

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

SABRINA HELENA BONFIM

THEODORO AUGUSTO RAMOS:

UM ESTUDO COMENTADO DE SUA TESE DE DOUTORAMENTO

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Rio Claro - SP
2013

510.09 Bonfim, Sabrina Helena
B713t Theodoro Augusto Ramos: um estudo comentado de sua
tese de doutoramento / Sabrina Helena Bonfim. - Rio Claro,
2013
124 f. : il., figs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcos Vieira Teixeira

1. Matemática - História . 2. Funções de variáveis reais.
3. História da matemática - Brasil. I. Título.

SABRINA HELENA BONFIM

THEODORO AUGUSTO RAMOS:
UM ESTUDO COMENTADO DE SUA TESE DE DOUTORAMENTO

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Rio Claro, SP 21 de Outubro de 2013

Tocando em Frente
Ando devagar
Porque já tive pressa
E levo esse sorriso
Porque já chorei demais
Hoje me sinto mais forte,
Mais feliz, quem sabe
Só levo a certeza
De que muito pouco sei,
Ou nada sei
Conhecer as manhas
E as manhãs
O sabor das massas
E das maçãs
É preciso amor
Pra poder pulsar
É preciso paz pra poder sorrir
É preciso a chuva para florir
Penso que cumprir a vida
Seja simplesmente
Compreender a marcha
E ir tocando em frente
Como um velho boiadeiro
Levando a boiada
Eu vou tocando os dias
Pela longa estrada, eu vou
Estrada eu sou
Conhecer as manhas
E as manhãs
O sabor das massas
E das maçãs

*É preciso amor
Pra poder pulsar
É preciso paz pra poder sorrir
É preciso a chuva para florir
Todo mundo ama um dia,
Todo mundo chora
Um dia a gente chega
E no outro vai embora
Cada um de nós compõe a sua história
Cada ser em si
Carrega o dom de ser capaz
E ser feliz
Conhecer as manhas
E as manhãs
O sabor das massas
E das maçãs
É preciso amor
Pra poder pulsar
É preciso paz pra poder sorrir
É preciso a chuva para florir
Ando devagar
Porque já tive pressa
E levo esse sorriso
Porque já chorei demais
Cada um de nós compõe a sua história
Cada ser em si
Carrega o dom de ser capaz
E ser feliz*

Composição : Almir Sater e Renato Teixeira

Aos meus pais. Mais uma vez e sempre.

Agradecimentos

Agradeço:

Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro que sempre me foram solícitos.

Aos colegas de trabalho da Universidade Federal de Mato Grosso Sul (UFMS), campus de Paranaíba, pelo apoio e compreensão.

Aos meus alunos por compartilharem comigo seus sonhos, alegrias e incertezas.

Aos queridos amigos Ângélica e Nelson, Mariana e Luciano, Zaqueu, Elmha e Paula pelo carinho e apoio nessa jornada.

Ao professor e amigo Sérgio Nobre pela sugestão do tema no qual abracei com afinco.

Ao professor Ubiratan D'Ambrosio por participar, mais uma vez, da minha caminhada.

Ao meu orientador e amigo pelas longas horas de estudo, palavras de sabedoria, de compreensão e ajuda.

Aos professores Francisco e Jorge pela leitura cuidadosa e sugestões.

À minha irmã Daiana, minha eterna amiga.

A minha família, em especial aos meus pais Adalto e Iraci, por terem me proporcionado ser quem hoje sou.

Ao Willian pelo carinho, paciência e amor.

E, sobretudo a Deus, companheiro inseparável de todas as horas, presente em todas as reflexões, momentos de angústias e alegrias, dando-me forças sempre que precisei.

A todos meu muito obrigada.

RESUMO:

Adentrando-se na Matemática e especificamente na História da Matemática focada no Brasil, com seus personagens e obras que possuíram notável importância para o desenvolvimento desta ciência, este estudo tem como escopo apresentar a pesquisa realizada acerca do engenheiro-matemático Theodoro Augusto Ramos (1895-1935). Descreve uma pequena biografia de sua vida, delineada do ponto de vista do profissional (atividades de cunho acadêmico, político e administrativo) em detrimento do pessoal, visto as poucas informações que se foi permitido ter acesso. De sua produção científica, da qual listamos os artigos e obras ao qual foi possível ter acesso, optou-se, neste trabalho, por uma apreciação de sua tese de doutoramento intitulada *Sobre as funções de variáveis reais*, datada do ano de 1918 e defendida para obtenção do grau de doutor em Ciências Físicas e Matemáticas pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro. O olhar dado ao tratamento do tema remeteu-se à História da Matemática nos âmbitos da Educação Matemática.

Palavras-chave: Theodoro Augusto Ramos. Funções de Variáveis Reais. História da Matemática no Brasil.

ABSTRACT:

Entering in the Mathematics and specifically focused on History of Mathematics in Brazil, with their characters and publications that possessed remarkable importance for the development of this science, this study has the objective to present the research on the engineer-mathematician Theodoro Augusto Ramos (1895-1935). Describes a short biography of his life, delineated from the standpoint of a professional (academic, political and administrative activities) to the detriment of staff, as the little information that was allow access. Of its scientific production, which listed the articles and works to which access was possible, it was decided in this work by an appreciation of his doctoral thesis entitled *On the functions of variables reaes*, dating from 1918 and defended for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences from the Polytechnic School of Rio de Janeiro. The look given to the treatment of the issue referred to the History of Mathematics in the fields of Mathematics Education.

Key words: Theodoro Augusto Ramos; Functions of Real Variables; History of Mathematics in Brazil.

SUMÁRIO:

Prólogo.....1

1- Introdução:

- 1.1- Da história e do ofício de historiador: Algumas considerações.....4
- 1.2- Acerca dos enlaces e fronteiras da História da Matemática: A questão metodológica.....9
- 1.3- Construindo esta história ou leitura do tempo.....11

2- Theodoro Augusto Ramos:

- 2.1- Os bastidores.....15
- 2.2- A vida do pensamento. O pensamento da vida. Theodoro Augusto Ramos (1895-1935).....18
- 2.3- Artigos e obras.....61

3- Apreciação da tese de doutoramento:

- 3.1- A tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos: Encaminhamentos matemáticos, autores e contribuições de trabalhos do final do século XIX e início do século XX os quais influenciaram sua pesquisa.....68
- 3.2- Sobre o teorema principal estudado por Theodoro Augusto Ramos.....90
- 3.3- A respeito da demonstração de Henri Lebesgue citada por Theodoro Augusto Ramos.....102

4- Considerações finais:

- 4.1- A guisa de conclusão.....109

5- Referências.....112

6- Anexos

Anexo: Sur l'approximation des fonctions [H. Lebesgue, 1898].....115

Prólogo:

e começo aqui e meço aqui este começo e recomeço e remeço e arremesso e aqui me meço quando se vive sob a espécie de viagem o que importa não é a viagem mas o começo da por isso meço por começo escrever mil páginas milumapáginas para acabar com a escritura para acabarcomeçar com a escritura por isso recomeço por isso arremeço por isso teço escrever [...]

[...] e aqui me meço e começo [...]

(Haroldo de Campos – Galáxias)

E começar não é uma tarefa fácil, simples. Afinal, por onde começar? Será que se é mesmo possível começar uma história, ou será que ela vai se mostrando, se revelando à medida que traçamos o nosso ponto de vista, que direcionamos os nossos olhares, que escolhemos os nossos objetos históricos.

Do dicionário esta palavra, em seus significados nos diz:

história - conjunto de conhecimentos relativos ao passado da humanidade, segundo o lugar, a época, o ponto de vista escolhido, ciência que estuda eventos passados com referência a um povo, país ou indivíduo específico (HOUAISS, 2001, p. 1543).

De tal modo iniciaremos aqui nossa viagem a uma época específica, de um ponto de vista escolhido, a um indivíduo específico e suas produções a estudar. Nosso personagem: Theodoro Augusto Ramos; nossa época: final do século dezenove e início do século XX, nosso estudo: sua produção matemática, especificamente sua tese de doutoramento; nosso ponto de vista: a História da Matemática.

Tentativa de linearização do tempo, composição de palavras, trama permeada de diversificados olhares, retrato composto por inúmeras paisagens. Assim é a história e de tal modo será esta história.

Neste sentido, na introdução, primeiro capítulo deste trabalho tratar-se-á das questões pertinentes à história e ao ofício do historiador para compor assim o pano de

fundo deste estudo o qual nos conduzirá a uma apresentação da pesquisa, seus objetivos, metodologia e referenciais teóricos.

No segundo capítulo é apresentada uma pequena biografia de Theodoro Augusto Ramos, que foi constituída através de pesquisas em bibliotecas e acervos históricos no país, bem como sua produção matemática. Uma de suas produções matemáticas será estudada com maior detalhe no capítulo que segue e trata-se de sua tese de doutoramento, intitulada *Sobre as funções de variáveis reais* e datada do ano de 1918.

Ao adentrar nas apreciações da tese de doutoramento encontra-se no terceiro capítulo uma análise comentada da obra e sua contribuição para a História da Matemática. São elencados e discutidos os resultados de destaques que se atrelam para compor o propósito central da tese. Encontram-se aqui as decorrências obtidas nesta pesquisa de doutoramento da autora.

O desfecho é dado com a conclusão, são tecidas considerações relevantes acerca da biografia e tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos para História da Matemática e conseqüentemente para a Educação Matemática.

Finalizamos com as referências bibliográficas utilizadas para a composição do texto seguida de anexos e apresentamos nas linhas seguintes os rumos e prumos que foram tomados.

[...] por isso começo pois a viagem é o começo e volto e revolto pois na volta reconheço remeço um livro é o conteúdo do livro e cada linha de uma página e cada palavra de uma linha é o conteúdo da palavra da linha página do livro um livro ensaia o livro todo livro é um ensaio de ensaios do livro[...]

Enfim, principiamos aqui nossa viagem...



Theodoro Augusto Ramos
(26 de Junho de 1895 – 5 de Dezembro de 1935)

“O que importa não é accomodar o individuo as exigencias immediatas do meio, mas communicar-lhe o poder de se transformar, a faculdade de se adaptar, pelo seu proprio esforço, ao novo estado das coisas”.

(Discurso proferido por Theodoro na colação de grau de engenheiros de 1929)

Capítulo I:

Introdução

[...] a ignorância do passado não se limita a prejudicar a compreensão do presente; compromete, no presente, a própria ação.

Marc Bloch, 2001.

[...] O fato é que a leitura das diferentes temporalidades que fazem que o presente seja o que é, herança e ruptura, invenção e inércia ao mesmo tempo, continua sendo a tarefa singular dos historiadores e sua responsabilidade principal para com seus contemporâneos.

Roger Chartier, 2009.

1.1 Da história e do ofício de historiador: Algumas considerações.

Passado e presente unidos por meio da escrita: a escrita da história. Composição permeada por evidências documentárias, pesquisas, estudos, tramas articuladas ou não que ao final procuram tecer uma, dentre tantas escolhas possíveis feitas pelo historiador. Historiar é assim, uma via que procura buscar no presente a compreensão do passado e vice-versa. Episódios reais têm o homem como ator, objeto da história, mas ainda assim, nem a essência da história nem seus fins se resumem a este personagem.

Seu cerne resulta da ótica escolhida. Assim como as demais narrativas, a história escolhe, reduz, organiza, faz com que séculos caibam em poucas páginas. A história é uma narrativa de eventos nas mãos do historiador e sob seu ponto de vista, seu limite é o conhecimento por meio de documentos, ou seja, daquele acontecimento que deixou um registro material, seu esforço de ofício é admirar-se com o que é evidente. Mesmo para o mais claro dos documentos é preciso saber interrogá-los. É a pergunta do historiador que condiciona a apreciação a ser realizada.

A história nunca se repete, ainda quando abordamos a mesma temática, trata-se de pontos de vistas diferentes, únicos e singulares. Neste sentido não se é possível tratar de

toda a história, mas sim daquilo que é possível saber sobre o que escrevemos e isto depende de como se encontra a documentação pesquisada, os interesses, o tipo de objetivo. Em história é preciso haver escolhas e esta é feita de maneira crítica.

A escolha do historiador constitui a história em suas fronteiras, pois esta se compõe como uma tapeçaria, uma trama, não se organiza, necessariamente, em uma sequência cronológica, uma vez que não existem fatos isolados. Uma mesma paisagem pode ser vista de várias janelas, assim como um mesmo episódio pode ser disposto em várias tramas. O historiador deve estar atento ao fato de que cada tipo de fonte exige um tratamento diferente, no cerne de uma problemática de conjunto. Ao historiador, cabe escolher seu percurso e procurar fazer compreender as tramas, entretanto, como nos fala Veyne:

O curso dos fatos não pode, pois, se reconstituir como um mosaico; por mais numerosos que sejam, os documentos são necessariamente indiretos e incompletos; deve-se projetá-los sobre um plano escolhido e ligá-los entre si (VEYNE, 2008, p.124).

Neste sentido, não há uma história, mas histórias. Múltiplas abordagens. Interesse em considerar temas de investigação e reflexão histórica objetos globalizantes, na ausência de globalidades (LE GOFF, 2003, p.141).

Como se olhássemos por entre retratos, quando se trata da história, mesmo para interpretar documentos do passado ou para delinear problemas de pesquisa é imprescindível que se cumpra a condição de observar e analisar a paisagem de hoje, uma vez que esta fornece as perspectivas de conjunto dos quais se era indispensável partir. Por vezes, é necessário olhar o término ante o início, captar a transformação que se processou, pois:

Aqui como em todo lugar, essa é uma mudança que o historiador quer captar. Mas, no filme por ele considerado, apenas a última película está intacta. Para reconstituir os vestígios quebrados das outras, tem obrigação de, antes, desenrolar a bobina no sentido inverso das sequências (BLOCH, 2001, p. 67).

O historiador diz-se conhecer fatos do passado por meio de vestígios. Passado é um dado do qual não se permite modificações, contudo, o conhecimento que se tem dele é algo em progresso e que incessantemente se modifica e aprimora.

A investigação histórica tem ao menos, a princípio, uma conjectura: sua procura deve ter uma direção. O historiador propõe apenas observar e explicar as coisas tais como aconteceram e ao final sua tarefa está terminada. A visão por entre suas janelas foi composta e ainda assim, ele se deteve com muito cuidado ao fazer esta recomposição.

Certamente ainda faltará muito que explicar, uma vez que a linguagem dos documentos não é, a seu modo, nada mais que um depoimento, precioso, sem dúvida, mas como todos imperfeitos e, conseqüentemente, sujeito a crítica. Por sua vez, a análise do historiador praticou assim recortes que exigiram incontestavelmente uma tomada de consciência crítica.

Assim como nos diz Bloch (2001, p.159), [...] Resumindo tudo, as causas, em história como em outros domínios, não são postuladas. São buscadas.

A história sempre toma uma posição e não é neutra. Tudo tem uma história, ela é um exercício social e sua matéria fundamental é o tempo. A ciência histórica define-se em relação a uma realidade que não é nem construída nem observada, mas sobre a qual se “indaga”, “se testemunha”. Ricoeur nos fala que:

A história só é história na medida em que não consente nem no discurso absoluto, nem na singularidade absoluta, na medida em que o seu sentido se mantém confuso, misturado... A história é essencialmente equívoca, no sentido de que é virtualmente *événementielle* e virtualmente estrutural. A história é na verdade o reino do inexato. Esta descoberta não é útil; justifica o historiador. Justifica todas as suas incertezas. O método histórico só pode ser um método inexato... A história quer ser objetiva e não pode sê-lo. Quer fazer reviver e só pode reconstruir. Ela quer tornar as coisas contemporâneas, mas ao mesmo tempo tem de reconstruir a distância e a profundidade da lonjura histórica (RICOEUR, 1961, p.226).

Do passado, permitem-se, no presente, constantes reconstruções e reinterpretações em história, pois, a história do passado está vinculada ao presente e isto conduz o historiador à necessidade de ter cautela, pois esta dependência é inevitável e legítima, na medida em que o passado não deixa de existir e de se tornar presente. No entanto, esta extensão do passado não deve impedir a um relativo e necessário distanciamento para que o mesmo seja respeitado e se evite o anacronismo (retrocesso).

Pode-se dizer assim, que uma das funções sociais da história é organizar o passado em função do presente. De acordo com Le Goff,

[...] Sabemos agora que o passado depende parcialmente do presente. Toda a história é bem contemporânea, na medida em que o passado é apreendido no presente e responde, portanto, a seus interesses, o que não só é inevitável como legítimo. Pois que a história é duração, o passado é ao mesmo tempo passado e presente. Compete ao historiador fazer um estudo “objetivo” do passado sob sua dupla forma. Comprometido na

história, não atingirá certamente a verdadeira “objetividade”, mas nenhuma outra história é possível (LE GOFF, 2003, p. 51).

Outra questão se impõe ao ofício do historiador. Trata-se da questão do documento. Para Le Goff,

[...] só passa a ser documento na seqüência de uma investigação e de uma escolha - em geral, a investigação não é assunto do próprio historiador, mas de auxiliares que constituem reservas de documentos nas quais o historiador escolherá a sua documentação: arquivos, investigações arqueológicas, museus, bibliotecas etc. As perdas, a escolha dos compiladores de documentos, a qualidade da documentação são condições objetivas, mas limitativas do ofício de historiador. Mais delicados são os problemas que se põem ao próprio historiador a partir desta documentação (LE GOFF, 2003, p. 106).

Como destaca Le Goff, as condições em que se encontram os documentos são decisivas para o trabalho do historiador. Por vezes, essa documentação restringe ou alarga o desígnio posto inicialmente. Para o historiador são questões que se colocam de maneira delicada e transformam os rumos da investigação.

Existe ainda o caso em que há ausência de documentos, os chamados “silêncios da história”. Cabe ao historiador fazer a história a partir dos documentos e da sua ausência, eis seu ofício.

Ofício este que hoje se depara com questões quanto a objetivos de alargamento e métodos da história para a nova história¹ e trazem a tona assuntos como:

a crítica do documento, o novo tratamento dado ao tempo, as novas relações entre material e ‘espíritual’, as análises do fenômeno do poder sob todas as suas formas, não só de seu aspecto político (LE GOFF, 2003, p. 143).

Desta forma:

A reivindicação dos historiadores – não obstante a diversidade de suas concepções e práticas – é, ao mesmo tempo, imensa e modesta. Eles pretendem que todo fenômeno da atividade humana seja estudado e posto em prática tendo em conta as condições históricas em que existe ou existiu. Por ‘condições históricas’ devemos entender o dar forma cognitiva à história concreta, um conhecimento da coerência científica

¹ Originado do termo em francês *nouvelle histoire* é utilizado para designar a corrente historiográfica surgida nos anos de 1970 e correspondente à terceira geração da chamada Escola dos *Annales*. Tem o historiógrafo Jacques Le Goff como um dos destaques. A nova história rejeita a composição da História unicamente como narrativa, valoriza os documentos oficiais como fonte básica e considera as motivações e intenções individuais como elementos explicativos para os eventos históricos, mantendo a velha crença na objetividade.

relativamente ao qual se estabeleça um consenso suficiente no meio profissional dos historiadores (existem também desacordos quanto às conseqüências a tirar). Não se trata de modo algum de *explicar* o fenômeno em questão *através* destas condições históricas, de invocar uma causalidade histórica pura, e nisto deve consistir a modéstia da atuação histórica (LE GOFF, 2003, p. 143).

Le Goff ainda chama a atenção para a admissão de uma narrativa histórica na qual é passível de erros e imperfeições - visto a impossibilidade de se recontar o passado assim como ele realmente aconteceu - e pessoal, no sentido de ser impraticável uma escrita ausente das influências sociais, políticas e históricas do autor.

Cada ciência tem o seu horizonte de verdade que a história deve respeitar; a ação social ou política não deve ter a sua espontaneidade entravada pela história, que já não é incompatível com a exigência de eternidade e de transcendência do religioso, nem com as pulsões da criação artística. Mas, ciência do tempo, a história é um componente indispensável de toda atividade temporal. Mais do que sê-lo inconscientemente, sob a forma de uma memória manipulada e deformada, não seria melhor que a fosse sob a forma de um saber falível, imperfeito, discutível, nunca totalmente inocente, mas cujas normas de verdade e condições profissionais de elaboração e exercício permitam chamá-lo científico? (LE GOFF, 2003, p. 144).

Neste âmbito, ao voltar o olhar para a História da Matemática, é imprescindível ao ofício de historiador, esta reflexão para qual Le Goff nos chama a atenção. O recurso à história no conjunto das práticas do conhecimento humano, e neste caso, a Matemática deve ser contestável mas com práxis que permita legitimá-la.

Entende-se que nunca se explica plenamente um fenômeno histórico fora do estudo do seu momento. De Veyne compartilhamos a metáfora:

A história é um palácio do qual não descobriremos toda a extensão (não sabemos quanto nos resta de não-factual a historicizar) e do qual não podemos ver todas as alas do mesmo tempo; assim não nos aborrecemos nunca nesse palácio em que estamos encerrados. Um espírito absoluto, que conhecesse seu geometral e que não tivesse nada mais para descobrir ou para descrever, se aborreceria nesse lugar. Esse palácio é, para nós, um verdadeiro labirinto; a ciência dá-nos fórmulas bem construídas que nos permitem encontrar saídas, mas que não nos fornecem a planta do prédio (VEYNE, 2008, p. 210).

Assim, o teatro da história faz o espectador sentir paixões, suas peças se conectam por meio de personagens distintas, de situações particulares e peculiares, de roteiros diversos para uma mesma trama. Possibilidade de vários olhares e opção por apenas um. Eis a tarefa do ofício de historiador.

1.2 Acerca dos enlaces e fronteiras da História da Matemática: A questão metodológica.

Ao tratar da História da Matemática é necessário transitar entre caminhos que permeiam pela História e também pela Matemática. Considerada uma ciência ainda em construção, a História da Matemática, vem assim buscar subsídios nos alicerces referenciais da História.

Advertiu-se anteriormente sobre importantes dilemas do trabalho com a História, tais como, escolha do tema, das fontes, dos métodos e das abordagens. Ressaltou-se ainda que o olhar adotado diga respeito a apenas um dos possíveis e, que toda investigação em história já tenha, desde o princípio, certa direção. Embora tenha como estudo o passado, a narrativa histórica se dá no presente e é matéria contemporânea, um dos ofícios do historiador é a sua maneira de evidenciá-la, mesmo numa perspectiva própria, admitindo ser parcial, devendo se tornar, assim, visível em sua narrativa.

Junto a esse pressuposto insere-se a ideia de que o conhecimento histórico é composto por indícios, toma por base vestígios e impressões, nunca certezas. É ofício do historiador a competência de não somente registrar esses vestígios, mas ainda interpretá-los e analisá-los, na medida de uma alusão ao possível.

Neste sentido, nas linhas seguintes discorrer-se-á acerca dos enlaces e fronteiras da História da Matemática no seu âmbito metodológico. Para tanto, será utilizado, como já referido, os aportes da metodologia em História, visto que ao tratar da História da Matemática não é possível deixar de permear por entre os caminhos da História.

Ao tratar de procedimentos metodológicos, atenta-se ao fato de que nos trabalhos em História da Matemática, assim como em História não se é possível definir a priori uma metodologia a ser seguida, adotada. Desta forma, as concepções que serão tomadas neste

trabalho partilham de percepções e pontos de vistas de renomados historiadores que investigam, dentre outros, o trato metodológico da História. A saber, Veyne, Bloch, Le Goff, Burke, Chartier, Jenkins, Ginzburg, Dosse, Vainfas, dentre outros.

Neste universo da História, enquanto aprendiz de ofício utilizar-me-ei de apropriações acerca de um entendimento da história como composições de fatores, sejam estes de ordem individual, político, social, econômico ou cultural, entrecruzando-se para formar a totalidade da narrativa histórica dentro dos contornos e limites possíveis em seu olhar. Assim como Souto:

Compartilho o ponto de vista por meio do qual as sociedades são entendidas como sistemas cujas estruturas e evolução são determinados por fatores diversos e inter-relacionados que influenciam uns aos outros. Em decorrência, acredito que o historiador, constituinte que é desse sistema, está definitivamente impedido de apartar-se de suas concepções que de uma forma ou outra delinham seus interesses e determinam suas escolhas (SOUTO, 2006, p.120).

Pois, em consonância com Borges (2005, p. 216): Toda história é uma construção, resultante de quem a escreve, do seu tempo e espaço, marcado por instituições e grupos.

A questão do método em História, por conseguinte, em História da Matemática, vem sendo constantemente chamada a prestar esclarecimentos. Neste sentido se assume aqui que, em História, não há procedimentos rigidamente estabelecidos para o historiador, primeiro verifica-se o que diz o documento, interrogá-o e só posteriormente se é possível estabelecer os limites da pesquisa. O historiador, de tal modo, deve saber interrogar o documento, por vezes encontra aquilo que foi buscar, outrora, descobre algo que não tinha se perguntado antes. Para isso ele se vê obrigado a formular novas perguntas, o que impede assim a História de procedimentos rígidos determinados enquanto projeto inicial. O historiador necessita de flexibilidade para o trato com suas informações.

Essas particularidades do ofício nos obrigam a flexibilizar os procedimentos, a não nos desestabilizar com as mudanças nos rumos. Ao invés de definir um método desde o início, o descobrimos ao desenvolver a pesquisa. O que não implica num comportamento desleixado, numa postura irresponsável ou ainda, que não haja critérios para escolher determinados caminhos ao invés de outros. Acredito apenas, que não há um método para a História, pois não há um método para compreender, e que a experiência histórica é fruto de um aprendizado e não de um estudo [...] (SOUTO, 2006, p.127).

Segundo Veyne, o historiador escreve:

a história com sua personalidade, isto é com uma aquisição de conhecimentos confusos. Por certo, essa experiência é transmissível e acumulativa, já que principalmente livresca; mas ela não é um método (cada um se atribui a experiência que pode e que quer), em primeiro lugar, porque sua existência não é reconhecida oficialmente e sua aquisição não é organizada; em segundo, porque, se ela é transmissível, não é formulável: é adquirida por meio do conhecimento de situações históricas concretas, restando a cada um retirar a lição a sua maneira. A história não tem método, uma vez que não pode formular sua experiência sob a forma de definições, de leis e de regras (VEYNE, 2008, p.127).

Entretanto, ainda que impedido de ditar regras metodológicas *a priori*, como historiador

consciente da ausência de método no sentido colocado acima, tenho também ciência de não poder prescindir de uma postura metodológica. A que abraço aqui, constitui-se de todos os pressupostos e crenças já explicitados nos parágrafos precedentes. Considero ainda em meus procedimentos, a questão da crítica do documento, tanto no que diz respeito à autenticidade quanto à credibilidade (SOUTO, 2006, p.128).

Assim sendo, espero ter exposto os desígnios que irão conduzir a leitura desta narrativa histórica organizada de um ponto de vista que utiliza ferramentas e referências oriundas da teoria apontada sem, no entanto, deixar de descrever os procedimentos adotados, a origem das fontes, suas limitações e alargamentos para futuras pesquisas. Novas interpretações são possíveis e enriquecedoras ao trabalho histórico.

1.3 Construindo esta história ou leitura do tempo:

[...] a história depende dos olhos e da voz de outrem; vemos por intermédio de um intérprete que se interpõe entre os acontecimentos passados e a leitura que dele fazemos (JENKINS, 2005, p.32).

De tal modo, a história é o princípio do ofício do historiador de trato com o passado, este que nada mais é que um presente se resvalando. Traços que ligam o passado ao presente e que será tratado aqui na ressurgência de suas significações. Assim, história que emana do passado e na qual sua escritura se dá no presente, e que supõe

[...] a ordem cronológica, o fechamento do texto e o recheio dos interstícios, inverte o procedimento de investigação, que parte do presente, que poderia não ter fim e que se confronta sem cessar com as lacunas da documentação (CHARTIER, 2009, p.15).

Em história e, em particular, em História da Matemática este processo de inversão da investigação é comumente utilizado. Muitas vezes, na pesquisa, primeiro nos deparamos com o documento e depois passamos à investigação. Como já exposto, não delimitamos um método específico *a priori*. Elencamos os procedimentos utilizados, e esta conduta, ao final mostra nossa metodologia.

Os passos seguidos neste trabalho não foram diferentes. Ao longo deste texto estão impressas as concepções e procedimentos adotados por esta aprendiz do ofício de historiador. Foram descritos a opção pelo tema, as fontes, os materiais a serem analisados e discutidos, os resultados obtidos. Espera-se com isto imprimir a veracidade devida ao trabalho.

Dentre todos os olhares possíveis, aqui se optou pela realização de um estudo histórico matemático da tese de Theodoro Augusto Ramos intitulada *Sobre as funções de variáveis reais*, defendida na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, para obtenção do grau de Doutor em Ciências Físicas e Matemáticas no ano de 1918.

Além disso, a investigação circunscreveu a elaboração de uma pequena biografia sobre sua vida acadêmica, vista como uma atuação de notória importância, principalmente acerca de contribuições diversas à área de Matemática na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, bem como para a constituição e fundação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da mesma instituição, além do exercício de atividades de cunho político e administrativo.

Desnecessário dizer que este trabalho pretende tratar de tramas ainda não discutidas, não atreladas, ao menos com o enfoque que se propõe aqui. Escolhe-se para a composição um, dentre os possíveis olhares no qual é possível dar o historiador, salientando que este está sempre passível do erro, de dar maior atenção a alguns apontamentos em detrimento de outros.

O trabalho foi norteado de maneira a proporcionar ao leitor, o conhecimento de dados acerca da vida acadêmica do personagem em questão, obtida por meio de documentos encontrados no arquivo histórico da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), dentre outros, e em obras de autores referenciados no tocante à História da Matemática no Brasil.

A importância deste trabalho no âmbito da pesquisa em História da Matemática é reforçada pela necessidade de se preencher uma lacuna ainda existente na história de personagens brasileiros que tiveram notável importância quanto à sua produção matemática para a época e/ou posterior no país e do mundo. Neste sentido, o trabalho é apoiado pelo grupo de pesquisa em História da Matemática o qual está inserido no Programa de pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, onde brota esta investigação. É de importância notória para o conjunto de conhecimentos discutidos e debatidos acerca da Educação Matemática.

Como toda escrita da pesquisa em história, esta não admite metodologias *a priori*. O que será realizado aqui é uma apresentação de “rumos” e “prumos” que em seu desenrolar foram tomados por parte da autora. A primeira questão lançada foi em como abordar, tornar claro e entendível para o leitor, os dados encontrados referentes ao personagem Theodoro Augusto Ramos. Em seguida, ao realizar a leitura do material coletado, percebeu-se a atuação deste personagem frente a três grandes faces: a sua produção matemática, sua atuação e preocupação enquanto professor, sua dedicação e vocação à administração. Estas questões foram, na medida do possível e dos materiais encontrados, abordadas e compiladas em forma de uma pequena biografia.

A questão do tempo se impôs sobre o trabalho e das três faces de atuação de nosso personagem, optou-se por um tratamento mais detalhado no tocante à sua produção matemática. De início, realizou-se especificamente um estudo comentado de sua tese de doutoramento, uma vez que, segundo a literatura (Silva, 1997, 2003 e 2008, dentre outros), esta teve repercussões que se fizeram sentir posteriormente na pesquisa em Matemática do país.

Nem por isso, deixou-se de abordar, ainda que de forma sucinta, as outras facetas deste insigne personagem. Estas também vieram com informações obtidas no já referido arquivo histórico da Escola Politécnica da USP, de pesquisas em diários oficiais, jornais e órgãos públicos do estado e da cidade de São Paulo, dentre outros.

Posto os documentos, o ato da escrita foi de muitas reflexões. Os referenciais teóricos permearam por leituras sobre os domínios da história, sua escrita, o ofício do historiador e a construção de biografias. As compreensões dos trabalhos matemáticos advindos da produção matemática de Theodoro vieram por meio de um estudo de obras

tanto da época, como anteriores e posteriores à sua produção, a fim de possibilitar um maior entendimento e que pode ser observado ao longo da análise realizada. Atrélaram-se assim, estes tantos laços necessários, amarrando-os a fim de atingir o objetivo inicial: estudar sob o ponto de vista da História da Matemática a tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos.

Por fim, julgadas esclarecidas as opções feitas e que são importantes para o entendimento do texto, apresenta-se o resultado final da pesquisa.

Capítulo II:

Theodoro Augusto Ramos

“A Revista Brasileira de Engenharia’, que tinha Theodoro Ramos não somente um colaborador effectivo, mas tambem um amigo dedicado, associa-se ao luto, de que por, sua morte, se cobrem hoje as classes dos professores e dos engenheiros (...)”

Venâncio Filho, 1935.

2.1 Os bastidores:

Assim, iniciava-se um artigo publicado na Revista Brasileira de Engenharia e escrito por Venâncio Filho, no ano de 1935. Neste ano, faleceu Theodoro Augusto Ramos, o personagem que me fez debruçar sobre sua vida, sua história e algumas de suas obras, das quais, por imposição do tempo, do tema, da análise, enfim, da própria história se colocaram também presentes sobre o trabalho da comunicação.

A ideia de escrever uma biografia, ainda que pequena, e que constasse como parte de uma investigação maior acerca de Theodoro Augusto Ramos, pareceu-me ser uma tarefa razoavelmente concebível. Grato engano.

Ao tentar transmitir para o papel, todas as perguntas e respostas que me fiz sobre este personagem, percebi que este seria outro trabalho. A demanda de questionamentos² se circunscreveria a uma tarefa de vida e que, pela limitação do tempo e do objetivo inicial, não caberiam ser realizadas no momento oportuno.

Além disso, por se tratar de um personagem que viveu em um tempo longínquo - final do século XIX e início do século XX – por não ter filhos nem irmãos, o contato com membros da família seria impossível e até mesmo quanto aos seus documentos pessoais ou de trabalho, existem reais dificuldades de serem localizados. A citar, o arquivo histórico

² Por exemplo, questionamentos referentes a Theodoro Augusto Ramos enquanto aluno de graduação, tais como: O modo de ingresso na Escola Politécnica, os professores, as disciplinas cursadas e livros utilizados, como eram ministradas as aulas, se Theodoro era partidista (entenda-se *bolsista*), se o mesmo escreveu algum compêndio enquanto aluno e a cópia do documento de conferimento do seu grau de doutor (não encontrado), dentre outros.

localizado na atual Escola Politécnica da Universidade de São Paulo/ USP -, instituição em que Theodoro trabalhou durante sua curta vida docente mantém um pequeno arquivo com alguns de seus documentos, aos quais me foi possível ter acesso e, na maioria das vezes, também digitalizar esse material e fazer cópias reprográficas ou fotos. Em outro ponto, também nesta universidade, agora na atual Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas/FFLCH³ - que incorporou a antiga Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras/FFCL-, não foi possível encontrar ou ter acesso a nenhum documento. Os contatos foram respondidos sempre a muito custo, insistência e esforço meu, enquanto pesquisadora. Persisti por várias vezes, durante mais de um ano e não consegui acesso a arquivos, pois nem mesmo os que ali trabalham souberam me dizer sobre os tais arquivos. Por consequência, não encontrei nenhum material e fica registrada uma “fenda” neste texto no tocante a documentos originais referentes à atuação de Theodoro na já citada faculdade. Neste caso, compus o texto utilizando conceituadas referências encontradas na literatura sobre o tema.

Na referida faculdade cheguei ainda a consultar o Centro de Apoio à Pesquisa Histórica (CAPH), a fim de encontrar documentos sobre o envolvimento de Theodoro Augusto Ramos na fundação da FFCL. Obtive apenas o anuário de 1934-1935 e um retrato, que apresento no momento adequado, dos fundadores da mesma.

Com informações de atividades políticas e administrativas exercidas por Theodoro Augusto Ramos na cidade e no governo do Estado de São Paulo, também empreendi buscas no Arquivo Público do Estado de São Paulo, localizado na cidade de São Paulo, na prefeitura da cidade de São Paulo, no Centro de Referência Mário Covas, na Biblioteca Mário de Andrade, na Câmara Municipal da cidade de São Paulo e no Diário Oficial do mesmo estado.

