



Interpretação Eletrostática

e

A Conjectura de Smale

José Augusto Coelho

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

José Augusto Coelho ¹

Interpretação Eletrostática e a Conjectura de Smale

Dissertação apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov

São José do Rio Preto

¹contato: matemanino@yahoo.com.br

Aos meus pais, Francisco e Zenaide,
a minha esposa Ana Cláudia
e a minha irmã Jacqueline ,
dedico.

Agradecimentos

À CNPq, pelo auxílio financeiro.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov, por toda orientação, dedicação e incentivo.

Aos professores do grupo de polinômios ortogonais, Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, Prof.^a Dr.^a Cleonice Fátima Bracciali e em especialmente para Prof.^a Dr.^a Eliana Xavier Linhares de Andrade pelos anos de ajuda, broncas e principalmente por me fazer gostar tanto de matemática.

Aos meus pais Francisco e Zenaide, que sempre me apoiaram e me incentivaram em meus estudos ao seu Zé por me ajudar sempre que foi preciso e a Valdirene.

A minha esposa Ana Cláudia pela compreensão e por me fazer tão feliz todos os dias.

A todos os meus familiares pela ajuda direta e indireta.

A todos os colegas de turma, que me ajudarão e me apoiarão sempre que puderam.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

Por fim principalmente a Deus.

Resumo

Nesta dissertação estudamos a conjectura de Smale junto com a maioria dos resultados sobre este assunto e sua interpretação eletrostática. Mostramos alguns testes numéricos sobre a citada conjectura, para podermos analisar sua interpretação eletrostática.

Abstract

In this dissertation we study a conjecture of Smale together with majority of results about this topic and its electrostatic interpretation. We show some numerical tests concerning the conjecture in order to analyse its electrostatic interpretation.

Sumário

1	Interpretação Eletrostática de zeros de polinômios e suas generalizações	3
1.1	Interpretação eletrostática e equação de Lamé	3
1.2	Modelo Eletrostático Geral para Zeros de Polinômios Ortogonais	10
1.2.1	Interação entre os Zeros dos Polinômios	12
2	Interpretação Eletrostática da Conjectura de Smale	19
2.1	Teorema de Gauss Lucas e sua Interpretação Eletrostática	19
2.1.1	Teorema de Gauss-Lucas e Eletrostática	21
2.2	A Conjectura de Smale	22
2.3	Interpretação Eletrostática da Conjectura de Smale.	41
3	Testes Numéricos	48
3.1	Algoritmo do Programa	48
3.2	Texto do Programa	49
3.3	Testes	51
	Referências Bibliográficas	54

Introdução

Uma das funções mais importantes da matemática são os polinômios, funções simples e de uma importância gigantesca. Os polinômios são encontrados em quase todas áreas da matemática. Tão importantes quanto os polinômios são os seus zeros. Estes são os motivos da maioria das pesquisas envolvendo polinômios.

Os zeros de algumas classes de polinômios possuem belas interpretações eletrostáticas. Em 1885 Stieltjes [12] mostrou uma bonita interpretação eletrostática para os zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi. Os polinômios ortogonais são um caso a parte da teoria dos polinômios, pois estes polinômios têm aplicações em vários tipos de problemas da Matemática Pura e das Ciências Aplicadas. Esses polinômios são ferramentas essenciais para solucionar problemas e vêm contribuindo nos estudos relacionados a Equações Diferenciais, Frações Contínuas, Estabilidade Numérica, Algoritmos Rápidos e Super-rápidos. Com aplicações que abrangem da Teoria dos Números à Teoria da Aproximação, da Combinatória à Representação de Grupos, da Mecânica Quântica à Física Estatística e da Teoria de Sistemas a Processamento de Sinais.

Nosso trabalho está focado na conjectura de Smale, formulada em 1981, que afirma que se um polinômio aplicado em um zero de sua derivada dividido por este zero multiplicado pelo valor de sua derivada aplicada em um zero do polinômio é menor que 1 ou possivelmente $(n - 1)/n$. Neste trabalho, reunimos a maioria dos estudos sobre a conjectura e adicionamos uma nova conjectura relacionada a uma bela interpretação eletrostática da conjectura de Smale.

A dissertação foi organizada da seguinte forma:

Capítulo 1: Neste capítulo tentamos mostrar como ocorre a interpretação eletrostática

dos zeros de um polinômio, quais são as propriedades que os polinômios devem satisfazer para que isso aconteça, qual a relação entre a equação diferencial de Lamé e a eletrostática e uma interpretação mais geral para os polinômios ortogonais.

Capítulo 2: No segundo capítulo, faremos o que realmente propõe a dissertação, que é formular a conjectura de Smale junto com a maioria dos resultados sobre este assunto e sua interpretação eletrostática. Comentaremos ainda sobre teorema de Gauss-Lucas, que foi o primeiro resultado que relaciona a localização de zeros de um polinômio e da sua derivada.

Capítulo 3: No último capítulo, mostraremos alguns testes numéricos para verificarmos se a conjectura de Smale é viável. Foi usado o software "Mathematica" para a realização destes testes.

Capítulo 1

Interpretação Eletrostática de zeros de polinômios e suas generalizações

Neste primeiro capítulo estudaremos como ocorre uma interpretação eletrostática dos zeros de um polinômio, qual propriedade o polinômio deve satisfazer, o que é uma equação diferencial de Lamé e sua relação com eletrostática e uma interpretação mais geral para os polinômios ortogonais. Com isto poderemos falar no capítulo seguinte sobre a conjectura de Smale. O estudo deste capítulo foi baseado, primordialmente, nos livros de Szegő [15], no artigo de Dimitrov e Van Assche [4] e na dissertação de mestrado de Martins [9].

1.1 Interpretação eletrostática e equação de Lamé

Para este estudo, inicialmente, consideremos o campo eletrostático formado por $m + 1$ cargas positivas, fixas e com força absoluta r_j que são distribuída uniformemente ao longo de retas perpendiculares ao eixo real. Estas retas interceptam o eixo real nos pontos a_j , $j = 0, 1, 2, \dots, m$, onde $a_0 < a_1 < \dots < a_m$. Além disso, colocamos n cargas unitárias com suas forças unitárias também distribuídas uniformemente ao longo de retas perpendiculares ao eixo real; porém, estas cargas serão livres. Para evitar aglutinação as cargas livres só irão mover-se entre cargas fixas positivas consecutivas. As cargas livres interceptarão o eixo real nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n pertencentes ao intervalo (a_0, a_m) . Exigimos ainda, que estas cargas

livres pertençam ao simplex,

$$\Xi := \bigcap_{k=1}^s \{a_{j_k} < x_{\mu_k} < \dots < x_{\mu_{k+1}-1} < a_{j_{k+1}} : r_{j_k}, r_{j_{k+1}} > 0\},$$

com $1 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \mu_s \leq \mu_{s+1} - 1 = n$ e s o número de intervalos $[a_{j_k}, a_{j_{k+1}}]$ com cargas respectivamente r_{j_k} e $r_{j_{k+1}}$ nos pontos extremos. A energia elétrica de um sistema como o descrito acima obedeça à lei do potencial logarítmico, com isto, sua energia é dada por

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{j=0}^m r_j \sum_{k=1}^n \log \frac{1}{|x_k - a_j|} + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \log \frac{1}{|x_k - x_i|} \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^n \log |x_k - a_j|^{-r_j} + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \log |x_k - x_i|^{-1} \\ &= - \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^n \log |x_k - a_j|^{r_j} - \sum_{1 \leq i < k \leq n} \log |x_k - x_i|. \end{aligned}$$

Agora tentaremos descobrir em que momento esta energia é mínima, ou seja, quando o sistema está em equilíbrio. Para isso definiremos a função $T(x)$ como,

$$T(\bar{x}) = e^{-L(x)} = \prod_{j=0}^m \prod_{k=1}^n |x_k - a_j|^{r_j} \prod_{1 \leq i < k \leq n} |x_k - x_i|, \quad (1.1)$$

onde $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. É fácil notar que energia do sistema será mínima se, e somente se, a função $T(\bar{x})$ for máxima.

Podemos notar ainda que $T(\bar{x})$ é uma função positiva no interior do simplex Ξ e se anula em seu interior. Deste modo, o máximo de $T(\bar{x})$ é obrigatoriamente um ponto $\bar{x} =$

(x_1, x_2, \dots, x_n) do interior do simplex, onde $\frac{\partial T(\bar{x})}{\partial x_k} = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Entretanto,

$$\begin{aligned} T(\bar{x}) &= \prod_{j=0}^m \left\{ |x_1 - a_j|^{r_j} |x_2 - a_j|^{r_j} |x_2 - x_1| |x_3 - a_j|^{r_j} |x_3 - x_1| |x_3 - x_2| \dots \right. \\ &\quad \left. \times |x_n - a_j|^{r_j} |x_n - x_1| |x_n - x_2| \dots |x_n - x_{n-1}| \right\} \\ &= \prod_{j=0}^m \left\{ |x_1 - a_j|^{r_j} |x_2 - a_j|^{r_j} |x_2 - x_1| \dots |x_{k-1} - a_j|^{r_j} |x_{k-1} - x_1| \dots \right. \\ &\quad \times |x_{k-1} - x_{k-2}| |x_{k+1} - a_j|^{r_j} |x_{k+1} - x_1| \dots |x_{k+1} - x_{k-1}| \dots |x_n - a_j|^{r_j} |x_n - x_1| \dots \\ &\quad \left. \times |x_n - x_{k-1}| |x_n - x_{k+1}| \dots |x_n - x_{n-1}| |x_k - a_j|^{r_j} \right\} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |x_k - x_i|. \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$T(\bar{x}) = \tau(\bar{x} \setminus x_k) |\omega_k(x_k)| \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j}, \quad (1.2)$$

onde $\tau(\bar{x} \setminus x_k)$ é uma função que não depende de x_k , $\omega(x) := \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ e $\omega_k(x) := \frac{\omega(x)}{x - x_k}$.

Observemos que $[\omega(x)]^{(l+1)} = [(x - x_k)\omega_k(x)]^{(l+1)}$ pois,

$$\omega(x) := \prod_{i=1}^n (x - x_i) = (x - x_k)\omega_k(x).$$

Assim, concluimos que

$$[\omega(x)]^{(l+1)} = (x - x_k)\omega_k^{(l+1)}(x) + (l+1)\omega_k^{(l)}(x).$$

Então, para $x = x_k$,

$$(l+1)\omega_k^{(l)}(x_k) = \omega_k^{(l+1)}(x_k), \quad l \geq 0. \quad (1.3)$$

Com isto é fácil notar que o *signal* $\omega_k(x_k) = (-1)^{n-k}$. Então, $|\omega_k(x_k)| = (-1)^{n-k}\omega_k(x_k)$.

Portanto, podemos reescrever (1.2) como

$$T(x) = (-1)^{n-k} \tau(\bar{x} \setminus x_k) \omega_k(x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j}. \quad (1.4)$$

Agora vamos derivar a equação (1.4) com relação a x_k e assim obtemos a seguinte cadeia

de igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} &= (-1)^{n-k} \tau(\bar{x} \setminus x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\omega_k(x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \right) \\
&= (-1)^{n-k} \tau(\bar{x} \setminus x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \frac{r_0}{|x_k - a_0|} \omega_k(x_k) + \cdots + \frac{r_m}{|x_k - a_m|} \omega_k(x_k) \right. \\
&\quad \left. + \omega'_k(x_k) \right\} \\
&= (-1)^{n-k} \tau(\bar{x} \setminus x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \left[\sum_{j=0}^m \frac{r_j}{x_k - a_j} \right] \omega_k(x_k) + \omega'_k(x_k) \right\} \\
&= (-1)^{n-k} \tau(\bar{x} \setminus x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \frac{B(x_k)}{A(x_k)} \omega_k(x_k) + \omega'_k(x_k) \right\} \\
&= (-1)^{n-k} \tau(\bar{x} \setminus x_k) \omega_k(x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \frac{B(x_k)}{A(x_k)} + \frac{\omega'_k(x_k)}{\omega_k(x_k)} \right\}, \tag{1.5}
\end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Através de (1.3), concluímos que

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = (-1)^{n-k} \tau(\bar{x} \setminus x_k) \omega_k(x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \frac{B(x_k)}{A(x_k)} + \frac{1}{2} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right\}. \tag{1.6}$$

Observando a equação (1.6) conseguimos concluir que o máximo de $T(x)$ é atingido nos pontos x_k tais que

$$A(x_k) \omega''(x_k) + 2B(x_k) \omega'(x_k) = 0.$$

Olhando para os polinômios $A(x)$, $B(x)$ e $\omega(x)$, notamos que $A(x)$ tem grau $m+1$, $B(x)$ tem grau m e $\omega(x)$ tem grau n . Concluímos que a expressão $A(x) \omega''(x) + 2B(x) \omega'(x)$ é um polinômio de grau $m+n-1$. Sabemos ainda que esta última expressão se anula nos zeros de $\omega(x)$ pois são os pontos de máximo de $T(x)$. Portanto, existe um polinômio $C(x)$ de grau $m-1$ tal que,

$$A(x) \omega''(x) + 2B(x) \omega'(x) + C(x) \omega(x) = 0.$$

Com isto mostramos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (1.1). Então, $\partial T(x)/\partial x_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, se, e somente se, as coordenadas do vetor x são os zeros do polinômio de grau n que é solução da equação*

$$A(x)\omega''(x) + 2B(x)\omega'(x) + C(x)\omega(x) = 0. \quad (1.7)$$

A equação (1.7) é conhecida como equação de Lamé na forma algébrica. Heine [6] provou que para cada par de polinômios $A(x)$ e $B(x)$ existem, no máximo, $(n+m-1)!/(n!(m-1)!)$ polinômios $C(x)$ com os quais a equação de Lamé tem solução polinomial $w(x)$ de grau n . Stieltjes provou que este número de polinômios $C(x)$ é exatamente $(n+m-1)!/(n!(m-1)!)$ se as soluções da equação de Lamé são todas reais. O polinômio $C(x)$ é conhecido como polinômio de Van Vleck e a solução da equação de Lamé correspondente ao polinômio $C(x)$ é chamada de polinômio de Stieltjes.

Mostraremos em seguida um resultado que fornece condições para que a solução seja única.

Teorema 1.2. *Se a energia do campo eletrostático em questão tem um único ponto de mínimo em Ξ , então a equação de Lamé (1.7) aceita um único par de polinômios $(C(x), y(x))$, onde $C(x)$ é um polinômio de Van Vleck e $y(x)$ é um polinômio de Stieltjes. Reciprocamente, se existe um único par $(C(x), y(x))$ de polinômios, onde $C(x)$ é de Van Vleck e $y(x)$ é de Stieltjes para a equação (1.7), tal que os zeros do polinômio de Stieltjes pertencem a Ξ , então a energia do campo descrito tem um único ponto de mínimo.*

Demonstração:

Seja $D(x)$ um polinômio de grau $m-1$, $D(x) \not\equiv C(x)$, tal que a equação diferencial de Lamé admita uma solução polinomial $z(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)\dots(x - \xi_n)$ diferente da solução $y(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ obtida por $C(x)$ com zeros distribuídos igualmente nos intervalos $[a_j, a_{j+1}]$. Assim,

$$A(x)z''(x) + 2B(x)z'(x) + D(x)z(x) = 0 \quad (1.8)$$

e

$$A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0 \quad (1.9)$$

onde $z(x)$ e possua zeros distintos de $y(x)$ em (a_{j-1}, a_j) .

