



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Câmpus de Ilha Solteira

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

“Projetos de Controladores Baseados em LMI usando  
Realimentação da Derivada dos Estados”

**FLÁVIO ANDRADE FARIA**

**Orientador:** Edvaldo Assunção

**Co-orientador:** Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Tese apresentada à Faculdade de  
Engenharia - UNESP – Câmpus de Ilha  
Solteira, para obtenção do título de  
Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira – SP  
Agosto/2009

## FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira

F224p	<p>Faria, Flávio Andrade. Projetos de controladores baseados em LMI usando realimentação da derivada dos estados / Flávio Andrade Faria. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2009 112f. : il.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2009</p> <p>Orientador: Edvaldo Assunção Co-orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira Bibliografia: p. 105-112</p> <p>1. Realimentação da derivada dos estados. 2. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). 3. Sistemas descritores. 4. Sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. 5. Sistemas difusos.</p>
-------	--



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

### CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

**TÍTULO:** Projetos de Controladores Baseados em LMI usando Realimentação da Derivada dos Estados

**AUTOR:** FLAVIO ANDRADE FARIA  
**ORIENTADOR:** Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR em ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Profa. Dra. NEUSA-AUGUSTO PEREIRA DA SILVA  
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Profa. Dra. ERICA REGINA M D MACHADO  
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO  
Divisão de Engenharia Eletrônica / Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Dr. RICARDO CORAÇÃO DE LEÃO FONTOURA DE OLIVEIRA  
Departamento de Telemática / Universidade Estadual de Campinas

Data da realização: 21 de agosto de 2009.

*Aos meus pais, Milton e Rosária  
À minha irmã Flaviana*

# *Agradecimentos*

Dedico meus sinceros agradecimentos:

- Á Deus, por me conceder saúde e inteligência para concluir este trabalho;
- Á minha família, que com muito amor, sempre me apoiaram;
- Ao professor doutor Edvaldo Assunção, pela orientação, amizade e incentivo;
- Ao professor doutor Marcelo C. M. Teixeira, por toda a ajuda oferecida na co-orientação deste trabalho;
- Aos meus amigos Rodrigo Cardim e Emerson R. P. da Silva, por sempre me ajudarem.
- Á professora doutora Neusa A. P. da Silva, do Departamento de Matemática da FEIS, pela ajuda em algumas demonstrações de teoremas.
- Ás funcionárias da seção de pós-graduação, pelo bom atendimento;
- Aos meus amigos da pós-graduação, com quem muito aprendi;
- Á CAPES, pelo apoio financeiro;
- Aos desenvolvedores do ABNT<sub>TEX</sub>, um pacote de classes L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X para a criação e formatação de documentos conforme as normas da ABNT.

*“O único lugar onde o sucesso vem  
antes do trabalho é no dicionário.”*

*“A ciência sem a religião é imperfeita,  
a religião sem a ciência é cega.”*

*Albert Einstein (1879-1955)*

# *Resumo*

Já é conhecido da teoria de controle clássico, que a realimentação derivativa pode ser útil e em alguns casos, essencial para a obtenção do desempenho desejado. Além disso, existem problemas práticos em que a derivada dos estados é mais fácil de se obter do que os sinais dos estados. Por exemplo, nos seguintes problemas: controle de vibrações de sistemas mecânicos, sistemas de suspensão de automóveis, controle de vibrações em pontes suspensas e controle de vibrações na aterrissagem de aviões. O principal sensor usado nesses problemas é o acelerômetro. A partir do sinal do acelerômetro é possível obter com precisão a velocidade, mas não o deslocamento. Definindo o deslocamento e a velocidade como as variáveis de estado, então apenas os sinais da derivada dos estados estão disponíveis para a realimentação. A realimentação derivativa foi usada recentemente no projeto de sistemas lineares. Os procedimentos consideram o problema de alocação de pólos (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004, 2005) e o projeto de reguladores lineares quadráticos (DUAN; NI; KO, 2005). Infelizmente esses resultados não podem ser usados em sistemas incertos ou sujeitos à falhas estruturais. Para resolver esse caso, projetos baseados em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) foram propostos em (FARIA, 2005; ASSUNÇÃO et al., 2007e; FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009a; CARDIM et al., 2008; FARIA et al., 2009c). LMIs podem ser facilmente resolvidas com softwares de otimização, tais como os pacotes “LMI control toolbox” e “SeDuMi” do MATLAB.

Este trabalho aborda o projeto de controladores para sistemas descritores usando a realimentação da derivada dos estados. São apresentadas condições necessárias e suficientes baseadas em LMIs para a estabilidade assintótica de sistemas descritores. Como a estabilidade nem sempre é suficiente, posteriormente são adicionadas restrições de desempenho no projeto do controlador. Uma das vantagens do projeto de controladores baseado em LMIs, é que os resultados podem ser, em geral, facilmente estendidos para tratar sistemas incertos, sujeitos ou não a falhas estruturais.

Este trabalho também aborda o projeto de controladores para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno usando realimentação derivativa. Primeiramente, são apresentadas condições para a estabilidade e a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. Nesse contexto, a  $\mathcal{D}$ -estabilidade é usada para assegurar que os pólos dos modelos locais estejam em uma determinada região do plano complexo, e dessa forma, garantir que o sistema fuzzy em malha fechada tenha um desempenho satisfatório. Posteriormente, são propostas condições mais relaxadas para a estabilidade quadrática de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno, usando sequências de LMIs. A metodologia segue a mesma estratégia proposta por (OLIVEIRA; PERES, 2005; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2007).

Ao longo do texto, vários exemplos numéricos são resolvidos a fim de ilustrar a eficiência das técnicas propostas.

# *Abstract*

From classical control theory, it is well-known that state-derivative feedback can be very useful, and even in some cases essential to achieve a desired performance. Moreover, there exist some practical problems where the state-derivative signals are easier to obtain than the state signals. For instance, in the following applications: suppression of vibration in mechanical systems, control of car wheel suspension systems, vibration control of bridge cables and vibration control of landing gear components. The main sensor used in these problems is the accelerometer. In this case, from the signals of the accelerometers it is possible to reconstruct the velocities with a good precision but not the displacements. Defining the velocities and displacement as the state variables, then one has available for feedback the state-derivative signals. Recent researches about state-derivative feedback design for linear systems have been presented. The procedures consider, for instance, the pole placement problem (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004, 2005), and the design of a Linear Quadratic Regulator (DUAN; NI; KO, 2005). Unfortunately these results are not applied to the control of uncertain systems or systems subject to structural failures. For this case, Linear Matrix Inequalities (LMIs) based designs were recently proposed in (FARIA, 2005; ASSUNÇÃO et al., 2007e; FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009a; CARDIM et al., 2008; FARIA et al., 2009c). LMIs can be easily solved with optimization softwares, such as the packages “LMI control toolbox” and “SeDuMi” of MATLAB.

This work focuses control designs for descriptor systems using the state-derivative feedback. Necessary and sufficient LMI-based conditions for asymptotically stability of descriptor systems are presented. As the stability of a control system is insufficient to obtain a suitable performance, posteriorly performance constraints are added in the control design. The advantages of the LMI-based control design, is that the results can be, in general, easily extended for uncertain systems, with or without structural failures.

This work also deals with control designs of fuzzy systems using derivative feedback. Firstly, conditions for the stability and the  $\mathcal{D}$ -stability of Takagi-Sugeno fuzzy systems are presented. In that context, the  $\mathcal{D}$ -stability is used to assure that the poles of the local models to lie in a prescribed region of the complex plan, and in that way, to guarantee that the closed-loop fuzzy system has a satisfactory transient response. Posteriorly, more relaxed conditions are proposed for the quadratic stability of Takagi-Sugeno fuzzy systems using sequence of LMIs. The methodology follows the same strategy proposed by (OLIVEIRA; PERES, 2005; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2007).

During the text, various numerical examples are solved to illustrate the efficiency of the proposed methods.



# *Lista de Figuras*

2.1	Resposta do sinal $y(t)$ do sistema controlado com (2.30). . . . .	27
2.2	Resposta do sinal $y(t)$ do sistema controlado com (2.31). . . . .	28
2.3	Localização dos pólos do sistema incerto controlado com (2.34) . . . . .	31
2.4	Resposta do sinal $y(t)$ do sistema controlado com (2.34). . . . .	31
2.5	Localização dos pólos do sistema incerto controlado com (2.37) . . . . .	32
2.6	Respostas do sinal $y(t)$ do sistema controlado com (2.37). . . . .	33
2.7	Região $S(\gamma, r, \theta)$ . . . . .	34
2.8	Resposta do sinal $y(t)$ do sistema $S(2, 5, 30^\circ)$ -estável. . . . .	42
2.9	Resposta do sinal $y(t)$ do sistema $S(2, 30, 30^\circ)$ -estável. . . . .	43
2.10	Localização dos pólos do sistema incerto controlado com (2.70) . . . . .	45
2.11	Ampliação visual na região de alocação dos pólos. . . . .	45
2.12	Respostas do sinal $y(t)$ do sistema controlado com (2.70). . . . .	46
3.1	Sistema massa-mola. . . . .	57
3.2	Resposta do sistema (3.29) ( $m_1 = 2\text{kg}$ , $k = 20\text{kN/m}$ , $a = 1\text{m}^{-1}$ ). . . . .	57
3.3	Resposta do sinal $y(t)$ do sistema (3.29) controlado com (3.32). . . . .	58
3.4	Resposta do sinal $y(t)$ do sistema controlado com (3.35) . . . . .	59
3.5	Localização dos autovalores do sistema não-linear controlado com (3.35). . . . .	60
3.6	Ampliação visual na região $S(5, 100, 60^\circ)$ . . . . .	61
3.7	Sistema de suspensão ativa de um carro. . . . .	61
3.8	Resposta do sistema controlado com (3.39) . . . . .	64
3.9	Resposta do sinal $y(t)$ do sistema $S(2, 5, 20, 60^\circ)$ -estável. . . . .	65
3.10	Localização dos autovalores do sistema não-linear controlado com (3.42). . . . .	65

3.11 Resposta do sinal $y(t)$ do sistema não-linear controlado com (3.65). . . . .	70
3.12 Resposta do sinal $y(t)$ do sistema controlado com (3.69). . . . .	71
3.13 Localização dos autovalores do sistema fuzzy controlado com (3.74). . . . .	73
3.14 Respostas dos sistemas com e sem falhas, controlados com (3.104). . . . .	79
3.15 Respostas dos sistemas com e sem falhas, controlados com (3.105). . . . .	80
3.16 Resposta do sistema controlado ( $d = 0$ ). . . . .	96
3.17 Resposta do sistema controlado com restrição na taxa de decaimento. . . . .	98
3.18 Regiões de estabilidade do Teorema 3.5 . . . . .	99
3.19 Regiões de estabilidade: Teorema 3.3 $\times$ Teorema 3.5 ( $d = 7$ ) . . . . .	99

## *Lista de Tabelas*

2.1	Pólos do sistema controlado com o ganho (2.68) . . . . .	42
2.2	Pólos do sistema controlado com o ganho (2.69) . . . . .	43
3.1	Coefficientes da equação (3.115), considerando $r_a = 3$ e $d = 0$ . . . . .	85
3.2	Parâmetros do Teorema 3.5, considerando $r_a = 2$ e $d = 0$ . . . . .	94
3.3	Parâmetros do Teorema 3.5, considerando $r_a = 2$ e $d = 1$ . . . . .	97
3.4	Parâmetros do Teorema 3.5, considerando $r_a = 2$ e $d = 2$ . . . . .	97

# *Sumário*

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Conceitos iniciais</b>	<b>15</b>
<b>2 Projetos de controle para a realimentação da derivada dos estados em sistemas descritores</b>	<b>19</b>
2.1 Realimentação da derivada dos estados em sistemas descritores . . . . .	20
2.2 Projeto do controlador: Condição de estabilidade . . . . .	21
2.2.1 Condição de estabilidade com restrição na taxa de decaimento . . . . .	23
2.2.2 Projeto de controladores para sistemas descritores incertos . . . . .	24
Exemplo 2.1 . . . . .	26
Exemplo 2.2 . . . . .	28
2.3 Projeto do controlador: Condição de $\mathcal{D}$ -estabilidade . . . . .	33
2.3.1 $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas descritores incertos . . . . .	40
Exemplo 2.3 . . . . .	41
Exemplo 2.4 . . . . .	44
<b>3 Realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy Takagi-Sugeno</b>	<b>47</b>
3.1 Realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy Takagi-Sugeno . .	48
3.2 Projeto do controlador: Condição de estabilidade . . . . .	50
3.3 Projeto do controlador: Condição de estabilidade com restrições no desempenho	51
Exemplo 3.1 . . . . .	57
Exemplo 3.2 . . . . .	61

3.4	Projeto de controladores fuzzy . . . . .	66
3.4.1	Projeto de controladores fuzzy: Condição de estabilidade . . . . .	66
3.4.2	Condições de estabilidade com restrições de desempenho . . . . .	68
	Exemplo 3.3 . . . . .	69
	Exemplo 3.4 . . . . .	72
3.5	Sistemas fuzzy T-S sujeitos a falhas estruturais . . . . .	74
	Exemplo 3.5 . . . . .	77
3.6	Condições relaxadas para estabilidade de sistemas fuzzy T-S . . . . .	80
3.6.1	Projeto do controlador: Condições de estabilidade . . . . .	81
3.6.2	Projeto do controlador: Condições de estabilidade com taxa de decaimento . . . . .	92
	Exemplo 3.6 . . . . .	93
	Exemplo 3.7 . . . . .	98
	<b>Conclusões</b>	<b>101</b>
	Publicações . . . . .	102
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>105</b>

## *Introdução*

O conceito de realimentação de sistemas constitui a base da Teoria de Controle Moderno e existe uma vasta literatura sobre esse assunto (OGATA, 2003; DORF; BISHOP, 2001; CHEN, 1999). As técnicas mais usadas para realimentar os sistemas são a realimentação da saída e dos estados. Contudo, é conhecido da teoria de controle que a realimentação derivativa (ou, realimentação da derivada dos estados) pode ser útil e em alguns casos, essencial para a obtenção do desempenho desejado (LEWIS; SYRMOS, 1991). Além disso, existem problemas práticos em que é mais fácil obter o sinal da derivada dos estados do que o sinal dos estados. Por exemplo, em sistemas que usam acelerômetros como sensores. A partir da aceleração é possível obter a velocidade com boa precisão, porém é mais complexo obter o deslocamento (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). Logo, os sinais usados para realimentar esses sistemas são: a aceleração e a velocidade. E estes são justamente as derivadas da velocidade e da posição, que podem representar os estados do sistema. Devido ao seu baixo custo os acelerômetros têm sido cada vez mais usados pela indústria. As aplicações mais comuns são: em controle de oscilações de sistemas mecânicos (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004, 2005), em sistemas de suspensão de carros (REITHMEIER; LEITMANN, 2003), no controle de vibrações dos cabos de pontes suspensas (DUAN; NI; KO, 2005) e no controle de vibrações dos componentes de aterrissagem de aviões (KWAK; WASHINGTON; YEDAVALLI, 2002b).

O uso da realimentação derivativa em sistemas lineares tem sido explorado nos últimos anos. Alguns pesquisadores procuram desenvolver métodos similares aos já existentes para a realimentação de estados. Em (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004) os autores desenvolveram uma fórmula de Ackermann generalizada para sistemas lineares (SISO) sob realimentação derivativa. Em (KWAK; WASHINGTON; YEDAVALLI, 2002a; DUAN; NI; KO, 2005) foi apresentado o projeto de um Regulador Linear Quadrático (do inglês, Linear Quadratic Regulator (LQR)) usando realimentação derivativa. Os resultados foram obtidos considerando o modelo de Espaço de Estados Recíproco (do inglês, Reciprocal State Space (RSS)). Em (TEIXEIRA et al., 2006a; CARDIM et al., 2007b) os autores apresentaram uma nova forma de se obter o controlador da realimentação da derivada dos estados a partir da realimentação de estados usual. Essa metodologia permite que técnicas clássicas de controle usando a realimentação de estados possam ser diretamente aplicadas no projeto da realimentação da derivada dos estados. Como

os resultados citados acima não podem ser aplicados em sistemas incertos, inúmeros esforços foram despendidos a fim de se obter resultados mais gerais para a aplicação da realimentação da derivada dos estados. Uma abordagem para tratar sistemas lineares incertos pode ser encontrada em (FARIA, 2005), onde são apresentados dois projetos de controle baseados em Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, Linear Matrix Inequalities (LMIs)) para a estabilidade e  $\mathcal{D}$ -estabilidade desses sistemas.

Na literatura especializada também pode-se encontrar resultados sobre a realimentação derivativa em sistemas descritores (LEWIS; SYRMOS, 1991; BUNSE-GERSTNER; MEHRMANN; NICHOLS, 1992; BUNSE-GERSTNER et al., 1999; DUAN; IRWIN; LIU, 1999; DUAN; ZHANG, 2003). Porém na maior parte dos trabalhos os autores consideram a realimentação derivativa e proporcional ( $u(t) = Lx(t) - K\dot{x}(t)$ ). Enquanto que neste trabalho consideramos apenas a realimentação derivativa ( $u(t) = -K\dot{x}(t)$ ), o que diminui a complexidade do controlador quanto a sua implementação.

Assim como em (FARIA, 2005), todos os resultados apresentados nesse texto são obtidos em termos da solução de LMIs. A solução de problemas de otimização, com restrições descritas por LMIs e função objetivo linear, pode ser obtida empregando-se o método de planos de corte. Para resolver este tipo de problema convexo de programação semi-definida pode-se utilizar, por exemplo, o LMISol (OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997) ou os pacotes “LMI control toolbox” (GAHINET et al., 1995) e “SeDuMi” (STURM, 1999) do MATLAB. Nesses programas, a solução ótima é encontrada usando algoritmos com tempo de convergência polinomial. Além disso, projetos baseados em LMIs podem ser em geral, estendidos para tratar sistemas que possuem incertezas nos parâmetros da planta ou que estejam sujeitos a falhas estruturais (ISERMANN; BALLÉ, 1997; ISERMANN, 1997). Devido a essas flexibilidades, LMIs têm sido cada vez mais usadas para resolver diversos tipos de problemas de controle (ASSUNÇÃO; PERES, 1999; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; PALHARES, 2005; TEIXEIRA; COVACIC; ASSUNÇÃO, 2006; ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2007a, 2007b; ASSUNÇÃO et al., 2007d; CARDIM et al., 2009a, 2009b).

O projeto para a realimentação da derivada dos estados é abordado nesse texto através de duas etapas. Primeiramente, estendendo os resultados presentes em (FARIA, 2005), foram desenvolvidos projetos de controle para sistemas descritores. Os resultados incluem condições para a estabilidade, estabilidade com taxa de decaimento e  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas descritores lineares.

Posteriormente são propostas condições para a estabilidade e  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. Os projetos de controle abordam o uso de um controlador fixo ou de

controladores fuzzy para a garantia de estabilidade.

Alguns desses resultados já foram publicados em periódicos (ASSUNÇÃO et al., 2007e; FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009a; FARIA et al., 2009b, 2009c), em congressos nacionais (ASSUNÇÃO et al., 2007c; FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2007; CARDIM et al., 2007a; ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, 2008a, 2008b; FARIA et al., 2009d; SILVA et al., 2009b; ROSSI. et al., 2009; ASSUNÇÃO et al., 2009; SILVA et al., 2009a; TEIXEIRA et al., 2009) e no capítulo de um livro (CARDIM et al., 2008, Capítulo 1), sendo bem aceitos pela comunidade científica.

O texto aborda o projeto da realimentação da derivada dos estados em diferentes tipos de sistemas. Para cada sistema (ou capítulo), faz-se: uma breve introdução do assunto, a definição do problema e então se desenvolve o projeto do controlador. A eficiência dos métodos propostos é verificada através da solução de exemplos numéricos. O texto se apresenta estruturalmente da seguinte forma:

- Capítulo 1: Apresenta os principais conceitos matemáticos, necessários ao desenvolvimento teórico.
- Capítulo 2: Introduz o uso da realimentação das derivadas de estados em sistemas descritores. Encontra condições necessárias e suficientes para que sistemas descritores sob realimentação derivativa sejam assintoticamente estáveis ou  $\mathcal{D}$ -estáveis.
- Capítulo 3: Introduz o uso da realimentação das derivadas de estados em sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. Encontra condições para que sistemas fuzzy sob realimentação derivativa sejam assintoticamente estáveis. Os métodos desenvolvidos permitem a inclusão de restrições de desempenho no projeto do controlador.
- Conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.
- Referências Bibliográficas.



# 1 *Conceitos iniciais*

Para a obtenção dos resultados desejados utilizam-se ao longo do texto várias operações matriciais. Muitas dessas operações já são bem conhecidas da Álgebra Linear, porém em alguns momentos é necessário o uso de propriedades mais específicas da Álgebra Matricial. Abaixo citamos algumas dessas propriedades. Todas as demonstrações são omitidas e maiores informações são encontradas em (GRAHAM, 1981; MEYER, 2000).

Dadas as matrizes  $A_{m \times n}$  e  $B_{p \times q}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Definimos como *produto de Kronecker (KRON)* entre A e B ( $A \otimes B$ ) a seguinte matriz bloco

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}, \quad A \otimes B \text{ é de ordem } mp \times nq. \quad (1.1)$$

O produto de Kronecker verifica as seguintes propriedades:

1) O produto de Kronecker é um operador bilinear

$$\begin{aligned} A \otimes (\alpha B) &= (\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ (A + B) \otimes C &= (A \otimes C) + (B \otimes C), \\ A \otimes (B + C) &= (A \otimes B) + (A \otimes C). \end{aligned}$$

2) Propriedade Associativa

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

3) Não é comutativo

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$

4) Verifica produto de matrizes, em matrizes de dimensões adequadas

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD).$$

5) A transposição não inverte a ordem das matrizes no produto de Kronecker

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'.$$

6) Quando  $A$  e  $B$  são invertíveis, a inversa do produto de Kronecker de  $A$  e  $B$  é dada por

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

O principal objetivo desse texto é obter extensões dos resultados apresentados em (FARIA, 2005), para tratar sistemas descritores e sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. A fim de facilitar a leitura do texto e também possíveis comparações, são exibidos abaixo os principais resultados obtidos por (FARIA, 2005). Os resultados são colocados apenas para orientação e todas as demonstrações são omitidas.

Dado um sistema controlável, linear e invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.2)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . O projeto de controladores com a realimentação da derivada dos estados, consiste em encontrar uma matriz constante  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que o sistema (1.2), realimentado com a entrada

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad (1.3)$$

é assintoticamente estável. Sendo representado por:

$$\dot{x}(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t). \quad (1.4)$$

Os próximos teoremas encontram condições necessárias e suficientes para a estabilidade do sistema (1.4).

**Lema 1.1.** *Suponha que o sistema (1.4) não tem pólos na origem (ou,  $\det(A) \neq 0$ ). Então, o sistema (1.4) é estabilizável se e somente se, existe uma matriz simétrica  $Q$  e uma matriz  $Y$  satisfazendo:*

$$\begin{aligned} AQ + QA' + AY'B' + BYA' &< 0, \\ Q &> 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

**Lema 1.2.** *Suponha que o sistema (1.4) não tem pólos na origem (ou,  $\det(A) \neq 0$ ). Então, o sistema (1.4) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável se e somente se, existe uma matriz simétrica  $Q$  e uma matriz  $Y$  satisfazendo:*

$$\begin{bmatrix} AQ + QA' + BYA' + AY'B' & Q + BY \\ Q + Y'B' & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (1.6)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2}(A^{-1}(Q + BY) + (Q + BY)'(A^{-1})') & -Q \\ -Q & \frac{r}{2}(A^{-1}(Q + BY) + (Q + BY)'(A^{-1})') \end{bmatrix} < 0, \quad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(AQ + QA' + BYA' + AY'B') & \text{cos}(\theta)[AQ + AY'B' - (QA' + BYA')] \\ \text{cos}(\theta)[QA' + BYA' - (AQ + AY'B')] & \text{sen}(\theta)(AQ + QA' + BYA' + AY'B') \end{bmatrix} < 0, \quad (1.8)$$

$$Q > 0. \quad (1.9)$$

No Lema 1.2 é mencionado o termo  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável. Esse termo se refere às condições específicas de  $\mathcal{D}$ -estabilidade e é discutido com detalhes na Seção 2.3.

Ao longo do texto também são úteis as seguintes propriedades:

**Propriedade 1.1.** *Para toda matriz  $M$  não simétrica ( $M \neq M'$ ), se  $M + M' < 0$ , então  $M$  é invertível.*

**Propriedade 1.2.** *Uma matriz simétrica  $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix}$  é definida positiva se e somente:*

$$1. M_1 > 0 \text{ e } M_3 - M_2'(M_1)^{-1}M_2 > 0,$$

ou

$$2. M_3 > 0 \text{ e } M_1 - M_2(M_3)^{-1}M_2' > 0.$$

*Esse resultado é conhecido na literatura como complemento de Schur (BOYD et al., 1994; GEROMEL; OLIVEIRA; HSU, 1998).*

Neste trabalho, a solução numérica das LMIs é realizada em microcomputadores com o MATLAB. O MATLAB é um software pago que fornece um ambiente de programação de alto nível, isso facilita a programação de diversos problemas em engenharia. Para resolver LMIs no MATLAB é necessária a instalação de pacotes específicos, conhecidos na literatura como resolvedores (ou “solvers”) de LMIs. O solver padrão do MATLAB é o “LMI control toolbox” (GAHINET et al., 1995). Apesar de ser muito eficiente, esse solver tem duas desvantagens: a primeira, é que para usá-lo é necessário pagar por uma licença adicional; A segunda, é que as LMIs são representadas através de estruturas complexas, o que dificulta o seu uso. Nesse caso, pode-se usar o “YALMIP toolbox” (LÖFBERG, 2004). O YALMIP é um pacote gratuito que facilita a representação de diversos problemas de otimização no MATLAB. Por exemplo, ele

pode ser usado em problemas de programação semi-definida, que é justamente onde as LMIs se encaixam. O YALMIP também tem a vantagem de suportar vários solvers. No Capítulo 3, as LMIs são resolvidas numericamente com o solver padrão e com o “SeDuMi” (STURM, 1999). O solver SeDuMi, além de gratuito, usa um algoritmo diferente para resolver as LMIs, então, na maioria das vezes as soluções encontradas pelo “LMI control toolbox” são diferentes das encontradas pelo SeDuMi. A eficiência desses pacotes é verificada no Capítulo 3.

Como o MATLAB é pago, então pode acontecer do usuário não ter acesso ao software. Neste caso, pode-se usar o LMISol (OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997). O LMISol é um software gratuito voltado exclusivamente para a solução de LMIs. Esse solver é bem documentado e pode ser facilmente encontrado na internet.

Neste trabalho são usados alguns símbolos, os mais destacados são:

- ■ : indica o final de demonstração do teorema.
- □ : indica o final do exemplo.
- ~ : este símbolo aparece nas páginas 38 e 54, e representa a relação de equivalência entre LMIs e números complexos.

## 2 *Projetos de controle para a realimentação da derivada dos estados em sistemas descritores*

Os resultados apresentados neste capítulo representam a continuidade do estudo presente na dissertação de mestrado (FARIA, 2005), que trata do uso da realimentação da derivada dos estados em sistemas lineares. Na dissertação foram apresentadas condições necessárias e suficientes para estabilidade e  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Os métodos propostos podem ser aplicados tanto em sistemas determinísticos quanto em sistemas com incertezas politópicas. Mas não podem ser aplicados diretamente em sistemas descritores.

Sistemas descritores podem ser encontrados na modelagem de vários problemas de engenharia, por exemplo em circuitos elétricos ou robótica (BUNSE-GERSTNER et al., 1999). A realimentação derivativa vem sendo bastante usada por pesquisadores para o projeto de controladores de sistemas descritores (LEWIS; SYRMOS, 1991; BUNSE-GERSTNER; MEHRMANN; NICHOLS, 1992; BUNSE-GERSTNER et al., 1999; DUAN; IRWIN; LIU, 1999; DUAN; ZHANG, 2003; CARDIM et al., 2008). Mas a maioria desses trabalhos considera a realimentação derivativa e proporcional ( $u(t) = Lx(t) - K\dot{x}(t)$ ), enquanto que neste capítulo tratamos apenas da realimentação derivativa ( $u(t) = -K\dot{x}(t)$ ). Diferentes metodologias têm sido usadas para sistemas descritores sob realimentação derivativa, dentre essas podemos citar: (LEWIS; SYRMOS, 1991) onde os autores obtiveram resultados teóricos abordando o problema sob o ponto de vista da teoria geométrica. Eles usaram uma equação generalizada de Lyapunov e encontraram uma técnica aplicável computacionalmente para manipular a *auto-estrutura* do sistema. Em (BUNSE-GERSTNER; MEHRMANN; NICHOLS, 1992), um projeto para controladores de sistemas descritores contínuos e discretos é apresentado. Todos os procedimentos são desenvolvidos usando decomposição em matrizes ortogonais e são aplicáveis computacionalmente. Em (BUNSE-GERSTNER et al., 1999), sistemas descritores são analisados usando a forma canônica de Weierstrass e a auto-estrutura do sistema.

A realimentação derivativa e proporcional também tem sido aplicada em sistemas descritores para: estabilização (JIN, 1994; DUAN; IRWIN; LIU, 1999; DUAN; ZHANG, 2003; GARCIA-PLANAS, 2003; KUO; LIN; XU., 2004), controle não-linear (BOUKAS; HABETLER, 2004) e controle  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas contínuos com atraso de estado (FRIDMAN; SHAKED, 2002). Recentemente, LMIs têm sido usadas no projeto de controladores de sistemas descritores (TANIGUCHI; TANAKA; WANG, 2000; XU; LAM, 2004; FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2007; ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, 2008b; TANAKA; OHTAKE; WANG, 2007). Nas próximas seções são propostas técnicas baseadas em LMIs para a estabilidade e a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas descritores lineares usando apenas a realimentação da derivada dos estados.

## 2.1 Realimentação da derivada dos estados em sistemas descritores

Considere um sistema descritor controlável descrito por:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Se  $E$  é invertível, então o sistema (2.1) é equivalente a um sistema linear na forma padrão.

$$\dot{x}(t) = A_F x(t) + B_F u(t), \quad \text{sendo } A_F = E^{-1}A, \quad B_F = E^{-1}B.$$

O processo de passar o sistema (2.1) para o formato padrão é chamado de *processo de padronização* (GARCIA-PLANAS, 2003). Sistemas em que isso é possível ( $\det(E) \neq 0$ ) são chamados de sistemas padronizáveis.

Quando a matriz  $E$  é singular ( $\det(E) = 0$ ) a resposta dinâmica do sistema passa a apresentar formas impulsivas e o sistema perde a unicidade de soluções, o que dificulta a sua manipulação. Esse trabalho propõe condições necessárias e suficientes para que o sistema (2.1) usando realimentação da derivada dos estados, seja assintoticamente estável. O problema pode ser formulado como:

*Problema 1:* Encontre uma matriz constante  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que:

1. A matriz  $(E + BK)$  é invertível;

2. O sistema em malha fechada, obtido com a realimentação da derivada dos estados

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad (2.2)$$

é assintoticamente estável.

O sistema em malha fechada considerando (2.1) e (2.2) pode ser representado por:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\dot{x}(t) \Leftrightarrow (E + BK)\dot{x}(t) = Ax(t) \Leftrightarrow \\ \dot{x}(t) &= (E + BK)^{-1}Ax(t) = A_E x(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Observação 2.1.** Em (BUNSE-GERSTNER; MEHRMANN; NICHOLS, 1992; DUAN; IRWIN; LIU, 1999) os autores demonstram que a matriz  $(E + BK)$  é invertível somente se:

$$\text{rank}[E, B] = n. \quad (2.4)$$

**Observação 2.2.** Pela equação (2.3), tem-se que o sistema (2.1) só pode ser estabilizado com a realimentação da derivada dos estados (2.2) se (2.1) não possui pólos na origem, ou seja, se a matriz  $A$  é invertível. Essa é uma condição necessária para a aplicação da realimentação da derivada dos estados (KWAK; WASHINGTON; YEDAVALLI, 2002a; ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004; FARIA, 2005; TEIXEIRA et al., 2006a; CARDIM et al., 2007b; ASSUNÇÃO et al., 2007e; FARIA et al., 2009c).

