UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Sueli Liberatti Javaroni

Orientador: Prof.Dr. Marcelo de Carvalho Borba
Co-Orientador: Prof.Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2007

517.38 Javaroni, Sueli Liberatti
J41a Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias / Sueli Liberatti Javaroni. – Rio Claro : [s.n.], 2007
231 f. : il., gráfs., tabs., quadros

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcelo de Carvalho Borba
Co-orientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer

1. Equações diferenciais ordinárias – Estudo e ensino. 2. Abordagem qualitativa. 3. Tecnologias da Informação e Comunicação. 4. Modelagem matemática. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba (Orientador)

Prof. Dr. Nilson José Machado

Prof. Dr. José Antonio Salvador

Profa. Dra. Edna Maura Zuffi

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica

Sueli Liberatti Javaroni (Aluna)

Rio Claro, 18 de dezembro de 2007.

Resultado: Aprovada

Aos meus filhos,

Rafael, Alexandre e Júlia.

Razão de minha existência.

Ao meu marido Carlos,

parceiro dos meus anseios e

das minhas conquistas.

Cúmplice da minha vida.

Aos meus pais Laurindo e Cida,

e a meus irmãos Vani, Junior e Richard.

por terem sido imprescindíveis nessa conquista.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, orientador, pelas sessões de orientação nas "caminhadas", pela amizade e, principalmente pela confiança em mim depositada.

Ao Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer, co-orientador, pelas reuniões de orientação, pelo apoio e entusiasmo e, principalmente pela sua compreensão e seu carinho.

Aos professores Marcelo de Carvalho Borba, João Frederico da Costa Azevedo Meyer, Antonio Vicente Marafioti Garnica, Nilson José Machado, José Antonio Salvador, Miriam Penteado e Edna Maura Zuffi, pelas importantes sugestões, críticas e contribuições para minha tese.

Aos professores Rodnei Bassanezi, Laurizete F. Passos, Miriam Penteado, Paulo Emerique, Idania Peña Grass, Marcelo de Carvalho Borba e Antonio Vicente M. Garnica por comporem a história da minha caminhada na Educação Matemática.

Aos professores Ivanir Liberatti A. Prado e Antonio F. B. Almeida Prado pelo competente trabalho na elaboração do abstract.

Ao Geraldo Lima, técnico do LIEM-GPIMEM, por ter me auxiliado na coleta dos dados, dessa pesquisa, com completa eficiência e profissionalismo.

Aos amigos do GPIMEM, Marcelo, Maltempi, Orlando, Antonio Olímpio, Norma, Rúbia, Paula, Fernanda, Maurício, Sandra, Ricardo, Adriana, Leandro, João, Maria Helena, Simone Gouvêa, Simone Lírio e Silvana que contribuíram cada um ao seu modo, para a minha formação.

À Shen, Marcos, Adriano, Viviane, Ronaldo, Claudia, Kelly, Aline e Tiago, alunos da Matemática da UNESP - RC, que vivenciaram o curso de extensão, cenário dessa pesquisa, com responsabilidade e interesse.

Aos colegas do Departamento de Matemática da FC – UNESP, campus de Bauru pelo apoio.

Aos alunos da Matemática, grupo da IC, Cindiane, Emanuel, Vagner e Maria Helena.

Aos amigos da PGEM que conquistei durante esse tempo de convivência em Rio Claro.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e da Pós-Graduação da UNESP, campus de Rio Claro, pela prontidão dos esclarecimentos e eficiente trabalho.

À Simone, Márcia, Silvana, Marli, Luciele e Aira, amigas da República, companheiras de RU, de esfirras deliciosas, de conversas de pesquisa, de conversas informais, de momentos de tristezas e de alegrias.

À Silvana. A filha, que por vezes adotei; a mãe, que por vezes ganhei; mas com certeza, a amiga, que para sempre conquistei. Obrigada pelas leituras críticas e cuidadosas que fez, por diversas vezes, do meu trabalho.

E, finalmente agradeço aos meus filhos Rafael, Alexandre e Júlia e a meu marido Carlos, pela compreensão nos momentos de ausência e pela força nos momentos de fraqueza.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias a partir da abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos auxiliada pelas tecnologias de informação e comunicação. Três duplas e um trio de estudantes de Matemática participaram voluntariamente do estudo. Foi realizado um curso de extensão intitulado “Modelagem e Métodos Computacionais em Equações Diferenciais Ordinárias”, onde esses alunos foram levados a investigar os modelos de objeto em queda, de crescimento populacional de Malthus, de crescimento populacional de Verhulst e da lei de resfriamento, utilizando a planilha eletrônica Excel e os softwares Winplot e Maple. Os dados foram coletados através dos registros elaborados pelo software Camtasia, em cada computador utilizado pelos alunos, no decorrer das aulas deste curso. Após a análise geral dos videoclipes gerados, foram selecionados alguns episódios que oferecem possíveis caminhos para responder a pergunta de pesquisa. Da análise desses episódios emergem os temas: processo de visualização em atividades investigativas auxiliadas pelas mídias informáticas, abordagens algébrica e geométrica com as mídias informáticas e o conhecimento como rede de significados. A interação entre os alunos e as mídias utilizadas, em particular os softwares utilizados, propiciou novas possibilidades para a abordagem qualitativa dos modelos estudados, levando assim a sugerir a necessidade de repensar o ensino das equações diferenciais ordinárias enfatizando o aspecto geométrico de modelos matemáticos além do aspecto algébrico.

Palavras-chave: Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, Abordagem Qualitativa, Tecnologias da Informação e Comunicação, Modelagem Matemática.

Abstract

This research has the goal of analyzing the possibilities of teaching and learning of introduction to the ordinary differential equations from the qualitative approach of some mathematical models assisted by communication and information technologies. Three couples and one trio of mathematics students took part, as volunteers, of this study. An extension class was realized with the title “Modeling and Computation methods in Ordinary Differential Equations” where those students were leaded to investigate the models of a falling object, populational growing of Malthus, populational growing of Verhulst and the cooling law using the electronic sheet Excel and the softwares Winplot and Maple. The data were collected using registers made by the software Camtasia in each computer used by the student, during the classes. After that, a general analysis from the data, basically using the video clips generated from some episodes were selected, that offer possible ways to answer the question of this research. From the analysis of those episodes comes up the topics: process of visualization in investigation activities assisted by the informatics medias, algebraic and visual approaches with the informatics medias and knowledge as network of meanings. The interaction between the students and the used medias, in particular the softwares used, gave us new possibilities for the qualitative approach of methods studied, leading us to suggest the necessity of rethinking the teaching of Ordinary Differential Equations emphasizing the geometric aspect of mathematical models beyond the algebraic aspect.

Key-words: Teaching of Ordinary Differential Equations, Qualitative Approach, Information and Communication Technologies, Mathematical Modeling.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

SUMÁRIO

ÍNDICE

Capítulo 1 – Trajetória

Introdução

No decorrer de minha prática docente, por vários motivos que podem ser assim sintetizados: interesse em atuar na área de Educação Matemática junto ao Curso de Licenciatura em Matemática, questões pertinentes à sala de aula, envolvimento em projetos de pesquisa na área, fui levada a buscar na Educação Matemática fundamentação teórica que me possibilitasse participar ativamente como uma das interlocutoras dessa área, tendo em vista minha formação anterior e minha carreira docente junto ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP, campus de Bauru. Como objeto de pesquisa, iniciei estudos sobre o ensino de Cálculo Diferencial Integral com Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Já no início, pude observar que existe a necessidade de pesquisas envolvendo questões sobre o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) com TIC. Surgiu, então, interesse de pesquisar questões relacionadas ao tema, que deram origem a este trabalho.

1.1. Caminhos percorridos na pesquisa

Em julho de 1989 concluí o curso de Bacharelado em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São

Paulo (USP), São Carlos. Desde a graduação, tendo sido bolsista de iniciação científica desenvolvendo pesquisa na área de Equações Diferenciais, havia escolhido seguir a carreira docente e um dos objetivos que sempre almejava era lecionar no Ensino Superior. Sendo assim, acreditava na necessidade de prosseguir os estudos na pós-graduação. Realizei o curso de mestrado na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), onde desenvolvi a pesquisa intitulada "Equações de reação-difusão: uma aplicação no controle de reatores", obtendo o título de Mestre em Matemática no ano de 1993. Ao final do mestrado, existia a possibilidade de ingresso no curso de doutoramento no Programa de Engenharia Química, na área de catálise, no qual a proposta era trabalhar com Matemática Aplicada. No entanto, naquele momento, eu sentia a necessidade de iniciar minha trajetória profissional, pois tanto na graduação quanto no mestrado fui aluna bolsista e, por esta razão, decidi que já era a hora de ingressar no mercado de trabalho e investir em minha carreira profissional.

Meu primeiro trabalho, no ano de 1994, foi ministrar aulas de Matemática Financeira no Curso de Administração de Empresas nas Faculdades Integradas de Jaú (FIJ). Esse foi um primeiro desafio. Eu acreditava que formada no mestrado em Matemática não teria grandes dificuldades em sala de aula, afinal eu tinha muita facilidades com este conteúdo devido à minha formação. Porém, as questões que permeiam a prática da sala de aula não são apenas os conteúdos a serem ministrados, mas também o como abordá-los de acordo com cada contexto.

No mesmo ano assumi, através de concurso público, as aulas de Análise Numérica para os cursos de Tecnologia em Navegação Fluvial da Faculdade de Tecnologia de Jahu (FATEC – JH). Essa também foi uma experiência importante em minha trajetória acadêmica. Pois como afirma D'Ambrósio (1996, p. 91) "todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo". Sendo assim, eu lecionava os vários métodos numéricos de resolução de zeros de funções, de sistemas lineares, de interpolação polinomial, de ajuste de funções, enfim, os conteúdos pertinentes à disciplina. Deparava-me com olhares confusos dos alunos quando, por exemplo, definia a função de duas variáveis para o método dos mínimos quadrados. Após realizar todas as contas, eu os alertava que iríamos utilizar no método de ajuste, apenas o sistema gerado nos cálculos. Então, por que toda aquela teoria para alunos de um curso de serviço, que nem era um curso de bacharelado em Matemática, como o que eu havia cursado?

No ano de 1995, além de continuar lecionando aquelas duas disciplinas, realizei um segundo concurso público e assumi as aulas das disciplinas Matemática I e Matemática II para o Curso de Tecnologia em Informática da FATEC – JH, cujos conteúdos correspondem à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real. Os alunos, em geral, olhavam com um ar assustado quando eu começava a definir limite de funções, quando eu explicava a integral definida através da soma de Riemann, dentre outros conceitos. E, desde então, eu me questionava, sendo esses alunos de um curso de Informática, no qual o computador era um elemento comum a eles, se não seria possível modificar minha prática, agregando esse novo elemento em minha sala de aula, de forma a buscar novas possibilidades. No entanto faltava tempo para reflexão já que nessa época, além de assumir a coordenadoria do Curso de Tecnologia em Informática, eu ministrava vinte e duas aulas, além das demais atividades complementares às atividades docentes. Assim, minhas preocupações com relação à minha prática e à minha formação acadêmica existiam, porém, ficavam no plano das preocupações, sem ações efetivas. Depois de ter trabalhado por quase seis anos com as disciplinas Matemática Financeira, Análise Numérica, Matemática I e II, acredito que, apesar de minhas angústias e inquietações com relação à minha prática, fui levada pelas circunstâncias a reproduzir o que eu havia vivenciado enquanto aluna. Como afirmam Moreno e Azcárate Giménez (2003, p.267):

> No caso de professores de matemática de universidade, o conhecimento que têm sobre o processo de ensino e aprendizagem é fruto da experiência docente e do efeito da socialização que lhes fazem repetir os esquemas daqueles professores que lhes ensinaram em sua época de estudantes. Os docentes universitários não têm nenhuma formação didática específica, uma parte da ciência que lhes capacite a ensinar. [1]

Em 1999, ingressei como docente no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP, campus de Bauru. No ano de 2000 comecei a lecionar a disciplina anual, Cálculo I, para os alunos do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática. Minhas preocupações se intensificaram, pois, além de continuar lecionando Cálculo, o público alvo agora era outro, não mais um curso de serviço, mas sim um curso de formação de professores, no qual as discussões acerca do conteúdo a ser trabalho, o enfoque que seria dado às demonstrações dos resultados, enfim, questões envolvendo alunos, conteúdos, professores e metodologia de ensino, questões que permeiam a sala de aula, eram trazidas à tona. Sendo minha formação de Bacharel em Matemática e Mestre em Matemática, sentia-me preocupada, já que no decorrer de minha formação acadêmica essas questões não haviam sido trabalhadas.

[1] Tradução do trecho "En el caso de los professores de matemáticas de universidad, el conocimiento que tienen sobre el processo de enseñanza y aprendizaje es fruto de la experiencia docente y del efecto de la socialización que les hace repetir los esquemas de aquellos profesores que les enseñaron en su época de estudiantes. Los docentes universitarios no suelen tener ninguna formación didáctica específica, a parte de la científica que les capacite para enseñar".

Indo ao encontro de "respostas" às minhas inquietações, passei a trilhar um caminho que possibilitasse minha inserção na área de pesquisas em Educação Matemática. Nos anos de 2001 e 2002 cursei as disciplinas: Didática Aplicada ao Ensino de Matemática, Tópicos Especiais em Educação Matemática: Modelagem e Educação Matemática, A Utilização da Informática na Educação Matemática, Teorias da Aprendizagem e Tendências em Educação Matemática, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PGEM), já que isto se fazia extremamente necessário, visto a minha formação anterior. Além disso, iniciei também a revisão bibliográfica para buscar trabalhos que envolviam a questão da demonstração no ensino de Cálculo, mediado pelas mídias informáticas.

Outro fator importante na minha caminhada em direção à Educação Matemática foi ingressar no Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM[2]), no ano de 2003. Esse grupo de pesquisa tem como principal preocupação pesquisar sobre as possibilidades da inserção do computador, das calculadoras gráficas ou de outros tipos de mídias na Educação Matemática. Mais recentemente, tem investigado questões que envolvem o uso de vídeo, análise de softwares e de educação a distância, incluindo o uso da Internet. Nas reuniões semanais do grupo, são lidos e discutidos livros e textos de pesquisadores da Educação Matemática, projetos que os participantes do grupo desenvolvem, dentre outros, e possivelmente, as questões que lá emergiram em comparação com a minha prática docente aprofundaram as minhas angústias e inquietações.

Ainda, nos anos de 2002 e 2003, lecionei, também, a disciplina semestral optativa, Informática Aplicada à Educação Matemática, para alunos do terceiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática, da FC. Um dos objetivos desta disciplina consiste na exploração e estudo de softwares que possam ser utilizados para o ensino de Matemática. Trabalhamos com Excel, Winplot, Wingeom, Cabri Géomètre, dentre outros. Um segundo objetivo da disciplina é propiciar aos alunos, futuros professores, momentos de reflexão sobre o uso do computador nas aulas de Matemática. Com esta perspectiva, propus leituras e discussões de livros, artigos, textos de pesquisadores de Educação Matemática, e mais particularmente, de trabalhos na linha de Novas Tecnologias e Educação Matemática.

Porém, ainda era pouco, visto que se tratava de um curso de formação de professores que, provavelmente, atuarão nas escolas do Ensino Básico, as quais estão recebendo computadores e como afirma Penteado (1999, p.298),

[2] http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html

> Acreditamos que, em geral, o professor enfrenta desafios impostos pela profissão e busca criar alternativas, porém a introdução do computador na escola altera os padrões nos quais ele usualmente desenvolve sua prática. São alterações no âmbito das emoções, das relações e condições de trabalho, da dinâmica da aula, da reorganização do currículo, entre outras.

Desta forma, como querer formar os professores com esta visão, se em nossa própria sala de aula essa prática não é usual? Ou ainda, por que esperar estes alunos se formarem, iniciarem sua prática para somente então serem propostos cursos de formação continuada em temas que relacionem o uso de mídias informáticas?

Em vista do exposto, e dando continuidade à minha caminhada na Educação Matemática, no ano de 2004, ingressei na PGEM para desenvolver meu curso de doutoramento em Educação Matemática. E como afirma Goldenberg (2001, p.79)

> Com relação ao tema de estudo, vale lembrar mais uma vez que a escolha de um assunto não surge espontaneamente, mas decorre de interesse e circunstâncias socialmente condicionadas. Essa escolha é fruto de determinada inserção do pesquisador na sociedade.

Assim, inicialmente, comecei investigando o uso das TIC no ensino de Cálculo, com o foco direcionado à questão da demonstração, cujo objetivo principal era entender as relações que os alunos fazem ao estudar conteúdos de Cálculo Diferencial Integral em um ambiente mediado pelo computador (JAVARONI, 2004).

Com a realização da revisão bibliográfica, buscando pesquisas sobre o ensino de Cálculo, relacionado às mídias informáticas, constatei que existe um grande número de trabalhos nesta área, tanto no cenário nacional quanto internacional. Ao procurar definir o foco de minha pesquisa em conjunto com minha experiência e com meus interesses de pesquisa verifiquei que, no conjunto das pesquisas desenvolvidas em Educação, mais especificamente em Educação Matemática, existe uma lacuna de pesquisas acerca de questões sobre o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias com o auxílio das mídias informáticas. E, este foi um dos motivos que me impulsionou a desenvolver esta tese.

Além disso, a disciplina de EDO nem sempre consta na grade curricular, como matéria obrigatória, nos cursos de Licenciatura em Matemática e acredito que devemos nos atentar ao fato que Habre (2000) coloca. Segundo esse pesquisador uma das razões de ser desta disciplina deveria ser o elo que ela estabelece entre a Ciência e a própria Matemática. E, em geral, quando ela compõe o quadro de disciplinas do curso, é tratada com um enfoque quase que estritamente algébrico, levando os alunos a se preocuparem exclusivamente com os métodos de busca de soluções, esquecendo do objetivo maior que seria entender o processo que gerou determinada equação diferencial, bem como interpretar suas soluções com relação ao fenômeno que ela descreve. Como afirma Hubbard (apud HABRE, 2000), "mesmo quando as soluções podem ser escritas de uma forma elementar, a procura por fórmulas frequentemente oculta a questão central: como as soluções se comportam?".

Kallaher (1999) afirma que nas últimas décadas têm ocorrido, muito provavelmente por conta do desenvolvimento tecnológico, tendências de propostas de mudanças para o ensino de EDO. Segundo ele, seu ensino poderia ser tomado de um ponto de vista qualitativo, ou seja, analisar e investigar as equações diferenciais ordinárias com uma abordagem geométrica, enfatizando o desenvolvimento dos processos que as geraram, além da procura pelos métodos de resolução das soluções analíticas.

Antes do advento das TIC, mais especificamente do computador, a abordagem geométrica seria menos atrativa devido às dificuldades de exploração e visualização, fato que hoje se torna favorável com os recursos disponíveis nos softwares algébricos e/ou geométricos.

Diante desses fatos, acredito que o processo de formulação dos modelos e a interpretação das soluções ou do comportamento das soluções são tão importantes quanto às técnicas de resolução das equações diferenciais ordinárias e que este aspecto deve ser trabalhado para que os alunos desenvolvam capacidades de análise e interpretação. A questão da visualização é essencial no entendimento dos aspectos dinâmicos de um curso introdutório de equações diferenciais e o entendimento da derivada como variação de uma curva é central na interpretação de gráficos, bem como o comportamento das soluções ao longo do tempo e a existência de um estado de equilíbrio.

Juntamente com essas questões, e com a experiência advinda da minha prática de professora de Cálculo Diferencial e Integral, que uma aplicação imediata e até mesmo natural do Cálculo Integral seria a análise e resolução de equações diferenciais ordinárias. No entanto, como já dito anteriormente, em alguns cursos de Licenciatura em Matemática, essa disciplina nem sequer compõe o quadro curricular obrigatório. Ou ainda, nos cursos de graduação, nos quais a disciplina é lecionada, de maneira geral, a ênfase é dada aos métodos de resolução das equações diferenciais ordinárias, esquecendo do problema que origina tal modelo, bem como da interpretação de suas soluções. E, em geral, as análises geométrica e numérica não são abordadas no estudo dos modelos.

Segundo Moreno e Azcárate Giménez (2003), a persistência dos métodos tradicionais frente a alternativas mais inovadoras de ensino deve-se, possivelmente, a quatro fatores. Os professores têm uma forte crença de que, em linhas gerais, o baixo nível de competência e as deficiências no conhecimento matemático dos alunos, os fazem considerar impossível trabalhar com um enfoque que coloque os alunos em situações de pensar e raciocinar além dos aspectos básicos, os quais os alunos acabam por memorizar e mecanizar. O segundo motivo, de acordo com estes pesquisadores, consiste na concepção formalista de Matemática, em particular, de Equações Diferenciais, a qual maximiza a manipulação algébrica frente ao tratamento numérico e gráfico das equações diferenciais, como um princípio inquestionável da aprendizagem significativa. O terceiro fator, apontado pelos pesquisadores, seria o receio da perda de conteúdos específicos, daquilo que alguns professores consideram "as matemáticas de verdade", em favor de conteúdos e técnicas próprias da matemática aplicada, os quais não têm a mesma consideração que aqueles conteúdos da matemática pura. E finalmente, o quarto fator, seria a consciência da obrigatoriedade de dedicação de tempo para a preparação de uma matéria que atualmente conhecem e dominam, enquanto que dedicam mais tempo para outras investigações ou outras tarefas profissionais, institucionalmente mais valorizadas.

Outro fato importante que influenciou a definição do foco desta pesquisa de doutoramento consiste na minha própria trajetória acadêmica, já que a minha pesquisa de mestrado foi na área de Matemática Aplicada, com tema relacionado às equações diferenciais.

Como afirmam Araújo e Borba (2004, p.40),

> Quando decidimos desenvolver uma pesquisa, partimos de uma inquietação inicial e, com algum planejamento, não muito rígido, desencadeamos um processo de busca. Devemos estar abertos para encontrar o inesperado; o plano deve ser frouxo o suficiente para não "sufocarmos" a realidade, e, em um processo gradativo e não organizado rigidamente, nossas inquietações vão se entrelaçando com a revisão da literatura e com as primeiras impressões da realidade que pesquisamos, para suavemente, delinearmos o foco e o design da pesquisa.

Desta forma, como afirma Rasmussen (2001), apesar da ocorrência de novas direções no ensino de EDO, existe a necessidade do desenvolvimento de pesquisas sobre o entendimento e as dificuldades dos alunos na aprendizagem de equações diferenciais ordinárias com ênfase na abordagem qualitativa.

Diante do exposto, meu objeto de pesquisa consistiu em analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem de EDO com ênfase na abordagem geométrica das soluções com o auxílio das TIC. Para tanto, esta tese foi conduzida perseguindo “responder” a seguinte pergunta diretriz:

Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?

1.2. A estrutura da tese

Esta tese está organizada em seis capítulos, além das referências bibliográficas e os apêndices. No Capítulo 1, onde se insere a presente seção, apresento minha trajetória acadêmica e profissional seguida de uma breve apresentação da pesquisa, relacionada às possibilidades da abordagem qualitativa no ensino de equações diferenciais ordinárias, auxiliada pelas mídias informáticas, na tentativa de explicitar qual foi a gênese e qual é a relevância dessa investigação. Em seguida apresento a pergunta de pesquisa e, finalmente, as linhas gerais do conteúdo desta tese, isto é, a sua organização.

No Capítulo 2, amplio a discussão teórica sobre os temas que compõem a interrogação da pesquisa. Inicio apresentando o levantamento bibliográfico sobre o ensino de Matemática com as mídias informáticas, e na seqüência, sobre o ensino de equações diferenciais ordinárias com tecnologias informáticas.

O trabalho de pesquisa que originou essa tese foi desenvolvido seguindo uma metodologia de pesquisa que é apresentada no Capítulo 3. Uma descrição do âmbito no qual foi realizado o estudo, os procedimentos de coleta e análise dos dados realizados o completam. Finalmente, apresento elementos sobre a visão de conhecimento que sustenta essa investigação.

O Capítulo 4 é dedicado à apresentação descritiva e analítica dos dados. Nele apresento episódios que foram constituídos da organização dos dados desta pesquisa.

No Capítulo 5, os dados da pesquisa são analisados através do confronto com a literatura estudada. Assim, sob a perspectiva dos teóricos a análise iniciada no Capítulo 4 torna-se mais profunda.

Finalmente, no Capítulo 6, retomo a pergunta de pesquisa com o objetivo de sintetizar as compreensões e tecer algumas conclusões que foram elaboradas no decorrer desta investigação. Explicito as contribuições que esta pesquisa pode trazer à Educação Matemática. Também discuto as principais limitações que identifico em meu trabalho e direciono para novas buscas que possam ser realizadas a partir da realização desta pesquisa.

Capítulo 2 – Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias e Tecnologias da Informação e Comunicação

Introdução

À pergunta diretriz desta pesquisa, soma-se ainda a necessidade de detectar lacunas que justifiquem pesquisar sobre o tema para o enriquecimento de minha pesquisa. Neste capítulo apresento uma seção dedicada à exposição dos conceitos básicos sobre o conteúdo de introdução às equações diferenciais, baseada nos livros-texto Bassanezi (2002), Bassanezi e Ferreira (1988), Batschelet (1978), Zill, D. G. e Cullen, M. R. (2001) e Boyce e DiPrima(2002). Definidos os conceitos básicos, apresento um relato de pesquisas já desenvolvidas no âmbito do ensino de equações diferenciais ordinárias. O estudo da literatura relacionada ao tema evidencia a importância do ensino de EDO na área de ciências exatas e, em particular, no curso de Matemática. A abordagem qualitativa para o estudo de equações diferenciais ordinárias é um tópico apresentado nesta seção.

2.1 Aspectos teóricos sobre o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias

2.1.1 Equações Diferenciais e Matemática Aplicada

A ciência, uma atividade essencialmente desenvolvida pelo ser humano, busca entender a natureza, por meio de teorias, com o intuito de avançar seus conhecimentos e, portanto depende de codificação e de símbolos para realizar ações junto à realidade, na tentativa de entendê-la e explicá-la. Esses símbolos e codificações associados às representações orais ou visuais de comunicação dão origem à linguagem e à representação gráfica (BASSANEZI, 2002). Na realidade estão armazenados os fatos que informam o ser humano. Esses fatos são processados pelo indivíduo e resultam em estratégias de ação. Essas ações geram conhecimento, que é a capacidade de explicar, lidar, manejar e entender a realidade. Esse conhecimento gerado é incorporado à realidade, naturalmente modificando-a e armazenando-se na coleção dos fatos que a constituem. Desta forma, também a realidade está em constante modificação (D'AMBROSIO, 2001).

A Matemática, uma ciência formal, constrói os seus próprios objetos de estudo. No entanto, muitas idéias matemáticas são abstrações de situações empíricas naturais ou sociais. Segundo Bassanezi (2002), as ciências naturais como a Física, a Astrofísica e a Química foram desenvolvidas com o respaldo de teorias auxiliadas pela Matemática. Já outras ciências como Biologia, Psicologia, Economia, dentre outras, as quais ele denomina de factuais, via de regra, usavam apenas a linguagem comum para exprimir as idéias e isso, geralmente, resultava em falta de precisão e clareza em seus desenvolvimentos. A Matemática era usada apenas como um auxílio nas análises superficiais dos resultados de pesquisas empíricas.

Bassanezi (2002, p. 18) afirma ainda que "a ciência contemporânea, entretanto, é fruto de experiências planificadas e auxiliadas por teorias sujeitas à evolução" e que "o objetivo fundamental do 'uso' de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato".

Esse processo de abstração e formalização das ciências factuais através da Matemática convencionou-se denominar Matemática Aplicada, a qual teve seu início, nas ciências não-físicas, no começo do século XX (BASSANEZI, 2002).

Nas ciências biológicas, a Matemática Aplicada toma força na modelagem, por exemplo, nos processos de mecanismos de controle de dinâmica populacional, de epidemiologias, de processos neurológicos, dentre outros.

Na procura por refletir sobre a realidade com o intuito de entendê-la, explicá-la ou mesmo de atuar sobre ela, o processo usual é selecionar na situação, os argumentos, os fatos ou parâmetros considerados importantes para o evento e formalizá-lo em um modelo.

O termo modelo é usado nas mais variadas situações. No dicionário Houaiss (2001), encontram-se dezoito acepções para esse substantivo. Neste trabalho, no entanto será considerada apenas aquela que se refere à representação de um sistema. Assim, interessa-nos definir o modelo objeto. Segundo Bassanezi (2002, p.19).

> Modelo Objeto é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser *pictórica* (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.), *conceitual* (fórmula matemática), ou *simbólica*. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado. Um modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de infectados como sendo homogêneo onde todos os seus elementos têm as mesmas propriedades é um exemplo de um modelo objeto. Um desenho para representar um alvéolo usado pelas abelhas é também um modelo deste tipo.

Desta forma, um modelo matemático de um fenômeno ou de uma situação é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que o representam. Assim, Modelagem Matemática pode ser definida como o processo dinâmico utilizado para a elaboração e validação de modelos matemáticos e, tem como um dos seus objetivos principais a possibilidade de previsão de tendências acerca do objeto estudado.

A importância de um modelo matemático está na possibilidade de expressar, com os símbolos e as relações matemáticas, as características do objeto estudado, e vice-versa, isto é, o problema em questão é descrito através do modelo, o qual é analisado com as teorias e técnicas próprias da Matemática, gerando, assim, informações e resultados acerca do objeto e, em seguida, utilizando-se da linguagem original do problema, apresentam-se os resultados obtidos. Esse processo pode ser esquematizado conforme a Figura 2.1, sugerido por Bassanezi e Ferreira (1988).

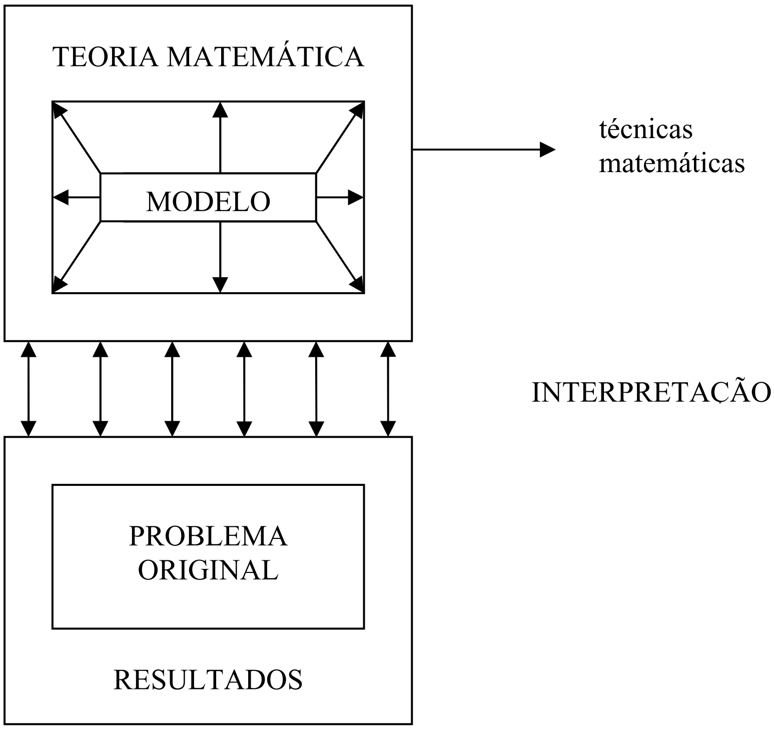


Figura 2.1. Processo de Modelagem Matemática

Uma das expectativas dos matemáticos aplicados ao estudar um problema é construir um modelo dentro de teorias matemáticas já existentes, isto é, de teorias já desenvolvidas e fundamentadas. No entanto, quando isso não acontece, ou seja, quando não existe uma teoria matemática apropriada para a elaboração de determinado modelo matemático adequado ao problema original, deve-se desenvolver um novo ramo na ciência matemática. Como afirma Bassanezi (2002, p. 26) “obviamente isso não acontece todos os dias”. Ele cita a Teoria dos Jogos, desenvolvida por J. Neumann, para modelar situações de competição econômica, como um exemplo recente desta situação.

Outras vezes, um modelo matemático associado ao problema pode ser elaborado dentro de uma teoria já estabelecida, porém pode acontecer que as técnicas e métodos matemáticos existentes não sejam suficientes para a resolução e obtenção de resultados. E neste caso, cabe aos cientistas desenvolverem os métodos necessários. Estas situações constituem grandes motivações para o desenvolvimento de teorias matemáticas já estabelecidas. O desenvolvimento de Equações Diferenciais é um típico exemplo dessa situação, desde sua origem, que se confunde com a do Cálculo Diferencial e Integral e da Mecânica Clássica. Segundo Kline (1972, p.468)

> Os matemáticos procuraram usar o cálculo para resolver mais e mais problemas físicos e logo se encontraram obrigados a manipular uma nova classe de problemas. Eles fizeram muito mais do que tinham

> conscientemente procurado. Os problemas mais simples conduziram às quadraturas que poderiam ser avaliadas em termos de funções elementares. Algumas um tanto mais difíceis conduziram às quadraturas que não poderiam ser assim expressadas, como foi o caso para integrais elípticas. Ambos os tipos recaem ao alcance do cálculo. Entretanto, a solução do problema mais complicado exigiu técnicas especializadas; assim surgiu o assunto de equações diferenciais. [3]

2.1.2 Equações Diferenciais e Modelos Matemáticos[4]

A essência de "ver" o mundo que nos cerca sempre foi tema de discussões filosóficas. Relembrando o confronto de dois pré-socráticos, Parmênides e Heráclito, temos duas visões complementares de mundo. Para Parmênides, *nada muda já que a essência sempre permanece a mesma.* Já para Heráclito, *a única constante, o único conceito que nunca muda é o de que "tudo está sempre mudando".*

Podemos utilizar as metáforas da fotografia e da janela para entender essas duas visões. Ao se olhar o mundo através de fotografia, essa visão é estática, estou vendo aquilo que se mostra na foto naquele instante. No entanto, se observo o mundo através da janela, a visão é dinâmica e o que vejo na verdade são as mudanças que estão ocorrendo.

Pensando como Heráclito, o que se tem, na Natureza, a observar são as mudanças e como elas ocorrem. Informalmente, podemos dizer, nas palavras do universo matemático, que dado um fenômeno $f(t)$, "seu jeito de mudar" pode ser observado analisando suas derivadas, caso existam. Isto é, podemos observar $\frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n f(t)}{dt^n}$, e inferir sobre $f(t)$.

Desta forma, podemos dizer que a mudança que se "vê" na Natureza pode ser descrita por $f'(t), f''(t), f'''(t) \ldots$, e o que procuramos, ou melhor, o que queremos identificar, em geral, é $f(t)$.

---

3 Tradução de: The mathematicians sought to use the calculus to solve more and more physical problems and soon found themselves obliged to handle a new class of problems. They wrought more than they had consciously sought. The simpler problems led to quadratures that could be evaluated in terms of the elementary functions. Somewhat more difficult ones led to quadratures which could not be so expressed, as was the case for elliptic integrals. Both of these types fall within the purview of the calculus. However, solution of the still more complicated problems demanded specialized techniques; thus the subject of differential equations arose.

4 O texto de introdução desta seção é baseado na comunicação oral proferida pelo Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer, co-orientador dessa tese, em reunião de orientação ocorrida no IMECC, UNICAMP em março de 2006.

No Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real, estudam-se funções que são definidas nos reais ou em subconjuntos deste e cuja imagem é um subconjunto dos reais ou o próprio. Por exemplo, $f : x \in \Re \to f(x) = x^2 \in \Re_+$ ou $g : x \in \Re \to g(x) = \cos(x) \in [-1,1] \subset \Re$.

No entanto, quando calculamos derivadas e integrais indefinidas de funções no campo dos reais, acontece algo diferente, pois os conjuntos domínio e imagem pertencem ao espaço das funções. Por exemplo: se $f(x) = x^4$, temos $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx^4}{dx} = 4x^3$; se $g(x) = \cos(x)$, temos $\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d(\cos(x))}{dx} = -sen(x)$, se $f(x) = \cos(x)$, temos $\int \cos(x)dx = sen(x) + C, C$ é uma constante, ou ainda se tivermos $g(x) = 1/x$, temos $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k, k$ é uma constante. Além dessa especificidade temos ainda casos que não conseguimos explicitar, através de funções elementares, a família das primitivas de uma dada função, como por exemplo, se consideramos a função $f(x) = e^{-x^2}$, temos que $F(x) = \int e^{-x^2} dx$ existe, mas sem primitiva.

O Modelo de Gompertz[5] de Dinâmica Populacional (Boyce e DiPrima, 2002, p. 46) $\frac{dy}{dt} = \lambda y \ln(\frac{k}{y})$, onde λ e k são constantes positivas, com condição inicial $y(0) = y_0$. Independentemente de como se pode obter sua solução, através de métodos analíticos, pode-se verificar que $y(t) = ke^{\ln\left(\frac{y_0}{k}\right)e^{-\lambda t}}$ satisfaz a equação $\frac{dy}{dt} = \lambda y \ln(\frac{k}{y})$.

Quando determinamos a solução de uma dada equação, procuramos identificar um ou mais valores reais que satisfaça a equação. Porém, quando queremos "resolver" uma EDO estamos "construindo" uma função que venha a satisfazer a equação diferencial dada.

Como afirma Machado (1988, p. 153),

> De maneira geral, uma *equação diferencial* é uma pergunta do tipo: "Qual a função cuja derivada satisfaz a seguinte relação?" Ou seja, uma equação diferencial é uma equação (no sentido de igualdade envolvendo uma incógnita) onde a incógnita é uma função, sendo que as informações disponíveis para a determinação da função desconhecida envolvem sua derivada.

[5] Gompertz obteve este modelo ajustando uma curva aos dados de laboratório do crescimento de uma população (paramecium caudatum).

Em vista do exposto, acreditamos que devemos buscar compreender as características do fenômeno que leva à equação diferencial, recorrer às técnicas que nos auxiliam a resolvê-la e caso a equação diferencial em questão não possua uma solução algébrica explícita podemos recorrer aos métodos numéricos e/ou a análise qualitativa para obtermos informações sobre o comportamento da função solução procurada.

Muitos dos princípios, ou leis, que descrevem o comportamento do mundo físico são proporções, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual determinados fenômenos acontecem. Ao modelar esses fenômenos, freqüentemente se obtêm equações que envolvem as variações das quantidades (variáveis), presentes e consideradas essenciais na situação analisada. Assim, as leis que regem tal fenômeno podem ser representadas por equações de variações. Quando essas variações são instantâneas e o fenômeno se desenvolve continuamente, as equações são denominadas equações diferenciais. No entanto, se as variáveis envolvidas forem discretas, isto é, funções de uma coleção de pontos, em que temos as médias das variações, então as equações que modelam o fenômeno serão denominadas equações de diferenças.

Quando, nessa tese, me refiro à Modelagem Matemática, estou seguindo a concepção de “Modelagem Matemática e Aplicação”, definida como “o processo que leva de uma situação problema a um modelo matemático é chamado modelagem matemática”. E “uma situação do mundo real que pode ser atacada por meio da matemática é chamada uma aplicação matemática” (APPLICATIONS, 2002, p. 5).

Ou seja, se tenho um problema do ‘mundo’ para resolver, elaboro um modelo que aproxime, o melhor possível, a situação analisada, aplico técnicas de resolução algébrica ou numérica, determino e interpreto sua solução com relação ao problema analisado e depuro o modelo, caso haja necessidade, e finalmente infiro sobre o problema analisado, estou fazendo modelagem matemática. No entanto, se eu parto de modelos que atendam situações ditas ‘reais’ e os analiso, estudo, aplico as técnicas algébricas ou numéricas de resolução e determino sua solução, o que estou fazendo é aplicação. É nessa perspectiva que se encontra o trabalho relatado nessa tese. As atividades desenvolvidas com os alunos participantes dessa pesquisa envolveram aplicação do conceito “Modelagem Matemática e Aplicação”.

2.1.2.1 Exemplos de modelos matemáticos

A teoria de equações diferenciais, desde seu primórdio até os dias de hoje, tem sido fortemente influenciada por sua ligação com a Ciência e a Tecnologia. Desta ligação tem surgido contínua inspiração, transformando problemas físicos em problemas matemáticos e, às vezes, em completas teorias matemáticas. Para mostrar as origens físicas do conceito de equação diferencial vamos considerar alguns exemplos simples de modelos físicos e das equações que os descrevem. A importância desses modelos não está tanto na técnica empregada para obter as equações, mas sim na ação evidente que as equações efetivamente descrevem os modelos.

***Exemplo 1 - Misturas*[6]**

Uma vasilha contém 10 litros de solução salina, diluída em água pura que entra a uma razão de 0,1 litros por segundo (l/seg). O volume da solução na vasilha se mantém constante mediante uma válvula de saída através da qual o líquido sai à razão de 0,1 l/seg. A solução se mantém perfeitamente misturada, de modo que sua concentração (massa de sal por unidade de volume) é uniforme em todo interior da vasilha. Denotamos por x a massa de sal (em gramas) na vasilha, e o tempo (em segundos) por t. A razão (instantânea) da variação de x com relação à t, $\frac{dx}{dt}$, é igual a razão da variação da quantidade de sal que entra na vasilha com relação ao tempo, que é zero, menos a razão da variação da quantidade de sal que sai. Como a taxa de saída é de 0,1 l/seg, a concentração de sal na vasilha – e, portanto o fluxo que sai – é de $x/10$ gramas por litro (g/l), o sal sai da vasilha a uma razão de $(x/10)(0{,}1)$ g/seg. Assim, $\frac{dx}{dt} = -0{,}01x$. Essa equação é uma equação diferencial ordinária. Inclui uma variável diferenciada, x, e uma variável de diferenciação, t.

