

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA – CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**Análise e desenvolvimento de algoritmos
eficientes de programação linear para o
problema de planejamento de sistemas de
transmissão a longo prazo**

Selma Helena Marchiori Hashimoto

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de *Doutor em Engenharia Elétrica*.

Ilha Solteira – SP, Abril de 2005.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

H348a Hashimoto, Selma Helena Marchiori
Análise e desenvolvimento de algoritmos eficientes de programação linear para o problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo / Selma Helena Marchiori Hashimoto. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2005
iv, 142 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2005

Orientador: Rubén Augusto Romero Lázaro
Bibliografia: p. 125-129

1. Energia elétrica - Transmissão. 2. Otimização combinatória. 3. Programação linear.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMOS EFICIENTES DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO A LONGO PRAZO

AUTORA: SELMA HELENA MARCHIORI HASHIMOTO

ORIENTADOR: Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO


Dr. JOSE ROBERTO SANCHES MANTOVANI

Dr. SERGIO AZEVEDO DE OLIVEIRA

Dr. ANTÔNIO CÉSAR BALEEIRO ALVES

Dr. EDUARDO NOBUHIRO ASADA

Data da realização: 29 de abril de 2005



Presidente da Comissão Examinadora
Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

Ao meu esposo

Heliyton Tadashi

e à minha filha

Camila Saemi

dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Rubén Augusto Romero Lázaro pela orientação, presença segura, competente e estimulante, também por sua compreensão e apoio irrestrito;

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica que, de uma maneira ou de outra, ajudaram na elaboração desse trabalho;

Aos meus companheiros pelo apoio e incentivo, em especial, à Sandra Cristina Marchiori, irmã querida, pelas sugestões e contribuições;

À FAPESP pelo apoio financeiro;

Aos meus pais, Norival e Odelir, e aos meus irmãos, Sandra e Paulo, que sempre me incentivaram para que este trabalho pudesse se tornar realidade;

Ao meu esposo Heliyton Tadashi e a minha filha Camila Saemi pelo incentivo, apoio, carinho e compreensão;

À todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização desse trabalho;

Resumo

O problema de planejamento de sistemas de transmissão é um problema de programação não-linear inteira mista (PNLIM) quando é usado o modelo DC. Praticamente todos os algoritmos usados para resolver este problema utilizam uma subrotina de programação linear (PL) para resolver problemas de PL resultantes do algoritmo de solução do problema de planejamento. Às vezes a resolução desses problemas de PL representa o maior esforço computacional dos algoritmos de planejamento. A particularidade desses problemas de PL é que, na solução ótima, apenas algumas restrições de desigualdade estão ativas. Este trabalho considera a formulação e a implementação computacional de vários algoritmos de PL resultantes, ou seja, os algoritmos propostos fazem modificações nos problemas de PL resultantes dos modelos de transportes e DC de maneira que apresentam uma única restrição de igualdade, a equação de balanço de potência ativa, e muitas restrições de desigualdade. É usado um algoritmo dual simplex canalizado e uma estratégia de relaxação para resolver esses problemas de PL que inicia o processo de otimização com uma única restrição de igualdade e, em cada passo, é adicionada a restrição mais violada. Portanto, a lógica de trabalho é parecida com a proposta apresentada por Brian Stott para o planejamento da operação de sistemas elétricos. Os resultados encontrados mostram um desempenho superior do algoritmo quando comparados com métodos do tipo primal simplex.

Palavras chave: planejamento de transmissão, dual simplex canalizado, relaxação.

Abstract

The transmission network planning problem is a non linear integer mixed programming problem (NLIMP) which used the DC model. Most of the algorithms used to solve this problem use a linear programming subroutine (LP) to solve LP problems resulting from planning algorithms. Sometimes the resolution of these LP problems represents a major computational effort of planning algorithms. The particularity of these LP problems in optimal solution is that only some inequality constraints are binding. This work considers the formulation and the computational implementation of algorithms several of the LP problems resulting, i.e., the proposed algorithms make modifications in the LP problems resulting of the transports and DC models so that present an only equality constraint, only one equality constraint, the power flow equation, and many inequality constraints. It is used a dual simplex algorithm and a relaxation strategy to solve these LP problems, which start the optimization process with only one equality constraint and, in each step, the most unfeasible constraint is added. Then, the logic used is similar to the proposal presented in Brian Stott for electric systems operation planning. The results show a higher performance of the algorithm when compared to primal simplex methods.

Indexing terms: transmission planning, bounded dual simplex, relaxation.

Sumário

Lista de figuras	i
Lista de tabelas	ii
Lista de símbolos e variáveis	iii
1. Introdução	1
2. Modelos matemáticos e técnicas de solução na expansão de sistemas de transmissão	4
2.1. Modelos matemáticos	5
2.1.1. Modelo de transportes	6
2.1.2. Modelo híbrido linear	8
2.1.3. Modelo híbrido não-linear	10
2.1.4. Modelo DC	12
2.1.5. Modelo linear disjuntivo	13
2.1.6. Outros modelos	16
2.2. Técnicas de solução	17
2.2.1. Algoritmos heurísticos construtivos	17
2.2.2. Algoritmos de otimização clássica	22
2.2.3. Metaheurísticas	29
2.3. O estado da arte em planejamento da expansão	38
2.3.1. Algoritmos heurísticos	39
2.3.2. Otimização clássica	40
2.3.3. Metaheurísticas	42
2.3.4. Modelo usados e sistemas elétricos considerados benchmark	43

2.4. Aplicações de PL em problemas de energia elétrica	45
3. Algoritmo simplex eficiente para verificar a factibilidade da operação do modelo de transportes	48
3.1. Modelagem matemática convencional	49
3.2. Transformação da modelagem	50
3.3. Exemplo ilustrativo	57
3.4. Aplicações do algoritmo	62
3.5. Testes ilustrativos	67
3.6. Conclusões	69
4. Algoritmo simplex eficiente para verificar a factibilidade da operação do modelo DC	71
4.1. Modelagem matemática convencional	72
4.2. Transformação da modelagem	73
4.3. Exemplo ilustrativo	81
4.4. Técnica de reotimização	84
4.5. Aplicações do algoritmo	88
4.6. Testes ilustrativos	91
4.7. Conclusões	96
5. Algoritmo simplex eficiente para resolver o modelo de transportes relaxado	98
5.1. Modelagem matemática convencional	99
5.2. Transformação da modelagem	100
5.3. Exemplo ilustrativo	106
5.4. Aplicações do algoritmo	111
5.5. Testes ilustrativos	117
5.6. Conclusões	120
6. Conclusões	122
7. Sugestões para trabalhos futuros	124

Referências	125
Apêndice A: Algoritmo dual simplex canalizado	130
Apêndice B: Uso da estratégia de relaxação	134
Apêndice C: Sistemas elétricos usados	136
Apêndice D: Teorema	140
Apêndice E: Efficient linear programming algorithm for the transmission network expansion planning problem	142

Lista de figuras

Figura 2.1: A decomposição de Benders	24
Figura 3.1: Sistema de 4 barras e 6 linhas candidatas	54
Figura 4.1: Sistema de 4 barras e 4 linhas candidatas	76
Figura 4.2: Sistema de 6 barras – configuração base	81

Lista de tabelas

Tabela 3.1: Dados das barras para o sistema da figura 3.1	54
Tabela 3.2: Dados das linhas para o sistema da figura 3.1	54
Tabela 3.3: Testes com o sistema sul brasileiro	64
Tabela 3.4: Testes com a configuração básica com redespacho do sistema de 6 barras	64
Tabela 3.5: Testes com a configuração básica sem redespacho do sistema de 6 barras	65
Tabela 4.1: Dados das barras para o sistema da figura 4.1	77
Tabela 4.2: Dados das linhas para o sistema da figura 4.1	77
Tabela 4.3: Testes com o sistema sul brasileiro	94
Tabela 4.4: Testes com a configuração básica sem redespacho do sistema de 6 barras	95
Tabela 4.5: Circuitos adicionados	95
Tabela 4.6: Testes com a configuração básica com redespacho do sistema de 6 barras	95
Tabela 4.7: Circuitos adicionados	96
Tabela 4.8: Testes com o sistema sul brasileiro	96
Tabela 4.9: Circuitos adicionados	98
Tabela 5.1: Testes com o sistema sul brasileiro	119
Tabela 5.2: Testes com a configuração básica sem redespacho do sistema de 6 barras	120
Tabela 5.3: Testes com a configuração básica com redespacho do sistema de 6 barras	120
Tabela 5.4: Testes com o sistema sul brasileiro	120

Lista de símbolos e variáveis

- B : Matriz de susceptâncias
- c_{ij} : Custo de um circuito no ramo $(i, j) \in \Omega$;
- d : Vetor de demandas cujo elemento d_i representa a demanda de carga na barra i .
- f : Vetor de fluxos cujo elemento f_{ij} representa o fluxo de potência total que passa pelo circuito $(i, j) \in \Omega$;
- \bar{f}_{ij} : Fluxo máximo de potência permitido para o circuito $(i, j) \in \Omega$;
- f' : Vetor de fluxos dos circuitos adicionados;
- f_0 : Vetor de fluxos dos circuitos existentes na configuração base;
- g : Vetor de gerações cujo elemento g_i representa o nível de geração na barra de geração i ;
- \bar{g} : Vetor de máxima capacidade de geração nas barras de geração;
- n_{ij} : Número de circuitos adicionados;
- n_{ij}^0 : Número de circuitos da configuração base no ramo $(i, j) \in \Omega$;
- \bar{n}_{ij} : Número máximo de adições de circuitos no ramo $(i, j) \in \Omega$;
- r : Vetor de gerações fictícias ou artificiais.
- S : Matriz de incidência nó-ramo do sistema elétrico completo;
- S_0 : Matriz de incidência nó-ramo do sistema existente na configuração base;
- v : Função objetivo (investimento devido às adições de circuitos no sistema);
- α : Parâmetro de penalidade suficientemente grande para tornar pouco atrativa alternativas de investimento com valores de r_k diferentes de zero.
- γ_{ij} : Susceptância nominal de um circuito no ramo (i, j) ;

γ_{ij}^0 : Susceptância equivalente dos circuitos existentes na topologia base no caminho (i, j) ;

Ω : Conjunto de todos os ramos (caminhos) definidos pelos circuitos (linhas) existentes e as alternativas de expansão. A ampliação ou duplicação de um circuito existente também é considerada como uma alternativa de expansão;

Ω_1 : Conjunto das linhas existentes nos caminhos da configuração base (Ω_2 é o conjunto das linhas adicionadas aos caminhos novos, assim ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$));

Ω_3 : Conjunto das barras que fazem parte da configuração base (barras que não estão ilhadas);

θ_j : Magnitude do ângulo de tensão das barras pertencentes a Ω_3 .

$$\bar{\phi}_{ij} = \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}}$$

Γ : Conjunto das barras que possuem demanda;

1. Introdução

O problema de planejamento estático de sistemas de transmissão a longo prazo é um problema de programação não-linear inteira mista (PNLIM) que ainda apresenta o fenômeno da explosão combinatória e que merece muita atenção de pesquisadores que usam uma diversidade de métodos aproximados e de otimização para resolvê-lo. As principais dificuldades na resolução deste problema estão relacionadas com a natureza combinatória do processo de planejamento que normalmente leva a um número praticamente infinito de alternativas, inclusive no caso de sistemas de médio porte. Além disso, o problema de planejamento apresenta uma estrutura multimodal com um número muito elevado de ótimos locais, o que leva a maioria dos métodos aproximados a parar numa solução ótima local e às vezes de pobre qualidade. Para contornar estes problemas foram apresentadas muitas alternativas na literatura especializada, uma delas é [1]. Esse tipo de planejamento tem por objetivo determinar *onde, quando e quais* tipos de equipamentos devem ser instalados ao longo de um período, de modo a satisfazer as necessidades do mercado de energia elétrica com certas especificações de qualidade nos serviços e ao menor custo possível. Na literatura especializada existem vários modelos ou formulações matemáticas para realizar a modelagem do problema de planejamento de transmissão, entre eles estão o modelo DC, o modelo de transportes e os modelos híbridos (linear e não-linear).

Tradicionalmente, o modelo DC é uma simplificação do modelo real de fluxo de carga AC, mas suficientemente adequado e preciso para estudos de planejamento a longo prazo. Contudo, ele ainda representa um problema cuja resolução é muito difícil, pois é um problema de programação não-linear inteira mista (PNLIM) e pertence ao grupo de problemas chamados NP-completo, para os quais não são conhecidos algoritmos eficientes que contornem os problemas de esforço

computacional, convexidade, etc. Projetar um algoritmo rápido e eficiente para obter a solução ótima deste problema ainda é um campo de pesquisa muito ativo e ocupa atenção especial de muitos grupos de pesquisa em nível mundial. A importância prática é ainda maior porque a pesquisa levaria ao desenvolvimento de um *software* para aplicações no sistema brasileiro produzindo alternativas de expansão de sistema de transmissão com menor investimento. Os outros modelos são uma relaxação do modelo DC em que foram eliminadas as equações correspondentes à lei de Kirchhoff das tensões (ou parte delas). Apesar da relaxação, o modelo de transportes é um problema de programação linear inteira mista (PLIM) e o modelo híbrido pode ser um problema de programação não-linear inteira mista (PNLIM).

Praticamente todos os algoritmos de planejamento de sistema de transmissão, tais como os heurísticos, de otimização clássica e metaheurísticas, resolvem de maneira iterativa problemas de programação linear (PL), ou seja, a utilização destas técnicas de otimização implica na resolução de um número elevado de problemas de PL que são resultantes de diversas estratégias adotadas por esses algoritmos. Portanto, nos algoritmos de planejamento, especialmente nos algoritmos heurísticos e nas metaheurísticas, praticamente todo o esforço computacional é utilizado para resolver problemas de PL sucessivamente. Por exemplo, para problemas de grande porte, o algoritmo apresentado em [1] precisa resolver em torno de 50000 a 60000 problemas de PL, para o qual são geralmente usados *softwares* de PL de caráter geral e um dos mais usados é o MINOS desenvolvido pela Universidade de Stanford [2]. Uma forma de diminuir o esforço computacional dos algoritmos mencionados anteriormente é o desenvolvimento de algoritmos especializados de PL que devem ser mais rápidos que os *softwares* comerciais de uso geral para resolver um problema de características específicas. Os algoritmos especializados de PL utilizam basicamente estratégias de relaxação, como os apresentados em [3,4,5,6,7], mas essas estratégias são diferentes para cada tipo de problema.

O presente trabalho considera a formulação e a implementação computacional de vários algoritmos de PL que podem ser usados no problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo. Os algoritmos desenvolvidos são mais rápidos que os *softwares* comerciais de programação linear desenvolvidos para usos gerais. Este trabalho aproveita as características específicas de problemas de planejamento para desenvolver algoritmos de PL eficientes. No capítulo 2 apresentam-

se os modelos matemáticos do problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão, as técnicas de solução e o estado da arte em planejamento de expansão. Nos capítulos 3, 4 e 5 são apresentados, respectivamente, o algoritmo simplex eficiente para verificar a factibilidade da operação do modelo de transportes, o algoritmo simplex eficiente para verificar a factibilidade da operação do modelo DC e o algoritmo simplex eficiente para resolver o modelo de transportes relaxado e no capítulo 6 têm-se as conclusões. Nos apêndices A, B, C e D apresentam, respectivamente, o algoritmo dual simplex canalizado, uso da estratégia de relaxação, os sistemas elétricos usados e o teorema que é utilizado nas transformações das modelagens. No apêndice E tem-se o artigo publicado na revista IEE Proceedings-Generations Transmission Distribution em setembro de 2003.

2. Modelos matemáticos e técnicas de solução utilizados na expansão de sistemas de transmissão

A resolução de todo problema de otimização em engenharia compreende a implementação de dois processos consecutivos: a modelagem matemática e a técnica de solução escolhida para resolver esse modelo matemático. No problema de planejamento de sistemas de transmissão, um caso específico de otimização de sistemas de energia elétrica, também existem duas etapas: modelagem e técnica de solução.

A modelagem matemática consiste na representação de um problema da vida real através de um modelo matemático que relaciona um conjunto de variáveis de decisão através de um conjunto de relações matemáticas que podem assumir número e tipos de variáveis diferenciados. A modelagem matemática pode ser uma representação exata ou simplificada do problema da vida real. Em geral, quanto mais exata é a modelagem matemática que representa um problema da vida real então mais complexa é a resolução desse modelo matemático. Assim, deve existir um compromisso entre a modelagem matemática adotada e a técnica de solução escolhida: a modelagem matemática deve representar de maneira adequada o problema da vida real e que, além disso, permita sua resolução por técnicas de solução disponíveis e com esforços computacionais aceitáveis. Neste contexto, o conceito de modelagem adequada varia com o tempo, porque modelos muito complexos hoje podem se tornar adequados no futuro com o aparecimento de novas técnicas de solução e/ou a fabricação de computadores muito mais velozes que os disponíveis atualmente. É também evidente que a técnica de resolução escolhida encontra uma solução para o modelo matemático e não necessariamente para o problema da vida real.

Em planejamento estático de sistema de transmissão, o problema da vida real é um sistema elétrico com uma topologia corrente e se deseja encontrar o plano de expansão ótimo (construção de novos circuitos) para um horizonte de planejamento definido, isto é, onde e que tipos de circuitos devem ser construídos para que o sistema opere adequadamente num horizonte de planejamento para um crescimento especificado da demanda. Nesse contexto, a modelagem matemática ideal para indicar a operação adequada seria a representação do problema através das relações matemáticas de fluxo de carga AC. Entretanto, em planejamento de sistema de transmissão não é usada a modelagem matemática de fluxo de carga AC por vários motivos e os mais importantes são: (1) A topologia do sistema elétrico inicial usada em planejamento pode ser um sistema não conexo, isto é, o sistema apresenta um conjunto de barras isoladas ou ilhadas da parte principal do problema e, pelo menos no contexto atual, é difícil resolver sistemas desse tipo usando a modelagem matemática de fluxo de carga AC e as técnicas de solução conhecidas para resolver esse tipo de problema; e (2) O planejamento de sistemas de transmissão soluciona somente o fornecimento de potência ativa no sistema elétrico, sendo que o problema de fornecimento de reativos (planejamento de reativos) é resolvido em uma fase posterior. Em anos recentes estão surgindo as pesquisas relacionadas com a resolução de problemas não-lineares usando a técnica de pontos interiores. A utilização eficiente desta técnica de otimização pode permitir, no futuro, a otimização do problema de planejamento utilizando o modelo AC.

2.1. Modelos matemáticos

Nas últimas três décadas de pesquisas realizadas em planejamento de sistemas de transmissão foram propostos vários modelos matemáticos para representar o problema de planejamento. Alguns desses modelos ainda são usados nos trabalhos de planejamento de sistemas de transmissão: modelo de transportes, modelo híbrido linear, modelo híbrido não-linear e modelo DC. Também ainda são muito usadas as variantes desses modelos.

Usando um dos modelos matemáticos mencionados anteriormente, o problema resultante é um problema de otimização matemática que envolve relações algébricas lineares e/ou não-lineares e com variáveis de decisão inteiras e contínuas.

Assim, os problemas resultantes correspondem a um campo da Pesquisa Operacional conhecida como programação não-linear inteira mista (PNLIM).

O modelo DC considera as duas leis de Kirchhoff e a capacidade de transmissão das linhas, e o modelo de transportes considera somente a lei de Kirchhoff das correntes e a capacidade de transmissão das linhas, enquanto que as versões do modelo híbrido são combinações do modelo de transportes e do modelo DC, isto é, é considerada como parte da formulação do problema somente uma parcela das restrições da lei de Kirchhoff das tensões. Apesar da relaxação, o modelo de transportes e o modelo híbrido linear são problemas de programação linear inteira mista (PLIM) e o modelo híbrido não-linear é um problema de programação não-linear inteira mista (PNLIM).

2.1.1. Modelo de transportes

O modelo de transportes foi formulado por Garver em [8] e teve muito sucesso, sendo esta uma das primeiras propostas para efetuar o planejamento de redes de transmissão que usou programação linear. Esta metodologia consiste basicamente em resolver de maneira aproximada uma versão relaxada do modelo DC. No modelo de Garver, conhecido como *modelo de transportes*, somente se considera a lei de Kirchhoff das correntes e a capacidade de transmissão das linhas.

O planejamento de uma rede geralmente apresenta dois problemas: o modelo é não conexo e contém linhas sobrecarregadas. Nestas condições é difícil resolver um fluxo de carga AC. Para resolver este problema foi proposta uma nova metodologia, formulando um algoritmo baseado em um modelo simplificado da rede. Assim o modelo de transportes assume a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min v &= \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} n_{ij} & (2.1) \\ \text{s.a.} & \\ & Sf + g = d \\ & |f_{ij}| \leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij} \\ & 0 \leq g \leq \bar{g} \\ & 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \quad \text{e inteiro} \\ & f_{ij} \quad \text{irrestrito} \\ & \forall (i, j) \in \Omega \end{aligned}$$

em que:

- v : Função objetivo (investimento devido às adições de circuitos no sistema);
- Ω : Conjunto de todos os ramos (caminhos) definidos pelos circuitos (linhas) existentes e as alternativas de expansão. A ampliação ou duplicação de um circuito existente também é considerada como uma alternativa de expansão;
- c_{ij} : Custo de um circuito no ramo $(i, j) \in \Omega$;
- n_{ij} : Número de circuitos adicionados;
- n_{ij}^0 : Número de circuitos da configuração base no ramo $(i, j) \in \Omega$;
- \bar{n}_{ij} : Número máximo de adições de circuitos no ramo $(i, j) \in \Omega$;
- S : Matriz de incidência nó-ramo do sistema elétrico;
- f : Vetor de fluxos cujo elemento f_{ij} representa o fluxo de potência total que passa pelo circuito $(i, j) \in \Omega$;
- \bar{f}_{ij} : Fluxo máximo de potência permitido para o circuito $(i, j) \in \Omega$;
- g : Vetor de gerações cujo elemento g_i representa o nível de geração na barra de geração i ;
- \bar{g} : Vetor de máxima capacidade de geração nas barras de geração;
- d : Vetor de demandas cujo elemento d_i representa a demanda de carga na barra i .

O conjunto de restrições $(Sf + g = d)$ representa as equações correspondentes à lei de Kirchhoff das correntes, uma equação para cada barra do sistema. As restrições $(|f_{ij}| \leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij})$ representam as equações de capacidade de transmissão dos circuitos (linhas e/ou transformadores) e o valor absoluto é necessário pois os fluxos de potência podem fluir em ambos os sentidos. As outras restrições são triviais e representam apenas restrições de limite de geração e de circuitos adicionados em cada ramo (i, j) .

O modelo de transportes é uma relaxação do modelo DC, pois não considera um conjunto de restrições, e portanto, uma das desvantagens do modelo de transportes é que a sua solução (mesmo sendo a ótima) pode não ser adequada sob o ponto de vista do modelo DC, pois para este, a solução do modelo de transportes poderia apresentar um corte de carga inadequado. A vantagem é que o problema (2.1) é

um problema de programação linear inteira mista (PLIM) e relativamente mais fácil de se resolver. Apesar de o modelo de transportes ser uma formulação relaxada, Garver usou um algoritmo heurístico construtivo para resolvê-lo. Entretanto, o algoritmo de Garver foi bem aceito, pois naquela época não existiam algoritmos melhores para resolver o problema de planejamento de transmissão, mas atualmente é possível resolver o modelo de transportes através de um algoritmo “Branch and Bound” e/ou a decomposição de Benders. Em [9] foi mostrado que um algoritmo “Branch and Bound” é mais eficiente que a decomposição de Benders para resolver o modelo de transportes.

O modelo de transportes para sistemas de grande porte é altamente complexo, e ainda não pode ser resolvido de forma ótima. Nesse tipo de problema, o algoritmo de Garver encontra apenas soluções de qualidade pobre e o algoritmo “Branch and Bound” não converge, encontrando apenas soluções sub-ótimas de boa qualidade. O modelo de transportes, apesar de ser o modelo mais relaxado, ainda não foi totalmente explorado pelas técnicas de otimização e novas propostas de otimização para resolver esse modelo ainda são bem vindas.

2.1.2. Modelo híbrido linear

O modelo híbrido foi proposto originalmente para ser usado em problema de planejamento de transmissão em [10], num contexto e numa estrutura diferente ao apresentado aqui, pois em [10] a modelagem híbrida é usada simplesmente como uma forma de auxílio para o indicador de sensibilidade do algoritmo heurístico proposto. A idéia de se usar o modelo híbrido em problemas de sistemas de transmissão é para contornar alguns problemas que apresentam os modelos de transportes e DC. O modelo de transportes apresenta uma excelente flexibilidade para trabalhar com redes não conexas mas as soluções encontradas podem ficar muito afastadas da solução ótima do modelo DC. Por outro lado, o modelo DC pode apresentar sérios problemas para trabalhar com redes não conexas. Assim o modelo híbrido permite encontrar soluções mais próximas da solução ótima do modelo DC com a vantagem de trabalhar eficientemente na parcela correspondente às partes não conexas do sistema.

Na modelagem matemática do modelo híbrido apenas uma parcela dos circuitos são obrigados a obedecer a lei de Kirchhoff das tensões. A idéia de usar esse tipo de modelo é tentar encontrar soluções ótimas que estejam mais próximas das soluções ótimas do modelo DC, mas sem aumentar a complexidade do problema na

medida do possível. O modelo mais simples é o modelo híbrido linear em que apenas os circuitos que já existem na topologia base são obrigados a obedecer as duas leis de Kirchhoff. Portanto o modelo híbrido linear é uma mistura do modelo de transportes com o modelo DC. Obviamente, uma vez definida a modelagem matemática desta maneira, a solução ótima também deve satisfazer as duas leis de Kirchhoff para os circuitos que já existem na topologia base e somente a lei de Kirchhoff das correntes para os circuitos que foram adicionados. Em outras palavras, o modelo híbrido linear deve satisfazer a lei de Kirchhoff das correntes em todas as barras do sistema e a lei de Kirchhoff das tensões somente naqueles circuitos que já existem na configuração base. Assim, por exemplo, se no processo de planejamento for adicionado um circuito, então os laços que eventualmente podem aparecer como consequência da adição desse circuito não estão obrigados a satisfazer a lei de Kirchhoff das tensões. O modelo híbrido linear ainda é um problema de programação linear inteira mista (PLIM) com complexidade próxima ao do modelo de transportes e, portanto, ainda podem ser usadas as mesmas técnicas de otimização usadas para o modelo de transportes.

A formulação matemática do modelo híbrido linear é a seguinte:

$$\min v = \sum_{(i,j)} c_{ij} n_{ij} \quad (2.2)$$

s.a.

$$S f' + S_0 f_0 + g = d$$

$$f_{ij}^0 - \gamma_{ij} n_{ij}^0 (\theta_i - \theta_j) = 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega_1$$

$$|f_{ij}^0| \leq n_{ij}^0 \bar{f}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega_1$$

$$|f_{ij}'| \leq n_{ij} \bar{f}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega_2$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \quad \text{e inteiro}$$

$$f_{ij}' \quad \text{irrestrito}$$

$$f_{ij}^0 \quad \text{irrestrito}$$

$$\theta_j \quad \text{irrestrito } \forall j \in \Omega_3$$

em que:

S : Matriz de incidência nó-ramo do sistema completo;

S_0 : Matriz de incidência nó-ramo do sistema existente na configuração base;

f' : Vetor de fluxos nos circuitos adicionados;

f_0 : Vetor de fluxos nos circuitos existentes na configuração base;

- γ_{ij} : Susceptância nominal de um circuito no ramo (i, j) ;
- Ω_1 : Conjunto das linhas existentes nos caminhos da configuração base (Ω_2 é o conjunto das linhas adicionadas aos caminhos novos, assim $(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2)$);
- Ω_3 : Conjunto das barras que fazem parte da configuração base (barras que não estão ilhadas);
- θ_j : Magnitude do ângulo de tensão das barras pertencentes a Ω_3 .

No sistema (2.2), o conjunto de equações $(S f' + S_0 f_0 + g = d)$ representa as equações da lei de Kirchhoff das correntes, uma equação por barra para todas as barras do sistema, e o conjunto de equações $(f_{ij}^o - \gamma_{ij} n_{ij}^0 (\theta_i - \theta_j) = 0)$ representam as equações correspondentes à lei de Kirchhoff das tensões com uma equação para cada caminho formado pelos circuitos que aparecem na configuração base. Este último conjunto de equações representa a diferença entre os modelos de transportes, híbrido linear, híbrido não-linear e DC.

2.1.3. Modelo híbrido não-linear

O modelo híbrido não-linear surge quando todos os circuitos que aparecem na topologia base, assim como os que são adicionados em paralelo a esses circuitos são obrigados a obedecer a lei de Kirchhoff das tensões, isto é, a parcela do sistema elétrico correspondente aos caminhos onde já existem circuitos na configuração base devem satisfazer as duas leis de Kirchhoff e a outra parcela correspondente aos caminhos novos em que não existem circuitos na configuração base devem satisfazer unicamente a lei de Kirchhoff das correntes. Portanto, o modelo híbrido não-linear também é uma mistura do modelo de transportes com o modelo DC. Uma vez definida a modelagem matemática desta maneira, a solução ótima também deve satisfazer as duas leis de Kirchhoff na parte do sistema em que existiam circuitos na configuração base e somente a lei de Kirchhoff das correntes na parte do sistema em que não existiam circuitos na configuração base. Em outras palavras, o modelo híbrido não-linear deve satisfazer a lei de Kirchhoff das correntes em todas as barras do sistema e a lei de Kirchhoff das tensões somente naqueles laços que já existem na configuração base. Assim, por exemplo, se no processo de planejamento for adicionado um circuito num

caminho novo, então os laços que eventualmente podem aparecer como consequência da adição desse circuito não estão obrigados a satisfazer a lei de Kirchhoff das tensões.

Encontrar a solução ótima do problema de planejamento de sistemas de transmissão utilizando o modelo híbrido não-linear é de uma complexidade quase equivalente que a requerida pelo modelo DC. Este fato explica em parte a falta de pesquisas publicadas utilizando o modelo híbrido de maneira independente. Assim, a versão do modelo híbrido que está sendo apresentada e as diferentes variantes que aparecem na literatura especializada são usadas apenas para auxiliar no processo de resolução do modelo DC em algoritmos de planejamento de sistemas de transmissão, como em [10, 11].

A formulação matemática do modelo híbrido não-linear é a seguinte:

$$\min v = \sum_{(i,j)} c_{ij} n_{ij} \quad (2.3)$$

s.a.

$$S f' + S_0 f_0 + g = d$$

$$f_{ij}^0 - \gamma_{ij} (n_{ij}^0 + n_{ij}) (\theta_i - \theta_j) = 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega_1$$

$$|f_{ij}^0| \leq (n_{ij}^0 + n_{ij}) \bar{f}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega_1$$

$$|f'_{ij}| \leq n_{ij} \bar{f}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega_2$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \text{ e inteiro}$$

$$f'_{ij} \text{ irrestrito}$$

$$f_{ij}^0 \text{ irrestrito}$$

$$\theta_j \text{ irrestrito } \forall j \in \Omega_3$$

No sistema (2.3), o conjunto de restrições ($S f' + S_0 f_0 + g = d$) representa as equações da lei de Kirchhoff das correntes, uma equação por barra para todas as barras do sistema, e o conjunto de restrições ($f_{ij}^0 - \gamma_{ij} (n_{ij}^0 + n_{ij}) (\theta_i - \theta_j) = 0$) representa as equações correspondentes à lei de Kirchhoff das tensões para todos os circuitos que aparecem na topologia base, assim como os que são adicionados em paralelo a esses circuitos. Este último conjunto de equações representa a diferença entre os modelos de transportes, híbrido e DC. No modelo de transportes, o conjunto de equações ($f_{ij}^0 - \gamma_{ij} (n_{ij}^0 + n_{ij}) (\theta_i - \theta_j) = 0$) simplesmente não aparece, no modelo híbrido linear aparece somente uma parcela dessas equações constituídas pelos

caminhos formados pelos circuitos que aparecem na configuração base, já no modelo híbrido não-linear também aparece somente uma parcela dessas equações que é constituída pelos caminhos formados pelos circuitos que aparecem na configuração base e os que são adicionados em paralelo a esses circuitos e, finalmente, no modelo DC aparecem todas as equações desse tipo, uma para cada caminho existente e/ou novos caminhos candidatos à adição de circuitos.

2.1.4. Modelo DC

O modelo DC é uma generalização do modelo de fluxo de carga DC que está amplamente desenvolvido em [12], sendo considerado como modelo ideal para ser usado em planejamento de sistemas de transmissão. Considera as duas leis de Kirchhoff para o sistema elétrico e a capacidade de transmissão das linhas existentes e candidatas, sendo assim, um problema de PNLIM pertence ao conjunto de problemas chamados NP-completo de difícil tratamento, apresentando o problema da explosão combinatória, pois, geralmente, existem muitos caminhos candidatos e, além disso, em cada caminho podem ser alocadas várias linhas.

Nesta formulação tem-se variáveis contínuas de operação (tais como os fluxos nas linhas, a diferença angular nas barras e os níveis de geração) e as variáveis de investimento inteiras (como são os circuitos candidatos à adição).

O problema geral para o planejamento da transmissão em sistemas de energia elétrica para o modelo DC pode ser formulado da seguinte forma:

$$\min v = \sum_{(i,j)} c_{ij} n_{ij} \quad (2.4)$$

s.a.

$$Sf + g = d$$

$$f_{ij} - \gamma_{ij} (n_{ij}^0 + n_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0$$

$$|f_{ij}| \leq (n_{ij}^0 + n_{ij}) \bar{f}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \text{ e inteiro}$$

$$f_{ij} \quad \text{irrestrito}$$

$$\theta_j \quad \text{irrestrito}$$

Após algumas manipulações algébricas, chega-se a uma formulação equivalente:

$$\min v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} n_{ij} \quad (2.5)$$

s.a.

$$B\theta + g = d$$

$$|\theta_i - \theta_j| \leq \bar{\phi}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega_1$$

$$n_{ij} |\theta_i - \theta_j| \leq n_{ij} \bar{\phi}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega_2$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \text{ e inteiro}$$

$$\theta_i \quad \text{irrestrito}$$

em que B é matriz de susceptâncias e $\bar{\phi}_{ij} = \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}}$.

Para solução do modelo DC foram utilizadas muitas técnicas de otimização que apareceram na área de pesquisa operacional e esse processo está muito ativo na fase atual de pesquisa de problemas de planejamento de sistemas de transmissão. No momento, representa o modelo ideal a ser utilizado e geralmente as novas técnicas de otimização são utilizadas para resolver esse modelo. Entretanto, para sistemas de grande porte e complexos, ainda hoje, todas as técnicas de otimização encontram apenas soluções de boa qualidade. Assim, o desenvolvimento de técnicas de otimização eficientes para o modelo DC representa a parte mais ativa de pesquisas no problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão, como exemplo pode-se citar [1, 11, 13, 14, 15].

2.1.5. Modelo linear disjuntivo

A modelagem matemática considerada como sendo ideal é o chamado modelo DC que é um problema de programação não-linear inteira mista (PNLIM). Entretanto, é possível transformar o modelo DC não-linear num problema equivalente cuja modelagem matemática corresponde a um ‘modelo linear’. Em geral, sempre é possível transformar um problema não-linear quadrático com variáveis binárias e reais num problema linear com variáveis binárias e reais usando uma transformação que permite ‘separar’ os termos quadráticos em relações lineares. Este processo é obtido incorporando ao problema um parâmetro M de valor muito grande. O modelo linear

disjuntivo foi proposto por vários autores, mas foi utilizado com relativo sucesso em [13] em que foi utilizada a decomposição de Benders para resolver problemas de complexidade média.

A modelagem linear disjuntiva, cuja solução ótima é a mesma que o modelo DC, assume a seguinte forma:

$$\min v = \sum_{(i,j)} c_{ij} y_{ij} + \alpha \sum_{k \in \Gamma} r_k \quad (2.6)$$

s.a.

$$S_0 f^0 + S_1 f^1 + g + r = d$$

$$f_{ij}^0 - \gamma_{ij}^0 (\theta_i - \theta_j) = 0 \quad \forall (i,j) \in \Omega_1$$

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1 (\theta_i - \theta_j) \leq M(1 - y_{ij})$$

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1 (\theta_i - \theta_j) \geq -M(1 - y_{ij})$$

$$|f_{ij}^0| \leq \bar{f}_{ij}$$

$$|f_{ij}^1| \leq \bar{f}_{ij} y_{ij}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in \Omega_T$$

$$f_{ij}^0 \text{ irrestrito}$$

$$f_{ij}^1 \text{ irrestrito}$$

$$\theta_j \text{ irrestrito}$$

em que:

y_{ij} : Variável binária igual a 1 se é adicionado o circuito no caminho (i, j) , caso contrário é igual a 0;

Γ : Conjunto das barras de demanda;

S_0 : Matriz de incidência nó-ramo dos circuitos existentes na configuração base com fluxos f^0 ;

S_1 : Matriz de incidência nó-ramo dos circuitos candidatos considerados como variáveis binárias e com fluxos f^1 ;

γ_{ij}^0 : Susceptância equivalente dos circuitos existentes na topologia base no caminho (i, j) ;

r : Vetor de gerações fictícias ou artificiais.

Em relação ao modelo linear disjuntivo apresentado, deve-se realizar as seguintes observações:

1. O conjunto de restrições $S_0 f^0 + S_1 f^1 + g + r = d$ representa a lei de Kirchhoff das correntes e corresponde a n_b restrições lineares, sendo n_b o número de barras do sistema;
2. O conjunto de restrições $f_{ij}^0 - \gamma_{ij}^0(\theta_i - \theta_j) = 0$, representa as restrições da lei de Kirchhoff das tensões para os circuitos existentes na configuração base e existe uma equação para cada caminho em que existe circuito na configuração base. Neste contexto γ_{ij}^0 representa a susceptância equivalente dos circuitos existentes na configuração base no caminho (i, j) e S_0 é a matriz de incidência nó-ramo dos circuitos existentes na configuração base. Portanto, se existem n_{l_0} caminhos em que existem circuitos na configuração base, a matriz S_0 é de dimensão $n_{l_0} \times n_b$. Deve-se observar que se num caminho existem vários circuitos na configuração base, essa informação é armazenada numa única coluna da matriz S_0 ;
3. Os conjuntos de restrições $f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) \leq M(1 - y_{ij})$ e $f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) \geq -M(1 - y_{ij})$ realmente podem ser representados da seguinte forma compactada:

$$|f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j)| \leq M(1 - y_{ij}) \quad (2.7)$$

e representa a lei de Kirchhoff das tensões para cada circuito candidato à adição. Na modelagem existe uma restrição do tipo (2.7) para cada circuito candidato à adição. Assim, por exemplo, se num caminho (i, j) é possível adicionar até quatro circuitos então devem existir quatro restrições do tipo (2.7) porque cada circuito candidato à adição é considerado separadamente como uma variável binária. Logicamente, existem formas alternativas de representar as variáveis inteiras através de uma soma de variáveis binárias, na tentativa de diminuir o número de variáveis binárias. Considerando a adição de cada circuito isoladamente como uma variável binária então a matriz de incidência nó-ramo S_1 deve ter uma dimensão muito maior que a matriz S_0 sendo que a mesma observação é válida para as dimensões vetores f^0 e f^1 ;

4. É fácil verificar que a relação (2.7) representa a lei de Kirchhoff das tensões para cada circuito binário candidato à adição. Assim, se um circuito no caminho (i, j) for adicionado ao sistema, com $y_{ij} = 1$, então de (2.7) se verifica facilmente que:

$$|f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j)| \leq 0 \Rightarrow f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) = 0$$

que é a relação que representa a lei de Kirchhoff das tensões para o caminho (i, j) .

