes e letras minúsculas denotam vetores. Para matrizes simétricas,  $M > 0$  ( $\geq 0$ ) indica que  $M$  é positiva definida (positiva semidefinida) e  $M^T$  ou  $M'$  representa a transposta da matriz  $M$ .  $I$  e  $0$  representam as matrizes identidade e matrizes nulas com suas dimensões apropriadas, respectivamente. As matrizes que não estiverem explicitamente definidas possuem dimensões apropriadas. O símbolo  $(*)$  indica o termo transposto em uma matriz e o símbolo  $\square$  indica o final de demonstração. Finalmente, o conjunto dado por  $\{1, 2, \dots, N\}$  é denotado por  $\mathbb{K}_N$ .

## 2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES CONTÍNUOS NO TEMPO - REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

### 2.1 Controlabilidade de estado completa de sistemas contínuos no tempo

De acordo com Ogata (2011): "*Um sistema é dito controlável no instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de controle não-restrito<sup>1</sup>, transferir o sistema de qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outro estado num intervalo de tempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ .*"

Considere o sistema contínuo no tempo:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

sendo que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle. As dimensões das matrizes do sistema são dadas por:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

O sistema (1) é considerado com estados completamente controláveis se, e somente se, os vetores,  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  forem linearmente independentes, ou seja, se a matriz  $(n \times n.m)$  correspondentes às colunas de (2) for de posto  $n$  (OGATA, 2011):

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (2)$$

### 2.2 Lei de realimentação considerando taxa de decaimento

Considere um sistema linear controlável descrito na forma de espaço de estados dado por (1).

---

<sup>1</sup>Vetor cujo valor possa ser qualquer.

A lei de controle com realimentação dos estados do sistema (1) é dada por:

$$u(t) = Kx(t), \quad (3)$$

sendo  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

De (1) e (3), tem-se que o sistema em malha fechada é dado por:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \quad (4)$$

Pode-se definir a taxa de decaimento (ou o maior expoente de Lyapunov) como sendo a maior constante positiva  $\alpha$ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0, \quad (5)$$

e se mantenha para todas as trajetórias  $x(t)$ ,  $t > 0$ . Pode-se utilizar a função quadrática de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t) \quad (6)$$

para estabelecer um limite inferior sobre a taxa de decaimento de (5), com a condição

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t)), \quad (7)$$

para todas as trajetórias (BOYD et al., 1994), que na literatura também é conhecida como  $\alpha$  – estabilidade (CHILALI; GAHINET, 1996).

De (4), e da derivada de (6), tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) \\ &= x(t)'(A + BK)'Px(t) + x(t)'P(A + BK)x(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo (8) e (6) em (7) e realizando as simplificações adequadas, obtém-se:

$$(A + BK)'P + P(A + BK) + 2\alpha P < 0, \quad (9)$$

$$P > 0. \quad (10)$$

A desigualdade (9) tornou-se uma BMI (acrônimo inglês para *Bilinear Matrix Inequalities* (BMIs)). É necessário então realizar manipulações para adequá-la novamente à condição de LMI. Multiplicando as desigualdades (9) e (10) à esquerda e à direita por  $P^{-1}$  e fazendo  $W = P^{-1}$  e  $Z = KW$  encontra-se:

$$AW + WA' + BZ + Z'B' + 2\alpha W < 0, \quad (11)$$

$$W > 0. \quad (12)$$

As desigualdades descritas em (11) e (12) são LMIs e, sendo factíveis, pode-se projetar uma matriz de realimentação de estados que garanta a  $\alpha$  – estabilidade do sistema com ganho dado por (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989):

$$K = ZW^{-1}. \quad (13)$$

## 2.3 Estabilidade robusta de sistemas lineares contínuos no tempo

Considere um sistema linear incerto controlável descrito na forma de espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t) \\ y(t) &= C(\beta)x(t) + D(\beta)u(t), \end{aligned} \quad (14)$$

sendo

$$\begin{aligned} A(\beta) &= \sum_{i=1}^N \beta_i A_i, & C(\beta) &= \sum_{i=1}^N \beta_i C_i, \\ B(\beta) &= \sum_{i=1}^N \beta_i B_i, & D(\beta) &= \sum_{i=1}^N \beta_i D_i, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\beta \in \Lambda_N,$$

sendo  $\Lambda_N$  o simplex unitário dado por:

$$\Lambda_N = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i \in \mathbb{K}_N \right\}, \quad (16)$$

sendo que  $N$  representa o número de vértices do politopo.

As variáveis de estado do sistema são:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  a saída e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle. As dimensões das matrizes do sistema são dadas por:  $A(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(\beta) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D(\beta) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Embora  $\beta$  não dependa explicitamente do tempo, o sistema incerto (14) pode possuir parâmetros variantes, sendo admitidas taxas de variação suficientemente pequenas de forma a garantir o tempo de acomodação necessário às perturbações oriundas de tais variações (DAHLEH; DAHLEH, 1991; LEITE; MONTAGNER; PERES, 2004).

A lei de controle com realimentação dos estados do sistema (14) é a mesma dada por (3). De (14) e (3) tem-se que o sistema em malha fechada é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A(\beta) + B(\beta)K)x(t), \\ y(t) &= (C(\beta) + D(\beta)K)x(t).\end{aligned}\tag{17}$$

## 2.4 Restrição da taxa de decaimento para sistemas lineares incertos contínuos no tempo

De maneira análoga ao caso de sistemas sem incertezas, pode-se definir a taxa de decaimento (ou o maior expoente de Lyapunov) da mesma forma feita na Seção 2.2.

Uma condição suficiente para garantia da estabilidade com taxa de decaimento do sistema (14), é similar à equação dada por (11), que para esse caso apresentam a forma dada em (18):

$$A_i W + W A_i' + B_i Z + Z' B_i' + 2\alpha W < 0,\tag{18}$$

$$W > 0,\tag{19}$$

para  $i \in \mathbb{K}_N$ .

Agora, multiplicando-se todos os termos da equação (18) por  $\beta_i$  e somando-se todos os termos para  $i \in \mathbb{K}_N$ , obtém-se:

$$A(\beta)W + W A(\beta)' + B(\beta)Z + Z' B(\beta)' + 2\alpha W < 0,\tag{20}$$

$$W > 0. \quad (21)$$

Sendo factíveis as LMIs dadas por (20) e (21), pode-se projetar uma matriz de realimentação de estados que garanta a  $\alpha$  – estabilidade robusta do sistema incerto dada por:

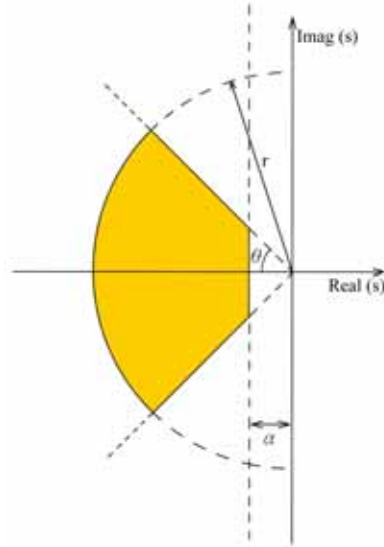
$$K = ZW^{-1}. \quad (22)$$

## 2.5 Critério da $\mathcal{D}$ -estabilidade e redução da norma do controlador $K$

Em muitos casos, a norma do controlador  $K$  pode ser elevada, levando amplificadores à saturação e assim dificultando a implementação em sistemas práticos. Sendo assim, é necessária uma redução do módulo dos elementos dos controladores para facilitar sua implementação na prática (BUZACHERO et al., 2010).

Na solução ótima tanto do sistema definido pelo conjunto de equações (18) e (19) quanto do sistema (20) e (21), a matriz  $W$  pode tender à singularidade, implicando em ganhos elevados no controlador  $K$ . Esses ganhos inviabilizam uma possível aplicação na prática. Desta forma, será utilizada uma estratégia proposta em Chilali e Gahinet (1996), para restringir que os autovalores dos sistemas realimentados fiquem em uma determinada região do plano- $s$ , garantindo assim valores menores para a norma do controlador  $K$ .

Além de garantir que os autovalores do sistema realimentado fiquem à esquerda da taxa de decaimento desejada (região da  $\alpha$  – estabilidade), em Chilali e Gahinet (1996) são propostas condições LMIs para restringir que os autovalores dos sistemas realimentados fiquem dentro de um setor circular com centro igual a  $q$  e raio igual a  $r$ , e também dentro de um setor cônico com inclinação  $\theta$  desejada no plano- $s$ . A Figura 1 ilustra de maneira clara quais são estas regiões.

Figura 1 - Região  $S(\alpha, r, \theta)$  no plano- $s$ .

Fonte: (CHILALI; GAHINET, 1996)

As LMIs (23) e (24) são condições suficientes e garantem, respectivamente, que os autovalores do sistema realimentado fiquem dentro de um semicírculo de raio  $r$  e centro  $q$  e dentro de um setor cônico com inclinação  $\theta$  (CHILALI; GAHINET, 1996).

$$\begin{bmatrix} -rW & qW + AW + BZ \\ qW + WA' + Z'B' & -rW \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(AW + BZ + WA' + Z'B') & \text{cos}(\theta)(AW + BZ - WA' - Z'B') \\ \text{cos}(\theta)(WA' + Z'B' - AW - BZ) & \text{sen}(\theta)(AW + BZ + WA' + Z'B') \end{bmatrix} < 0. \quad (24)$$

As LMIs (23) e (24) devem ser resolvidas em conjunto com as LMIs (11) e (12) para que os autovalores do sistema em malha fechada pertençam à região destacada na Figura 1 .

Para sistemas com incertezas politópicas, as LMIs dadas anteriormente assumem a forma apresentada em:

$$\begin{bmatrix} -rW & qW + A_i W + B_i Z \\ qW + W A_i' + Z' B_i' & -rW \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$



$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_i W + B_i Z + W A_i' + Z' B_i') & \cos(\theta)(A_i W + B_i Z - W A_i' - Z' B_i') \\ \cos(\theta)(W A_i' + Z' B_i' - A_i W - B_i Z) & \text{sen}(\theta)(A_i W + B_i Z + W A_i' + Z' B_i') \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

e devem ser satisfeitas para todo  $i \in K_N$ .

As LMIs (25) e (26) são condições suficientes e garantem, respectivamente, que a nuvem de autovalores do sistema incerto realimentado fique dentro de um semicírculo de raio  $r$  e centro  $q$  e dentro de um setor cônico com inclinação  $\theta$ . Devem ser resolvidas em conjunto com as LMIs (18) e (19) para que os autovalores do sistema em malha fechada pertençam à região destacada na Figura 1.

## 3 REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA - SISTEMAS CONTÍNUOS

### 3.1 Propriedades e conceitos iniciais da realimentação estática de saída

#### 3.1.1 Controlabilidade de saída completa de sistemas contínuos no tempo

Na prática de projetos de sistemas de controle é mais interessante usar o sinal de saída ao invés de todos os estados do sistema (OGATA, 2011). Muitas vezes isto é necessário pois não se tem disponível o acesso a todas as variáveis de estado. A controlabilidade de estado completa não é condição necessária nem suficiente para se controlar o sinal de saída do sistema. Por esta razão, é desejável definir separadamente a controlabilidade completa da saída (OGATA, 2011). Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{27}$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  a saída e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle. As dimensões das matrizes do sistema são dadas por:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

De acordo com Ogata (2011): "*O sistema descrito por (27) é dito com saída completamente controlável se for possível, por meio de um vetor  $u(t)$  não restrito, transferir qualquer saída inicial  $y(t_0)$  para qualquer outro valor de saída  $y(t_1)$  num intervalo de tempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ .*"

O sistema (27) é de saída completamente controlável se, e somente se, a matriz  $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{p \times (n+1)m}$  definida por (28) tiver posto " $p$ " (OGATA, 2011):

$$\mathcal{C} = [CB \ : \ CAB \ : \ CA^2B \ : \ \dots \ : \ CA^{n-1}B \ : \ D] \quad (28)$$

Importante lembrar que a condição dada por (28) é uma condição necessária e suficiente.

Para o exemplo prático que será abordado neste trabalho (helicóptero 3-DOF), todos os seus estados tem todos os modos instáveis, logo o estudo da controlabilidade pela saída é interessante e torna-se desnecessário o estudo da condição de estabilizabilidade. Sendo assim, o estudo da controlabilidade da saída para este sistema foi útil como referência para verificar a quantidade mínima de estados da planta que poderiam ser utilizados para realizar o projeto de controladores através da realimentação estática de saída.

Além da definição de controlabilidade da saída, outras duas propriedades de fundamental importância para a obtenção dos resultados propostos são apresentadas a seguir.

**Propriedade 3.1** *Para toda matriz  $M$  não simétrica ( $M \neq M'$ ), se  $M + M' < 0$ , então  $M$  é invertível.*

**Prova:** Veja Boyd et al. (1994). ■

**Propriedade 3.2** *Uma matriz simétrica  $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix}$  é definida positiva se e somente:*

1.  $M_1 > 0$  e  $M_3 - M_2'(M_1)^{-1}M_2 > 0$ ,

ou

2.  $M_3 > 0$  e  $M_1 - M_2(M_3)^{-1}M_2' > 0$ .

*Esse resultado é conhecido na literatura como complemento de Schur.*

**Prova:** Veja Boyd et al. (1994). ■

### 3.1.2 Lema de Finsler

Nesta seção é apresentado o lema de Finsler, que será utilizado nas demonstrações baseadas na realimentação estática de saída. Sua apresentação é de fundamental importância para o bom desenvolvimento do trabalho.

Como dito anteriormente, para a realização do projeto de controladores através da realimentação estática de saída, é necessária a utilização do lema de Finsler dado pelo Lema 3.1 com o intuito de introduzir variáveis de folga nas LMIs.

**Lema 3.1** (*Lema de Finsler*) Considere  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\mathcal{S}(\beta) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e  $\mathcal{R}(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$  com posto  $(\mathcal{R}(\beta)) < n$  e  $\mathcal{R}(\beta)^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $\mathcal{R}(\beta)$  (isto é  $\mathcal{R}(\beta)\mathcal{R}(\beta)^\perp = 0$ ).

Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $\mathcal{W}^T \mathcal{S}(\beta) \mathcal{W} < 0, \quad \forall \mathcal{W} \neq 0, \quad \mathcal{R}(\beta) \mathcal{W} = 0,$
- (ii)  $\mathcal{R}(\beta)^\perp{}^T \mathcal{S}(\beta) \mathcal{R}(\beta)^\perp < 0,$
- (iii)  $\exists \rho \in \mathbb{R} : \mathcal{S}(\beta) - \rho \mathcal{R}(\beta)^T \mathcal{R}(\beta) < 0,$
- (iv)  $\exists \chi \in \mathbb{R}^{2n \times n} : \mathcal{S}(\beta) + \chi \mathcal{R}(\beta) + \mathcal{R}(\beta)^T \chi^T < 0,$

sendo  $\rho$  e  $\chi$  variáveis adicionais (ou multiplicadoras).