Se considerarmos neste exemplo que não entra água pura na vasilha, mas sim uma solução salina de $10\,g/l$ de concentração. A razão da variação da quantidade de sal que entra na vasilha, com relação ao tempo, é agora de $(10\,g/l)(0{,}1 seg) = 1\,g/seg$. E como $\frac{dx}{dt} = taxa\ de$

[6] Exemplo extraído de Plaat (1974, p. 2)

entrada – taxa de saída, temos $\frac{dx}{dt} = 1 - 0{,}01x$. Podemos observar que esta equação reflete características do ponto de vista físico, que são descritos pelo modelo. Por exemplo, se $x = 100$, temos que $\frac{dx}{dt} = 0$. Por outro lado, a concentração na vasilha é $100/10 = 10g/l$, que é a concentração do fluxo de entrada e assim não existe variação de concentração de sal na vasilha. Se $x > 100$, $\frac{dx}{dt} < 0$ e, portanto a corrente de entrada diminui a massa de sal na vasilha e finalmente se $x < 100$, $\frac{dx}{dt} > 0$, a corrente de entrada aumenta a massa de sal na vasilha.

Exemplo 2 – Misturas entre recipientes[7]

Dois recipientes com volumes de 4 e 2 litros, respectivamente, estão cheios de soluções salinas. Suponha ainda que as soluções fluem de um recipiente ao outro a razão de 0,1 l/seg, através de tubos de conexão, de longitude e volumes desprezíveis e que no interior de cada recipiente a concentração de sal é uniforme. Sejam x e y as massas de sal no recipiente maior e no menor, respectivamente. No recipiente maior penetra tanto sal quanto sai do menor, a saber, $(y/2)(0{,}1)g/l$ e, no menor penetra tanto quanto sai do maior, isto é, $\left(x/4\right)(0{,}1)g/l$. Como a variação da massa com relação ao tempo é dada pela diferença da quantidade de sal que entra e a que sai, com relação ao tempo, para cada um dos recipientes, obtemos as seguintes equações: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{40}x + \frac{1}{20}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{40}x - \frac{1}{20}y \end{cases}$. Essas equações formam um sistema de equações diferenciais ordinárias simultâneas. Observando esse modelo, podemos concluir que este possui infinitos valores de x e y para os quais $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ se anulam, isto é, para todos os valores de x e y que satisfazem $x = 2y$. Esses são, de fato, os valores para os quais as concentrações em ambos os recipientes são iguais.

[7] Exemplo extraído de Plaat (1974, p. 2)

Exemplo 3 – Sistema massa-mola[8]

Consideremos um objeto de massa de 10 gramas suspenso por uma mola presa a um suporte fixo. As forças que atuam sobre esse objeto são a forças peso do objeto e a tensão da mola sobre o objeto. Supondo que a mola obedece a lei de Hooke, temos que a tensão da mola é dada por kx, onde x é o deslocamento da mola. Assim, pela segunda lei de Newton, temos que a resultante das forças que atuam no objeto é igual a sua massa vezes sua aceleração e assim temos: $F = ma = peso - tensão = mg - kx$, ou ainda, $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$. Considerando que a aceleração da gravidade é dada por $g = 981 cm/seg^2$ e supondo que a constante elástica da mola é dada por $k = 1000$, temos $\frac{d^2x}{dt^2} = 981 - 100x$, que é a equação diferencial que modela o deslocamento do objeto. Essa equação difere dos dois exemplos anteriores, pois contém o termo de derivada de segunda ordem. Podemos transformar essa equação em um sistema de equações diferenciais simultâneo fazendo a mudança de variável $\frac{dx}{dt} = v$, obtendo assim $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = 981 - 100x \end{cases}$, um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Exemplo 4: desintegração radioativa[9]

Admitindo que uma determinada substância contenha somente um tipo de átomo radioativo, a hipótese mais simples sobre sua desintegração é a de que não existe tempo preferido para a desintegração e a de que todos os átomos têm a mesma chance de desintegração, independentes um do outro. Observando a desintegração (variação) desse átomo, constata-se que o número de desintegrações por unidade de tempo é proporcional à quantidade de átomos radioativos presentes em cada instante. Assim, se $N = N(t)$ representa o número de átomos radioativos presente em cada instante t, uma equação matemática, que pode representar o fenômeno, é dado por $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, onde λ, chamada constante de desintegração, é uma constante positiva para cada tipo de substância radioativa e, na equação

[8] Exemplo extraído de Plaat (1974, p. 4)
[9] Exemplo extraído de Batschelet (1978, p. 316).

representa o coeficiente de proporcionalidade. Essa equação matemática é denominada de equação diferencial.

Exemplo 5: Crescimento populacional – modelo de Malthus[10]

Quando se analisa a variação de uma população, animal ou vegetal, num modelo simplificado, o que se observa, é que a diferença entre duas medidas sucessivas desta população é proporcional à quantidade de elementos existentes na primeira medida. Seja P o número de indivíduos dessa população. Esse número é dependente do tempo t, de forma que podemos escrever $P = P(t)$. Analisando essa função, pode-se observar que $P(t)$ assume somente valores inteiros e é uma função descontínua do tempo, chamada função degrau, já que no instante em que ocorre nascimento ou morte, $P(t)$ salta de uma ou mais unidades. Ela permanece constante nos intervalos de tempo onde não há ocorrência de nascimento ou morte.

Considera-se que a proporção de indivíduos reprodutores permanece constante durante o crescimento da população. Admite-se também que as taxas de natalidade n e de mortalidade m sejam constantes. Estas hipóteses são realísticas em uma população grande que varia em condições ideais, isto é, quando todos os fatores inibidores do crescimento estão ausentes (os indivíduos da espécie possuem recursos ilimitados e não interagem com competidores e predadores).

Assim, $\alpha = n - m$ (coeficiente de natalidade menos o de mortalidade) é a taxa de crescimento específico da população $P(t)$, aqui considerada constante. Desta forma, uma equação que pode representar o fenômeno da variação populacional, sob essas condições, pode ser escrito por $\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha$, onde $P(t)$ é a população medida no tempo t e $P(t+1)$ é aquela medida uma unidade de tempo depois, isto é, o tempo varia discretamente.

Essa formulação matemática indica que a variação relativa da população é proporcional à própria população em cada período de tempo. Essa equação, denominada uma equação de diferenças, pode ser reescrita como $P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$. Esse modelo discreto é denominado o modelo Malthusiano, em virtude de ter sido desenvolvido pelo economista inglês T. R. Malthus (BASSANEZI, 2002). Cabe observar aqui, que $P(t)$ pode ser aproximada por uma função contínua e diferenciável desde que o número de indivíduos seja

[10] Exemplo extraído de Bassanezi (2002, p. 331).

suficientemente grande e assim o fenômeno pode ser descrito pela equação diferencial $\frac{dP}{dt} = \alpha P$.

Exemplo 6: Equação do calor[11]

Considere uma haste circular delgada, de comprimento L, com área A da seção transversal conforme Figura 2.2. Suponha que o fluxo de calor dentro da haste se verifique apenas na direção x, que a superfície lateral, ou curva, da haste é isolada, que nenhum calor é gerado dentro da haste, que a haste é homogênea e, finalmente, que o calor específico e a condutividade térmica do material da haste são constantes.

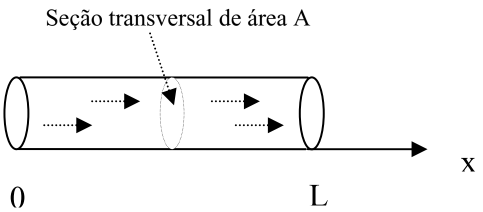


Figura 2.2. Haste circular delgada

Seja u a temperatura medida na haste. A temperatura depende tanto da posição x quanto do tempo t, ou seja, $u = u(x,t)$. Segundo essas hipóteses, a variação da temperatura com relação ao tempo é dada pela equação $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, onde $k > 0$ é a constante positiva denominada difusividade térmica. Essa equação clássica da física matemática é conhecida com equação unidimensional do calor e se refere ao fato de que x denota uma dimensão espacial, enquanto t representa o tempo.

Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo da corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmicas, o crescimento de uma célula, a dinâmica populacional, a interação entre espécies, o controle biológico de pragas, dentre muitos outros, são utilizadas Equações Diferenciais.

Uma equação diferencial é dita ordinária, uma EDO, se a função incógnita depender apenas de uma variável independente (exemplos 1 e 4). Se depender de duas ou mais variáveis independentes será denominada equação diferencial parcial (EDP) (exemplo 6: equação unidimensional do calor).

---

[11] Exemplo extraído de Zill, D. G. e Cullen, M. R. (2001, p. 249).

O exemplo da equação unidimensional do calor foi esboçado com o objetivo de exemplificar uma EDP. O foco desta tese consiste em analisar as possibilidades de ensino das EDO utilizando-se uma abordagem geométrica, auxiliada pelas TIC. Portanto, é esse o conteúdo de equações diferenciais que será evidenciado nesse trabalho e sendo assim, na próxima seção farei uma breve exposição dos conceitos básicos envolvidos.

2.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias – elementos básicos

As equações e os sistemas de equações que surgiram nos exemplos de 1 a 5, descritos na seção anterior, têm uma característica comum. As derivadas envolvidas nos modelos são relativas a uma única variável e, portanto são chamadas de equações diferenciais ordinárias. Uma equação que contém derivadas com respeito a duas ou mais variáveis são denominadas equações diferenciais parciais.

Uma equação diferencial da forma $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ é chamada equação diferencial ordinária de primeira ordem. A denominação 'primeira ordem' refere-se ao fato que somente a derivada de primeira ordem aparece na equação diferencial (exemplos 1 e 4). A equação diferencial ordinária junto com uma condição inicial, $x(0) = x_0$, é denominada um problema de valor inicial (PVI).

Uma equação da forma $\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ é chamada equação diferencial ordinária de segunda ordem (exemplo 3). Assim, a maior ordem de derivação que aparece numa equação diferencial define sua ordem. Uma EDO de ordem n tem como expressão geral $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0$, onde F é uma função de $n+2$ variáveis. Esta equação representa a relação entre a variável independente t e os valores da função incógnita x e suas n primeiras derivadas $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots,$ $x^{(n)} = \frac{d^nx}{dt^n}$. Quando for possível explicitar $x^{(n)}$ nesta equação, teremos $x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right)$ que é denominada forma normal da EDO de ordem n.

Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem é um sistema de várias equações simultâneas da forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(t, x_1, x_2, ..., x_n),\ \frac{dx_2}{dt} = f(t, x_1, x_2, ..., x_n), ...,\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, x_2, ..., x_n).$$

Os exemplos 2 e 3 da seção anterior são exemplos de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

2.1.3.1 O que são as soluções de uma EDO?

De maneira geral, como afirma Machado (1988), as variadas equações correspondem às perguntas que em geral surgem na formulação de problemas a serem resolvidos. Portanto, equacionar um determinado problema é traduzir as perguntas, que devem ser respondidas, em equações. Responder às perguntas formuladas significa resolver as equações. Quando um problema envolve grandezas variáveis e taxa de variação, as equações resultantes costumam ser equações diferenciais. Uma equação diferencial representa uma pergunta do tipo: *qual é a função cuja derivada satisfaz determinada relação?*

Assim resolver uma equação diferencial do tipo $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ é determinar a função $x = u(t)$, definida em um intervalo $I = (a, b)$, tal que $\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t))$, para todo $t \in I$. De modo mais geral, $x = u(t)$ é uma solução de $x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)})$ se $u(t)$ está definida em I e se juntamente com suas derivadas u', u'',..., $u^{(n)}$ satisfaz a igualdade $u^{(n)}(x) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), ..., u^{(n-1)}(t))$, para todo $t \in I$. Portanto, resolver uma EDO, ou ainda, determinar algebricamente sua solução significa encontrar a função $x = u(t)$, definida e derivável até a ordem n em um intervalo I, que satisfaça a equação dada.

Por exemplo, considere o problema de um objeto em queda livre na atmosfera, sem a resistência do ar. Vamos modelar o movimento desse objeto durante um intervalo de tempo. Denotamos por v a velocidade do objeto em queda que varia com relação ao tempo t. A lei física que descreve o movimento desse objeto é a segunda lei de Newton, que diz que a massa do objeto vezes sua aceleração é igual à resultante de forças que atuam nele, ou seja, $F = ma$, onde m é a massa do objeto, a sua aceleração e F a resultante de forças que atuam sobre o objeto. Assim $m\frac{dv}{dt}=-mg$ é a equação do movimento. Uma solução desta EDO é dada por $v(t)=-gt+k$, onde k é uma constante. Se $t=0$, tivermos $v(0)=v_0$, obtemos $v(t)=-gt+v_0$ que é a solução para essa equação que satisfaz a condição inicial $v(0)=v_0$.

Chamamos de solução geral de uma equação diferencial o conjunto de todas as suas soluções. Em geral, nas aplicações, não se procura por todas as soluções, mas sim por soluções particulares que satisfaçam uma dada condição inicial, ou outros tipos de condições complementares.

Conforme já colocamos, em geral, a representatividade de um fenômeno da realidade é diretamente proporcional à complexidade matemática do modelo que o representa. Quando o modelo matemático é uma equação diferencial, nem sempre podemos obter informações ou projeções acerca do fenômeno estudado através da solução explícita desta equação, já que, em uma grande maioria dos casos, as equações diferenciais envolvidas não admitem soluções na forma de uma função analiticamente explícita (BASSANEZI, 2002).

Com o intuito de elucidar o que é uma solução explícita, consideremos o exemplo da procura por resolução de uma equação algébrica $P(x)=0$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau n, isto é, $P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n, a_n\neq 0$. Neste caso, a incógnita é um número e, as operações que definem a equação são as operações algébricas (soma, produto e potenciação inteira). Para resolvermos essa equação, precisamos saber "inverter" as operações algébricas. Caso contrário, não saberíamos sequer resolver as equações $x+a=0$; $ax=b$ ou $x^n=c$. No entanto, isso não é suficiente para o caso geral. Uma solução explícita, nesse caso, seria a obtenção do valor de x por meio de uma seqüência finita de operações algébricas. Galois nos garante que não existe uma 'receita' finita e geral nesses termos para a obtenção das soluções destas equações para grau maior que quatro, usando apenas radicais. Porém, isto não quer dizer que não existam soluções. O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que a equação $P(x)=0$ tem exatamente n soluções no conjunto dos números complexos. E assim, as soluções existem, porém para obtê-las temos que fazer uso de uma seqüência infinita de operações algébricas para obter aproximações da solução procurada.

Retornando ao caso das equações diferenciais ordinárias, a solução desta é uma função de uma variável e as operações envolvidas são as algébricas e a operação de derivação. E, também neste caso, o fato de conhecermos as operações inversas (algébricas e a integração) não nos garante a possibilidade de obtenção de soluções explícitas (resultado de uma seqüência finita de tais operações sobre os dados do problema), por meio das funções elementares usuais (funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas). E neste caso, para obter as soluções faz-se uso de séries infinitas, método que foi desenvolvido no século XVIII (KLINE, 1972).

2.1.3.2 Sempre existe a solução de uma EDO?

Embora tenhamos definido o que vem a ser solução de $x^{(n)} = f\left(t, x, x^{'}, ..., x^{(n-1)}\right)$, uma questão importante que surge, é a seguinte: *essa equação sempre tem solução?* O fato de escrever uma equação deste tipo não significa, necessariamente, que existe uma função $u(t)$ que a satisfaça. Então, como saber se uma determinada equação diferencial ordinária tem solução? Essa é a questão de existência de solução e é respondida pelo Teorema da Existência e Unicidade que garante, sob determinadas condições, a equação tem sempre solução (BOYCE di PRIMA, 2002). Essa preocupação com a existência da solução não é puramente uma preocupação matemática, pois se um problema não tem solução, gostaríamos de saber deste fato desde o início de sua análise para evitar investir tempo e esforço na tentativa de resolvê-lo. Além disso, se um problema físico, por exemplo, está sendo modelado matematicamente por uma equação diferencial, então a equação deveria ter solução, pois caso contrário presume-se que a formulação do problema deve ser avaliada.

Mas se supusermos que uma dada EDO tem pelo menos uma solução, uma segunda questão surge. *Quantas soluções ela tem? Que ou quais condições adicionais devemos especificar para se obter uma única solução?* Essas perguntas se referem à unicidade da solução. Em geral, soluções de equações diferenciais ordinárias contêm uma ou mais constantes arbitrárias, que aparecem nos processos de integração. Por exemplo, $v(t) = -gt + k$ é a solução da equação $\dfrac{dv}{dt} = -g$. Esta equação $v(t) = -gt + k$ representa uma infinidade de funções, correspondendo à infinidade de escolhas possíveis para a constante *k*. No entanto, como vimos na seção anterior, se $v(0) = v_0$ ou seja, se v for especificado em um instante *t*, no caso, $t = 0$, essa condição determina um valor para a constante *k* dada por $k = v_0$. Porém, isto não garante que não possam existir outras soluções desta EDO, para as quais *v* tem o valor especificado no instante *t* dado. Essa questão da unicidade também tem implicações práticas. Se conseguirmos determinar uma solução de um problema dado e se soubermos que este tem uma única solução, o problema é então resolvido. Caso contrário, sabendo da existência de outras soluções, talvez tenhamos que continuar a busca pelas demais soluções.

Uma terceira e última questão que surge é: dada uma EDO na forma $x^{(n)} = f\left(t, x, x', ..., x^{(n-1)}\right)$, podemos de fato determinar uma solução? Se sim, como? Observemos que, se encontrarmos uma solução da equação dada, respondemos, simultaneamente, a questão da existência da solução. No entanto, desconhecendo esta teoria, ou seja, o Teorema de Existência e Unicidade poderíamos, por exemplo, usar um computador e, por meio de uma rotina, encontrar uma aproximação numérica para uma 'solução' que não existe. Por outro lado, mesmo sabendo da existência da solução, pode não ser possível expressá-la em termos das funções elementares, conforme já discutimos na seção anterior. E, infelizmente, essa situação é a mais comum para a maioria das equações diferenciais (BASSANEZI, 2002; BOYCE di PRIMA, 2002).

Porém, em geral, nos cursos de graduação este resultado não impõe nenhuma dificuldade maior aos alunos já que este teorema é trabalhado logo no início da disciplina de uma única vez, e a partir daí buscam-se os métodos analíticos de resolução das equações, já que na grande maioria dos cursos, esta disciplina é basicamente operacional. E, além disso, a maioria dos modelos matemáticos, que são estudados na disciplina, envolve funções que atendem as condições do teorema. No entanto, esse resultado deve ter sua relevância quando o estudo de EDO é proposto, principalmente quando os modelos são analisados por métodos numéricos, onde se busca soluções aproximadas destes e, portanto, ter a garantia de que elas existem é imprescindível.

2.1.4 O ensino de Equações Diferenciais Ordinárias

Em cursos como Biologia, Física, Ecologia e Engenharias, o conteúdo de EDO pode ser ministrado como seqüência do tópico "métodos de integração", ou ainda pode ser ministrado em uma disciplina específica de equações diferenciais. De maneira geral, o ensino desta disciplina, nos cursos de graduação, se dá através da apresentação dos vários métodos de resolução de tipos de equações diferenciais integráveis, com a aplicação de listas de exercícios, as quais podem ser resolvidas pelos métodos apresentados, tornando-o assim um ensino instrumental (MORENO M. & AZCÁRATE GIMÉNEZ, C, 2003).

Segundo Moreno e Azcárate Gimenez (2003), pouco se tem trabalhado com o ensino de modelagem e de aplicações. E que esse fato se deve a dois motivos principais. O primeiro deles está na dificuldade conceitual da modelagem e necessidade de conhecimentos matemáticos dos quais os alunos não possuem, o que leva os professores a se acomodarem com o ensino mecânico e instrumental de métodos de resolução de equações diferenciais.

O segundo motivo, segundo os pesquisadores, consiste na concepção pessoal do professor a respeito da Matemática Aplicada e sua posição no âmbito da Matemática. Alguns professores estabelecem uma clara linha divisória entre a matemática pura – "matemática de verdade", tradicional e "de toda vida" (grifo do autor) e os conteúdos e técnicas próprias da matemática aplicada, dando primazia à matemática pura em relação à matemática aplicada.

Assim, nessa abordagem que privilegia os aspectos algébricos, a ênfase da disciplina consiste na determinação da solução analítica, o que, em muitas vezes, minimiza o processo de modelagem matemática, bem como a interpretação e o comportamento da solução do modelo analisado.

Em vista disso, pode-se agregar ao ensino de EDO a abordagem qualitativa. A expressão "abordagem qualitativa", aqui utilizada, consiste no processo de inferir sobre o comportamento das soluções de uma equação diferencial ordinária, por meio das interpretações geométricas obtidas através dos campos de direções, sem, necessariamente, encontrá-las. Esse método é denominado de Teoria Qualitativa.

2.1.4.1 Abordagem qualitativa no ensino de equações diferenciais ordinárias: campos de direções

Os fundamentos da teoria qualitativa de equações diferenciais foram desenvolvidos, no final do século XIX por Henry Poincaré (1854-1912) e por Alexander Liapunov (1857-1918). Poincaré fez o uso extensivo dos métodos geométricos, a respeito das soluções dos sistemas de equações diferenciais como curvas em um espaço apropriado.

Uma nova abordagem para determinar soluções periódicas de equações diferenciais, que governam o movimento planetário, a estabilidade dos planetas e as órbitas de satélites, foi por ele iniciada. As equações para o movimento dos três corpos não podem ser resolvidas explicitamente em termos de funções elementares conhecidas. Desta forma, o problema da estabilidade não podia ser resolvido examinando a solução analítica, já que esta não podia ser explicitada. Assim, ele sugeriu um método no qual o problema poderia ser respondido examinando-se as próprias equações diferenciais. A teoria, inicialmente, foi chamada de teoria qualitativa das equações diferenciais. Para tal, ele sugeriu as questões:

> O movimento do ponto descreve uma curva fechada? Permanece sempre no interior de certa porção do plano? Em outras palavras, perguntando na linguagem da astronomia, nós podemos questionar se a órbita é estável ou instável? (KLINE, 1972, p.732) [12].

Esta abordagem propicia analisar o modelo por meio de sua própria equação e não através de suas soluções analiticamente explicitadas. Desta forma, criou-se uma teoria geral do comportamento das soluções das equações diferenciais de segunda ordem e com isto foi possível resolver um número de problemas fundamentais na dependência das soluções em parâmetros. Liapunov fundou a teoria moderna da estabilidade do movimento, a teoria da estabilidade. Para um estudo aprofundado do assunto pode-se recorrer a Kline (1972).

Para o entendimento do que estamos chamando de análise qualitativa de equações diferenciais ordinárias, proposta por Poincaré, vamos definir o conceito de campos de direções.

2.1.4.1.1 Campos de direções

Uma EDO de primeira ordem define, explicita ou implicitamente, uma função diferenciável $f : D \to \Re$, onde D é um subconjunto de $\Re^2$. Por exemplo, na equação linear $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3$, a função f pode ser encontrada resolvendo a equação $f(x,y) = y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2y}{x} + x^2$. A Função f é definida em $\{(x,y) \in \Re^2 ; x \neq 0\}$.

No entanto, nosso objetivo aqui não consiste em buscar métodos de resolução da equação e sim definir um objeto que nos auxilia a determinar propriedades de tais soluções sem mesmo calculá-las.

---

[12] Tradução de: Does the moving point describe a closed curve? Does it always remain in the interior of a certain portion of the plane? In other words, and speaking in the language of astronomy, we have inquire whether the orbit is stable or unstable?

Para isto, inicialmente, recordemos do Cálculo que se $y = y(x)$ é uma função derivável em um intervalo aberto $I = (a,b)$ e seja $x_0 \in I$, então $y'(x_0)$ nos dá a inclinação da reta tangente t ao gráfico de $y = y(x)$, no ponto $(x_0, y(x_0))$ (Figura 2.3).

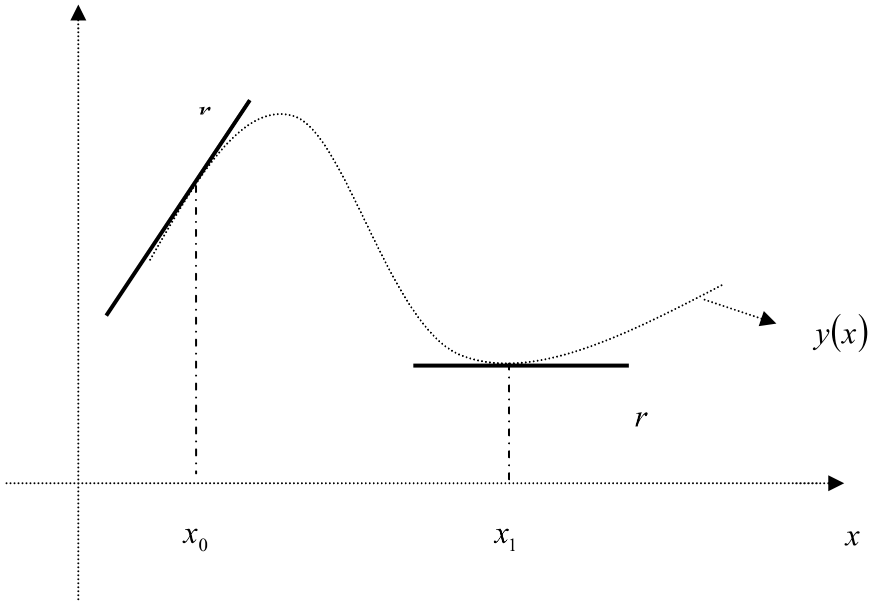


Figura 2.3. Gráfico da função $y(x)$ e da reta tangente r

Portanto, se $y = y(x)$ é solução de $y' = f(x,y)$ definida em um intervalo aberto $I = (a,b)$, então essa equação diferencial fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y(x)$, para todo $x \in I$. Mas se não conhecemos $y = y(x)$, solução da equação diferencial?

Neste caso podemos construir um diagrama que nos auxilie a esboçar o comportamento das soluções $y = y(x)$ de $y' = f(x,y)$ (caso existam), levando-se em consideração que o gráfico de $y(x)$, que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ tem reta tangente neste ponto com inclinação $y_0'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

O campo de direções da equação diferencial é um gráfico da função f no seguinte sentido: para cada ponto $P = (x,y)$ do domínio, f define uma direção de qualquer solução y que passe pelo ponto $P = (x,y)$. Essa direção é representada por um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função f naquele ponto $P = (x,y)$ e cuja origem do segmento é o ponto $P = (x,y)$. Um campo de direções, desenhado em uma malha razoavelmente fina, ou seja, desenhado para muitos pontos do plano, fornece uma boa idéia do comportamento global das soluções de uma equação diferencial. Dessa forma, cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução da equação diferencial ordinária contendo aquele ponto.

Com a finalidade de ilustrar a definição de campo de direções, apresento a aplicação deste conceito na análise do problema clássico da física, um objeto em queda. Esse modelo matemático foi investigado pelos alunos participantes. Esta investigação compõe o episódio “objeto em queda”, e será apresentado e analisado no capítulo de apresentação e análise dos dados, capítulo 4 dessa tese.

2.1.4.1.2 Queda dos corpos: um exemplo

Suponha que um objeto de massa m esteja caindo na atmosfera, próximo ao nível do mar. Suponha ainda, que o objeto cai em queda vertical, influenciado apenas pela ação da gravidade.

De acordo com a Segunda Lei de Newton, tem-se que $F = m\dfrac{dv}{dt}$, onde a função desconhecida é a velocidade vertical v, dependente do tempo t e F é a resultante das forças que atuam no objeto. Neste caso, a única força que atua no objeto em queda é seu peso. Um diagrama de forças, que pode ser utilizado para que os alunos possam entender este modelo que esta sendo construído, é esboçado na Figura 2.4.

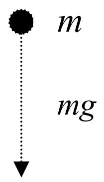


Figura 2.4. Diagrama de forças atuando sobre um objeto em queda livre

Assim, $m\dfrac{dv}{dt} = mg$, onde m, a massa do objeto e, g a aceleração devido à gravidade, são denominados parâmetros. Ou ainda, a equação pode ser reescrita por $\dfrac{dv}{dt} = g$. Esse modelo ignora a resistência do ar. Ele representa a função $f(t,v) = g$. Considerando que $g = 9{,}8\,m/s^2$, temos que $\dfrac{dv}{dt} = 9{,}8$ e assim estamos procurando descobrir curvas $v(t)$ de tal forma que em cada ponto, do sistema cartesiano tv, a inclinação de sua reta tangente seja igual a $9{,}8$, ou seja, estamos procurando determinar uma curva cuja inclinação da reta tangente a cada ponto é constante e igual a 9,8. O ângulo a que esta inclinação corresponde é de aproximadamente 84 graus. Assim, o campo de direções, para este modelo, é apresentado na Figura 2.6 (a). E, a partir desse gráfico podemos inferir sobre as curvas procuradas. Qual seu comportamento? Elas tendem para algum valor constante? Elas tendem para infinito quando o tempo tende para infinito? Que tipo de curva aproxima essas inclinações tangentes?

Se resolvermos essa equação diferencial ordinária, sua solução é dada por $v(t) = 9{,}8t + k$, onde a constante k pode ser determinada pela condição inicial $v(0) = v_0$ e, portanto $v(t) = 9{,}8t + v_0$. E, podemos comparar o comportamento dessa expressão algébrica com a análise do campo de vetores.

Por outro lado, se consideramos a influência da resistência do ar e que esta é proporcional à velocidade do objeto em queda, podemos utilizar um tipo de diagrama para representar as forças que atuam no objeto em queda, conforme ilustrado na Figura 2.5, para que o aluno possa "ver" a questão proposta. A resultante das forças que atuam no objeto é dada por $F = mg - \gamma v$, onde o parâmetro $\gamma > 0$ é chamado coeficiente da resistência do ar. As constantes m e γ dependem fortemente do objeto particular que está caindo e, em geral, será diferente para objetos diferentes.

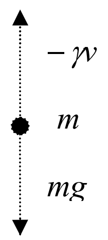
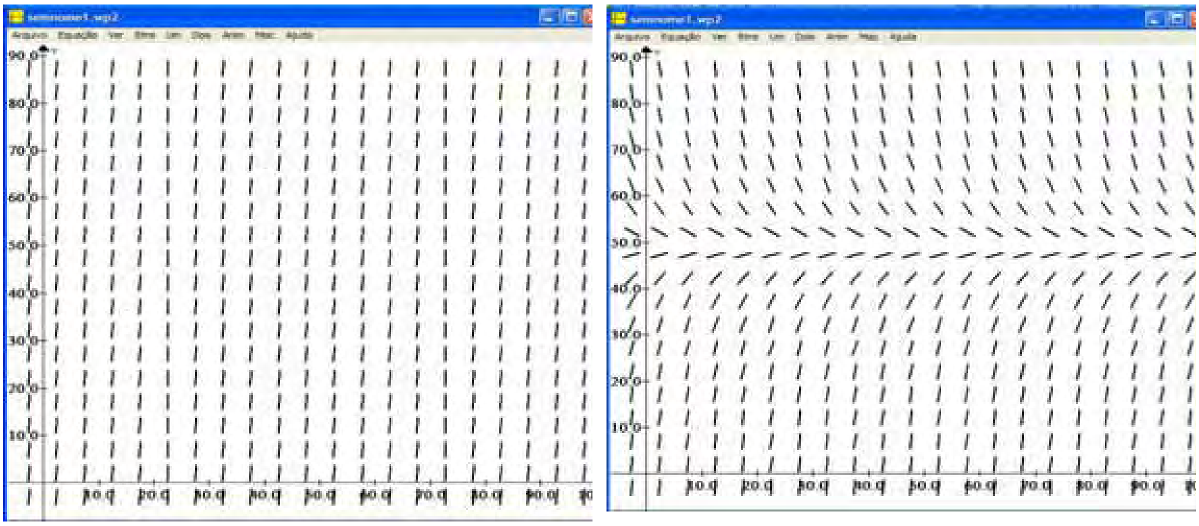


Figura 2.5. Diagrama explicativo para queda livre com resistência do ar

E assim, o modelo matemático, para esta situação, é representado por $m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$, ou ainda, $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v$. Considerando que $m = 10\,Kg$, $\gamma = 2\,Kg/s$ e $g = 9{,}8\,m/s^2$, temos que $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$ e o campo de direções para esse modelo é apresentado na Figura 2.6(b).



(a) Campo de direções de $\dfrac{dv}{dt} = 9{,}8$ (b) Campo de direções de $\dfrac{dv}{dt} = 9{,}8 - \dfrac{v}{5}$

Figura 2.6. Campos de direções gerados no Winplot

Este campo de direções representa a função $f(t, v) = 9{,}8 - \dfrac{v}{5}$. Isto é, representa um conjunto de curvas que a cada ponto (t, v) tem como vetores tangentes esses vetores representados no plano cartesiano. Neste caso, estamos procurando por curvas no plano tv que possuam vetores tangentes, a cada ponto, dado por $9{,}8 - \dfrac{v}{5}$. Por exemplo, para $v = 0$, $\dfrac{dv}{dt} = 9{,}8$ para todo $t \in \Re$. Isto significa que qualquer curva solução que passa pelos pontos da forma $(t, 0)$, tem inclinação 9,8 e, portanto são curvas cujos coeficientes angulares das tangentes nesses pontos são dados por 9,8. Por outro lado, podemos então calcular qual o ângulo cujos coeficientes angulares destas retas tangentes às estas curvas soluções valem 9,8 que é aproximadamente 84,2 graus. Esses vetores tangentes estão representados no gráfico esboçado na Figura 2.6(b). Para $v = 30$, teremos um ângulo de 75,3 graus aproximadamente. Podemos utilizar uma planilha de cálculo para realizar estes cálculos, obtendo a Tabela 1, a seguir.

v	*dv/dt*	*arctg(dv/dt)*	*graus*
0	9,8	1,469107	84,2
5	8,8	1,457645	83,6
10	7,8	1,443287	82,7
15	6,8	1,424784	81,7
20	5,8	1,400061	80,3
25	4,8	1,365401	78,3
30	3,8	1,313473	75,3
35	2,8	1,227772	70,4

40	1,8	1,063698	61,0
45	0,8	0,674741	38,7
50	-0,2	-0,1974	-11,3
55	-1,2	-0,87606	-50,2
60	-2,2	-1,14417	-65,6
65	-3,2	-1,26791	-72,7
70	-4,2	-1,33705	-76,6
75	-5,2	-1,38081	-79,2
80	-6,2	-1,41088	-80,9
85	-7,2	-1,43279	-82,1
90	-8,2	-1,44944	-83,1
95	-9,2	-1,46253	-83,8
100	-10,2	-1,47307	-84,4

Tabela 1 – ângulos dos vetores diretores

A importância dos campos de direções encontra-se, justamente, na compreensão de que cada segmento de reta representado é tangente ao gráfico de uma solução do modelo analisado. Assim, mesmo não tendo resolvido analiticamente o modelo, ou seja, mesmo não tendo determinado qualquer solução e não aparecendo o gráfico de nenhuma solução na figura, podemos fazer deduções qualitativas acerca do modelo.

Observando as Figuras 2.6(a) e 2.6(b), podemos verificar como os dois modelos diferem. Analisando a Figura 2.6(a) podemos concluir que a função velocidade v é crescente para todo t. Porém, observando a Figura 2.6(b), podemos predizer que a função velocidade v tem um valor limitante. Se v for menor que um determinado valor crítico, então todos os segmentos de reta têm coeficientes angulares positivos e a velocidade do objeto aumenta enquanto ele cai. Por outro lado, se v for maior que este valor crítico, os segmentos de reta têm coeficientes angulares negativos e o objeto em queda vai diminuindo a velocidade à medida que cai. Então, qual é esse valor crítico da velocidade? Voltando para a equação $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v$, pergunta-se quais os valores de v que farão com que $\frac{dv}{dt}$ seja nulo? E, assim podemos formular perguntas como:

- Se uma bola for jogada com velocidade inicial de 100 unidades, qual o gráfico que representará a função velocidade?
- Se um pára-quedista saltar de um avião, como será o gráfico de sua velocidade?
- Como os valores de m e γ afetam o campo de direções?

Portanto, o campo de direções pode responder muitas questões sobre uma equação diferencial, sem necessariamente termos determinado sua solução analítica. E, este pode ser facilmente esboçado pelo computador e, em muitas situações, é um primeiro passo bastante útil na investigação sobre uma equação diferencial.

Esta análise qualitativa pode tornar-se mais interessante quando auxiliada pelas mídias informáticas, visto que podemos, através de uma planilha de cálculo, realizar os cálculos dos coeficientes angulares, por exemplo, para esboçar os campos de direções, ou ainda, podemos, com um *software* gráfico, esboçar esse campo de direções, ou ainda, com um *software* algébrico, além de esboçar o campo de direções, pode-se calcular a solução da EDO e compará-la com a análise elaborada por meio dos campos de direções.

2.2 Cálculo, Equações Diferenciais Ordinárias e Tecnologias da Informação e Comunicação

Nas últimas décadas vêm acontecendo movimentos para revitalizar o currículo e o ensino de Cálculo. Tanto em âmbito nacional como internacional existem várias pesquisas sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo com o uso de TIC.

O GPIMEM tem se dedicado a estudar o papel das diferentes TIC na produção de conhecimento matemático. Dentre as pesquisas realizadas por membros deste grupo algumas têm como objetivo investigar diversos aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem do Cálculo. Villarreal (1999), por exemplo, apresenta um estudo que tem como objetivo caracterizar os processos de pensamento de estudantes que trabalham com questões matemáticas de Cálculo em um ambiente computacional.

Araújo (2002) traz um extenso levantamento bibliográfico de pesquisas sobre questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo. A pesquisadora afirma que, em geral, as formas de se abordar os problemas são variados, porém, existe um grande número de trabalhos apresentando o uso de computadores e/ou calculadoras gráficas como uma alternativa para os problemas encontrados ou ainda para analisar os recursos na disciplina de Cálculo.

Já Scucuglia (2006) faz um estudo exploratório sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, a partir de experimento de ensino realizado por duplas de estudantes, auxiliados por calculadoras gráficas. Ele pesquisou como os alunos exploram esse conceito e como eles elaboram possíveis conjecturas para provas ou demonstrações em casos particulares. Ainda, Olímpio (2005) apresenta em sua pesquisa como a produção escrita e as TI trazem novas possibilidades no ensino de Cálculo.

Além desse “mosaico” de pesquisas desenvolvidas pelo GPIMEM, trabalhos como o de Rezende (2003), cita pesquisadores como David Tall, que tem se preocupado com questões que giram em torno das dificuldades encontradas na aprendizagem de conceitos básicos de Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para suas análises epistemológicas. Relata ainda, que na década de 80, do século passado, o matemático Peter Lax mobilizou um movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo, que ficou conhecido como *Calculus Reform*, o qual teve como características básicas o uso de tecnologias, isto é, o uso de softwares computacionais e de calculadoras gráficas.

Em decorrência desse movimento, tem-se observado que o ensino de Equações Diferenciais pode vir a apresentar mudanças. E, esta possível mudança está baseada em dois fatores. Primeiro, com a introdução e uso de computadores e experimentos computacionais no curso básico de Cálculo, os estudantes iniciam o curso de Equações Diferenciais com experiência no uso de computadores e programas computacionais gráficos e algébricos para explorar e resolver problemas matemáticos. Um segundo fator se dá por conta do próprio avanço da ciência dos computadores, o qual propicia uma investigação das Equações Diferenciais voltada mais para o aspecto qualitativo (KALLAHER, 1999).

O estudo qualitativo de equações diferenciais, proposto por Poincaré, em geral, é utilizado na área da pesquisa. Por diversos motivos, já apresentados na seção anterior, a análise qualitativa não é enfatizada nos cursos de Equações Diferenciais. Pelo contrário, a solução algébrica das equações sempre é a mais enfatizada, levando os alunos à memorização de fórmulas com pouco ou nenhum entendimento dos processos que são modelados e da matemática envolvida na resolução desses modelos (KALLAHER, 1999).

E ainda, segundo esse pesquisador, mudanças têm ocorrido, nos últimos quinze anos, impulsionadas pelo avanço dos equipamentos computacionais e softwares matemáticos, tais como o Maple, Mathematica, dentre outros. Essas mudanças nos levam a crer que o ensino de Equações Diferenciais pode ser tomado de um ponto de vista qualitativo, enfatizando o desenvolvimento matemático e os processos envolvidos no modelo. E segundo ele, um ponto positivo da utilização dos computadores e de softwares está na possibilidade que estes propiciam para exploração de equações e de sistemas dinâmicos. Um outro ponto, ainda levantado por Kallaher (1999), consiste em, com a inserção das tecnologias informáticas no estudo de EDO têm-se mais possibilidades de exploração de modelos mais realistas.

Habre (2000) afirma que a disciplina EDO tem passado por importantes mudanças em favor de aspectos visuais e numéricos, mas que existem poucas pesquisas acerca dos efeitos dessas reformas com relação ao entendimento dos alunos quando essa abordagem é utilizada. Segundo ainda este autor, um curso introdutório de equações diferenciais, em geral, consiste basicamente da apresentação de estratégias para determinar fórmulas para soluções, juntamente com a aplicação de inúmeros exercícios elaborados de tal forma que suas soluções possam ser determinadas, como funções elementares, por tais métodos.

Porém, ressalta que esta disciplina também faz parte das grades curriculares de cursos como a Física, a Biologia e as Engenharias, dentre outros, e ao se modelar um problema aplicado por uma equação diferencial, na maioria dos casos, suas soluções não são expressas como funções elementares, isto é, não possuem soluções analíticas. Segundo Hubbard (*apud* HABRE 2000, p. 455), "existe uma alarmante discrepância entre a visão de equações diferenciais como a ligação entre a matemática e a ciência e o curso padrão de equações diferenciais." Afirma ainda, "mesmo quando as soluções podem ser escritas analiticamente, a procura destas, através dos métodos de resolução, freqüentemente oculta a questão central: Como as soluções se comportam?".

Kallaher (1999) acredita que alunos oriundos desta disciplina, onde a abordagem prioriza apenas o aspecto algébrico de resolução das equações, têm pouco entendimento do que representam as soluções em uma situação de aplicação. E, então, sugere que a abordagem qualitativa deve ser adotada para se introduzir um curso de equações diferenciais, ou seja, além das técnicas de resolução analíticas também devem ser utilizados métodos numéricos e idéias geométricas para esboçar soluções aproximadas, onde os alunos possam interpretar e justificar o que vêem.