As técnicas presentes em (BUNSE-GERSTNER; MEHRMANN; NICHOLS, 1992; BUNSE-GERSTNER et al., 1999) podem ser usadas em sistemas que não satisfazem à condição (2.4). Isso é possível porque as técnicas desenvolvidas não necessitam que o sistema em malha fechada seja padronizável, uma outra vantagem é que elas também podem ser aplicadas em sistemas que possuem um ou mais pólos na origem ( $\det(A) = 0$ ). Porém as técnicas usam realimentação derivativa e proporcional.

Como a técnica proposta neste trabalho usa apenas realimentação derivativa (o que simplifica a implementação do controlador), então ela só pode ser aplicada em sistemas (2.1) que satisfazem (2.4).

## 2.2 Projeto do controlador: Condição de estabilidade

Nesta seção são propostas condições necessárias e suficientes para a solução do Problema 1.

**Teorema 2.1.** *Supondo que o sistema (2.1) não tem pólos na origem (ou,  $\det(A) \neq 0$ ), o sistema (2.3) é estabilizável se e somente se, existe uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que:*

$$Q > 0, \quad (2.5)$$

$$AQE' + EQA' + BYA' + AY'B' < 0. \quad (2.6)$$

Neste caso, um ganho para o controlador que resolve o Problema 1 pode ser obtido com:

$$K = YQ^{-1}. \quad (2.7)$$

**Prova:** (*Suficiência*) Suponha que (2.5) e (2.6) são factíveis. Substituindo  $Q = P^{-1}$  e  $Y = KP^{-1}$  em (2.6) obtém-se

$$AP^{-1}(E + BK)' + (E + BK)P^{-1}A' < 0. \quad (2.8)$$

Usando a Propriedade 1.1 em (2.8) conclui-se que as matrizes  $(E + BK)$  e  $A'$  são invertíveis (condições necessárias para a solução do Problema 1). Multiplicando (2.8) à esquerda por  $P(E + BK)^{-1}$  e à direita por  $[(E + BK)']^{-1}P$  obtém-se

$$\begin{aligned} P(E + BK)^{-1}A + A'[(E + BK)']^{-1}P = \\ PA_E + A'_E P < 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Leftrightarrow x(t)'(PA_E + A'_E P)x(t) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0. \quad (2.10)$$

Note que a equação (2.10) é equivalente à derivada em relação ao tempo, da função de Lyapunov  $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$ , ao longo das trajetórias do sistema (2.3). Por hipótese tem-se que  $P = Q^{-1} > 0$ . Daí segue que, se as LMIs (2.5) e (2.6) são factíveis, então existe uma matriz  $P$  satisfazendo as condições de Lyapunov para o sistema (2.3). Logo, o sistema é assintoticamente estável.

(*Necessidade*) Suponha que o sistema (2.3) é assintoticamente estável. Então, pela teoria de Lyapunov existe uma matriz definida positiva  $P$  satisfazendo (2.9). Multiplicando (2.9) à esquerda por  $(E + BK)P^{-1}$ , à direita por  $P^{-1}(E + BK)'$  e substituindo  $P^{-1} = Q$  e  $KP^{-1} = Y$ , chega-se na LMI (2.6). Dessa forma, quando o sistema (2.3) é assintoticamente estável, existem matrizes  $Q$  e  $Y$  satisfazendo as LMIs (2.5) e (2.6). ■

Pelo Teorema 2.1 conclui-se que o estudo da estabilidade assintótica do sistema (2.3) é equivalente ao estudo da factibilidade das LMIs (2.5) e (2.6). Isso facilita o estudo de estabi-



lidade, pois, LMIs são facilmente resolvidas através de softwares de programação matemática. Dentre os quais citamos o “*LMI control toolbox*”, que é o mais usado e o *LMISol* (OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997), que é de domínio público.

A estabilidade do sistema (2.3) nem sempre é suficiente para fins de engenharia, pois existem projetos que possuem restrições de desempenho. A modelagem em LMIs permite que algumas dessas restrições sejam adicionadas de maneira simples ao projeto do controlador. Na próxima seção é estudado o caso em que o projeto possui restrições na taxa de decaimento.

### 2.2.1 Condição de estabilidade com restrição na taxa de decaimento

Em (BOYD et al., 1994), a taxa de decaimento de um sistema linear é definida como o maior número real positivo  $\gamma$  tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0,$$

para toda solução  $x(t)$  do sistema,  $t \geq 0$ .

A restrição na taxa de decaimento pode ser usada para diminuir o tempo de estabelecimento do sistema. O próximo teorema apresenta condições suficientes para que (2.3) tenha taxa de decaimento maior que  $\gamma$ .

**Teorema 2.2.** *Supondo que o sistema (2.1) não tem pólos na origem (ou,  $\det(A) \neq 0$ ) e dado um  $\gamma > 0$ . Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que:*

$$Q > 0, \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} AQE' + EQA' + BYA' + AY'B' & EQ + BY \\ QE' + Y'B' & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.12)$$

Então o sistema (2.3) é estabilizável com taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , e um ganho para o controlador que resolve o Problema 1 pode ser obtido com:

$$K = YQ^{-1}. \quad (2.13)$$

**Prova:** Inserir a restrição de taxa de decaimento no sistema (2.3) é equivalente a trocar a equação  $\dot{V}(x(t)) < 0$  por:

$$\dot{V}(x(t)) < -2\gamma V(x(t)), \quad \forall x(t) \neq 0, \quad (2.14)$$

sendo  $V(x(t)) = x'(t)Px(t)$  uma função quadrática de Lyapunov (BOYD et al., 1994). Substi-

tuindo (2.3) em  $\dot{V}(x(t))$  tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= x'(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}'(t)Px(t) \\ &= x'(t)P(E+BK)^{-1}Ax(t) + x'(t)A'[(E+BK)^{-1}]'Px(t) \\ &= x'(t)\left(P(E+BK)^{-1}A + (t)A'[(E+BK)^{-1}]'P\right)x(t).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Então de (2.14) e (2.15) segue que

$$P(E+BK)^{-1}A + A'[(E+BK)^{-1}]'P < -2\gamma P. \quad (2.16)$$

Agora multiplicando (2.16) à esquerda por  $(E+BK)P^{-1}$ , à direita por  $P^{-1}(E+BK)'$  e aplicando o complemento de Schur (Propriedade 1.2), obtém-se

$$\begin{bmatrix} A(EP^{-1} + BKP^{-1})' + (EP^{-1} + BKP^{-1})A' & EP^{-1} + BKP^{-1} \\ (EP^{-1} + BKP^{-1})' & -\frac{P^{-1}}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.17)$$

Assim, se as LMIs (2.11) e (2.12) são factíveis e definindo  $Q = P^{-1}$  e  $Y = KP^{-1}$ , conclui-se que (2.12) e (2.17) são equivalentes. Portanto, quando (2.11) e (2.12) são factíveis, existe uma matriz  $K$  (obtida com (2.13)), tal que o sistema (2.3) é assintoticamente estável com taxa de decaimento superior a  $\gamma$ . ■

Uma das vantagens de usar LMIs no projeto de controladores, é que os resultados podem ser, em geral, facilmente estendidos para aplicação em sistemas incertos. Na próxima seção são propostas condições suficientes para o projeto de controladores em sistemas descritores incertos. Os resultados são obtidos explorando propriedades de conjuntos convexos.

### 2.2.2 Projeto de controladores para sistemas descritores incertos

Neste trabalho, falhas estruturais são definidas como uma interrupção permanente na capacidade do sistema de realizar uma determinada função (ISERMANN; BALLÉ, 1997; ISERMANN, 1997, 2006). Falhas estruturais podem ser representadas no modelo dinâmico da planta como incertezas politópicas. Considere um sistema linear incerto, com ou sem falhas estruturais, descrito como a combinação convexa de seus vértices:

$$\sum_{i=1}^{r_e} e_i E_i \dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j x(t) + \sum_{k=1}^{r_b} b_k B_k u(t), \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} e_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, r_e, & \sum_{i=1}^{r_e} e_i &= 1, \\ a_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, r_a, & \sum_{j=1}^{r_a} a_j &= 1, \\ b_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, r_b, & \sum_{k=1}^{r_b} b_k &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

sendo  $r_e$ ,  $r_a$  e  $r_b$  o número de vértices dos politopos  $E$ ,  $A$  e  $B$ , respectivamente,  $e_i$ ,  $a_j$  e  $b_k$ , são números reais desconhecidos. Os próximos teoremas encontram uma solução para o Problema 1, substituindo o sistema (2.1) por (2.18).

**Teorema 2.3.** *Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , satisfazendo as seguintes LMIs:*

$$Q > 0, \quad (2.20)$$

$$A_j Q E_i' + E_i Q A_j' + B_k Y A_j' + A_j Y' B_k' < 0, \quad (2.21)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, r_e$ ,  $j = 1, 2, \dots, r_a$  e  $k = 1, 2, \dots, r_b$ . Então, o sistema (2.3), substituindo (2.1) por (2.18), é estabilizável e um ganho que resolve o Problema 1 pode ser obtido com:

$$K = Y Q^{-1}. \quad (2.22)$$

**Prova:** Se o sistema (2.18) realimentado com (2.2) é estabilizável, então pelo Teorema 2.1 existem matrizes  $Q$  e  $Y$  tais que:

$$Q > 0, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j \right) Q \left( \sum_{i=1}^{r_e} e_i E_i' \right) + \left( \sum_{i=1}^{r_e} e_i E_i \right) Q \left( \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j' \right) \\ &+ \left( \sum_{k=1}^{r_b} b_k B_k \right) Y \left( \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j' \right) + \left( \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j \right) Y' \left( \sum_{k=1}^{r_b} b_k B_k' \right) < 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

Agora, considerando (2.19) em (2.24) chega-se em

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j \right) Q \left( \sum_{i=1}^{r_e} e_i E_i' \right) + \left( \sum_{i=1}^{r_e} e_i E_i \right) Q \left( \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j' \right) \\ &+ \left( \sum_{k=1}^{r_b} b_k B_k \right) Y \left( \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j' \right) + \left( \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j \right) Y' \left( \sum_{k=1}^{r_b} b_k B_k' \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r_e} \sum_{j=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_b} e_i a_j b_k [A_j Q E_i' + E_i Q A_j' + B_k Y A_j' + A_j Y' B_k'] < 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

De (2.19) tem-se que  $e_i$ ,  $a_j$  e  $b_k$  são positivos para qualquer  $i, j, k$ . Então, pelo lado direito de (2.25) conclui-se que uma condição suficiente para (2.24), é que as LMIs (2.21) sejam factíveis para todo  $i, j, k$ . Portanto, quando (2.20) e (2.21) são factíveis, o Teorema 2.1 é satisfeito e uma solução para o Problema 1 substituindo o sistema (2.1) por (2.18), é dada por (2.22). ■

**Teorema 2.4.** *Dado uma constante  $\gamma > 0$ . Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , satisfazendo as LMIs:*

$$Q > 0, \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} A_j Q E_i' + E_i Q A_j' + B_k Y A_j' + A_j Y' B_k' & E_i Q + B_k Y \\ Q E_i' + Y' B_k' & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i, j, k. \quad (2.27)$$

Então, o sistema (2.3), substituindo (2.1) por (2.18), é estabilizável com taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , e um ganho que resolve o Problema 1 pode ser obtido com:

$$K = Y Q^{-1}. \quad (2.28)$$

**Prova:** A demonstração segue diretamente das provas dos Teoremas 2.2 e 2.3. ■

A eficiência da metodologia proposta pode ser verificada na solução dos exemplos.

### Exemplo 2.1: Sistema determinístico

Considere o seguinte sistema descritor (BUNSE-GERSTNER; MEHRMANN; NICHOLS, 1992):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (2.29)$$

Observe que esse exemplo é um sistema SISO (do inglês, Single-Input/Single-Output), com  $n = 2$ ,  $m = 1$  e  $p = 1$ . Usando o pacote “LMI control toolbox” do software MATLAB (GAHINET et al., 1995) para resolver as LMIs (2.5) e (2.6) do Teorema 2.1, foi obtida a seguinte solução factível:

$$Q = \begin{bmatrix} 90,973 & -30,324 \\ -30,324 & 90,973 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -90,973 & -45,487 \end{bmatrix}.$$

Um ganho  $K$  satisfazendo o Problema 1 pode ser obtido com (2.7),

$$\begin{aligned} K = YQ^{-1} &= \begin{bmatrix} -90,973 & -45,487 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0124 & 0,0041 \\ 0,0041 & 0,0124 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1,3125 & -0,9375 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como mencionado no item 1 do Problema 1, a solução  $K$  obtida garante que a matriz  $(E + BK)$  é invertível. Nesse caso,  $\det(E + BK) = 1,3125 \neq 0$ .

Suponha que a saída do sistema é  $y(t) = x_1(t)$ . Para a condição inicial  $x(0) = [1 \ 0]'$ , a resposta dinâmica do sistema (2.29), realimentado com a entrada (2.2) e o ganho (2.30), é exibida na Figura 2.1.

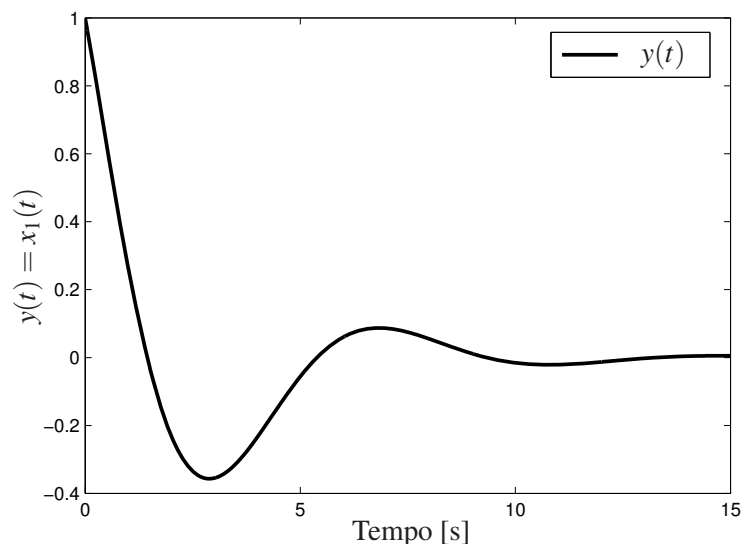


Figura 2.1: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema controlado com (2.30).

Da Figura 2.1, tem-se que o tempo de duração do transitório do sistema controlado é aproximadamente 15s, que é um valor elevado para alguns problemas. Logo, o ganho (2.30) encontrado com o Teorema 2.1, que considera apenas a estabilidade, pode ser insuficiente para obter um desempenho desejado. Especificando  $\gamma = 2$  para o limite da taxa de decaimento, pode-se obter um sistema com menor tempo de duração do transitório. Usando as LMIs (2.11) e (2.12) do Teorema 2.2 foi obtida a solução:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 22,77 & -3,876 \\ -3,876 & 1,528 \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} 0,66247 & -0,43492 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O ganho  $K$  da realimentação da derivada dos estados foi calculado usando (2.13):

$$K = \begin{bmatrix} -0,034 & -0,371 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Para a solução (2.31) tem-se que  $\det(E + BK) = 0,034$ , e a resposta dinâmica do sistema controlado para a mesma condição inicial  $x(0)$ , pode ser vista na Figura 2.2.

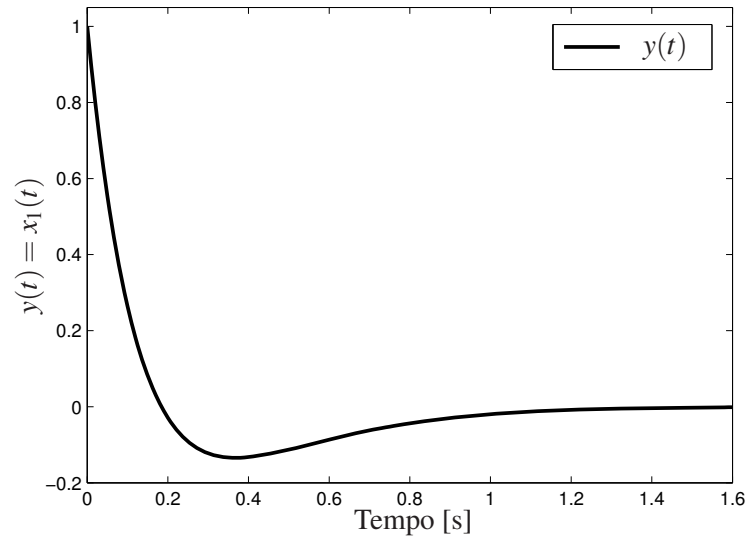


Figura 2.2: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema (2.29) controlado, com limite na taxa de decaimento.

O tempo de duração do transitório na Figura 2.2 é aproximadamente 1,6s, que é menor que o da Figura 2.1, onde é considerada apenas a estabilidade. Logo, o ganho (2.31) obtido com o Teorema 2.2 é capaz de estabilizar o sistema (2.3) com tempo de duração do transitório menor que o ganho (2.30) obtido com o Teorema 2.1. O valor  $\gamma = 2$  foi escolhido apenas para ilustrar a eficiência do Teorema 2.2. Pode-se melhorar ainda mais o desempenho do sistema controlado, aumentando o valor do parâmetro  $\gamma$ .  $\square$

### Exemplo 2.2: Sistema incerto gerado randomicamente

Considere o sistema descritor incerto MIMO (do inglês, Multi-Input/Multi-Output), representado pelas matrizes:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \hat{e}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

sendo  $0,8 \leq \hat{e}_{33} \leq 1,2$  e  $5,4 \leq \hat{a}_{11} \leq 6,4$ . Uma falha estrutural no atuador do sistema pode ser adicionada ao projeto através da matriz incerta:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & \bar{b}_{32} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

de tal forma que,  $\bar{b}_{32} = 1$  se o equipamento está funcionando normalmente e  $\bar{b}_{32} = 0$  se ocorre uma falha no atuador. Dessa forma, os vértices dos politopos são dados por:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 6,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um controlador (2.2) que garante a estabilidade do sistema (2.18), considerando (2.32) e (2.33), pode ser obtido com o Teorema 2.3. Resolvendo as LMIs (2.20) e (2.21) do Teorema 2.3 com o “LMI control toolbox” do MATLAB (GAHINET et al., 1995), obtém-se a seguinte solução:

$$Q = \begin{bmatrix} 28,979 & -10,389 & -17,48 & 44,932 \\ -10,389 & 27,411 & 1,274 & -127,53 \\ -17,48 & 1,274 & 150,88 & -11,729 \\ 44,932 & -127,53 & -11,729 & 894,4 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 11,882 & 12,057 & -249,1 & 36,962 \\ 2,5384 & -56,681 & -2,1658 & 30,717 \end{bmatrix}.$$

O ganho  $K$  da realimentação da derivada dos estados foi calculado usando (2.22):

$$K = \begin{bmatrix} -0,4577 & 1,6071 & -1,6965 & 0,27123 \\ -0,95497 & -6,0862 & -0,13479 & -0,78727 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Uma vez obtido o ganho da realimentação derivativa, o objetivo agora é verificar que o controlador (2.2) garante a estabilidade do sistema incerto (2.18) para quaisquer valores  $e_i$ ,  $a_j$  e  $b_k$  satisfazendo (2.19). Como os parâmetros  $e_i$ ,  $a_j$  e  $b_k$  do sistema (2.18) são desconhecidos, então não é possível realizar a uma simulação precisa do sistema. Nessa situação, é comum simular uma versão aproximada do sistema explorando as propriedades dos parâmetros  $e_i$ ,  $a_j$  e  $b_k$ .

Supondo que ocorra uma falha estrutural em (2.33) após  $t_f$  segundos, o sistema incerto (2.32) e (2.33), pode ser representado da seguinte maneira:

- Se  $t \leq t_f$ , então o sistema está funcionando normalmente e pode ser representado por:

$$(e_1 E_1 + e_2 E_2) \dot{x}(t) = (a_1 A_1 + a_2 A_2) x(t) + B_1 u(t), \quad (2.35a)$$

- Se  $t > t_f$ , então ocorre uma falha estrutural, e o sistema passa a ser representado por:

$$(e_1 E_1 + e_2 E_2) \dot{x}(t) = (a_1 A_1 + a_2 A_2) x(t) + B_2 u(t). \quad (2.35b)$$

Das propriedades do conjunto convexo (2.19), segue que:

$$\begin{cases} e_1 \in [0, 1] \\ e_2 = 1 - e_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a_1 \in [0, 1], \\ a_2 = 1 - a_1. \end{cases} \quad (2.36)$$

A garantia de estabilidade do sistema incerto (2.18) pode ser verificada no MATLAB através de um teste exaustivo nos parâmetros  $e_i$  e  $a_j$  dos sistemas (2.35a) e (2.35b). Primeiramente, iniciamos  $e_1 = a_1 = 0$ , e então incrementamos esses valores em 0.01 até que  $e_1 = a_1 = 1$ . A partir de (2.36), obtém-se os parâmetros  $e_2$  e  $a_2$  para cada um dos pontos de análise. Assim, os parâmetros  $e_i$  e  $a_j$  se tornam valores numéricos conhecidos, e dessa forma, pode-se verificar o comportamento dinâmico dos sistemas (2.35a) e (2.35b). Na Figura 2.3 são exibidos os pólos dos sistemas (2.35a) e (2.35b) para cada um dos pontos  $e_i$  e  $a_j$ .

Pela Figura 2.3, observa-se que todos os pólos do sistema controlado possuem parte real negativa, logo o ganho (2.34) é capaz de assegurar a estabilidade dos sistemas (2.35a) e (2.35b).



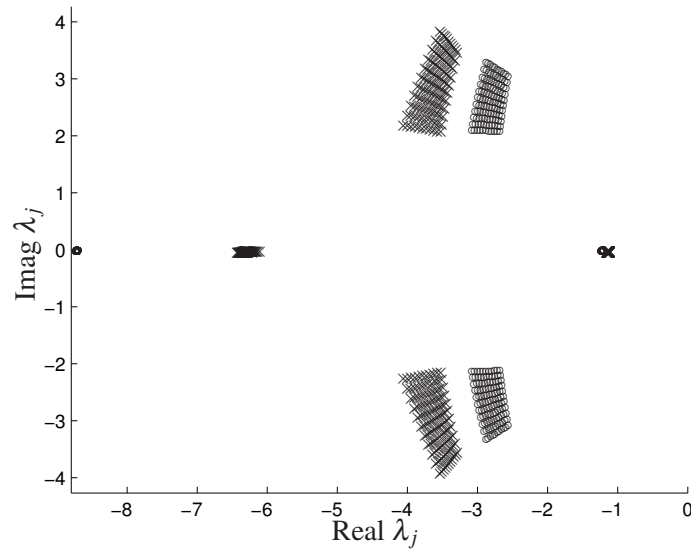


Figura 2.3: Localização dos pólos do sistema incerto, controlado com o ganho (2.34).

Suponha que a saída do sistema é dada por  $y(t) = [x_1(t) \ x_3(t)]'$  e que ocorra uma falha estrutural em (2.33) após  $t_f = 2$  segundos. Para a condição inicial  $x(0) = [0, 3 \ 0, 1 \ 0 \ 0]'$ , a resposta dinâmica do sistema com parâmetros  $\hat{e}_{33} = 1$  e  $\hat{a}_{11} = 6$  nas matrizes incertas  $E$  e  $A$ , é vista na Figura 2.4.

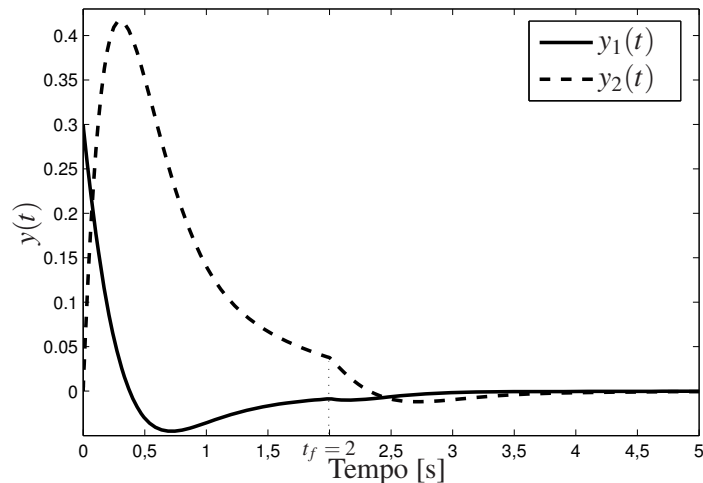


Figura 2.4: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema controlado com o ganho (2.34).

A Figura 2.4, mostra que o ganho (2.34) garante a estabilidade do sistema incerto (2.18), considerando (2.32) e (2.33), mesmo após a ocorrência de uma falha em  $t_f = 2$ . Para o caso  $\hat{e}_{33} = 1$  e  $\hat{a}_{11} = 6$ , o tempo de duração do transitório do sistema controlado é aproximadamente 5s. Esse desempenho já é satisfatório, mas, ele ainda pode ser melhorado com o Teorema 2.4.

Especificando um limite para a taxa de decaimento igual a  $\gamma = 2$  e resolvendo as LMIs (2.26) e (2.27) do Teorema 2.4, a seguinte solução é encontrada:

$$Q = \begin{bmatrix} 6,98 & -0,5 & -7,905 & 2,005 \\ -0,5 & 1,541 & -0,299 & -6,326 \\ -7,905 & -0,299 & 23,327 & 1,121 \\ 2,005 & -6,326 & 1,121 & 96,262 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 14,385 & 0,857 & -41,747 & -1,484 \\ 0,627 & -2,247 & 0,604 & 5,292 \end{bmatrix}.$$

O ganho  $K$  da realimentação da derivada dos estados foi calculado usando (2.28):

$$K = \begin{bmatrix} 9,013 \times 10^{-2} & 0,353 & -1,7559 & 2,634 \times 10^{-2} \\ -1,211 \times 10^{-2} & -1,691 & 2,827 \times 10^{-3} & -5,596 \times 10^{-2} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

A estabilidade do sistema incerto (2.18) pode ser verificada no MATLAB, usando o processo iterativo nos parâmetros  $e_i$  e  $a_j$  dos sistemas (2.35a) e (2.35b). Na Figura 2.5 são exibidos os pólos dos sistemas (2.35a) e (2.35b).

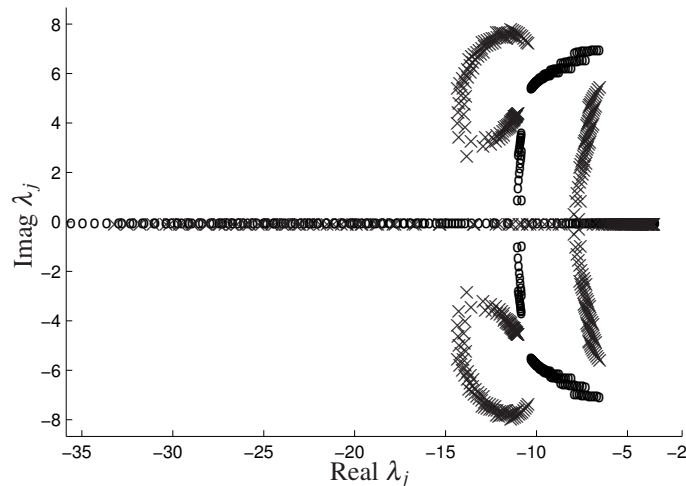


Figura 2.5: Localização dos pólos do sistema incerto, controlado com o ganho (2.37).

Da Figura 2.5, conclui-se que todos os pólos do sistema incerto controlado com o ganho (2.37), possuem parte real menor que  $-\gamma = -2$ , logo o ganho (2.37) garante a estabilidade do sistema. Além disso, considerando a mesma saída e condição inicial usadas anteriormente, a resposta dinâmica do sistema controlado, com parâmetros  $\hat{e}_{33} = 1$  e  $\hat{a}_{11} = 6$  nas matrizes incertas  $E$  e  $A$ , é vista na Figura 2.6.

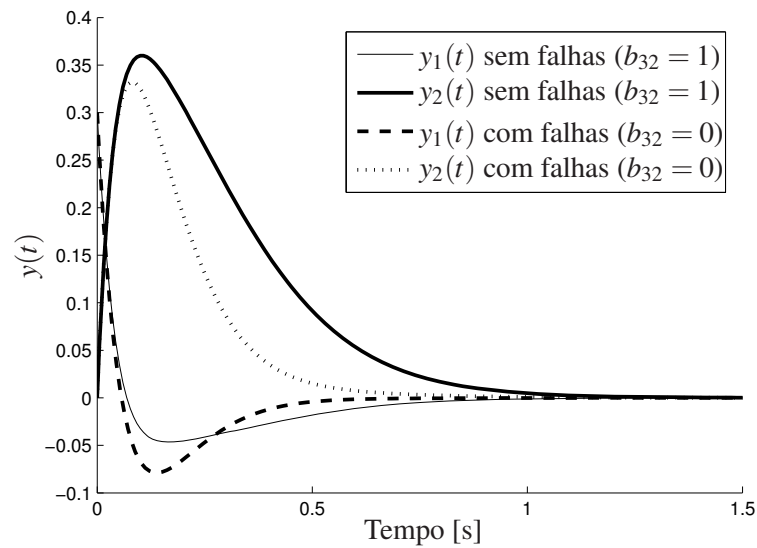


Figura 2.6: Respostas do sinal  $y(t)$  do sistema controlado com o ganho (2.37).

O tempo de duração do transitório na Figura 2.6 é aproximadamente 1,5s. Então, com (*linhas pontilhada e tracejada*) ou sem (*linhas sólidas*) falhas no atuador, o sistema controlado com o ganho (2.37) obteve uma rápida resposta transitória. Como o tempo de duração do transitório no sistema é muito pequeno, então a consideração de que o sistema iniciou o funcionamento com uma falha (*linhas pontilhada e tracejada* da Figura 2.6), pode ser feita sem afetar a análise do comportamento dinâmico.  $\square$

Uma das vantagens do projeto de controladores usando LMIs, é que podem-se obter condições para a estabilidade do sistema incerto (2.18), analisando apenas os vértices do politopo. A técnica apresentada nos Teoremas 2.2 e 2.4, é capaz de melhorar o desempenho do sistema, porém, existem problemas para os quais é necessário um melhor controle no transitório (porcentagem de overshoot, tempo de subida e tempo de estabelecimento) e nesse caso os resultados apresentados podem ser insuficientes. Essa abordagem é feita na próxima seção, onde um método para alocação regional de pólos é proposto.

## 2.3 Projeto do controlador: Condição de $\mathcal{D}$ -estabilidade

Já é conhecido da teoria de controle que o desempenho do sistema (2.1) está diretamente relacionado com a localização dos seus pólos (OGATA, 2003; CHEN, 1999). Por exemplo, a resposta de um sistema de segunda-ordem sem zeros e com pólos

$$\lambda = x \pm yj = -\zeta \omega_n \pm \omega_d j,$$

sendo,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  e  $0 < \zeta < 1$ , pode ser caracterizada em termos da frequência natural não amortecida  $\omega_n = |\lambda|$ , do coeficiente de amortecimento  $\zeta$  e da frequência amortecida  $\omega_d$  (OGATA, 2003; DORF; BISHOP, 2001). Restringindo  $\lambda$  a uma determinada região do semi-plano esquerdo complexo, pode-se especificar limites nesses parâmetros e garantir uma resposta transitória satisfatória. Considere as seguintes substituições de variáveis (CHILALI; GAHINET, 1996):  $r = \omega_n$ ,  $\zeta = \cos(\theta)$  e  $\gamma = \zeta \omega_n$ . Um conjunto de grande interesse na área de controle é o conjunto  $S(\gamma, r, \theta)$  de números complexos  $x + yj$  que satisfazem:

$$S(\gamma, r, \theta) = \begin{cases} x < -\gamma < 0, & (a) \\ |x + yj| < r, & (b) \\ \tan(\theta)x < -|y|, & (c) \end{cases}$$

a restrição (a) representa um semi-plano à esquerda da reta vertical que passa pelo ponto  $(-\gamma, 0)$ , com  $\gamma > 0$ ; (b) representa um disco centrado na origem de raio  $r$ ; (c) é uma restrição que limita o argumento  $\theta$  dos elementos do conjunto. A região  $S(\gamma, r, \theta)$  pode ser vista na Figura 2.7.