**Prova:** Veja Skelton, Iwasaki e Grigoriadis (1998), Oliveira e Skelton (2001). ■

O Lema de Finsler é largamente empregado em inúmeras aplicações de controle ou análise de estabilidade baseadas em LMIs. As principais finalidades são: a eliminação de variáveis, inserção de variáveis de folga para fins de relaxação de LMIs, a desassociação de matrizes ou a redução do número de LMIs em projeto de controladores (PIPELEERS et al., 2009; MOZELLI; PALHARES; MENDES, 2010).

## 3.2 Lei de realimentação estática da saída

Nesta seção será apresentada uma técnica de projeto para controladores via realimentação estática de saída. A realimentação de saída é muito interessante do ponto de vista prático, uma vez que ela parte do pressuposto que não é possível o acesso a todas as variáveis envolvidas em determinado processo (OGATA, 2011; CRUSIUS; TROFINO, 1999). Sendo assim, o projeto de controladores via realimentação de saída se torna mais complexo, cabendo ao projetista desenvolver técnicas que consigam projetar controladores automáticos conhecendo apenas as variáveis disponíveis. Como já dito anteriormente, a realimentação estática de saída utiliza apenas ganhos na matriz de realimentação, ou seja, a ideia é projetar um controlador  $L$  que atue diretamente na planta acessando apenas as variáveis de estado disponíveis. Considere o sistema apresentado em (27). A lei de realimentação  $u(t)$  será definida por (29):

$$u(t) = Ly(t). \quad (29)$$

Substituindo (29) em (27) e realizando as manipulações adequadas, obtém-se o sistema realimentado dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BLC)x(t), \\ y(t) &= (C + DLC)x(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Considerando a existência de incertezas politópicas no modelo, o sistema (30) assume a forma dada em (31):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A(\beta) + B(\beta)LC(\beta))x(t), \\ y(t) &= (C(\beta) + D(\beta)LC(\beta))x(t). \end{aligned} \quad (31)$$

### 3.3 Realimentação estática de saída - Formulação LMI

#### 3.3.1 Realimentação estática de saída - Caso sem incertezas

A partir de estudos baseados em Agulhari, Oliveira e Peres (2010c), Moreira (2009), Mehdi, Boukas e Bachelier (2004), Peaucelle e Arzelier (2001), Arzelier, Peaucelle e Salhi (2003), será proposta a formulação LMI de realimentação estática de saída para sistemas contínuos com apenas a inclusão da restrição da taxa de decaimento em sua formulação (BOYD et al., 1994; FENG et al., 2011). Inicialmente serão propostas condições suficientes para o caso no qual o sistema não tenha incertezas e posteriormente para o caso considerando a existência de incertezas politópicas na planta.

**Teorema 1.** *Dado um ganho  $K$  tal que  $A + BK$  seja assintoticamente estável, existe um ganho estabilizante de realimentação de saída  $L$ , tal que  $A + BLC$  seja assintoticamente estável considerando a taxa de decaimento  $\gamma > 0$ , se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e matrizes  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $J$  tais que*

$$\begin{aligned} &P > 0, \\ &\begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B'F' + FBK + 2\gamma P & P - F + A'G' + K'B'G' & FB + C'J' - K'H' \\ P - F' + GA + GBK & -G - G' & GB \\ B'F' + JC - HK & B'G' & -H - H' \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (32)$$

No caso afirmativo, o ganho de realimentação de saída é dado por  $L = H^{-1}J$ .

**Prova:** Supondo (32) factível, da Propriedade 3.1 (BOYD et al., 1994) é possível verificar que a condição de existência de  $H^{-1}$  está garantida.

Da mesma forma que realizado em Mehdi, Boukas e Bachelier (2004), pré multiplicando e pós multiplicando (32) por  $T$  e  $T'$  respectivamente, sendo  $T$  dado por:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & S' \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} Q_a & P - F + A'G' + K'B'G' + S'B'G' \\ * & -G - G' \end{bmatrix}, \quad (34)$$

sendo  $Q_a$  dado por (35):

$$Q_a = A'F' + FA + K'B'F' + FBK + 2\gamma P + S'(B'F' + JC - HK) + (FB + C'J' - K'H' + S'(-H - H'))S. \quad (35)$$

Efetuando-se as multiplicações necessárias chega-se em:

$$Q_a = A'F' + FA + K'B'F' + FBK + 2\gamma P + S'B'F' + S'JC - S'HK + FBS + C'J'S - K'H'S + S'(-H - H')S. \quad (36)$$

Fazendo a seguinte substituição

$$S = H^{-1}JC - K, \quad (37)$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} Q_a & P - F + (A + BH^{-1}JC)'G' \\ P - F' + G(A + BH^{-1}JC) & -G - G' \end{bmatrix} < 0. \quad (38)$$

Com a substituição dada em (37), o termo  $Q_a$  pode ser manipulado da seguinte forma:

$$Q_a = A'F' + FA + K'B'F' + FBK + 2\gamma P + (C'J'H^{-1} - K')B'F' + (C'J'H^{-1} - K')JC - (C'J'H^{-1} - K')HK + FB(H^{-1}JC - K) + C'J'(H^{-1}JC - K) - K'H'(H^{-1}JC - K) + (C'J'H^{-1} - K')(-H - H')(H^{-1}JC - K). \quad (39)$$

Efetuando todas as multiplicações termo a termo:

$$Q_a = A'F' + FA + K'B'F' + FBK + 2\gamma P + C'J'H^{-1}B'F' - K'B'F' + C'J'H^{-1}JC - K'JC$$

$$\begin{aligned}
& -C'J'H^{-1}HK + K'HK + FBH^{-1}JC - FBK + C'J'H^{-1}JC - C'J'K - K'H'H^{-1}JC \\
& + K'H'K - C'J'H^{-1}HH^{-1}JC + C'J'H^{-1}HK - C'J'H^{-1}H'H^{-1}JC + C'J'H^{-1}H'K \\
& + K'HH^{-1}JC - K'HK + K'H'H^{-1}JC - K'H'K, \quad (40)
\end{aligned}$$

e lembrando-se das seguintes relações de igualdade

$$H^{-1}H = I = HH^{-1}, \quad (41)$$

e

$$H^{-1'H} = I = H'H^{-1'}, \quad (42)$$

o termo  $Q_a$  assume a nova forma dada por (43):

$$Q_a = (A + BH^{-1}JC)'F' + F(A + BH^{-1}JC) + 2\gamma P. \quad (43)$$

Assim, reescrevendo (38) e trocando  $H^{-1}J$  por  $L$ , o resultado é dado por (44):

$$\left[ \begin{array}{cc} (A + BLC)'F' + F(A + BLC) + 2\gamma P & P - F + (A + BLC)'G' \\ P - F' + G(A + BLC) & -G - G' \end{array} \right] < 0. \quad (44)$$

Reescrevendo (44) como segue:

$$\left[ \begin{array}{cc} F(A + BLC) + 2\gamma P & P - F \\ P + G(A + BLC) & -G \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} (A + BLC)'F' & (A + BLC)'G' \\ -F' & -G' \end{array} \right] < 0, \quad (45)$$

de outra forma:

$$\left[ \begin{array}{cc} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} F(A + BLC) & -F \\ G(A + BLC) & -G \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} (A + BLC)'F' & (A + BLC)'G' \\ -F' & -G' \end{array} \right] < 0. \quad (46)$$

Ainda, (46) pode ser rearranjada da seguinte maneira:

$$\left[ \begin{array}{cc} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} F \\ G \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A + BLC & -I \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} (A + BLC)' \\ -I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} F' & G' \end{array} \right] < 0. \quad (47)$$

A partir de (47) é possível definir os seguintes termos encontrados:

$$\left[ \begin{array}{c} F \\ G \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \chi_1 \\ \chi_2 \end{array} \right] = \chi, \quad (48)$$

$$\mathcal{R}(\beta) = \left[ \begin{array}{cc} A + BLC & -I \end{array} \right], \quad (49)$$

$$\chi' = \begin{bmatrix} \chi_1' & \chi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F' & G' \end{bmatrix}, \quad (50)$$

e

$$\mathcal{S}(\beta) = \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

A partir de (48), (49), (50) e (51), é possível reescrever (47) como sendo:  $\exists \chi \mathbb{R}^{2n \times n}$ :

$$\mathcal{S}(\beta) + \chi \mathcal{R}(\beta) + \mathcal{R}(\beta)' \chi' < 0. \quad (52)$$

Que nada mais é do que a condição (iv) do lema de Finsler (FINSLER, 1937) dado pelo Lema 3.1. Pode-se então, realizando as operações algébricas corretas, obter a condição (i) do Lema de Finsler. Seja a condição (i) do lema de Finsler dada por:

$$(i) \quad \mathcal{W}' \mathcal{S}(\beta) \mathcal{W} < 0, \quad \forall \mathcal{W} \neq 0, \quad \mathcal{R}(\beta) \mathcal{W} = 0. \quad (53)$$

Considere

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (54)$$

e substituindo (49), (51) e (54) em (53) adequadamente, tem-se:

$$\mathcal{R}(\beta) \mathcal{W} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A + BLC & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = 0, \quad (55)$$

$$\mathcal{W}' \mathcal{S}(\beta) \mathcal{W} < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t)' & \dot{x}(t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Realizando as multiplicações matriciais em (55) encontra-se:

$$\begin{aligned} (A + BLC)x - \dot{x} &= 0, \\ \dot{x} &= (A + BLC)x, \end{aligned} \quad (57)$$

e a partir de (56) chega-se em:

$$\begin{aligned} \dot{x}' Px + x' P \dot{x} + x' 2\gamma Px &< 0, \\ \dot{x}' Px + x' P \dot{x} &< -x' 2\gamma Px. \end{aligned} \quad (58)$$

Finalmente, sendo  $V(x) = x' Px$  e  $\dot{V}(x) = \dot{x}' Px + x' P \dot{x}$ , (58) assume a forma:

$$\dot{V}(x) < -2\gamma x' Px = -2\gamma V(x), \quad (59)$$



que é a função de Lyapunov considerando a inclusão da taxa de decaimento em sua formulação (BOYD et al., 1994). A prova está concluída. ■

Para possibilitar a comparação entre as regiões de factibilidade que será mostrada no Capítulo 4, o limitante da taxa de decaimento para o controlador de realimentação dos estados será denotado por  $\alpha$  em todo o texto. Enquanto que para realimentação da saída será denotado por  $\gamma$ .

### 3.3.2 Realimentação estática de saída - Caso incerto

Considere um sistema linear incerto controlável descrito na forma de espaço de estados dado por (14). As matrizes  $A(\beta)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\beta)$  e  $D(\beta)$  são descritas conforme (15) pertencentes ao simplex unitário (16), sendo que  $N$  representa o número de vértices do politopo (BOYD et al., 1994). O objetivo agora é utilizar a realimentação estática de saída para o projeto de controladores para sistemas com incertezas politópicas (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2010c; MOREIRA, 2009). Nesta subseção, será proposto o Teorema 2 baseando-se em uma matriz de Lyapunov quadrática comum (CQLF). Estudos considerando uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF) serão feitos na Subseção 3.3.3.

**Teorema 2.** *Dado um ganho  $K$  tal que (17) seja assintoticamente estável, existe um ganho estabilizante de realimentação de saída  $L$ , tal que (31) seja assintoticamente estável considerando a taxa de decaimento  $\gamma > 0$ , se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e matrizes  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $J$  tais que*

$$P > 0,$$

$$\begin{bmatrix} A_i'F' + FA_i + K'B_i'F' + FB_iK + 2\gamma P & P - F + A_i'G' + K'B_i'G' & FB_i + C_i'J' - K'H' \\ P - F' + GA_i + GB_iK & -G - G' & GB_i \\ B_i'F' + JC_i - HK & B_i'G' & -H - H' \end{bmatrix} < 0, \quad (60)$$

para  $i \in \mathbb{K}_N$ .

No caso afirmativo, o ganho de realimentação de saída é dado por  $L = H^{-1}J$ .

**Prova:** A existência de  $H^{-1}$  é garantida segundo a demonstração do Teorema 1.

Supondo (60) factível, multiplicando-se por  $\beta_i$  e somando-se todos os termos para  $i \in \mathbb{K}_N$  tem-se:

$$\begin{bmatrix} A(\beta)'F' + FA(\beta) + K'B(\beta)'F' + FB(\beta)K + 2\gamma P & * & * \\ P - F' + GA(\beta) + GB(\beta)K & -G - G' & * \\ B(\beta)'F' + JC(\beta) - HK & B(\beta)'G' & -H - H' \end{bmatrix} < 0. \quad (61)$$

A continuação desta demonstração é análoga à demonstração do Teorema 1. Sendo assim, a equação (47) assume a forma dada em (62):

$$\begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\beta) + B(\beta)LC(\beta) & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A(\beta) + B(\beta)LC(\beta))' \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F' & G' \end{bmatrix} < 0. \quad (62)$$

A partir de (62) é possível definir os seguintes termos:

$$\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \chi, \quad (63)$$

$$\mathcal{R}(\beta) = \begin{bmatrix} A(\beta) + B(\beta)LC(\beta) & -I \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$\chi' = \begin{bmatrix} \chi_1' & \chi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F' & G' \end{bmatrix}, \quad (65)$$

e

$$\mathcal{S}(\beta) = \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

A partir de (63), (64), (65) e (66), é possível reescrever (62) como sendo:  $\exists \chi \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ :

$$\mathcal{S}(\beta) + \chi \mathcal{R}(\beta) + \mathcal{R}(\beta)' \chi' < 0. \quad (67)$$

Tem-se então a condição (iv) do Lema de Finsler (FINSLER, 1937). Pode-se então, realizando as operações algébricas corretas, obter a condição (i) do Lema de Finsler dada por (53). Seja

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (68)$$

e substituindo (64), (66) e (68) em (53) adequadamente, tem-se:

$$\mathcal{R}(\beta)\mathcal{W} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(\beta) + B(\beta)LC(\beta) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = 0, \quad (69)$$

$$\mathcal{W}'\mathcal{S}(\beta)\mathcal{W} < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t)' & \dot{x}(t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Realizando as multiplicações matriciais em (69) encontra-se:

$$\begin{aligned} (A(\beta) + B(\beta)LC(\beta))x - \dot{x} &= 0, \\ \dot{x} &= (A(\beta) + B(\beta)LC(\beta))x, \end{aligned} \quad (71)$$

e a partir de (70) chega-se em:

$$\begin{aligned} \dot{x}'Px + x'P\dot{x} + x'2\gamma Px &< 0, \\ \dot{x}'Px + x'P\dot{x} &< -x'2\gamma Px. \end{aligned} \quad (72)$$

Finalmente, sendo  $V(x) = x'Px$  e  $\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x}$ , (72) assume a forma:

$$\dot{V}(x) < -2\gamma x'Px = -2\gamma V(x), \quad (73)$$

que é a função de Lyapunov considerando a inclusão da taxa de decaimento em sua formulação (BOYD et al., 1994). A prova está concluída. ■

### 3.3.3 Extensão do resultado para o caso incerto utilizando PDLFs

A partir do Teorema 2, é possível ainda estender o resultado obtido considerando a matriz de Lyapunov  $P$  dependente de parâmetros (PDLF) (OLIVEIRA; SKELTON, 2001) com o intuito de obter resultados menos conservadores para o método de projeto proposto (ARZELIER; PEAUCELLE; SALHI, 2003). Considere a matriz de Lyapunov  $P_i$  pertencente ao simplex unitário dado por (16), é proposto então o Teorema 3.