No entanto, Rasmussen (2001) afirma que existe uma tendência de se introduzir o ensino de EDO com as abordagens geométrica e numérica para analisar o comportamento das equações diferenciais. Ele cita como exemplos dos primeiros livros-texto para estudantes universitários que refletem essas novas direções, os livros desenvolvidos por Artigue and Gautheron em 1983, por David Tall em 1986 e por Tall e West em 1986. Recentemente, segundo ele, exemplos de como métodos numéricos e gráficos podem ser usados para analisar equações diferenciais em um curso introdutório são ilustrados em Revolutions in differential equations de Kallaher (1999) e Special issue on differential equations de West, 1994. Afirma ainda que, essa nova abordagem é também encontrada em vários livros-texto, como por exemplo, em: Differential Equations de Blanchard, Devaney & Hall, 1998; Differential Equations: a modeling perspectives de Borrelli & Coleman, 1998; Differential Equations: a dynamical systems approach, de Hubbard & West, 1991 e An Introduction to Differential Equations: order and chaos de Diacu, 2000.

Apesar de não ser citado por Rasmussen (2001), o livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno de Boyce e DiPrima (2002), em duas diferentes versões, terceira e sétima edição, também apresenta essa tendência de evidenciar os aspectos geométricos. A apresentação do conteúdo nessas duas versões sofreu alterações e a abordagem qualitativa começa ser evidenciada na sétima edição.

No levantamento bibliográfico, não encontrei, no cenário nacional, pesquisas exploratórias sobre questões envolvendo o ensino de EDO com a abordagem qualitativa. Bonafini (2004) desenvolveu uma pesquisa que teve por objetivo analisar como os alunos integram conceitos matemáticos e físicos, com o uso de tecnologias informáticas, mais precisamente com o uso de CBL[13] (Calculator Basead Laboraty) e a calculadora gráfica. Sua pesquisa não tem como objetivo analisar o ensino de equações diferenciais, porém, em uma de suas atividades propostas, os alunos foram levados a analisarem uma equação diferencial ordinária em particular.

Rasmussen (2001), afirma que apesar de alguns livros-texto apresentarem essa nova abordagem, pouco se tem pesquisado e publicado acerca das mudanças ocorridas no contexto do ensino e da aprendizagem desta disciplina. Ele acredita que existe a necessidade de se realizar estudos sobre o entendimento e as dificuldades dos alunos quando os conceitos de equações diferenciais são estudados, com essa abordagem qualitativa. Acredita que essas pesquisas possam dar indícios para uma possível reestruturação curricular desta disciplina. E, esse é o objetivo deste trabalho, buscar entender como os alunos investigam alguns modelos matemáticos, abordando-os qualitativamente auxiliados pelas mídias informáticas.

Até décadas passadas, antes do advento das TIC, essa abordagem geométrica seria menos atrativa por conta das dificuldades de visualização, porém o avanço dos softwares gráficos e algébricos tem propiciado tanto ao docente quanto ao aluno, maiores possibilidades visuais que auxiliam na interpretação e análise. Diante disso, acredito que a formulação dos

[13] O CBL também é um aparelho utilizado para coleta de dados. É um aparelho portátil que funciona com pilhas e, por possuir memória e um microprocessador próprio, é possível utilizá-lo como um dispositivo autônomo na medição de grandezas (BONAFINI 2004).

modelos e a interpretação das soluções ou do comportamento das soluções, através dos campos de direções, são tão importantes quanto às técnicas de resolução das EDO e que este aspecto deve ser trabalhado para que os alunos desenvolvam essa capacidade de análise e interpretação.

No próximo capítulo, apresento os procedimentos metodológicos que sustentaram a investigação aqui apresentada.

Capítulo 3 - Metodologia de Pesquisa

Introdução

Nas diversas áreas do conhecimento, pesquisas são realizadas no paradigma quantitativo ou no qualitativo. No entanto, antes de explicitar qual abordagem utilizada nesta tese, necessito explicitar o que entendo por abordagem qualitativa e abordagem quantitativa como paradigmas de pesquisa. No senso comum quantitativo e qualitativo são tidos como opostos, isto é, enquanto que o quantitativo se preocupa em medir, quantificar um determinado aspecto objetivo acerca das coisas do mundo, o qualitativo se preocupa em qualificar, em atribuir qualidades, tratando de questões subjetivas dessas mesmas coisas. (BICUDO, 2004).

No dicionário Houaiss (2001), o significado do termo qualitativo é dado por "qualitativo é um adjetivo que é relativo à qualidade, que qualifica. Sua etimologia é ligada a qual cujo sentido é de qualidade, natureza das coisas". E assim, já que qualitativo é um adjetivo ligado à qualidade, vamos à procura do sentido deste termo no dicionário de filosofia. O termo qualidade em Abbagnano (2000, p.816) é dado por:

> Qualquer determinação de um objeto. Como determinação qualquer, a **qualidade** distingue-se da **propriedade** [qualquer qualidade, atributo, determinação que sirva para caracterizar um objeto ou para distingui-lo dos outros], que, em seu significado específico, indica a **qualidade**, que caracteriza ou individualiza o próprio objeto, sendo portanto própria dele.

A noção de qualidade é bastante extensa e de difícil redução a um único conceito. Pode-se dizer que a tarefa de definir o que é qualidade nos remete à caracterização de uma família de conceitos, a qual tem em comum a função de responder à pergunta ‘qual?’ (ABBAGNANO, 2000). Segundo Abbagnano (2000), a caracterização em quatro grupos da noção de qualidade, feita por Aristóteles, é considerada a melhor exposição sobre o conceito e é dada por:

1. *Qualidade* como os hábitos e as disposições, sendo o hábito mais estável e duradouro que a disposição. Os hábitos seriam a temperatura, a ciência e, em geral, as virtudes. Já a doença, o calor, a saúde, o frio seriam as disposições.
2. *Qualidade* como capacidade ou incapacidade natural como, por exemplo, lutadores, corredores, sãos e doentes. Esta qualidade foi chamada de ativa pelos escolásticos.
3. *Qualidade* constituída pelas afeições[14], qualidades sensíveis, como por exemplo, as cores, os sabores, os sons e os cheiros. Foram denominadas, pelos escolásticos, de qualidades passivas.
4. *Qualidade* como forma ou determinações geométricas, como, por exemplo, pela figura (quadrado, círculo, etc.) ou pela forma (retilínea ou curvilínea).

Segundo Abbagnano(2000), essas quatro caracterizações elaboradas por Aristóteles são consideradas as melhores já estabelecidas na literatura e se as distanciarmos da metafísica aristotélica, estas podem ser reduzidas em três grupos:

> Determinações disposicionais, que compreendem disposições, hábitos, costumes, capacidades, faculdades, virtudes, tendências, ou qualquer outro nome que se queira dar às determinações constituídas por possibilidades do objeto;
> Determinações sensíveis, simples ou complexas que são fornecidas por instrumentos orgânicos: cores, sons, sabores, etc.;
> Determinações mensuráveis, que se submetem a métodos objetivos de medida: número, extensão, figura, movimento, etc. (ABBAGNANO, 2000, p. 816).

Abbagnano (2000) afirma que essa modificação, acerca da caracterização de qualidade, tornou-a correspondentes à classificação feita por Locke. Isto é:

> (a) são as que Locke incluiu na terceira espécie de *qualidade*: ‘aquelas que todos concordam em considerar apenas como meras capacidades que os corpos têm de produzir certos efeitos, embora se trate de *qualidade* tão reais no objeto quanto as que, para adequar-se ao modo comum de falar, chamei

[14] Segundo Bicudo (2004), “o termo afeição aqui está empregado como afecção, isto é, no sentido de ser afetado por”.

> de *qualidade*, mesmo distinguindo-as das outras pelo nome de qualidades secundárias.
> (b) e (c) correspondem às que Locke chamava, respectivamente, de *qualidades* primárias e secundárias. Assim retificada, a distinção entre as várias espécies de *qualidade* abrange todo o campo das discussões e dos problemas a que deu origem na tradição filosófica (ABBAGNANO, 2000, p. 816).

Segundo, ainda Abbagnano, (2000), as qualidades caracterizadas em (b) e (c) são tradicionalmente distinguidas como primárias e secundárias, respectivamente. Os termos 'primário' e 'secundário' foram colocados por Boyle, mas essa distinção antiga é atribuída a Demócrito e retomada por filósofos como Galileu, Hobbes, Descartes e por Locke, que a difundiu na filosofia européia.

> A base da distinção é a possibilidade de quantificação que as qualidades no sentido (c) têm em relação às do sentido (b): por essa possibilidade, fogem às valorações individuais, mostrando-se independentes do sujeito e plenamente 'objetivas' ou 'reais' (ABBAGNANO, 2000, p. 817).

Essa distinção foi combatida por pensadores como Berkeley que afirmava que nem mesmo as qualidades primárias são objetivas, e que tanto as qualidades primárias quanto as secundárias são subjetivas (ABBAGNANO, 2000).

O conceito de quantitativo, como a possibilidade da medida, foi definido por Platão e Aristóteles que acreditavam que somente o quantitativo era o objeto do saber, como por exemplo, Platão afirmou: "conhece realmente os sons quem não admite que eles sejam infinitos nem procura reduzí-los a um único som, mas conhece a quantidade deles, ou seja, seu número." (Fil., 17ª, 18b apud ABBAGNANO, 2000, p. 818). Então, é nesse sentido que surgem as concepções de pesquisa nas abordagens qualitativa e quantitativa.

Como afirma Bicudo (2004):

> O quantitativo tem a ver com o objetivo passível de ser mensurável. Ele carrega consigo as noções próprias ao paradigma positivista, que destaca como pontos importantes para a produção da ciência a razão, a objetividade, o método, a definição de conceitos, a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa (BICUDO, 2004, p. 103).
>
> O qualitativo engloba a idéia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências (BICUDO, 2004, p. 104).

Sendo assim, pesquisas no paradigma qualitativo surgem como uma possibilidade para investigação. Nesta abordagem, a pesquisa pode ser concebida como uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e exclusivamente com seus princípios, leis e generalizações, mas sim focando nos elementos que se constituem significativos para o pesquisador. Essa forma de compreender a pesquisa leva a não neutralidade do pesquisador em relação à pesquisa, pois ele atribui significado, seleciona o que do mundo quer investigar e conhecer e assim interage com esse mundo e dispõe a comunicá-lo (BICUDO, 2005).

Portanto, podemos definir pesquisa qualitativa como um modelo, uma forma de se fazer pesquisa, onde o foco, o olhar da pesquisa encontra-se nas relações que tem significado para o pesquisador. Então, de forma geral, quando estamos elaborando ou executando uma pesquisa em Educação Matemática, estamos buscando entender as relações que acontecem com os "objetos" de nosso estudo, ancorados em uma perspectiva teórica que sustenta nossa forma de conceber o mundo em que vivemos.

É claro que esta opção pela pesquisa qualitativa traz uma nova tensão nesta pesquisa: o qualitativo que falamos aqui para adjetivar a metodologia de pesquisa é o mesmo que o discutido no capítulo anterior?

Como vimos, os filósofos definiram quatro tipos de qualidade. Filósofos da educação usam uma acepção própria para caracterizar a pesquisa qualitativa e aqui deve ser dito que análise qualitativa do modelo matemático significa buscar propriedades do modelo em análise sem necessariamente procurar sua solução analítica, buscar inferir sobre suas características através da análise geométrica das equações através dos campos de vetores, isto é, interpretar um determinado fenômeno, elaborando assim um modelo matemático que o represente, investigá-lo e compreendê-lo. Assim como na abordagem qualitativa para o ensino de EDO, também no âmbito da pesquisa científica o termo *qualitativo* quer dizer interpretar, compreender, investigar.

Para desenvolver a pesquisa aqui apresentada, que tem como questão central: "Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxilio de Tecnologia de Informação e Comunicação?" foi necessário escolher a abordagem metodológica de pesquisa. Essa escolha deve ser coerente com meus objetivos de pesquisa, com a minha postura de pesquisadora, de professora, enfim, deve haver uma coerência entre os procedimentos utilizados e a minha visão de conhecimento. Alves-Mazzotti (2004, p.160) afirma que "não há metodologias 'boas' ou 'más' em si, e sim metodologias adequadas ou inadequadas para tratar um determinado problema". Desta forma, procuro características desta pesquisa que fundamentam minha escolha metodológica.

Uma dessas características refere-se à origem desta pesquisa; deu-se da preocupação com minha própria prática docente, e mesmo ainda de forma incipiente, me instigou a pesquisar. De acordo com Goldenberg (2001, p. 79):

> Com relação ao tema de estudo, vale lembrar mais uma vez que a escolha de um assunto não surge espontaneamente, mas decorre de interesses e circunstâncias socialmente condicionadas. Essa escolha é fruto de determinada inserção do pesquisador na sociedade. O olhar sobre o objeto esta condicionado historicamente pela posição social do cientista e pelas correntes de pensamento existentes.

E, o fato da pesquisa não estar totalmente determinada a priori, ou seja, questões em aberto foram colocadas e seguiram de guia para o desenvolvimento dos passos seguidos no decorrer do tempo, revelou outra característica marcante do que Lincoln & Guba (1985), chamam de design emergente; tanto o foco da pesquisa quanto os procedimentos metodológicos foram sendo desenvolvidos à medida que fui desenvolvendo a pesquisa. O termo design é entendido como o planejamento da pesquisa, como definido por Alves-Mazzotti (2004, p. 147):

> O design corresponde ao plano e às estratégias utilizadas pelo pesquisador para responder às questões propostas pelo estudo, incluindo os procedimentos e instrumentos de coleta, análise e interpretação dos dados, bem como a lógica que liga entre si diversos aspectos da pesquisa.

Para dar conta da investigação proposta, o design foi sendo construído no desenvolvimento da mesma, com certa flexibilidade, com observação e interação com os participantes da pesquisa. Os instrumentos foram sendo corrigidos e adaptados durante todo o processo de trabalho, visando atingir os objetivos propostos da pesquisa. E, com passos iniciais não muito rígidos iniciamos os procedimentos metodológicos.

3.1. Procedimentos metodológicos

Desde o início da pesquisa, como um dos meus pressupostos, eu acreditava na importância de propiciar um ambiente de investigação o mais próximo possível a uma sala de aula, com todos os elementos peculiares a ela, ou seja, com alunos trabalhando, em duplas, sobre determinados conteúdos, com uma proposta pedagógica, objetivando atingir o estudo desses conteúdos predeterminados.

No segundo semestre do ano de 2005, apliquei atividades envolvendo os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst aos alunos do curso de Ecologia, na disciplina Cálculo II, disciplina na qual eles estudam, dentre outros conteúdos, introdução às equações diferenciais ordinárias. Denotamos esse tipo de atividade como "atividade piloto", na qual o objetivo maior foi verificar se as atividades propostas estavam encaminhadas de tal forma a suscitar discussões nos grupos de alunos. Elas aconteceram em duas aulas de duas horas cada no LIEM – Laboratório de Informática e Educação Matemática. Após esse piloto, essas atividades foram reelaboradas para fazerem parte das atividades que foram desenvolvidas pelos alunos participantes dessa pesquisa.

O cenário da coleta dos dados foi o LIEM, em um Curso de Extensão Universitária oferecido aos alunos do Curso de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da UNESP, campus de Rio Claro, sob a responsabilidade do Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba. No entanto assumi a posição de docente do curso. Sendo assim, minha atuação na pesquisa é como membro participativo e, como afirma Alves-Mazzotti (2004, p. 166) "na observação participante, o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação".

Este curso teve a duração de 36 horas, dividido em 18 aulas de 2 horas cada, às terças e quintas-feiras das 19h30min às 21h30min, no período de 04/04/2006 a 08/06/2006. Ele foi planejado em cinco grandes temas, que denominamos por blocos. O primeiro bloco tem por objetivo identificar uma equação diferencial ordinária, saber o significado de uma solução, de um problema de valor inicial, da existência e unicidade das soluções. O objetivo do segundo bloco consiste em analisar alguns modelos tais como: modelos de crescimento populacional de Malthus, de Verhulst, de aquecimento/resfriamento, dados discretos de um experimento (o resfriamento da cerveja). Já o terceiro bloco tem por objetivo introduzir a abordagem qualitativa de equações diferenciais através dos campos de vetores. O objetivo do quarto bloco consiste em estudar o método de separação de variáveis, bem como comandos do Maple para o estudo de equações diferenciais ordinárias. E finalmente, o bloco cinco consiste em analisar modelos que não possuem soluções analíticas.

Porém, a análise de modelos que não possuem soluções analíticas, bloco cinco, não foi desenvolvida em função do tempo utilizado nas atividades anteriores e também pelo fato que optamos pela realização de seminários dos alunos, acerca de alguns dos métodos de resolução de EDO, que não estava previsto no planejamento do curso.

Para a exploração das atividades foram utilizados os softwares Winplot, Maple, um applet e a planilha de cálculo Excel, além de lápis e papel, mais especificamente, de um caderno, o qual disponibilizei a cada sub-grupo de alunos para que pudessem fazer os cálculos, esboçar os gráficos ou ainda fazer as anotações que julgassem pertinentes durante as aulas. Muitas vezes, em uma mesma atividade, os alunos foram levados a utilizar as várias mídias, coordená-las no sentido de analisar o que encontraram em cada uma das situações e confrontá-las.

Dos nove alunos participantes, oito deles são alunos do curso de Licenciatura em Matemática e um aluno faz o curso de Bacharelado em Matemática. Eles trabalharam, durante todo o curso, em pequenos grupos. Devido ao número impar de participantes, a divisão se deu em três duplas e um trio de alunos.

Esses alunos já haviam cursado, pelo menos uma vez, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real. Esta foi a restrição que fizemos para a aceitação do aluno no curso, já que era necessário que os participantes tivessem noções básicas de derivação e integração.

No início do curso apliquei dois questionários aos alunos. O primeiro deles teve por intuito delinear o perfil dos participantes. Já o segundo questionário foi elaborado com perguntas teóricas do conteúdo específico de equações diferenciais e este mesmo questionário foi aplicado novamente no final do curso, com o objetivo de buscar evidências ou indícios da atuação dos resultados do curso na formação desses alunos.

Com relação aos procedimentos de registros dos dados, foi utilizado, durante as aulas do curso, o software Camtasia[15], o qual captura as imagens da tela do computador, as imagens dos alunos trabalhando no computador, via webcam, bem como suas vozes nas discussões das atividades. Houve, ainda, a filmagem dos alunos trabalhando nos computadores, feita pelo técnico do LIEM[16], que teve por objetivo registrar alguns momentos de discussões dos alunos no decorrer das aulas.

No decorrer do curso, a cada aula realizada, eu anotava em um arquivo os pontos que considerava mais importantes que haviam acontecido naquela ocasião, constituindo, assim, “notas de campo”. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p.150) “as notas de campo são fundamentais para a observação participante”. Por isso, optei por realizar essas anotações a cada aula, pois elas complementam o material que foi obtido pelo Camtasia e pelas filmagens

[15] Desenvolvido e comercializado pela empresa *TechSmith.*
[16] Agradeço ao técnico Geraldo Lima pelo apoio na coleta de dados.

da sala. Esses vários procedimentos de coleta de dados visam possibilitar a realização uma visão mais abrangente e maior confiabilidade dos resultados.

3.1.1. Camtasia

As pesquisas desenvolvidas por membros do GPIMEM são de cunho qualitativo. Essas pesquisas têm, em geral, preocupações acerca da compreensão de fenômenos, de como se desenvolve o pensamento, enfim, do entendimento do objeto investigado. Sendo assim, uma prática bastante comum de coleta de dados, nesse grupo, é a utilização da filmagem do desenvolvimento das atividades. Em geral, elas acontecem com filmadoras com as quais o pesquisador filma duplas de alunos desenvolvendo determinada atividade. A descrição desses procedimentos podem ser encontrados em Benedetti (2003), Scucuglia (2006), Olímpio (2005), Villarreal (1999), dentre outros.

Por outro lado, esses procedimentos de coleta, por meio de filmagens, nem sempre dão conta da total abrangência das situações que ocorrem no cenário de pesquisa. Por exemplo, em um experimento de ensino como os realizado por Scucuglia (2006), no qual as discussões sobre atividades com calculadoras gráficas, de cada dupla, eram o foco da observação, a filmagem, se realizada com uma única câmera, ora registra as ações desenvolvidas na calculdora, ora as expressões faciais dos estudantes e seus gestos. Já Benedetti (2003), que também utilizou experimentos de ensino com duplas de alunos, dispunha de uma infra-estrutura mais adequada. Porém, quando o cenário da pesquisa se aproxima ao da sala de aula usual, como nesta pesquisa, outras questões metodológicas relacionadas à coleta, emergem.

Neste caso, a forma de coletar os dados, e mesmo de analisá-los, ocorreu de maneira diferenciada. O software Camtasia possibilitou o registro de todo o processo de investigação de todos os subgrupos de alunos. Ou seja, capturou as ações realizadas no computador, as imagens dos alunos trabalhando e as falas dos estudantes, simultaneamente, de cada subgrupo de alunos. Assim, nenhum detalhe ocorrido passou despercebido. A Figura 3.1 representa a imagem instantânea da dupla Ronaldo e Viviane no início da atividade campos de direções. Eles estavam com um arquivo de texto aberto na tela, que era composto por 5 equações diferenciais ordinárias e 5 gráficos de campos de direções e era solicitado que eles relacionassem as tais equações com seus respectivos gráficos.

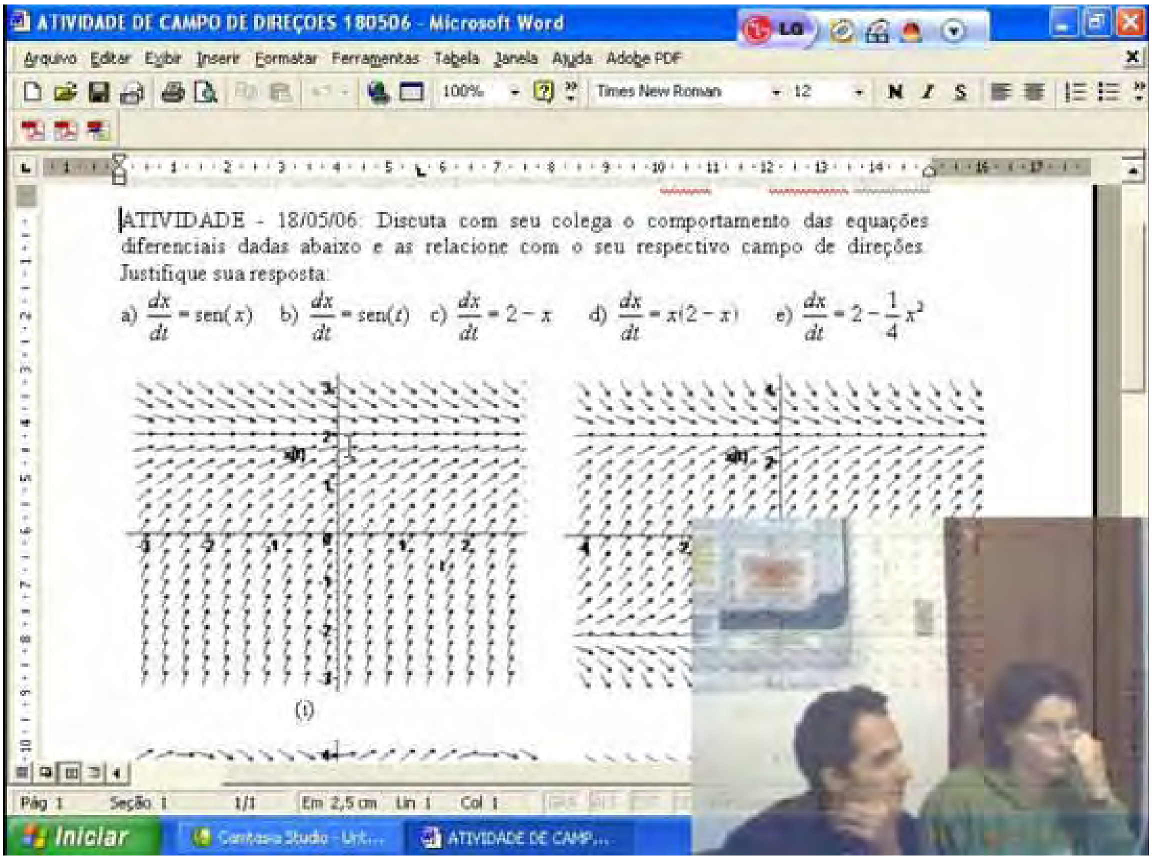


Figura 3.1. Ronaldo e Viviane iniciando a atividade campo de direções

Já a transcrição, dada logo a seguir, é a transcrição literal do diálogo dos alunos na discussão desta atividade. Este trecho de diálogo consiste em uma tentativa de ilustrar como é a natureza dos dados dessa tese.

> *Viviane: dxdt é seno de x, então seno....É assim o seno né? E tem que ver que esse aqui vai ser constante no 2 .* (mostrando um desenho no caderno).
>
> *Ronaldo: Essa aqui no três* (mostrando, com o mouse na tela do computador, o segundo gráfico).
>
> *Viviane: Acho melhor a gente ir vendo onde é constante não é? Nessa primeira ela depende de x.*

Desta forma, pretendo ilustrar as várias interfaces que foram geradas na coleta dos dados utilizando esse software.

3.1.2. As atividades[17]

Com o objetivo de analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem ao se introduzir EDO através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, auxiliada pelas TIC,

---

[17] As atividades estão anexadas no Apêndice desta tese.

elaborei atividades que tiveram por meta propiciar aos alunos a utilização de softwares gráficos e/ou algébricos e um applet[18] como ferramentas para a exploração e investigação de alguns modelos matemáticos e de equações diferenciais ordinárias em geral, buscando interpretar os resultados.

Passo agora a apresentá-las com o intuito de explicitar como essas foram trabalhadas pelos alunos e, portanto como caracterizam-se os dados dessa pesquisa. Estou denominando as atividades de aula, como na ocasião do curso, porém cada uma dessas atividades foi desenvolvida, pelos alunos, em mais de uma aula do curso.

A primeira das atividades proposta a "aula derivada" era encaminhada por uma ficha de trabalho, a qual continha vários gráficos de funções. Era solicitado a análise destes gráficos com relação a intervalos de crescimento, decrescimento, e o esboço do gráfico das funções derivadas dessas funções. Um segundo exercício, ainda desta atividade, consistia de uma questão, na qual era dado o gráfico de uma função derivada e era solicitado que eles esboçassem o gráfico de uma função, cuja função derivada era a dada inicialmente. Essa atividade foi realizada com a mídia "lápis e papel".

A "aula de familiarização" era composta por quatro exercícios, nas quais eram dadas equações diferenciais e funções soluções particulares e era solicitado que eles, usando os comandos do Maple, verificassem se as funções eram soluções das tais equações dadas. Além dessas, existiam ainda, quatro outras questões abertas sobre o conceito do que consistia uma equação diferencial, o que seria resolvê-la, questões do tipo: "Discuta com seu par e escreva o que vocês entendem por uma equação diferencial"; "O que é resolver uma equação diferencial?"; "Como se caracteriza uma equação diferencial ordinária?"; "Que função, você conhece do Cálculo, que é igual à sua derivada? Que sua derivada seja k vezes ela mesma? Escreva cada resposta na forma de uma equação diferencial de primeira ordem com uma solução." e finalmente, "Que função ou funções, você conhece do Cálculo, cuja derivada segunda seja igual a ela mesma? Que sua derivada segunda seja o negativo dela mesma? Escreva cada resposta na forma de uma equação diferencial de segunda ordem com uma solução".

A aula "modelo do objeto em queda" tinha por objetivo explorar a situação de um objeto em queda, analisando-o para chegar ao modelo e a partir deste, usando planilha de cálculo Excel, calcular os ângulos dos vetores dos campos de direções para em seguida

[18] Disponível em: http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math100/notes/mordifeqs/dirfield.html

esboçar no caderno e, na seqüência, utilizando o Winplot, desenhar o campo de direções, comparando com o elaborado “a mão”, e ir à busca da interpretação dos resultados, bem como da busca da resolução algébrica da equação. Também era dado aos alunos um esboço do campo de direções, elaborado no Maple, com algumas curvas soluções para que eles analisassem.

A atividade “o modelo de crescimento populacional de Malthus” teve por objetivo explorar o modelo de Malthus para a dinâmica populacional. Foi trabalhado utilizando o Excel, o Winplot e também um applet. Questões buscando a análise qualitativa do modelo eram propostas. Já na aula “modelo de crescimento populacional de Verhulst” o objetivo era analisar o modelo de crescimento populacional de Verhulst através do campo de direções esboçado pelo Winplot e pelo Maple e, assim, compará-lo com o modelo de Malthus.

O objetivo da aula “campos de direções” foi investigar se os alunos estabeleciam uma relação entre o comportamento das equações e os campos de direções. Essa atividade foi desenvolvida, inicialmente, com “lápis e papel” e em seguida foi sugerido que utilizassem um *software* para comparar as suas análises.

E, finalmente, para a aula “modelo do resfriamento” realizei um experimento, no qual tomei a temperatura da cerveja, contida em uma lata de 350 ml, por determinado tempo gerando assim um conjunto de dados discretos. Solicitei a eles que explorassem esses dados utilizando o Excel para elaborar um modelo que representasse esses dados. Realizei um segundo experimento com condições diferentes de clima, gerando outro conjunto de dados e solicitei aos alunos que analisassem esses novos dados e comparassem com o anterior.

Sendo assim, neste item desta seção, realizei uma breve descrição de como foram encaminhadas às atividades de investigação propostas no curso de extensão, o qual foi o cenário para a coleta dos dados desta pesquisa.

3.1.3. A composição e a análise dos dados

Na primeira aula do curso de extensão, no qual ocorreu a coleta dos dados desta pesquisa, foram aplicados dois questionários aos alunos. Como já comentado anteriormente, o primeiro deles teve por intuito delinear o perfil dos participantes. Já o segundo questionário foi elaborado com perguntas teóricas do conteúdo específico de equações diferenciais e este mesmo questionário foi aplicado novamente no final do curso, com o objetivo de buscar possíveis evidências da atuação do curso na formação desses alunos. Esses questionários estão anexados no Apêndice dessa tese.

Além desses questionários, ao término de cada aula, eu elaborava um resumo dos fatos ocorridos no desenvolvimento das atividades dos alunos. Esses resumos serviram de guia no próprio decorrer do curso para ajustes que se fizeram necessários com relação às especificidades dos alunos e das atividades propostas. Esse resumo, também, está anexado no Apêndice dessa tese.

Os alunos utilizavam, além dos softwares Excel, Winplot e Maple, um caderno no qual eles faziam anotações, realizavam cálculos e esboçavam as representações geométricas solicitadas nas atividades.

No decorrer de todo o curso, os alunos trabalharam, em duplas ou trios, desenvolvendo as atividades propostas, em um computador. Neste equipamento, além dos softwares já discriminados, foi também utilizado o Camtasia. Como já apresentado na seção 3.1.1, este software captura todas as ações realizadas no computador, além das imagens e dos sons dos alunos. Ainda ocorreu a gravação da sala em geral e de alguns momentos de duplas feitas pelo técnico Geraldo Lima, do LIEM-GPIMEM.

Desta forma, os dados brutos desta pesquisa são constituídos pelos questionários, pelos resumos, pelos cadernos de anotações, pelas gravações efetuadas pelo técnico e pelas gravações geradas pelo Camtasia, em cada computador, em cada aula do curso de extensão.

Sendo assim, foi necessário organizar esses dados e, de certa forma, "útil" para esta pesquisa. Entenda-se esse "útil" como um adjetivo que exprima a necessidade de gerar ou explicitar os dados que mais se aproximam da pergunta norteadora da pesquisa "*Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?*".

A partir dos resumos, elaborados no decorrer das aulas, os quais eram compostos pelos fatos que mais me chamaram a atenção, e conjuntamente com a análise inicial dos videoclipes gravados elaborei o que chamo de 'episódios'. Portanto estes episódios configuram os dados desta pesquisa e compõem o próximo Capítulo. Sendo assim, os episódios são 'histórias' que conto a partir dos fatos que aconteceram no ambiente da sala de aula do curso de extensão. Os personagens dessas histórias são os alunos participantes do curso, os softwares geométricos e algébricos que foram utilizados, a pesquisadora-professora, que, por mais que tentou ficar como uma pesquisadora observadora, foi também atuante dos capítulos dessas histórias. Ainda temos mais um personagem nessas histórias; a saber, o software Camtasia, pois, as imagens e as falas por ele capturadas são componentes importantes na análise desses dados, já que possibilitam o resgate, a todo o momento que se julgar necessário, para confrontar os diálogos com gestos, expressões faciais, comentários, etc. Os videoclipes, gerados por esse *software*, trazem uma maneira diferenciada de coleta dos dados e, possivelmente, uma forma diferenciada de análise dos dados, pois temos a possibilidade de ver o caminho que os alunos desenvolveram determinada tarefa no computador, juntamente com suas falas na discussão deste caminho e temos ainda suas expressões faciais. Podemos assim dizer que conseguimos realizar uma triangulação dos dados.

Enfim, esses episódios foram analisados buscando responder à pergunta de pesquisa e essa análise foi confrontada com as anotações das minhas interpretações dos fatos e com as anotações dos cadernos dos alunos, buscando assim realizar a triangulação, o que Araújo e Borba (2004, p. 35) definem como "utilização de vários e distintos procedimentos para a obtenção dos dados".

Desta forma, nesta seção apresentei o que vem a ser abordagem qualitativa no desenvolvimento de pesquisa fazendo uma analogia com abordagem qualitativa no estudo de equações diferenciais. Apresentei também o contexto, os softwares utilizados, como aconteceu a coleta e análise dos dados, enfim os procedimentos metodológicos utilizados nessa pesquisa. No entanto, conforme afirmam Araújo e Borba (2004, p. 41) existe a "[...] necessidade de que haja coerência entre os procedimentos utilizados e a visão de conhecimento." Assim na próxima seção apresento algumas considerações sobre a concepção de conhecimento que sustenta essa pesquisa e que acredito ser coerente com os procedimentos metodológicos adotados em seu desenvolvimento.

3.2. Conhecimento: algumas considerações

Vivemos em um profundo e acelerado processo de mudanças e transformações que têm desafiado as formas de pensar e agir em todas as áreas da atividade humana.

> Novas maneiras de pensar e de conviver estão sendo elaboradas no mundo das telecomunicações e da informática. As relações entre os homens, o trabalho, a própria inteligência dependem, na verdade, da metamorfose incessante de dispositivos informacionais de todos os tipos. Escrita, leitura, visão audição, criação, aprendizagem são capturados por uma informática cada vez mais avançada. Não se pode mais conceber a pesquisa científica sem uma aparelhagem complexa que redistribui as antigas divisões entre experiência e teoria. Emerge, neste final de século XX, um conhecimento por simulação que os epistemologistas ainda não inventariaram (LÉVY, 1993, p. 7).

Uma tecnologia da inteligência é tudo aquilo de que lançamos mão (consciente ou inconscientemente) na nossa comunicação, na elaboração do pensamento, na criação de conhecimentos e que, além de nossos sentimentos e afetos, suportam a nossa inteligência: são as linguagens, os sistemas de signos, os recursos lógicos, os instrumentos dos quais nos servimos.

Pensamos e vivemos sempre com e nas tecnologias intelectuais. Elas fazem parte de nossas vidas, de nossa história e de nossa constituição. Borba e Villarreal (2005) afirmam que nós, seres humanos, nunca pensamos sozinhos, pois nosso desenvolvimento cognitivo é condicionado às mídias ou tecnologias da inteligência (oralidade, escrita e informática). Assim, a inteligência ou cognição são frutos dessa coletividade, não apenas como uma justaposição ou um agrupamento entre humanos e técnicas, mas sim como uma interação entre humanos e as tecnologias da inteligência. O nosso funcionamento intelectual é induzido pelas diferentes línguas e linguagens, sistemas lógicos e de signos que vieram se desenvolvendo com as comunidades que nos precederam. Estas comunidades são, de certo modo, partícipes de nosso pensamento. Elas "pensam em nós" e nós fazemos parte deste universo complexo produzido por elas e, ao mesmo tempo, contribuímos para a continuidade de seu desenvolvimento. A transformação não se dá apenas na transmissão da mensagem, mas também na recepção e interpretação que cada um dará através da mobilidade das relações de sentido.

Segundo Lévy (1993, p.152):

> Diversos trabalhos desenvolvidos em psicologia cognitiva a partir dos anos sessenta mostraram que a dedução ou indução formais estão longe de serem praticadas espontaneamente e corretamente por sujeitos reduzidos apenas aos recursos de seus sistemas nervosos (sem papel, nem lápis, nem possibilidade de discussão coletiva). É possível que não exista nenhuma faculdade particular do espírito humano que possamos identificar como sendo a "razão". Como alguns humanos conseguiriam, apesar de tudo, desenvolver alguns raciocínios abstratos, podemos sem dúvida explicar este sucesso fazendo apelo a recursos cognitivos exteriores ao sistema nervoso. Levar em conta as tecnologias intelectuais permite compreender como os

> poderes de abstração e raciocínio formal desenvolveram-se em nossa espécie. A razão não seria um atributo essencial e imutável da alma humana, mas sim um efeito ecológico, que repousa sobre o uso de tecnologias intelectuais variáveis no espaço e historicamente datadas.

As técnicas de comunicação ilustraram a divisão das culturas em cada tempo, classificadas como: oralidade primária (sociedade antes do uso da escrita) e a escrita. Uma das principais diferenças entre os indivíduos da cultura oral e da cultura escrita é que os primeiros caracterizam-se pela memória viva através de relatos, da narrativa, de mitos; enquanto que o outro grupo objetiva a memória através dos escritos. Na oralidade primária, a memória social era transmitida pelas histórias dos mais velhos aos mais novos e pelos mitos. Com o advento da imprensa foi aberto um espaço para uma série de descobertas, instaurando um novo modelo cognitivo. Textos e números puderam ser comparados e compilados levando à chamada explosão do saber da época da Renascença.

A técnica aparece novamente como agente de transformação através da informática, presente em diversos setores da atividade humana e causando impactos na organização social. O computador permite a velocidade na comunicação, a simulação (através da mostração visual) e a não linearidade do texto (hipertexto). De acordo com Borba e Penteado (2001, p.46).

> Ela [informática] é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação, e em uma "nova linguagem" que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. Neste contexto a metáfora da linearidade vem sendo substituída pela da descontinuidade e pelos dos links que são feitos por cada um que acessa uma dada homepage, ou um dado menu de um software mais tradicional, tal qual aqueles ligados a um conteúdo como geometria ou funções.

Ainda, segundo Lévy (1993), o saber informático não busca manter em um mesmo estado uma sociedade que viva sem mudanças e se deseje assim, como ocorre na oralidade primária, nem visa a verdade, como ocorre nos gêneros canônicos nascidos da escrita. Ele procura a velocidade e a pertinência das modificações operacionais. Na oralidade primária, o coletivo humano era sozinho com sua memória, na sociedade fundada na escrita, existia uma semi-objetivação da lembrança e o conhecimento podia ser em parte separado da identidade das pessoas, o que tornou possível a preocupação com a verdade subjacente, por exemplo, à ciência moderna. Já o saber informatizado afasta-se deste saber "de cabeça" ou ainda, a memória, ao informatizar-se, é direcionada a tal ponto que a verdade deixa de ser uma questão fundamental, em proveito da operacionalidade e velocidade, ou seja, podemos dizer que mais interessa o processo do que o resultado em si.

Esse fim da preocupação com a "verdade", certamente não significa que a partir de agora é permitido mentir, ou que a exatidão dos fatos não mais importa. A questão é apenas uma mudança de foco em algumas atividades cognitivas desempenhadas pelo coletivo social.

Na era da escrita, o livro e a teoria permaneciam no horizonte do conhecimento. Por trás da prática crítica, havia ainda uma estabilidade e unicidade entre a teoria e a explicação correta. Hoje, as teorias, com suas verdades e com a atividade crítica, cedem lugar aos modelos, com suas normas de eficiência e o julgamento de pertinência que preside sua avaliação. Estes modelos não se encontram escritos no papel, mas sim rodando em um computador, continuamente corrigidos e aperfeiçoados ao longo das simulações. Este modelo, denominado por Lévy (1993), de modelo digital, em geral, não é lido ou interpretado como um texto, mas sim explorado de forma interativa. Este autor diz que este modelo é essencialmente plástico, dinâmico, dotado de certa autonomia de ação e reação.

Podemos pensar nas planilhas eletrônicas, como instrumentos de simulação contábil e orçamentária nos escritórios, programas de projeto auxiliado por computador (CAD) como instrumentos de simulação na engenharia e programas de auxílio à tomada de decisão, de um empresário, na simulação de efeitos de escolhas no meio financeiro. No caso específico da Educação Matemática, podemos citar softwares de construções gráficas, destacados por Lourenço (2002), tais como Slogow, Geometricks, Geometer Sketchpad e o Cabri Géomètre, como simuladores para o ensino de Geometria. Enfim, programas que podem ser considerados como simuladores de capacidades cognitivas humanas: visão, audição, raciocínio, etc.

Podemos dizer que a escrita estende as capacidades da memória, por esta razão ela pode ser considerada por Lévy (1993), como uma tecnologia intelectual. Já a simulação e visualização, propiciada pela informática, além de estender a memória de trabalho, funcionam também como um módulo externo e suplementar para a faculdade de imaginar.

A nossa capacidade de simular mentalmente os acontecimentos (o que aconteceria se fizéssemos isto ou aquilo?) nos torna capazes de antecipar as conseqüências de nossos atos. Tiramos proveito de nossas experiências passadas, para modificarmos o mundo que nos cerca. Essa capacidade de simular o ambiente e suas reações, certamente, tem um papel importante em organismos capazes de aprender. Podemos dizer que as tecnologias informáticas reorganizam nosso pensamento (BORBA e VILLARREAL, 2005).

Desta forma, concordo com Borba e Villarreal (2005) que o conhecimento é produzido com uma dada mídia, com uma tecnologia, e é nessa perspectiva teórica que se apóia a noção denominada por esses autores de seres-humanos-com-mídias, na qual se sustenta esta pesquisa que ora empreendo.

Sendo assim, neste capítulo, procurei apresentar os procedimentos metodológicos adotados nessa pesquisa e a visão de conhecimento que a sustenta. Acredito que esses procedimentos utilizados propiciaram a geração de dados dessa pesquisa que tem por objetivo investigar as possibilidades de ensino e aprendizagem de conteúdos de equações diferenciais ordinárias através da abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos, quando desenvolvidos por grupos de alunos interagindo com as tecnologias da inteligência, formando assim o coletivo seres-humanos-com-mídias. E esses dados são apresentados no próximo capítulo.