³ Theodoro trabalhou na Escola Politécnica e ajudou a fundar, em 1934, a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), que posteriormente passou a ser denominada Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (FFLCH). A FFCL funcionava inicialmente em um prédio de localização distinta do atual. No site da Universidade de São Paulo, referente ao histórico da FFCL, consta: “Originalmente Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), a FFLCH foi fundada em 25/01/1934” [Disponível em: <<http://fflch.usp.br/histórico>>. Acesso em 08. Dez. 2012]. Na época em que Theodoro Augusto Ramos lecionou na referida instituição, essa não havia sido unificada como Universidade de São Paulo. A Escola Politécnica, a Faculdade de Direito do Largo São Francisco e a Faculdade de Medicina foram integradas no ano de 1933 fundando assim a Universidade de São Paulo (D’AMBROSIO, 2011, p.73).

Na tentativa de confirmar os locais, saber as datas de nascimento e morte, também realizei busca em todos os cartórios fundados até o nascimento dele, tanto na cidade de São Paulo, quanto na cidade do Rio de Janeiro, isso foi realizado por meio de emails e solicitações de pesquisa aos cartórios. Não obtive sucesso ao fazer uma busca pelos cemitérios de São Paulo, na repartição da prefeitura, onde atualmente as pessoas se dirigem a fim de buscar certidões de óbitos de parentes com o objetivo de requerer a dupla cidadania, nada foi encontrado.

Quando estava quase desistindo, encontrei num pequeno papel ofício da Escola Politécnica – que pode ser encontrado no já mencionado acervo histórico localizado nas suas dependências - as datas e origens procuradas. Foi emocionante, indescritível. A folha seguia com algumas informações e a assinatura de Theodoro ao final. Era a sua “ficha” docente. Não me foi permitido fazer cópia ou fotografar o documento, apenas copiei os dados.

No tocante aos referidos questionamentos que me fiz com respeito à graduação de Theodoro Augusto Ramos na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, ressalto novamente, a impossibilidade de me alongar, visto que se trataria de uma nova pesquisa, principalmente nos arquivos desta Escola Politécnica, o que não se circunscreve ao fito deste trabalho. Saliento que, mesmo assim, ainda cheguei a realizar consultas eletrônicas no acervo, bem como tentativas por email e telefone, e saber se lá se encontrava ainda algum documento de Theodoro que eu não tivesse conhecimento. Não cheguei a me dirigir até este local pessoalmente, mas não tive sucesso na busca à distância.

Consegui vários artigos, obras, materiais jornalísticos e cartas assinadas por Theodoro em sua breve vida. Temas que permeiam a trabalhos de cunho matemático, físico e por vezes, referentes à educação. Também me deparei com diversos textos, muito dos quais jornalísticos sobre o personagem em questão. Enquanto aprendiz do ofício de historiador refiro-me a estes documentos, no sentido de, ao menos do ponto de vista da literatura e enquanto pesquisadora, ter conseguido acesso e reprodução de toda esta produção. Certamente, existiu ou ainda existe em algum lugar, outra carta, outro jornal e quem sabe até mesmo alguma produção científica desconhecida e que a história não teve acesso e talvez nunca o venha conhecer.

A história é assim, e nem sempre é possível, mesmo ao historiador, ter acesso a numerosos documentos e fontes, sua escrita é realizada por meio de vestígios. Fato, é que do material recolhido e constituído, pelo menos no que tange à produção científica de Theodoro, parece não ficarem dúvidas de que se coletou um relativo acervo do material existente acerca do personagem em estudo. É o que se percebe atentando para a sequência de publicações. Adianta-se que isto não justifica, neste trabalho, uma apreciação de todos estes artigos e obras. Escolheu-se para análise o seu primeiro trabalho matemático e o tido como de maior destaque tanto por pesquisadores da área quanto pela notoriedade da época.

Diante dessa explanação, registrarei nas linhas que seguem uma pequena biografia sobre a vida de Theodoro Augusto Ramos, fundamentada em artigos, obras e documentos originais que compreendem o período que se estende de seu doutoramento, passando por suas atividades docentes, administrativas e políticas na Escola Politécnica São Paulo, na prefeitura e no estado de São Paulo, até seu prematuro falecimento.

Trata-se evidentemente de um recorte, mas como toda história, esta vem embebida de opções e tratos pessoais do autor, neste caso, da autora. Aqui se escolheu este ponto de vista, como um dentre todos os possíveis olhares a serem dados no tratamento do tema. Espero assim, conseguir traduzir ao menos um pouco do que aprendi sobre a vida e obra deste singular engenheiro-matemático.

2.2 A vida do pensamento. O pensamento da vida.

Theodoro Augusto Ramos (1895 – 1935)

[...] No empreendimento que ora me ocupa, ênfase o singular, o individual, buscando nas entrelinhas, significados que poderiam escapar a um olhar mais abrangente, tentando destacar atividade de indivíduos cujo papel social está longe de ser o do espectador passivo ou indiferente. Nessa iniciativa, moveu-me a convicção de que a observação em escala reduzida, sustentada no estudo intensivo dos documentos, poderá revelar fatores previamente não observados, ampliando as possibilidades de compreensão no contexto mais amplo em que se insere o fenômeno estudado. Adoto aqui, o princípio de que uma vida individual não pode ser apartada dos grandes acontecimentos de seu tempo. Embora fatos políticos, econômicos, socioculturais, estejam imbricados em cada existência em particular, creio que eles não têm, necessariamente, que ser narrados, mas que nós, historiadores, temos que ter consciência deles e não podemos negligenciar sua influência (SOUTO, 2006, p.124).

Historiar não se trata muitas das vezes, de se estudar apenas os objetos, as obras, os artefatos, deixados por uma cultura, uma civilização, um personagem. Por vezes, se é preciso buscar a essência da existência dessa cultura, civilização, objeto ou personagem. Dessa forma, entendendo ser importante relatar “peças” da vida de Theodoro Augusto Ramos, apresento, pois, nas linhas que se seguem, um pouco da sua biografia como uma contribuição útil e bastante atual aos que se interessam pela matemática, e em especial por sua história.

O menino Theodoro Augusto Ramos, nasceu em 26 de Junho de 1895, na cidade de São Paulo, onde realizou seu estudo primário e secundário. Não foi possível precisar o colégio.

Mudou-se para o Rio de Janeiro, e segundo Castro (1999, p.59), “(...) fez o exame de natureza⁴, em 1911, no ‘Gymnasio Petropolis’ (Estado do Rio) e ingressou, em 1912, na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, onde terminou o curso de engenharia civil, no ano letivo de 1916”.

A Escola Politécnica do Rio de Janeiro foi a sucessora de uma série de entidades em que se ministraram o ensino da Engenharia no Rio de Janeiro. De acordo com Pardal (1984, p.196) seus primórdios iniciaram-se com as Aulas de Fortificação (1699), Aula do Regimento de Artilharia (1738), Aula Militar do Regimento de Artilharia (1774), Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho (1792), Academia Militar (1810) - Academia Real Militar, depois Academia Imperial Militar, Academia Militar e de Marinha, Academia Militar do Império do Brasil, ou da Corte -, Escola Militar (1839) – Escola Militar da Corte, Escola Militar do Império do Brasil -, Escola Central (1858), Escola Politécnica (1874) – depois Escola Politécnica da Capital Federal, Escola Politécnica do Rio de Janeiro e Escola Politécnica da Universidade Técnica Federal -, Escola Nacional de Engenharia (1937), e em 1965, Escola de Engenharia da UFRJ.

Embora Theodoro tenha se graduado em Engenharia Civil, seu interesse foi pelas Ciências Matemáticas, até então, estudadas somente nas Escolas de Engenharia, onde um ano depois, doutorou-se em Ciências Físicas e Matemáticas, apresentando a tese *Sobre as*

⁴ *Exame de natureza* era o nome dado ao exame que permitia o ingresso a graduação na Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Era realizado, dentre outros locais, no Ginásio Petrópolis também na cidade do Rio de Janeiro.

*Funções de Variáveis Reais*⁵.

Na época, as defesas de tese na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, no tocante a graus, títulos, cartas e defesas, de acordo com Miller, em seus estatutos previa o artigo 86:

abonava o grau de bacharel aos engenheiros plena ou distintamente aprovados em todas as cadeiras, aulas e exercícios práticos dos cursos geral e especial. Esse grau poderia ser de Bacharel em Ciências Físicas e Matemáticas (tratando-se dos quatro primeiros cursos especiais: Engenharia Civil, de Minas, Industrial, Mecânica) ou de Bacharel em Ciências Físicas e Naturais (curso especial de Engenharia Agrônômica). Segundo o artigo 87, os bacharéis elencados no artigo anterior que defendessem tese e fossem aprovados teriam o direito ao grau de doutor nas mesmas ciências. Os artigos 88 a 91 referem-se ao procedimento para a defesa de tese. Fundamentalmente estabelecem o tema da tese (doutrinas importantes referentes às ciências do grau e escritas sobre pontos escolhidos pelo candidato dentre os que fossem com antecedência organizados e aprovados pela congregação); as normas para a apresentação (arguição em sessão pública, comandada por quatro lentes e presidida pelo diretor) e o julgamento (por meio de dois escrutínios secretos: um para a aprovação ou não e outro para a qualidade da aprovação). O artigo 92 previa que o bacharel inabilitado na defesa de tese só poderia defendê-la novamente transcorridos três anos (MILLER, 2003, p.369-370).

Ainda, de acordo com Miller (2003), uma reforma em profundidade foi feita em abril de 1911 (Lei Riva da via Corrêa), que, além de conceder autonomia didática e administrativa à Escola – inovação radical, muito defendida e também combatida na época – criou o Curso de Engenheiros Mecânicos-Eletrecistas, e extinguiu os de Minas e de Agronomia, ficando assim três cursos especiais (Civil, Industrial e Mecânico-Eletrecista), todos com cinco anos de duração. Foi modificado também o critério de ingresso de alunos, exigindo-se dos candidatos à aprovação em onze matérias em um exame feito no Colégio Pedro II, ou em outros estabelecimentos da Capital e dos Estados. Evidências estas que corroboram com a afirmação de que Theodoro Augusto Ramos tenha realizado este exame.

Em resumo, o programa para o Curso de Engenheiro Civil, por essa reforma, e o qual Theodoro deve ter cursado, estabelecia:

1º Ano – Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal – Geometria Descritiva – Física – Desenho de Aguadas e Aplicações à Topografia e Geometria Descritiva.

⁵ De acordo com Silva (1997), em 25/06/1918, Theodoro obteve o grau citado (Revista da SHBC, n.17, p.12, 1997).

2º Ano – Cálculo das Variações, Mecânica Racional - Química Inorgânica, Noções de Química Orgânica – Topografia, Medições, Legislação de Terras – Desenho de Topografia.

3º Ano – Trigonometria Esférica, Astronomia, Geodésia – Mecânica Aplicada, Teoria da Resistência dos Materiais, Grafostática - Mineralogia, Geologia, Noções de Metalurgia – Desenho de Cartas Geográficas e de Máquinas.

4º Ano - Materiais de Construção, Estabilidade das Construções, Tecnologia das Profissões Elementares

- Hidráulica, Abastecimento de Águas, Esgotos

- Estradas, Pontes, Viadutos

- Trabalhos Gráficos de Estradas e de Hidráulica

5º Ano - Arquitetura, Higiene das Construções, Saneamento

- Máquinas Motrizes e Operatrizes

- Rios, Canais, Portos de mar, Faróis

- Economia Política, Direito Administrativo, Estatística

- Projetos de Arquitetura, Obras Hidráulicas e Máquinas

(MILLER, 2003, p.372).

Defendendo sua tese em 1918⁶, Theodoro teve presente em sua banca os professores catedráticos Licínio Athanásio Cardoso⁷ e Francisco Bhering⁸, assim como os professores substitutos no exercício de catedráticos: Augusto de Brito Belford Roxo⁹ e Maurício Joppert da Silva¹⁰. O tema discutido por Theodoro em sua tese será mais adiante abordado.

Nas palavras de Freire:

O mais profundo e notável trabalho de Theodoro Ramos foi, sem dúvida, a sua These de doutorado: “Sobre as funções de variáveis reaes” (...) É incontestável. Sobretudo se se leva em conta o facto desse trabalho ter sido por elle produzido aos 23 anos de idade [...] (FREIRE, 1936).

⁶ Na pesquisa utiliza-se a publicação feita pela Seção de Obras do Estado de São Paulo e também datada do ano de 1918. O exemplar consultado encontra-se nos arquivos da biblioteca da Escola Politécnica da USP.

⁷ Licínio Athanásio Cardoso (1852-1926): Concluiu os estudos da Escola Militar em 1874, e o curso de Engenharia Militar em 1879, sendo nomeado no ano seguinte professor do curso preparatório. Promovido a capitão, em 1885, no ano seguinte foi nomeado professor de matemática da Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Foi professor de Mecânica Racional.

⁸ Francisco Bhering (? - 1924): Foi professor de Astronomia na Escola Politécnica do Rio de Janeiro Astronomia.

⁹ Augusto de Brito Belford Roxo (1878 -?): Foi diplomado em Engenharia Civil em 1900 pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro e sendo posteriormente, professor de Estabilidade da mesma.

¹⁰ Maurício Joppert da Silva (1890- 1985): Foi professor de Portos e livre docente de Cálculo Diferencial e Integral da Escola Politécnica do Rio de Janeiro.

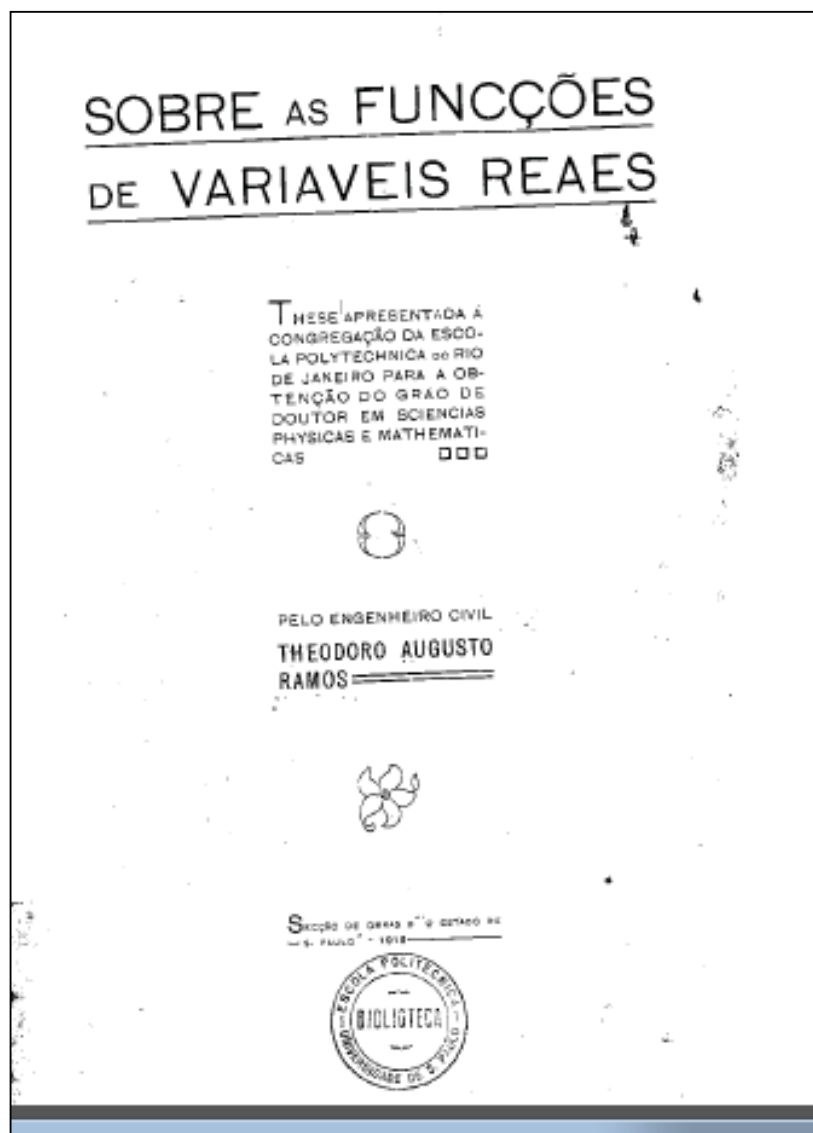


Fig. 1. Capa da tese de doutoramento de Theodoro A. Ramos

Theodoro Augusto Ramos foi colega de Lélío Gama¹¹ (1892 – 1981) e ambos discípulos de Amoroso Costa¹² (1885 – 1928) (SILVA, 1997, p.11). Em um artigo

¹¹ Lélío Itapuambyra Gama (1892 – 1981): Formou-se em engenharia pela Escola Polytechnica do Rio de Janeiro no ano de 1914. Atuou também como diretor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) entre 1952 e 1965, acumulando este cargo com o de diretor do observatório.

¹² Manuel Amoroso Costa (1885-1928): Ingressou no curso de engenharia civil na Escola Politécnica no ano de 1900 formando-se bacharel (1905). No ano de 1906, colou grau como bacharel em Ciências Físicas e Matemáticas. Foi professor na mesma escola atuando na cadeira de eletrotécnica e aplicações industriais e também livre docente de astromia e geodésica.

publicado nas Atas do 5º Colóquio Brasileiro de Matemática do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em 1965, Lélío fala sobre o amigo:

[...] Sentia-me desanimado nas primeiras semanas do curso, quando um dia, no pátio da Escola, ouvi alguém dizer, num grupo próximo: “Este problema só pode ser resolvido com o emprego das funções elípticas”. As palavras causaram-me certo espanto, pois era quase proibido, naquela época, falar em funções elípticas – funções pagãs, não canonizadas. Voltei-me, entre curioso e surpreso. E foi assim que conheci quem veio a se tornar, dali por diante, até seu prematuro desaparecimento, um grande amigo, um companheiro constante de lutas e de esperanças: Teodoro Ramos. Naquela mesma tarde, descendo juntos a rua do Ouvidor, percebi, desde logo, que ele compartilhava de meu desencanto e de minhas apreensões quanto ao desajustamento existente entre nossas aspirações comuns e os moldes oficiais, vigentes no ensino da matemática. E assim foi que, no curso básico da Escola, tivemos de estudar durante algum tempo, duas matemáticas: uma para fazer exames, e outra, muito diferente, para uso próprio. Esta duplicidade não passou despercebida de alguns mestres, criando-se assim uma situação delicada. Teodoro, mais ousado, não procurou velar, no exame oral de cálculo, a independência de seu espírito. Resultado: grau nove. Eu, por meu lado, escrevi na pedra, em dado momento, com descuidada sinceridade, que uma certa quantidade era menos do que zero. Menor do que zero? Grau nove [...] Mas, voltando ao passado. Teodoro Ramos, ao fim do curso, apresenta sua tese de doutorado, sobre funções reais de variável real. Este acontecimento, criou, na Escola, uma atmosfera densa, opaca, cheia de apreensões, de parte a parte. Um jovem estudante desafiava os cânones oficiais com uma tese estranha, um trabalho exótico. Sussurra-se pelos corredores. Professores grupam-se, prognosticando os lances da peleja próxima. Preparam-se, por fim, as armaduras intelectuais, para o embate solene da defesa da tese. Vou relatar um episódio desta defesa, ou, melhor, desta acusação. Teodoro se referira, em seu trabalho, a uma certa propriedade que se verificava no domínio de existência de uma função “salvo talvez”, dizia ele, “nos pontos de um conjunto de medida nula”. Este “salvo talvez” era a cunhagem, em língua portuguesa, da expressão “sauf peut-être” dos autores franceses. Era uma adaptação semelhante ao uso atual do sintético “se e só se”, oriundo do “if and only if” dos matemáticos de língua inglesa. Queria ele afirmar que a propriedade em questão podia deixar de se verificar no campo de existência da função, mas que, neste caso, os pontos excepcionais formariam um conjunto de medida nula. Pois meus senhores, neste ponto da tese, o autor foi censurado com veemência, mais ou menos nos seguintes termos: “O Sr. pretende ser um matemático rigoroso. No entanto, emprega, no seu raciocínio matemático, o advérbio “talvez”, que denota incerteza, imprecisão, ambigüidade”. Como era de se esperar, grau nove. Quando abracei Teodoro, pelo resultado, disse-lhe:

“Se lhe tivessem dado grau dez eu não o felicitaria com o mesmo entusiasmo” [...] (GAMA, 1965, p.25-28).

Nota-se por este depoimento de Lélío Gama que o tema da tese de doutoramento de Theodoro causou polêmica na época. Logo após sua defesa, este conseguiu uma posição acadêmica na Escola Politécnica de São Paulo, onde passou a ministrar aulas e estabeleceu moradia nesta cidade (segundo o Anuário da Escola Politécnica do ano de 1932, Theodoro residia na Rua Augusta nº 529, telefone: 7-1009). Nesta escola, lecionou a disciplina de Mecânica Racional e foi professor catedrático da cadeira de Vetores, Geometria Analítica, Geometria Projetiva e Aplicação à Nomografia.

Também na Escola Politécnica de São Paulo, Theodoro Augusto Ramos, em 11 de Março de 1918 foi designado para exercer o cargo de lente substituto interinamente da I Secção, o que pode ser confirmado pela ficha abaixo retirada de seu arquivo e encontrada no arquivo histórico da Escola Politécnica da USP. Esta secção contava com as disciplinas de Matemática Elementar, Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal.

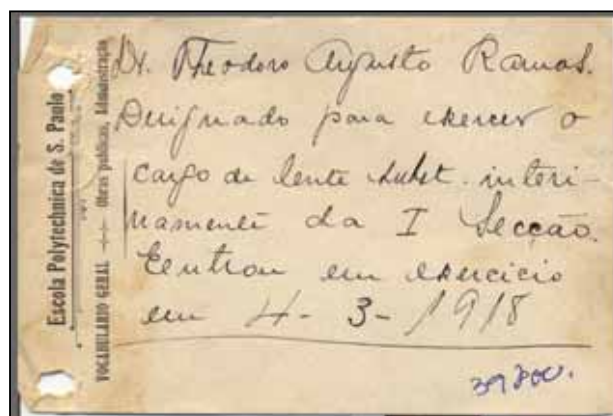


Fig. 2. Documento 2

Segundo D'Ambrosio:

Em 1919, Theodoro Ramos transferiu-se para a Escola Politécnica de São Paulo, fato que teria fundamental importância no desenvolvimento da matemática em São Paulo e no Brasil. Introduziu temas novos nos currículos e deu início a um curso de Cálculo Vetorial. Deve-se destacar que na década de 20 começaram a surgir, em outros estados brasileiros, vários livros de Cálculo Vetorial, representando uma grande inovação, certamente influenciada por Otto de Alencar e Manuel Amoroso Costa, na Escola de Engenharia do Rio de Janeiro (D'AMBROSIO, 2011, p. 69).

Ao que consta nos arquivos da Escola Politécnica de São Paulo, em 7 de fevereiro de 1919, Theodoro teria se inscrito no concurso público para o cargo de Professor

Substituto Interino da primeira secção desta Escola. Esta secção abrangia as seguintes cadeiras (disciplinas): Matemática Elementar, Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal. Foi para este concurso que Theodoro apresentou o estudo intitulado *Questões sobre as Curvas Reversas* e que se trata de uma continuação do seu trabalho e pesquisa em matemática. Estas informações também são encontradas em Silva (2008, p. 76 -77).

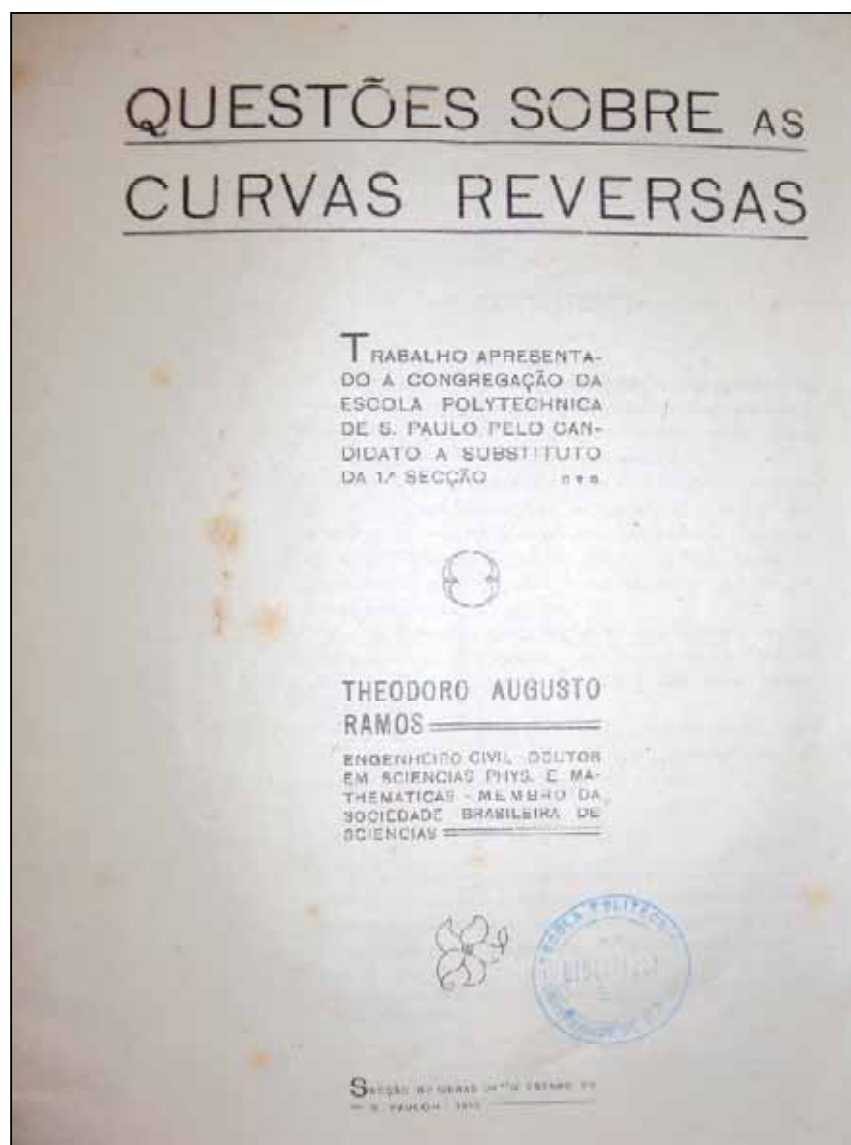


Fig. 3. Capa do trabalho apresentado para ingresso na Escola Politécnica de São Paulo.

Nas palavras de Freire:

Um belo e penetrante estudo é igualmente o feito por Theodoro Ramos sobre as “Curvas reversas” e que constituiu a sua These de concurso á Politechnica de São Paulo. Neste trabalho trata Theodoro da definição das curvas reversas pelo conjunto dos seus planos osculadores, dada a

vantagem que isso apresenta na indagação de propriedades relativas à torção das mesmas. Há ali a salientar a obtenção da integral geral de uma equação de Riccati mediante uma única quadratura. Theodoro apoia essa sua indagação no facto da “aresta da reversão de uma desenvolvível isotropa que passa por uma dada curva poder sempre ser considerada como uma evoluta dessa mesma curva.” É de uma elegância notável essa parte do seu trabalho (FREIRE, 1936).

Acresita-se que embora Theodoro tenha ingressado na Escola Politécnica no ano de 1918, a sua situação de professor substituto só foi oficializada apenas no ano de 1919 com a apresentação do trabalho, já mencionado, *Questões sobre as Curvas Reversas*.

Ainda de acordo com os arquivos consultados neste ano, Theodoro iniciou suas atividades administrativas no Estado. O parecer da Comissão de Concurso foi unanimemente aprovado em sessão da Congregação realizada em 3 de Abril de 1919. A Comissão do Concurso era composta do Diretor F. P. Ramos de Azevedo¹³ e dos professores, S. Thiago¹⁴, Lucio Rodrigues¹⁵, R. Fajardo¹⁶ e C. G. Shalders¹⁷. Por

¹³ Francisco de Paula Ramos de Azevedo (1851-1928): Formou-se em engenheiro-arquiteto no ano de 1878 na *École Speciale du Génie Civil et des Arts et Manufactures* da Universidade de Gand, na Bélgica. Foi engenheiro, arquiteto, administrador, empreendedor e professor.

¹⁴ Rodolpho Baptista de São Thiago (1870-1933): Foi titulado engenheiro civil em 1893 pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Foi através da Escola Politécnica de São Paulo que ingressou no âmbito acadêmico. Em 15 de outubro de 1898 assumiu o posto de professor interino substituto e em 9 de agosto de 1901 tornava-se catedrático de Geometria Analítica e, mais tarde, de Cálculo Infinitesimal. Disponível em: <<http://www3.poli.usp.br/pt/a-poli/historia/galeria-de-diretores/199-prof-dr-rodolpho-baptista-de-sao-thiago.html>>. Acesso em 15. Dez. 2012

¹⁵ Lúcio Martins Rodrigues (1876- 1970): Com apenas 15 anos, ingressou no curso de engenharia da Escola Politécnica do Rio de Janeiro e em 1894, aos 19 anos, findou a graduação. O ano de 1901 marcou o início de sua carreira no magistério. Foi o primeiro colocado no concurso para o Ginásio do Estado na cidade de Campinas (interior do Estado de São Paulo), em seguida nomeado pelo conselheiro e presidente do Estado Henrique Alves para o cargo de professor titular. Nesse ínterim, a Escola Politécnica de São Paulo também se interessou pelo mister do professor Rodrigues. Assim, em 1902, tornou-se lente substituto da primeira seção de matemática. Passados vários anos de sua trajetória na Escola, em 1932 foi designado a titular de Topografia, Geodésia Elementar e Astronomia de Campo e, mais adiante, devido ao falecimento do mestre Theodoro Ramos, foi transferido para a cadeira de Cálculo Vetorial e Mecânica Racional. Nos ofícios administrativos, por seu turno, igualmente ganhou destaque: entre 1938 e 1939 foi reitor da Universidade de São Paulo e, de julho a dezembro de 1941, assumiu a função de diretor da Politécnica. Disponível em: <<http://www3.poli.usp.br/pt/a-poli/historia/galeria-de-diretores/208-prof-dr-lucio-martins-rodrigues.html>>. Acesso em 15. Dez. 2012.

¹⁶ Rogério Fajardo (? -?): Foi casado com Anna da Rocha Fajardo e professor da Escola Politécnica de São Paulo. Não foram encontradas maiores informações.

¹⁷ Carlos Gomes de Souza Shalders (1863 - 1963): Tornou-se engenheiro civil em 1885 pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Em 1894, ingressou na Escola Politécnica de São Paulo como professor substituto de matemática do Curso Preliminar. Pelo seu esforço veio a tornar-se catedrático de

unanimidade de votos, foi, na mesma Congregação, indicado o nome do professor Theodoro ao Governo.

Após Theodoro ser aprovado em concurso, foi nomeado Professor Substituto Interino, por Decreto do Governo Paulista, de 16 de abril de 1919. Em 25 de Abril de 1919, prestou compromisso e tomou posse do cargo de lente substituto interino da I Secção.

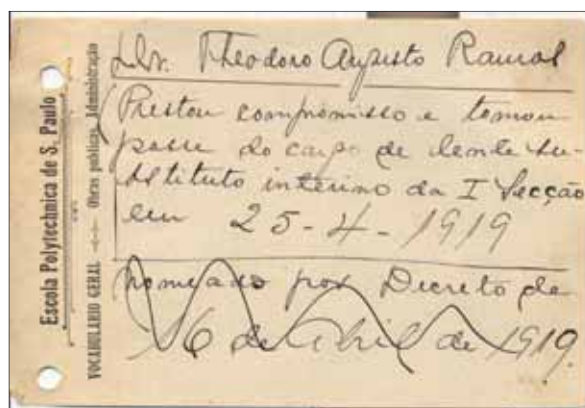


Fig. 4. Documento 4

Em 2 de Março de 1920, Theodoro foi designado para substituto do professor Dr. Rogerio Fajardo, lente catedrático, que reassumiu em 2 de setembro de 1920.



Fig. 5. Documento 5

Complementos, seguindo, nessa empreitada, 38 anos em dedicação à Escola, que, por fim, culminaram como diretor, entre 1931 e 1933. No papel de diretor, Shalders enfrentou um grande desafio: a Revolução Constitucionalista de 1932. Sob seu comando, a Escola de Politécnica de São Paulo teve participação importante nesses acontecimentos, dado que na histórica Congregação por ele presidida, definiu-se que a Escola aliar-se-ia ao governo paulista contribuindo principalmente na consecução de artilharia. Veja-se, nesse sentido, o exemplo das granadas – segundo relatos, feitas ali aos milhares - em um momento no qual era impossível importar armamentos. Disponível em: <<http://www3.poli.usp.br/pt/a-poli/historia/galeria-de-diretores/197-prof-dr-carlos-gomes-de-souza-shalders.html>>. Acesso em 15. Dez. 2012.

Em 25 de Abril de 1922, foi proposta ao governo do Estado, a nomeação do Dr. Theodoro Augusto Ramos para lente substituto efetivo da I Secção e de acordo com Silva (2008, p. 77), “Por Decreto de 4 de maio de 1922, foi ele nomeado professor efetivo.”

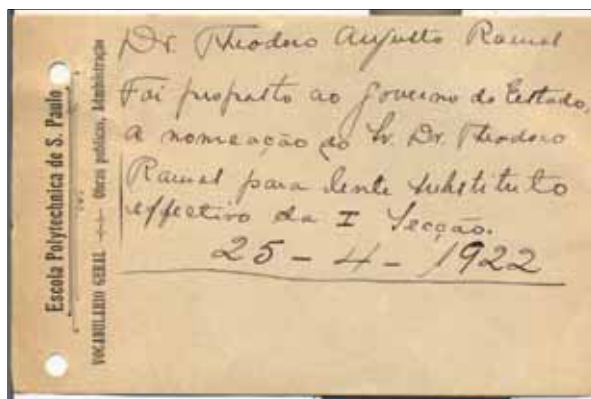


Fig. 6. Documento 6

Em 9 de Maio de 1922, Theodoro Augusto Ramos, prestou compromisso e tomou posse do cargo de lente substituto efetivo da I Secção, sendo nomeado por Decreto de 4 de Maio de 1922.

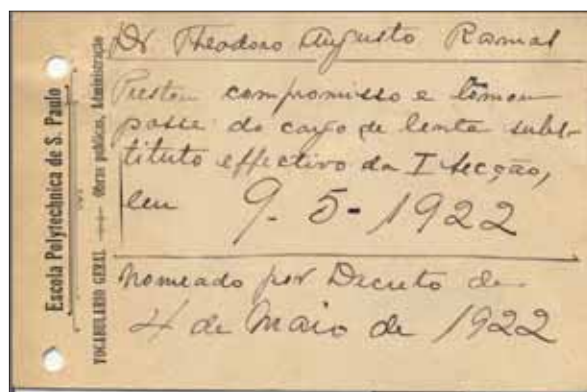


Fig. 7. Documento 7

Em 1 de Agosto de 1923, Theodoro Augusto Ramos foi designado para substituto do Dr. Rodolfo Baptista S. Thiago, no cargo de lente catedrático, no qual reassumiu em 1 de outubro de 1923.

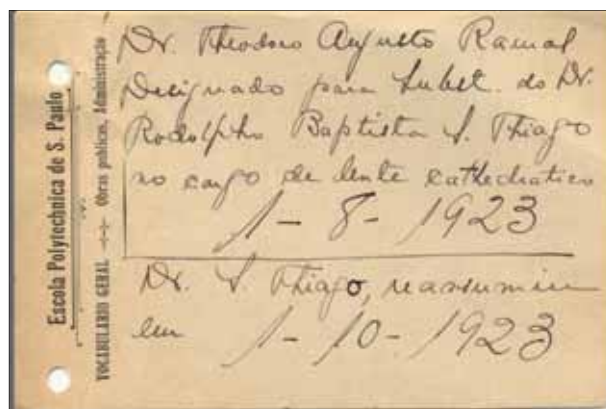


Fig. 8. Documento 8

Em 15 de Fevereiro de 1924, foi designado para substituir o Dr. Felise Hegg, que reassumiu em 1 de Abril de 1924.