**Teorema 3.** *Dado um ganho  $K$  tal que (17) seja assintoticamente estável, existe um ganho estabilizante de realimentação de saída  $L$  tal que (31) seja assintoticamente estável, considerando a taxa de decaimento  $\gamma > 0$ , se existirem matrizes simétricas  $P_i = P_i'$  e matrizes  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $J$  tais que*

$$P_i > 0,$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} A_i'F' + FA_i + K'B_i'F' + FB_iK + 2\gamma P_i & P_i - F + A_i'G' + K'B_i'G' & FB_i + C_i'J' - K'H' \\ P_i - F' + GA_i + GB_iK & -G - G' & GB_i \\ B_i'F' + JC_i - HK & B_i'G' & -H - H' \end{array} \right] < 0, \quad (74)$$

para  $i \in \mathbb{K}_N$ .

No caso afirmativo, o ganho de realimentação de saída é dado por  $L = H^{-1}J$ .

**Prova:** A existência de  $H^{-1}$  também é verificada da mesma forma vista nas demonstrações dos Teoremas 1 e 2. Supondo (74) factível, multiplicando-se por  $\beta_i$  e somando-se todos os termos para  $i \in \mathbb{K}_N$  tem-se:

$$\left[ \begin{array}{ccc} A(\beta)'F' + FA(\beta) + K'B(\beta)'F' + FB(\beta)K + 2\gamma P(\beta) & * & * \\ P(\beta) - F' + GA(\beta) + GB(\beta)K & -G - G' & * \\ B(\beta)'F' + JC(\beta) - HK & B(\beta)'G' & -H - H' \end{array} \right] < 0. \quad (75)$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado na demonstração do Teorema 1, a equação (47) assume a forma dada em (76):

$$\left[ \begin{array}{cc} 2\gamma P(\beta) & P(\beta) \\ P(\beta) & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} F \\ G \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A(\beta) + B(\beta)LC(\beta) & -I \end{array} \right]$$

$$+ \begin{bmatrix} (A(\beta) + B(\beta)LC(\beta))' \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F' & G' \end{bmatrix} < 0. \quad (76)$$

A partir de (76) é possível definir os seguintes termos:

$$\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \chi, \quad (77)$$

$$\mathcal{R}(\beta) = \begin{bmatrix} A(\beta) + B(\beta)LC(\beta) & -I \end{bmatrix}, \quad (78)$$

$$\chi' = \begin{bmatrix} \chi_1' & \chi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F' & G' \end{bmatrix} \quad (79)$$

e

$$\mathcal{S}(\beta) = \begin{bmatrix} 2\gamma P(\beta) & P(\beta) \\ P(\beta) & 0 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

A partir de (77), (78), (79) e (80), é possível reescrever (76) como sendo:  $\exists \chi \mathbb{R}^{2n \times n}$ :

$$\mathcal{S}(\beta) + \chi \mathcal{R}(\beta) + \mathcal{R}(\beta)' \chi' < 0. \quad (81)$$

Tem-se então a condição (iv) do lema de Finsler (FINSLER, 1937). Procedendo de maneira análoga à Subseção 3.3.1, é possível definir:

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (82)$$

e substituindo (78), (80) e (82) em (53) adequadamente, tem-se:

$$\mathcal{R}(\beta)\mathcal{W} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(\beta) + B(\beta)LC(\beta) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = 0, \quad (83)$$

$$\mathcal{W}'\mathcal{S}(\beta)\mathcal{W} < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t)' & \dot{x}(t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\gamma P(\beta) & P(\beta) \\ P(\beta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Realizando as multiplicações matriciais em (83) encontra-se:

$$\begin{aligned} (A(\beta) + B(\beta)LC(\beta))x - \dot{x} &= 0, \\ \dot{x} &= (A(\beta) + B(\beta)LC(\beta))x, \end{aligned} \quad (85)$$

e a partir de (84) chega-se em:

$$\begin{aligned} \dot{x}'P(\beta)x + x'P(\beta)\dot{x} + x'2\gamma P(\beta)x &< 0, \\ \dot{x}'P(\beta)x + x'P(\beta)\dot{x} &< -x'2\gamma P(\beta)x. \end{aligned} \quad (86)$$

Finalmente, sendo  $V(x) = x'P(\beta)x$  e  $\dot{V}(x) = \dot{x}'P(\beta)x + x'P(\beta)\dot{x}$ , (86) assume a forma:

$$\dot{V}(x) < -2\gamma x'P(\beta)x = -2\gamma V(x), \quad (87)$$

que é a função de Lyapunov com a inclusão da taxa de decaimento em sua formulação a partir de uma matriz  $P(\beta)$  dependente de parâmetros (BOYD et al., 1994). A prova está concluída. ■

**Observação 1.** *Como pode ser verificado em Moreira (2009), algumas informações sobre a realimentação estática de saída merecem destaque, a dizer:*

- *Considerando o uso de uma matriz de Lyapunov quadrática comum (CQLF), a mesma matriz de Lyapunov  $P$  certifica a estabilidade do sistema em malha fechada tanto para o ganho de realimentação de estado (dado de entrada) quanto para o sistema realimentado pela saída.*
- *Trata-se de uma condição suficiente apenas. Caso não exista solução para um certo  $K$ , pode-se tentar com outro ganho estabilizante.*
- *Fazendo-se a matriz  $C = I$ , sendo  $I \in \mathbb{R}^n$  a matriz identidade, tem-se um problema de realimentação de estados.*

### 3.4 Otimização da norma do controlador de saída

Como já dito anteriormente, em diversas situações, a norma do controlador pode ser alta, dificultando sua implementação prática. Problemas como a saturação de amplificadores são comumente encontrados (BUZACHERO et al., 2010). Baseando-se em estudos feitos em Assunção et al. (2007), Faria, Assunção e Teixeira (2009) e Buzachero et al. (2010), o seguinte teorema é proposto com o intuito de limitar a norma do controlador  $L$ .

**Teorema 4.** *Obtém-se um limitante para a norma da matriz  $L \in \mathbb{R}^{m \times q}$  do controlador, com  $L = H^{-1}J$ ,  $H^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $J \in \mathbb{R}^{m \times q}$  encontrando o valor mínimo de  $\beta$ ,  $\beta > 0$ , tal que  $LL' < \beta(H^{-1} + H'^{-1})$ . Pode-se obter o valor mínimo de  $\beta$  através da solução do seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} H + H' & J \\ J' & \beta I_q \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (88)$$

$$(LMI (60) \text{ ou } (74)). \quad (89)$$

sendo  $I_q$  a matriz identidade de ordem  $q$ .

**Prova:** A partir da Propriedade 3.1 (BOYD et al., 1994), é possível verificar que a condição de existência de  $H^{-1}$  é garantida, permitindo a continuidade desta demonstração.

Aplicando-se a Propriedade 3.2 (BOYD et al., 1994), o complemento de Schur da desigualdade (88) é dado por:

$$\beta I_q > 0 \text{ e } H + H' - J(\beta I_q)^{-1} J' > 0 \quad (90)$$

Assim, de (90) obtém-se:

$$H + H' > \frac{1}{\beta} J J' \Rightarrow J J' < \beta(H + H') \quad (91)$$

Multiplicando por  $H^{-1}$  a esquerda e  $H'^{-1}$  à direita, a desigualdade (91), torna-se:

$$H^{-1} J J' H'^{-1} < \beta(H^{-1} + H'^{-1}) \Rightarrow L L' < \beta(H^{-1} + H'^{-1}) \quad (92)$$

A prova está concluída. ■

**Observação 2.** *No Teorema 4 otimiza-se apenas o parâmetro  $\beta$ , podendo os valores de  $H$  diminuírem a eficiência de otimização do módulo de  $L$ . Porém nos casos estudados essa metodologia mostrou-se eficiente.*

No Capítulo 5 será ilustrada a eficiência deste procedimento de otimização da norma que pode reduzir as dificuldades práticas presentes na implementação do controlador.

## 4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE PROJETO

### 4.1 Região de factibilidade - Sistema hipotético

Nesta seção serão mostradas análises das regiões de factibilidade considerando os métodos de projeto para sistemas lineares incertos apresentados pelos Teoremas 2 e 3. A técnica de projeto proposta em ambos é a mesma, porém, o Teorema 2 utiliza uma matriz de Lyapunov quadrática comum (CQLF) para o tratamento deste tipo de sistemas. Já o Teorema 3 utiliza uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF) tendo como principal objetivo propor condições mais relaxadas para o projeto de controladores através da realimentação estática de saída.

Para tanto, as análises serão feitas considerando o seguinte sistema incerto e controlável em sua representação em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t), \\ y(t) &= C(\beta)x(t). \end{aligned} \tag{93}$$

As matrizes  $A(\beta)$ ,  $B(\beta)$  e  $C(\beta)$  são descritas conforme (15) e o parâmetro  $\beta$  pertencem ao simplex unitário (16), sendo que  $N$  representa o número de vértices do politopo (BOYD et al., 1994). Considere um sistema incerto hipotético constituído de dois vértices pertencentes ao politopo, definidos da seguinte forma:

- Vértice 1: 
$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [ 1 \quad 0 ], \tag{94}$$

- Vértice 2: 
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [ 1 \quad 0 ]. \tag{95}$$

As variáveis de estado do sistema são:  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  é o vetor de estados,  $y(t) \in \mathbb{R}^1$  a saída e  $u(t) \in \mathbb{R}^1$  a entrada de controle. As dimensões das matrizes do sistema são dadas



por:  $A(\beta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B(\beta) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  e  $C(\beta) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ .

Como visto anteriormente, o projeto do controlador  $L$  é constituído de dois estágios:

- Primeiro estágio: Projetar um controlador  $K$  com uma determinada taxa de decaimento  $\alpha$  de tal forma que o sistema realimentado (17) seja assintoticamente estável. Restringir os autovalores do sistema realimentado para que a norma do controlador não fique elevada. Este procedimento não será realizado nesta seção, visto que tem-se apenas o interesse em mostrar as regiões de factibilidade dos métodos de projeto. O projeto do controlador  $K$  com a inclusão do critério da  $\mathcal{D}$ -estabilidade poderá ser verificado no Capítulo 5.
- Segundo estágio: Utilizando o controlador  $K$  obtido no primeiro estágio, projetar um controlador  $L$  com uma determinada taxa de decaimento  $\gamma$  desejada, de tal forma que o sistema realimentado (31) seja assintoticamente estável.

Utilizando o *software* MatLab<sup>®</sup> por meio do *solver* “LMILAB”, interfaceado pelo YALMIP (*Yet Another LMI Parser*) (LOFBERG, 2004), é possível realizar o projeto de controladores que tenham como objetivo garantir a estabilidade do sistema em questão (GAHINET et al., 1995).

Para o projeto do controlador  $K$ , será utilizado o conjunto de LMIs formado pelas equações (18) e (19). Encontrada uma solução factível para o problema, o controlador  $K$  desejado que garante todas as condições impostas será calculado através da equação (22).

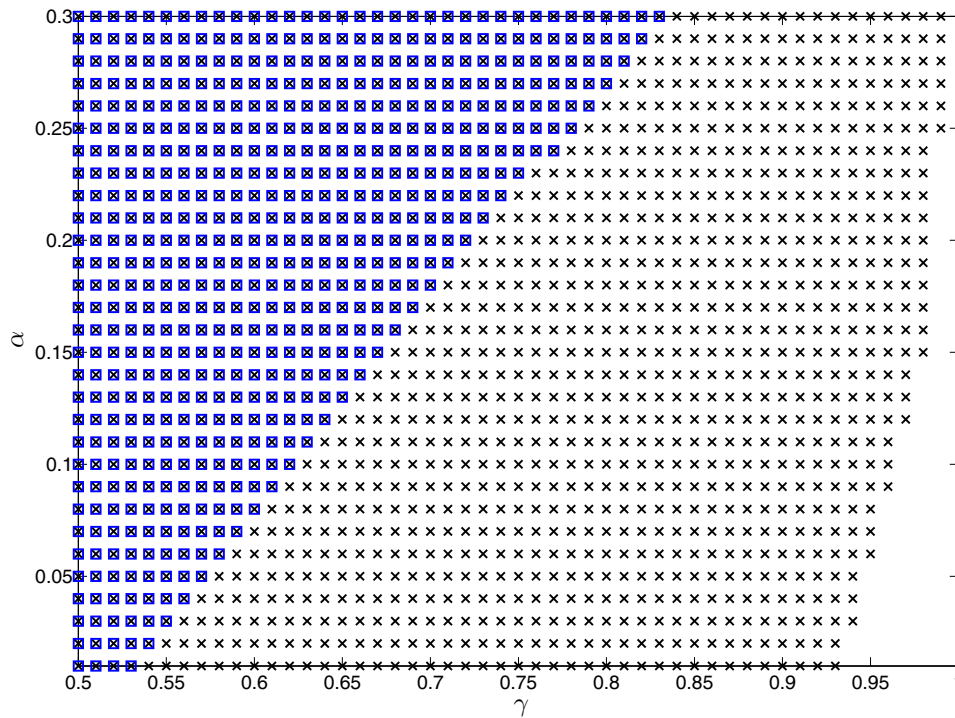
A partir do ganho de estado  $K$  projetado, utiliza-se as LMIs (60) ou (74) para projetar um controlador de saída  $L$ . Sendo (60) ou (74) factível, o ganho de saída  $L$  que garante todas as condições impostas será dado por  $L = H^{-1}J$ .

Para o projeto do controlador de saída  $L$ , algumas observações importantes devem ser feitas. Como pode ser visto, foi considerado que não existe o acesso a uma das variáveis existentes do sistema, por isto a matriz  $C = C_1 = C_2$  não é de posto completo.