Capítulo 4 – Os Episódios: apresentação e análise inicial

Introdução

Os dados desta pesquisa são constituídos pelos questionários aplicados aos alunos, pelas anotações das observações no decorrer do curso de extensão, pelos cadernos de anotações que os alunos fizeram no desenvolvimento das atividades e, principalmente, das gravações do desenvolvimento das ações efetuadas pelas duplas e trios de alunos no decorrer do curso, feitas pelo *software* Camtasia, conforme já apresentado no capítulo de metodologia.

As atividades propostas no decorrer do curso de extensão, ambiente de coleta de dados desta pesquisa, estão anexadas no Apêndice dessa tese. Encontra-se também, no Apêndice, um resumo das aulas do curso de extensão, pois ele apresenta uma visão geral do encaminhamento do curso, das atividades e como se deu o processo de organização dos dados, aqui apresentados.

Atividades de familiarização com os softwares estavam previstas para acontecerem no início do curso. No entanto, devido à constatação de que os alunos não tinham essa prática em suas rotinas acadêmicas, ou seja, não era comum a utilização de softwares para exploração de conteúdos matemáticos e, em particular, nunca haviam trabalhado com a planilha eletrônica Excel, o Winplot e o Maple, essas atividades foram estendidas por mais tempo e ocorreram paralelamente às atividades direcionadas aos conteúdos em si. Ou seja, não tivemos aulas somente para aprender os comandos; estes foram sendo explorados conforme iam sendo requisitados nas atividades. Além de atividades direcionadas à familiarização, foram propostos também, investigações do comportamento de funções e de suas funções derivadas e de alguns modelos que tratam dos fenômenos do objeto em queda, de crescimento populacional e da lei do resfriamento.

A partir dos resumos, elaborados no decorrer das aulas, os quais eram compostos pelos fatos que mais me chamaram a atenção, e conjuntamente com a análise inicial dos videoclipes gravados elaborei o que chamo de 'episódios'. Estes episódios configuram os dados desta pesquisa e compõem este Capítulo.

Desta forma, os episódios são 'histórias' que elaborei a partir dos fatos que aconteceram no ambiente da sala de aula no decorrer do curso de extensão. Os personagens que compõem essas histórias são os alunos participantes do curso, os softwares geométricos e algébricos que foram utilizados e a pesquisadora-professora. Ainda temos mais um personagem nessas histórias; a saber, o *software* Camtasia, pois, as imagens e as falas por ele capturadas são componentes importantes na análise desses dados, já que possibilitam o acesso, a todo o momento que se julgasse necessário, aos diálogos com gestos, expressões faciais e comentários dos alunos no desenvolvimento das atividades. Os videoclipes, gerados por esse *software*, trazem uma maneira diferenciada de coleta dos dados e, possivelmente, uma forma diferenciada de análise dos dados, pois temos a possibilidade de ver o caminho que os alunos desenvolveram determinada tarefa no computador, juntamente com suas falas na discussão deste caminho e temos ainda suas expressões faciais.

Os episódios foram elaborados, segundo a minha visão da pesquisa, buscando "responder" a questão central:

Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?

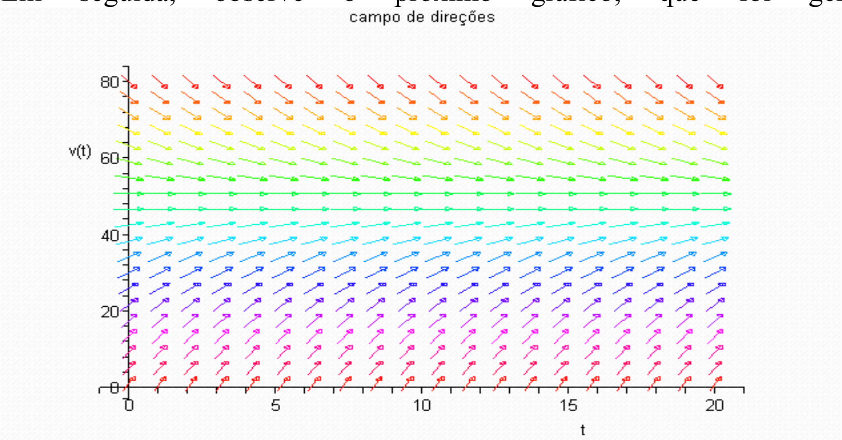
Nas próximas seções apresento os episódios. As transcrições apresentadas são trechos da discussão de duplas ou de trios de alunos. Alguns comentários meus, complementares, serão inseridos entre parêntesis, sempre que se fizerem necessários, para o entendimento da transcrição dos diálogos.

4.1 Episódio - Objeto em Queda

Esse episódio é composto pela discussão da dupla, Marcos e Shen, no desenvolvimento da primeira atividade da “aula modelos”. Trata-se do problema de investigar o comportamento de um objeto em queda, na atmosfera da terra, próximo ao nível do mar, considerando a hipótese de que a força do ar sobre esse objeto é proporcional à sua velocidade de queda. Um modelo matemático que representa essa situação é dado por $m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$, onde $v(t)$ é a função velocidade que varia com relação ao tempo t, m é a massa do objeto, g é a aceleração da gravidade e o parâmetro $\gamma > 0$ é chamado coeficiente da resistência do ar.

Após o texto de introdução do problema, era dado um roteiro para a investigação desse modelo matemático, ilustrado no Quadro 4.1:

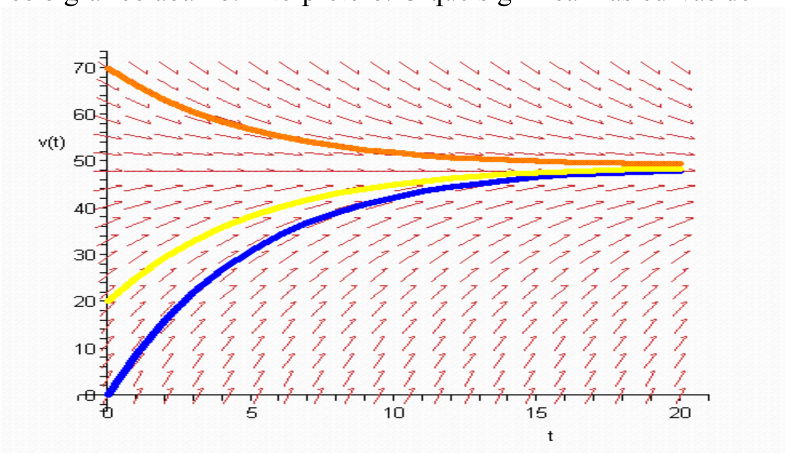
1. Construa uma tabela, em uma planilha de cálculo, atribuindo valores para v, entre 0 e 100, de 10 em 10, e calcule $\frac{dv}{dt}$ e o ângulo correspondente a esse coeficiente angular, usando a função ATAN no Excel e não se esqueça de converter em graus para facilitar o esboço do desenho. Faça um esboço desses segmentos unitários com esses coeficientes angulares, no plano tv, no caderno.
2. Agora, no winplot 2D, entre em Equação, diferencial, dy/dt e entre com a equação 9.8 - (y/5), e clique OK. Em Ver, clique em escala em x e y. Em seguida clique em Pg dn no teclado. O que você observa no gráfico gerado? É semelhante ao que você esboçou no caderno?
3. Em seguida, observe o próximo gráfico, que foi gerado no Maple,



4. O que você observa neste gráfico? Qual a relação deste gráfico com os valores que você obteve na planilha?
5. Qual o comportamento das soluções desta equação? Tende para infinito? Tende para algum valor constante?
6. Utilizando o comando

phaseportrait(D(v)(t)=9.8-(v(t)/5),v(t),t=0..20,[[v(0)=0],[v(0)=20],[v(0)=70]], colour=orange,linecolor=[blue,yellow,coral]);

no Maple, obtemos o gráfico abaixo. Interprete-o. O que significam as curvas de linhas contínuas?



Quadro 4.1. Roteiro da atividade objeto em queda

A dupla iniciou a atividade lendo o texto para entender a formulação do problema e como a equação diferencial foi gerada, conforme ilustra a Figura 4.1.

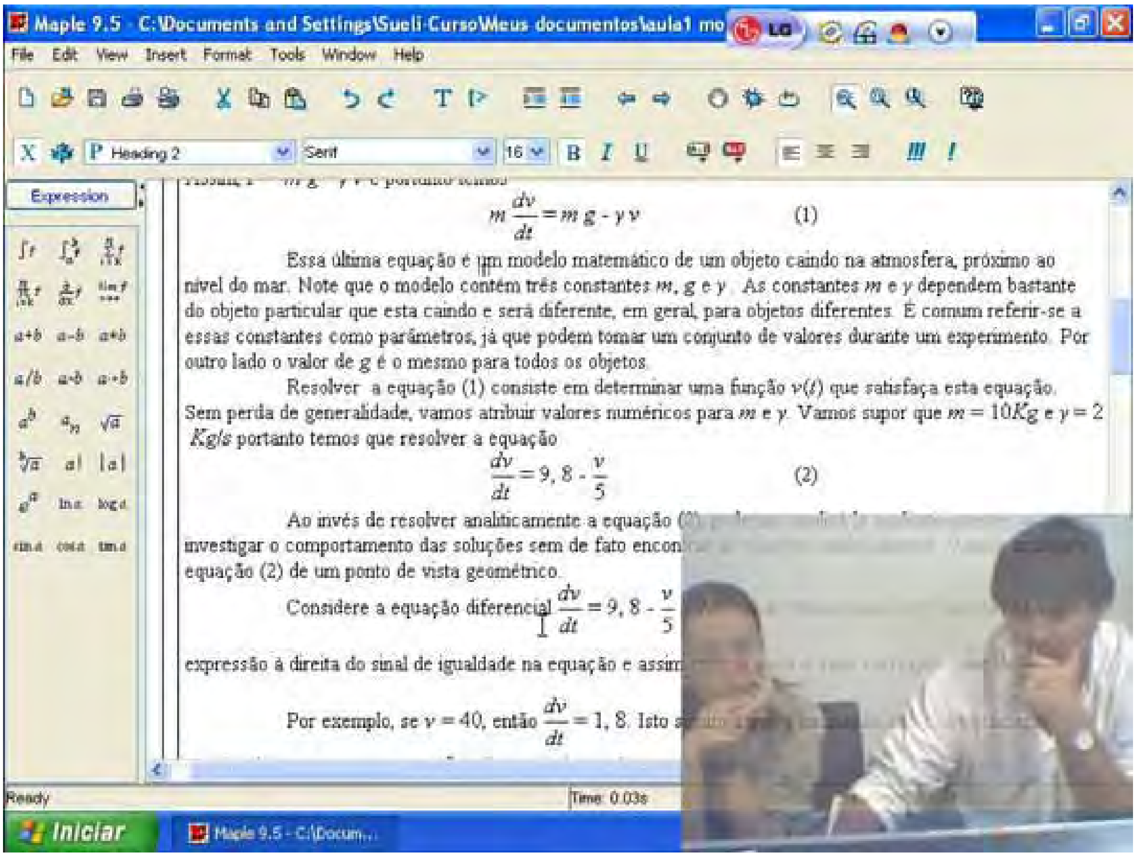


Figura 4.1. Marcos e Shen analisando um modelo – objeto em queda

Os alunos procuram entender a formulação do problema, porém parece que Marcos não estava concordando com a equação diferencial do texto.

Marcos: Essa mdv/dt não é igual a mg em queda livre? (apontando para a igualdade $m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$)

Shen: Isso aqui é a aceleração né?
Marcos: Por que ela não vai ser g? Por causa da resistência?
Shen: Humm!
Marcos: Ah vamos lá... (continuando a ler o texto)

Para a investigação do modelo matemático, sugeri os valores $m = 10\,Kg$, $\gamma = 2\,Kg/s$ e $g = 9{,}8\,m/s^2$ e os alunos atribuiram esses valores na equação diferencial. Shen lançou mão do caderno e lápis, anotou a equação e atribuiu os valores sugeridos. Marcos comenta que os dois membros da igualdade foram divididos por dez e assim Shen observa as contas e concorda que a equação que representa o fenômeno do objeto em queda, segundo as hipóteses assumidas, é a expressão $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$, conforme se pode observar na Figura 4.2.

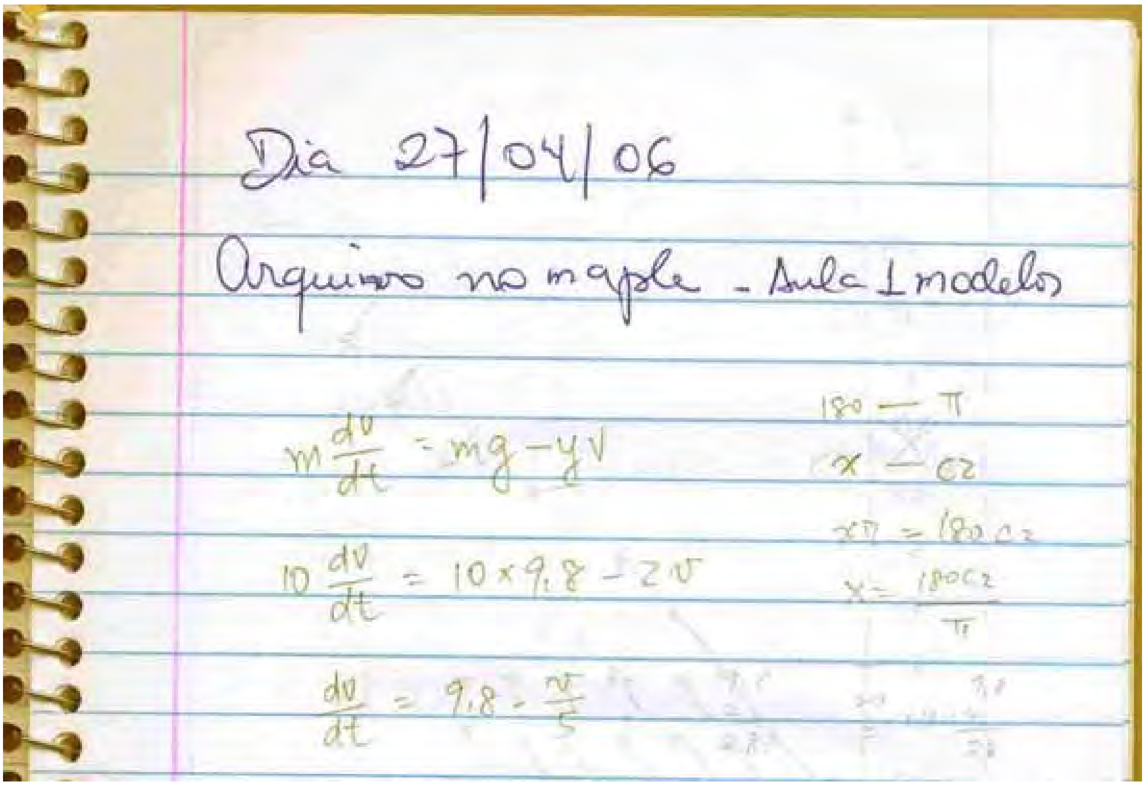


Figura 4.2. Anotações do caderno de Marcos e Shen – objeto em queda

E Marcos continua sua fala afirmando que deve atribuir valores para v.

Marcos: Quando a velocidade for 40, a derivada vai ser 1,8.
Shen: Então aqui quando v for igual a 40 é só substituir e calcular.

No entanto, os alunos ficaram por mais de dois minutos parados observando a frase: *"Podemos representar essas informações graficamente no plano* tv *desenhando segmentos unitários de reta com coeficiente angular 1,8 em diversos pontos ao longo da reta* $v = 40$ *e segmentos unitários de reta com coeficiente angular* $-0,2$ *em diversos pontos ao longo da reta* $v = 50$ *".*

Passado esse tempo, voltam a discutir e comentam:

Shen: Você entendeu isso aqui? (apontando para essa frase) *Eu não!*
Marcos: Podemos representar essas informações graficamente no plano tv*. Qual é o plano* tv*? Tempo por velocidade* (ele mesmo responde).

Shen desliza a barra de rolagem da tela do computador até surgir o gráfico do campo de vetores, dado no texto, na tentativa de entender o que estava interpretando. E Marcos comenta:

Marcos: O que é coeficiente 1,8?
Shen: É positivo e é assim (fazendo um gesto com a mão indicando crescimento).
Marcos: E como é que você transforma em graus? Olha lá em cima para você ver.
Shen: Não sei!
Marcos: Que ângulo corresponde a esse coeficiente angular?

Shen: Ah? 1,8?

Marcos: O que é o coeficiente angular da v? É a tangente. Se a tangente é 1,8, ele quer que a gente faça essa correspondência então, né? Olha lá função atan. Vamos fazer o gráfico ali, põe v, a gente põe dv/dt, de dez em dez. Assim óh! (tomando o lápis e caderno e montou uma tabela com as colunas de v, variando de 10 em 10, dv/dt, coeficiente angular e graus, ilustrado na Figura 4.3).

Shen: Construir uma tabela. Isso!

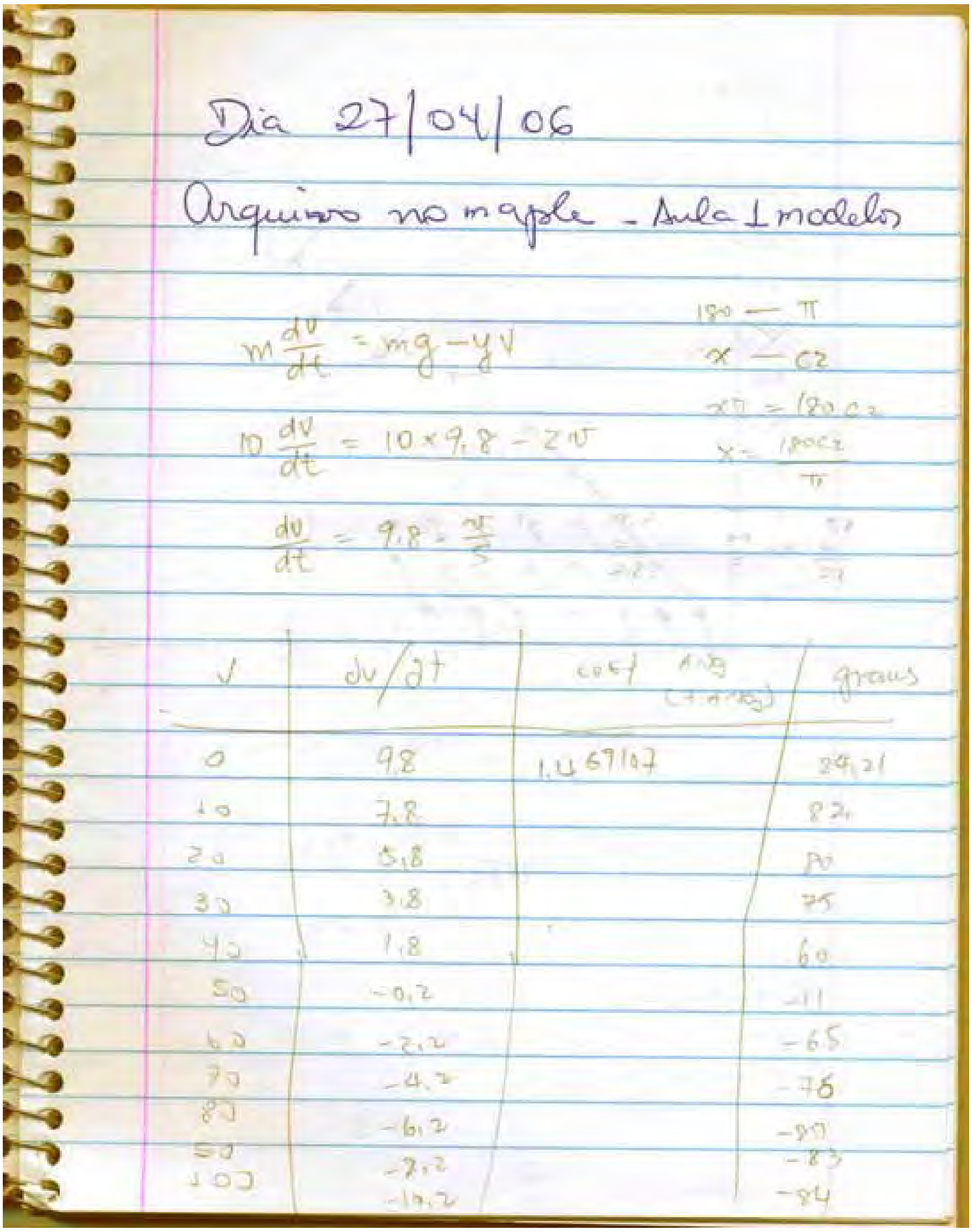


Figura 4.3. Tabela elaborada, no caderno, por Marcos e Shen – objeto em queda

Marcos: Quer fazer no Excel?

Shen: Vamos fazer.

Na planilha de cálculo, na coluna A, entram com valores de v, de 0 a 100 variando de 10 unidades. Na segunda coluna, B, entram com a expressão $9{,}8-\frac{v}{5}$ e denotaram por dv/dt. Ao arrastar a fórmula da célula B2 até B12, obtendo os respectivos valores de dv/dt variando v, Marcos questiona Shen se os valores estão corretos e ela em seguida atribui valores de v igual a zero, dez e vinte, calcula os respectivos valores de dv/dt e os compara com os valores da planilha já efetuados. Em seguida, na terceira coluna eles entram com a função atan(arco tangente) para determinar os coeficientes angulares. Nesse momento eles sentem dificuldade com a sintaxe da função, pois eles utilizando o comando atanB2, esquecendo-se do parêntesis, isto é, deveriam digitar atan(B2). As dificuldades de utilização dos softwares foram, por diversas vezes, um complicador no decorrer das atividades. Os alunos solicitaram minha intervenção sobre a utilização do comando atan. Informei-os da sintaxe do comando e os indaguei sobre a formulação do modelo, perguntei a eles se concordavam que aquela equação diferencial ordinária representava o fenômeno que eles estavam investigando. Marcos, novamente, questiona se o modelo matemático não deveria ser somente $m\frac{dv}{dt}=mg$. E, ele mesmo comenta que se não tivesse resistência do ar, seria somente a força da gravidade que estaria atuando no objeto.

Continuando a elaboração da planilha, utilizaram a regra de três para a conversão, de radianos para graus, dos coeficientes angulares obtidos na terceira coluna da planilha. Ao introduzir a fórmula (180*C2)/3,14, na quarta coluna da planilha, obtiveram o valor aproximado de 84 graus e Marcos questiona Shen se este valor está correto. E faz o seguinte comentário para justificar esse valor:

> *Marcos: 1 radiano e meio, é! Não! Quantos radianos têm? Dois pi radianos têm a... É têm seis radianos né?Concorda? Tem seis radianos, né a bola,..,a esfera,...*(fazendo um gesto circular com mouse, representando o círculo), *a circunferência, então 1 e meio radiano dá quase 90 graus, tá certo, né!.*
> *Shen: Mas e aquele 1,8?*
> *Marcos: 1,8 é sessenta graus. 1,8 é o valor da tangente, quer dizer, um ângulo de um radiano tem uma tangente de 1,8, um ângulo de 60 graus, na verdade isso aqui é o arcotangente* (apontando com o mouse o valor de 1,063698 que esta na célula C6, ilustrado na Figura 4.4).

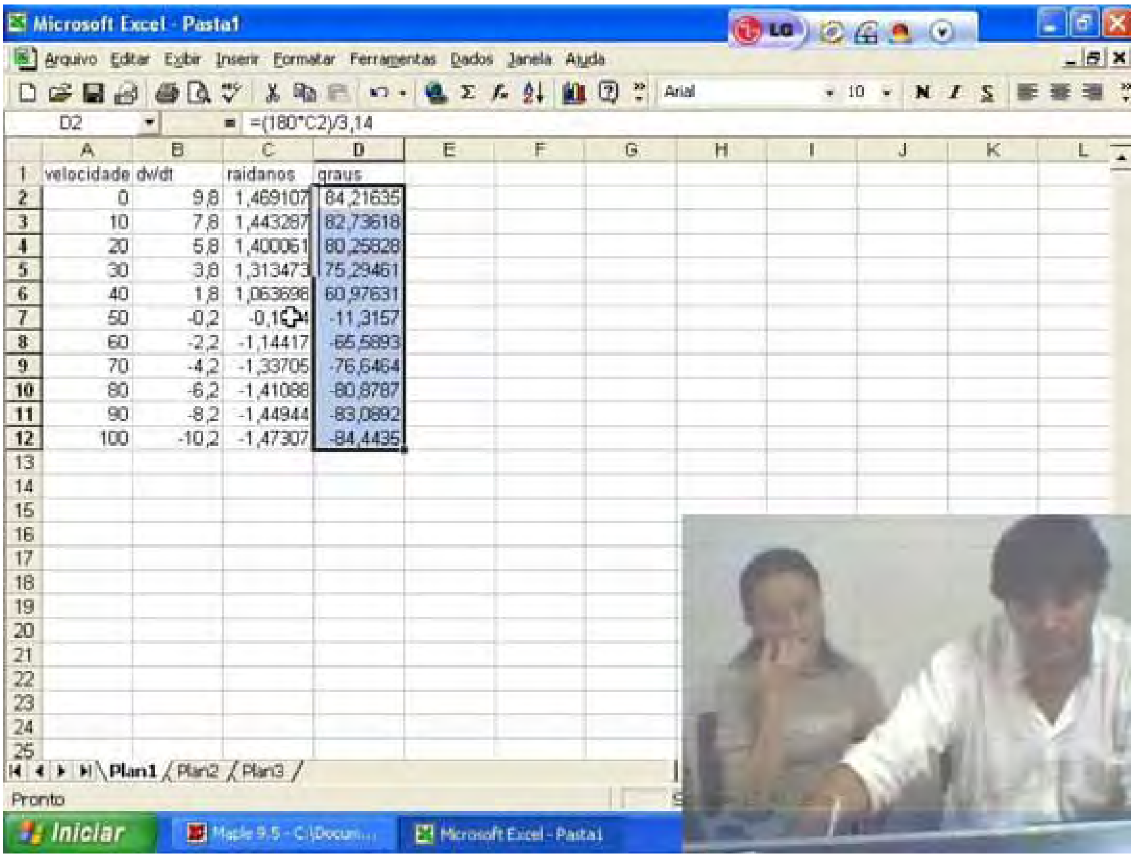


Figura 4.4. Marcos e Shen calculando os ângulos para esboçar o campo de direções

Pode-se observar desse trecho da transcrição do diálogo de Marcos e Shen, a preocupação dos alunos em verificar se os resultados oferecidos pelo *software* estão corretos, questionando o que o *software* dá como retorno das tarefas que eles estão solicitando. Depreende-se desse pequeno exemplo que a utilização do *software*, neste caso, não está substituindo o raciocínio lógico dos alunos, nem seus cálculos efetuados com lápis e papel e muito menos a presença do professor, pelo contrário, a investigação na planilha de cálculo os leva a realizar os cálculos mentais, os cálculos com lápis e papel e a Figura do professor surge como um mediador na atividade. Outro ponto a destacar são as relações que Marcos faz com conteúdos anteriores já estabelecidos na busca desse novo conceito, como por exemplo, em sua justificativa do ângulo de 84 graus. A interatividade entre os alunos com o *software* é outro ponto importante em investigações como esta.

Com os valores dos ângulos calculados, eles esboçam, no caderno, alguns vetores no plano tv. A Figura 4.5. ilustra esse esboço.

Figura 4.5. Campo de direções esboçado por Marcos e Shen – objeto em queda

Neste momento a dupla solicita a minha atenção para participar da discussão da conjectura que eles estavam elaborando. Ao analisarem o esboço feito no caderno (Figura 4.5), eles concluíram que a solução procurada deveria ter o comportamento próximo a uma parábola, como é possível observar em um trecho do diálogo, transcrito abaixo:

> *Sueli: Esse campo de vetores que a gente está montando, ele vai estar dando o comportamento de um curva,[....] Tem um comportamento que esta dando ai por trás.*
> *Shen: A gente estava imaginando que ia ser uma parábola.*
> *Sueli: Vai ser uma parábola?*
> *Marcos: Uma não, uns...*(queria dizer que dariam várias parábolas)
> *Sueli: Será que são parábolas... que vai dar?*
> *Marcos: Capaz que sim.*
> *Sueli: Talvez se a gente tivesse desenhado mais, mais vetorzinhos ai, vocês, se você completar, para cada linha que você desenhou aqui um único vetorzinho,* (mostro no esboço do caderno a necessidade de desenhar mais vetores para definir o comportamento), *será que vai dar uma parábola mesmo o comportamento?*
> *Marcos: Ela vai ter um ponto de máximo aqui.*

Sugeri que analisassem a variação dos valores dos graus obtida na planilha com relação à velocidade dada, independente do tempo. Porém, a discussão não avançava, pois acredito que o esboço dos vetores era insuficiente e, sendo assim, sugeri que seguissem o roteiro da atividade e utilizassem o Winplot para desenhar o campo de direções, já que o conceito do campo de direções já estava, aparentemente, claro para a dupla e somente sua representação geométrica é que estava incompleta.

Marcos e Shen geraram um gráfico do campo de vetores que ainda não estava representando o que eles queriam analisar. A janela gráfica esboçada pelo *software* era no domínio de -4 a 4, nos dois eixos cartesianos, e a velocidade atribuída na planilha variou de 10 unidades no intervalo de 0 a 100. Sendo assim discutimos a situação e, utilizando-se do zoon, pelo comando pg dn e redefinindo a escala dos eixos cartesianos, eles ajustaram a janela para o domínio que os interessava, gerando o gráfico ilustrado na Figura 4.6.

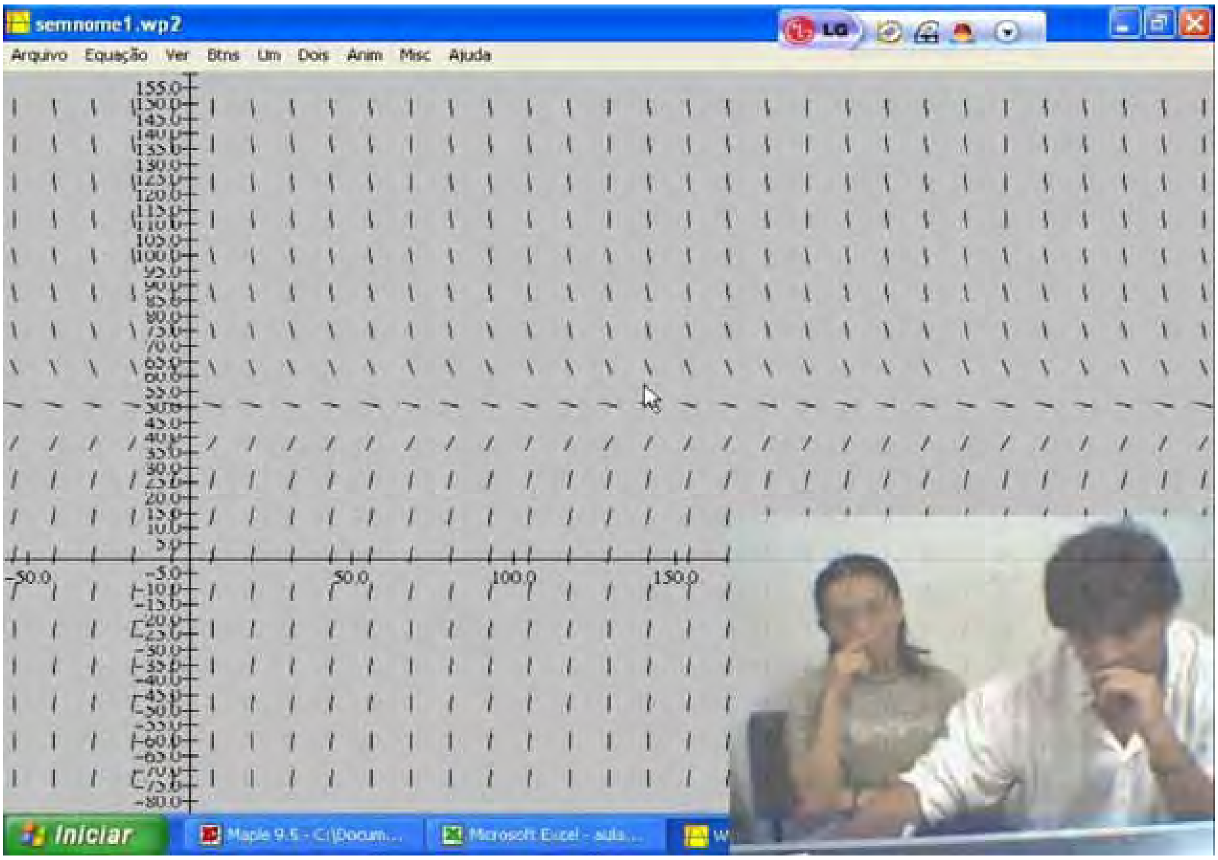


Figura 4.6. Marcos e Shen analisando o campo de vetores gerado no Winplot

Após esta investigação, retomamos a conjectura que a dupla tinha no início da discussão, como mostra o trecho do diálogo, transcrito abaixo:

Sueli: O que está acontecendo com este gráfico? Está parecido com o que vocês fizeram?
Shen: Mais ou menos.
Sueli: Mais ou menos? Será que vai ter cara de parábola como vocês estavam..., como vocês imaginaram que teria?(ficam um tempo em silêncio.) *O que está acontecendo com esse e com o que vocês tinham? Bom, os dados estão próximos com o que vocês acharam no Excel?*
Marcos: Estão, 80. (se referindo aos ângulos encontrados dos vetores).

Continuei argumentando com eles sobre os resultados encontrados na tabela do Excel e o esboço dos vetores no Winplot. A discussão prossegue relacionando os valores encontrados na tabela e o campo de direções, até o momento onde eles conseguem refutar a idéia inicial de que a curva solução teria o comportamento de uma parábola e, principalmente Marcos, começa a questionar qual seria então a curva procurada, até chegar a suspeitar que o comportamento poderia ser de uma função exponencial assintótica, resultado esse que foi confirmado na aula subseqüente, na continuidade desta atividade, quando resolvemos analiticamente a equação diferencial. O trecho abaixo ilustra essa passagem:

Sueli: Esse comportamento está parecido com o que vocês estavam fazendo aqui? Se você fosse desenhar com o mouse uma curva que sai do ponto (0,0), ou seja, se eu soltar um objeto com velocidade inicial zero, o que acontece com a velocidade dele?
Marcos: Aumenta.
Sueli: Aumenta sempre? Segundo as condições (que assumimos) *ai. Ela vai aumentar sempre?*
Shen: Não.
Marcos: Até aquela força que a resistência do ar conseguir anular, não é? É aquela força que a resistência do ar conseguisse anular, né?Porque ela é em função da velocidade e a velocidade está aumentando.
Sueli: E se o peso dele fosse igual à resistência do ar?O que aconteceria com essa velocidade então?
Shen: Zero
Marcos: Ficaria constante.
Sueli: Será que seria zero?
Marcos: Uma constante.

Em seguida, Marcos questiona o comportamento dos vetores com inclinações negativas, na região do gráfico, esboçado na Figura 4.6, para valores de velocidade maiores que 50m/s. Se naquela região a curva seria constante. Então lhe perguntei como seria o comportamento de uma curva solução com condição inicial de 100m/s.

Sueli: Ai então, digamos que você saísse com uma velocidade inicial de 100m/s? Se você saísse com uma velocidade inicial de 100m/s?Como seria uma curva que teria esse comportamento dos vetores? Será que a parábola?
Shen: Aqui assim. (Shen mostra com o mouse uma curva parecida com o gráfico de uma função exponencial assintótica).
Marcos: Vai dar ln esse treco aqui, logaritmo?
Marcos: Exponencial não pode ser.
Sueli: Por que não pode ser exponencial?
Marcos: E aqui? Isso é exponencial também?
Marcos: Quer dizer que isso ai vai dar uma coisa e elevado a ou a elevado a?É que nos estamos viciados, o modelo que a gente está pensando é sem a resistência do ar, a gente está viciado lá na física, lá trás, por isso que nós estamos.
Sueli: Se eu não tiver lá o menos gama v, ai eu vou ter outra solução, exatamente.

Marcos: Eu já estava querendo ir com o gabarito na mão, por isso... (risos)

Continuando a investigação, eles deveriam analisar o gráfico dado no item 6 do roteiro esboçado no Quadro 4.1. A transcrição do trecho do diálogo dos alunos consiste na discussão do que vinham a ser as linhas contínuas são apresentados a seguir:

Sueli: Quem são essas curvas que estão desenhadas em azul, amarelo e vermelho?
Marcos: São as equações que satisfazem lá.
Sueli: São equações?
Marcos: As equações não, é o gráfico das funções que satisfazem aquela equação diferencial lá.
Sueli: Então essa azul seria o que?
Shen: Do v de zero igual a zero, aquela condição lá.
Sueli: E a amarelinha?
Shen: v de zero igual a 20.
Sueli: E essa abóbora?
Shen: v de zero igual a 70
Sueli: Então o que são essas três linhas contínuas aí? Só repetindo o que vocês estão falando.
Marcos: São soluções da equação diferencial.
Shen: É.
Sueli: E as soluções representam o que? Para esse modelo que vocês estão analisando, de novo?
Shen: A função de velocidade.
Sueli: A função velocidade desse objeto caindo em relação ao tempo.
Marcos: Quer dizer que se eu jogar ela com essa velocidade aqui (mostra, no gráfico a velocidade de 49m/s) *ele não vai mudar a velocidade, vai ser constante?*
Sueli: Se você jogar exatamente com essa velocidade inicial, ela vai ficar o que?
Marcos: Uniforme
Shen: Ela vai cair com velocidade constante.

Marcos e Shen finalizam a atividade respondendo as questões do roteiro, conforme a análise que eles fizeram a partir do campo de direções. Eles não resolveram a equação diferencial solicitada no item 4 do roteiro. Na continuidade da atividade, elaborei juntamente com os alunos do curso, a resolução da equação diferencial envolvida na atividade.

Esse episódio tratou da descrição do desenvolvimento da investigação de um modelo para o fenômeno de um objeto em queda, realizada pelos alunos Marcos e Shen. Buscando elementos que possam dar indícios a questão desta pesquisa, evidenciei os trechos que mais se aproximam da problemática das possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através do estudo de alguns modelos matemáticos abordados qualitativamente com o auxilio das tecnologias da informação e comunicação. Os temas que emergem da análise deste episódio podem assim ser resumidos: a importância do desenvolvimento do processo de modelagem matemática, pois ficou evidente na discussão da dupla a necessidade de retornar às hipóteses assumidas inicialmente para entender a equação diferencial ordinária elaborada; a coordenação das várias mídias utilizadas, já que os alunos esboçavam seus rascunhos, cálculos, gráficos no caderno, no *software* e os comparava; a elaboração e verificação de conjecturas, já que a dupla inicialmente acreditava que a curva solução procurada era aproximada por uma parábola e concluiu, após a análise do campo de vetores juntamente com os valores dos ângulos obtidos na planilha, que se tratava do comportamento de uma função exponencial assintótica. E, finalmente, a interação entre os alunos e as mídias, possivelmente, propiciou discussões e reorganizações de conceitos, e podemos até arriscar que propiciou a elaboração de novos conceitos com relação às equações diferenciais ordinárias, já que muitos dos alunos nunca haviam estudado essa disciplina, até então.

4.2 Episódio - Modelo Populacional de Malthus

Atualmente, em dinâmica populacional, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante (progressão geométrica ou crescimento exponencial), e desta forma, a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição. Assim, o modelo de Malthus propõe um crescimento de vida "otimizada", sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, em que todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento. Portanto, o modelo malthusiano pode ser escrito como $\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$, onde a constante r é chamada taxa de crescimento ou declínio, dependendo se é positiva ou negativa. A equação de crescimento exponencial modela uma população cuja taxa de crescimento é proporcional ao seu tamanho presente (BASSANEZI, 2002).

A atividade de investigação sobre esse modelo matemático foi desenvolvida por todos os participantes do curso, porém o processo de desenvolvimento da atividade feita pela dupla, Ronaldo e Viviane, é que será objeto de análise e, portanto, compõe o episódio – Modelo Populacional de Malthus, tratado nessa seção.

Essa atividade tem por objetivo investigar a elaboração de um modelo matemático para o fenômeno de crescimento populacional e explorá-lo com as várias mídias. Para essa investigação, sugeri que os alunos considerassem $r = 1$ na equação diferencial $\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$. E, portanto eles investigaram esta equação diferencial seguindo um roteiro, o qual pode ser ilustrado no Quadro 4.2.

1. Construa uma tabela para valores de p e $\frac{dp}{dt}$.
2. Esboce, em uma folha de papel, o gráfico de campo de direções, no sistema cartesiano tp.
3. Agora no Maple, utilize os comandos:

with(DEtools):dfieldplot(diff(p(t),t)=p(t),p(t),t=0..10,p=0..10,title=`campo de direções com r=1>0`,color=p,arrows=large); para desenhar o campo de direções e compare com seu esboço.

4. Observe esse campo de direções e responda:
   a. O que podemos afirmar das soluções desta equação?
   b. Qual o comportamento para essas soluções quando t tende ao infinito?
   c. Esse modelo é um "bom" modelo para o crescimento populacional?
   d. Agora resolva analiticamente essa equação e compare sua solução com o campo de direções que você esboçou. O comportamento que você analisou através do campo de direções é coerente com essa solução que determinou?
5. Entre no site:

http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math100/notes/mordifeqs/dirfield.html

e, analise o que está acontecendo, qual a relação com o gráfico gerado no item 3?

Quadro 4.2. Roteiro da atividade – Modelo Populacional de Malthus

Ronaldo e Viviane discutem sobre a equação, dada no texto, que modela o fenômeno em questão. Eles iniciam os passos sugeridos pelo roteiro, porém, como se pode observar na transcrição de um trecho de diálogo, os alunos não concordavam com o modelo proposto. Ficaram um tempo bastante extenso na discussão de como seria a equação que deveriam utilizar.