Definimos agora, a função, $H(x) = \prod_{j=0}^m |x - a_j|^{2r_j}$. Então, para $x \neq a_j$, $j = 0, 1, \dots, m$, temos,

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2r_0(x - a_0)^{2r_0-1}(x - a_1)^{2r_1} \dots (x - a_m)^{2r_m} \\ &\quad + 2r_1(x - a_0)^{2r_0}(x - a_1)^{2r_1-1}(x - a_2)^{2r_2} \dots (x - a_m)^{2r_m} + \dots \\ &\quad + 2r_m(x - a_0)^{2r_0}(x - a_1)^{2r_1} \dots (x - a_{m-1})^{2r_{m-1}}(x - a_m)^{2r_m-1} \\ &= \prod_{j=0}^m (x - a_j)^{2r_j} 2 \sum_{j=0}^m \frac{r_j}{x - a_j} = H(x) 2 \frac{B(x)}{A(x)}. \end{aligned}$$

Agora vamos multiplicar a equação de Lamé (1.7) por $y(x)$, a equação (1.8) por $z(x)$ e por fim vamos subtrair uma da outra, o que nos fornece o seguinte resultado:

$$A(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]' + 2B(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] = [D(x) - C(x)]y(x)z(x). \quad (1.10)$$

Se multiplicarmos ambos os lados da equação (1.10) por $\frac{H(x)}{A(x)}$, ficaremos com

$$\frac{d}{dx} \left\{ H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] \right\} = \frac{D(x) - C(x)}{A(x)} y(x)z(x)H(x). \quad (1.11)$$

Neste momento façamos $x_0 = \xi_0 = a_{j-1}$, $x_{n+1} = \xi_{n+1} = a_j$ e consideremos $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)} > 0$ em (x_i, x_{i+1}) . Sejam x_i, x_{i+1} zeros consecutivos de $y(x)$ em (a_j, a_{j+1}) . Supondo ainda que, $z(x)$ não mude de sinal em (x_i, x_{i+1}) então, de (1.11), podemos concluir que

$$\frac{d}{dx} \left\{ H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] \right\}$$

também não muda de sinal em (x_i, x_{i+1}) .

Considere os pontos $\tilde{x} = x_i + \epsilon$ e $\hat{x} = x_{i+1} - \epsilon$, $\epsilon > 0$.

1) Se $y(x)z(x) > 0$, então $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ é crescente. Assim,

- se $y(x) > 0 \Rightarrow z(x) > 0 \Rightarrow y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) > 0$ e $y'(\hat{x})z(\hat{x}) < 0$;
- se $y(x) < 0 \Rightarrow z(x) < 0 \Rightarrow y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) > 0$ e $y'(\hat{x})z(\hat{x}) < 0$.

2) Se $y(x)z(x) < 0$, então $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ é decrescente. Logo,

- se $y(x) > 0 \Rightarrow z(x) < 0 \Rightarrow y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) < 0$ e $y'(\hat{x})z(\hat{x}) > 0$;
- se $y(x) < 0 \Rightarrow z(x) > 0 \Rightarrow y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) < 0$ e $y'(\hat{x})z(\hat{x}) > 0$.

Com isto, em \tilde{x} o $\text{sin}al(yz) = \text{sin}al(y'z)$ e em \hat{x} o $\text{sin}al(yz) = -\text{sin}al(y'z)$. Isto quer dizer que em \tilde{x} e \hat{x} , o $\text{sin}al\{H(y'z - yz')\} = \text{sin}al(y'z)$ o que nos leva a,

- se $y(x)z(x) > 0$, então $\text{sin}al\{H(y'z - yz')\} > 0$ em \tilde{x} e $\text{sin}al\{H(y'z - yz')\} < 0$ em \hat{x} ;
- se $y(x)z(x) < 0$, então $\text{sin}al\{H(y'z - yz')\} < 0$ em \tilde{x} e $\text{sin}al\{H(y'z - yz')\} > 0$ em \hat{x} .

Portanto, das observações acima, concluímos que $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ muda de sinal em (x_i, x_{i+1}) da seguinte forma:

- Se $y(x)z(x) > 0$, $H(\tilde{x})[y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) - y(\tilde{x})z'(\tilde{x})] > 0$ e $H(\hat{x})[y'(\hat{x})z(\hat{x}) - y(\hat{x})z'(\hat{x})] < 0$.
Então, $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ não pode ser crescente, o que contradiz 1).

- Se $y(x)z(x) < 0$, $H(\tilde{x})[y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) - y(\tilde{x})z'(\tilde{x})] < 0$ e $H(\hat{x})[y'(\hat{x})z(\hat{x}) - y(\hat{x})z'(\hat{x})] > 0$.
Então, $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ não pode ser decrescente, contradizendo 2) chegamos novamente a uma contradição.

Portanto, $y(x)z(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (x_i, x_{i+1}) . Concluindo assim, que $z(x)$ tem pelo menos uma zero em (x_i, x_{i+1}) .

Tomando agora como x_1 e x_n o primeiro e último zeros de $y(x)$ em $[a_j, a_{j+1}]$, respectivamente. Mostraremos que $z(x)$ também muda de sinal em $[a_j, x_1]$ e $[x_n, a_{j+1}]$. Lembremos que $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)} > 0$.

Supondo, por absurdo, que $z(x)$ não muda de sinal nesses intervalos. Assim Como os zeros de $z(x)$ estão no intervalo (a_j, a_{j+1}) , assim $y(x)$ e $z(x)$ têm sinais constantes em $[a_j, x_1]$ e $[x_n, a_{j+1}]$. Porém, $y(x)$ e $z(x)$ possuem o mesmo grau e os seus coeficientes dos termos de maior grau são positivos. Com isto temos que ambos polinômios possuem o mesmo sinal em $[a_j, x_1]$ e em $[x_n, a_{j+1}]$. Então, de (1.11), $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ é uma função crescente nesses dois intervalos e além disso,

$$\lim_{x \rightarrow a_{j-1}^+} H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a_j^-} H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] = 0.$$

Logo, $(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))$ deve ser positiva em $[a_j, x_1]$ e negativa em $[x_n, a_{j+1}]$. Entretanto, $y(x_1) = 0$, então, para $x = x_1$, temos que $\text{sinal}(y'z) = \text{sinal}(y'z - yz') > 0$. Como x_1 é o menor dos zeros de $y(x)$, temos que o $\text{sinal}(y'y) < 0$ para $x = x_1 - \epsilon$, $\epsilon > 0$. Além disso temos que $y(x)$ e $z(x)$ possuem mesmo grau e $z(x)$ também não tem zeros em $[a_j, x_1)$, então $\text{sinal}(y'z) = \text{sinal}(y'y) < 0$. O que nos proporciona uma contradição.

Podemos usar o mesmo argumento para $x = x_n$. Com isto mostramos que se $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)} > 0$ o polinômio $z(x)$ tem, pelo menos, um zero a mais que $y(x)$ em (a_j, a_{j+1}) , o que nos leva a um absurdo pois $z(x)$ é um polinômio de grau n . Portanto, $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)}$ deve ser negativa em algum ponto de $a_{j-1} < x < a_j$.

Se repetirmos o procedimento anterior, mas trocando os papéis de $(C(x), y(x))$ e $(D(x), z(x))$, concluímos que $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)}$ deve ser positiva em algum ponto de $a_{j-1} < x < a_j$. Isto significa que $D(x) - C(x)$ deve mudar de sinal pelo menos uma vez em $[a_{j-1}, a_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$. Logo, $D(x) - C(x)$ tem, pelo menos, m zeros em $[a_0, a_m]$, o que é impossível, pois $D(x) - C(x)$ é de grau $m - 1$. Portanto, $D(x) - C(x) \equiv 0$.

1.2 Modelo Eletrostático Geral para Zeros de Polinômios Ortogonais

Já que a interpretação eletrostática para zeros de polinômios teve início com os polinômios ortogonais mostraremos, assim, um modelo eletrostático mais geral para os zeros desses últimos polinômios. Esta seção foi baseada, primordialmente, no artigo "An electrostatics model for zeros of general orthogonal polynomials" de Ismail [8]. Entretanto, foram consultados outros artigos que serão citados conforme forem usados.

Seja $\{p_n(x)\}$ uma seqüência de polinômios ortonormais com respeito a função peso w , com suporte em $[a, b]$, finito ou infinito e $w(x) > 0$ para $x \in (a, b)$. Em outras palavras,

$$\int_a^b p_m(x)p_n(x)w(x)dx = \delta_{m,n},$$

onde $\delta_{m,n} = 1$ se $m = n$ ou $\delta_{m,n} = 0$ se $m \neq n$.

Associamos ao $w(x)$ um potencial extremo $v(x)$,

$$w(x) = e^{-v(x)}, \quad x \in (a, b).$$

Normalizamos w da forma $\int_a^b w(x)dx = 1$. Com isto os termos iniciais e a relação de recorrência serão dados por,

$$p_0(x) = 2, \quad p_1(x) = \frac{x - b_0}{a_1},$$

$$p_{n+1}(x) = \frac{x - b_n}{a_{n+1}}p_n(x) - a_n p_{n-1}(x) \Rightarrow x p_n(x) = a_{n+1} p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x)$$

onde, a_n, b_n são os coeficientes da relação de recorrência de três termos.

Assumiremos, agora, v como sendo duas vezes diferenciável e convexa em $[a, b]$. Assim, podemos definir $A_n(x)$ e $B_n(x)$ por

$$A_n(x) = \frac{a_n w(b^-) p_n^2(b)}{b - x} + \frac{a_n w(a^+) p_n^2(a)}{x - a} + a_n \int_a^b \frac{v'(x) - v'(y)}{x - y} p_n^2(y) w(y) dy, \quad (1.12)$$

$$B_n(x) = \frac{a_n w(a^+) p_n(a) p_{n-1}(a)}{x - a} + \frac{a_n w(b^-) p_n(b) p_{n-1}(b)}{b - x} + a_n \int_a^b \frac{v'(x) - v'(y)}{x - y} p_n(y) p_{n-1}(y) w(y) dy. \quad (1.13)$$

Em (1.12) e (1.13) supomos que,

$$y^n \frac{v'(x) - v'(y)}{x - y} w(y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

são integráveis em (a, b) , isto é, que os momentos de $\frac{v'(x) - v'(y)}{x - y} w(y)$, considerados como funções de y existem, e que os termos limitantes em (1.12) e (1.13) também existem.

De acordo com os artigos [1], [2] e [3] os polinômios ortogonais $p_n(x)$ satisfaz a relação de recorrência diferencial,

$$p'_n(x) = A_n(x) p_{n-1}(x) - B_n(x) p_n(x), \quad (1.14)$$

e a equação diferencial de segunda ordem,

$$p_n''(x) + R_n(x)p_n'(x) + S_n(x)p_n(x) = 0, \quad (1.15)$$

onde,

$$R_n(x) = - \left[v'(x) + \frac{A_n'(x)}{A_n(x)} \right] \quad (1.16)$$

e

$$S_n(x) = B_n'(x) - B_n(x) \frac{A_n'(x)}{A_n(x)} - B_n(x)[v'(x) + B_n(x)] + \frac{a_n}{a_{n-1}} A_n(x) A_{n-1}(x). \quad (1.17)$$

As representações (1.12) e (1.13) de $A_n(x)$ e $B_n(x)$ encontram-se em [3] mas outra versão está nos artigos [1] e [2].

Para eliminarmos v' em (1.16) e (1.17) podemos usar a expressão,

$$B_n(x) + B_{n+1}(x) = \frac{x - b_n}{a_n} A_n(x) - v'(x).$$

Definimos, agora, o discriminante D_n , de um polinômio qualquer $g_n(x) = \gamma x^n +$ termos de ordens menores, como,

$$D_n = D(g_n) = \gamma^{2n-2} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k)^2, \quad (1.18)$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são zeros do polinômio $g_n(x)$.

1.2.1 Interação entre os Zeros dos Polinômios

Assumimos, neste momento, que a função peso $w(x)$ crie dois campos extremos. Um é formado por longas faixas com o potencial no ponto x igual a $v(x)$ dado por $w(x) = e^{-v(x)}$. Outro é um campo de curta distância que é gerado por w na presença de n cargas unitárias com o potencial dado por $\ln \left(\frac{A_n(x)}{a_n} \right)$. Assim o total do potencial é dado por $V(x)$ e é a soma do potencial de curta com o de longa distância. Logo,

$$V(x) = v(x) + \ln \left(\frac{A_n(x)}{a_n} \right). \quad (1.19)$$

Lembremos que uma carga pontual localizada em c cria um potencial em x de $-2e\ln|x - c|$. Vamos nos referir a este potencial como potencial logarítmico. Portanto, consideremos o sistema de n cargas unitárias moveis em $[a, b]$ na presença de um potencial $V(x)$ dado em (1.19). Seja

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.20)$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são os pontos das partículas ordenadas em ordem decrescente. A energia total do sistema é dada por

$$E(x) = \sum_{k=1}^n V(x_k) - 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \ln|x_j - x_k|. \quad (1.21)$$

Seja

$$T(x) = e^{-E(x)}. \quad (1.22)$$

O seguinte resultado será de fundamental importância na análise do campo eletrostático descrito.