Neste projeto, visto que o ganho de realimentação de saída  $L$  é um ganho dependente de ganhos de estado (dois estágios de projeto), os valores do controlador  $K$  influenciam diretamente no projeto do controlador  $L$ . A restrição da taxa de decaimento é imposta tanto no projeto do controlador  $K$  quanto do controlador  $L$ . Deseja-se então projetar um controlador de estado  $K$  robusto com determinada taxa de decaimento  $\alpha$  e verificar qual a influência desse parâmetro no projeto do controlador de saída robusto  $L$  com determinada taxa de decaimento  $\gamma$ .

Uma varredura será feita variando-se a taxa de decaimento  $\alpha$  (controlador  $K$ ) em função da taxa de decaimento  $\gamma$  (controlador  $L$ ) e comparando-se os métodos de projeto propostos pelos Teoremas 2 e 3 com relação à região de factibilidade. Os resultados estão mostrados na Figura 2.

Figura 2 - Região de factibilidade para o sistema incerto hipotético dado por (94) e (95) - Teorema 2 ( $\square$ ) - Teorema 3 ( $\times$ ).



Fonte: o próprio autor

De acordo com a Figura 2, verifica-se que para  $0,01 \leq \alpha \leq 0,3$  e  $0,5 \leq \gamma \leq 1$ , a região de factibilidade quando se utiliza o método de projeto proposto pelo Teorema 3 é maior que a região de factibilidade quando se utiliza o método proposto pelo Teorema 2. Este fato é devido à consideração de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF), garantindo condições mais relaxadas para o projeto de controladores de saída. Nota-se também que a taxa de decaimento  $\alpha$  atua como um limitante no projeto do controlador  $L$ .

Considere agora outro sistema incerto hipotético constituído de dois vértices pertencentes ao politopo, dados por (96) e (97):

- Vértice 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 0], \quad (96)$$

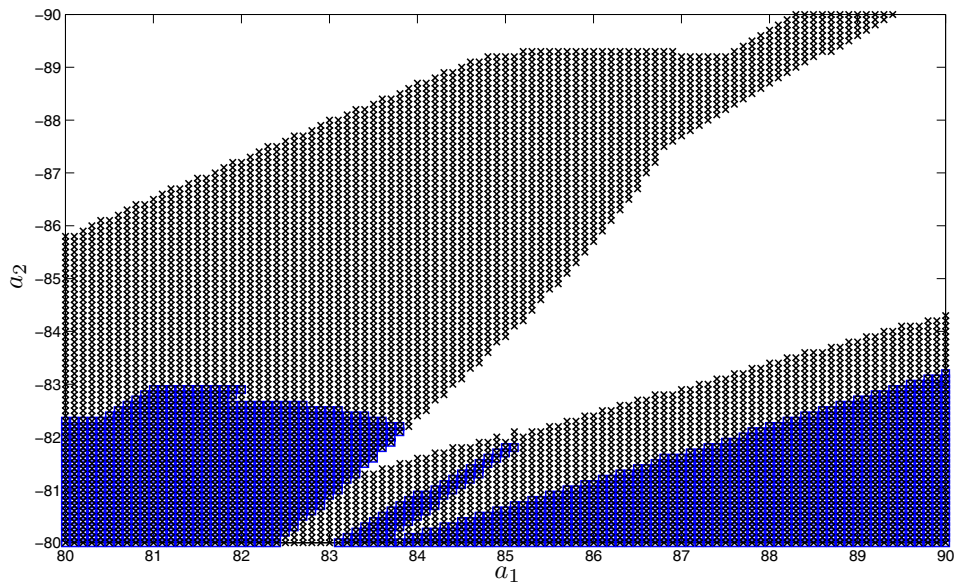
• Vértice 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [1 \ 0]. \quad (97)$$

Seguindo as etapas de projeto mencionadas na Seção 4.1, as técnicas de projeto propostas pelos Teoremas 2 e 3 serão comparadas considerando o sistema designado pelos vértices (96) e (97). Para este caso, teve-se o interesse em avaliar a região de factibilidade quando se variam parâmetros da planta ( $a_1$  e  $a_2$ ). Sendo assim, a taxa de decaimento utilizada no projeto do controlador  $K$  foi a mesma fixada para o projeto do controlador  $L$ , no caso,  $\alpha = \gamma = 0,6$ . O projeto do controlador  $K$  foi realizado utilizando o conjunto de LMIs formado pelas equações (18) e (19).

Variando-se o parâmetro  $a_1$  no intervalo  $80 \leq a_1 \leq 90$  e  $a_2$  no intervalo  $-80 \leq a_2 \leq -90$ , é possível verificar a região de factibilidade utilizando-se os Teoremas 2 e 3. O resultado é mostrado na Figura 3.

Figura 3 - Região de factibilidade para o sistema incerto hipotético dado por (96) e (97) - Teorema 2 ( $\square$ ) - Teorema 3 ( $\times$ ).



Fonte: o próprio autor

Como pode ser verificado novamente, analisando a região de factibilidade da Figura 3 conclui-se que o Teorema 3 se apresenta menos conservador para o caso estudado, garantindo uma região de factibilidade maior quando comparado ao método de projeto

proposto pelo Teorema 2. Em outras palavras, se torna mais fácil encontrar soluções factíveis para o problema de realimentação estática de saída utilizando PDLFs ao invés de CQLFs.

## 4.2 Região de factibilidade - Helicóptero 3-DOF de bancada

### 4.2.1 Sistema de aplicação - Helicóptero 3-DOF de bancada

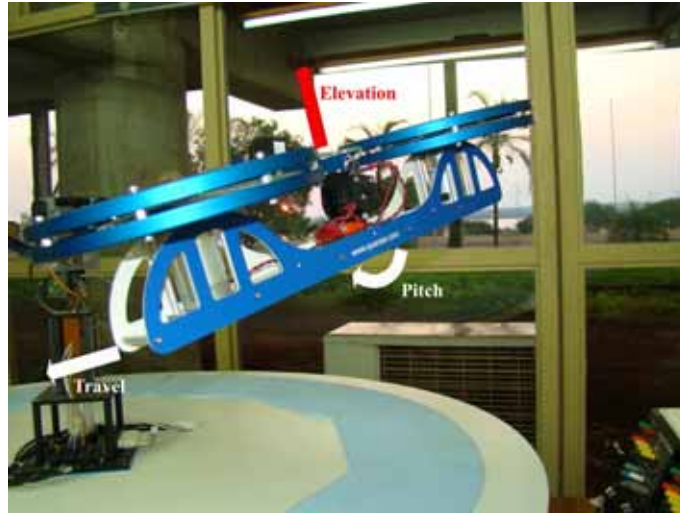
Considere o modelo esquemático na Figura 5 do helicóptero com três graus de liberdade mostrado na Figura 4. Dois motores DC estão montados nas extremidades de uma haste retangular e acionam duas hélices propulsoras. Os eixos dos motores são paralelos entre si, sendo o vetor de empuxo normal em relação à haste. A haste do helicóptero está suspensa por uma junta na extremidade de um braço e está livre para inclinação em torno do seu centro (QUANSER, 2002).

O braço é conectado por uma junta 2-DOF e é livre para inclinar e guinar. Na extremidade oposta do braço existe um contrapeso que torna a massa efetiva leve o suficiente para viabilizar que os motores levantem o helicóptero. Uma voltagem maior aplicada no motor dianteiro ( $V_f$ ) causa uma inclinação positiva enquanto uma voltagem maior no motor traseiro ( $V_b$ ) causa uma inclinação negativa (ângulo pitch ( $\rho$ )). Uma voltagem positiva nos dois motores causa uma elevação de todo o corpo (ângulo elevation ( $\varepsilon$ ) do braço). Se o corpo inclina, o vetor impulsão resulta no deslocamento do corpo (ângulo travel ( $\lambda$ ) do braço). As variáveis  $\xi$  e  $\kappa$ , incluídas no modelo artificialmente, representam as integrais dos ângulos de elevação e deslocamento, respectivamente, ou seja:

$$\xi = \int_0^t (\varepsilon - \varepsilon_{ref}) dt \quad e \quad \kappa = \int_0^t (\lambda - \lambda_{ref}) dt, \quad (98)$$

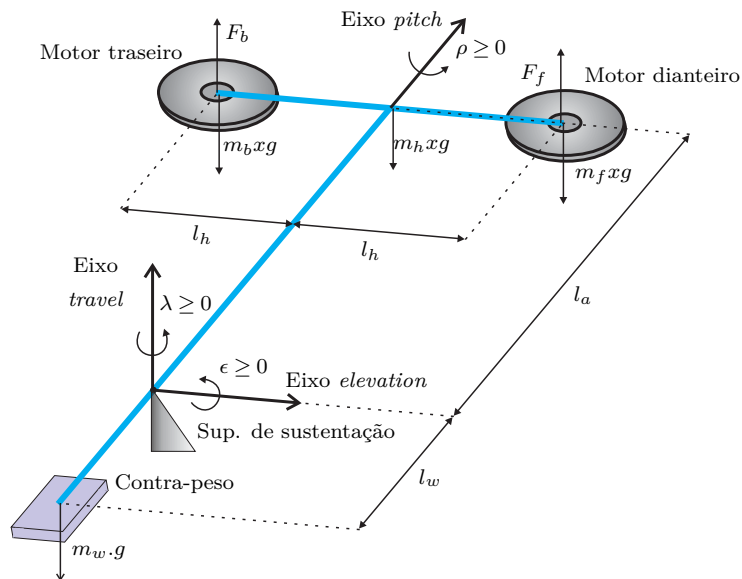
sendo  $\varepsilon_{ref}$  e  $\lambda_{ref}$  as referências para a elevação e deslocamento do sistema, evitando que o sistema vá sempre a zero. Não há uma referência para o ângulo pitch ( $\rho$ ), já que este é o ângulo de controle do sistema e objetiva-se que fique em torno de zero. O helicóptero 3-DOF também possui um sistema de massa ativa para criar perturbações, porém, não será utilizado neste projeto.

Figura 4 - Helicóptero 3-DOF da Quanser.



Fonte: o próprio autor

Figura 5 - Modelo esquemático do helicóptero 3-DOF.



Fonte: (QUANSER, 2002)

Embora este sistema seja não linear, por motivos de simplicidade, será utilizado o modelo linearizado. O modelo em espaço de estados que descreve o helicóptero é (QUANSER, 2002):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (99)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^8$  o vetor de estados,  $y(t) \in \mathbb{R}^3$  é a saída e  $u(t) \in \mathbb{R}^2$  é a entrada de controle.

Para a modelagem que consta no manual do fabricante, o vetor de estados  $x(t)$ , o

vetor de entrada  $u(t)$  e as matrizes  $A$  e  $B$  são apresentadas da seguinte forma:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \rho \\ \lambda \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\lambda} \\ \xi \\ \kappa \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2m_f l_a - m_w l_w g}{2m_f l_a^2 + 2m_f l_h^2 + m_f l_w^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} & \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} \\ \frac{1}{2} \frac{k_f}{m_f l_h} & -\frac{1}{2} \frac{k_f}{m_f l_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Todos os parâmetros do helicóptero foram retirados do manual do fabricante (QUANSER, 2002) e estão organizados na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1 - Parâmetros do helicóptero.

Descrição e unidades	Grandezas	Valores
Constante da força de propulsão da hélice	$k_f$	0,1188
Massa do corpo do helicóptero (kg)	$m_h$	1,15
Massa do contra-peso (kg)	$m_w$	1,87
Massa do conjunto da hélice dianteira (kg)	$m_f$	$m_h/2$
Massa do conjunto da hélice traseira (kg)	$m_b$	$m_h/2$
Distância: eixo de pitch - cada motor (m)	$l_h$	$7 \times 0,0254$
Distância: eixo de elev. - helicóptero (m)	$l_a$	$26 \times 0,0254$
Distancia: eixo de elev. - contra-peso (m)	$l_w$	$18,5 \times 0,0254$
Constante gravitacional ( $m/s^2$ )	$g$	9,81
Momento de inércia sobre o eixo de elevação ( $kgm^2$ )	$J_e$	0,91
Massa da peças do conjunto de massa ativa (kg)	$m$	0,154

Fonte: (QUANSER, 2002)

Para verificar a robustez do controlador projetado, implementou-se uma queda de 30% de potência no motor traseiro, através da inserção de uma chave temporizada conectada

a um amplificador com ganho de 0,7 e diretamente ligada na tensão de atuação sobre o motor. Assim, constitui-se um politopo de dois vértices com uma incerteza na matriz de entrada do sistema do helicóptero, atuando sobre o motor traseiro entre 70% a 100% do ganho no canal de  $V_b$ . Os vértices do politopo são descritos na sequência.

- Vértice 1 (ganho = 1 no canal):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0858 \\ 0,5810 & -0,5810 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (100)$$

- Vértice 2 (ganho = 0,7 no canal):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0601 \\ 0,5810 & -0,4067 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Todos os detalhes técnicos dos sensores, placas de interface, drivers, amplificadores de potência, etc, podem ser encontrados no manual do fabricante (QUANSER, 2002).

## 4.2.2 Região de factibilidade

Considere o sistema incerto do helicóptero 3-DOF de bancada constituído de dois vértices pertencentes ao politopo, definidos por (100) e (101). Seguindo as etapas de projeto descritas na Seção 4.1, para o projeto do controlador  $K$ , será utilizado o conjunto de LMIs formado pelas equações (18) e (19). Encontrada uma solução factível para o problema, o controlador  $K$  será calculado através da equação (22).

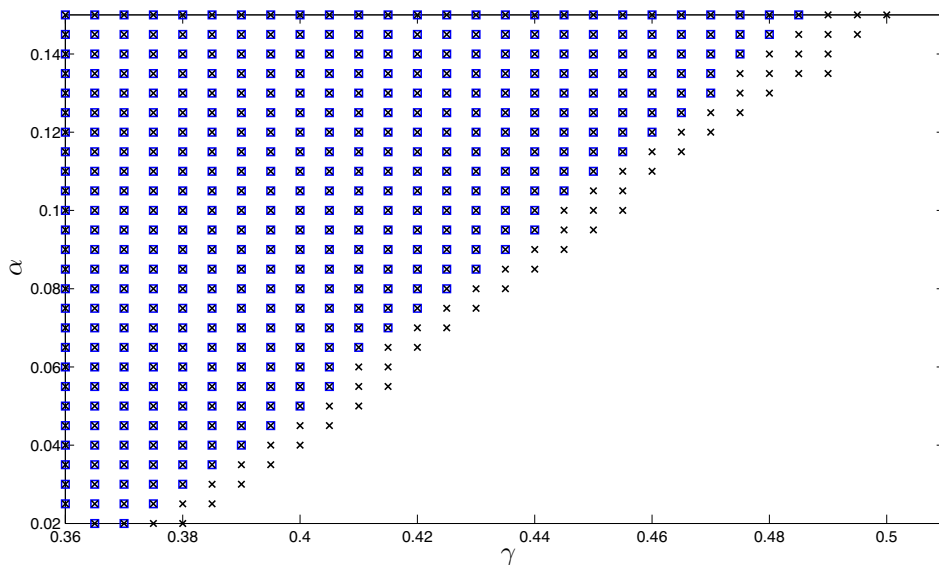
De maneira análoga à Seção 4.1, a partir do ganho de estado  $K$  projetado, serão utilizadas as LMIs (60) ou (74) para buscar um controlador de saída  $L$ . Sendo (60) ou (74) factível, o ganho de saída  $L$  será dado por  $L = H^{-1}J$ .