Viviane: Acho que tem que fazer no Excel né?
Ronaldo: É p?(inserindo esse símbolo na primeira coluna da planilha).
Viviane: É! E dp/dt (inserindo esse símbolo na segunda coluna da planilha). *p é o que mesmo?*(ela indaga).
Ronaldo: p é o crescimento.
Viviane: É a população, não é?
Ronaldo: Nem fala aqui. (referindo-se ao texto do roteiro)
Viviane: Olha aqui (retornando ao texto) *o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante. Então é a população. Mas por que?* (referindo-se aos valores que deveriam atribuir para p na tabela que estavam elaborando).
Ronaldo: Ah volta lá (no texto do roteiro).
Viviane: Será que não tem nenhum dado ai?
Ronaldo: Ah vamos inventar uns valores ai. Aqui é t, né? É? (referindo-se a segunda coluna da planilha, onde tinham colocado dp/dt).
Viviane: Que t?
Ronaldo: Ah tempo!
Viviane: Mas a gente não tem esse tempo.
Ronaldo: Ah inventa, de 1950, a população era...

Viviane: Mas oh, considere a equação diferencial acima com r=1, $\frac{dp}{dt} = p$ *.* (referindo-se novamente ao texto) *Então as duas tabelas vão ser iguais, acho. Aqui dp/dt é igual p não é? Não é?* (referindo-se agora às colunas da planilha para a variação de p e dp/dt)
Ronaldo: Não sei. Não tem sentido.
Viviane: Quer ver oh. (voltando para o texto)
Ronaldo: Proporcional ao seu tamanho presente.
Viviane: Vamos considerar a equação acima com r=1, a taxa de crescimento. Então acho que nós vamos considerar... Essa equação que a gente vai ter que trabalhar (referindo-se a equação $\frac{dp}{dt} = p$).
Ronaldo: É p de t né, p em relação ao tempo, então tem que ter t ai também?
Viviane: Mas não pode usar na tabela o tempo, acho! Você lembra da outra hora a gente só usou o v (referindo-se ao modelo matemático investigado na atividade do objeto em queda).
Ronaldo: É! Por quanto aqui? 100?(referindo-se a variação de p na planilha, no entanto ele apaga e coloca de 10 a 60, variando de 10 unidades). *E agora?* (referindo-se a segunda coluna que representa dp/dt)
Viviane: Agora mesma coisa não é? dp dt é igual a p! Não é? É sim Nardo!
Ronaldo: Estranho!
Viviane: Ta aqui oh! (voltando ao texto do roteiro da atividade) *Ih! Eu nem lembro como faz isso mais, acho que não é isso não!* (e apaga a segunda coluna da planilha e continua a falar). *Só que lá a gente tinha uma expressão para dv dt que era 9,8 menos v sobre 5, por isso tinha que calcular!*
Ronaldo: É que lá tinha outras variáveis, tinha a gravidade, tinha não sei o que, não sei o que. Agora você só tem a população mesmo.
Vivane: Então vai ser o p mesmo?
Ronaldo: Ele fala olha só, r p t, onde r é a taxa de crescimento ou declínio. A equação de crescimento exponencial, hum!
Viviane: Modela uma população cuja taxa de crescimento é proporcional ao seu tamanho presente.
Ronaldo: Então é ele que... ou não?

Neste instante, Viviane retorna a leitura do trecho onde diz: "*cuja taxa de crescimento é proporcional ao seu tamanho presente*" e com o cursor do mouse ela aponta a equação diferencial $\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$ comentando, "*então a taxa de crescimento é isso aqui*", apontando para o lado esquerdo dessa equação, ou seja, para $\frac{dp(t)}{dt}$ e continuou: *"a variação é proporcional do tamanho presente"* apontando o cursor do mouse para a igualdade e para o lado direito desta equação.

Já Ronaldo comenta que a função exponencial modela o fenômeno e diz que esta equação que estão analisando não tem nada de exponencial. Viviane pondera se não seria o nome do modelo e ele diz que não, que função exponencial é usada para trabalhar com problemas de população e ainda, para confirmar sua conjectura faz um gesto com a mão para convencer Viviane que a função exponencial tem uma variação grande para pequenos espaços de tempo, característica própria desta função.

Parece que os alunos estavam fazendo certa confusão entre um modelo que representa o fenômeno, através de uma equação diferencial ordinária, com sua solução, uma função exponencial, o qual também é um modelo representante do fenômeno. Ao resolvermos analiticamente a equação $\frac{dp}{dt} = p$, obtém-se $p(t) = p_0 e^t$, onde $p(0) = p_0$ é a população inicial.

Porém, ele não estava se referindo à solução desta equação diferencial como uma representação matemática para o fenômeno do crescimento populacional e sim à equação diferencial como um modelo, no qual a variação da população é proporcional à função exponencial da população presente. Justifico essa afirmação apoiada no fato de que ele elaborou uma tabela de variação de *p* por *exp(p)* (comando da função exponencial na planilha) e, na seqüência esboçou um gráfico de dispersão, através da opção “pontos conectados por linhas suaves”, desta tabela na própria planilha.

No entanto, a interpretação realizada pelos alunos acerca das informações contidas no gráfico não faziam sentido com aquilo que eles esperavam obter. Entendo que isso ocorreu devido a dois motivos: o primeiro deles é que, desde o início da atividade, Ronaldo esperava trabalhar com um modelo que envolvesse dados da população no decorrer do tempo e por isso ele insistia em modelar a variação da população por uma função exponencial; o segundo motivo é devido à representação do gráfico, por eles gerado que é ilustrado na Figura 4.7.

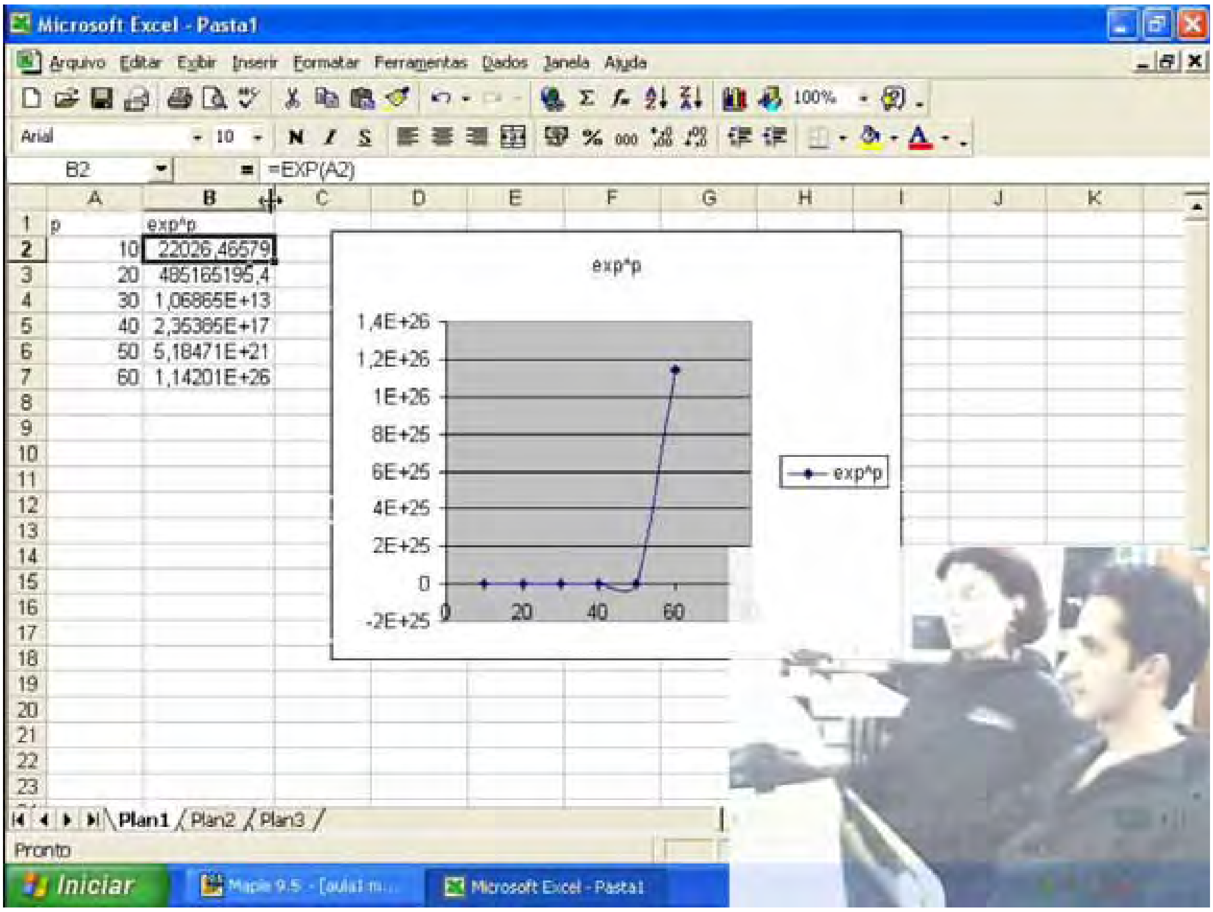


Figura 4.7. Ronaldo e Viviane analisando o gráfico de dispersão de p por exp(p)

Na tabela a população variou de 10 unidades no intervalo de 10 a 60, e ele esboçou, através do comando do Excel - dispersão (conectando pontos por linhas suaves), os pontos da forma e^p, os valores obtidos que variavam da ordem de 10^3 à 10^{26}. Essa variação era muito acentuada para um intervalo tão pequeno, de 10 a 60 e, portanto, o *software* esboçou em uma escala que eles não interpretaram. Além disso, o gráfico gerado, por conta das especificidades do *software* para esse comando, forneceu como resposta um gráfico "errado", visto que é o gráfico de uma função exponencial e, portanto sempre positiva. Porém, os alunos não comentaram nada sobre esse fato, somente Ronaldo comenta que a população cresceu de forma descontrolada, quando usou a expressão "*a população bombou*". O gráfico obtido não possibilitou avanço em suas expectativas com relação ao modelo. Abandonaram esse gráfico, voltaram para o texto do roteiro e permaneceram por mais de cinco minutos nesse trecho do texto, e parece que não ficaram convencidos da equação diferencial utilizada, porém, mesmo assim, retornaram às tarefas solicitadas. Elaboraram uma tabela para $\frac{dp}{dt} = p$ e utilizaram a função grau(atan(dp/dt)) (comandos da planilha eletrônica) para determinar os graus dos campos de direções.

Ao interagirem com a planilha por eles elaborada, Viviane comenta que iria atribuir o valor zero para a população e Ronaldo a questiona sobre o fato de atribuir o valor nulo para uma população; porém não discutem sobre o fato e ela desiste, parece que ficou constrangida por acreditar que estava propondo algo que talvez estivesse errado. Ela atribui valores altos para a população tais como 1000, 15000, 100000, (Figura 4.8). Ronaldo comenta que "*estacionou*" querendo dizer que os valores dos ângulos estavam muito próximos e Viviane observa que os ângulos tendem para 90 graus.

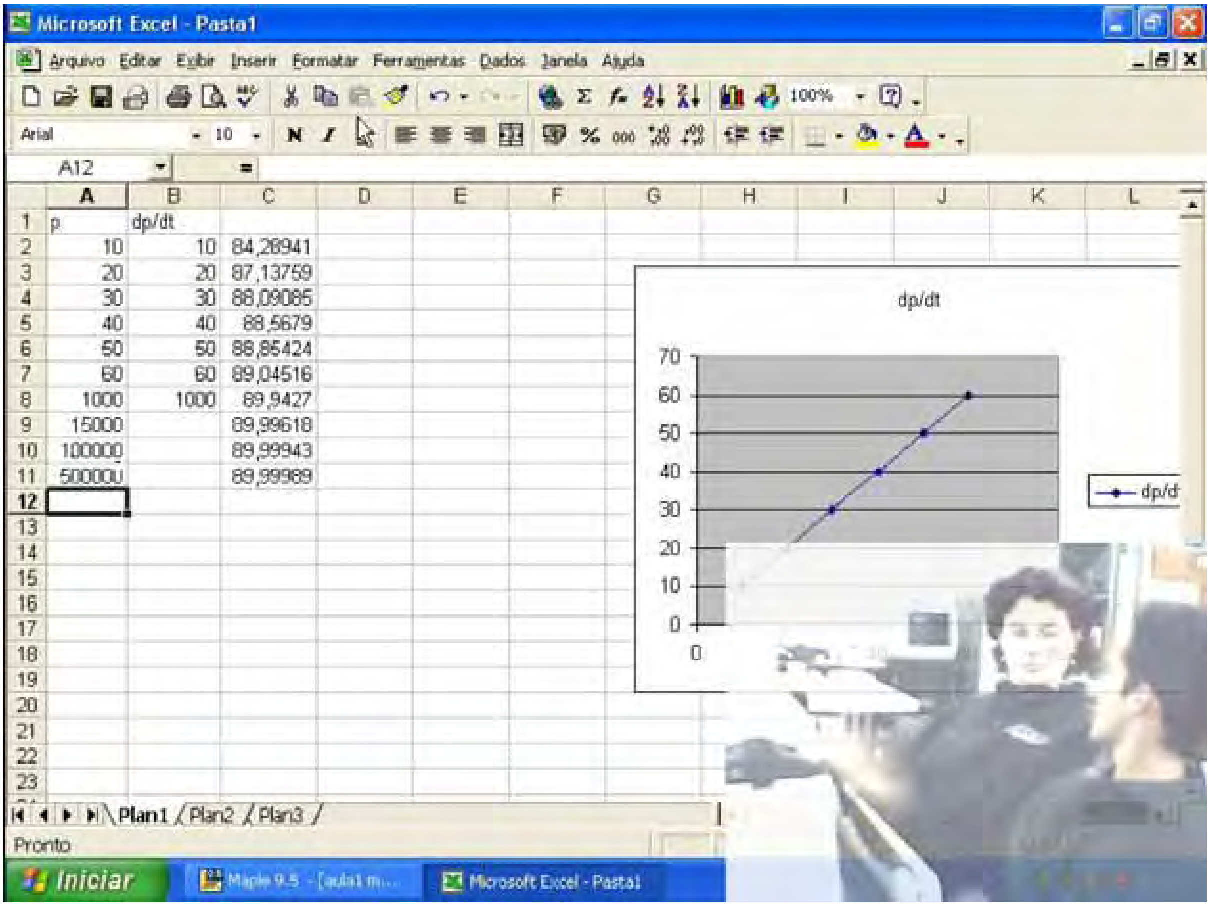


Figura 4.8. Roteiro da atividade – Modelo Populacional de Malthus

Como não conseguiam avançar solicitaram minha presença. Viviane questiona se a equação diferencial, que era dada no texto, deveria ser utilizada. Ronaldo pergunta se o que deveriam fazer era aquela tabela (Figura 4.8) por eles elaborada. Sua pergunta reforça o fato já mencionado anteriormente, de que ele não estava convencido com o modelo de Malthus. A transcrição de um trecho do diálogo dos alunos juntamente com a pesquisadora, ilustra esse fato:

Viviane: Oh Sueli, aqui óh! É para gente usar essa equação aqui? (referindo-se à $\frac{dp}{dt} = p$).

Sueli: Sim.

Viviane: Ah ta! Tá vendo Nardo, nada haver com função exponencial.
Ronaldo: Não! A tabela é assim?
Viviane: p, dp/dt é p não é?E aqui é atan, em graus?(Mostrando com o cursor do mouse as colunas da tabela na planilha).
Ronaldo: É isso?
Sueli: Por que você acha que está com cara de exponencial? Você acha que está com cara de exponencial?
Ronaldo: É!
Viviane: E tende para 90.
Sueli: Qual que é no Cálculo a função que a derivada é ela própria?
Ronaldo: e!
Sueli: Então a solução desta equação diferencial tem que ser o que?
Viviane: Exponencial.
Ronaldo: Ah! Eu sabia que tinha a exponencial.

Analisando somente esta última transcrição, que consiste de um trecho do diálogo dos alunos com a pesquisadora, têm-se a impressão que Ronaldo estava analisando a solução através dos ângulos calculados, no entanto, analisando-a juntamente com a transcrição anterior, antes da intervenção da pesquisadora, pode-se perceber a confusão que Ronaldo fez com a equação diferencial ordinária $\frac{dp}{dt} = p$ como um possível modelo para o fenômeno analisado e com a solução desta equação diferencial, uma função exponencial. Na minha interpretação essa confusão, está ligada com um conceito anterior que o aluno tinha, ou seja, um pré-conceito por ele já concebido. Ele entendia que a função exponencial modelaria o comportamento de uma população, segundo as condições assumidas inicialmente. Isso não deixa de estar correto. Porém, seu equívoco foi assumir que a variação da população era proporcional à função exponencial da população, como já observado nessa seção. Ou seja, confundiu a equação diferencial que modela o fenômeno com sua solução.

Ao retornar para o roteiro da atividade, Viviane propõe inverterem a ordem das tarefas, passando para a elaboração do esboço do campo de direções, através dos comandos do Maple, e depois retornariam ao esboço do campo de direções no caderno. Ao esboçar o gráfico utilizando os comandos do Maple (Figura 4.9) Ronaldo observa que este gráfico é diferente daquele que eles haviam esboçado no Excel e que este estaria ao contrário do outro.

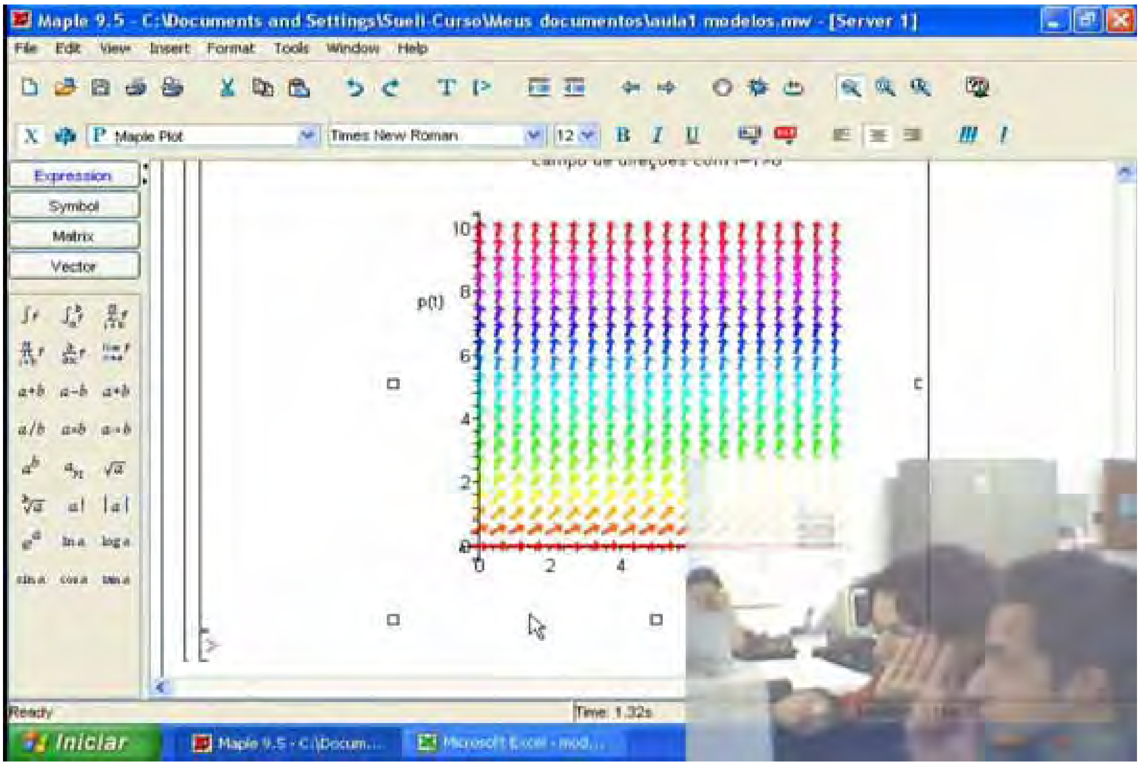


Figura 4.9. Ronaldo e Viviane analisando o gráfico gerado pelo Maple

Na planilha de cálculo, eles inseriram um gráfico de dispersão através do comando dispersão (pontos conectados por linhas suaves), obtendo o gráfico de graus(atan(p)) por p, ou seja, eles não esboçaram o campo de direções, eles esboçaram o comportamento dos ângulos determinados, conforme pode-se ver na Figura 4.10.

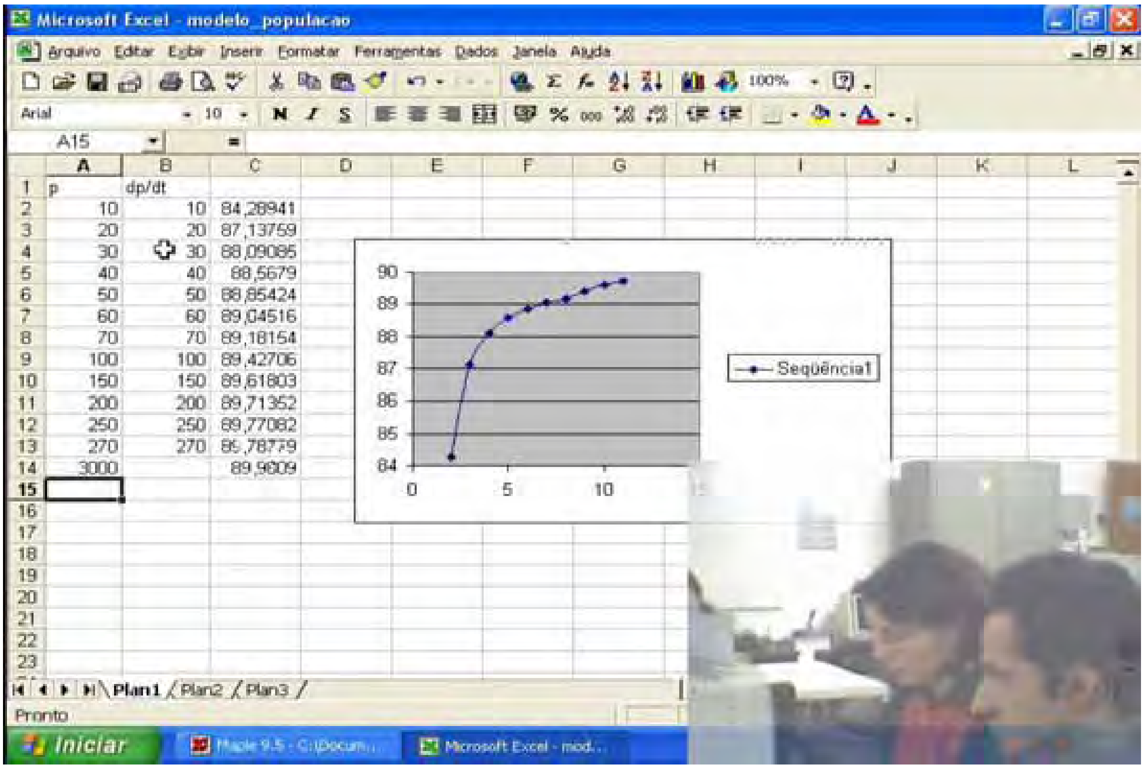


Figura 4.10. Ronaldo e Viviane calculando os ângulos para esboçar o campo de direções

Até esse momento do desenvolvimento desta atividade, analisando os diálogos dos alunos, fica evidente que eles ainda não haviam consolidado o conceito de campos de direções e o que se pode obter de informações sobre a equação diferencial ordinária através deste. Isto é ilustrado pela transcrição abaixo de um trecho do diálogo dos alunos acerca do comportamento do modelo que estavam investigando, a partir da análise do gráfico esboçado na Figura 4.10.

> *Viviane: E agora o que tem que fazer?*
> *Ronaldo: Volta lá. É constante.* (ele comenta apontando com o cursor do mouse a solução trivial p=0)
> *Viviane: Óh mais vai dar sim Nardo! Ta vendo?Vai ficar assim.* (com o cursor do mouse ela esboça o desenho de uma curva parecida com a exponencial definida pelos vetores tangentes com condição inicial $p(0) = 0{,}4$ unidades).

No entanto, ao responder a questão "Observe esse campo de direções e responda: O que podemos afirmar das soluções desta equação?" ela afirma: *"Não sei, a gente não achou a solução ainda"*. E assim retomam a planilha do Excel para esboçar o campo de direções no caderno.

> *Viviane: Então tem que ver agora aqui. Isso aqui está em que? Em graus né?Então tem que ser essas inclinações aqui.* (referindo-se à terceira coluna da planilha ilustrada na Figura 4.10).

Viviane comenta, novamente, que os ângulos tendem a 90 graus e que o gráfico vai ser esboçado no sistema cartesiano *t* por *p*. Ronaldo relembra que *p* é a população que varia segundo a tabela ilustrada na Figura 4.10. Ela pergunta o que acontece quando a população for zero. Ronaldo atribui o valor zero para a população na planilha e verifica que o ângulo formado também é zero. Ela volta ao gráfico ilustrado na Figura 4.9 e comenta que lá foi aplicado no zero, que poderia considerar uma população com zero unidade de indivíduos e Ronaldo comenta que esta seria constante. Ele ainda questiona o que seria o *t*, se era tempo, qual a unidade de tempo? Percebi que eles discutiam a formulação do problema durante todo o desenvolvimento das tarefas dessa atividade. E, juntos vão considerando os ângulos calculados para as várias populações. Finalmente, esboçam o campo de vetores no caderno (Figura 4.11) e passam a discutir como seria o comportamento das soluções procuradas para este modelo.

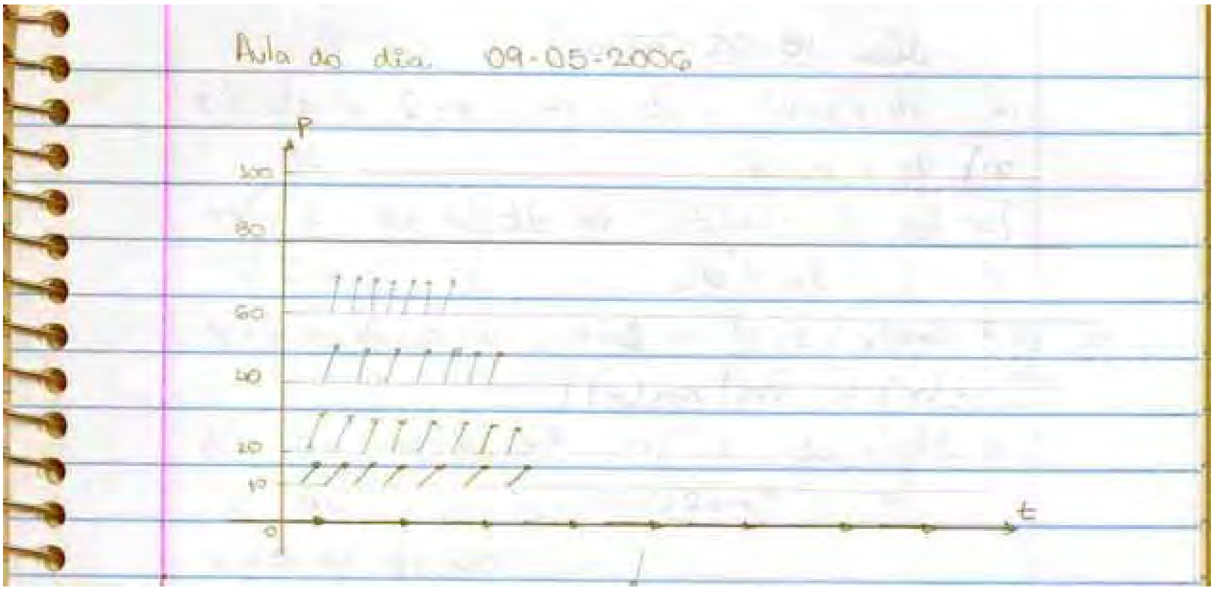


Figura 4.11. Campo de direções esboçado por Ronaldo e Viviane – Modelo de Malthus

A transcrição de um trecho desse diálogo mostra a análise dos alunos:

Ronaldo: Vamos analisar o gráfico?... Então, vai chegar uma hora que ela vai estabilizar?
Viviane: Vai ser assim né? Assim oh! (neste momento, ela faz um gesto com a mão desenhando no ar). *Tipo uma exponencial.*
Ronaldo: Tá, mas ela vai ser sempre crescer?
Viviane: Ah vai! Vai sempre tender a 90, a inclinação. (comparando com os dados da tabela). *Mas cada vez mais ela vai se aproximar da constante, ta vendo?Ela vai se aproximar mais de 90.*

E voltando à pergunta "O que podemos afirmar das soluções desta equação?" com um tom de dúvida em sua voz ela responde "*que cresce exponencialmente!? Que são exponenciais!? É ou não?*" E com certo ar de dúvida a dupla responde no texto do roteiro: *"As soluções se comportam como uma função exponencial".* A segunda *pergunta* "qual o comportamento para essas soluções quando t tende para infinito?" leva os dois alunos a ficarem em silêncio por alguns momentos analisando o gráfico do campo de direções ilustrado na Figura 4.9. Viviane comenta que acha que vai para infinito. Ronaldo sugere que ela analise para $t = 2$ e $t = 10$. Ela argumenta que nos dois pontos, as curvas vão para infinito do mesmo jeito. Ela compara o gráfico desse campo de direções com o da atividade do objeto em queda. "*Lá as curvas soluções tendem para v=49 quando t tende a infinito, e neste caso, as curvas vão para o infinito, quando t tende ao infinito.*", observa Viviane. Na seqüência, eles comentam que uma população não pode crescer indefinidamente e, portanto, que esse modelo não é uma boa representação para o crescimento populacional já que acreditam que toda população tende para um equilíbrio.

Os alunos voltam para o texto na busca do entendimento das justificativas dos porquês que esse comportamento não seria um “bom” modelo para o crescimento populacional. Concluem que uma população não pode crescer indefinidamente por conta da disponibilidade de alimento, de espaço, dentre outros fatores e que esse modelo estudado atende às hipóteses assumidas no início de seu desenvolvimento, mas que eles não concordam com essas hipóteses assumidas, e por isso esse não é um “bom” modelo para descrever o crescimento populacional.

Na continuidade da atividade, foram buscar determinar a expressão analítica das soluções da equação utilizando comandos do Maple, obtendo a família de funções exponenciais. Eles esboçaram algumas curvas soluções particulares, utilizando ainda comandos do Maple. No entanto, esse gráfico gerado parecia conter somente uma única curva esboçada e, no entanto eles estavam desenhando várias funções neste mesmo gráfico. Não sabendo como interpretar esse fato, novamente solicitam minha participação na discussão. Sugeri, então que explorassem com o *software* Winplot a função exponencial $y = ae^x$, variando a constante a , conforme ilustrado na Figura 4.12.

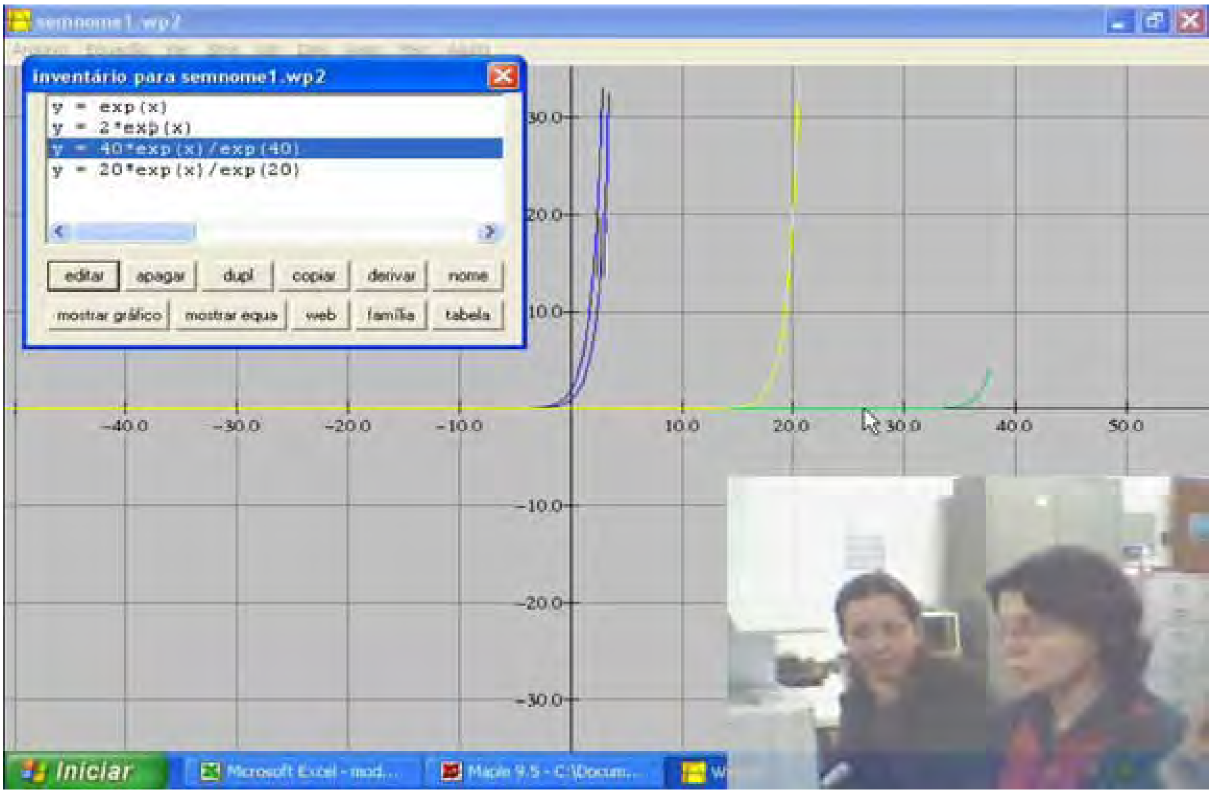


Figura 4.12. Explorando com o Winplot o comportamento da função exponencial

Fomos explorando os gráficos esboçados pelos softwares Maple e Winplot, alterando a janela gráfica destes e as condições iniciais da equação diferencial, até chegarmos à conclusão de que a dificuldade inicial da análise das informações contidas no gráfico, elaborado pelo Maple, era devida às representações das funções soluções do modelo matemático, neste caso funções exponenciais, com a escala do gráfico gerado, ilustrado na Figura 4.13.

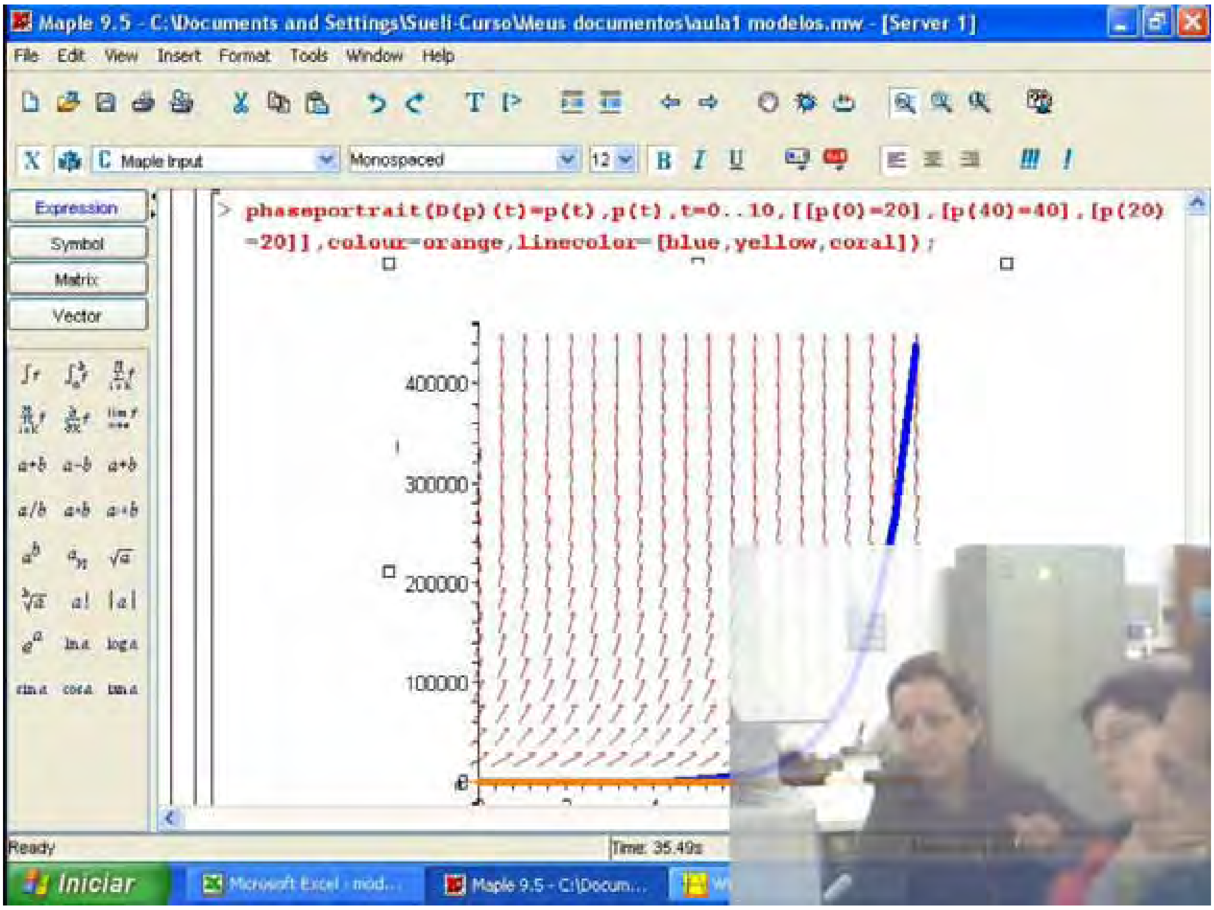


Figura 4.13. Interpretando com o Maple algumas curvas soluções do Modelo de Malthus

Após toda essa análise dos gráficos destas curvas soluções e comparando ao campo de vetores que eles haviam esboçado, concluíram que a análise que haviam elaborado estava coerente com a representação geométrica do campo de direções e com a expressão algébrica da solução por eles determinada e finalizaram o desenvolvimento da atividade.

Esse episódio tratou da descrição e análise do desenvolvimento da investigação de um modelo matemático para o fenômeno de crescimento populacional. O modelo analisado foi o Modelo de Malthus e o desenvolvimento da investigação foi elaborado pela dupla ‘Ronaldo e Viviane’. Esse conjunto define este episódio que procura por elementos que possam dar indícios às inquietações desta pesquisa. Procurei evidenciar os trechos que mais se aproximam da problemática das possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução aos conceitos de equações diferenciais ordinárias abordados qualitativamente com o auxilio das tecnologias informáticas.

A importância do desenvolvimento do processo de modelagem matemática foi algo recorrente nesse episódio, pois ficou evidente na discussão da dupla a preocupação e a necessidade de retornar as hipóteses assumidas inicialmente para entender a equação diferencial ordinária elaborada e, ainda propor tentativas de outros modelos que, segundo eles, melhor descreviam o fenômeno. A coordenação das várias mídias utilizadas também surge como algo importante, já que os alunos esboçavam seus rascunhos, cálculos, gráficos no caderno, no *software* e os comparavam na tentativa de verificar ou refutar suas conjecturas. A utilização de comandos do Winplot, juntamente com os do Maple foi relevante nesta análise. Os alunos, inicialmente acreditavam que a curva procurada era aproximada por uma exponencial, porém não tinham claro como justificar tal solução. E, novamente aqui nesse episódio, como no anterior, a interação entre os alunos e as mídias, instiga ao surgimento de diferentes discussões entre os alunos e, possivelmente propicia aos alunos a oportunidade de reorganização dos conceitos matemáticos estudados e, talvez até, propicia o surgimento da elaboração de novos conceitos com relação aos conteúdos estudados, em particular, com relação às equações diferenciais ordinárias.

4.3 Episódio - Modelo Populacional de Verhulst

Um episódio de destaque das aulas foi protagonizado por Aline, Adriano e Ronaldo. Esses alunos analisaram um modelo que descreve a dinâmica populacional, denominado o modelo de crescimento populacional de Verhulst ou curva logística. O modelo de Verhulst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, crescerá ate um limite máximo sustentável, isto é, a população tende a se estabilizar. A equação incorpora a queda do crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade. O modelo de Verhulst é basicamente o modelo de Malthus modificado.

O episódio é inicialmente composto pelos alunos Adriano e Ronaldo, pois a atividade que investigou esse modelo foi iniciada por esta dupla. No entanto, a atividade foi retomada em uma próxima aula, na qual Ronaldo faltou e, Adriano trabalhou com a aluna Aline. No decorrer do texto ficará evidenciada a participação dos alunos no desenvolvimento da atividade.

A atividade tinha por objetivo a exploração desse modelo matemático utilizando as várias mídias. A Figura 4.14 ilustra o momento no qual Adriano e Ronaldo estavam começando o desenvolvimento da atividade proposta.