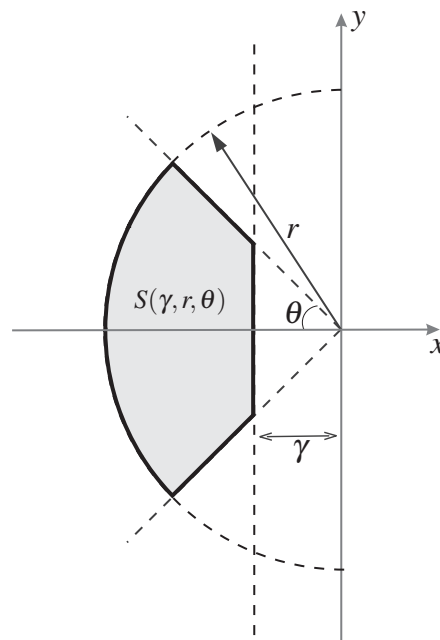


Figura 2.7: Região  $S(\gamma, r, \theta)$ .

Quando os pólos de um sistema de segunda ordem pertencem a região  $S(\gamma, r, \theta)$ , o sistema possui: taxa de decaimento  $\gamma$  mínima, coeficiente de amortecimento  $\zeta = \cos(\theta)$  mínimo, e frequência amortecida  $\omega_d = r \sin(\theta)$  máxima (CHILALI; GAHINET, 1996). Portanto, a região  $S(\gamma, r, \theta)$  estabelece limites para: o overshoot máximo, o tempo de subida e o tempo de estabelecimento (OGATA, 2003).

A técnica de alocação de pólos desenvolvida nessa seção usa o conceito de  $\mathcal{D}$ -estabilidade

(ou, estabilidade regional) (GUTMAN; JURY, 1981; HADDAD; BERNSTEIN, 1992; ARZELIER; BERNUSSOU; GARCIA, 1993; GARCIA; BERNUSSOU, 1995). Esse conceito permite que restrições de projeto tais como porcentagem de overshoot  $PO\%$ , tempo de subida  $t_s$  e tempo de estabelecimento  $t_e$  sejam adicionadas em LMIs (CHILALI; GAHINET, 1996; CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999).

**Definição 2.1.** *Seja  $\mathcal{D}$  uma região do semi-plano esquerdo complexo. Uma matriz  $A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é chamada  $\mathcal{D}$ -estável se todos os autovalores de  $A_N$  pertencem a  $\mathcal{D}$ .*

Em (CHILALI; GAHINET, 1996), foi demonstrado que regiões convexas no plano complexo podem ser representadas por LMIs. Os resultados são obtidos considerando extensões da Definição (2.1). Neste trabalho, exploramos os resultados que garante a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas lineares na região  $S(\gamma, r, \theta)$ . O principal resultado é mencionado abaixo.

**Lema 2.1.** *Considere um sistema linear autônomo*

$$\dot{x}(t) = A_N x(t). \quad (2.38)$$

O sistema (2.38) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável se e somente se, existe uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que:

$$A_N Q + Q A_N' + 2\gamma Q < 0, \quad (I)$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & A_N Q \\ Q A_N' & -rQ \end{bmatrix} < 0, \quad (II)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_N Q + Q A_N') & \text{cos}(\theta)(A_N Q - Q A_N') \\ \text{cos}(\theta)(Q A_N' - A_N Q) & \text{sen}(\theta)(A_N Q + Q A_N') \end{bmatrix} < 0, \quad (III)$$

$$Q > 0. \quad (IV)$$

**Prova:** Seja  $\lambda = x + yj$  um pólo do sistema (2.38) e  $\bar{\lambda}$  o conjugado complexo de  $\lambda$ . Substituindo  $Q$  por 1,  $A_N Q$  por  $\lambda$  e  $Q A_N'$  por  $\bar{\lambda}$  nas LMIs (I), (II) e (III), decorre que, (I) é equivalente à restrição (a), (II) é equivalente à restrição (b) e (III) é equivalente à restrição (c), do conjunto  $S(\gamma, r, \theta)$ . Portanto, quando as LMIs (I), (II), (III) e (IV) são factíveis, os pólos do sistema (2.38) pertencem à região  $S(\gamma, r, \theta)$ . ■

A LMI (III) pode ser descrita de forma equivalente usando propriedades do produto de Kronecker (ARZELIER; BERNUSSOU; GARCIA, 1993; CHILALI; GAHINET, 1996),

$$(W \otimes A_N Q) + (W \otimes A_N Q)' < 0, \quad (III.b)$$

$$\text{sendo } W = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) \\ -\text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}.$$

Foi demonstrado em (CHILALI; GAHINET, 1996), que a substituição das variáveis  $Q$  por  $1$ ,  $A_N Q$  por  $\lambda$  e  $QA'_N$  por  $\bar{\lambda}$ , representam uma relação de equivalência entre LMIs e regiões do plano complexo. Essas substituições são essenciais para a demonstração do próximo teorema, onde são propostas condições necessárias e suficientes para a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de (2.3) na região  $S(\gamma, r, \theta)$ .

**Teorema 2.5.** *Suponha que (2.1) satisfaz (2.4), então o sistema (2.3) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável se e somente, existe uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} AQE' + EQA' + BYA' + AY'B' & EQ + BY \\ QE' + Y'B' & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2}(A^{-1}(EQ + BY) + (EQ + BY)'(A^{-1})') & -Q \\ -Q & \frac{r}{2}(A^{-1}(EQ + BY) + (EQ + BY)'(A^{-1})') \end{bmatrix} < 0, \quad (2.40)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(AQE' + EQA' + BYA' + AY'B') & \text{cos}(\theta)[AQE' + AY'B' - (EQA' + BYA')] \\ \text{cos}(\theta)[EQA' + BYA' - (AQE' + AY'B')] & \text{sen}(\theta)(AQE' + EQA' + BYA' + AY'B') \end{bmatrix} < 0, \quad (2.41)$$

$$Q > 0. \quad (2.42)$$

Neste caso, um ganho para o controlador que resolve o Problema 1 pode ser obtido com:

$$K = YQ^{-1}. \quad (2.43)$$

**Prova:** Supondo factíveis as LMIs (2.39), (2.40), (2.41) e (2.42), a demonstração do teorema usa as seguintes substituições de variáveis:

$$Y = KQ, \quad (2.44)$$

$$A_E = (E + BK)^{-1}A. \quad (2.45)$$

A demonstração do teorema é realizada em três partes, uma para cada LMI.

1. Referente à LMI (2.39):

(*Suficiência*) Supondo (2.39) factível e usando a Propriedade 1.2 item 1 obtém-se

$$AQE' + EQA' + BYA' + AY'B' < 0. \quad (2.46)$$

Substituindo  $Y$  pela expressão (2.44) chega-se em

$$\begin{aligned} AQE' + EQA' + BKQA' + AQK'B' = \\ (E + BK)QA' + AQ(E + BK)' < 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

agora usando a Propriedade 1.1 em (2.47) conclui-se que as matrizes  $A'$  e  $(E + BK)$  são invertíveis. Note que essas são condições necessárias para a solução do problema.

Novamente, da LMI (2.39) e da Propriedade 1.2 item 2, decorre que

$$AQE' + EQA' + BYA' + AY'B' + (EQ + BY) [2\gamma Q^{-1}] (EQ + BY)' < 0,$$

substitua  $Y$  pela expressão (2.44)

$$\begin{aligned} A(EQ + BKQ)' + (EQ + BKQ)A' + (EQ + BKQ) [2\gamma Q^{-1}] (EQ + BKQ)' < 0 \\ \Leftrightarrow AQ(E + BK)' + (E + BK)QA' + (E + BK)Q [2\gamma Q^{-1}] Q(E + BK)' < 0 \\ \Leftrightarrow AQ(E + BK)' + (E + BK)QA' + (E + BK) [2\gamma Q] (E + BK)' < 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

De (2.47) tem-se que  $(E + BK)$  é invertível, então multiplique (2.48) à esquerda por  $(E + BK)^{-1}$  e à direita por  $[(E + BK)']^{-1}$  para obter

$$QA' [(E + BK)']^{-1} + (E + BK)^{-1}AQ + 2\gamma Q < 0. \quad (2.49)$$

Substituindo (2.45) em (2.49), pode-se concluir que

$$A_E Q + QA'_E + 2\gamma Q < 0. \quad (2.50)$$

Portanto, quando a LMI (2.39) é factível o sistema (2.3) satisfaz a desigualdade (I).

(*Necessidade*) Suponha que existe  $K$  tal que o sistema (2.3) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável, então (2.3) satisfaz a desigualdade (I), isto é,  $A_E Q + QA'_E + 2\gamma Q < 0$ . Como foi visto, se isso ocorre então a LMI (2.39) é factível.

## 2. Referente à LMI (2.40):

(*Suficiência*) Supondo (2.40) factível, substitua  $Y$  pela expressão (2.44) para obter

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{r}{2}(A^{-1}(EQ+BKQ)+(EQ+BKQ)'(A^{-1})') & -Q \\ -Q & \frac{r}{2}(A^{-1}(EQ+BKQ)+(EQ+BKQ)'(A^{-1})') \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \frac{r}{2}(A^{-1}(E+BK)Q+Q(E+BK)'(A^{-1})') & -Q \\ -Q & \frac{r}{2}(A^{-1}(E+BK)Q+Q(E+BK)'(A^{-1})') \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

De (2.47) tem-se que as matrizes  $(E + BK)$  e  $A'$  são invertíveis, logo a matriz  $A_E = (E + BK)^{-1}A$  é invertível, e  $A_E^{-1} = A^{-1}(E + BK)$ . Usando esse fato em (2.51) chega-se em

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2}(A_E^{-1}Q + Q(A'_E)^{-1}) & -Q \\ -Q & \frac{r}{2}(A_E^{-1}Q + Q(A'_E)^{-1}) \end{bmatrix} < 0, \quad (2.52)$$

Aplicando o mapeamento de variáveis (CHILALI; GAHINET, 1996; FARIA, 2005) na LMI (2.52), obtém-se a seguinte relação de equivalência:  $(Q \sim 1, \frac{1}{\lambda} \sim A_E^{-1}Q \text{ e } \frac{1}{\lambda} \sim Q(A'_E)^{-1})$ , sendo  $\lambda = x + yj$  não nulo, um autovalor da matriz  $A_E$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) & -1 \\ -1 & \frac{r}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left( \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) & -1 \\ -1 & \frac{r}{2} \left( \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) \end{bmatrix} < 0,$$

ou,

$$\begin{bmatrix} -\left( \frac{rx}{x^2 + y^2} \right) & 1 \\ 1 & -\left( \frac{rx}{x^2 + y^2} \right) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.53)$$

Observe que a matriz (2.53) é real, logo pode-se estudar a positividade da matriz usando a propriedade dos menores principais (CHEN, 1999; MEYER, 2000). Daí

$$(a) \frac{-rx}{x^2 + y^2} > 0 \Leftrightarrow -rx > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

e

$$(b) \frac{r^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow r^2 x^2 > (x^2 + y^2)^2.$$

Analisando o item (b) pode-se concluir que

i. Se  $r \geq |x|$ ,

$$\begin{aligned} r^2 r^2 \geq r^2 x^2 > (x^2 + y^2)^2 &\Leftrightarrow r^2 r^2 > (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow \\ (r^2)^2 > (x^2 + y^2)^2 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 < r^2. \end{aligned}$$

ii. Se  $r < |x|$ ,

$$\begin{aligned} x^2 x^2 > r^2 x^2 > (x^2 + y^2)^2 &\Leftrightarrow x^2 x^2 > (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow \\ (x^2)^2 > (x^2 + y^2)^2 &\Leftrightarrow x^2 > x^2 + y^2. \quad (\text{Absurdo!}) \end{aligned}$$

Logo pelos itens (a) e (b) a LMI (2.40) é factível somente se,

$$x < 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 < r^2. \quad (2.54)$$

Portanto quando a LMI (2.40) é factível, o sistema (2.3) satisfaz a desigualdade (II).

(Necessidade) Suponha que existe  $K$  tal que o sistema (2.3) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável, então os pólos do sistema satisfazem a desigualdade (2.54). Logo a LMI (2.40) é factível.



3. Referente à LMI (2.41):

Aplicando a definição do produto de Kronecker (1.1) em (2.41), segue que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(AQE' + EQA' + BYA' + AY'B') & \cos(\theta)[AQE' + AY'B' - (EQA' + BYA')] \\ \cos(\theta)[EQA' + BYA' - (AQE' + AY'B')] & \text{sen}(\theta)(AQE' + EQA' + BYA' + AY'B') \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(AQE' + AY'B') & \cos(\theta)(AQE' + AY'B') \\ -\cos(\theta)(AQE' + AY'B') & \text{sen}(\theta)(AQE' + AY'B') \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(EQA' + BYA') & -\cos(\theta)(EQA' + BYA') \\ \cos(\theta)(EQA' + BYA') & \text{sen}(\theta)(EQA' + BYA') \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \\ & \left\{ \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \otimes (AQE' + AY'B') \right\} \\ & + \left\{ \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \otimes (EQA' + BYA') \right\} < 0 \Leftrightarrow \\ & W \otimes (AQE' + AY'B') + W' \otimes (EQA' + BYA') < 0 \Leftrightarrow \\ & W \otimes [A(QE' + Y'B')] + W' \otimes [(EQ + BY)A'] < 0, \end{aligned}$$

sendo  $W = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}$ . Substituindo  $Y$  por (2.44) chega-se em

$$\begin{aligned} W \otimes [A(QE' + QK'B')] + W' \otimes [(EQ + BKQ)A'] < 0 \Leftrightarrow \\ W \otimes [AQ(E + BK)'] + W' \otimes [(E + BK)QA'] < 0, \end{aligned}$$

multiplicando à esquerda por  $(I \otimes (E + BK)^{-1})$  e à direita por  $(I \otimes [(E + BK)']^{-1})$  tem-se que

$$\begin{aligned} & \{I \otimes (E + BK)^{-1}\} (W \otimes [AQ(E + BK)']) \{I \otimes [(E + BK)']^{-1}\} \\ & + \{I \otimes (E + BK)^{-1}\} (W' \otimes [(E + BK)QA']) \{I \otimes [(E + BK)']^{-1}\} < 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Aplicando a Propriedade 4 de *KRON* na expressão (2.55) chega-se em

$$W \otimes [(E + BK)^{-1}AQ] + W' \otimes [(E + BK)^{-1}AQ]' < 0. \quad (2.56)$$

Substituindo (2.45) obtém-se

$$W \otimes (A_E Q) + W' \otimes (Q_A'_E) < 0. \quad (2.57)$$

Aplicando a Propriedade 5 de *KRON* na expressão (2.57) conclui-se que

$$(W \otimes A_E Q) + (W \otimes A_E Q)' < 0. \quad (2.58)$$

Assim, se a LMI (2.41) é factível o sistema (2.3) satisfaz a desigualdade (III.b), e vice-versa.

Portanto, as LMIs (2.39), (2.40), (2.41) e (2.42) são factíveis se e somente se, o sistema (2.3) satisfaz as desigualdades (I), (II), (III) e (IV). Daí, pelo Lema 2.1 o sistema (2.3) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável e uma solução para o Problema 1 pode ser dada por (2.43). ■

Os resultados do Teorema (2.5) permitem melhorar o transitório do sistema (2.3) e podem ser estendidos para sistemas incertos ou sujeitos à falhas estruturais.

### 2.3.1 $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas descritores incertos

O próximo teorema encontra condições suficientes para a  $\mathcal{D}$ -estabilidade do sistema descritor incerto (2.18).

**Teorema 2.6.** *Dado as constantes positivas  $\gamma$ ,  $r$  e  $\theta$ . Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , satisfazendo as LMIs:*

$$\begin{bmatrix} A_j Q E_i' + E_i Q A_j' + B_k Y A_j' + A_j Y' B_k' & E_i Q + B_k Y \\ Q E_i' + Y' B_k' & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.59)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left( (E_i Q + B_k Y) A_j' + A_j (E_i Q + B_k Y)' \right) & -A_j Q A_i' \\ -A_i Q A_j' & \frac{r}{2} \left( (E_i Q + B_k Y) A_j' + A_j (E_i Q + B_k Y)' \right) \end{bmatrix} < 0, \quad (2.60)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta) (A_j Q E_i' + E_i Q A_j' + B_k Y A_j' + A_j Y' B_k') & \cos(\theta) [A_j Q E_i' + A_j Y' B_k' - (E_i Q A_j' + B_k Y A_j')] \\ \cos(\theta) [E_i Q A_j' + B_k Y A_j' - (A_j Q E_i' + A_j Y' B_k')] & \sin(\theta) (A_j Q E_i' + E_i Q A_j' + B_k Y A_j' + A_j Y' B_k') \end{bmatrix} < 0, \quad (2.61)$$

$$Q > 0, \quad (2.62)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, r_e$ ,  $j = 1, 2, \dots, r_a$  e  $k = 1, 2, \dots, r_b$ . Então, o sistema (2.3), substituindo (2.1) por (2.18), é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável e um ganho que resolve o Problema 1 pode ser obtido com:

$$K = Y Q^{-1}. \quad (2.63)$$

**Prova:** Por facilidade de notação considere as seguintes substituições de variáveis

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= \sum_{i=1}^{r_e} e_i E_i, \\ \hat{\mathbf{A}} &= \sum_{j=1}^{r_a} a_j A_j, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \sum_{k=1}^{r_b} b_k B_k, \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Se (2.59), (2.60), (2.61) e (2.62) são factíveis, então de (2.19) e (2.64) segue que

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{E}}' + \hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Y}'\hat{\mathbf{B}}' & \hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y} \\ \hat{\mathbf{E}}'\mathbf{Q} + \mathbf{Y}'\hat{\mathbf{B}}' & -\frac{\mathbf{Q}}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} ((\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y})\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y})') & -\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}' \\ -\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}' & \frac{r}{2} ((\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y})\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y})') \end{bmatrix} < 0, \quad (2.66)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{E}}' + \hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Y}'\hat{\mathbf{B}}') & \text{cos}(\theta)[\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{E}}' + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Y}'\hat{\mathbf{B}}' - (\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{A}}')] \\ \text{cos}(\theta)[\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{A}}' - (\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{E}}' + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Y}'\hat{\mathbf{B}}')] & \text{sen}(\theta)(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{E}}' + \hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Y}\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Y}'\hat{\mathbf{B}}') \end{bmatrix} < 0. \quad (2.67)$$

Note que (2.65) e (2.67) são equivalentes às LMIs (2.39) e (2.41), substituindo as matrizes  $(E, A, B)$  por  $(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$  respectivamente. Observe também que multiplicando (2.40) à esquerda por  $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}$ , obtém-se uma expressão equivalente à (2.66) substituindo  $(E, A, B)$  por  $(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$ . Portanto, a demonstração desse teorema segue diretamente das partes de suficiência do Teorema 2.5. Assim, quando (2.59), (2.60), (2.61) e (2.62) são factíveis, o sistema (2.18) realimentado com e entrada de controle (2.2) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável e uma solução para o problema pode ser dada por (2.63). ■

A eficiência dos Teoremas 2.5 e 2.6, pode ser verificada na solução dos Exemplos 2.3 e 2.4.

### Exemplo 2.3: Sistema determinístico

Considere o sistema descritor do Exemplo 2.1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Usando o pacote “LMI control toolbox” do MATLAB (GAHINET et al., 1995) para resolver as LMIs (2.39), (2.40), (2.41) e (2.42) do Teorema 2.5, com os parâmetros:  $(\gamma = 2, r = 5, \theta = 30^\circ)$ , foi obtida a seguinte solução factível:

$$Q = \begin{bmatrix} 1099,6 & -290,23 \\ -290,23 & 117,88 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 70,756 & -44,74 \end{bmatrix}.$$

O ganho  $K$  da realimentação da derivada dos estados foi calculado usando (2.43):

$$K = \begin{bmatrix} -0,10232 & -0,63146 \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Como discutido anteriormente, a solução  $K$  obtida garante que a matriz  $(E + BK)$  é invertível ( $\det(E + BK) = 0,10232 \neq 0$ ). São exibidos na Tabela 2.1, os módulos e argumentos dos pólos do sistema (2.3) obtido com (2.68).

Tabela 2.1: Pólos do sistema controlado com o ganho (2.68)

Pólos do sistema controlado	Módulo	Argumento ( $150^\circ - 210^\circ$ )
$\lambda_1 = -3,0856 + 0,50182j$	3,1262	$170,76^\circ$
$\lambda_2 = -3,0856 - 0,50182j$	3,1262	$189,24^\circ$

Pela Tabela 2.1, os pólos do sistema controlado têm parte real menor que  $-\gamma = -2$ , módulo menor que  $r = 5$  e os argumentos dos pólos pertencem ao intervalo  $[150^\circ, 210^\circ]$ , definido pelo ângulo  $\theta = 30^\circ$ . Portanto o sistema é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável considerando  $(\gamma = 2, r = 5, \theta = 30^\circ)$ . Supondo que a saída do sistema é  $y(t) = x_1$  e a condição inicial é  $x(0) = [1 \ 0]'$ . A resposta dinâmica do sistema controlado (2.3) obtido com (2.68) é exibida na Figura 2.8.

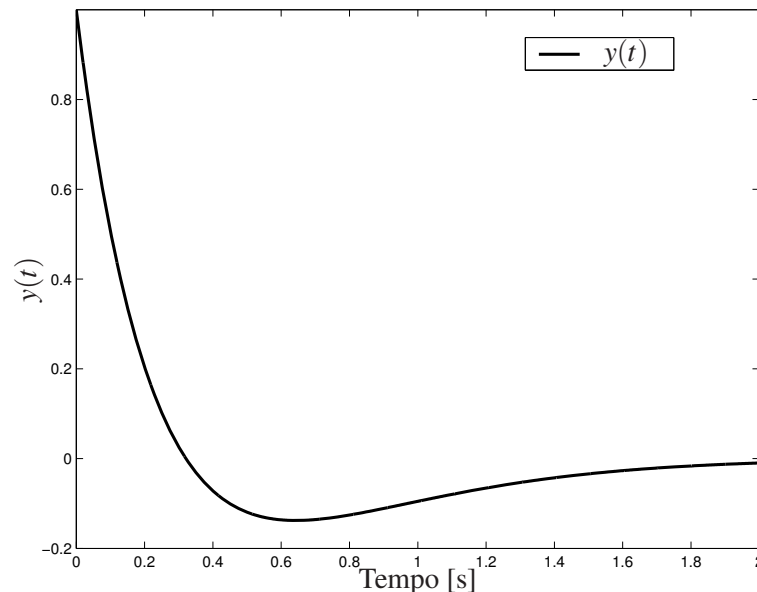


Figura 2.8: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema  $S(2, 5, 30^\circ)$ -estável.

Note que o tempo de duração do transitório na Figura 2.2 é um pouco menor que o da Figura 2.8. De onde se conclui que a solução obtida pelo Teorema 2.2 é melhor para este caso que a do Teorema 2.5 com parâmetros ( $\gamma = 2$ ,  $r = 5$ ,  $\theta = 30^\circ$ ). Agora vamos mostrar como esses parâmetros influenciam no transitório do sistema, para isso vamos mudar apenas o parâmetro  $r = 5$ , para  $r = 30$ . O novo ganho do controlador obtido com o Teorema 2.5 considerando ( $\gamma = 2$ ,  $r = 30$ ,  $\theta = 30^\circ$ ), foi:

$$K = \begin{bmatrix} -0,026973 & -0,47937 \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Os pólos do sistema (2.3) obtido com (2.69) podem ser vistos na Tabela 2.2 e a resposta dinâmica do sistema na Figura 2.9.

Tabela 2.2: Pólos do sistema controlado com o ganho (2.69)

Pólos do sistema controlado	Módulo	Argumento ( $150^\circ - 210^\circ$ )
$\lambda_1 = -15,358$	15,358	$180^\circ$
$\lambda_2 = -2,414$	2,414	$180^\circ$

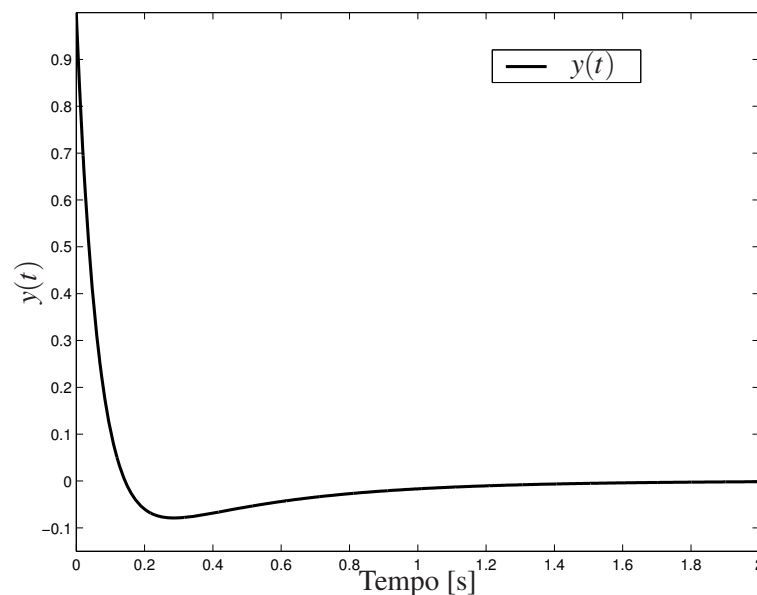


Figura 2.9: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema  $S(2, 30, 30^\circ)$ -estável.

Novamente pode-se verificar na Tabela 2.2 que os pólos pertencem a região  $S(2, 30, 30^\circ)$ , e na Figura 2.9 observa-se que a simples alteração de  $r$  já foi o suficiente para melhorar o desempenho do sistema e deixá-lo mais rápido que o da Figura 2.2. Também poderíamos ter diminuído o tempo de estabelecimento do sistema simplesmente aumentando o valor de  $\gamma$ , mas nesse caso perderíamos a referência de comparação com a solução do Teorema 2.2. As soluções dos Teoremas 2.1 e 2.2 não asseguram que os pólos  $\lambda = x + yj$  do sistema (2.3)

são limitados. Logo, pode ocorrer que algum pólo do sistema tenha parte real muito negativa ( $x \rightarrow -\infty$ ). Essa situação é indesejável quando se pretende implementar a versão discreta do controlador. Já a solução do Teorema 2.5, garante que os pólos do sistema controlado estão limitados dentro da região  $S(\gamma, r, \theta)$ , previamente estabelecida, evitando que eles assumam altos valores em módulo (ou seja, garante que  $|\lambda| < r$ ). Essa propriedade evita que o ganho do controlador tenha valores muito elevados, facilitando a sua implementação em problemas práticos.  $\square$

### Exemplo 2.4: Sistema incerto

Considere ( $\gamma = 2$ ,  $r = 15$ ,  $\theta = 60^\circ$ ). Resolvendo o sistema incerto do Exemplo 2.2, com o Teorema 2.6 obtêm-se as seguintes soluções:

$$Q = \begin{bmatrix} 3,1066 \times 10^{-4} & -9,8674 \times 10^{-5} & -3,396 \times 10^{-4} & 4,4138 \times 10^{-4} \\ -9,8674 \times 10^{-5} & 3,1252 \times 10^{-4} & -3,5511 \times 10^{-5} & -1,2525 \times 10^{-3} \\ -3,396 \times 10^{-4} & -3,5511 \times 10^{-5} & 2,6481 \times 10^{-3} & 8,6715 \times 10^{-5} \\ 4,4138 \times 10^{-4} & -1,2525 \times 10^{-3} & 8,6715 \times 10^{-5} & 7,5456 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 4,2215 \times 10^{-4} & 1,7612 \times 10^{-4} & -4,7624 \times 10^{-3} & -2,6872 \times 10^{-4} \\ 1,4844 \times 10^{-4} & -5,2364 \times 10^{-4} & 8,7782 \times 10^{-5} & 1,3984 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

O ganho (2.63) obtido foi:

$$K = \begin{bmatrix} -0,67399 & 0,71401 & -1,88 & 0,14394 \\ -0,010579 & -2,7886 & 0,0034671 & -0,27699 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Modelando o sistema incerto na forma (2.35), e verificando o comportamento dinâmico com o mesmo processo iterativo do Exemplo 2.2, nos parâmetros  $e_i$  e  $a_j$ . A localização dos pólos dos sistemas controlados (2.35a) e (2.35b) com o ganho (2.70), podem ser vistas nas Figuras 2.10 e 2.11.

A Figura 2.10 mostra que todos os pólos do sistema controlado pertencem a região  $S(\gamma = 2, r = 15, \theta = 60^\circ)$ . Como a visualização da Figura 2.10 é prejudicada, devido ao acúmulo de pólos em uma pequena região do conjunto  $S(2, 15, 60^\circ)$ , então realizamos uma ampliação visual (zoom) na região de aglomeração.

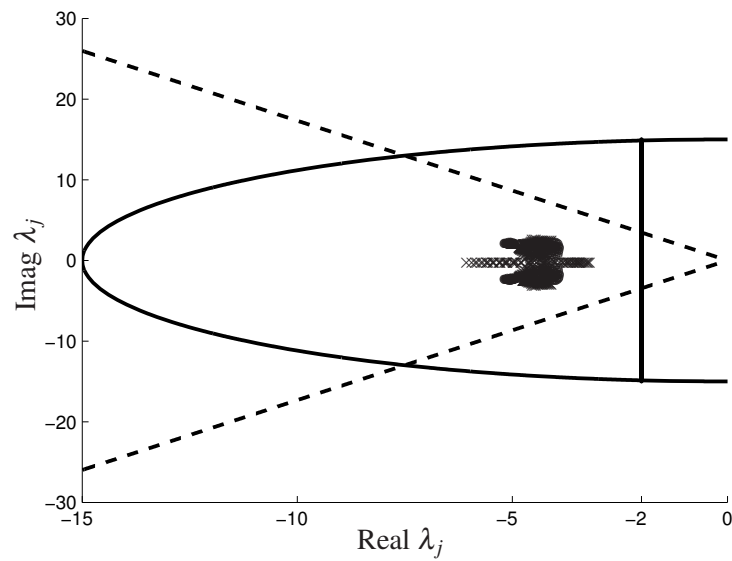


Figura 2.10: Localização dos pólos do sistema incerto controlado com o ganho (2.70), na região  $S(2, 15, 60^\circ)$ .

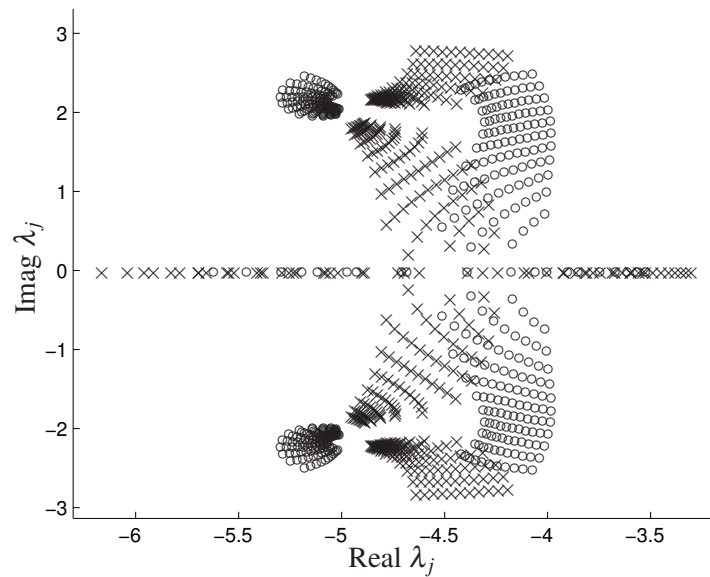


Figura 2.11: Ampliação visual na região de alocação dos pólos.