Fig. 9. Documento 9

A saber, “O Decreto Estadual n.º 2128, de 31 de dezembro de 1925, desdobrou a cadeira Cálculo Infinitesimal em duas outras, a saber: 1) Vetores, Geometria Analítica, Geometria Projetiva e suas aplicações à Nomografia; 2) Cálculo Diferencial e Integral” (SILVA, 2008, p. 77).

Em 16 de Janeiro de 1926, Dr. Theodoro Augusto Ramos prestou compromisso e tomou posse do cargo de professor catedrático das cadeiras reunidas Vetores e Geometria Projetiva e suas Aplicações à Nomografia. Foi nomeado pelo decreto de 2 de Janeiro de 1926.

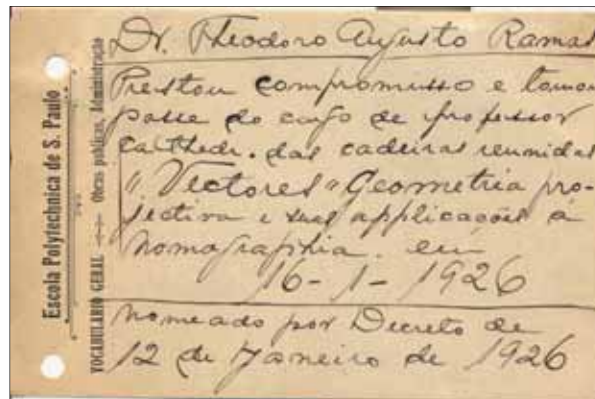


Fig. 10. Documento 10

É sabido que na época o ensino de Matemática no país encontrava-se estagnado¹⁸ e ao que consta, Theodoro teria imprimido mudanças nos programas da Escola Politécnica, no sentido de modernizá-lo. De acordo com D'Ambrosio:

Em 1919, Theodoro Ramos foi admitido como professor substituto da Escola Politécnica de São Paulo com uma tese sobre *Questões sobre as curvas reversas*, assumindo em 1926, na mesma instituição, a cátedra de Mecânica Racional. Iniciou-se, então, uma intensa modernização dos programas de matemática na Escola Politécnica (D'AMBROSIO, 2011, p.70).

Em 5 de Abril de 1926, foi designado para o cargo de professor substituto interino da II Secção, tendo desistido em 1 de Fevereiro de 1927. “Por Decreto do Governo Estadual, de 2 de outubro de 1926, Theodoro A. Ramos foi nomeado Professor Catedrático da cadeira 1¹⁹” (SILVA, 2008, p. 77).

¹⁸ Sabe-se que o ensino secundário no Brasil colônia, império e primeiros anos do período republicano fora deficiente, desorganizado e de baixa qualidade. Relativo ao ensino superior, na segunda metade do século XIX e as duas primeiras décadas do século XX predominara no meio intelectual brasileiro, a partir das escolas superiores, a ideologia positivista de A. Comte com preceitos que balizaram a filosofia, a política e a ciência no Brasil de então. Sob a influência daquela ideologia o ensino das Matemáticas sofrera atraso e danos consideráveis, se considerarmos como referencial o desenvolvimento das Matemáticas que ocorria no velho continente. Para maiores informações, o leitor pode consultar, dentre outras, a obra de Clóvis Pereira da Silva, *A matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento*, Editora: UFPR, 1992, 2 reimpressão.

¹⁹ Vetores, Geometria Analítica, Geometria projetiva e suas aplicações a Nomografia.

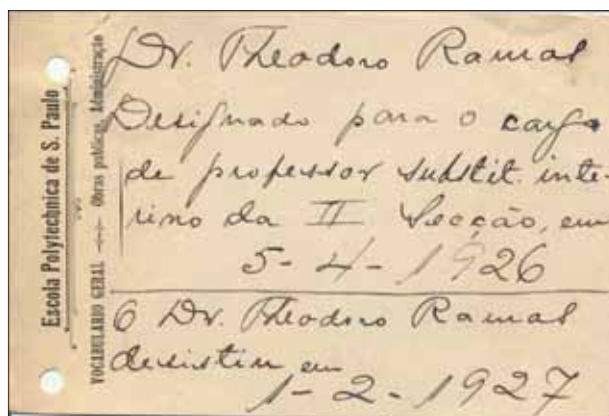


Fig. 11. Documento 11

Além das atividades de docência e com base na documentação encontrada, Theodoro A. Ramos foi membro da Academia Brasileira de Ciências, na qual tomou posse em 29 de novembro de 1918 e, a convite de seu presidente, fez uma conferência, em 1929, sobre Joaquim Gomes de Sousa²⁰.

No Anuário da Escola Politécnica para o ano de 1932 (p.17), citavam-se as cadeiras de responsabilidade de Theodoro. A saber: “Lente substituto da 1ª secção (Regulamento de 1918). Lente catedrático da cadeira de Vetores, Geometria Analítica, Geometria Projetiva e suas Aplicações à Nomografia. Atualmente professor da cadeira nº 2, Geometria Analítica e Projetiva, Nomografia, Cálculo Vetorial.”

Esta última cadeira era para o curso de Engenheiros Civis, Arquitetos e Eletricistas. Ainda segundo o Anuário da Escola para o ano de 1932. Seguem os conteúdos:

Geometria (1º Semestre)

Introdução

- 1- Revisão de algumas noções básicas de Geometria.
- 2- Interpretação das soluções infinitas; coordenadas homogêneas. Elementos imaginários.
- 3- Proposições gerais sobre as linhas e as superfícies
- 4- Lugares geométricos. Generalidades. Exemplos.

²⁰ Joaquim Gomes de Sousa (1829 -1864): Nascido em Itapecuru Mirim, província do Maranhão, desistiu de cursar medicina, dedicando-se aos estudos de matemática que foram realizados na Escola Militar do Rio de Janeiro e concluídos no ano de 1848. Em seguida foi aprovado para professor catedrático em concurso de lente substituto para a Escola Militar sendo, também, nomeado capitão honorário da Escola Militar. Tido como pioneiro nos estudos de matemática no Brasil esteve na Europa (1855) e na França onde publicou diversos trabalhos. Doutorou-se em 1858 em Paris, sendo nomeado no mesmo ano, lente catedrático da primeira cadeira (Astronomia), do quarto ano do curso Matemático e de Ciências Físicas e Naturais da Escola Central, sucessora da Escola Militar.

I Parte

- 5- Linhas planas em coordenadas retilíneas:
 - a. Tangentes e normais. Aplicação as linhas algébricas.
 - b. Assíntotas
 - c. Centros. Diâmetros.
 - d. Determinação das linhas planas. Caso das linhas algébricas.
- 6- Linhas do 2º grau:
 - a. Classificação
 - b. Centros, diâmetros, eixos e assíntotas
 - c. Forma reduzida da equação da curva
 - d. Modos geométricos de redefinir as curvas do 2º grau. Focos e diretrizes.
 - e. Determinação das curvas do 2º grau
 - f. Intersecção de 2 curvas do 2º grau. Curvas passando pela intersecção de duas outras.
- 7- Estudo das curvas planas definidas parametricamente. Curvas racionais.
- 8- Estudo das curvas em coordenadas polares.
- 9- Noções sobre os sistemas de coordenadas trilineares.

II Parte

- 10- Geração das superfícies. Caso das superfícies cilíndricas, cônicas, conoides, de revolução
- 11- Tangentes e planos tangentes as linhas e as superfícies. Normais e planos normais.
- 12- Centros das superfícies. Superfícies diametrais
- 13- Superfícies do 2º grau:
 - a. Centros. Planos diametrais e diâmetros.
 - b. Planos e direções principais.
 - c. Forma reduzida da equação da superfície.
 - d. Geração retilínea das superfícies do 2º grau.
 - e. Determinação das superfícies do 2º grau. Intersecção de duas superfícies.
- 14- Noções sobre os Sistemas de coordenadas tetraédricas.
- 15- Noções sobre as transformações geométricas. Exemplos.

III Parte

- 16- Relação anarmônica de 4 elementos:
 - a. De uma pontilhada;
 - b. De um feixe de retas no plano;
 - c. De um feixe de planos.
- 17- Correspondência projetiva entre pontilhadas, feixes de retas e feixes de planos.
- 18- Pontilhadas e feixes em involução.
- 19- Aplicações. Geração projetiva das curvas e das superfícies de 2ª ordem
- 20- Transformação pontual projetiva entre sistemas planos.
- 21- Correlação no plano. Equação tangencial de uma curva.
- 22- Aplicações as curvas de 2ª ordem:
 - a. Pólos e polares. Figuras polares recíprocas.
 - b. Séries projetivas de pontos sobre uma cônica. Séries projetivas de tangentes a uma cônica.

- c. Teoremas de Pascal e de Brianchon. Casos particulares.
 - d. Teorema de Desargues. – Sturm e teoremas correlativos. Casos particulares.
- 23- Problemas sobre a construção das cônicas
- 24- Noções sobre as transformações homográficas e sobre a correlação no espaço.

Nomografia (2º Semestre)

- 1 - Generalidades sobre a nomografia.
- 2 – Representação no caso de 2 variáveis. Escalas.
- 3 – Representação das equações com 3 variáveis:
 - a. Ábacos com linhas cruzadas. Principais tipos.
 - b. A anamorfose. Aplicação.
 - c. Ábacos hexagonais.
 - d. Ábacos de pontos alinhados e suportes retilíneos.
 - e. Ábacos de pontos alinhados e suportes curvilíneos.
- 4 – Aplicações das transformações projetivas a construção dos ábacos. Exemplos.
- 5 – Representação das equações com mais de 3 variáveis:
 - a. Ábacos com cruzamentos múltiplos.
 - b. Ábacos com alinhamentos múltiplos.
 - c. Ábacos de duplo alinhamento paralelo e ábacos em esquadro.
- 6 – Sistemas cotados móveis.
- 7 – Aplicação dos métodos nomográficos à pesquisa das leis empíricas.

Vetores (2º Semestre) **ÁLGEBRA VETORIAL**

- 1- Grandezas escalares e vetoriais. Grandezas vetoriais livres e localizadas. Vetores livres. Convenções sobre os vetores.
- 2- Soma de vetores. Produto de um vetor por um número real.
- 3- Vetores coplanares. Decomposição de um vetor segundo 3 direções não coplanares.
- 4- Produto escalar de dois vetores. Propriedades.
- 5- Produto vetorial de dois vetores. Propriedades.
- 6- Produto misto de vetores. Propriedades.
- 7- Duplo produto vetorial. Propriedades.
- 8- Aplicação das operações vetoriais elementares a algumas questões de Geometria.
- 9- Representação das grandezas vetoriais localizadas. Sistemas de vetores localizados.
- 10- Noções sobre as operações vetoriais lineares.
- 11- Rotação de um vetor. Caso do plano. Operador i . Exponenciais. Representação de um vetor no plano.
- 12- Grandezas polares e grandezas axiais. Generalidades e exemplos.

ANÁLISE VETORIAL

- 13- Vetores funções de um escalar. Limites e continuidade: Hodógrafo. Proposições mais importantes sobre as funções vetoriais contínuas.

- 14- Derivada de um vetor. Regras de derivação. Propriedades das derivadas vetoriais.
- 15- Fórmulas de Taylor e de Mac-Laurin para as funções vetoriais de um escalar.
- 16- O operador i e as exponenciais nas derivações.
- 17- Estudo vetorial das curvas:
 - a. Tangente. Normais. Plano Normal. Plano osculador. Plano rectificante.
 - b. Curvatura e torsão. Fórmulas de Frenet. Aplicações.
 - c. Estudo das curvas planas. Aplicações.
- 18- Funções vetoriais de dois escalares. Limites e continuidade. Derivadas parciais.
- 19- Estudo vetorial das superfícies:
 - a. Plano tangente. Normal.
 - b. Curvatura de uma linha traçada sobre uma superfície. Curvatura de uma superfície.
 - c. Estudo das superfícies regradas e das superfícies de revolução.
- 20- Funções escalares de ponto. Derivada em uma direção. Propriedade.
- 21- Campo vetorial. Funções vetoriais de ponto. Derivada em uma direção. Propriedades.
- 22- Gradiente de uma função escalar de ponto. Propriedades.
- 23- Rotor de uma função vetorial do ponto. Propriedades.
- 24- Divergência de uma função vetorial de ponto. Propriedades.
- 25- Integrais das funções escalares e vetoriais de ponto, estendidas a uma região do espaço.
- 26- Teoremas sobre o gradiente, sobre a divergência e sobre o rotor. Aplicações.
- 27- Teorema de Stokes. Aplicações.

São Paulo, Novembro de 1929

Theodoro Augusto Ramos

Professor catedrático

(ANUÁRIO DA ESCOLA POLITÉCNICA DE SÃO PAULO PARA
O ANO DE 1932, p. 196 – 199).

Nos anos seguintes, observam-se pelas fichas de cadastro que Theodoro tirou várias licenças da universidade, iniciando uma de seis meses em 10 de Março de 1930. Neste ano, o engenheiro-matemático esteve visitando a cidade de Paris e, de acordo com D'Ambrosio:

Como professor-visitante em Paris, 1930, Theodoro Ramos ministrou um curso sobre Vetores, que foi publicado pela prestigiosa Librairie Scientifique Albert Blachard, com o título *Leçons sur Le Calcul Vectoriel*. No “Avant-Propos” Theodoro Ramos diz: *L'utilité de l'usage des “vecteurs” dans l'étude des questions les plus variées de Géométrie, de Mécanique, de Physique est désormais hors de discussion, et nombreuses sont les écoles techniques supérieures qui maintiennent régulièrement des cours sur Le Calcul Vectoriel. A l'École Polytechnique de São Paulo (Brésil), em dehors de l'enseignement de la chaire de Théorie des Vecteurs, fondée en janvier de 1926, des cours libres ont été organisés*

pour l'instruction des ingénieurs qui voudrait pousser des études de Physique théorique. Le petit ouvrage que nous présentons au public contient à peu près la matière d'un cours libre de Calcul Vectoriel professé pendant le second semestre de 1929, et qui a été orienté surtout vers les éléments de l'analyse vectorielle et vers les théories préparatoires à l'étude du Calcul Tensoriel (T.A.Ramos)(D'AMBROSIO, 2011, p.70).

Observa-se que no Brasil, no início do século XX, Otto de Alencar²¹, Amoroso Costa, Lélío Gama e Theodoro Augusto Ramos eram matemáticos excepcionalmente conhecidos e contribuintes para o grande passo no desenvolvimento da Matemática no país. Nesse cenário, comemorávamos o centenário da independência, com uma exposição intitulada *Exposição Internacional do Centenário da Independência* e realizada no Rio de Janeiro de 7 de setembro de 1922 a 23 de março de 1923. Esta, na época, veio a projetar o Brasil mundialmente e ainda hoje é considerada como sendo a maior exposição internacional realizada no país. Estes fatos, aliados ao contato de matemáticos brasileiros com os trabalhos do matemático francês Émile Borel, dentre outros, possibilitaram o fortalecimento do vínculo entre os dois países e conseqüentemente a oportunidade de uma visita de Theodoro Augusto Ramos às terras estrangeiras.

Deste modo, conhecido o trabalho empreendido por Theodoro na Escola Politécnica de São Paulo, o mesmo é convidado a ministrar um curso de Cálculo Vetorial em Paris, o que veio a gerar sua publicação por uma tradicional editora no país. Em seguida, apresentam-se as folhas de rosto dos dois exemplares: as notas de aulas utilizadas no Brasil e a publicação francesa.

Para Freire:

O que caracteriza as “Lições sobre o Calculo Vetorial”, além do seu real valor didactico, em que assumptos de Geometria, de Calculo, e de Physica, são tratados com notavel equilibrio de clareza, de synthese e de rigor, é a sua fidelidade ao espirito do methodo vetorial: as noções e relações que na obra em questão se encontram, apresentam-se com toda pureza do seu valor intrínseco (FREIRE, 1936).

²¹ Otto de Alencar Silva (1874-1912): Formou-se engenheiro pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro no ano de 1893. Trabalhou como professor substituto (Física, Astronomia e Topografia) na mesma escola de 1902 a 1906. Foi professor efetivo na mesma escola e cadeira de 1907 a 1911 e, posteriormente, catedrático em Topografia (1911-1912).

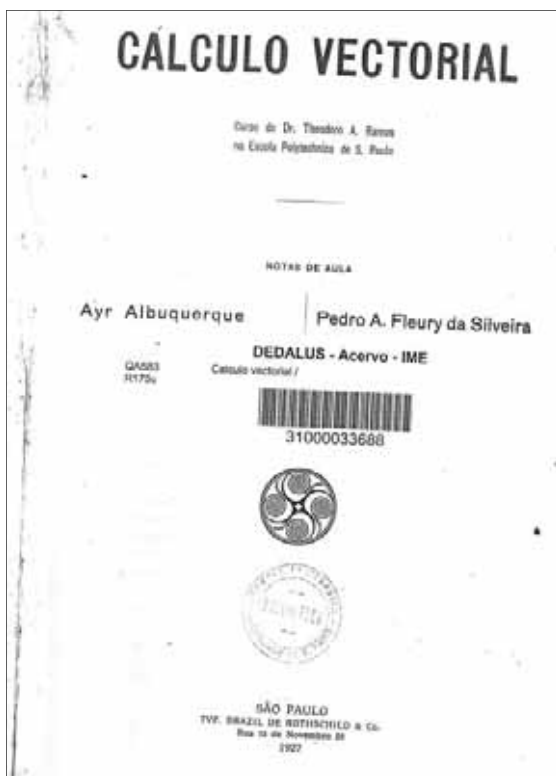


Fig. 12. Capa da publicação brasileira.

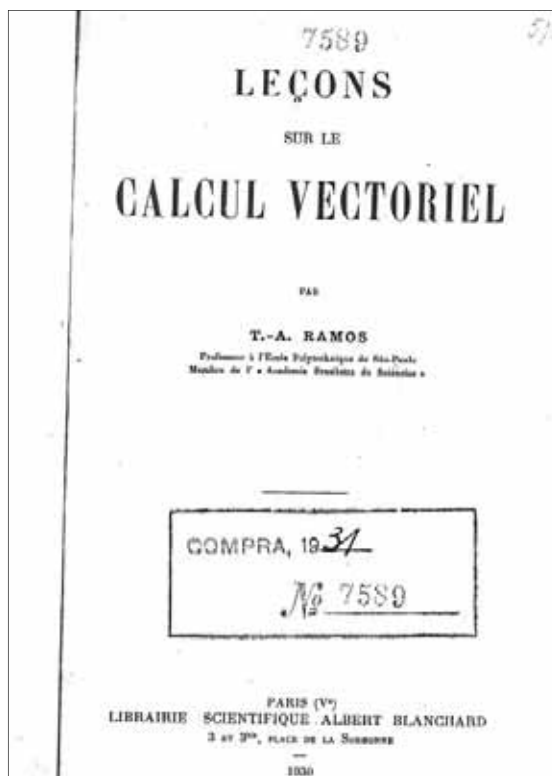


Fig. 13. Capa da publicação francesa.

Como há dados de que o mesmo deixa a Secretaria de Estado da Educação e da Saúde Pública em 22 de Julho de 1931, possivelmente, acredita-se que este período compreendido de 10 de Março de 1930 a 22 de Julho de 1931, Theodoro esteve se dedicando às atividades desta Secretaria, além de ter sido professor visitante em Paris, como já colocado por D'Ambrosio (2011). Os documentos que seguem fazem referências a este período.

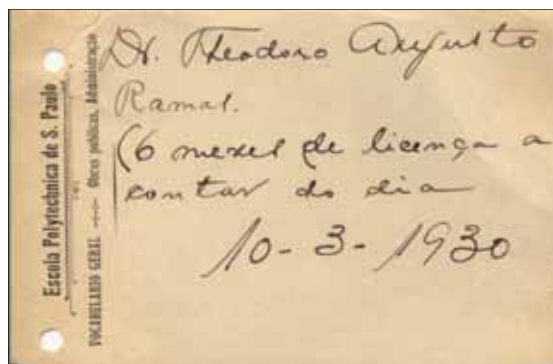


Fig. 14. Documento 14

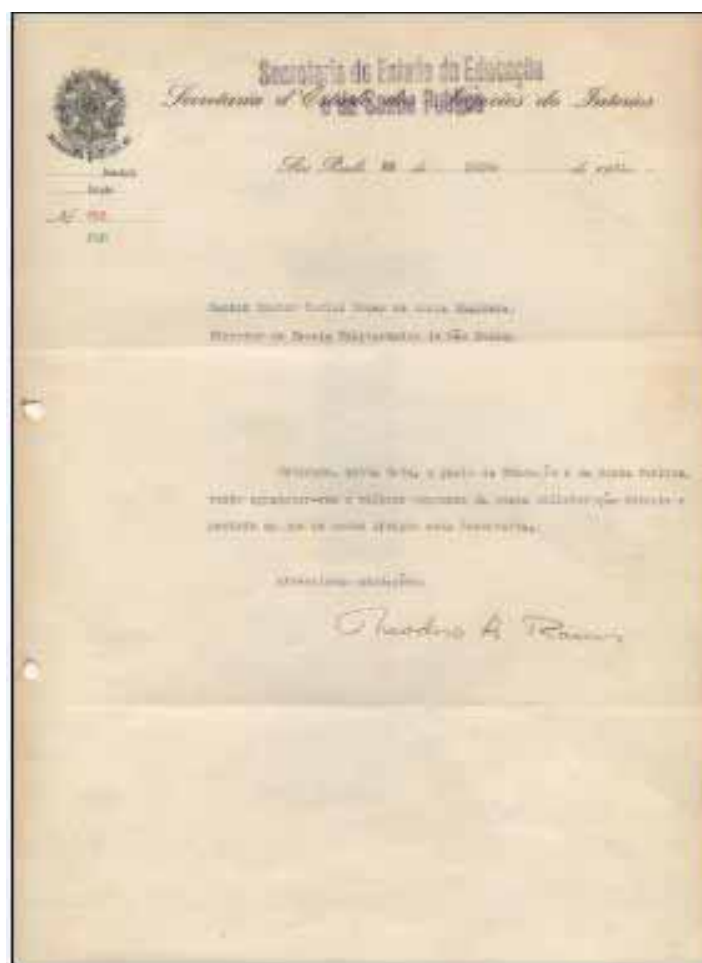


Fig. 15. Documento 15

Destaque para o texto do documento acima:

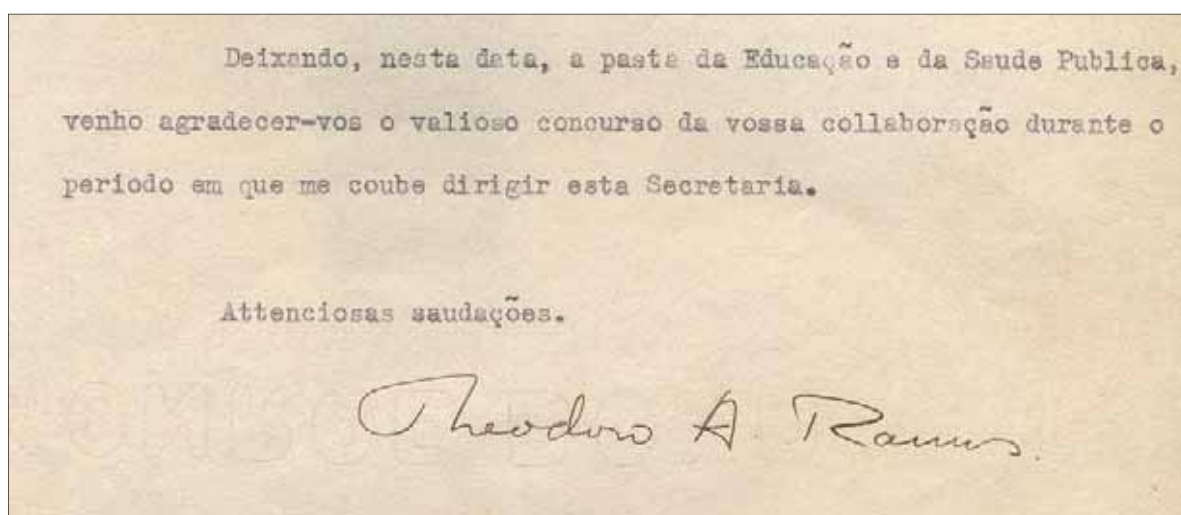


Fig. 16. Documento 16

Por Decreto do Governo Estadual, de 19 de maio de 1932, Theodoro A. Ramos foi nomeado professor catedrático²² da cadeira Mecânica Racional precedida de Cálculo Vetorial. Embora não tenham sido encontrados documentos, cartas ou mesmo registros de relatos nos locais de busca, já anteriormente citados, de acordo com Silva (2008, p.77): “[...] posteriormente Theodoro A. Ramos foi nomeado Vice-Diretor da Escola Politécnica de São Paulo cargo que não assumiu por desistir da nomeação”.

Theodoro Augusto Ramos desempenhou ainda, alguns cargos administrativos no âmbito estadual e federal. Por Decreto Federal de 2 de Julho de 1931 foi nomeado pelo chefe do Governo Provisório da República, para membro do Conselho Nacional de Educação, pelo prazo de quatro anos. Representou no Conselho, o Ensino Superior Estadual Equiparado.

Consta no Anuário da Escola Politécnica para o ano de 1933 (p.124 – 128), como designado para Theodoro Augusto Ramos, a cadeira n° 2: Mecânica Racional precedida de Cálculo Vetorial. Segue o programa:

Mecânica Racional precedida de Cálculo Vetorial

Cálculo Vetorial

1ª parte (1º ano)

A – ELEMENTOS DA ALGEBRA VETORIAL

- 1- Grandezas escalares e vetoriais. Grandezas vetoriais livres e localizadas. Vetores livres. Convenções sobre os vetores.
- 2- Soma de vetores. Produto de um vetor por um número real.
- 3- Vetores coplanares. Vetores não coplanares.
- 4- Produto escalar. Produto vetorial.
- 5- Produto misto. Duplo produto vetorial.
- 6- Aplicação das operações vetoriais elementares a algumas questões de Geometria.
- 7- Grandezas polares e grandezas axiais. Generalidades e exemplos.
- 8- Rotação de um vetor. Caso do plano. Operador i . Exponenciais. Representação de um vetor no plano.

ELEMENTOS DE ANÁLISE VETORIAL

- 9- Vetores funções de um escalar. Limites e continuidade: Hodógrafo. Proposições mais importantes sobre as funções vetoriais contínuas.

²² A referência a *professor catedrático* foi confirmada na documentação consultada acerca do personagem no já citado acervo histórico que a Escola Politécnica mantém nas suas dependências.

- 10- Derivada diferencial de um vetor. Regras de derivação. Propriedades das derivadas vetoriais. Derivadas sucessivas. Aplicações.
- 11- Estudo vetorial das curvas:
 - a. Tangente. Normais. Plano Normal. Plano osculador. Plano rectificante.
 - b. Curvatura e torsão. Fórmulas de Frenet. Aplicações.
 - c. Estudo das curvas planas. Aplicações.
- 12- Funções vetoriais de dois escalares. Limites e continuidade. Derivadas parciais. Diferencial total.
- 13- Estudo vetorial das superfícies:
 - a. Plano tangente. Normal.
 - b. Curvatura de uma linha traçada sobre uma superfície. Curvatura de uma superfície.
 - c. Aplicação as linhas particulares traçadas sobre uma superfície.
- 14- Funções escalares de ponto. Derivada em uma direção e suas propriedades
- 15- Campo vetorial. Funções vetoriais de ponto. Derivada em uma direção e suas propriedades.

II PARTE (2º ano)

A – COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA VETORIAL

- 16- Sistemas de vetores localizados:
 - a. Generalidades.
 - b. Sistemas equivalentes de vetores.
 - c. Redução de um sistema de vetores.
- 17- Noções sobre os operadores vetoriais lineares.

B – COMPLEMENTOS DE ANÁLISE VETORIAL

- 18- Gradiente de uma função escalar de ponto e suas propriedades.
 - 19- Rotor de uma função vetorial de ponto e suas propriedades.
 - 20- Divergência de uma função vetorial de ponto e suas propriedades.
 - 21- Integrais das funções escalares e vetoriais de ponto, estendidas a uma região do espaço.
 - 22- Teoremas sobre o gradiente, sobre a divergência e sobre o rotor. Aplicações.
 - 23- Teorema de Stokes e suas aplicações.
- OBSERVAÇÃO. – O programa do curso de Cálculo Vetorial no 1º Ano corresponde a 22 lições teóricas.

Mecânica Racional (2º ano)

I PARTE Cinemática

- 1 – Considerações preliminares.
- 2 – Movimento de um ponto:

- a. Generalidades.
 - b. Velocidade e aceleração.
 - c. Estudo de alguns movimentos simples.
- 3 – Generalidades sobre o movimento de um sólido.
- 4 – Movimentos simples de um sólido:
- a. Translação.
 - b. Rotação em torno de um eixo fixo.
 - c. Movimento helicoidal.
- 5 – Movimento geral de um sólido:
- a. Distribuição das velocidades.
 - b. Distribuição das acelerações.
 - c. Casos particulares: movimento em torno de um ponto fixo e movimento paralelamente a um plano fixo.
- 6 – Composição de movimentos:
- a. Generalidades.
 - b. Teorema fundamental sobre a composição de velocidades.
 - c. Composição de acelerações; teorema de Coriolis.
 - d. Composição de movimentos em um número qualquer; casos mais importantes.
 - e. Aplicações.
- 7 – Estudo especial do movimento de uma figura plana em seu plano. Aplicações.

II PARTE

Introdução à Estática e à Dinâmica

- 8- Conceitos e princípios fundamentais da Mecânica. A Estática. A Dinâmica.
- 9 – Trabalho das forças. Função de forças e suas condições de existência.
- 10 – Geometria das massas:
- a. Centros de gravidade.
 - b. Momentos de inércia.
- 11- Cinética:
- a. Quantidades de movimento e momentos cinéticos.
- 12 – As unidades em Mecânica. Homogeneidade e semelhança em Mecânica.
- 13 –Atração universal. Equações de Laplace e de Poisson. Atração sobre um ponto material distante.

III PARTE

Estatística

- 14 - Equilíbrio de um ponto material:
- a. Ponto livre
 - b. Ponto sobre uma superfície fixa
 - c. Ponto sobre uma curva fixa.
- 15 – Equilíbrio de um sistema de pontos materiais:
- a. Generalidades
 - b. Condições necessárias de equilíbrio.
- 16- Equilíbrio de um sólido livre. Casos particulares de distribuição de forças.

- 17 – Equilíbrio de um sólido sujeito a ligações.
- 18 – Equilíbrio de sistemas deformáveis:
 - a. Grupos de sólidos sujeitos a ligações
 - b. Polígonos funiculares
 - c. Sistemas articulados.
 - d. Fio flexível; catenária.

IV PARTE

Dinâmica do ponto

A – DINÂMICA DO PONTO LIVRE

- 19 – Equações diferenciais do movimento de um ponto material. Teoremas gerais.
- 20 – Movimento retilíneo:
 - a. A força é proporcional à distância de um ponto fixo. Movimento vibratório simples e amortecido.
 - b. A força é inversamente proporcional ao quadrado da distância.
 - c. Movimento dos graves no vazio e no ar.
- 21 – Movimento dos projéteis:
 - a. Movimento dos projéteis no vazio.
 - b. Movimento dos projéteis no ar; curva balística.
- 22 – Movimento devido à força central:
 - a. Propriedades do movimento.
 - b. A força é função da distância ao centro fixo.
 - c. Caso da atração newtoniana; movimento dos planetas; leis de Kepler.
- 23 – Questões elementares de Mecânica Celeste.

B – DINÂMICA DO PONTO SUJEITO A LIGAÇÕES

- 24 – Movimento de um ponto sobre uma curva:
 - a. Equações diferenciais
 - b. Pêndulo simples
 - c. Pêndulo cicloidal
- 25- Movimento de um ponto sobre uma superfície:
 - a. Equações diferenciais
 - b. Pêndulo esférico

V PARTE

Dinâmica dos sistemas

A – TEOREMAS GERAIS

- 26 – Teorema das quantidades de movimento ou do movimento do centro de gravidade.
- 27 – Teorema do momento cinético. Casos particulares. Teorema das áreas.
- 28 – Teorema das forças vivas. Teorema da energia.

B – DINÂMICA DOS SÓLIDOS

- 29 - Movimento de um sólido em torno de um eixo fixo. Pêndulo composto.
- 30 – Movimento de um sólido em torno de um ponto fixo.

- 31 – Teoria do giroscópio. Aplicações.
- 32 – Movimento de um sólido livre.
- 33 – Movimento de um sistema sólidos.

C- MOVIMENTO E EQUILÍBRIO RELATIVOS

- 34 – Teoremas gerais
 - a. Caso de um ponto
 - b. Caso dos sistemas
- 35 – Movimento e equilíbrio relativos na superfície da terra:
 - a. Generalidades
 - b. Movimento dos graves
 - c. Pêndulo de Foucault

VI PARTE

Estudo geral do movimento e do equilíbrio dos sistemas sujeitos a ligações

- 36 – Noções gerais sobre as ligações dos sistemas.
- 37 – Princípio de D'Alembert
- 38 – Teorema dos trabalhos virtuais. Equação geral da Dinâmica. Equação geral da Estática.
- 39 – Cálculo das reações pelo método de Lagrange.
- 40 – Aplicação do teorema dos trabalhos virtuais a problemas de Estática.
- 41 – Princípio de Hamilton.
- 42 – Equações de Lagrange. Aplicações.
- 43 – Estudo dos pequenos movimentos de um sistema em torno de uma posição de equilíbrio. Condição de estabilidade.
- 44 – Equações canônicas do movimento dos sistemas.
- 45 – Teoria das percurssões.

VII PARTE

Mecânica dos fluidos perfeitos

A – EQUILÍBRIO DOS FLUÍDOS

- 46 – Equações gerais do equilíbrio dos fluidos.
- 47 – Equilíbrio relativo de um fluido animado de movimento de rotação.
- 48 – Equilíbrio dos corpos flutuantes. Equilíbrio da atmosfera.

B – DINÂMICA DOS FLUÍDOS

- 49 – Equações gerais do movimento dos fluidos. Propriedades gerais do movimento.
- 50 – Movimento permanente. Teorema de Bernoulli.

(ANUÁRIO DA ESCOLA POLITÉCNICA PARA O ANO DE 1933, p. 124 – 128).

O ano de 1933 foi importante para a Universidade de São Paulo, pois de acordo com D'Ambrosio:

Em 1933 foi criada, por Decreto Estadual, a Universidade de São Paulo, reunindo algumas escolas superiores já em atividade, especificamente a Faculdade de Direito, a Escola Politécnica e a Faculdade de Medicina, e criando uma nova escola, muito no espírito da *École Normale Supérieure*, denominada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, e que seria a *celula mater* da Universidade de São Paulo. A universidade foi organizada, administrativamente, nos moldes da, então ainda moderna, Universidade de Berlim. A nova Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras teria a responsabilidade de desenvolver pesquisa pura e, ao mesmo tempo, de formar quadros para o ensino secundário e superior. Concordou-se que as cátedras da nova Faculdade não seriam distribuídas entre docentes de cátedras afins das escolas existentes, mas seriam providas por professores especialmente contratados para essas cátedras, preferencialmente recrutados em universidades européias. A esses professores seria solicitada colaboração junto às disciplinas básicas das três escolas tradicionais. Propunha-se, assim, uma efetiva modernização do panorama intelectual e profissional do Estado de São Paulo (D'AMBROSIO, 2011, p.73).

Referente à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras e particularmente a chamada Subseção de Matemática, D'Ambrosio, esclarece que:

O jornalista Júlio de Mesquita Filho (1892-1969), então exilado na Europa, Armando Sales Oliveira (1887 – 1945), interventor federal no Estado de São Paulo, e Theodoro Augusto Ramos, professor da Escola Politécnica, foram encarregados da contratação de professores para prover as cátedras da nova faculdade. Embora tivesse excelentes contatos na França, Theodoro Ramos optou por contratar italianos para as cátedras de Matemática e Física. Uma especulação sobre as razões dessa opção apontam para o fato de estar havendo, por parte da importante comunidade italiana de São Paulo, na qual era evidente uma simpatia para com o governo fascista italiano, pressão para que fossem contratados cientistas políticos e sociais da Itália. Optou-se, no entanto, pela contratação de professores franceses para as áreas sociais e humanas, por serem conhecidos pelo seu liberalismo. Satisfazendo as pressões das comunidades alemãs e italianas, foram contratados para ciências químicas e biológicas, professores alemães, e para matemática²³ e física, professores italianos (D'AMBROSIO, 2011, p. 73).