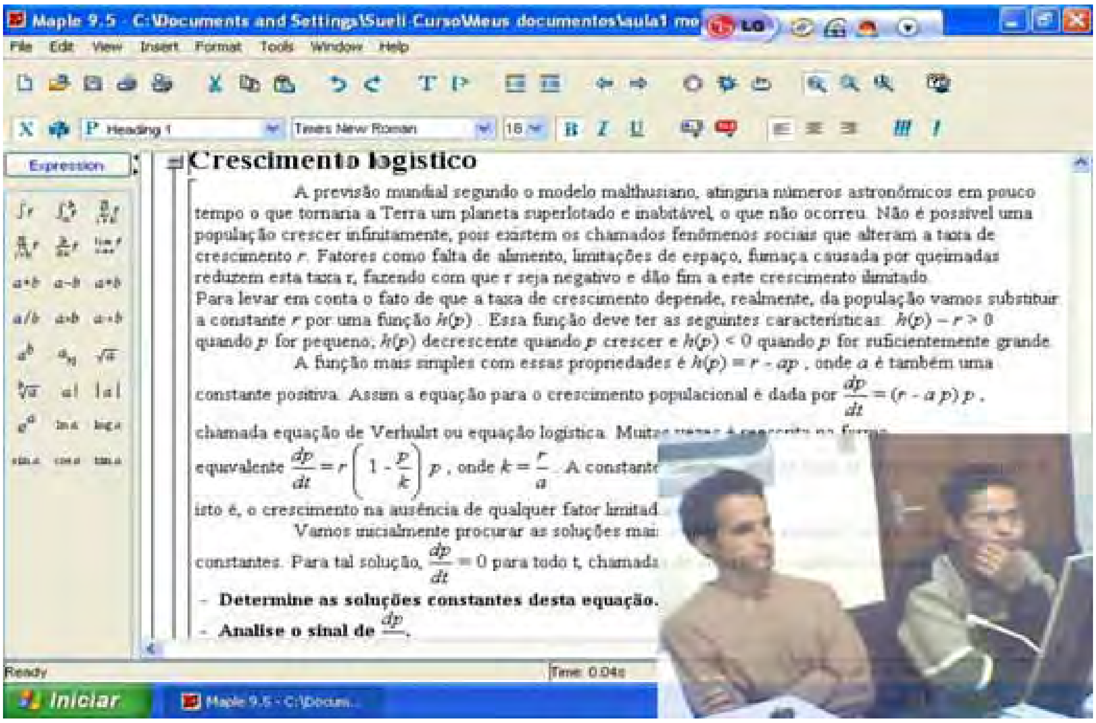


Figura 4.14. Adriano e Ronaldo iniciando a atividade modelo populacional de Verhulst

Para a exploração deste modelo foi elaborado um texto, que está anexado a essa tese, contendo notas de aulas extraídas de Bassanezi (2002) seguida de um roteiro de tarefas (Quadro 4.3.).

A equação para o crescimento populacional é dada por $\frac{dp}{dt}=(r-ap)p$, chamada equação de Verhulst ou equação logística. Muitas vezes é reescrita na forma equivalente $\frac{dp}{dt}=r\left(1-\frac{p}{k}\right)p$, onde $k=\frac{r}{a}$. A constante r é chamada de taxa de crescimento intrínseco, isto é, o crescimento na ausência de qualquer fator limitador.
Vamos inicialmente procurar as soluções mais simples desta equação, isto é, as soluções constantes. Para tal solução, $\frac{dp}{dt}=0$ para todo t, chamada de solução de equilíbrio da equação.

- Determine as soluções constantes desta equação.

- Analise o sinal de $\frac{dp}{dt}$.

- Para visualizar outras soluções vamos considerar $r=\frac{1}{2}$ e $k=3$, ou seja, vamos analisar a equação $\frac{dp}{dt}-0{,}5\left(1-\frac{p}{3}\right)p=f(p)$.

- Atribua valores para p e calcule $\frac{dp}{dt}$ e esboce no papel o campo de direções.

- Agora utilize o comando plot(0.5*(1-(p/3))*p,p=0..3.5,title=`gráfico de f(p) em função de p`); para analisar o comportamento de $f(p)$.

- Agora utilize o comando:
dfieldplot(diff(p(t),t)=(0.5*(1-(p(t))/3))*p(t),p(t),t=0..10,p=-1..6,arrows=medium, title=`campo de direções com r=0,2 e K=3`, colour=0.5*(1-p(t)/3)*p(t));

- Qual o comportamento das soluções que pode ser observado através do campo de direções? Ou seja:

- A solução tende ao infinito, para zero, ou para algum valor constante quando o tempo vai para infinito?

- A solução é periódica? Se sim qual o período?

- A solução atinge 0 somente quando t tende ao infinito, ou existe algum valor específico, tal como $t=100$, para o qual a solução é igual a 0?

- A solução eventualmente se aproxima a uma função mais familiar? Por exemplo, a solução "converge" para uma linha reta cuja inclinação pode ser estimada?

- Utilize o comando:
phaseportrait(D(p)(t)=0.5*(1- (p(t))/3)*p(t),p(t),t=0..10,[[p(0)=0], [p(0)=0.5],[p(0)=3],[p(0)=5]], arrows=medium,title=`campo de direções com r=0,2 K=3`, colour=0.5*(1-(p(t))/3)*p(t),linecolor=[blue,yellow,green,coral]);
e explique o gráfico obtido.

Quadro 4.3. Roteiro da atividade – Modelo Populacional de Verhulst

Eles começaram por discutir os parâmetros do modelo, pois era solicitada a eles, neste momento, a análise das soluções constantes e a análise do sinal da equação

$\frac{dp}{dt} = r\left(1 - \frac{p}{k}\right)p$, como podemos acompanhar na transcrição a seguir de um trecho da discussão dos alunos.

> *Adriano: Ele quer que a gente atribua valores para p, calcule a derivada em relação a t e esboce no caderno o campo de direções?*
> *Ronaldo: Determine as soluções constantes. Como a gente determina as soluções constantes? Se igualar a zero...*

Parece que o conceito de solução constante da equação $\frac{dp}{dt} = r\left(1 - \frac{p}{k}\right)p$ não estava claro para os alunos. Procuravam a tal solução constante, que anularia a derivada, sem relacionar essa derivada com a expressão da equação, e isso pode ser verificado com a fala do aluno onde comenta que a derivada de qualquer função constante é zero e, portanto qualquer constante seria solução do modelo. E assim eles ficam por vários instantes nesse trecho do texto, ilustrado na Figura 4.15.

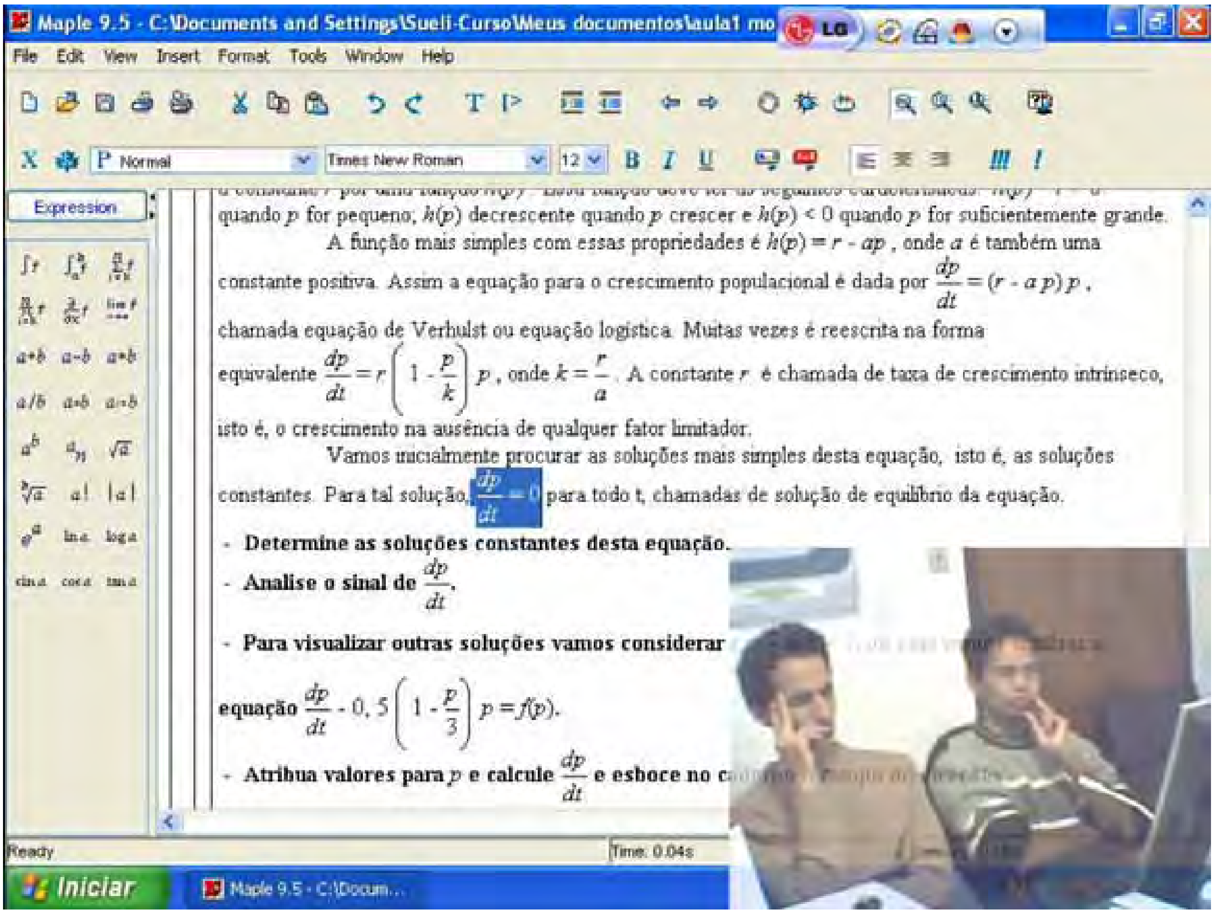


Figura 4.15. Ronaldo e Adriano na busca do conceito de solução constante

A aparente dúvida dos alunos pode ser confirmada na transcrição de um trecho do diálogo deles.

Adriano: A solução constante poderia ser um valor qualquer de p porque a derivada de uma constante vai dar zero. Se eu assumir que p é igual a uma constante, então dp/dt é igual a zero, vão ter infinitas soluções. Agora para analisar o sinal de dp/dt se lá é uma constante, não tem como avaliar, ela vai ser ou positiva ou negativa, ela não vai trocar de sinal.

Eles ficam parados frente ao texto por alguns instantes. E na seqüência, Adriano continua sua fala.

Adriano: Nossa tem uma coisa, hein! Será que teria que igualar nessa equação aqui óh? Igualar essa equação aqui a zero? Que a derivada de uma constante vai dar zero e sair daqui de dentro com os valores constantes?

Neste trecho da discussão, Adriano se referiu ao segundo membro da equação $\frac{dp}{dt} = r\left(1 - \frac{p}{k}\right)p$. Até parecia que havia entendido o conceito de solução constante, porém continua analisando essa equação e retoma o comentário que qualquer constante seria solução, conforme se pode constatar no trecho do diálogo transcrito a seguir.

Ronaldo: Deixa eu ver um negócio...r é a...
Adriano: A taxa de crescimento.
Ronaldo: Mas é sem...
Adriano: Constante.
Ronaldo: Mas tipo se não houvesse nada né? Nenhum limitador, né!
Adriano: Para mim é isso mesmo, p é uma constante e para qualquer p que eu pegar, a derivada de uma constante é zero, então eu acho que a primeira solução daí dessa equação... Será que ela vai querer cálculo como a gente fazendo? Não né, é só escrever.
Ronaldo: Só escrever.

Pode-se verificar com esse trecho da transcrição do diálogo que os alunos não tinham claro o conceito de solução constante de uma equação diferencial ordinária, ou ainda, não estava claro o próprio conceito da equação diferencial, pois não faziam a ligação entre o comportamento da derivada dada e a procura de sua solução, pois mesmo com a definição desta sendo dada explicitamente no texto, os alunos responderam à pergunta "*Determine as soluções constantes desta equação*" com a seguinte frase: "*As soluções são valores para qual a derivada é igual a zero, ou seja, qualquer constante*". No entanto parece que, pela expressão facial, Ronaldo não estava muito satisfeito com essa resposta que eles haviam elaborado. E assim, o diálogo dos dois alunos continua em torno dessa questão.

Adriano: Certo, mais alguma coisa dá pra por?
Ronaldo: Mas isso ela já falou aqui. (Comentando a resposta que haviam escrito)
Adriano: Ela afirmou no enunciado. Só to interpretando o que ela tá fazendo. (E Adriano retoma a leitura do trecho: determine as soluções constantes desta equação e complementa sua fala). *Ou seja, é qualquer... qualquer... a derivada de uma constante é zero, é qualquer constante. Só estou*

interpretando isso! Agora analisar o sinal dessa derivada... Ela vai ser meio complicada porque se ela é uma constante provavelmente vai tender para uma reta, não? (Nesse momento ele faz um sinal com a mão como se estivesse desenhando uma reta horizontal).

Ronaldo: Mas não é pra acontecer isso né? Vamos substituir r por uma função h(p)... p é o que mesmo?

A impressão que tenho, ao analisar esse trecho do diálogo dos alunos, é que a dificuldade deles se encontrava no fato da imprecisão do conceito de campo de direções, isto é, parece que os alunos, até o momento, ainda não tinham assimilado o significado do campo de direções e, talvez até o conceito e o significado geométrico de derivada de uma função real não estivesse claro para eles.

Parece que Ronaldo não estava concordando com os comentários de Adriano, no entanto, também não conseguia avançar.

Adriano: p? Ele abriu a fórmula, h(p) é uma função.
Ronaldo: Então h(p) é uma função próxima a r, que é a taxa de crescimento e o p?
Adriano: O p é uma variável como seria um x qualquer. Quando ele for uma constante a derivada dá zero. Acho que a pergunta não foi muito feliz, como ela foi construída. O que tem mais para baixo?

Adriano resolve continuar a leitura do roteiro e comenta que a atividade proposta era parecida com as atividades anteriores e que deveriam ir fazendo item por item do roteiro.

Adriano: E agora como a gente vai analisar aquela derivada? (Referindo-se à equação diferencial dada.).
Ronaldo: Veja o sinal dessa aqui.

Neste instante Ronaldo referia-se à equação $\dfrac{dp}{dt} - 0{,}5\left(1 - \dfrac{p}{3}\right)p = f(p)$, que era dada no roteiro.

Ronaldo: É a taxa de crescimento, então vamos supor...neste caso aqui, a população está crescendo em meio.
Adriano: Que seria a r.
Ronaldo: E quem é esse r/a? Meio, k é igual a 3 e $k = {}^{r}\!/_{a}$. (Ronaldo tentava relacionar essa equação $\dfrac{dp}{dt} - 0{,}5\left(1 - \dfrac{p}{3}\right)p = f(p)$ com a equação geral $\dfrac{dp}{dt} = r\left(1 - \dfrac{p}{k}\right)p$, onde $k = {}^{r}\!/_{a}$)
Adriano: Aí no caso tem que resolver essa equação analiticamente.
Ronaldo: E quando que essa equação pode ser constante? Eu posso ter sempre a mesma taxa de crescimento, né? Mas p pode variar. p varia de acordo com a taxa de crescimento porque tenho aqui que r é função de p. Então r é em função de p. Mas o que significa isso: "a taxa de crescimento depender da população?". Ah é verdade porque óh, se a população for muito grande, a

taxa de crescimento pode diminuir porque vai ter mais fumaça, né, vai ter menos alimento. Vamos por aqui. Mais ou menos o que ela colocou lá. Mas vamos pensar..., se p for grande, r é pequeno né?
Adriano: Certo.
Ronaldo: Então vai ter que crescer menos a população. Agora se p, se a população for pequena, então a taxa de crescimento... O que vai acontecer com ela?
Adriano: Vai ser pequena.
Ronaldo: Foi isso que ela concluiu?
Adriano: Se levar em conta a taxa de crescimento...
Ronaldo: Quando p for pequeno, ela vai aumentar né?
Ronaldo: E daí se acontecesse...? E se a população for constante?
Adriano: Se a população for constante não tenho necessidade do r.
Ronaldo: Ou eu teria que analisar não a população, só se analisasse se r for constante.
Adriano: r é uma constante que regula essa população.
Ronaldo: Então acho que nada haver.
Adriano: Mas se a população é constante não dependeria do r, porque ela não vai sair fora de padrão.
Ronaldo: Então se p for constante, r é constante, né? Então analisando isso aí, como a gente pode chegar às soluções constantes? Ah! Então a solução é constante quando h(p)...
Adriano: Quando h(p) for igual a zero?
Ronaldo: É que aí não tem taxa de crescimento né?
Adriano: Quando não tem taxa de crescimento, vamos ter soluções constantes. Ou pra não alterar você teria h(p) =1, porque aí ela não é nem crescente, nem decrescente.

Este trecho de transcrição do diálogo dos alunos parece evidenciar a falta de entendimento do significado do conceito de derivada como variação da função, pois eles comentavam o tempo todo que as soluções seriam constantes se a população não variasse, porém não relacionavam esse fato com a derivada ser igual a zero.

E voltam a ler o trecho do texto que tratava da introdução de $h(p) = r - ap$, para aproximar a constante *r*.

Ronaldo: O que $r - ap$ *me retorna?*
Adriano: Ele dá essa equação aqui $1 - p/k$. (referindo a equação $\frac{dp}{dt} = r(1 - \frac{p}{k})p$).
Adriano: É que essa equação ela ta considerando o que? Que a população ou cresce ou decresce. Ela não considera que a equação tá em equilíbrio. O que aconteceria quando a população tá constante, tá em equilíbrio? Acho que não teria necessidade de ter esse r, porque r é um limitador.
Ronaldo: Vamos pensar, vamos calcular isso aqui no Excel pra ver o que dá?

E assim a dupla inicializa o Excel para realizar os cálculos que eles acreditavam que iriam ajudá-los na compreensão do fenômeno estudado. No entanto, não obtêm êxito e resolvem voltar para a tela do Maple na tentativa de resolver a equação

$\dfrac{dp}{dt} - 0{,}5\left(1 - \dfrac{p}{3}\right)p = f(p)$, algebricamente. Como eles utilizaram o comando de forma equivocada, também não obtiveram avanços no Maple e retornaram ao Excel. Na seqüência Marcos, aluno da dupla que estava no computador ao lado, pergunta à dupla sobre o que entenderam de solução constante e Adriano responde a ele que esta era a grande dúvida, que eles não haviam tido progressos, nesta atividade, até o momento, exatamente por não entender o que seria a solução constante. E assim, após mais ou menos 50 minutos de discussão, eles chegam à conclusão que deveriam pedir auxilio à pesquisadora, isto é, que deveriam solicitar meu auxílio para conseguir dar andamento às atividades propostas. No entanto, como é comum nas práticas de sala de aula, não fui prontamente atendê-los, já que estava discutindo uma determinada atividade com outra dupla da sala. E os alunos continuaram a seguir os passos sugeridos na atividade, elaborando assim o campo de direções, através do Maple, gerando o gráfico, esboçado na Figura 4.16.

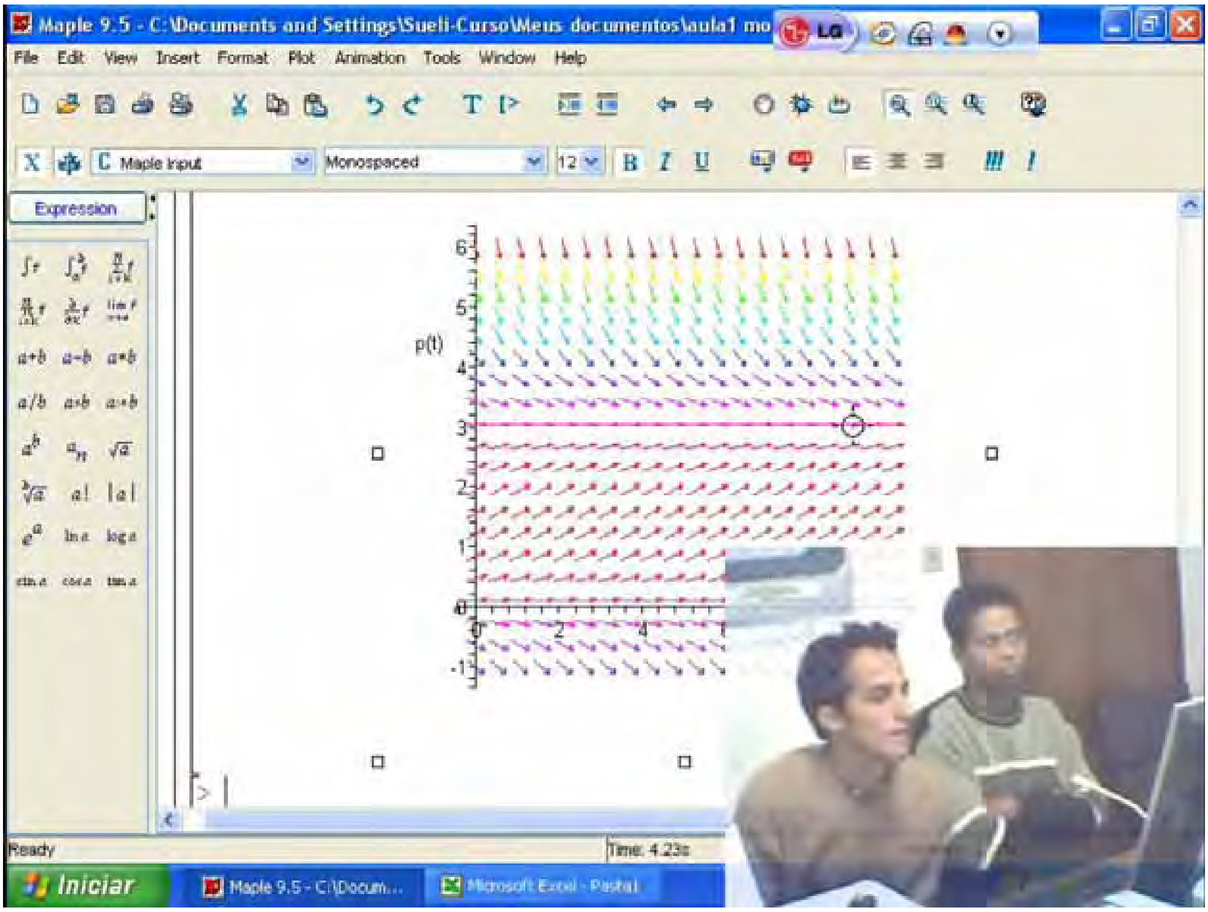


Figura 4.16. Campo de direções de $\dfrac{dp}{dt} = 0{,}5\left(1 - \dfrac{p}{3}\right)p$ gerado no Maple

Após a elaboração desse gráfico, retomam a discussão sobre as soluções constantes da equação, como se pode observar na transcrição a seguir.

> *Ronaldo: Ah, ah!!! Tá ai. Olha lá onde é constante.*
> *Adriano: Ele vai ser constante em três.*
> *Ronaldo: Como nós não achamos isso cara? Aqui também óh...* (Apontando para o eixo das abscissas).
> *Adriano: Aliás, ele vai ter vários constantes, em zero...*
> *Ronaldo: Não é em zero, é próximo de zero.*
> *Adriano: Próximo de zero, próximo de três. Se ele conseguiu chegar, a gente tinha que chegar na mão também né?*

Analisando o gráfico gerado pelo software os alunos interpretam as soluções constantes como sendo aquelas curvas para os quais os vetores tangentes têm inclinação nula. Sendo assim, a deficiência na parte algébrica parece encontrar-se na relação da informação que a equação dá, isto é, eles sabiam que deveriam procurar por soluções com tangentes nulas em todo ponto, porém não associavam que estas soluções deveriam satisfazer a equação diferencial dada.

E a partir desse gráfico, esboçado pelo software, os alunos começam a discutir os parâmetros do comando, talvez na tentativa de elucidar o raciocínio algébrico que os levariam a determinar as tais soluções constantes solicitadas.

> *Ronaldo: Vamos ver o que ele fez. De zero a dez.* (referindo-se ao comando dfieldplot utilizado para esboçar o campo de direções).
> *Adriano: Ele segurou a constante como k=3, por isso que ele chegou...Chegou em zero... Se eu trocar essa constante k sei lá, e colocar 5, provavelmente neste ponto ele vai ser constante. A gente vai vai e não chega em lugar nenhum.*
> *Ronaldo: Tá! A taxa de crescimento constante. E k, que eu não sei o que significa o que é, é três.*
> *Adriano: É uma constante também.*

No entanto, os alunos ainda continuam sem atingir grandes avanços na atividade, Adriano chega a comentar "a gente vai, vai, mas não vai pra lugar nenhum". Porém, não desistem e atribuem vários valores para k para ver o que acontece. Atribuem o valor de 10, em seguida 5 e observam que o comportamento do gráfico mudava conforme mudavam o valor de k e concluem que a constante k é importante, porém não atribuem significado para essa constante.

Pode-se observar, até esse momento do episódio, que os alunos no processo de realização das tarefas solicitadas buscavam várias maneiras um caminho para a resolução do problema dado. E essa investigação é potencializada pelo software que possibilita várias tentativas de entender o que está acontecendo. Possivelmente se eles estivessem trabalhando somente com lápis e papel, fariam a análise da equação para um, no máximo para dois valores de k que aparece na equação. Essa possibilidade de variação do parâmetro k e analisar os vários gráficos gerados condicionam a maneira que os alunos investigam o campo de direções e o modelo em si. Na verdade podemos dizer que o uso do Maple, neste momento, potencializou a discussão dos alunos sobre o modelo analisado.

Ronaldo comenta que mesmo tendo observado a mudança do gráfico conforme a variação dos valores da constante *k*, ele ainda não sabia determinar as soluções constantes do modelo estudado, e continua argumentando sobre o modelo na tentativa de entender seu comportamento, como podemos observar no trecho de transcrição do diálogo da dupla, dado a seguir.

> *Ronaldo: Então é k que tá rolando ai.*
> *Adriano: k que dá o grande diferencial.*
> *Adriano: Pra mim por ser uma solução constante... Ah tá!!! Pode ser que tenha uma solução constante, mas o problema que é um campo de direções, né! Então são diversas soluções.*
> *Ronaldo: Não, mas você pega uma equação...* (Parece que Ronaldo argumenta sem convicção no que fala).

É evidenciado que os alunos não conseguiram, até o momento, assimilar o conceito do campo de direções e o significado das soluções da equação. Adriano volta ao roteiro e comenta que das tarefas solicitadas, eles haviam feito o campo de direções com o software, e observa ainda que não haviam feito o esboço do campo de direções no caderno, pois ficaram "presos" em *k*, e buscam entender o comportamento das soluções observando o campo de direções e continuam tentando esclarecer as dúvidas, conforme é apresentado no trecho a seguir.

> *Adriano: Ela trabalha em bloquinhos, ela vai tender sempre para uma constante.* (Neste instante, ele faz um gesto com a mão, parece que ele estava dizendo que o comportamento se repete em faixas, conforme observamos na Figura 4.17).
> *Ronaldo: Trabalha em bloquinhos?*(risos)
> *Adriano: Trabalha em retângulos. Então ela é uma função periódica, de tempo em tempo ela repete. Provavelmente o ponto 7 vai ser um ponto constante. Ele tá variando de três em três. O que dá pra construir disso?* (Ele referia-se à $p(t)=7$)

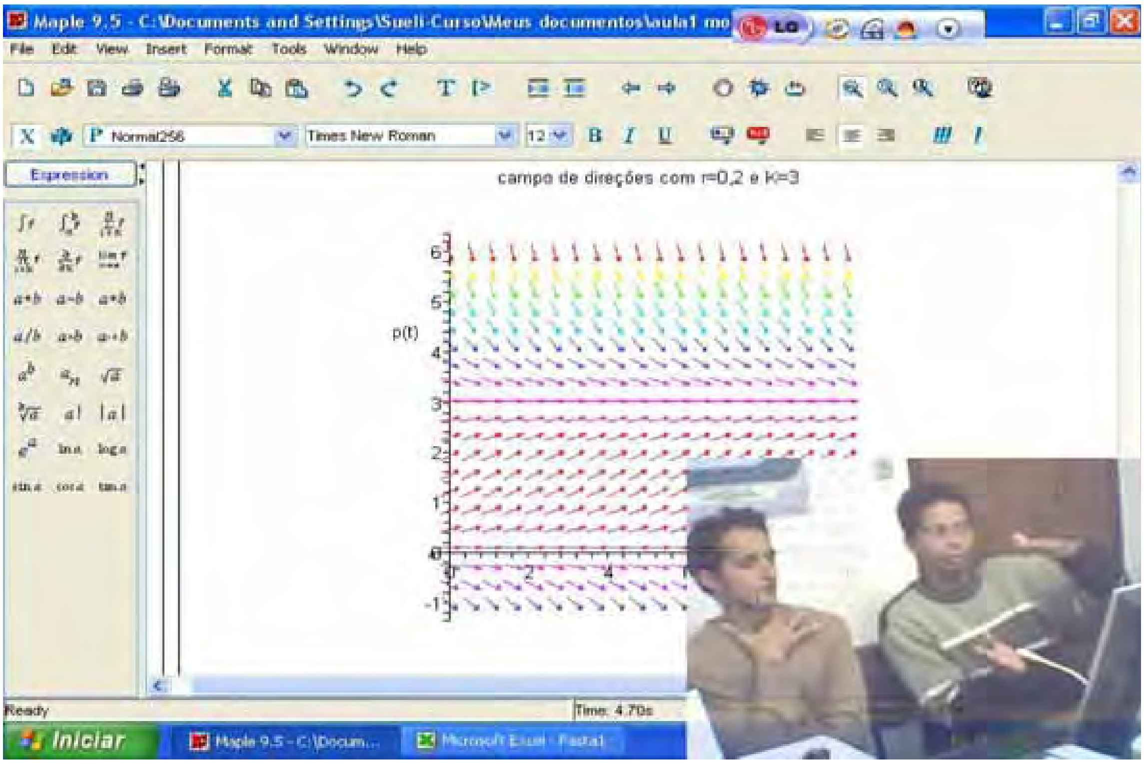


Figura 4.17. Adriano argumentando com Ronaldo sobre o comportamento das soluções

Parece que Ronaldo não concorda com a afirmação de Adriano e simula vários gráficos do campo de direções atribuindo vários valores para o intervalo de variação de *p* e para valores de *k*. Um dos gráficos que foi gerado pelos alunos pode ser observado na Figura 4.18.

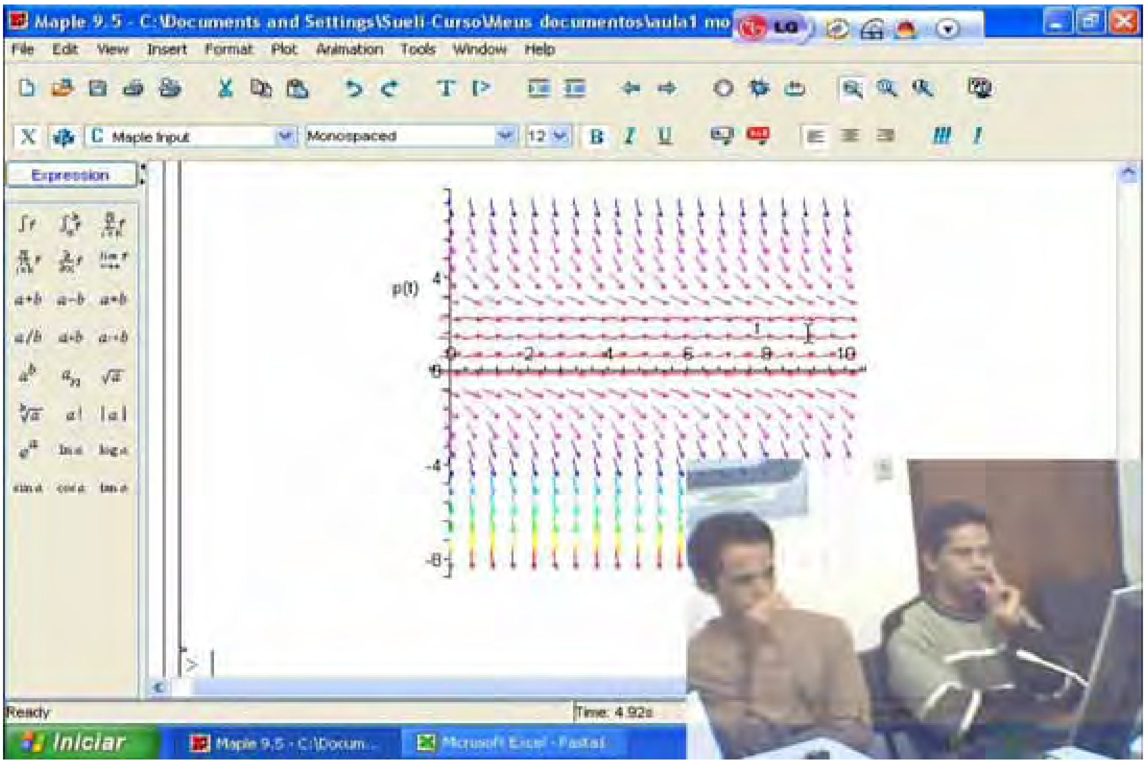


Figura 4.18. Gráfico do campo de direções do modelo de Verhulst para k=2

Ao observar os vários gráficos gerados, Ronaldo faz o seguinte comentário:

Ronaldo: Não é o que você pensou não hein!
Adriano: Agora ela tá variando de quatro em quatro.
Ronaldo: Só aqui que tá variando, o resto não. (Apontando o gráfico próximo a $p(t) = 2$).
Adriano: Só variou o centro?
Ronaldo: No seis tá bem grande lá. Vamos analisar esse k. (Ele referia-se a inclinação dos vetores diretores para p(t) = 6).

Parece que o termo "variando" que eles estavam utilizando se referia ao local onde as inclinações dos vetores mudavam, ou seja, de positivo para negativo ou vice-versa, isto é, onde a inclinação era nula.

Adriano: Quando eu mexo com o k eu to mexendo com o r e o a ao mesmo tempo, as duas constantes. (Já que estavam analisando a equação $\frac{dp}{dt} = r(1-\frac{p}{k})p$, onde $k = {}^{r}\!/_{a}$).
Ronaldo: Então depende da taxa de crescimento. A taxa de crescimento é sempre a mesma né, independente da população aqui?! Mas caramba por que ela tende a uma constante?Ah! Quer ver só! k é sempre o mesmo, então coloca aqui um k três, por exemplo, a população começa a aumentar, por exemplo, se ela for muito grande, ela vai chegar uma hora que a proporção entre a população e o crescimento é pequena, entendeu? Daí ela começa a ter efeito contrário.
Adriano: Ela passa a ser uma taxa negativa? Que é o que o texto está propondo.
Ronaldo: Não negativa...Acho que é isso a relação. É sempre o mesmo, entendeu? Mas daí eu vou aplicando aqui no p, vamos supor que o p vai aumentando, vai chegar uma hora que a proporção...
Adriano: A gente pode testar isso no gráfico, jogar um p bem grande. Pode jogar na equação, joga um p bem grande.
Ronaldo: Porque pense óh! Você tem uma população grande, pezão, e tem uma população pequena aqui, joga um k. Então, pra essa população qual que vai ser o efeito e pra essa qual vai ser o efeito? Se a população é pequena, jogo uma taxa de crescimento nela ela vai aumentando, e se a população já é grande, se a taxa de crescimento for pequena, o que tá significando? Que não tá crescendo, que o pessoal já ta morrendo.
Adriano: Já tá no limite. Tende ao equilíbrio.
Ronaldo: Era pra gente ter sacado isso aquela hora.
Adriano: Ainda tá meio...(risos) *Só depois de ver o gráfico, mas mesmo assim na dúvida, o gráfico pode estar errado.*
Ronaldo: Então essa parte que é chave. É isso mesmo. Esse h de p é isso, é $r - ap$.

Adriano e Ronaldo solicitam a minha participação na discussão do que seriam as soluções constantes para o modelo de Verhulst. Nesse momento, retomo com os alunos o que seria tal solução, ou ainda, o que seria uma EDO e o que significa resolvê-la. Fica evidente a intervenção, ou ainda, a mediação do professor em uma atividade como esta. No momento que eu questiono o que é uma equação diferencial e o que seria resolvê-la e sabendo que as soluções constantes são aquelas cuja derivada se anulam, os alunos parecem entender o que estava sendo pedido na atividade. E, juntamente com todo o processo de investigação que eles tinham desenvolvido ate o momento, parece que chegaram à conclusão do que estavam buscando descobrir. Porém, já havia chegado o término desta aula e então eles continuariam no próximo encontro.

Porém, neste dia, Ronaldo não compareceu e Adriano trabalhou com Aline. Sendo assim, a partir de agora os alunos Adriano e Aline compõe a continuidade desse episódio.

Como Adriano ainda tinha dúvidas da aula anterior quando trabalhou com Ronaldo e Aline não tinha iniciado essa atividade, decidiram começar a discussão da atividade desde o início. Talvez pelo fato de Adriano já ter desenvolvido uma primeira experimentação, na aula anterior, ele foi conduzindo a discussão dos dois. Após a leitura introdutória da atividade, eles relacionam a solução constante como àquela em que a derivada se anula e, portanto tomam a equação dada e igualam a zero chegando à conclusão que as soluções constantes para a equação $\frac{dp}{dt} = r(1 - \frac{p}{k})p$, onde $k = r/a$ são dadas por $p=k$ ou $p=0$.

Seguindo o roteiro, eles discutem sobre o campo de direções. O trecho abaixo ilustra a discussão dos alunos. Aline comenta com Adriano que ela não tinha muito claro o que seria o campo de direções e Adriano a ajuda mostrando alguns valores particulares dos vetores diretores para esse modelo. O trecho transcrito a seguir mostra a interação dos dois alunos na busca pelo entendimento do conteúdo estudado neste modelo.

> *Adriano: Esboce no caderno o campo de direções.*
> *Aline: Isso foi feito no Excel.*
> *Adriano: Isso aí a gente teria que transferir para o caderno. São aqueles anguluzinhos [..] Vai chegar um momento que aquela curva tem que virar. Ela tem que chegar no ponto de equilíbrio. É isso que o exercício 2 queria na análise de sinal. A gente saber onde essa curva troca de sinal.*
> *Aline: Porque pra mim o que não ficou muito claro é o campo de direções. Eu sei que é um campo pra onde ela...*
> *Adriano: Um campo de direções é uma coisa assim, eu fixo um vetor pequenininho aqui, lá ta dando 89, meu vetor vai vir assim oh. Só o que acontece, ele vai ver de uma maneira tal que vai chegar num ponto que ele vai ter um equilíbrio.* (Adriano esboça no caderno o vetor com inclinação de 89 graus, aproximadamente, Figura 4.19).

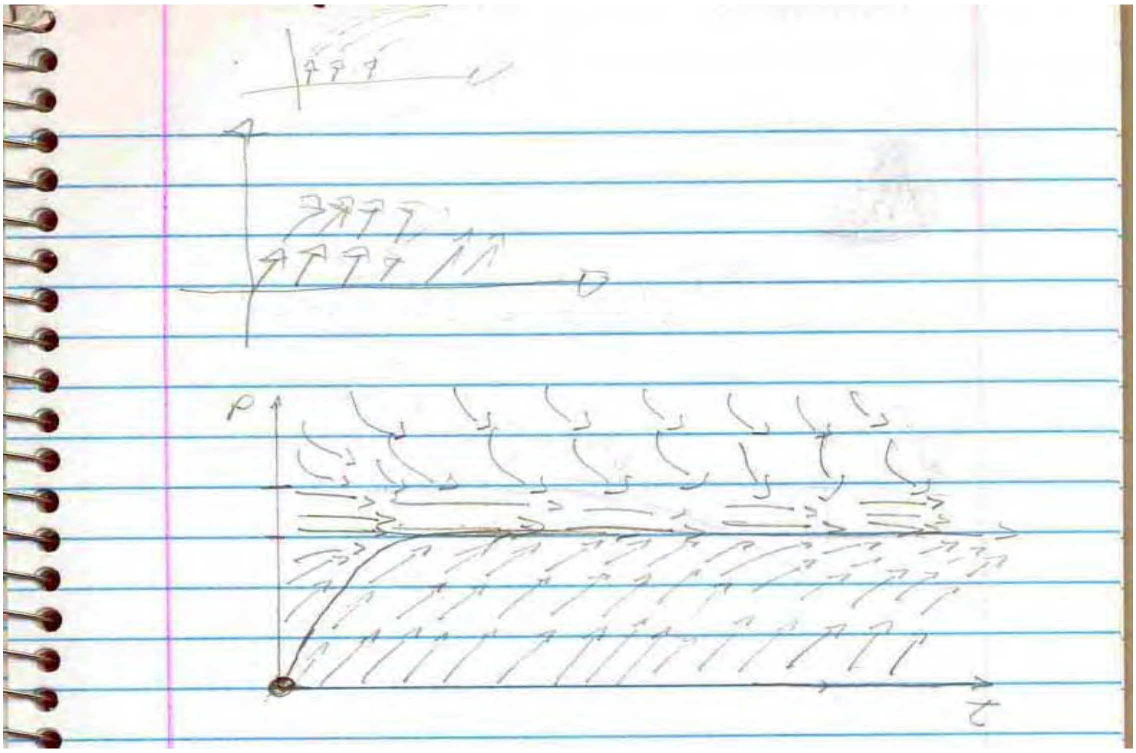


Figura 4.19. Esboço dos campos de direções feito pelos alunos

Aline: É como se fosse isso daqui óh. (esboçando uma curva no caderno) *É como se tivesse um limite assim.*

Adriano: Isso. Aí a gente teria que saber onde é esse limite[..] pra onde ele tá caminhando. Eu vou só deixar rascunhado aqui porque eu também não tenho idéia de como eu vou chegar nele.

Na seqüência eles continuam analisando o modelo utilizando os comandos do Maple, esboçam o campo de direções, que é ilustrado na Figura 4.20, a seguir.

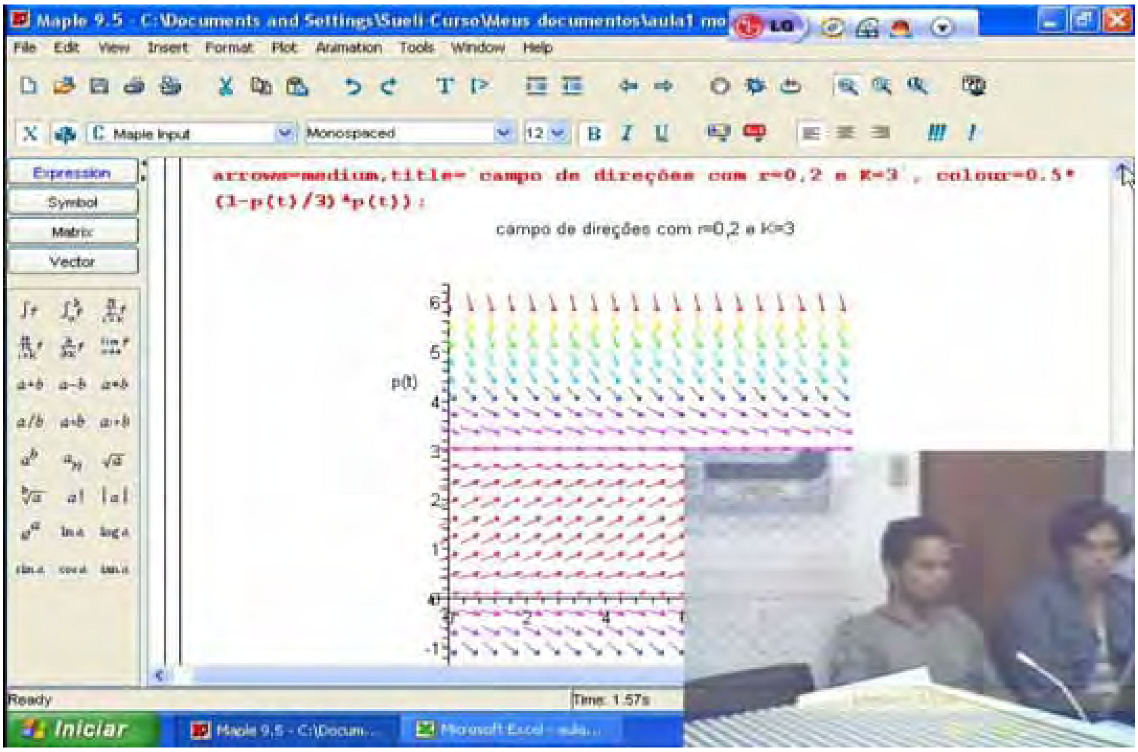


Figura 4.20. Gráfico do campo de direções do modelo de Verhulst para k=3

O trecho de transcrição a seguir ilustra a discussão dos alunos acerca deste gráfico.