Em caso contrário, se não é adicionado um circuito no caminho (i, j) , com $y_{ij} = 0$, então a (2.7) se transforma na seguinte relação:

$$|f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j)| \leq M$$

que é uma restrição trivial, sempre verdadeira, se o parâmetro M for muito grande.

O modelo linear disjuntivo apresenta algumas vantagens e desvantagens em relação ao modelo DC não-linear convencional. A principal desvantagem está relacionada com o aumento da dimensão do problema com a introdução de variáveis binárias (no modelo DC podem ser usadas as variáveis inteiras n_{ij}) e, principalmente, com a escolha ou determinação do parâmetro M grande para cada restrição que passa a representar o fator complicante na solução do modelo linear disjuntivo. A principal vantagem está relacionada com a modelagem linear e, eventualmente, pode-se desenvolver algoritmos adequados com propriedades de convergência interessantes do ponto de vista teórico.

2.1.6. Outros modelos

O modelo AC ainda não foi usado em planejamento da expansão de sistemas de transmissão como modelo a ser resolvido utilizando uma técnica de otimização eficiente. Entretanto, representa o modelo a ser usado no futuro, isto é, pode-se sair dos modelos de síntese e usar diretamente o modelo AC usado em operação de sistemas de transmissão. Um dos objetivos de pesquisas em métodos de pontos interiores para resolver problemas de programação não-linear, visa desenvolver no futuro técnicas de otimização que trabalhem diretamente com o modelo AC.

No modelo AC, devem ser obedecidas as duas leis de Kirchhoff na forma exata, sem as simplificações utilizadas para encontrar os modelos linearizados. Também podem ser incorporadas outras restrições operacionais como limites de tensão. Mais

importante ainda, pode-se realizar o planejamento integrado de potência ativa e reativa, isto é, pode-se integrar o planejamento da expansão de sistemas de transmissão e alocação de fontes de potência reativa. As perdas exatas do sistema são encontradas de forma trivial. Assim, técnicas de otimização que trabalham com o modelo AC devem aparecer no futuro.

2.2. Técnicas de solução

Na análise das diferentes pesquisas publicadas em planejamento de sistemas de transmissão, deve-se realizar uma clara distinção entre dois aspectos significativamente diferentes: a modelagem escolhida e o método de resolução. A modelagem escolhida pode ser um dos modelos apresentados anteriormente, entretanto, uma vez escolhido o modelo mais adequado, existem muitos métodos ou técnicas para se resolver o problema. Essas técnicas podem ser divididas em três grandes grupos: algoritmos heurísticos construtivos, algoritmos de otimização clássica e metaheurísticas. Existem pesquisas publicadas onde são utilizados mais de um modelo e a técnica de resolução pode ser um algoritmo que é formado por uma combinação de várias técnicas de resolução, entretanto, sempre é possível identificar o modelo e a técnica principal e os modelos e técnicas auxiliares ou complementares. A seguir são apresentadas as técnicas de solução.

2.2.1. Algoritmos heurísticos construtivos

Como foi visto nas seções anteriores, o problema de planejamento de sistemas de transmissão pode ser representado através de vários modelos matemáticos. Por exemplo, o modelo de transportes e o modelo híbrido linear são problemas de programação linear inteira mista (PLIM) enquanto que o modelo híbrido não-linear e o modelo DC são problemas de programação não-linear inteira mista (PNLIM). Ainda hoje é difícil resolver problemas dos tipos mencionados, especialmente para sistemas de grande porte. Nas pesquisas iniciais sobre o problema de planejamento de sistemas de transmissão foram utilizados os chamados algoritmos heurísticos construtivos para resolver problemas de planejamento de sistemas reais.

Um algoritmo heurístico construtivo é um procedimento passo a passo em que de maneira sistemática se encontra uma boa proposta de expansão do sistema

elétrico, isto é, a partir da configuração base, em cada passo é adicionado um ou vários circuitos até que o conjunto de adições realizado permite uma operação adequada do sistema elétrico. Assim, em cada passo a configuração do sistema é modificada pela adição de um ou vários circuitos e esta configuração obtida é chamada de configuração corrente. O circuito escolhido em cada passo para ser adicionado à chamada configuração corrente é o circuito que corresponde ao caminho mais atrativo identificado pelo chamado critério de sensibilidade, indicador de sensibilidade ou índice de desempenho. Assim, a diferença fundamental entre os diferentes algoritmos heurísticos construtivos reside no indicador de sensibilidade escolhido e, obviamente, no modelo escolhido.

Um indicador de sensibilidade é basicamente um parâmetro que de alguma maneira está relacionado com a variação da função objetivo devido a algumas variações dos parâmetros do sistema, considerando como sistema a configuração corrente. O indicador de sensibilidade possui as seguintes características:

- Indica os caminhos mais atrativos para realizar a adição dos circuitos;
- É um indicador de caráter local, isto é, identifica a melhor estratégia para a configuração corrente em contraposição a um indicador de sensibilidade de caráter global, que identificaria a melhor estratégia para a melhor configuração do sistema;
- Como os indicadores locais nem sempre coincidem com os indicadores globais então os algoritmos heurísticos, frequentemente, não têm capacidade de encontrar as configurações ótimas globais de sistemas reais.

Resumindo, do ponto de vista teórico, um algoritmo heurístico construtivo nem sempre encontra a configuração ótima da expansão de um sistema elétrico. Na prática, estes algoritmos heurísticos encontram as configurações ótimas de sistemas pequenos e apenas configurações boas para sistemas elétricos de médio e grande porte. Entretanto, estes algoritmos são muito importantes pelos seguintes motivos:

- Na primeira fase de pesquisas (décadas de 60 e 70) era a única maneira que existia para resolver problemas de planejamento de sistemas elétricos de grande porte;
- A maioria destes algoritmos são robustos e simples de entender, programar e usar;
- Os esforços computacionais destes algoritmos são muitos pequenos;

- Muitas características e propriedades destes algoritmos podem ser utilizadas no desenvolvimento de algoritmos mais complexos como as metaheurísticas (“simulated annealing”, algoritmo genético, busca tabu, GRASP, etc.);
- Ainda hoje, esses algoritmos são os mais utilizados pelas empresas do setor elétrico.

Heurísticas construtivas usando o modelo de transportes

Garver [8] desenvolveu o primeiro algoritmo de grande difusão usado no planejamento de sistemas de transmissão. O trabalho de Garver foi pioneiro em vários aspectos e entre os mais importantes podem ser citados os seguintes:

- Sugeriu uma forma sistemática de realizar o planejamento de sistemas de transmissão introduzindo técnicas diferentes às usadas na análise de operação de sistemas elétricos. Assim, sugeriu usar o agora conhecido como modelo de transportes como a forma mais adequada de modelagem matemática para realizar trabalhos de planejamento em contraposição ao uso de modelos mais exatos como o fluxo de carga AC, mas que não podiam ser aplicada em trabalhos de planejamento. Modelos como o fluxo de carga AC não podem ser usados porque a topologia de sistemas elétricos usados em planejamento são sistemas não conexos com barras e/ou regiões ilhadas e porque ainda não foi resolvido o problema de reativos o que levaria a sérios problemas de convergência mesmo em sistemas não ilhados.
- Inaugurou a fase dos algoritmos heurísticos construtivos que foram muito usados nas décadas seguintes. Estes algoritmos consistem basicamente em ir adicionando um circuito em cada passo, usando um indicador de sensibilidade, até que sejam satisfeitas todas as condições de operação.

Logicamente, o algoritmo desenvolvido por Garver foi uma tentativa de encontrar uma boa solução de um problema complexo e não necessariamente a solução ótima. Encontrar a solução ótima da modelagem proposta por Garver, o modelo de transportes, implicaria em resolver um problema de programação linear inteira mista (PLIM). A solução ótima de um problema desse tipo pode ser encontrada, por exemplo, usando um algoritmo de “Branch and Bound”, mas esta técnica exige o uso de conhecimentos profundos de programação linear, programação inteira e computadores de alta velocidade para resolver problemas de sistemas reais e nem todas essas

ferramentas estavam disponíveis na década de 60 quando foi desenvolvido o trabalho de Garver.

Heurísticas construtivas usando o modelo DC

Após o trabalho pioneiro de Garver apareceram novas pesquisas sugerindo a utilização do modelo DC e algoritmos heurísticos construtivos para encontrar uma solução desse modelo. É evidente que o modelo DC é uma representação mais adequada do problema de planejamento de sistemas de transmissão. Entretanto, a dificuldade de resolver problemas usando o modelo DC é maior quando comparado com os problemas formulados usando o modelo de transportes. Em compensação, as configurações encontradas são melhores como alternativa de planejamento. Deve-se lembrar que em planejamento de sistemas de transmissão estão sendo usados modelos matemáticos relaxados (transportes, híbrido linear, híbrido não-linear, DC) para encontrar configurações que depois devem ser usadas e testadas utilizando o modelo de operação de sistemas de energia elétrica, isto é, o modelo de fluxo de carga AC. Portanto, é evidente que as configurações obtidas usando os modelos de planejamento de sistemas de transmissão freqüentemente devem precisar de um ajuste e reforço adicional nas fases seguintes de estudo (planejamento de reativos, planejamento de curto prazo, etc).

Levando em conta as observações antes mencionadas, existe um consenso entre os pesquisadores em planejamento de sistemas de transmissão de que o modelo considerado ideal na fase de planejamento é o modelo DC. Conseqüentemente, a maioria das pesquisas publicada em planejamento de sistemas de transmissão utiliza o modelo DC e, nos últimos anos, os outros modelos (transportes, híbrido linear e híbrido não-linear) foram utilizados como modelos auxiliares para ajudar a encontrar excelentes configurações do modelo DC.

Dois algoritmos heurísticos construtivos que usam o modelo DC e são muito usados em sistemas brasileiros são o algoritmo de mínimo esforço [14] e o algoritmo de mínimo corte de carga [15]. Ambos algoritmos são relativamente parecidos e a diferença fundamental está no tipo e na determinação do indicador de sensibilidade usado.

Heurísticas construtivas usando modelos mistos

Existem várias pesquisas que usam uma modelagem matemática mista [10,16], isto é, a modelagem matemática que é resolvida em cada passo do algoritmo heurístico construtivo apresenta características significativamente diferentes das apresentadas na seção 2.1. Entretanto, a solução encontrada satisfaz as exigências do modelo DC; portanto, pode-se afirmar que a modelagem usada nesses métodos corresponde ao modelo DC com a utilização de algumas modificações que substituem os indicadores de sensibilidade dos outros algoritmos heurísticos.

Os algoritmos heurísticos construtivos que utilizam modelagem matemática mista e satisfazem as exigências do modelo DC, são, entre outros, o algoritmo da Rede Marginal de Levi-Calovic [16] e o algoritmo de Villasana-Gaver-Salon (VGS) [10].

Na proposta de VGS é utilizada uma modelagem matemática híbrida para encontrar o indicador de sensibilidade, mas o circuito adicionado, uma vez incorporado ao sistema elétrico, deve obedecer às duas leis de Kirchhoff. O algoritmo de VGS representa uma proposta muito interessante que permite encontrar uma boa solução para o modelo DC mas resolvendo em cada passo apenas um problema de PL.

Na modelagem apresentada no algoritmo de VGS, os circuitos da topologia corrente, isto é, os circuitos da topologia base e os circuitos adicionados no processo iterativo devem obedecer às duas leis de Kirchhoff. Assim, usa-se a modelagem híbrida para resolver o problema de PL correspondente do modelo híbrido para a topologia corrente e neste, todos os circuitos adicionados pela subrotina de PL obedecem apenas a lei de Kirchhoff das correntes. Entretanto, o circuito selecionado e adicionado na topologia corrente passa a obedecer as duas leis de Kirchhoff. Essa proposta apresenta os seguintes aspectos interessantes: (1) Pode-se usar a mesma estratégia de Garver utilizada no modelo de transportes, (2) Em cada passo resolve-se apenas um problema de PL e (3) A topologia final encontrada é factível para o modelo DC. Assim, é possível encontrar uma topologia de boa qualidade para o modelo DC resolvendo problemas de PL e usando a estratégia de Garver de resolver os modelos relaxados em relação à integralidade das variáveis para identificar o circuito mais adequado para se adicionar ao sistema. Deve-se observar que VGS está trabalhando com o modelo DC que é um problema não-linear (inteiro misto).

O algoritmo de rede marginal de Levi-Calovic assemelha-se ao algoritmo de VGS. Em vez de usar duas redes superpostas como neste último, o algoritmo de Levi-Calovic resolve, em cada passo do algoritmo heurístico construtivo, dois modelos matemáticos correspondentes a duas redes diferentes. O primeiro deles corresponde ao modelo DC para a chamada configuração corrente e verifica se a operação é correta para tal configuração. Caso o sistema não opere adequadamente, monta-se a chamada rede marginal, com os resultados obtidos na resolução do primeiro modelo matemático.

2.2.2. Algoritmos de otimização clássica

Na década de 80 iniciou-se uma nova fase na tentativa de se resolver o problema de planejamento de sistemas elétricos de maneira ótima, e a principal ferramenta matemática encontrada foram as técnicas de decomposição matemática [17]. O objetivo principal era encontrar a solução ótima do problema de planejamento de transmissão.

Quando é utilizado o modelo de transportes (2.1) o problema de otimização resultante é um problema linear inteiro misto, e no estágio atual do desenvolvimento das técnicas de otimização matemática é possível resolver um PLIM usando várias técnicas. O maior limitante é representado pelo esforço computacional e pela sofisticação necessária na implementação computacional para sistemas de grande porte.

Uma metodologia adequada para encontrar a configuração ótima do problema de planejamento quando é utilizado o modelo de transportes consiste em utilizar um algoritmo de “Branch and Bound”. Em princípio, qualquer problema de PLIM pode ser resolvido usando este algoritmo, entretanto, deve-se desenvolver um algoritmo de “Branch and Bound” eficiente e uma implementação computacional adequada para que o esforço computacional não seja proibitivo.

Outra alternativa para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão, quando é usado o modelo de transportes, consiste em utilizar as técnicas de decomposição matemática que permitem decompor o problema complexo de planejamento de sistemas de transmissão em dois subproblemas: um subproblema de investimento também chamado de mestre e um subproblema de operação também chamado escravo. A técnica de decomposição matemática usada é a decomposição de Benders e os dois subproblemas, mestre e escravo, são resolvidos de maneira iterativa

até que seja encontrada a solução ótima global. O subproblema de operação é um problema de programação linear e o subproblema de investimento é um problema de programação inteira. Portanto, a complexidade do problema foi transferida para a resolução do subproblema mestre que é resolvido de forma iterativa. O subproblema mestre, um problema de programação inteira, pode ser resolvido usando vários métodos e um deles é o algoritmo “Branch and Bound”.

Finalmente, outra alternativa para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão, quando é usado o modelo de transportes, consiste em usar a decomposição de Benders dentro de um contexto hierarquizado usando relaxação. Assim, numa primeira fase é resolvido o problema de PL correspondente do modelo de transportes (relaxando a integralidade das variáveis de investimento) usando a decomposição de Benders e na fase final é resolvido o problema original também usando a decomposição de Benders. A vantagem consiste em usar os cortes de Benders gerados na primeira fase para acelerar o processo de convergência na fase final. A diminuição do esforço computacional é evidente pois na fase inicial se resolve um problema PL usando a decomposição de Benders sendo os dois subproblemas (mestre e escravo) problemas de PL permitindo diminuir as iterações necessárias para a convergência na fase final onde o subproblema mestre é um problema de programação inteira (PI). Uma estratégia alternativa consiste em substituir a fase inicial por um conjunto de restrições geradas usando características específicas do problema de planejamento de sistemas de transmissão. Estas restrições são restrições relaxadas pois não eliminam as soluções factíveis do problema original, mas aceleram de maneira significativa o processo de convergência na resolução do problema.

Quando é utilizado o modelo DC para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão pode-se aplicar as mesmas técnicas de otimização matemática usadas para o modelo de transportes, mas a técnica de otimização clássica mais utilizada (praticamente a única) para resolver o modelo DC é a decomposição de Benders generalizada, devido a natureza do problema (não conexo). Quando é usado o modelo DC, o problema de otimização resultante é um problema de PNLIM, cujo modelo é o apresentado em (2.4).

Decomposição de Benders

A decomposição de Benders [17] permite decompor um problema complexo em dois subproblemas. Assim, o problema de planejamento é dividido em dois subproblemas, o de investimento, também denominado mestre, e o de operação, conhecido como escravo. O mestre controla, basicamente, os aspectos econômicos do processo de planejamento; o escravo representa as equações de fluxo de potência e, com a alternativa de investimento fornecida pelo mestre, minimiza o uso dos geradores artificiais, a fim de satisfazer a demanda sem violar as restrições de operação. No processo de solução, se em uma determinada fase as decisões de investimento permitem um ponto de operação sem a utilização dos geradores artificiais, deve-se, nesse caso, enviar informações sobre as necessidades de investimento ao mestre, por meio dos cortes de Benders, como é mostrado na figura 2.1 (a). Esses cortes são incorporados como restrições adicionais.

No mestre, há dois tipos de restrições, como ilustrado na figura 2.1 (b). Existem as restrições nas variáveis de investimento (número máximo de circuitos a serem adicionados em cada caminho) e uma representação equivalente às restrições de operação (um conjunto reduzido que representa, implicitamente, as restrições críticas de operação). Quanto mais informações o mestre tem sobre a operação da rede, melhor é a decisão de investimento e, portanto, mais rápido o processo de convergência ao ótimo global.

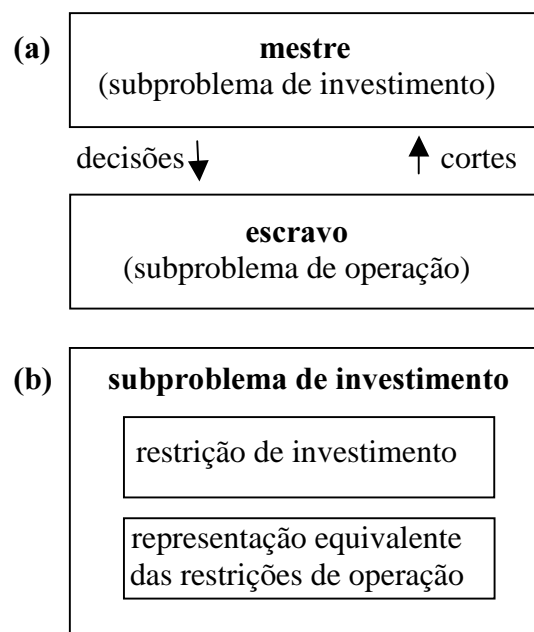


Figura 2.1: A decomposição de Benders

Os subproblemas de operação e investimento são problemas respectivamente, de programação linear (PL) e de programação inteira (PI). Portanto, a complexidade do problema foi transferida para a resolução do subproblema mestre de forma iterativa. Na solução do subproblema mestre (PI) utiliza-se, por exemplo, os algoritmos de “Branch and Bound”, ou o algoritmo de enumeração implícita de Balas especializado [17]. No problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo existem vários trabalhos que utilizam a decomposição de Benders, dentre eles tem-se [13].

“Branch and Bound”

O algoritmo de “Branch and Bound” é conceitualmente simples. A idéia básica consiste em achar a solução de um problema de PLIM, resolvendo um conjunto de problemas de programação linear (PL) que são versões relaxadas do problema de PLIM. Assim, inicialmente é resolvido o problema original (seja ele o modelo de transporte apresentado em (2.1)) após relaxar a integralidade das variáveis de investimento. Este problema de PL, conhecido como problema linear correspondente, o que chamaremos de P_0 , é resolvido usando um algoritmo de PL. Se P_0 apresenta uma solução inteira para as variáveis inteiras então essa solução é ótima global para o problema original. Entretanto, normalmente a solução de P_0 apresenta uma solução com algumas variáveis inteiras com valor corrente não inteiro. Neste caso, a estratégia é separar ou dividir o problema P_0 em dois subproblemas, P_1 e P_2 , escolhendo uma variável inteira com valor corrente não inteiro para realizar a separação. Assim, se a variável inteira n_{ij} possui um valor corrente não inteiro n_{ij}^* então os problemas sucessores são obtidos da seguinte forma:

- Subproblema P_1 :

É o problema original P_0 acrescido da restrição: $n_{ij} \leq [n_{ij}^*]$ em que $[n_{ij}^*]$ é o maior inteiro contido em n_{ij}^* ;

- Subproblema P_2 :

É o problema original P_0 acrescido da restrição: $n_{ij} \geq [n_{ij}^*] + 1$.

O problema de programação linear P_0 original foi dividido em dois subproblemas de programação linear menores P_1 e P_2 . Em outras palavras, já que não

foi possível encontrar a solução ótima do problema original com variáveis inteiras resolvendo P_0 então o problema é separado em dois problemas menores para tentar encontrar a solução ótima nos problemas menores usando técnicas de PL. Os subproblemas gerados são novamente resolvidos e podem gerar dois novos subproblemas usando uma variável inteira com valor corrente não inteiro para realizar a separação. Entretanto, às vezes a solução de um subproblema permite descobrir que já não é necessário sua separação em dois novos subproblemas e que, pelo contrário, o subproblema deve ser sondado ou eliminado para futuras avaliações. Um subproblema pode ser sondado quando sua solução apresenta alguma das seguintes características:

1. A solução é inteira, isto é, os valores correntes de todas as variáveis inteiras possuem valores inteiros. Nesse caso, o subproblema pode ter outras soluções inteiras mas todas elas devem ser de pior qualidade que a solução inteira encontrada e, portanto, não é necessário procurar melhores soluções na região factível desse subproblema e deve ser sondado.
2. A solução corrente não é inteira mas a função objetivo do subproblema é de pior qualidade que a função objetivo de uma solução inteira já encontrada resolvendo outros subproblemas. Nesse caso, o subproblema corrente pode ter soluções inteiras na sua região factível mas elas devem ser de pior qualidade que a solução inteira já encontrada e, portanto, o subproblema deve ser sondado.
3. A solução do subproblema é infactível. Nesse caso, os problemas sucessores desse subproblema serão mais infactíveis que o subproblema corrente. Portanto, o subproblema deve ser sondado porque não existem pontos factíveis no subproblema.

As características apresentadas anteriormente são conhecidas como testes de sondagem. É importante observar que um problema sucessor como P_1 é um problema mais restrito que seu problema predecessor, P_0 , porque P_1 possui uma restrição adicional. Assim, a região factível de P_1 é menor ou igual que a região factível de P_0 . Portanto, como o problema é de minimização, a função objetivo de P_1 deve ser maior ou igual a função objetivo de P_0 . As observações anteriores justificam os testes de sondagem. Assim, o algoritmo de “Branch and Bound” consiste fundamentalmente de uma estratégia de separação do problema em problemas menores até que esses

subproblemas sejam sondados. Os subproblemas gerados podem ser apresentados num gráfico chamado de árvore de “Branch and Bound”, em que os nós representam os subproblemas e as arestas representam a variável inteira usada para separação. O algoritmo termina quando todos os subproblemas gerados já foram sondados. A solução ótima global é a melhor solução inteira encontrada, que é chamada de incumbente durante o processo de resolução.

No algoritmo de “Branch and Bound”, na verdade, está sendo implementada uma estratégia de enumeração implícita e/ou explícita de todas as soluções inteiras da região factível do problema original. Este fato garante que a melhor solução encontrada seja ótima global. Assim, o algoritmo de “Branch and Bound” é conceitualmente simples, mas a implementação computacional apresenta maior complexidade e podem aparecer problemas de esforço computacional e de memória na resolução de um problema de grande porte.

A eficiência de um algoritmo de “Branch and Bound” depende de vários tipos de decisão que devem ser realizadas durante o processo de resolução. Obviamente, o melhor algoritmo é aquele que gera um menor número de nós na árvore de “Branch and Bound”, ou melhor ainda, aquele algoritmo que realiza o menor número de chamadas ao algoritmo de PL, necessário para resolver cada subproblema gerado. As principais decisões que determinam a qualidade de um algoritmo de “Branch and Bound” estão relacionados com os seguintes aspectos:

1. *Determinação de uma solução inteira inicial* (incumbente inicial): um algoritmo de “Branch and Bound” pode iniciar o processo sem incumbente inicial ou pode usar uma estratégia heurística rápida para gerar uma boa solução incumbente inicial. Dispor de uma boa solução incumbente é muito importante para que funcione o segundo teste de sondagem. Assim, uma boa solução incumbente encontrada o mais rapidamente possível melhora o desempenho do segundo teste de sondagem e portanto do esforço computacional do algoritmo de “Branch and Bound”;
2. *A variável escolhida para separação*: a solução de um subproblema pode apresentar muitas variáveis inteiras com valores correntes não inteiros. Assim, a escolha de cada uma dessas variáveis para separação do subproblema produz árvores de “Branch and Bound” diferentes. Obviamente, existe uma variável que produz a menor árvore de “Branch and Bound” mas não existem técnicas

sistemáticas que permitem identificar a melhor variável que deve ser usada para separar um subproblema. Entretanto, existem regras empíricas que permitem identificar as variáveis mais atrativas que podem ser usadas para a separação.

3. *Escolha do próximo subproblema que deve ser analisado:* em determinado momento da resolução de um problema usando o algoritmo de “Branch and Bound” existem muitos subproblemas que devem ser analisados. Assim, um aspecto importante é descobrir qual é o próximo subproblema que deve ser analisado. Obviamente, a escolha de cada subproblema produz árvores de “Branch and Bound” diferentes e existe um subproblema que uma vez escolhido produzirá a menor árvore de “Branch and Bound”. Também não existem técnicas sistemáticas para identificar o subproblema que deve ser analisado primeiro. Entretanto, também existem regras empíricas que permitem identificar os subproblemas mais atrativos. Um critério muito popular é escolher os subproblemas usando a regra LIFO (“Last Input First Output”) que escolhe para analisar sempre o último subproblema gerado. Esta estratégia permite um melhor desempenho do algoritmo de PL pois o critério permite que frequentemente seja resolvido um subproblema depois de resolver o subproblema predecessor. Assim, na resolução do subproblema pode ser usado um algoritmo de PL do tipo dual simplex com variáveis canalizadas usando a base ótima do subproblema predecessor encontrando mais rapidamente a solução ótima do subproblema sucessor. Esta estratégia permite resolver mais rapidamente muitos subproblemas. Também são apresentados outros critérios para realizar a seqüência de escolha para resolver os subproblemas gerados.
4. *Usando as características específicas do problema:* os algoritmos de “Branch and Bound” mais eficientes são os algoritmos especializados, isto é, os algoritmos que incorporam as características específicas do problema. Para cada tipo de problema podem ser geradas estratégias eficientes de sondagem ou ainda podem ser geradas informações adicionais como novas restrições que ao serem incorporadas ao problema melhoram muito os testes de sondagem reduzindo significativamente o tamanho da árvore de “Branch and Bound”. Também é possível aproveitar a estrutura do problema para elaborar algoritmos de PL eficientes que são chamados pelo algoritmo de “Branch and Bound”.

No problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão existem vários trabalhos que utilizam “Branch and Bound”, dentre eles tem-se [9].

2.2.3. Metaheurísticas

Durante as últimas décadas, muito se tem estudado sobre heurísticas simples direcionadas à solução de problemas de otimização combinatória NP-completo. Essas heurísticas são limitadas e fornecem sempre a mesma solução quando iniciadas sempre do mesmo ponto de partida. Estratégias metaheurísticas ou heurísticas modernas são mega-heurísticas, mais flexíveis, situados em domínios ainda pouco explorados pela literatura. São heurísticas genéricas que se adaptam facilmente as arquiteturas paralelas e são direcionadas à otimização global de um problema, podendo conter diferentes procedimentos heurísticos de busca local na solução a cada passo. Em outras palavras, essas mega-heurísticas quando aplicadas a problemas de otimização, tem como um de seus objetivos, gerar procedimentos de buscas em vizinhanças que evitem uma parada prematura em ótimos locais, proporcionando soluções melhores. Nas últimas décadas, surgiram vários procedimentos enquadrados como metaheurísticas na solução de problemas altamente combinatórios. Algumas das mais amplamente divulgadas são: “Simulated Annealing” (SA), “Tabu Search” (TS), “Genetic Algorithm” (GA), GRASP, etc. As metaheurísticas apresentam resultados satisfatórios para a solução do problema de planejamento da expansão de sistemas elétricos [1,18,19,20]. A sua eficiência está na implementação de boas estratégias que possam auxiliar a exploração do espaço de busca do problema.

Simulated Annealing (SA)

A técnica de “Simulated Annealing” [21] surgiu no campo da termodinâmica em meados dos anos 80, como consequência de uma comparação entre os problemas formulados nesse campo e a pesquisa operacional. Seu desenvolvimento se originou nas idéias do chamado algoritmo de Metrópolis, que, por sua vez, baseia-se no método de Monte-Carlo, que com o qual se estudam as propriedades de equilíbrio da análise do comportamento microscópico dos corpos. Essa teoria estuda os comportamentos físicos e químicos de um material com número considerável de moléculas que, por consequência, acaba tendo níveis de energia diferentes, sendo o

menor deles conhecido como estado fundamental de energia. Portanto, um material que está $0^\circ K$ tem todas as suas moléculas no estado (nível) fundamental de energia. Para outro valor de temperatura, T , as moléculas ocupam diferentes níveis de energia, mantendo uma distribuição decrescente, isto é, no estado fundamental existe um número elevado de moléculas, e essa quantidade vai diminuindo nos níveis seguintes de energia.

O algoritmo de Metrópolis gera uma seqüência de estados de um sólido, ou seja, dado um sólido em um estado i e com energia E_i , gera-se o estado seguinte j mediante um mecanismo de transição, por meio de um pequeno distúrbio. A energia do próximo estado é E_j , se a diferença de energia $E_j - E_i$ é menor ou igual a zero, o estado j é aceito. Caso contrário, ele pode ser aceito com certa probabilidade dada por:

$$e^{\left\{ \frac{E_i - E_j}{k_b T} \right\}} \quad (2.8)$$

Nesse caso, T é a temperatura do material e k_b é uma constante física, conhecida como constante de Boltzmann. A regra de aceitação descrita é chamada critério de Metrópolis e o algoritmo, algoritmo de Metrópolis. Se a diminuição da temperatura for feita de maneira paulatina, o sólido pode alcançar o estado de equilíbrio em cada nível. No algoritmo de Metrópolis, essa condição é encontrada após gerar um grande número de transições em dado nível de temperatura. Para cada valor de temperatura T , o sólido deve atingir um equilíbrio térmico, caracterizado pela propriedade de estar no estado i , com energia E_i determinado pela distribuição de Boltzmann:

$$P_T = [X = i] = \frac{1}{Z(T)} e^{\left(\frac{-E_i}{k_b T} \right)} \quad (2.9)$$

em que X é uma variável estocástica do estado atual do sólido, $Z(T) = \sum_i e^{\left(\frac{-E_i}{k_b T} \right)}$, um fator de normalização, conhecido como função partição; k_b , a constante de Boltzmann e

$e^{\left(\frac{-E_i}{k_b T} \right)}$ o fator de Boltzmann.

O algoritmo de Metrópolis deu origem ao algoritmo de “Simulated Anneling”, que apresenta a seguinte descrição:

Início:

Iniciar (T_0, N_0) ;

$k = 0$,

Configuração inicial S_i ;

Repetir o procedimento:

Faça $L = 1$ para N_k

Gere $(S_j$ de $S_i)$;

Se $f(j) \leq f(i)$ faça $S_i = S_j$

Caso contrário:

Se $\exp \frac{f(i) - f(j)}{T_k} >$ número aleatório $[0, 1]$ faça $S_i = S_j$;

Fim;

$k = k+1$;

Cálculo do comprimento de (N_k) ;

Cálculo do parâmetro de controle (T_k) ;

Critério de parada;

Fim.

Considerando analogamente o processo de “annealing” e o método de otimização, é possível sugerir a seguinte equivalência:

Termodinâmica \Rightarrow Otimização

Configuração \Rightarrow Solução factível

Configuração fundamental \Rightarrow Valor da função objetivo

Temperatura \Rightarrow Parâmetro de controle

A temperatura não corresponde a um significado real no campo da otimização; logo, deve ser adequadamente calculada e atualizada durante o processo. O programa de resfriamento controla o processo do SA (“Simulated Annealing”) até atingir a convergência e é responsável pela qualidade do algoritmo, que se define pela escolha de cada um dos seguintes parâmetros: temperatura inicial, taxa de esfriamento, número de tentativas de transição em cada nível de temperatura e critério de parada.

Para aplicar o algoritmo SA ao problema de planejamento da expansão de sistemas elétricos, três aspectos distintos e independentes são necessários: representação do problema, mecanismo de transição e programa de resfriamento.

A representação do problema engloba a forma de manipular a infactibilidade, a determinação da função objetivo e o tipo de configuração utilizada. A factibilidade de uma configuração é determinada pelas restrições do problema; a função objetivo é constituída pelo número de circuitos adicionados ao sistema e pela parcela que corresponde à penalidade associada ao corte de carga.

Quanto à configuração, ela diz respeito a uma proposta de investimento com valores de n_{ij} inteiros. Para verificar se uma configuração é factível ou não, resolve-se o problema de programação linear correspondente ao modelo matemático utilizado. Entretanto, para o algoritmo de SA, todas as soluções são factíveis, e as infactibilidades são penalizadas na função objetivo por meio dos cortes de carga, que elevam o custo das configurações infactíveis, tornando-as pouco atrativas.

O mecanismo de transição é responsável pela passagem da configuração corrente para a subsequente. Esse processo é realizado resumidamente, nas seguintes etapas: gera-se uma configuração candidata a partir da configuração corrente que é implementada usando a estrutura de vizinhança para o problema. Em seguida, determina-se a variação da função objetivo para a configuração candidata e analisa-se a mesma. Caso ela seja aceita, a mesma é transformada em configuração corrente.

A estrutura de vizinhança permite gerar uma configuração candidata a partir de uma configuração corrente. A configuração corrente pode ser obtida adicionando um circuito em um caminho candidato; fazendo simultaneamente a adição de um circuito e a retirada de outro, ou apenas retirando um circuito em um caminho candidato.

O programa de resfriamento é a estratégia geral de controle do processo SA desde o seu início até atingir a convergência e está caracterizado pela escolha, ou determinação dos seguintes parâmetros: valor inicial do parâmetro de controle T_0 , chamado de temperatura inicial; número de tentativas de transição N_k a cada nível de temperatura T_k ; taxa de diminuição de temperatura $T_{k+1} = g(T_k)T_k$, em que $g(T_k)$ é uma função de T_k e, por último, temperatura final T_f ou critério de parada.

Quanto aos critérios de parada, eles existem desde os mais simples aos mais sofisticados. A literatura especializada recomenda fixar, no início do processo, um número determinado de níveis de temperatura. Depois, caso a função objetivo ou a solução incumbente não melhore para vários níveis consecutivos de temperatura, significa que o processo atingiu a convergência. Em seguida, um número mínimo de aceitações deve ser fixado durante o último nível de temperatura. Se nesse último nível, o número de configurações não for maior que o mínimo estabelecido, o processo atingiu a convergência novamente.

Como exemplo de aplicação de SA ao problema de planejamento da expansão de sistemas elétricos tem-se [1].

Algoritmo genético (GA)

O algoritmo genético [21] foi inventado por John Holland em meados dos anos 60. A sua metodologia está baseada na seleção natural e evolução. Com a evolução pretende-se em cada geração, encontrar soluções mais qualificadas. A velocidade com que as novas soluções são introduzidas na população está associada a uma seleção adequada das condições iniciais do problema. Assim, um algoritmo genético será mais eficiente se conseguir gerar uma população inicial de boa qualidade. Por exemplo, para o problema de planejamento, uma população de boa qualidade é aquela que tem todos os circuitos da topologia ótima distribuídos nas configurações da população inicial. Dessa forma, a recombinação tem a capacidade de juntar esses circuitos em uma única topologia. Na prática, alguns desses circuitos não estão presentes, ou são eliminados prematuramente. Nesse caso, a mutação tem a responsabilidade de eliminar tais inconvenientes.

Os algoritmos genéticos contornam de maneira adequada os ótimos locais presentes nos problemas que possuem elevada quantidade de alternativas, pois, por meio da população (conjunto de configurações) é possível avaliar, simultaneamente, várias regiões pertencentes ao mesmo espaço de busca. Essa característica é conhecida na literatura como paralelismo implícito e é responsável pelo bom desempenho do método.

O algoritmo, na sua forma mais simples, deve cumprir as seguintes etapas:

1. Representar adequadamente uma configuração do problema. A mais popular é a representação em codificação binária, em que os operadores genéticos de recombinação e mutação são facilmente simulados;
2. Encontrar uma forma correta de avaliar a função objetivo ou o seu equivalente (“fitness”) e identificar as configurações de melhor qualidade;
3. Desenvolver uma estratégia de seleção das configurações, que atribua às configurações de melhor qualidade uma maior participação na formação das configurações da nova população (nova geração);
4. Criar um mecanismo que permita implementar o operador genético de recombinação;
5. Implementar o operador genético de mutação e terminar de gerar a nova população;
6. Parar quando o critério de parada for satisfatório. Caso contrário, voltar ao passo 2.

No problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo existem vários trabalhos que utilizam o AG, dentre eles tem-se [11,18].

Busca tabu (TS)

Busca Tabu (“Tabu Search” – TS) [21] é um algoritmo metaheurístico, usado para gerenciar um algoritmo de busca local. Foi proposto nos anos 80, por Fred Glover, e continua sendo utilizado para resolver problemas complexos em diversas áreas da pesquisa operacional. Segundo Glover, a TS está baseada na premissa de que a resolução de um problema é considerada inteligente se esse processo incorpora memória adaptativa e exploração sensível. O uso de memória adaptativa contrasta com as técnicas sem memória (como o “Simulated Annealing” e o Algoritmo Genético) e com as técnicas de memória rígida (como as técnicas de inteligência artificial e de “Branch and Bound”). As principais características da TS são:

1. Memória adaptativa:
 - a) Seletividade – incluindo esquecimento estratégico;
 - b) Abstração e decomposição – usando memória explícita e por atributos;
 - c) Tempo – atualidade de eventos, frequência de eventos, diferenciação entre curto e longo prazo;

- d) Qualidade e impacto – atração relativa quanto às escolhas alternativas, impacto de mudanças de relações em estrutura ou restrições;
- e) Contexto – interdependência regional, estrutural e seqüencial.

2. Exploração sensível:

- a) Imposição estratégica de proibições e induções – condições tabu e níveis de aspiração;
- b) Enfoques concentrados em boas regiões e em boas características das soluções – processos de intensificação;
- c) Caracterização e exploração de novas regiões promissoras – processo de diversificação;
- d) Padrões de busca não monótonos – oscilação estratégica;
- e) Integração e geração de novas soluções – “path relinking”.