Além das atribuições já mencionadas, Theodoro Augusto Ramos foi prefeito da cidade de São Paulo de 29 de Dezembro de 1932 a 1 de Abril de 1933²⁴. Na data de sua

²³ Por exemplo, para a Matemática, foi contratado, na cátedra de Geometria Superior, Luigi Fantappiè (1901-1956), um dos jovens matemáticos italianos mais promissores, aluno do consagrado Vito Volterra (D'AMBROSIO, 2011, p. 73).

²⁴ No final do ano de 1933, Theodoro A. Ramos envolveu-se em uma “polêmica” enquanto professor catedrático da Escola Politécnica de São Paulo e componente examinador em uma banca de concurso para preenchimento da cátedra (cadeira n° 3) da Escola Politécnica "Complementos de Geometria Analítica,

posse²⁵, o jornal O Estado de São Paulo, traz a seguinte matéria:

O sr. Governador militar do Estado assinou anteontem a noite, no Palácio dos Campos Elíseos, vários decretos de importância, sendo porém, julgada conveniente a sua publicação apenas no “Diário Oficial”. Esses decretos se referiam a exonerações e nomeações de altos funcionários, tais como o chefe da Polícia, prefeito da capital, diretor do departamento de Administração Municipal, diretor geral do Ensino, diretor geral do Serviço Sanitário. [...] Foram também nomeados: sr. Dr. Theodoro Ramos para prefeito da capital; sr. dr. Fernando de Azevedo para diretor geral do Ensino [...]. [...] O dr. Theodoro Ramos tomou posse do seu cargo às 17 horas. O ato realizou-se no gabinete da Prefeitura, onde se achavam presentes o dr. Arthur Saboya, diretor de Obras e Viação, que vinha a cerca de três meses respondendo pelo expediente daquele departamento administrativo, o dr. Luiz Parigot, representando o sr. governador militar do Estado, funcionários da Prefeitura e outras pessoas. O dr. Arthur Saboya, ao transmitir o cargo ao dr. Theodoro Ramos, referiu-se a pessoa do novo prefeito e, depois, agradeceu a todos os chefes de serviço e funcionários da Prefeitura a cooperação que lhe prestaram, concitando-os que continuassem a dar o seu concurso ao prefeito que se empossava. Em resposta disse o dr. Theodoro Ramos que agradecia as amáveis palavras que lhe dirigira o dr. Arthur Saboya, diretor da Prefeitura, e acrescentou que, ao assumir o cargo de prefeito municipal de São Paulo, nesta fase agitada da vida da nação brasileira, era a sua marcha para a Constituinte, devia declarar que, como profissional, prestará dedicada colaboração a obra de administração e de pacificação de sua cidade natal, procurando, na medida de suas forças e da sua inteligência, concorrer para o aperfeiçoamento da organização dos serviços públicos, para a melhoria da distribuição das despesas e para a mais eficiente arrecadação da receita, no município da capital paulista. Dedicará especial atenção as obras de melhoramentos urbanos iniciadas ou projetadas por administrações anteriores, sendo justo salientar entre elas as de retificação do rio Tiete e de saneamento das zonas marginais. Aproveitava a oportunidade para lembrar que em 1923 prestou a sua colaboração técnica ao engenheiro patricio Saturnino de Brito, nos trabalhos, da Comissão Municipal de

Nomografia e Cálculo Diferencial e Integral". Este concurso envolveu um nome que se tomou reconhecido na comunidade matemática brasileira, Omar Catunda, e outro que se tomou conhecido entre os politécnicos, José Octavio Monteiro de Camargo. Para maiores detalhes sobre este assunto, o leitor poderá consultar a tese de doutorado de Adriana Cesar de Mattos Marafon e intitulada *Vocação Matemática como reconhecimento acadêmico*, defendida em 2001 na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Uma versão digital do texto para download pode ser encontrada no site: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000235596&opt=1>>. Acesso em 22. Jun. 2013.

²⁵ Referente a esta atuação política de Theodoro Augusto Ramos, enquanto prefeito da cidade de São Paulo, não foi possível encontrar outros documentos, por exemplo, na Câmara municipal, pois se trata de um período histórico de grande turbulência para o país. Saída da chamada República Velha (1889-1930), passando pelo Governo Provisório (1930-1934) com a Revolução Constitucionalista de 1932 e antecedendo o período denominado Estado Novo (1937-1945). Os profissionais responsáveis pelos arquivos destes locais relataram que esses documentos foram incinerados.

Melhoramentos do Rio Tiete. Para o bom êxito de sua administração, não lhe será negada, estava certo, a colaboração dos altos funcionários e demais auxiliares da Prefeitura Municipal. O dr. Parigot, que, no ato, representava o sr. governador militar, agradeceu, por último, os serviços que prestou o sr. Arthur Saboya a testa da Prefeitura da Capital (O ESTADO DE SÃO PAULO, 29 de Dezembro de 1932, p. 2).

Em 24 de Fevereiro de 1934, por meio de Decreto, foi designado para organizar os Cursos da Escola Politécnica de São Paulo, sem prejuízo dos seus respectivos vencimentos.



Fig. 17. Documento 17

Theodoro fez o pedido, em 27 de Fevereiro de 1934, para que o engenheiro Omar

Catunda²⁶ fosse seu adjunto na cadeira de Mecânica Racional.

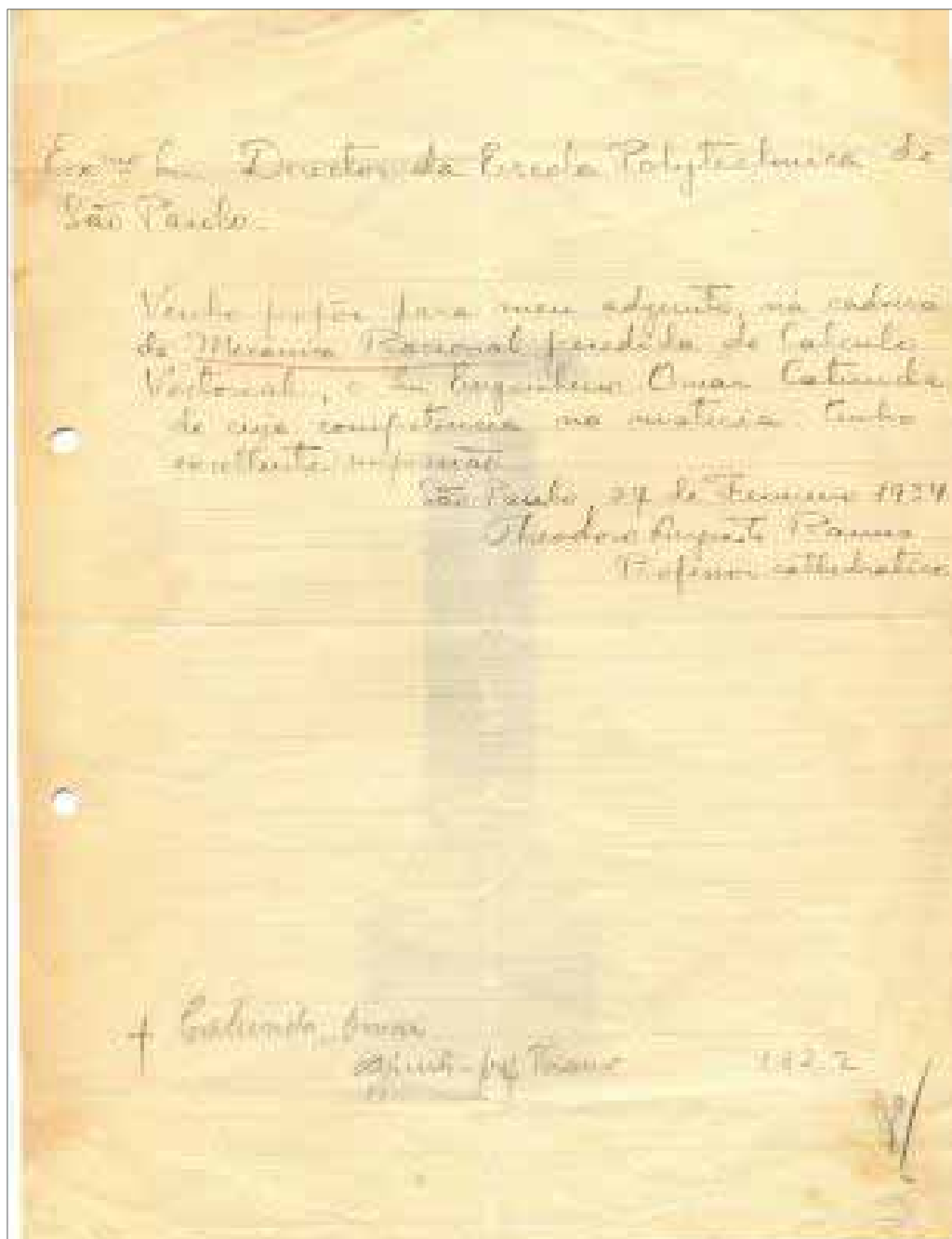


Fig. 18. Documento 18

Ainda no ano de 1934, Theodoro publica um artigo de destaque nos *Annaes da*

²⁶ Omar Catunda (1906-1986): Foi matemático, professor e educador brasileiro. Em 1930, formou-se engenheiro pela Escola Politécnica de São Paulo. A partir de 1934, Catunda colaborou intensamente com Fantappiè para a implantação da Subseção de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras que seria o futuro Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Na FFCL foi catedrático da disciplina de Análise Matemática. Atuou na Universidade da Bahia, dentre outros.

Academia Brasileira de Ciencias. Intitulado:

“Integraes definidas das funcções discontinuas”, é uma memoria de Theodoro Ramos que bem se aproxima, pela originalidade e profundeza, da sua These de doutorado. Aliás, a sua primeira parte é um estudo sobre “funcções contínuas e quasi-contínuas”, que completa e generaliza o que a respeito se acha esboçado na These de doutorado. De Borel recebeu essa memoria a melhor atenção e louvor (FREIRE, 1936).

Um dos grandes feitos atribuídos a Theodoro Augusto Ramos em sua breve vida e lembrado por profissionais de diversas áreas os quais trabalham com a pesquisa em História e em História da Matemática, foi sua missão de contratação, na Europa, dos professores que viriam a compor o quadro docente da futura Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP (FFCL). Neste sentido, no anuário da FFCL do ano de 1934-1935, lê-se:

A introdução do regime universitário no ensino superior brasileiro era uma velha aspiração dos intelectuais do país. Aqui e ali, na imprensa, no livro, em discurso, era lembrada a necessidade de se instalar, no nosso meio, aquilo que, à exceção do Paraguai, já existia em todas as repúblicas sul-americanas. No governo do ministro Laudo de Camargo, sendo secretário da Educação o dr. Antonio de Almeida Prado, foi nomeada a primeira comissão oficial para estudar as bases da Universidade Paulista. Dela faziam parte os profs. Alcântara Machado, Lucio M. Rodrigues, Raul Briquet, Fernando de Azevedo e o dr. Julio de Mesquita Filho, diretor do Estado de São Paulo, e um dos mais denodados servidores da causa universitária. Afastado do governo o interventor, ministro Laudo de Camargo, a idéia não foi levada avante, mas a semente ficou. Coube ao governo atual, ao dr. Armando de Sales Oliveira, nos seus dois períodos, de interventor e de governador constitucional, dar completa execução ao plano. O dr. Cristiano Altenfelder Silva, secretário da Educação, reorganizou a comissão, na qual permaneceram alguns membros da primeira, e entrou resolutivo na solução do problema. Para que não houvesse omissões involuntárias nesta ligeira resenha histórica, que envolve, não só os primórdios desta Faculdade, mas da própria Universidade paulista, pediram-se ao eminente secretário de então algumas notas relativas à fundação e a organização do regime universitário vigente (ANUÁRIO DA FFCL 1935 – 1935, p.214).

Na sequência, o Dr. Cristiano Altenfelder Silva, descreve sobre a criação da FFCL:

Desde a instalação da Assembléia Constituinte e Legislativa do Império, em 1823, começaram a surgir os projetos de Universidade no Brasil. [...] É por isso que a criação e o funcionamento desde logo na Universidade de São Paulo, em 1934, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, estabelecia com a orientação de dar ao ensino o cunho científico e de tornar possível a preparação do professorado secundário [...] Coube-me a fortuna de participar, como Secretário da Educação, dos esforços e trabalhos do Governo de São Paulo no estabelecimento de nossa

Universidade, criada pelo Decreto 5.283, que tive a honra e o orgulho de referendar a 25 de janeiro de 1934, a mais nobre comemoração da fundação de São Paulo, e que constitui o maior título de benemerência do Governo Interventor Armando de Sales Oliveira. [...] preparávamos abertura dos cursos de Filosofia, Ciências e Letras, para cuja direção foi nomeado o prof. Teodoro Augusto Ramos, da Escola Politécnica e que, designado pelo Governo, seguiu para a Europa, onde teve entendimento com os governos da França, Itália e Alemanha, em virtude dos quais pode o Governo de São Paulo contratar, em magníficas condições, eminentes professores, algumas das maiores notabilidades nos diversos ramos do ensino (ANUÁRIO DA FFCL PARA O ANO DE 1934-1935, p. 215-216).

Quanto ao corpo docente contratado pela FFCL, se deram:

Na França e na Itália, os respectivos governos mantiveram aos professores contratados para a Universidade de São Paulo, todas as vantagens e garantias dos respectivos cargos inclusive a remuneração e contagem do tempo durante todo o prazo do contrato. Da França vieram os professores Emile Coornaert, da cadeira de História da Civilização da Escola de Altos Estudos da Sorbonne; Paul Arbousse Bastide, professor de Sociologia, da Universidade de Besançon; Robert Garric, da Sorbonne e da Faculdade de Direito de Lille, professor de literatura francesa; Pierre Deffontaines, professor de geografia do Instituto Católico de Lille e de Paris; Etienne Borne, *aggregé* da Universidade de Paris, professor de Filosofia e Psicologia; e Michel Berveiller, *aggregé* da Universidade de Paris, professor de literatura greco-latina. Na Itália foram contratados os professores Francesco Piccolo, professor de latim da Universidade de Roma e de literatura italiana do Liceu Torquato Tasso de Roma, Luigi Fantappié, professor de análise, cálculo integral e diferencial da Universidade de Bolonha; Ettore Onorato, da Universidade de Cagliari, professor de mineralogia, e o professor Gleb Wataghin, da academia militar e da Universidade de Roma, primeiro prêmio da Academia Pontifical de Roma sobre a teoria dos quanta. Também na Alemanha foram escolhidos três professores: Ernst Bresslau, professor de zoologia, que organizou e dirigiu o Instituto de Zoologia da Universidade de Colonia; Heinrich Rhenboldt, professor de química da Universidade de Bonn, e Felix Rawitscher, da cadeira de Botânica da Universidade de Friburg. Todos os professores, logo chegados a São Paulo, iniciaram em seguida suas brilhantes atividades, constituindo verdadeira renovação intelectual as sessões de estudos e conferências e de extensão universitária que realizaram na nossa nascente Faculdade de Filosofia. Aprovados os Estatutos da Universidade e a constituição do Conselho Universitário, tive a honra e o gosto de presidir a instalação a 6 de junho de 1934, entregando a direção dos trabalhos ao primeiro reitor nomeado, o professor Reynaldo Porchat, da Faculdade de Direito, onde na cátedra de Direito Romano se tornaram notáveis suas brilhantes preleções (ANUÁRIO DA FFCL PARA O ANO DE 1934-1935, p. 216-217).

Em 17 de Abril de 1934, o jornal *O Estado de São Paulo*, publica a seguinte matéria

comentando a viagem de estudos e trabalho empreendida por Theodoro:

Uma entrevista a Agência “Havas”: Paris 15 (H.) – O professor Theodoro Ramos, da Escola Politécnica de S. Paulo, membro do Conselho Nacional de Educação, do Rio de Janeiro e diretor da Faculdade de Ciências e Letras, recentemente criada em S. Paulo, recebeu hoje o representante da Agência “Havas”. O dr. Theodoro Ramos, depois de manifestar a sua satisfação por se encontrar de novo da capital francesa, que conhecera em 1930 por ocasião de uma viagem de estudos, relembrou que visitara igualmente a Inglaterra, a Itália, a Suíça, a Bélgica e a Suécia, onde representara o Brasil no Congresso Internacional de Mecânica. Declarou também que a sua atual visita a Paris se prendia ao desejo de travar conhecimento mais íntimo com a organização das escolas secundárias da França, tanto corrente como técnicas. Referiu que assim que chegara depois de tomar conhecimento de volumosa correspondência, imediatamente se pusera em contato com os professores Georges Dumas e Ademar, com cujo auxílio contava para levar a bom termo a sua missão. O dr. Theodoro Ramos, frisou em seguida, que sua visita a Paris visava igualmente, e em especial, entrar em relações com as autoridades universitárias francesas no sentido de obter que certos catedráticos consentissem em assumir o encargo da realização de determinados cursos da Universidade de São Paulo. O entrevistado pediu reserva a respeito das personalidades universitárias que poderiam aceitar o convite da Universidade de S. Paulo, e acrescentou que contava permanecer em Paris durante cerca de um mês. Em seguida viajaria a Bélgica, a Inglaterra e talvez a outros países, de sorte a poder dar uma organização modelar à Universidade paulista. Almoço oferecido pelo embaixador do Brasil. Paris, 16 (H) – O embaixador Souza Dantas ofereceu um almoço ao professor Theodoro Ramos, diretor da Faculdade de Ciências e Letras de S. Paulo (JORNAL O ESTADO DE SÃO PAULO, 17 de Abril de 1934, p.1).

A foto que segue foi encontrada e pertence aos arquivos do Centro de Apoio à Pesquisa Histórica (CAPH) localizado na FFLCH da USP. No momento de realização da consulta não havia identificação dos membros.



Fig. 19 - Fotografia realizada no momento da inauguração da FFCL.

Na referida foto, arquivada como sendo a fotografia oficial dos fundadores da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Theodoro encontra-se sentado na segunda posição da esquerda para a direita na visão do leitor e com as mãos sobrepostas sobre as pernas. Não foi possível, até o presente momento, a identificação dos demais membros presentes na imagem.

Abaixo segue uma matéria do *Jornal Minervina*, editado na Escola Politécnica de São Paulo a respeito das contratações de professores empreendidas por Theodoro Augusto Ramos na Europa. Consta a caricatura e em seguida o conteúdo da matéria, que foi transcrito na sequência.

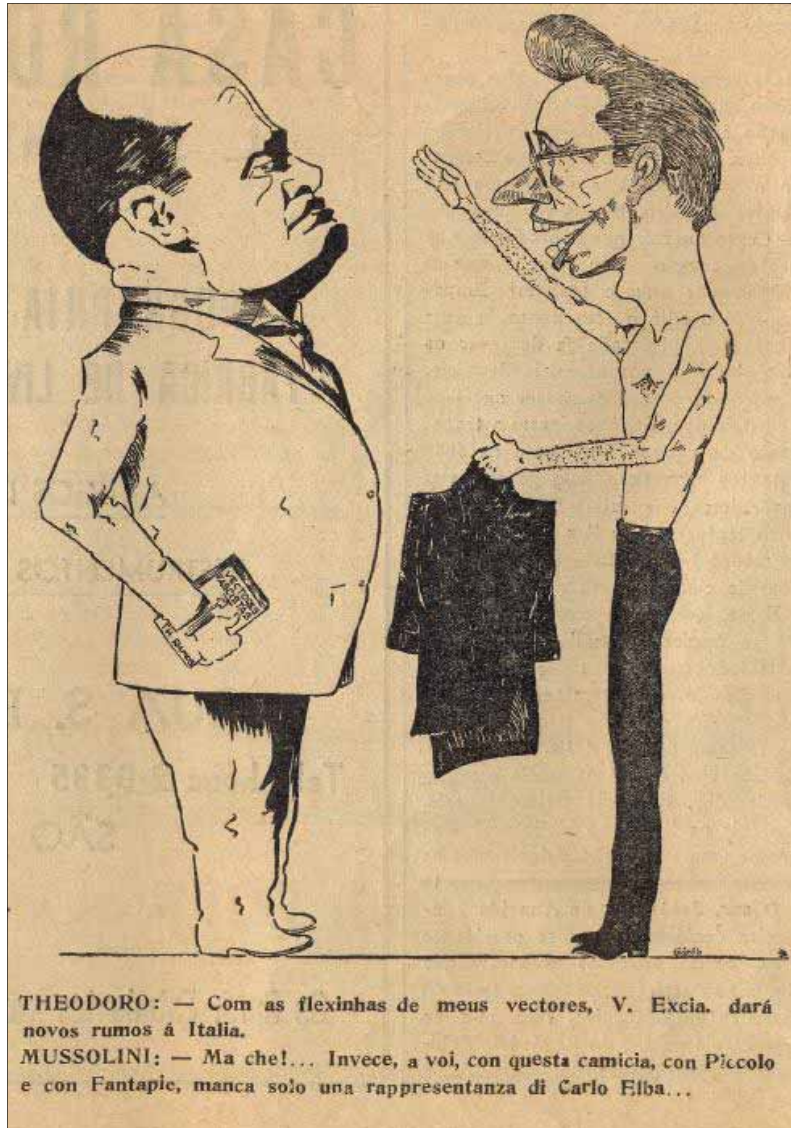


Fig. 20 - Jornal *Minervina*, Ano II, Escola Polytechnica de São Paulo – 9 de Junho de 1934.

A viagem do nosso prezado companheiro e professor Teodoro Ramos à Europa tem provocado da imprensa burguesa comentários que ressumam certamente da inveja com que vêm a trajetória em reta ascendente deste mensário. Um destes diários afirma que, o nosso referido companheiro havia se avistado com Marx, procurando com isso incompatibilizar Teodoro com os donos das nossas perfeitíssimas e veneráveis instituições políticas. Não se trata, como é bem de ver, do perigoso anarquista que morreu há algumas dezenas de anos, mas do nosso assinante Sr. Jean Marx alto funcionário do Quai d'Orsay. Absolutamente o prof. Ramos, não se deixa hipnotizar pelo olho de Moscou, visto que, fartamente estipendiado²⁷ pelo nosso tesoureiro, seria difícil desviá-lo da sua missão precípua ao velho mundo: - a propaganda da *Minervina*. Na

²⁷ Entenda-se bolsista, que recebeu dinheiro.

impossibilidade de qualquer dos nossos diretores se ausentar no momento, resolvemos enviar ao outro mundo o nosso antigo companheiro Teodoro, que já em viagens anteriores se havia feito notabilizar nos memoráveis discursos científicos em Montmartre e em republicas estudantinas do Quartier Latin. E foi somente para poupar os cofres do nosso Estado, que, em movimento de acrisolado paulistanismo, resolvemos encarregar o nosso citado companheiro de contratar alguns professores para a universidade paulista. E este sacrifício altruísta se havia de merecer os agradecimentos da multidão prostada, recebeu protestos agressivos como os do Centro Gallego. Assim é que este grêmio colonial buscando na existência de espanhóis em nosso país, achou que havia obrigação do nosso representante de contratar professores espanhóis para a nossa Universidade. Se a existência de uma colônia implica a necessidade do contrato de professores da respectiva nacionalidade, é natural que esta questão arraste a de proporcionalidade, e assim teremos que para cada professor patricio de D. Quichoto deveriam corresponder 38 italianos, 25 portugueses, 16 sírios, 9 judeus, 8 lituanos, 4 russos sem esquecer dos nipões, e de pelo menos 2 representantes da pastelaria chinesa, e 1 para cada uma das colônias francesa, inglesa, alemã, belga, suíça e holandesa. É claro que o corpo discente seria grandemente menor que o docente, e teríamos então a resolver o terrível problema da importação de alunos para a Universidade. Resolvemos transigir, no entanto, com a nossa opinião, e, com o fito de poupar a derrota que prevíamos para o combinado brasileiro de futebol, pensamos em afastar Zamora do time espanhol e da nossa redação telegrafamos a Teodoro: - Ramos contrate Zamora²⁸ catedrático futebol. O arguto representante de “Minervina” já havia porém partido para o Brasil onde chegou a 1º do corrente (JORNAL MINERVINA, Ano II, Escola Polytechnica de São Paulo – 9 de Junho de 1934).

Chama-se a atenção do leitor para os fatos que assolavam a Europa em 1934, tais como o auge do facismo (1919 - 1939) vivido na Itália e liderado por Benito Amilcare Andrea Mussolini (1883 - 1945) e a difusão de judeus por diversas partes do mundo perseguidas pelo regime nazista (1933 – 1945²⁹) e conduzido por Adolf Hitler (1889 - 1945). A presença destes movimentos deu-se também em outros países, a citar: a Espanha (1939-1975), com o general Francisco Franco (1892 -1975) e denominada franquismo, em Portugal (1933-1974), com António de Oliveira Salazar (1889-1970) e, no Brasil, o fascismo que acompanhou o Estado Novo (1937-1945).

Aqui, foi promulgada em 1934, como consequência direta da Revolução

²⁸ Ricard Zamora Martínez (1901 - 1978) foi um futebolista catalão que atuava como goleiro, tido por muitos como um dos melhores de todos os tempos na posição. Possuiu papel de destaque na Copa do Mundo do ano de 1934, sediada na Itália (campeã do torneio), enquanto jogava pelo time espanhol e que por muito pouco não acabou com a festa fascista dos anfitriões.

²⁹Ano que marca também o término da 2ª Guerra Mundial que havia se iniciado em 1939.

Constitucionalista de 1932 a Constituição de 1934, que veio a substituir a ultrapassada Constituição de 1891, modificando as organizações da República Velha e realizando mudanças progressistas. Todavia, embora sendo inovadora, a Carta de 1934 permaneceu pouco tempo em vigor, uma vez que em 1937, uma constituição já pronta foi outorgada por Getúlio Vargas, transformando o presidente em ditador e o estado "revolucionário" em autoritário.

Como já comentado anteriormente, inserido neste contexto histórico, organizavam-se as bases para a constituição e implementação da FFCL da USP, e Theodoro Augusto Ramos havia sido o incumbido da contratação de professores estrangeiros para compor o novo quadro da recém criada faculdade. Nota-se que enquanto o Brasil recebia professores, principalmente italianos, advindos da missão de contratação no exterior realizada por nosso personagem, os países do velho continente sofriam inúmeras barbáries de líderes sanguinários.

Nesse interim, Theodoro Augusto Ramos retornou de sua missão à Europa no dia 1 de Junho de 1934, e em 17 de Abril de 1935, reassumiu o exercício de sua cadeira (deixada a cargo do professor Lúcio Martins Rodrigues) visto estar terminada a sua comissão junto ao Governo Federal.

S. Paulo, 17 de abril de 1935

Er. Professor Lucio Martins Rodrigues

Comunico-vos que nesta data reassumo o exerci-
cio da minha cadeira e nosso collega prof. Theodoro A. Ramos,
visto estar terminada a sua comissão junto ao Governo Fe-
deral.

Aproveito a oportunidade para agradecer-vos o
serviço prestado à Escola, aceitando a substituição tem-
porária do prof. Theodoro Ramos.

Cordiais cumprimentos


Director

13/4

18/71 Mec

Fig. 21. Documento 21

Em 6 de Maio de 1935, o Diretor Geral da Secretaria de Estado da Educação e da Saúde Pública, de acordo com o artigo 2º, letra “e”, do decreto n. 6055 de 19 de agosto de 1933, concedeu ao Dr. Theodoro Augusto Ramos, professor catedrático da Escola Politécnica de São Paulo, um mês de licença para tratar de sua saúde, nos termos do artigo 5º do citado decreto, a contar de primeiro do corrente mês. A partir desta data, verifica-se pelas “fichas” de docente de Theodoro Augusto Ramos que este passou por um período de constantes problemas de saúde até o seu falecimento.

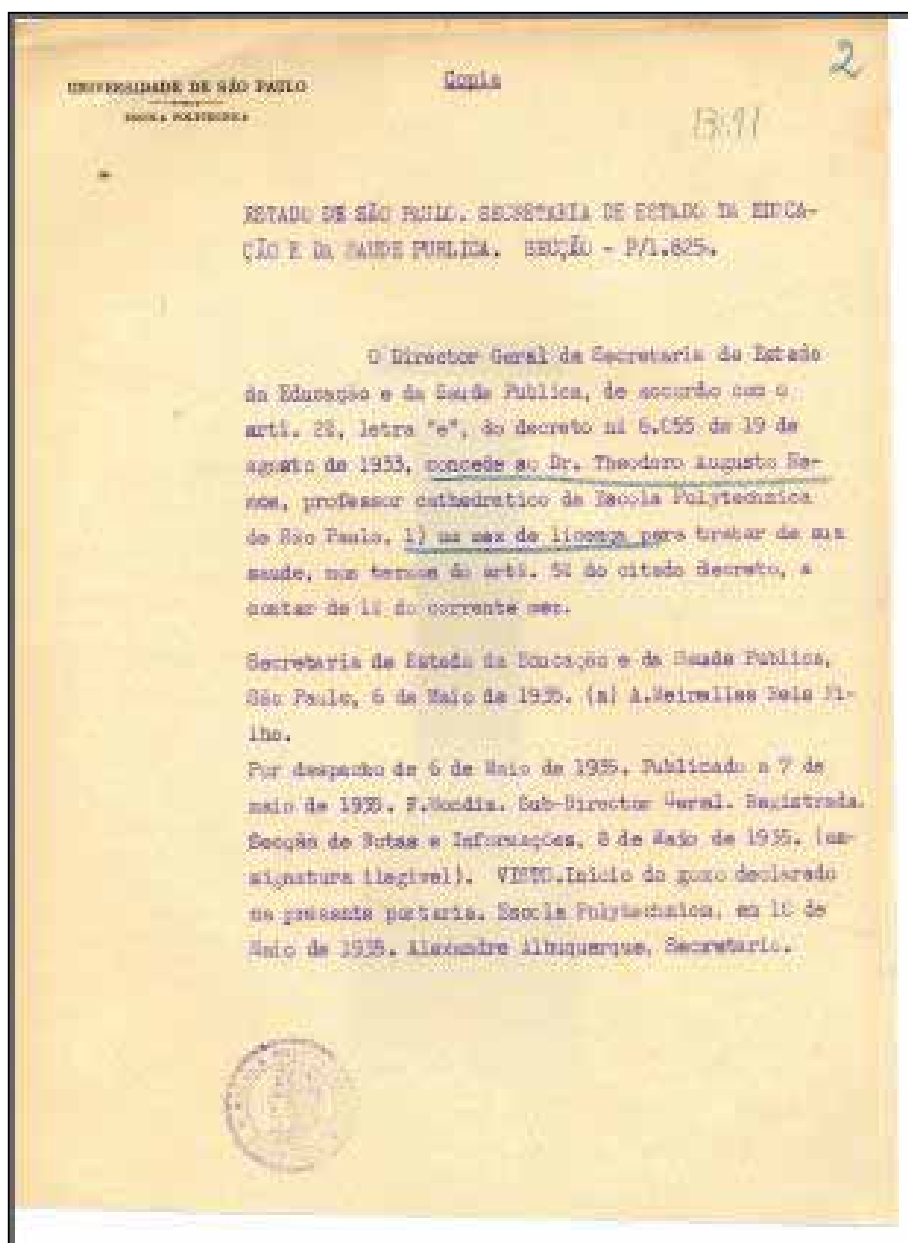


Fig. 22. Documento 22

De acordo com a documentação encontrada e corroborada por Silva (2008, p.77), “Theodoro A. Ramos exerce ainda alguns cargos administrativos nas administrações estadual e federal. No início da década de 1930, ele exerceu o cargo de Secretário da Educação e Saúde Pública do Estado de São Paulo. Foi ainda, na década de 1930, membro do Conselho Nacional de Educação e Diretor Geral da Diretoria Nacional de Educação”.

Ensejava-se responder a algumas indagações sobre suas atividades nestes três cargos, mas infelizmente o insucesso na busca ou a ausência de documentos no tocante a esta temática permitiu apenas mencionar que Theodoro exerceu de fato estas atribuições. Ofícios, cartas e telegramas, dentre outros documentos oficiais que imprime veracidade a estes dados foram encontrados no arquivo histórico da Escola Politécnica de São Paulo e são de acesso ao público.

Em 4 de Junho de 1935, a Secretaria de Estado da Educação e da Saúde Pública, concedeu a Theodoro Augusto Ramos prorrogação de dez dias na licença para tratar de sua saúde.

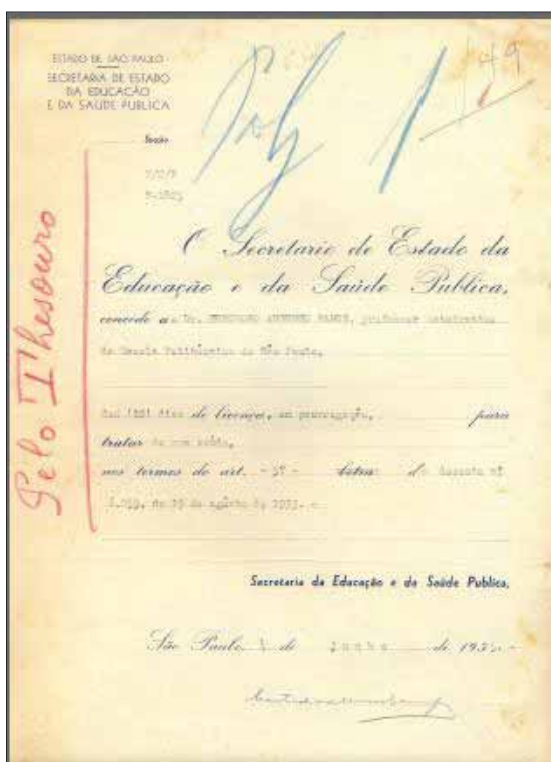


Fig. 23. Documento 23

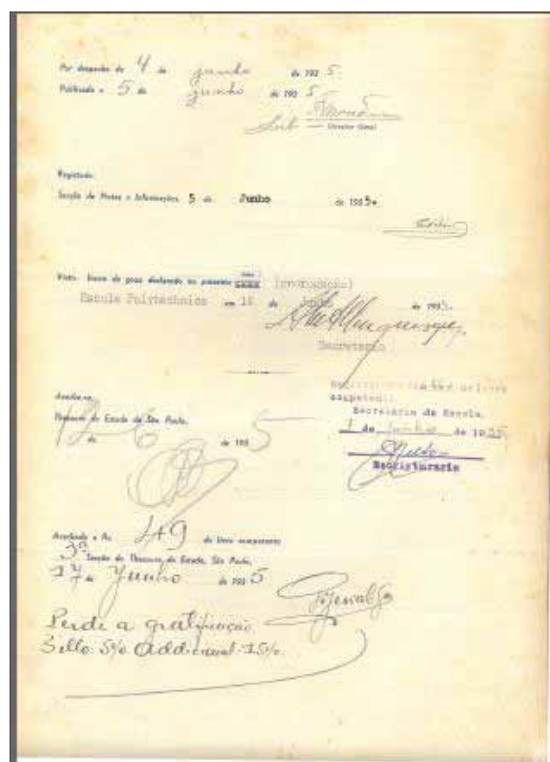


Fig. 24. Documento 24

Em 18 de Junho de 1935, Theodoro Augusto Ramos recebeu uma carta do então diretor da Escola Politécnica, com fundamento de transmitir os sentimentos pelo falecimento de sua mãe que havia ocorrido no dia 13 de junho.