Ainda, será suposto neste projeto que não existe o acesso à variável responsável pelo controle do ângulo de arfagem ou ângulo pitch ( $\rho$ ). O fato de não ter acesso a esta variável é o que torna esta metodologia de projeto interessante, uma vez que na grande maioria de processos industriais, não se tem o acesso a todas as variáveis existentes. Desta forma, a matriz  $C(\beta)$  assume a forma dada em (102) para ambos os vértices do politopo.

$$C(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (102)$$

Uma varredura será feita variando-se a taxa de decaimento  $\alpha$  em função da taxa de decaimento  $\gamma$ , e comparando-se os métodos de projeto propostos pelos Teoremas 2 e 3 em relação à região de factibilidade. Para tanto, observe a Figura 6.

Figura 6 - Região de factibilidade para o sistema incerto do helicóptero 3-DOF de bancada dado por (100) e (101) - Teorema 2 ( $\square$ ) - Teorema 3 ( $\times$ ).



Fonte: o próprio autor



De acordo com a Figura 6, verifica-se também que, para  $0,01 \leq \alpha \leq 0,15$  e  $0,36 \leq \gamma \leq 0,6$ , a região de factibilidade quando se utiliza o método de projeto proposto pelo Teorema 3 é maior que a região de factibilidade quando se utiliza o método proposto pelo Teorema 2. Mais uma vez, pode-se concluir que a consideração de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF) garante condições mais relaxadas para o projeto de controladores de saída  $L$ . Nota-se também que a taxa de decaimento  $\alpha$  atua como um limitante no projeto do controlador  $L$ , ou seja, conforme aumenta-se a taxa de decaimento  $\alpha$  imposta no projeto do ganho de estado  $K$ , permite-se um aumento da taxa de decaimento  $\gamma$  imposta no projeto do controlador  $L$ .

### 4.3 Otimização da norma do controlador - Helicóptero 3-DOF de bancada

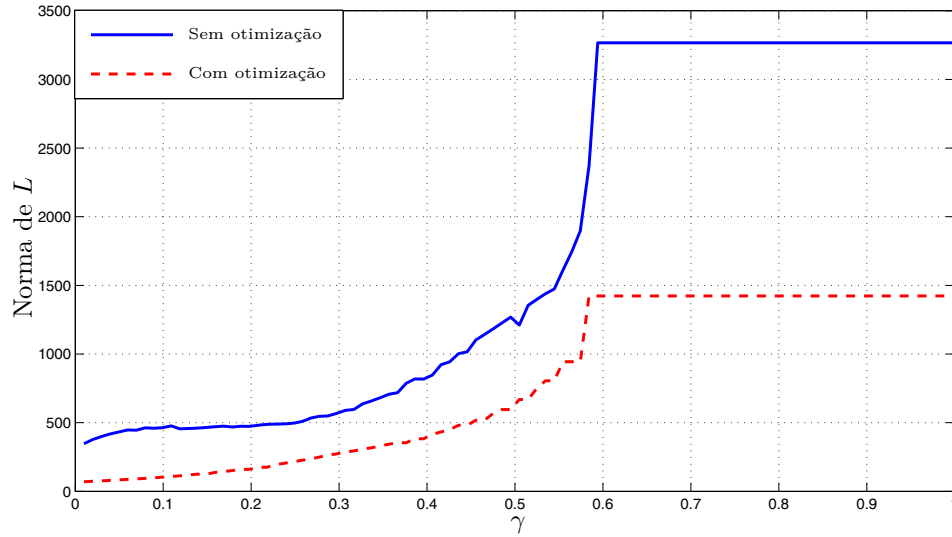
Nesta seção será feita uma comparação entre os métodos de projeto de controladores de saída  $L$  para os casos em que o projeto é realizado utilizando apenas a LMI do Teorema 3 dada por (74) e quando o projeto é realizado com a adição da LMI de otimização do Teorema 4 dada por (88), ou seja, utiliza-se o conjunto de LMIs formado por (74) e (88).

Para tanto, será utilizado o modelo do helicóptero 3-DOF de bancada designado pelos vértices (100) e (101). Para o projeto do controlador  $K$ , será utilizado o conjunto de LMIs formado pelas desigualdades (18) e (19), juntamente com as LMIs (25) e (26). Encontrada uma solução factível para o problema, o controlador  $K$  desejado que garante todas as condições impostas será calculado através da equação (22). Os parâmetros de interesse foram fixados da seguinte forma: taxa de decaimento  $\alpha = 0,4$ , o raio  $r = 4,5$ , o centro  $q = (0,0)$  e o ângulo  $\theta = 60^\circ$ . O controlador  $K$  obtido é dado por (103).

$$K = \begin{bmatrix} -23,4970 & -26,8686 & 22,1613 & -19,6751 \\ -28,1408 & 2,1489 & 1,3284 & -23,6421 \\ & & & -8,1022 & 30,9326 & -9,5553 & 6,5904 \\ & & & 2,4805 & 0,5075 & -11,4055 & 0,5663 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

A partir deste ganho de estado, e procedendo da mesma forma que na Seção 4.1, é possível realizar a comparação citada anteriormente. O resultado é apresentado na Figura 7.

Figura 7 - Realimentação estática de saída: curva com a otimização da norma do controlador  $L$  (linha tracejada) e sem a otimização (linha contínua).



Fonte: o próprio autor

Pode-se verificar que o projeto do controlador  $L$  com a adição da LMI de otimização apresenta valores para a norma de  $L$  inferiores ao projeto quando a LMI de otimização é desconsiderada. Sendo assim, é possível projetar controladores com taxas de decaimento mais elevadas garantindo a implementação prática dos mesmos. Para o intervalo  $0,01 \leq \gamma \leq 1$ , a norma do controlador  $L$  sem a LMI de otimização atingiu um valor máximo de  $\|L\| = 3267,1787$ , enquanto que com a adição da LMI de otimização, a norma de  $L$  atingiu o valor máximo de  $\|L\| = 1423,2533$ , representando uma redução de aproximadamente 43%.

## 5 SIMULAÇÕES E IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA

### 5.1 Projeto de controladores de saída robustos

Como pode ser visto anteriormente, o projeto do controlador  $L$  consiste em duas etapas. Nesta seção, para o projeto do controlador  $K$ , será utilizado o conjunto de LMIs formado pelas desigualdades (18) e (19), juntamente com as LMIs (25) e (26). Encontrada uma solução factível para o problema, o controlador  $K$  desejado que garante todas as condições impostas será calculado através da equação (22).

A partir do ganho de estado  $K$  projetado, será utilizada a LMI dada por (74) para projetar um controlador de realimentação de saída  $L$ . Sendo (74) factível, o ganho de saída  $L$  que garante todas as condições impostas será dado por  $L = H^{-1}J$ .

Para o projeto do controlador  $K$ , os parâmetros de interesse foram fixados da seguinte forma: taxa de decaimento  $\alpha = 0,1$ , o raio  $r = 4,5$ , o centro  $q = (0,0)$  e o ângulo  $\theta = 60^\circ$ . Sendo o sistema representado pelos vértices (100) e (101), é possível encontrar uma solução factível para o problema. O controlador  $K$  obtido é dado por (104):

$$K = \begin{bmatrix} -19,1939 & -21,6377 & 12,5258 & -18,3099 & -7,4274 & 21,3424 & -5,6982 & 2,6083 \\ -23,1263 & 3,3294 & -0,2725 & -22,0463 & 2,5456 & -1,3006 & -6,8422 & 0,0222 \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Para o projeto do controlador de saída  $L$ , serão utilizadas as mesmas suposições feitas no Capítulo 4, ou seja, a matriz  $C$  é dada por (102).

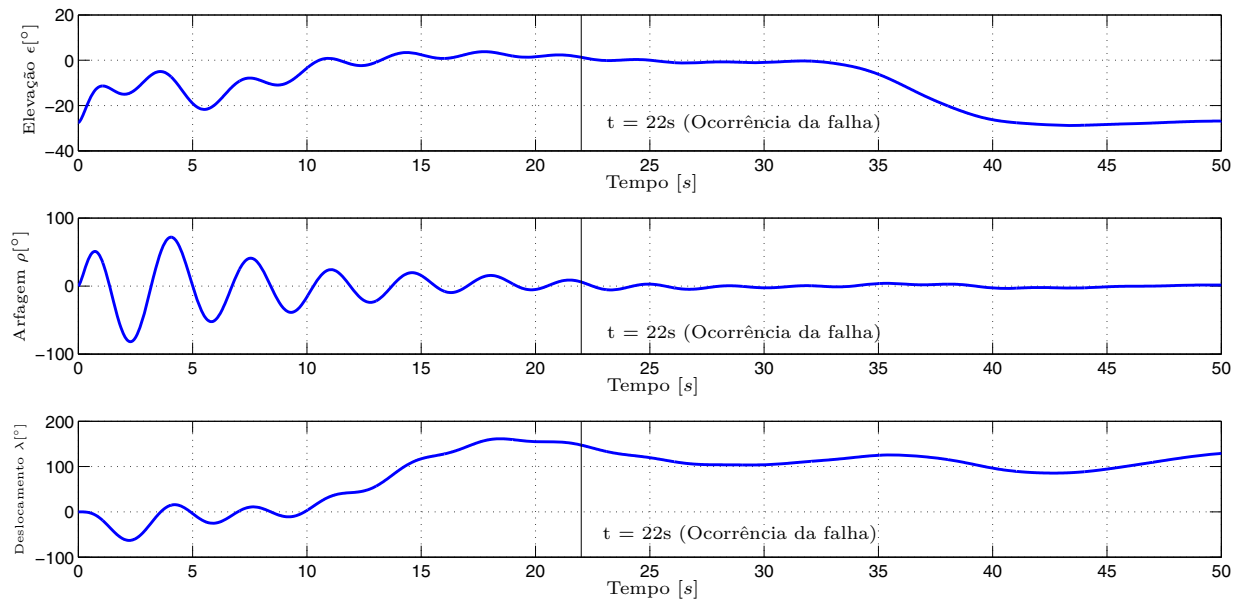
Com o controlador  $K$  dado por (104), fixando-se a taxa de decaimento  $\gamma = 0,06$ , e sendo o sistema representado pelas matrizes de estados dadas por (100), (101) e (102), é possível encontrar uma solução factível para o problema. O controlador  $L$  obtido é dado

por (105):

$$L = \begin{bmatrix} -189,8669 & 50,1020 & 266,4884 & -98,2230 & 224,2607 & -3,9064 & 26,1714 \\ 2,7084 & -5,9838 & -65,3206 & 16,3281 & -32,0521 & -7,1414 & -3,5509 \end{bmatrix}. \quad (105)$$

Com o objetivo de verificar o comportamento dos vértices do sistema realimentado  $A_i + B_i LC_i$  para  $i = 1$  e  $2$ , que descreve a presença de uma falha, foram realizadas simulações utilizando o *software* MatLab<sup>®</sup> com o controlador  $L$  projetado (105). Na Figura 8 é possível observar o comportamento de três estados dos oito existentes, no caso, o ângulo de elevação ( $\varepsilon$ ), o ângulo de arfagem ( $\rho$ ) e o ângulo de deslocamento ( $\lambda$ ). A trajetória de referência do helicóptero foi dividida em três estágios. O primeiro estágio é de decolagem, em que o helicóptero sobe  $27,5^\circ$ , alcançando o ângulo de elevação  $\varepsilon = 0^\circ$ . No segundo estágio o helicóptero viaja  $120^\circ$  mantendo a mesma elevação, ou seja, o helicóptero alcança  $\lambda = 120^\circ$  tendo como referência o ponto de decolagem. No terceiro estágio o helicóptero realiza a aterrissagem retomando o ângulo inicial  $\varepsilon = -27,5^\circ$ . Durante o estágio de aterrissagem do helicóptero, no instante  $t = 22s$ , impõe-se a perda de 30% do motor traseiro. Apesar de no instante  $t = 22s$  ocorrer uma perda abrupta de potência e uma troca de modelo do sistema do helicóptero (transição do modelo representado pelo vértice 1 equação (100) para o modelo representado pelo vértice 2 equação (101)), esta troca ocorre apenas uma única vez e não existe a necessidade da preocupação com a variação temporal de  $\beta_i$ . A troca de modelo pode ser entendida como dois casos distintos de operação, ou seja, durante os primeiros  $22s$  o sistema é representado pelo vértice 1 do sistema com determinadas condições iniciais  $x_0$ , e após os  $22s$  o sistema é representado pelo vértice 2 com novas condições iniciais  $x_0$ . Além disto, apesar da condição de controlabilidade da saída permitir o uso de apenas 3 estados para realimentação estática para este helicóptero, as não linearidades práticas implicam no descarte de apenas 1 estado (ângulo de arfagem ( $\rho$ )).

Figura 8 - Realimentação estática de saída - Lei de controle  $u(t) = Ly(t)$ .