A região onde os pólos do sistema controlado ficaram alocados pode ser vista com mais detalhes na Figura 2.11. Nessa figura, os pontos marcados com o símbolo ‘ $\times$ ’ representam os pólos do sistema sem falhas (equação (2.35a)) e os pontos marcados com ‘ $\circ$ ’ representam os pólos do sistema com falhas (equação (2.35b)). Pela Figura 2.11, verifica-se que a ocorrência de falhas tem pouca influência na localização dos pólos, e conseqüentemente, pouca influência no comportamento dinâmico do sistema.

De forma equivalente ao Exemplo 2.2, suponha que a saída do sistema é dada por  $y(t) = [x_1(t) \ x_3(t)]'$ . Para a condição inicial  $x(0) = [0,3 \ 0,1 \ 0 \ 0]'$ , a resposta dinâmica do sistema com parâmetros  $\hat{e}_{33} = 1$  e  $\hat{a}_{11} = 6$  nas matrizes incertas  $E$  e  $A$ , é vista na Figura 2.4. Note que com (*linhas pontilhada e tracejada*) ou sem (*linhas sólidas*) falhas no atuador o sistema controlado tem uma resposta transitória rápida.

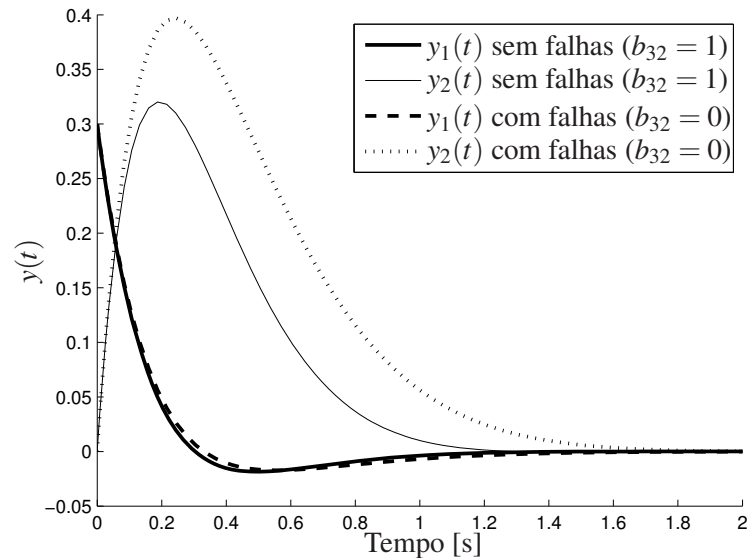


Figura 2.12: Respostas do sinal  $y(t)$  do sistema controlado com o ganho (2.70).

Como o tempo de duração do transitório no sistema é pequeno (aproximadamente 1,8s), então pode-se considerar que o sistema iniciou o funcionamento com uma falha (*linhas pontilhada e tracejada* da Figura 2.12), sem afetar a análise do comportamento dinâmico.

Neste exemplo o desempenho dos sistemas obtidos com os ganhos (2.37) (Teorema 2.4) e (2.70) (Teorema 2.6) não têm diferenças significativas. Mesmo alterando o parâmetro  $\gamma$ , não foi possível diminuir a duração do transitório do sistema controlado.  $\square$

Neste capítulo foram propostas condições baseadas em LMIs para a estabilidade e a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas descritores, usando realimentação derivativa. Os resultados podem ser usados para resolver sistemas determinísticos ou incertos. A eficiência das técnicas foi ilustrada na solução de exemplos numéricos.

No próximo capítulo é abordado o projeto de controladores para sistemas fuzzy usando realimentação derivativa.



### ***3 Realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy Takagi-Sugeno***

A introdução desse capítulo é inspirada nos trabalhos (AVELLAR, 2001) e (MACHADO, 2003).

Devido a sua complexidade, sistemas não-lineares são difíceis de serem analisados e a técnica mais comum para a obtenção de um modelo de projeto para plantas não-lineares é a linearização do modelo da planta em um ponto de operação. Com este método o modelo de projeto é em geral, um sistema linear invariante no tempo e o projeto do controlador é mais simples. Entretanto, este modelo de projeto descreve bem a dinâmica da planta somente em uma vizinhança do ponto de operação. Assim, nos casos onde o sistema pode operar em regiões distantes do ponto de operação, este modelo de projeto não é adequado. Neste caso deve-se adotar um modelo de projeto que considere a dinâmica da planta em regiões distantes do ponto de operação. Uma maneira de resolver esse problema é representar a planta não-linear por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985; SUGENO; KANG, 1988). A idéia básica do projeto consiste na descrição de um sistema não-linear como uma combinação fuzzy de sistemas lineares (modelos locais), que descrevem o comportamento deste sistema em diferentes pontos do espaço de estados. Dependendo da escolha dos modelos locais e dos parâmetros da combinação fuzzy (conhecidos como, funções de pertinência) o modelo fuzzy pode fornecer uma representação aproximada (TEIXEIRA; ŽAK, 1999) ou exata (TANIGUCHI et al., 2001) do sistema não-linear. Uma vez definido o modelo fuzzy, o projeto do controlador normalmente é feito para cada um dos modelos locais e o controlador global, que é não-linear em geral, é obtido através da combinação fuzzy dos controladores locais.

Nos últimos anos, houve um crescente interesse em pesquisas e aplicações de sistemas fuzzy. A análise de estabilidade e o projeto de controladores é um dos conceitos mais importantes em sistemas fuzzy e normalmente é feito usando LMIs (TANAKA; SUGENO, 1992; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; KIM; LEE, 2000;

TANIGUCHI; TANAKA; WANG, 2000; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2001; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; PIETROBOM, 2001; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; TEIXEIRA et al., 2005, 2006b; FANG et al., 2006; TANAKA; OHTAKE; WANG, 2007). Esses trabalhos consideram a realimentação de estados ou da saída, e neste trabalho é considerada a realimentação da derivada dos estados.

Na literatura especializada é possível encontrar vários artigos sobre o uso da realimentação da derivada dos estados (KWAK; WASHINGTON; YEDAVALLI, 2002a; ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004; FARIA, 2005; TEIXEIRA et al., 2006a; CARDIM et al., 2007b; ASSUNÇÃO et al., 2007e; FARIA et al., 2009c). Porém esses resultados só podem ser aplicados em sistemas lineares.

Neste capítulo são propostas condições suficientes baseadas em LMIs para a estabilidade e a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas fuzzy T-S usando a realimentação da derivada dos estados. A princípio é desenvolvido um projeto considerando um controlador fixo  $u(t) = -K\dot{x}(t)$ . Como esse resultado é restritivo, posteriormente é realizado o projeto de um controlador fuzzy  $u(t) = -K(\alpha)\dot{x}(t)$ . Controladores fuzzy também têm sido usados na obtenção de condições necessárias e suficientes para a estabilidade quadrática de sistemas fuzzy T-S (MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2007; SALA; ARIÑO, 2007). A partir dos resultados apresentados em (OLIVEIRA; PERES, 2005), neste capítulo é proposto um método baseado em sequências de LMIs que fornece condições mais relaxadas para a estabilidade quadrática de sistemas fuzzy T-S, usando realimentação derivativa. Em (MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2007) os autores mostram que se as LMIs são factíveis, então a sequência é convergente e tende para as condições de necessidade da estabilidade quadrática do sistema.

Todas as metodologias propostas neste capítulo podem ser usadas para resolver sistemas fuzzy T-S sujeitos a falhas estruturais.

### 3.1 Realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy Takagi-Sugeno

Considere um sistema não-linear da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(x(t))x(t) + G(x(t))u(t), \\ y(t) &= H(x(t)).\end{aligned}\tag{3.1}$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $F(x(t))$ ,  $G(x(t))$  e  $H(x(t))$  funções não-lineares,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .

O sistema (3.1) pode ser representado por modelos fuzzy T-S da seguinte maneira (TA-

KAGI; SUGENO, 1985; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998):

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (3.2)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i(z(t))C_i x(t) = C(\alpha)x(t), \quad (3.3)$$

sendo  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  um sinal disponível denominado vetor premissa,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  a saída do sistema, e as matrizes  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  são os parâmetros dos modelos locais. As variáveis  $\alpha_i(z(t))$  satisfazem a relação:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i(z(t)) &= 1, \quad \alpha_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r_a, \\ \alpha(z(t)) &= [\alpha_1(z(t)) \quad \alpha_2(z(t)) \quad \dots \quad \alpha_{r_a}(z(t))] \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

**Observação 3.1.** Normalmente, os termos não-lineares do sistema (3.1) não dependem de todos os estados, e para obter uma representação exata do sistema com modelos fuzzy T-S, é necessário que o valor dos termos não-lineares do sistema estejam disponíveis (TANIGUCHI et al., 2001). Dessa forma, uma escolha natural para a obtenção de um modelo fuzzy T-S para sistemas não-lineares, é adotar  $z(t) = \tilde{x}(t)$ , sendo  $\tilde{x}(t)$  os estados presentes nas não-lineares do sistema (3.1). Esta escolha é feita em todos os desenvolvimentos teóricos deste trabalho. Infelizmente, ainda não é do conhecimento do autor uma maneira diferente de se obter  $z(t)$ , e durante o desenvolvimento da teoria é verificado que essa escolha representa o maior obstáculo para a aplicação da realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy.

Apenas por facilidade de notação, deste ponto em diante o termo  $\alpha_i(z(t))$  será representado por  $\alpha_i$ .

O projeto de controladores para o sistema (3.2) usando realimentação da derivada dos estados pode ser formulado como:

*Problema 2:* Encontre uma matriz constante  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que:

1. A matriz  $(I + B(\alpha)K)$ , seja invertível  $\forall \alpha \in (3.4)$ ;
2. O sistema em malha fechada, obtido com a realimentação da derivada dos estados

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad (3.5)$$

seja globalmente assintoticamente estável. Assim o sistema em malha fechada, dado por (3.2) e (3.5) pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K\dot{x}(t) \Leftrightarrow \\
(I + B(\alpha)K)\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) \Leftrightarrow \\
\dot{x}(t) &= (I + B(\alpha)K)^{-1}A(\alpha)x(t). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

**Observação 3.2.** Observe que a implementação da lei de controle (3.5) não depende do vetor premissa  $z(t)$  e nem do vetor  $\alpha(z(t))$  definido em (3.4).

Essa hipótese pode ser útil no controle de sistemas mecânicos que usam acelerômetros como sensores. Neste caso é possível estimar as velocidades com boa precisão (considerando que os estados são: o deslocamento e a velocidade, então, têm-se que o vetor  $\dot{x}(t)$  é acessível), mas não é possível obter os deslocamentos (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). Vale salientar que,  $z(t)$  geralmente depende dos deslocamentos.

## 3.2 Projeto do controlador: Condição de estabilidade

Nesta seção são propostas condições suficientes para a solução do Problema 2.

**Teorema 3.1.** Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , satisfazendo as seguintes LMIs:

$$Q > 0, \tag{3.7}$$

$$A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j' < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r_a. \tag{3.8}$$

Então, o sistema (3.6) é estabilizável, e um ganho que resolve o Problema 2 pode ser obtido com:

$$K = Y Q^{-1}. \tag{3.9}$$

**Prova:** Substituindo  $Q = P^{-1}$  e  $Y = K P^{-1}$  em (3.8) obtém-se

$$A_i P^{-1} (I + B_j K)' + (I + B_j K) P^{-1} A_i' < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r_a. \tag{3.10}$$

De (3.4) e (3.10) segue que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j (A_i P^{-1} (I + B_j K)' + (I + B_j K) P^{-1} A_i') \\
&= \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i P^{-1} \left( I + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j K \right)' + \left( I + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j K \right) P^{-1} \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i' < 0.
\end{aligned}$$

Usando (3.2) chega se em

$$A(\alpha)P^{-1}(I+B(\alpha)K)' + (I+B(\alpha)K)P^{-1}A(\alpha)' < 0. \quad (3.11)$$

Aplicando a Propriedade 1.1 em (3.11) conclui-se que as matrizes  $(I+B(\alpha)K)$  e  $A(\alpha)'$  são invertíveis. Essa é uma condição obrigatória para a solução do Problema 2. Logo o sistema em malha fechada dado por (3.2) e (3.5) pode ser descrito pela equação (3.6).

Considerando isso e multiplicando (3.11) à esquerda por  $P(I+B(\alpha)K)^{-1}$  e à direita por  $[(I+B(\alpha)K)']^{-1}P$  tem-se que

$$P(I+B(\alpha)K)^{-1}A(\alpha) + A(\alpha)'[(I+B(\alpha)K)']^{-1}P < 0. \quad (3.12)$$

Quando (3.7) e (3.8) são factíveis, segue de (3.12) que existe uma matriz simétrica  $P > 0$ , satisfazendo as condições de Lyapunov (BOYD et al., 1994), para o sistema (3.6). Portanto, o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (3.6) é globalmente assintoticamente estável e uma solução para o Problema 2 pode ser dada por (3.9). ■

**Observação 3.3.** *Se (3.7) e (3.8) são factíveis, então da prova do Teorema 3.1, segue que (3.10) também é factível. Agora, aplicando a Propriedade 1.1 em (3.10), conclui-se que as matrizes  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r_\alpha$ , são invertíveis. E, da análise apresentada depois de (3.11), tem-se que a matriz dependente de parâmetros  $A(\alpha)$ , definida em (3.2), também é invertível  $\forall \alpha \in (3.4)$ . Essa é uma condição necessária para a estabilidade do sistema (3.6). Logo, o Teorema 3.1 fornece uma condição suficiente para a invertibilidade da matriz dependente de parâmetros  $A(\alpha)$ , considerando apenas os vértices do politopo.*

Normalmente, a solução encontrada pelo Teorema 3.1 é insuficiente para se obter um desempenho adequado. Então, na próxima seção são propostos resultados para melhoria do desempenho de sistemas fuzzy T-S considerando a entrada de controle (3.5).

### 3.3 Projeto do controlador: Condição de estabilidade com restrições no desempenho

O desempenho do sistema (3.6) está diretamente relacionado com a localização dos seus autovalores no semi-plano esquerdo complexo. No Capítulo 2, Seção 2.3, foram exibidos alguns resultados gerais sobre a  $\mathcal{D}$ -estabilidade (veja Definição 2.1) de sistemas usando LMIs. Agora o Lema 2.1 irá ser usado para garantir o desempenho de sistemas fuzzy. A idéia base

é restringir todos os autovalores dos modelos locais em uma região  $S(\gamma, r, \theta)$  (veja Figura 2.7) previamente estabelecida. Se os modelos locais satisfazem as restrições de desempenho, então os métodos de modelagem fuzzy propostos em (TEIXEIRA; ŽAK, 1999; TANIGUCHI et al., 2001) demonstram que o sistema não-linear (3.1) em malha fechada, tem desempenho aproximadamente (ou exatamente) igual ao obtido com a combinação fuzzy dos modelos locais. Essa abordagem foi feita em (HONG; NAM, 2003), onde os autores usam uma extensão da LMI (II) para melhorar o desempenho de um levitador magnético. E também em (HAN et al., 2000) no projeto de um controlador com restrição na norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Em ambos os trabalhos os autores consideram a realimentação de estados, enquanto que nesta seção, considera-se a realimentação da derivada dos estados (3.5). Estendendo o resultado do Lema 2.1, o próximo teorema encontra condições suficientes para que os autovalores do sistema (3.6) pertençam à região  $S(\gamma, r, \theta)$ .

**Teorema 3.2.** *Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , satisfazendo as LMIs:*

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j' & Q + B_j Y \\ Q + Y' B_j' & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} ((Q + B_j Y) A_i' + A_i (Q + B_j Y)') & -A_i Q A_k' \\ -A_k Q A_i' & \frac{r}{2} ((Q + B_j Y) A_i' + A_i (Q + B_j Y)') \end{bmatrix} < 0, \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j') & \cos(\theta)[A_i Q + A_i Y' B_j' - (Q A_i' + B_j Y A_i')] \\ \cos(\theta)[Q A_i' + B_j Y A_i' - (A_i Q + A_i Y' B_j')] & \sin(\theta)(A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j') \end{bmatrix} < 0, \quad (3.15)$$

$$Q > 0, \quad (3.16)$$

sendo  $i, j, k = 1, \dots, r_a$ . Então, o sistema (3.6) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável, e um ganho que resolve o Problema 2 pode ser obtido com:

$$K = Y Q^{-1}. \quad (3.17)$$

**Prova:** A seguinte substituição de variáveis é usada durante a demonstração

$$A_N = (I + B(\alpha)K)^{-1} A(\alpha). \quad (3.18)$$

A demonstração do teorema é realizada em três partes, uma para cada LMI.

1. Referente à LMI (3.13):

Aplicando a Propriedade 1.2, item 1, em (3.13) obtém-se

$$A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j' < 0. \quad (3.19)$$

De (3.4) segue que  $\sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i = 1$ , logo

$$\sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i Q + Q \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i' + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j Y \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i' + \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i Y' \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j' < 0,$$

substituindo  $Y$  pela expressão  $Y = KQ$  na LMI acima, de (3.2) tem-se que

$$\begin{aligned} A(\alpha)Q + QA(\alpha)' + B(\alpha)KQA(\alpha)' + A(\alpha)QK'B(\alpha)' = \\ A(\alpha)Q(I + B(\alpha)K)' + (I + B(\alpha)K)QA(\alpha)' < 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

agora usando a Propriedade 1.1 em (3.20) conclui-se que as matrizes  $(I + B(\alpha)K)$  e  $A(\alpha)'$  são invertíveis.

Da Propriedade 1.2, item 2, e de (3.13) segue que

$$A_i Q + QA_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j' + (Q + B_j Y) [2\gamma Q^{-1}] (Q + B_j Y)' < 0.$$

Repetindo as mesmas operações anteriores obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i Q + Q \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i' + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j Y \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i' + \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i Y' \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j' \\ + \left( Q + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j Y \right) [2\gamma Q^{-1}] \left( Q + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j Y \right)' = \\ A(\alpha)Q + QA(\alpha)' + B(\alpha)YA(\alpha)' + A(\alpha)Y'B(\alpha)' \\ + (Q + B(\alpha)Y) [2\gamma Q^{-1}] (Q + B(\alpha)Y)' = \\ A(\alpha)Q(I + B(\alpha)K)' + (I + B(\alpha)K)QA(\alpha)' + (I + B(\alpha)K) [2\gamma Q] (I + B(\alpha)K)' < 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Multiplicando (3.21) à esquerda por  $(I + B(\alpha)K)^{-1}$  e à direita por  $[(I + B(\alpha)K)']^{-1}$  chega-se em

$$(I + B(\alpha)K)^{-1} A(\alpha)Q + QA(\alpha)' [(I + B(\alpha)K)^{-1}]' + 2\gamma Q < 0. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.18) em (3.22) tem-se que

$$A_N Q + QA_N' + 2\gamma Q < 0.$$

Portanto, quando a LMI (3.13) é factível, o sistema (3.6) satisfaz (I).

## 2. Referente à LMI (3.14):

Usando (3.4) em (3.14) chega-se em

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{r}{2} \left[ \left( Q + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j Y \right) \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i' + \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i \left( Q + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j Y \right)' \right] \\ - \left( \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i \right) Q \left( \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_k A_k' \right) \\ - \left( \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i \right) Q \left( \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_k A_k' \right) \\ \frac{r}{2} \left[ \left( Q + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j Y \right) \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i' + \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i \left( Q + \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j Y \right)' \right] \end{array} \right] < 0, \quad (3.23)$$

substituindo  $Y = KQ$  e considerando (3.2) segue que

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{r}{2} \left( (Q + B(\alpha)Y)A(\alpha)' + A(\alpha)(Q + B(\alpha)Y)' \right) \\ - A(\alpha)QA(\alpha)' \\ - A(\alpha)QA(\alpha)' \\ \frac{r}{2} \left( (Q + B(\alpha)Y)A(\alpha)' + A(\alpha)(Q + B(\alpha)Y)' \right) \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{r}{2} \left( (I + B(\alpha)K)QA(\alpha)' + A(\alpha)Q(I + B(\alpha)K)' \right) \\ - A(\alpha)QA(\alpha)' \\ - A(\alpha)QA(\alpha)' \\ \frac{r}{2} \left( (I + B(\alpha)K)QA(\alpha)' + A(\alpha)Q(I + B(\alpha)K)' \right) \end{array} \right] < 0. \quad (3.24)$$

Pelo item anterior tem-se que a matriz  $A(\alpha)'$  é invertível, assim multiplique (3.24) à esquerda por  $\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0 \\ 0 & A(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}$ , à direita por  $\begin{bmatrix} (A(\alpha)')^{-1} & 0 \\ 0 & (A(\alpha)')^{-1} \end{bmatrix}$  e substitua (3.18) para obter

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{r}{2} \left( A(\alpha)^{-1} (I + B(\alpha)K)Q + Q(I + B(\alpha)K)' (A(\alpha)')^{-1} \right) \\ - Q \\ - Q \\ \frac{r}{2} \left( A(\alpha)^{-1} (Q + B(\alpha)Y) + (Q + B(\alpha)Y)' (A(\alpha)')^{-1} \right) \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{r}{2} (A_N^{-1}Q + Q(A_N')^{-1}) & -Q \\ -Q & \frac{r}{2} (A_N^{-1}Q + Q(A_N')^{-1}) \end{array} \right] < 0. \quad (3.25)$$

Da Álgebra sabe-se que se  $\lambda_i$  é autovalor de  $A_N$ , então  $\frac{1}{\lambda_i}$  é autovalor de  $A_N^{-1}$ , sendo  $\lambda_i = x + yj$  não nulo. Usando essa propriedade e a relação  $(Q, A_N Q, Q A_N') \sim (1, \lambda_i, \bar{\lambda}_i)$  (CHILALI; GAHINET, 1996) em (3.25) conclui-se que



$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left( \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\bar{\lambda}_i} \right) & -1 \\ -1 & \frac{r}{2} \left( \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\bar{\lambda}_i} \right) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left( \frac{2x}{x^2+y^2} \right) & -1 \\ -1 & \frac{r}{2} \left( \frac{2x}{x^2+y^2} \right) \end{bmatrix} < 0 \\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\left( \frac{rx}{x^2+y^2} \right) & 1 \\ 1 & -\left( \frac{rx}{x^2+y^2} \right) \end{bmatrix} &> 0. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Estudando a positividade da matriz através dos menores principais tem-se

$$(a) \frac{-rx}{x^2+y^2} > 0 \Leftrightarrow -rx > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

e

$$(b) \frac{r^2 x^2}{(x^2+y^2)^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow r^2 x^2 > (x^2+y^2)^2.$$

Analisando o item (b) pode-se concluir que

i. Se  $r \geq |x|$ ,

$$\begin{aligned}
r^2 r^2 &\geq r^2 x^2 > (x^2+y^2)^2 \\
\Leftrightarrow r^2 r^2 &> (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow (r^2)^2 > (x^2+y^2)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2 < r^2.
\end{aligned}$$

ii. Se  $r < |x|$ ,

$$\begin{aligned}
x^2 x^2 &> r^2 x^2 > (x^2+y^2)^2 \\
\Leftrightarrow x^2 x^2 &> (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow (x^2)^2 > (x^2+y^2)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 > x^2+y^2. \quad (\text{Absurdo!})
\end{aligned}$$

Logo pelos itens (a) e (b) a expressão (3.25) é factível se e somente se,

$$x < 0, \quad x^2 + y^2 < r^2. \tag{3.27}$$

A expressão (3.25) foi obtida a partir da LMI (3.14). Portanto, quando a LMI (3.14) é factível o sistema (3.6) satisfaz a desigualdade (II).

3. Referente à LMI (3.15):

Aplicando a definição do produto de Kronecker (1.1) em (3.15), segue que

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{c} \text{sen}(\theta)(A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j') \\ \text{cos}(\theta)[Q A_i' + B_j Y A_i' - (A_i Q + A_i Y' B_j')] \\ \text{cos}(\theta)[A_i Q + A_i Y' B_j' - (Q A_i' + B_j Y A_i')] \\ \text{sen}(\theta)(A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j') \end{array} \right] = \\
& \left[ \begin{array}{cc} \text{sen}(\theta)(A_i Q + A_i Y' B_j') & \text{cos}(\theta)(A_i Q + A_i Y' B_j') \\ -\text{cos}(\theta)(A_i Q + A_i Y' B_j') & \text{sen}(\theta)(A_i Q + A_i Y' B_j') \end{array} \right] \\
& + \left[ \begin{array}{cc} \text{sen}(\theta)(Q A_i' + B_j Y A_i') & -\text{cos}(\theta)(Q A_i' + B_j Y A_i') \\ \text{cos}(\theta)(Q A_i' + B_j Y A_i') & \text{sen}(\theta)(Q A_i' + B_j Y A_i') \end{array} \right] = \\
& \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) \\ -\text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{array} \right] \otimes (A_i Q + A_i Y' B_j') \right\} \\
& + \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \text{sen}(\theta) & -\text{cos}(\theta) \\ \text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{array} \right] \otimes (Q A_i' + B_j Y A_i') \right\} = \\
& W \otimes (A_i Q + A_i Y' B_j') + W' \otimes (Q A_i' + B_j Y A_i') = \\
& W \otimes [A_i(Q + Y' B_j')] + W' \otimes [(Q + B_j Y) A_i'] < 0,
\end{aligned}$$

sendo  $W = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) \\ -\text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}$ .

Usando (3.2), (3.4) e substituindo  $Y = KQ$ , chega-se em

$$\begin{aligned}
& W \otimes [A(\alpha)(Q + Q K' B(\alpha)')] + W' \otimes [(Q + B(\alpha) K Q) A(\alpha)'] = \\
& W \otimes [A(\alpha) Q (I + B(\alpha) K)'] + W' \otimes [(I + B(\alpha) K) Q A(\alpha)'] < 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando à esquerda por  $(I \otimes (I + B(\alpha) K)^{-1})$ , à direita por  $(I \otimes [(I + B(\alpha) K)']^{-1})$  e substituindo (3.18) tem-se que

$$\begin{aligned}
& W \otimes (I + B(\alpha) K)^{-1} A(\alpha) Q + W' \otimes [(I + B(\alpha) K)^{-1} A(\alpha) Q]' = \\
& W \otimes (A_N Q) + W' \otimes (Q A_N') = \\
& (W \otimes A_N Q) + (W \otimes A_N Q)' < 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Observe que (3.28) é equivalente a (III.b). Então, quando a LMI (3.15) é factível o sistema (3.6) satisfaz a LMI (III).

Portanto, quando as LMIs (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16) são factíveis, o sistema (3.6) satisfaz as LMIs (I), (II), (III) e (IV). Então, pelo Lema 2.1 o sistema (3.6) é  $S(\gamma, r, \theta)$ -estável e uma solução para o Problema 2 pode ser obtida com (3.17). ■

A eficiência dos Teoremas 3.1 e 3.2 pode ser verificada na solução de dois exemplos numéricos.

### Exemplo 3.1: Sistema massa-mola

Considere o sistema massa-mola da Figura 3.1.

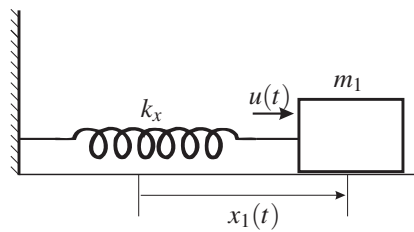


Figura 3.1: Sistema massa-mola.

O sistema pode ser descrito por (EDWARDS; PENNEY, 2003):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_x}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} u(t), \quad (3.29)$$

Suponha que a mola do sistema seja não-linear, então  $k_x$  representa o coeficiente não-linear da mola e pode ser representado por (EDWARDS; PENNEY, 2003):  $k_x = k(1 + a^2 x_1(t)^2)$ , sendo  $k$  o coeficiente de elasticidade da mola,  $a$  a constante de dureza da mola e  $x_1(t)$  o deslocamento da massa  $m_1$ . Supondo ( $u(t) = 0$ ), o comportamento dinâmico do sistema, para a condição inicial  $x(0) = [-0,2 \ 0]^T$ , pode ser visto na Figura 3.2.

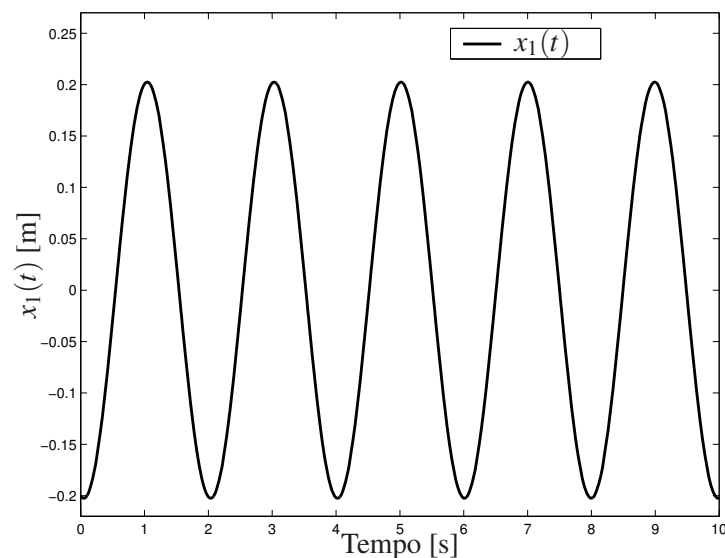


Figura 3.2: Resposta do sistema (3.29) ( $m_1 = 2\text{kg}$ ,  $k = 20\text{kN/m}$ ,  $a = 1\text{m}^{-1}$ ).

Pela Figura 3.2, observa-se que o sistema (3.29), sem ação de controle, é marginalmente estável. Dessa forma, o projeto de controle consiste em atenuar as oscilações da massa  $m_1$ , deslocada  $x_1(t)$  do ponto de equilíbrio, usando a entrada  $u(t)$  definida em (3.5). Os modelos locais do sistema fuzzy (3.2), são obtidos usando o método de representação exata proposta por (TANIGUCHI et al., 2001). Como o termo não-linear depende do estado  $x_1(t)$ , então supondo que  $x_1(t)$  é limitado no intervalo  $-2 \leq x_1(t) \leq 2$  e considerando  $m = 2\text{kg}$ ,  $k = 20\text{kN/m}$  e  $a = 1\text{m}^{-1}$ , são obtidos os seguintes modelos locais:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix},$$

As LMIs do Teorema 3.1 foram resolvidas no MATLAB com o pacote “YALMIP toolbox” (LÖFBERG, 2004) e o solver “LMILAB” (GAHINET et al., 1995), e a seguinte solução foi encontrada:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,036 & -0,519 \\ -0,519 & 8,399 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1,1679 & -15,437 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

De (3.9) segue que:

$$K = \begin{bmatrix} 61,656 & 1,975 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Suponha que a saída do sistema é  $y(t) = x_1(t)$ . Para a condição inicial  $x(0) = [1 \ 0]'$ , a resposta dinâmica do sistema não-linear (3.29), realimentado com a entrada (3.5) e o ganho (3.32), pode ser vista na Figura 3.3.

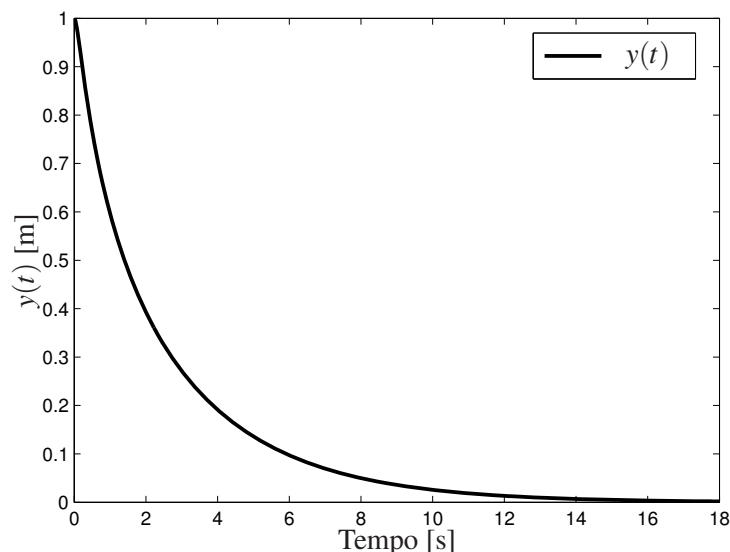


Figura 3.3: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema (3.29) controlado com o ganho (3.32).