O algoritmo TS aplica-se a problemas genéricos do tipo:

$$\begin{aligned}
 \min v &= f(x) \\
 \text{s.a.} & \\
 &x \in X
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

O método TS resolve (2.11) iniciando com um processo similar a qualquer algoritmo heurístico de busca local. A partir de uma configuração $x \in X$ (solução), define-se uma vizinhança como sendo o conjunto de todas as configurações, obtidas pela aplicação de um mecanismo de transição de x . A estrutura de vizinhança define as condições para que x' seja vizinho de x . Assim, por exemplo, no problema de planejamento de sistemas elétricos, define-se como vizinho de uma configuração x todas as configurações obtidas pela adição ou retirada de um circuito, ou troca de dois circuitos (retirada de um circuito e adição de outro), semelhante ao que foi mencionado em SA. No algoritmo de busca local, a partir da configuração corrente, caminha-se para a configuração vizinha que apresente uma maior diminuição da função objetivo. Um procedimento repetido dessa estratégia leva o algoritmo de busca local a parar no momento em que não existe configuração vizinha com menor valor da função objetivo, o que indica o encontro de um ótimo local. Para sair de um ótimo local, a estratégia de

TS é aceitar que a função objetivo piore de qualidade na tentativa de ir para outra vizinhança.

Para o problema de planejamento de sistemas elétricos, uma configuração ou solução candidata é representada pelo número de circuitos (n_{ij}) adicionados ao sistema, e a codificação é feita por variáveis inteiras. Essa proposta, característica do problema em questão, não garante a factibilidade da solução. Para afirmar que uma configuração é factível ou não, é preciso verificar se está operando adequadamente e para isso, deve-se resolver um problema de PL.

Uma transição do algoritmo TS (“Tabu Search”) consiste em passar da configuração corrente para uma vizinha. Espera-se que a configuração seguinte não tenha sido visitada e seja a melhor de toda a vizinhança. Caso não seja possível passar para uma solução vizinha de melhor qualidade, permite-se a menor degradação possível da função objetivo, exigindo assim, que toda a vizinhança seja avaliada e conseqüentemente todos os vizinhos devem ser conhecidos.

No algoritmo TS, a estrutura de vizinhança pode ser definida como no “Simulated Annealing”, ou seja, por meio das seguintes operações: adição de circuitos; troca de circuitos, retirando circuitos já adicionados e adicionando outros. Porém, essa estratégia é pouco eficaz pois poderia haver milhares de vizinhos candidatos a serem verificados e seria necessário calcular milhares de PL’s, tornando inaceitável o esforço computacional. Assim, um algoritmo eficiente de TS deve encontrar uma estratégia para reduzir o tamanho da vizinhança.

No problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo existem vários trabalhos que utilizam o TS, dentre eles tem-se [19].

GRASP

O método denominado GRASP (“Greedy Randomized Adaptive Search Procedure”) [21] se classifica como um metaheurística em que a componente básica é um algoritmo heurístico construtivo do tipo ‘guloso’. O GRASP é composto por duas fases associadas em cada iteração: uma fase de construção, em que uma solução candidata é construída por uma heurística gulosa, e uma fase de busca local, que busca um mínimo local pertencente à dada vizinhança a partir da solução obtida pela fase de construção. A melhor solução entre todas as iterações, denominada incumbente, é considerada a solução do problema.

A fase de construção do algoritmo consiste em encontrar uma solução de qualidade para o problema, usando um algoritmo construtivo, escolhendo em cada passo um elemento de uma lista de tamanho k . Essa fase apresenta os seguintes passos:

1. Escolher a solução inicial, chamada de solução corrente;
2. Elaborar uma lista com k variáveis atrativas para essa solução;
3. Escolher uma variável da lista de k elementos e atualizar a solução corrente com a adição da variável escolhida;
4. Se a solução corrente é factível, ou satisfaz o critério de parada, a fase construtiva terminou. Caso contrário, deve-se elaborar uma nova lista com k variáveis atrativas.

Na fase de busca local do algoritmo GRASP, procura-se encontrar a melhor solução na vizinhança daquela encontrada na fase de construção. O processo consiste em definir uma vizinhança da solução encontrada pela fase de construção e encontrar uma solução factível de melhor qualidade nessa mesma vizinhança. Sempre que uma solução factível de melhor qualidade é encontrada, a busca local é reinicializada, definindo uma nova vizinhança da nova solução. Esse processo, de uma maneira geral, pode precisar de um elevado esforço computacional, dependendo do tipo de problema.

Para o problema da expansão de sistemas elétricos, o desenvolvimento de um algoritmo GRASP foi realizado da seguinte forma [20]: na fase de construção foi usado um algoritmo construtivo do tipo mínimo corte de carga, como o que será apresentado no capítulo 4 (4.5.1.). O processo é iniciado com a topologia do ano de referência e, a cada passo, é adicionado um circuito ao sistema elétrico. Assim, resolve-se um problema de programação linear, utilizando a modelagem DC. Em relação ao algoritmo da fase construtiva, pode-se dizer que:

- A fase de busca construtiva pode não encontrar uma topologia factível após um número razoável de adições de circuitos, especialmente em sistemas complexos. Sendo assim, deve-se interromper o processo de busca e optar por outro processo de busca;
- Após ser encontrada uma topologia factível na fase construtiva, é proposto um processo de eliminação de circuitos irrelevantes adicionados nessa fase. Essa estratégia é a mesma de eliminações irrelevantes proposta pelo algoritmo de

mínimo corte de carga e também faz parte de praticamente todos os algoritmos heurísticos construtivos.

A fase de busca local corresponde à busca de um ótimo local na vizinhança da topologia factível encontrada na fase construtiva. A proposta consiste em trocar circuitos, isto é, simular a adição de um circuito e a retirada de outro, na tentativa de encontrar uma topologia factível de melhor qualidade e, em seguida, reiniciar a busca local.

2.3. O estado da arte em planejamento da expansão

O problema de planejamento de sistemas de transmissão é um problema cuja modelagem matemática assume uma forma muito complexa e de difícil solução. Nesse problema, pretende-se conhecer o plano de expansão ótimo do sistema, isto é, onde, quantos e quando deve-se adicionar linhas de transmissão e/ou transformadores ao sistema elétrico de forma que opere adequadamente para as novas demandas do horizonte de planejamento. São dados do problema, a topologia base, os dados de geração e demanda do horizonte de planejamento, os dados relacionados com as linhas de transmissão e/ou transformadores (resistência, reatância, capacidade de transmissão, tensão de operação, custo, etc.) e outras restrições operacionais de investimento.

No planejamento de sistemas de transmissão ainda é possível separar o problema em dois tipos: (1) planejamento estático e (2) planejamento multiestágio. No planejamento estático existe apenas um estágio de planejamento e no planejamento multiestágio, separa-se o horizonte de planejamento em vários estágios.

Existem vários modelos matemáticos em planejamento da expansão de sistemas de transmissão e para os dois tipos de problema, isto é, planejamento estático e planejamento multiestágio (nas seções anteriores foram mostrados alguns modelos matemáticos para o problema de planejamento estático). Geralmente esses modelos são versões relaxadas do modelo ideal de operação, o modelo AC.

Para melhor analisar o estado da arte em planejamento da expansão de sistema de transmissão dividiu-se o problema nos seguintes tópicos: algoritmos heurísticos, otimização clássica, metaheurísticas e sistemas elétricos considerados *benchmark*.

2.3.1. Algoritmos heurísticos

O primeiro algoritmo heurístico importante usado em planejamento de sistemas de transmissão foi o algoritmo construtivo de Garver para o modelo de transportes. Além de ter sido um dos primeiros algoritmos apresentados em planejamento, a idéia básica fundamental do algoritmo apresentado por Garver ainda é de grande valor. Garver sugere resolver o próprio modelo de transportes após relaxar a integralidade das variáveis, isto é, resolver o correspondente problema de programação linear (PL) para identificar o circuito mais atrativo e que deve ser adicionado ao sistema elétrico. Portanto, em cada passo é escolhido um novo circuito não inteiro identificado pelo problema de PL e que tenha maior capacidade de fluxo de potência entre os circuitos identificados. A idéia de Garver pode ser utilizada em todos os outros modelos.

No momento é possível encontrar soluções melhores que o algoritmo de Garver usando “Branch and Bound” para o modelo de transportes com esforços computacionais razoáveis, isto é, interrompendo o algoritmo “Branch and Bound” antes de atingir a convergência no caso de sistemas de grande porte e complexos. Entretanto, pode-se utilizar o algoritmo de Garver para encontrar topologias de elite que posteriormente são usadas para iniciar metaheurísticas ou como uma incumbente inicial do algoritmo “Branch and Bound”.

Não existem algoritmos heurísticos para o modelo híbrido linear, entretanto, em [10], Villasana-Garver-Salon apresenta um algoritmo que utiliza o modelo híbrido linear com a integralidade relaxada para a topologia corrente a fim de identificar o circuito mais interessante e que deve ser adicionado ao sistema com a mesma lógica do algoritmo de Garver. Entretanto, todo circuito adicionado ao sistema passa a obedecer a lei de Kirchhoff das tensões junto com os circuitos da topologia base no PL seguinte, correspondente ao novo modelo híbrido linear relaxado. Assim, a topologia final é factível para o modelo DC.

Existem muitos algoritmos heurísticos para o modelo DC como os apresentados em [10,14,15,16,22,23,24,25]. Em [14] é apresentado a algoritmo de mínimo esforço em que o indicador de sensibilidade indica o circuito que, uma vez adicionado ao sistema, produz uma maior redistribuição de fluxos no sistema elétrico e, portanto, uma maior redução de sobrecargas do sistema elétrico (a modelagem permite que os circuitos sejam sobrecarregados). Em [15] o algoritmo de mínimo corte de carga

em que a filosofia é parecida ao algoritmo apresentado em [14] mas nesse caso os circuitos não podem ser sobrecarregados e os problemas de infactibilidade são transformados em corte de carga, desse modo, o indicador de sensibilidade indica o circuito que, uma vez adicionado ao sistema, produz uma maior redução no corte de carga do sistema elétrico.

Todos os algoritmos heurísticos encontram apenas soluções de boa qualidade para sistemas grandes e a qualidade dessas soluções podem ficar muito distantes das soluções ótimas ou sub-ótimas como acontece, por exemplo, com o sistema norte nordeste brasileiro. A vantagem dos algoritmos heurísticos é que são simples de entender, robustos e muito rápidos. No momento, os algoritmos heurísticos ainda representam um campo de pesquisa muito interessante e as soluções encontradas por esses algoritmos podem ser usadas como base para encontrar soluções melhores usando algoritmos mais demorados como as metaheurísticas.

Praticamente todos os algoritmos heurísticos foram propostos apenas para o planejamento estático. Assim, desenvolver algoritmos heurístico para a planejamento multiestágio representa uma linha de pesquisa muito interessante. Em [26] foi estendido o algoritmo de Garver para o planejamento multiestágio de sistemas de transmissão.

2.3.2. Otimização clássica

A decomposição de Benders foi amplamente usada para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão. As principais aplicações relacionadas com a utilização da decomposição de Benders para o problema de planejamento de sistemas de transmissão podem ser encontradas em [27,28,29,30,31,32]. Em [28] foi proposto o planejamento hierarquizado com decomposição de Benders para o modelo DC. O mérito desse trabalho foi encontrar soluções ótimas de sistemas pequenos e de médio porte que não eram conhecidas na literatura especializada. Este fato gerou grandes expectativas com esses tipos de algoritmos, mas em sistemas de grande complexidade mostraram-se totalmente ineficientes. As mesmas conclusões foram obtidas com a decomposição de Benders usada para o modelo de transportes apresentado em [32]. Em [28] foi apresentado um algoritmo de decomposição de Benders para o modelo linear disjuntivo que também encontrou as soluções ótimas para os sistemas elétricos analisados em [26].

Os algoritmos “Branch and Bound” foram poucos utilizados em planejamento da expansão de sistemas de transmissão e as pesquisas mais relevantes foram apresentadas em [9,32]. Em ambos os casos foi utilizado o modelo de transporte. Nessas publicações ficaram evidentes que o algoritmo “Branch and Bound” que não utiliza a decomposição de Benders apresenta melhor desempenho. Nos próximos anos devem aparecer pesquisas relacionadas com algoritmos “Branch and Bound” para os modelos de transportes e híbrido linear para os modelos estático e multiestágio. Outra linha de pesquisa que se deve tornar ativa nos próximos anos é a utilização de algoritmos “Branch and Bound” para os modelos DC e AC. Nesses tipos de aplicações, o algoritmo “Branch and Bound” deve ser reformulado e também, deve-se desenvolver um algoritmo eficiente de programação não-linear para resolver cada subproblema da árvore de “Branch and Bound” que é um problema de programação não-linear. Supõe-se que esse algoritmo seja um algoritmo de pontos interiores. Assim nos próximos anos devem aparecer muitas aplicações utilizando o algoritmo “Branch and Bound” decorrente do abandono da decomposição de Benders e com a popularização dos algoritmos de pontos interiores.

Os algoritmos de “Branch and Bound” são muito eficientes para sistemas elétricos de complexidade média. Chama-se algoritmo de complexidade média todo sistema cuja solução ótima ou sub-ótima a adição de circuitos em menos de 20 caminhos diferentes. Significa que nesse tipo de problema, a árvore do algoritmo de “Branch and Bound” deve ter uma profundidade em torno de 20 a 30. Acima desses valores o esforço computacional cresce de forma exponencial. Entretanto, deve-se observar que a maioria dos sistemas elétricos apresentam soluções ótimas ou sub-ótimas com poucas adições e são facilmente resolvidas usando algoritmos “Branch and Bound”.

Em planejamento de sistemas de transmissão sistema de grande porte não é sinônimo de sistema complexo. Um sistema complexo geralmente é um sistema estressado, isto é, requer a adição de um número elevado de circuitos para operar adequadamente. O sistema mais complexo usado na literatura especializada é o sistema norte-nordeste brasileiro cujas soluções sub-ótimas adicionam circuitos em mais de 50 caminhos. Nesse tipo de problema, a árvore de um algoritmo “Branch and Bound” atingiria facilmente uma profundidade em torno de 60, isto é, tem-se um esforço

computacional muito elevado para a tecnologia atual de algoritmos “Branch and Bound”.

2.3.3. Metaheurísticas

Na década de 90 apareceram novos algoritmos heurísticos, diferentes dos algoritmos heurísticos tradicionais, geralmente mais eficientes e com uma grande variedade de tempo de processamento que pode ser calibrada para cada tipo de aplicação. Pertence a esses tipos de algoritmos técnicas de otimização como “Simulated annealing”, algoritmos genéticos e evolutivos em geral, “Tabu Search”, GRASP, “particle swarm”, “colony ant System”, etc.

As metaheurísticas apresentam a grande vantagem de que o algoritmo para resolver um problema varia muito pouco quando muda o modelo matemático do problema. Assim, por exemplo, em planejamento de sistema de transmissão, o algoritmo utilizado para resolver os modelos de transportes, híbridos e DC é praticamente o mesmo. Em cada caso deve-se resolver um problema de PL de diferentes formas. Esse não é o caso quando utilizamos, por exemplo, a decomposição de Benders e os algoritmos “Branch and Bound”, isto é, a otimização clássica. Por esse motivo, todas as aplicações de metaheurísticas em planejamento de sistemas de transmissão foram feitas utilizando diretamente o modelo DC, considerado ideal. As principais aplicações de metaheurísticas ao problema de planejamento foram apresentadas em [1,18,19,33,34,35,36].

As pesquisas apresentadas usando metaheurísticas indicam que, no momento, esses tipos de algoritmos são os mais competitivos para encontrar soluções de excelente qualidade de sistemas complexos. Também não é fácil identificar o algoritmo mais competitivo da família das metaheurísticas para o problema de planejamento de sistemas de transmissão. Existe a evidência de que todos esses algoritmos são realmente competitivos desde que sejam adequadamente implementados.

As metaheurísticas apresentam a vantagem de serem relativamente fáceis de implementar e geralmente apresentam excelente desempenho para todos os tipos de sistemas elétricos. Entretanto, apresentam a grande desvantagem de, em geral, requerem tempo de processamento elevado para encontrar soluções de excelente qualidade, entretanto, deve-se observar que o tempo de processamento não é um problema crucial em planejamento de sistemas de transmissão. Nos próximos anos deve continuar muito

ativa a pesquisa em metaheurísticas aplicadas aos problemas de planejamento de sistemas de transmissão, isto é, melhorando as existentes e/ou implementando novas metaheurísticas. Praticamente todas as propostas de metaheurísticas apresentadas na literatura especializada foram aplicadas ao planejamento estático. Em [37] foi apresentada a primeira metaheurística aplicada ao planejamento multiestágio de sistemas de transmissão. Assim, nos próximos anos devem aparecer novas aplicações de metaheurísticas para o planejamento multiestágio.

2.3.4. Modelos usados e sistemas elétricos considerados como *benchmark*

Neste trabalho são usados o modelo de transportes (algoritmos apresentados nos capítulos 3 e 5) e o modelo DC (algoritmo apresentado no capítulo 4). No capítulo 3 são introduzidos geradores artificiais na modelagem básica (2.1) com objetivo fundamental de tornar o problema modificado mais fácil de resolver usando determinados tipos de algoritmos. Do ponto de vista matemático, os geradores artificiais constituem apenas novas variáveis no problema, portanto, o problema original fica com o número de variáveis aumentado, mas pode se tornar mais fácil de ser resolvido. Logicamente, para que a solução de ambos problemas (original e modificado) seja equivalente na solução final, todas as variáveis correspondentes aos geradores artificiais devem ser iguais a zero. Com esta modificação a modelagem recebe o nome de modelo de transportes com corte de carga e é usada por alguns algoritmos heurísticos, de otimização clássica e metaheurísticas. Por exemplo, em uma determinada iteração k de uma metaheurística, as variáveis n_{ij} assumem valores conhecidos, tendo assim um problema de PL, e é este problema de PL que o algoritmo proposto neste capítulo resolve, com a função de verificar a factibilidade da configuração proposta pela metaheurística. Já no capítulo 5 a formulação (2.1) é utilizada sem modificações e o algoritmo proposto tem a função de resolver a formulação (2.1) com as variáveis n_{ij} relaxadas, logo o problema de PLIM se torna um problema de PL, e uma metaheurística, neste caso, tem a função de decidir se, em uma determinada iteração k , qual ou quais variáveis n_{ij} serão fixadas em um valor inteiro, para novamente se resolver um problema de PL, até que todas as variáveis n_{ij} sejam inteiras.

No capítulo 4, como no capítulo 3, também são introduzidos geradores artificiais, mas agora na modelagem básica do modelo DC (2.5) com os mesmos objetivos anteriores. Com isto a modelagem recebe o nome de modelo DC com corte de carga e também é usada por alguns algoritmos heurísticos, de otimização clássica e metaheurísticas que trabalham com o modelo DC. O algoritmo proposto no capítulo 5 tem a finalidade de verificar se a proposta em uma determinada iteração k , por exemplo, de uma metaheurística apresenta ou não corte de carga.

Com relação aos sistemas considerados *benchmark*, a literatura especializada apresenta alguns sistemas em planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Esses sistemas apresentam tamanho e complexidade variada, sendo eles:

1. Sistema de Garver de 6 barras e 15 circuitos;
2. Sistema IEEE de 34 barras e 41 circuitos;
3. Sistema sul brasileiro de 46 barras e 79 circuitos;
4. Sistema sudeste brasileiro reduzido de 79 barras e 145 circuitos;
5. Sistema colombiano de 78 barras e 155 circuitos;
6. Sistema norte-nordeste brasileiro reduzido de 87 barras e 183 circuitos.

O sistema de Garver foi muito utilizado pelos pesquisadores em planejamento. Representa um sistema para fins acadêmicos, mas a alternativa com redespacho da geração é difícil de resolver, isto é, não é fácil encontrar a solução ótima e muitos algoritmos não têm a capacidade de encontrar essa solução ótima. O sistema de Garver permite trabalhar com e sem redespacho da geração.

Os outros sistemas, exceto o sistema norte-nordeste brasileiro apresentam complexidade média, isto é, poucos circuitos devem ser adicionados para encontrar as soluções ótimas ou sub-ótimas. No momento, muitos algoritmos trabalham adequadamente com esses sistemas. Os dados disponíveis do sistema sul brasileiro permitem trabalhar com e sem redespacho da geração. Por outro lado, os dados do sistema colombiano permitem trabalhar também com o planejamento multiestágio com 3 estágios.

O sistema norte-nordeste brasileiro representa um verdadeiro sistema *benchmark* em planejamento de sistema de transmissão. Para o Plano P2, deve-se adicionar mais de 100 circuitos para encontrar soluções de qualidade desse sistema, assim esse sistema é altamente complexo e apresenta um número elevado de soluções de qualidade. Nesse contexto a maioria dos algoritmos converge em ótimos locais e

muitas vezes de pobre qualidade. Logicamente não se conhece as soluções ótimas desse sistema. Para ilustração, quando usado o modelo DC e o Plano P2, deve-se observar que todos os algoritmos heurísticos convergem com propostas de investimento superiores a 3 bilhões de dólares. Entretanto, as melhores metaheurísticas convergem com propostas de investimentos menores de 2,6 bilhões de dólares. Assim, as novas metaheurísticas reduziram as propostas de investimento em mais de 400 milhões de dólares. Para esse sistema e usando o modelo DC, os algoritmos de otimização clássica não são competitivos no momento. Portanto, encontrar soluções sub-ótimas para o modelo DC no sistema norte-nordeste brasileiro representa um grande desafio para os pesquisadores em planejamento de sistemas de transmissão. O sistema norte-nordeste brasileiro permite trabalhar com planejamento multiestágio com 2 estágios, mas existem dados para trabalhar apenas sem redespacho da geração.

2.4. Aplicações de PL em problemas de energia elétrica

Foram desenvolvidos alguns algoritmos de PL especializados para os problemas de energia elétrica, dentre eles está o algoritmo desenvolvido por B. Stott e J. L. Marinho [5] que é uma consequência dos trabalhos [3, 4]. [5] apresenta um método de programação linear (PL) para cálculos de despacho de segurança e controle emergencial em sistemas de potência de grande porte. O método, segundo os autores, é de confiança, rápido, flexível, fácil de programar e requer pequeno esforço computacional. Trabalha-se diretamente com as variáveis e limites normais dos sistemas de potência, sem usar variáveis de folga e/ou não-negatividade, incorporando o uso das técnicas de matrizes esparsas. Uma importante característica do método é lidar com curvas de custo de geração multi-segmentadas pura e eficientemente.

As características gerais desse método de PL consiste em usar o simplex revisado para o problema primal, usando o dual, bases reduzidas e técnicas de relaxação. O processo inicia através de um ponto de operação inicial do sistema de potência contendo sobrecarga nos ramos. Os limites dos fluxos de ramos violados são impostos um a um, reprogramando otimamente o sistema em cada ocasião, testando para novas sobrecargas tendo a oportunidade de relaxar os limites impostos previamente. Assim o cálculo continua ordenadamente para a solução final.

Os coeficientes das restrições geralmente apresentam elevada esparsidade e somente um conjunto reduzido dessas restrições são usadas em alguns estágios, utilizando o esquema de busca com restrição iterativa. As restrições não esparsas são geradas somente para os poucos fluxos de ramos cujos limites foram determinados. O método possui grande eficiência computacional devido ao número de ligação dos fluxos de ramo na solução eventual não ser excessivo.

Requer-se uma linearização incremental do modelo de fluxo de carga. A precisão do modelo incremental de fluxo de carga DC prova ser adequado, mas se é necessária alta precisão, a solução do PL pode ser interagida com a solução do fluxo de carga AC.

Embora bastante fácil de implementar, o método é uma versão distinta de PL. Uma apresentação direta e completa do método é feita em função do problema de controle e segurança, dessa maneira espera-se estar assimilando mais facilmente através de uma análise do sistema de potência. As variáveis canalizadas do sistema de potência normal são usadas no decorrer do problema. As variáveis artificiais ou de folga ou as condições de não negatividade são introduzidas.

Outro PL especializado corresponde a versão documentada no trabalho de dissertação tese de mestrado de André Chainho Gandini [7]. A dissertação apresenta a metodologia de Stott adaptada para resolver problemas de corte de carga advindo do problema de planejamento.

Embora os problemas de planejamento e operação de uma rede de energia sejam de natureza muito diferente, o problema do corte de carga é essencialmente um problema de otimização da operação. Em [7], após o problema ter sido apropriadamente ajustado, primeiro tomando-se a demanda ou geração líquida em cada barra e em seguida introduzindo-se os geradores fictícios, o problema consiste em determinar o despacho econômico de potência ativa, no qual os únicos custos se devem à atuação dos geradores fictícios.

E é precisamente esse o problema que o método de Stott resolve, só que com uma modelagem diferente do sistema. O método de Stott realiza uma linearização da rede em torno de um dado ponto de operação, obtido externamente, em geral, a partir de um fluxo de carga AC. Essa linearização é feita segundo o modelo DC incremental, em torno do ponto de operação. As variáveis de controle são as variações nas injeções líquidas de potência ativa, somente nas barras que possuem injeção de potência

controlável. Inclusive o próprio Stott sugere a representação das cargas como injeções negativas controláveis de potência ativa, quando se deseja considerar o corte de carga como uma das possíveis ações de controle.

Já no problema de corte de carga a modelagem da rede é DC pura, ou seja, não é necessário dispor de um ponto inicial de linearização obtido externamente, porque a linearização é feita sobre toda a faixa de operação do sistema. Desta forma, os limites de geração e transmissão são os limites originais dos componentes do sistema.

Outra diferença é que no problema de corte de carga são consideradas somente as reatâncias das linhas de transmissão no fluxo de carga DC, enquanto no método de Stott considera-se também as resistências, dispondo-se inclusive de uma técnica de representação das perdas de transmissão.

Um outro problema é a ocorrência de ilhamentos (redes desconexas), que é comum nas rotinas de planejamento uma vez que se prevê, digamos para daqui dez anos, a existência de novas barras (por exemplo novas usinas de geração de energia). As quais precisam ser conectadas ao sistema de maneira ótima. Embora a ocorrência de ilhamentos não torne o problema infactível, pois cada carga pode ser atendida pelo gerador fictício instalado em sua própria barra, torna a sua resolução mais difícil pois a matriz $[B]$ se torna singular. Na prática a maioria dos ilhamentos que ocorrem durante a execução de algoritmos de planejamento consiste em barras isoladas.

Além disso, no problema da operação, os custos de geração são variáveis, permitindo-se, inclusive, a representação completa da curva de custo de geração linearizada por partes. Já no problema do corte de carga em planejamento, os custos incrementais de geração são zero (geradores reais) ou unitários (geradores fictícios).

Pode-se dizer que o problema do corte de cargas é um caso particular do problema de operação corretiva que o método de Stott resolve, mas baseado num modelo um pouco diferente.

3. Algoritmo simplex eficiente para verificar a factibilidade da operação do modelo de transportes

Neste capítulo apresenta-se um algoritmo de PL aplicado ao problema de planejamento de sistemas de transmissão para verificar a factibilidade do modelo de transportes de maneira mais eficiente que os *softwares* de uso geral. Esse tipo de PL aparece, por exemplo, em cada iteração como proposta de solução, na implementação das metaheurísticas que utilizam o modelo de transportes. A maioria dos algoritmos heurísticos construtivos e todas as metaheurísticas realizam a estratégia de escolher ou encontrar uma configuração ou proposta de investimento e a seguir resolvem um problema de PL para verificar a factibilidade da configuração proposta em termos de planejamento. Assim, em cada passo desses algoritmos, deve-se resolver um ou vários problemas de programação linear.

A metodologia do algoritmo proposto consiste em aproveitar as características do modelo de transportes e apresenta duas etapas: (1) Redução do número de variáveis e das restrições de igualdade do problema, e (2) Solução do problema resultante usando um algoritmo dual simplex canalizado e a estratégia de relaxação. O problema resultante apresenta uma única restrição de igualdade e um número de restrições de desigualdade igual ao número de circuitos do sistema elétrico. Uma particularidade muito importante deste problema é que somente um número muito reduzido destas restrições de desigualdade está ativo na solução ótima do problema. Assim, a estratégia mais adequada é usar relaxação iniciando a resolução do problema com a única restrição de igualdade e as restrições triviais de limite das variáveis de geração e incorporando em cada passo a restrição de desigualdade mais violada.

3.1. Modelagem matemática convencional

Na utilização de algumas técnicas de resolução às vezes é mais adequado realizar algumas modificações na modelagem básica dos modelos usados no problema de planejamento de sistemas de transmissão apresentados no capítulo 2. A modificação mais usada é a utilização de geradores artificiais em todas as barras de carga. O objetivo fundamental da mudança é tornar o problema modificado mais fácil de resolver usando determinados tipos de algoritmos. Do ponto de vista matemático, os geradores artificiais constituem apenas novas variáveis no problema, portanto, o problema original fica com o número de variáveis acrescido, mas pode se tornar mais fácil de ser resolvido. Logicamente, para que as soluções de ambos problemas (original e modificado) sejam equivalentes na solução final, todas as variáveis correspondentes aos geradores artificiais devem ser iguais a zero.

Adicionando os geradores artificiais no modelo de transportes (2.1), tem-se o modelo de transportes com corte de carga:

$$\min v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} n_{ij} + \alpha \sum_{k \in \Gamma} r_k \quad (3.1)$$

s.a.

$$\begin{aligned} Sf + g + r &= d \\ |f_{ij}| &\leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq d \\ 0 &\leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \quad \text{e inteiro} \\ f_{ij} &\quad \text{irrestrito} \\ \forall (i, j) &\in \Omega \end{aligned}$$

em que:

- Γ : Conjunto das barras que possuem demanda;
- r : Vetor de geração artificial;
- α : Parâmetro de penalidade suficientemente grande para tornar pouco atrativa alternativas de investimento com valores de r_k diferentes de zero.

Quando se resolve o problema de transportes usando as metaheurísticas, as variáveis n_{ij} assumem valores conhecidos e, portanto, o modelo (3.1) se reduz a um problema de PL que se resolve para cada iteração da proposta de solução na

implementação da metaheurística. Assim, os n_{ij}^k se transformam em parâmetros na formulação matemática convencional que assume a seguinte forma:

$$\min w = \sum_i \alpha_i r_i \quad (3.2)$$

s.a.

$$\begin{aligned} Sf + g + r &= d \\ |f_{ij}| &\leq (n_{ij}^k + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq d \\ \forall (i, j) &\in \Omega \end{aligned}$$

Quando os n_{ij}^k são conhecidos, o modelo de transportes com corte de carga apresenta um número menor de variáveis do que o modelo de transportes original e, neste caso, as vantagens de uma proposta usando relaxação e um algoritmo dual simplex canalizado parecem mais evidentes. Também, o processo de reotimização de problemas de PL sucessivos é de fácil implementação porque entre dois problemas de PL sucessivos varia apenas um ou alguns elementos do vetor n que sempre serão constantes e inteiros.

A resolução do modelo de transportes com corte de carga consiste na verificação adequada de uma proposta de investimento, ou seja, o problema resultante é simplesmente um problema de mínimo corte de carga. Assim, uma vez definida uma alternativa de investimento, tem-se um problema de programação linear onde a solução ótima indicará simplesmente se o sistema apresenta corte de carga (infactível) ou não (factível) em relação à formulação original.

3.2. Transformação da modelagem

Nesta seção é mostrada a transformação do problema de PL mostrado em (3.2) num problema de PL equivalente que possui um número menor de variáveis de controle e de restrições, e sua solução pode ser encontrada usando um algoritmo dual simplex canalizado e a estratégia de relaxação.

Sejam n_b o número de barras do sistema, n_l o número de circuitos (caminhos) existentes na configuração corrente, n_g o número de barras de geração e n_r o número de barras de carga. Portanto, o número de variáveis (incógnitas) do problema

(3.2) é igual a $n_v = n_l + n_g + n_r$. Por outro lado, o número de restrições do problema é igual a $n_{res} = n_b + 2n_l + n_g + n_r$ porque cada restrição com valor absoluto do tipo $|f_{ij}|$ deve ser substituída por duas restrições. Logo, um algoritmo do tipo primal simplex canalizado padrão trabalharia com uma base de tamanho n_b . Em ambos os casos o tamanho da base é muito grande para sistemas reais, aumentando o esforço computacional e os erros de aproximação no algoritmo de PL.

A formulação proposta consiste em diminuir o número de variáveis de controle de (3.2) ao deixar um subconjunto das variáveis f_{ij} implícitos como mostra o procedimento a seguir.

Seja o primeiro conjunto de restrições do sistema (3.2) que corresponde a um número de restrições igual ao número n_b de barras do sistema:

$$Sf + g + r = d \quad (3.3)$$

S é a matriz incidência de ordem $(n_b \times n_l)$ em que n_b é o número de barras do sistema e n_l é o número de ramos do sistema; f é o vetor das variáveis dos fluxos nos ramos; g é o vetor das variáveis das gerações reais das barras; r é o vetor das variáveis das gerações fictícias das barras e; d é o vetor das demandas das barras.

A matriz S tem uma linha para cada barra do sistema da rede e uma coluna para cada ramo. Cada coluna de S possui exatamente dois coeficientes diferentes de zero: um “+1” e um “-1”. A coluna associada com o ramo (i, j) contém um “+1” na linha i , um “-1” na linha j , e zero nas outras posições. Claramente, a matriz S não tem posto completo já que a soma de suas linhas é o vetor zero. Para mostrar que S tem posto $(n_b - 1)$ basta selecionar uma submatriz $((n_b - 1) \times (n_b - 1))$ de S que seja não-singular. Para isto, deve-se retirar uma linha do sistema (3.3), a linha correspondente à barra de referência. Seja n_b a barra de referência, então:

$$S'f + g' + r' = d' \quad (3.4)$$

em que S' é uma submatriz de S , onde foi retirada a linha n_b ; g' é um vetor de variáveis das gerações das barras sem a variável da posição n_b ; r é o vetor das variáveis das gerações fictícias das barras sem a variável da posição n_b e d' é o vetor das demandas das barras sem a demanda da posição n_b .

Sejam A e B submatrizes de S' , tal que:

$$S' = [A \quad B] \quad (3.5)$$

em que A é uma submatriz quadrada de posto $(n_b - 1)$ e B é uma submatriz de ordem $((n_b - 1) \times (n_l - n_b + 1))$. A submatriz A é escolhida de modo que suas colunas sejam linearmente independentes pois será preciso calcular a sua inversa.

Neste trabalho, a submatriz A foi escolhida através do algoritmo de Prim (árvore geradora mínima) que pode ser encontrado em [38].

Sejam f_a e f_b , tal que:

$$f = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

em que f_a é o vetor das variáveis de fluxos referente à submatriz A e f_b é o vetor das variáveis de fluxos referente à submatriz B , de modo que (3.4) pode ser reescrita:

$$Af_a + Bf_b + g' + r' = d' \quad (3.7)$$

E a equação da barra de referência que foi retirada de (3.3) pode ser reescrita como:

$$[a_{n_b 1} \quad \dots \quad a_{n_b (n_b - 1)}]f_a + [b_{n_b 1} \quad \dots \quad b_{n_b (n_l - n_b + 1)}]f_b + g_{n_b} + r_{n_b} = d_{n_b} \quad (3.8)$$

De (3.7), tem-se:

$$f_a = A^{-1}(-Bf_b - g' - r' + d') \quad (3.9)$$

Desta forma, conseguiu-se escrever as variáveis dos fluxos de f_a em função das demais variáveis e, assim, substituindo (3.9) em (3.8), a equação da barra de referência pode ser escrita do seguinte modo:

$$[a_{n_b 1} \quad \dots \quad a_{n_b (n_b - 1)}]A^{-1}(-Bf_b - g' - r' + d') + [b_{n_b 1} \quad \dots \quad b_{n_b (n_l - n_b + 1)}]f_b + g_{n_b} + r_{n_b} = d_{n_b} \quad (3.10)$$

Mas, $[a_{n_b 1} \quad \dots \quad a_{n_b (n_b - 1)}]A^{-1} = [-1 \quad \dots \quad -1]$ (teorema do apêndice D).

Assim (3.10) assume a seguinte forma:

$$[-1 \quad \dots \quad -1](-Bf_b) + [b_{n_b 1} \quad \dots \quad b_{n_b (n_l - n_b + 1)}]f_b + \sum_{i=1}^{n_b} g_i + \sum_{i=1}^{n_b} r_i = \sum_{i=1}^{n_b} d_i \quad (3.11)$$

Em (3.11) $([-1 \ \dots \ -1](-B) + [b_{n_b,1} \ \dots \ b_{n_b,(n_l-n_b+1)}])f_b$, nada mais é que as somas dos elementos das colunas da matriz B juntamente com os elementos da linha da barra de referência que foi retirada de S , e como a soma dos elementos de uma coluna da matriz S é zero, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n_b} g_i + \sum_{i=1}^{n_b} r_i = \sum_{i=1}^{n_b} d_i \quad (3.12)$$

A equação (3.12) é a única restrição de igualdade e receberá o nome de equação de balanço de potência.

Assim o seguinte sistema é equivalente ao sistema (3.2):

$$\min w = \sum_i \alpha_i r_i \quad (3.13)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_b} g_i + \sum_{i=1}^{n_b} r_i &= \sum_{i=1}^{n_b} d_i \\ |A^{-1}(-Bf_b - g'r' + d')| &\leq (n_{ij}^k + n_{ij}^0)\bar{f}_a \\ |f_b| &\leq (n_{ij}^k + n_{ij}^0)\bar{f}_b \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq d \\ \forall (i, j) &\in \Omega \end{aligned}$$

A melhor estratégia para resolver (3.13) é utilizar um algoritmo dual simplex canalizado e relaxação. Assim, o processo pode ser iniciado relaxando todas as restrições de fluxo de potência que pertencem ao grupo de f_a que estão escritas em função de f_b , isto é, o processo é iniciado com apenas a única restrição de igualdade, as $(n_l - n_b + 1)$ restrições canalizadas de fluxo de f_b e as restrições canalizadas $0 \leq g \leq \bar{g}$ e $0 \leq r \leq d$.

O número de variáveis do problema (3.13) é menor que no problema (3.2) porque foram eliminadas algumas variáveis f_{ij} do problema. E ainda, o problema (3.13) apresenta outras características mais importantes tais como: (1) Uma única restrição de igualdade que é a equação de balanço de potência, e (2) Na solução ótima do problema a maioria das restrições de fluxo de potência que pertencem ao grupo de f_a que estão escritas em função de f_b não estão ativas (estão com folga). Normalmente no sistema elétrico, em problemas de planejamento de potência ativa, somente um

número reduzido de circuitos está operando no limite máximo, o que corresponde a uma restrição ativa no problema (3.13); assim, a maioria dos circuitos operam abaixo de seus limites máximos e suas correspondentes restrições devem estar relaxadas na solução ótima do problema (3.13).

No problema (3.13), as variáveis são simplesmente as gerações (g e r) e os fluxos de f_b num total de $(n_v = n_g + n_r + (n_l - n_b + 1))$ variáveis. Assim, na solução ótima, normalmente devem estar ativas somente n_v restrições sendo uma delas a restrição de igualdade e as outras devem ser algumas restrições triviais de limite de geração ($0 \leq g \leq \bar{g}$ ou $0 \leq r \leq d$), algumas restrições canalizadas de f_b e um número reduzido de restrições de f_a . Portanto, a estratégia mais adequada é resolver o problema (3.13) usando um algoritmo dual simplex canalizado e relaxação. Assim, o processo de resolução é iniciado com a única restrição de igualdade, as restrições triviais de limites de geração e as restrições canalizadas de f_b , relaxando as restrições de fluxos de f_a . Em outras palavras, o processo de resolução é iniciado com um problema de PL com uma base de tamanho 1. Em cada passo do algoritmo é adicionado a restrição de f_a mais violada até verificar que todas as restrições relaxadas não estão mais violadas, ou seja estão com folga. Pode-se verificar através de testes experimentais e de argumentos teóricos que o tamanho da base sempre é muito pequena comparada com o tamanho da base do problema (3.2) usando algoritmos do tipo primal simplex canalizado.