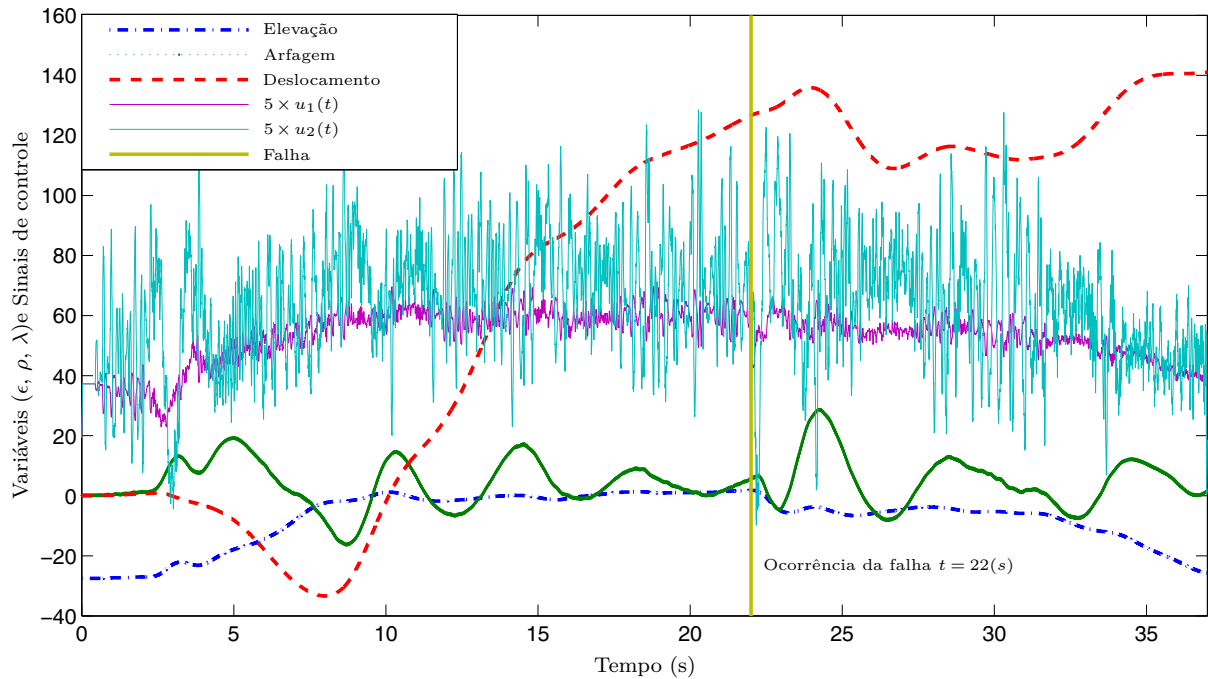


Fonte: o próprio autor

Com o controlador dado por (105) foi realizada também sua implementação prática e o mesmo teste de perda de potência abrupta foi realizado (através da inserção de uma chave temporizada atuando diretamente no canal da tensão de entrada do motor traseiro do helicóptero - vide Seção 4.2), com o intuito de verificar o controlador atuando em um sistema físico real sujeito a falhas (BUZACHERO et al., 2012). A trajetória de referência do helicóptero é a mesma já descrita anteriormente.

A partir da implementação prática, é possível colher os dados via MatLab<sup>®</sup> e verificar o real comportamento do sistema. Na Figura 9, teve-se o interesse em mostrar apenas o comportamento de três estados do sistema, ou seja, elevação ( $\epsilon$ ), arfagem ( $\rho$ ) e deslocamento ( $\lambda$ ) e também os sinais de controle  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ .

Figura 9 - Comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF ( $\epsilon$ [ $^\circ$ ],  $\rho$  [ $^\circ$ ],  $\lambda$ [ $^\circ$ ]) juntamente com as tensões de entrada  $5 \times u_1(t)$ [V] e  $5 \times u_2(t)$ [V].



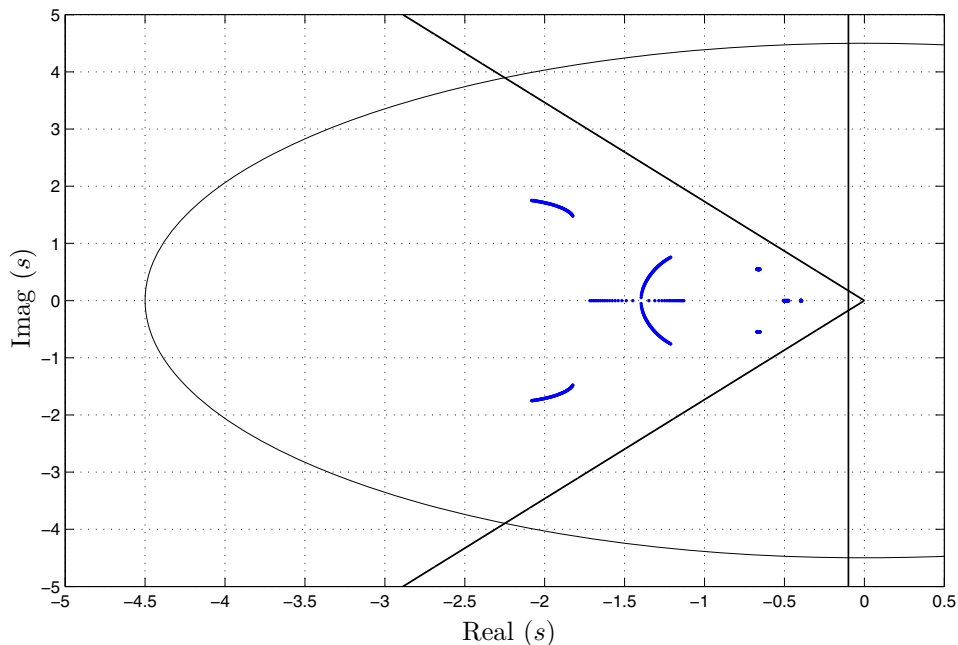
Fonte: o próprio autor

Observando-se as curvas dos sinais de controle, apesar de muito oscilatórias, é possível perceber a atuação do controlador no sistema, aplicando tensões positivas e negativas nos sinais de entrada dos motores garantindo a estabilidade do sistema. O comportamento dos três estados de interesse do sistema são oscilatórios, assim como pode ser visto nas simulações. É esperado que as curvas experimentais sejam próximas das curvas obtidas nas simulações, porém, nunca serão idênticas, devido às não linearidades presentes no sistema em questão. Como dito anteriormente, garantir apenas a estabilidade em sistemas de engenharia nem sempre é suficiente. O comportamento do helicóptero 3-DOF (QUANSER, 2002) é estável, porém, ainda não satisfatório do ponto de vista do projetista, devido à característica oscilatória verificada. Sendo assim, o parâmetro da taxa de decaimento deve ser melhor explorado a fim de garantir uma resposta mais rápida para este sistema, levando sempre em conta a norma do controlador projetado. Na Seção 5.2 será projetado um controlador de saída robusto sujeito a uma taxa de decaimento mais elevada com otimização da norma de  $L$ .

É importante lembrar que o modelo dado por (98) permite que os estados elevação ( $\epsilon$ ) e deslocamento ( $\lambda$ ) não venham obrigatoriamente a zero. Isso permite a pilotagem do helicóptero.

Para avaliar se o projeto do controlador  $K$ , dado por (104), garante que os autovalores do sistema incerto (14), realimentado através da lei de controle  $u(t) = Kx(t)$ , estejam na região que satisfaz as especificações iniciais, os valores de  $\beta$  foram particionados em 101 valores em (16). O mesmo procedimento foi utilizado para verificar se o projeto do controlador (105) garante que todos os autovalores do sistema incerto (14), realimentado através da lei de controle  $u(t) = Ly(t)$  também atende as especificações de projeto. É importante lembrar que existem oito autovalores para cada um destes subsistemas. Na Figura 10 é possível verificar a nuvem de autovalores do sistema incerto realimentado utilizando a realimentação de estados.

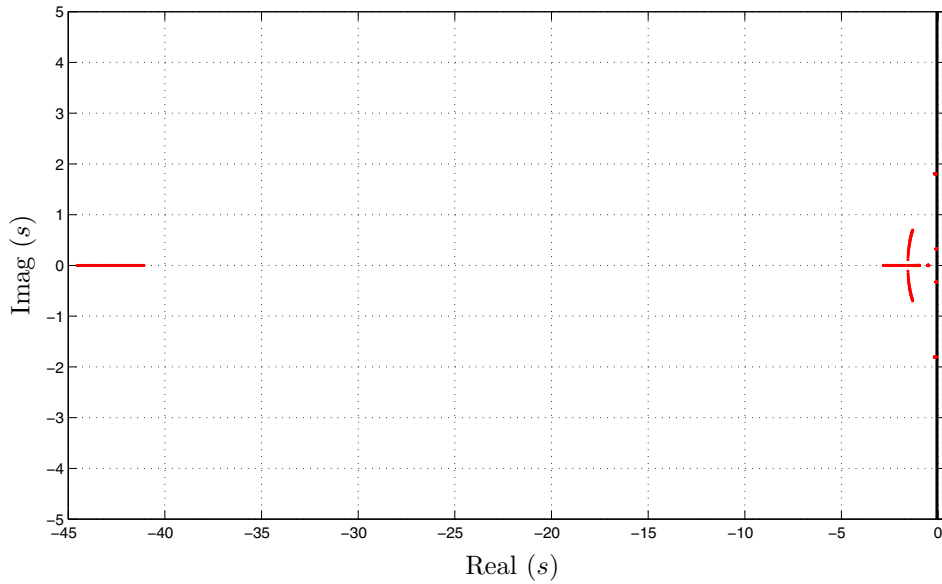
Figura 10 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$ .



Fonte: o próprio autor

Analisando-se a Figura 10 é possível verificar que os autovalores do sistema incerto realimentado se encontram à esquerda da taxa de decaimento  $\alpha = 0,1$ , dentro do semi-círculo de raio  $r = 4,5$  centrado na origem e dentro da região formada pelas retas com inclinação  $\theta = 60^\circ$ . Na Figura 11 é possível verificar os autovalores do sistema incerto realimentado utilizando a realimentação de estática de saída.

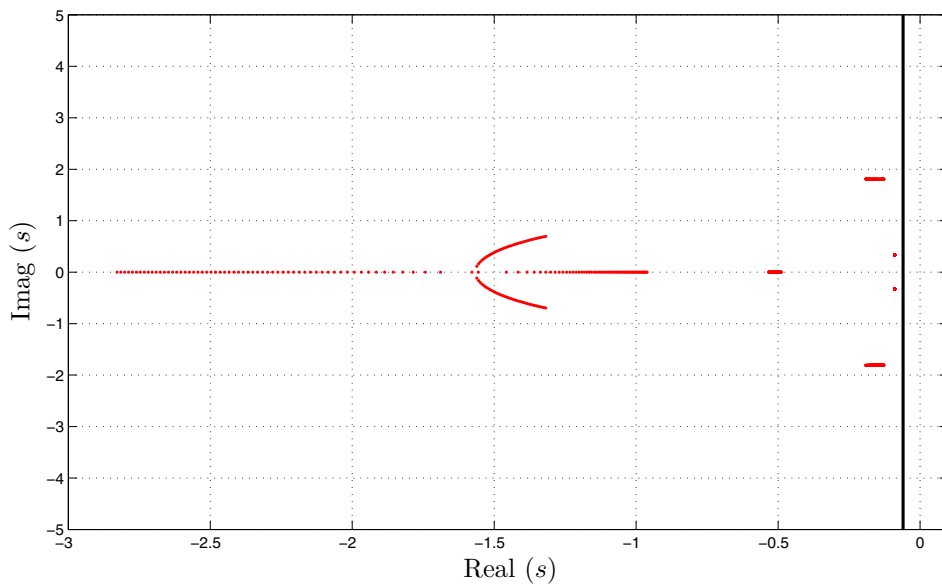
Figura 11 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação estática de saída  $u(t) = Ly(t)$ .



Fonte: o próprio autor

É possível ampliar a Figura 11 no intervalo do plano- $s$  entre  $-3 \leq s \leq 0,5$ , para obter a Figura 12, como forma de verificar com maior clareza uma das regiões ocupadas por esta nuvem de autovalores.

Figura 12 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação estática de saída  $u(t) = Ly(t)$ .



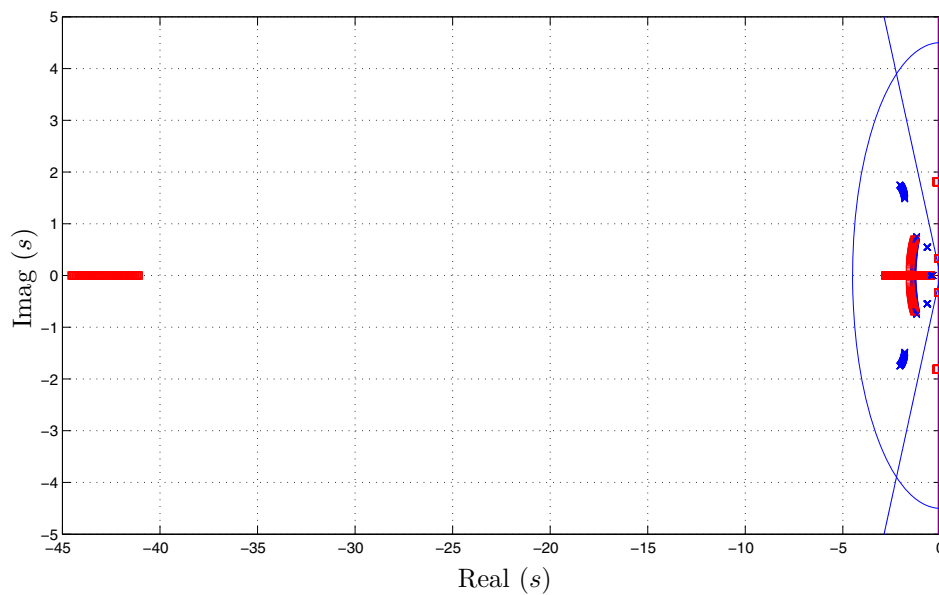
Fonte: o próprio autor



De acordo com as Figuras 11 e 12, observa-se também que os autovalores do sistema incerto realimentado se encontram à esquerda da taxa de decaimento  $\gamma = 0,06$ .

Na Figura 13 é possível observar a nuvem de autovalores do sistema realimentado  $A(\beta) + B(\beta)K$  (representado por  $\times$ ) e do sistema realimentado  $A(\beta) + B(\beta)LC(\beta)$  (representado por  $\square$ ) em uma única figura, sendo que  $\beta$  foi particionado em 101 valores.

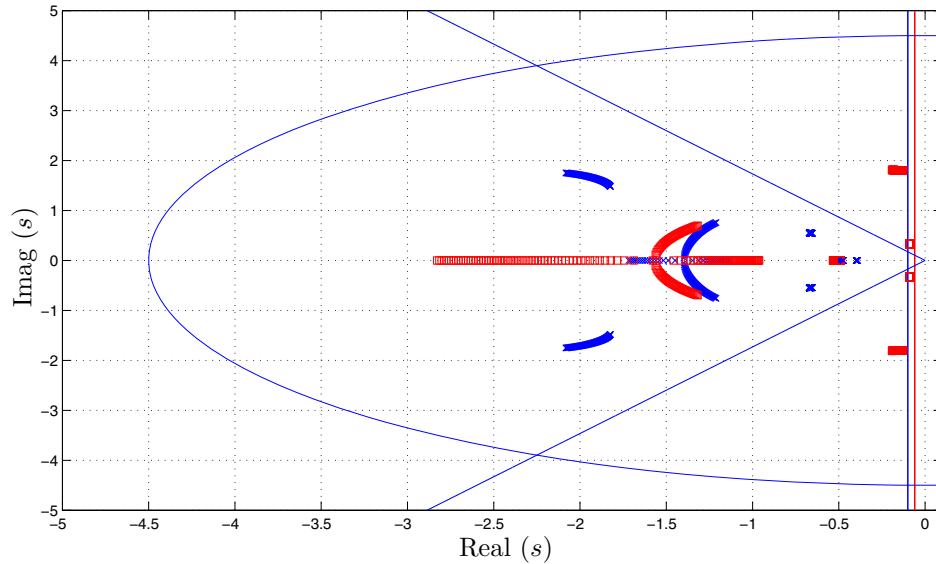
Figura 13 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$  ( $\times$ ) e realimentação estática de saída  $u(t) = Ly(t)$  ( $\square$ ).