Adriano: Olha lá é o que você estava fazendo.
Aline: Na verdade é uma linha.
Adriano: No 3 é onde é o ponto de equilíbrio que a gente teria que ter achado na mão.
Aline: Pra o menos um tá indo pra baixo, ou seja, a partir do zero, acaba.
Adriano: Estranho. Não dá pra pensar em população negativa, mas ele continua fazendo.

Ao usarmos o comando de desenho do *software* para esboçar determinado gráfico, como no caso, o campo de direções da equação $\frac{dp}{dt} = 0{,}5\left(1 - \frac{p}{3}\right)p$, com variação de 0 a 10 no eixo da abscissa e de -1 a 6 no eixo da ordenada, o gráfico gerado é representado nessa janela gráfica e no entanto, essa equação representa aquele modelo para o crescimento populacional, e esta não tem sentido para valores menores que zero, já que a variável p representa a população. A coordenação da representação gráfica de uma função com o que ela representa deve ser observada com cuidado. E parece que isso não estava claro para os alunos, pois eles ficaram tentando justificar o comportamento do campo de direções para esses valores, como se pode observar no trecho de transcrito do diálogo dos alunos apresentado a seguir.

Aline: Mas às vezes é uma população que tá decrescendo.
Adriano: Acho que isso depende muito de onde você vai avaliar né. Por exemplo, se você vai avaliar pra intervalos acima de 3, você vai ver que ela é decrescente, porque tá todos os gráficos descendo. (Ele faz um gesto com a mão de várias curvas decrescentes).
Aline: Então ela vai tá sempre tendendo a 3.
Adriano: Acima de zero ela vai pra 3. Vai tender a 3. Abaixo de zero ela é decrescente, não tende mais pra zero. Ela parte de zero, mas não tende pra zero. Acho que basicamente é o que você construiu no caderno. (Aponta para o caderno).
Aline: Não era isso.
Adriano: Se você pensar, se você pegar um caminho aqui e tenta levar, ele vai dar uma curva parecida com a sua. (Adriano faz um gesto com a mão mostrando na tela o comportamento da curva).
Aline: É que na verdade o que eu tinha feito sobre a faixa tá certo, mas ao mesmo tempo, tá vendo que perto da faixa é como se não tivesse nenhum, é como se tivesse um espaço.
Adriano: É onde a derivada troca de sinal.
Aline: É onde ela troca de sinal né!
Adriano: Esse ponto que a gente olhou lá é praticamente 3 e alguma coisa no outro gráfico.

Neste momento eles voltam para análise do gráfico do comportamento da função $f(p)=\frac{dp}{dt}-0{,}5\left(1-\frac{p}{3}\right)p$ e verificam que esta possui um ponto de máximo que é exatamente o ponto de inflexão da função solução procurada, ilustrado na Figura 4.21, a seguir.

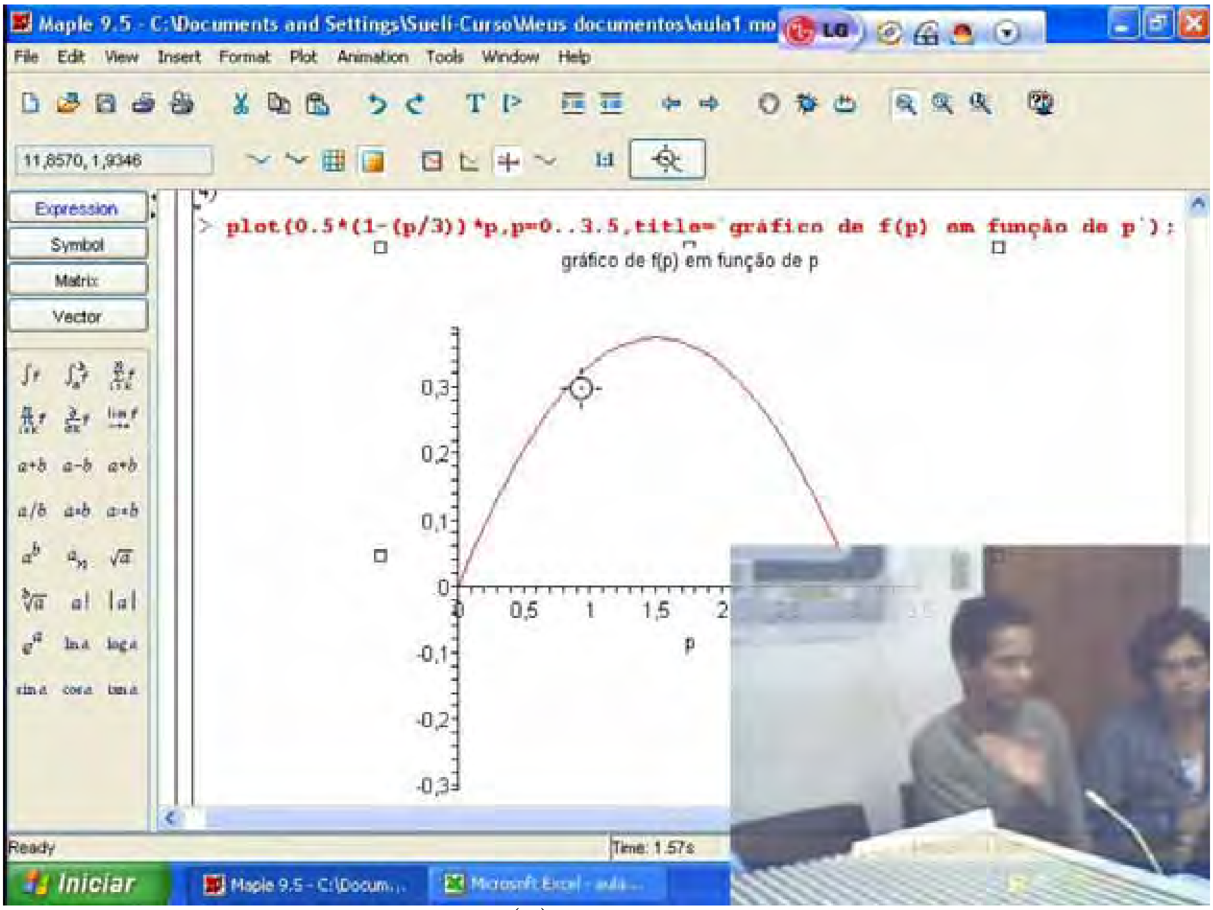


Figura 4.21. Esboço da função $f(p)$ elaborada no Maple

Os alunos estavam fazendo referência ao ponto *p=1,5*. Eles apontaram com o mouse no ponto correto, porém estavam equivocados com a ordenada do ponto, por isso disseram em 3 e pouco.

Assim os alunos Aline, Adriano e Ronaldo protagonizaram o episódio Modelo de Verhulst, que tem por objetivo apresentar o processo de discussão matemática dos alunos na investigação de um modelo para o crescimento populacional, tendo no horizonte da pesquisa a pergunta diretriz "Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?".

Um ponto importante que surge na análise deste episódio consiste na aparente dificuldade dos alunos em assimilar o conceito de derivada de uma função no ponto com a variação da função. E, essa dificuldade leva o aluno a não conseguir analisar o comportamento da função por meio do campo de direções. A interpretação do gráfico esboçado pelo *software* e o seu significado para o modelo também é um fato importante. Interpretar as representações das funções (gráfica, numérica e algébrica), no caso, dadas pelo *software*, mas que também poderiam ter sido encontradas utilizando-se lápis e papel, raciocínio mental, enfim, com as tecnologias da inteligência disponíveis, com o seu significado no modelo, que representa um fenômeno em particular, é algo bastante importante na análise de equações diferenciais.

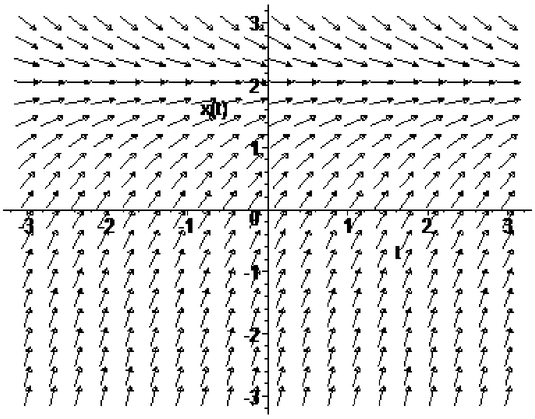
4.4 Episódio – Campos de direções

Esse episódio é composto pela junção da discussão do trio de alunos, Adriano, Ronaldo e Viviane, e da discussão da dupla, Marcos e Shen, no desenvolvimento da atividade "campo de direções". Inicialmente apresento o desenvolvimento de toda a atividade discutida pelo trio e, na seqüência, apresento a discussão da dupla com o intuito de confrontar a estratégias utilizadas pelos grupos de alunos.

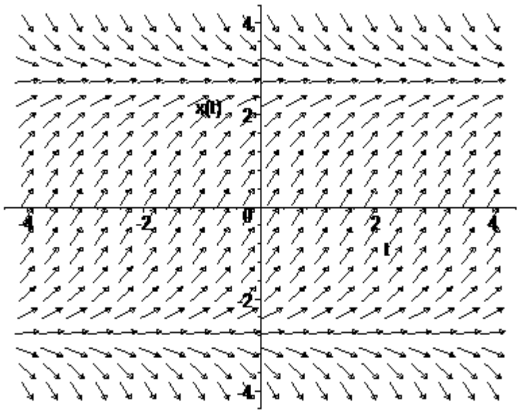
Esta atividade teve por objetivo investigar como os alunos estabeleciam uma relação entre o comportamento das equações e os campos de direções. Foram dadas cinco equações diferenciais ordinárias e cinco gráficos de campos de direções e era solicitado que os alunos os relacionassem através da análise qualitativa das equações, sem necessariamente determinar a resolução algébrica. Sendo assim, foi sugerido que inicialmente utilizassem "lápis e papel" e a planilha de cálculo no auxílio dos cálculos. Em seguida, foi sugerido que utilizassem um *software* gráfico para comparar as suas análises. O Quadro 4.4 ilustra como a atividade foi proposta.

Discuta com seu colega o comportamento das equações diferenciais dadas abaixo e as relacione com o seu respectivo campo de direções. Justifique sua resposta:

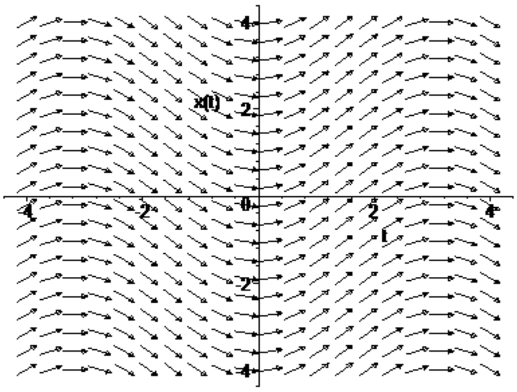
a) $\dfrac{dx}{dt} = sen(x)$ b) $\dfrac{dx}{dt} = sen(t)$ c) $\dfrac{dx}{dt} = 2 - x$ d) $\dfrac{dx}{dt} = x(2 - x)$ e) $\dfrac{dx}{dt} = 2 - \dfrac{1}{4}x^2$



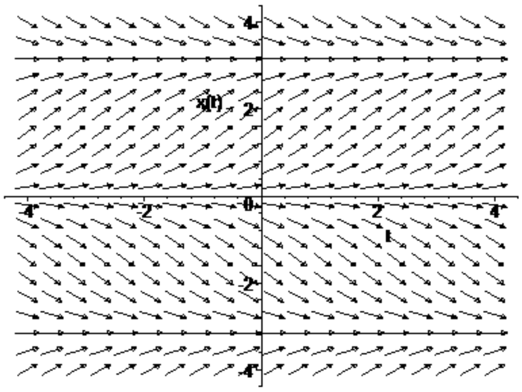
(i)



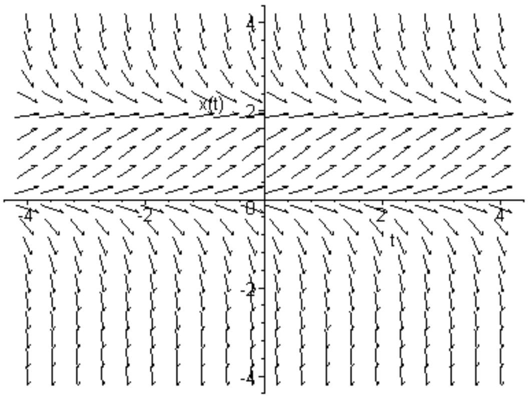
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

Quadro 4.4. Roteiro da atividade “campo de direções”

Ronaldo e Viviane iniciaram a atividade observando as figuras e as equações dadas. A Figura 4.22 ilustra os alunos no início da atividade.

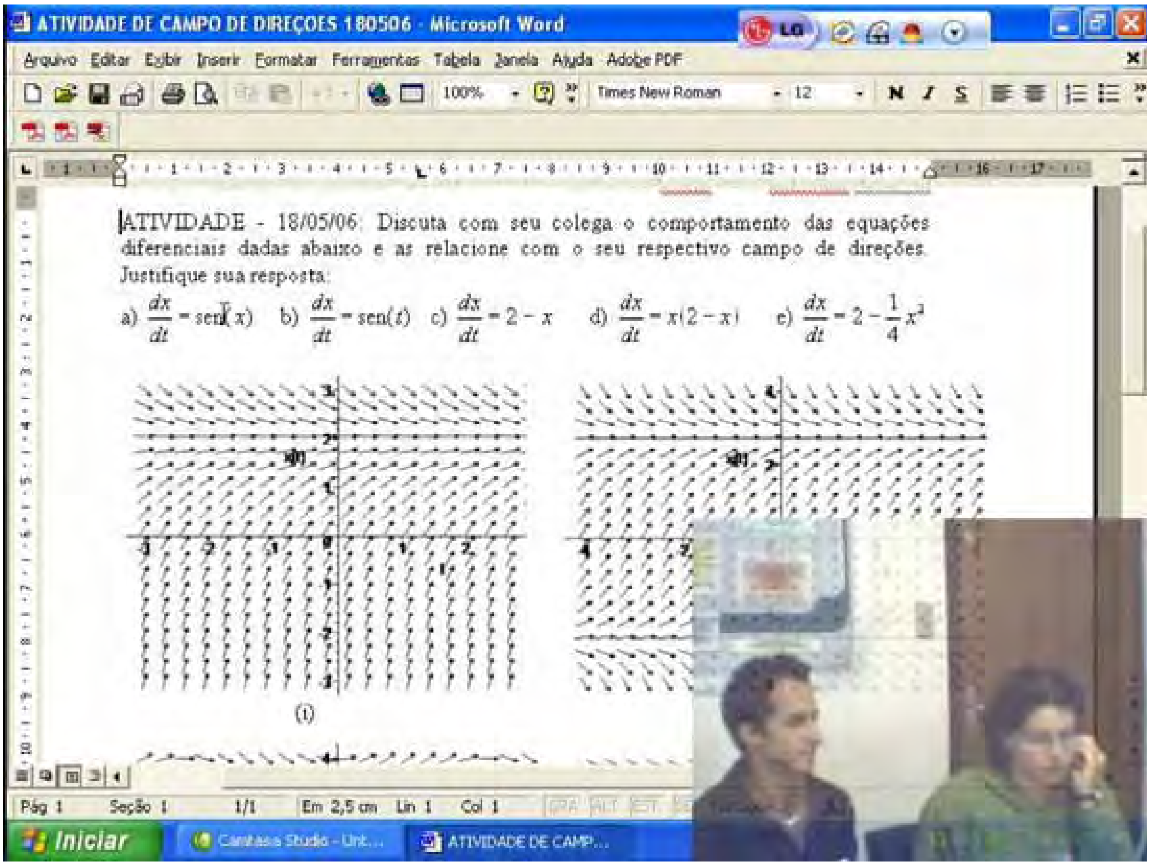


Figura 4.22. Ronaldo e Viviane iniciando a atividade proposta

A transcrição de trechos dos diálogos dos alunos ilustra os passos que eles foram trilhando.

> *Viviane: Hum, vamos ver, dx, dt, seno de x, então a seno... É assim seno né?*
> (Viviane volta para o caderno e faz um esboço do gráfico da função seno e mostra para Ronaldo).
>
> *Ronaldo: É! Esse aqui é como lá.* (apontando para o gráfico (v) da atividade, conforme ilustrado na Figura 4.23).

Talvez ele estivesse comparando o comportamento desse campo de direções com o do modelo de Verhulst que haviam analisado na atividade anterior.

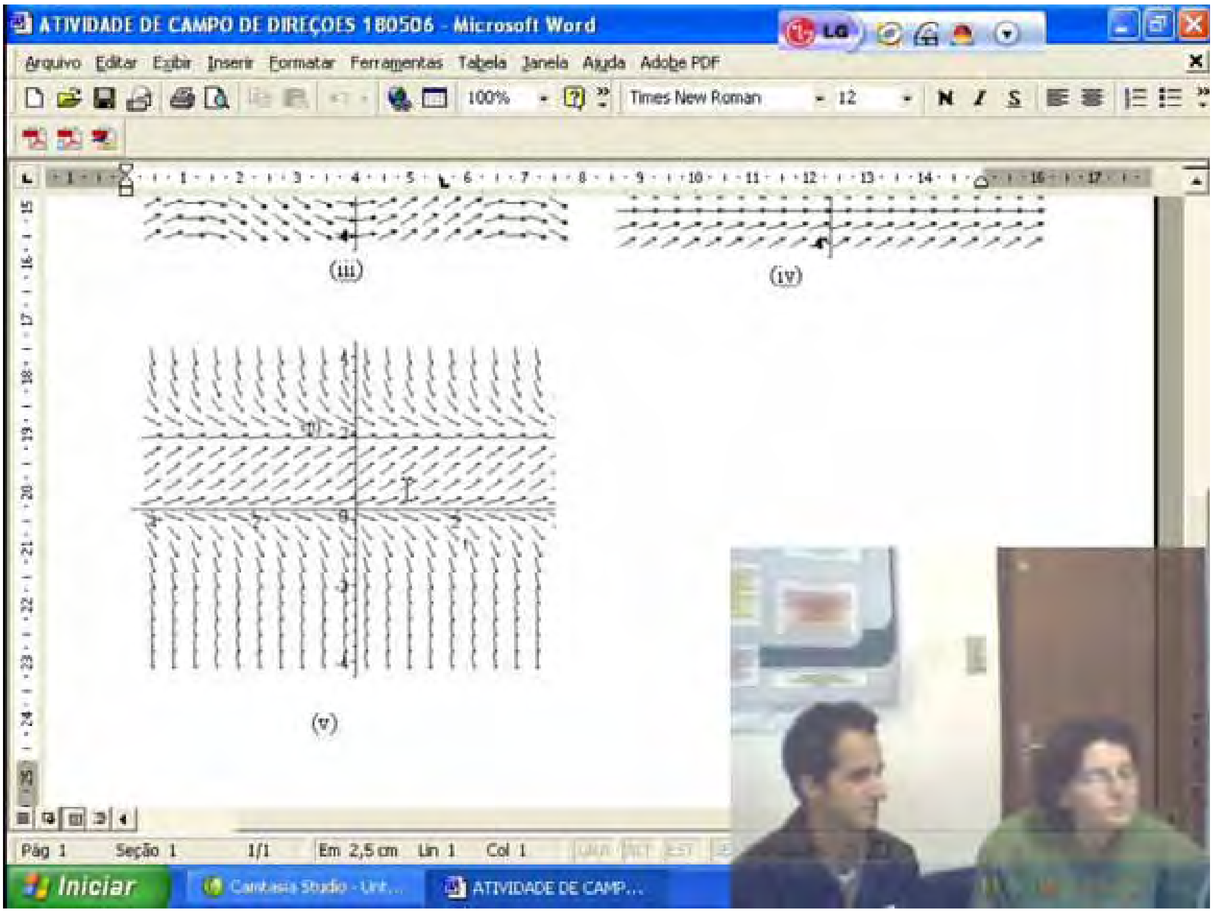


Figura 4.23. Ronaldo comentando sobre o gráfico (v) com Viviane

Viviane: É tem que ver porque aqui vai ser constante no dois.

Ronaldo: É todas elas quase vão...
Viviane: Não essa aqui não. (apontando para o gráfico (iv), ilustrado Quadro 4.4).
Ronaldo: No três, essa aqui não tem. (referindo-se, respectivamente aos gráficos (iv) e (iii) do Quadro 4.4).
Viviane: Acho que melhor a gente ir vendo onde é constante não é? Porque nessa primeira ela depende de x.

A partir desse momento da discussão, Adriano inicia sua participação nessa atividade.

Viviane: Bom e agora?
Adriano: Eu acho que a gente devia dar valores para x e acompanhar.
Ronaldo: Mas é para analisar, não é?
Adriano: É porque é assim, se eu tiver a derivada, a derivada é o ângulo que... Qual que é a medida do ângulo que ele tá evoluindo. Dependendo de como este ângulo se comportar a gente sabe mais ou menos o que está acontecendo.
Viviane: Então vamos atribuir valores. dx, dt igual a seno de x. Porque aqui ela depende de x, nessa primeira. (Viviane retoma a primeira equação diferencial dada na atividade, (Quadro 4.4)).
Ronaldo: Qual a diferença entre seno de x e seno de t?(Itens (a) e (b) do Quadro 4.4).
Adriano: É isso que eu to querendo enxergar.

Viviane: Boa idéia. Acho que vai dar diferente na hora de resolver. Se eu resolver essa equação vai ficar um sobre seno de x, dx igual a dt. E a outra vai ficar, dx igual seno de t, dt, vão ser diferentes, e ai se integrar os dois lados vai dar.... x é isso? x de t é igual..., qual a integral de seno mesmo, é cosseno?É menos. Entendeu? Agora essa daqui eu não sei integrar. (referindo-se à equação do item (a) da atividade, ilustrada no Quadro 4.4).

Viviane: Então essa daqui que dá menos cosseno, então acho que é essa daqui oh! Porque as soluções vão ser menos cosseno.

Adriano: É a curva da menos cosseno.

Viviane: É acho que vai ser essa daqui a (b). (Fazendo referência ao gráfico (iii) esboçado na atividade, (Quadro 4.4)).

Deste trecho de transcrição pode-se observar que, até esse momento da atividade, nem todos os alunos estavam utilizando o conceito de campo de direções como uma ferramenta de auxílio na análise de equações diferenciais ordinárias. Viviane argumentou sua escolha em função da solução que ela obteve ao resolver a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = sen(t)$, mesmo tendo no início concordado com Adriano em atribuir valores para esboçar o campo de direções. Já, com relação à equação $\frac{dx}{dt} = sen(x)$, eles equivocadamente esboçam uma solução algébrica, porém essa solução encontrada não os auxiliou na análise e nem na escolha do respectivo campo. Parece que para Viviane, o raciocínio algébrico prevalece ao geométrico. Eles comentam que estava difícil efetuar a relação pedida e resolvem continuar analisando as demais equações dadas na atividade. O trecho da transcrição do diálogo ilustra a discussão.

Adriano: Olha, eu acho que a (e) é a (ii). Porque ela lembra a equação de Verhulst. Ela sobe e depois ela tende para o equilíbrio né! Só de "olhômetro" mesmo. (Referindo-se à equação (e) $\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{4}x^2$ e o gráfico (ii) que podem ser observados no Quadro 4.4).

Viviane continua buscando as soluções algébricas para as equações diferenciais ordinárias dadas. Já Adriano continua querendo analisar a variação dos ângulos. Ele atribui valores 1, 2 e 3 para x no segundo membro da equação $\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{4}x^2$ e comenta:

Adriano: É estranho essa (e), ela começa a crescer e depois ela decresce muito rápido. Você calcula no ponto 1 ela te dá 2,25, calcula no ponto 2 ela te dá 1 , você calcula no ponto 3 ela te dá -1,25. Começou crescer...

Viviane: Então pode ser essa aqui oh! (referindo-se ao gráfico (ii), Quadro 4.4).

Adriano: É ela cresce, quando chega no ponto 2 ela dá uma estabilizada e no ponto 3 ela começa decrescer.

Viviane: Tanto no positivo quanto no negativo. Qual que é essa a (e)? É, eu acho que essa (e) é essa mesmo. (referindo-se a simetria, com relação ao eixo x, do comportamento do campo de direções).

Eles continuam analisando os gráficos esboçados na folha de atividades e levam alguns minutos tentando resolver algebricamente, atribuindo valores, explorando os vários gráficos. Depois dessa pausa eles retomam a discussão, como apresentado na transcrição de um trecho do diálogo.

Viviane: Agora essa (d) aqui... Acho que eu achei qual que é a (d) (referindo-se à equação $\frac{dx}{dt} = x(2-x)$). *Acho que é essa aqui óh, porque quando x é zero dá zero, então é no zero aqui, pra cá ele muda, e no x igual a dois é zero também. Deixa eu ver pra x igual a menos um, é isso mesmo. Nardo, acho que a (5) é a (d).*(Figura 4.24).

Acredito que, a partir desse momento, Viviane foi influenciada por Adriano a buscar analisar a equação através do conceito de campo de direções, além da tentativa de resolução das equações. E ela continua em sua análise.

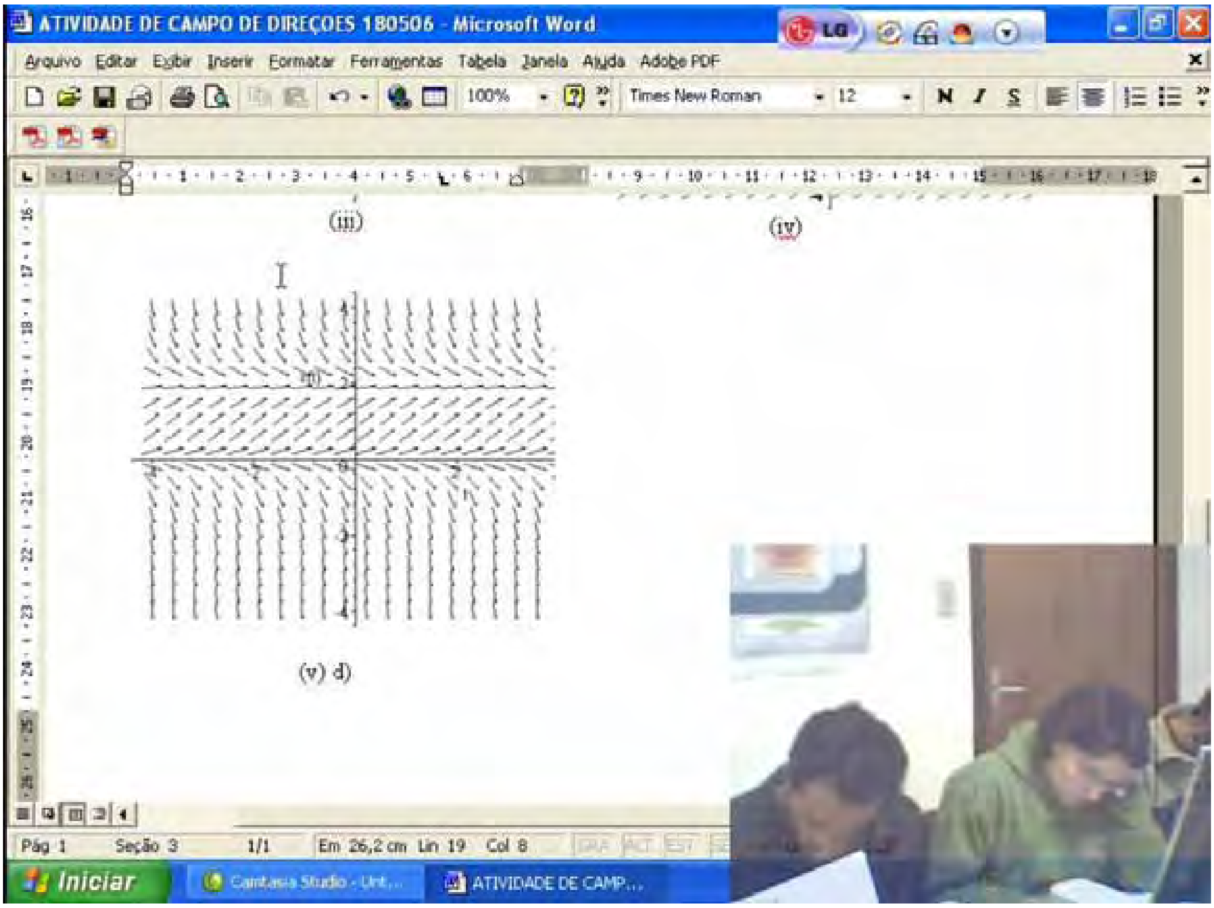


Figura 4.24. Os alunos analisando o gráfico (v) relacionando-o à equação (d)

Viviane: Eu acho que a (c) é a (i). Porque quando x é zero dá dois. Aí quando x é dois, dá zero. E como é ln ela vai crescer exponencialmente.

Suponho que esse último comentário de Viviane se deve ao fato dela ter explicitado algebricamente t em função de x, utilizando-se de separação de variável para a equação $\frac{dx}{dt} = 2 - x$, obtendo a expressão $t(x) = -\ln|2 - x|$. Sendo assim, parece ser evidente que a aluna coordena a análise da expressão algébrica da solução com a análise da equação através do comportamento do campo de direções.

Adriano: Ela vai e tende para uma constante.
Viviane: É eu acho, agora não sei. Por exemplo, se eu pegar para x igual a três vai dar negativo, que já é para cima do dois. Agora pode ser essa aqui também né! Não, não pode, pois se x for menos dois vai dar quatro não vai dar zero de novo. (possivelmente referindo-se ao gráfico (iv) do Quadro 4.4).

Na seqüência Viviane retira-se da discussão da atividade. Ronaldo e Adriano vão à busca das soluções das equações utilizando *software* algébrico Maple. No entanto, eles não obtêm êxito com os comandos e solicitam minha intervenção.

Já Marcos e Shen encaminham a atividade da seguinte forma. Os alunos analisaram os gráficos dados, utilizaram a planilha de cálculo para calcular os vetores tangentes para o esboço do campo de direções. O trecho abaixo ilustra o início da discussão da dupla Shen e Marcos que foi propiciada por esta atividade.

Marcos: Pra ver quem é quem aqui?
Shen: Isso.
Marcos: dx/dt=sen(x), dx/dt=sen(t), qual a diferença disso?

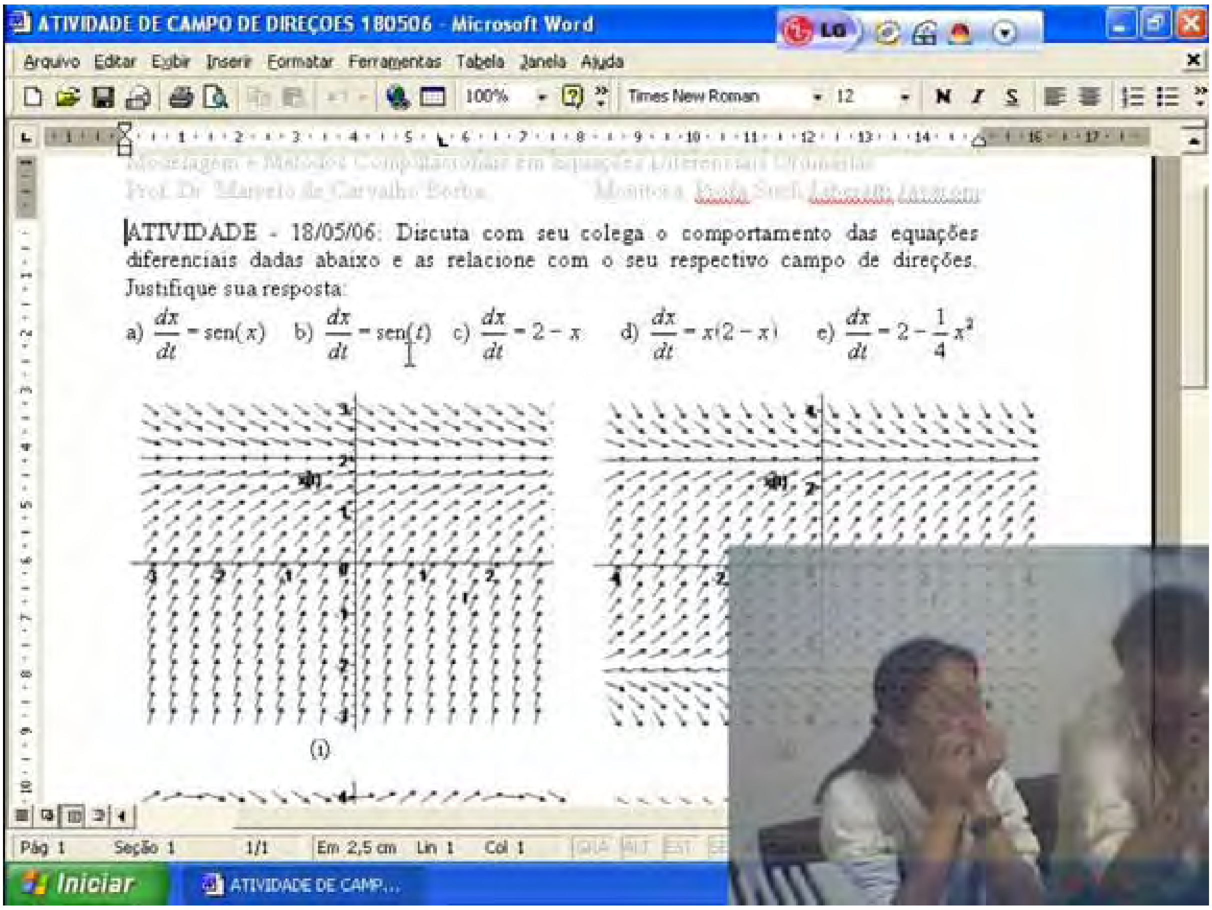


Figura 4.25. Marcos e Shen discutindo a diferença entre as equações (a) e (b)

Shen: Aquela depende de x e o outro de t (apontando para as duas primeiras equações, Figura 4.25).

Marcos: É isso o que to querendo enxergar... Integrar esse treco ai, né?! Bem que isso daí sem integrar já dá pra fazer, oh?! Já dá pra relacionar facinho, porque óh!!! Aqui vai ser o sen(x), né?! (referindo-se ao segundo membro da primeira equação).

Shen: A hora que integrar vai ser cos(x).

Marcos: Aqui tá x né? E o que tá aqui? (referindo-se aos eixos da ordenada e da abscissa, respectivamente, no gráfico (i), Figura 4.25).

Shen: Para mim aqui é x e aqui é y.

Marcos: Aqui tá t né? (apontando para o eixo das abscissas) *Está fácil de tirar não tá? Quando t for zero, dx/dt vai ser seno de zero, quanto dá seno de zero?To fazendo a (b) tá?!*

Shen: A b?

Marcos: A b, t dx/dt. t igual a zero, seno de zero é?

Shen: Zero.

Marcos: Zero. Quando ele for... Quando o t for pi sobre dois, quanto que dá?

Shen: Ah quando x for pi sobre dois...

Marcos: Dá um.

Shen: Isso.

Marcos: Menos pi sobre dois, menos um, menos pi?!

Shen: Zero.

Marcos: Zero. Daqui pra cá ele cresce?

Shen: hah, hah....de zero a pi sobre dois.

Marcos: Aqui vai dar mais ou menos um e meio.
Shen: Ah como?
Marcos: Mais o menos né, pi sobre dois, três vírgula quatorze por dois, aproximadamente, um e meio. Então no um e meio, dx/dt vai ser um. Como que é a inclinação um? Assim?
Shen: Inclinação um, perai..noventa graus?!
Marcos: Então no um e meio tem que ser noventa graus mais ou menos não é?

Shen toma a folha que contém os gráficos dos campos de direções e observa que não tem nenhum comportamento assim.

Shen: Nenhum.
Marcos: Nenhum?Aqui oh! (referindo-se ao gráfico (i), Figura 4.25). *Não! Quando x é zero, dx/dt é zero. Acho que é essa aqui oh!* (Marcos aponta com o mouse o gráfico (iv), do Quadro 4.4).

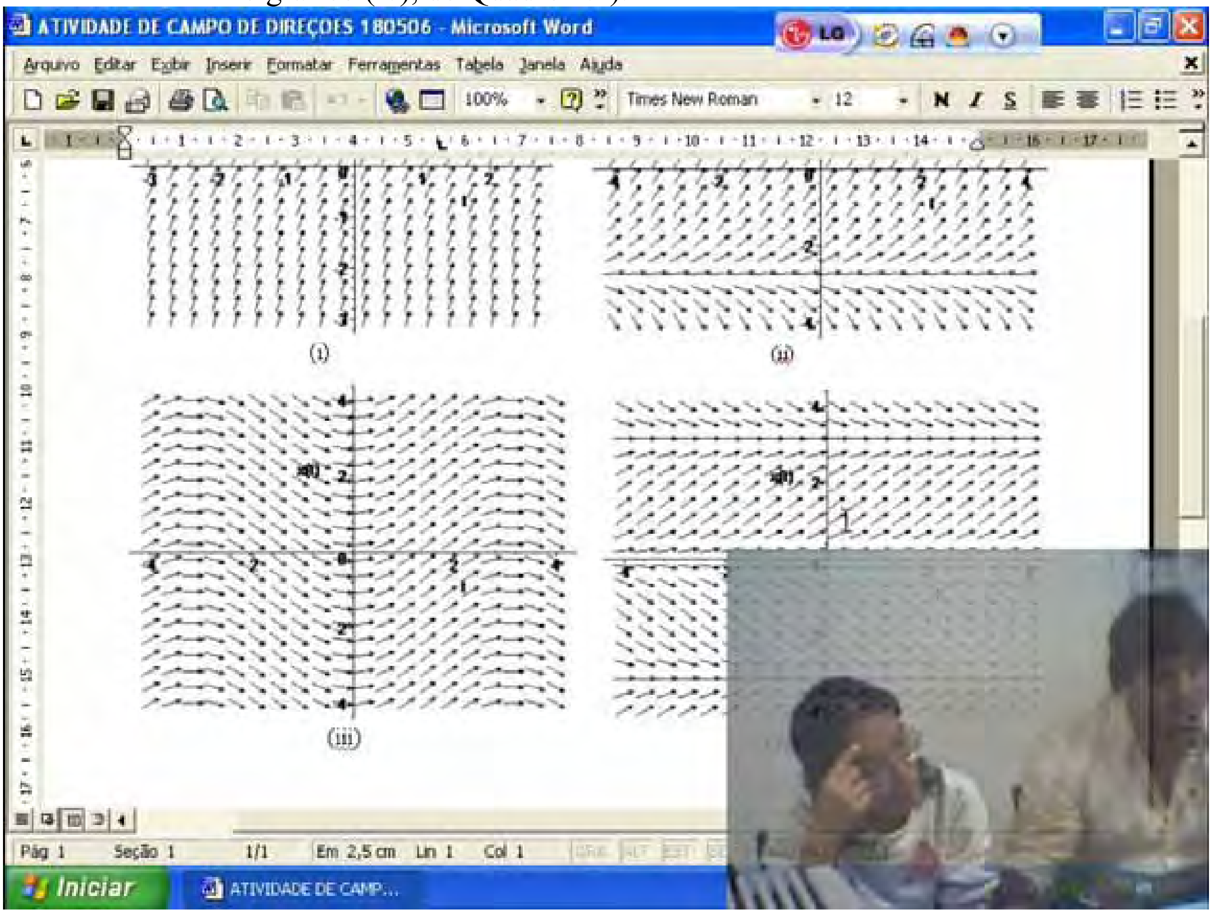


Figura 4.26. Marcos e Shen analisando o gráfico (iv) relacionando-o à equação $\dfrac{dx}{dt} = sen(t)$

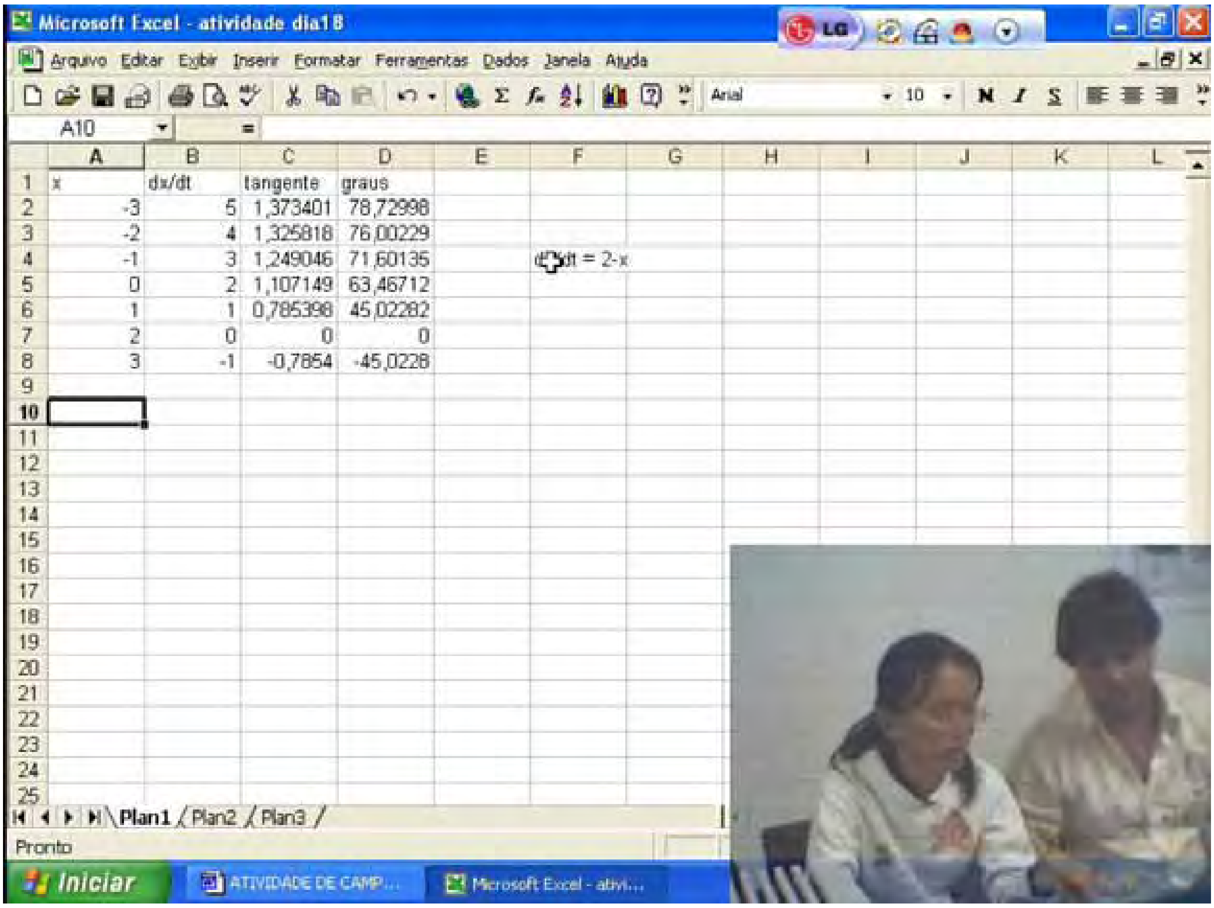
Shen: O b, letra b?
Marcos: É.
Marcos: Que quando é pi sobre dois vai ser um. Não vai ser um?
Shen: ahã! (concordando)
Marcos: Ou não?! O gráfico aqui no eixo aqui é t? (apontando para o eixo da abscissa dos gráficos esboçados na atividade, Quadro 4.4).
Shen: Isso.