Metodologia de otimização

O sistema (3.13) é relaxado retirando-se as restrições referentes aos fluxos pertencentes ao grupo de f_a :

$$\min w = \sum_i \alpha_i r_i \quad (3.14)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n_b} g_i + \sum_{i=1}^{n_b} r_i = \sum_{i=1}^{n_b} d_i$$

$$|f_b| \leq (n_{ij}^k + n_{ij}^0) \bar{f}_b$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

A solução ótima do sistema (3.14) é obtida facilmente através de um predespacho e um quadro ótimo e factível dual simplex canalizado é facilmente montado, mas essa solução pode não ser factível para o sistema (3.13), pois pode haver restrições de fluxo violadas. Assim uma das restrições de fluxo violada é escolhida para ser fixada no limite violado e ser introduzida no sistema (3.14) como restrição de igualdade e, após ser devidamente atualizada é introduzida no quadro dual simplex canalizado.

Após a introdução da restrição violada, o quadro dual simplex canalizado continua ótimo, mas já não é mais factível, assim, realizam-se algumas iterações de PL, até se obter um quadro ótimo e factível, ou seja, uma nova solução, que deve ser utilizada para verificar se ainda existe alguma restrição de fluxo de (3.13) violada e repetir o processo até não haver mais restrições violadas em (3.13). Assim, a solução obtida será a ótima de (3.13) e em consequência também de (3.2).

Predespacho

O predespacho consiste em iniciar o processo de solução colocando todas as variáveis com valores nulos, isto é, colocar todas as gerações (reais e fictícias) e as variáveis f_b iguais a zero. Em seguida, deve-se incrementar sucessivamente as gerações para seus valores máximos, ou seja, em seus limites superiores, até que seja satisfeita a equação de balanço de potência (3.12). Este incremento é feito passo a passo, incrementando-se em cada passo a geração de uma barra de geração (que deve ser escolhida de modo a diminuir a violação da restrição mais violada) até atingir seu limite superior. Esse processo é continuado até que o somatório de geração seja igual a demanda total do sistema. Nesse processo, o último gerador adicionado deve ficar dentro de seus limites pois sua geração foi incrementada apenas até atingir o equilíbrio de balanço de potência. Após fixar os valores das variáveis iguais a zero, o predespacho é realizado do seguinte modo:

1. Procure, dentre as restrições de fluxos relaxadas que estão com um de seus limites violado, a mais violada (as restrições de fluxo f_a);
2. Escolha uma geração real (pois seu custo é zero) que esteja em seu limite inferior (igual a zero), que melhor alivia a restrição encontrada no passo (1), coloque-a no

- seu limite superior e vá ao passo (4). Caso não exista geração real que alivie a restrição, vá ao passo (3);
3. Escolha a primeira geração real que esteja em seu limite inferior (igual a zero), coloque-a no seu limite superior e vá ao passo (4). Caso não exista geração real no limite inferior, vá ao passo (4);
 4. Vá ao passo (5) se a soma das gerações for maior ou igual ao valor da demanda total do sistema, caso contrário, volte ao passo (1);
 5. Se a soma das gerações for maior que a demanda total do sistema, escolhe-se a geração que viola uma restrição para ser fixada no valor igual à diferença entre a demanda total do sistema e a última soma das gerações encontrada no passo (4) e vá ao passo (6);
 6. Incrementa-se as restrições de fluxo f_b , que são variáveis canalizadas, nos seus limites inferior ou superior, de modo a diminuir as violações das restrições de fluxos f_a relaxadas e encerra-se o predespacho.

Ao final do predespacho, uma parcela das gerações está ajustada no limite inferior e uma parcela está no limite superior, e somente uma geração (que pode ser a última a ser incrementada) está em um valor intermediário, ou seja, folgada e operando dentro de seus limites. É importante observar que as gerações fictícias só deverão sair de seus limites inferiores somente em último caso, pois tem-se que minimizar a função objetivo.

Os valores das gerações e dos fluxos f_b a partir do predespacho são a solução do sistema (3.14), ou seja, é a solução do problema relaxado. Assim pode-se montar um quadro ótimo dual simplex canalizado desse problema relaxado, isto é, do problema com uma única restrição de igualdade e variáveis canalizadas.

Técnica de reotimização

Como foi visto, para escrever o modelo proposto deve-se inverter uma submatriz de S do sistema (3.2) e como praticamente todos os algoritmos de planejamento de sistemas de transmissão, heurísticos, de otimização clássica e as metaheurísticas, resolvem de maneira iterativa problemas de PL que se diferenciam pela adição ou remoção de um circuito, é conveniente aproveitar o modelo transformado do

PL anterior, visto que a diferença de um para o outro está somente no limite da restrição do fluxo onde foi adicionado (ou retirado) um circuito, diminuindo o esforço computacional do algoritmo proposto, já que este está na inversão da submatriz de S .

Para que isso possa ser feito, a matriz S deve estar completa desde a configuração base de modo que seja sempre a mesma para cada proposta de investimento feita pelo algoritmo de solução do problema de planejamento, assim não se deve retirar as barras ilhadas do sistema, logo podem aparecer no problema de PL restrições de fluxos iguais a zero, pois não existem circuitos nesse caminho.

3.3. Exemplo ilustrativo

Para uma melhor compreensão do algoritmo proposto, tem-se a seguir um exemplo com um sistema de quatro barras.

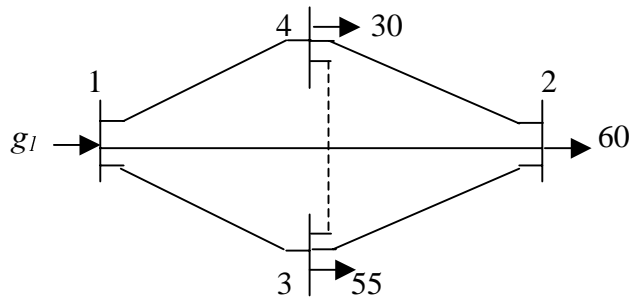


Figura 3.1: Sistema de 4 barras e 6 linhas candidatas

Tabela 3.1: Dados das barras para o sistema da figura 3.1

Barra	Geração (\bar{g}) (MW)	Demanda (\bar{d}) (MW)
1	200,0	0,0
2	0,0	60,0
3	0,0	55,0
4	0,0	30,0

Tabela 3.2: Dados das linhas para o sistema da figura 3.1

N.º	Linha	Fluxo máximo por linha (\bar{f}_{ij}) - (MW)	Custo (c_{ij})
1	1-2	35,0	3
2	1-3	40,0	2
3	1-4	40,0	2
4	2-3	40,0	2
5	2-4	40,0	2
6	3-4	40,0	2

Para aplicar a primeira lei de Kirchhoff considera-se que o fluxo entrando na barra é positivo.

I Formulação Original

O modelo de transportes (3.2) assume a seguinte forma:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (3.15)$$

s.a.

$$-f_{12} \quad -f_{13} \quad -f_{14} \quad \quad \quad +g_1 = 0,0$$

$$f_{12} \quad \quad \quad -f_{23} \quad -f_{24} \quad \quad \quad +r_2 = 60,0$$

$$\quad \quad f_{13} \quad \quad \quad +f_{23} \quad \quad \quad -f_{34} \quad +r_3 = 55,0$$

$$\quad \quad \quad f_{14} \quad \quad \quad +f_{24} \quad +f_{34} \quad +r_4 = 30,0$$

$$|f_{12}| \leq 35$$

$$|f_{13}| \leq 40$$

$$|f_{14}| \leq 40$$

$$|f_{23}| \leq 40$$

$$|f_{24}| \leq 40$$

$$|f_{34}| \leq 0$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 55$$

$$0 \leq r_4 \leq 30$$

O sistema (3.15) apresenta 10 variáveis e, portanto, 10 restrições das 20 (6 estão em módulo) existentes estarão ativas, assim, além de precisar de várias iterações de PL, a base do quadro será de dimensão maior ou igual a 9.

II Formulação Proposta

Sabendo que a barra de referência é a 4, o modelo proposto (3.13) é:

$$\min v = r_2 + r_3 + r_4 \quad (3.16)$$

s.a.

$$g_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 145$$

$$|-f_{12} - f_{14} + g_1| \leq 40$$

$$|-f_{14} - f_{34} + g_1 + r_2 + r_3 - 115| \leq 40$$

$$|f_{12} + f_{14} + f_{34} - g_1 - r_3 + 55| \leq 40$$

$$-35 \leq f_{12} \leq 35$$

$$-40 \leq f_{14} \leq 40$$

$$0 \leq f_{34} \leq 0$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 55$$

$$0 \leq r_4 \leq 30$$

Tem-se um sistema onde as variáveis são somente as gerações (reais e artificiais) e as variáveis de fluxo do grupo f_b (f_{12} , f_{14} e f_{34}), num total de 7 variáveis, isto significa que há 7 restrições ativas das 14 (3 estão em módulo) existentes, as demais estarão folgadas. A restrição de balanço sempre está ativa e assim devem existir 6 restrições ativas das 13 restantes, podendo ser elas as restrições das variáveis canalizadas.

Primeiramente, deve-se relaxar o problema (3.16) de forma que o processo seja iniciado com apenas a única restrição de igualdade e as restrições canalizadas das variáveis de fluxo f_b e das gerações. Assim, tem-se o problema relaxado:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (3.17)$$

s.a.

$$g_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 145$$

$$-35 \leq f_{12} \leq 35$$

$$-40 \leq f_{14} \leq 40$$

$$0 \leq f_{34} \leq 0$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 55$$

$$0 \leq r_4 \leq 30$$

É simples montar o quadro dual simplex canalizado inicial que terá uma base de tamanho igual a 1 (a equação de balanço de potência), cuja solução ótima encontrada no predespacho será: $g_1 = 145$, $f_{12} = 35$, $f_{14} = 40$, $f_{34} = 0$ e $r_i = 0$ (as variáveis r_i estão todas nos seus limites inferiores).

Agora deve-se verificar quais as restrições de fluxos do problema (3.16) que foram relaxadas estão violadas e qual a mais violada:

Restrições relaxadas	Valor dos fluxos	Valor da violação
$f_{13} \rightarrow -f_{12} - f_{14} + g_1 \leq 40$	$f_{13} = 70$	$f_{13} \rightarrow 30$
$f_{24} \rightarrow -f_{14} - f_{34} + g_1 + r_2 + r_3 - 115 \leq 40$	$f_{24} = -10$	$f_{24} \rightarrow 0$
$f_{23} \rightarrow f_{12} + f_{14} + f_{34} - g_1 - r_3 + 55 \leq 40$	$f_{23} = -15$	$f_{23} \rightarrow 0$

O fluxo mais violado é o f_{13} e deve ser acrescentado ao problema relaxado (3.17) fixado no seu limite violado (limite superior):

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (3.18)$$

s.a.

$$g_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 145$$

$$-f_{12} - f_{14} + g_1 \leq 40$$

$$-35 \leq f_{12} \leq 35$$

$$-40 \leq f_{14} \leq 40$$

$$0 \leq f_{34} \leq 0$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 55$$

$$0 \leq r_4 \leq 30$$

Para determinar a solução de (3.18), deve-se atualizar a equação de f_{13} para acrescentá-la ao quadro dual simplex canalizado do problema (3.17) e reotimizá-lo. A solução ótima de (3.18) é: $g_1 = 115$, $r_2 = 30$, $f_{12} = 35$, $f_{14} = 40$, $f_{34} = 0$ e as outras variáveis de geração artificial estão todas nos seus limites inferiores.

Agora deve-se verificar quais as restrições de fluxos do problema (3.16) que foram relaxadas estão violadas e qual a mais violada:

Restrições relaxadas	Valor dos fluxos	Valor da violação
$f_{13} \rightarrow -f_{12} - f_{14} + g_1 \leq 40$	$f_{13} = 40$	$f_{13} \rightarrow 0$
$f_{24} \rightarrow -f_{14} - f_{34} + g_1 + r_2 + r_3 - 115 \leq 40$	$f_{24} = -10$	$f_{24} \rightarrow 0$
$f_{23} \rightarrow f_{12} + f_{14} + f_{34} - g_1 - r_3 + 55 \leq 40$	$f_{23} = 15$	$f_{23} \rightarrow 0$

Não existe fluxo violado, logo a solução de (3.18) é também solução de (3.15) com solução ótima igual a $g_1 = 115$; $r_2 = 30$; $f_{12} = 35$; $f_{14} = 40$; $f_{34} = 0$ e as outras variáveis de geração artificial estão todas nos seus limites inferiores, tendo assim $w = 30,0$.

Reotimização

Adicionando um circuito no caminho (1, 3) do sistema de 4 barras do exemplo, tem-se um novo problema de PL que é muito parecido com o apresentado em (3.16), sendo que a única diferença está nos limites do fluxo (1, 3):

$$\min v = r_2 + r_3 + r_4 \quad (3.19)$$

s.a.

$$g_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 145$$

$$|-f_{12} - f_{14} + g_1| \leq 80$$

$$|-f_{14} - f_{34} + g_1 + r_2 + r_3 - 115| \leq 40$$

$$|f_{12} + f_{14} + f_{34} - g_1 - r_3 + 55| \leq 40$$

$$-35 \leq f_{12} \leq 35$$

$$-40 \leq f_{14} \leq 40$$

$$0 \leq f_{34} \leq 0$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 55$$

$$0 \leq r_4 \leq 30$$

O processo de otimização é o mesmo do exemplo anterior, mas nesse caso, a solução ótima é encontrada com o predespacho, não sendo necessário fazer iterações de PL. A solução ótima encontrada é: $g_1 = 145$; $f_{12} = 35$; $f_{14} = 40$; $f_{34} = 0$ e as outras variáveis de geração artificial estão todas nos seus limites inferiores, tendo assim $w = 0$.

3.4. Aplicações do algoritmo proposto

O algoritmo proposto pode ser utilizado para resolver os problemas de PL resultantes dos algoritmos de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo, tais como os de otimização clássica e metaheurísticas, que utilizam o modelo de transportes. Praticamente todos os algoritmos de planejamento resolvem de maneira iterativa sucessivos problemas de PL resultantes de diversas estratégias adotadas por esses algoritmos.

As metaheurísticas são novos algoritmos heurísticos que se diferenciam dos algoritmos heurísticos tradicionais por serem geralmente mais eficientes e com uma grande variedade de tempo de processamento que pode ser calibrada para cada tipo de aplicação. Para o problema de planejamento de transmissão usando o modelo de transportes, as metaheurísticas, a partir de uma configuração corrente, tentam melhorar a solução, propondo outras configurações. Uma configuração ou solução candidata é representada pelo número de circuitos (n_{ij}) adicionados ao sistema, e a codificação é

feita por variáveis inteiras. Essa proposta, característica do problema em questão, não garante a factibilidade da solução e para afirmar que uma solução é factível ou não, é preciso verificar se o problema opera adequadamente para a configuração proposta, e para isto deve-se resolver um problema de PL.

Na busca da melhor configuração, as metaheurísticas resolvem muitos problemas de PL, e é na resolução desses problemas de PL que está o maior esforço computacional, portanto, algoritmos eficientes como o algoritmo proposto, aproveitam as características do modelo e, por isso, são mais eficientes que os *softwares* comerciais de uso geral.

Os algoritmos de otimização clássica encontram a solução ótima do problema, sua metodologia consiste em explorar todas as alternativas de solução para encontrar a melhor. A seguir, está descrito sucintamente um algoritmo de otimização clássica, o algoritmo de decomposição de Benders para o modelo de transportes, em que o algoritmo proposto pode ser utilizado para resolver o subproblema escravo que é um problema de PL.

Algoritmo de decomposição de Benders para o modelo de transportes

Uma estratégia alternativa para encontrar a configuração ótima do problema de planejamento de sistemas de transmissão quando é usado o modelo de transportes é implementar o chamado planejamento hierarquizado usando a decomposição de Benders. Como o problema é um problema de PLIM, pode-se demonstrar que é possível encontrar a solução ótima deste problema usando a decomposição de Benders que é um algoritmo de otimização clássica. O problema resultante ao usar o modelo de transportes é um problema de programação linear inteira mista, e quando é relaxada a integralidade das variáveis de investimento, o problema resultante é um simples problema de programação linear.

Esta técnica está descrita em detalhes no capítulo 2, na seção 2.2.2. Resumidamente, permite decompor o problema complexo de planejamento em dois subproblemas: um subproblema de operação ou escravo e um subproblema de investimento ou mestre. As variáveis de operação como os fluxos de potência fazem parte do subproblema de operação que é um problema de programação linear que pode

ser facilmente resolvido usando algoritmos eficientes de PL (como o apresentado neste capítulo). Por outro lado, as variáveis de investimento fazem parte do subproblema de investimento que é um problema de programação linear inteira (PLI) com uma única variável não inteira β que aparece como parte da decomposição. Assim, a decomposição de Benders resolve o problema de planejamento de sistemas de transmissão através de uma solução iterativa dos subproblemas de operação e de investimento. Portanto, é evidente que toda a complexidade na resolução do problema de planejamento é transferida para a resolução do subproblema de investimento em forma iterativa.

Para usar a decomposição de Benders é mais adequado usar a formulação matemática modificada incorporando os geradores artificiais como a apresentada em (3.1), que pode ser decomposto nos seguintes subproblemas:

- Subproblema de operação (escravo):

$$\min w = \alpha \sum r_i \quad (3.19)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d$$

$$|f_{ij}| \leq (n_{ij}^k + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

- Subproblema de investimento (mestre):

$$\min v = \sum_{(i,j)} c_{ij} n_{ij} + \beta \quad (3.20)$$

s.a.

$$w^k + \sum \sigma_{ij}^k (n_{ij} + n_{ij}^k) \leq \beta$$

$$\beta \geq 0$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}$$

$$n_{ij} \text{ inteiro}$$

mas como o parâmetro $\sigma_{ij}^k = |\pi_{ij}| \bar{f}_{ij}$, o subproblema mestre assume a seguinte forma:

$$\min v = \sum_{(i,j)} c_{ij} n_{ij} + \beta \quad (3.21)$$

s.a.

$$\begin{aligned}
\beta - \sum |\pi_{ij}^k| \bar{f}_{ij} n_{ij} &\geq w^k + \sum |\pi_{ij}^k| \bar{f}_{ij} n_{ij}^k \\
\beta &\geq 0 \\
0 \leq n_{ij} &\leq \bar{n}_{ij} \\
n_{ij} &\text{ inteiro}
\end{aligned}$$

em que a variável real β aparece como consequência da decomposição e os π_{ij}^k são os multiplicadores de Lagrange das restrições $|\pi_{ij}^k| \leq (n_{ij}^k + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij}$ do subproblema escravo obtidos na iteração k , w^k é a solução do subproblema escravo na iteração k (representa o corte de carga do sistema se $\alpha=1$) e n_{ij}^k é a solução do mestre na iteração k . É importante observar que, na resolução do subproblema escravo, os n_{ij}^k são conhecidos e as variáveis (incógnitas) do problema são exclusivamente as variáveis de operação. Por outro lado, na resolução do subproblema mestre são conhecidos os parâmetros π_{ij}^k , \bar{f}_{ij} , w^k e os n_{ij}^k e as variáveis do problema são unicamente as variáveis de investimento n_{ij} e β .

É possível usar a decomposição de Benders em cada nível do algoritmo hierarquizado. No primeiro nível simplesmente se resolve um problema de programação linear usando decomposição de Benders. Também, no segundo nível se usa a decomposição de Benders mas para resolver um problema de programação linear inteira. Pode-se demonstrar que um algoritmo desse tipo pode encontrar a solução ótima de um problema de planejamento de sistemas de transmissão quando é usado o modelo de transportes. Assim, em cada nível do algoritmo hierarquizado é usado a decomposição de Benders para separar o problema de planejamento em dois subproblemas: um subproblema de investimento e um subproblema de operação como é mostrado na figura 2.1(a). No processo de resolução, os subproblemas trocam informação: o mestre informa ao escravo acerca das decisões de investimento (incremento na capacidade de transmissão) e o escravo informa ao mestre acerca das necessidades de transmissão através dos cortes de Benders. O mestre basicamente controla os aspectos econômicos do processo de planejamento; o escravo representa as equações de fluxo de potência com diferentes níveis de detalhe de acordo com o nível corrente de hierarquização. O escravo, com a alternativa de investimento fornecida pelo mestre, minimiza o uso dos geradores artificiais para satisfazer a demanda sem

violações das restrições de operação. Se, num estágio do processo de solução, as decisões de investimento são tais que permite um ponto de operação sem a utilização dos geradores artificiais, então foi obtida uma solução do problema nesse nível de hierarquização e o processo entra na fase seguinte. Em outro caso, se não é possível obter um ponto de operação sem recorrer aos geradores artificiais então, deve-se enviar informação acerca das necessidades de investimento ao mestre através dos cortes de Benders como é mostrado na figura 2.1(a). Estes cortes são incorporados ao mestre como restrições adicionais; assim tem-se um rol crucial no processo de planejamento pois estes cortes informam ao mestre acerca das necessidades adicionais da capacidade de transmissão. No mestre existem dois tipos de restrições como é mostrado na figura 2.1(b). Existem as restrições nas variáveis de investimento (como o número máximo de circuitos a adicionar em cada ramo) e uma representação equivalente das restrições de operação (um conjunto reduzido de restrições que representam implicitamente as restrições críticas de operação). A representação equivalente das restrições de operação está constituída basicamente dos cortes de Benders que se encontram disponíveis em qualquer estágio do processo e também de outros tipos de informação simplificada acerca da operação da rede. Assim, é possível encontrar e incorporar no mestre outros tipos de restrições diferentes dos cortes de Benders que podem acelerar o processo de convergência do algoritmo. Esta parte do problema não será analisada, mas é abordado em [32]. Portanto, nesta parte serão considerados exclusivamente os cortes de Benders para implementar o subproblema mestre. Entretanto, um aspecto importante que deve ser levado em conta é que quanto mais o mestre conhece acerca da operação da rede, melhor são as decisões de investimento e, portanto, mais rápido é o processo de convergência ao ótimo global.

Algoritmo de Planejamento Hierarquizado

As duas fases do algoritmo hierarquizado são resumidas na seguinte forma:

Fase I: modelo de transportes – adições não inteiras:

Resolver o problema usando o modelo de transportes e relaxando a integralidade das variáveis de investimento. Assim, é relaxado o tipo de variável. Os subproblemas resultantes de operação e investimento são resolvidos alternadamente até atingir a convergência. Ambos os subproblemas resultantes são problemas de

programação linear (PL) e são resolvidos usando técnicas de PL. A solução ótima obtida, assim como os cortes de Benders gerados neste processo, são reutilizadas na seguinte fase.

Fase II: modelo de transportes – Adições inteiras:

Nesta fase é reintroduzida a natureza inteira das variáveis de investimento. Nestas condições o mestre é um problema de programação linear inteira (PLI). O subproblema de operação é um problema de PL e pode ser resolvido usando técnicas de PL mas o subproblema de investimento deve ser resolvido usando técnicas de programação inteira. Portanto, é usada a decomposição de Benders para resolver duas formas diferentes do problema de planejamento, quando é usado o modelo de transportes, sendo que a primeira forma com as variáveis de investimento relaxadas é resolvida simplesmente para auxiliar na resolução do problema na fase II ajudando a diminuir o esforço computacional do processo.

O algoritmo hierarquizado para o modelo de transportes, apresentado passo a passo, assume a seguinte forma:

Fase I: modelo de transportes com variáveis reais

1. Assumir uma proposta de investimento inicial: $n_{ij}^1 = 0$;

2. Subproblema de operação: *escravo*

Resolver o subproblema de operação (3.19) para a proposta de investimento corrente n_{ij}^k usando *um algoritmo de PL* (que pode ser o apresentado neste capítulo). Se o corte de carga $w \leq \epsilon_w$, que é um valor de tolerância previamente especificado, então termina a fase I e, deve-se passar à fase II. Em caso contrário, ir ao passo 3;

3. Gerar o corte de Benders:

$$\beta - \sum |\pi_{ij}^k| \bar{f}_{ij} n_{ij} \geq w^k + \sum |\pi_{ij}^k| \bar{f}_{ij} n_{ij}^k \quad (3.22)$$

4. Subproblema de investimento: *mestre*.

Resolver o subproblema de investimento (3.21) com as restrições de investimento relaxadas, isto é, $n_{ij} \geq 0$ e com os cortes de Benders já gerados. Assim, (3.31) é simplesmente um problema de PL com um conjunto de restrições lineares (os cortes de Benders gerados). Voltar ao passo2;

Fase II: modelo de transportes com variáveis inteiras

1. Subproblema de investimento: *mestre*

Resolver o subproblema de investimento (3.21) com os cortes de Benders gerados nas duas fases. Portanto, (3.21) é um problema de PLI e deve ser resolvido usando um algoritmo de programação linear inteira. Com a proposta de investimento obtida ir ao passo 2.

2. Subproblema de operação: *escravo*

Resolver o subproblema de operação (3.19) para a proposta de investimento corrente n_{ij}^k usando um algoritmo de PL. Se o corte de carga $w \leq \varepsilon_w$, então termina o processo integral pois foi encontrada a configuração ótima. Em caso contrário, ir ao passo 3.

3. Gerar o corte de Benders:

Gerar o corte de Benders mostrado em (3.22) e voltar ao passo 1.

3.5. Testes ilustrativos

Agora tem-se alguns resultados de testes realizados em um programa de acordo com o algoritmo proposto para o sistema de Garver de 6 barras e 15 linhas e para o sistema sul brasileiro de 46 barras e 79 linhas. São apresentados testes relativos a número de iterações e precisão dos resultados. Em todos os testes o desempenho do algoritmo proposto é comparado com o *software* comercial de PL chamado MINOS [2] somente para ilustração, pois possuem características muito diferenciadas. Uma vez que se observam diferenças no resultado final até mesmo entre duas implementações diferentes de uma mesma técnica de PL, os resultados podem ser considerados muito bons, já que a diferença entre os resultados se verifica somente na segunda casa decimal, quando considerado o corte percentual.

Os testes foram realizados somente com a configuração inicial (básica) de cada sistema, não sendo feitos testes com os algoritmos de otimização clássica e nem com as metaheurísticas devido não tê-los disponíveis. Assim, as tabelas apresentam resultados referentes ao problema de PL inicial (configuração básica) de cada sistema quando o modelo utilizado é o modelo de transportes.

Sistema sul brasileiro – 46 barras

Com o sistema sul brasileiro de 46 barras foram realizados testes com sua configuração básica:

Tabela 3.3: Testes com o sistema sul brasileiro

Configuração	Algoritmo proposto			MINOS		Diferença em % com relação ao corte
	Corte	No. de iterações	Tempo de execução (s)	Corte	No. de iterações	
Dados no apêndice C	1955,0	5	0,05	1955,0	39	0

Dentre os resultados obtidos com o programa de acordo com o algoritmo proposto, a Tabela 3.3 mostra três colunas: a primeira é referente ao corte, ou seja, o resultado da função objetivo que informa o valor do corte de carga, a segunda mostra o número de iterações de PL que foram necessárias para resolver o problema e a terceira mostra o tempo de execução do algoritmo proposto. Com relação ao MINOS, a Tabela 3.3 apresenta duas colunas: a primeira é referente ao corte de carga e a segunda mostra o número de iterações de PL. A última coluna da Tabela 3.3 a diferença, em porcentagem, com relação ao resultado do corte encontrado pelos dois programas.

Testes com o sistema de Garver – 06 barras

Foram realizados testes com duas configurações do sistema de seis barras, a Tabela 3.4 é referente à configuração básica sem redespacho e a Tabela 3.5, a configuração básica com redespacho.

Tabela 3.4: Testes com a configuração básica com redespacho do sistema de 6 barras

Configuração	Algoritmo proposto			MINOS		Diferença em % com relação ao corte
	Corte	No. de iterações	Tempo de execução (s)	Corte	No. de iterações	
Dados no apêndice C	545,0	3	0,002	545,0	7	0

Tabela 3.5: Testes com a configuração básica sem redespacho do sistema de 6 barras

Configuração	Algoritmo proposto			MINOS		Diferença em % com relação ao corte
	Corte	No. de iterações	Tempo de execução (s)	Corte	No. de iterações	
Dados no apêndice C	370,0	3	0,002	370,0	9	0

As Tabelas 3.4 e 3.5 trazem as mesmas informações que a Tabela 3.3.

O algoritmo proposto, além de ser um algoritmo especializado, é um algoritmo dual simplex canalizado, enquanto o MINOS é um *software* comercial de

caráter geral que usa a técnica primal simplex. Assim a comparação de tempo de execução entre eles não faz muito sentido, pois é evidente que mesmo a programação do algoritmo proposto não sendo sofisticada, seu tempo de execução é menor que o do MINOS pois, o algoritmo proposto trabalha com um quadro simplex menor, mesmo com as adições das restrições relaxadas que estavam violadas. Além disso, devido a técnica escolhida, o número de iterações de PL também é bem menor.

3.5. Conclusões

Pode-se mencionar as seguintes conclusões:

1. O algoritmo apresenta duas características claramente diferenciadas: (1) transformação do problema visando a redução de variáveis e das restrições de igualdade encontrando um problema equivalente que tem apenas uma restrição de igualdade (a equação de balanço de potência ativa) e um conjunto de restrições de desigualdade igual ao número de circuitos existentes no sistema, e (2) uso de um algoritmo dual simplex canalizado usando relaxação para resolver o problema modificado;
2. O grande atrativo do problema modificado é que poucas restrições de desigualdade estão ativas na solução ótima do problema (somente aquelas restrições dos circuitos que estão operando no limite) e, portanto, a técnica de relaxação torna-se particularmente eficiente;
3. O predespacho encontra uma solução inicial factível do problema, trabalhando diretamente com as variáveis e limites normais dos sistemas de potência, sem usar variáveis de folga e/ou não-negatividade;
4. Quando o algoritmo proposto é comparado com um algoritmo de PL do tipo primal simplex de caráter geral, como o MINOS, para resolver um problema de PL como o apresentado em (3.2), sempre haverá um desempenho superior do algoritmo proposto, pois este trabalha com um quadro simplex menor mesmo com as adições das restrições relaxadas que estavam violadas. Além disso, devido a técnica escolhida, o número de iterações de PL também é bem menor;

5. Como o maior esforço computacional está na inversão da submatriz de S , o processo de reotimização torna o algoritmo proposto ainda mais atrativo, visto que a inversão é feita somente na montagem do problema de PL da configuração base.

4. Algoritmo simplex eficiente para verificar a factibilidade da operação do modelo DC

Tanto no capítulo 3, como neste capítulo apresenta-se um algoritmo de PL aplicado ao problema de planejamento de sistemas de transmissão, mas agora, para verificar a factibilidade do modelo DC de maneira mais eficiente que os softwares de uso geral. Como para o modelo de transportes, a maioria dos algoritmos heurísticos construtivos e todas as metaheurísticas que utilizam o modelo DC, realizam a estratégia de escolher ou encontrar uma configuração ou proposta de investimento e a seguir resolvem um problema de PL para verificar a factibilidade da configuração proposta em termos de planejamento, assim, em cada passo desses algoritmos, deve-se resolver um ou vários problemas de PL. Deste modo a utilização de um algoritmo de PL eficiente, como o algoritmo aqui proposto, é bem aceita nestes tipos de algoritmos.

A metodologia do algoritmo proposto consiste em aproveitar as características do modelo DC e apresenta duas etapas: 1) Redução do número de variáveis e das restrições de igualdade do problema, e 2) Solução do problema resultante usando um algoritmo dual simplex canalizado e a estratégia de relaxação. O problema resultante apresenta uma única restrição de igualdade e um número de restrições de desigualdade igual ao número de circuitos do sistema elétrico. Uma particularidade muito importante deste problema é que somente um número muito reduzido destas restrições de desigualdade estão ativas na solução ótima do problema. Assim, a estratégia mais adequada é usar relaxação iniciando a resolução do problema com a única restrição de igualdade e as restrições triviais de limite das variáveis de geração e incorporando em cada passo a restrição de desigualdade mais violada.

4.1. Modelagem matemática convencional

Pelo mesmo motivo que foram adicionadas as gerações artificiais ao modelo de transportes no capítulo 3, também são adicionadas gerações artificiais ao modelo DC (2.5), obtendo-se, assim, o modelo DC para uma proposta de investimento de mínimo corte de carga:

$$\min w = \sum_i \alpha_i r_i \quad (4.1)$$

s.a.

$$B\theta + g + r = d$$

$$|\theta_i - \theta_j| \leq \bar{\phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$\theta_i \text{ irrestrito}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

em que:

α_i parâmetro de penalidade;

r vetor de geradores fictícios ou artificiais alocados em todas as barras de carga;

O parâmetro de penalidade α_i tem a função de deixar um gerador artificial menos atrativo que os geradores reais no processo de otimização.

A maioria dos algoritmos heurísticos construtivos e todas as metaheurísticas realizam a estratégia de escolher ou encontrar uma configuração ou proposta de investimento e a seguir resolvem o problema de PL mostrado em (4.1). Assim, em cada passo desses algoritmos, deve-se resolver um ou vários problemas de programação linear do tipo (4.1). Neste caso, o problema (4.1) simplesmente deve verificar a viabilidade da configuração proposta, isto é, se a configuração proposta é factível em termos de planejamento. Deve-se observar que a formulação matemática apresentada em (4.1) é sempre factível devido as variáveis que representam os geradores artificiais ou cortes de carga r_i , assim, uma configuração é factível em termos de planejamento se a solução de (4.1) não apresenta corte de carga e infactível se apresenta corte de carga. Nesse capítulo apresenta-se uma proposta para resolver de maneira mais eficiente o problema (4.1).

4.2. Transformação da modelagem

Nesta seção transforma-se o problema de PL (4.1) num problema de PL equivalente que possui um número menor de variáveis de controle e de restrições, e sua solução pode ser encontrada usando um algoritmo dual simplex canalizado e a estratégia de relaxação.

Sejam n_b o número de barras do sistema, n_l o número de circuitos (caminhos) existentes na configuração corrente, n_g o número de barras de geração e n_r o número de barras de carga. Portanto, o número de variáveis (incógnitas) do problema (4.1) é igual a $n_v = n_b + n_g + n_r$. Por outro lado, o número de restrições do problema é igual a $n_{res} = n_b + 2n_l + n_g + n_r$ porque cada restrição com valor absoluto do tipo $|\theta_i - \theta_j|$ deve ser substituído por duas restrições. Logo, um algoritmo do tipo primal simplex canalizado padrão trabalharia com uma base de tamanho $n_b + 2n_l$ e aquelas que usam implementações sofisticadas trabalhariam com uma base de tamanho $n_b + n_l$. Em ambos os casos, o tamanho da base é muito grande para sistemas reais aumentando o esforço computacional e os erros de arredondamento no algoritmo de PL.

A formulação proposta consiste em diminuir o número de variáveis de controle de (4.1) ao deixar o conjunto em função somente das gerações (reais e fictícias), obtendo-se um sistema equivalente onde os ângulos de tensões estarão implícitos, como mostra o procedimento a seguir.

O primeiro conjunto de restrições do sistema (4.1) é uma combinação das duas leis de Kirchhoff:

$$B\theta + g + r = d \quad (4.2)$$

que corresponde a um número de restrições igual ao número m de barras do sistema:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{ji} & \dots & b_{jj} & \dots & b_{jm} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mi} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \\ \theta_j \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_j \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Sendo B uma matriz singular, deve-se tomar uma barra k como sendo barra de referência e fazendo $\theta_k = 0$. Assim, separando a equação definida pela linha k do restante do sistema em que a matriz B reduzida (B') é de ordem $(m-1)$, (4.3) pode ser representada da seguinte forma:

$$\theta = (B')^{-1}[d - (g + r)] \quad (4.4)$$

Logo (4.4) fornece um conjunto de restrições com $(m-1)$ equações, pois a equação referente a barra de referência k (4.5) é colocada de lado:

$$\begin{bmatrix} b_{k1} & \dots & b_{ki} & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{km} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \\ \theta_k \\ \vdots \\ \theta_j \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} + g_k + r_k = d_k \quad (4.5)$$

É importante observar que o ângulo de tensão θ_k da barra de referência é fixado em $\theta_k = 0$. Os outros ângulos de tensão são obtidos através de:

$$\theta_i = \begin{bmatrix} b'_{i1} & \dots & b'_{ii} & \dots & b'_{ik-1} & b'_{ik+1} & \dots & b'_{ij} & \dots & b'_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 - (g_1 + r_1) \\ \vdots \\ d_i - (g_i + r_i) \\ \vdots \\ d_{k-1} - (g_{k-1} + r_{k-1}) \\ d_{k+1} - (g_{k+1} + r_{k+1}) \\ \vdots \\ d_j - (g_j + r_j) \\ \vdots \\ d_m - (g_m + r_m) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

em que $[b'_{i1} \dots b'_{ii} \dots b'_{ik-1} b'_{ik+1} \dots b'_{ij} \dots b'_{im}]$ é a linha i de $(B')^{-1}$.

O segundo conjunto de restrições do sistema (4.1) são inequações referentes aos limites de fluxos nas linhas:

$$|\theta_i - \theta_j| \leq \phi_{ij} \quad (4.7)$$

que corresponde a limites superior e inferior nos fluxos de potência de cada ramo (i, j) , que corresponde a um número de restrições limitadas inferior e superiormente igual ao número de ramos do sistema. Assim, de (4.7):

$$|\theta_i - \theta_j| \leq \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad (4.8)$$

em que \bar{f}_{ij} é a capacidade máxima de um circuito em (i, j) e γ_{ij} é a susceptância de um circuito.

Para uma proposta de investimento, a segunda lei de Kirchhoff fornece:

$$f_{ij} = (\theta_i - \theta_j) \gamma_{ij}^{eq} \quad (4.9)$$

em que $\gamma_{ij}^{eq} = n_{ij} \cdot \gamma_{ij}$ (n_{ij} é o número de ramos existentes no caminho (i, j)).

Logo, em (4.8), tem-se:

$$|(\theta_i - \theta_j) \cdot \gamma_{ij}^{eq}| \leq \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}} \cdot \gamma_{ij}^{eq} \quad (4.10)$$

ou

$$|(\theta_i - \theta_j) \cdot \gamma_{ij}^{eq}| \leq n_{ij} \cdot \bar{f}_{ij} \quad (4.11)$$

Assim:

$$-n_{ij} \cdot \bar{f}_{ij} \leq (\theta_i - \theta_j) \cdot \gamma_{ij}^{eq} \leq n_{ij} \cdot \bar{f}_{ij} \quad (4.12)$$

$$-n_{ij} \cdot \bar{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq n_{ij} \cdot \bar{f}_{ij} \quad (4.13)$$

Trabalhando com (4.4) e (4.9) em (4.12), tem-se:

$$-n_{ij} \bar{f}_{ij} \leq \left[\begin{array}{cccccc} b'_{i1} - b'_{j1} & \dots & b'_{ik-1} - b'_{jk-1} & b'_{ik+1} - b'_{jk+1} & \dots & b'_{im} - b'_{jm} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} d_1 - (g_1 + r_1) \\ \vdots \\ d_{k-1} - (g_{k-1} + r_{k-1}) \\ d_{k+1} - (g_{k+1} + r_{k+1}) \\ \vdots \\ d_m - (g_m + r_m) \end{array} \right] \cdot \gamma_{ij}^{eq} \leq n_{ij} \bar{f}_{ij} \quad (4.14)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$-n_{ij} \cdot \bar{f}_{ij} \leq f_{ij}(g, r) \leq n_{ij} \cdot \bar{f}_{ij} \quad (4.15)$$

ou

$$-n \cdot \bar{f} \leq G \cdot \begin{bmatrix} g \\ r \end{bmatrix} + P \leq n \cdot \bar{f} \quad (4.16)$$

em que G é uma matriz e P é um vetor, conhecidos.