Pela Figura 3.3, o tempo de duração do transitório no sistema controlado é aproximadamente 18s. Logo, o ganho (3.32) encontrado com o Teorema 3.1, é insuficiente para obter um desempenho desejado. A fim de melhorar o desempenho do sistema, o problema foi resolvido com o Teorema 3.2 considerando ( $\gamma = 5$ ,  $r = 100$ ,  $\theta = 60^\circ$ ). A solução encontrada é apresentada a seguir:

$$Q = \begin{bmatrix} 2,2463 & -60,497 \\ -60,497 & 3841,9 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 125,75 & -7686,2 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

De (3.17) segue que:

$$K = \begin{bmatrix} 3,6463 & -1,9432 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Para a condição inicial  $x(0)$  definida acima, a resposta dinâmica do sistema não-linear (3.29), realimentado com a entrada (3.5) e o ganho (3.35), pode ser vista na Figura (3.4).

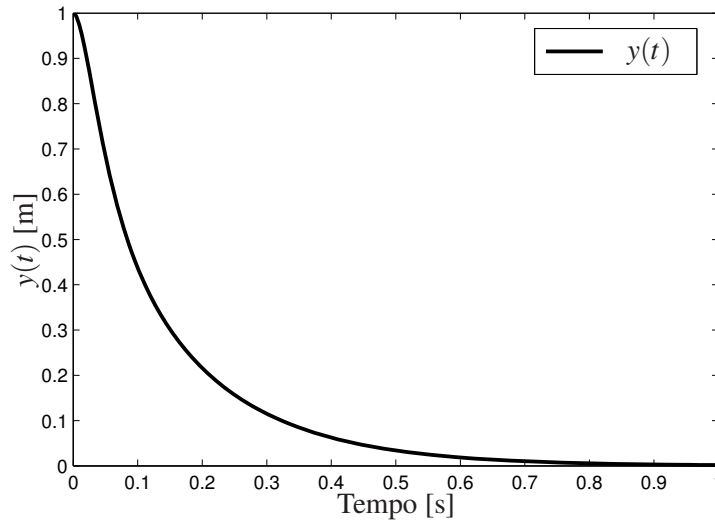


Figura 3.4: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema controlado com o ganho (3.35).

Pela Figura 3.4, o tempo de duração do transitório no sistema controlado é menor que 1s. Logo, o Teorema 3.2 é capaz de melhorar o desempenho do sistema. É importante ressaltar que o Teorema 3.2 garante a  $\mathcal{D}$ -estabilidade do modelo fuzzy considerando apenas os vértices do politopo, ou seja, garante a  $\mathcal{D}$ -estabilidade do modelo através dos sistemas  $\dot{x}(t) = (I + B_i K_i)^{-1} A_i x(t)$ ,  $i = 1, 2$ . E, como o modelo fuzzy foi obtido usando o método de representação exata (TANIGUCHI et al., 2001), então o comportamento dinâmico do sistema não-linear controlado é equivalente ao do sistema fuzzy controlado. Dessa forma, para qualquer  $t_i$ , os autovalores do sistema  $\dot{x}(t_i) = \left( I + G(x(t_i)) K(\alpha(t_i)) \right)^{-1} F(x(t_i)) x(t_i)$  pertencem a região

$S(\gamma, r, \theta)$ . Essa verificação pode ser realizada no MATLAB com a função “ode45”. Essa função é usada para simular sistemas não-lineares e têm como argumentos, a condição inicial e o intervalo de tempo. Para a condição inicial  $x(0)$  já definida e o intervalo de tempo  $T_0 = [0 \ 1]$ , a localização dos autovalores do sistema não-linear e dos vértices do sistema fuzzy pode ser vista na Figura 3.5.

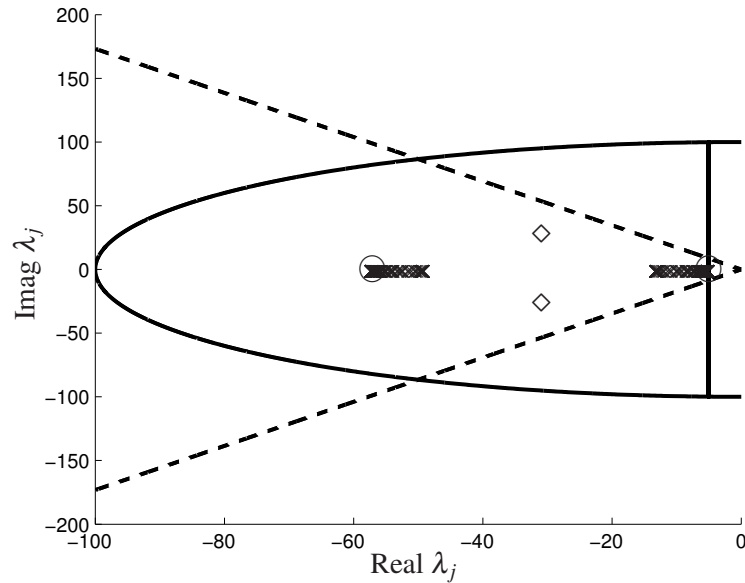


Figura 3.5: Localização dos autovalores do sistema não-linear e dos vértices do sistema fuzzy, controlados com o ganho (3.35).

Na Figura 3.5, os autovalores dos vértices do modelo fuzzy são representados por:

$$\circ, \text{vértice } \dot{x}(t) = (I + B_1 K_1)^{-1} A_1 x(t),$$

$$\diamond, \text{vértice } \dot{x}(t) = (I + B_2 K_2)^{-1} A_2 x(t);$$

O símbolo  $\times$  representa os autovalores do sistema não-linear  $\dot{x}(t_i) = (I + G(x(t_i))K(\alpha(t_i)))^{-1} F(x(t_i))x(t_i)$ . Pela Figura 3.5, existem muitos autovalores próximos à reta vertical que passa pelo ponto  $(-\gamma, 0)$ . O que pode gerar dúvidas quanto a sua localização. Então, para facilitar a visualização dos autovalores, na Figura 3.6 foi realizada uma ampliação visual (zoom) nessa região.

Pela Figura 3.6 fica evidente que todos os autovalores estão à direita da reta, e portanto, possuem parte real menor que  $-\gamma$ . Logo, pelas Figuras 3.5 e 3.6, o sistema não-linear controlado com (3.35) é  $S(5, 100, 60^\circ)$ -estável.

Este exemplo é muito simples e foi resolvido apenas como motivação para a aplicação da realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy T-S. O modelo massa-mola pode ser usado em diversos problemas de engenharia e no próximo exemplo é apresentado um sistema de suspensão de automóveis que usa esse modelo.  $\square$

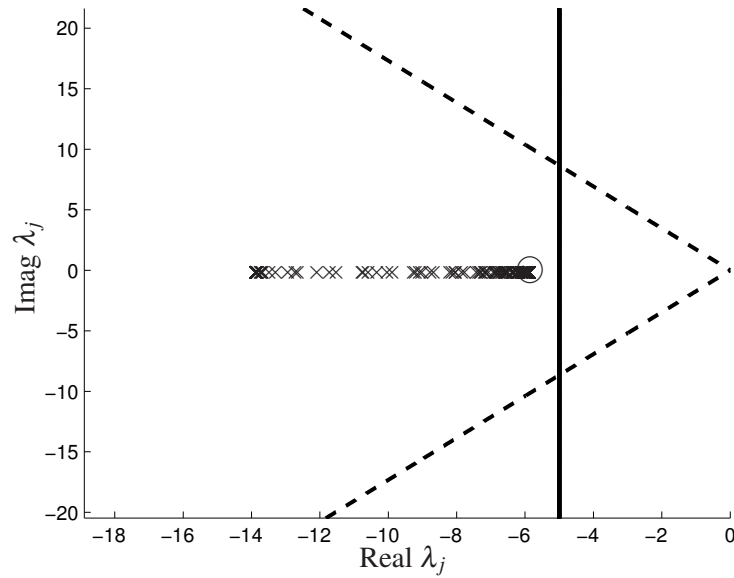


Figura 3.6: Ampliação visual na região dos autovalores dos sistemas controlados com (3.35).

### Exemplo 3.2: Sistema de suspensão ativa

Considere o sistema de suspensão ativa dado em (REITHMEIER; LEITMANN, 2003). Modificando as entradas de controle obtém-se o sistema da Figura 3.7.

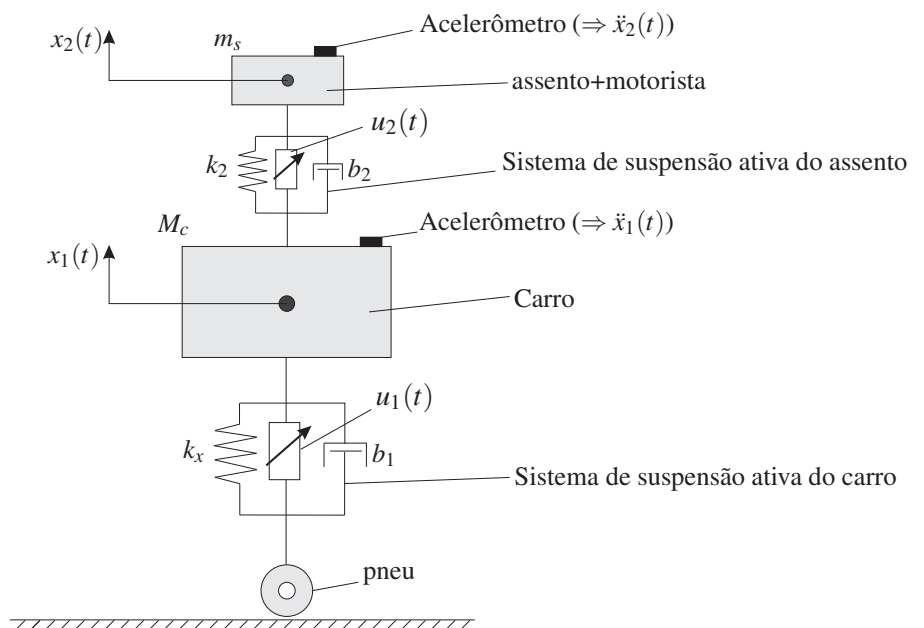


Figura 3.7: Sistema de suspensão ativa de um carro.

Cujo modelo dinâmico pode ser descrito por:

$$\begin{aligned}
 F(x(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_x - k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, \\
 G(x(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, \quad H(x(t)) = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

O vetor de estados é definido por  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]'$ .

O sistema a ser controlado envolve um carro de massa  $M_c$ , um assento e uma pessoa, cuja massa conjunta é  $m_s$ . Vibrações causadas por irregularidades na estrada podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão do carro (mola não-linear  $k_x$  e amortecedor  $b_1$ ). Mesmo assim o motorista ainda pode sentir um pouco de vibrações. Uma maneira de melhorar o conforto do motorista é instalar um sistema de suspensão ativa no seu assento (composto por uma mola linear  $k_2$  e um amortecedor  $b_2$ ) e diminuir as vibrações entre o motorista ( $m_s$ ) e o chassi do carro ( $M_c$ ), modificando as entradas de controle  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ .

Como em (REITHMEIER; LEITMANN, 2003), estão disponíveis para realimentação somente os sinais de aceleração  $\ddot{x}_1(t)$  e  $\ddot{x}_2(t)$  (que são obtidos pelos acelerômetros). Os valores  $\dot{x}_1(t)$  e  $\dot{x}_2(t)$  são obtidos pela integração dos respectivos sinais de aceleração.

Os sinais medidos são as acelerações e velocidades (derivada dos estados), logo pode-se usar a metodologia proposta para resolver o problema. Considere  $M_c = 1500\text{kg}$  (massa do carro),  $m_s = 90\text{kg}$  (massa do banco (20kg) + peso do motorista (70kg)),  $b_1 = 4 \times 10^3\text{Ns/m}$  e  $b_2 = 5 \times 10^2\text{Ns/m}$  (coeficientes de amortecimento). O coeficiente não-linear da mola do carro é dado por:  $k_x = k_1(1 + a^2x_1(t)^2)$ , sendo  $k_1 = 4 \times 10^4\text{N/m}$  e  $a = 1\text{m}^{-1}$ . O coeficiente de elasticidade da mola linear do assento é:  $k_2 = 5 \times 10^3\text{N/m}$ . Como o termo não-linear depende do estado  $x_1(t)$ , então supondo que  $x_1(t)$  é limitado no intervalo  $-0,5 \leq x_1(t) \leq 0,5$  e usando o método de representação exata (TANIGUCHI et al., 2001), são obtidos os seguintes modelos locais:



$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -3 & 0,33333 \\ 55,556 & -55,556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36,667 & 3,3333 & -3 & 0,33333 \\ 55,556 & -55,556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix}, \\
 B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,6667 \times 10^{-4} & -6,6667 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,1111 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Resolvendo as LMIs do Teorema 3.1 com o ‘YALMIP toolbox’ (LÖFBERG, 2004) juntamente com o solver ‘LMILAB’ (GAHINET et al., 1995), as seguintes soluções foram obtidas:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,27 & 1,149 \times 10^{-10} & -1,142 & 1,18 \times 10^{-11} \\ 1,149 \times 10^{-10} & 5,05 & -9,009 \times 10^{-11} & -2,09 \\ -1,142 & -9,009 \times 10^{-11} & 11,125 & -1,585 \times 10^{-10} \\ 1,18 \times 10^{-11} & -2,09 & -1,585 \times 10^{-10} & 5,05 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1,1965 \times 10^3 & 1,1046 \times 10^3 & -9,0259 \times 10^3 & -454,53 \\ -3,689 & -2,3099 \times 10^3 & -779,24 & 2,3752 \times 10^4 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

De (3.9) segue que:

$$K = \begin{bmatrix} 1,7661 \times 10^3 & 218,97 & -630 & 0,614 \\ -547,32 & 1,7965 \times 10^3 & -126,22 & 5,4465 \times 10^3 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Suponha que a saída do sistema é dada por  $y(t) = Cx(t)$ . Para a condição inicial  $x(0) = [0, 1 \ 0,3 \ 0 \ 0]'$ , o comportamento dinâmico do sistema não-linear (3.36), realimentado com (3.5) e o ganho (3.39), pode ser visto na Figura 3.8.

Na Figura 3.8 o tempo de duração do transitório no sistema controlado é aproximadamente 25s. Logo, o ganho (3.39) encontrado com o Teorema 3.1, é insuficiente para obter um desempenho satisfatório.

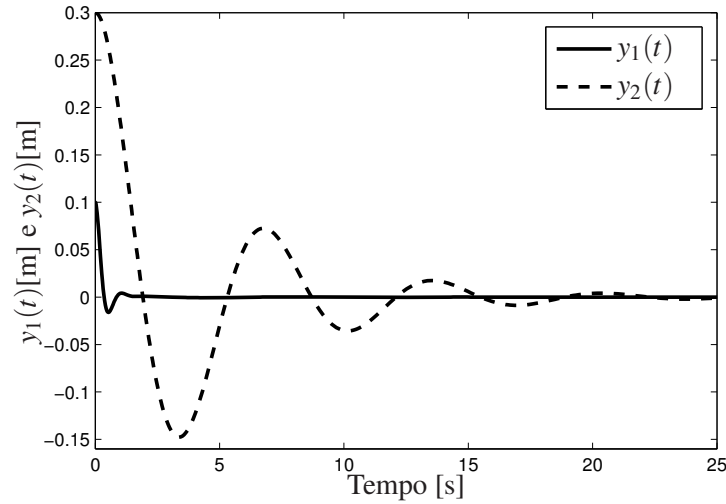


Figura 3.8: Resposta do sistema controlado com o ganho (3.39).

Agora, vamos melhorar o desempenho do sistema (3.36), resolvendo o problema com o Teorema 3.2. Considerando ( $\gamma = 2,5$ ,  $r = 20$ ,  $\theta = 60^\circ$ ), a solução obtida com pelo ‘YALMIP toolbox’ (LÖFBERG, 2004) com o solver “LMILAB” (GAHINET et al., 1995), foi:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,083 & 0,006 & -0,829 & -0,054 \\ 0,006 & 0,099 & 0,031 & -0,877 \\ -0,829 & 0,031 & 9,379 & 0,765 \\ -0,054 & -0,877 & 0,765 & 9,057 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1,2643 \times 10^3 & 49,306 & -1,3798 \times 10^4 & -1,6114 \times 10^3 \\ 4,829 & 79,506 & -65,818 & -804,23 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

De (3.17) segue que:

$$K = \begin{bmatrix} 5,7386 \times 10^3 & -828,5 & -949,5 & -143,65 \\ -649,64 & 625,59 & -64,316 & -26,635 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

O comportamento dinâmico do sistema (3.36), realimentado com (3.5) e o ganho (3.42), pode ser visto na Figura 3.9. Na Figura 3.10 são exibidos os autovalores dos vértices do modelo fuzzy e os autovalores do sistema (3.36) controlado, em cada um dos pontos  $t_i$  usados na simulação do “ode45”.

Pela Figura 3.9, o tempo de duração do transitório no sistema (3.36) controlado com o ganho (3.42) é menor que 1s. Logo, o Teorema 3.2 foi capaz de melhorar o desempenho do sistema. A Figura 3.10 garante que tanto os autovalores dos vértices do modelo fuzzy ( $\circ$ : vértice  $\dot{x}(t) = (I + B_1 K_1)^{-1} A_1$ ,  $\diamond$ : vértice  $\dot{x}(t) = (I + B_2 K_2)^{-1} A_2$ ), quanto os autovalores do sistema (3.36) em malha fechada ( $\times$ ), permanecem na região  $S(2, 5, 20, 60^\circ)$ . Logo o sistema (3.36), realimentado com (3.5) e o ganho (3.42), é  $S(2, 5, 20, 60^\circ)$ -estável.  $\square$

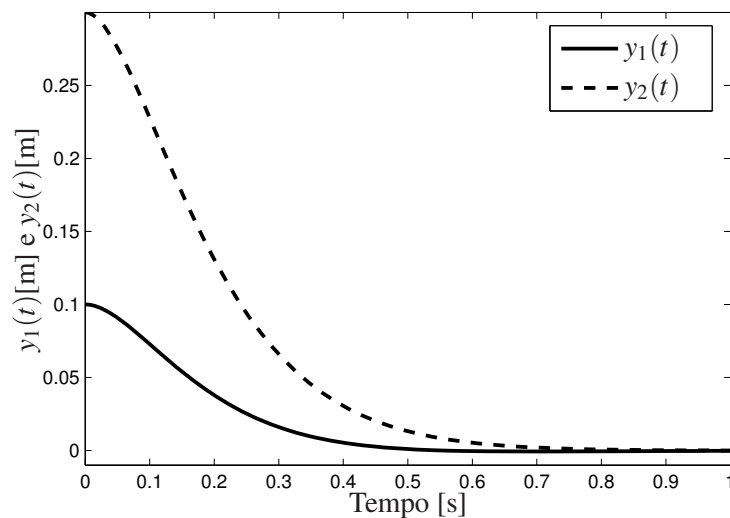


Figura 3.9: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema  $S(2, 5, 20, 60^\circ)$ -estável.

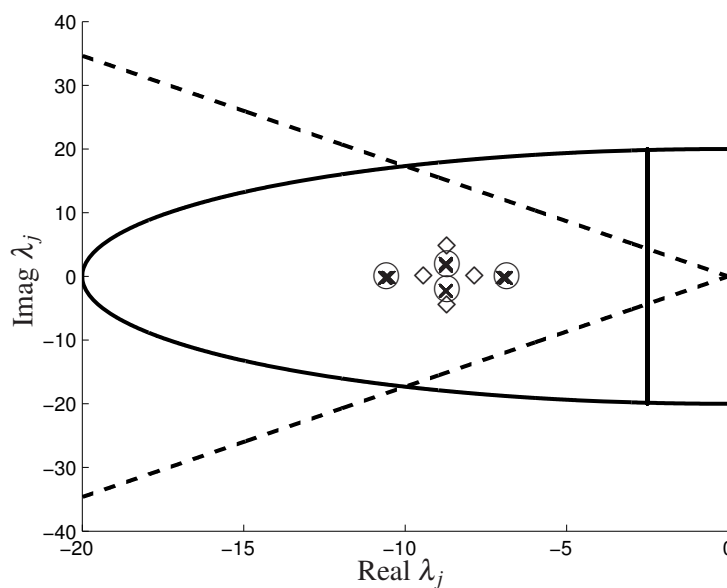


Figura 3.10: Localização dos autovalores do sistema não-linear e dos vértices do sistema fuzzy, controlados com (3.42).

Os resultados apresentados nas Seções 3.2 e 3.3, mostraram ser eficientes na solução dos exemplos. Mas note que a entrada de controle (3.5) considera uma matriz fixa  $K$  para a solução do Problema 2. Esse resultado é muito conservador e em alguns problemas pode ser difícil encontrar uma matriz fixa satisfazendo os Teoremas 3.1 ou 3.2. Uma maneira de facilitar a solução do Problema 2 é substituir a matriz fixa  $K$  por uma matriz dependente de parâmetros  $K(\alpha)$ .

### 3.4 Projeto de controladores fuzzy

Considere que, nos sistemas (3.2) e (3.3), o vetor premissa  $z(t)$  é conhecido. Neste caso, podem-se melhorar as condições de estabilidade do sistema (3.2) usando o procedimento conhecido como *Compensação Paralela Distribuída* (do inglês, Parallel Distributed Compensation (PDC)) (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANAKA; SUGENO, 1992). Esse procedimento consiste em projetar controladores para cada um dos modelos locais e o controlador global, que é não-linear em geral, é obtido através da combinação fuzzy dos controladores locais. Assim, o problema da realimentação da derivada dos estados pode ser redefinido como:

*Problema 3:* Supondo que o vetor  $\alpha$  em (3.4) é conhecido. Encontre matrizes constantes  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r_a$ , tais que:

1. A matriz  $\left( I + B(\alpha) \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i K_i \right)$ , é invertível  $\forall \alpha \in (3.4)$ ;
2. O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (3.2), obtido com a entrada de controle

$$u(t) = - \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i K_i \dot{x}(t) = -K(\alpha) \dot{x}(t), \quad (3.43)$$

é globalmente assintoticamente estável. Quando a matriz  $(I + B(\alpha)K(\alpha))$  é invertível, o sistema em malha fechada, dado por (3.2) e (3.43) pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K(\alpha)\dot{x}(t) \Leftrightarrow \\ (I + B(\alpha)K(\alpha))\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) \Leftrightarrow \\ \dot{x}(t) &= (I + B(\alpha)K(\alpha))^{-1}A(\alpha)x(t). \end{aligned} \quad (3.44)$$

#### 3.4.1 Projeto de controladores fuzzy: Condição de estabilidade

Para a solução do Problema 3 é usada a seguinte propriedade:

$$\sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_a} T_{ijk} = \sum_{i=1}^{r_a} T_{iii} + \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r_a} (T_{iij} + T_{iji} + T_{jii}) + \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r_a} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{r_a} T_{ijk}. \quad (3.45)$$

O próximo teorema apresenta condições suficientes para a solução do Problema 3.

**Teorema 3.3.** *Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r_a$ , satisfazendo as LMIs:*

$$Q > 0, \quad (3.46)$$

$$A_i Q + Q A_i' + B_i Y_i A_i' + A_i Y_i' B_i' < 0, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & A_i Q + Q A_i' + B_i Y_j A_i' + A_i Y_j' B_i' \\ & + A_i Q + Q A_i' + B_j Y_i A_i' + A_i Y_i' B_j' \\ & + A_j Q + Q A_j' + B_i Y_i A_j' + A_j Y_i' B_i' \leq 0, \quad (i \neq j), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$A_i Q + Q A_i' + B_j Y_k A_i' + A_i Y_k' B_j' \leq 0, \quad (i \neq j, i \neq k \text{ e } j \neq k), \quad (3.49)$$

sendo  $i, j, k = 1, \dots, r_a$ . Então, o sistema (3.44) é globalmente assintoticamente estável, um conjunto de ganhos locais para a entrada (3.43) pode ser obtido com  $K_i = Y_i Q^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r_a$ . E uma matriz dependente de parâmetros  $K(\alpha)$  que resolve o Problema 3 é:

$$K(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i K_i. \quad (3.50)$$

**Prova:** Multiplique a equação (3.47) por  $\alpha_i^3$ , (3.48) por  $\alpha_i^2 \alpha_j$  e (3.49) por  $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ . Somando todos os termos, segue da propriedade (3.45) que

$$\sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (A_i Q + Q A_i' + B_j Y_k A_i' + A_i Y_k' B_j') < 0. \quad (3.51)$$

Considerando (3.4) em (3.51) obtém-se

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i \right) Q + Q \left( \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i \right)' + \left( \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j \right) \left( \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_k Y_k \right) \left( \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i \right)' \\ & + \left( \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i A_i \right) \left( \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_k Y_k \right)' \left( \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_j B_j \right)' < 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Da equação (3.2) e substituindo  $\sum_{k=1}^{r_a} \alpha_k Y_k = \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_k K_k Q = K(\alpha) Q$  em (3.52) tem-se que

$$\begin{aligned} & A(\alpha) Q + Q A(\alpha)' + B(\alpha) K(\alpha) Q A(\alpha)' + A(\alpha) Q K(\alpha)' B(\alpha)' = \\ & A(\alpha) Q (I + B(\alpha) K(\alpha))' + (I + B(\alpha) K(\alpha)) Q A(\alpha)' < 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Observe que (3.53) é equivalente à (3.11), para  $Q = P^{-1}$ , e  $K = K(\alpha)$ . Então da prova do Teorema 3.1 segue que, quando (3.46), (3.47), (3.48) e (3.49) são factíveis, existe uma matriz  $P > 0$ , satisfazendo as condições de Lyapunov, para o sistema (3.44). Portanto, o ponto de

equilíbrio  $x = 0$  do sistema (3.44) é globalmente assintoticamente estável e uma solução para o Problema 3 pode ser dada por (3.50). ■

A solução do Teorema 3.3 garante apenas a estabilidade do sistema (3.44). Para fins de engenharia esse resultado nem sempre é suficiente, pois existem projetos que possuem restrições no desempenho.

### 3.4.2 Condições de estabilidade com restrições de desempenho

O próximo teorema é proposto para se obter condições que permitam a especificação da taxa de decaimento no Problema 3.

**Teorema 3.4.** *Dado um valor  $\gamma > 0$ , se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r_a$ , satisfazendo as LMIs:*

$$Q > 0, \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i' + B_i Y_i A_i' + A_i Y_i' B_i' & Q + B_i Y_i \\ Q + Y_i' B_i' & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i' + B_i Y_j A_i' + A_i Y_j' B_i' & Q + B_i Y_j \\ Q + Y_j' B_i' & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i' + B_j Y_i A_i' + A_i Y_i' B_j' & Q + B_j Y_i \\ Q + Y_i' B_j' & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} A_j Q + Q A_j' + B_i Y_i A_j' + A_j Y_i' B_i' & Q + B_i Y_i \\ Q + Y_i' B_i' & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (i \neq j), \quad (3.56) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i' + B_j Y_k A_i' + A_i Y_k' B_j' & Q + B_j Y_k \\ Q + Y_k' B_j' & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (i \neq j, i \neq k \text{ e } j \neq k), \quad (3.57)$$

sendo  $i, j, k = 1, \dots, r_a$ . Então, o sistema (3.44) é globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , um conjunto de ganhos locais para a entrada (3.43) pode ser obtido com  $K_i = Y_i Q^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r_a$ . E uma matriz dependente de parâmetros  $K(\alpha)$  que resolve o Problema 3 é dada por:

$$K(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i K_i. \quad (3.58)$$

**Prova:** Seguindo a mesma idéia da prova do Teorema 3.3, multiplique (3.55) por  $\alpha_i^3$ , (3.56) por  $\alpha_i^2 \alpha_j$ , (3.57) por  $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ . Somando todos os termos, segue da propriedade (3.45) que

$$\left[ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (A_i Q + Q A_i' + B_j Y_k A_i' + A_i Y_k' B_j') \\ \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (Q + Y_k' B_j') \\ \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (Q + B_j Y_k) \\ - \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_a} \alpha_i \alpha_j \alpha_k Q / (2\gamma) \end{array} \right] < 0. \quad (3.59)$$

Novamente de (3.4) e de (3.2) obtém-se

$$\left[ \begin{array}{cc} A(\alpha)Q + QA(\alpha)' + B(\alpha)Y(\alpha)A(\alpha)' + A(\alpha)Y(\alpha)'B(\alpha)' & Q + B(\alpha)Y(\alpha) \\ Q + Y(\alpha)'B(\alpha)' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] < 0. \quad (3.60)$$

Pelo complemento de Schur (Propriedade 1.2, item 2), note que (3.60) é equivalente à (3.21), considerando  $Y = Y(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i Y_i = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i K_i Q$ . Então, a prova desse teorema segue de maneira similar a prova da Parte 1 do Teorema 3.2, a partir da equação (3.21), substituindo  $Y$  por  $Y(\alpha)$ . ■

**Observação 3.4.** Na propriedade (3.45), o último termo  $T_{ijk}$  é nulo para  $r_a = 2$ . Logo, as LMIs (3.49) do Teorema 3.3 ou (3.57) do Teorema 3.4, devem ser consideradas somente para  $r_a \geq 3$ .

A eficiência das metodologias propostas nesta seção são verificadas na solução dos Exemplos 3.3 e 3.4.

### Exemplo 3.3: Sistema massa-mola

Considere o mesmo sistema dinâmico do Exemplo 3.1 (equação (3.29)). Supondo os mesmos parâmetros:  $m_1 = 2\text{kg}$ ,  $k = 20\text{kN/m}$ ,  $a = 1\text{m}^{-1}$  e que o estado  $x_1(t)$  é limitado no intervalo  $-2 \leq x_1(t) \leq 2$ , a técnica apresentada em (TANIGUCHI et al., 2001) obtém os seguintes modelos locais:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix},$$

note que nesse exemplo, o termo não-linear depende de  $x_1(t)$ . Considerando que  $z(t) = x_1(t)$ , a função de pertinência do sistema baseado nos resultados de (TANIGUCHI et al., 2001) é dada por:

$$\begin{cases} \alpha_1(x_1(t)) = \frac{\tilde{f}_1(x_1(t)) - l_2}{l_1 - l_2}, \\ e \\ \alpha_2(x_1(t)) = 1 - \alpha_1(x_1(t)), \end{cases} \quad (3.61)$$

sendo  $\tilde{f}_1(x_1(t)) = -\frac{k_1(1+a^2x_1(t)^2)}{m_1}$ ,  $l_1 = \max\{\tilde{f}_1(x_1(t))\}$ ,  $l_2 = \min\{\tilde{f}_1(x_1(t))\}$  e  $-2 \leq x_1(t) \leq 2$ .

Resolvendo as LMIs do Teorema 3.3, as soluções obtidas pelo “YALMIP toolbox” (LÖFBERG, 2004) com o solver “SeDuMi” (STURM, 1999), foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 1,108 & -0,348 \\ -0,348 & 1,108 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0,727 & 19,948 \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0,714 & 108,6 \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

De (3.50) segue que:

$$K(\alpha) = \alpha_1(x_1(t)) \begin{bmatrix} 6,9977 & 20,197 \end{bmatrix} + \alpha_2(x_1(t)) \begin{bmatrix} 34,85 & 108,94 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Suponha que a saída do sistema é dada por:  $y(t) = x_1(t)$ . A partir da função de pertinência (3.61) e da condição inicial  $x(0) = [1 \ 0]'$ , a resposta dinâmica do sistema não-linear (3.29), realimentado com a entrada (3.43) e o ganho (3.65), pode ser vista na Figura 3.11.