Teorema 1.3. *Se $f \in C^2(K)$, onde K é um compacto convexo de \mathbb{R}^n , e além disso $H(f, \bar{x}) < 0$ para todo \bar{x} onde $\nabla f(\bar{x}) = 0$, então existe um único ponto $\bar{x}_0 \in K$ tal que $\nabla f(\bar{x}_0) = 0$, e portanto ele é o único ponto de máximo local.*

Segue o principal resultado da presente seção:

Teorema 1.4. *Sejam $w(x) > 0$, $x \in (a, b)$, $v(x)$ dado por $w(x) = e^{-v(x)}$ e a função $v(x) + \ln(A_n(x))$ duas vezes diferenciável e com a segunda derivada não-negativas em (a, b) . Então a posição de equilíbrio das n cargas unitárias móveis em $[a, b]$, na presença do potencial $V(x)$ dado em 1.19 é único e atingido nos zeros de $p_n(x)$ e, além disso, a interação entre as partículas obedecem o potencial logarítmico e que $T(X) \rightarrow 0$ quando X tende para algum ponto limite de $[a, b]^n$, onde*

$$T(X) = \left[\prod_{j=1}^n \frac{e^{-v(x_j)}}{\frac{A_n(x_j)}{a_n}} \right] \prod_{1 \leq l < k \leq n} (x_l - x_k)^2$$

Demonstração:

Sejam $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Vamos supor que $v''(x) > 0$. Para encontrarmos uma posição de equilíbrio, devemos encontrar um ponto de máximo de $T(X)$, pois o máximo da

$T(x)$ é atingido nos mesmos pontos de mínimo da $E(X)$. Mas, para facilitar, encontraremos o máximo não da $T(X)$ mas sim da $\ln(T(X))$. Logo, devemos resolver o sistema de equações

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \ln(T(X)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Usando (1.19), (1.22) e (1.21) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \ln(-T(X)) &= \frac{\partial}{\partial x_j} E(X) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\sum_{k=1}^n V(x_k) + 2 \sum_{1 \leq l < k \leq n} \ln|x_l - x_k| \right] \\ &= -v'(x_j) - \frac{A'_n(x_j)}{A_n(x_j)} + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.23)$$

Seja, $f(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$. Podemos observar que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{j=1}^n (x - x_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - x_j}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k} &= \lim_{x \rightarrow x_j} \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x - x_j} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_j} \left[\frac{(x - x_j)f'(x) - f(x)}{(x - x_j)f(x)} \right]. \end{aligned}$$

Usando a regra de L'Hôpital, obtemos,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k} &= \lim_{x \rightarrow x_j} \left[\frac{f'(x) + (x - x_j)f''(x) - f'(x)}{f(x) + (x - x_j)f'(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_j} \left[\frac{(x - x_j)f''(x)}{f(x) + (x - x_j)f'(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_j} \left[\frac{f''(x)(x - x_j)f'''(x)}{2f'(x) + (x - x_j)f''(x)} \right] = \frac{f''(x_j)}{2f'(x_j)}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Assim, se usarmos o resultado (1.24) na equação (1.23), teremos

$$-v'(x_j) - \frac{A'_n(x_j)}{A_n(x_j)} + \frac{f''(x_j)}{f'(x_j)} = 0.$$

Fazendo $R_n(x) = - \left[v(x) + \frac{A'_n(x)}{A_n(x)} \right]$, teremos

$$R_n(x_j) + \frac{f''(x_j)}{f'(x_j)} = 0.$$

Portanto,

$$f''(x_j) + R_n(x_j)f'(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Para analisarmos o máximo e o mínimo local, consideramos a matriz de Hesse de $\ln(T(x))$,

$$H = (h_{i,j}), \quad h_{i,j} = \frac{\partial^2 \ln(T(x))}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Temos, por (1.23), que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \ln(T(X)) = -v'(x_j) - \frac{A'_n(x_j)}{A_n(x_j)} + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln(T(X))}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{2}{(x_i - x_j)^2}, \quad i \neq j \\ \frac{\partial^2 \ln(T(X))}{\partial x_i \partial x_i} &= -v''(x_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{A'_n(x_i)}{A_n(x_i)} \right) - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(x_i - x_j)^2}. \end{aligned}$$

Observe que a relação $h_{i,i} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n h_{i,j} - v''(x_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{A'_n(x_i)}{A_n(x_i)} \right)$ dos elementos de H é verdadeiro. Denotemos

$$g_i = -v''(x_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{A'_n(x_i)}{A_n(x_i)} \right).$$

Obviamente a matriz H é simétrica. Provemos que ela é negativa definida. Para este propósito basta provar que $\langle z, Hz \rangle < 0 \quad \forall z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Portanto, calculamos

$$\begin{aligned}
\langle Z, HZ \rangle &= \sum_{\substack{j=1 \\ j=i}}^n h_{i,j} z_i z_j - \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n h_{i,j} + g_i \right) z_j^2 \right] \\
&= - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n h_{i,j} \right) z_j^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j=i}}^n h_{i,j} z_i z_j - \sum_{j=1}^n g_j z_j^2 \\
&= - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n h_{i,j} \right) z_j^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{i,j} z_i z_j - \sum_{j=1}^n g_j z_j^2 \\
&= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{i,j} (z_i^2 + z_j^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{i,j} z_i z_j - \sum_{j=1}^n g_j z_j^2 \\
&= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{i,j} (z_i + z_j)^2 - \sum_{j=1}^n g_j z_j^2,
\end{aligned}$$

onde nas igualdades entre a segunda e terceira linha, como a na de terceira e quarta usamos a simetria de H , isto é, que $h_{i,j} = h_{j,i}$. Por hipótese do teorema $g_i < 0$ e obviamente $h_{i,j}$ também, assim, concluimos que $\langle z, H z \rangle > 0$ e portanto H é positiva definida, assim $-H$ vai ser definida negativa.

Com isto $\ln(T(x))$, pois $\ln(T(x))$ está relacionado a matriz $-H$, não tem mínimo relativo e nem ponto de sela. Então, toda a solução de $-v'(x_j) - \frac{A'_n(x_j)}{A_n(x_j)} + \frac{f''(x_j)}{f'(x_j)} = 0$ é um máximo local de $\ln(T)$ ou de T .

Então, não podemos ter mais do que um máximo local desde que $T(X) \rightarrow 0$ quando X tende para um ponto limite ao longo de um caminho definido por $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Assim o sistema (1.23) tem n soluções. Como,

$$p_n''(x) + R_n(x)p_n'(x) + S_n(x)p_n(x) = 0$$

e

$$f_n''(x) + R_n(x)f_n'(x) + S_n(x)f_n(x) = 0,$$

então os zeros x_1, x_2, \dots, x_n de $f(x) = a_1 a_2 \dots a_n p_n(x)$ são a solução do sistema (1.23), o que completa a prova.

■

Sejam,

$$x_{1,n} > x_{2,n} > \dots > x_{n,n}$$

os zeros de $p_n(x)$. Em [7] Ismail calculou o maior valor de $T(x)$ através do discriminante de $p_n(x)$, mostrando inicialmente que é dado por

$$D_n = \left[\prod_{j=1}^n \frac{A_n(x_{j,n})}{a_n} \right] \left[\prod_{k=1}^n a_k^{2k-2n+2} \right]. \quad (1.25)$$

O próximo resultado fornece a representação para o valor máximo de T em termos dos coeficientes $\{a_n\}$ da relação de recorrência.

Teorema 1.5. *Seja T_{max} e E_n os valores máximos de $T(X)$ e o equilíbrio energético de um sistema de n partículas, respectivamente. Então*

$$T_{max} = \exp \left(- \sum_{j=1}^n v(x_{j,n}) \right) \prod_{k=1}^n a_k^{2k} \quad (1.26)$$

e

$$E_n = \sum_{j=1}^n v(x_{j,n}) - 2 \sum_{j=1}^n j \ln(a_j). \quad (1.27)$$

Demonstração:

Temos que o máximo de T é atingido nos zeros de $p_n(x)$. Assim,

$$T_{max} = \left[\prod_{j=1}^n \frac{e^{(-v(x_{j,n}))}}{\frac{A_n(x_{j,n})}{a_n}} \right] \prod_{1 \leq l < k \leq n} (x_{l,n} - x_{n,k})^2.$$

Por (1.18), temos

$$D(p_n) = \gamma^{2n-2} \prod_{1 \leq l < k \leq n} (x_{l,n} - x_{n,k})^2.$$

Então

$$T_{max} = \left[\prod_{j=1}^n \frac{e^{(-v(x_{j,n}))}}{\frac{A_n(x_{j,n})}{a_n}} \right] \gamma^{2-2n} D(p_n),$$

onde $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Por (1.25) temos que

$$D(p_n) = \left[\prod_{j=1}^n \frac{A_n(x_{j,n})}{a_n} \right] \left[\prod_{k=1}^n a_k^{2k-2n+2} \right].$$

Então,

$$\begin{aligned} T_{max} &= \left[\prod_{j=1}^n \frac{e^{(-v(x_{j,n}))}}{\frac{A_n(x_{j,n})}{a_n}} \right] (a_1 a_2 \dots a_n)^{2-2n} \left[\prod_{j=1}^n \frac{A_n(x_{j,n})}{a_n} \right] \left[\prod_{j=1}^n a_j^{2j-2n+2} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n e^{-v(x_{j,n})} \cdot \prod_{j=1}^n a_j^{2j} \\ &= \exp \left(- \sum_{j=1}^n v(x_{j,n}) \right) \prod_{k=1}^n a_j^{2j}. \end{aligned}$$

Como $E_n = -\ln(T_{max})$, temos

$$\begin{aligned} E_n &= -\ln(T_{max}) = -\ln \left(\exp \left(- \sum_{j=1}^n v(x_{j,n}) \right) \prod_{k=1}^n a_j^{2j} \right) \\ &= -\ln \left(\exp \left(- \sum_{j=1}^n v(x_{j,n}) \right) \right) - \ln \left(\prod_{k=1}^n a_j^{2j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n v(x_{j,n}) - 2 \sum_{j=1}^n j \ln(a_j). \end{aligned}$$

Logo podemos concluir que, de fato

$$T_{max} = \exp - \sum_{j=1}^n v(x_{j,n}) \prod_{k=1}^n a_k^{2k}$$

e

$$E_n = \sum_{j=1}^n v(x_{j,n}) - 2 \sum_{j=1}^n j \ln(a_j).$$

■

Capítulo 2

Interpretação Eletrostática da Conjectura de Smale

Neste capítulo, mostraremos o que é a conjectura de Smale e mostraremos sua interpretação eletrostática. Para isso, antes falaremos um pouco do teorema de Gauss-Lucas e sua relação com a conjectura.

2.1 Teorema de Gauss Lucas e sua Interpretação Eletrostática

Nesta seção estudaremos o Teorema de Gauss-Lucas. Este teorema mostra uma relação geométrica entre os zeros de um polinômio $p(x)$ e as raízes de sua derivada (pontos críticos). O teorema mostra que o fecho convexo dos zeros do polinômio $p(x)$ contém todos os zeros do polinômio complexo $p'(x)$. Além disso, o Teorema de Gauss-Lucas possui uma interpretação eletrostática que se assemelha com a que vamos estudar na próxima seção e será esta interpretação que vai ser mais relevante para o trabalho em questão. Deste modo, mostraremos qual é este teorema e sua interpretação.

Definição 2.1 (Combinação Convexa). *Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Todas as combinações lineares da forma*

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n,$$

com $0 \leq \alpha_k \leq 1$ e $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ são chamadas combinações convexas de z_1, z_2, \dots, z_n . Todas as possíveis combinações convexas de z_1, z_2, \dots, z_n formam o fecho convexo destes pontos.

Sabe-se que o fecho convexo de z_1, z_2, \dots, z_n é o menor conjunto convexo que contém z_1, z_2, \dots, z_n .

Teorema 2.1. Se $p(x)$ é um polinômio complexo de grau maior ou igual a dois, então todos os zeros de $p'(x)$ estão dentro de um fecho convexo formado pelos zeros de $p(x)$.

Demonstração:

Seja $p(x)$ um polinômio complexo, $p(x) = \alpha \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, onde os pontos x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são os zeros de $p(x)$ e não necessariamente distintos. Seja z um número complexo tal que $p(z) \neq 0$. Assim,

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{\alpha \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n (z - x_j)}{\alpha \prod_{j=1}^n (z - x_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - x_j}.$$

Em particular, se z é um zero de $p'(x)$ e $p(z) \neq 0$, então teremos a seguinte sequência de igualdades equivalentes, passando o termo negativo, da expressão final acima, para o outro lado da igualdade e depois conjugando ambos os lados, teremos,

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{z - x_j} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - x_j} \frac{\bar{z} - \bar{x}_j}{\bar{z} - \bar{x}_j} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \frac{z}{|z - x_j|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{|z - x_j|^2}.$$

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{|z - x_j|^2} \right) z = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{|z - x_j|^2}.$$

Deste modo podemos concluir que os zeros de $p'(x)$ são combinações convexas dos zeros de $p(x)$, pois, os coeficientes que acompanham os termos x_j são positivos e a soma deles resultam em 1.

Agora se z é tal que $p(z) = p'(z) = 0$, então z é um zero de $p(x)$. Se denotarmos este zero por x_n , poderemos escrever z como sendo a seguinte combinação convexa dos zeros de $p(x)$,

$$z = 1 \cdot z + 0 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} x_j.$$

Portanto os zeros de $p'(x)$ pertencem ao fecho convexo formado pelos zeros de $p(x)$. ■

2.1.1 Teorema de Gauss-Lucas e Eletrostática

Estudaremos agora a interpretação eletrostática do Teorema de Gauss-Lucas. Para isso, daremos uma nova demonstração do Teorema 2.1. Nesta nova demonstração mostraremos qual é a interpretação eletrostática deste teorema.

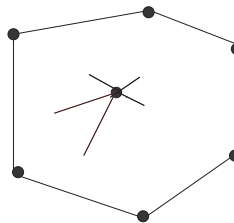
Lembramos que o Teorema de Gauss-Lucas mostra que os zeros de $p'(x)$ estão dentro de um fecho convexo formado pelos zeros de $p(x)$.

Vimos anteriormente que $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}$, onde $f(z)$ é um polinômio de grau n e z_k , $k = 1, 2, \dots, n$ são seus zeros. Multiplicando, os dois termos do quociente da direita, pelo conjugado do denominador, temos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{z - z_k}}{(z - z_k)(\overline{z - z_k})} = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{z - z_k}}{|z - z_k|^2}.$$

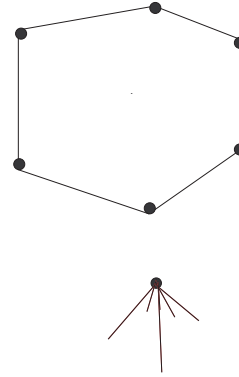
Quando uma carga exerce uma força em outra que é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas o potencial respeitará o já mencionado "Potencial Logarítmico". Então podemos analisar o Teorema de Gauss-Lucas através da eletrostática.

Como foi dito anteriormente, z_k , $k = 1, 2, \dots, n$ são os zeros de f . Tomamos um ponto z pertencente ao interior do fecho convexo formado por estes pontos. Se olharmos pra os pontos z_k como cargas unitária fixas, então o potencial no ponto z terá a configuração como ilustra a figura.



Portanto, poderá existir um ponto no interior do fecho convexo tal que a resultante de todos os vetores será nula e o sistema terá um ponto de mínimo energético.

Por outro lado, se tomarmos um ponto z fora do fecho convexo o potencial terá a configuração como ilustra a seguinte figura.



Podemos concluir que para todo o ponto fora do fecho convexo sempre vai existir um direção onde a resultante das forças não vão se anular, ilustrada pela figura anterior, com isto podemos concluir que o sistema nunca terá um ponto de mínimo fora do fecho convexo.

Com isto mostramos que os zeros da derivada da f estão no interior do fecho convexo formado pelos zeros de f , pois os zeros da derivada são os pontos de mínimo do sistema citado anteriormente.

Esta interpretação vai se assemelhar com a que vamos estudar logo em seguida.

2.2 A Conjectura de Smale

Agora vamos estudar um dos pontos mais importante para nosso trabalho. A conjectura de Smale é sobre o quociente de um polinômio aplicado em um zero de sua derivada pelo ponto onde o polinômio foi aplicado multiplicado pela sua derivada aplicada em um ponto que zera o polinômio, porém, a derivada não se anula. Nesta conjectura tenta-se encontrar um limitante para o quociente mencionado anteriormente. Seguimos as idéias do artigo de Smale [11] e do livro "Analytic Theory of Polynomials" de Rahman e Schmeisser [10].