Assim, pode-se dizer que $(m-1)$ restrições do conjunto (4.2) e as $2n_l$ restrições (4.7) foram substituídas pelo conjunto de restrições (4.14), exceto a restrição k de (4.2) que foi deixada temporariamente de lado. Portanto, o conjunto de restrições (4.14) e a restrição k de (4.2), são equivalentes às restrições (4.2) e (4.7) em (4.1) com a vantagem de que foram eliminadas as variáveis θ e o número de restrições é menor.

Para que o sistema (4.1) possa ser reescrito somente em função das gerações (reais e fictícias) deve-se também colocar a restrição (4.5) em função somente dessas variáveis, isto é, deve-se substituir os ângulos de tensões dados por (4.6) em (4.5), não esquecendo que o ângulo referente a barra de folga é nulo:

$$[b_{k1} \quad \dots \quad b_{kk-1} \quad b_{kk+1} \quad \dots \quad b_{km}] \cdot (B')^{-1} \cdot \begin{bmatrix} d_1 - (g_1 + r_1) \\ \vdots \\ d_{k-1} - (g_{k-1} + r_{k-1}) \\ d_{k+1} - (g_{k+1} + r_{k+1}) \\ \vdots \\ d_m - (g_m + r_m) \end{bmatrix} + g_k + r_k = d_k \quad (4.17)$$

em que:

$$[b_{k1} \quad \dots \quad b_{kk-1} \quad b_{kk+1} \quad \dots \quad b_{km}] \cdot (B')^{-1} = [-1 \quad \dots \quad -1] \quad (4.18)$$

que é provado através do teorema do Apêndice D.

Assim (4.17) assume a seguinte forma:

$$\sum_{i \in \Omega_4} g_i + \sum_{i \in \Omega_3} r_i = \sum_{i \in \Omega_3} d_i \quad (4.19)$$

em que Ω_3 é o conjunto de barras com carga e Ω_4 é o conjunto de barras com geração.

A equação (4.19) será denominada equação de balanço de potência.

Uma forma alternativa de se obter a equação de balanço de potência é somar todas as restrições de igualdade de (4.3), pois a matriz B é singular e a sua diagonal é a soma dos elementos da linha (ou coluna) com sinal contrário.

Dessa maneira, chega-se ao sistema equivalente ao (4.1):

$$\min w = \sum_{i \in \Omega_3} \alpha_i r_i \quad (4.20)$$

s.a.

$$\sum_{i \in \Omega_4} g_i + \sum_{i \in \Omega_3} r_i = \sum_{i \in \Omega_3} d_i$$

$$-n \cdot \bar{f} \leq G \cdot \begin{bmatrix} g \\ r \end{bmatrix} + P \leq n \cdot \bar{f}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

Deve-se observar que o custo computacional para montar (4.20) consiste em inverter a matriz B' , e a vantagem de (4.20) é que existe um número menor de variáveis de decisão (apenas os geradores reais e fictícios) e apenas uma única restrição de igualdade, isto é, a equação de balanço de potência.

A melhor estratégia para resolver (4.20) é usar um algoritmo dual simplex canalizado e usando relaxação. Assim o processo pode ser iniciado relaxando todas as restrições de fluxo de potência, isto é, o processo seria iniciado com apenas uma restrição de igualdade (equação de balanço de potência) e as restrições canalizadas $0 \leq g \leq \bar{g}$ e $0 \leq r \leq d$.

O número de variáveis do problema (4.20) é menor que no problema (4.1) porque foram eliminadas as variáveis θ do problema. E ainda, o problema (4.20) apresenta outras características mais importantes tais como: (1) Uma única restrição de igualdade que é a equação de balanço de potência, e (2) Na solução ótima do problema a maioria das restrições do tipo $G \begin{bmatrix} g \\ r \end{bmatrix} + P$ não estão ativas (estão relaxadas).

Normalmente no sistema elétrico, mesmo em problemas de planejamento, somente um número reduzido de circuitos está operando no limite máximo o que corresponde a uma restrição ativa no problema (4.20); assim, a maioria dos circuitos operam abaixo de seus

limites máximos e suas correspondentes restrições devem estar relaxadas na solução ótima do problema (4.20).

No problema (4.20), as variáveis são simplesmente as gerações g e r num total de $n_v = n_g + n_r \leq n_b$ variáveis. Assim, na solução ótima, normalmente devem estar ativas somente n_v restrições sendo uma delas a restrição de igualdade e as outras devem ser algumas restrições triviais de limite de geração ($0 \leq g \leq \bar{g}$ ou $0 \leq r \leq d$) e um número reduzido de restrições do tipo $G \begin{bmatrix} g \\ r \end{bmatrix} + P = f_{ij}(g, r)$. Portanto, a estratégia mais adequada é resolver o problema (4.20) usando um algoritmo dual simplex canalizado e relaxação. Assim, o processo de resolução é iniciado com a única restrição de igualdade e as restrições triviais de limites de geração, relaxando as restrições de fluxos $f_{ij}(g, r)$. Em outras palavras, o processo de resolução é iniciado com um problema de PL com uma base de dimensão 1. Em cada passo do algoritmo é adicionado a restrição do tipo $f_{ij}(g, r)$ mais violada até verificar que todas as restrições relaxadas não estão mais violadas.

Metodologia de otimização

Pode-se usar o seguinte algoritmo:

1. Ajustar os dados do sistema identificando as barras de geração e de carga. As barras ilhadas devem ser eliminadas do processo de resolução e nas barras que possuem geração e carga, deve-se reduzir para uma barra de geração ou de carga, levando em conta os valores de geração e carga.
2. Realizar o predespacho e montar o quadro dual simplex canalizado com uma base de tamanho um (a equação de balanço).
3. Identificar a restrição mais violada.
Se não existe restrição violada, encontre as grandezas de interesse e pare o processo.
Em caso contrário, ir ao passo 4.
4. Introduzir a restrição mais violada no quadro dual simplex canalizado e reotimizar o quadro simplex com base reduzida. Voltar ao passo 3.

Pre despacho

Inicia-se o predespaço colocando-se todas as variáveis em seus limites inferiores, a seguir realizam-se passos sucessivos onde em cada passo é incrementada a geração de um gerador real até atingir seu limite máximo. O próximo gerador que deve ser escolhido para incrementar sua geração é aquele que elimina (ou diminui) a violação da restrição de fluxo mais violada. Assim, para verificar qual o próximo gerador que deve ser adicionado, simplesmente, deve-se observar os coeficientes da matriz G . Portanto, inicia-se o processo colocando todas as gerações em seus valores mínimos, isto é, colocar todas as gerações (reais e fictícias) no limite inferior (todas nulas) e incrementar sucessivamente as gerações para seus valores máximos, ou seja, em seus limites superiores, até que seja satisfeita a equação de balanço de potência (4.19). Este incremento é feito passo a passo, incrementando-se em cada passo a geração de uma barra de geração (que deve ser escolhida de modo que diminua a violação da restrição de fluxo relaxada mais violada) até atingir seu limite superior. Esse processo é continuado até que a somatória de geração seja igual a demanda total do sistema. Nesse processo, o último gerador adicionado deve ficar dentro de seus limites pois sua geração foi incrementada apenas até atingir o equilíbrio de balanço de potência. Após fixar as gerações em seus limites inferiores, a escolha do gerador que deve ser colocado no seu limite superior deve ser realizada do seguinte modo:

1. Procure, dentre as restrições de fluxos violadas, a mais violada;
2. Escolha uma geração real (pois seu custo é zero) que esteja em seu limite inferior, que melhor alivia a restrição encontrada no passo (1), coloque-a no seu limite superior e vá ao passo (6). Caso não exista geração real que alivie a restrição, vá ao passo (3);
3. Escolha a primeira geração real que esteja em seu limite inferior, coloque-a no seu limite superior e vá ao passo (6). Caso não exista geração real no limite inferior, vá ao passo (4);
4. Escolha uma geração artificial que esteja em seu limite inferior, que melhor possa aliviar a restrição encontrada no passo (1), coloque-a no seu limite superior e vá ao passo (6). Caso não exista geração artificial que alivie a restrição, vá ao passo (5);
5. Escolha a primeira geração artificial que esteja em seu limite inferior, coloque-a no seu limite superior e vá ao passo (6);

6. Vá ao passo (7) se a soma das gerações for maior ou igual ao valor da demanda total do sistema, caso contrário, volte ao passo (1);
7. Se a soma das gerações for maior que a demanda total do sistema, escolhe-se a geração que viola uma restrição para ser fixada no valor igual à diferença entre a demanda total do sistema e a última soma das gerações encontrada no passo (3).

Ao final do predespacho, uma parcela das gerações (reais e/ou artificiais) está ajustada no limite inferior (as que não foram incrementadas) e a outra parcela está no limite superior, e somente uma geração (pode ser a última a ser incrementada) estará em um valor intermediário, ou seja, folgada e operando dentro de seus limites. É importante observar que as gerações fictícias só deverão sair de seus limites inferiores somente em último caso, pois tem-se que minimizar a função objetivo.

Os valores das gerações a partir do predespacho são a solução do sistema (4.20) se forem retiradas as restrições de fluxo, ou seja, é a solução do problema relaxado. Assim pode-se montar um quadro ótimo dual simplex canalizado desse problema relaxado, isto é, do problema com uma única restrição de igualdade.

Em seguida verifica se há restrições de fluxos violadas (se não existir restrição de fluxo violada então a solução atual é factível e o problema termina). Escolhe-se a restrição de fluxo mais violada, fixando-a em seu limite violado e atualiza-a para introduzi-la como restrição de igualdade no quadro dual simplex canalizado. Realizam-se iterações de PL propriamente dita, reotimizando o quadro dual simplex canalizado. O processo verifica novamente se existe restrição de fluxo violada para introduzi-la no problema relaxado e assim por diante até que o problema seja resolvido.

O sistema (4.20) é relaxado retirando-se as restrições referentes aos fluxos nos ramos:

$$\min w = \sum_{i \in \Omega_3} \alpha_i r_i \quad (4.21)$$

s.a.

$$\sum_{i \in \Omega_4} g_i + \sum_{i \in \Omega_3} r_i = \sum_{i \in \Omega_3} d_i$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq r \leq d$$

A solução ótima do sistema (4.21) é obtida facilmente através do predespacho e um quadro ótimo e factível dual simplex canalizado é facilmente

montado, mas essa solução pode não ser factível para o sistema (4.20), pois pode haver restrições de fluxo violadas. Assim alguma restrição de fluxo violada é escolhida para ser fixada no limite violado e ser introduzida no sistema (4.21) como restrição de igualdade e após ser devidamente atualizada é introduzida no quadro dual simplex canalizado.

Após a introdução da restrição violada o quadro dual simplex canalizado continua satisfazendo a otimalidade, pois atende a finalidade do dual, mas perde a factibilidade do primal, assim se realizam algumas iterações de PL, até se obter um quadro ótimo e factível, obtendo-se assim uma nova solução, que deve ser utilizada para verificar se ainda existe alguma restrição de fluxo de (4.20) violada e repetir o processo até não haver mais restrições violadas em (4.20). Assim a solução obtida será a ótima de (4.20) e em conseqüência também de (4.1).

4.3. Exemplo ilustrativo

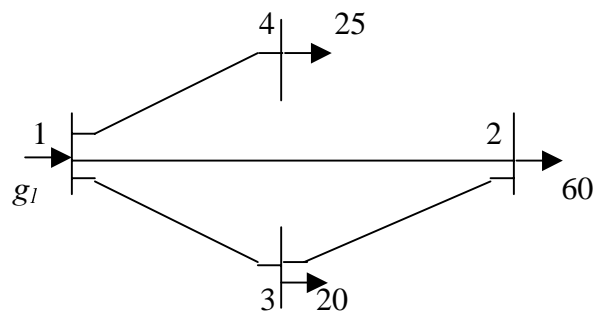


Figura 4.1: Sistema de 4 barras e 4 linhas candidatas

Tabela 4.1: Dados das barras para o sistema da figura 4.1

barra	cap. de geração (MW)	carga (MW)
1	105,0	0,0
2	0,0	60,0
3	0,0	20,0
4	0,0	25,0

Tabela 4.2: Dados das linhas para o sistema da figura 4.1

n °	Linha	Reatância (pu)	Capacidade (MW)
1	1 - 2	3	35
2	1 - 3	2	40
3	1 - 4	2	40
4	2 - 3	2	40

Usando a formulação tradicional (4.1), tem-se o seguinte problema de PL:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (4.22)$$

s.a.

$$-1,333\theta_1 + 0,333\theta_2 + 0,5\theta_3 + 0,5\theta_4 + g_1 = 0$$

$$0,333\theta_1 - 0,833\theta_2 + 0,5\theta_3 + r_2 = 60$$

$$0,5\theta_1 + 0,5\theta_2 - \theta_3 + r_3 = 20$$

$$0,5\theta_1 - 0,5\theta_4 + r_4 = 25$$

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq 35$$

$$|\theta_1 - \theta_3| \leq 40$$

$$|\theta_1 - \theta_4| \leq 40$$

$$|\theta_2 - \theta_3| \leq 40$$

$$0 \leq g_1 \leq 105$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 20$$

$$0 \leq r_4 \leq 25$$

$$\theta_i \quad \text{irrestrito para } i = 1, \dots, 6$$

Usando a formulação proposta (4.20), pode-se montar o seguinte problema de PL equivalente ao problema (4.22):

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (4.23)$$

s.a.

$$g_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 105$$

$$-35 \leq 0,286g_1 - 0,286r_2 + 0,286r_4 + 10,01 \leq 35$$

$$-40 \leq 0,715g_1 + 0,286r_2 + 0,715r_4 - 34,992 \leq 40$$

$$-40 \leq -r_4 + 25,0 \leq 40$$

$$-40 \leq 0,286g_1 + 0,715r_2 + 0,286r_4 - 50,008 \leq 40$$

$$0 \leq g_1 \leq 105$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 20$$

$$0 \leq r_4 \leq 25$$

Inicialmente as restrições de fluxo são relaxadas e tem-se o seguinte problema de PL relaxado:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (4.24)$$

s.a.

$$g_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 105$$

$$0 \leq g_1 \leq 105$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 20$$

$$0 \leq r_4 \leq 25$$

Pre despacho: Todos os geradores são fixados inicialmente no seu limite inferior. Verifica-se que o fluxo f_{23} (quarta restrição de fluxo) é o único violado e que o gerador 1 pode melhorar a violação. Assim fazemos $g_1 = 105$ e termina o predespacho, pois a equação de balanço já está satisfeita. Assim a solução do problema de PL relaxado é $g_1 = 105$ e as demais variáveis iguais a zero.

Verifica-se novamente os fluxos: $f_{12} = 40,04$; $f_{13} = 40,08$; $f_{14} = 25$ e $f_{23} = -19,92$. Os fluxos f_{12} e f_{13} estão violados (f_{12} é o mais violado). Assim, deve-se colocar a restrição referente ao fluxo mais violado no problema de PL relaxado e tem-se:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (4.25)$$

s.a.

$$g_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 105$$

$$0,286g_1 - 0,286r_2 + 0,286r_4 + 10,01 \leq 35$$

$$0 \leq g_1 \leq 105$$

$$0 \leq r_2 \leq 60$$

$$0 \leq r_3 \leq 20$$

$$0 \leq r_4 \leq 25$$

Resolve-se o sistema (4.25) usando um algoritmo dual simplex canalizado, obtendo-se a seguinte solução: $g_1 = 96,2$; $r_2 = 8,81$ e demais variáveis iguais a zero. Ao verificar as restrições de fluxo, percebe-se que nenhuma está violada. Logo a solução do sistema relaxado (4.25) é também solução do sistema (4.23), encontrando $v = 8,81$

Uma análise mais detalhada permite concluir que aqueles problemas em que existe uma topologia que levará a uma solução sem corte de carga e, adicionalmente, o planejamento não permite o redespacho então a *solução do problema*

sempre termina no predespacho e esta característica não depende do tamanho do problema. Em outras palavras, topologias que não produzem cortes de carga nos problemas sem redespacho terminam invariavelmente no predespacho e não precisam de iterações de PL. Este fato é uma consequência de que o somatório de geração é igual o somatório de demanda e nenhuma restrição de fluxo está violada.

Quando existe redespacho e portanto o somatório da geração é maior que o somatório da demanda, e adicionalmente se a topologia não apresenta corte de carga, às vezes a resolução pode terminar no predespacho e em outras seriam necessárias algumas iterações do algoritmo de PL.

Para topologias que apresentam cortes de carga o algoritmo demanda algumas iterações de PL, mas a dimensão da base sempre será muito pequena comparada com a dimensão da base de um método do tipo primal simplex. Deve-se, observar que o custo computacional para montar o novo modelo matemático requer a inversão da matriz B' .

O algoritmo proposto por Stott [5] e a versão proposta por Gandini [7] são melhores que o modelo DC original, pois diminuem o tamanho da base, mas a necessidade do cálculo os ângulos em cada iteração deixou-os trabalhosos, e não é possível utilizar um quadro dual simplex canalizado convencional.

4.4. Técnica de reotimização

Como foi mostrado anteriormente, para escrever o modelo proposto deve-se inverter a matriz B do sistema (4.1) e como praticamente todos os algoritmos de planejamento de sistemas de transmissão, heurísticos, de otimização clássica e metaheurísticas, resolvem de maneira iterativa problemas de PL que se diferenciam pela adição ou remoção de um ramo, é conveniente aproveitar a matriz B invertida do problema de PL anterior, já que o maior esforço computacional do algoritmo proposto está na inversão da matriz.

A alteração da susceptância de um ramo (i, j) de uma rede de transmissão causa pequenas modificações na matriz B , somente 4 valores da matriz se modificam (as posições a_{ii} , a_{ij} , a_{ji} e a_{jj}), e para encontrar a inversa da nova matriz a partir da inversa da matriz anterior foi utilizado o lema de inversão de matrizes descrito em [12] que diz:

Considere o sistema linear:

$$A^0 \underline{x}^0 = \underline{b} \quad (4.26)$$

em que A^0 é uma matriz $(n \times n)$, \underline{x}^0 é um vetor $(n \times 1)$ e \underline{b} é um vetor $(n \times 1)$. Seja ΔA uma variação introduzida na matriz de coeficientes A , o novo sistema passa a ser

$$(A^0 + \Delta A)(\underline{x}^0 + \Delta \underline{x}) = \underline{b} \quad (4.27)$$

que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$A^0 \Delta \underline{x} + \Delta A \underline{x}^0 + \Delta A \Delta \underline{x} = 0 \quad (4.28)$$

Considerando (4.28), pode-se rescrever o vetor $\Delta \underline{x}$ como segue:

$$\Delta \underline{x} = -(A^0)^{-1} [\Delta A (\underline{x}^0 + \Delta \underline{x})] \quad (4.29)$$

Considere ainda que a matriz ΔA possa ser colocada na forma

$$\Delta A = CDF \quad (4.30)$$

sendo C uma matriz $(n \times l)$, D uma matriz $(l \times l)$ e F uma matriz $(l \times n)$.

Substituindo-se (4.30) em (4.29), tem-se:

$$\Delta \underline{x} = -(A^0)^{-1} CDF (\underline{x}^0 + \Delta \underline{x}) \quad (4.31)$$

Premultiplicando-se (4.31) por F e isolando-se o vetor $F \Delta \underline{x}$ de dimensão $(l \times 1)$, tem-se:

$$F \Delta \underline{x} = -[\Pi_l + F(A^0)^{-1} CD]^{-1} F(A^0)^{-1} CDF \underline{x}^0 \quad (4.32)$$

em que Π_l é a matriz identidade de dimensão $(l \times l)$.

Substituindo-se (4.32) em (4.31), pode-se determinar o vetor de correção $\Delta \underline{x}$:

$$\Delta \underline{x} = -(A^0)^{-1} CD [\Pi_l + F(A^0)^{-1} CD]^{-1} F \underline{x}^0 \quad (4.33)$$

Considerando que:

$$\underline{x} = \underline{x}^0 + \Delta \underline{x} \quad (4.34)$$

isto é

$$A^{-1} \underline{b} = (A^0)^{-1} \underline{b} + \Delta \underline{x} \quad (4.35)$$

e substituindo-se (4.33) em (4.35), obtém-se

$$A^{-1} \underline{b} = (A^0)^{-1} \underline{b} - (A^0)^{-1} CD [\Pi_l + F(A^0)^{-1} CD]^{-1} F(A^0)^{-1} \underline{b} \quad (4.36)$$

Como este resultado independe do vetor \underline{b} , conclui-se que

$$A^{-1} = (A^0)^{-1} - (A^0)^{-1} C [D^{-1} + F(A^0)^{-1} C]^{-1} F(A^0)^{-1} \quad (4.37)$$

Assim tem-se um método possível de ser adotado para a inversão da matriz susceptância no caso de adição/remoção de ramos em uma rede de energia elétrica, devendo ser observado que o ramo a ser adicionado/removido não esteja ligado a uma barra ilhada.

Exemplo ilustrativo

Para uma melhor compreensão desta técnica tem-se a seguir um exemplo com o sistema de seis barras de Garver sem redespacho da geração (apêndice C). Na configuração inicial foi adicionada uma linha no caminho (4, 6) para que a barra 6 não fique ilhada:

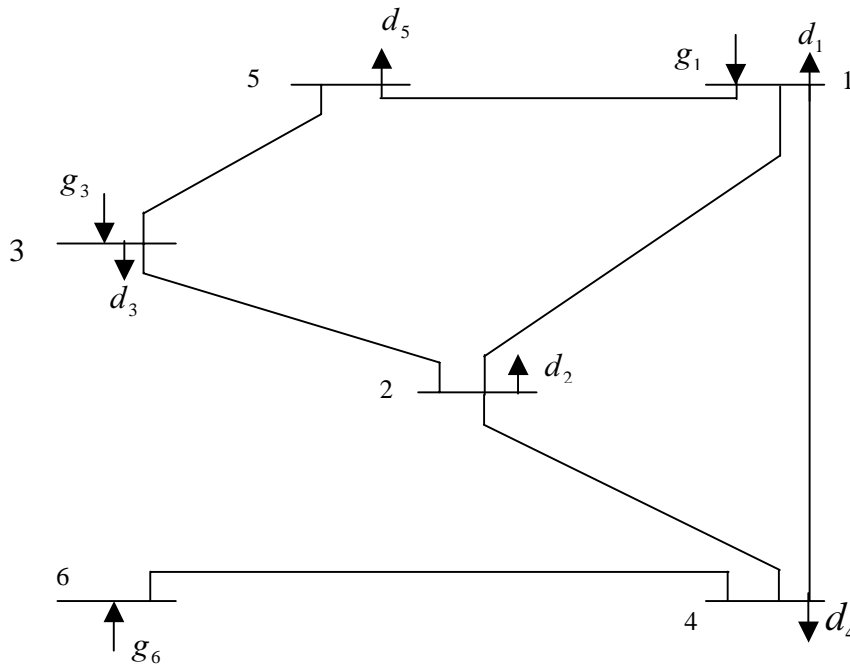


Figura 4.1: Sistema de seis barras - configuração inicial

A matriz susceptância do exemplo é:

$$B = \begin{bmatrix} -9,1667 & 2,5 & 0 & 1,6667 & 5 & 0 \\ 2,5 & -13,3333 & 5 & 2,5 & 0 & 3,3333 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & 5 & 0 \\ 1,6667 & 2,5 & 0 & -4,1667 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 3,3333 & 0 & 0 & 0 & -3,3333 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Sendo a barra de referência a 5, a matriz inversa de (4.38) é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,1548 & -0,0903 & -0,0452 & -0,1161 & -0,0903 \\ -0,0903 & -0,2193 & -0,1097 & -0,1677 & -0,2193 \\ -0,0452 & -0,1097 & -0,1548 & -0,0839 & -0,1097 \\ -0,1161 & -0,1677 & -0,0839 & -0,3871 & -0,1677 \\ -0,0903 & -0,2193 & -0,1097 & -0,1677 & -0,5193 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Adicionando um ramo no caminho (4, 6) a matriz B da equação (4.38) assume a seguinte forma:

$$B = \begin{bmatrix} -9,1667 & 2,5 & 0 & 1,6667 & 5 & 0 \\ 2,5 & -13,3333 & 5 & 2,5 & 0 & 3,3333 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & 5 & 0 \\ 1,6667 & 2,5 & 0 & -7,5 & 0 & 3,3333 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 3,3333 & 0 & 3,3333 & 0 & -6,6667 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Utilizando o lema de inversão de matrizes (4.37), tem-se:

$$B^{-1} = (B^0)^{-1} - (B^0)^{-1}C[D^{-1} + F(B^0)^{-1}C]^{-1}F(B^0)^{-1}$$

em que $(B^0)^{-1}$ é a matriz da equação (4.39), D é o valor negativo da susceptância do ramo adicionado, C é um vetor coluna com $(nb - 1)$ elementos (a posição que foi retirada é a da barra de referência) cujos valores são nulos, exceto nas posições (i, j) do caminho do ramo que recebem 1 e -1 respectivamente. Se i ou j corresponder à barra de referência, então seu valor será omitido. $F = C^t$. Assim:

$$D = -3,3333 \quad \text{e} \quad D^{-1} = -0,3$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1]$$

Logo:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,1541 & -0,0918 & -0,0459 & -0,1096 & -0,1007 \\ -0,0918 & -0,2163 & -0,1081 & -0,1807 & -0,1985 \\ -0,0459 & -0,1081 & -0,1541 & -0,0904 & -0,0993 \\ -0,1096 & -0,1807 & -0,0904 & -0,3318 & -0,2563 \\ -0,1007 & -0,1985 & -0,0993 & -0,2563 & -0,3774 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Com esta técnica de reotimização, o tempo computacional de um algoritmo heurístico que utiliza o algoritmo proposto como subrotina para a resolução de sucessivos problemas de PL diminui significativamente, pois utiliza uma matriz já invertida para inverter outra somente com operações de multiplicação. Esse método só não será eficiente para sistemas que apresentarem muitas barras ilhadas.

4.5. Aplicações do algoritmo proposto

Tais como os algoritmos de planejamento de sistema de transmissão para o modelo de transportes, os algoritmos de planejamento de sistemas de transmissão, heurísticos construtivos, de otimização clássica e metaheurísticas, que utilizam o modelo DC, resolvem de maneira iterativa problemas de PL resultantes de diversas estratégias adotadas por esses algoritmos. O algoritmo proposto pode ser utilizado para resolver esses problemas de PL.

As metaheurísticas e os algoritmos de otimização clássica para o modelo DC apresentam as mesmas características descritas para o modelo de transportes do capítulo anterior. Dentre os algoritmos heurísticos construtivos, tem-se o *algoritmo de mínimo corte de carga* [15] que é um algoritmo heurístico que foi usado para realização de testes do algoritmo proposto. Para isto, faz-se a seguir um resumo do algoritmo de mínimo corte de carga.

O algoritmo de mínimo corte de carga [15]

O algoritmo de mínimo corte de carga proposto em [15] é um algoritmo heurístico construtivo que usa o modelo DC modificado adicionando geradores fictícios para contornar os problemas de operação do sistema elétrico.

No algoritmo de mínimo corte de carga os fluxos nos circuitos devem permanecer entre os limites de operação. Os problemas de operação neste algoritmo são

contornados pelos geradores fictícios realizando-se, portanto, cortes de carga no sistema. O algoritmo converge quando forem adicionados circuitos suficientes e que não causem cortes de carga no sistema elétrico.

Como o algoritmo de mínimo corte de carga é um processo de passo a passo, em cada passo é resolvido um problema generalizado de fluxo de carga DC (e é nesse ponto que se utiliza um *software* de PL). Assim, em cada passo existe disponível a chamada configuração corrente constituída por todos os circuitos existentes na configuração base e os circuitos adicionados nos passos anteriores na implementação do algoritmo mínimo de corte de carga. Assim, em cada passo do algoritmo, deve-se resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \min w &= \sum r_i \\
 \text{s.a.} \\
 B\theta + g + r &= d \\
 |\theta_i - \theta_j| &\leq \phi_{ij} \\
 0 \leq g &\leq \bar{g} \\
 0 \leq r &\leq d \\
 \theta_j &\text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

em que B é a matriz de susceptâncias do sistema constituído pelos circuitos da configuração corrente.

O *indicador de sensibilidade* do método de mínimo corte de carga que permite encontrar o circuito mais atrativo para adição é determinado pela seguinte relação:

$$SI_{ij}^{mc} = \frac{\partial Z_{ij}}{\partial \gamma_{ij}} = -(\theta_i - \theta_j)(\pi_i - \pi_j) \tag{4.43}$$

em que SI_{ij}^{mc} é o indicador de sensibilidade da função objetivo (4.42) com relação à susceptância do circuito no caminho (i, j) , os π_j são os multiplicadores de Lagrange das restrições $B\theta + g + r = d$, e os θ_j são os ângulos de tensão das barras do sistema obtidos ao resolver (4.42).

No método de mínimo corte de carga aparece um aspecto complicante. A configuração corrente pode ser um sistema não conexo, isto é, podem existir barras isoladas da parte conexa do sistema elétrico. Este fato produz dois problemas: 1) para

um sistema não conexo, o sistema (4.42) pode apresentar problemas de convergência, e 2) é necessário ter os valores de todos os θ_j para encontrar os valores dos indicadores de sensibilidade. Este problema foi contornado colocando uma rede fictícia superposta com a rede existente para tornar o sistema elétrico conexo. O conceito de rede fictícia inicialmente proposto em [14], foi usado posteriormente por outros pesquisadores, em alguns casos com outros nomes, para contornar o problema de rede elétrica não conexa. Pode-se usar vários tamanhos de rede fictícia. Assim pode-se colocar uma rede fictícia constituída por circuitos fictícios através de todos os caminhos do sistema elétrico, colocando-se circuitos fictícios somente nas parcelas do sistema elétrico correspondente aos caminhos novos ou, ainda, colocando-se circuitos fictícios somente num número mínimo de caminhos novos suficientes para tornar o sistema elétrico conexo. Para o algoritmo de mínimo corte de carga é definida uma rede fictícia constituída por circuitos fictícios com valores de n_{ij} muito pequenos mas com uma capacidade de transmissão muito maior que um circuito normal, isto é, o circuito fictício deve ter uma abertura angular maior que a abertura angular máxima permitida a um circuito normal. A primeira característica do circuito fictício, n_{ij} pequeno, é apenas para dispor de um sistema conexo, evitar problemas numéricos e produzir uma modificação mínima no sistema. Entretanto, a segunda característica é importante em relação a segunda lei de Kirchhoff, isto é, a abertura angular de um circuito fictício deve ser suficientemente grande para que as diferenças angulares nos laços artificiais geradas pelos circuitos fictícios não modifiquem as aberturas angulares nos circuitos normais.

Uma variante do indicador de sensibilidade de mínimo corte de carga pode ser obtida incluindo o efeito dos custos dos circuitos. Assim, uma relação alternativa para usar como indicador de sensibilidade no método de mínimo corte de carga é a seguinte:

$$SI_{ij}^{mcm} = SI_{ij}^{mc} / c_{ij} \quad (4.44)$$

em que c_{ij} é o custo de adição de uma linha no caminho (i, j) . Portanto, no algoritmo de mínimo corte de carga pode ser usado qualquer um dos indicadores de sensibilidades anteriormente especificados. Obviamente, o uso de cada um dos indicadores de sensibilidade deve produzir propostas de planejamento diferentes.

O algoritmo de mínimo corte de carga pode ser resumido nos seguintes passos:

Fase I:

1. Assumir a configuração base n_{ij} como configuração corrente
2. Resolver o **problema de PL correspondente do sistema (4.42)**, usando o algoritmo de PL proposto, para a configuração corrente. Se os cortes de carga forem eliminados então passar para a fase II, pois foi encontrada uma solução factível. Em caso contrário, calcular os indicadores de sensibilidade de mínimo corte de carga usando a relação (4.43) ou (4.44) e ordenar a lista de circuitos candidatos à adição iniciando pelo circuito mais atrativo de acordo com o indicador de sensibilidade encontrado.
3. Adicionar ao sistema um circuito correspondente ao caminho mais atrativo determinado no passo anterior para obter a nova configuração corrente. Voltar ao passo (2).

Fase II:

1. É possível que existam alguns circuitos irrelevantes adicionados durante a fase I devido a outras adições mais importantes realizadas posteriormente. Ordenar os circuitos adicionados em ordem decrescente de seus custos e eliminar aqueles que, uma vez simulada sua saída, não produzam cortes de cargas no sistema.

4.6. Testes ilustrativos

Agora tem-se alguns resultados de testes realizados em um programa de acordo com o algoritmo proposto para um sistema de pequeno porte (sistema de 6 barras e 15 linhas de Garver) e para um sistema de médio porte (sistema sul brasileiro, 46 barras e 79 linhas). São apresentados testes relativos a tempo de execução, número de iterações e precisão dos resultados. Em todos os testes o desempenho do algoritmo proposto é comparado com o software comercial de PL chamado MINOS somente a título de ilustração.

Uma vez que se observam diferenças no resultado final até mesmo entre duas implementações diferentes de uma mesma técnica de PL, os resultados podem ser considerados muito bons, já que a diferença entre os resultados se verifica somente na segunda casa decimal, quando considerado o corte percentual. O tempo de execução foi analisado em centésimos de segundo. O algoritmo proposto se mostrou mais eficiente que o MINOS 5.4 [2] com um tempo bem abaixo como se pode ver nas Tabelas a seguir.

Sistema sul brasileiro – 46 barras

Com o sistema sul brasileiro de 46 barras foram realizados testes com sua configuração básica:

Tabela 4.3: Testes com o sistema sul brasileiro

Configuração	Algoritmo proposto		MINOS		Diferença em % com relação ao corte
	Corte (<i>MW</i>)	Tempo (s)	Corte (<i>MW</i>)	Tempo (s)	
Dados no apêndice C	2278,0969	0,06	2278,0970	0,22	0,01

Testes com o sistema de Garver – 06 barras

Foram realizados testes com duas configurações do sistema de seis barras, as tabelas 4.4 e 4.5 são referentes a configuração básica sem redespacho e as tabela 4.6 e 4.7, a configuração básica com redespacho.

Os testes foram realizados com o algoritmo de mínimo corte de carga utilizando primeiramente o algoritmo proposto para resolver os problemas de PL e em seguida utilizando o MINOS para que as comparações pudessem ser feitas.

A terceira coluna da tabela 4.4 mostra o número de restrições de desigualdade que são adicionadas no processo de resolução pelo algoritmo proposto depois do predespacho. Verifica-se que um número pequeno de restrições é adicionado ao problema e ainda pode ocorrer como na sexta configuração corrente da tabela 4.4, em que o algoritmo de PL chegou na solução ainda no predespacho, não sendo necessário adicionar restrições e fazer iterações de PL. A quarta coluna corresponde ao número total de iterações de PL que o algoritmo proposto executou. Na quinta coluna aparece o tempo de execução da resolução de cada problema de PL, através do algoritmo proposto, para cada configuração corrente do método do mínimo corte de carga. A sexta

coluna mostra o corte de carga (solução do problema de PL). E a sétima também corresponde ao tempo de execução da resolução de cada problema de PL, mas através do MINOS.

Tabela 4.4: Testes com a configuração básica sem redespacho do sistema de 6 barras

N °	Circuito adicionado	N ° de restrições adicionadas	N ° de iterações de PL	Tempo algoritmo proposto (s)	Corte	Tempo MINOS (s)
Fase I:						
1	***	2	2	0,005	370,0	0,06
2	2 - 6	3	3	0,005	270,0	0,05
3	4 - 6	4	4	0,005	170,0	0,05
4	2 - 3	3	3	0,005	112,6	0,06
5	3 - 5	1	1	0,005	51,2	0,06
6	4 - 6	0	0	0,003	0,0	0,06
Fase II: simulando retirada						
7	4 - 6	1	1	0,003	51,2	0,06
8	2 - 6	1	1	0,003	49,0	0,06
9	2 - 3	2	2	0,004	5,8	0,06
10	3 - 5	2	2	0,004	79,5	0,06

O algoritmo de mínimo corte de carga encontra a seguinte topologia de adições de circuitos:

Tabela 4.5: Circuitos adicionados

Circuito adicionado	N ° de circuitos adicionados
2 - 6	1
4 - 6	2
2 - 3	1
3 - 5	1

O algoritmo de mínimo corte de carga adicionou 5 circuitos na fase I e não conseguiu retirar circuitos na fase II, obtendo um investimento de $v = 130,0$.

Tabela 4.6.: Testes com a configuração básica com redespacho do sistema de 6 barras

N°	Circuito adicionado	N° de restrições adicionadas	N° de iterações de PL	Tempo algoritmo proposto (s)	Corte	Tempo MINOS (s)
Fase I:						
1	***	0	0	0,003	545,0	0,06
2	4 - 6	2	2	0,005	445,0	0,06
3	2 - 6	3	3	0,005	345,0	0,06
4	2 - 6	3	3	0,006	245,0	0,06
5	2 - 6	3	3	0,005	188,5	0,05
6	4 - 6	2	2	0,004	99,8	0,06
7	3 - 5	1	1	0,004	49,2	0,06
8	2 - 6	1	1	0,003	0,0	0,05
Fase II: simulando retirada						
9	4 - 6	2	2	0,004	83,0	0,05
10	2 - 6	1	1	0,005	49,2	0,06
11	3 - 5	1	1	0,004	85,0	0,06

O algoritmo de mínimo corte de carga encontra a seguinte topologia de adições de circuitos:

Tabela 4.7: Circuitos adicionados

Circuito adicionado	N° de circuitos adicionados
4 - 6	2
2 - 6	4
3 - 5	1

O algoritmo de mínimo corte de carga adicionou 7 circuitos na fase I e não conseguiu retirar circuitos na fase II, obtendo um investimento de $v = 200,0$.

Testes com o sistema sul brasileiro – 46 barras

Foram realizados testes com o sistema de 46 barras e 79 circuitos candidatos a partir da configuração básica sem redespacho. Os testes foram realizados com o algoritmo de mínimo corte de carga utilizando primeiramente o algoritmo proposto para resolver os problemas PL e em seguida utilizando o MINOS para que as comparações, a critério de ilustração, pudessem ser feitas.