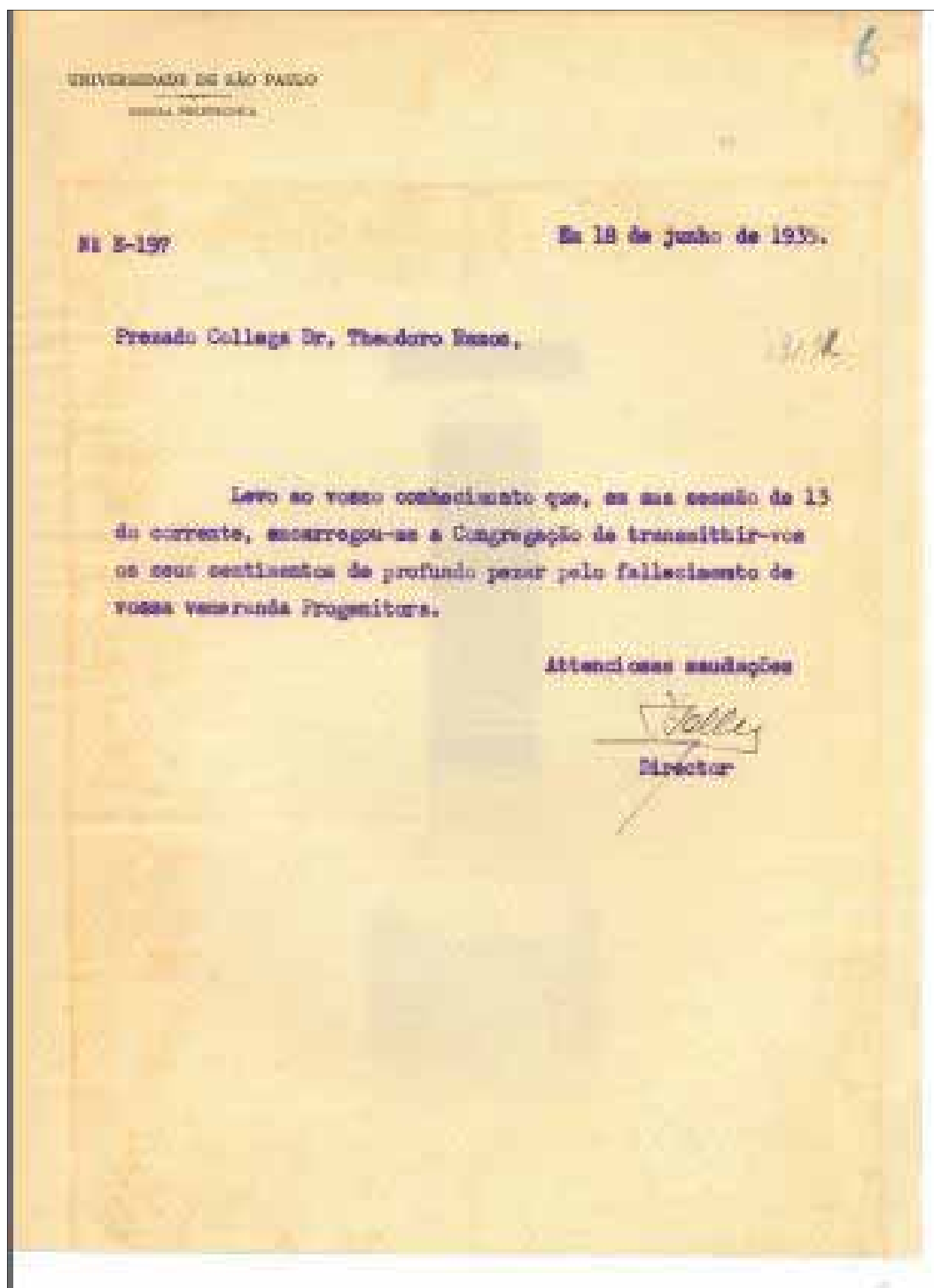


Fig. 25. Documento 25

Em 24 de setembro de 1935, Theodoro não compareceu as suas atividades na Escola Politécnica.



Handwritten document on lined paper. The text is written in cursive and reads: "Dia 24 de Setembro 1935", "Não Compareceu", "Benedicto Nissa da Souza", and "Machado".

Fig. 26. Documento 26

Assim, após várias faltas ao trabalho no qual se empenhava fervorosamente, o homem retratado como franzino, de óculos arredondados e de saúde frágil, após perder sua mãe em 13 de Junho de 1935, deixa a vida acadêmica, esta no qual se empenhou durante toda a sua vida. Deixa, ela mesma, em 5 de Dezembro de 1935.

Consta em seu arquivo que, em 7 de Dezembro de 1935, o Conselho da Faculdade de Farmácia e Odontologia da Universidade de São Paulo resolve, por unanimidade, mandar inserir na ata de seus trabalhos, um voto de profundo pesar pelo falecimento do ilustre professor Theodoro Ramos.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FARMÁCIA E ODONTOLOGIA

11/1

25.753

São Paulo, 7 de Dezembro de 1955.

Senhor,

Leto ao conhecimento de V. Exa, que o Conselho Técnico-Administrativo desta Faculdade, em sua sessão de hontem, resolveu por unanimidade, manter inscrita na ata de seus trabalhos, em voto de profundo pesar pela falecimento de ilustre prof. m. Theodoro Lima.

Dirija-se da oportunidade para apresentar a V. Exa. suas mais elevadas protestos de estima e consideração.

O Diretor,
Dr. Paulo de Vargas Cavalcanti
Dr. Paulo de Vargas Cavalcanti

Dr. Honorário, Dr. Francisco Tassinari

Fig. 27. Documento 27

Em 23 de Março de 1936, Omar Catunda é designado pelo Director da Escola Politécnica de São Paulo, para fazer a avaliação de parte dos livros pertencentes à família do Dr. Theodoro Ramos, que se achavam na biblioteca da Escola Politécnica e que interessavam à mesma Escola, e Rodolfo Valladão, designado pelo inventariante para acompanhar a mesma avaliação, depois de terem examinado cuidadosamente todos os livros, em número de 685 volumes, compreendendo obras de matemática, física, engenharia, obras didáticas em geral e coleções de revistas de engenharia, declararam que avaliaram os mesmos livros em dezessete contos e oitocentos mil réis.

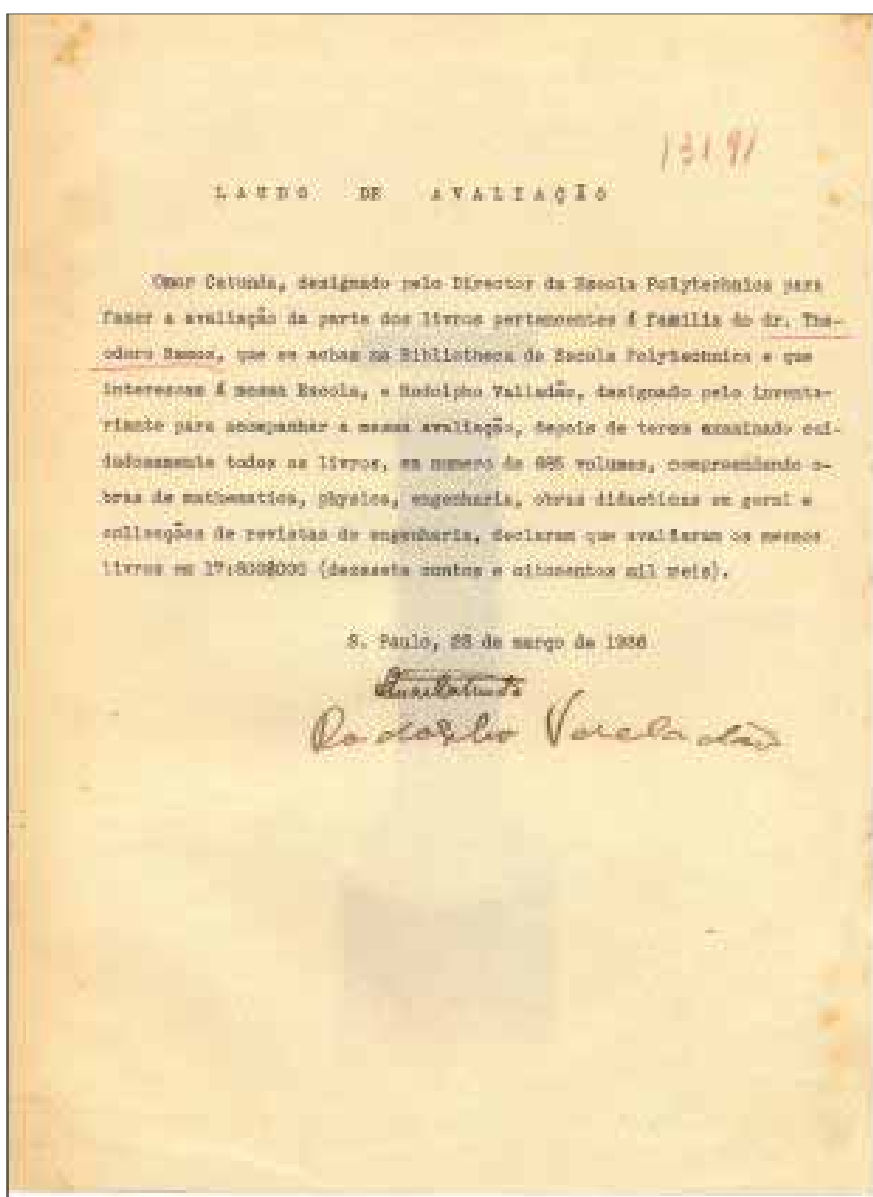


Fig. 28. Documento 28

Theodoro, em sua breve vida, foi um insigne incentivador de estudos para o desenvolvimento das Ciências Matemáticas no Brasil. Embora tenha se graduado em Engenharia Civil, apaixonou-se pela abstração matemática ainda em sua graduação. Foi professor atuante, pesquisador inquieto, administrador e procurou cumprir com destreza todos os ofícios que lhe foram concedidos. Seus trabalhos e atividades mostram sua preocupação com a educação brasileira. Um dos seus mais relevantes serviços à sociedade, especificamente no campo da cultura e ciência, foi a ativa participação no processo de fundação da Universidade de São Paulo.

Sua atuação no magistério apresentou duas marcas registradas: introduzir a parte conceitual da teoria nos tópicos estudados e procurar esclarecer seus alunos quanto à necessidade de expandir os estudos matemáticos no Brasil, e que podem ser observados no conteúdo programático das disciplinas assinadas por Theodoro, bem como por meio de discursos proferidos pelo mesmo. Essa consciência não se limitava a simples panfletagem. Theodoro, um dos mais atualizados matemáticos brasileiros, mantinha constante contato com cientistas nacionais e estrangeiros. Discípulo de Amoroso Costa, foi seu continuador no movimento de renovação científica e de modernização do ensino superior no Brasil, combatendo a influência do positivismo de Comte (1758 – 1857) sobre a elite intelectual brasileira. Importante ressaltar a contribuição desse grande pesquisador, membro da Academia Brasileira de Ciências, citando um de seus mais significativos trabalhos sobre as funções de variáveis reais, das integrais definidas de funções descontínuas e o cálculo vetorial.

Delineou-se assim *a vida de pensamento* de Theodoro Augusto Ramos, ao menos no que tange aos documentos que foram conservados nos arquivos já citados no início deste capítulo, e que se tentou escrever sob um, dentre os possíveis olhares, o nosso ponto de vista, o nosso *pensamento da sua vida*.

2.3 Artigos e obras:

Theodoro Augusto Ramos, embora tenha falecido precocemente, publicou inúmeros artigos e obras de alcance internacional em renomadas revistas brasileiras, que contavam com colaboradores de diversas partes do mundo. Dentre as revistas em que publicou temos

a Revista Brasileira de Engenharia, Revista Polytechnica de São Paulo, Revista Didactica da Escola Polytechnica (Rio de Janeiro), Annaes da Academia Brasileira de Sciencias e Revista da Academia Brasileira de Sciencias.

A saber, na *Revista Brasileira de Engenharia* publicou: Sobre um problema de estabilidade, n.5, 1922; Um grande luto. Manoel Amoroso Costa, n.6, 1928; e Gomes de Souza, n.2, 1929. Na *Revista Polytechnica de São Paulo* foram encontrados: Nota sobre as formulas de Stokes e de Ostragradsky, n.62, 1920; Nota sobre uma fórmula de interpolação, n.64, 1920; e Vectores Localizados, n. 95 – 96, 1929. No tocante a *Revista Didactica da Escola Polytechnica (Rio de Janeiro)* identificou-se os artigos: Mecanica Racional, n.8, 1916; Nota sobre as curvas esphericas reversas, n. 12, 1918; Observações sobre a representação approximada das integraes definidas, n.14, 1918; Nota sobre uma fórmula de interpolação, n.14, 1918; Nota sobre as curvas reversas cujas tangentes pertencem a um complexo linear, n.15, 1919; e Alguns resultados sobre a interpolação das funções contínuas, n.15, 1919.

Quanto aos *Annaes da Academia Brasileira de Sciencias*, localizou-se: Notas sobre algumas questões relativas às curvas reversas, n. 4, 5 e 6, 1920; Nota sobre uma fórmula de interpolação, n. 4, 5 e 6, 1920; Sobre um problema de equilibrio elástico, n.6, 1922; Palavras proferidas em sessão de 25 de junho, commemorativa do primeiro centenario do nascimento de Gomes de Souza, n.3, 1929; Applicaçao do calculo vectorial ao estudo do movimento de um ponto material sobre uma superficie rugosa e fixa em um meio resistente. Introduçao geometrica, n.4, 1933; Sobre a representação approximada de uma integral hyperelliptica, n.4, 1933; Algumas propriedades de uma integral hyperelliptica, n.3, 1934; Integraes definidas das funções discontinuas, n.3, 1934; e A theoria da relatividade e as raias espectraes do hydrogenio, n.3, 1934. Referente à *Revista da Academia Brasileira de Sciencias*, tem-se: A propósito das notas dos Snrs. Borel e Amoroso Costa, n.1, 1926.

Sua produçao é completada com as obras: Sobre as funções de variáveis reaes (tese de doutorado). Escola Politécnica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1918; Questões sobre as curvas reversas. São Paulo: Secção de obras d' "O Estado de São Paulo", 1926; Integraes definidas das funções discontinuas. São Paulo: Typographia Brasil de Rothschild, 1927; Calculo vectorial. São Paulo: Editora do Autor, 1930; Leçons sur le calcul vectoriel.

Paris: Blachard e, em 1933, a obra: Estudos: ensino, ciencias physicas e mathematicas. São Paulo: Escolas Profissionais do Liceu Coração de Jesus.

Destaque para a obra *Estudos: ensino, ciencias physicas e mathematicas*, que apresenta uma dedicatória assinada por Theodoro no exemplar dedicado à Escola Politécnica de São Paulo.

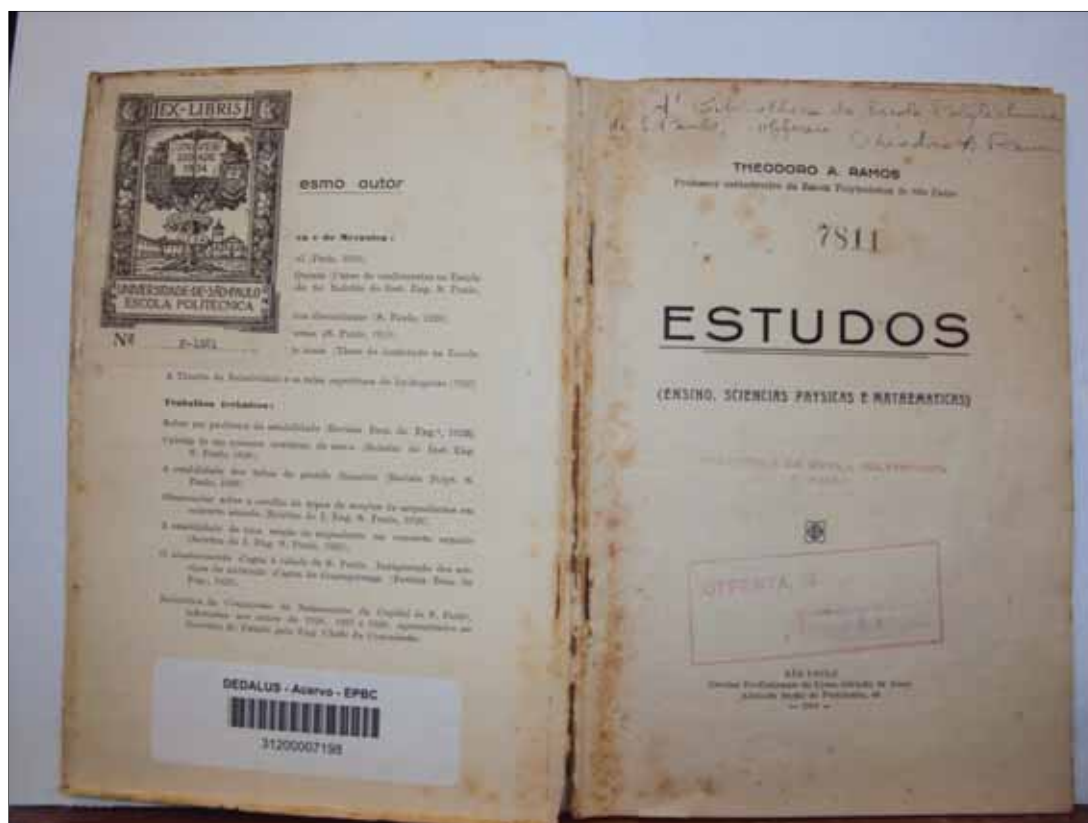


Fig. 29. Documento 29

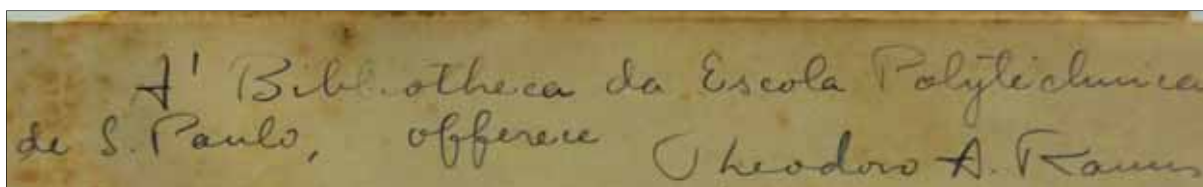


Fig. 30. Dedicatória

Ressalta-se que Theodoro escreveu outros textos, enquanto ocupou-se do cargo político que se caracterizavam muitas vezes de relatórios. Dentre eles podemos citar: *O café*

no Brasil e no estrangeiro, Relatório da Comissão das Obras do Saneamento da Capital apresentado ao Dr. Gabriel Ribeiro dos Santos, Observações sobre a escolha de typos de secções para aqueductos em concreto armado e A indústria cafeeira na América hespanhola. Estes se encontram disponíveis no acervo da biblioteca da FFLCH da USP.

Seus artigos de cunho matemático e/ou sobre matemáticos de seu tempo totalizam vinte e um e suas obras em seis. De acordo com Silva,

Ao ministrar disciplinas do curso básico da Escola Politécnica de São Paulo, Theodoro Ramos introduziu a parte conceitual da teoria nos tópicos abordados (fato não-usual no ensino da Matemática superior no Brasil da época) (SILVA, 2003, p.124).

Este fato é também verificado pela contemporaneidade dos autores e obras que Theodoro utilizou em sua produção matemática, principalmente em sua tese de doutoramento.

Assim:

Professor e educador, mathematico e engenheiro, administrador e estadista, em qualquer dos aspectos de sua fecunda actividade, deixou uma lição de probidade, de cultura, de character, no sentido mais alto do termo. Honra, assim, a profissão de engenheiro e de professor; dignifica a administração e, pela sua contribuição científica, é um padrão de civilização para o Brasil, no nosso tempo (VENANCIO FILHO, 1935, p. 194).

Para Freire:

[...] De Theodoro Ramos como engenheiro e como educador, como homem de administração que também o foi, está aqui bem vivia a sua acção marcante em trabalhos de vulto sobre Hydraulica e Saneamento por elle realizados e publicados, em S. Paulo: na criação da Universidade da capital desse Estado, especialmente sua faculdade de Sciencias, em a qual já se sente um espírito novo a nascer entre nós: na sua fecunda e proba gestão à frente da Secretaria de Educação e Saude, e como Prefeito, de S. Paulo, e, por fim, o seu nobre esforço na Directoria Nacional de Educação. Desvios lamentáveis, sem dúvida, para o homem de sciencia – appelos irrecusáveis, certamente, á sua consciencia de cidadão e patriota. Sente-se, porém, através de toda a actividade não científica e professoral de Theodoro Ramos, que o homem de sciencia, nelle, nunca foi ausente. Os seus trabalhos, em qualquer época, vêm sempre vinculados por uma elaboração interior profunda, revelando uma cultura que cedo principiou, e, sobretudo, um pensamento que jamais se distrahiu. [...] Eis aqui o pallido perfil que pude traçar dessa figura singular e polyedrica que foi Theodoro Augusto Ramos. Como Gomes de Souza, Otto de Alencar, Amoroso Costa, elle foi ferido de morte em pleno meio-dia de sua vida intellectual – tem sido esse o triste fado dos mathematicos brasileiros. [...] Com o

recuo indispensável do tempo, quando a figura do homem tiver cedido inteiramente a do pensador, a imagem de Theodoro Ramos como professor e mathematico, sobretudo, mas também como índice de civismo, que muito quis a sua gente e a sua terra, será exactamente composta (FREIRE, JORNAL DO COMMERCIO - Rio de Janeiro, 05 de Julho de 1936).

Assim, uma biografia por mais extensa que seja jamais nos permitirá conhecer o que realmente caracteriza a existência humana. No entanto, em si mesmo, esse estudo revela o desejo de tornar mais próxima a especulação da realidade da existência (DOSSE, 2009, p. 363). Este pequeno texto não intentou situar Theodoro Augusto Ramos em sua época, nem retrair toda a sua história. “Tenciona apenas acompanhar uma trajetória – ou mesmo uma série de trajetórias – a partir de um ato inicial que é ao mesmo tempo de pensamento e de existência” (DOSSE, 2009, p. 370).

Tentar tecer a unidade ou a discordância entre um pensamento da vida e uma vida consagrada ao pensamento é uma tarefa que aqui se escapa ao historiador. Compor a história do homem de ideias que foi Theodoro Augusto Ramos por meio de fragmentos documentais é uma tarefa difícil, mas foi buscada na tentativa de desvelar o sentido de uma vida. Assim, este capítulo:

[...] é, pois, efetivamente uma (a tentativa de uma) biografia, com os riscos que isso implica, e sobre os quais não posso dizer que não tenha sido advertido. Uma biografia, isto é, ao mesmo tempo um trabalho de pesquisa histórica, por vezes jornalístico, e a tradução de uma simpatia (DOSSE, 2009, p. 389).

Desta forma, nestas linhas, intentaram-se por meio do emaranhamento de documentos, artigos, obras e das atividades realizadas por Theodoro, seja como cientista, educador ou administrador, criar aqui um “efeito do vivido”, uma vez que é sabido que:

[...] em sua era hermenêutica o biógrafo já não tem a ilusão de fazer falar a realidade e de saturar com ela o sentido. Ele sabe que o enigma biográfico sobrevive à escrita biográfica. A porta permanece escancarada para sempre, oferecida a todos em revisitações sempre possíveis das efrações individuais e de seus traços no tempo (DOSSE, 2009, p. 410).

No próximo capítulo abordar-se-á a tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos, objetivo principal desta pesquisa. Em *A Obra Mathematica de Theodoro Ramos* –

conferência realizada pelo Dr. Luiz Freire³⁰, professor da Escola de Engenharia de Pernambuco, no dia 5 de Julho de 1936, na Academia Brasileira de Ciências e publicada pelo Jornal do Commercio (Rio de Janeiro), Freire realiza a seguinte explanação sobre a tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos:

Na sua These de doutorado, tratando da “representação effectiva das funcções sommaveis”, a uma variavel, fal-o Theodoro em relação á integral que representa uma funcção continua qualquer e que elle indica por $f(X', k)$. Havia, porém, Theodoro, pouco antes de fazer apparecer a sua These, recebido os Annaes de Toulouse onde verificou já ter sido tal representação obtida por Henri Lebesgue, seguindo, aliás, criterio bem differente do por elle adoptado. Por isso, conserva e apresenta a sua demonstração. A de Lebesgue surge como consequencia de dado criterio geral; a de Theodoro é *directa*. Constitue essa demonstração de Theodoro uma das bellas partes de sua These. Na apresentada á Polytechnica de S. Paulo, a indagação feita por Theodoro da integral geral de uma equação de Riccati mediante uma única quadratura, indagação essa já por nós referida, constitue uma outra illustração do que vimos affirmando: enxergou Theodoro em uma “propriedade das superficies desenvolviveis isotropas” o caminho mais curto para attingir o seu “desideratum”. No n.3, tomo VI, dos Annaes desta Academia, em um estudo sobre uma integral hiperelitica, ê-se informado de que na viagem á Europa feita por Theodoro Ramos em 1934, havia elle, em Paris, trocado vistas com o celebre mathematico francez Denjoy sobre a representação approximada da integral referida. Das vistas trocadas entre Theodoro e Denjoy, resultou a indicação por esse feita de dois processos capazes de evidenciar a positividade de uma certa integral hiperelitica. Em viagem de regresso ao Brasil, conseguiu Theodoro a demonstração que se fazia mistér, a respeito. E de Lisboa, enviou-a a Denjoy. Tal demonstração se acha á pag. 124 do número já referido dos Annaes desta Academia. Denjoy, em carta a Theodoro, assignala a “simplicidade” da demonstração. Á primeira vista parece uma coisa muito *simples* ... essa questão de “simplicidade” em mathematica... A “simplicidade” em mathematica deve ser encarada como synonymo de dominio completo do assumpto abordado, de vis-á-vis da verdade, de integração absoluta com essa. É muito facil ser-se *complicado* em mathematica, é difficilimo, nessa, alcançar-se a “simplicidade” (FREIRE, 1936).

³⁰ Luiz de Barros Freire (1896-1963): Diplomou-se de engenheiro civil pela Escola de Engenharia de Pernambuco em 1918. No ano seguinte, obteve a cátedra de matemática da Escola Normal de Pernambuco, ingressando na sequência (1920) como professor contratado na Escola de Engenharia, atualmente pertencendo à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Em 1934, recebeu o título de Doutor em Ciências Físicas e Matemáticas tornando-se professor catedrático de física.

Capítulo III:

Apreciação da tese de doutoramento

[...] Por definição, o homem de idéias se deixa ler por suas publicações, não por seu cotidiano.
François Dosse, 2009.

Neste capítulo, intenta-se realizar um estudo sobre a tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos no que concerne ao seu tema central, demonstrações principais e contribuições desse trabalho, dentre outros.

Escolhendo-se a sequência cronológica, uma vez que isto permite um encadeamento de raciocínio, e “abre caminhos” para futuras pesquisas de outras obras deste personagem publicadas posteriormente, sua tese de doutoramento é a primeira de suas publicações e vem seguida por outras duas que são consideradas importantes por pesquisadores e historiadores da matemática. A saber: *Sobre as Funções de Variáveis Reaes* (tese de doutoramento, 1918), *Nota sobre uma fórmula de interpolação* (Revista Didactica da Escola Polytechnica, Rio de Janeiro, n.14, 1918) e *Questões sobre as curvas reversas* (trabalho apresentado à congregação da Escola Politécnica de São Paulo e referente ao concurso para professor substituto da 1ª secção³¹ realizado em 1918. O texto foi publicado em 1919 pela Secção de obras d’ “O Estado de São Paulo”).

Dentre essas, como já mencionado, por imposição do tempo e opções feitas pela autora e orientador, será estudada aqui sua tese de doutoramento.

[...]Teodoro Ramos, ao fim do curso, apresenta sua tese de doutorado, sobre funções reais de variável real. Este acontecimento, criou, na Escola, uma atmosfera densa, opaca, cheia de apreensões, de parte a parte. Um jovem estudante desafiava os cânones oficiais, com uma tese estranha, um trabalho exótico. Sussurra-se pelos corredores. Professores grupam-se, prognosticando os lances da peleja próxima. Preparam-se, por fim, as armaduras intelectuais, para o embate solene da defesa da tese. [...]

Palavras de Lélío I. Gama sobre o amigo Theodoro, 1965.

³¹ A 1ª secção abrangia as seguintes cadeiras: Matemática Elementar, Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal.

3.1. A tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos: Encaminhamentos matemáticos, autores e contribuições de trabalhos do final do século XIX e início do século XX os quais influenciaram sua pesquisa:

A referida tese encontra-se estruturada em sete partes sendo: prefácio; introdução (dividida em os conjuntos lineares, os conjuntos a duas dimensões, a medida dos conjuntos, a noção moderna de função, a convergência das sucessões de funções, a convergência uniforme); as funções de uma variável real (onde o autor trata as funções contínuas e as funções de classe 1, dividindo em: as funções contínuas, as funções contínuas deriváveis, as funções indefinidamente deriváveis, as funções de classe I); a teoria das funções sommáveis (as sucessões de Baire, a integração das funções sommáveis, a representação efectiva das funções sommáveis, nota sobre uma fórmula de interpolação, nota sobre a aproximação das funções duas vezes deriváveis); as funções de duas variáveis reais (tratando da representação efectiva das funções sommáveis de duas variáveis reais); proposições (segue aqui uma explanação dos conteúdos das “cadeiras” vistas durante a graduação e que foram utilizadas na elaboração da tese. São elas: 1º ano: 1ª, 2ª e 3ª cadeiras; 2º ano: 1ª, 2ª e 3ª cadeiras; 3º ano: 1ª, 2ª, 3ª e 4ª cadeiras; 4º ano: 1ª, 2ª, 3ª e 4ª cadeiras; 5º ano: 1ª, 2ª, 3ª e 4ª cadeiras), e encerrando com a última parte intitulada notas e correcções.

Nesse trabalho, o objetivo central de Theodoro Augusto Ramos foi estudar a teoria das funções de variáveis reais sobre a noção de polinômio, utilizando a representação efectiva das funções somáveis de uma variável (resultado obtido por Lebesgue como consequência de um critério geral aplicado às integrais singulares das funções somáveis de uma variável real – Demonstração dada por Theodoro difere da de Lebesgue por ser mais direta), e a representação das funções somáveis de duas variáveis (resultado obtido por Leonida Tonelli – Este estudou os polinômios de Landau de duas variáveis). O escopo principal do trabalho de Theodoro foi o de examinar a representação das funções somáveis de duas variáveis por meio da integral dupla de Weierstrass.

Os resultados utilizados por Theodoro Augusto Ramos e que foram obtidos por Borel, Baire, Lebesgue, Tonelli e Weierstrass, datam do final do século XIX e início do século XX. A leitura do trabalho destes autores teve notável importância para o

desenvolvimento das investigações matemáticas empreendidas pelo personagem em estudo, e corroboraram a contemporaneidade de sua pesquisa.

No prefácio escrito por Theodoro, lê-se:

A theoria das funcções de variaveis reaes que até o último decennio do seculo passado jazia em relativo esquecimento, desenvolveu-se de modo extraordinario após os trabalhos de E. Borel sobre a medida dos conjunctos e as teses de R. Baire e H. Lebesgue sobre as funcções discontinuas e a integração. Recentes estudos visam principalmente a simplificação da exposição geral da theoria. Constitui um dos objectivos deste modesto trabalho mostrar como se é naturalmente levado a basear a theoria das funcções de variaveis reaes sobre a simples noção de polynomio (RAMOS, 1918, p. 3).

Ao adentrar no trabalho produzido por Theodoro, nota-se que esse observou que em sua época os estudos estavam visando “principalmente a simplificação da teoria” (RAMOS, 1918, p. 3). Após uma explanação dos seus objetivos, o autor nota também que:

As funcções limites que se obtem pela consideração exclusiva da equiconvergencia ou da convergencia de successões de polynomios, possuem propriedade bem características: são respectivamente as funcções de classe zero (funcções continuas) e as funcções de classe 1. As funcções de outras classes não poderão, portanto, ser representadas por successões de polynomios em todo o dominio em que são definidas. Faz-se mister, pois, excluir deste dominio certas porções onde se manifestam as singularidades que impedem a convergência das successões de polynomios. Entretanto, para que se possa tirar desta generalização consequencias uteis, necessário é que as porções excluídas tenham uma medida arbitrariamente pequena. Chega-se assim á noção de convergencia simples de polynomios. Aliás mediante um estudo previo das successões de funcções de Baire verifica-se effectivamente a possibilidade de edificar a theoria sobre esta noção. Convem observar que na definição de convergencia simples a unica noção nova que intervem é a de conjuncto de medida nulla, noção esta que póde ser adquirida independentemente da theoria geral da medida. [...] Seguimos, entretanto, marcha differente. Consideramos as funcções como limites de successões de polynomios simplesmente convergentes, e baseando-nos nesta noção definimos a integral de uma funcção limitada. Esta definição é pois diversa da de E. Borel e tambem da de F. Riesz. Afastamo-nos ainda deste ultimo auctor fazendo intervir no desenvolvimento da theoria considerações attinentes á theoria geral da medida. Assim procedemos pelos motivos que seguem. Primeiramente não achamos muito justa a critica de Riesz, pois adoptando os methodos de Borel extremamente simples se torna o estudo da theoria geral da medida. Em segundo lugar, acceitando o auxilio desta ultima theoria, conseguimos dar maior unidade á nossa exposição fazendo com que os resultados obtidos sejam consequencias logicas de uma unica proposição que denominamos theoremata fundamental. Esta proposição foi demonstrada por Egoroff no tomo 152 dos Comptes-Rendus (1912); a sua demonstração differe, aliás, em alguns pontos da que apresentamos. [...]

Em nosso trabalho estudamos primeiramente as funções de uma variável real; consideramos depois as funções de duas variáveis reais. Estudamos também a representação efectiva das funções sommáveis de uma e de duas variáveis pela integral de Weierstrass. No caso em que a função é de uma variável este resultado já foi obtido por Lebesgue como consequência de um critério geral applicavel ás integraes singulares das funções sommáveis de uma variável. Esta memória de H. Lebesgue foi publicada no tomo I, 3.^a série dos Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Conservamos entretanto a nossa demonstração que differe da de Lebesgue, pois é directa. Quanto á representação efectiva das funções sommáveis de 2 variáveis, L. Tonelli fez um estudo relativo aos polynomios de Landau de 2 variáveis (vide a referencia que a este respeito faz M. Fréchet na pág. 226 do t.2, vol. 1, 2º fasciculo da “Encyclopédie des Sciences Mathématiques”, edição francesa). Propomo-nos a estudar a representação das funções sommáveis de 2 variáveis pela integral dupla de Weierstrass (RAMOS, 1918, p. 3-6).

Desta forma, no estudo da tese em questão destacam-se implicações importantes.

Iniciando o texto, o prefácio da tese dedica-se a uma exposição geral do que será tratado pelo autor, a introdução apresenta algumas definições que serão utilizadas no desenvolvimento da investigação. Dentre estas definições destacam-se a de *conjunto de medida nula como sendo aquele cujos pontos podem ser encerrados em um número finito ou uma infinidade numerável de conjuntos elementares de medida total inferior a ε , ε sendo arbitrariamente pequeno. O conjunto formado pela reunião de um número finito ou de uma infinidade numerável de conjuntos de medida nula, também tem uma medida nula.*

Observa que *um conjunto numerável tem, evidentemente, uma medida nula e vê-se que o conjunto de medida nula pode ser denso em qualquer intervalo, pois é de tal natureza o conjunto dos números racionais.*

Este conceito permite uma generalização devida a E. Borel e que será utilizada no trabalho: *Pode-se fazer uma extensão da definição de medida a certos conjuntos cuja medida não tenha sido definida. Assim, se um conjunto (E) contém todos os pontos de um conjunto mensurável (E_1), diremos que a medida de (E) é superior ou igual à de (E_1), ainda que não tenhamos indicações sobre a natureza de (E). Inversamente, se o conjunto mensurável (E_1) contém todos os pontos do conjunto (E), diremos que a medida de (E) é inferior ou igual à de (E_1). A adoção destas definições generalizadas equivale a substituir*

um cálculo de igualdades por um cálculo de desigualdades. Esta generalização foi o ponto de partida de H. Lebesgue para a sua definição de medida dos conjuntos.