Conjectura 2.2 (Conjectura de Smale). *Seja f um polinômio de grau n tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$. Então,*

$$\min\left\{\left|\frac{f(\xi)}{\xi f'(0)}\right| : f'(\xi) = 0\right\} \leq K, \quad (2.1)$$

onde $K = 1$ ou possivelmente $K = \frac{n-1}{n}$.

Smale provou que (2.1) é sempre verdade para $K = 4$. O binômio $f(z) = a_1z + a_nz^n$, $a_1a_n \neq 0$, mostra que K não pode ser menor que $\frac{n-1}{n}$. De fato, observe que para quaisquer $a_1, a_n \in \mathbb{C}$ não-nulos e para qualquer $\xi \in \mathbb{C}$ a desigualdade

$$\frac{|a_1\xi + a_n\xi^n|}{|\xi||a_1|} = \frac{|a_1 + a_n\xi^{n-1}|}{|a_1|} \geq 1 - \frac{|a_n||\xi|^{n-1}}{|a_1|}$$

é verdadeira. Por outro lado,

$$f'(z) = a_1 + na_nz^{n-1} \Rightarrow \xi^{n-1} = -\frac{a_1}{na_n} \Rightarrow |\xi^{n-1}| = \frac{|a_1|}{n|a_n|}.$$

Portanto,

$$\frac{|f(\xi)|}{|\xi||f'(0)|} \geq 1 - \frac{|a_n||\xi|^{n-1}}{|a_1|} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

Mostraremos em seguida o resultado de Smale. Para isso precisaremos de algumas informações sobre funções univalentes e de um lema.

Definição 2.2. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, onde $\Omega \subset \mathbb{C}$. f é chamada univalente em Ω se para qualquer $z_1, z_2 \in \Omega$, com $z_1 \neq z_2$, temos que $f(z_1) \neq f(z_2)$.*

Teorema 2.3 (Koebe). *Seja f uma função que é univalente no disc D , tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Então $f(D)$ contém o disco $D(0, 1/4)$.*

Lema 2.4. *Seja φ um polinômio tal que $\varphi(0) = 0$. Suponha que*

$$\min\{|\varphi(\xi)| : \varphi'(\xi) = 0\} = 1.$$

Então, existe uma função analítica univalente ψ no disco unitário D e assume valores no plano complexo \mathbb{C} , tal que $\psi(0) = 0$ e $\varphi(\psi(w)) = w$ para todo $w \in D$.

Demonstração:

Seja $\rho \in (0, 1)$, e considere a lemniscata ou curva de nível

$$\mathcal{L}_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| = \rho\}.$$

Como $\min\{|\varphi(\xi)| : \varphi'(\xi) = 0\} = 1$ então $\varphi(0) \neq 0$, e portanto φ é univalente em um vizinhança da origem. Em particular, para cada ρ pequeno, existe um componente $\mathcal{L}_{\rho,0}$ de \mathcal{L}_ρ junto a origem tal que φ transforma o interior $U_{\rho,0}$ de \mathcal{L}_ρ no disco $D(0; \rho)$ em uma forma bijetora. Quando ρ cresce, isto ocorre até $\mathcal{L}_{\rho,0}$ se juntar a outro componente de \mathcal{L}_ρ . Por outro lado, sabe-se que os pontos críticos do polinômio φ são exatamente aqueles onde ocorre a junção de curvas de nível.

Pelo fato de que $\min\{|\varphi(\xi)| : \varphi'(\xi) = 0\} = 1$, não podemos ter pontos críticos em $\mathcal{L}_{\rho,0}$ para qualquer $\rho \in (0, 1)$, e portanto φ é univalente para todo ρ escolhido. Deste modo, para cada ponto w de D , existe uma correspondência um-para-um com o ponto z de $U_0 = \bigcup_{0 < \rho < 1} U_{\rho,0}$, tal que $w = \varphi(z)$. Com isto a transformação

$$\psi : D \rightarrow U_0, \quad w \rightarrow z$$

possui a propriedade desejada. ■

Teorema 2.5 (Teorema de Smale). *Seja um polinômio tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$. Então*

$$\min\left\{\left|\frac{f(\xi)}{\xi f'(0)}\right| : f'(\xi) = 0\right\} \leq 4$$

Demonstração:

Sejam c e λ números complexos diferentes de zero. Definimos

$$\varphi(z) = cf\left(\frac{z}{\lambda}\right). \quad (2.2)$$

Então, $\varphi(0) = cf(0) = 0$, $\varphi'(0) = \frac{cf'(0)}{\lambda} \neq 0$, e

$$\frac{f(z)}{zf'(0)} = \frac{c\frac{\lambda f(z)}{\lambda}}{c\frac{\lambda z}{\lambda}f'(0)} = \frac{\varphi(\lambda z)}{\lambda z\varphi'(0)}, \quad z \neq 0. \quad (2.3)$$

Além disso, se ξ é um ponto crítico de f , então $\lambda\xi$ é um ponto crítico de φ , e vice-versa. Para verificar isto basta notar que $\varphi'(z) = \frac{cf'(\frac{z}{\lambda})}{\lambda}$. Portanto, é suficiente provar o teorema para φ .

Se f tiver zero com multiplicidade maior que um a conclusão do teorema é trivial. De fato, pois vai existir um zero da f' que também é zero da f , vamos chamar este zero da f' de ξ_0 , logo $\left| \frac{f(\xi_0)}{\xi_0 f'(0)} \right| = 0$, portanto (2.5) é satisfeito.

Consideremos então o caso quando os zeros de f são todos simples. Seja $M = \min\{|f(\xi)| : f(\xi) = 0\}$. Então $M \neq 0$ e escolhemos $c = \frac{1}{M}$ e $\lambda = \frac{f'(0)}{M}$. Assim, por (2.2), temos que o polinômio φ , com $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, e

$$\min\{|\varphi(\xi)| : \varphi(\xi) = 0\} = 1,$$

pois, se existir ξ_0 tal que $|\varphi(\xi_0)| < 1$ então vai existir α tal que $f'(\alpha) = 0$ e $\xi_0 = \lambda\alpha$. Para este α , por (2.3), temos a seguinte cadeia de implicações

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha)}{\alpha f'(0)} &= \frac{\varphi(\lambda\alpha)}{\lambda\alpha\varphi'(0)} \Rightarrow \frac{f(\alpha)}{f'(0)} = \frac{\varphi(\lambda\alpha)}{\lambda\varphi'(0)} \Rightarrow \frac{\varphi(\lambda\alpha)}{\lambda \frac{cf'(0)}{\lambda}} = \frac{\varphi(\xi_0)}{cf'(0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\varphi\xi_0}{c} < \frac{1}{c} = M \end{aligned}$$

Chegamos em um absurdo pois $M = \min\{|\varphi(\xi)| : \varphi(\xi) = 0\}$.

Agora, por Lema 2.4, existe uma função univalente ψ tal que $\psi(0) = 0$ e $\varphi(\psi(w)) = w$ para todo w pertencente a uma bola aberta D . Assim, $\psi'(0) = \frac{1}{\varphi'(0)} = 1$. Portanto, pelo Teorema de Koebe 2.3, a região $\Delta = \{\psi(w) : w \in D\}$ contém um disco aberto de raio $1/4$ centrado na origem. Desde que φ seja univalente em Δ e transforme Δ em D , segue que nenhum ponto z com $|z| < \frac{1}{4}$ pode ser ponto crítico de φ . portanto, lembrando que $\varphi'(0) = 1$ e calculando

$$\left| \frac{\varphi(\xi)}{\xi\varphi'(0)} \right| < \left| \frac{1}{\xi} \right| < \left| \frac{1}{\frac{1}{4}} \right| = 4$$

concluimos

$$\min\left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| : f'(\xi) = 0 \right\} \leq 4$$

■

Em seguida consideremos um caso particular quando os pontos críticos de f são todos reais. Para investigarmos este caso, precisamos primeiramente de um resultado técnico

Lema 2.6. *Seja g um polinômio de grau positivo e no máximo n e com somente zeros reais. Supomos que, no intervalo $[a, b]$, ele cresce monotonicamente de 0 até $g(b) > 0$. Então,*

$$\int_a^b g(x)dx \leq (b-a)g(b) \frac{n-1}{n+1} \left[\left(\frac{n}{n-1} \right)^n - 2 \right],$$

onde o lado direito é $\frac{(b-a)g(b)}{2}$ quando $n = 1$. Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, $g(x) = c(x-a)(nb - (n-1)a - x)^{n-1}$ para algum $c > 0$.

Demonstração:

Primeiramente, caso g tenha grau no máximo 1,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx &= \int_a^b (cx + d)dx = c\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + d(b-a) \\ &= c \frac{(b-a)(b+a)}{2} + d(b-a) \\ &= \frac{(b-a)(cb + ca + 2d)}{2} \\ &= \frac{(b-a)(g(b) - g(a))}{2} \\ &= \frac{(b-a)g(b)}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \int_a^b g(x)dx \leq \frac{(b-a)g(b)}{2}$$

Agora faremos o caso onde o grau de g é maior ou igual a 2. Além disso, por uma transformação afim, nos restringiremos ao caso onde $a = 0$, $b = 1$ e $g(b) = 1$. Então o polinômio poderá ser escrito da seguinte forma

$$g(x) = x \prod_{n=1}^k \frac{x - \alpha_n}{1 - \alpha_n} \prod_{s=1}^l \frac{\beta_s - x}{\beta_s - 1},$$

onde $k + l \leq n - 1$, $\alpha_k < 0$ e $\beta_s > 1$.

Um polinômio é monotônico em $[a, b]$ se, e somente se, $g'(x) \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} g'(x) = & \prod_{n=1}^k \frac{x - \alpha_n}{1 - \alpha_n} \prod_{s=1}^l \frac{\beta_s - x}{\beta_s - 1} + x \sum_{t=1}^k \frac{1}{1 - \alpha_t} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq t}}^k \frac{x - \alpha_n}{1 - \alpha_n} \prod_{s=1}^l \frac{\beta_s - x}{\beta_s - 1} + \\ & -x \sum_{r=1}^l \frac{1}{\beta_r - 1} \prod_{n=1}^k \frac{x - \alpha_n}{1 - \alpha_n} \prod_{\substack{s=1 \\ r \neq s}}^l \frac{\beta_s - x}{\beta_s - 1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$g'(1) = 1 + \sum_{t=1}^k \frac{1}{1 - \alpha_t} - \sum_{r=1}^l \frac{1}{\beta_r - 1} \geq 0$$

que implica em

$$\sum_{r=1}^l \frac{1}{\beta_r - 1} \geq 1 + \sum_{t=1}^k \frac{1}{1 - \alpha_t}. \quad (2.4)$$

Agora consideremos o valor de g para $x \in (0, 1)$ como uma função de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ e β_1, \dots, β_k e que maximiza a parte inferior das condições anteriores e (2.4).

Passo 1: Para $x \in (0, 1)$, os valores de $g(x)$ aumentam quando os números α_n e β_s diminuem. Mostraremos primeiro para o α . Escrevendo $g(x)$ da seguinte forma, $g(x) = g_1(x)g_2(x)$, onde

$$g_1(x) = \frac{x - \alpha_k}{1 - \alpha_k}$$

e $g_2(x)$ o resto dos termos de $g(x)$. Com isto podemos notar que se α_k diminuir em módulo o coeficiente angular de g_1 aumenta e assim g_1 aumenta, logo se diminuirmos os α_n os valores de $g(x)$ aumentam. Analogamente temos para os β_s . Lembrando que (2.4) tem que ser mantida, então, podemos diminuir até que (2.4) torne-se igualdade.

Passo 2: Suponhamos que a igualdade em (2.4) seja atingida. Mantendo todos α_n e β_s fixos, exceto por um par distinto de números α_k e α_j . Variando α_k e α_j tal que a igualdade em (2.4) seja preservada. Então $g(x)$ aumenta se a distância entre α_k e α_j , $\alpha_k > \alpha_j$, diminui. De fato, vamos agora escrever $g(x)$ como $g(x) = g_3(x)g_4(x)$, onde

$$g_3(x) = \left(\frac{x - \alpha_k}{1 - \alpha_k} \right)^m \left(\frac{x - \alpha_j}{1 - \alpha_j} \right)^p$$

e $g_4(x)$ os termos restantes de $g(x)$. Como queremos analisar o que ocorre com $g_3(x)$ quando

α_k e α_j se aproxima, então vamos observar a situações em que eles vão se aproximando até um ponto θ onde α_k e α_j se igualam. Com isto vamos comparar a função $g_3(x)$ com o coeficiente $\left(\frac{x-\theta}{1-\theta}\right)^{m+p}$. Como queremos provar que $g(x)$ aumenta, então basta provar que

$$g_3(x) = \left(\frac{x-\alpha_k}{1-\alpha_k}\right)^m \left(\frac{x-\alpha_j}{1-\alpha_j}\right)^p \leq \left(\frac{x-\theta}{1-\theta}\right)^{m+p}$$

Primeiramente vamos denotar a função $h(x)$ como,

$$h(x) = \left(\frac{x-\alpha_k}{x-\theta} \frac{1-\theta}{1-\alpha_k}\right)^m \left(\frac{x-\alpha_j}{x-\theta} \frac{1-\theta}{1-\alpha_j}\right)^p,$$

assim, para provarmos a desigualdade anterior basta provar que $h(x) \leq 1$. Deste modo, temos que

$$h'(x) = -\frac{\left(\frac{x-\alpha_k}{x-\theta} \frac{1-\theta}{1-\alpha_k}\right)^m \left(\frac{x-\alpha_j}{x-\theta} \frac{1-\theta}{1-\alpha_j}\right)^p ((m+p)x\theta - (mx+p\theta)\alpha_k + \alpha_j(-px-m\theta+(m+p)\alpha_k))}{(x-\theta)(x-\alpha_k)(x-\alpha_j)}.$$

Como a igualdade em (2.4) tem que ser preservada, conseqüentemente,

$$\frac{m}{1-\alpha_k} + \frac{p}{1-\alpha_j} = \frac{m+p}{1-\theta},$$

assim,

$$\theta = \frac{-p\alpha_j - m\alpha_k + m\alpha_j\alpha_k + p\alpha_j\alpha_k}{-m-p+m\alpha_j+p\alpha_k}.$$

Agora vamos olhar para o numerador de $h'(x)$, mas especificamente para o termo $((m+p)x\theta - (mx+p\theta)\alpha_k + \alpha_j(-px-m\theta+(m+p)\alpha_k))$. Substituindo θ neste termo obtemos,

$$\frac{(\alpha_j^2 mp(1-x))}{-m-p+m\alpha_j+p\alpha_k} < 0.$$

Como a parte restante do numerador de $h'(x)$ é positiva e seu denominador também o é, podemos concluir que $h'(x) > 0$, assim $h(x)$ é crescente. Como $h(1) = 1$ concluímos que $h(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Portanto mostramos que $g(x)$ aumenta se a distância entre α_k e α_j diminui.

Analogamente temos que para β_k e β_j . Assim o polinômio que assumirá os maiores valores será o polinômio com $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha$ e $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_l = \beta$.