Tabela 4.8: Testes com o sistema sul brasileiro

N °	Circuito adicionado	N ° de restrições adicionadas	N ° de iterações de PL	Tempo algoritmo proposto (s)	Função objetivo	Tempo MINOS (s)
Fase I:						
1	***	4	4	0,05	3452,5	0,16
2	26 – 29	4	4	0,05	3452,5	0,11
3	29 – 30	4	4	0,05	3452,5	0,11
4	28 – 30	4	4	0,05	3294,8	0,11
5	09 – 10	4	4	0,06	3294,8	0,11
6	46 – 10	6	6	0,05	3117,8	0,11
7	24 – 25	6	6	0,06	3117,8	0,11
8	21 – 25	6	6	0,06	2407,1	0,17
9	40 – 41	6	6	0,06	2407,1	0,17
10	31 – 41	6	6	0,06	2105,6	0,11
11	28 – 31	7	7	0,05	1878,4	0,17
12	42 – 43	6	6	0,06	1320,5	0,16
13	05 – 06	6	6	0,05	1320,5	0,17
14	46 – 06	3	3	0,06	1027,4	0,17
15	24 – 25	4	4	0,05	867,2	0,11
16	05 – 06	4	4	0,05	561,8	0,11
17	19 – 25	2	2	0,05	580,8	0,11
18	20 – 21	1	1	0,05	220,3	0,11
19	31 – 32	0	0	0,008	0,0	0,16
Fase II: simulando retirada						
20	19 – 25	3	3	0,06	445,9	0,11
21	31 – 41	1	1	0,06	408,8	0,11
22	21 – 25	0	0	0,007	0,0 *	0,11
23	46 – 06	3	3	0,05	491,1	0,11
24	46 – 10	0	0	0,008	0,0 *	0,11
25	28 – 30	0	0	0,008	26,2	0,11
26	20 – 21	1	1	0,06	718,8	0,11
27	42 – 43	1	1	0,06	826,4	0,16
28	24 – 25	1	1	0,007	461,1	0,11
29	29 – 30	0	0	0,007	26,2	0,16
30	40 – 41	1	1	0,05	418,4	0,16
31	05 – 06	0	0	0,008	421,6	0,11
32	09 – 10	0	0	0,008	0,0 *	0,11
33	28 – 31	1	1	0,008	460,0	0,11
34	31 – 32	2	2	0,007	216,5	0,11
35	26 – 29	0	0	0,007	26,2	0,17

O algoritmo de mínimo corte de carga encontra a seguinte topologia de adições de circuitos:

Tabela 4.9: Circuitos adicionados

Circuito adicionado	N ° de circuito adicionado	Circuito retirado
26 – 29	1	
29 – 30	1	
28 – 30	1	
09 – 10	1	1
46 – 10	1	1
24 – 25	2	
21 – 25	1	1
40 – 41	2	
31 – 41	1	
28 – 31	1	
42 – 43	1	
05 – 06	2	
46 – 06	1	
19 – 25	1	
20 – 21	1	
31 – 32	1	

Assim o algoritmo de mínimo corte de carga adicionou 19 circuitos na fase I e retirou 3 circuitos na fase II, obtendo um investimento de $v = 178905$.

4.7. Conclusões

O algoritmo proposto possui a mesma estrutura do algoritmo proposto no capítulo 3, só que para outro modelo do problema de planejamento. O modelo DC é diferente do modelo de transportes, mas algumas conclusões são parecidas:

1. O algoritmo também apresenta as duas características do algoritmo proposto no capítulo 3: (1) Transformação do problema visando a redução de variáveis e das restrições de igualdade encontrando um problema equivalente que tem apenas uma restrição de igualdade (a equação de balanço de potência ativa) e um conjunto de restrições de desigualdade igual ao número de circuitos existentes no sistema, e (2) Uso de um algoritmo dual simplex canalizado usando relaxação para resolver o problema modificado;
2. Também possui o grande atrativo de que poucas restrições de desigualdade estão ativas na solução ótima do problema (somente aquelas restrições dos circuitos que estão operando no limite) e, portanto, a técnica de relaxação torna-se particularmente eficiente;

3. O algoritmo foi incorporado num algoritmo heurístico construtivo, usado no planejamento da expansão de sistemas de transmissão, o algoritmo de mínimo corte de carga. Os resultados obtidos usando um sistema real, o sistema sul brasileiro, mostra um desempenho eficiente do algoritmo;
4. O desempenho computacional do algoritmo é melhor que qualquer proposta de solução que resolva o problema de PL usando um algoritmo primal simplex com um número elevado de restrições. O programa computacional elaborado, mesmo não tendo a sofisticação de programação de um software comercial, é mais rápido que o *software* MINOS;
5. Em relação à proposta apresentada por Gandini [7], o algoritmo apresenta a grande vantagem de não usar multiplicadores dual simplex para identificar restrições violadas tornando o algoritmo proposto num algoritmo robusto, pois ele opera sem problemas mesmo quando existem comportamentos atípicos no problema de PL tais como soluções ótimas alternativas no problema dual (ótimos alternativos nas variáveis duais). Entretanto apresenta a desvantagem de precisar inverter a matriz B de forma explícita.
6. A técnica de reotimização não é tão eficiente quanto a do algoritmo do capítulo 3, pois a matriz de susceptância B é diferente para cada problema de PL sucessivo no problema de planejamento, portanto, a transformação da modelagem é feita para cada problema de PL sucessivo. A técnica de reotimização tem por objetivo diminuir o maior esforço computacional, que está na inversão da matriz B , usando o lema de inversão de matrizes, porem o modelo transformado deve ser refeito para cada PL. Além disso, o lema de inversão de matrizes não pode ser usado quando uma barra ilhada é adicionada ao sistema de energia elétrica, logo a técnica de reotimização perde sua eficiência quando o sistema elétrico possui muita barra ilhada.

5. Algoritmo simplex eficiente para resolver o modelo de transportes relaxado

Como nos capítulos 3 e 4, neste capítulo também se apresenta um algoritmo de PL aplicado ao problema de planejamento de sistemas de transmissão, mas agora, para resolver o modelo de transportes relaxado de maneira mais eficiente que os softwares de uso geral. É necessário resolver o modelo de transportes relaxado quando se utiliza, por exemplo, o algoritmo de “Branch and Bound” ou o algoritmo construtivo de Garver para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o modelo de transportes, onde a estratégia é resolver o modelo de transportes de forma sucessiva em que é relaxada a integridade de n_{ij} e, em cada iteração varia simplesmente um dos valores dos n_{ij}^0 . Assim, um algoritmo de PL eficiente deve resolver adequadamente duas partes do problema: (1) Uma forma eficiente de resolver o problema de PL básico e, (2) Usar uma técnica de reotimização quando varia um elemento de n^0 . A segunda parte é conceitualmente trivial. Entretanto, para resolver a formulação básica do problema de PL da forma mais eficiente existem várias alternativas; a utilizada no algoritmo aqui proposto consiste na reformulação do modelo transportes, chegando a uma formulação equivalente, só que de mais fácil resolução.

A metodologia apresenta duas etapas: 1) Redução do número de variáveis e das restrições de igualdade do problema, e 2) Solução do problema resultante usando um algoritmo dual simplex canalizado e a estratégia de relaxação. O problema resultante apresenta uma única restrição de igualdade e um número de restrições de desigualdade igual ao número de circuitos do sistema elétrico. Uma particularidade muito importante deste problema é que somente um número muito

reduzido destas restrições de desigualdade estão ativas na solução ótima do problema. Assim, a estratégia mais adequada é usar relaxação iniciando a resolução do problema com a única restrição de igualdade, algumas restrições de fluxo fixadas nos seus limite superiores (num total de restrições de fluxos igual ao número de barras menos um) e as restrições triviais de limite das variáveis de geração e incorporando em cada passo a restrição de desigualdade mais violada dentre as restrições de fluxos que foram relaxadas.

5.1. Modelagem matemática convencional

O modelo de transporte foi formulado por Garver em [8] e teve muito sucesso, sendo esta uma das primeiras propostas para planejamento de redes de transmissão que usou programação linear. Esta metodologia consiste basicamente em resolver de maneira aproximada uma versão relaxada do modelo DC. No modelo de Garver, conhecido como *modelo de transportes*, somente se considera a lei de Kirchhoff das correntes e a capacidade de transmissão das linhas, não sendo considerada a lei de Kirchhoff das tensões.

O modelo de transporte assume a seguinte formulação:

$$\min v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} n_{ij} \quad (5.1)$$

s.a.

$$Sf + g = d$$

$$|f_{ij}| \leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \text{ e inteiro}$$

$$f_{ij} \text{ irrestrito}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

O modelo de transportes é uma relaxação do modelo DC, pois não considera um conjunto de restrições, e portanto, uma das desvantagens do modelo de transportes é que a sua solução (mesmo sendo a ótima) pode não ser adequada do ponto de vista do modelo DC, pois para este, a solução do modelo de transportes poderia apresentar um corte de carga inadequado. A vantagem é que o problema (5.1) é um problema de programação linear inteira mista (PLIM), e relativamente mais fácil de se resolver. Apesar de o modelo de transportes ser uma formulação relaxada, Garver usou

um algoritmo aproximado para resolvê-lo. Entretanto, o algoritmo de Garver foi bem aceito, pois naquela época não existiam algoritmos melhores para resolver o problema de planejamento de transmissão.

Um algoritmo heurístico resolve (5.1) de forma sucessiva onde é relaxada a integridade de n_{ij} e, em cada iteração varia simplesmente os valores dos n_{ij}^0 . Na verdade varia somente um elemento de n^0 . As variáveis do problema são os f_{ij} , g_j e n_{ij} . Assim, um algoritmo eficiente deve resolver adequadamente duas partes do problema: (1) Uma forma eficiente de resolver o problema de PL básico e, (2) Usar uma técnica de reotimização quando varia um elemento de n^0 . A segunda parte é conceitualmente trivial. Entretanto, para resolver a formulação básica do problema de PL da forma mais eficiente existem várias alternativas, sendo que o algoritmo que é apresentado a seguir consiste na reformulação do modelo (5.1), chegando a uma formulação equivalente, de mais fácil resolução.

5.2. Transformação da modelagem

A transformação da modelagem consiste em diminuir o número de variáveis de (5.1) obtendo-se um sistema equivalente como mostra o procedimento a seguir:

Seja o primeiro conjunto de restrições do sistema (5.1) que corresponde a um número de restrições igual ao número n_b de barras do sistema:

$$Sf + g = d \quad (5.2)$$

S é a matriz incidência de ordem $(n_b \times n_l)$ em que n_b é o número de barras do sistema e n_l é o número de ramos do sistema; f é o vetor das variáveis dos fluxos nos ramos; g é o vetor das variáveis das gerações das barras, e d é o vetor das demandas das barras.

A matriz S tem um linha para cada barra do sistema da rede e uma coluna para cada ramo. Cada coluna de S possui exatamente dois coeficientes diferentes de zero: um “+1” e um “-1”. A coluna associada com o ramo (i, j) contém um “+1” na linha i , um “-1” na linha j , e zero nas outras posições. Claramente a matriz

S não tem *rank* completo já que a soma de suas linhas é o vetor zero. Para mostrar que S tem grau $(n_b - 1)$ basta selecionar uma submatriz $((n_b - 1) \times (n_b - 1))$ de S que seja não-singular. Para isto, deve-se retirar uma linha do sistema (5.2), a linha correspondente a barra de referência. Seja n_b a barra de referência, então:

$$S'f + g' = d' \quad (5.3)$$

em que S' é uma submatriz de S , onde foi retirada a linha n_b ; g' é um vetor de variáveis das gerações das barras sem a variável da posição n_b ; e d' é um vetor das demandas das barras sem a demanda da posição n_b .

Sejam A e B submatrizes de S' , tal que:

$$S' = [A \quad B] \quad (5.4)$$

em que A é uma submatriz quadrada de *rank* de ordem $(n_b - 1)$, e B é uma submatriz de ordem $((n_b - 1) \times (n_l - n_b + 1))$.

Sejam f_a e f_b , tal que:

$$f = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

em que f_a é o vetor das variáveis de fluxos referente a submatriz A e f_b é o vetor das variáveis de fluxos referente a submatriz B , de modo que, (5.3) pode ser reescrita:

$$Af_a + Bf_b + g' = d' \quad (5.6)$$

E a equação da barra de referência que foi retirada de (5.2) pode ser reescrita como:

$$[a_{n_b,1} \quad \dots \quad a_{n_b,(n_b-1)}]f_a + [b_{n_b,1} \quad \dots \quad b_{n_b,(n_l-n_b+1)}]f_b + g_{n_b} = d_{n_b} \quad (5.7)$$

De (5.6), tem-se:

$$f_a = A^{-1}(-Bf_b - g' + d') \quad (5.8)$$

Desta forma, conseguiu-se escrever as variáveis dos fluxos de f_a em função das demais variáveis, e assim, substituindo (5.8) em (5.7), a equação da barra de referência pode ser escrita do seguinte modo:

$$[a_{n_b,1} \quad \dots \quad a_{n_b,(n_b-1)}](A)^{-1}(-Bf_b - g' + d') + [b_{n_b,1} \quad \dots \quad b_{n_b,(n_b-1)}]f_b + g_{n_b} = d_{n_b} \quad (5.9)$$

No apêndice D é provado que $[a_{n_b,1} \quad \dots \quad a_{n_b,(n_b-1)}]A^{-1} = [-1 \quad \dots \quad -1]$.

Assim (5.9) assume a seguinte forma:

$$[-1 \quad \dots \quad -1](-Bf_b) + [b_{n_b,1} \quad \dots \quad b_{n_b,(n_b-1)}]f_b + \sum_{i=1}^{n_b} g_i = \sum_{i=1}^{n_b} d_i \quad (5.10)$$

Em (5.10) $([-1 \quad \dots \quad -1](-B) + [b_{n_b,1} \quad \dots \quad b_{n_b,(n_b-1)}])f_b$, nada mais é que a soma dos elementos das colunas da matriz B juntamente com os elementos da linha da barra de referência que foi retirada de S , e como a soma dos elementos de uma coluna da matriz S é zero, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n_b} g_i = \sum_{i=1}^{n_b} d_i \quad (5.11)$$

A equação (5.11) é a única restrição de igualdade e receberá o nome de equação de balanço de potência.

Assim o seguinte sistema é equivalente ao sistema (5.1):

$$\min v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} n_{ij} \quad (5.12)$$

s. a.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_b} g_i &= \sum_{i=1}^{n_b} d_i \\ |A^{-1}(-Bf_b - g' + d')| &\leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij} \quad , f_{ij} \in f_a \\ |f_b| &\leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij} \quad , f_{ij} \in f_b \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ n_{ij} &\geq 0 \\ f_{ij} &\text{ irrestrito} \\ \forall (i, j) &\in \Omega \end{aligned}$$

A melhor estratégia para resolver (5.12) é usar um algoritmo dual simplex canalizado e usando relaxação. Assim o processo pode ser iniciado relaxando todas as restrições de fluxo de potência que pertencem ao grupo de f_a , isto é, o processo é iniciado com apenas a única restrição de igualdade, as $(n_l - n_b + 1)$ restrições de fluxo de f_b fixas em um de seus limites, superior ou inferior (um deles também é relaxado), e as restrições canalizadas $0 \leq g \leq \bar{g}$ e $n_{ij} \geq 0$.

Metodologia de otimização

Pode-se usar o seguinte algoritmo:

1. Realizar o predespacho e montar o quadro dual simplex canalizado com uma base de tamanho $n_l - n_b + 2$;
2. Identificar a restrição mais violada.
Se não existe restrição violada, encontre as grandezas de interesse e pare o processo.
Em caso contrário ir ao passo 3;
3. Introduzir a restrição mais violada no quadro dual simplex canalizado e reotimizar o quadro simplex com base reduzida. Voltar ao passo 2;

Predespacho

Inicia-se o predespacho com todas as variáveis iguais a zero, a seguir realizam-se passos sucessivos onde em cada passo é incrementada a geração de um gerador real até atingir seu limite máximo. O próximo gerador que deve ser escolhido para incrementar sua geração é aquele que elimina (ou diminui) a violação da restrição de fluxo mais violada. Portanto, inicia-se o processo colocando todas as gerações em seus valores mínimos, isto é, todas nulas e incrementam-se sucessivamente as gerações para seus valores máximos, ou seja, em seus limites superiores, até que seja satisfeita a equação de balanço de potência (5.11). Este incremento é feito passo a passo, incrementando-se em cada passo a geração de uma barra de geração (que deve ser escolhida de modo que diminua a violação da restrição de fluxo relaxada violada) até atingir seu limite superior. Esse processo é continuado até que a somatória de geração seja igual a demanda total do sistema. Nesse processo, o último gerador adicionado deve ficar tipicamente fora de seu limite pois sua geração foi incrementada apenas até

atingir o equilíbrio de balanço de potência. Após fixar as variáveis em zero, a escolha do gerador que deve ser colocado no seu limite superior deve ser realizada do seguinte modo:

1. Procure, dentre as restrições de fluxo violadas, a mais violada;
2. Escolha uma geração que esteja em seu limite inferior (zero), que melhor possa aliviar a restrição encontrada no passo (1), coloque-a no seu limite superior e vá ao passo (4). Caso não exista geração que alivie a restrição, vá ao passo (3);
3. Escolha a primeira geração que esteja em seu limite inferior, coloque-a no seu limite superior e vá ao passo (4);
4. Vá ao passo (5) se a soma das gerações for maior ou igual ao valor da demanda total do sistema, caso contrário, volte ao passo (1);
5. Se a soma das gerações for maior que a demanda total do sistema, escolhe-se a geração que viola uma restrição para ser fixada no valor igual à diferença entre a demanda total do sistema e a última soma das gerações encontrada no passo (4) e vá ao passo (6);
6. Fixe as variáveis de fluxo de f_b em um de seus limites (inferior ou superior) de modo que diminua a violação das restrições relaxadas de f_a e pare o processo de predespacho.

Ao final do predespacho, uma parcela das gerações estará ajustada no limite inferior (as que não foram incrementadas) e uma parcela estará no limite superior, e somente uma geração (que pode ser a última a ser incrementada) estará em um valor intermediário, ou seja, folgada e operando dentro de seus limites. As variáveis n_{ij} estarão fixadas em zero (limite inferior) e as variáveis de fluxo de f_b estarão ou no limite superior ou no inferior.

Os valores das variáveis a partir do predespacho são a solução do sistema (5.12) se forem retiradas às restrições de fluxo de f_a , ou seja, é a solução do problema relaxado. Assim pode-se montar um quadro ótimo dual simplex canalizado desse problema relaxado que terá uma base de tamanho igual à $(nl - nb + 2)$ que corresponde a única restrição de igualdade mais as restrições de fluxos de f_b .

Em seguida verifica se há restrições de fluxos de violadas, sendo que deve-se verificar todas as restrições de fluxo, tanto do grupo de f_a quanto do grupo de f_b , pois as restrições de fluxo de f_b estão no quadro dual simplex fixadas em um de seus limites, podendo o outro ficar violado. Se não existir restrição de fluxo violada então a solução atual é factível e o problema termina, caso contrário, escolhe-se a restrição de fluxo mais violada fixando-a em seu limite violado devendo atualizá-la para introduzi-la como restrição de igualdade no quadro dual simplex canalizado. Realizam-se iterações de PL propriamente dita, reotimizando o quadro dual simplex canalizado. O processo verifica novamente se existe restrição de fluxo violada para introduzi-la no problema relaxado e assim por diante até que o problema seja resolvido.

O sistema (5.12) é relaxado retirando-se as restrições referentes aos fluxos pertencentes ao grupo de f_a :

$$\min v = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{ij} n_{ij} \quad (5.13)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_b} g_i &= \sum_{i=1}^{n_b} d_i \\ |f_{ij}| &\leq (n_{ij} + n_{ij}^0) \bar{f}_{ij} \quad , f_{ij} \in f_b \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ n_{ij} &\geq 0 \\ f_{ij} &\text{ irrestrito} \\ \forall (i,j) &\in \Omega \end{aligned}$$

A solução ótima do sistema (5.13) é obtida facilmente através de um predespacho e um quadro ótimo e factível dual simplex canalizado é facilmente montado, mas essa solução pode não ser factível para o sistema (5.12), pois pode haver restrições de fluxo violadas. Assim alguma restrição de fluxo violada é escolhida para ser fixada no limite violado e ser introduzida no sistema (5.13) como restrição de igualdade e após ser devidamente atualizada é introduzida no quadro dual simplex canalizado.

Após a introdução da restrição violada o quadro dual simplex canalizado continua ótimo, mas já não é mais factível, assim realiza-se algumas iterações de PL até se obter um quadro ótimo e factível, obtendo-se uma nova solução, que deve ser utilizada para verificar se ainda existe alguma restrição de fluxo de (5.12) violada e repetir o processo até não haver mais restrições violadas em (5.12). A solução obtida será a ótima de (5.12) e em consequência também de (5.1).

Técnica de reotimização

A técnica de reotimização é muito parecida com a apresentada no capítulo 3, devido a transformação da modelagem ser muito parecida, isto é, para escrever o modelo proposto também deve-se inverter uma submatriz de S (neste caso do sistema (5.1)) e como praticamente todos os algoritmos de planejamento de sistemas de transmissão, heurísticos, de otimização clássica e as metaheurísticas, resolvem de maneira iterativa problemas de PL que se diferenciam pela adição ou remoção de um circuito, é conveniente aproveitar o modelo transformado do problema de PL anterior, visto que a diferença de um para o outro está somente no limite da restrição do fluxo onde foi adicionado (ou retirado) um circuito, diminuindo o esforço computacional do algoritmo proposto, já que este está na inversão da submatriz de S .

5.3. Exemplo ilustrativo

Para uma melhor compreensão do algoritmo proposto, tem-se a seguir um exemplo com o sistema de 4 barras da figura 3.1, cujos dados se encontram nas tabelas 3.1 e 3.2.

Formulação original

O modelo de transportes (5.1) assume a seguinte forma:

$$\min v = 3n_{12} + 2n_{13} + 2n_{14} + 2n_{23} + 2n_{24} + 2n_{34} \quad (5.14)$$

s.a.

$$\begin{array}{rcccccc} -f_{12} & -f_{13} & -f_{14} & & & +g_1 & = & 0,0 \\ f_{12} & & & -f_{23} & -f_{24} & & = & 60,0 \\ & f_{13} & & f_{23} & & -f_{34} & = & 55,0 \\ & & f_{14} & & f_{24} & f_{34} & = & 30,0 \end{array}$$

$$|f_{12}| \leq 35(1 + n_{12})$$

$$|f_{13}| \leq 40(1 + n_{13})$$

$$|f_{14}| \leq 40(1 + n_{14})$$

$$|f_{23}| \leq 40(1 + n_{23})$$

$$|f_{24}| \leq 40(1 + n_{24})$$

$$|f_{34}| \leq 40n_{34}$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$n_{12} \geq 0$$

$$n_{13} \geq 0$$

$$n_{14} \geq 0$$

$$n_{23} \geq 0$$

$$n_{24} \geq 0$$

$$n_{34} \geq 0$$

$$f_{ij} \text{ irrestrito}$$

O sistema (5.14) apresenta 13 variáveis, e portanto 13 restrições das 23 (6 estão em módulo) existentes estarão ativas em um ponto extremo factível do problema de PL, assim, além de precisar de várias iterações de PL, a base do quadro será de tamanho maior ou igual à 13.

Formulação proposta

A formulação original (5.14) é equivalente a seguinte formulação que corresponde ao modelo proposto (5.12), sendo a barra 4 a barra de referência:

$$\min v = 3n_{12} + 2n_{13} + 2n_{14} + 2n_{23} + 2n_{24} + 2n_{34} \quad (5.15)$$

s.a.

$$g_1 = 145$$

$$|-f_{12} - f_{14} + g_1| \leq 40(1 + n_{13})$$

$$|-f_{14} - f_{34} + g_1 - 115| \leq 40(1 + n_{24})$$

$$|f_{12} + f_{14} + f_{34} - g_1 + 55| \leq 40(1 + n_{23})$$

$$|f_{12}| \leq 35(1 + n_{12})$$

$$|f_{14}| \leq 40(1 + n_{14})$$

$$|f_{34}| \leq 40n_{34}$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$n_{12} \geq 0$$

$$n_{13} \geq 0$$

$$n_{14} \geq 0$$

$$n_{23} \geq 0$$

$$n_{24} \geq 0$$

$$n_{34} \geq 0$$

$$f_{ij} \text{ irrestrito}$$

Tem-se um sistema onde as variáveis são somente as gerações (no caso somente g_1), as variáveis de fluxo do grupo f_b (f_{12} , f_{14} e f_{34}) e as variáveis n_{ij} (n_{12} , n_{13} , n_{14} , n_{23} , n_{24} e n_{34}), num total de dez variáveis, isto significa que há 10 restrições ativas das 20 (6 estão em módulo) existentes, as demais estarão folgadas, assim o que resta saber é quais são essas restrições. A restrição de balanço sempre está ativa e assim devem existir nove restrições ativas das dezenove restantes sendo que muitas delas podem ser aquelas correspondentes às restrições das variáveis canalizadas.

Para resolvê-lo, primeiramente, deve-se relaxar o problema (5.15) de forma que o processo seja iniciado com apenas a única restrição de igualdade, as $(n_i - n_b + 1)$ restrições de fluxo de f_b , as restrições canalizadas $0 \leq g \leq \bar{g}$ e $n_{ij} \geq 0$. Assim, tem-se o problema relaxado:

$$\min v = 3n_{12} + 2n_{13} + 2n_{14} + 2n_{23} + 2n_{24} + 2n_{34} \quad (5.16)$$

s.a.

$$g_1 = 145$$

$$|f_{12}| \leq 35(1 + n_{12})$$

$$|f_{14}| \leq 40(1 + n_{14})$$

$$|f_{34}| \leq 40n_{34}$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$n_{12} \geq 0$$

$$n_{13} \geq 0$$

$$n_{14} \geq 0$$

$$n_{23} \geq 0$$

$$n_{24} \geq 0$$

$$n_{34} \geq 0$$

$$f_{ij} \text{ irrestrito}$$

É simples montar o quadro dual simplex canalizado inicial (predespacho) que terá uma base de tamanho igual a 4 (a equação de balanço de potência mais as três restrições de fluxos de f_b), cuja solução ótima será: $g_1 = 145$, $f_{12} = 35$, $f_{14} = 40$, $f_{34} = 0$ e $n_{ij} = 0$ (as variáveis n_{ij} estão todas nos seus limites inferiores).

Agora deve-se verificar quais os fluxos do problema (5.15) estão violados e qual o mais violado:

Restrições relaxadas	Valor dos fluxos	Valor da violação
$f_{13} \rightarrow -f_{12} - f_{14} + g_1 \leq 40(1 + n_{13})$	$f_{13} = 70 $	$f_{13} \rightarrow 30 $
$f_{24} \rightarrow -f_{14} - f_{34} + g_1 - 115 \leq 40(1 + n_{24})$	$f_{24} = -10 $	$f_{24} \rightarrow 0 $
$f_{23} \rightarrow f_{12} + f_{14} + f_{34} - g_1 + 55 \leq 40(1 + n_{23})$	$f_{23} = 15 $	$f_{23} \rightarrow 0 $
$f_{12} \rightarrow f_{12} \leq 35(1 + n_{12})$	$f_{12} = 35 $	$f_{12} \rightarrow 0 $
$f_{14} \rightarrow f_{14} \leq 40(1 + n_{14})$	$f_{14} = 40 $	$f_{14} \rightarrow 0 $
$f_{34} \rightarrow f_{34} \leq 40n_{34}$	$f_{34} = 0 $	$f_{34} \rightarrow 0 $

O único fluxo violado é o f_{13} que deve ser acrescentado ao problema relaxado (5.16) fixado no seu limite superior:

$$\min v = 3n_{12} + 2n_{13} + 2n_{14} + 2n_{23} + 2n_{24} + 2n_{34} \quad (5.17)$$

s.a.

$$g_1 = 145$$

$$-f_{12} - f_{14} + g_1 \leq 40(1 + n_{13})$$

$$f_{12} \leq 35(1 + n_{12})$$

$$f_{14} \leq 40(1 + n_{14})$$

$$f_{34} \leq 40n_{34}$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$n_{12} \geq 0$$

$$n_{13} \geq 0$$

$$n_{14} \geq 0$$

$$n_{23} \geq 0$$

$$n_{24} \geq 0$$

$$n_{34} \geq 0$$

$$f_{ij} \text{ irrestrito}$$

Para achar a solução de (5.17), deve-se atualizar a equação de f_{13} para acrescentá-la ao quadro dual simplex canalizado do problema (5.16), logo, tem-se um quadro que satisfaz otimalidade mas não é factível, assim realiza-se algumas iterações de PL até que o quadro esteja ótimo e factível. A solução ótima de (5.17) é: $g_1 = 145$, $f_{12} = 35$, $f_{14} = 40$, $f_{34} = 0$, $n_{13} = \frac{3}{4}$ e as demais variáveis n_{ij} estão todas nos seus limites inferiores, ou seja, iguais a zero.

Agora deve-se verificar novamente os fluxos do problema (5.15):

Restrições relaxadas	Valor dos fluxos	Valor da violação
$f_{13} \rightarrow -f_{12} - f_{14} + g_1 \leq 40(1 + n_{13})$	$f_{13} = 70 $	$f_{13} \rightarrow 0 $
$f_{24} \rightarrow -f_{14} - f_{34} + g_1 - 115 \leq 40(1 + n_{24})$	$f_{24} = -10 $	$f_{24} \rightarrow 0 $
$f_{23} \rightarrow f_{12} + f_{14} + f_{34} - g_1 + 55 \leq 40(1 + n_{23})$	$f_{23} = 15 $	$f_{23} \rightarrow 0 $
$f_{12} \rightarrow f_{12} \leq 35(1 + n_{12})$	$f_{12} = 35 $	$f_{12} \rightarrow 0 $
$f_{14} \rightarrow f_{14} \leq 40(1 + n_{14})$	$f_{14} = 40 $	$f_{14} \rightarrow 0 $
$f_{34} \rightarrow f_{34} \leq 40n_{34}$	$f_{34} = 0 $	$f_{34} \rightarrow 0 $

Não existe fluxo violado, logo a solução de (5.17) é também solução de (5.15) e assim obtém-se a solução ótima do problema proposto com $v = 1,5$.

Reotimização

Se num próximo passo, um algoritmo construtivo adiciona um circuito no caminho (1, 3) do sistema de 4 barras do exemplo, tem-se um novo problema de PL que é muito parecido com o apresentado em (5.15), a única diferença está nos limites do fluxo (1, 3):

$$\min v = 3n_{12} + 2n_{13} + 2n_{14} + 2n_{23} + 2n_{24} + 2n_{34} \quad (5.18)$$

s.a.

$$g_1 = 145$$

$$|-f_{12} - f_{14} + g_1| \leq 40(2 + n_{13})$$

$$|-f_{14} - f_{34} + g_1 - 115| \leq 40(1 + n_{24})$$

$$|f_{12} + f_{14} + f_{34} - g_1 + 55| \leq 40(1 + n_{23})$$

$$|f_{12}| \leq 35(1 + n_{13})$$

$$|f_{14}| \leq 40(1 + n_{14})$$

$$|f_{34}| \leq 40n_{34}$$

$$0 \leq g_1 \leq 200$$

$$n_{12} \geq 0$$

$$n_{13} \geq 0$$

$$n_{14} \geq 0$$

$$n_{23} \geq 0$$

$$n_{24} \geq 0$$

$$n_{34} \geq 0$$

$$f_{ij} \text{ irrestrito}$$

O processo de otimização é o mesmo do exemplo anterior, mas nesse caso, a solução ótima foi encontrada através do predespacho, não sendo necessário fazer iterações de PL. A solução ótima encontrada é: $g_1 = 145$, $f_{12} = 35$, $f_{14} = 40$, $f_{34} = 0$ e as demais variáveis n_{ij} estão todas nos seus limites inferiores, ou seja, iguais a zero, produzindo um investimento de $v = 0$.

5.4. Aplicações do algoritmo

Os algoritmos propostos anteriormente tinham a função de verificar a factibilidade de uma proposta de investimento encontrada pelos algoritmos de planejamento de sistema de transmissão (heurísticos construtivos, de otimização

clássica e metaheurísticas), ou seja, são utilizados para resolverem os problemas de PL resultantes de diversas estratégias adotadas por esses algoritmos, tendo como solução a informação de existência ou não de corte de carga.

O algoritmo proposto neste capítulo também é utilizado para resolver problemas de PL resultantes de algoritmos de planejamento de sistemas de transmissão, mas esses algoritmos de planejamento possuem estratégias diferentes e o problema de PL resultante não tem mais a função de informar a existência ou não de corte de carga, ou seja, as variáveis n_{ij} não são fixadas, e sim, possuem sua integralidade relaxada.

Dentre os algoritmos de planejamento que utilizam esse tipo de PL têm-se o algoritmo heurístico construtivo de Garver para o modelo de transportes e o algoritmo de “Branch and Bound” que são descritos a seguir:

Algoritmo heurístico construtivo de Garver para o modelo de transportes

Como já foi dito no capítulo 2, o algoritmo de Garver [8] foi o primeiro algoritmo de grande difusão usado no planejamento de sistemas de transmissão. Logicamente, o algoritmo desenvolvido por Garver foi uma tentativa de encontrar uma boa solução de um problema complexo e não necessariamente a solução ótima. Encontrar a solução ótima da modelagem proposta por Garver, o modelo de transportes, implicaria em resolver um problema de programação linear inteira mista (PLIM). A solução ótima de um problema desse tipo pode ser encontrada, por exemplo, usando um algoritmo de “Branch and Bound”.

O algoritmo de Garver

Garver sugere usar o modelo de transportes como o modelo matemático mais adequado para resolver problemas de planejamento. O modelo de transportes assume a modelagem matemática apresentada em (5.1).

O problema (5.1) é um problema de PLIM, mas se aceitarmos como solução valores de n_{ij} contínuos então (5.1) se transforma num simples problema de programação linear (PL). Em outras palavras, relaxando a integralidade das variáveis inteiras n_{ij} , aceitando que assumam valores fracionários então o problema (5.1),

complexo, transforma-se num problema simples. O problema resultante de (5.1) após relaxar a integralidade das variáveis inteiras leva a um problema de PL conhecido como problema de programação linear correspondente. Deve-se observar que no sistema (5.1) as restrições do tipo $(|f_{ij}| \leq (n_{ij}^0 + n_{ij}) \bar{f}_{ij})$ em valor absoluto podem, ser substituídas por duas restrições lineares. Logicamente, uma solução com linhas de transmissão fracionárias é inaceitável como proposta global de solução mas pode ser uma boa idéia como estratégia na tentativa de encontrar uma boa solução com variáveis de investimento inteiras. Assim, a grande idéia de Garver consiste em usar o problema de PL correspondente como uma estratégia para encontrar uma boa solução do problema original.

A proposta de Garver consiste em resolver o problema (5.1) relaxado e encontrar a solução ótima contínua para a configuração corrente n_{ij}^0 . Assim, conhecidas as incógnitas n_{ij} , encontradas usando um algoritmo de PL, pode-se encontrar os fluxos de potência em todos os circuitos antigos (n_{ij}^0) e novos (n_{ij}). Portanto, o caminho novo ij identificado pelo n_{ij} que leva o maior fluxo de potência representa o caminho mais adequado de acordo com a proposta de Garver. A proposta de Garver então consiste em adicionar uma linha na configuração corrente naquele caminho mais atrativo e atualizar a configuração corrente de acordo com a adição escolhida. Um processo repetido dessa estratégia, adicionando em cada passo um circuito no caminho mais atrativo, constitui o algoritmo de Garver. O processo termina quando a solução do problema de PL correspondente à configuração corrente apresenta uma solução com todos os $n_{ij} = 0$ o que significa que não é necessário realizar mais adições e o conjunto de adições realizadas representa a proposta de solução do algoritmo de Garver.

O algoritmo de Garver pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Assumir a configuração base n_{ij}^0 como configuração corrente;
2. Resolver o problema de PL correspondente do sistema (5.1) para a configuração corrente. Se todos os $n_{ij} = 0$ então pare, pois foi encontrada uma boa configuração factível. Em caso contrário ir ao passo (3);
3. Calcular os fluxos através de todos os novos circuitos adicionados pelo algoritmo de PL, $n_{ij} \neq 0$, usando a relação $f_{ij}^0 = n_{ij} \bar{f}_{ij}$. Identificar o caminho novo ij com o

maior valor de f_{ij}^0 e atualizar a configuração corrente adicionando um circuito naquele caminho ij . Voltar ao passo (2).

O algoritmo apresentado anteriormente não tem a mesma estrutura e nem as mesmas simbologias usadas em [8] mas são conceitualmente equivalentes. Em [8] são usados conceitos como trajetórias sobrecarregadas (*overload path*) e a determinação de fluxos lineares (*linear flow estimation*) que são conceitos decorrentes da formulação matemática e da estratégia de programação linear adotada.

O maior esforço computacional do algoritmo corresponde ao passo (2) que consiste em resolver um problema de PL. Entretanto, o algoritmo apresentado pode ainda ser modificado para obter versões alternativas ligeiramente diferentes do algoritmo de Garver. Assim podem ser realizadas as seguintes modificações:

1. Após a resolução do primeiro problema de PL, pode-se incorporar na configuração base, simultaneamente, a parte inteira de todos os circuitos que apresentam valores de $n_{ij} \geq 1$;
2. Em cada passo, pode-se escolher para adição de um circuito, aquele caminho com maior valor de n_{ij} em lugar de escolher o caminho com maior valor de f_{ij}^0 ;
3. Em cada passo, pode-se manter o critério de adição daquele caminho com maior valor de f_{ij}^0 , mas em lugar de adicionar um simples circuito naquele caminho, pode-se adicionar um número de circuitos igual à parte inteira de n_{ij} .

Todas as modificações propostas podem ser incorporadas separadamente ou em conjunto e levam a algoritmos ligeiramente diferentes do algoritmo de Garver. Todos esses algoritmos alternativos são mais rápidos, pois necessitam de menos chamadas ao algoritmo de PL, e geralmente, mas nem sempre, são de melhor qualidade. Do ponto de vista de otimização matemática, o algoritmo de Garver é um algoritmo heurístico construtivo que na prática encontra configurações de boa qualidade mas do ponto de vista teórico não existe a garantia de encontrar a configuração ótima global. Configurações de boa qualidade na prática significa que o algoritmo encontra com facilidade as configurações ótimas de problemas pequenos, mas em sistemas de grande porte essas configurações podem ficar bastante afastadas da configuração ótima.

5.4.2. Algoritmo “Branch and Bound” para o modelo de transportes

A idéia básica do algoritmo de “Branch and Bound” é conceitualmente simples, pois consiste em achar a solução de um problema PLIM, resolvendo um conjunto de problemas de programação linear (PL) que são versões relaxadas do problema de PLIM. Assim, inicialmente é resolvido o problema original (seja ele o modelo de transporte apresentado em (5.1)) após relaxar a integralidade das variáveis de investimento. Este problema de PL é conhecido como problema linear correspondente (P_0) e é resolvido usando um algoritmo de PL. Caso P_0 apresente uma solução inteira para as variáveis inteiras então essa solução é ótima global para o problema original. Mas, normalmente a solução de P_0 apresenta uma solução com algumas variáveis inteiras com valor corrente não inteiro. Neste caso, a estratégia de “Branch and Bound” é separar ou dividir o problema P_0 em dois subproblemas, P_1 e P_2 , escolhendo uma variável inteira com valor corrente não inteiro para realizar a separação. Assim, se a variável inteira n_{ij} possui um valor corrente não inteiro n_{ij}^* então os problemas sucessores são obtidos da seguinte forma:

Subproblema P_1 : é o problema original P_0 acrescido da restrição: $n_{ij} \leq [n_{ij}^*]$ em que

$[n_{ij}^*]$ é o maior inteiro contido em n_{ij}^* ;

Subproblema P_2 : é o problema original P_0 acrescido da restrição: $n_{ij} \geq [n_{ij}^*] + 1$.