Fonte: o próprio autor

É possível também ampliar a Figura 13 no intervalo do plano- $s$  entre  $-3 \leq s \leq 0,5$ , de tal forma a melhorar a visualização desta região, obtendo assim a Figura 14.

Figura 14 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$  ( $\times$ ) e realimentação estática de saída  $u(t) = Ly(t)$  ( $\square$ ).



Fonte: o próprio autor

É interessante observar nas Figuras 13 e 14 que, apesar das restrições do setor circular e do setor cônico impostas apenas no cálculo do controlador  $K$ , percebe-se nesse exemplo que o controlador  $L$  pode preservar tais características. Os autovalores do sistema incerto realimentado através da realimentação estática de saída respeitam apenas a única imposição de projeto feita, no caso, a taxa de decaimento  $\gamma = 0,06$ , porém a nuvem de autovalores caminha dentro de uma região próxima a região imposta no projeto do controlador  $K$ . Pode-se verificar então que, projetar um ganho de saída  $L$  dependente de restrições de realimentação de estados (dois estágios de projeto) faz com que o mesmo preserve algumas das características de projeto do controlador  $K$ . Outro parâmetro de fundamental importância diretamente relacionado com a viabilidade de implementação prática é a norma do controlador. Para o controlador  $K$  obteve-se uma norma  $\|K\| = 48,4120$  e para o controlador  $L$  obteve-se uma norma  $\|L\| = 417,8013$ .

**Observação 3.** *Por questões de segurança e devido à saturação dos amplificadores de potência, para o helicóptero 3-DOF de bancada da Quanser (QUANSER, 2002), controladores com norma  $\|X\|$  acima de 450 não são implementados no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da FEIS - UNESP.*

## 5.2 Projeto de controladores de saída robustos com otimização da norma

Como foi possível observar na Seção 5.1, valores maiores para a taxa de decaimento  $\gamma$  são desejáveis, como forma de garantir uma resposta transitória mais rápida (BOYD et al., 1994; FENG et al., 2011). Porém, quanto maior a taxa de decaimento, maior também será a norma do controlador  $L$  projetado.

Para solucionar esse problema, a partir de estudos baseados em Assunção et al. (2007), foi proposto o Teorema 4 para limitar a norma do controlador  $L$ , possibilitando assim aumentar a taxa de decaimento desejada e encontrar controladores que sejam passíveis de implementação prática (BUZACHERO et al., 2010). Procedendo de maneira análoga à Seção 5.1, para o projeto do controlador  $K$ , os parâmetros de interesse foram fixados da seguinte forma: taxa de decaimento  $\alpha = 1,5$ , o raio  $r = 4,5$ , o centro  $q = (0,0)$  e o ângulo  $\theta = 40^\circ$ . Será utilizado o conjunto de LMIs formado pelas equações (18) e (19) juntamente com as LMIs (25) e (26). Encontrada uma solução factível para o problema, o controlador  $K$  desejado que garante todas as condições impostas será calculado através da equação (22). Sendo o sistema representado pelos vértices (100) e (101), o controlador  $K$  obtido é dado por (106):

$$K = \begin{bmatrix} -84,6466 & -80,5628 & 232,6168 & -37,5842 \\ -96,2770 & 13,6933 & 2,5557 & -43,8712 \\ & & -13,8177 & 177,3679 & -66,0217 & 120,0135 \\ & & 6,4115 & -7,3678 & -74,1495 & 1,6657 \end{bmatrix}. \quad (106)$$

Para o projeto do controlador de saída  $L$ , mantém-se a mesma suposição feita na Seção 5.1 de que o acesso à variável responsável pelo controle do ângulo de arfagem ou ângulo pitch ( $\rho$ ) não está disponível, sendo assim, a matriz  $C(\beta)$  assume a forma dada em (102).

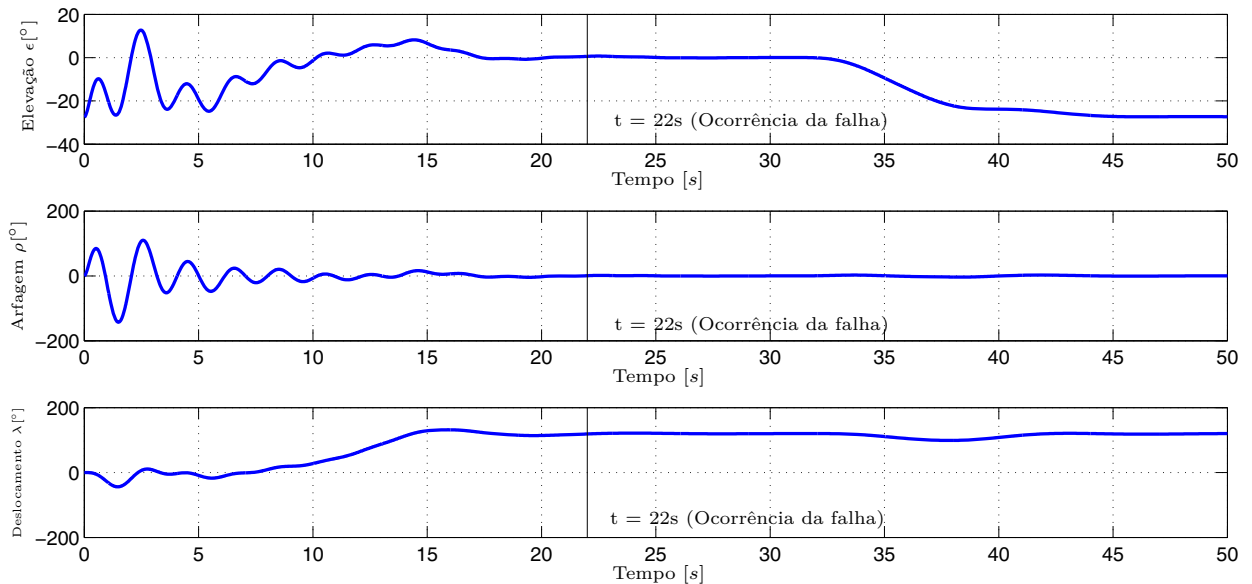
Com o controlador  $K$  dado por (106), fixou-se a taxa de decaimento  $\gamma = 0,1$ , e utilizou-se a LMI (74) juntamente com a LMI (88) para projetar um controlador de saída  $L$ . Sendo o sistema representado pelo modelo formado por (100), (101) e (102), o ganho de saída  $L$  que garante todas as condições impostas será calculado por  $L = H^{-1}J$ . O controlador  $L$

obtido é dado por (107):

$$L = \begin{bmatrix} -225,7570 & 92,3538 & 53,8936 & -26,1547 & 158,2267 & 13,8253 & 67,4061 \\ 2,0917 & -9,3608 & -27,1859 & 5,7343 & -18,2586 & -11,2597 & -9,1826 \end{bmatrix}. \quad (107)$$

De maneira análoga à Seção 5.1, através do *software* MatLab<sup>®</sup>, é possível verificar o comportamento dos vértices do sistema incerto realimentado  $A_i + B_iLC_i$  utilizando o controlador  $L$  dado por (107). Na Figura 15 é possível observar o comportamento de três estados dos oito existentes, no caso, o ângulo de elevação ( $\epsilon$ ), o ângulo de arfagem ( $\rho$ ) e o ângulo de deslocamento ( $\lambda$ ). A trajetória do helicóptero é a mesma já descrita anteriormente.

Figura 15 - Realimentação estática de Saída - Lei de controle  $u(t) = Ly(t)$ .

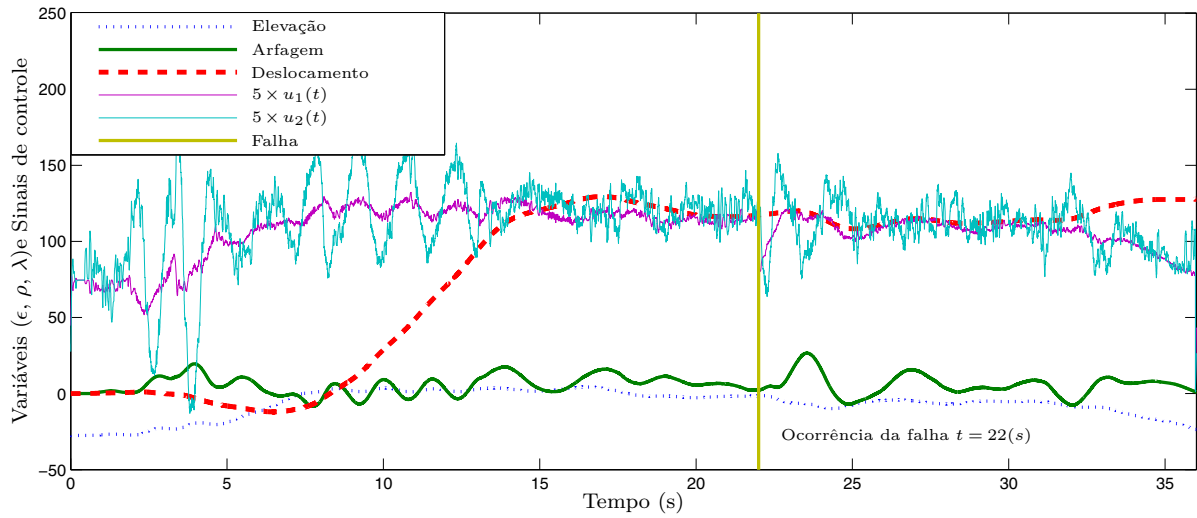


Fonte: o próprio autor

Com o controlador dado por (107) foi realizada também uma implementação prática, com o objetivo de verificar sua atuação em sistemas físicos reais sujeitos a falhas.

A partir da implementação prática, os dados foram obtidos via MatLab<sup>®</sup> como forma de observar o real comportamento do sistema. Na Figura 16, teve-se o interesse em mostrar apenas o comportamento de três estados do sistema, ou seja, a elevação ( $\epsilon$ ), a arfagem ( $\rho$ ) e o deslocamento ( $\lambda$ ), e também os sinais de controle  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ .

Figura 16 - Comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF ( $\epsilon[^\circ], \rho [^\circ], \lambda[^\circ]$ ) juntamente com as tensões de entrada  $5 \times u_1(t)[V]$  e  $5 \times u_2(t)[V]$ .

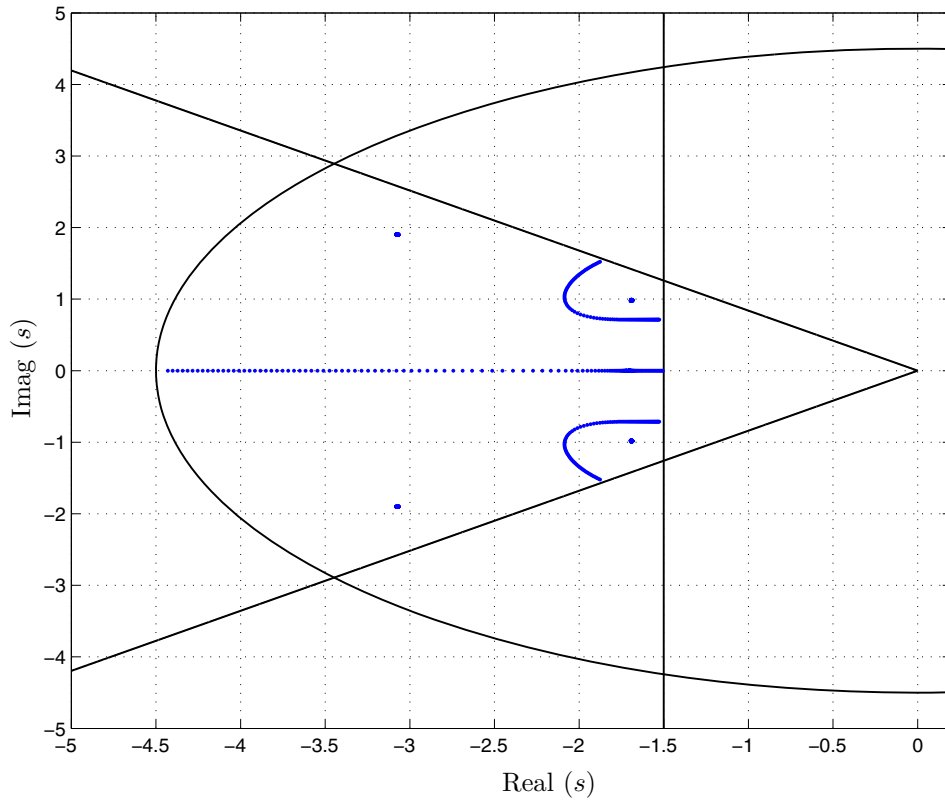


Fonte: o próprio autor

As diferenças encontradas entre as simulações e as curvas obtidas experimentalmente são decorrentes das não linearidades do sistema em questão. Comparando-se as simulações para os casos sem e com otimização da norma do controlador  $L$ , respectivamente, as Figuras 8 e 15, observa-se que na Figura 15 o sistema atinge a condição de regime permanente mais rapidamente e a amplitude das oscilações também foram reduzidas com relação aos resultados apresentados na Figura 8. Analisando-se os resultados obtidos experimentalmente (Figuras 9 e 16), observa-se que na Figura 16, o sistema tem característica oscilatória porém com tempo de transitório muito menor quando comparado com os resultados apresentados na Figura 9. No instante  $t = 22s$  quando ocorre a falha no motor traseiro do helicóptero, o sistema também se recupera de maneira mais rápida. Este fato demonstra claramente que o aumento do parâmetro da taxa de decaimento pode proporcionar a redução do tempo de transitório do sistema.

Procedendo da mesma forma que na Seção 5.1, é possível verificar se os controladores  $K$  e  $L$  garantem, respectivamente, que os autovalores dos sistemas incertos realimentados  $A(\beta) + B(\beta)K$  e  $A(\beta) + B(\beta)LC(\beta)$  atendem as condições de projeto especificadas, sendo que  $\beta$  foi particionado em 101 valores. Na Figura 17 é possível verificar os autovalores do sistema incerto utilizando a realimentação de estados.