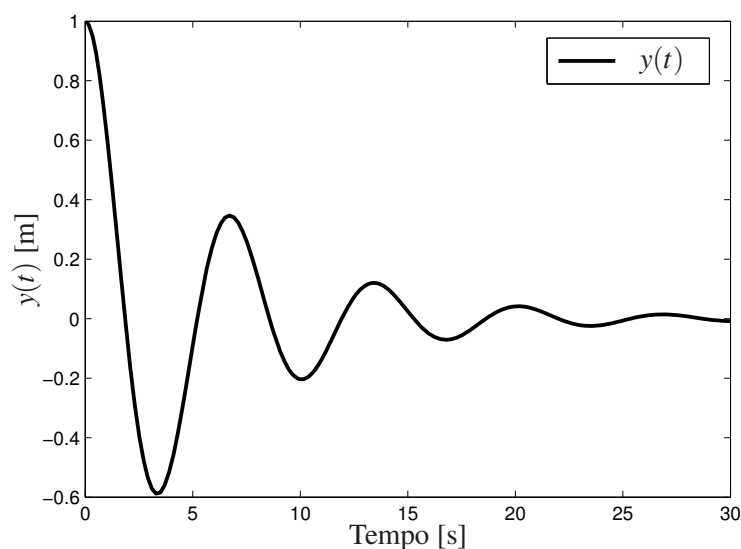


Figura 3.11: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema não-linear controlado com (3.65).



Pela Figura 3.11, o tempo de duração do transitório no sistema é aproximadamente 30s. Como o tempo de duração do transitório obtido com o Teorema 3.3 é insatisfatório, então vamos resolver o problema com o Teorema 3.4, para obter um melhor desempenho no sistema em malha fechada. O problema é resolvido considerando  $\gamma = 2$ . A solução encontrada com o “YALMIP toolbox” (LÖFBERG, 2004) e o solver “SeDuMi” (STURM, 1999) foi:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,019 & -0,154 \\ -0,154 & 3,949 \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0,34614 & -7,749 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0,35138 & -6,4901 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

De (3.58) segue que:

$$K(\alpha) = \alpha_1(x_1(t)) \begin{bmatrix} 3,2556 & -1,835 \end{bmatrix} + \alpha_2(x_1(t)) \begin{bmatrix} 7,3316 & -1,357 \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

A resposta dinâmica do sistema não-linear (3.29), realimentado com (3.43) e (3.69), pode ser vista na Figura 3.12.

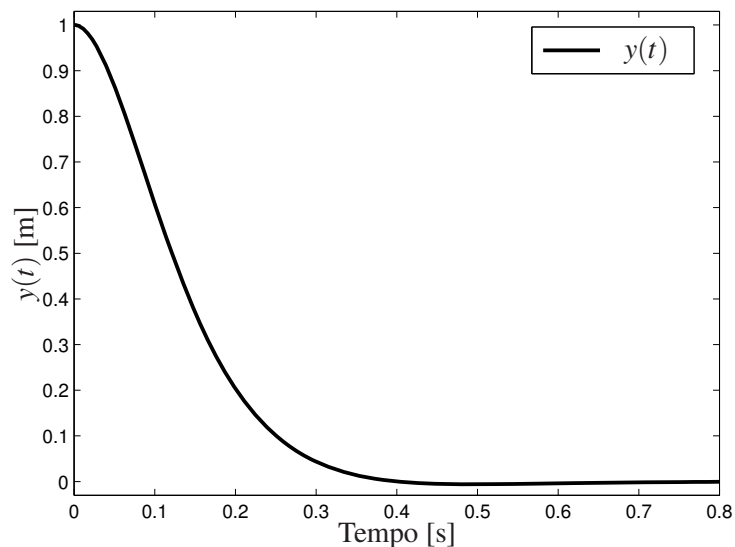


Figura 3.12: Resposta do sinal  $y(t)$  do sistema não-linear controlado com restrições de desempenho.

Note pela Figura 3.12 que o ganho (3.69) obtido com o Teorema 3.4 foi capaz de terminar o período transitório do sistema em menos de 1s, que é menor que o obtido com o ganho (3.65), encontrado com o Teorema 3.3 (Figura 3.11).

Neste exemplo o desempenho do sistema não-linear (3.29), realimentado com o controlador fuzzy (3.43) e o ganho (3.65) (Figura 3.11), é pior do que o obtido com o controlador fixo (3.5) com o ganho (3.32) (Figura 3.3). Observe que os Teoremas 3.1 e 3.3 apresentam apenas condições de estabilidade para sistema não-lineares, e não fornecem nenhuma informação sobre o desempenho. Como foi possível encontrar um ganho fixo  $K$  garantindo a estabilidade do sistema (3.29), então, neste exemplo o projeto com controladores fuzzy foi realizado apenas para ilustração. A motivação para o projeto com controladores fuzzy (3.43), é que existem sistemas fuzzy que não são quadraticamente estáveis com um controlador fixo, e portanto, não podem ser estabilizados com os Teoremas 3.1 e 3.2.

No próximo exemplo é exibido um sistema fuzzy que não é quadraticamente estável com o controlador (3.5). □

### Exemplo 3.4: Modelo fuzzy gerado aleatoriamente

Considere o sistema fuzzy representado pelos seguintes modelos locais:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0,02 & -4,64 \\ 0,35 & 0,21 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -15,5 & -4,33 \\ 0,21 & 0,05 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Não foi possível encontrar um ganho estabilizante  $K$ , pois as LMIs (3.7) e (3.8) do Teorema 3.1 são infactíveis para o sistema (3.70). Tentou-se resolver as LMIs no MATLAB com os solvers “LMILAB” (GAHINET et al., 1995) e “SeDuMi” (STURM, 1999), e nenhum deles encontrou uma solução.

Dessa forma, o próximo passo é tentar encontrar um ganho estabilizante  $K(\alpha)$  para o sistema (3.70). Resolvendo as LMIs do Teorema 3.3, as soluções obtidas pelo “YALMIP toolbox” (LÖFBERG, 2004) com o solver “SeDuMi” (STURM, 1999), foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.042 & -2.286 \times 10^{-3} \\ -2.286 \times 10^{-3} & 2.805 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -1.351 \times 10^{-3} & 4.938 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -7.378 \times 10^{-4} & 3.162 \times 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

De (3.50) segue que:

$$K(\alpha) = \alpha_1(z(t)) \begin{bmatrix} 0.067 & 1.814 \end{bmatrix} + \alpha_2(z(t)) \begin{bmatrix} 0.046 & 1.164 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Logo, o sistema (3.70) é quadraticamente estável com o controlador fuzzy (3.43). Apenas para ilustração, na Figura 3.13 são exibidos os autovalores do sistema (3.44), considerando os modelos locais (3.70) e o ganho (3.74). A simulação foi realizada variando o parâmetro  $\alpha_1$  de 0 a 1, com incrementos de 0.01, e considerando  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ .

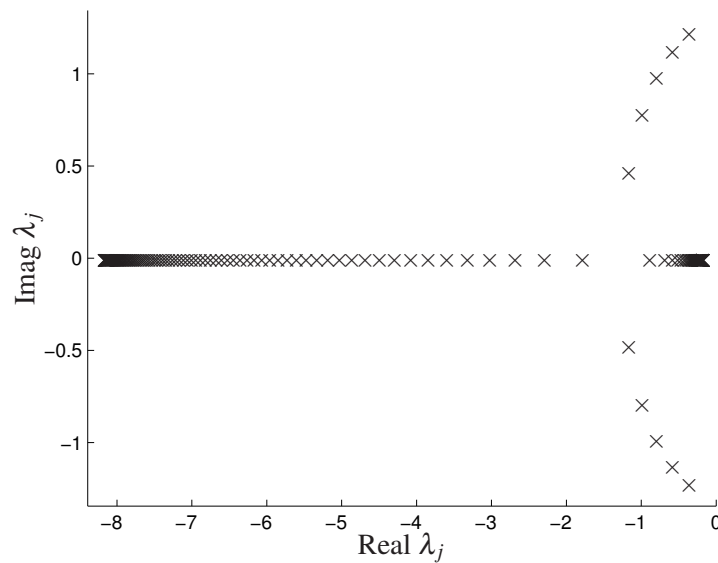


Figura 3.13: Localização dos autovalores do sistema fuzzy controlado com o ganho (3.74).

Pela Figura 3.13, verifica-se que os autovalores do sistema controlado possuem parte real negativa, e portanto, o sistema é globalmente assintoticamente estável.

Este exemplo ilustrativo, apesar de simples, foi o suficiente para verificar a aplicabilidade de controladores fuzzy.  $\square$

Para obter a função de pertinência usada nos ganhos (3.50) e (3.58) com a técnica apresentada em (TANIGUCHI et al., 2001), é necessário que alguns dos estados estejam disponíveis. A quantidade de estados necessária para o cálculo da função de pertinência depende das não-linearidades da planta. Em sistemas complexos, pode ser difícil o acesso a esses sinais, já que as técnicas propostas nesse capítulo são desenvolvidas com o interesse de aplicação em sistemas que usam acelerômetros como sensores, e normalmente, somente os sinais das derivadas dos estados estão disponíveis. Nessa situação os Teoremas 3.1 e 3.2 podem solucionar o problema.

Uma das vantagens do projeto de controladores baseados em LMIs, é que eles permitem, de um modo geral, que falhas estruturais sejam facilmente adicionadas no projeto do controlador (ZHONG et al., 2003; LIU; WANG; YANG, 2005; YE; YANG, 2006; YANG; CHEN, 2006). Na próxima seção são propostas condições suficientes para o projeto de controladores em sistemas não-lineares sujeitos a falhas.

### 3.5 Sistemas fuzzy T-S sujeitos a falhas estruturais

É muito comum o surgimento de falhas estruturais em sistemas mecânicos ou eletrônicos. Na maior parte dos casos, elas são provocadas pelo desgaste físico do equipamento, ou por curto circuito em componentes eletrônicos (ISERMANN, 2006). Como foi mencionado na Seção 2.2.2, neste trabalho, falhas estruturais são definidas como uma interrupção permanente na capacidade do sistema de realizar uma determinada função (ISERMANN; BALLÉ, 1997; ISERMANN, 1997). Isto é, ou o equipamento está funcionando normalmente, ou alguns dos componentes quebraram.

Antes de continuarmos com a modelagem do problema, gostaríamos de enfatizar que os resultados contidos nesta seção são conservadores, pois negligenciam o fato de que o desgaste físico de um componente pode afetar o desempenho do equipamento ao longo do tempo. Além disso, as falhas são estudadas de maneira superficial, sendo que a principal motivação para esta seção, é verificar que os resultados dos Teoremas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, podem ser facilmente estendidos para resolver sistemas fuzzy T-S, sujeitos a uma determinada classe de falhas estruturais. Uma abordagem completa sobre falhas estruturais em modelos fuzzy T-S pode ser encontrada em (SILVA, 2009), onde o autor trata separadamente as falhas estruturais das não-linearidades do sistema.

Para a formulação do problema, considere um sistema não-linear descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(x(t), s(t))x(t) + G(x(t), s(t))u(t), \\ y(t) &= H(x(t)).\end{aligned}\tag{3.75}$$

sendo  $F(x(t), s(t))$ ,  $G(x(t), s(t))$ ,  $H(x(t))$  funções não-lineares e  $s(t)$  uma função que representa a falha estrutural no sistema. Este sistema pode ser representado por modelos fuzzy T-S de tal forma que:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i(z(t))(A_{0_i}x(t) + B_{0_i}u(t)) = A_0(\alpha)x(t) + B_0(\alpha)u(t), \quad (3.76)$$

representa a planta não-linear (3.75) funcionando normalmente, e

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i(z(t))(A_{f_i}x(t) + B_{f_i}u(t)) = A_f(\alpha)x(t) + B_f(\alpha)u(t), \quad (3.77)$$

representa a planta não-linear (3.75) logo após a ocorrência de falhas.

O nosso objetivo agora é encontrar condições de existência para um ganho  $K$  que seja capaz de estabilizar os sistemas (3.76) e (3.77). O Teorema 3.1 pode ser facilmente estendido para resolver esse problema. Para isso, basta substituir o conjunto de LMIs (3.7) e (3.8) por:

$$Q > 0, \quad (3.78)$$

$$A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_j}YA'_{0_i} + A_{0_i}Y'B'_{0_j} < 0, \quad (3.79)$$

$$A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}YA'_{f_i} + A_{f_i}Y'B'_{f_j} < 0, \quad (3.80)$$

sendo  $i, j = 1, 2, \dots, r_a$ . Quando as LMIs (3.78)-(3.80) são factíveis, um ganho que resolve o Problema 2 pode ser obtido com (3.9).

De maneira similar podemos tratar os sistemas (3.76) e (3.77) com o Teorema 3.2 substituindo as LMIs (3.13)-(3.16) por

$$\begin{bmatrix} A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_j}YA'_{0_i} + A_{0_i}Y'B'_{0_j} & Q + B_{0_j}Y \\ Q + Y'B'_{0_j} & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.81)$$

$$\begin{bmatrix} A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}YA'_{f_i} + A_{f_i}Y'B'_{f_j} & Q + B_{f_j}Y \\ Q + Y'B'_{f_j} & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.82)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left( (Q + B_{0_j}Y)A'_{0_i} + A_{0_i}(Q + B_{0_j}Y)' \right) & -A_{0_i}QA'_{0_k} \\ -A_{0_i}QA'_{0_k} & \frac{r}{2} \left( (Q + B_{0_j}Y)A'_{0_i} + A_{0_i}(Q + B_{0_j}Y)' \right) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.83)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left( (Q + B_{f_j}Y)A'_{f_i} + A_{f_i}(Q + B_{f_j}Y)' \right) & -A_{f_i}QA'_{f_k} \\ -A_{f_i}QA'_{f_k} & \frac{r}{2} \left( (Q + B_{f_j}Y)A'_{f_i} + A_{f_i}(Q + B_{f_j}Y)' \right) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.84)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_j}YA'_{0_i} + A_{0_i}Y'B'_{0_j}) & \cos(\theta)[A_{0_i}Q + A_{0_i}Y'B'_{0_j} - (QA'_{0_i} + B_{0_j}YA'_{0_i})] \\ \cos(\theta)[QA'_{0_i} + B_{0_j}YA'_{0_i} - (A_{0_i}Q + A_{0_i}Y'B'_{0_j})] & \sin(\theta)(A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_j}YA'_{0_i} + A_{0_i}Y'B'_{0_j}) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.85)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}YA'_{f_i} + A_{f_i}Y'B'_{f_j}) & \cos(\theta)[A_{f_i}Q + A_{f_i}Y'B'_{f_j} - (QA'_{f_i} + B_{f_j}YA'_{f_i})] \\ \cos(\theta)[QA'_{f_i} + B_{f_j}YA'_{f_i} - (A_{f_i}Q + A_{f_i}Y'B'_{f_j})] & \sin(\theta)(A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}YA'_{f_i} + A_{f_i}Y'B'_{f_j}) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.86)$$

$$Q > 0, \quad (3.87)$$

sendo  $i, j, k = 1, \dots, r_a$ . Se (3.81)-(3.87) são factíveis, então uma solução para o Problema 2 pode ser dada por (3.17).

Os Teoremas 3.1 e 3.2 consideram apenas o controlador fixo (3.5). Contudo, podemos estender esses resultados para controladores fuzzy com a mesma facilidade. Dessa forma, encontrar o controlador fuzzy (3.43) que garante a estabilidade dos sistemas (3.76) e (3.77) com o Teorema 3.3, é equivalente a resolver as LMIs:

$$Q > 0, \quad (3.88)$$

$$A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_i}Y_iA'_{0_i} + A_{0_i}Y'_iB'_{0_i} < 0, \quad (3.89)$$

$$A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_i}Y_iA'_{f_i} + A_{f_i}Y'_iB'_{f_i} < 0, \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} & A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_i}Y_jA'_{0_i} + A_{0_i}Y'_jB'_{0_i} \\ & + A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_j}Y_iA'_{0_i} + A_{0_i}Y'_iB'_{0_j} \\ & + A_{0_j}Q + QA'_{0_j} + B_{0_i}Y_iA'_{0_j} + A_{0_j}Y'_iB'_{0_i} \leq 0, \quad (i \neq j), \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} & A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_i}Y_jA'_{f_i} + A_{f_i}Y'_jB'_{f_i} \\ & + A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}Y_iA'_{f_i} + A_{f_i}Y'_iB'_{f_j} \\ & + A_{f_j}Q + QA'_{f_j} + B_{f_i}Y_iA'_{f_j} + A_{f_j}Y'_iB'_{f_i} \leq 0, \quad (i \neq j), \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_j}Y_kA'_{0_i} + A_{0_i}Y'_kB'_{0_j} \leq 0, \quad (i \neq j, i \neq k \text{ e } j \neq k), \quad (3.93)$$

$$A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}Y_kA'_{f_i} + A_{f_i}Y'_kB'_{f_j} \leq 0, \quad (i \neq j, i \neq k \text{ e } j \neq k). \quad (3.94)$$

Quando (3.88)-(3.94) são factíveis, uma solução para o ganho  $K(\alpha)$  pode ser dada por (3.50).

De maneira similar pode-se resolver o Teorema 3.4 com as LMIs:

$$Q > 0, \quad (3.95)$$

$$\begin{bmatrix} A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_i}Y_iA'_{0_i} + A_{0_i}Y'_iB'_{0_i} & Q + B_{0_i}Y_i \\ Q + Y'_iB'_{0_i} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.96)$$

$$\begin{bmatrix} A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_i}Y_iA'_{f_i} + A_{f_i}Y'_iB'_{f_i} & Q + B_{f_i}Y_i \\ Q + Y'_iB'_{f_i} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_i}Y_jA'_{0_i} + A_{0_i}Y'_jB'_{0_i} & Q + B_{0_i}Y_j \\ Q + Y'_jB'_{0_i} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_j}Y_iA'_{0_i} + A_{0_i}Y'_iB'_{0_j} & Q + B_{0_j}Y_i \\ Q + Y'_iB'_{0_j} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A_{0_j}Q + QA'_{0_j} + B_{0_i}Y_iA'_{0_j} + A_{0_j}Y'_iB'_{0_i} & Q + B_{0_i}Y_i \\ Q + Y'_iB'_{0_i} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (i \neq j), \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}Y_jA'_{f_i} + A_{f_i}Y'_jB'_{f_i} & Q + B_{f_i}Y_j \\ Q + Y'_jB'_{f_i} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}Y_iA'_{f_i} + A_{f_i}Y'_iB'_{f_i} & Q + B_{f_j}Y_i \\ Q + Y'_iB'_{f_i} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} A_{f_j}Q + QA'_{f_j} + B_{f_j}Y_iA'_{f_j} + A_{f_j}Y'_iB'_{f_i} & Q + B_{f_i}Y_i \\ Q + Y'_iB'_{f_i} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (i \neq j), \quad (3.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A_{0_i}Q + QA'_{0_i} + B_{0_j}Y_kA'_{0_i} + A_{0_i}Y'_kB'_{0_j} & Q + B_{0_j}Y_k \\ Q + Y'_kB'_{0_j} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (i \neq j, i \neq k \text{ e } j \neq k), \quad (3.100)$$

$$\begin{bmatrix} A_{f_i}Q + QA'_{f_i} + B_{f_j}Y_kA'_{f_i} + A_{f_i}Y'_kB'_{f_j} & Q + B_{f_j}Y_k \\ Q + Y'_kB'_{f_j} & -Q/(2\gamma) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (i \neq j, i \neq k \text{ e } j \neq k), \quad (3.101)$$

E uma solução para o ganho  $K(\alpha)$  pode ser dada por (3.58).

Supondo que ocorra uma falha estrutural no sistema de suspensão ativa do Exemplo 3.2, o novo problema é resolvido a seguir, com as LMIs propostas nesta seção.

### Exemplo 3.5: Sistema de suspensão ativa sujeito a falhas

Considerando o sistema mecânico da Figura 3.7. Suponha que o amortecedor do assento do motorista  $b_2$  possa quebrar depois de algum tempo de uso. Assim, o amortecedor  $b_2$  está sujeito a uma falha estrutural, de tal forma que:  $b_2 = 5 \times 10^2 \text{Ns/m}$  enquanto o amortecedor está funcionando e  $b_2 = 0$  quando o amortecedor quebra. O novo problema pode ser formulado como sistemas fuzzy T-S (3.76) e (3.77). Considerando  $-0,5 \leq x_1(t) \leq 0,5$ , os modelos locais obtidos usando (TANIGUCHI et al., 2001) foram:

$$\begin{aligned}
A_{0_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -3 & 0,33333 \\ 55,556 & -55,556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix}, \\
A_{0_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36,667 & 3,3333 & -3 & 0,33333 \\ 55,556 & -55,556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix}, \\
B_{0_1} = B_{0_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,67 \times 10^{-4} & -6,67 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,11 \times 10^{-2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

enquanto o amortecedor está funcionando (neste caso,  $b_2 = 5 \times 10^2 \text{Ns/m}$ ), e

$$\begin{aligned}
 A_{f_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -2,6667 & 0 \\ 55,556 & -55,556 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_{f_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36,67 & 3,3333 & -2,6667 & 0 \\ 55,556 & -55,556 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_{f_1} = B_{f_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,67 \times 10^{-4} & -6,67 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,11 \times 10^{-2} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

depois que o amortecedor quebra (neste caso,  $b_2 = 0$ ). Observe que os modelos locais  $A_{0_1}$  e  $A_{0_2}$  são iguais a  $A_1$  e  $A_2$  do Exemplo 3.2 (porque o sistema do Exemplo 3.2 não apresenta falhas).

Considerando ( $\gamma = 1, 2$ ,  $r = 50$ ,  $\theta = 60^\circ$ ), a solução obtida pelo Teorema 3.2 com as LMIs (3.81)-(3.87) foi:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,023 & 0,019 & -0,221 & -0,156 \\ 0,019 & 0,023 & -0,175 & -0,233 \\ -0,221 & -0,175 & 3,168 & 2,331 \\ -0,156 & -0,233 & 2,331 & 3,98 \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 350,68 & 290,16 & -4,8003 \times 10^3 & -3,6939 \times 10^3 \\ 14,022 & 22,009 & -208,5 & -356,97 \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

Usando (3.17) obtém-se o ganho:

$$K = \begin{bmatrix} 1,9355 \times 10^3 & 346,23 & -1,3162 \times 10^3 & -60,996 \\ -1,6767 \times 10^3 & 1,632 \times 10^3 & -84,842 & -10,328 \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

O comportamento dinâmico do sistema não-linear sujeito a falhas, considerando a entrada (3.5) e o ganho (3.104), pode ser visto na Figura 3.14.

Observe pela Figura 3.14 que o ganho (3.104) é capaz de garantir uma rápida resposta transitória no sistema com (*linha pontilhada e tracejada*) ou sem (*linhas sólidas*) falhas no amortecedor  $b_2$ .

Seguindo a mesma idéia agora vamos resolver o Teorema 3.4 com as LMIs (3.95)-(3.101).



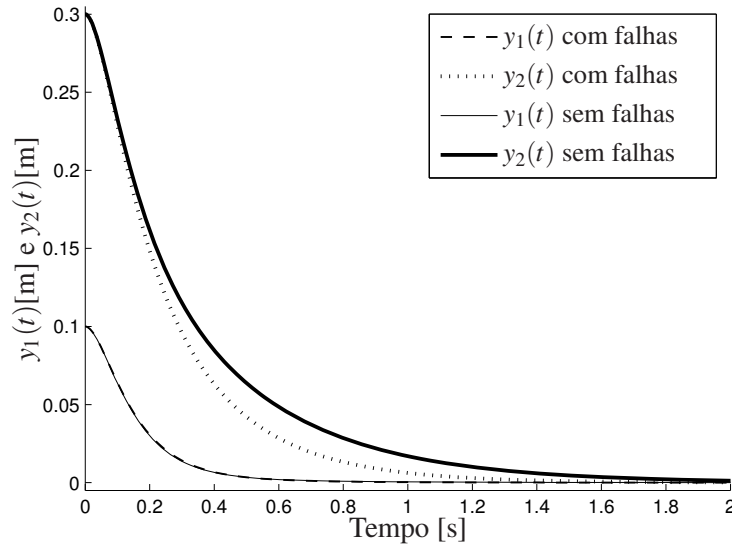


Figura 3.14: Respostas dos sistemas com e sem falhas, controlados com o ganho (3.104).

Assim como no Exemplo 3.3, o termo não-linear do sistema depende de  $x_1(t)$ . Considerando  $z(t) = x_1(t)$ , então uma função de pertinência para o sistema é dada por (3.61), com

$$\tilde{f}_1(x_1(t)) = -\frac{k_1(1 + a^2x_1(t)^2) + k_2}{M_c}.$$

Usando o parâmetro  $\gamma = 1,2$  para a solução do Teorema 3.4. O ganho obtido com (3.58) foi:

$$K(\alpha) = \alpha_1(x_1(t)) \begin{bmatrix} -669,11 & 349,04 & -1,4177 \times 10^3 & -22,289 \\ -155,82 & 253,71 & -0,472 & -79,522 \end{bmatrix} + \alpha_2(x_1(t)) \begin{bmatrix} 4,2827 \times 10^3 & 1,7197 \times 10^3 & -1,0504 \times 10^3 & 340,99 \\ -158,7 & 255,14 & -0,632 & -79,498 \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

As respostas dinâmicas dos sistemas (3.76) e (3.77), considerando a entrada (3.43) com o ganho (3.105), podem ser vistas na Figura 3.15.

Pelas Figuras (3.14) e (3.15) pode-se observar que os ganhos (3.104) e (3.105) são capazes de assegurar um bom desempenho no sistema controlado independentemente da ocorrência de falhas no amortecedor. Neste exemplo, o ganho (3.105) obtido com o Teorema 3.4, considerando  $\gamma = 1,2$ , foi capaz de terminar o período transitório do sistema mais rápido que o ganho (3.104) obtido com o Teorema 3.2, considerando  $(\gamma = 1,2, r = 50, \theta = 60^\circ)$ .  $\square$

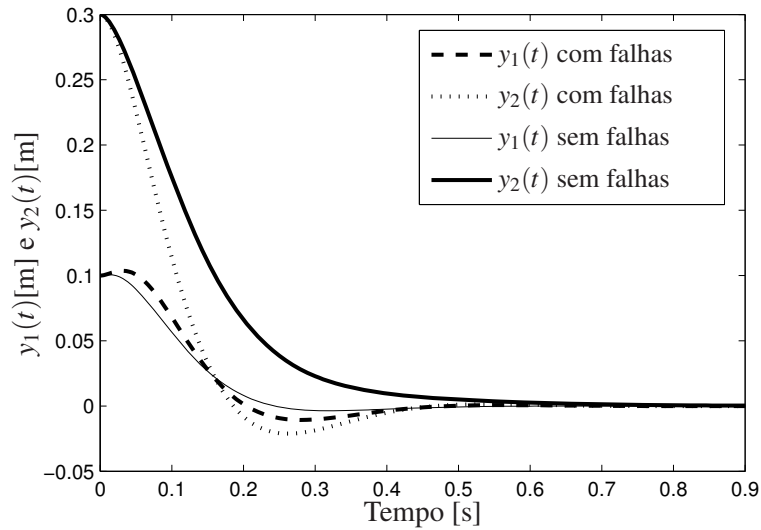


Figura 3.15: Respostas do sistema com e sem falhas, controlados com o ganho (3.105).

Os resultados apresentados até o momento permitem facilmente a inclusão de restrições de desempenho e de falhas estruturais no projeto do controlador. A Compensação Paralela Distribuída permitiu a obtenção de condições menos conservadoras para o projeto da realimentação derivativa em sistemas fuzzy T-S (Teoremas 3.3 e 3.4), mas essas condições ainda podem ser melhoradas. A partir dos resultados apresentados em (OLIVEIRA; PERES, 2005), na próxima seção são propostas condições mais relaxadas para a estabilidade quadrática do sistema (3.44), usando sequências de LMIs.

### 3.6 Condições relaxadas para estabilidade de sistemas fuzzy T-S

Considere um sistema autônomo, descrito por:

$$\dot{x}(t) = A_N(\alpha)x(t). \quad (3.106)$$

sendo  $A_N(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados. Um aspecto comum nos projetos de controle propostos nos Teoremas 3.1 e 3.3, é que os resultados se baseiam na existência de uma matriz simétrica  $Q$  satisfazendo as condições de Lyapunov:

$$\left. \begin{array}{l} Q > 0, \\ e \\ QA_N(\alpha)' + A_N(\alpha)Q < 0. \end{array} \right\} \quad (3.107)$$

Essas condições asseguram a estabilidade global do sistema (3.106). Vários autores têm estudado a estabilidade de sistemas fuzzy usando realimentação de estados (TANAKA; SUGENO,

1992; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ŽAK, 1999; KIM; LEE, 2000; TANIGUCHI; TANAKA; WANG, 2000; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; FANG et al., 2006; TEIXEIRA et al., 2006b; TANAKA; OHTAKE; WANG, 2007), mas assim como os resultados das seções anteriores, esses trabalhos apresentam apenas condições suficientes. Usando a Compensação Paralela Distribuída, condições necessárias e suficientes para a estabilidade quadrática de sistemas fuzzy T-S foram recentemente propostas em (MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2007; SALA; ARIÑO, 2007). As condições de necessidade são obtidas a partir de uma extensão do Teorema de Pólya para funções polinomiais com coeficientes matriciais (HARDY; LITTLEWOOD; PÓLYA, 1952). Essa metodologia foi inicialmente usada na análise de estabilidade de sistemas lineares incertos (OLIVEIRA; PERES, 2005, 2007).

A partir dos resultados propostos nos Teoremas 3.3 e 3.4, nesta seção são propostas condições mais relaxadas para a estabilidade quadrática de sistemas fuzzy T-S, usando a realimentação derivativa. A metodologia segue a mesma estratégia proposta por (OLIVEIRA; PERES, 2005), onde é desenvolvido um algoritmo tal que: a cada iteração é gerado um conjunto de restrições LMI, com número fixo de variáveis de decisão, mas que são progressivamente menos conservadoras. A técnica proposta permite a inclusão de restrições de desempenho no projeto, tais como: limite na taxa de decaimento e limite no valor de saída do sistema. A eficiência da técnica pode ser verificada na solução de dois exemplos numéricos.

### 3.6.1 Projeto do controlador: Condições de estabilidade

O projeto de controladores para a estabilidade de sistemas fuzzy T-S (3.2) considerando a entrada (3.43), é equivalente à existência de uma matriz simétrica  $Q$  e de uma matriz linearmente dependente de parâmetros  $Y(\alpha)$ , satisfazendo o seguinte lema.

**Lema 3.1.** *O sistema (3.44) é quadraticamente estável se e somente se, existe uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz dependente de parâmetros  $Y(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que:*

$$Q > 0, \quad (3.108)$$

$$A(\alpha)Q + QA(\alpha)' + B(\alpha)Y(\alpha)A(\alpha)' + A(\alpha)Y(\alpha)'B(\alpha)' < 0. \quad (3.109)$$

Se (3.108) e (3.109) são factíveis, então uma solução para o Problema 3 pode ser dada por:

$$K(\alpha) = Y(\alpha)Q^{-1}. \quad (3.110)$$

**Prova:** (*Suficiência*) Suponha que (3.108) e (3.109) são factíveis. Substituindo  $Y(\alpha) = K(\alpha)Q$  em (3.109) tem-se

$$(I + B(\alpha)K(\alpha))QA(\alpha)' + A(\alpha)Q(I + B(\alpha)K(\alpha))' < 0, \quad (3.111)$$

da Propriedade 1.1 pode-se concluir que as matrizes  $(I + B(\alpha)K(\alpha))$  e  $A(\alpha)'$  são invertíveis. Multiplicando (3.111) à esquerda por  $(I + B(\alpha)K(\alpha))^{-1}$ , à direita por  $[(I + B(\alpha)K(\alpha))']^{-1}$  e substituindo  $A_N(\alpha) = (I + B(\alpha)K(\alpha))^{-1}A(\alpha)$  chega-se em

$$QA_N(\alpha)' + A_N(\alpha)Q < 0.$$

Que é equivalente à condição de Lyapunov (3.107). Portanto quando as LMIs (3.108) e (3.109) são factíveis, o sistema (3.44) é quadraticamente estável.