Portanto,

$$g(x) = x \left(\frac{x - \alpha}{1 - \alpha} \right)^k \left(\frac{\beta - x}{\beta - 1} \right)^l$$

onde $k + l \leq n - 1$, $\alpha < 0$, $\beta > 1$ e

$$\frac{l}{\beta - 1} = 1 + \frac{k}{1 - \alpha} \quad (2.5)$$

Passo 3: Se variarmos α e β tal que (2.5) fique preservada, então $g(x)$ aumenta quando α decresce, pois $\beta = 1 + \frac{l(1 - \alpha)}{1 - \alpha + k}$. Fazendo $\alpha \rightarrow -\infty$ temos que $\beta = 1 + l$ e

$$g_l(x) = x \left(\frac{1 + l - x}{1 + l - 1} \right) = x \left(\frac{1 + l - x}{l} \right)^l \quad (2.6)$$

Passo 4: Para o polinômio (2.6), temos

$$g_l(x) < g_m(x), \quad x \in (0, 1), \quad l < m.$$

Portanto, temos que

$$\int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 g_{n-1}(x) dx = \int_0^1 x \left(\frac{n - x}{n - 1} \right)^{n-1} dx.$$

Calculando a última integral, obtemos

$$\int_0^1 x \left(\frac{n - x}{n - 1} \right)^{n-1} \leq (1 - 0)g(1) \frac{n - 1}{n + 1} \left[\left(\frac{n}{n - 1} \right)^n - 2 \right].$$

Assim, usando a transformação inversa, podemos concluir que

$$\int_a^b g(x) dx \leq (b - a)g(b) \frac{n - 1}{n + 1} \left[\left(\frac{n}{n - 1} \right)^n - 2 \right].$$

■

Teorema 2.7. *Seja f um polinômio de grau $n \geq 2$ com $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$. Supomos que os pontos críticos de f são todos reais. Então*

$$\min \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| : f'(\xi) = 0 \right\} \leq \frac{n-2}{n} \left[\left(\frac{n-1}{n-2} \right)^{n-1} - 2 \right] \leq \frac{n-1}{n},$$

sendo o primeiro em $\frac{1}{2}$ quando $n = 2$. A igualdade são atingidas se $n = 2$ ou $n = 3$ e $f''(0) = 0$. Para $n > 3$ a desigualdade à direita é estrita.

Demonstração:

Podemos supor que $f'(0) = 1$. Então f' é valor-real na reta real. De fato, sejam ξ_1, \dots, ξ_{n-1} os pontos críticos de f . Assim $f'(x) = na_n(x - \xi_1) \dots (x - \xi_{n-1})$, como $f'(0) = 1$ temos que $(-1)^{n-1} na_n \xi_1 \dots \xi_{n-1} = 1$ logo $a_n \in \mathbb{R}$, portanto, $f'(x)$ toma valores reais $\forall x \in \mathbb{R}$. Denotemos $\xi = \xi_k$ como sendo o ponto crítico mais próximo da origem, este ponto existe pois, $f'(0) = 1 > 0$ e $f(0) = 0$. Substituindo x por $-x$ quando $\xi < 0$, temos,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| &= \left| \frac{1}{\xi f'(0)} \int_0^\xi f'(x) dx \right| = \left| -\frac{1}{\xi f'(0)} \int_\xi^0 f'(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{\xi f'(0)} \int_\xi^0 f'(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Sabemos que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, como ξ é o primeiro ponto crítico próximo da origem então f cresce monotonicamente de 0 até ξ , porém f' decresce monotonicamente neste mesmo intervalo. Para podermos usar o Lema 2.6 faremos a integração de ξ até 0. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| &= \left| \frac{1}{\xi f'(0)} \int_\xi^0 f'(x) dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\xi f'(0)} \xi f'(0) \frac{n-2}{n} \left[\left(\frac{n-1}{n-2} \right)^{n-1} - 2 \right] \right| \\ &= \left| \frac{n-2}{n} \left[\left(\frac{n-1}{n-2} \right)^{n-1} - 2 \right] \right|, \quad n > 2. \end{aligned}$$

Para provarmos a última desigualdade do teorema, temos que provar que

$$\left(\frac{n-1}{n-2} \right)^{n-1} - 2 \leq \frac{n-1}{n-2} \quad (2.7)$$

Cálculos mostram que esta desigualdade é verdadeira para $n = 3, 4, 5, 6$. Provaremos (2.7) para todo $n \geq 7$. Para este propósito, mostremos primeiramente que a seqüência $\{a_n\}$, onde $a_n = \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n-1}$ é decrescente. Isto é equivalente a mostrar que a seqüência $\{b_n\}$, com $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, é decrescente, pois $a_n = b_{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para verificarmos o fato anterior, denotemos c_n , como sendo a seqüência,

$$c_n = \ln b_n = (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Deste modo se provarmos que c_n é decrescente então b_n o é. A seqüência c_n será decrescente se a função $c(x) = (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ for decrescente para $x \geq 1$.

Com isto temos,

$$\begin{aligned} c'(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}; \\ c''(x) &= \frac{1}{x^2(x+1)}. \end{aligned}$$

Assim, $c''(x) > 0$ então $c'(x)$ é estritamente crescente em $[1, \infty)$, por outro lado, $c'(x)$ vai para 0 quando o x tende para ∞ , portanto $c'(x) < 0$ para todo $x \in [1, \infty)$, deste modo, $c(x)$ é decrescente.

Calculando a_7 obtemos $a_7 \approx 2.985998$. Portanto

$$a_n - 2 \leq a_7 - 2 < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7.$$

Portanto, para estes valores de n

$$a_n - 2 < 1 \leq \frac{n-1}{n-2}$$

o que demonstra (2.7). ■

Nos seguintes teoremas, f terá coeficientes reais de sinal determinado, mas os pontos críticos poderão ser complexos.

Teorema 2.8. *Seja $f(z) = a_1z - \sum_{v=2}^n a_v z^v$ um polinômio de grau $n \geq 2$, com a_1, \dots, a_n reais, não-negativos, e $a_1 a_n > 0$. Então,*

$$\min \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| : f'(\xi) = 0 \right\} \leq \frac{n-1}{n}$$

a igualdade é atingida se e somente se $a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$

Demonstração:

Obviamente $f'(0) = a_1$ e $\text{sinal}\{f'(x)\} = \text{sinal}\{-a_n\}$. Então, $\text{sinal}\{f'(0)\} \cdot \text{sinal}\{f'(\infty)\} = -\text{sinal}\{a_1 a_n\} = -1$, para x grande. Portanto, f tem um ponto crítico positivo ξ , pois $f'(x)$ muda de sinal no lado positivo da reta real. Assim,

$$f'(\xi) = a_1 - \sum_{v=2}^n v a_v \xi^{v-1} = 0 \Rightarrow \sum_{v=2}^n \frac{a_v}{a_1} v \xi^{v-1} = 1.$$

Na ultima igualdade temos que o termo v aumenta cada termo do somatório, assim se eliminarmos este termo o somatório todo diminui, assim,

$$\sum_{v=2}^n \frac{a_v}{a_1} v \xi^{v-1} > \sum_{v=2}^n \frac{a_v}{a_1} \xi^{v-1}.$$

Porem, colocarmos o fator $\frac{v}{n}$ no somatório do lado direito acima ele vai diminuir, assim

$$\sum_{v=2}^n \frac{a_v}{a_1} \xi^{v-1} \geq \sum_{v=2}^n \frac{v}{n} \frac{a_v}{a_1} \xi^{v-1} = \frac{1}{n} \sum_{v=2}^n v \frac{a_v}{a_1} \xi^{v-1}.$$

Mas mostramos, anteriormente, que o último somatório acima é igual a 1, logo podemos concluir

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{v=2}^n \frac{a_v}{a_1} \xi^{v-1} < 1. \quad (*)$$

Portanto,

$$\left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| = \left| \frac{a_1 \xi - \sum_{v=2}^n a_v \xi^v}{\xi a_1} \right| = \left| 1 - \sum_{v=2}^n \frac{a_v}{a_1} \xi^{v-1} \right|.$$

Desde que, por (*), a última soma é um número do intervalo $[\frac{1}{n}, 1)$, temos que

$$\left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| \leq \left| 1 - \frac{1}{n} \right| = \frac{n-1}{n}.$$

È obvio que quando $a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ temos,

$$\left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| = \left| 1 - \frac{a_n}{a_1} \xi^{n-1} \right|.$$

Porem, $\xi^{n-1} = \frac{a_1}{na_n}$, pois $f'(z) = a_1 z - na_n z^{n-1}$. Então,

$$\left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| = \left| 1 - \frac{a_n}{a_1} \xi^{n-1} \right| = \left| 1 - \frac{1}{n} \right| \frac{n-1}{n}.$$

■

O próximo caso é quando todos os zeros de f , com exceção do na origem, possuam mesmo módulos, isto é, pertencem a uma circunferência centrada na origem. Iniciamos com uma definição.

Definição 2.3. *Sejam f e g dois polinômios, tais que*

$$f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v = a_n \prod_{v=1}^n (z - z_v) \quad e \quad g(z) = \sum_{\mu=0}^m b_\mu z^\mu = a_n \prod_{v=1}^n (z - w_\mu)$$

definimos a função $R(f, g)$ por

$$\begin{aligned} R(f, g) &= a_n^m b_m^n \prod_{\mu=1}^m \prod_{v=1}^n (z_v - w_\mu) \\ &= (-1)^{nm} b_m^n \prod_{\mu=1}^m f(w_\mu) \\ &= a_n^m \prod_{v=1}^n g(z_v) \end{aligned}$$

$R(f, g)$ é chamado resultante de f e g .

Lema 2.9. *Seja f um polinômio de grau n com $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$. Denote os zeros não*

nulos de f por z_1, \dots, z_{n-1} e os pontos críticos por ξ_1, \dots, ξ_{n-1} . Então,

$$\prod_{v=1}^{n-1} \left(\frac{f(\xi_v)}{\xi_v f'(0)} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \prod_{1 \leq v < \mu \leq n-1} (z_\mu - z_v)(z_\mu^{-1} - z_v^{-1}).$$

Demonstração:

Supomos que f seja mônico. Então $f(z) = zg(z)$, com $g(z) = \prod_{v=1}^{n-1} (z - z_v)$. Agora para algum número complexo w , consideremos o resultado

$$F(w) = R(f', g - w)$$

dos polinômios f' e $g - w$. Da definição anterior temos que $F(w)$ é um polinômio de grau $n - 1$ em w com coeficiente de maior grau $(-n)^{n-1}$ e termo constante $R(f', g)$.

Como $f'(z) = zg'(z) + g(z)$, pela definição 2.2, temos

$$\begin{aligned} R(f'.g) &= \prod_{v=1}^{n-1} \prod_{\mu=1}^{n-1} (z_v - \xi_\mu) \\ &= \prod_{v=1}^{n-1} f'(z_v) = \prod_{v=1}^{n-1} (z_v g'(z_v) + g(z_v)) = \\ &= \prod_{v=1}^{n-1} z_v g'(z_v) = (-1)^{n-1} g(0) \prod_{v=1}^{n-1} g'(z_v) \end{aligned}$$

pois, $g(0) = (-z_1) \dots (-z_{n-1})$. Assim, de acordo com a última fórmula de Viète, os zeros w_1, \dots, w_{n-1} de F satisfaz,

$$\prod_{v=1}^{n-1} w_v = \left(-\frac{1}{n} \right)^{n-1} \prod_{v \neq \mu} (z_v - z_\mu)$$

Além disso, $F(w)$ se anula se e somente se f' e $f' - w$ tem zeros em comum. Então, para cada

ponto crítico ξ_v o numero $g(\xi_v)$ é um zero de F . Assim,

$$\begin{aligned}
 \prod_{v=1}^{n-1} \left(\frac{f(\xi_v)}{\xi_v f'(0)} \right) &= \prod_{v=1}^{n-1} \left(\frac{\xi_v g(\xi_v)}{\xi_v g'(0)} \right) = \prod_{v=1}^{n-1} \left(\frac{g(\xi_v)}{g'(0)} \right) = \\
 &= \frac{\prod_{v=1}^{n-1} w_v}{(g'(0))^{n-1}} = \left(-\frac{1}{n} \right)^{n-1} \frac{\prod_{v \neq \mu} (z_v - z_\mu)}{(g'(0))^{n-2}} = \\
 &= \left(-\frac{1}{n} \right)^{n-1} \frac{\prod_{v \neq \mu} (z_v - z_\mu)}{(-1)^{n^2-2n} (z_1 \dots z_{n-1})^{n-2}} = \left(\frac{1}{n} \right)^{n-1} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{(-1)^{n^2-2n}}}_{=(-1)^{n-1}} \frac{\prod_{v \neq \mu} (z_v - z_\mu)}{(z_1 \dots z_{n-1})^{n-2}} = \\
 &= \left(-\frac{1}{n} \right)^{n-1} \frac{\prod_{v \neq \mu} (z_v - z_\mu)}{(z_1 \dots z_{n-1})^{n-2}}
 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.10 (Desigualdade de Hadamard). *Para toda matriz $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, temos*

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A igualdade é atingida, se e somente se, $\sum_{v=1}^n a_{k,v} \bar{a}_{l,v} = 0$ para $k \neq l$.

Teorema 2.11. *Seja f um polinômio de grau n com $f(0) = 0$ e $n - 1$ zeros não-negativos, todos de mesmo módulo. Então*

$$\min \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} \right| : f(\xi) = 0 \right\} \leq \frac{n-1}{n}.$$

A igualdade é atingida se e somente se $f(z) = a_1 z + a_n z^n$, com $a_1 a_n \neq 0$.

Demonstração:

Denotaremos por $\det(w_1, \dots, w_n)$ o determinante de Vandermonde dos números complexos w_1, \dots, w_n .

Como todos os zeros não-negativos de f têm o mesmo módulo, temos

$$z_v = r e^{i\theta_v},$$

onde $r > 0$, $\theta_v \in \mathbb{R}$, $v = 1, 2, \dots, n-1$. Assim,

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq v < \mu \leq n-1} (z_\mu - z_v)(z_\mu^{-1} - z_v^{-1}) &= \det(z_1, \dots, z_{n-1}) \det(z_1^{-1}, \dots, z_{n-1}^{-1}) = \\ &= \det(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{n-1}}) \det(e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_{n-1}}). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hadamard temos

$$\begin{aligned} |\det(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{n-1}})| |\det(e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_{n-1}})| &\leq \prod_{\mu=1}^{n-1} \left(\sum_{v=1}^{n-1} |e^{i(\mu-1)\theta_v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\mu=1}^{n-1} \left(\sum_{v=1}^{n-1} |e^{-i(\mu-1)\theta_v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (n-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)^{\frac{n-1}{2}} = (n-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, denotando por ξ_1, \dots, ξ_n os pontos críticos de f , e usando o lema 2.9 temos

$$\begin{aligned} \prod_{v=1}^{n-1} \left| \frac{f(\xi_v)}{\xi_v f'(0)} \right| &\leq \left(\frac{1}{n} \right)^{n-1} \frac{\prod_{1 \leq \mu < v \leq n-1} |(z_\mu - z_v)(z_\mu^{-1} - z_v^{-1})|}{\prod_{1 \leq \mu < v \leq n-1} |z_\mu z_v|} \\ &\leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} \frac{1}{\prod_{1 \leq \mu < v \leq n-1} |z_\mu z_v|} \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

Pela simples observação de que $\left| \frac{f(\xi_v)}{\xi_v f'(0)} \right| \geq 0$, concluímos que

$$\min \left| \frac{f(\xi_v)}{\xi_v f'(0)} \right| \leq \frac{n-1}{n}$$

Mostraremos agora a igualdade. Para isso denotemos $f(z) = a_1 z + a_n z^n$, assim

$$\prod_{v=1}^{n-1} \left| \frac{f(\xi_v)}{\xi_v f'(0)} \right| = \prod_{v=1}^{n-1} \left| \frac{a_1 + a_n \xi_v^{n-1}}{a_1} \right| = \prod_{v=1}^{n-1} \left| 1 + \frac{a_n}{a_1} \xi_v^{n-1} \right|,$$

pois, $z^{n-1} = -\frac{a_1}{na_n}$, então

$$\prod_{v=1}^{n-1} \left| \frac{f(\xi_v)}{\xi_v f'(0)} \right| = \prod_{v=1}^{n-1} \left| 1 - \frac{1}{n} \right| = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1}.$$

$$\text{Assim } \min \left| \frac{f(\xi_v)}{\xi_v f'(0)} \right| \leq \frac{n-1}{n}.$$

■

Veremos agora a conjectura restrita a alguns casos particulares quando o polinômio é de grau no máximo 4.