Outra definição apresentada por Theodoro e que será utilizada no desenvolvimento de seu resultado principal é o de *convergência uniforme*.

Theodoro a define: *Supondo que no intervalo (a, b) ³² em que as funções $f_n(x)$ são definidas, a função $r(x)$ seja limitada, a convergência de $[f_n(x)]$ para a função limite $f(x)$ é dita uniforme. A função $r(x)$ é dada como segue:*

Pelo critério de Cauchy sobre limites, conclue-se que sendo dados um valor x_1 do intervalo (a, b) , e um número positivo ε , a esses números corresponde um valor r tal que se tenha:

$$|f(x_1) - f_n(x_1)| < \varepsilon \text{ para } n > r.$$

Dado ε , este número r no caso geral depende do valor de x considerado; seja $r(x)$ o menor dos valores de r que satisfazem a condição precedente quando x e ε são dados. A função $r(x)$ é finita em todo o intervalo (a, b) mas pode não ser limitada para cada valor fixo de ε .

Vê-se, assim, que se uma sucessão $[f_n(x)]$ é uniformemente convergente no intervalo (a, b) , a todo número positivo ε , por menor que seja, corresponde um número r tal que se tenha em todo o intervalo (a, b) :

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ para } n > r.$$

Pode-se reunir as condições necessárias e suficientes para que $[f_n(x)]$ tenha um limite e tenda uniformemente para este limite, dizendo: $[f_n(x)]$ tem um limite para n infinito e tende uniformemente para o seu limite no intervalo (a, b) , quando a cada número positivo ε pode-se fazer corresponder um inteiro r tal que se tenha

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ para } n > r \text{ e } m > r,$$

qualquer que seja o ponto x do intervalo (a, b) .

³² (,) notação para intervalo fechado. Utilizada em todos os casos que for descrita como advindas de Theodoro.

Aprofundando-se na sua obra é possível observar na primeira parte da tese, intitulada *As funções de uma variável real*, algumas questões relevantes para seu desenvolvimento. A saber:

A definição de continuidade de uma função em determinado intervalo dada por Theodoro:

Diremos que $f(x)$ é contínua no intervalo (a, b) quando existe uma sucessão de polinômios $[P_n(x)]$ convergindo uniformemente para $f(x)$ em todos os pontos deste intervalo. Nestas condições, sendo dado o número positivo ε , por menor que seja, pode-se achar um número r tal que se tenha $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, para todos os valores de n superiores a r , e para todos os pontos de (a, b) . Diremos que $f(x)$ é contínua num ponto x_0 no sentido restrito e no qual $f(x)$ é contínua (RAMOS, 1918, p.21).

Define-se continuidade à direita e à esquerda: $f(x)$ sendo contínua no intervalo (a, b) , tem-se na sua extremidade a , $|f(a) - P_n(a)| < \varepsilon$, para $n > r$ mas não se pode dizer que $f(x)$ é contínua no ponto a , por não ser este ponto interior no sentido restrito a nenhum intervalo em que $f(x)$ é contínua; diremos então que $f(x)$ no ponto a é contínua à direita. Do mesmo modo $f(x)$ é contínua à esquerda, no ponto b .

Theodoro utiliza-se desta definição e de duas propriedades que seguem, para apresentar a definição de Cauchy de função contínua. Destaca-se que a definição de continuidade de Cauchy é a propriedade II de Theodoro apresentada abaixo.

Propriedade I: *Se $f(x)$ é contínua em (a, b) , dado um número positivo ε , por menor que seja, pode-se achar um número positivo δ , tal que dividindo (a, b) em intervalos de comprimento não superior a δ , se tenha, $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$, x_1 e x_0 designando dois pontos quaisquer de um desses pequenos intervalos.*

Propriedade II: *Fazendo $x_1 - x_0 = h$, vem $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $|h| < a$, e podemos enunciar: Se $f(x)$ é contínua no intervalo (a, b) , e se o ponto x_0 é interior a (a, b) no sentido restrito, a cada valor da quantidade positiva ε , por menor que seja, corresponde um número positivo a tal que se tenha $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$ para*

$|h| < a$. Nas extremidades a e b , tem-se respectivamente $|f(a+h) - f(a)| < \epsilon$ e $|f(b-h) - f(b)| < \epsilon$ para $|h| < a$, h tomando somente valores positivos.

Após enunciar as duas propriedades, Theodoro faz a seguinte observação:

Cauchy definiu a continuidade de uma função por esta segunda propriedade: portanto se uma função é contínua pela definição que demos é também contínua no sentido de Cauchy. Como vimos a segunda propriedade é apenas uma consequência da primeira, inversamente Cantor e Heine demonstraram que as funções contínuas no sentido de Cauchy possuem a primeira propriedade que recebeu a denominação de propriedade da *continuidade uniforme*. A proposição de Cantor e Heine pode ser facilmente demonstrada com o auxílio do teorema de Borel – Lebesgue (RAMOS, 1918, p. 23).

Do teorema que segue, pode-se concluir que a função limite de uma sucessão ou de uma série uniformemente convergente de funções contínuas, também é contínua.

Teorema de Weierstrass: *Seja $f(x)$ uma função contínua no sentido de Cauchy, definida no intervalo (a, b) . Dado o número positivo ϵ , por menor que seja, pode-se achar um polinômio $P(x)$ tal que se tenha em todo o intervalo (a, b) , $|f(x) - P(x)| < \epsilon$.*

Segundo ao autor:

A convergência uniforme de uma sucessão de funções contínuas é evidentemente uma condição suficiente para que a função limite seja contínua; não é, porém, uma condição necessária, isto é, há sucessões de funções contínuas que não sendo uniformemente convergentes tendem, entretanto, para funções contínuas. Arzela demonstrou que a condição necessária e suficiente para que a função limite de uma sucessão de funções contínuas seja contínua é que a convergência desta sucessão seja *quasi-uniforme* (RAMOS, 1918, p.28).

A definição de convergência quase uniforme para Theodoro:

Definição (Convergência quase uniforme): *Uma sucessão converge quase uniformemente em (a, b) , quando:*

1º- *a sucessão converge em (a, b) ;*

2º- sendo dados ε positivo arbitrariamente pequeno e um número N , por maior que seja, pode-se achar um número finito $N' \geq N$ tal que para cada valor de x de (a, b) existe um número inteiro n_x compreendido entre N e N' , para o qual $|f(x) - P_{n_x}(x)| < \varepsilon$.

Como já apresentado acima, importante para entender o trabalho de Theodoro é a compreensão acerca de sua definição do conceito de continuidade. O autor esclarece e demonstra que, se uma função é contínua pela definição dada por ele, é também contínua na definição de Cauchy.

Na página 38 de sua tese, Theodoro faz a seguinte observação:

Somos assim levados a estudar as funções descontínuas limites de sucessões convergentes de polinômios. Estas funções foram designadas por R. Baire pelo nome de funções de classe 1, ficando reservada às funções limites de sucessões uniformemente convergentes de polinômios, isto é às funções contínuas, a denominação de funções de classe zero (RAMOS, 1918, p. 38).

Definição: Diz-se que um conjunto (E) é denso em um intervalo (a, b) quando em um intervalo qualquer arbitrariamente pequeno contido em (a, b) existem sempre pontos de (E) .

No tocante à função pontualmente descontínua, Theodoro

Diz-se que uma função $f(x)$ é pontualmente descontínua no intervalo (a, b) quando o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é não-denso em (a, b) . Nestas condições em todo intervalo (α, β) interior (no sentido restricto) a (a, b) existem pontos onde $f(x)$ é contínua, isto é o conjunto dos pontos de continuidade de $f(x)$ é denso em (a, b) (RAMOS, 1918, p. 39).

Após a observação acima, que será mais bem explorada ao longo do texto, Theodoro demonstra o seguinte teorema:

Seja $[P_n(x)]$ uma sucessão de polinômios convergindo para a função limite $f(x)$ no intervalo (a, b) . Vamos mostrar que $f(x)$ é pontualmente descontínua em (a, b) (RAMOS, 1918, p. 39).

Ou seja, que o conjunto de pontos de descontinuidades não é denso.

Uma notação: Para Theodoro *conjunto perfeito é aquella que coincide com o seu derivado*³³, ou seja, todos seus pontos são pontos de acumulação, pois não possui ponto isolado.

Então: *a condição necessária e suficiente para que uma função seja de classe zero ou de classe 1 é que $f(x)$ seja pontualmente descontínua relativamente a todo conjunto perfeito.*

Assim:

A condição necessária e suficiente para que uma função seja de classe zero ou de classe 1 é que $f(x)$ seja pontualmente descontínua relativamente a todo conjunto perfeito.

As funções derivadas que em geral são de classe 1 possuem a seguinte propriedade que erradamente era atribuída somente às funções contínuas: uma função derivada não pode passar de um valor A a outro B sem passar por todos os valores intermediários.

São estes resultados de destaque que compõe a primeira parte da tese de Theodoro.

Passando a segunda parte da tese, ao tratar da teoria das funções somáveis Theodoro apoia-se nos conceitos e teorias discutidos por René Baire em sua tese de doutoramento, em Ciências Matemáticas, apresentada a *La Faculté des Sciences de Paris*, e datada do ano de 1899. A título de curiosidade, a banca examinadora dessa tese foi constituída por MM. Darboux (presidente), Appell e Picard (examinadores).

Na página 44 da tese de Theodoro lê-se:

R. Baire propoz uma classificação das funções de variáveis reais. As funções contínuas pertencem á classe zero e as funções descontínuas limites de funções contínuas á classe 1. De um modo geral, são denominadas funções de classe n as funções limites de funções de classe $n - 1$ que não pertencem a esta classe ou a classe menor (RAMOS, p.44, 1918).

³³ *Um conjunto (E) póde ter um número finito ou uma infinidade de pontos de acumulação que constituem um outro conjuncto (E') denominado conjuncto derivado de (E).*

Neste sentido, buscando os trabalhos de R. Baire, no capítulo III de sua tese, intitulado *Fonctions discontinues développables en séries multiples de fonctions continues*, no primeiro item relativo à definição destas funções, Baire (1899, p.68-69) escreve³⁴:

62. Eu me proponho definir e estudar neste capítulo, certas classes de funções descontínuas, que pode se dizer relacionar, em certo sentido, as funções contínuas. Tomarei como ponto de partida a noção de função limite de uma sequência de funções. Acabamos de ver, no capítulo anterior, existem funções descontínuas de uma variável real que podem ser obtidas como limites de funções contínuas, e determinou-se a condição necessária e suficiente para que uma função tenha esta propriedade.

Eu concordo em dizer que as funções contínuas formam a classe 0, e as funções descontínuas limites de funções contínuas formam a classe 1. De acordo com isso, as funções da primeira classe são funções que são descontínuas representáveis por séries convergentes de funções contínuas e, conseqüentemente, como já demonstrado, por séries convergentes de polinômios.

63. Suponha agora que temos uma sequência de funções pertencentes às classes 0 ou 1, e com uma função limite de não pertencer a qualquer uma destas duas classes. Diria que esta função limite é uma função da segunda classe, e o conjunto de todas as funções que podem ser obtidos desta forma irão formar classe 2. É visto a partir deste que uma função de classe 2 pode ser expandida em uma série, convergente para cada valor de x , e cujos termos são funções de classe 1, através da substituição de cada termo pelo conjunto de polinômios que representa, é reconhecido que

³⁴ 62. Je me propose de définir et d'étudier dans ce chapitre, certaines catégories de fonctions discontinues, dont on peut dire qu'elles se rattachent, en un certain sens, aux fonctions continues. Je prendrai pour point de départ la notion de fonction limite d'une suite de fonctions. Nous venons de voir, dans le chapitre précédent, qu'il y a des fonctions discontinues d'une variable réelle qu'on peut obtenir comme limites de fonctions continues, et nous avons déterminé la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction possède cette propriété. Je conviendrai de dire que les fonctions continues forment la classe 0, et que les fonctions discontinues limites de fonctions continues forment la classe 1. D'après cela, les fonctions de la première classe sont les fonctions discontinues qui sont représentables par des séries convergentes de fonctions continues, et par suite, comme nous l'avons montré, par des séries convergentes de polynômes.

63. Supposons maintenant qu'on ait une suite de fonctions appartenant aux classes 0 ou 1, et possédant une fonction limite n'appartenant à aucune de ces deux classes. Je dirai que cette fonction limite est une fonction de la second classe, et l'ensemble de toutes les fonctions qu'on peut obtenir de cette manière formera la classe 2. On voit d'après cela qu'une fonction de la classe 2 est développable en une série, convergente pour chaque valeur de x , et dont tous les termes sont des fonctions de classe 1; en remplaçant chacun de ces termes par la série de polynômes qui le représente, on reconnaît qu'une fonction de classe 2 peut être représentée par une série double dont les termes sont des polynômes. [...]

64. Dê même que nous avons défini les fonctions des classes 1 et 2, nous pourrons définir les fonctions de classes 3, 4, ... n , ... Une fonction sera dite de classe n , si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant aux classes 0,1, 2, ..., $n-1$, et si elle n'appartient pas elle-même à l'une de ces classes. Une telle fonction, s'il en existe, pourra se représenter par une série d'ordre n , dont les termes seront des polynômes: $\sum_{a_1} \sum_{a_2} \dots \sum_{a_n} P_{a_1 a_2 \dots a_n}(x)$.

uma função de classe 2 pode ser representada por uma série dupla cujos termos são polinômios.

64. Assim como nós definimos as funções da classe 1 e 2, podemos definir as funções das classes 3, 4, ... n, ... Uma função é dita ser da classe n, se ela é o limite de uma sequência de funções pertencentes as classes 0, 1, 2, ..., n-1, e se ela própria não pertence a uma dessas classes. Tal função, se houver, será representado por uma série de ordem n, cujos termos são polinômios: $\sum_{a_1} \sum_{a_2} \dots \sum_{a_n} P_{a_1 a_2 \dots a_n}(x)$ (BAIRE, 1899, p.68-69).

O que coincide com a definição atual acerca da classificação de Baire.

Um resultado importante neste sentido é a demonstração do teorema fundamental relativo às sucessões simplesmente convergentes de funções de Baire. Para um melhor entendimento, segue a definição:

Diz-se que $[f_n(x)]$ converge simplesmente para a função $f(x)$ quando $f_n(x)$ tende para $f(x)$ em todos os pontos de (a, b) excepto talvez nos pontos de um conjuncto de medida nulla. É evidente que a convergência no sentido commum é um caso particular da convergência simples³⁵ (RAMOS, 1918, p. 45).

Teorema: “Seja $[f_n(x)]$ uma sucessão de funções de Baire convergindo simplesmente para uma função limite $f(x)$ no intervalo (a, b) . Sendo dado o número positivo σ , por menor que seja, existe no intervalo (a, b) um conjunto de medida maior que $b - a - \sigma$ no qual $[f_n(x)]$ converge uniformemente” (RAMOS, 1918, p.45).

Outros teoremas e resultados que seguem podem ser tomados como relevantes para o desenvolvimento da tese de Theodoro.

O 2º Teorema Básico: “Seja $f(x)$ uma função de Baire definida no intervalo (a, b) e tal que dado o número positivo arbitrariamente pequeno σ_1 , exista uma sucessão de funções tendendo uniformemente para $f(x)$ em um conjunto de medida superior a

³⁵ Consideremos uma sucessão de funções de uma variável real definidas no intervalo (a, b) e que representaremos pelo symbolo $[f_n(x)]$ tenda para todos os valores x de (a, b) para uma função $f(x)$ quando n cresce indefinidamente; tem-se então: $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$, e a sucessão é convergente no intervalo (a, b) .

$b - a - \sigma_1$. Nestas condições é possível achar uma sucessão de funções $[f_n(x)]$ que tende simplesmente para $f(x)$ em (a, b) ” (RAMOS, 1918, p.48).

Observa-se que este teorema intitulado por Theodoro como 2º Teorema Básico é uma recíproca para o primeiro acima (não identificado como 1º Teorema Básico pelo autor, mas simplesmente nomeado *teorema*).

O 3º Teorema Básico: “Seja $[f_n(x)]$ uma sucessão de funções de Baire convergindo simplesmente para $f(x)$ no intervalo (a, b) . Se cada função $f_n(x)$ for limite de uma sucessão de polinômios simplesmente convergente $f(x)$ também será limite de uma sucessão simplesmente convergente de polinômios” (RAMOS, 1918, p.49).

Destes teoremas, vem:

A conclusão imediata do 3º Teorema Básico: Toda função pertencente à classificação de Baire pode ser considerada como limite de uma sucessão simplesmente convergente de polinômios.

E:

Se a sucessão de funções somáveis $[f_n(x)]$ tende simplesmente no intervalo (a, b) para uma função limite $f(x)$, a função $f(x)$ também é somável.

A conclusão: Todas as funções limitadas pertencentes à classificação de Baire são somáveis.

Com auxílio dos três teoremas acima, o autor irá adentrar a integração das funções somáveis, além de abordar o estudo das funções limitadas pertencentes à classificação de Baire desenvolvendo a teoria de integração de tais funções.

Define:

Seja $f(x)$ uma função, limitada e definida no intervalo (a, b) . Si $f(x)$ é limite de uma sucessão de polinômios $[P_n(x)]$ simplesmente convergente, diz-se que $f(x)$ é uma função sommavel (RAMOS, 1918, p.51).

A função integral de uma função somável $f(x)$ é o limite das integrais dos termos de uma sucessão de polinômios $[P_n(x)]$ que converge simplesmente para $f(x)$ (RAMOS, 1918, p.53).

Assim, passa ao teorema que constituiu seu próximo objetivo: *Seja $[f_n(x)]$ uma sucessão de funções somáveis limitadas em conjunto, e tendendo simplesmente para a função somável $f(x)$ no intervalo (a, b) . A integral de $f_n(x)$ tende para a integral de $f(x)$ (RAMOS, 1918, p. 56).* Theodoro utilizará deste resultado nos encaminhamentos do seu teorema principal discutido à frente.

Segundo Theodoro (1918, p.58) é importante o teorema: *As integrais indefinidas de uma função derivada limitada são as suas funções primitivas.*

Na página 60, o autor fala sobre a generalização do conceito de integral e do adotado por ele em sua tese:

Comparando os resultados precedentes com os trabalhos de Borel e Lebesgue relativos á generalização de integral, vemos que suppondo as funcções limitadas, a definição que apresentamos possui as mesmas propriedades que as definições d'aquelles autores. A equivalência entre estas definições é aliás, posta em evidencia por 2 theoremas dos quaes o primeiro foi demonstrado por H. Lebesgue (vide Leçons sur les séries trigonométriques, pg.14) e assim se enuncia: "Si na sucessão de funcções sommaveis no sentido de Lebesgue converge simplesmente para a função sommavel $f(x)$, a sucessão das integraes converge para a integral de $f(x)$ ". Quanto ao segundo theorema que foi demonstrado por F. Riesz no t. 148 dos Comptes-Rendus, o seu enunciado é o seguinte: "Si uma sucessão de funcções converge asymptoticamente para uma função limite, desta sucessão póde-se extrahir uma outra que converge simplesmente para a mesma função limite. A noção de integral generalizada é capital no estudo das funcções derivadas e na pesquisa das funcções primitivas. H. Lebesgue obteve os principais resultados sobre o assumpto" (RAMOS, 1918, p. 60).

Esses resultados permitiram ao autor considerar as funções como limites de sucessões de polinômios simplesmente convergentes e, baseando nesta noção, definir a integral de uma função limitada. Para esta definição, utilizou das propriedades da integral

de Lebesgue e da integral de Borel, com o intuito de construir a parte preliminar da teoria da integração das funções limitadas sem a intervenção da teoria geral da medida.

A seguir Theodoro passou ao estudo da representação efetiva das funções somáveis.

O autor explica que se encontra no livro de E. Borel “Leçons sur les fonctions de variables réelles” uma demonstração do theorema de Weierstrass relativo às funções contínuas. Nos fala que como consequência desta demonstração, devida a Weierstrass nos seus pontos essenciais, consegue-se representar uma função contínua qualquer pela expressão:

$$\psi(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2}$$

Continua dizendo que:

Lendo o estudo que fez Lebesgue nas suas “Leçons sur les séries trigonométriques” sobre a representação de uma função sommavel pelas sommas de Féjer, tivemos a idéa de realizar identica generalização para a integral $\psi(x, k)$, utilizando parte dos raciocínios allí adoptados, generalização esta que aqui apresentamos. Este resultado já foi entretanto obtido por H. Lebesgue como consequencia de um criterio geral applicavel ás integraes singulares das funções sommaveis de uma variavel. A memória de H. Lebesgue sobre este assumpto foi publicada nos Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3^a série, toma I, que acabamos que receber da Europa. Conservamos a nossa demonstração que differe da de Lebesgue por ser directa. A demonstração de Lebesgue relativas ás sommas de Féjer que se encontra nas “Leçons sur les séries trigonométriques” está visivelmente errada. M. Fréchet no seu artigo de Encyclopédie des Sciences Mathématiques (t. III, 1^o vol., 2^o fasciculo, edição francesa, 1912), diz que a demonstração primitiva de H. Lebesgue publicada na revista alemã Math. Ann. 61, (1905), que não conhecemos, acha-se isenta de erros. Na sua memoria já citada nos Annales de la F. des S. de Toulouse, H. Lebesgue rectifica o seu engano e mostra que a referida proposição pode ser obtida como consequencia do criterio geral relativo ás integraes singulares (RAMOS, 1918, p.64).

Percebe-se por esta citação de Theodoro o resultado central de sua tese. Mesmo com a demonstração de Lebesgue, o mesmo explica o motivo de manter sua demonstração.

...

Assim, Theodoro considerará *uma função somável* $f(x)$ *definida no intervalo* (a, b) . Explica que *fora deste intervalo define-se* $f(x)$ *do seguinte modo: em* $(-\infty, a)$, $f(x) = f(a)$ *e em* $(b, +\infty)$, $f(x) = f(b)$. *Esclarece ter assim definido uma função somável em* (a, b) *e limitada em* $(-\infty, +\infty)$.

O autor passa ao resultado:

Teorema: *a expressão*

$$\psi(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du, k > 0$$

tende para $f(x)$ *quando* k *tende para zero, em todos os pontos de* (a, b) , *exceto talvez nos pontos de um conjunto de medida nula.*

O que resulta a possibilidade de conseguir representar uma função continua qualquer pela expressão acima.

Para a demonstração deste teorema Theodoro utiliza de alguns resultados importantes:

a. **Lema:** *O conjunto dos pontos nos quais*

$$\Phi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t |\Phi(t)| dt = 0$$

tem como complementar em relação ao intervalo (a, b) *um conjunto de medida nula.*

b. Resultado 1: Theodoro começa a estudar a expressão

$$\psi(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

e considera M o limite superior de $|f(x)|$ em $(-\infty, +\infty)$. Para este estudo, separa $\psi(x, k)$

em três partes: $\psi(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x-h} + \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{x-h}^{x+h} + \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{x+h}^{+\infty}$.

Ou seja, fazendo $u = x + kt$, tem-se:

$$\sqrt{\pi}\psi(x, h) = \int_{-\infty}^{-\frac{h}{k}} f(x + kt)e^{-t^2} dt + \int_{-\frac{h}{k}}^{+\frac{h}{k}} f(x + kt)e^{-t^2} dt + \int_{+\frac{h}{k}}^{+\infty} f(x + kt)e^{-t^2} dt$$

Estudando as integrais separadamente e utilizando de algumas operações e do lema (a), obtém os resultados:

Considere a função abaixo:

$$g(x, k) = \int_{-\frac{h}{k}}^{+\frac{h}{k}} f(x + kt)e^{-t^2} dt$$

$$|g(x, k) - f(x)| < \epsilon + \frac{2\epsilon}{\sqrt{\pi}} |f(x)| < \epsilon + \frac{2\epsilon}{\sqrt{\pi}} M \quad (*)$$

$$|\psi(x, k) - g(x, k)| < 2M\epsilon \quad (**)$$

Por (*) e (**), conclui-se que:

$$|\psi(x, k) - f(x)| < \epsilon + 4M\epsilon$$

Logo, o conjunto dos pontos em que $\Phi'(0) = 0$ tem como complementar em relação a (a, b) um conjunto de medida nula; concluímos assim que

$$\psi(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

tende para a função somável $f(x)$, quando k tende para zero, em todos os pontos de (a, b) , exceto talvez nos pontos de um conjunto de medida nula.

c. Resultado 2: Da conclusão acima,

Deduz-se a possibilidade de representar no intervalo (a, b) a função contínua $f(x)$ por uma sucessão de polinômios uniformemente convergente. Com efeito, em um intervalo finito qualquer (a, b) , $\psi(x, k)$ é desenvolvível em série inteira segundo as potências crescentes de x (Vide Borel “Leçons sur les fonctions de variables réelles”, pg. 54); tomando um número suficiente de termos desta série, consegue-se representar em (a, b) , $\psi(x, k)$ e portanto $f(x)$, com a aproximação que se quiser por um polinômio (RAMOS, 1918, p. 72 – 73).

Adentrando à terceira parte da tese onde são tratadas as notas 1 e 2 estudadas pelo autor, tem-se:

Na nota 1, intitulada Nota sobre uma fórmula de interpolação, o autor refere-se a uma fórmula de interpolação e, após fazer algumas considerações, dedica-se principalmente a demonstrar que se a função contínua $f(x)$ em $(0, 1)$, satisfaz a condição de Lipschitz, este erro é um infinitésimo de ordem de $\frac{1}{\sqrt{m}}$ pelo menos. Não há destaque de outros resultados.

Quanto à nota 2, intitulada Nota sobre a aproximação das funções duas vezes deriváveis, destaca-se o polinômio procurado na nota 2:

De acordo com Theodoro, S. Bernstein (Note sur les séries normales, t. II, Leçons sur les principes de l'Analyse de R. D'Adhémar) partindo da fórmula:

$$(1) f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x - a| f''(a) da + A + Bx$$

em que A e B são duas constantes, obteve para a representação de $f(x)$ um desenvolvimento em série normal, isto é, em série da forma:

$$f(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,q} x^p (1 - x^2)^q$$

E ele se propõe a calcular effectivamente um polynomio que represente $f(x)$ com uma aproximação dada *a priori*.

Theodoro efetua alguns cálculos (cita M. Potron e seu texto “Sur une formule générale d’interpolation” – Bulletin de la Societé Mathématique de France, 1906) e chega ao polinômio procurado:

$$P(x) = A + Bx + \sum_{k=0}^{k=2\delta m^2} C_k x^k.$$

Sabe-se que polinômios dessa forma merecem destaques nos estudos de Análise Funcional.

Na quarta e última parte da tese, o autor realizou algumas considerações sobre as funções de duas variáveis reais passando a representação efetiva das funções somáveis de duas variáveis reais pela integral dupla de Weierstrass. Nosso personagem fez a seguinte explanação:

Vamos tratar directamente o caso geral das funções pertencentes a uma classe qualquer de Baire. Para as funções contínuas e funções de classe 1 de 2 variáveis, grande parte dos resultados relativos ao caso de uma variável pode ser facilmente generalizada. A demonstração do theorema de Weierstrass pelo methodo de Lebesgue, para o caso de 2 variáveis, encontra-se, por exemplo, na pg. 63 do livro de Borel “Leçons sur les fonctions de variables réelles” (RAMOS, 1918, p.84).

Consideremos uma sucessão de funções da classificação de Baire $[f_n(x_1, x_2)]$ definidas no domínio mensurável D . Diz-se que $[f_n(x_1, x_2)]$ converge simplesmente para a função $f(x_1, x_2)$ quando $[f_n(x_1, x_2)]$ tende para $f(x_1, x_2)$ em todos os pontos de D , exceto talvez nos pontos de um conjunto de medida nula.

Destacam-se os resultados: O theorema fundamental, 2º e 3º theorema básico para o caso de duas variáveis reais.

a. Teorema fundamental – Seja $[f_n(x_1, x_2)]$ uma sucessão de funções de Baire convergindo simplesmente para uma função limite $f(x_1, x_2)$ no domínio mensurável D . Dado o número positivo σ , por menor que seja, pode-se achar no domínio D um outro domínio cuja medida difere da de D de menos de σ , e no qual $[f_n(x_1, x_2)]$ converge uniformemente.

b. Teorema II: Seja $f(x_1, x_2)$ uma função de Baire definida no domínio mensurável D e tal que dado o número positivo arbitrariamente pequeno σ , exista uma sucessão de funções tendendo uniformemente para $f(x_1, x_2)$ em um domínio de medida superior a $\text{med } D - \sigma$. Nestas condições é possível achar uma sucessão de funções $[f_n(x_1, x_2)]$ que tende simplesmente para $f(x_1, x_2)$ no domínio D .

c. Teorema III: Seja $[f_n(x_1, x_2)]$ uma sucessão de funções convergindo simplesmente para $f(x_1, x_2)$ no domínio mensurável D . Se cada função $f_n(x_1, x_2)$ for limite de uma sucessão de polinômios simplesmente convergente, $f(x_1, x_2)$ também será limite de uma sucessão simplesmente convergente de polinômios.

Theodoro passou ao tratamento das funções somáveis e define:

Definição (função somável de 2 variáveis): *Seja $f(x_1, x_2)$ uma função limitada e definida no domínio mensurável D . Se $f(x_1, x_2)$ é limite de uma sucessão de polinômios $[P_n(x_1, x_2)]$ simplesmente convergente, diz-se que $f(x_1, x_2)$ é uma função somável.*

E apresentou o resultado:

Teorema: *Se a sucessão de funções somáveis tende simplesmente para uma função limite $f(x_1, x_2)$ no domínio mensurável D , $f(x_1, x_2)$ também é somável em D (RAMOS, 1918, p.85).*

Observa-se que este teorema é análogo ao da página 78. Aqui Teodoro usa a ideia de medida, lá ele não usa de maneira proposital. Ele faz para funções de duas variáveis aquilo que havia feito para funções de uma variável, mas só que usando a noção de medida.

Merece destaque o estudo realizado pelo autor relativo à representação das funções somáveis de 2 variáveis pela integral dupla de Weierstrass:

Seja $f(x_1, x_2)$ uma função somável definida no domínio mensurável D . Fora de D definiremos $f(x_1, x_2)$ pondo $f(x_1, x_2) = 0$.

A integral de Weierstrass é a seguinte:

$$\psi(x_1, x_2, k) = \frac{1}{k^2 \pi} \iint_P f(u_1, u_2) e^{-\left(\frac{u_1 - x_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{u_2 - x_2}{k}\right)^2} du_1 du_2,$$

em que k é positivo e o domínio de integração sendo todo o plano.

Será considerada a função:

$$\begin{aligned} \phi(t_1, t_2) &= f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) + f(x_1 - t_1, x_2 + t_2) + f(x_1 + t_1, x_2 - t_2) \\ &\quad + f(x_1 - t_1, x_2 - t_2) - 4f(x_1, x_2); \end{aligned}$$

Para uma melhor compreensão da demonstração deste teorema dada por Theodoro, destacam-se os seguintes resultados:

a. Resultado 1: Lema: A relação

$$\lim_{t=0} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |\phi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 = 0^{36}$$

é verificada em todos os pontos do domínio mensurável D , excetuando talvez os pontos de um conjunto de medida nula.

b. Resultado 2: Estudo da integral $\psi(x_1, x_2, k)$.

Por uma escolha conveniente da origem, pode-se sempre supor o domínio mensurável D interior a certo quadrado, que por sua vez é interior ao quadrado Δ de vértices $(0,0), (0, a), (a, 0), (a, a)$. Nestas condições qualquer que seja o ponto D , a sua distância a um ponto qualquer do contorno de Δ é superior a um número positivo fixo δ .

Consideremos um ponto $M(x_1, x_2)$ qualquer do domínio D e dividamos o quadrado Δ em 5 partes do seguinte modo: Δ_1 é o quadrado de centro $M(x_1, x_2)$ e de lados paralelos aos de Δ e de comprimento $2a < 2\delta$, quanto às partes $\Delta_2; \Delta_3; \Delta_4; \Delta_5$; elas são obtidas mediante a divisão da parte de Δ que não pertence a Δ_1 , por 2 paralelas aos eixos coordenados traçadas pelo ponto M .

Temos, então:

$$\iint_P = \iint_{\Delta_1} + \iint_{\Delta_2} + \iint_{\Delta_3} + \iint_{\Delta_4} + \iint_{\Delta_5} + \iint_{P_1},$$

em que a última integral é referida a região P_1 do plano exterior ao quadrado Δ .

Consideremos a integral:

$$\frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_2} f(u_1, u_2) e^{-\left(\frac{u_1-x_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{u_2-x_2}{k}\right)^2} du_1 du_2.$$

O autor efetua alguns cálculos e conclui que $\frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_2}$ tende para zero com k , e isto qualquer que seja o ponto $M(x_1, x_2)$ de D .

³⁶ Observa-se que a notação $\lim_{t=0} f(t)$ utilizada no texto, trata-se da notação aplicada na época e compatível com a obra estudada. Atualmente, utiliza-se a grafia $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

Operando com as integrais $\iint_{\Delta_3}, \iint_{\Delta_4}, \iint_{\Delta_5}$ de modo análogo ao precedente, conclui-se que qualquer que seja o ponto $M(x_1, x_2)$ do domínio D , as integrais

$$\iint_{\Delta_i} (i = 2, 3, 4, 5,)$$

tendem para zero com k .

A integral $\frac{1}{k^2\pi} \iint_{P_1}$ é evidentemente nula, pois em P_1 , $f(x_1, x_2) = 0$. Aliás, é fácil ver que se em P_1 , $f(x_1, x_2)$ não fosse nula, mas tal que $|f(x_1, x_2)| \leq M$, $\frac{1}{k^2\pi} \iint_{P_1}$ tenderia para zero com k .

Acrescenta que resta então estudar a integral:

$$g(x_1, x_2, k) = \frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_1} f(u_1, u_2) e^{-\left(\frac{u_1-x_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{u_2-x_2}{k}\right)^2} du_1 du_2,$$

em que Δ_1 é o quadrado de centro $M(x_1, x_2)$ e de lado $2a$.

O autor concluiu que a integral acima converge para zero e assim demonstrou seu teorema, ou seja, que a função:

$$\psi(x_1, x_2, k) = \frac{1}{k^2\pi} \iint_P f(u_1, u_2) e^{-\left(\frac{u_1-x_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{u_2-x_2}{k}\right)^2} du_1 du_2,$$

tende para uma função somável $f(x_1, x_2)$ em todos os pontos do domínio mensurável D , exceto talvez nos pontos de um conjunto de medida nula.

Continuando o autor conclui que $\psi(x_1, x_2, k)$ tende uniformemente para a função contínua $f(x_1, x_2)$ no domínio fechado D . Como no caso das funções de uma variável deduz-se desta última conclusão a possibilidade de representar $f(x_1, x_2)$ no domínio D , por uma sucessão uniformemente convergente de polinômios.

Com esta conclusão Theodoro finalizou sua tese.

Nota-se que dentre os vários autores por ele mencionados ao longo do texto, alguns tiveram notável importância. A saber:

Émile Borel (1871 – 1956) com seu trabalho sobre medida dos conjuntos; Henri Lebesgue (1875-1941) com seu estudo sobre integração; Karl Weierstrass (1815-1897) no tocante à representação efetiva das funções somáveis de uma variável pela integral de Weierstrass; Leonida Tonelli (1855-1946) referente ao estudo relativo aos polinômios de Landau de duas variáveis para a representação efetiva das funções somáveis de duas variáveis; e R. Baire (? - ?) por meio do trabalho sobre funções descontínuas, pois as funções de Baire enlaçam o teorema fundamental proposto por Theodoro Augusto Ramos em sua tese.

Estas teorias propiciaram a Theodoro Augusto Ramos (1895 – 1935) estudar a representação das funções sommáveis de duas variáveis pela integral dupla de Weierstrass. Mostrou assim, que se é natural basear a teoria das funções de variáveis reais sobre a simples noção de polinômio.