(*Necessidade*) Se o sistema (3.44) é quadraticamente estável, então existe uma matriz  $Q$  satisfazendo (3.107), que é equivalente a (3.108) e (3.109), considerando  $A_N(\alpha) = (I + B(\alpha)K(\alpha))^{-1}A(\alpha)$  e  $Y(\alpha) = K(\alpha)Q$ . Portanto quando (3.44) é quadraticamente estável, as LMIs (3.108) e (3.109) são factíveis. ■

**Observação 3.5.** A condição de necessidade no Lema 3.1, foi obtida ao considerar as matrizes dependentes de parâmetros  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  e  $K(\alpha)$  na solução do Problema 3. Por outro lado, o Teorema 3.3 obtém condições suficientes considerando apenas os parâmetros dos modelos locais  $A_i$ ,  $B_i$  e  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, r_a$ . No entanto, a solução da LMI dependente de parâmetros (3.109) para cada ponto do domínio (3.4), é um problema de dimensão infinita, o que inviabiliza o seu uso na prática.

O principal objetivo desta seção é obter condições menos conservadoras para a solução do Problema 3, considerando o Lema 3.1 e os resultados apresentados em (OLIVEIRA; PERES, 2005). Durante o desenvolvimento da teoria são necessários alguns conceitos. Seja  $\mathbb{Z}_+$  o conjunto dos números inteiros não negativos  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{K}(d)$  o conjunto lexicamente ordenado de  $r_a$ -uplas de todas as permutações possíveis de  $p_1 p_2 \dots p_{r_a} \in \mathbb{Z}_+$ , tais que:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{r_a} = d.$$

O número de elementos de  $\mathcal{K}(d)$  é dado por (OLIVEIRA; PERES, 2005):

$$J(d) = \frac{(r_a + d - 1)!}{d!(r_a - 1)!}.$$

Seja  $\mathcal{K}^\ell(d)$ , a  $\ell$ -ésima  $N$ -upla do conjunto  $\mathcal{K}(d)$  e  $\mathcal{C}_i^\ell(d, a)$ ,  $\mathcal{C}_{ij}^\ell(d, a, b)$ ,  $\mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, a, b, c)$  coeficientes, dados por:

$$\mathcal{E}_i^\ell(d, a) = \begin{cases} \frac{d!}{p_1! \cdots (p_i - a)! \cdots p_{r_a}!}, & \text{se } (p_i - a) \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{ij}^\ell(d, a, b) = \begin{cases} \frac{d!}{p_1! \cdots (p_i - a)! \cdots (p_j - b)! \cdots p_{r_a}!}, & \text{se } \begin{cases} (p_i - a) \in \mathbb{Z}_+, \\ \text{e} \\ (p_j - b) \in \mathbb{Z}_+, \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{ijk}^\ell(d, a, b, c) = \begin{cases} \frac{d!}{p_1! \cdots (p_i - a)! \cdots (p_j - b)! \cdots (p_k - c)! \cdots p_{r_a}!}, & \text{se } \begin{cases} (p_i - a) \in \mathbb{Z}_+, \\ \text{e} \\ (p_j - b) \in \mathbb{Z}_+, \\ \text{e} \\ (p_k - c) \in \mathbb{Z}_+, \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$p_1 p_2 \cdots p_{r_a} = \mathcal{X}^\ell(d)$ ;  $\ell = 1, 2, \dots, J(d)$ ;  $i, j, k = 1, 2, \dots, r_a$ ;  $a, b \text{ e } c \in \mathbb{Z}_+$ .

A LMI (3.109) do Lema 3.1 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= A(\alpha)Q + QA(\alpha)' + B(\alpha)Y(\alpha)A(\alpha)' + A(\alpha)Y(\alpha)'B(\alpha)' \\ &= \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i^3 T_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} \alpha_i^2 \alpha_j T_{ij} + \sum_{i=1}^{r_a-2} \sum_{j=i+1}^{r_a-1} \sum_{k=j+1}^{r_a} \alpha_i \alpha_j \alpha_k T_{ijk}, \end{aligned} \quad (3.112)$$

sendo  $Y(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i Y_i$  e

$$T_i = A_i Q + Q A_i' + B_i Y_i A_i' + A_i Y_i' B_i', \quad (3.113a)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{ij} &= \left. \begin{aligned} &A_i Q + Q A_i' + B_j Y_i A_i' + A_i Y_i' B_j' \\ &+ A_i Q + Q A_i' + B_i Y_j A_i' + A_i Y_j' B_i' \\ &+ A_j Q + Q A_j' + B_i Y_i A_j' + A_j Y_i' B_i', \end{aligned} \right\} \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (3.113b)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{ijk} &= \left. \begin{aligned} &A_i Q + Q A_i' + B_j Y_k A_i' + A_i Y_k' B_j' \\ &+ A_i Q + Q A_i' + B_k Y_j A_i' + A_i Y_j' B_k' \\ &+ A_j Q + Q A_j' + B_k Y_i A_j' + A_j Y_i' B_k' \\ &+ A_j Q + Q A_j' + B_i Y_k A_j' + A_j Y_k' B_i' \\ &+ A_k Q + Q A_k' + B_j Y_i A_k' + A_k Y_i' B_j' \\ &+ A_k Q + Q A_k' + B_i Y_j A_k' + A_k Y_j' B_i', \end{aligned} \right\} \quad i < j < k. \end{aligned} \quad (3.113c)$$

Considerando (3.4) em (3.112), chega-se na seguinte equivalência:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{r_a})^d \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha) < 0. \quad (3.114)$$

O que pretendemos agora, é relaxar as condições de estabilidade do sistema (3.44), explorando as propriedades algébricas de (3.114).

Considerando (OLIVEIRA; PERES, 2005, equação (9), pg. 218) em (3.114), obtém-se a seguinte igualdade:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{r_a})^d \Gamma(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{J(d+3)} \left( \sum_{i=1}^{r_a} \mathcal{C}_i^\ell(d, 3) T_i + \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{r_a} \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 2, 1) T_{ij} \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{r_a-2} \sum_{j=i+1}^{r_a-1} \sum_{k=j+1}^{r_a} \mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1) T_{ijk} \right) \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_{r_a}^{p_{r_a}}, \quad (3.115)$$

sendo  $p_1 p_2 \dots p_{r_a} = \mathcal{K}^\ell(d)$ ;  $\ell = 1, 2, \dots, J(d+3)$ . Logo, a estabilidade quadrática do sistema (3.44) pode ser verificada através de um problema de dimensão finita, envolvendo apenas as matrizes (3.113).

**Observação 3.6.** Como já foi mencionado, o valor dos coeficientes em (3.115) depende de  $r_a$  (número de modelos locais) e do parâmetro  $d$  (grau de relaxação). Além disso, observe que o coeficiente  $\mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1)$  é sempre nulo para  $r_a = 2$ .

Para ilustrar o equacionamento (3.115), considere um exemplo com  $r_a = 3$  e  $d = 0$ , os valores obtidos para os coeficientes são dados por:

$$\mathcal{K}(d+3) = \mathcal{K}(0+3) = \mathcal{K}(3).$$

O número de elementos de  $\mathcal{K}(3)$  é dado por (OLIVEIRA; PERES, 2005):

$$J(3) = \frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Assim,

$$\mathcal{K}(3) = \{003 \ 012 \ 021 \ 030 \ 102 \ 111 \ 120 \ 201 \ 210 \ 300\},$$

$\ell = 1, 2, \dots, J(3) = 10$  e  $i, j, k = 1, 2, 3$ . O restante dos parâmetros são dados na tabela abaixo

Tabela 3.1: Coeficientes da equação (3.115), considerando  $r_a = 3$  e  $d = 0$ .

$\ell = 1$
$\mathcal{H}^1(3) = \{003\}$  $p_1 - a = p_1 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^1(0,3) = 0$  $p_2 - a = p_2 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^1(0,3) = 0$  $\mathcal{C}_3^1(0,3) = \frac{0!}{p_1! p_2! (p_3 - 3)!} = \frac{0!}{0! 0! (3 - 3)!} = \frac{0!}{0! 0! 0!} = 1$  $p_1 - a = p_1 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^1(0,2,1) = \mathcal{C}_{13}^1(0,2,1) = 0$  $p_2 - a = p_2 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^1(0,2,1) = \mathcal{C}_{23}^1(0,2,1) = 0$  $p_1 - b = p_2 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{31}^1(0,2,1) = \mathcal{C}_{32}^1(0,2,1) = 0$  $p_1 - a = p_2 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^1(0,1,1,1) = 0$
$\ell = 2$
$\mathcal{H}^2(3) = \{012\}$  $p_1 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^2(0,3) = 0$  $p_2 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^2(0,3) = 0$  $p_3 - 3 = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_3^2(0,3) = 0$  $p_1 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^2(0,2,1) = \mathcal{C}_{13}^2(0,2,1) = 0$

continua na próxima página...

$$p_2 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^2(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{23}^2(0, 2, 1) = 0$$

$$p_1 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{31}^2(0, 2, 1) = 0$$

$$\mathcal{C}_{32}^2(0, 2, 1) = \frac{0!}{p_1!(p_2 - 1)!(p_3 - 2)!} = \frac{0!}{0!(1 - 1)!(2 - 2)!} = \frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$p_1 - a = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^2(0, 1, 1, 1) = 0$$

$$\ell = 3$$

$$\mathcal{H}^3(3) = \{021\}$$

$$p_1 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^3(0, 3) = 0$$

$$p_2 - 3 = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^3(0, 3) = 0$$

$$p_3 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_3^3(0, 3) = 0$$

$$p_1 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^3(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{13}^3(0, 2, 1) = 0$$

$$p_1 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^3(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{31}^3(0, 2, 1) = 0$$

$$\mathcal{C}_{23}^3(0, 2, 1) = \frac{0!}{p_1!(p_2 - 2)!(p_3 - 1)!} = \frac{0!}{0!(2 - 2)!(1 - 1)!} = \frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$p_3 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{32}^3(0, 2, 1) = 0$$

$$p_1 - a = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^3(0, 1, 1, 1) = 0$$

$$\ell = 4$$

$$\mathcal{H}^4(3) = \{030\}$$

continua na próxima página...



$$p_1 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^4(0, 3) = 0$$

$$\mathcal{C}_2^4(0, 3) = \frac{0!}{p_1!(p_2 - 3)!p_3!} = \frac{0!}{0!(3 - 3)!0!} = \frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$p_3 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^4(0, 3) = 0$$

$$p_1 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^4(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{13}^4(0, 2, 1) = 0$$

$$p_3 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{31}^4(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{32}^4(0, 2, 1) = 0$$

$$p_1 - b = p_3 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^4(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{23}^4(0, 2, 1) = 0$$

$$p_1 - a = p_3 - c = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^4(0, 1, 1, 1) = 0$$

$$l = 5$$

$$\mathcal{H}^5(3) = \{102\}$$

$$p_1 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^5(0, 3) = 0$$

$$p_2 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^5(0, 3) = 0$$

$$p_3 - 3 = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_3^5(0, 3) = 0$$

$$p_1 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^5(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{13}^5(0, 2, 1) = 0$$

$$p_2 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^5(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{23}^5(0, 2, 1) = 0$$

$$\mathcal{C}_{31}^5(0, 2, 1) = \frac{0!}{(p_1 - 1)!p_2!(p_3 - 2)!} = \frac{0!}{(1 - 1)!0!(2 - 2)!} = \frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$p_2 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{32}^5(0, 2, 1) = 0$$

continua na próxima página...

$$p_2 - a = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^5(0, 1, 1, 1) = 0$$

$$\ell = 6$$

$$\mathcal{H}^6(3) = \{111\}$$

$$p_1 - 3 = p_2 - 3 = p_3 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^6(0, 3) = \mathcal{C}_2^6(0, 3) = \mathcal{C}_3^6(0, 3) = 0$$

$$p_1 - 2 = p_2 - 2 = p_3 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^6(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{13}^6(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{21}^6(0, 2, 1) \\ = \mathcal{C}_{23}^6(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{31}^6(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{32}^6(0, 2, 1) = 0$$

$$\mathcal{C}_{123}^6(0, 1, 1, 1) = \frac{0!}{(p_1 - 1)!(p_2 - 1)!(p_3 - 1)!} = \frac{0!}{(1 - 1)!(1 - 1)!(1 - 1)!} = \frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$\ell = 7$$

$$\mathcal{H}^7(3) = \{120\}$$

$$p_1 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^7(0, 3) = 0$$

$$p_2 - 3 = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^7(0, 3) = 0$$

$$p_3 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_3^7(0, 3) = 0$$

$$p_1 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^7(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{13}^7(0, 2, 1) = 0$$

$$\mathcal{C}_{21}^7(0, 2, 1) = \frac{0!}{(p_1 - 1)!(p_2 - 2)!p_3!} = \frac{0!}{(1 - 1)!(2 - 2)!0!} = \frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$p_3 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{23}^7(0, 2, 1) = 0$$

$$p_3 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{31}^7(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{32}^7(0, 2, 1) = 0$$

continua na próxima página...

$$p_3 - c = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^7(0, 1, 1, 1) = 0$$

$$\ell = 8$$

$$\mathcal{H}^8(3) = \{201\}$$

$$p_1 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^8(0, 3) = 0$$

$$p_2 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^8(0, 3) = 0$$

$$p_3 - 3 = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_3^8(0, 3) = 0$$

$$p_2 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^8(0, 2, 1) = 0$$

$$\mathcal{C}_{13}^8(0, 2, 1) = \frac{0!}{(p_1 - 2)! p_2! (p_3 - 1)!} = \frac{0!}{(2 - 2)! 0! (1 - 1)!} = \frac{0!}{0! 0! 0!} = 1$$

$$p_2 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^8(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{23}^8(0, 2, 1) = 0$$

$$p_3 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{31}^8(0, 2, 1) = \mathcal{C}_{32}^8(0, 2, 1) = 0$$

$$p_2 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^8(0, 1, 1, 1) = 0$$

$$\ell = 9$$

$$\mathcal{H}^9(3) = \{210\}$$

$$p_1 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^9(0, 3) = 0$$

$$p_2 - 3 = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^9(0, 3) = 0$$

$$p_3 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_3^9(0, 3) = 0$$

continua na próxima página...

$$\mathcal{C}_{12}^9(0,2,1) = \frac{0!}{(p_1-2)!(p_2-1)!p_3!} = \frac{0!}{(2-2)!(1-1)!0!} = \frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$p_3 - 1 = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{13}^9(0,2,1) = 0$$

$$p_2 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^9(0,2,1) = \mathcal{C}_{23}^9(0,2,1) = 0$$

$$p_3 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{31}^9(0,2,1) = \mathcal{C}_{32}^9(0,2,1) = 0$$

$$p_3 - c = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^9(0,1,1,1) = 0$$

$$\ell = 10$$

$$\mathcal{H}^{10}(3) = \{300\}$$

$$\mathcal{C}_1^{10}(0,3) = \frac{0!}{(p_1-3)!p_2!p_3!} = \frac{0!}{(3-3)!0!0!} = \frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$p_2 - 3 = p_3 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^{10}(0,3) = \mathcal{C}_3^{10}(0,3) = 0$$

$$p_2 - b = p_3 - b = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^{10}(0,2,1) = \mathcal{C}_{13}^{10}(0,2,1) = 0$$

$$p_2 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^{10}(0,2,1) = \mathcal{C}_{23}^4(0,2,1) = 0$$

$$p_3 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{31}^{10}(0,2,1) = \mathcal{C}_{32}^4(0,2,1) = 0$$

$$p_2 - b = p_3 - c = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{123}^{10}(0,1,1,1) = 0$$

Para este caso, a equação (3.115) é dada por:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{r_a})^0 \Gamma(\alpha) &= \sum_{\ell=1}^{J(3)} \left( \sum_{i=1}^3 \mathcal{C}_i^\ell(0,3) T_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \mathcal{C}_{ij}^\ell(0,2,1) T_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{3-2} \sum_{j=i+1}^{3-1} \sum_{k=j+1}^3 \mathcal{C}_{ijk}^\ell(0,1,1,1) T_{ijk} \right) \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} = \\ &\alpha_1^0 \alpha_2^0 \alpha_3^3 T_3 + \alpha_1^0 \alpha_2^1 \alpha_3^2 T_{32} + \alpha_1^0 \alpha_2^2 \alpha_3^1 T_{23} + \alpha_1^0 \alpha_2^3 \alpha_3^0 T_2 + \alpha_1^1 \alpha_2^0 \alpha_3^2 T_{31} + \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_3^1 T_{123} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^0 T_{21} + \alpha_1^2 \alpha_2^0 \alpha_3^1 T_{13} + \alpha_1^2 \alpha_2^1 \alpha_3^0 T_{12} + \alpha_1^3 \alpha_2^0 \alpha_3^0 T_1 = \\
& \alpha_3^3 T_3 + \alpha_2 \alpha_3^2 T_{32} + \alpha_2^2 \alpha_3 T_{23} + \alpha_2^3 T_2 + \alpha_1 \alpha_3^2 T_{31} + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 T_{123} + \alpha_1 \alpha_2^2 T_{21} \\
& + \alpha_1^2 \alpha_3 T_{13} + \alpha_1^2 \alpha_2 T_{12} + \alpha_1^3 T_1 = \Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$

O principal resultado desta seção é apresentado no próximo teorema, onde são obtidas condições menos conservadoras para a estabilidade quadrática de (3.44), considerando (3.112), (3.113) e (3.115).

**Teorema 3.5.** *Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e um valor  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tal que (3.116) e (3.117) são factíveis, então o sistema (3.44) é quadraticamente estável e uma solução para o Problema 3 pode ser obtida com (3.118).*

$$Q > 0, \quad (3.116)$$

$$\Gamma_\ell = \sum_{i=1}^{r_a} \mathcal{C}_i^\ell(d, 3) T_i + \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r_a} \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 2, 1) T_{ij} + \sum_{i=1}^{r_a-2} \sum_{j=i+1}^{r_a-1} \sum_{k=j+1}^{r_a} \mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1) T_{ijk} < 0, \quad (3.117)$$

sendo  $\ell = 1, 2, \dots, J(d+3)$ .

$$K(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i Y_i Q^{-1}. \quad (3.118)$$

**Prova:** (Suficiência): Se existir um valor  $d \in \mathbb{Z}_+$ , tal que a LMI (3.117) é factível para  $\ell = 1, 2, \dots, J(d+3)$ , então

$$\sum_{\ell=1}^{J(d+3)} \left( \sum_{i=1}^{r_a} \mathcal{C}_i^\ell(d, 3) T_i + \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{r_a} \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 2, 1) T_{ij} + \sum_{i=1}^{r_a-2} \sum_{j=i+1}^{r_a-1} \sum_{k=j+1}^{r_a} \mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1) T_{ijk} \right) \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \cdots \alpha_{r_a}^{p_{r_a}} < 0,$$

sendo  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r_a} \in (3.4)$  e  $p_1 p_2 \cdots p_{r_a} = \mathcal{K}^\ell(d)$ . De (3.115) segue que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell=1}^{J(d+3)} \left( \sum_{i=1}^{r_a} \mathcal{C}_i^\ell(d, 3) T_i + \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{r_a} \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 2, 1) T_{ij} + \sum_{i=1}^{r_a-2} \sum_{j=i+1}^{r_a-1} \sum_{k=j+1}^{r_a} \mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1) T_{ijk} \right) \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \cdots \alpha_{r_a}^{p_{r_a}} = \\
& (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r_a})^d \Gamma(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in (3.4).
\end{aligned} \quad (3.119)$$

E de (3.114) conclui-se que  $\Gamma(\alpha) < 0, \forall \alpha \in (3.4)$ . Portanto, quando (3.116) e (3.117) são factíveis, o Lema 3.1 é satisfeito. ■

**Observação 3.7.** *A restrição (3.117) gera uma sequência de LMIs dependentes do parâmetro  $d$ . Uma sequência similar foi usada em (OLIVEIRA; PERES, 2005, equação (9), pg. 218) para garantir a Schur estabilidade de sistemas lineares incertos. Usando uma extensão do Teorema de Pólya para funções polinomiais com coeficientes matriciais (HARDY; LITTLEWOOD; PÓLYA,*

1952), os autores verificaram que: se a sequência (3.117) é factível para um valor  $d_0$ , então ela também é factível para todo  $d > d_0$ , e converge para as condições de necessidade da Schur estabilidade. No projeto de controladores esse resultado implica que: sempre que existir um controlador (3.43) quadraticamente estabilizante, a sequência (3.117) é convergente, e tende para as condições de necessidade da existência de um ganho  $K(\alpha)$  satisfazendo o Problema 3.

Como já foi verificado nas seções anteriores, o desempenho do sistema em malha fechada pode ser melhorado, inserindo a restrição de taxa de decaimento no projeto do controlador.

### 3.6.2 Projeto do controlador: Condições de estabilidade com taxa de decaimento

Do Teorema 3.4, tem-se que o sistema (3.44) é quadraticamente estável com taxa de decaimento superior a  $\gamma > 0$ , se existir uma matriz simétrica  $Q$  e uma matriz  $Y(\alpha)$  tais que:

$$\left. \begin{array}{l} Q > 0, \\ \left[ \begin{array}{cc} A(\alpha)Q + QA(\alpha)' + B(\alpha)Y(\alpha)A(\alpha)' + A(\alpha)Y(\alpha)'B(\alpha)' & Q + B(\alpha)Y(\alpha) \\ Q + Y(\alpha)'B(\alpha)' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] < 0. \end{array} \right\} \quad (3.120)$$

Agora considere as seguintes expressões

$$TD_i = \left[ \begin{array}{cc} A_iQ + QA_i' + B_iY_iA_i' + A_iY_i'B_i' & Q + B_iY_i \\ Q + Y_i'B_i' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right], \quad (3.121a)$$

$$TD_{ij} = \left. \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} A_iQ + QA_i' + B_jY_iA_i' + A_iY_i'B_j' & Q + B_jY_i \\ Q + Y_i'B_j' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc} A_iQ + QA_i' + B_iY_jA_i' + A_iY_j'B_i' & Q + B_iY_j \\ Q + Y_j'B_i' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc} A_jQ + QA_j' + B_iY_iA_j' + A_jY_i'B_i' & Q + B_iY_i \\ Q + Y_i'B_i' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right], \quad i \neq j, \end{array} \right\} \quad (3.121b)$$

$$TD_{ijk} = \left. \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} A_iQ + QA_i' + B_jY_kA_i' + A_iY_k'B_j' & Q + B_jY_k \\ Q + Y_k'B_j' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc} A_iQ + QA_i' + B_kY_jA_i' + A_iY_j'B_k' & Q + B_kY_j \\ Q + Y_j'B_k' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc} A_jQ + QA_j' + B_kY_iA_j' + A_jY_i'B_k' & Q + B_kY_i \\ Q + Y_i'B_k' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc} A_jQ + QA_j' + B_iY_kA_j' + A_jY_k'B_i' & Q + B_iY_k \\ Q + Y_k'B_i' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc} A_kQ + QA_k' + B_jY_iA_k' + A_kY_i'B_j' & Q + B_jY_i \\ Q + Y_i'B_j' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc} A_kQ + QA_k' + B_iY_jA_k' + A_kY_j'B_i' & Q + B_iY_j \\ Q + Y_j'B_i' & -Q/(2\gamma) \end{array} \right], \quad i < j < k, \end{array} \right\} \quad (3.121c)$$

sendo  $i, j, k = 1, 2, \dots, r_a$ .

A partir de (3.120) e (3.121), no próximo teorema são propostas condições suficientes para que o sistema (3.44) seja quadraticamente estável com taxa de decaimento superior a  $\gamma$ .

**Teorema 3.6.** *Se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e um valor  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que (3.122) e (3.123) são factíveis, então o sistema (3.44) é quadraticamente estável com limite na taxa de decaimento  $\gamma$ , e uma solução para o Problema 3 pode ser dada por (3.124).*

$$Q > 0, \quad (3.122)$$

$$\Gamma_\ell = \sum_{i=1}^{r_a} \mathcal{C}_i^\ell(d, 3)TD_i + \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r_a} \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 2, 1)TD_{ij} + \sum_{i=1}^{r_a-2} \sum_{j=i+1}^{r_a-1} \sum_{k=j+1}^{r_a} \mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1)TD_{ijk} < 0, \quad (3.123)$$

sendo  $\ell = 1, 2, \dots, J(d+3)$ .

$$K(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_a} \alpha_i Y_i Q^{-1}. \quad (3.124)$$

**Prova:** A demonstração deste teorema segue diretamente da prova do Teorema (3.5), considerando (3.120), (3.121) e substituindo (3.117) por (3.123). ■

A eficiência da metodologia proposta nesta seção é verificada na solução de dois exemplos numéricos.

### Exemplo 3.6: Sistema de suspensão ativa

Considere o sistema de suspensão ativa do Exemplo 3.2 (Figura 3.7). Usando o método de representação exata (TANIGUCHI et al., 2001), com parâmetros:  $M_c = 1500\text{kg}$ ,  $m_s = 90\text{kg}$ ,  $b_1 = 4 \times 10^3 \text{Ns/m}$ ,  $b_2 = 5 \times 10^2 \text{Ns/m}$ ,  $k_2 = 5 \times 10^3 \text{N/m}$ ,  $k_x = k_1(1 + a^2 x_1(t)^2)$ ,  $k_1 = 4 \times 10^4 \text{N/m}$ ,  $a = 1\text{m}^{-1}$  e  $-0,5 \leq x_1(t) \leq 0,5$ , os seguintes modelos locais são obtidos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -3 & 0,33333 \\ 55,556 & -55,556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36,67 & 3,3333 & -3 & 0,33333 \\ 55,556 & -55,556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,6667 \times 10^{-4} & -6,6667 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,1111 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Se  $z(t) = x_1(t)$ , então uma função de pertinência para o sistema é dada por (3.61), com  $\tilde{f}_1(x_1(t)) = -\frac{k_1(1 + a^2x_1(t)^2) + k_2}{M_c}$ .

Como o problema possui apenas uma não-linearidade ( $r_a = 2$ ), então não é necessário calcular os coeficientes  $\mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1)$ . Considerando inicialmente  $d = 0$  e calculando os parâmetros:  $\mathcal{K}(d+3)$ ,  $\mathcal{C}_i^\ell(d, 3)$ ,  $\mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 2, 1)$ , obtém-se

$$\mathcal{K}(d+3) = \mathcal{K}(0+3) = \mathcal{K}(3).$$

O número de elementos de  $\mathcal{K}(3)$  é dado por  $J(3) = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ . Assim,

$$\mathcal{K}(3) = \{03 \ 12 \ 21 \ 30\}.$$

O restante dos parâmetros são exibidos na tabela abaixo:

Tabela 3.2: Parâmetros do Teorema 3.5, considerando  $r_a = 2$  e  $d = 0$ .

$\ell = 1$
$\mathcal{K}^1(3) = \{03\}$ $p_1 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^1(0, 3) = 0$ $\mathcal{C}_2^1(0, 3) = \frac{0!}{p_1!(p_2-3)!} = \frac{0!}{0!(3-3)!} = \frac{0!}{0!0!} = 1$ $p_1 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^1(0, 2, 1) = 0$ $p_1 - 1 = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^1(0, 2, 1) = 0$
$\ell = 2$
$\mathcal{K}^2(3) = \{12\}$ $p_1 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^2(0, 3) = 0$ $p_2 - 3 = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^2(0, 3) = 0$ $p_1 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^2(0, 2, 1) = 0$ $\mathcal{C}_{21}^2(0, 2, 1) = \frac{0!}{(p_2-2)!(p_1-1)!} = \frac{0!}{(2-2)!(1-1)!} = \frac{0!}{0!0!} = 1$
continua na próxima página...



$\ell = 3$
$\mathcal{H}^3(3) = \{21\}$ $p_1 - 3 = 2 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1^3(0,3) = 0$ $p_2 - 3 = 1 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^3(0,3) = 0$ $\mathcal{C}_{12}^3(0,2,1) = \frac{0!}{(p_1 - 2)!(p_2 - 1)!} = \frac{0!}{(2 - 2)!(1 - 1)!} = \frac{0!}{0!0!} = 1$ $p_2 - 2 = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^3(0,2,1) = 0$
$\ell = 4$
$\mathcal{H}^4(3) = \{30\}$ $\mathcal{C}_1^4(0,3) = \frac{0!}{(p_1 - 3)!p_2!} = \frac{0!}{(3 - 3)!0!} = \frac{0!}{0!0!} = 1$ $p_2 - 3 = 0 - 3 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2^4(0,3) = 0$ $p_2 - 1 = 0 - 1 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{12}^4(0,2,1) = 0$ $p_2 - 2 = 0 - 2 < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{21}^4(0,2,1) = 0$

Dessa forma pela Tabela 3.2 e de (3.117), tem-se que

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \mathcal{C}_1^1(0,3)T_1 + \mathcal{C}_2^1(0,3)T_2 + \mathcal{C}_{12}^1(0,2,1)T_{12} + \mathcal{C}_{21}^1(0,2,1)T_{21} = 0T_1 + 1T_2 + 0T_{12} + 0T_{21} = T_2 < 0, \\ \Gamma_2 &= \mathcal{C}_1^2(0,3)T_1 + \mathcal{C}_2^2(0,3)T_2 + \mathcal{C}_{12}^2(0,2,1)T_{12} + \mathcal{C}_{21}^2(0,2,1)T_{21} = 0T_1 + 0T_2 + 0T_{12} + 1T_{21} = T_{21} < 0, \\ \Gamma_3 &= \mathcal{C}_1^3(0,3)T_1 + \mathcal{C}_2^3(0,3)T_2 + \mathcal{C}_{12}^3(0,2,1)T_{12} + \mathcal{C}_{21}^3(0,2,1)T_{21} = 0T_1 + 0T_2 + 1T_{12} + 0T_{21} = T_{12} < 0, \\ \Gamma_4 &= \mathcal{C}_1^4(0,3)T_1 + \mathcal{C}_2^4(0,3)T_2 + \mathcal{C}_{12}^4(0,2,1)T_{12} + \mathcal{C}_{21}^4(0,2,1)T_{21} = 1T_1 + 0T_2 + 0T_{12} + 0T_{21} = T_1 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.125)$$

Usando o MATLAB (LÖFBERG, 2004; STURM, 1999) para resolver as LMIs (3.116) e (3.125) do Teorema 3.5, foram obtidas as seguintes soluções:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,602 \times 10^{-2} & 2,154 \times 10^{-9} & -0,307 & -1,207 \times 10^{-9} \\ 2,154 \times 10^{-9} & 1,1934 & -2,623 \times 10^{-10} & -0,4517 \\ -0,307 & -2,623 \times 10^{-10} & 2,2946 & 4,792 \times 10^{-9} \\ -1,207 \times 10^{-9} & -0,4517 & 4,792 \times 10^{-9} & 1,1934 \end{bmatrix}, \quad (3.126)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 361,39 & 215,62 & -1,9529 \times 10^3 & -107,4 \\ -0,696 & -548,03 & -147,06 & 5,6335 \times 10^3 \end{bmatrix}, \quad (3.127)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 361,39 & 215,62 & -1,9529 \times 10^3 & -107,4 \\ -0,696 & -548,03 & -147,06 & 5,6335 \times 10^3 \end{bmatrix}. \quad (3.128)$$

De (3.118) segue que:

$$K(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 5,2574 \times 10^3 & 171,14 & -146,54 & -25,228 \\ -1,0759 \times 10^3 & 1,5494 \times 10^3 & -208,26 & 5,3072 \times 10^3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 5,2574 \times 10^3 & 171,14 & -146,54 & -25,228 \\ -1,0759 \times 10^3 & 1,5494 \times 10^3 & -208,26 & 5,3072 \times 10^3 \end{bmatrix}. \quad (3.129)$$

Para a condição inicial  $x(0) = [0,1 \ 0,3 \ 0 \ 0]'$ , o comportamento dinâmico do sistema não-linear (3.36) realimentado com a entrada (3.43), considerando o ganho (3.129) e a função de pertinência (3.61), pode ser visto na Figura 3.16.