Teorema 2.12. *Seja f um polinômio de grau no máximo 4 tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$. Então*

$$\min \left\{ \left| \frac{f(\xi)}{\xi f'(0)} - \frac{1}{2} \right| : f(\xi) = 0 \right\} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}. \quad (2.8)$$

Observação 2.12.1. *Para $n = 2$, temos igualdade em (2.8). Para $n = 3$ a igualdade é atingida se e somente se todos os pontos críticos de f tenham o mesmo módulo. Neste caso existe igualdade para Conjectura de Smale com $K = \frac{2}{3}$ se e somente se $f''(0) = 0$. Para o caso que $n = 4$ a igualdade em (2.8) ocorre se e somente se f' tem um zero $\varsigma \neq 0$ de multiplicidade três ou se $f(z) = a_1 z + a_4 z^4$, com $a_1 a_4 \neq 0$. Ainda no caso que f possui grau 4 temos igualdade na conjectura de Smale (2.1) com $K = \frac{3}{4}$ apenas para o binômio citado acima.*

Demonstração do Teorema (2.12):

Seja f um polinômio que satisfaz as hipóteses do teorema, então ele será da forma,

$$f(z) = \sum_{v=1}^n a_v z^v,$$

onde $2 \leq n \leq 4$, e $a_1 a_n \neq 0$.

Denotemos seus pontos críticos por ξ_1, \dots, ξ_{n-1} . Desta forma, definimos

$$\begin{aligned} S_j &:= \frac{f(\xi_j)}{\xi_j f'(0)} - \frac{1}{2} = \frac{\sum_{s=1}^n a_s \xi_j^s}{\xi_j a_1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{s=2}^n \frac{a_s}{a_1} \xi_j^{s-1} \\ &= \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{s=2}^n \frac{a_s}{a_1} \xi_j^{s-1} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Logo mostraremos que $\min_{1 \leq j \leq n-1} |S_j| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

1º Caso $n = 2$:

Temos que $f'(z) = 2a_2z + a_1$, assim $\xi = -\frac{a_1}{2a_2}$ então,

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{a_2}{a_1}\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

2º Caso $n = 3$:

Temos que $f'(z) = 3a_3z^2 + 2a_2z + a_1$, então podemos escrever suas raízes de acordo com seus coeficientes,

$$\frac{a_1}{3a_3} = \xi_1\xi_2 \quad \frac{2a_2}{3a_3} = -(\xi_1 + \xi_2).$$

Dividindo, obtemos

$$\frac{a_2}{a_1} = -\frac{(\xi_1 + \xi_2)}{2\xi_1\xi_2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_j &= \frac{1}{2} + \sum_{v=2}^3 \frac{a_v}{a_1} \xi_j^{v-1} = \frac{1}{2} + \frac{a_2}{a_1} \xi_j + \frac{a_3}{a_1} \xi_j^2 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(\xi_1 + \xi_2)}{2\xi_1\xi_2} \xi_j + \frac{\xi_j^2}{3\xi_1\xi_2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} - \frac{(\xi_1 + \xi_2)}{2\xi_2} + \frac{\xi_1}{3\xi_2} = \frac{3\xi_2 - (\xi_1 + \xi_2)3 + 2\xi_1}{6\xi_2} = \\ &= -\frac{\xi_1}{6\xi_2}, \\ S_2 &= \frac{1}{2} - \frac{(\xi_1 + \xi_2)}{2\xi_1} + \frac{\xi_2}{3\xi_1} = \frac{3\xi_1 - (\xi_1 + \xi_2)3 + 2\xi_2}{6\xi_1} = \\ &= -\frac{\xi_2}{6\xi_1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\min_{1 \leq j \leq 2} |S_j| = \min \left\{ \left| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right|, \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| \right\} \leq \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

pois, ou $\xi_1 \leq \xi_2$ ou $\xi_2 \leq \xi_1$.

3º Caso $n = 4$:

Temos $f'(z) = 4a_4z^3 + 3a_3z^2 + 2a_2z + a_1z$, assim

$$\frac{a_1}{4a_4} = -\xi_1\xi_2\xi_3 \quad \frac{2a_2}{4a_4} = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 \quad \frac{3a_3}{4a_4} = -(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3).$$

Dividindo o primeiro pelos demais, concluímos

$$\frac{a_2}{a_1} = -\frac{\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3}{2\xi_1\xi_2\xi_3} \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3\xi_1\xi_2\xi_3} \quad \frac{a_4}{a_1} = \frac{1}{4\xi_1\xi_2\xi_3}.$$

Assim, usando o mesmo procedimento que foi usado no Caso 2 temos,

$$S_j = \frac{6\xi_1\xi_2\xi_3 - 6(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3)\xi_j + 4(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\xi_j^2 - 3\xi_j^3}{12\xi_1\xi_2\xi_3}. \quad (2.9)$$

Denotemos,

$$\gamma = \frac{1}{3} \sum_{v=1}^3 \xi_v \quad e \quad w_j = 2\gamma - \xi_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 &= (2\gamma - \xi_1)\overline{(2\gamma - \xi_1)} + (2\gamma - \xi_2)\overline{(2\gamma - \xi_2)} + (2\gamma - \xi_3)\overline{(2\gamma - \xi_3)} = \\ &= 12|\gamma|^2 - 2\gamma(\overline{\xi_1} + \overline{\xi_2} + \overline{\xi_3}) - 2\overline{\gamma}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \sum_{j=1}^3 |\xi_j|^2 = \\ &= 2\overline{\gamma}3\gamma + 2\gamma3\overline{\gamma} - 2\gamma3\overline{\gamma} - 2\overline{\gamma}3\gamma + \sum_{j=1}^3 |\xi_j|^2 = \sum_{j=1}^3 |\xi_j|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^3 |w_j|^2 = \sum_{j=1}^3 |\xi_j|^2.$$

Mostremos agora que,

$$\frac{S_j}{\xi_j^2} = -\frac{w_j}{4\xi_1\xi_2\xi_3} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Calculemos $\frac{S_1}{\xi_1^2}$,

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{\xi_1^2} &= \frac{6\xi_1\xi_2\xi_3 - 6(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3)\xi_j + 4(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\xi_j^2 - 3\xi_j^3}{12\xi_1\xi_2\xi_3\xi_1^2} \\
&= \frac{1}{2\xi_1^2} - \frac{\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3}{2\xi_1\xi_2\xi_3\xi_1} + \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3\xi_1\xi_2\xi_3} - \frac{\xi_1}{4\xi_1\xi_2\xi_3} \\
&= \frac{1}{2\xi_1^2} - \frac{1}{2\xi_3\xi_1} - \frac{1}{2\xi_2\xi_1} - \frac{1}{2\xi_1^2} + \frac{1}{3\xi_1\xi_2} + \frac{1}{3\xi_1\xi_3} + \frac{1}{3\xi_2\xi_3} - \frac{1}{4\xi_2\xi_3} \\
&= \frac{1}{\xi_3\xi_1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{\xi_2\xi_1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{\xi_2\xi_3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{6\xi_3\xi_1} - \frac{1}{6\xi_2\xi_1} + \frac{1}{12\xi_2\xi_3} = \frac{-2\xi_2 - 2\xi_3 + \xi_1}{12\xi_1\xi_2\xi_3} \\
&= -\frac{\frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{2}{3}\xi_1 - \xi_1}{4\xi_1\xi_2\xi_3} = -\frac{2\gamma - \xi_1}{4\xi_1\xi_2\xi_3}.
\end{aligned}$$

Usando este mesmo raciocínio provamos para $j = 2, 3$. Concluimos assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 \left| \frac{S_j}{\xi_j^2} \right|^2 &= \sum_{j=1}^3 \left| \frac{w_j}{4\xi_1\xi_2\xi_3} \right|^2 = \frac{\sum_{j=1}^3 |w_j|^2}{16|\xi_1\xi_2\xi_3|^2} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^3 |\xi_j|^2}{16|\xi_1\xi_2\xi_3|^2} = \frac{1}{16} \underbrace{\left(\frac{1}{|\xi_1\xi_2|^2} + \frac{1}{|\xi_3\xi_1|^2} + \frac{1}{|\xi_2\xi_3|^2} \right)}_{(*)}.
\end{aligned}$$

Com isto podemos notar que o produto interno do vetor $(|\xi_1|^{-2}, |\xi_3|^{-2}, |\xi_2|^{-2})$ com $(|\xi_2|^{-2}, |\xi_1|^{-2}, |\xi_3|^{-2})$ resulta em $(*)$. Assim pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$\sum_{j=1}^3 \frac{|S_j|^2}{|\xi_j|^4} \leq \frac{1}{16} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{|\xi_j|^2} \Rightarrow$$

$$\text{Logo } \min_{1 \leq j \leq 3} |S_j| \leq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

■

2.3 Interpretação Eletrostática da Conjectura de Smale.

Finalmente estudaremos o que a dissertação propõe, a interpretação eletrostática da conjectura de Smale. Para podermos fazer esta interpretação temos que olhar para a conjectura de uma forma diferente, olharemos através da eletrostática, estudaremos como os zeros da derivada usada na conjectura se comportam se forem cargas livres. Esta nova interpretação da conjectura de Smale está no artigo "Smale's Conjecture on Mean Values of Polynomials and Electrostatics" de Dimitrov [5].

Para discutirmos o problema de equilíbrio eletrostático relacionado com a conjectura de Smale, investigaremos o máximo do produto das $n - 1$ quantidades $\left| \frac{f(\xi_j)}{\xi_j f'(0)} \right|$, onde ξ_j é um ponto crítico de f , ao invés do mínimo entre todos esses termos.

Definição 2.4. Denotaremos como π_n o espaço dos polinômios de grau até n . E como π_n^0 o espaço dos polinômios de grau n com $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$, assim os polinômios pertencente a π_n^0 são da forma $f(z) = \sum_{v=1}^n a_v z^v$.

Teorema 2.13. Seja $f(z)$ um polinômio pertencente a π_n^0 . Denotaremos por $z_0 = 0, z_1, \dots, z_{n-1}$ os zeros de $f(z)$ e seus pontos críticos por $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, então

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left| \frac{f(\xi_j)}{\xi_j f'(0)} \right| = \frac{1}{n^{n-1}} \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq n-1} |z_k - z_j|^2}{\prod_{j=1}^{n-1} |z_j|^{n-2}}.$$

Demonstração:

Seja $f(z)$ mônico, então

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}) \quad e \quad f'(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (z - z_i)}{(z - z_j)}.$$

Assim,

$$f'(z_j) = (z_j - z_0) \dots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \dots (z_j - z_{n-1}) \quad (2.10)$$

Por outro lado, $f'(z) = n(z - \xi_1)(z - \xi_2) \dots (z - \xi_{n-1})$. Por isto $f'(z_j) = n(z_j - \xi_1)(z_j - \xi_2) \dots (z_j -$

ξ_{n-1}), para $j = 0, \dots, n-1$. Com isto,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) \dots f'(z_{n-1}) &= n^n \prod_{j=0}^n (z_j - \xi_1)(z_j - \xi_2) \dots (z_j - \xi_{n-1}) = \\
 &= n^n \prod_{j=0}^n (-1)^n (\xi_1 - z_j)(\xi_2 - z_j) \dots (\xi_{n-1} - z_j) = \\
 &= n^n \prod_{k=1}^{n-1} (-1)^n (\xi_k - z_0)(\xi_k - z_1) \dots (\xi_k - z_{n-1}) = \\
 &= n^n \prod_{k=1}^{n-1} (-1)^n f(\xi_k)
 \end{aligned}$$

Dividindo os dois lados por $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1} [f'(0)]^{n-1}$ temos,

$$\frac{f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_{n-1}) (-1)^n}{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1} [f'(0)]^{n-1}} = \frac{1}{n^n} \frac{f'(z_0) f'(z_1) \dots f'(z_{n-1}) (-1)^n}{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1} [f'(0)]^{n-1}} \quad (2.11)$$

Temos ainda que, $f'(z) = n(z - \xi_1)(z - \xi_2) \dots (z - \xi_{n-1})$ e daí $f'(0) = (-1)^{n-1} n \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1}$. Assim, o lado direito de (2.11) torna-se $\frac{(-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \frac{f'(z_1) f'(z_2) \dots f'(z_{n-1})}{[f'(0)]^{n-1}}$. Com isto, a igualdade (2.11), pode ser escrita da forma

$$\left| \frac{f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_{n-1}) (-1)^{n-1}}{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1} [f'(0)]^{n-1}} \right| = \frac{1}{n^n} \frac{|f'(z_0)| |f'(z_1)| \dots |f'(z_{n-1})|}{|f'(0)|^{n-1}}$$

Usando agora (2.10), temos,

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=1}^{n-1} \left| \frac{f(\xi_j)}{\xi_j f'(0)} \right| &= \frac{1}{n^{n-1}} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} |z_j - z_k|}{|z_1 z_2 \dots z_{n-1}|^{n-1}} = \\
 &= \frac{1}{n^{n-1}} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} |z_j| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} |z_j - z_k|}{|z_1 z_2 \dots z_{n-1}|^{n-1}} = \\
 &= \frac{1}{n^{n-1}} \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq n-1} |z_j - z_k|^2}{\prod_{j=1}^n |z_j|^{n-2}}.
 \end{aligned}$$

■

Agora estudaremos o comportamento da seguinte função:

$$T(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq n-1} |z_j - z_k|^2}{\prod_{j=1}^n |z_j|^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (2.12)$$

Notemos que T é uma generalização do determinante de Vandermond.