Como não foi possível encontrar a solução ótima do problema original P_0 com variáveis inteiras, então o problema foi separado em dois problemas menores para tentar encontrar a solução ótima nos problemas menores usando técnicas de PL. Os subproblemas gerados são novamente resolvidos e podem gerar dois novos subproblemas usando uma variável inteira com valor corrente não inteiro para realizar a separação. Entretanto, às vezes a solução de um subproblema permite descobrir que já não é necessária sua separação em dois novos subproblemas e que, pelo contrário, o subproblema deve ser sondado ou eliminado para futuras avaliações. Mais informações na seção 2.3.2.

Um algoritmo de “Branch and Bound” básico assume a seguinte forma:

1. Inicialização:

Escolher a incumbente inicial $v_{inc} = v^* = \infty$. Resolver o problema de PL correspondente (PLI original com as variáveis inteiras relaxadas). Se a solução do PL é inteiro, pare pois ela é ótima global. Caso contrário, armazenar o valor da função objetivo como limitante inferior v_{inf} dos subproblemas sucessores e ir ao passo 2.

2. Escolha da variável para separar o subproblema:

Escolher a primeira variável inteira n_{ij} com valor corrente não inteiro n_{ij}^* para realizar a separação. Gerar dois novos subproblemas a partir do subproblema corrente, adicionando a restrição $n_{ij} \leq [n_{ij}^*]$ para gerar um subproblema e a restrição $n_{ij} \geq [n_{ij}^*] + 1$ para gerar o outro subproblema, em que $[n_{ij}^*]$ é o maior inteiro contido em n_{ij}^* ;

3. Resolução do subproblema selecionado:

Resolver o último problema de PL gerado usando um algoritmo de PL e armazenar a solução ótima $v_{pl} = v_{inf}$ como limitante inferior para os prováveis problema de PL sucessores.

4. Testes de sondagem:

Após resolver o problema de PL (subproblema), deve-se verificar os testes de sondagem. O problema é sondado (eliminado para futuros desdobramentos) se satisfaz algum dos seguintes testes de sondagem:

- (a) Teste 1: se $v_{inf} \geq v^*$, em que v^* é o valor da incumbente.
- (b) Teste 2: se a solução do problema de PL é infactível.
- (c) Teste 3: Se o ótimo do problema de PL é inteiro, isto é, todas as variáveis inteiras assumem valores inteiros. Neste caso, se o ótimo do PL é menor que a incumbente então, deve-se atualizar a incumbente e aplicar o teste 1 para todos os subproblemas ainda não sondados.

5. Se o problema não foi sondado ir ao passo 2 para realizar a separação do subproblema corrente em dois subproblemas sucessores. Caso contrário, verificar se existem subproblemas não sondados. Se todos os subproblemas foram sondados,

pare, pois foi terminado o processo; em caso contrário, voltar ao passo 3 para resolver o último subproblema gerado.

O algoritmo básico, embora seja conceitualmente simples, apresenta complexidade na implementação computacional. Este algoritmo apresenta excelente desempenho para sistemas pequenos mas em sistemas reais apresenta várias limitações relacionadas com o esforço computacional e memória para armazenamento da informação. Assim, em aplicações reais, deve-se introduzir melhorias significativas no algoritmo básico.

Existem duas estratégias diferentes para melhorar o desempenho do algoritmo de “Branch and Bound”: (1) introduzindo melhorias de tipo geral próprias dos algoritmos de “Branch and Bound”, e (2) introduzindo informação específica do tipo de problema que está sendo resolvido.

É possível introduzir estratégias de tipo geral no algoritmo de “Branch and Bound” tais como: (1) No passo inicial introduzir um algoritmo heurístico para encontrar uma boa solução incumbente inicial; (2) Escolher outras estratégias de escolha da variável para realizar a separação dos subproblemas, como escolher uma variável que faz parte do ótimo não inteiro de P_0 , ou a variável que apresenta o maior valor fracionário ou ainda a variável que apresenta maior custo, e ainda estes critérios podem ser usados de maneira adaptativa; e, (3) Usando outra estratégia para escolher o próximo subproblema que deve ser analisado. Nesta linha de pesquisa é possível ainda incorporar outras estratégias mais sofisticadas.

5.5. Testes ilustrativos

Agora tem-se alguns resultados de testes realizados em um programa de acordo com o algoritmo proposto para o sistema de Garver de 6 barras e 15 linhas e para o sistema sul brasileiro de 46 barras e 79 linhas. As tabelas 5.2 e 5.3 informam testes realizados com a configuração básica dos sistemas. São apresentados testes relativos a número de iterações e precisão dos resultados. Em todos os testes, o desempenho do algoritmo proposto é comparado com o *software* comercial de PL chamado MINOS. Uma vez que se observam diferenças no resultado final até mesmo entre duas implementações diferentes de uma mesma técnica de PL, os resultados podem ser

considerados muito bons, já que a diferença entre os resultados se verifica somente na segunda casa decimal, quando considerado o corte percentual.

Tabela 5.1: Testes com o sistema sul brasileiro

Configuração	Algoritmo proposto			MINOS		Diferença em % com relação ao corte
	Investimento	No. de iterações	Tempo de execução (s)	Investimento	No. de iterações	
Dados no apêndice C	32993,56	8	0,06	32993,56	158	0

Testes com o sistema de Garver – 06 barras

Foram realizados testes com duas configurações do sistema de seis barras, a tabela 5.2 é referente a configuração básica sem redespacho e a tabela 5.3, referente a configuração básica com redespacho.

Tabela 5.2: Testes com a configuração básica sem redespacho do sistema de 6 barras

Configuração	Algoritmo proposto			MINOS		Diferença em % com relação ao corte
	Investimento	No. de iterações	Tempo de execução (s)	Investimento	No. de iterações	
Dados no apêndice C	171,5	3	0,002	171,5	21	0

Tabela 5.3: Testes com a configuração básica com redespacho do sistema de 6 barras

Configuração	Algoritmo proposto			MINOS		Diferença em % com relação ao corte
	investimento	No. de iterações	Tempo de execução (s)	Investimento	No. de iterações	
Dados no apêndice C	99,0	4	0,002	99,0	20	0

Nas tabelas 5.2 e 5.3, o número de iterações de PL do algoritmo proposto é bem menor que o número de iterações de PL do *software* MINOS, essa diferença é por causa da técnica de cada algoritmo. O MINOS utiliza a técnica primal simplex, que inicia o processo de solução em um ponto inactível, precisando fazer iterações de PL até obter uma solução factível e depois, mais iterações de PL até obter uma solução ótima e factível. O algoritmo proposto utiliza a técnica dual simplex canalizado com relaxação, além de trabalhar com um quadro simplex bem menor, devido ao

predespacho, sua solução inicial é ótima e factível, quando se adiciona uma restrição ao problema, o quadro dual simplex canalizado continua ótimo, mas já não é mais factível, devendo ser realizado algumas iterações de PL até que o quadro seja ótimo e factível novamente. Assim o número de iterações de PL do algoritmo proposto depende do número de restrições que foram adicionadas ao problema relaxado, como esse número de restrições é baixo, explica o porquê o algoritmo proposto ter um número tão baixo de iterações de PL.

Testes realizados com o algoritmo de Garver

Testes com o sistema de 46 barras

Foram realizados testes com o sistema de 46 barras e 79 circuitos candidatos a partir da configuração básica com redespacho. Os testes foram realizados com o algoritmo de Garver utilizando primeiramente o algoritmo proposto para resolver os problema de PL e em seguida utilizando o MINOS para que as comparações pudessem ser feitas.

Tabela 5.4: Testes com o sistema sul brasileiro

N ° iterações Garver	Circuito adicionado pelo algoritmo de Garver	Algoritmo Proposto		N ° de iterações de PL do MINOS	Investimento obtido pelo PL (algoritmo proposto ou MINOS)
		N ° de restrições adicionadas	N ° de iterações de PL		
1	***	8	8	158	32993.56
2	20 – 21	8	8	158	24815.56
3	06 – 46	5	5	157	19898.54
4	06 – 05	5	5	165	11720.54
5	42 – 43	4	4	165	6151.32
6	20 – 21	2	2	167	3490.43
7	20 – 23	1	1	166	632.43
8	05 – 06	0	0	169	0

Na primeira coluna da tabela 5.4 têm-se o número de problemas de PL que o algoritmo de Garver gerou, e cada um deles se diferencia um do outro pelo circuito adicionado pelo algoritmo de Garver informado na segunda coluna. A terceira e quarta coluna se referem a resolução desses problemas de PL através do algoritmo proposto, a terceira coluna informa o número de restrições relaxadas que foram adicionadas ao problema de PL relaxado e a quarta coluna informa o número total de

iterações de PL que o algoritmo proposto fez para encontrar a solução ótima do problema. A quinta coluna informa o número de iterações de PL que o MINOS fez para encontrar a solução ótima de cada problema de PL. a sexta e ultima coluna informa o resultado de investimento de cada PL. O algoritmo de Garver adicionou 7 circuitos, obtendo um investimento total de $v = 63163$.

5.5. Conclusões

O algoritmo proposto possui a mesma estrutura dos algoritmos propostos anteriormente. Ele resolve o mesmo modelo que o algoritmo proposto no capítulo 3, mas agora as variáveis n_{ij} não são fixadas e, portanto o número de variáveis do problema é maior, mas algumas conclusões são parecidas:

1. Como os dois primeiros, algoritmo apresenta duas características claramente diferenciadas: (1) Transformação do problema visando a redução de variáveis e das restrições de igualdade encontrando um problema equivalente que tem apenas uma restrição de igualdade (a equação de balanço de potência ativa) e um conjunto de restrições de desigualdade igual ao número de circuitos existentes no sistema, e (2) Uso de um algoritmo dual simplex canalizado usando relaxação para resolver o problema modificado;
2. Aqui, o grande atrativo do problema modificado também é que poucas restrições de desigualdade estão ativas na solução ótima do problema (somente aquelas restrições dos circuitos que estão operando no limite) e, portanto, a técnica de relaxação torna-se particularmente eficiente;
3. O algoritmo foi incorporado num algoritmo heurístico construtivo, usado no planejamento da expansão de sistemas de transmissão, o algoritmo de Garver. Os resultados obtidos usando um sistema real, o sistema sul brasileiro, mostra um desempenho eficiente do algoritmo em comparação com MINOS. O desempenho computacional do algoritmo é melhor que qualquer proposta de solução que resolva o problema de PL usando um algoritmo primal simplex com um número elevado de restrições;

4. Como no primeiro algoritmo, o maior esforço computacional está na inversão da submatriz de S , assim, o processo de reotimização torna o algoritmo proposto ainda mais atrativo, visto que a inversão é feita somente na montagem do problema de PL da configuração base.

6. Conclusões

Os algoritmos apresentados neste trabalho possuem características muito parecidas mas cada um deles existe características específicas e os mesmos são usados para modelos e/ou técnicas de otimização distintos de problema de sistemas de transmissão de energia elétrica. O primeiro algoritmo apresentado é para verificar a factibilidade do modelo de transportes quando existe disponível uma proposta de investimento, o segundo é para verificar a factibilidade do modelo DC quando também existe disponível uma proposta de investimento e, o terceiro e último, é para resolver o modelo de transporte relaxado em que as variáveis de investimento não são fixadas mas apenas relaxadas. Pode-se mencionar as seguintes conclusões:

1. Os algoritmos apresentam duas características claramente diferenciadas: (1) Transformação do problema visando a redução de variáveis e das restrições de igualdade encontrando um problema equivalente que tem apenas uma restrição de igualdade (a equação de balanço de potência ativa,) e um conjunto de restrições de desigualdade igual ao número de circuitos existentes no sistema; e, (2) Uso de um algoritmo dual simplex canalizado usando relaxação para resolver os problemas modificados;
2. O grande atrativo dos problemas modificados é que poucas restrições de desigualdade estão ativas na solução ótima dos problemas (somente aquelas restrições dos circuitos que estão operando no limite) e, portanto, a técnica de relaxação torna-se particularmente eficiente. Esta característica é particularmente verdadeira para o problema analisado neste trabalho, isto é, para o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão considerando apenas os fluxos de potência ativa;

3. Como o maior esforço computacional está na inversão das matrizes para a montagem dos modelos, o processo de reotimização torna os algoritmos propostos ainda mais atrativo, visto que para os modelos que trabalham com o modelo de transportes, a inversão é feita somente na montagem do problema na resolução do primeiro problema de PL.
4. A grande vantagem da metodologia proposta está na estratégia de usar o dual simplex com relaxação. Essa proposta faz com que as iterações simplex sejam muito rápidas porque o tamanho da base sempre é pequeno comparado com o tamanho da base necessário com qualquer técnica que use o método primal simplex. Essa estratégia garante velocidade em tempo de processamento e robustez ao método proposto;
5. Obviamente, o desempenho computacional dos algoritmos propostos é mais eficiente que qualquer proposta de solução que resolva o problema de PL usando um algoritmo primal simplex com um número elevado de restrições e com uma base também de tamanho elevado. Os programas computacionais elaborados, mesmo não tendo a sofisticação de programação de um *software* comercial, são mais rápidos que os *softwares* comerciais tais como o MINOS, que resolve problemas de programação não-lineares gerais.

7. Sugestões para trabalhos futuros

Para trabalhos futuros, fica a sugestão de melhorar os algoritmos aqui propostos e desenvolver outros algoritmos de programação linear e programação não-linear que podem ser usados no problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo. Os algoritmos a serem desenvolvidos devem ser mais rápidos que os *softwares* comerciais de programação linear e não-linear desenvolvidos para usos gerais. Nesse sentido, cada algoritmo a ser desenvolvido deve aproveitar as características específicas do problema de planejamento tornando-se eficiente. As estratégias a serem desenvolvidas basicamente consistem em implementar versões eficientes do algoritmo primal (dual) simplex canalizado e do algoritmo de pontos interiores para os diversos modelos do problema de planejamento de sistemas de transmissão, assim, é possível desenvolver vários algoritmos e esses algoritmos são diferentes em dois aspectos fundamentais: (1) Na técnica escolhida que pode ser do tipo primal (dual) simplex canalizado ou do tipo de pontos interiores e, (2) na forma e estrutura do problema que deve ser resolvido que depende da modelagem matemática escolhida e do algoritmo geral escolhido para gerenciar a resolução do problema de planejamento de sistemas de transmissão que é um problema de programação não-linear inteira mista (PNLIM) (algoritmo heurístico, de otimização clássica, combinatorial, etc.).

Referências

- 1 ROMERO, R.; GALLEGO, R. A.; MONTICELLI, A. Transmission system expansion planning by simulated annealing. **IEEE Transactions on Power Systems**, v.11, n.1, p.364-369, Febr. 1996.
- 2 MURTAGH, B. A.; SAUNDERS, M. A. MINOS 5.4 user's guide. **Technical Reporte SOL 83-20R (Systems Optimization Laboratory – Department of Operations Research)**, Stanford University, febr, 1995.
- 3 STOTT, B.; HOBSON, E. Power system security control calculation using linear programming, part I, **IEEE Transactions on power Apparatus and Systems**, v.PAS-97, n.5, Sept-Oct, 1978.
- 4 STOTT, B.; HOBSON, E. Power system security control calculation using linear programming, part II, **IEEE Transactions on power Apparatus and Systems**, v.PAS-98, n.º 6, Nov-Dec, 1978.
- 5 STOTT, B.; MARINHO, J. L. Linear programming for power system network security applications, **IEEE Trans. Power App. Syst.**, v.PAS-98, n.3, May-June, 1979.
- 6 WAGNER, H. M. The dual simplex algorithm for bounded variables, **Naval Research Logistics Quarterly**, v.5, p.257-261, 1958.
- 7 GANDINI, A. C. **Método de programação linear dual para o cálculo do corte de cargas em planejamento de expansão de sistemas de transmissão de energia elétrica**, Dissertação (Mestrado em engenharia elétrica), Faculdade de engenharia elétrica e de computação, Universidade de Campinas, Campinas, Abril, 1998.

- 8 GARVER, L. L. Transmission network estimation using linear programming, **IEEE Trans. Power App. Syst.**, v.PAS-89, p.1688-1697, Sept-Oct, 1970.
- 9 HAFFNER, S.; MONTICELLI, A.; GARCIA, A.; ROMERO, R. Specialized branch and bound algorithm for transmission network expansion planning, **IEE Proceedings – Generation, Transmission and Distribution**, v.148, n.5, p.482-488, 2001.
- 10 VILLASANA, R.; GARVER, L. L.; SALON, S. J. Transmission network planning using linear programming, **IEEE Trans. Power App. Syst.**, v.PAS-104, n.2, Feb, 1985.
- 11 RUDNIK, H.; PALMA, R.; CURA, E.; SILVA, C. Economically adapted transmission systems in open access schemes – application of genetic algorithms, **IEEE PES Summer Meeting**, July, 1995
- 12 MONTICELLI, A. **Fluxos de Carga em Redes de Energia Elétrica**, São Paulo: Edgard Blucher, 1983.
- 13 BINATO, S. **Expansão ótima de sistemas de transmissão através de decomposição de Benders e técnicas de planos cortantes**, Tese (Doutorado em engenharia elétrica), Universidade Federal de Rio de Janeiro, Abril, 2000.
- 14 MONTICELLI, A.; SANTOS JR., A.; PEREIRA, M. V. F.; CUNHA, S. H.; PARKER, B. J.; PRAÇA, J. C. G. Interactive transmission network planning using a least-effort criterion, **IEEE Trans. Power App. Systems**, v.PAS-101, n10, Oct, 1982.
- 15 PEREIRA, M. V. F.; G. PINTO, L. M. V. Application of sensitivity analysis of load supplying capability to interactive transmission expansion planning, **IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems**, vol.PAS-104, n.2, p.381-389, Feb, 1985.
- 16 LEVI, V. A.; CALOVIC, M. S. A new decomposition based method for optimal expansion planning of large transmission networks, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.6, n.3, p.937-943, 1991.
- 17 GARFINKEL, R. S.; NEMHAUSER, G. L. **Integer programming**, Canada, John Wiley & Sons, 1972.
- 18 GALLEGO, R. A.; MONTICELLI, A.; ROMERO, R. Transmission system expansion planning by extended genetic algorithm, **IEE Proceeding, Transmission Distribution**, vol.145, n.3, p.329-335, May, 1998.

- 19 GALLEGO, R. A.; ROMERO, R.; MONTICELLI, A. Tabu search algorithm for network synthesis, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.15, n.2, p.490-495, May, 2000.
- 20 BINATO, S.; OLIVEIRA, G. C.; ARAUJO, J. L. A greedy randomized adaptive search procedure for transmission expansion planning, **IEEE Transactions on Power Systems**, vol.16, n.2, p.247-253, May, 2001.
- 21 GLOVER, F.; KOCHENBERGER, G. A. **Handbook of metaheuristics**, USA, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- 22 DECHAMPS, C.; JAMOULLE, A. Interactive computer program for planning the expansion of meshed transmission networks, **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, v.2, n.2, p.103-108, 1980.
- 23 LATORRE-BAYONA, G.; PERES-ARRIAGA, J. I. CHOPIN, a heuristic model for long term transmission expansion planning, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.9, n.4, Nov, 1994.
- 24 BALDWIN, C. J.; DE SALVO, C. A.; HOFFMAN, C. H.; KU, W. S. A model for transmission planning by logic, **IEE Transactions PAS**, v.79, p.1638-1645, Feb, 1960.
- 25 LEVI, V. A.; POPOVIC, D. S. Integratec methodology for transmission and reactive power planning, **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 11, n.1, p.370-375, Feb, 1996.
- 26 ROMERO, R.; ROCHA, C.; MANTOVANI, M.; MANTOVANI, J. R. S. Analisis of heuristic algorithms for the transportation model in static and multistage planning in network expansion systems, **IEE Proceedings – Generation, Transmission and Distribution**, v.150, n.5, p.521-526, 2003.
- 27 GLOVER, F.; LAGUNA, M. **Tabu search**, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- 28 ROMERO, R.; MONTICELLI, A. A hierarchical decomposition approach for transmission network expansion planning, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.9, n.1, p.373-380, Feb, 1994.
- 29 GRANVILLE, S.; PEREIRA, M. V. F. Analysis of de linearized power flow model in Benders decomposition, **EPRI-Report RP 2473-6**, Stanford University, Feb, 1985.

- 30 PEREIRA, M.V.F.; PINTO, L.M.V.G.; OLIVEIRA, G.C.; CUNHA, S.H.F. A decomposition approach to automated generation-transmission expansion planning, **IEEE Transactions on PAS**, v.PAS-104, n.11, Nov, 1985.
- 31 PEREIRA, M.V.F.; PINTO, L.M.V.G.; OLIVEIRA, G.C.; CUNHA, S.H.F. Composite generation transmission expansion planning”, **EPRI Research Project** 2473-9, EI-5179, 1987.
- 32 HAFFNER, S.; MONTICELLI, A.; GARCIA, A.; MANTOVANI, J.; ROMERO, R. Branch and bound algorithm for transmission system expansion planning using a transportation model, **IEE Proceedings – Generation, Transmission and Distribution**, v.147, n.3, p.149-156, May, 2000.
- 33 GALLEG0, R.A.; MONTICELLI, A.; ROMERO, R. Comparative studies of non-convex optimization methods for transmission network expansion planning, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.13, n.3, p.822-828, 1998.
- 34 GALLEG0, R.A.; ALVES, A.B.; MONTICELLI, A.; ROMERO, R. Parallel simulated annealing applied to long term transmission network expansion planning, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.12, n.1, p.181-188, Feb, 1997.
- 35 DA SILVA, E.L.; GIL, H.A.; AREIZA, J.M. Transmission network expansion planning under an improved genetic algorithm, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.15, n.4, p.1168-1175, 2000.
- 36 DA SILVA, E.L.; AREIZA, J.M.; DE OLIVEIRA, G.C.; BINATO, S. Transmission network expansion planning under a tabu search approach, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.16, n.1, p.62-68, 2001.
- 37 ESCOBAR, A.; GALLEG0, R.A.; ROMERO, R. Multistage and coordinated planning of the expansion of transmission systems, **IEEE Transactions on Power Systems**, v.19, n.2, p.735-744, may, 2004.
- 38 GOLDBARG, M.; LUNA, H.P. **Otimização combinatória e programação linear**, Editora Campos, 2000.
- 39 KARMARKAR, N. A new polynomial time algorithm for linear programming, **Combinatorica**, v.4, p.373-395, 1984.

- 40 CONTE ,SAMUEL D.; BOOR, CARL DE. **Elementary numerical analysis - an algorithmic approach**, Third Edition, 1981.
- 41 GONZAGA, C.C. Path-following methods for linear programming, **Siam Review**, v.34, pp.167-224, 1992.
- 42 ADLER, I.; KARMAKAR, N.K.; RESENDE, M.G.C.; VEIGA, G. An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming, **Mathematical Programming**, v.44, p.297-335, 1989.
- 43 BAZARAA, M.S.; JARVIS, J.J.; SHERALI, H.D. **Linear Programing, Linear Programming and Network Flows**, John Wiley and Sons, 1983.
- 44 MURTY, K.G. **Linear Programming**, John Wiley and Sons, 1983.
- 45 HILLIER, F.; LIEBERMAN, G.J. **Introduction to Operations Research**, McGraw-Hill Publishing Company, 1990.

Apêndice A

Algoritmo dual simplex canalizado

Um problema de programação linear pode ser apresentado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_0 = cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

em que:

$$A = [B \quad N] \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad c = [c_B \quad c_N]$$

Assim, pode-se montar um quadro dual simplex:

	<i>RHS</i>	variáveis não básicas x_N
x_0	$c_B B^{-1}b$	$c_B B^{-1}N - c_N$
x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$

Que pode ser rescrito da seguinte forma:

	<i>RHS</i>	...	$-x_j$...	$-x_k$
x_0	y_{00}		y_{0j}		y_{0k}
\vdots					
x_{Bi}	y_{i0}		y_{ij}		y_{ik}
\vdots					
x_{Br}	y_{r0}		y_{rj}		y_{rk}
\vdots					
x_{Bm}	y_{m0}		y_{mj}		y_{mk}

A pivotagem deve ser realizada da seguinte maneira:

1. dividir a linha r pelo elemento pivô y_{rk} ;
2. multiplicar a nova linha r por y_{ik} e subtraí-la da linha i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$, $i \neq k$;
3. substituir a coluna k pela seguinte relação:

$$-\frac{y_{ik}}{y_{rk}} \text{ para } i \neq r \text{ e } \frac{1}{y_{rk}} \text{ para } i = r.$$

É melhor montar a coluna k (passo 3) e depois montar o resto do quadro na forma tradicional de pivotagem.

Quadro simplex após pivotagem

	<i>RHS</i>	...	$-x_j$...	x_{Br}
x_0	$y_{00} - y_{0k} \frac{y_{r0}}{y_{rk}}$		$y_{0j} - y_{0k} \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$		$-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}$
\vdots					
x_{Bi}	$y_{i0} - y_{ik} \frac{y_{r0}}{y_{rk}}$		$y_{ij} - y_{ik} \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$		$-\frac{y_{ik}}{y_{rk}}$
\vdots					
x_k	$\frac{y_{r0}}{y_{rk}}$		$\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$		$\frac{1}{y_{rk}}$
\vdots					
x_{Bm}	$y_{m0} - y_{mk} \frac{y_{r0}}{y_{rk}}$		$y_{mj} - y_{mk} \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$		$-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$

O algoritmo dual simplex canalizado é o mais adequado para reotimizar subproblemas de programação linear (PL), pois ele considera as restrições canalizadas de maneira implícita.

Seja o problema:

$$(P) \Rightarrow \begin{cases} \text{Min } x_0 = cx \\ \text{s.a.} \\ Ax = b \\ l \leq x \leq u \end{cases}$$

Para uma base B , os sistemas de equações $Ax = b$ e $x_0 = cx$ assumem a seguinte forma:

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_2} y_{ij} x_j - \sum_{j \in R_1} y_{ij} x_j$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$

R_1 = conjunto de índices das variáveis não básicas que estão no limite inferior;

R_2 = conjunto de índices das variáveis não básicas que estão no limite superior.

O algoritmo dual simplex canalizado resume-se nos seguintes passos:

1. Montar um quadro dual simplex inicial (satisfaz otimalidade).
2. Seja z_{i0} o valor das variáveis básicas. Verificar a otimalidade do problema:
Se o quadro é factível, pare. $l_i \leq z_{i0} \leq u_i$, para $i = 1, 2, \dots, m$. Caso contrário vá ao passo 3.
3. Escolher a variável que deve sair da base: x_{Br} .
Escolher um x_{Br} que tem o limite mais violado.
4. Escolher a variável não básica x_k que deve entrar na base:

\Rightarrow Se x_{Br} foi escolhido tal que $z_{r0} > u_r$, então:

$$x_k \Rightarrow \left(\begin{array}{c} -y_{0k} \\ y_{rk} \end{array} \right) = \min \left\{ \left(\begin{array}{c} -y_{0j} \\ y_{rj} \end{array} \right) : \begin{array}{l} y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = u_j \\ \text{ou} \\ y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = l_j \end{array} \right\}$$

\Rightarrow Se x_{Br} foi escolhido tal que $z_{r0} < l_r$, então:

$$x_k \Rightarrow \left(\begin{array}{c} y_{0k} \\ y_{rk} \end{array} \right) = \min \left\{ \left(\begin{array}{c} y_{0j} \\ y_{rj} \end{array} \right) : \begin{array}{l} y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = u_j \\ \text{ou} \\ y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = l_j \end{array} \right\}$$

\Rightarrow Se não foi possível escolher x_k então o problema é infactível.

5. Pivotagem do quadro:

Pivotar o quadro na forma padrão, mas atualizar a coluna RHS da seguinte maneira:

\Rightarrow Se $z_{r0} > u_r$ e x_k é tal que $k \in R_2 \rightarrow y_{rk} < 0$

$$\Delta_k = -\frac{(z_{r0} - u_r)}{y_{rk}} > 0$$

$$x_k = u_k - \Delta_k$$

$$x_{Bi} = z_{i0} + y_{ik}\Delta_k, i \neq r$$

\Rightarrow Se $z_{r0} > u_r$ e x_k é tal que $k \in R_1 \rightarrow y_{rk} > 0$

$$\Delta_k = \frac{(z_{r0} - u_r)}{y_{rk}} > 0$$

$$x_k = l_k + \Delta_k$$

$$x_{Bi} = z_{i0} - y_{ik}\Delta_k$$

\Rightarrow Se $z_{r0} < l_r$ e x_k é tal que $k \in R_2 \rightarrow y_{rk} > 0$

$$\Delta_k = \frac{(l_r - z_{r0})}{y_{rk}} > 0$$

$$x_k = u_k - \Delta_k$$

$$x_{Bi} = z_{i0} + y_{ik}\Delta_k$$

\Rightarrow Se $z_{r0} < l_r$ e x_k é tal que $k \in R_1 \rightarrow y_{rk} < 0$

$$\Delta_k = -\frac{(l_r - z_{r0})}{y_{rk}} > 0$$

$$x_k = l_k + \Delta_k$$

$$x_{Bi} = z_{i0} - y_{ik}\Delta_k$$

6. Voltar ao passo 2.

Apêndice B

Uso da estratégia de relaxação

O grande atrativo dos problemas de planejamento de sistemas de transmissão é que poucas restrições de desigualdade estão ativas na solução ótima do problema (somente aquelas restrições dos circuitos que estão operando no limite) e, portanto, a técnica de relaxação torna-se particularmente eficiente.

A estratégia de relaxação consiste em tirar do problema completo as restrições de desigualdade e resolver o problema relaxado através do algoritmo dual simplex canalizado. Após encontrar a solução ótima do problema relaxado, deve-se verificar se as restrições que foram retiradas do problema original não estão violadas, isto é, verificar se a solução do problema relaxado satisfaz as restrições relaxadas. Se todas as restrições relaxadas estão satisfeitas, então a solução do problema relaxado é também solução do problema original, mas se existem restrições relaxadas que estão violadas, deve-se escolher a mais violada e adicioná-la ao problema relaxado, que, por sua vez, já possui um quadro dual simplex ótimo, então basta adicionar a restrição violada no quadro. Mas antes ela deve ser atualizada para a base corrente da seguinte forma:

Seja a restrição violada

$$\sum_{j=1}^n a_{(m+1),j} x_j \leq b_{(m+1)}$$

Primeiramente, deve-se transformar a restrição de desigualdade em uma restrição de igualdade usando uma variável de folga:

$$\sum_{j=1}^n a_{(m+1),j} x_j + x_{(n+1)} = b_{(m+1)}$$

ou equivalentemente

$$a^{(m+1)}x + x_{(n+1)} = b_{(m+1)}$$

o vetor $a^{(m+1)}$ pode ser separado em duas parcelas

$$a^{(m+1)} = [a_B^{(m+1)} \quad a_N^{(m+1)}]$$

em que $a_B^{(m+1)}$ e $a_N^{(m+1)}$ são os elementos de $a^{(m+1)}$ correspondentes, respectivamente, às variáveis básicas e não básicas. Assim a restrição a ser adicionada ao quadro dual simplex adequadamente atualizada assume a seguinte forma:

$$x_{(n+1)} + [a_N^{(m+1)} - a_B^{(m+1)} B^{-1} N] x_N = b_{(m+1)} - a_B^{(m+1)} B^{-1} b - a_N^{(m+1)} x_N$$

em que $B^{-1}N$ e $B^{-1}b$ estão disponíveis no último quadro ótimo.

Assim a restrição está pronta para ser adicionada ao quadro simplex. O novo quadro é dual factível e usa-se o algoritmo dual simplex canalizado para reotimizá-lo.

Após a reotimização deve-se verificar novamente se existe dentre as restrições relaxadas, alguma violada para ser adicionada ao problema. Esse processo continua até não haver mais restrições violadas.

Para que a estratégia de relaxação seja eficiente, poucas restrições relaxadas devem ser adicionadas ao quadro durante o processo.

Apêndice C

Sistemas elétricos usados

Dados do sistema sul brasileiro – 46 barras com redespacho

O sistema possui 46 barras e 79 caminhos, a barra de referência é a 42

barra	geração (MW)	demanda(MW)
1	0.000000	0.000000
2	0.000000	443.100000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	300.700000
5	0.000000	238.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	0.000000	72.200000
9	0.000000	0.000000
10	0.000000	0.000000
11	0.000000	0.000000
12	0.000000	511.900000
13	0.000000	185.800000
14	1257.000000	0.000000
15	0.000000	0.000000
16	2000.000000	0.000000
17	1050.000000	0.000000
18	0.000000	0.000000
19	1670.000000	0.000000
20	0.000000	1091.200000
21	0.000000	0.000000
22	0.000000	81.900000
23	0.000000	458.100000
24	0.000000	478.200000
25	0.000000	0.000000
26	0.000000	231.900000
27	220.000000	0.000000
28	800.000000	0.000000
29	0.000000	0.000000
30	0.000000	0.000000

barra	geração (MW)	demanda (MW)
31	700.000000	0.000000
32	500.000000	0.000000
33	0.000000	229.100000
34	748.000000	0.000000
35	0.000000	216.000000
36	0.000000	90.100000
37	300.000000	0.000000
38	0.000000	216.000000
39	600.000000	0.000000
40	0.000000	262.100000
41	0.000000	0.000000
42	0.000000	1607.900000
43	0.000000	0.000000
44	0.000000	79.100000
45	0.000000	86.700000
46	700.000000	0.000000

no.	caminho	no. de linhas	reat. (pu)	fluxo máx.	linhas adic.	custo (MW)
1	1-7	1	0.0616	270.0	0	4349.0
2	1-2	2	0.1065	270.0	0	7076.0
3	4-9	1	0.0924	270.0	0	6217.0
4	5-9	1	0.1173	270.0	0	7732.0
5	5-8	1	0.1132	270.0	0	7480.0
6	7-8	1	0.1023	270.0	0	6823.0
7	4-5	2	0.0566	270.0	0	4046.0
8	2-5	2	0.0324	270.0	0	2581.0
9	8-13	1	0.1348	240.0	0	8793.0
10	9-4	2	0.1756	220.0	0	11267.0
11	12-14	2	0.0740	270.0	0	5106.0
12	14-18	2	0.1514	240.0	0	9803.0
13	13-18	1	0.1805	220.0	0	11570.0
14	13-20	1	0.1073	270.0	0	7126.0
15	18-20	1	0.1997	200.0	0	12732.0
16	19-21	1	0.0278	1500.0	0	32632.0
17	16-17	1	0.0078	2000.0	0	10505.0
18	17-19	1	0.0061	2000.0	0	8715.0
19	14-26	1	0.1614	220.0	0	10409.0
20	14-22	1	0.0840	270.0	0	5712.0
21	22-26	1	0.0790	270.0	0	5409.0
22	20-23	2	0.0932	270.0	0	6268.0
23	23-24	2	0.0774	270.0	0	5308.0
24	26-27	2	0.0832	270.0	0	5662.0
25	24-34	1	0.1647	220.0	0	10611.0
26	24-33	1	0.1448	240.0	0	9399.0
27	33-34	1	0.1265	270.0	0	8288.0
28	27-36	1	0.0915	270.0	0	6167.0
29	27-38	2	0.2080	200.0	0	13237.0
30	36-37	1	0.1057	270.0	0	7025.0
31	34-35	2	0.0491	270.0	0	3591.0

no.	caminho	no. de linhas	reat. (pu)	fluxo máx.	linhas adic.	custo (MW)
32	35-38	1	0.1980	200.0	0	12631.0
33	37-39	1	0.0283	270.0	0	2329.0
34	37-40	1	0.1281	270.0	0	8389.0
35	37-42	1	0.2105	200.0	0	13388.0
36	39-42	3	0.2030	200.0	0	12934.0
37	40-42	1	0.0932	270.0	0	6268.0
38	38-42	3	0.0907	270.0	0	6116.0
39	32-43	1	0.0309	1400.0	0	35957.0
40	42-44	1	0.1206	270.0	0	7934.0
41	44-45	1	0.1864	200.0	0	11924.0
42	19-32	1	0.0195	1800.0	0	23423.0
43	46-19	1	0.0222	1800.0	0	26365.0
44	46-16	1	0.0203	1800.0	0	24319.0
45	18-19	1	0.0125	600.0	0	8178.0
46	20-21	1	0.0125	600.0	0	8178.0
47	42-43	1	0.0125	600.0	0	8178.0
48	2-4	0	0.0882	270.0	0	5965.0
49	14-15	0	0.0374	270.0	0	2884.0
50	46-10	0	0.0081	2000.0	0	10889.0
51	4-11	0	0.2246	240.0	0	14247.0
52	5-11	0	0.0915	270.0	0	6167.0
53	46-6	0	0.0128	2000.0	0	16005.0
54	46-3	0	0.0203	1800.0	0	24319.0
55	16-28	0	0.0222	1800.0	0	26365.0
56	16-32	0	0.0311	1400.0	0	36213.0
57	17-32	0	0.0232	1700.0	0	27516.0
58	19-25	0	0.0325	1400.0	0	37748.0
59	21-25	0	0.0174	2000.0	0	21121.0
60	25-32	0	0.0319	1400.0	0	37109.0
61	31-32	0	0.0046	2000.0	0	7052.0
62	28-31	0	0.0053	2000.0	0	7819.0
63	28-30	0	0.0058	2000.0	0	8331.0
64	27-29	0	0.0998	270.0	0	6672.0
65	26-29	0	0.0541	270.0	0	3894.0
66	28-41	0	0.0339	1300.0	0	39283.0
67	28-43	0	0.0406	1200.0	0	46701.0
68	31-41	0	0.0278	1500.0	0	32632.0
69	32-41	0	0.0309	1400.0	0	35957.0
70	41-43	0	0.0139	2000.0	0	17284.0
71	40-45	0	0.2205	180.0	0	13994.0
72	15-16	0	0.0125	600.0	0	8178.0
73	46-11	0	0.0125	600.0	0	8178.0
74	24-25	0	0.0125	600.0	0	8178.0
75	29-30	0	0.0125	600.0	0	8178.0
76	40-41	0	0.0125	600.0	0	8178.0
77	2-3	0	0.0125	600.0	0	8178.0
78	5-6	0	0.0125	600.0	0	8178.0
79	9-10	0	0.0125	600.0	0	8178.0

Dados do sistema de Garver – 6 barras com redespacho

O sistema possui 6 barras e 15 caminhos, a barra de referência é a 5

barra	geração(MW)	demanda (MW)
1	150.0	80.0
2	0.0	240.0
3	360.0	40.0
4	0.0	160.0
5	0.0	240.0
6	600.0	0.0

no.	caminho	no. de linhas	reat. (pu)	fluxo máx.	linhas adic.	custo (MW)
1	1-2	1	0.40	100.0	0	40.0
2	1-3	0	0.38	100.0	0	38.0
3	1-4	1	0.60	80.0	0	60.0
4	1-5	1	0.20	100.0	0	20.0
5	1-6	0	0.68	70.0	0	68.0
6	2-3	1	0.20	100.0	0	20.0
7	2-4	1	0.40	100.0	0	40.0
8	2-5	0	0.31	100.0	0	31.0
9	2-6	0	0.30	100.0	0	30.0
10	3-4	0	0.59	82.0	0	59.0
11	3-5	1	0.20	100.0	0	20.0
12	3-6	0	0.48	100.0	0	48.0
13	4-5	0	0.63	75.0	0	63.0
14	4-6	0	0.30	100.0	0	30.0
15	5-6	0	0.61	78.0	0	61.0

Dados do sistema de Garver – 6 barras sem redespacho

O sistema possui 6 barras e 15 caminhos, a barra de referência é a 5

barra	geração (MW)	demanda (MW)
1	50.0	80.0
2	0.0	240.0
3	165.0	40.0
4	0.0	160.0
5	0.0	240.0
6	545.0	0.0

Os dados dos caminhos são os mesmos do sistema de Garver – 6 barras com redespacho

Apêndice D

Teorema: Seja B uma matriz quadrada de ordem n , singular e satisfazendo a seguinte condição:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Suponha que se retire de B a k -ésima linha e a k -ésima coluna. A matriz B' resultante, de ordem $(n-1)$ é não singular. Seja b o vetor cujas coordenadas sejam exatamente os elementos da k -ésima linha de B , com exceção do elemento de ordem k . Assim, b possui $(n-1)$ elementos. Sob estas condições, a seguinte propriedade é verdadeira:

$$b \cdot (B')^{-1} = [-1 \quad -1 \quad \dots \quad -1] \quad (2)$$

em que $(n, i, j, k \in \mathbb{N})$

Demonstração:

Quer-se mostrar que (2) é verdadeira, então, multiplicando ambos os lados de (2) por B' , tem-se:

$$b = [-1 \quad -1 \quad \dots \quad -1]B' \quad (3)$$

Tomando a transposta em ambos os lados de (3), obtém-se:

$$\begin{aligned} b' &= (B')' [-1 \quad -1 \quad \dots \quad -1]' \\ b' &= B' [-1 \quad -1 \quad \dots \quad -1]' \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo em (4) as expressões de B' e b' , tem-se:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1(k-1)} & b_{1(k+1)} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1(k-1)} & \cdots & b_{(k-1)(k-1)} & b_{(k-1)(k+1)} & \cdots & b_{(k-1)n} \\ b_{1(k+1)} & \cdots & b_{(k-1)(k+1)} & b_{(k+1)(k+1)} & \cdots & b_{(k+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{(k-1)n} & b_{(k+1)n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{(k-1)k} \\ b_{(k+1)k} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} -(b_{11} + \cdots + b_{1(k-1)} + b_{1(k+1)} + \cdots + b_{1n}) \\ \vdots \\ -(b_{1(k-1)} + \cdots + b_{(k-1)(k-1)} + b_{(k-1)(k+1)} + \cdots + b_{(k-1)n}) \\ -(b_{1(k+1)} + \cdots + b_{(k-1)(k+1)} + b_{(k+1)(k+1)} + \cdots + b_{(k+1)n}) \\ \vdots \\ -(b_{1n} + \cdots + b_{(k-1)n} + b_{(k+1)n} + \cdots + b_{nn}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{(k-1)k} \\ b_{(k+1)k} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Mas, $\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Assim, obtém-se uma identidade, logo:

$$b \cdot (B')^{-1} = [-1 \quad -1 \quad \cdots \quad -1]$$

Apêndice E

Efficient linear programming algorithm for the transmission network expansion planning problem

Efficient linear programming algorithm for the transmission network expansion planning problem

S.H.M. Hashimoto, R. Romero and J.R.S. Mantovani

Abstract: The transmission network planning problem is a non-linear integer mixed programming problem (NLIMP). Most of the algorithms used to solve this problem use a linear programming subroutine (LP) to solve LP problems resulting from planning algorithms. Sometimes the resolution of these LPs represents a major computational effort. The particularity of these LPs in the optimal solution is that only some inequality constraints are binding. This task transforms the LP into an equivalent problem with only one equality constraint (the power flow equation) and many inequality constraints, and uses a dual simplex algorithm and a relaxation strategy to solve the LPs. The optimisation process is started with only one equality constraint and, in each step, the most unfeasible constraint is added. The logic used is similar to a proposal for electric systems operation planning. The results show a higher performance of the algorithm when compared to primal simplex methods.