Como já dito anteriormente, a tese de doutoramento de Theodoro não apresenta uma lista de referências bibliográficas como conhecemos hoje, todavia são mencionados ao longo do texto, os autores e obras utilizados por este personagem, sendo muitas vezes acrescentado o número da página e o ano da publicação. Neste sentido, no tocante às obras aludidas pelo autor, tornou-se possível construir a seguinte listagem:

- R. Baire, Leçons sur les théories générales de l'Analyse, t. 1. (página 11)
- _____. Leçons sur les fonctions discontinues.
- E. Borel - Comptes-Rendus, Journal de Jordan, 1912.
- _____. Leçons sur la théorie des fonctions, 2ª edição, 1914, Note VI.
- _____. Leçons sur les fonctions monogènes, 1917.
- _____. Leçons sur les fonctions de variables réelles. (páginas 42, 54, 63, 74)
- _____. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1895.
- Gomes Teixeira – Curso de Analyse, t. 1, 4ª edição.
- Goursat – Cours d'Analyse, t. 1, 3ª edição, 1917. (páginas 454, 486)
- J. Tannery- Introduction à la théorie des fonctions, t. 1, 2ª edição.
- _____. Leçons d'Algèbre et d'Analyse, t. 1. (página 72)
- Darboux – Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1875.
- H. Lebesgue *apud* Cours d'Analyse de Goursat, t.1, 3ª edição, 1917.

- H. Lebesgue – Leçons sur l'intégration. (páginas 70, 71, 114)
- H. Lebesgue *apud* E. Borel – Leçons sur les fonctions de variables réelles.
- _____. Leçons sur les séries trigonométriques. (página 14)
- _____. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 1904. (página 124)
- _____. Leçons sur les séries trigonométriques, 1906. (página 13)
- _____. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 3^{ème} série, t.1.
- H. Lebesgue (revista alemã Math. Ann. 61, 1905) *apud* M. Fréchet – Encyclopédie des Sciences Mathématiques, t. 3, v. 1, 2^o fascículo, edição franceza, 1912.
- _____. Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo VII, 1902.
- S. Pincherle – Lezioni di Calcolo, 1915.
- Octacilio Novaes - Sobre o Calculo differencial (formula de Peano).
- S. Bernstein *apud* D'Adhémar – Leçons sur les principes de l'Analyse, t.2, 1913. (página 273).
- F. Riesz – Comptes-Rendus, t. 148.
- P. Montel – Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, 1910.
- M. Potron – Sur une formule générale d'interpolation , Bulletin de la Societé Mathématique de France, 1906.
- G. Vitali – Sui gruppi di punti e sulle funzione di variabili reali, Atti Accad. Torino, t. 43, 1907-1908.
- G. Fubini – Sugli integrali multipli, Rendiconti Ac. dei Lincei, serie 5, t. 16, 1907, Roma.

Verifica-se que a teoria das funções de variáveis reais estudada por Theodoro desenvolveu-se após os trabalhos já citados de E. Borel, R. Baire e H. Lebesgue, pois o mesmo utilizou-se destes autores sistematicamente ao longo do texto. Merece destaque duas observações realizadas por Theodoro em que, primeiro: afirma que só podem ser

representadas por sucessões de polinômios as funções de classe zero (funções contínuas) e as funções de classe 1.

Aliás mediante um estudo previo das sucessões de funções de Baire verifica-se effectivamente a possibilidade de edificar a theoria sobre esta noção. Convem observar que na definição de convergência simples a única noção nova que intervem é a de conjuncto de medida nulla, noção esta que pode ser adquirida independentemente da theoria geral da medida (RAMOS, 1918, p.4).

Segundo: destaca-se que nosso personagem foi o primeiro a trabalhar a noção de convergência simples utilizando conjunto de medida nula, independentemente, da teoria geral da medida. Este fato pode ser averiguado em sua tese, sendo observado também no excerto abaixo transcrito do prefácio da mesma:

F. Riesz (vide Comptes-Rendus, 1912) adoptou como ponto de partida a convergência simples de certas funções discontinuas por elle denominadas de funções simples, e edificou a parte essencial da theoria das funções de variaveis reaes independentemente da theoria geral da medida, análogo estudo poderíamos fazer com os polynomios (RAMOS, p.4, 1918).

Assim, em uma análise da tese de doutoramento produzida por Theodoro, pode-se destacar quatro pontos principais tomados pelo autor e que se refletem na compreensão do seu foco principal, que é também o principal teorema/resultado do trabalho realizado pelo autor. A saber: a questão abordada e referente à consideração das funções como limites de sucessões de polinômios; o estudo sobre teoria da medida; a construção da parte preliminar da teoria da integração das funções limitadas sem a intervenção da teoria geral da medida, utilizando a integral de uma função limitada com as propriedades da integral de Lebesgue e da integral de Borel; e finalmente, o principal resultado do trabalho que é dedicado à representação das funções somáveis de duas variáveis pela integral dupla de Weierstrass.

3.2. Sobre o teorema principal estudado por Theodoro Augusto Ramos:

Este tópico é dedicado a apresentar a demonstração completa do teorema que constituiu o foco do autor, ou seja, o estudo da representação das funções somáveis de 2 variáveis pela integral dupla de Weierstrass.

Seja $f(x_1, x_2)$ uma função somável definida no domínio mensurável D . Fora de D definiremos $f(x_1, x_2)$ pondo $f(x_1, x_2) = 0$.

A integral de Weierstrass é a seguinte:

$$\psi(x_1, x_2, k) = \frac{1}{k^2 \pi} \iint_P f(u_1, u_2) e^{-\left(\frac{u_1 - x_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{u_2 - x_2}{k}\right)^2} du_1 du_2,$$

em que k é positivo e o domínio de integração sendo todo o plano.

A demonstração deste resultado se deu do seguinte modo:

Consideremos a função:

$$\begin{aligned} \phi(t_1, t_2) = & f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) + f(x_1 - t_1, x_2 + t_2) + f(x_1 + t_1, x_2 - t_2) \\ & + f(x_1 - t_1, x_2 - t_2) - 4f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Vamos demonstrar o seguinte:

Lema: A relação:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |\phi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 = 0$$

é verificada em todos os pontos do domínio mensurável D , excetuando talvez os pontos de um conjunto de medida nula.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |\phi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \\ & \leq \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) - f(x_1, x_2)| dt_1 dt_2 \\ & \quad + \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |f(x_1 - t_1, x_2 + t_2) - f(x_1, x_2)| dt_1 dt_2 \\ & \quad + \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |f(x_1 + t_1, x_2 - t_2) - f(x_1, x_2)| dt_1 dt_2 \\ & \quad + \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |f(x_1 - t_1, x_2 - t_2) - f(x_1, x_2)| dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Ora, conforme já vimos, exceção feita dos pontos de um conjunto de medida nula, $|f(x_1, x_2) - a|$ é, no ponto (x_1, x_2) , a derivada de sua integral indefinida qualquer que seja a e, em particular para $a = f(x_1, x_2)$.

Tem-se, pois,

$$|f(x_1, x_2) - a| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) - a| dt_1 dt_2,$$

e igualdades análogas para as outras três integrais. Fazendo $a = f(x_1, x_2)$, conclui-se que nos pontos de D , excetuando talvez os de um conjunto de medida nula

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |\phi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 = 0.$$

...

Passemos agora ao estudo da integral $\psi(x_1, x_2, k)$.

Por uma escolha conveniente da origem, pode-se sempre supor o domínio mensurável D , interior a certo quadrado, que por sua vez é interior ao quadrado Δ de vértices $(0,0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$, (a, a) . Nestas condições qualquer que seja o ponto D , a sua distância a um ponto qualquer do contorno de Δ é superior a um número positivo fixo δ .

Consideremos um ponto $M(x_1, x_2)$ qualquer do domínio D e dividamos o quadrado Δ em 5 partes do seguinte modo: Δ_1 é o quadrado de centro $M(x_1, x_2)$ e de lados paralelos aos de Δ e de comprimento $2a < 2\delta$; quanto às partes $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$, elas são obtidas mediante a divisão da parte de Δ que não pertence a Δ_1 , por 2 paralelas aos eixos coordenados traçadas pelo ponto M .

Temos, então:

$$\iint_P = \iint_{\Delta_1} + \iint_{\Delta_2} + \iint_{\Delta_3} + \iint_{\Delta_4} + \iint_{\Delta_5} + \iint_{P_1},$$

em que a última integral é referida a região P_1 do plano exterior ao quadrado Δ .

Consideremos a integral:

$$\frac{1}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_2} f(u_1, u_2) e^{-\left(\frac{u_1 - x_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{u_2 - x_2}{k}\right)^2} du_1 du_2.$$

Ponhamos $u_1 - x_1 = t_1$, $u_2 - x_2 = t_2$; em Δ_2 , u_1 e u_2 variam respectivamente de x_1 e x_2 a a ; t_1 e t_2 variam, pois de 0 a $a - x_1$ e de 0 a $a - x_2$; mas pode-se observar que $t_1^2 + t_2^2 > a^2$, visto que $t_1^2 + t_2^2 = (u_1 - x_1)^2 + (u_2 - x_2)^2$ é o quadrado da distância dos pontos (u_1, u_2) e $M(x_1, x_2)$, M sendo o centro do quadrado de lado $2a$ e (u_1, u_2) pertencendo a Δ_2 .

Chamando de Δ_t o domínio assim definido em que variam t_1 e t_2 , vem:

$$\iint_{\Delta_2} \leq \iint_{\Delta_t} |f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)| e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2}{k^2}} dt_1 dt_2,$$

e portanto,

$$\frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_2} \leq \frac{1}{k^2\pi} e^{-\frac{a^2}{k^2}} \iint_{\Delta} |f(t_1, t_2)| dt_1 dt_2,$$

visto que $e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2}{k^2}} < e^{-\frac{a^2}{k^2}}$, e, $|f(t_1, t_2)|$ são positivos.

Ora, $\frac{1}{k^2\pi} e^{-\frac{a^2}{k^2}}$ tende para zero com k , e $\iint_{\Delta} |f(t_1, t_2)| dt_1 dt_2$ tem um valor positivo, pois $|f(t_1, t_2)|$ é somável em Δ , logo $\frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_2}$ tende para zero com k , e isto qualquer que seja o ponto $M(x_1, x_2)$ de D .

Operando com as integrais \iint_{Δ_3} , \iint_{Δ_4} , \iint_{Δ_5} de modo análogo ao precedente, conclui-se que qualquer que seja o ponto $M(x_1, x_2)$ do domínio D , as integrais:

$$\iint_{\Delta_i} (i = 2, 3, 4, 5)$$

tendem para zero com k .

A integral $\frac{1}{k^2\pi} \iint_{P_1}$ é evidentemente nula, pois em P_1 , $f(x_1, x_2) = 0$. Aliás, é fácil ver que se em P_1 , $f(x_1, x_2)$ não fosse nula, mas tal que $|f(x_1, x_2)| \leq M$, $\frac{1}{k^2\pi} \iint_{P_1}$ tenderia para zero com k .

Resta-nos estudar a integral:

$$g(x_1, x_2, k) = \frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_1} f(u_1, u_2) e^{-\left(\frac{u_1 - x_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{u_2 - x_2}{k}\right)^2} du_1 du_2,$$

em que Δ_1 é o quadrado de centro $M(x_1, x_2)$ e de lado $2a$.

Fazendo $u_1 - x_1 = t_1, u_2 - x_2 = t_2$; o domínio de variação de t_1 e t_2 será o quadrado Δ_0 de centro $(0,0)$ e de lado $2a$.

Decomponhamos este quadrado em 4 outros $\Delta_0^1, \Delta_0^2, \Delta_0^3, \Delta_0^4$ por meio de 2 paralelas aos eixos coordenados traçadas do ponto $(0,0)$. Temos:

$$\iint_{\Delta_0} = \sum_{i=1}^{i=4} \iint_{\Delta_0^i};$$

supomos que Δ_0^1 é o quadrado de vértices $(0,0), (0, a), (a, 0), (a, a)$. Para simplificar as notações, ponhamos $e^{-\frac{t_1^2+t_2^2}{k^2}} = h(t_1, t_2)$.

A função $h(t_1, t_2)$ sendo, podemos escrever:

$$\iint_{\Delta_0^2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) h dt_1 dt_2 = \iint_{\Delta_0^1} f(x_1 - t_1, x_2 + t_2) h dt_1 dt_2$$

$$\iint_{\Delta_0^3} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) h dt_1 dt_2 = \iint_{\Delta_0^1} f(x_1 + t_1, x_2 - t_2) h dt_1 dt_2$$

$$\iint_{\Delta_0^4} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) h dt_1 dt_2 = \iint_{\Delta_0^1} f(x_1 - t_1, x_2 - t_2) h dt_1 dt_2$$

Posto isto, sabemos que:

$$\frac{1}{k^2\pi} \iint_P h dt_1 dt_2 = \frac{1}{k^2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h dt_1 dt_2 = 1;$$

seja P_0 a região do plano exterior ao quadrado Δ_0 , temos:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_0^1} + f(x_1, x_2) \frac{1}{k^2\pi} \iint_{P_0}.$$

Ora:

$$f(x_1, x_2) \frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_0} = f(x_1, x_2) \frac{1}{k^2\pi} \sum_{i=1}^{i=4} \iint_{\Delta_0^i},$$

e

$$f(x_1, x_2) \frac{1}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0} h dt_1 dt_2 = f(x_1, x_2) \frac{4}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0^1} h dt_1 dt_2;$$

resulta:

$$g(x_1, x_2, k) - f(x_1, x_2) = \frac{1}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0^1} \varphi(t_1, t_2) h dt_1 dt_2 - f(x_1, x_2) \frac{1}{k^2 \pi} \iint_{P_0} h dt_1 dt_2$$

e,

$$|g(x_1, x_2, k) - f(x_1, x_2)| \leq \left| \frac{1}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0^1} \varphi(t_1, t_2) h dt_1 dt_2 \right| + \frac{1}{k^2 \pi} |f(x_1, x_2)| \iint_{P_0} h dt_1 dt_2.$$

Estudemos a integral:

$$\frac{1}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0^1} \varphi(t_1, t_2) h dt_1 dt_2 = \frac{1}{k^2 \pi} \int_0^a dt_2 \int_0^a \varphi(t_1, t_2) h dt_1.$$

Integrando por partes, vem:

$$\frac{1}{k^2 \pi} \int_0^a dt_2 \int_0^a \varphi h dt_1 = \frac{1}{k^2 \pi} \int_0^a \left\{ h(a, t_2) \int_0^a \varphi dt_1 \right\} dt_2 - \frac{1}{k^2 \pi} \int_0^a \left\{ \int_0^a \left[\frac{\delta_h}{\delta_{t_1}} \int_0^{t_1} dt_1 \right] dt_1 \right\} dt_2,$$

e

$$\left| \frac{1}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0^1} \varphi h dt_1 dt_2 \right| < \frac{h(a,0)}{k^2 \pi} \int_0^a \int_0^a |\varphi| dt_1 dt_2 + \left| \frac{1}{k^2 \pi} \int_0^a dt_2 \int_0^a \left[\frac{\delta_h}{\delta_{t_1}} \int_0^t \varphi dt_1 \right] dt_1 \right|.$$

Ora, conforme já vimos, pode-se inverter a ordem da integração, e então,

$$\frac{1}{k^2 \pi} \int_0^a dt_2 \int_0^a \left[\frac{\delta_h}{\delta_{t_1}} \int_0^{t_1} \varphi dt_1 \right] dt_1 = \frac{1}{k^2 \pi} \int_0^a dt_1 \int_0^a \left[\frac{\delta_h}{\delta_{t_1}} \int_0^{t_1} \varphi dt_1 \right] dt_2.$$

Integrando novamente por partes, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a dt_1 \int_0^a \left[\frac{\delta_h}{\delta_{t_1}} \int_0^{t_1} \varphi dt_1 \right] dt_2 \\
&= \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a \frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}} dt_1 \cdot \int_0^a dt_2 \int_0^{t_1} \varphi dt_1 \\
&\quad - \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a \left\{ \int_0^a \left[\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \varphi dt_1 \right] \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_2 \right\} dt_1.
\end{aligned}$$

Observando que $-\frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}}$ é positivo, vem:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a dt_1 \int_0^a \left[\frac{\delta_h}{\delta_{t_1}} \int_0^{t_1} \varphi dt_1 \right] dt_2 \right| \\
&\leq \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a \int_0^a |\varphi| dt_1 dt_2 \int_0^a -\frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}} dt_1 \\
&\quad + \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a \int_0^a \left\{ \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} |\varphi| dt_1 dt_2 \right\} \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

A função $|\phi(t_1, t_2)|$ sendo positiva e o domínio da integral $\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} |\phi| dt_1 dt_2$ sendo retangular, têm-se evidentemente:

$$\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} |\varphi| dt_1 dt_2 < \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} |\varphi| dt_1 dt_2 + \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} |\varphi| dt_1 dt_2,$$

e, pode-se escrever :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a dt_2 \int_0^a \left[\frac{\delta_h}{\delta_{t_1}} \int_0^{t_1} \varphi dt_1 \right] dt_1 \right| \\
&\leq \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a \int_0^a |\varphi| dt_1 dt_2 \int_0^a -\frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}} dt_1 \\
&\quad + \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a \int_0^a \left\{ \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} |\varphi| dt_1 dt_2 + \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} |\varphi| dt_1 dt_2 \right\} \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_0^1} \varphi h dt_1 dt_2 \right| \\ & < \frac{h(a,0)}{k^2\pi} \int_0^a \int_0^a |\varphi| dt_1 dt_2 + \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a \int_0^a |\varphi| dt_1 dt_2 \int \frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}} dt_1 \\ & + \frac{1}{k^2\pi} \int_0^a \int_0^a \left\{ \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} |\varphi| dt_1 dt_2 + \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} |\varphi| dt_1 dt_2 \right\} \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Ora, nos pontos em que existir a relação

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |\phi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 = 0,$$

dado o número positivo ϵ , por menor que seja, pode-se tomar a tal que se tenha:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a |\varphi| dt_1 dt_2 \leq \epsilon \text{ ou } \int_0^a \int_0^a |\varphi| dt_1 dt_2 < \epsilon$$

e

$$\int_0^t \int_0^t |\phi| dt_1 dt_2 \leq \epsilon t^2$$

para valores de t do intervalo $(0, a)$.

Resulta, daí,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{k^2\pi} \iint_{\Delta_0^1} \varphi h dt_1 dt_2 \right| \\ & < \frac{h(a,0)}{k^2\pi} \epsilon + \frac{\epsilon}{k^2\pi} \int_0^a -\frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}} dt_1 + \frac{\epsilon}{k^2\pi} \int_0^a \int_0^a (t_1^2 + t_2^2) \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Ora,

$$-\int_0^a \frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}} dt_1 = h(t_1, a)|_a^0 = e^{-\frac{a^2}{k^2}} \left(1 - e^{-\frac{a^2}{k^2}} \right),$$

e,

$$\int_0^a \int_0^a t_1^2 \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_1 dt_2 = \int_0^a t_1^2 dt_1 \int_0^a \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_2 = \int_0^a t_1^2 \left[\frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}} - \frac{\delta_h(t_1, 0)}{\delta_{t_1}} \right] dt_1.$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} & \int_0^a t_1^2 \left[\frac{\delta_h(t_1, a)}{\delta_{t_1}} - \frac{\delta_h(t_1, 0)}{\delta_{t_1}} \right] dt_1 \\ &= t_1^2 [h(t_1, a) - h(t_1, 0)] \Big|_0^a - \int_0^a 2t_1 [h(t_1, a) - h(t_1, 0)] dt_1 \\ &= a^2 \left[e^{-\frac{2a^2}{k^2}} - e^{-\frac{a^2}{k^2}} \right] + k^2 \left[e^{-\frac{t_1^2 - a^2}{k^2}} - e^{-\frac{t_1^2}{k^2}} \right] \Big|_0^a \\ &= a^2 \left[e^{-\frac{2a^2}{k^2}} - e^{-\frac{a^2}{k^2}} \right] + k^2 \left[\left(e^{-\frac{2a^2}{k^2}} - e^{-\frac{a^2}{k^2}} \right) - \left(e^{-\frac{a^2}{k^2}} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Resulta

$$\frac{1}{k^2 \pi} \int_0^a \int_0^a t_1^2 \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_1 dt_2 = \frac{a^2}{k^2 \pi} \left[e^{-\frac{2a^2}{k^2}} - e^{-\frac{a^2}{k^2}} \right] + \frac{1}{\pi} \left[e^{-\frac{2a^2}{k^2}} - 2e^{-\frac{a^2}{k^2}} - 1 \right];$$

quando k tende para zero, o 2º membro tende para $\frac{1}{\pi}$ por valores inferiores a $\frac{1}{\pi}$, pode-se portanto escrever:

$$\frac{\varepsilon}{k^2 \pi} \int_0^a \int_0^a (t_1^2 + t_2^2) \frac{\delta_h^2}{\delta_{t_1} \delta_{t_2}} dt_1 dt_2 < \frac{2\varepsilon}{\pi}.$$

Conclui-se, portanto,

$$\left| \frac{1}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0^1} \varphi h dt_1 dt_2 \right| < \frac{e^{-\frac{a^2}{k^2}}}{k^2 \pi} \varepsilon + \frac{e^{-\frac{a^2}{k^2}} \left(1 - e^{-\frac{a^2}{k^2}} \right)}{k^2 \pi} \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\pi}$$

ou

$$\left| \frac{1}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0^1} \varphi h dt_1 dt_2 \right| < 3\varepsilon$$

para os valores de k inferiores a um certo valor k_1 .

Vejamos agora a integral

$$\frac{1}{k^2\pi} \iint_{P_0} h dt_1 dt_2.$$

O seu domínio de integração P_0 é a região do plano exterior ao quadrado Δ_0 de centro no ponto $(0,0)$ e de lado $2a$.

Consideremos o círculo C de raio a e de mesmo centro que Δ_0 . Se provarmos que

$$\frac{1}{k^2\pi} \iint_{P-C} h dt_1 dt_2$$

tende para zero com k , teremos a fortiori demonstrado que o mesmo acontece com

$$\frac{1}{k^2\pi} \iint_{P_0} h dt_1 dt_2, \text{ visto que } h(t_1, t_2) \text{ é sempre positiva.}$$

Temos, passando as coordenadas polares r e θ ,

$$\frac{1}{k^2\pi} \iint_{P-C} h dt_1 dt_2 = \frac{1}{k^2\pi} \int_a^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{k^2}} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{k^2}} d\left(\frac{r^2}{k^2}\right) = e^{-\frac{a^2}{k^2}}$$

que tende para zero com k .

Como $|f(x_1, x_2)|$ tem um valor finito inferior ao limite superior de $f(x_1, x_2)$ em todo plano, conclui-se que:

$$\frac{1}{k^2\pi} |f(x_1, x_2)| \iint_{P_0} h dt_1 dt_2$$

tende para zero com k .

Chegamos assim à desigualdade

$$|g(x_1, x_2, k) - f(x_1, x_2)| < 3\epsilon + \eta_1 \text{ para } k < k_1,$$

η_1 sendo uma quantidade que tende para zero com k .

Ora,

$$|\psi(x_1, x_2, k) - g(x_1, x_2)| < \eta_2,$$

η_2 tendendo para zero com k ; logo,

$$|\psi(x_1, x_2, k) - f(x_1, x_2)| < 3\epsilon + \eta_1 + \eta_2.$$

Seja k_2 o valor de k para o qual $\eta = \eta_1 + \eta_2 < \epsilon$, e k_0 o menor dos números k_1 e k_2 ; vê-se que dado o número positivo ϵ , por menor que seja, a ele corresponde um valor k_0 de k , tal que se tenha

$$|\psi(x_1, x_2, k) - f(x_1, x_2)| < 4\epsilon \text{ para } k < k_0$$

nos pontos em que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t |\phi| dt_1 dt_2 = 0.$$

Em outras palavras:

$$\psi(x_1, x_2, k) = \frac{1}{k^2 \pi} \iint_P f(u_1, u_2) e^{-\left(\frac{u_1 - x_1}{k}\right)^2 - \left(\frac{u_2 - x_2}{k}\right)^2} du_1 du_2$$

tende para a função somável $f(x_1, x_2)$ em todos os pontos do domínio mensurável D , exceto talvez nos pontos de um conjunto de medida nula.

Suponhamos que $f(x_1, x_2)$ seja contínua (em relação as duas variáveis consideradas simultaneamente) no domínio mensurável e fechado D ; $f(x_1, x_2)$ é então uniformemente contínua em D .

Qualquer que seja o ponto (x_1, x_2) de D , ao número positivo ϵ , arbitrariamente pequeno, corresponde um número positivo a tal que se tenha

$$|\phi(t_1, t_2)| < \epsilon \text{ para } 0 \leq t_1 \leq a \text{ e } 0 \leq t_2 \leq a,$$

e portanto,

$$|g(x_1, x_2, k) - f(x_1, x_2)| < \frac{\epsilon}{k^2 \pi} \iint_{\Delta_0^1} h dt_1 dt_2 + \eta_1,$$

η_1 tendendo para zero com k .

$$|g(x_1, x_2, k) - f(x_1, x_2)| < \epsilon + \eta_1$$

$$|\psi(x_1, x_2, k) - f(x_1, x_2)| < 2\epsilon \text{ para } k < k_0.$$

Conclui-se: $\psi(x_1, x_2, k)$ tende uniformemente para a função contínua $f(x_1, x_2)$ no domínio fechado D .

Como no caso das funções de uma variável deduz-se desta última conclusão a possibilidade de representar $f(x_1, x_2)$, no domínio D , por uma sucessão uniformemente convergente de polinômios.

...

Assim, no tocante à demonstração deste teorema principal pode-se perguntar a respeito de considerações sobre resultados utilizados na sua composição que foram estudados ou abordados primeiramente por Theodoro, demonstrados por outros autores e/ou ainda aquelas demonstrações dadas por esses outros autores e “moldadas” pelo personagem em estudo.

Neste sentido, ao longo da demonstração é possível perceber diferenças em relação ao estudo realizado por Lebesgue, e citado pelo autor “[...] a demonstração dada por Lebesgue difere da feita aqui por ser mais direta” (Ramos, 1918, p.5). Tratar-se-á das considerações referentes ao texto de Lebesgue no próximo tópico deste capítulo.

Por outro lado, voltando os olhos para a demonstração deste teorema principal realizado por Theodoro, torna-se imperceptível e ao mesmo tempo impossível desvendar quais foram os resultados utilizados por este e advindos de outros autores, os por ele “moldados” ou aqueles genuinamente produzidos, uma vez que, neste sentido, nada se é mencionado. Alargando a análise para toda a tese em questão, encontra-se análoga resposta para o questionamento acima. Quiçá mostram-se de maneira evidente os corolários, teoremas, proposições e até mesmo demonstrações advindas de outros autores e utilizadas pelo nosso personagem, uma vez que aparecem citadas ao longo do texto e podem ser observadas no original da tese.

O que deve ser ressaltado no resultado do teorema principal obtido pelo autor, cujo teor é inédito, é que este foi o primeiro a trabalhar a noção de convergência simples utilizando conjunto de medida nula, independentemente, da teoria geral da medida, contribuindo assim, significativamente para o estudo da teoria das funções.

Nas palavras de Freire:

Na sua These de doutorado, tratando da “representação effectiva das funções sommaveis”, a uma variavel, fal-o Theodoro em relação á integral que representa uma funcção continua qualquer e que elle indica por $f(X', k)$. Havia, porém, Theodoro, pouco antes de fazer apparecer a sua These, recebido os Annaes de Toulouse onde verificou já ter sido tal representação obtida por Henri Lebesgue, seguindo, aliás, criterio bem differente do por elle adoptado. Por isso, conserva e apresenta a sua demonstração. A de Lebesgue surge como consequencia de dado criterio geral; a de Theodoro é *directa*. Constitue essa demonstração de Theodoro uma das bellas partes de sua These. Na apresentada á Polytechnica de S. Paulo, a indagação feita por Theodoro da integral geral de uma equação de Riccati mediante uma única quadratura, indagação essa já por nós

referida, constitue uma outra illustração do que vimos afirmando: enxergou Theodoro em uma “propriedade das superficies desenvolviveis isotropas” o caminho mais curto para attingir o seu “desideratum”. No n.3, tomo VI, dos Annaes desta Academia, em um estudo sobre uma integral hiperelítica, ê-se informado de que na viagem á Europa feita por Theodoro Ramos em 934, havia elle, em Paris, trocado vistas com o celebre mathematico francez Denjoy sobre a representação approximada da integral referida. Das vistas trocadas entre Theodoro e Denjoy, resultou a indicação por esse feita de dois processos capazes de evidenciar a positividade de uma certa integral hiperelítica. Em viagem de regresso ao Brasil, conseguiu Theodoro a demonstração que se fazia mistér, a respeito. E de Lisboa, enviou-a a Denjoy. Tal demonstração se acha á pag. 124 do número já referido dos Annaes desta Academia. Denjoy, em carta a Theodoro, assignala a “simplicidade” da demonstração. Á primeira vista parece uma coisa muito *simples* ... essa questão de “simplicidade” em mathematica... A “simplicidade” em mathematica deve ser encarada como synonymo de dominio completo do assumpto abordado, de vis-á-vis da verdade, de integração absoluta com essa. É muito facil ser-se *complicado* em mathematica, é difficilimo, nessa, alcançar-se a “simplicidade” (FREIRE, 1936).

3.3. A respeito da demonstração de Henri Lebesgue citada por Theodoro Augusto Ramos:

Como já mencionado, ao esclarecer seus objetivos, Theodoro explica que estudará a representação efetiva das funções somáveis de uma e de duas variáveis pela integral de Weierstrass e acrescenta que:

No caso em que a função é de uma variavel esse resultado ja obtido por Lebesgue como consequência de um critério geral applicavel ás integraes singulares das funções sommaveis de uma variavel. Esta memória de H. Lebesgue foi publicada no tomo I, 3ª série dos “Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Conservamos entretanto a nossa demonstração que differe da de Lebesgue, pois é directa (RAMOS, 1918, p. 5).

Referente à representação efetiva das funções somáveis de duas variáveis, Theodoro diz que:

L. Tonelli fez um estudo relativo aos polynomios de Landau de 2 variaveis (vide a referencia que a este respeito faz M. Fréchet na pag. 226 do t. 2, vol. 1, 2º fascículo da “Encyclopédie des Sciences Mathématiques, edição franceza) (RAMOS, 1918, p. 5-6).

A respeito, não foi possível encontrar a obra mencionada por Theodoro para averiguar a referida demonstração. Conferiu-se como é descrito pelo próprio Theodoro que diferentemente de Lebesgue, ele se propôs a estudar a representação das funções somáveis de duas variáveis pela integral dupla de Weierstrass.

Adentrando a obra referenciada por Theodoro, na primeira citação acima como a que contivesse a demonstração dada por H. Lebesgue para o assunto em questão, observou-se na página 97 desse texto uma referência a outro trabalho de Lebesgue intitulado *Sur l'approximation des fonctions*, publicado no Bulletin des Sciences Mathématiques no ano de 1898.

Assim, ainda no tocante a esta demonstração, Theodoro também explica que:

A demonstração do theorema de Weierstrass pelo methodo de Lebesgue, para o caso de 2 variaveis, encontra-se, por exemplo, na pg. 63 do livro de Borel “Leçons sur les fonctions de variables réelles” (RAMOS, 1918, p. 84).

Ao buscar esse texto e após uma leitura do mesmo, detectou-se que esse também faz referência, na página 50³⁷, ao já citado texto de Lebesgue intitulado *Sur l'approximation des fonctions* e que foi publicado no *Bulletin des sciences mathématiques* no mês de Novembro, ano de 1898, páginas 278 a 287.

Por assim ser, entende-se mais adequado ao propósito do trabalho em questão, realizar um estudo acerca da publicação do original de Lebesgue³⁸, em detrimento de outros textos que tratem a referida demonstração. Consultamos assim a fonte primária.

Nota-se que nas duas referências³⁹ citadas por Theodoro como contendo um estudo sobre a representação efetiva das funções somáveis de duas variáveis pela integral de Weierstrass, ambas citam o já mencionado trabalho de Lebesgue publicado em 1898.

Desta forma, a ideia inicial para esta análise era dar uma resposta à afirmação feita por Theodoro em sua tese de doutoramento, de que Lebesgue já havia realizado a demonstração por ele proposta de estudar a representação efetiva das funções somáveis de duas variáveis pela integral de Weierstrass e, que este estudo diferia do de Lebesgue por ser mais direto. Diz-se a ideia inicial, porque ao adentrar nestas demonstrações, outros fatos se mostraram à aprendiz de ofício de historiador e que se fazem relevantes.

³⁷ Obra disponível em: <<http://ia700200.us.archive.org/11/items/leonssurlesf00bore/leonssurlesf00bore.pdf>>. Acesso em 25. Abr. 2012.

³⁸ O texto original encontra-se disponibilizado na íntegra nos anexos ao final da tese. A referência: LEBESGUE, H. **Sur l'approximation des fonctions**. Bulletin des sciences mathématiques, n.22, Novembre, 1898, p. 278 – 287. Disponível em:

<<http://archive.org/stream/bulletindesscie05publgoog#page/n9/mode/2up>>. Acesso em 23. Abr. 2012.

³⁹ Primeira referência: Texto de H. Lebesgue publicado no tomo I, 3ª série dos “Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, *Sur les intégrales singulières*, 1909.

Segunda referência: Texto de E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*, 1903.

O teorema em questão - Teorema da Aproximação de Weierstrass⁴⁰ - é um importante resultado da Análise Matemática. Foi provado em 1885 por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, e posteriormente, demonstrado por vários matemáticos de destaque da época, tais como Picard (1891), Lebesgue (1898), Landau (1908), la Vallée Poussin (1912), Sergei Bernstein (1912) e pelo personagem aqui estudado – Theodoro Augusto Ramos.

Na realidade a demonstração presente no texto *Sur l'approximation des fonctions*, de Lebesgue, é referente à representação de função contínua por aproximação dada por polinômio, e não especificamente sobre a representação das funções somáveis de duas variáveis pela integral dupla de Weierstrass, como cita Theodoro em sua tese. Aliás, é possível verificar este fato também nos textos de Lebesgue e Borel, já citados neste tópico e que apresentam a demonstração do teorema de Weierstrass mencionados por Theodoro - *Sur l'approximation des fonctions* (Lebesgue, 1898), *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (Borel, 1903) e *Sur les intégrales singulières* (Lebesgue, 1909).

De fato, estas três demonstrações referem-se efetivamente à representação de função contínua por aproximação dada por polinômio. Para o leitor que desejar um estudo acerca das obras, o texto de Lebesgue, tido como a primeira demonstração do autor para o teorema em questão, encontra-se nos anexos desta tese e os demais textos vem referenciados nas notas de rodapé deste capítulo.

A questão pontuada por Theodoro de que sua demonstração é “mais direta” que a de Lebesgue mostra-se pelos encaminhamentos tomados por Theodoro, uma vez que este inicia sua tese considerando as funções como limites de sucessões de polinômios simplesmente convergente (semelhante ao trabalho de Lebesgue), estuda as funções de uma variável e, baseando-se nesta noção, segue para o estudo das funções somáveis de duas

⁴⁰ Formalmente pode-se escrever este teorema como: Sejam $f: [a, b] \rightarrow R$ uma função contínua e $\varepsilon > 0$. Então existe um polinômio P tal que $|f(t) - P(t)| < \varepsilon, t \in [a, b]$.

Informações retiradas dos artigos disponível em:

<http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxiii_cnmac/pdf/782.pdf>. Acesso em 01. Maio. 2012.

<<http://www2.math.technion.ac.il/~pinkus/papers/wap.ps>>. Acesso em 01. Maio. 2012.

variáveis, conduzindo o estudo por meio da integral dupla de Weierstrass. O que o diferencia dos demais trabalhos.

A tese de Theodoro ao tratar da representação das funções somáveis em todos os pontos de um domínio mensurável, exceto talvez nos pontos de um conjunto de medida nula, deixa uma importante questão em aberto: investigar o que de fato ocorre nesses pontos de um conjunto de medida nula. Os resultados apresentados por ele tornam evidentes a representação de uma função somável por uma sucessão uniformemente convergentes de polinômios.