Dado um domínio limitado E do plano complexo cujo complemento contém uma vizinhança da origem, vamos investigar,

$$\max_{z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in E} T(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}). \quad (2.13)$$

Considere o seguinte campo eletrostático. Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, fixamos uma carga negativa com força absoluta $\frac{n}{2} - 1$ localizada na origem e $n - 1$ cargas livres são colocadas em z_1, z_2, \dots, z_{n-1} . Supomos que o campo eletrostático gerado por essas cargas obedeça a lei do potencial logaritmo que significa que todas as cargas são uniformemente distribuídas ao longo das linhas perpendiculares infinitas ao plano complexo. Então a energia total deste campo é dada por.

$$L(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = -\frac{n-2}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{1}{|z_k|} + \sum_{1 \leq i < k \leq n-1} \log \frac{1}{|z_i - z_k|}.$$

Por (2.12) e por Teorema (2.13) segue que

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{n|f(\xi_j)|}{|\xi_j||f'(0)|} = T^2(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = e^{-2L(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})}.$$

Desta forma, o problema de minimizar a energia do campo é equivalente ao problema de maximizar o determinante de Vandermond generalizado T , que é equivalente a maximizar o produto de Smale. Desde que $\frac{|f(\xi_j)|}{|\xi_j||f'(0)|}$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, e a função $T(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$, são invariantes em relação a transformação $z \rightarrow kz$, para todo $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, sem perda de generalidade assumiremos que todos os zeros de f estão fora de um disco aberto com raio $a > 0$, isto é, $|z_k| \geq a$. Entretanto, se z_1, z_2, \dots, z_{n-1} pertencem a um conjunto compacto existe pontos $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^* \in D_\infty(0, a) = \{z : |z| > a\}$ que são soluções do problema (2.13) e com

isto esses são os pontos de equilíbrio do campo eletrostático descrito acima.

No que se segue, discutiremos o caso particular quando E é um anel em \mathbb{C} e a quantia de cargas livres é um número par, isto é, $n - 1 = 2m$ com $m \in \mathbb{N}$. Seja $0 < a < b < \infty$. Consideremos o anel fechado

$$R(a, b) = \{z : a \leq |z| \leq b\}.$$

Estamos interessados no seguinte problema,

$$\max\{T(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) : z_k \in R(a, b), k = 1, 2, \dots, n - 1\}.$$

Pelas observações acima existem pontos $z_k^* \in R(a, b)$ para os quais o máximo é atingido. Assim,

$$T(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*) = \max\{T(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) : z_k \in R(a, b), k = 1, 2, \dots, n - 1\}. \quad (2.14)$$

Agora, iremos analisar este problema como um problema de eletrostática. Sabemos que foi fixada uma carga negativa na origem com força absoluta $\frac{n-2}{2}$ e colocamos $n - 1 = 2m$ cargas livres unitárias e positivas em $R(a, b)$. A carga fixa começará a atrair as cargas livres, assim fazendo com que elas migrem para região limitada pela circunferência menor. Entretanto, quando metade das cargas estiver perto da esfera menor a força gerada por todas estas cargas juntas vai superar a força realizada pela carga fixa, assim, fazendo com que a outra metade das cargas migrem para região limitada pela circunferência maior. Mas ainda, temos que levar em consideração que todas as cargas livres se repelem entre si com mesma intensidade. Assim, estas cargas irão se separar igualmente, como ilustra as seguintes figuras.

Com esta interpretação, parece mais natural esperar que a menor energia será atingida para a seguinte configuração: $z_j^\Delta = b \exp\left(i\frac{2\pi}{m}j\right)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ e $z_k^\circ = a \exp\left(i\left(\frac{2\pi}{m}k + \frac{\pi}{m}\right)\right)$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Podemos, com isto, definir o polinômio $p(z) = \prod_{j=0}^{m-1} (z - z_j^\Delta) \prod_{k=0}^{m-1} (z - z_k^\circ)$. Agora, mostramos que o polinômio $p(z)$ definido anteriormente é igual a o polinômio $\tilde{p} = (z^m - b^m)(z^m + a^m)$, onde, a e b são os limitantes do anel $R(a, b)$.

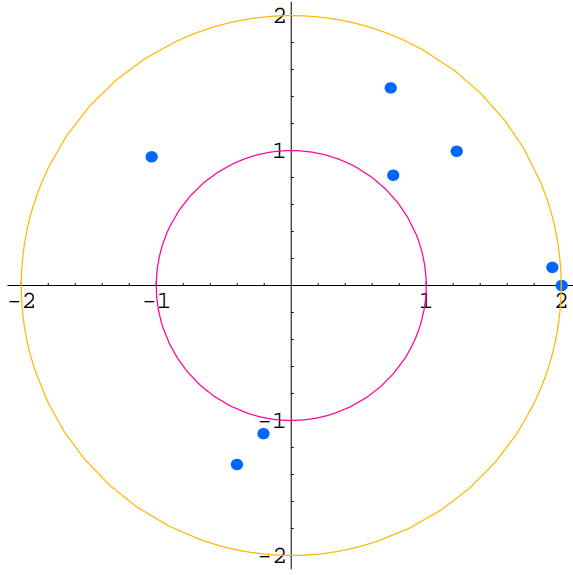


Figura 2.1: Início

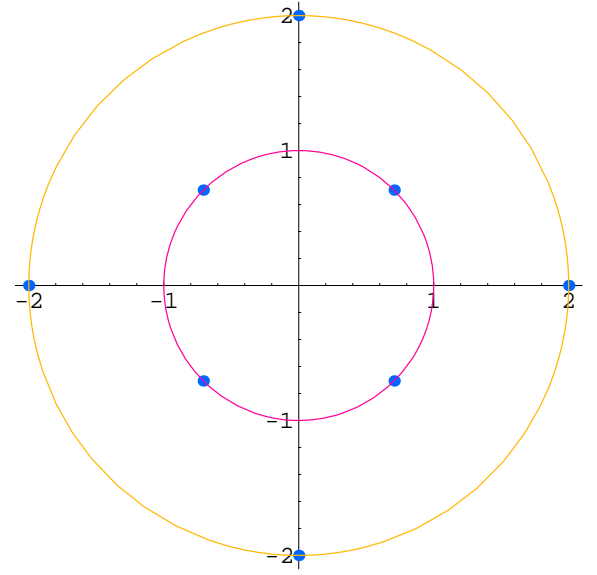


Figura 2.2: Equilíbrio

De fato, é fácil notar que ambos os polinômios têm mesmo grau e que o termo de maior grau de cada um deles é igual a 1, então falta apenas mostrarmos que eles possuem as mesmas raízes. Sabemos que z_j^Δ , $j = 0, 2, \dots, m-1$ e z_k^o , $k = 0, 2, \dots, m-1$ são raízes de $p(z)$, mostremos que esses pontos também vão ser raízes se $\tilde{p}(z)$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}(z_j^*) &= ((z_j^*)^m - b^m)((z_j^*)^m + a^m) = (b^m \exp(i2\pi j) - b^m)(b^m \exp(i2\pi j) + a^m) \\
 &= (b^m - b^m)(b^m \exp(i2\pi j) + a^m) = 0 \\
 \tilde{p}(z_k^o) &= ((z_k^o)^m - b^m)((z_k^o)^m + a^m) = (a^m \exp i(2\pi k + \pi) - b_{-1}^m)(a^m \exp i(2\pi k + \pi) + a^m) \\
 &= (a^m \exp i(2\pi k + \pi) - b_{-1}^m)(-a^m + a^m) = 0,
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato $\exp(i2\pi j) = 1$ Com isto, temos,

$$p(z) = \prod_{j=0}^{m-1} (z - z_j^*) \prod_{k=0}^{m-1} (z - z_k^*) = (z^m - b^m)(z^m + a^m) \quad (2.15)$$

Agora, para facilitar a notação, uniremos os pontos z_j^* e z_k^o em uma única sequência \tilde{z}_t , $t = 1, 2, \dots, 2m$, onde,

$$\tilde{z}_t = z_j^*, \quad t = 1, 2, \dots, m \quad \tilde{z}_t = z_k^o, \quad t = m + 1, m + 2, \dots, 2m,$$

assim $p(z) = \prod_{t=1}^{2m} (z - \tilde{z}_t)$.

Calcularemos agora, os valores de $|p(0)|$ e de $p'(\tilde{z}_t)$, pois estas quantias serão usadas para conclusão de nossa análise. Observamos primeiramente que, por (2.15) segue

$$|p(0)| = |\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 \dots \tilde{z}_{2m}| = a^m b^m. \quad (2.16)$$

Para calcularmos o valor de $p'(\tilde{z}_t)$, primeiramente vamos calcular $p'(z)$. Como $p(z) = \prod_{t=1}^{2m} (z - \tilde{z}_t)$, então $p(z) = (z - \tilde{z}_k)g_n(z)$, $1 \leq k \leq 2m$, onde $g_n(z) = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq k}}^{2m} (z - \tilde{z}_t)$, então, $p'(z) = (z - \tilde{z}_k)g'_n(z) + g_n(z)$. Assim,

$$p(\tilde{z}_k) = g(\tilde{z}_k) = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq k}}^{2m} (\tilde{z}_k - \tilde{z}_t) \quad (2.17)$$

Por outro lado $p(z) = (z^m - b^m)(z^m + a^m)$, então, $p'(z) = mz^{m-1}((z^m + a^m) + (z^m - b^m))$, assim

$$\begin{aligned} p'(\tilde{z}_k) &= mb^{m-1}(b^m + a^m) & \text{se} & \quad 1 \leq k \leq m \\ p'(\tilde{z}_k) &= ma^{m-1}(-b^m - a^m) & \text{se} & \quad m+1 \leq k \leq 2m \end{aligned} \quad (2.18)$$

Agora, estamos prontos para calcular $T(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2m})$. Usando (2.16) e (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} T^2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2m}) &= \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq 2m} |\tilde{z}_k - \tilde{z}_j|^2}{\prod_{j=1}^{2m} \tilde{z}_j^{2m-1}} = \frac{\prod_{j=1}^{2m} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{2m} |\tilde{z}_k - \tilde{z}_j|^2}{\prod_{j=1}^{2m} \tilde{z}_j^{2m-1}} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{2m} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{2m} |\tilde{z}_k - \tilde{z}_j|^2}{|p(0)|^{2m-1}} = \frac{\prod_{j=1}^{2m} p(\tilde{z}_j)^2}{|p(0)|^{2m-1}}. \end{aligned}$$

Agora (2.16) e (2.18) implica em

$$\begin{aligned}
 T^2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2m}) &= \frac{\prod_{j=1}^m (mb^{m-1}(b^m + a^m))^2 \prod_{j=1}^m (ma^{m-1}(b^m + a^m))^2}{(a^m b^m)^{2m-1}} \\
 &= \frac{(mb^{m-1}(b^m + a^m))^{2m} (ma^{m-1}(b^m + a^m))^{2m}}{(a^m b^m)^{2m-1}} \\
 &= \frac{m^{4m} (a^{m-1} b^{m-1})^{2m} (b^m + a^m)^{4m}}{(a^m b^m)^{2m-1}} \\
 &= \frac{m^{4m} (b^m + a^m)^{4m}}{(a^m b^m)}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$T(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2m}) = \left(m^2 \frac{(a^m + b^m)^2}{\sqrt{ab}} \right)^m. \quad (2.19)$$

Ao final de todo este estudo podemos formar a seguinte conjectura.

Conjectura 2.14. *Seja n um inteiro positivo ímpar, $n - 1 = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Então os únicos pontos extremos, a menos de uma rotação, $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2m}$ que satisfaz o problema (2.14) são os zeros do polinômio $\tilde{p} = (z^m - b^m)(z^m + a^m)$. Além disso,*

$$T(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{2m}) = \left(m^2 \frac{(a^m + b^m)^2}{\sqrt{ab}} \right)^m.$$

Capítulo 3

Testes Numéricos

Neste último capítulo iremos fazer alguns testes numéricos para verificarmos se a conjectura final (2.14) é viável, para assim em um trabalho futuro possamos prová-la. Para os testes numéricos usamos o software "Mathematica".

3.1 Algoritmo do Programa

O programa usa o seguinte algoritmo. Informamos para o programa quais vão ser os raios a e b dos limitantes e uma quantia m de pontos livres, lembrando que m é a metade dos pontos que o programa vai usar. Informamos ainda qual vai ser o "passo", o número de direções que ele deve seguir e qual o será o erro aceitável. O programa escolhe aleatoriamente $2m - 1$ pontos pertencentes ao interior da região limitada pelas duas circunferências, o ponto restante será fixo no ponto b este ponto é um controle. Depois das escolhas destes pontos o programa calcula qual vai ser o valor da função T definida em (2.12), logo em seguida, ele toma o primeiro ponto e desloca com a tamanho do "passo" fornecido anteriormente na primeira direção e calcula novamente o valor da função T e guarda este valor, o programa repete este processo para todas as direções. Depois de todo este processo ele compara todos os valores e fica com o ponto que apresentou o maior valor de T , repete este processo para todos os pontos, menos para o fixo. Depois de todos os pontos terem passado pelo processo descrito anteriormente o programa calcula novamente o valor de T e compara com o valor calculado antes dos pontos terem sido alterados de posição, se a diferença entre estes dois valores for

menor que o erro aceitável o programa é interrompido e mostra qual é a nova configuração dos pontos junto com a inicial, se não ele repete os processos descritos anteriormente até chegar em uma configuração aceitável.