1 Introduction

The problem of long-term transmission systems planning is a problem of non-linear integer mixed programming (NLIMP) that still presents the combinatorial explosion phenomenon. Many algorithms have been proposed to solve this complex problem but it is still very hard to find optimal configurations for large-scale systems.

The planning problem has to determine where, when and which kind of equipment must be set up in the power systems during a period of time, satisfying the demand increasing and allowing proper conditions for operating the electric system with minimum cost. The features of the planning problem are accurately analysed in [1].

There are three types of algorithm to solve the planning problem: constructive heuristic algorithms, conventional optimisation algorithms and combinatorial algorithms. Most of these algorithms solve linear programming problems as a part of the resolution strategy. Particularly, the combinatorial algorithms, such as simulated annealing [2], genetic algorithms and tabu search [3], use LP algorithms thousands and thousands of times as part of the resolution process. That is, over 90% of the computational effort of a combinatorial algorithm applied to the problem of transmission systems planning is used to solve LP problems. Heuristic and conventional optimisation algorithms for the planning problem, as presented in [4–8], also solve LP problems the same way as in this work. Therefore, the utilisation of a robust and efficient LP algorithm is vital in these types of algorithms. The LP algorithm used must consider all the specific characteristics of the problem.

This paper presents an LP algorithm applied to the transmission systems planning problem. The proposed methodology follows the LP algorithm applied logic for the power systems operation presented in [9]. The methodology has two steps: (a) reduction of variable numbers and the equality constraints of the problem, and (b) solution of the resulting problem using a dual simplex algorithm for bounded variables and a relaxation strategy. The resulting problem presents only one equality constraint and a number of inequality constraints equal to the number of electric system circuits. A very important feature of this problem is that only a very reduced number of these inequality constraints are binding in the optimal solution of this problem because the transmission systems networks were planned to work under the capacity limits of transmission lines. Therefore, the particular behaviour of electric systems allows formulation of the most appropriate strategy, which consists of using relaxation when starting the problem-solving with only an equality constraint and the common limit constraints of generation variables, and incorporating, step by step, the most unfeasible inequality constraint.

There are other efficient LP algorithms already presented in the specialised literature. For instance, in [10] the use of LP for the economic dispatch problem, whose optimum generation level is aimed at taking into account power losses and contingency constraints, is proposed. In that approach, the θ variables are preserved and mathematical relations that model the contingency constraints in a more adequate way are presented. Reference [11] uses a sparse dual revised simplex method for the economic dispatch of active power in power systems.

2 Planning problem

Using the DC model, the static transmission expansion planning problem can be written in the following form (NLIMP):

$$\min v = \sum_{ij} c_{ij} n_{ij} + \alpha \sum_{s \in \Omega_k} r_s \quad (1)$$

© IEE, 2003

IEE Proceedings online no. 20030656

doi:10.1049/ip-gtd:20030656

Paper first received 15th April 2002 and in revised form 24th March 2003.

Online publishing date: 22 July 2003

The authors are with the Electrical Engineering Department, São Paulo State University, CP 031, 15385-000 Ilha Solteira, SP, Brazil

subject to

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{n} + \mathbf{n}^0)\theta + \mathbf{g} + \mathbf{r} &= \mathbf{d} \\
(n_{ij} + n_{ij}^0)|\theta_i - \theta_j| &\leq (n_{ij} + n_{ij}^0)\bar{\phi}_{ij} \\
0 \leq \mathbf{g} &\leq \bar{\mathbf{g}} \\
0 \leq \mathbf{r} &\leq \mathbf{d} \\
0 \leq n_{ij} &\leq \bar{n}_{ij} \\
\theta_i &\text{ unbounded} \\
\forall(i, j) &\in \Omega
\end{aligned}$$

where c_{ij} is the cost of the addition of a circuit in the branch $i-j$, $B(\cdot)$ is the susceptance matrix, θ is the bus angle vector, \mathbf{n}^0 is the existing circuits vector in the basic topology with elements n_{ij}^0 , \mathbf{n} is the added circuits vector to obtain the current topology with elements n_{ij} in the branch $i-j$, $\bar{\phi}_{ij} = \bar{f}_{ij}/\gamma_{ij}$ where \bar{f}_{ij} is the maximum flow of a circuit in the branch $i-j$ and γ_{ij} is the susceptance of a circuit, \mathbf{d} is the demand vector, \mathbf{g} is the generation vector, $\bar{\mathbf{g}}$ is the vector generation capacity, \mathbf{r} is the vector of artificial generation and α is a penalty parameter associated to the loss of load. Ω is the set of paths (i, j) where transmission lines can be added and Ω_s is the set of bus levels of the electric system.

Problem (1) is a complex NLIMP and it still presents the combinatorial explosion phenomenon. However, for a known configuration or proposal of investment \mathbf{n}^k , problem (1) becomes the following LP problem:

$$\min w = \alpha \sum_s r_s \quad (2)$$

subject to

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{n}^k + \mathbf{n}^0)\theta + \mathbf{g} + \mathbf{r} &= \mathbf{d} \\
(n_{ij}^k + n_{ij}^0)|\theta_i - \theta_j| &\leq (n_{ij}^k + n_{ij}^0)\bar{\phi}_{ij} \\
0 \leq \mathbf{g} &\leq \bar{\mathbf{g}} \\
0 \leq \mathbf{r} &\leq \mathbf{d} \\
\theta_i &\text{ unbounded}
\end{aligned}$$

where w is the loss of load due to the addition of the artificial generators \mathbf{r} .

All the constructive heuristic algorithms and all the combinatorial algorithms perform the strategy of choosing or finding a configuration or proposal of investment and then solving the LP shown in (2). Then, in each step of these algorithms, there must be a solution to one or several problems of linear programming of the type (2). In this case, problem (2) must check the viability of the proposed configuration, that is, the proposed configuration is feasible to (1) if it does not show loss of load. It must also be observed that the mathematical formulation presented in (2) is always feasible owing to the variables that represent the artificial generators and losses of a load r_s . Therefore, a configuration is feasible in terms of planning if solution (2) presents no loads and unfeasible if it presents loss of load. This way, a more efficient proposal to solve problem (2) is achieved.

3 Transformation of the LP problem

This Section describes the transformation of the LP problem shown in (2) in an equivalent LP. Once the initial configuration defined by the vector \mathbf{n}_{ij}^0 is known, and a proposal of investment is defined, in iteration k , by vector \mathbf{n}_{ij}^k , then problem (2) becomes the following:

$$\min w = \sum_s r_s \quad (3)$$

subject to

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{n}^k + \mathbf{n}^0)\theta + \mathbf{g} + \mathbf{r} &= \mathbf{d} \\
|\theta_i - \theta_j| &\leq \bar{\phi}_{ij} \\
0 \leq \mathbf{g} &\leq \bar{\mathbf{g}} \\
0 \leq \mathbf{r} &\leq \mathbf{d} \\
\theta_i &\text{ unbounded} \\
\forall(i, j) &\in \Omega_c
\end{aligned}$$

where Ω_c is the set of existing circuits on the present configuration (existing circuits on the basic configuration and added circuits), n_b the number of buses of the system, n_l the number of types of circuit (path) of the present configuration, n_g the number of generation buses and n_r the number of load buses. Therefore, the number of (unknown) variables of problem (3) is equal to $n_v = n_b + n_g + n_r$. On the other hand, the number of constraints of the problem is equal to $n_{res} = n_b + 2n_l + n_g + n_r$ because each constraint with absolute value $|\theta_i - \theta_j|$ should be changed by two constraints. Therefore, a standard primal simplex algorithm for bounded variables will need a base size $n_b + 2n_l$ and those that use sophisticated implementation will need a base size $n_b + n_l$. In both cases, the base size is too large for real systems, increasing the computational effort and the approaching errors in the LP algorithm.

It is possible to transform problem (3) on the following LP:

$$\min w = \sum_s r_s \quad (4)$$

subject to

$$\begin{aligned}
g_1 + \dots + g_{n_g} + r_1 + \dots + r_{n_r} &= d_1 + \dots + d_{n_r} \\
-n_{ij}\bar{f}_{ij} &\leq f_{ij}(\mathbf{g}, \mathbf{r}) \leq n_{ij}\bar{f}_{ij} \\
0 \leq \mathbf{g} &\leq \bar{\mathbf{g}} \\
0 \leq \mathbf{r} &\leq \mathbf{d} \\
\forall(i, j) &\in \Omega_c
\end{aligned}$$

where n_{ij} is the number of existing circuits in path $i-j$ in the present configuration.

The number of variables in problem (4) is smaller than in problem (3) because the variables θ were excluded from the problem. Problem (4) presents other important features, such as: (i) only one equality constraint, that is the balance power flow, and (ii) in the optimal solution problem, the majority of the constraints $f_{ij}(\mathbf{g}, \mathbf{r})$ are not binding. Usually in the power systems, even in planning problems, only a reduced number of circuits are operating at maximum limit and this represents a binding constraint in problem (4); thus, the majority of the circuits work below their maximum limits and their relaxed constraints should be relaxed in the

optimal solution of problem (4). In (4) this can be done as $f_{ij}(g, r) = G \begin{bmatrix} g \\ r \end{bmatrix} + P$. G is a constant coefficient matrix and P a constant coefficient vector. Therefore, in problem (4) the variables are only the real generations g and the artificial generations r .

Problem (4) presents $n_v = n_g + n_r \leq n_b$ variables. Thus, in the optimal solution, only n_v constraints should usually be binding, one of them being the equality constraint, and the others should be trivial generation limit constraints ($0 \leq g \leq \bar{g}$ or $0 \leq r \leq \bar{d}$) and there should be a reduced number of constraints $f_{ij}(g, r)$. Therefore, the most appropriate strategy is to solve problem (4) with a dual simplex algorithm for bounded variables and relaxation. Thus, the resolution process begins with only one equality constraint and generation limit constraints, relaxing the flow constraint $f_{ij}(g, r)$. In other words, the resolution process begins with an LP with a base size 1. In each step of the algorithm, the most unfeasible constraint $f_{ij}(g, r)$ is added until all relaxed constraints are no longer unfeasible. It is possible to verify by experimental tests or by theoretical analysis that the size of the base is always very small in relation to the size of the base of problem (3) when using a primal simplex algorithm for bounded variables.

3.1 Demonstration of transformation

Initially, the following system must be reduced to:

$$B\theta + g + r = d \quad (5)$$

where B is a singular square matrix of dimension $n_b \times n_b$. Without losing generality, it is assumed that bus n_b is the slack and reference bus. Thus, it is assumed that $\theta_{n_b} = 0$ and the last constraint n_b is put temporarily aside. B' is the reduced matrix of dimension $(n_b - 1) \times (n_b - 1)$ with the row and column n_b of B eliminated. Therefore, the matrix B' is non-singular and the resulting system can be solved by the following:

$$\theta = (B')^{-1}(d - g - r)' \quad (6)$$

where $(d - g - r)'$ is the vector of size $(n_b - 1)$, that is, the vector $(d - g - r)$ without the element n_b . b'_k is the row k of the inverse matrix $(B')^{-1}$. Thus, an element of vector θ , the element k , becomes the following:

$$\theta_k = b'_k(d - g - r)' \quad (7)$$

Now we substitute the values of θ in the following set of constraints:

$$|\theta_i - \theta_j| \leq \bar{\phi}_{ij} \quad (8)$$

It should be noted that:

$$f_{ij} = (\theta_i - \theta_j)n_{ij}\gamma_{ij} \quad (9)$$

where n_{ij} is the number of existing circuits in the present topology in path $i-j$ and $\bar{\phi}_{ij} = \bar{f}_{ij}/\gamma_{ij}$ where γ_{ij} is the susceptance of a circuit in path $i-j$ and n_{ij} is the number of existing circuits in the present configuration in path $i-j$. With the previous relations, (8) becomes the following:

$$|f_{ij}| \leq n_{ij}\bar{f}_{ij} \quad (10)$$

and taking into account (7), f_{ij} becomes:

$$|f_{ij} = (b'_i - b'_j)(d - g - r)'_{ij}n_{ij}| \leq n_{ij}\bar{f}_{ij} \quad (11)$$

The n_t constraints represented in (11) represent the n_t constraints of the type $|\theta_i - \theta_j| \leq \bar{\phi}_{ij}$ and the $(n_b - 1)$ constraints of $B\theta + g + r = d$. System (11) can even be represented as follows:

$$f_{\min} \leq -G(g + r) + Gd \leq f_{\max} \quad (12)$$

where one element of the vector f_{\min} is $-n_{ij}\bar{f}_{ij}$, one element of the vector f_{\max} is $n_{ij}\bar{f}_{ij}$, and G is a full matrix $(n_t) \times (n_g + n_r)$.

The last equation of system (5), which was temporarily put aside, becomes the following:

$$b_{n_b}\theta_{n_b} + g_{n_b} + r_{n_b} = d_{n_b} \quad (13)$$

where $\theta_{n_b} = [\theta \ 0]$ is a vector of size n_b with the last element equal to zero and $b_{n_b} = [b_{n_b-1} \ b_{n_b, n_b}]$ where b_{n_b-1} represents $(n_b - 1)$ first elements of b_{n_b} and b_{n_b, n_b} is the last one. Substituting (6) in (13), we get the following:

$$\begin{aligned} [b_{n_b-1} \ b_{n_b, n_b}] [(B')^{-1}(d - g - r)' \ 0] + g_{n_b} + r_{n_b} &= d_{n_b} \\ [b_{n_b-1}(B')^{-1}] (d - g - r)' + g_{n_b} + r_{n_b} &= d_{n_b} \end{aligned} \quad (14)$$

where:

$$b_{n_b-1}(B')^{-1} = [-1 \ \dots \ -1] \quad (15)$$

is proved through theorem 1.

So, system (14) is reduced to the following equation—the power flow equation:

$$g_1 + \dots + g_{n_g} + r_1 + \dots + r_{n_r} = d_1 + \dots + d_{n_r} \quad (16)$$

Therefore, the (12) and (16) allow us to obtain an equivalent LP to (3) which becomes the following:

$$\min w = \sum_i r_i \quad (17)$$

subject to

$$\begin{aligned} g_1 + \dots + g_{n_g} + r_1 + \dots + r_{n_r} &= d_1 + \dots + d_{n_r} \\ -n_{ij}\bar{f}_{ij} &\leq f_{ij}(g, r) \leq n_{ij}\bar{f}_{ij} \\ 0 &\leq g \leq \bar{g} \\ 0 &\leq r \leq \bar{d} \\ \forall(i, j) &\in \Omega_c \end{aligned}$$

It should be noted that the computational effort to the equivalent LP consists in inverting the matrix B' .

Theorem 1: B is a square matrix of order n , symmetric, singular, and which satisfies the following condition:

$$b_{ii} = - \sum_{i \neq j} b_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

Suppose that matrix B' is obtained from B by deleting the k th column and line, respectively. The resulting matrix B' is non-singular, with order $(n - 1)$. Let b be the vector whose coordinates represent elements of the k th row of B , excluding the element of k th order. Therefore, b has $(n - 1)$ elements and, under this condition, the following property is true:

$$b_{1 \times (n-1)} \cdot (B')^{-1}_{(n-1) \times (n-1)} = [-1 \ -1 \ \dots \ -1]_{1 \times (n-1)}$$

where $(n, i, j, k \in N)$.

Demonstration: Basically, the demonstration is realised as follows (i) It is assumed that $b \cdot (B')^{-1} = [-1 \ -1 \ \dots \ -1]$ is true; (ii) both sides of the equality constraint are multiplied by B' and then the transposed matrix is obtained considering B' symmetric; (iii) considering $b_{ii} = - \sum_{i \neq j} b_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$, an identity matrix is obtained. The demonstration also required B' to be diagonal dominant. Owing to space restrictions, the complete demonstration has been omitted and is available from the authors.

4 Illustrative example-04 bus system

The data for this system are shown in Tables 1 and 2 and in Fig. 1. A base power equal to 100 MW is used and the reactances are already found in pu.

Table 1: Generation and load buses

Bus	Generation capacity	Load, MW
1	105.0	0.0
2	0.0	60.0
3	0.0	20.0
4	0.0	25.0

Table 2: Characteristics of circuits

Number	Circuit	Reactance, pu	Capacity, MW
1	1-2	3	35
2	1-3	2	40
3	1-4	2	40
4	2-3	2	40

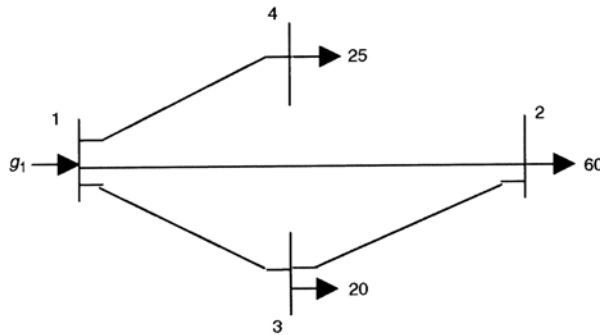


Fig. 1 4 bus system

4.1 Example 1

The case of planning without generation rescheduling and with a topology that presents a loss of load for the 04-bus system is analysed.

Using the conventional formulation (3), the LP of the topology shown in Fig. 1 becomes:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (18)$$

subject to

$$\begin{aligned} -1.333\theta_1 + 0.333\theta_2 + 0.5\theta_3 + 0.5\theta_4 + g_1 &= 0 \\ 0.333\theta_1 - 0.833\theta_2 + 0.5\theta_3 + r_2 &= 0.60 \\ 0.5\theta_1 + 0.5\theta_2 - \theta_3 + r_3 &= 0.20 \\ 0.5\theta_1 - 0.5\theta_4 + r_4 &= 0.25 \end{aligned}$$

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq 0.35$$

$$|\theta_1 - \theta_3| \leq 0.40$$

$$|\theta_1 - \theta_4| \leq 0.40$$

$$|\theta_2 - \theta_3| \leq 0.40$$

$$0 \leq g_1 \leq 1.05$$

$$0 \leq r_2 \leq 0.60$$

$$0 \leq r_3 \leq 0.20$$

$$0 \leq r_4 \leq 0.25$$

$$\theta_i \text{ unbounded to } i = 1, \dots, 4$$

Using the proposed formulation (4) and using bus 3 as a reference, we obtain the following equivalent LP to problem (18):

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (19)$$

subject to

$$g_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1.05$$

$$-0.35 \leq 0.286g_1 - 0.286r_2 + 0.286r_4 + 0.10 \leq 0.35$$

$$-0.40 \leq 0.714g_1 + 0.286r_2 + 0.714r_4 - 0.35 \leq 0.40$$

$$-0.40 \leq -r_4 + 0.25 \leq 0.40$$

$$-0.40 \leq 0.286g_1 + 0.714r_2 + 0.286r_4 - 0.50 \leq 0.40$$

$$0 \leq g_1 \leq 1.05$$

$$0 \leq r_2 \leq 0.60$$

$$0 \leq r_3 \leq 0.20$$

$$0 \leq r_4 \leq 0.25$$

4.2 Example 2

Example 2 is obtained from example 1 adding one additional circuit in branch 1-3. In this context, the case of planning without generation rescheduling and the optimal topology for the 04-bus system is analysed, that is, the analysed configuration presents no loss of load and, therefore, the resolution ends in pre-scheduling.

Using the conventional formulation (3), the LP of the topology shown in Fig. 1, adding a line in the path 1-3, becomes

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (20)$$

subject to

$$-1.833\theta_1 + 0.333\theta_2 + 1.0\theta_3 + 0.5\theta_4 + g_1 = 0$$

$$0.333\theta_1 - 0.833\theta_2 + 0.5\theta_3 + r_2 = 0.60$$

$$1.0\theta_1 + 0.5\theta_2 - 1.5\theta_3 + r_3 = 0.20$$

$$0.5\theta_1 - 0.5\theta_4 + r_4 = 0.25$$

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq 0.35$$

$$|\theta_1 - \theta_3| \leq 0.80$$

$$|\theta_1 - \theta_4| \leq 0.40$$

$$|\theta_2 - \theta_3| \leq 0.40$$

$$0 \leq g_1 \leq 1.05$$

$$0 \leq r_2 \leq 0.60$$

$$0 \leq r_3 \leq 0.20$$

$$0 \leq r_4 \leq 0.25$$

$$\theta_i \text{ unbounded to } i = 1, \dots, 4$$

Using the proposed formulation (4), we obtain the following equivalent LP to problem (20):

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (21)$$

subject to

$$\begin{aligned}
 g_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 1.05 \\
 -0.35 &\leq 0.167g_1 - 0.333r_2 + 0.167r_4 + 0.158 \leq 0.35 \\
 -0.80 &\leq 0.833g_1 + 0.333r_2 + 0.833r_4 - 0.408 \leq 0.80 \\
 -0.40 &\leq - r_4 + 0.25 \leq 0.40 \\
 -0.40 &\leq 0.167g_1 + 0.667r_2 + 0.167r_4 - 0.441 \leq 0.40 \\
 0 &\leq g_1 \leq 1.05 \\
 0 &\leq r_2 \leq 0.60 \\
 0 &\leq r_3 \leq 0.20 \\
 0 &\leq r_4 \leq 0.25
 \end{aligned}$$

5 Bounded dual simplex algorithm with relaxation

The bounded dual simplex algorithm that uses the model of transformed LP and relaxation presents the following structure:

1. Initially, the system data must be adjusted, identifying the generation and load buses. The island buses must be eliminated from the resolution process and in the buses which have generation and load, taking into account the values of generation and load.
2. Carry out the transformed LP presented in (4).
3. Perform the pre-scheduling and carry out the bounded dual simplex tableau with a base of size 1 (the balance of the power equation).
4. Identify the most unfeasible constraint. If this unfeasible constraint does not exist, find the need variables and stop the process; in the opposite case, go to step 4.
5. Introduce the most unfeasible constraint in the bounded dual simplex tableau and reoptimise the simplex tableau with a reduced base. Go back to step 3.

5.1 Pre-scheduling

The pre-scheduling is performed through successive steps in which in each step the generation of a real generator is increased until it reaches its maximum limit. The generator, which must be chosen to increase its generation, is the one that eliminates (or decreases) the unfeasibility of the most unfeasible flow constraint. Thus, to verify the next generator that must be chosen the coefficients of the G matrix must be observed.

5.2 Resolution of illustrative examples

Resolution of example 1: The 04-bus system is solved without rescheduling, that is, system (19). Initially, the flow constraints are relaxed and we have the following relaxed LP:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (22)$$

subject to

$$\begin{aligned}
 g_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 1.05 \\
 0 &\leq g_1 \leq 1.05 \\
 0 &\leq r_2 \leq 0.60 \\
 0 &\leq r_3 \leq 0.20 \\
 0 &\leq r_4 \leq 0.25
 \end{aligned}$$

Pre-scheduling: All the generators are initially fixed at their inferior limit and the flows have the following values: $f_{12} = 0.10$, $f_{13} = -0.35$, $f_{14} = 0.25$ and $f_{23} = -0.50$. We verify that the flow f_{23} (the fourth flow constraint) is the only unfeasible and that generator 1 can decrease or eliminate this unfeasibility. Then, $g_1 = 1.05$ is carried out and the pre-scheduling ends because the power flow equation is already satisfied. Therefore, the solution of the relaxed LP is $g_1 = 1.05$ and the other variables are equal to zero.

We can again verify the flows: $f_{12} = 0.4003$, $f_{13} = 0.3997$, $f_{14} = 0.25$ and $f_{23} = -0.1997$.

Flow f_{12} is the only unfeasible, and thus a constraint in this flow in the relaxed LP must be included, with the result:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (23)$$

subject to

$$\begin{aligned}
 g_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 1.05 \\
 0.286g_1 - 0.286r_2 + 0.286r_4 + 0.10 &\leq 0.35 \\
 0 &\leq g_1 \leq 1.05 \\
 0 &\leq r_2 \leq 0.60 \\
 0 &\leq r_3 \leq 0.20 \\
 0 &\leq r_4 \leq 0.25
 \end{aligned}$$

System (23) is solved using a bounded dual simplex algorithm, obtaining the following solution: $g_1 = 0.9625$, $r_2 = 0.0875$ and the other variables are equal to zero. Checking the flow constraints, we notice that none is unfeasible. Thus the solution of the relaxed system (23) is also the solution of systems (18) and (19), finding the same solution $w = 0.875$ pu.

Resolution of example 2

The 04-bus system is solved without rescheduling and optimal configuration, that is, system (21). Initially, the flow constraints are relaxed and we have the following relaxed LP:

$$\min w = r_2 + r_3 + r_4 \quad (24)$$

subject to

$$\begin{aligned}
 g_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 1.05 \\
 0 &\leq g_1 \leq 1.05 \\
 0 &\leq r_2 \leq 0.60 \\
 0 &\leq r_3 \leq 0.20 \\
 0 &\leq r_4 \leq 0.25
 \end{aligned}$$

Pre-scheduling: All the generators are initially fixed at their inferior limit and the flows take the following values: $f_{12} = 0.158$, $f_{13} = -0.408$, $f_{14} = 0.25$ and $f_{23} = -0.441$. We verify that flow f_{23} (the fourth flow constraint) is the only unfeasible and that generator 1 can decrease or eliminate this unfeasibility. So, $g_1 = 1.05$ is carried out and the pre-scheduling ends, because the power flow equation is already satisfied. Therefore, the solution of the relaxed LP is $g_1 = 1.05$ and the other variables are equal to zero.

We can verify the flows again: $f_{12} = 0.333$, $f_{13} = 0.467$, $f_{14} = 0.25$ and $f_{23} = -0.267$. There is no unfeasible flow, and thus the solution of the relaxed system (24) is the solution of system (20) and (21) with $g_1 = 1.05$ and the other variables

equal to zero, obtaining $w=0$. Therefore, the resolution of the problem ends in pre-scheduling.

A more detailed analysis allows us to conclude that in those problems where there exists a topology that will lead to a solution without loss of load and the planning does not allow the re-scheduling, the solution of the problem always ends in pre-scheduling and this feature does not depend on the size of the problem. In other words, topologies that produce loss of load $w=0$ in problems without re-scheduling always end in pre-scheduling (step 3) and do not use LP. This is a consequence of the fact that the summation of generation is equal to the summation of demand and no flow constraint is unfeasible.

When there is pre-scheduling and as a result the summation of generation is bigger than the summation of demand, and in addition if the topology does not present loss of load, sometimes the resolution can finish in pre-scheduling and, in other cases, some iterations of the LP algorithm would be necessary.

For topologies that present loss of load, the algorithm will need some LP iterations, but the size of the base will always be very small if compared to the base of a method of the primal simplex type. It must be observed that the computational effort to build the new mathematical model requires the inversion of matrix B' .

6 Tests in real systems

In this Section, we present tests performed with real systems. MINOS 5.4 software is used as a precision reference. The results found with the implemented algorithm are equivalent to the ones found with MINOS 5.4 in terms of accuracy of results and LP convergence.

6.1 The Southern Brazilian system

The Southern Brazilian System is made up of 46 buses and 79 circuits whose data can be found in [12]. The elapsed time was analysed in hundredths of seconds. Two of these typical tests, one for the basic topology and the other for the final topology, led to the results shown in Table 3.

Table 3: The Southern Brazilian system (46 bus)

Configuration	Time proposed algorithm	Time MINOS, sec	Loss, MW
Base	0.05	0.11	3452.5
Final	0.05	0.16	0

Use of the proposed formulation in the planning algorithm: Virtually all of the planning algorithms of transmission systems, heuristic, conventional and combinatorial optimisation algorithms, solve LP problems in an iterative manner, that is, the utilisation of these models leads to the resolution of a high number of LPs, which are the result of diverse strategies adopted by these algorithms. Therefore, in the planning algorithms, basically all computational effort is used to solve successive LP problems. Thus, the proposed algorithm can be used as a subroutine of any planning algorithm of transmission systems. As an example, we show the performance of the LP algorithm, when it is a subroutine of a constructive heuristic algorithm, which is used frequently by electric companies. This algorithm is called the minimum loss of loads algorithm presented in [8]. The algorithm adds, step by step, one

circuit chosen by an indicator of sensitivity, until the system does not present loss of load. In the next phase, there is an attempt to remove irrelevant circuits that were added in the previous phase. For more details, see [8].

Tests were performed with the system of 46 buses and 79 candidate circuits (the Southern Brazilian System) starting from the basic configuration without rescheduling.

The tests that were performed with the minimum loss of load algorithm using the formulation proposed to solve the LPs are shown in Table 4.

Table 4: Tests in 46 bus systems

Number	Added circuits	Number of added constraints	Number of LP iterations	Loss, MW
Phase 1:				
1	***	4	4	3452,5
2	26-29	4	4	3452,5
3	29-30	4	4	3452,5
4	28-30	4	4	3294,8
5	09-10	4	4	3294,8
6	46-10	6	6	3117,8
7	24-25	6	6	3117,8
8	21-25	6	6	2407,1
9	40-41	6	6	2407,1
10	31-41	6	6	2105,6
11	28-31	7	7	1878,4
12	42-43	6	6	1320,5
13	05-06	6	6	1320,5
14	46-06	3	3	1027,4
15	24-25	4	4	867,2
16	05-06	4	4	561,8
17	19-25	2	2	580,8
18	20-21	1	1	220,3
19	31-32	0	0	0,0
Phase 2: Simulating subtraction				
20	19-25	3	3	445,9
21	31-41	1	1	408,8
22	21-25	0	0	0,0 *
23	46-06	3	3	491,1
24	46-10	0	0	0,0 *
25	28-30	0	0	26,2
26	20-21	1	1	718,8
27	42-43	1	1	826,4
28	24-25	1	1	461,1
29	29-30	0	0	26,2
30	40-41	1	1	418,4
31	05-06	0	0	421,6
32	09-10	0	0	0,0 *
33	28-31	1	1	460,0
34	31-32	2	2	216,5
35	26-29	0	0	26,2

The asterisk (*) shows that the indicated circuits were subtracted. Thus, the minimum loss of load algorithm solves the planning problem after solving 35 LP problems and adding the following circuits in the basic

configuration: $n_{26\ 29} = 1$, $n_{29\ 30} = 1$, $n_{28\ 30} = 1$, $n_{24\ 25} = 2$, $n_{40\ 41} = 2$, $n_{31\ 41} = 1$, $n_{28\ 31} = 1$, $n_{42\ 43} = 1$, $n_{05\ 06} = 2$, $n_{46\ 06} = 1$, $n_{29\ 25} = 1$, $n_{20\ 21} = 1$, $n_{31\ 32} = 1$; with the investment $v = 178905000$ of dollars. In relation to MINOS, the proposed algorithm ended up being about 3 to 4 times faster.

It should be noted that in the solution transformed LP problems, the base of the largest size implemented was 8×8 (in iteration 11 with the addition of 7 flow limit constraints), representing a very small base for the size of the system.

6.2 North-Northwestern Brazilian system

The North-Northwestern Brazilian system is made up of 87 buses and 179 circuits whose data can be requested from the authors. The elapse time was analysed in hundredths of seconds. The typical test showed the results shown in Table 5.

Table 5: North-Northwestern Brazilian system (87 buses)

Configuration	Time proposed algorithm	Time MINOS, sec	Loss, MW
Base	0.16	0.33	9225.2
Final	0.11	0.33	10.8

6.3 Applications of proposed methodology

In this paper, the proposed methodology has been presented as an LP subroutine of a constructive heuristic algorithm. However, its importance resides in its application with meta-heuristic methods, such as genetic algorithms and tabu search [3]. As, in metaheuristic algorithms, thousands of LP problems are usually solved, a robust and fast LP solver subroutine is fundamental. Moreover, the LP solver should make use of solutions obtained using LPs in previous runs in an efficient way.

The proposed algorithm was also compared with the CPLEX software and the processing times were equivalent. However, the program, which is in the development stage, can be improved significantly in order to optimise the processing time. The proposed relaxation method is very efficient for the analysed problem.

7 Conclusions

The proposed formulation presents two clearly differentiated characteristics: (a) the transformation of the problem in order to reduce the variables and the equality constraint (the power flow equation) and a set of inequality constraints (equal to the number of circuits in the system), and (b) use of a bounded dual simplex algorithm using relaxation to solve the modified problem. The most attractive feature of

the modified problem is that only those circuit constraints with the maximum flow are binding for the optimal solution and therefore the relaxation technique becomes particularly efficient. Obviously, the computational performance of the new formulation is more efficient than any other solution proposed to solve LP using a primal simplex algorithm with a high number of restrictions. The formulation has the great advantage of not using the dual simplex multipliers to identify the most unfeasible constraint using the most robust algorithm, since this works without problems even when there is atypical behaviour in the LP problem such as optimal alternative solutions to the dual problem (alternative optimal in the dual variables). However, the proposed algorithm presents the disadvantage of needing the inversion of matrix B in an explicit way.

8 Acknowledgments

This research is supported by FAPESP. The authors would like to thank Prof. Alcir Monticelli (in memoriam) for his contribution and critiques during the development of the proposed algorithm.

9 References

- Fischl, R.: 'Optimal system expansion planning: a critical overview'. Presented at ERDA & EPRI Conf., Henniker, 1975
- Romero, R., Gallego, R.A., and Monticelli, A.: 'Transmission system expansion planning by simulated annealing', *IEEE Trans. Power Syst.*, 1996, **11**, (1), pp. 364-369
- Gallego, R.A., Monticelli, A., and Romero, R.: 'Comparative studies of non-convex optimization methods for transmission network expansion planning', *IEEE Trans. Power Syst.*, 1998, **13**, (3), pp. 822-828
- Garver, L.L.: 'Transmission network estimation using linear programming', *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, 1970, **89**, (7), pp. 1688-1697
- Pereira, M.V.F., Pinto, L.M.V.G., Cunha, S.H.F., Parker, B.J., and Oliveira, G.C.: 'A decomposition approach to automated generation/transmission expansion planning', *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, 1985, **104**, (11), pp. 3074-3083
- Romero, R., and Monticelli, A.: 'A zero-one implicit enumeration method for optimizing investments in transmission expansion planning', *IEEE Trans. Power Syst.*, 1994, **9**, (3), pp. 1385-1391
- Monticelli, A., Santos, J.R. A., Pereira, M.V.F., Cunha, S.H., Parker, B.J., and Praça, J.C.G.: 'Interactive transmission network planning using a least-effort criterion', *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, 1982, **101**, (10), pp. 3919-3925
- Pereira, M.V.F., and Pinto, L.M.V.G.: 'Application of sensitivity analysis of load supplying capability to interactive transmission expansion planning', *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, 1985, **104**, (2), pp. 381-389
- Stott, B., and Marinho, J.L.: 'Linear programming for power systems network security applications', *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, 1994, **98**, (3), pp. 837-848
- Berry, P.E., and Dunnett, R.M.: 'Contingency constrained economic dispatch algorithm for transmission planning', *IEE Proc. C, Gener. Transm. Distrib.*, 1989, **136**, (4), pp. 238-244
- Irving, M.R., and Sterling, M.J.H.: 'Economic dispatch of active power with constraint relaxation', *IEE Proc. C, Gener. Transm. Distrib.*, 1983, **130**, (4), pp. 172-177
- Haffner, S., Monticelli, A., Garcia, A., Mantovani, J., and Romero, R.: 'A branch and bound algorithm for transmission system expansion planning using a transportation model', *IEE Proc., Gener. Transm. Distrib.*, 2000, **147**, (3), pp. 149-156