Quanto à demonstração dada por Lebesgue em *Sur l'approximation des fonctions* (1898), seu interesse também foi estudar a representação de funções contínuas por aproximações dadas por polinômios. O autor escreve:

Weierstrass a démontré le premier que toute fonction continue pouvait être représentée, avec une approximation donnée, par un polynome. Je vais indiquer quelques considérations élémentaires permettant de démontrer ce théorème et quelques-unes de ses conséquences (LEBESGUE, 1898, p.278).

Uma tradução:

Weierstrass demonstrou primeiro que toda função contínua pode ser representada com uma aproximação dada por um polinômio. Eu vou indicar algumas considerações elementares para provar este teorema e algumas de suas consequências (LEBESGUE, 1898, p.278).

A demonstração dada por Lebesgue para o teorema de Weierstrass é tida como uma das mais elegantes. Seu texto vem elencado em sete proposições que conduzem a conclusão. Além disso, o autor realiza uma observação acerca das aproximações usando séries de Fourier.

Approximations à l'aide des suites de Fourier. – Weierstrass a démontré que toute fonction continue ayant la période 2π peut se représenter avec telle approximation que l'on veut, par une suite finie de Fourier ou, ce qui est la même chose, par un polynome en $\cos x$ et $\sin x$. M. Picard déduit cette proposition des propriétés de l'intégrale de Poisson, et en conclut la possibilité de représenter approximation par un polynome à l'approximation par une suite de Fourier (LEBESGUE, 1898, p.285).

Uma tradução:

Aproximação usando séries de Fourier. - Weierstrass demonstrou que toda função contínua com período 2π pode ser representada com a

aproximação desejada, por uma série finita de Fourier ou, da mesma forma, por um polinômio em $\sin(x)$ e $\cos(x)$. Sr. Picard deduziu desta proposição as propriedades da integral de Poisson, e conclui a possibilidade de representar aproximação por um polinômio a aproximação por uma série de Fourier (LEBESGUE, 1898, p.285).

Estes fatos permitem que a demonstração de Theodoro tenha um caráter mais direto em detrimento da apresentada por Lebesgue.

Desta forma, ao analisar as duas demonstrações, ou seja, primeiramente para a dada por Theodoro em sua tese e, em segundo, a realizada por H. Lebesgue no artigo *Sur l'approximation des fonctions*, percebe-se serem distintas. Fica evidente a apropriação da noção de aproximação de funções contínuas por polinômios na tese de doutoramento de Theodoro. Esse, por meio de resultados obtidos por autores como Baire e Lebesgue buscou generalizar seu resultado, de modo a proporcionar em sua demonstração maior clareza no desenvolvimento do tema. Esses resultados já conhecidos, de certa forma foram então generalizados por Theodoro.

É notório constatar que um brasileiro tenha se dedicado a estudar um tema como este em sua tese de doutoramento, sobretudo devido à atualidade do assunto para a época e a importância do teorema/resultado em questão, juntando o seu nome ao de outros matemáticos de renomada importância mundial para o desenvolvimento da matemática na época.

Assim, diante do já exposto e considerado no que tange a tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos, intentou-se responder a algumas indagações tais como, qual foi o resultado central da sua investigação, como se deu a demonstração desse resultado, quais os resultados já conhecidos e generalizados por Theodoro e o que houve de inédito, dentre outros.

Refletindo sobre o que parece ter sido uma inspiração para Theodoro ter escrito sua tese, ao que parece, esta se originou na sua graduação na Escola Politécnica do Rio de Janeiro. É sabido que este tema não era discutido em sala de aula e que era “proibido” de ser estudado pelos alunos. Acredita-se que Theodoro, diante da possibilidade de acesso à leitura do que estava sendo produzido e estudado de mais moderno no ramo das Ciências Físicas e Matemáticas fora do país, tenha sido instigado a realizar uma investigação mais detalhada acerca do tema, principalmente pelo fato de suas leituras e estudos particulares

serem distintos do que se ensinava na Escola Politécnica na época. Ao leitor atento, basta voltar ao capítulo II e conferir as palavras de Lélío Gama sobre o tema estudado por Theodoro.

Fato é que o resultado central tratado pelo personagem em questão contribuiu para os estudos posteriores e o desenvolvimento da teoria das funções. O teorema de aproximação das funções contínuas pela integral dupla de Weierstrass é tido como um resultado importante da Análise Funcional.

Sabe-se que o desenvolvimento da Análise Funcional, inserido no da Análise, desde meados do século XIX, vem sendo pautado pelos estudos desenvolvidos sobre números reais e fundamentalmente no conceito de *convergência* e limite. Neste sentido, historicamente os resultados obtidos por Weierstrass contribuíram significativamente para tal teoria, pois seu teorema de aproximação das funções por polinômios tem grande relevância prática e teórica, principalmente no tocante à interpolação polinomial. A esse respeito, o estudo realizado por Theodoro em sua tese, apresenta também como contribuição o polinômio desenvolvido pelo autor na nota 2. Observa-se ainda que Theodoro não trabalhou, em sua tese, com as Séries de Fourier, importante assunto da Análise Funcional.

Destarte, em contato com o que havia de mais recente na produção matemática mundial, Theodoro em sua tese de doutoramento desenvolveu de maneira singular o teorema demonstrado por Weierstrass, contribuindo com uma demonstração distinta da apresentada por Lebesgue, principalmente no tocante ao desenvolvimento da noção de convergência simples utilizando conjunto de medida nula, independentemente, da teoria geral da medida.

Assim,

Como vimos, integrou Theodoro, no fim de sua breve carreira, e de modo definitivo, o espírito de *analysta* ao do *geometra*, alcançando com esse enlace valioso a unidade do pensamento *mathematico* em toda a sua plenitude [...] De Theodoro Ramos como engenheiro e como educador, como homem de administração que também o foi, está ali bem vivia a sua acção marcante em trabalhos de vulto sobre *Hydraulica* e *Saneamento* por elle realizados e publicados, em S. Paulo: na criação da Universidade da capital desse Estado, especialmente sua faculdade de *Sciencias*, em a qual já se sente um espírito novo a nascer entre nós: na sua fecunda e proba gestão à frente da Secretaria de Educação e Saude, e como Prefeito, de S. Paulo, e, por fim, o seu nobre esforço na Directoria Nacional de Educação. Desvios lamentaveis, sem dúvida, para o homem de sciencia –

appelos irrecusáveis, certamente, á sua consciencia de cidadão e patriota. Sente-se, porém, através de toda a actividade não científica e professoral de Theodoro Ramos, que o homem de sciencia, nelle, nunca foi ausente. Os seus trabalhos, em qualquer época, vêm sempre vinculados por uma elaboração interior profunda, revelando uma cultura que cedo principiou, e, sobretudo, um pensamento que jamais se distrahiu. [...] Eis ahi o pallido perfil que pude traçar dessa figura singular e polyedrica que foi Theodoro Augusto Ramos [...] Com o recuo indispensavel do tempo, quando a figura do homem tiver cedido inteiramente a do pensador, a imagem de Theodoro Ramos como professor e mathematico, sobretudo, mas tambem como índice de civismo, que muito quis a sua gente e a sua terra, será exactamente composta (FREIRE, 1936).

Ao se analisar a importância da tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos, pode-se destacar suas reais contribuições para o desenvolvimento da Análise Matemática no país, das quais se tentou aqui fazerem citadas e abordadas.

Utilizando-se das lentes da História da Matemática, o olhar de aprendiz do ofício de historiador nos mostra que além das questões já referenciadas, o que torna essa tese definitivamente importante no cenário histórico-matemático da época e atualmente, é o fato dela ter sido feita e defendida em uma Escola de Engenharia – A Escola Politécnica do Rio de Janeiro, um local que se destinava a graduar engenheiros, sem o propósito de formar matemáticos ou professores de matemática. Um local em que razoavelmente não se esperava que o ensino de Análise estivesse presente, e não estava!

Capítulo IV:

Considerações finais

[...]Os seus trabalhos, em qualquer época, vêm sempre vinculados por uma elaboração interior profunda, revelando uma cultura que cedo principiou, e, sobretudo, um pensamento que jamais se distrahiu. [...] Eis ahi o pallido perfil que pude traçar dessa figura singular e polyedrica que foi Theodoro Augusto Ramos. Luiz Freire, 1936.

4.1. A guisa de conclusão:

Ao se findar este trabalho, constata-se que Theodoro Augusto Ramos em sua breve vida atuou de modo ativo para o desenvolvimento da ciência e do país. Foi prefeito, membro do Conselho de Educação, dentre outros cargos e comissões que tinham por objetivo atuar tanto no ensino quanto na pesquisa brasileira. Contribuiu efetivamente para a fundação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, sobretudo por meio da contratação de seus professores na Europa.

Este insigne personagem se destacou na produção matemática de sua época no Brasil e no mundo. Dentre todos os seus trabalhos, escolheu-se realizar um estudo sobre aquele que principiou suas concepções e pesquisas: sua tese de doutoramento. Faz-se ainda necessário uma apreciação no tocante as demais produções de Theodoro, o que não se circunscreveu ao fito desta pesquisa, porém não de menor importância para ser considerado.

Os autores utilizados por Theodoro apontam para a contemporaneidade de seus pensamentos e pesquisa. O excerto do depoimento de Lélío Gama sobre o amigo, já descrito no capítulo biográfico, nos mostra o espírito inquieto e aguçado desde os tempos de rapaz e que o acompanhou por sua breve vida.

No olhar sobre a tese de doutorado apresentada nesta pesquisa, procurou-se evidenciar aspectos principais acerca deste trabalho. Observa-se aqui que quando do início da pesquisa apresentada, ocorreu a ideia de haver ligações entre o teorema principal demonstrado por Theodoro e o resultado obtido por Leopoldo Nachbin⁴¹ anos mais tarde.

⁴¹ Leopoldo Nachbin (1922-1993): matemático, nasceu em Recife onde cursou a escola secundária, transferindo-se posteriormente para o Rio de Janeiro, onde completou sua educação universitária na Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil. Foi um incentivador da pesquisa brasileira e matemático

A ocorrência deste questionamento deu-se devido ao contato de Nachbin com o matemático Marshall Stone em uma visita deste ao Brasil no ano de 1947⁴². Sob a influência de Stone, dentre outros matemáticos, em 1949, Nachbin publicou um teorema que é conhecido como uma versão do teorema de Stone-Weierstrass para funções diferenciáveis. Uma versão do teorema proposto por Nachbin pode ser encontrada em J. Mujica, *Subálgebras Densas de Funciones Diferenciables*, publicada na revista *Cubo Matemática Educacional*, vol 3, n°1, Janeiro de 2001.

Também em um artigo publicado na revista *Matemática Univeristária*, em julho de 1994, Mujica realiza uma resenha dos trabalhos mais relevantes de Nachbin. Dentre seus trabalhos, destacamos o sobre *Aproximação de Funções Diferenciáveis* que, antes de termos acesso à publicação citada, foi cogitado como detentor de possíveis semelhanças com o trabalho de Theodoro. O original pode ser consultado na referência: L. Nachbin, *Sur les algèbres denses de fonctions différentiables sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 1549-1551.

Nachbin desenvolveu muitos trabalhos que foram reconhecidos mundialmente nas seguintes linhas: “(...) Sistemas Ordenados, Topologia, Espaços Vetoriais Topológicos, Teoria da Aproximação, Análise Harmônica e Holomorfia em Dimensão Infinita. Publicou diversos livros didáticos, vários dos quais foram traduzidos para o inglês. Orientou muitos doutoramentos, tanto no Brasil como no exterior e, junto com seus discípulos, organizou regularmente conferências internacionais” (DIAS, HÖNIG, MEDEIROS, 1994, p. 20).

Não havendo ligação entre os dois trabalhos, mantemos esta observação, uma vez que esta dúvida pode incorrer também ao leitor.

Assim, nas linhas agora escritas desta pesquisa intentou-se apresentar ao leitor um pouco da vida e obras de Theodoro Augusto Ramos, bem como um estudo de sua tese de doutoramento. Sob o olhar da História da Matemática, foram relatados os procedimentos adotados e as opções teóricas seguidas buscando-se assim impor a veracidade devida a esta pesquisa.

reconhecido mundialmente. Contribuiu para a criação do Núcleo de Matemática da Fundação Getúlio Vargas, da revista *Summa Brasiliensis Mathematicae*, foi um dos fundadores do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

⁴² Informações retiradas de uma entrevista de Leopoldo Nachbin publicada no site

http://www.canalciencia.ibict.br/notaveis/livros/leopoldo_nachbin_59.html [Acesso em 26.06.2013].

A notoriedade da tese de doutoramento de Theodoro se faz principalmente no tocante às contribuições para o desenvolvimento da Análise Matemática no país. Como já referenciado, esta foi defendida em uma Escola de Engenharia – A Escola Politécnica do Rio de Janeiro, um local que se destinava a graduar engenheiros, sem o propósito de formar matemáticos ou professores de matemática e que não havia o ensino de Análise.

Destarte, no âmbito da História da Matemática no Brasil, este personagem se fez importante, e justifica-se um trabalho como este, uma vez que Theodoro “abriu caminhos” para outros pesquisadores da sua época e/ou posteriores.

REFERÊNCIAS:

AMERICANO, J. **A universidade de São Paulo. Dados, problemas e planos.** São Paulo: Empresa Gráfica da Revista dos Tribunais Ltda, 1947.

ANUÁRIO DA ESCOLA POLITÉCNICA DE SÃO PAULO PARA O ANO DE 1932.

ANUÁRIO DA ESCOLA POLITÉCNICA DE SÃO PAULO PARA O ANO DE 1933.

ANUÁRIO FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DOS ANOS DE 1934 e 1935.

BAIRE, R. **Sur les fonctions de variables réelles.** Thèse présentée A la faculté des sciences de Paris pour obtenir la grade de docteur és Sciences Mathématiques, Milan :Imprimerie Bernardoni de C. Rebeschini & C., 1899.

BLOCH, M. **Apologia da História, ou, O ofício de historiador.** Tradução de André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 2001.

BORGES, V. P. **Grandezas e misérias da biografia.** 1ª. ed. In PINSKY, Carla Bassanezi (Org.). Fontes Históricas. São Paulo: Contexto, 2005.

BURKE, P. (organizador) **A Escrita da história: novas perspectivas.** Tradução de Magda Lopes. São Paulo: Editora da UNESP, 1992.

CHARTIER, R. **A história ou a leitura do tempo.** Tradução de Cristina Antunes. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

CASTRO, F. M. de O. **A Matemática no Brasil.** Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2. ed., 1999.

D'AMBROSIO, U. **Uma História Concisa da Matemática no Brasil.** Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2. ed. 2011.

DIAS, C. L. da S.; HÖNIG, C. S.; MEDEIROS, L. A. Leopoldo Nachbin. **Revista Matemática Universitária**, São Paulo, v. ?, n. 16, p. 19-21, jul. 1994.

DOSSE, F. **O Desafio Biográfico. Escrever uma Vida**. Tradução de Gilson César Cardoso de Souza. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

FREIRE, L. **A Obra Mathematica de Theodoro Ramos**. *Jornal do Commercio*, Rio de Janeiro, 5/7/1936.

GAMA, L. **Discurso do Professor Lélío Gama**. Atas do 5º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1965.

GINZBURG, C. **O fio e os rastros: verdadeiro, falso, fictício**. Tradução de Rosa Freire d'Aguiar e Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 2007.

HOUAISS, A.; VILLA, M. de S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Elaborado no Instituto Antônio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

IME-USP. **Instituto de Matemática e Estatística: história e cotidiano**. São Paulo: IME-USP, 1998.

JENKINS, K. **A História repensada**. Tradução de Mário Vilela, ed. 3. São Paulo: Contexto, 2005.

JORNAL "O ESTADO DE SÃO PAULO". 29/12/1932, 17/04/1934.

JORNAL MINERVINA. São Paulo: Escola Politécnica de São Paulo. 9/06/1934

LEBESGUE, H. **Sur les intégrales singulières**. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse* 3^a série, tome I (1909), p. 25 – 117. (http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?id=AFST_1909_3_1_). Acesso em 30/03/2012.

LE GOFF, J. **História e Memória**. Tradução de Bernardo Leitão [et al.]. Ed. 5. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

MILLER, C. P. **O Doutorado em Matemática no Brasil: Um Estudo Histórico Documentado (1842 a 1937)**. Dissertação de Mestrado. Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos. Rio Claro, SP, 2003.

MUJICA, J. Os trabalhos de Leopoldo Nachbin. **Revista Matemática Universitária**, São Paulo, v. ?, n. 16, p. 22-36, jul. 1994.

PARDAL, P. **Memórias da Escola Politécnica**. Rio de Janeiro: Xerox do Brasil: UFRJ, Escola de Engenharia, 1984.

RAMOS, T. A. **Sobre as Funções de Variáveis Reaes**. Tese de doutorado. Escola Politécnica do Rio de Janeiro, 1918.

RICOEUR, P. Historie de la philosophie et historicité, in R. Aron (org.), **L'histoire et ses interprétations. Entretiens autour d'Arnold Toynbee**. Paris, La Haye: Mouton, 1961, p.214-227.

SILVA, C. P. da, **Início e Consolidação da Pesquisa Matemática no Brasil**. Brasília: Senado Federal, Conselho Editorial, 2008. (v.98)

_____. **A Matemática no Brasil. História de seu Desenvolvimento**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda. 3.ed., 2003.

_____. **Theodoro A. Ramos: Sua Correspondência para Lélío Gama**. Revista da SBHC, n. 17, p. 11-20, 1997.

SOUTO, R. M. A. **Mario Tourasse Teixeira: o homem, o educador, o matemático**. Tese (doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2006. 151 f.

VENÂNCIO FILHO, F. **Theodoro Ramos**. Revista Brasileira de Engenharia, Ano XV, Tomo XXX, n. 6. Dezembro de 1935.

VEYNE, P. M. **Como se escreve a história; Foucault revoluciona a história**. Tradução de Alda Baltar e Maria Auxiliadora Kneipp. Ed. 4. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1982. [reimpressão 2008]

Anexo: LEBESGUE, H. **Sur l'approximation des fonctions.** Bulletin des sciences mathématiques, Novembre, 1898, p. 278 – 287. Disponível em: <<http://archive.org/stream/bulletindesscie05publgoog#page/n9/mode/2up>>. Acesso em: 23. Abr. 2012.

MÉLANGES.

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS;

PAR M. LEBESGUE.

Weierstrass a démontré (1) le premier que toute fonction continue pouvait être représentée, avec une approximation donnée, par un polynôme. Je vais indiquer quelques considérations élémentaires permettant de démontrer ce théorème et quelques-unes de ses conséquences.

Soit $f(x)$ une fonction finie et continue dans un intervalle (a, b) . On peut partager l'intervalle (a, b) par les points $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ de telle façon que dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) l'oscillation de la fonction soit moindre qu'un nombre positif donné ϵ .

Inscrivons dans la courbe $y = f(x)$ la ligne polygonale $A_0 A_1 \dots A_n$ dont les sommets ont pour abscisses x_0, x_1, \dots, x_n ; elle représente dans l'intervalle (a, b) une fonction continue $y = \varphi(x)$ qui diffère de $f(x)$ de moins de ϵ . Or $\varphi(x)$ est égale à la fonction continue ψ_1 , représentée dans l'intervalle (a, b) par la droite qui porte le côté $A_0 A_1$, plus une fonction φ , représentée par une ligne polygonale $A'_0 A'_1 \dots A'_n$ dont le premier côté $A'_0 A'_1$ est sur l'axe Ox . φ_1 est la somme des deux fonctions continues ψ_2 et φ_2 ; ψ_2 est nulle entre x_0 et x_1 et est représentée par la droite qui porte $A'_1 A'_2$ entre x_1 et x_2 , φ_2 est représentée par une ligne polygonale $A''_0 A''_1 \dots A''_n$; A''_0, A''_1, A''_2 sont sur Ox . On arrive finalement à

$$\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n.$$

(1) *Journal de Liouville*, année 1886.

ψ_i étant une fonction continue nulle entre a et x_{i-1} , représentée par un segment de droite entre x_{i-1} et b . Si l'on fait le changement de variable

$$X = mx + n,$$

en choisissant convenablement m et n , ψ_i sera définie dans une portion (α, β) de l'intervalle $(-1, +1)$ par la relation

$$\psi_i = k(X + |X|),$$

ce qui s'écrit

$$\psi_i = k[X + \sqrt{1 + (X^2 - 1)}].$$

Si l'on développe le radical par la formule du binôme en y considérant $X^2 - 1$ comme une lettre, on obtient une série de polynômes en X , et par suite en x , qui converge uniformément vers ψ_i . La somme des n développements analogues est une série uniformément convergente de polynômes représentant $\varphi(x)$. En prenant un nombre suffisant de termes dans cette série on obtient un polynôme $P(x)$ qui diffère de $\varphi(x)$ de moins de η , η étant choisi à l'avance. $P(x)$ diffère de $f(x)$ de moins de $\varepsilon + \eta$, donc :

I. *Étant donnée une fonction finie et continue dans un intervalle (a, b) on peut trouver un polynôme qui, dans tout l'intervalle, en diffère de moins d'une quantité positive quelconque donnée à l'avance.*

II. Comme première application, Weierstrass développe une fonction continue quelconque en série de polynômes de la façon suivante : Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ des quantités positives telles que la série $\Sigma \varepsilon_n$ soit convergente, la série dont la somme des n premiers termes est un polynôme P_n qui diffère de la fonction continue donnée $f(x)$ de moins de ε_n converge uniformément vers $f(x)$. De plus, cette série est absolument convergente car l'on a

$$|u_n| = |P_n - P_{n-1}| \leq |P_n - f| + |P_{n-1} - f| < \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}.$$

III. Une autre conséquence du théorème de Weierstrass est que toute série de fonctions continues dans un intervalle (a, b) y peut être remplacée par une série de polynômes. En effet, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ étant des nombres positifs tendant vers zéro, la série de polynômes dont la somme des n premiers termes diffère de la somme

des n premiers termes de la série proposée de moins de ε_n répond à la question.

Fonctions ayant des points de discontinuités. — En dérivant terme à terme la série de polynomes représentant

$$x + |x|,$$

on obtient une série de polynomes convergente dans l'intervalle $(-1, +1)$ sauf au point 0, représentant 0 pour x négatif, 1 pour x positif. Par l'addition de séries de cette nature à une série de polynomes représentant une fonction continue on développe en série de polynomes toute fonction n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités. La série obtenue est divergente aux points de discontinuités. Par un procédé différent nous allons arriver à une conclusion plus générale.

Soit $f(x)$ une fonction qui dans l'intervalle (a, b) n'a de discontinuités que pour un ensemble dénombrable de valeurs

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots$$

Marquons les points A_0, A_1, \dots, A_n représentant la fonction $y = f(x)$ pour $x = x_0, x_1, \dots, x_n$. Quelques-uns de ces points pourront être à l'infini. Soient x_k l'une des n valeurs considérées pour x , x_l celle de ces n valeurs qui lui est immédiatement supérieure.

1° Supposons A_k et A_l à distance finie.

A. Entre x_k et x_l n'existe aucun intervalle où la fonction est continue, ou bien il en existe plusieurs; traçons le segment $A_k A_l$.

B. Entre x_k et x_l existe un intervalle (x', x'') et un seul où $f(x)$ est continue. Dans cet intervalle la fonction est représentée par un arc de courbe $\alpha\beta$.

a. $f(x)$ est continue à droite pour $x = x'$ et à gauche pour $x = x''$; traçons le segment $A_k \alpha$, l'arc $\alpha\beta$, le segment βA_l ; les segments $A_k \alpha$, βA_l peuvent être nuls.

b. $f(x)$ n'est pas continue à droite pour $x = x'$ ni à gauche pour $x = x''$; traçons le segment $A_k P_n$, l'arc $P_n Q_n$, le segment $Q_n A_l$; P_n et Q_n étant deux points de l'arc $\alpha\beta$ qui tendent respectivement vers α et β quand n croît indéfiniment.

c. $f(x)$ est continue à droite pour $x = x'$ et n'est pas continue à gauche pour $x = x''$; commençons le tracé comme dans le cas (a), terminons-le comme dans le cas (b).

d. $f(x)$ n'est pas continue à droite pour $x = x'$ et est continue à gauche pour $x = x''$; commençons le tracé comme en (b), terminons-le comme en (a).

2° Si l'un des deux points A_k, A_l ou tous les deux sont à l'infini, nous remplacerons celui ou ceux de ces deux points qui sont à l'infini par des points de même abscisse et dont l'ordonnée croîtra avec n .

Dans tous les cas, nous traçons dans l'intervalle (a, b) une courbe représentant une fonction $\varphi_n(x)$, on peut même supposer que la fonction f soit infinie dans un certain nombre, fini ou non, d'intervalles, à condition de compter les extrémités de ces intervalles comme des points de discontinuités et de faire jouer le rôle de la courbe $\alpha\beta$ à une parallèle à Ox dont l'ordonnée croîtra indéfiniment avec n .

La fonction $\varphi_n(x)$ a pour limite pour n infini $f(x)$, en entendant par là que $\varphi_n(X)$ tend vers $f(X)$ quand X est pris arbitrairement dans (a, b) . Ceci est évident si X est une valeur de discontinuité, ou appartient à un intervalle où la fonction est continue, ou est extrémité d'un pareil intervalle. Pour une autre valeur, X est la limite d'une suite $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ de valeurs de discontinuités, $f(X)$ étant continue pour $x = X$, $f(X)$ est la limite de la suite $f(x^{(1)}), f(x^{(2)}), \dots$. D'autre part, pour n assez grand $\varphi_n(x)$ est compris entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, α et β étant les extrémités de celui des intervalles, obtenus à l'aide des points de subdivision x_0, x_1, \dots, x_n , qui contient X , d'où

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \lim_{p=\infty} f(x^{(p)}) = f(X).$$

Donc

$$f(x) = \varphi_1(x) + \Sigma[\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)];$$

$f(x)$ est représentable par une série de fonctions continues et, par suite, par une série de polynomes.

IV. Toute fonction continue dans un intervalle (a, b) , sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de la variable, est développable dans cet intervalle en série de polynomes, abso-

lument et uniformément convergente dans tout intervalle où n'existe pas de points de discontinuités.

Il est facile de donner des exemples de fonctions ayant une infinité dénombrable de discontinuités.

Premier exemple. — Entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$, la fonction $f(x)$ est égale à une fonction continue quelconque A_n . Aux points de discontinuités, elle a une valeur quelconque finie ou infinie. A_n sera limitée ou non; ce sera, par exemple, $A_n = \frac{1}{x - \frac{1}{n}}$.

Deuxième exemple. — x_1, x_2, \dots étant donnés, on considère une fonction nulle si x n'est pas une des valeurs données, et égale à $\frac{1}{n}$ pour $x = x_n$. Les points x_1, x_2, \dots sont les seuls points de discontinuités.

Il existe donc, en particulier, des séries de polynômes nulles pour toutes les valeurs commensurables (ou algébriques) d'un intervalle et pour celles-là seulement.

Troisième exemple. — Les fonctions à variation limitée de M. Jordan.

Dans ce qui précède, nous n'avons pas obtenu les fonctions les plus générales représentables par des séries de polynômes; M. Baire a indiqué (*Comptes rendus*, 21 mars 1898) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable soit représentable par une série de polynômes.

Fonctions de plusieurs variables. — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables finie et continue par rapport à l'ensemble (x, y) pour $a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$. Cherchons à le représenter approximativement par un polynôme.

On peut trouver des valeurs $x_1 < x_2 < \dots < x_n$; $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ telles que pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $y_j \leq y \leq y_{j+1}$, l'oscillation de la fonction soit moindre qu'un nombre donné ϵ .

Soit A_{ij} le point de coordonnées $x = x_i$, $y = y_j$, $z = f(x_i, y_j)$. Le parabolôïde de plans directeurs zOx , zOy passant par $A_{i,j}$; $A_{i+1,j}$; $A_{i,j+1}$; $A_{i+1,j+1}$ représente pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$; $y_j \leq y \leq y_{j+1}$

une fonction qui diffère de $f(x)$ de moins de ϵ . Or, la fonction continue représentée par l'ensemble de ces fragments de paraboloides est une somme de fonctions continues telles que la suivante :

$$k[XY + |XY| + X|Y| + Y|X|]$$

que l'on peut représenter par une série uniformément convergente de polynomes. On achève comme précédemment.

Le même raisonnement réussit avec un nombre quelconque de variables; l'image géométrique fait seule rapidement défaut. Il faudra parler, par exemple, de fonctions linéaires par rapport à chacune des variables là où l'on parlait de droite ou de paraboloides.

Les propositions I, II, III sont donc encore vraies, quand on y remplace *fonction d'une variable continue dans un intervalle* (a, b) par *fonction de plusieurs variables continue par rapport à l'ensemble dans un domaine fini*.

Des artifices analogues à ceux qui ont conduit au théorème IV nous conduiront à des propositions telles que la suivante :

V. *Si une fonction de deux variables, définie dans un domaine fini Ω , connexe ou non, partout continue par rapport à l'ensemble des variables, sauf en des points formant un ensemble dénombrable et sur des courbes $C^{(1)}$ formant un ensemble dénombrable, est telle que, sur chacune des courbes C , par rapport à un paramètre fixant d'une façon continue la position d'un point sur cette courbe, la fonction soit continue, sauf en un ensemble dénombrable de points, elle est représentable par une série de polynomes, absolument et uniformément convergente dans tout domaine ne contenant pas de discontinuités.*

On peut aussi supposer que la fonction est infinie sur certains arcs des courbes C ou dans certains domaines en nombre fini ou non à condition de compter les courbes frontières de ces domaines comme faisant partie des courbes C .

(¹) Le mot *courbe* est pris dans un sens restreint; aucune des courbes C ne doit passer dans le voisinage de tous les points d'une aire.

Fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles. — M. Baire (*Comptes rendus*, 1897) a montré comment l'on pouvait construire des fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles sans l'être par rapport à l'ensemble. La méthode employée précédemment permet d'obtenir des développements de ces fonctions.

Soit $f(x, y)$ une fonction définie pour $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ continue séparément par rapport à x et par rapport à y . Divisons l'intervalle (a, b) en n parties égales; soient $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ les points de divisions.

Considérons la fonction $\varphi_n(x, y)$ continue par rapport à l'ensemble xy et définie entre x_p et x_{p+1} par

$$\varphi_n(x, y) = \frac{f(x_{p+1}, y)(x - x_p) - f(x_p, y)(x - x_{p+1})}{x_{p+1} - x_p}.$$

Les fonctions $\varphi_n(x, y)$ ont $f(x, y)$ pour limite quand n croît indéfiniment. En effet, soit X, Y un système de valeurs pour x, y . Choisissons n assez grand pour que dans chaque intervalle x_i, x_{i+1} , l'oscillation de la fonction $f(x, Y)$ soit moindre que ε , ε étant donné à l'avance. Si X est dans l'intervalle x_p, x_{p+1} , l'expression

$$|f(X, Y) - \varphi_n(X, Y)|$$

est plus petite que la plus grande des deux suivantes

$$|f(X, Y) - f(x_p, Y)| \quad |f(X, Y) - f(x_{p+1}, Y)|$$

qui sont plus petites que ε .

On peut donc écrire

$$f(x, y) = \varphi_1(x, y) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\varphi_{n+1} - \varphi_n);$$

$f(x, y)$ est représentable par une série de fonctions continues, et, par suite, par une série de polynômes; on peut même remarquer que cette série est uniformément convergente pour y donné.

Le même raisonnement prouve que :

VI. *Une fonction des variables $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_p$, continue par rapport à l'ensemble des x et par rapport à l'ensemble des y , est représentable dans tout domaine fini par une série de polynômes.*

Dans le cas de plus de deux variables, on est conduit à des propositions telles que la suivante :

VII. *Une fonction de quatre variables x, y, z, t , continue dans un certain domaine par rapport à chacune de ces variables, est représentable dans ce domaine :*

1° *Par une série de fonctions continues par rapport aux ensembles $(x, y)(x, z)(x, t)$;*

2° *Ou par une série de séries de fonctions continues par rapport aux ensembles $(x, y, z)(x, y, t)$;*

3° *Ou par une série de séries de séries de polynomes.*

Cette proposition subsiste si l'on fait jouer le rôle de x, y, z, t à des ensembles $(x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_q), (z_1, z_2, \dots, z_r), (t_1, t_2, \dots, t_s)$.

Les mêmes artifices que précédemment permettent de supposer que ces fonctions ont des discontinuités du genre de celles rencontrées aux théorèmes IV et V.

Approximations à l'aide des suites de Fourier. — Weierstrass a démontré que toute fonction continue ayant la période 2π peut se représenter avec telle approximation que l'on veut, par une suite finie de Fourier ou, ce qui est la même chose, par un polynome en $\cos x$ et $\sin x$ (1).

M. Picard déduit cette proposition des propriétés de l'intégrale de Poisson, et en conclut la possibilité de représenter approximativement une fonction continue par un polynome.

On peut de bien des manières passer inversement de l'approximation par un polynome à l'approximation par une suite de Fourier.

Soit $f(x)$ une fonction continue ayant la période 2π . On peut trouver une fonction continue $\varphi(x)$ ayant la période 2π qui diffère

(1) M. Volterra [Sul Principio di Dirichlet (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tome XI)] démontre cette proposition de la façon suivante : on peut approcher autant que l'on veut d'une courbe à l'aide d'une ligne polygonale. Une telle ligne représente une fonction qui, n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima, peut, d'après Dirichlet, être développée en série de Fourier uniformément convergente.

de $f(x)$ de moins de ϵ et qui soit telle que, pour α assez petit, on ait

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \varphi(2\pi - \alpha), & \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \varphi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \\ \varphi(\pi - \alpha) &= \varphi(\pi + \alpha), & \varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(x) = A(\cos x) + \sin x B(\cos^2 x) + \sin x \cos x C(\cos^2 x).$$

En échangeant dans cette expression x en $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$ on tire

$$\begin{aligned}A(\cos x) &= \frac{\varphi(x) + \varphi(2\pi - x)}{2}, \\ B(\cos^2 x) &= \frac{\varphi(x) - \varphi(2\pi - x) + \varphi(\pi - x) - \varphi(\pi + x)}{4 \sin x}, \\ C(\cos^2 x) &= \frac{\varphi(x) - \varphi(2\pi - x) - \varphi(\pi - x) + \varphi(\pi + x)}{4 \sin x \cos x}.\end{aligned}$$

Donc A , B , C sont des fonctions finies et continues de $\cos x$, et, par suite, $\varphi(x)$ ou $f(x)$ peut être représentée avec telle approximation que l'on veut, par un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$.

Sous la seule réserve que les intervalles dont il s'agit soient plus petits que 2π , les théorèmes I, II, III sont exacts si l'on remplace dans leur énoncé *polynôme* par *suite finie de Fourier*.

Ce résultat se déduit plus facilement encore du théorème sur les fonctions de deux variables.

Une fonction continue ayant la période 2π peut, en effet, être considérée comme attachée aux points de la circonférence

$$X = \cos x, \quad Y = \sin x.$$

Soit $F(X, Y)$ une fonction continue par rapport à l'ensemble (X, Y) et égale sur la circonférence à la fonction proposée. On peut trouver un polynôme $P(X, Y)$ qui diffère de moins de ϵ dans un domaine comprenant la circonférence; donc $P(\cos x, \sin x)$ diffère de la fonction proposée de moins de ϵ .

Sous cette forme, la démonstration se généralise immédiatement.

Soit une fonction continue par rapport à l'ensemble de n variables x_1, x_2, \dots, x_n ; ayant la période π pour chacune des n

premières variables et la période 2π pour x_n , telle que pour $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) la fonction soit indépendante des variables x_{i+1}, \dots, x_n . On peut la regarder comme attachée aux points de la variété

$$X_1 = \cos x_1, \quad X_2 = \sin x_1 \cos x_2, \quad \dots, \quad X_n = \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{n-1} \cos x_n, \\ X_{n+1} = \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{n-1} \sin x_n$$

ou

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n+1}^2 = 0;$$

elle est donc représentable avec telle approximation que l'on veut par un polynome en X_1, X_2, \dots, X_{n+1} .