Figura 17 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$ .

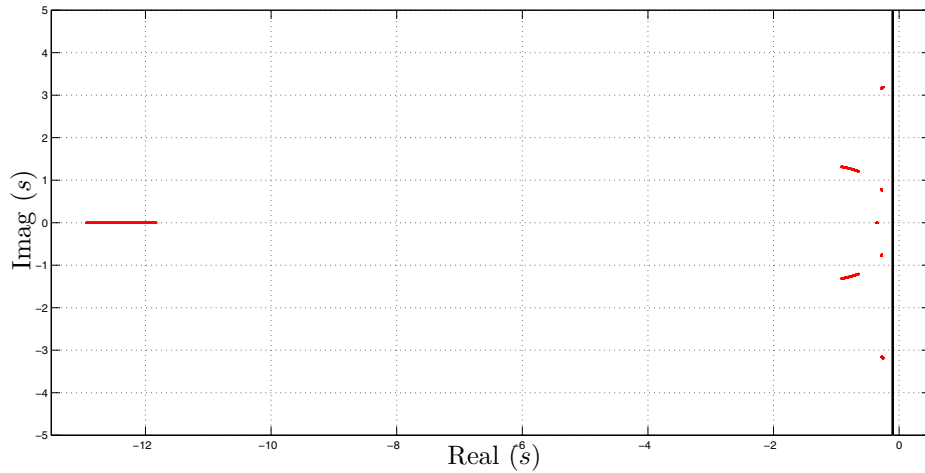


Fonte: o próprio autor

Analisando a Figura 17 é possível verificar que os autovalores do sistema incerto realimentado se encontram à esquerda da taxa de decaimento  $\alpha = 1,5$ , dentro do semicirculo de raio  $r = 4,5$  e centrado na origem e dentro da região formada pelas retas com inclinação  $\theta = 40^\circ$ .

Na Figura 18 é possível verificar os autovalores do sistema incerto utilizando a realimentação estática de saída.

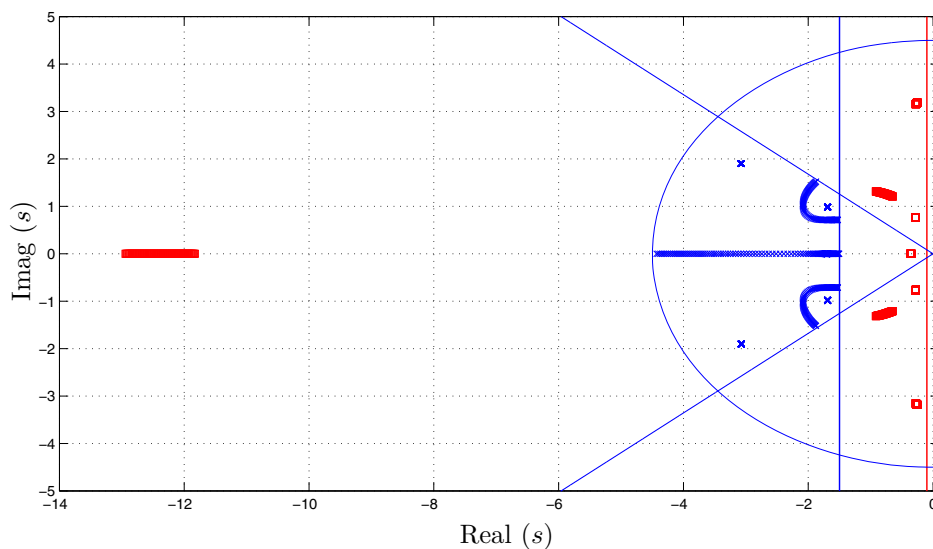
Figura 18 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação estática de saída  $u(t) = Ly(t)$ .



Fonte: o próprio autor

De acordo com a Figura 18, observa-se também que os autovalores do sistema incerto realimentado se encontram à esquerda da taxa de decaimento  $\gamma = 0,1$ . Na Figura 19 é possível observar a nuvem de autovalores do sistema realimentado  $A(\beta) + B(\beta)K$  (representado por  $\times$ ) e do sistema realimentado  $A(\beta) + B(\beta)LC(\beta)$  (representado por  $\square$ ) em uma única figura, sendo que  $\beta$  foi particionado em 101 valores.

Figura 19 - Nuvem de autovalores para o sistema incerto (14) - Realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$  ( $\times$ ) e realimentação estática de saída  $u(t) = Ly(t)$  ( $\square$ ).



Fonte: o próprio autor

É interessante observar que na Figura 19 podem ser verificadas as mesmas observações

feitas na Seção 5.1. Com relação à norma do controlador, para o controlador  $K$  obteve-se uma norma  $\|K\| = 348,1521$  e para o controlador  $L$  obteve-se uma norma  $\|L\| = 305,5004$ .

No projeto do controlador  $L$  descrito acima, se o mesmo fosse realizado desconsiderando a LMI de otimização (88), ou seja, a partir do ganho de estado (106), e utilizando apenas a LMI (74), a norma de  $L$  obtida seria de  $\|L\| = 1060,4676$ , impossibilitando sua aplicação na prática, isto é, levando os amplificadores das fontes de tensão do helicóptero 3-DOF à saturação. Verifica-se então a importância da otimização da norma do controlador  $L$  proposta neste trabalho, uma vez que não seria possível encontrar um controlador de saída com índices de desempenho adequados para o sistema em questão que pudesse ser implementado na prática.

**Nota 1.** *Com relação à região de factibilidade, testes foram realizados e observou-se que com a adição da LMI de otimização (88) não se perde região de factibilidade, em outras palavras, a região de factibilidade para os sistemas aqui estudados se mantém a mesma com ou sem a adição desta LMI.*



## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram propostas condições suficientes baseadas em LMIs para o projeto de controladores de saída dependente de ganhos de estados (dois estágios de projeto), com a inclusão do parâmetro da taxa de decaimento em sua formulação, responsável por diminuir o tempo de transitório da resposta do sistema. Foram feitas também extensões considerando a matriz de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLFs). Resultados utilizando PDLFs ao invés de CQLFs mostraram-se menos conservadores para os casos estudados, garantindo taxas de decaimento para o projeto de controladores de saída mais elevadas.

Foram propostas também condições suficientes baseadas em LMIs para a otimização da norma do controlador robusto de saída  $L$ . Desta forma, é possível realizar projetos com taxas de decaimento mais elevadas, buscando uma resposta mais rápida do sistema e viabilizando a implementação prática em sistemas físicos reais.

O trabalho realizou dois projetos de controladores de saída robustos para o sistema de um helicóptero 3-DOF de bancada, considerando que o acesso a uma das variáveis do modelo não esteja disponível. Para o primeiro caso, o projeto do controlador foi realizado desconsiderando a otimização da norma do controlador de saída. Verificou-se que o controlador robusto projetado atendeu as especificações de projeto, garantiu a estabilidade do sistema mesmo na presença de uma falha (30% de perda de potência no motor traseiro), porém, apresentou características oscilatórias indesejáveis. Para o segundo caso, adicionando-se as LMIs de otimização propostas neste trabalho, verificou-se que o controlador robusto também atendeu as restrições impostas no projeto, manteve-se estável mesmo na presença de uma falha e reduziu significativamente a amplitude das oscilações das variáveis de interesse e o tempo de acomodação do sistema, respondendo de maneira satisfatória às expectativas do projeto. Além disso, observou-se a importância da adição da LMI de otimização da norma do controlador de saída, uma vez que, se o projeto fosse realizado sem a sua adição, não seria possível realizar sua implementação na prática.

Como perspectivas futuras podem ser citadas:

- Buscar condições menos conservadoras para o projeto de controladores robustos via realimentação estática de saída.
- Expandir os resultados do Critério da  $\mathcal{D}$ -estabilidade para sistemas projetados através da realimentação estática de saída.
- Buscar controladores via realimentação estática de saída passíveis de implementação prática com o menor número possível de variáveis disponíveis para projeto.
- Expandir os resultados obtidos neste trabalho para sistemas discretos no tempo.
- Proposta de relaxação: considerar as matrizes  $F$  e  $G$  dependente de parâmetros ( $F_i$  e  $G_i$ ).

## REFERÊNCIAS

- AGULHARI, C.; OLIVEIRA, R.; PERES, P. Robust static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE - ACC, 4., 2010, Baltimore. *Proceedings...* Baltimore: [s.n.], 2010. p. 4677–4682.
- AGULHARI, C.; OLIVEIRA, R.; PERES, P. Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL - CDC, 49., 2010, Atlanta. *Proceedings...* Atlanta: [s.n.], 2010. p. 6894–6901.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Novas condições LMI para projeto de controladores estáticos mistos  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída para sistemas politópicos contínuos invariantes no tempo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2010, Bonito. *Proceedings...* Bonito: [s.n.], 2010. p. 179–186.
- ARZELIER, D.; PEAUCELLE, D.; SALHI, S. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: improving the guaranteed performance bound. In: 4th IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN - ROCOND, 2003, Milão. *Proceedings...* Milão: [s.n.], 2003. p. 425–430.
- ASSUNÇÃO, E.; MARCHESI, H. F.; TEIXEIRA, M. C. M.; PERES, P. L. D. Global optimization for the  $\mathcal{H}_\infty$  - norm model reduction problem. *Int. J. Systems Science*, Hants, v. 38, n. 2, p. 125–138, 2007.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, North-Holland, v. 13, n. 1, p. 65–72, 1989.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p. (Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, E. R. P. Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2010, Bonito. *Proceedings...* Bonito: [s.n.], 2010. v. 1, p. 4068–4975.
- BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P. da. New techniques for optimizing the norm of robust controllers of polytopic uncertain linear systems. In: SERRA, G. L. d. O. (Ed.). *Frontiers in advanced control systems*. [S.l.]: InTech, 2012. v. 1, p. 75–100.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI

approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996. ISSN 0018-9286.

CHRIFI-ALAOUI, L.; RACHID, A.  $H_\infty$  and  $\alpha$ -stability for robust performance. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE - ACC, 1995, Seattle. *Proceedings...* Seattle: [s.n.], 1995. v. 4, p. 2875–2878.

CRUSIUS, C.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, California, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, 1999. ISSN 0018-9286.

DABBOUSSI, K.; ZRIDA, J. Sufficient dilated LMI conditions for  $\mathcal{H}_\infty$  static output feedback robust stabilization of linear continuous-time systems. *Journal of Applied Mathematics*, New York, v. 2012, p. 13, 2012.

DAHLEH, M.; DAHLEH, M. A. On slowly time-varying systems. *Automatica*, New York, v. 27, n. 1, p. 201–205, 1991. ISSN 0005-1098.

FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, Natal, v. 20, p. 83–93, 2009. ISSN 0103-1759.

FENG, J.; LAM, J.; LI, P.; SHU, Z. Decay rate constrained stabilization of positive systems using static output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, New Jersey, v. 21, n. 1, p. 44–54, 2011. ISSN 1099-1239.

FINSLER, P. Über das vorkommen definiten und semidefiniten formen in scharen quadratischer formen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, New York, v. 9, n. 1, p. 188–192, 1937.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to  $H_2$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, New Jersey, v. 4, n. 4, p. 421–448, 1994. ISSN 1099-1239.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. LMI control toolbox - for use with MATLAB. [S.: s.n]. p. 138, 1995.

GEROMEL, J.; GAPSKI, P. Synthesis of positive real  $H_2$  controllers. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL - CDC, 35., 1996, Kobe. *Proceedings...* Kobe: [s.n.], 1996. v. 3, p. 2864–2869. ISSN 0191-2216.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 51, n. 12, p. 1984–1989, 2006.

KAU, S. W.; LIU, Y. S.; HONG, L.; LEE, C. H.; FANG, C. H.; LEE, L. A new LMI condition for robust stability of discrete-time uncertain systems. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 54, n. 12, p. 1195–1203, 2005.

LEITE, V. J. d. S.; MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 15, p. 127–134, 2004. ISSN

0103-1759.

LOFBERG, J. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN - CACSD, 2004, Chicago. *Proceedings...* Chicago: [s.n.], 2004. p. 284–289.

MEHDI, D.; BOUKAS, E. K.; BACHELIER, O. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, London, v. 21, n. 1, p. 1–13, 2004.

MOREIRA, H. R. *Realimentação de saída robusta a partir de controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos discretos no tempo*. 2009. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia da Computação, Universidade de Campinas, UNICAMP, 2009.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; MENDES, E. M. A. M. Equivalent techniques, extra comparisons and less conservative control design for Takagi-Sugeno (TS) fuzzy systems. *IET Control Theory Applications*, London, v. 4, n. 12, p. 2813–2822, 2010.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. [S.l.]: Pearson Education do Brasil, 2011. ISBN 97885760581069.

OLIVEIRA, M. C. de; GEROMEL, J. C. A class of robust stability conditions where linear parameter dependence of the Lyapunov function is a necessary condition for arbitrary parameter dependence. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 54, n. 11, p. 1131–1134, 2005.

OLIVEIRA, M. C. de; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. (Ed.). *Perspectives in robust control*. Berlin: Springer: [s.n.], 2001. p. 241–257. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*.

OLIVEIRA, M. D.; GEROMEL, J. Stability tests for constrained linear systems. In: PERSPECTIVES IN ROBUST CONTROL - PRC, 2001, Berlin. *Proceedings...* Berlin: [s.n.], 2001. p. 241–257. (*Lecture Notes in Control and Information Sciences*).

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 55, n. 1, p. 52–61, 2006.

PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. An efficient numerical solution for  $\mathcal{H}_2$  static output feedback synthesis. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE - ECC, 2001, Porto. *Proceedings...* Porto: [s.n.], 2001.

PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVERS, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 58, n. 7, p. 510–518, 2009.

QUANSER. 3-DOF helicopter reference manual. [S.l.: s.n.]. 2002. Disponível em: <[http://www.quanser.com/english/html/products/fs\\_product\\_challenge.asp?lang\\_code=english&pcat\\_code=exp-spe&prod\\_code=S1-3dofheli&tmpl=1](http://www.quanser.com/english/html/products/fs_product_challenge.asp?lang_code=english&pcat_code=exp-spe&prod_code=S1-3dofheli&tmpl=1)> Acesso em: 10 out. 2012.

SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. M. *A unified algebraic approach to linear control design*. [S.l.]: London, 1998. (Taylor & Francis systems and control book series). ISBN 0748405925.

XIE, B.; SYRMOS, V. Robust stabilization for discrete-time periodic systems with an  $H_\infty$ -bounded uncertainty. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL - CDC, 36., 1997, San Diego. *Proceedings...* San Diego: [s.n.], 1997. v. 3, p. 2175–2180. ISSN 0191-2216.