3.2 Texto do Programa

$a:=1$

$b:=2$

$m:=8$

erro:=0.0001

passo:=0.01

direcao:=4

$n:=2 * m$

teste:=1

Array[l, n];

Array[z, n];

Array[y, n];

Array[ini, n];

$l[1]:=b$;

$z[1]:=b$;

$y[1]:=b$;

$ini[1]:=b$;

For[$i = 2, i \leq n, i++$, $z[i] = \text{Random}[\text{Real}, \{a, b\}] * \text{Exp}[\text{Random}[\text{Real}, \{-\text{Pi}, \text{Pi}\}] * I]$]

For[$i = 2, i \leq n, i++$, $ini[i] = z[i]$]

parada = 1;

While[teste == 1,

For[$j = 2, j \leq n, j++$, $y[j] = z[j]$];


```

For[v = 2, v ≤ n, v++, l[v] = z[v]];

For[i = 2, i ≤ n, i++,

    aux1 = z[i];
    aux2 = Abs  $\left[ \frac{\prod_{t=1}^n \prod_{d=t+1}^n \text{Abs}[z[t] - z[d]]}{\prod_{p=1}^n \text{Abs}[z[p]]^{\frac{n-2}{2}}} \right]$ ;
    s = 1;
    While[s ≤ direcao,
        0009
        y[i] = z[i] + Exp  $\left[ I * \frac{2 * \text{Pi}}{s} \right] * \text{passo}$ ;
        If  $\left[ \text{And} \left[ \text{Abs}[y[i]] \leq b, \text{Abs}[y[i]] \geq a, \text{Abs} \left[ \frac{\prod_{t=1}^n \prod_{d=t+1}^n \text{Abs}[y[t] - y[d]]}{\prod_{p=1}^n \text{Abs}[y[p]]^{\frac{n-2}{2}}} \right] > \text{aux2} \right] \right,$ 
            aux1 = y[i];
            aux2 = Abs  $\left[ \frac{\prod_{t=1}^n \prod_{d=t+1}^n \text{Abs}[y[t] - y[d]]}{\prod_{p=1}^n \text{Abs}[y[p]]^{\frac{n-2}{2}}} \right]$ ;

    s = s + 1];

If[And[Abs[y[i]] ≤ b, Abs[y[i]] ≥ a], z[i] = aux1

];

parada = parada + 1;
If  $\left[ \left( \text{Abs} \left[ \frac{\prod_{t=1}^n \prod_{d=t+1}^n \text{Abs}[x[t] - x[d]]}{\prod_{p=1}^n \text{Abs}[x[p]]^{\frac{n-2}{2}}} \right] - \text{Abs} \left[ \frac{\prod_{t=1}^n \prod_{d=t+1}^n \text{Abs}[l[t] - l[d]]}{\prod_{p=1}^n \text{Abs}[l[p]]^{\frac{n-2}{2}}} \right] \right) \leq \text{erro}, \text{teste} = 2;$ 
Print["Convergiu"];

If[parada == 10000, teste = 2; Print["Saiu pela parada"]];
Print  $\left[ \text{"valor inicial da f:"} , \text{Abs} \left[ \frac{\prod_{t=1}^n \prod_{d=t+1}^n \text{Abs}[\text{ini}[t] - \text{ini}[d]]}{\prod_{p=1}^n \text{Abs}[\text{ini}[p]]^{\frac{n-2}{2}}} \right] \right]$ 

Print  $\left[ \text{"valor final da f:"} , \text{Abs} \left[ \frac{\prod_{t=1}^n \prod_{d=t+1}^n \text{Abs}[z[t] - z[d]]}{\prod_{p=1}^n \text{Abs}[z[p]]^{\frac{n-2}{2}}} \right] \right]$ 

g:=ListPlot[Table[{Re[z[j]], Im[z[j]]}, {j, n}], PlotStyle → {Hue[.6], PointSize[0.02]};

```

```

h:=ListPlot[Table[{Re[ini[j]], Im[ini[j]]}, {j, n}], PlotStyle -> {Hue[.6], PointSize[0.02]};
h2:=ParametricPlot[{a * Cos[t], a * Sin[t]}, {t, 0, 2π}, PlotStyle -> Hue[.9]];
h3:=ParametricPlot[{b * Cos[t], b * Sin[t]}, {t, 0, 2π}, PlotStyle -> Hue[.12]];

```

```
Show[h, h2, h3, AspectRatio -> Automatic]
```

```
Show[g, h2, h3, AspectRatio -> Automatic]
```

```
Clear[t, d, p, i, j, v, s, l, z, y, ini, parada, a, n, b, g, h, h2, h3, m, erro, passo, direcao]
```

```
Null
```

3.3 Testes

Nesta última seção realizaremos alguns experimentos numéricos usando o programa descrito anteriormente. Segue abaixo quatro testes realizados.

Teste 1:

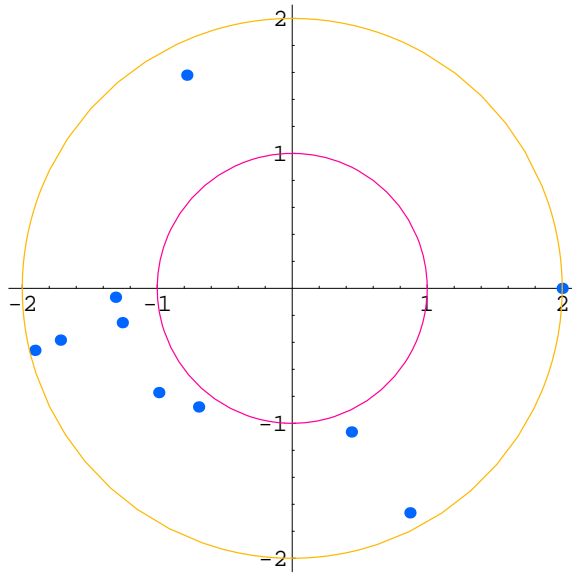


Figura 3.1: Início: $T = 4,38498$

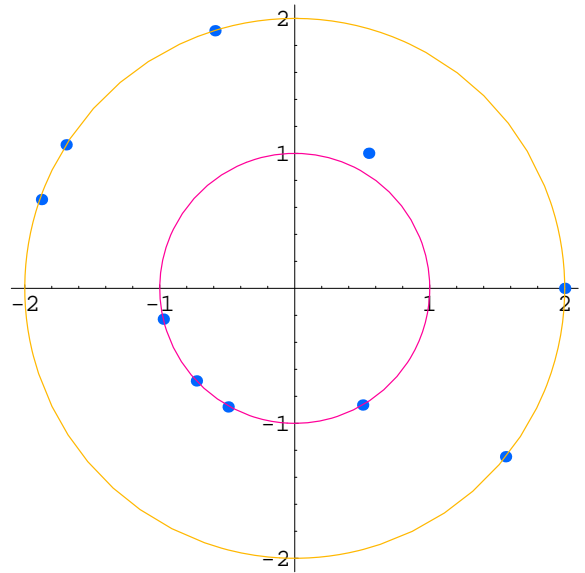
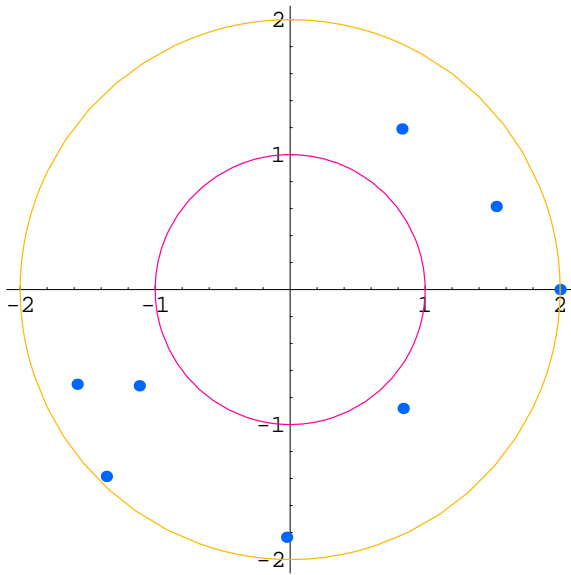
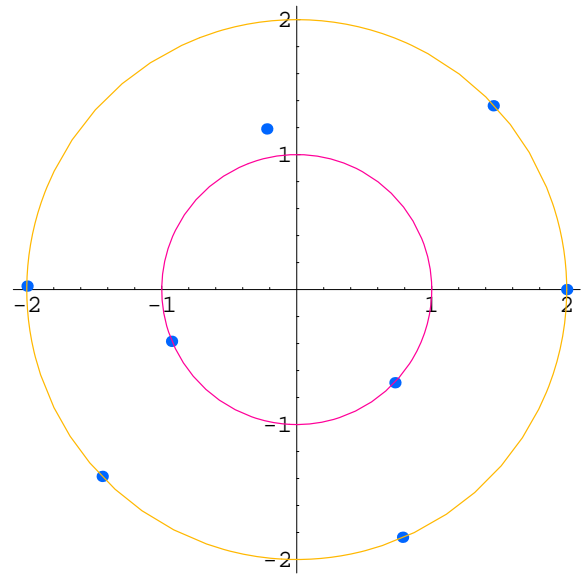
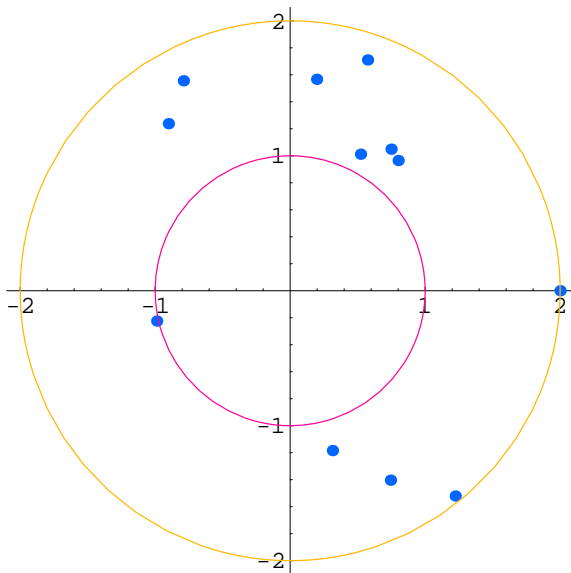
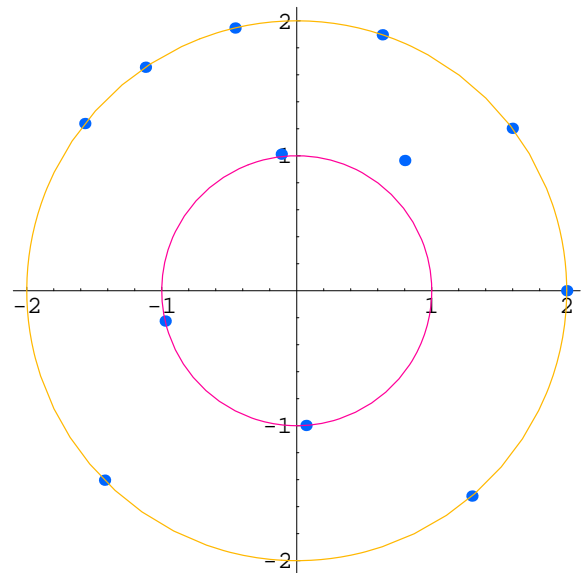


Figura 3.2: Fim: $T = 2,46492.10^6$

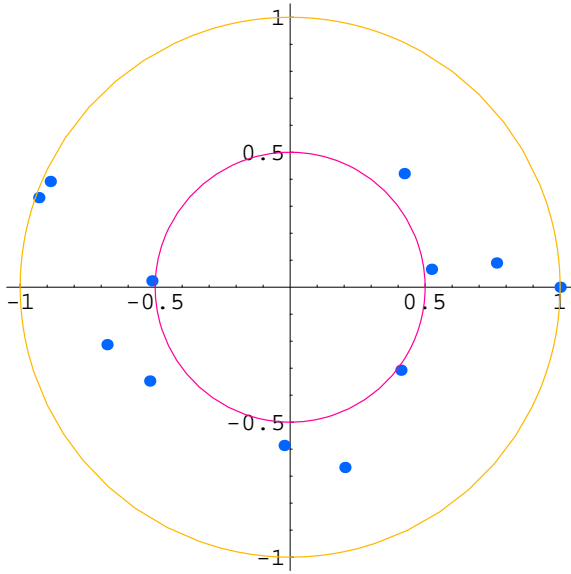
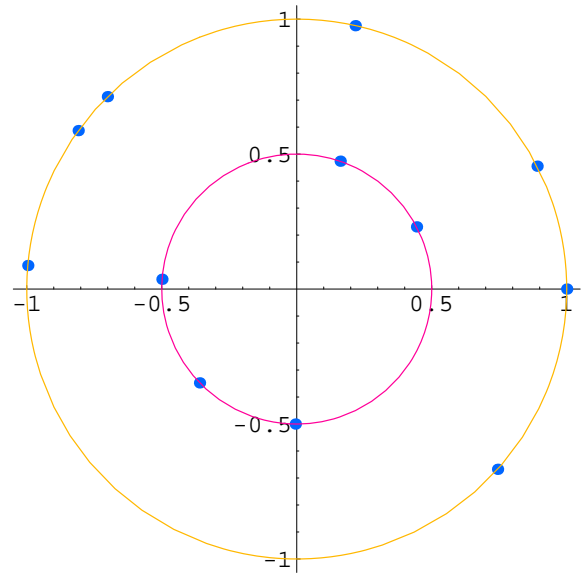
Valor esperado (conjeturado): $T = 2,64401.10^{21}$

Teste 2:Figura 3.3: Início: $T = 792,487$ Figura 3.4: Fim: $T = 134699$

Valor esperado (conjeturado): $T = 1,14290 \cdot 10^{14}$

Teste 3:Figura 3.5: Início: $T = 1020,13$ Figura 3.6: Fim: $T = 3,11314 \cdot 10^8$

Valor esperado (conjeturado): $T = 1,54769 \cdot 10^{30}$

Teste 4:Figura 3.7: Início: $T = 25818,9$ Figura 3.8: Fim: $T = 3,90974.10^7$

Valor esperado (conjecturado): $T = 2,09751.10^{10}$

Com estes testes, podemos notar, que em todos os casos, os pontos migraram para as fronteiras, como foi previsto na conjectura. Entretanto, os pontos não pararam onde era previsto, o que é muito razoável, pois a função T é relativamente complexa e deva ter vários pontos de mínimo local, com isto, os pontos convergiram para um desses mínimos. Outro fato que podemos notar é que o valor conjecturado sempre é maior do que o valor da função T nos ponto em que o programa para, o que afirma a conjectura, pois esta conjectura é a respeito do máximo global da função T .

Referências Bibliográficas

- [1] BAULDRY, W. , *Estimates of asymmetric Freud polynomials on the real line*, J. Approximation Theory, **63** (1990), 225–237.
- [2] BONAN, S. S. and CLARK, D. S., *Estimates of the Hermite and the Freud polynomials*, J. Approximation Theory, **63** (1990), 210–224.
- [3] CHEN, Y. and ISMAIL, M. E. H., *Ladder operators and differential equations for orthogonal polynomials*, J. Phys., A30 (1997), 7818-7829.
- [4] DIMITROV, D. K. and VAN ASSCHE, W., *Lamé differential equations and electrostatics*, Proc. Amer. Math. Soc., **128**, 3621–3628, 2000.
- [5] DIMITROV, D. K., *Smale's Conjecture on Mean Values of Polynomials and Electrostatics*, Serdica Math. Journal 33, 2007, 399-410.
- [6] HEINE, E., *Handbuch der Kugelfunctionen*, vol I, 2ed., Berlim, 1878.
- [7] ISMAIL, M. E. H., *Discriminants and functions of the second kind of orthogonal polynomials*, Results in Mathematics, 34 (1998), 132-149.
- [8] ISMAIL, M. E. H., *An Electrostatics Model For Zeros of General Orthogonal Polynomials*, Pacific Journal of Mathematics, 355–369, 2000.
- [9] MARTINS, A. S., *Interpretação eletrostática e zeros de polinômios*. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UNESP, São José do Rio Preto/SP, 2005.

- [10] RAHMAN, Q. I. and SCHMEISSER, G, *Analytic Theory of Polynomials*, vol I, New York, 2002.
- [11] SMALE, S, *The fundamrntsl Theorem of Algebra end complexity theory*, Bulletin of the American Mathematical Society (New Series), **4**, 1–36, 1981
- [12] STIELTJES, T. J., *Sur les quelques théorèmes d’algèbre*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **100**, 439–440, 1885.
- [13] STIELTJES, T. J., *Sur les polynômes de Jacobi*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **100**, 620–622, 1885.
- [14] STIELTJES, T. J., *Sur les racines de l’équation $X_n = 0$* , *Acta Math.*, **9**, 385–400, 1886.
- [15] SZEGŐ, G., *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23, Providence, RI, 1975.
- [16] VAN VLECK, E. B., *On the polynomials of Stieltjes*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **4**, 426–438, 1898.