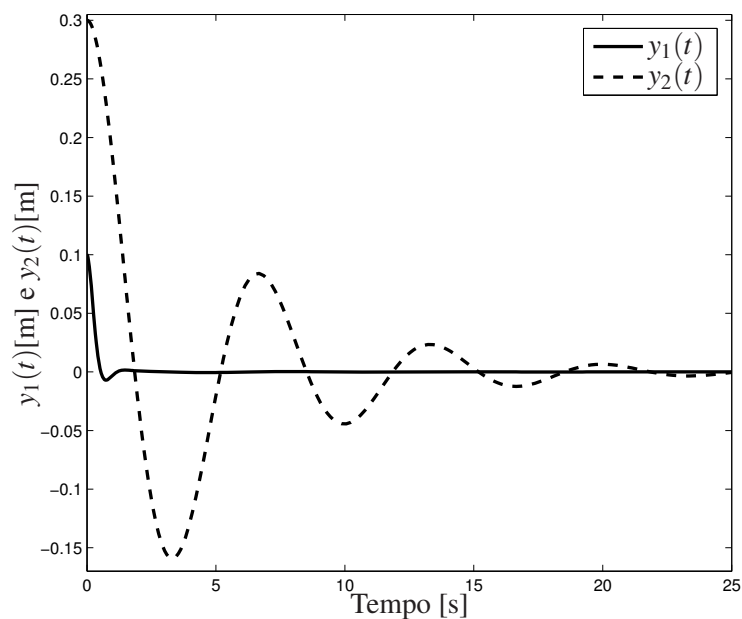


Figura 3.16: Resposta do sistema controlado ( $d = 0$ ).

Como as LMIs (3.116) e (3.117) do Teorema 3.5 são factíveis para  $d = 0$ , então elas também são factíveis para  $d > 0$ . Nas Tabelas 3.3 e 3.4 podem ser vistos os valores dos parâmetros para  $d = 1, 2$ .

O comportamento dinâmico dos sistemas controlados com o Teorema 3.5, considerando os parâmetros das Tabelas 3.3 e 3.4, não tiveram mudanças significativas em relação à Figura 3.16. Note pela Figura 3.16 que o sistema controlado entra em regime permanente após 20s, esse

Tabela 3.3: Parâmetros do Teorema 3.5, considerando  $r_a = 2$  e  $d = 1$ .

	$\ell$				
	1	2	3	4	5
$\mathcal{H}(4) =$	04	13	22	31	40
$\mathcal{E}_1^\ell(1,3) =$	0	0	0	1	1
$\mathcal{E}_2^\ell(1,3) =$	1	1	0	0	0
$\mathcal{E}_{12}^\ell(1,2,1) =$	0	0	1	1	0
$\mathcal{E}_{21}^\ell(1,2,1) =$	0	1	1	0	0

Tabela 3.4: Parâmetros do Teorema 3.5, considerando  $r_a = 2$  e  $d = 2$ .

	$\ell$					
	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{H}(5) =$	05	14	23	32	41	50
$\mathcal{E}_1^\ell(2,3) =$	0	0	0	1	2	1
$\mathcal{E}_2^\ell(2,3) =$	1	2	1	0	0	0
$\mathcal{E}_{12}^\ell(2,2,1) =$	0	0	1	2	1	0
$\mathcal{E}_{21}^\ell(2,2,1) =$	0	1	2	1	0	0

valor é muito alto e pode ser um problema na implementação prática. A fim de diminuir o tempo de duração do transitório, foi inserida a restrição de taxa de decaimento no projeto do controlador. Resolvendo as LMIs do Teorema 3.6 com  $d = 0$  e  $\gamma = 2$ , foram obtidas as seguintes soluções:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,0428 & 0,0118 & -0,3167 & -0,0248 \\ 0,0118 & 0,0538 & 0,0023 & -0,347 \\ -0,3167 & 0,0023 & 5,1185 & -0,2895 \\ -0,0248 & -0,347 & -0,2895 & 4,9239 \end{bmatrix}, \quad (3.130)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 463,32 & 24,859 & -7,0934 \times 10^3 & 450,56 \\ 3,2566 & 29,253 & 17,939 & -411,57 \end{bmatrix}, \quad (3.131)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 463,32 & 24,859 & -7,0934 \times 10^3 & 450,56 \\ 3,2566 & 29,253 & 17,939 & -411,57 \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

De (3.124) segue que

$$K(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 759,68 & 844,35 & -1,3349 \times 10^3 & 76,352 \\ 36,233 & -3,4367 & 1,0205 & -83,587 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 759,68 & 844,35 & -1,3349 \times 10^3 & 76,352 \\ 36,233 & -3,4367 & 1,0205 & -83,587 \end{bmatrix}. \quad (3.133)$$

A resposta do sistema controlado com (3.133) é vista na Figura 3.17.

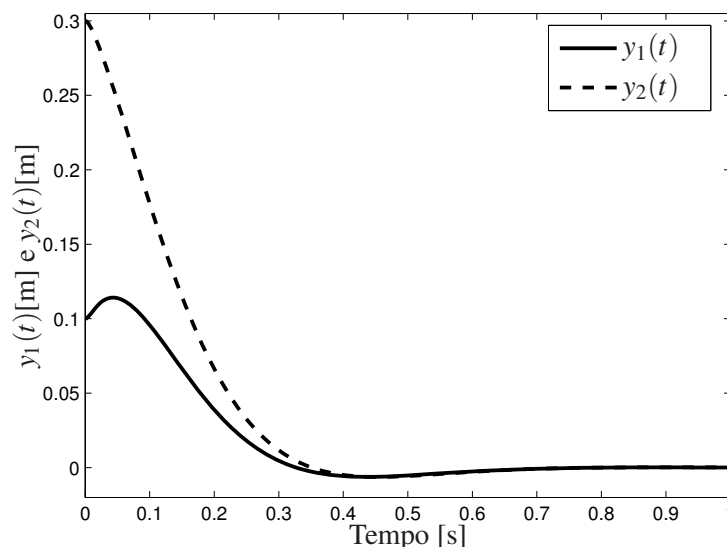


Figura 3.17: Resposta do sistema controlado com restrição na taxa de decaimento.

Note pela Figura 3.17 que o Teorema 3.6 foi capaz de diminuir o tempo de duração do transitório no sistema controlado.

Os Teoremas 3.5 e 3.6 são generalizações dos Teoremas 3.3 e 3.4 respectivamente. Como esse exemplo foi resolvido anteriormente com os Teoremas 3.3 e 3.4, então já era esperado que ele fosse resolvido com parâmetro  $d = 0$  nos Teoremas 3.5 e 3.6. No próximo exemplo é mostrado que o Teorema 3.5 gera LMIs que são gradualmente menos conservadoras.  $\square$

### Exemplo 3.7: Modelo fuzzy Variável

Considere um sistema fuzzy (3.2) representado pelos seguintes modelos locais

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1,59 & -7,29 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0,02 & -4,64 \\ 0,35 & 0,21 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -c_1 & -4,33 \\ 0,21 & 0,05 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.134)$$

Variando os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  nos intervalos  $15 \leq c_1 \leq 16$  e  $1 \leq c_2 \leq 3$ , pode-se ver na Figura 3.18 os pontos nos quais o Teorema 3.5 foi capaz de obter o ganho estabilizante (3.118) para o sistema (3.134). Nessa figura são exibidos os pontos de factibilidade do Teorema 3.5 para os seguintes graus de relaxação:  $d = 0, 1, 2$ .

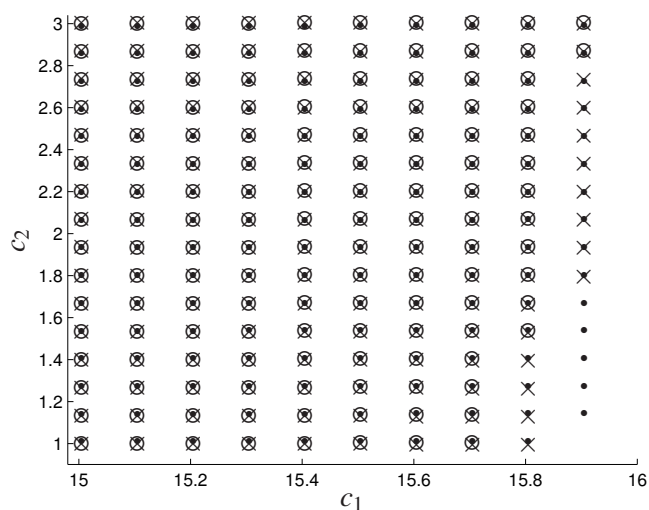


Figura 3.18: Teorema 3.5:  $\circ$  ( $d = 0$ ),  $\times$  ( $d = 1$ ),  $\bullet$  ( $d = 2$ ).

Pela Figura 3.18 pode-se observar que à medida que aumentamos o valor do parâmetro  $d$ , o conjunto de restrições fica mais relaxado, aumentando o número de pontos nos quais as LMIs (3.116) e (3.117) são factíveis. Na Figura 3.19 é comparada a região de estabilidade do Teorema 3.3 com a região de estabilidade do Teorema 3.5.

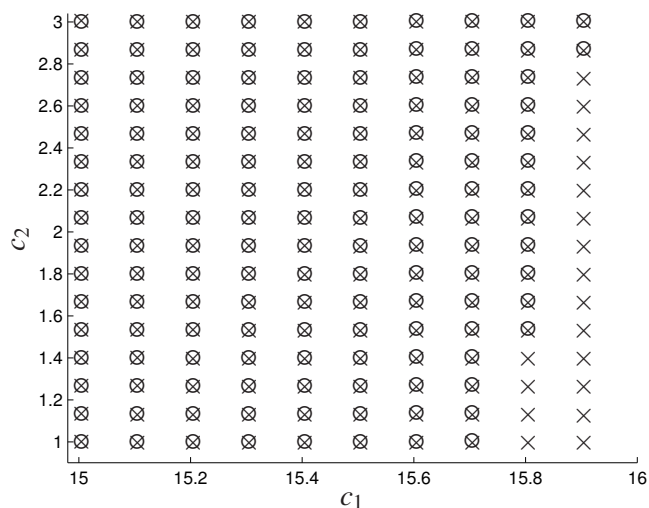


Figura 3.19:  $\circ$  – Teorema 3.3,  $\times$  – Teorema 3.5 ( $d = 7$ ).

Para  $d = 7$  o Teorema 3.5 é capaz de garantir a estabilidade quadrática do sistema (3.134) em um maior número de pontos da faixa de operação (Figura 3.19). Nesse exemplo foi verificado que os Teoremas 3.3 e 3.5 obtêm resultados semelhantes considerando  $0 \leq c_1 \leq 15,7$  e  $1 \leq c_2 \leq 8$ .  $\square$

Nesta seção foram propostas condições mais relaxadas para o projeto de controladores fuzzy (3.43). A partir dos resultados apresentados em (OLIVEIRA; PERES, 2005) conclui-se que: se o sistema (3.44) é quadraticamente estável, então existe um valor  $d$  suficientemente grande, tal que, as LMIs (3.116) e (3.117) do Teorema 3.5 (ou, as LMIs (3.122) e (3.123) do Teorema 3.6) são factíveis para  $\ell = 1, 2, \dots, J(d+3)$ . Porém, observe que o número de LMIs a ser resolvido aumenta fatorialmente com o parâmetro  $d$ . Dessa forma, pode acontecer em alguns casos, que o sistema (3.44) é quadraticamente estável, mas, o valor do parâmetro  $d$  que satisfaz o Teorema 3.5 (ou, Teorema 3.6) é tão alto, que não é possível resolver todas as LMIs (3.116) e (3.117) (ou, (3.122) e (3.123)) em um microcomputador. E, conseqüentemente, não é possível encontrar um ganho  $K(\alpha)$  satisfazendo o Problema 3.

Neste capítulo foi usado o pacote “YALMIP toolbox” (LÖFBERG, 2004), para a representação das LMIs. Esse pacote facilita a escrita de LMIs no MATLAB, e tem a vantagem de suportar vários solvers, inclusive o solver padrão “LMILAB” (GAHINET et al., 1995). Para a solução das LMI também foi usado o solver “SeDuMi” (STURM, 1999). Como os resultados apresentados no texto encontram apenas condições de factibilidade de LMIs, e não a solução ótima do problema, então as soluções encontradas pelos solvers podem ser diferentes. Durante a solução dos exemplos numéricos os pacotes LMILAB e SeDuMi foram comparados, e foi verificado que a eficiência dos solvers muda de acordo com o conjunto de LMI a ser resolvido, por exemplo, o LMILAB obteve melhores resultados na solução dos Teoremas 3.1 e 3.2 (controlador fixo), enquanto que o SeDuMi foi mais eficiente para resolver os Teoremas 3.3 e 3.4 (controladores fuzzy).

## *Conclusões*

Em sistemas que usam acelerômetros como sensores, é mais fácil obter o sinal da derivada dos estados que os sinais dos estados (KWAK; WASHINGTON; YEDAVALLI, 2002a; ABDEL-AZIZ; VALÁŠEK, 2004; DUAN; NI; KO, 2005). Considerando esse fato, foram propostos diversos projetos de controle baseados em LMI para a realimentação da derivada dos estados. Os resultados foram aplicados em sistemas descritores e sistemas fuzzy Takagi-Sugeno.

Na literatura existem muitos trabalhos considerando a realimentação derivativa e proporcional ( $u(t) = Lx(t) - K\dot{x}(t)$ ) em sistemas descritores. Se do ponto de vista teórico esse procedimento é mais geral, do ponto de vista prático ele é muito complexo e raramente todos os sinais dos estados e das derivadas estão disponíveis para a realimentação. Considerando esse fato, neste texto foram apresentados projetos de controladores para sistemas descritores usando apenas a realimentação derivativa ( $u(t) = -K\dot{x}(t)$ ). Estes resultados diminuem a complexidade do controlador quanto à sua implementação prática.

Projetos baseados em LMI permitem que os resultados sejam estendidos para aplicação em vários problemas, por exemplo, os resultados dos Capítulos 2 e 3 foram obtidos através de uma extensão dos resultados presentes em (FARIA, 2005), que só consideram sistemas lineares invariantes no tempo. Além disso, essa abordagem também permite que falhas estruturais sejam, em geral, facilmente incluídas no problema.

As técnicas para  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas, propostas nos Capítulos 2 e 3, permitem que restrições de desempenho sejam incluídas em projetos baseados em LMI. Essa metodologia é mais flexível que a técnica de alocação de pólos usual, pois dispensa a necessidade de se alocar os pólos do sistema em um determinado ponto, e ainda permite a solução de sistemas com incertezas paramétricas. A  $\mathcal{D}$ -estabilidade atua no desempenho do sistema através dos parâmetros da região  $S(\gamma, r, \theta)$ .

O estudo de condições menos conservadoras para a estabilidade de sistemas fuzzy usando sequências de LMI é muito recente (MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2007; SALA; ARIÑO, 2007), e os resultados apresentados no Capítulo 3, Seção 3.6 ainda podem ser melhorados, por exemplo, pode-se estender esses resultados para a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas fuzzy.

Perspectivas de trabalhos futuros:

- Projetos de controle para a minimização da norma do controlador.
- Projetos de controle considerando a realimentação parcial da derivada dos estados  $u(t) = -KG\dot{x}(t)$ .
- Desenvolvimento de condições mais relaxadas para a estabilidade de Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno;
- Desenvolver um método que seja capaz de gerar funções de pertinência dependendo somente dos sinais da derivada dos estados (velocidade ou aceleração).

## Publicações

Parte dos resultados apresentados nesta tese, assim como os trabalhos desenvolvidos durante o mestrado, foram publicados em congressos e periódicos. A produção bibliográfica é listada abaixo:

Publicações relacionadas diretamente com o conteúdo da tese:

- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems. *Mathematical Problems in Engineering*. Aceito para publicação.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, N. A. P. da. Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. *International Journal of Control*, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas descritores usando LMIs. In: *Proceedings of the 6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*. São José do Rio Preto, 2007. p. 737–742.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. da; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle robusto de sistemas lineares sujeitos à falhas estruturais usando realimentação derivativa. In: *Proceedings of the*



*7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*. Presidente Prudente, 2008.

- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M.  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas descritores sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: *XVII Congresso Brasileiro de Automática*. Juiz de Fora, 2008.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy Takagi Sugeno. In: *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Florianópolis, 2007.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Projeto de controladores fuzzy usando realimentação da derivada dos estados. In: *IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Brasília, 2009.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Control designs for linear systems using state-derivative feedback. In: *Systems, Structure and Control*. Vienna, Austria: In-Teh, 2008. Chapter 1, p. 1–28.

Publicações em assuntos relacionados com a tese:

- FARIA, F. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Um método baseado em LMI para obter o ganho da realimentação derivativa a partir da realimentação de estados. In: *Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*. Bauru, 2009.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; COVACIC, M. R. Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estados da planta. In: *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Florianópolis, 2007.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E. LMI-Based digital redesign of linear time-invariant systems with state-derivative feedback. In: *3rd IEEE Multi-conference on Systems and Control*. Saint Petersburg, 2009. v. 1, p. 745–749.
- ROSSI, F. Q.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A. Controladores robustos usando LMI para sistemas de suspensão de automóvel sujeito a falhas. In: *Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*. Bauru, 2009.

- SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: *IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Brasília, 2009.
- SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais. In: *Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*. Bauru, 2009.
- TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; CASTELÃO, S. Projeto da realimentação derivativa discreta no tempo utilizando o projeto com realimentação não-derivativa contínua no tempo. In: *IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Brasília, 2009.

## *Referências Bibliográficas*

ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. Pole placement for SISO linear systems by state-derivative feedback. *IEE Proceedings-Control Theory Applications*, New York, v. 151, n. 4, p. 377–385, 2004.

ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. State derivative feedback by LQR for linear time-invariant systems. In: PROCEEDINGS IFAC TRIENNIAL WORLD CONGRESS, 16., 2005, Prague. *Proceedings of the...* Czech Republic: [s.n.], 2005. (CD-ROM).

ARZELIER, D.; BERNUSSOU, J.; GARCIA, G. Pole assignment of linear uncertain systems in a sector via a Lyapunov-type approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 38, n. 7, p. 1128–1131, 1993.

ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M. Alocação de zeros aplicada a sistemas de controle via LMI. *Controle & Automação*, Campinas, v. 18, n. 1, p. 55–66, 2007a. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-17592007000100005>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control for the tracking problem with zero variation. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 1, n. 3, p. 682–688, 2007b.

ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle robusto de sistemas lineares sujeitos à falhas estruturais usando realimentação derivativa. In: PROCEEDINGS OF THE BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 7., 2008, Presidente Prudente. *Proceedings of the...* Presidente Prudente: [s.n.], 2008a. 6p. Disponível em: <<http://www4.fct.unesp.br/dmec/dincon2008/artigos/03/04-Assuncao.pdf>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M.  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas descritores sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 17., 2008, Juiz de Fora. *Anais...* Juiz de Fora: SBA, 2008b. v. 1. 6p. (Artigo 38448).

ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy Takagi Sugeno. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 8., 2007, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis: [s.n.], 2007c. v. 1. 6p. (Artigo 29542).

ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Projeto de controladores fuzzy usando realimentação da derivada dos estados. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 9., 2009, Brasília. *Anais...* Brasília: [s.n.], 2009. 6p. (Artigo 54485).

ASSUNÇÃO, E.; MARCHESI, H. F.; TEIXEIRA, M. C. M.; PERES, P. L. D. Global optimization for the  $\mathcal{H}_\infty$ -norm model reduction problem. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 38, n. 2, p. 125–138, 2007d.

ASSUNÇÃO, E.; PERES, P. L. D. A global optimization approach for the  $\mathcal{H}_2$ -norm model reduction problem. In: PROCEEDINGS OF THE IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 38., 1999, Phoenix. *Proceedings of the...* Phoenix: IEEE, 1999. v. 2, p. 1857–1862.

ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. da; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007e.

AVELLAR, R. G. *Condições Relaxadas para a Estabilidade e Controle de Sistemas Não-Lineares com Modelos Fuzzy e LMIs*. 2001. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2001.

BOUKAS, T. K.; HABETLER, T. G. High-performance induction motor speed control using exact feedback linearization with state and state derivative feedback. *IEEE Transactions on Power Electronics*, New York, v. 19, n. 4, p. 1022–1028, 2004.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. 2. ed. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics, 15). Disponível em: <<http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

BUNSE-GERSTNER, A.; BYERS, R.; MEHRMANN, V.; NICHOLS, N. K. Feedback design for regularizing descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, New York, v. 299, n. 1/3, p. 119–151, 1999.

BUNSE-GERSTNER, A.; MEHRMANN, V.; NICHOLS, N. K. Regularization of descriptor systems by derivative and proportional state feedback. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Philadelphia, v. 13, n. 1, p. 46–67, 1992.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; COVACIC, M. R. Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estados da planta. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 8., 2007, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis: [s.n.], 2007a. v. 1. 6p. (Artigo 30693).

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Design of state-derivative feedback controllers using a state feedback control design. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM, STRUCTURE AND CONTROL, 3., 2007, Foz do Iguaçu. *Proceedings of the...* Foz do Iguaçu: [s.n.], 2007b. v. 1, p. 135–141.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Control designs for linear systems using state-derivative feedback. In: *Systems, Structure and Control*. Vienna, Austria: In-Teh, 2008. p. 1–28. Disponível em: <<http://books.i-techonline.com/book.php?id=73>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable-Structure Control Design of Switched Systems With an Application to a DC-DC Power Converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009a.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E. LMI-Based digital redesign of linear time-invariant systems with state-derivative feedback. In: MULTI-CONFERENCE ON SYSTEMS AND CONTROL, 3., 2009, Saint Petersburg. *Proceedings of the...* Saint Petersburg: IEEE, 2009b. v. 1, p. 745–749.

CHEN, C. *Linear system theory and design*. 3. ed. New York: Oxford, 1999. 352 p. (Oxford Series in Electrical and Computer Engineering).

CHILALI, M.; GAHINET, P.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.

CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle modernos*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 684 p.

DUAN, G. R.; IRWIN, G. W.; LIU, G. P. Robust stabilization of descriptor linear systems via proportional-plus-derivative state feedback. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1999, San Diego. *Proceedings of the...* San Diego: [s.n.], 1999. p. 1304–1308.

DUAN, G. R.; ZHANG, X. Regularizability of linear descriptor systems via output plus partial state derivative feedback. *Asian Journal of Control*, Taiwan, v. 5, n. 3, p. 334–340, 2003.

DUAN, Y. F.; NI, Y. Q.; KO, J. M. State-Derivative feedback control of cable vibration using semi-active magnetorheological dampers. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, v. 20, n. 6, p. 431–449, 2005.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Elementary differential equations with boundary value problems*. 5. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2003. 768 p.

FANG, C. H.; LIU, Y. S.; KAU, S. W.; HONG, L.; LEE, C. H. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 14, n. 3, p. 386–397, 2006.

FARIA, F. A. *Alocação de Pólos com Realimentação da Derivada dos Estados usando LMIs*. 2005. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005. Disponível em: <<http://www.dee.feis.unesp.br/pos/teses/2005/dissertacoes.php>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas descritores usando LMIs. In: PROCEEDINGS OF THE BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, 6., 2007, São José do Rio Preto. *Proceedings of the...* São José do Rio Preto: IBILCE, 2007. p. 737–742.

FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Controle & Automação*, Campinas, v. 20, n. 1, p. 83–93, 2009a. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-17592009000100008>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009b. (aceito para publicação). Disponível em: <<http://www.hindawi.com/journals/mpe/aip.927362.pdf>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, N. A. P. da. Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009c.
- FARIA, F. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Um método baseado em LMI para obter o ganho da realimentação derivativa a partir da realimentação de estados. In: PROCEEDINGS OF THE BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 8., 2009, Bauru. *Proceedings of the...* Bauru: [Unesp], 2009d. 6p.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U.  $\mathcal{H}_\infty$ -control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach. *Linear Algebra and Its Applications*, New York, v. 351, n. 1, p. 271–302, 2002.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI control toolbox - For use with MATLAB*. [S.l.], 1995. Disponível em: <[http://www.mathworks.com/access/helpdesk\\_r13/help/pdf\\_doc/lmi/lmi.pdf](http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/pdf_doc/lmi/lmi.pdf)>. Acesso em: 06 Setembro 2009.
- GARCIA, G.; BERNUSSOU, J. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 40, n. 1, p. 184–190, 1995.
- GARCIA-PLANAS, M. I. Regularizing generalized linear systems by means a derivative feedback. In: PHYCON '03: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON PHYSICS AND CONTROL, 2003, Washington, DC. *Proceedings of the...* Washington: [s.n.], 2003. v. 4, p. 1134–1140.
- GEROMEL, J. C.; OLIVEIRA, M. C. de; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, New York, v. 285, p. 69–80, 1998.
- GRAHAM, A. *Kronecker product and matrix calculus with applications*. Chichester: Ellis Horwood, 1981.
- GUTMAN, S.; JURY, E. I. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, AC-26, n. 4, p. 853–863, 1981.
- HADDAD, W. M.; BERNSTEIN, D. S. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 37, n. 1, p. 54–69, 1992.
- HAN, Z. X.; FENG, G.; WALCOTT, B. L.; ZHANG, Y. M.  $\mathcal{H}_\infty$  controller design of fuzzy dynamic systems with pole placement constraints. In: PROCEEDINGS OF THE 2000 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2000, Chicago. *Proceedings of the...* Chicago: [s.n.], 2000. v. 3, p. 1939–1943.
- HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G. *Inequalities*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.



HONG, S. K.; NAM, Y. Stable fuzzy control system design with pole placement constraint: an LMI approach. *Computers in Industry*, Amsterdam, v. 51, p. 1–11, 2003.

ISERMANN, R. Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods - an introduction. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 5, n. 5, p. 639–652, 1997.

ISERMANN, R. *Fault-Diagnosis systems: An introduction from fault detection to fault tolerance*. Berlin: Springer, 2006.

ISERMANN, R.; BALLÉ, P. Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 5, n. 5, p. 709–719, 1997.

JIN, H. Eigenstructure assignment by proportional-derivative state feedback in singular systems. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 22, n. 1, p. 47–52, 1994.

KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, n. 5, p. 523–534, 2000.

KUO, Y. C.; LIN, W. W.; XU., S. F. Regularization of linear discrete-time periodic descriptor systems by derivative and proportional state feedback. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Philadelphia, v. 25, n. 4, p. 1046–1073, 2004.

KWAK, S. K.; WASHINGTON, G.; YEDAVALLI, R. K. Acceleration-based vibration control of distributed parameter systems using the “reciprocal state-space framework”. *Journal of Sound and Vibration*, London, v. 251, n. 3, p. 543–557, 2002a.

KWAK, S. K.; WASHINGTON, G.; YEDAVALLI, R. K. Acceleration feedback-based active and passive vibration control of landing gear components. *Journal of Aerospace Engineering*, New York, v. 15, n. 1, p. 1–9, 2002b.

LEWIS, F.; SYRMOS, V. A geometric theory for derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 36, n. 9, p. 1111–1116, 1991.

LIU, J.; WANG, J. L.; YANG, G. H. An LMI approach to minimum sensitivity analysis with application to fault detection. *Automatica*, Elmsford, v. 41, n. 11, p. 1995–2004, 2005.

LÖFBERG, J. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: PROCEEDINGS OF THE CACSD CONFERENCE, 2004, Taipei. *Proceedings of the...* Taipei: [s.n.], 2004. Disponível em: <<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

MACHADO, E. R. M. D. *Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno*. 2003. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, Novembro 2003.

MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 2000. Disponível em: <<http://www.matrixanalysis.com/DownloadChapters.html>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Necessary and sufficient LMI conditions to compute quadratically stabilizing state feedback controllers for Takagi-Sugeno systems. In: PROCEEDINGS OF THE 2007 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 7., 2007, New York. *Proceedings of the...* New York: [s.n.], 2007. p. 11–13.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4. ed. New York: Prentice Hall, 2003. 800 p.

OLIVEIRA, M. C. de; FARIAS, D. P.; GEROMEL, J. C. *LMISol, User's guide*. UNICAMP, Campinas-SP, Brazil, 1997. Disponível em: <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~mauricio/software.html>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and its Applications*, New York, v. 405, p. 209–228, 2005.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, 2007.

REITHMEIER, E.; LEITMANN, G. Robust vibration control of dynamical systems based on the derivative of the state. *Archive of Applied Mechanics*, Berlin, v. 72, n. 11–12, p. 856–864, 2003.

ROSSI, F. Q.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A. Controladores robustos usando LMI para sistemas de suspensão de automóvel sujeito a falhas. In: PROCEEDINGS OF THE BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 8., 2009, Bauru. *Proceedings of the...* Bauru: Unesp, 2009. 6p.

SALA, A.; ARIÑO, C. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 158, p. 2671–2686, 2007.

SILVA, E. R. P. da. *Controle Robusto de Sistemas Não-Lineares Sujeitos a Falhas Estruturais*. 2009. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009. Disponível em: <<http://www.dee.feis.unesp.br/pos/teses/2009/dissertacoes.php>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.

SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 9., 2009, Brasília. *Anais...* Brasília: [s.n.], 2009a. 6p. (Artigo 54988).

SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais. In: PROCEEDINGS OF THE BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 8., 2009, Bauru. *Proceedings of the...* Bauru: Unesp, 2009b. 6p.

STURM, J. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11–12, p. 625–653, 1999. Disponível em: <<http://citeseer.ist.psu.edu/sturm99using.html>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.



SUGENO, M.; KANG, G. T. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 28, p. 15–33, 1988.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.

TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 15, n. 3, p. 333–341, 2007.

TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 135–156, 1992.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHATAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; WANG, H. O. Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, n. 4, p. 442–452, 2000.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based design for fuzzy controllers. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2001, New York. *Proceedings of the...* New York: IEEE, 2001. v. 3, p. 704–707.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; COVACIC, M. R. Realimentação da derivada de estados a partir do projeto com realimentação de estados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 16., 2006, Salvador. *Anais...* Salvador: SBA, 2006a. v. 1, p. 726–731. 6p.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; PALHARES, R. M. Discussion on:  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback control design for uncertain fuzzy systems with multiple time scales: An LMI approach. *European Journal of Control*, Surrey, v. 11, n. 2, p. 167–169, 2005.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; PIETROBOM, H. C. On relaxed LMI-based design fuzzy. In: PROCEEDINGS OF THE EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 6., 2001, Porto. *Proceedings of the...* Porto: [s.n.], 2001. p. 120–125.

TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; CASTELÃO, S. Projeto da realimentação derivativa discreta no tempo utilizando o projeto com realimentação não-derivativa contínua no tempo. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELLIGENTE, 9., 2009, Brasília. *Anais...* Brasília: [s.n.], 2009. 6p. (Artigo 55652).

TEIXEIRA, M. C. M.; CATHARINO, M. F. R.; ASSUNÇÃO, E.; MACHADO, E. R. M. D. A comparative study between two relaxed LMI-based fuzzy control designs. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2005, Reno. *Proceedings of the...* Reno: IEEE, 2005. p. 969–972.

TEIXEIRA, M. C. M.; COVACIC, M. R.; ASSUNÇÃO, E. Design of SPR systems with dynamic compensators and output variable structure control. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 2006, Alghero. *Workshop...* Alghero: [s.n.], 2006. v. 1, p. 328–333.

TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, N. A. P. da; ASSUNÇÃO, E.; MACHADO, E. R. M. D. Design of fuzzy regulators with optimal initial conditions compensation. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2006, Vancouver. *Proceedings of the...* Vancouver: IEEE, 2006b. p. 84–91.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996.

XU, S.; LAM, J. Robust stability and stabilization of discrete singular systems: An equivalent characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 49, n. 4, p. 568–574, 2004.

YANG, S. S.; CHEN, J. Sensor faults compensation for MIMO fault-tolerant control systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, London, v. 28, n. 2, p. 187–205, 2006.

YE, D.; YANG, G. H. Adaptive fault-tolerant tracking control against actuator faults with application to flight control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, New York, v. 14, n. 6, p. 1088–1096, 2006.

ZHONG, M.; DING, S. X.; LAM, J.; WANG, H. An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems. *Automatica*, Elmsford, v. 39, n. 3, p. 543–550, 2003.