Marcos: E aqui é x? (apontando com o mouse a expressão do seno de x, na equação $\frac{dx}{dt} = sen(x)$).

Neste instante, parece que Marcos suspeitava que sua análise não estava relacionada com a equação $\frac{dx}{dt} = sen(t)$ mas sim com a equação $\frac{dx}{dt} = sen(x)$.

Marcos: Seno de x é zero, seno de zero é quanto? (ainda apontando com o mouse a primeira equação $\frac{dx}{dt} = sen(x)$).
Shen: Seno de zero é zero.
Marcos: Seno de zero é zero, então ela tá aqui oh! (apontando com o mouse o eixo da abscissa do gráfico (iv) da atividade, Quadro 4.4).
Marcos: Ai seno de pi sobre dois é?
Shen: É um.
Marcos: Dois e meio, um vírgula três... (pareceria que estava analisando o comportamento apresentado no gráfico (iv), Figura 4.26).
Marcos: Vamos ver essa. Quando x é zero, dx/dt é dois. (apontando com o mouse a equação (c) $\frac{dx}{dt} = 2 - x$). *E x ta aqui né?* (apontando com o mouse o eixo da ordenada dos gráficos da atividade). *Quando a derivada é dois, quanto é?Tem que fazer atan, não tem?Ver qual é o ângulo. Se a derivada é dois, qual é o ângulo?*
Shen: Tem que fazer.
Marcos: Arco tangente. Pode usar Excel aqui?
Shen: Pode.

Sendo assim, decidem começar pela equação $\frac{dx}{dt} = 2 - x$, atribuindo os valores de x que variaram de menos três a três, talvez influenciados pelo gráfico (i) dado na atividade (Quadro 4.4), gerando uma tabela de valores (Figura 4.24). Apesar de escrever tangente na coluna C da planilha, eles tinham consciência que a função utilizada era arcotangente.



x	dx/dt	tangente	graus
-3	5	1,373401	78,72998
-2	4	1,325818	76,00229
-1	3	1,249046	71,60135
0	2	1,107149	63,46712
1	1	0,785398	45,02282
2	0	0	0
3	-1	-0,7854	-45,0228

Figura 4.27. Tabela elaborada por Marcos e Shen para analisar a equação $\frac{dx}{dt} = 2 - x$

A partir destes valores, a dupla discute sobre o possível comportamento procurado. O trecho da transcrição, a seguir, mostra essa discussão.

> *Marcos: Quando x é menos três, dá 78, e esse, esse e esse não pode ser, porque varia quando é menos três. Então tem que ser esse ou esse, mas esse também varia. Aqui é menos quatro, então não vai ser esse também.*

Após essa análise eles chegam à conclusão que nenhum gráfico dado atenderia ao comportamento dos valores da tabela. No entanto, Marcos observa que eles estão olhando no eixo da abscissa e teriam que olhar para o eixo da ordenada.

> *Marcos: Peraí, mas aqui é x, oh Shen, não é t, e nós estamos olhando para t e nós temos que olhar para x, temos que olhar para a ordenada, quando é menos três, vai ser 78. Menos dois vai dar 76, menos um..., óh é esse aqui.*

Parece que a confusão inicial dos alunos encontrava-se no reconhecimento da variável independente e variável dependente da equação, pois geralmente, associamos a variável independente no eixo da abscissa, denotado por *x*, e o da variável dependente no eixo da ordenada, denotado por *y*. No entanto, a EDO era dada por uma função *x* dependente de *t*. Identificaram o engano e esboçaram no caderno alguns vetores diretores (Figura 4.28).

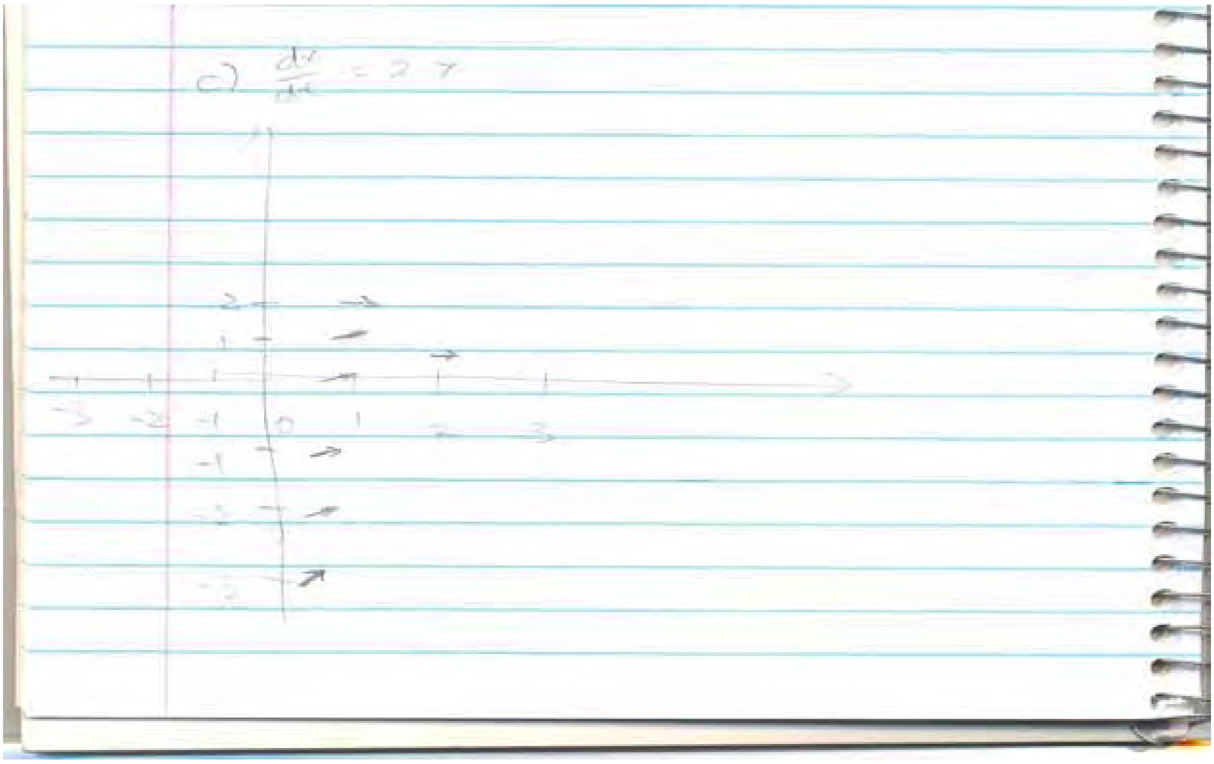


Figura 4.28. Esboço do campo de direções de $\dfrac{dx}{dt} = 2 - x$ elaborado por Marcos e Shen

Ao comparar o gráfico, por eles elaborado, com os gráficos dados na atividade, concluem que o gráfico (i) da atividade (Quadro 4.4) era o campo de direções para a equação em análise.

Eles continuam, a atividade proposta, elaborando uma tabela para a variação dos vetores diretores para a equação $\dfrac{dx}{dt} = sen(x)$, (Figura 4.29).

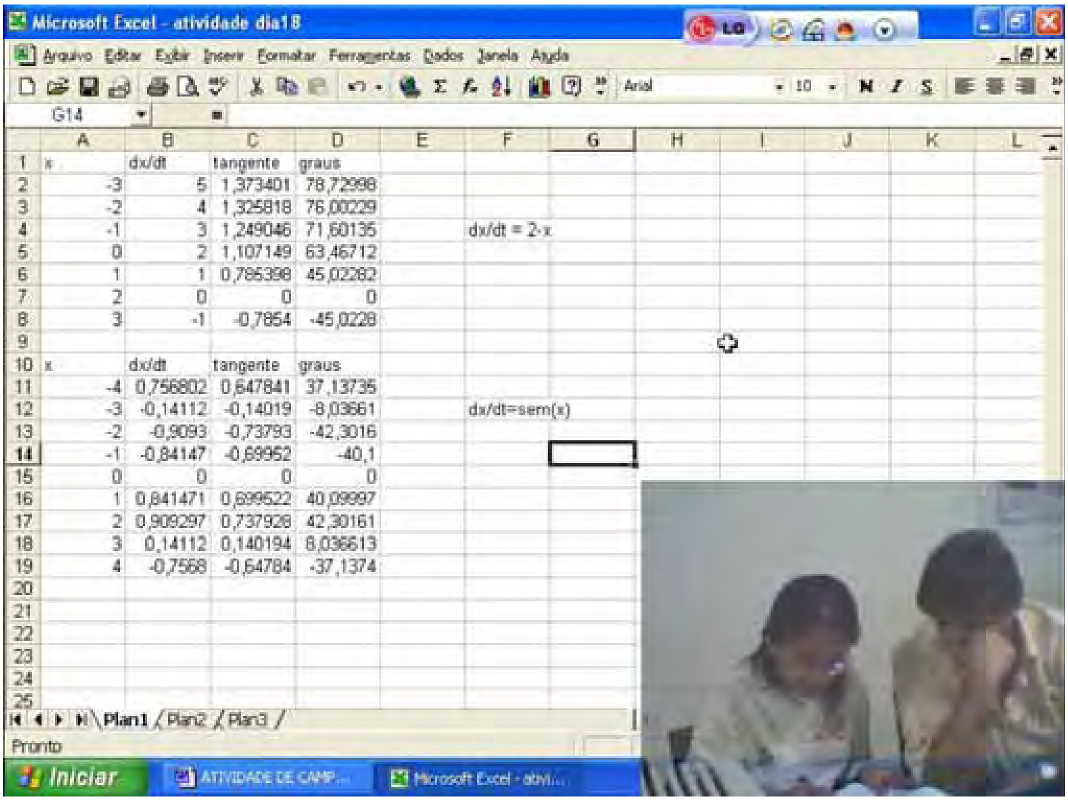


Figura 4.29. Marcos e Shen analisando os valores da tabela por eles gerada

A partir dos valores obtidos nessa tabela, os alunos esboçam no caderno alguns vetores diretores (Figura 4.30).

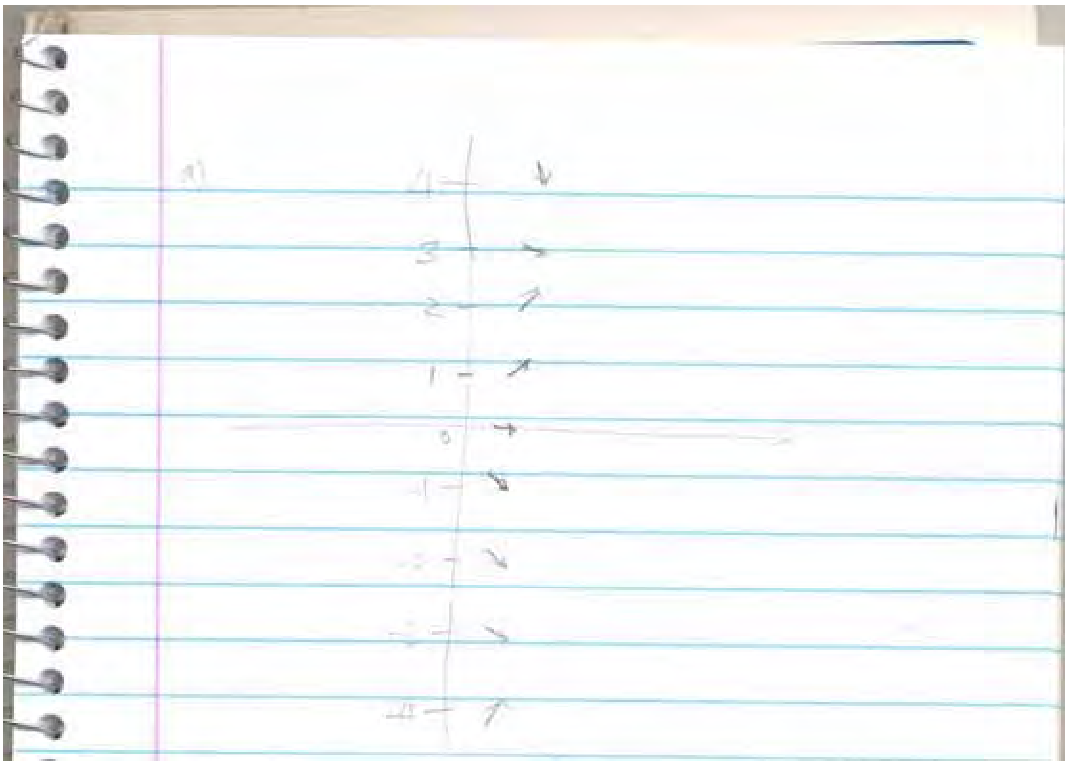


Figura 4.30. Esboço do campo de direções para $\dfrac{dx}{dt} = sen(x)$ elaborado por Marcos e Shen

O trecho do diálogo dos alunos evidencia como eles estavam raciocinando sobre o comportamento da equação $\frac{dx}{dt} = sen(x)$.

> *Marcos: Quando é zero é zero. No 4 é -37. -4 vai ficar positivo.*
> *Shen: É! No -4 é positivo. Então esse aqui não é.* (apontando para o gráfico (v) do Quadro 4.4). *Então é esse aqui.* (apontando para o gráfico (iv) do Quadro 4.4).
> *Marcos: E no +4? No +4 é negativo também. Ah é isso aí mesmo.* (concordando com Shen que o gráfico correspondente a essa equação era o (iv) do Quadro 4.4).

Na análise da equação $\frac{dx}{dt} = x(2-x)$, utilizando a planilha de cálculo, obtiveram a tabela (Figura 4.31).

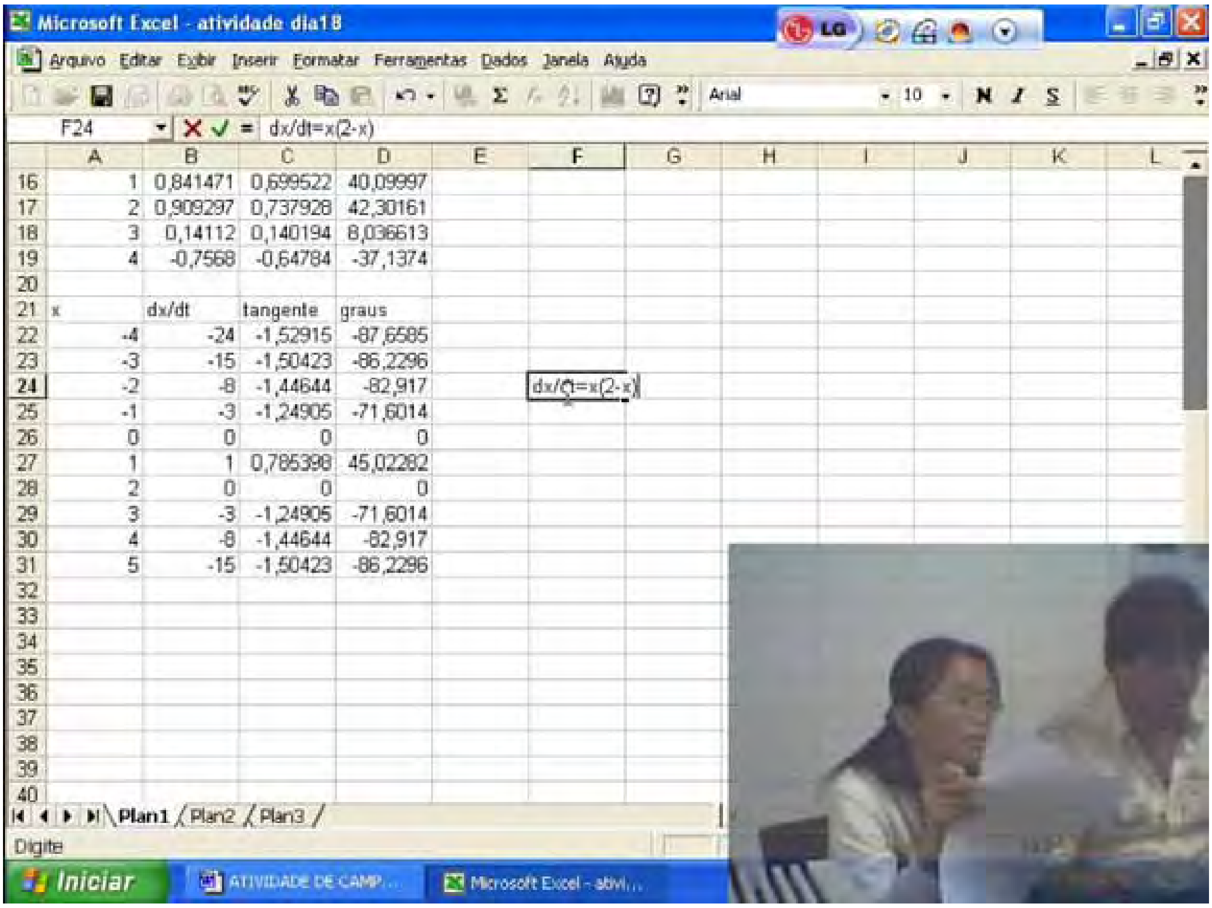
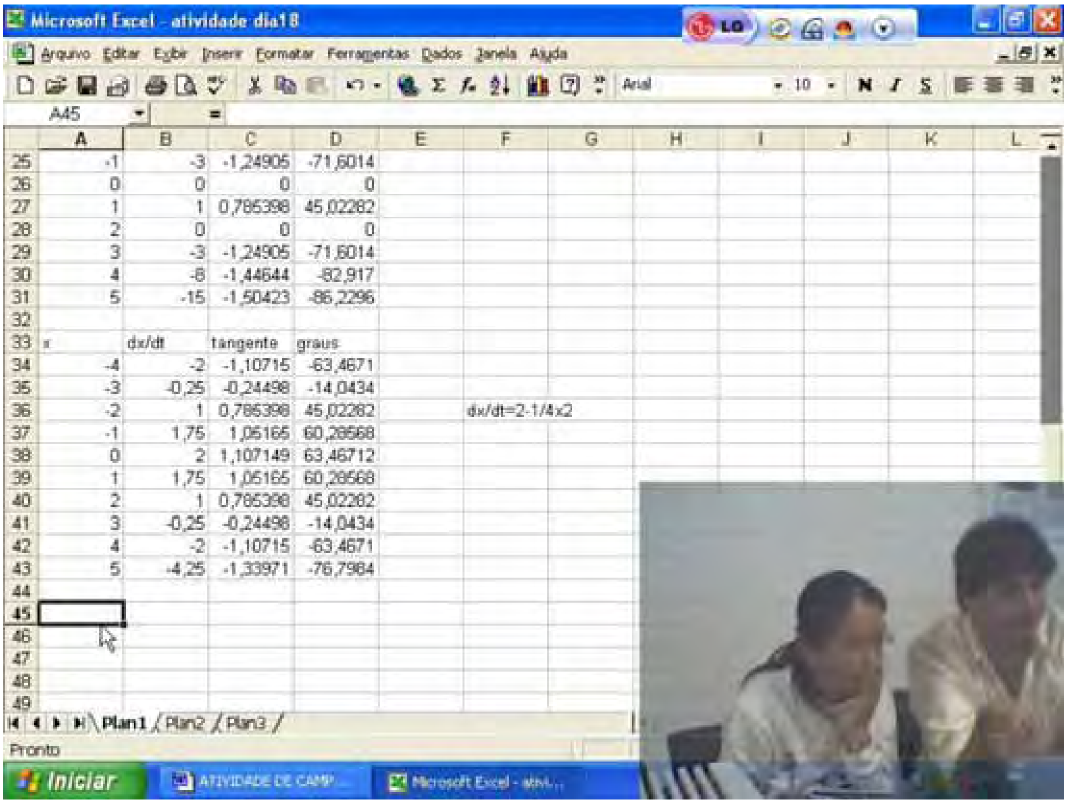


Figura 4.31. Tabela elaborada por Marcos e Shen para a equação $\frac{dx}{dt} = x(2-x)$

Eles concluíram, rapidamente, que o gráfico correspondente a essa tabela era o gráfico (v) dado na atividade. Para equação $\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{4}x^2$, geraram uma tabela (Figura 4.32).



	A	B	C	D	E	F
25	-1	-3	-1,24905	-71,6014		
26	0	0	0	0		
27	1	1	0,785398	45,02282		
28	2	0	0	0		
29	3	-3	-1,24905	-71,6014		
30	4	-8	-1,44644	-82,917		
31	5	-15	-1,50423	-86,2296		
32						
33	x	dx/dt	tangente	graus		
34	-4	-2	-1,10715	-63,4671		
35	-3	-0,25	-0,24498	-14,0434		
36	-2	1	0,785398	45,02282		dx/dt=2-1/4x2
37	-1	1,75	1,05165	60,28568		
38	0	2	1,107149	63,46712		
39	1	1,75	1,05165	60,28568		
40	2	1	0,785398	45,02282		
41	3	-0,25	-0,24498	-14,0434		
42	4	-2	-1,10715	-63,4671		
43	5	-4,25	-1,33971	-76,7984		

Figura 4.32. Tabela elaborada por Marcos e Shen para a equação $\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{4}x^2$

Shen esboçou alguns vetores diretores, a partir desses valores, no caderno (Figura 4.33).

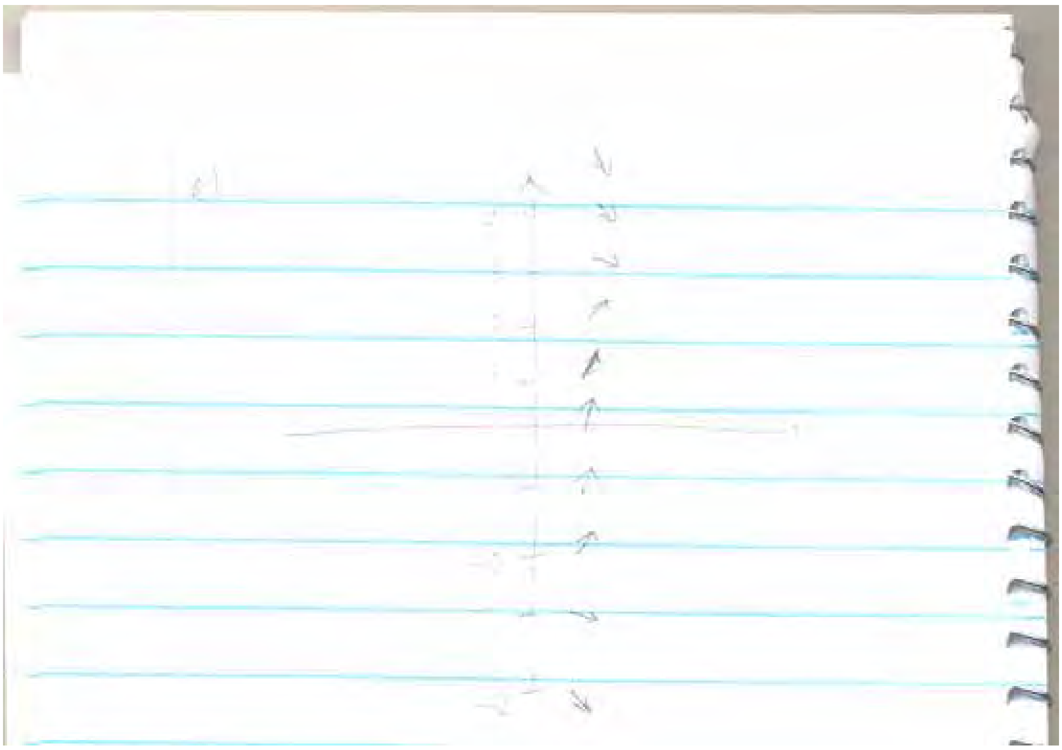


Figura 4.33. Esboço de vetores diretores, para a equação $\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{4}x^2$, desenhado por Shen

Ao comparar os valores da tabela e o esboço dos vetores com os gráficos dados na atividade, concluíram que o gráfico (ii), da atividade proposta, correspondia a essa equação.

E, finalmente começam a analisar a última equação, $\frac{dx}{dt} = sen(t)$.

Shen: Então só faltou essa (referindo-se à equação $\frac{dx}{dt} = sen(t)$).
Marcos: Bom, nessa aqui você, nós vamos atribuir valor para t.
Shen: Será que é?
Marcos: Aí você vai olhar para esse eixo ao invés de olhar para aquele, concorda? Ao invés de olhar para esse eixo (eixo da ordenada) você olha pra abscissa. (Neste momento ele aponta com a mão o eixo da abscissa t e para o eixo da ordenada x).
Shen: Hã. hã... (concordando).
Marcos: Põe t aqui, dt/dt,... (montando a tabela na planilha, Figura 4.34).

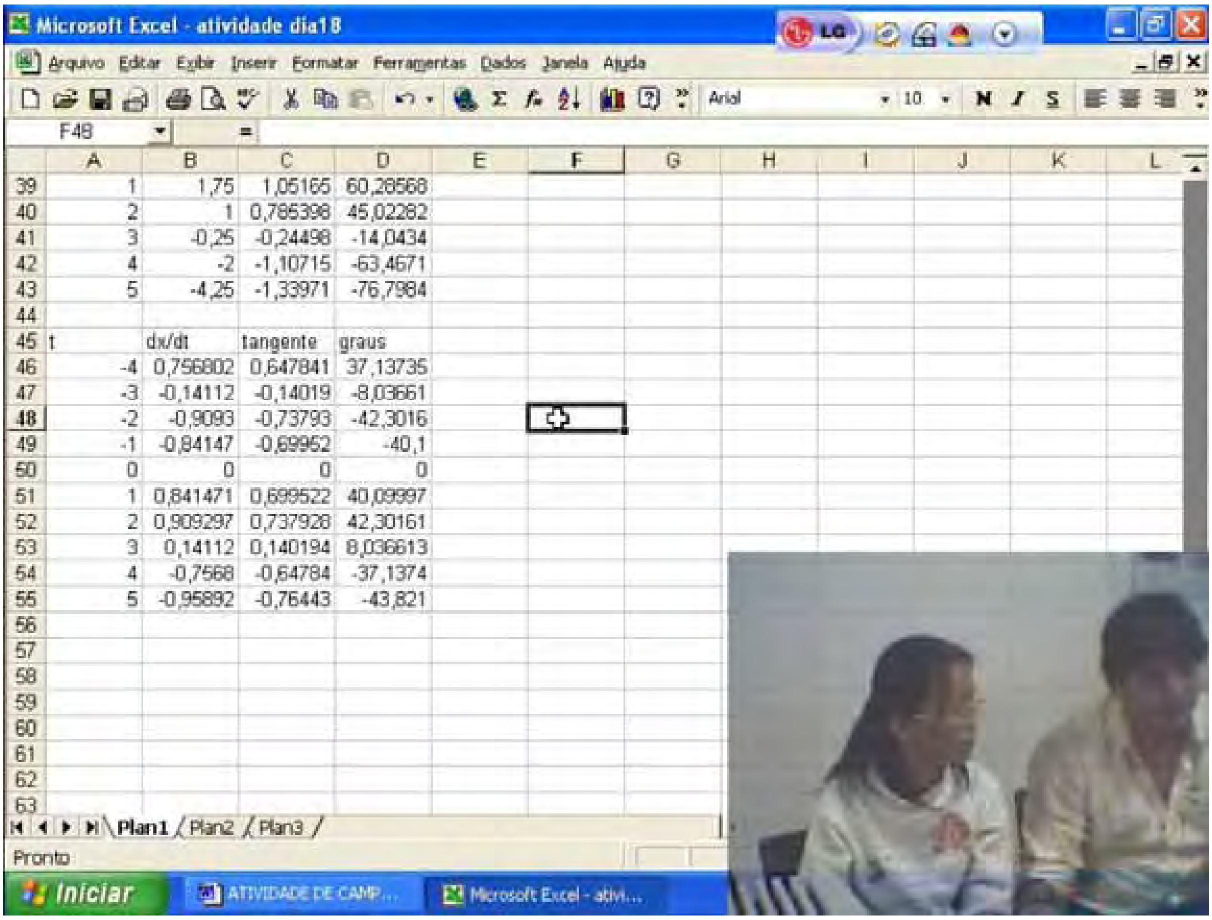


Figura 4.34. Tabela elaborada por Marcos e Shen para a equação $\frac{dx}{dt} = sen(t)$

Shen: Peraí, você disse que ao invés de olhar o eixo x...(mostra no papel o eixo da ordenada x).
Marcos: Você vai olhar aqui, esse eixo aqui (Marcos faz um gesto com a mão indicando o eixo da abscissa t). *O -4 vai ser 37, óh! O -3 vai já é negativo,*

> *-2, negativo, tá vendo? Tem que olhar assim!* (apontando novamente o eixo da abscissa).

O gráfico do campo de direções para essa equação, esboçado por Shen no caderno, é ilustrado na figura 4.35.

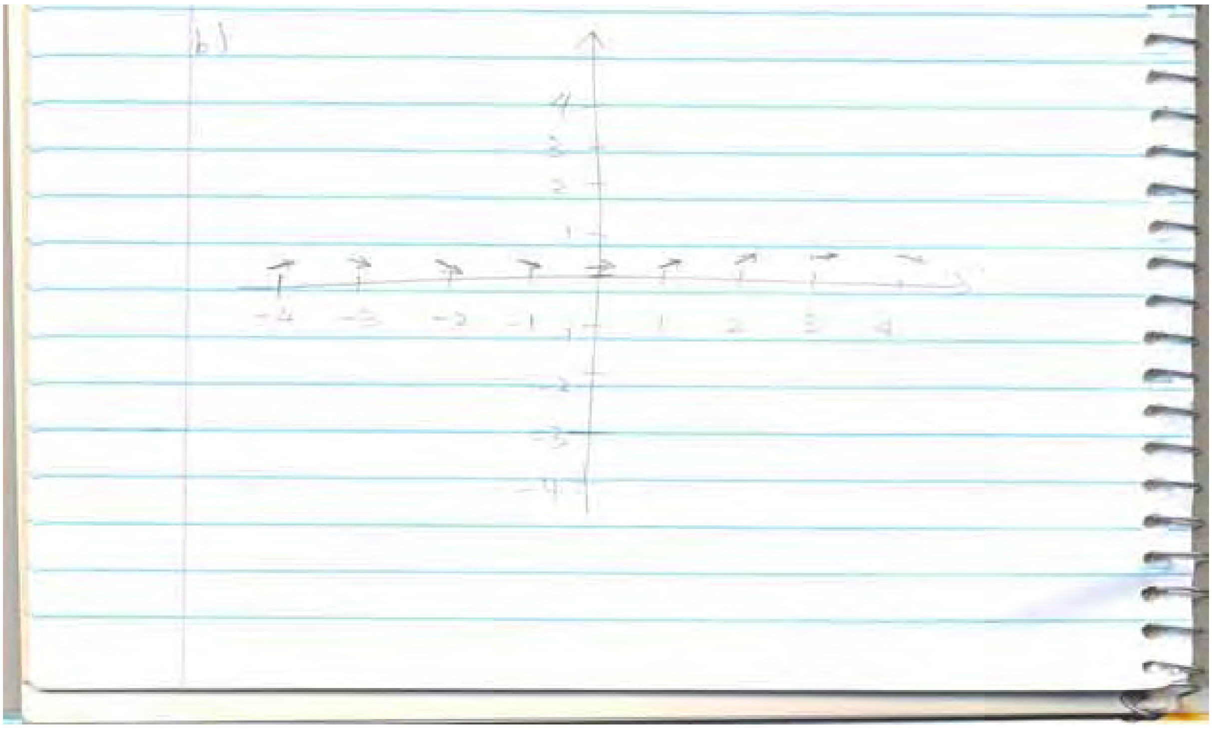


Figura 4.35. Esboço de vetores diretores, para a equação $\frac{dx}{dt} = sen(t)$, desenhado por Shen

Desta forma, eles relacionaram as várias equações e os vários campos de direções na folha da atividade proposta, figura 4.36.

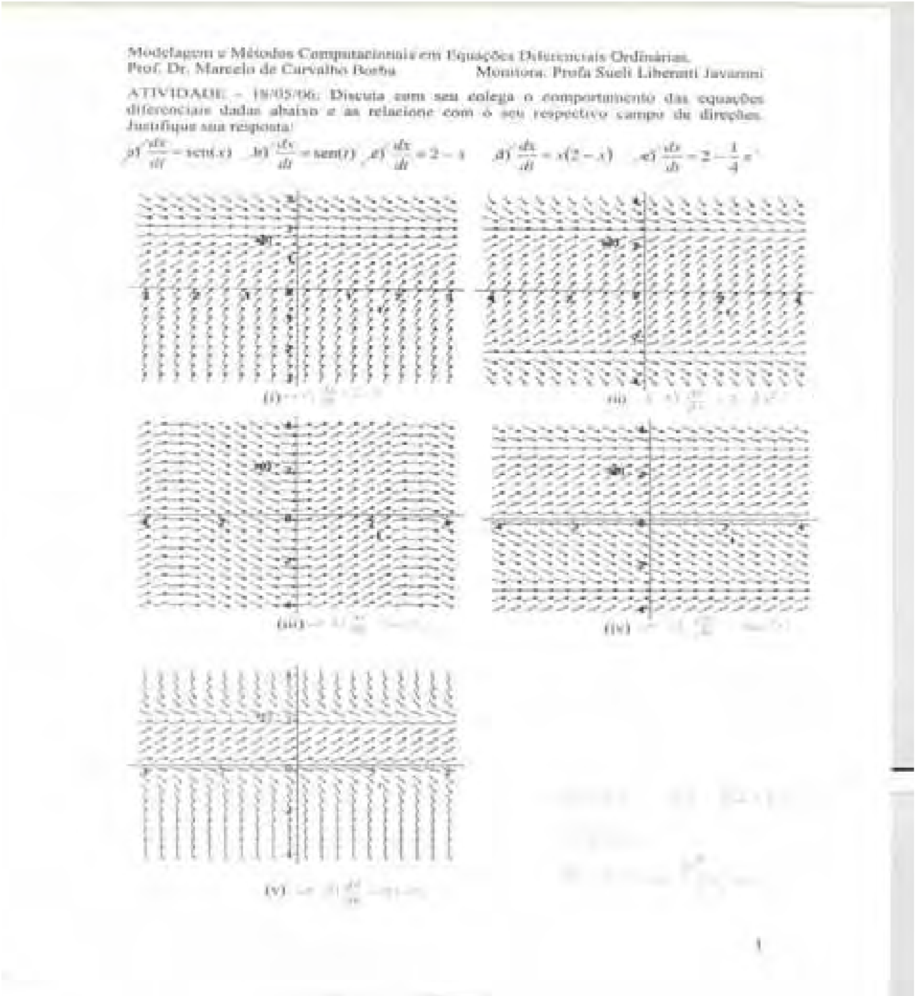


Figura 4.36. Relação entre os campos de direções e as equações, elaborada por Marcos e Shen

Esse episódio é composto pela discussão de dois grupos de alunos na atividade denominada “campo de direções”. Essa atividade teve por objetivo buscar evidências sobre o entendimento dos alunos acerca do significado do campo de direções para a exploração de equações diferenciais ordinárias. Pode-se depreender dessa análise que era ainda muito presente para alguns alunos a necessidade de determinar a expressão algébrica das soluções das equações diferenciais dadas. Viviane, no decorrer da atividade, buscou determinar tais soluções algebricamente e, somente a partir destas soluções é que a aluna buscava analisar e determinar qual deveria ser o respectivo campo de direções. Talvez possamos arriscar concluir que a primazia do aspecto algébrico prevalece ao aspecto geométrico, no caso da aluna. Já Adriano, por outro lado, buscava analisar a variação da derivada.

No entanto, a dupla formada por Marcos e Shen buscou analisar as equações diferenciais ordinárias, dadas na atividade, através dos campos de direções. E, para determinar os ângulos desses vetores, eles utilizaram a planilha eletrônica e esboçaram alguns vetores diretores no caderno na busca do respectivo campo de direções, dado no roteiro da atividade.

Na análise do desenvolvimento desta dupla fica aparente a contribuição da interação das várias mídias na discussão dos alunos, criando, assim, diferentes possibilidades na investigação destes conteúdos matemáticos.

4.5 Episódio – Lei do resfriamento

Neste episódio trataremos da discussão da atividade denominada lei do resfriamento que foi desenvolvida pelos alunos Shen, Marcos, Adriano e Viviane. Esta atividade teve por objetivo avaliar dados discretos obtidos experimentalmente, bem como propiciar aos alunos a discussão do problema clássico de resfriamento de um corpo.

Os dados foram coletados por meio de um experimento. A temperatura do líquido contido em uma lata de cerveja foi anotada, em diversos momentos, por determinado tempo, gerando assim um conjunto de dados discretos.

Na seqüência foi solicitado aos alunos que explorassem esses dados utilizando a planilha de cálculo Excel, para elaborar um modelo que os representasse. Uma segunda rodada de valores da temperatura foi tomada, em um segundo experimento, com condições diferentes do primeiro gerando, assim, outro conjunto de dados. Foi solicitado aos alunos que analisassem esses novos dados e comparassem com os anteriores. Portanto, nessa atividade, diferente das demais, os alunos não analisaram modelos "prontos", mas sim elaboraram um modelo matemático para representar o fenômeno em questão. A seguir apresento como a atividade foi proposta aos alunos.

Atividade: Modelo de resfriamento de um corpo – difusão de calor

Um corpo que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em um meio ambiente na temperatura T*, tende àquela do meio que o cerca* T_a*. Assim, se a temperatura* $T < T_a$*, este corpo se aquecerá e, caso contrário, se resfriará. A temperatura do corpo, considerada uniforme, será, pois uma função do tempo* $T(t)$.

Com um termômetro de precisão decimal, e considerando que às 14 horas a temperatura ambiente era de $20{,}8°C$*, as medidas da temperatura de cerveja de uma lata de* $350\,ml$ *foram tomadas. Os valores da temperatura* T *em relação ao tempo são dados na Tabela1, a seguir.*

Horas t	*Temperatura* T
14h2min	*8,5*
14h12min	*9,9*
14h22min	*11,6*
14h32min	*12,5*
14h42min	*13,4*
14h52min	*14*

Horas t	*Temperatura T*
15h2min	14,6
15h12min	15,1
15h22min	15,5
15h32min	16
15h42min	16,4
15h52min	16,8
16h2min	17,1
16h12min	17,5
16h22min	17,9
16h32min	18,3
16h42min	18,6
16h52min	18,8
17h2min	19
17h12min	19,3
17h22min	19,5
17h32min	19,6
17h42min	19,7
17h52min	19,8
187h2min	19,9
18h12min	20
18h22min	20,2
18h32min	20,3
18h42min	20,4
18h52min	20,49
19h2min	20,5

Tabela1 - Valores da temperatura do líquido com relação ao tempo

Observe que quanto maior for valor de $|T - T_a|$ *mais rápida será a variação de* $T(t)$. *Isto é evidenciado de forma mais precisa pela chamada Lei de resfriamento de Newton: "a taxa de variação da temperatura de um corpo (sem fonte interna) é proporcional à diferença entre sua temperatura* $T(t)$ *e a do meio ambiente* T_a *, em cada instante* t *". Ou seja,*

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - T_a) = \lambda(T_a - T) \qquad (*)$$

onde $\lambda > 0$, *pois se* $T > T_a$ *então* $\frac{dT}{dt} < 0$ *(esfria) e se* $T < T_a$, $\frac{dT}{dt} > 0$ *(esquenta) (VERIFIQUE COM OS DADOS).*

Questões:

1. *Qual é a solução trivial da equação (*)? E qual o seu significado físico?*
2. *Resolva, usando o comando dsolve do Maple, a equação (*), considerando que* $T(0) = T_0$. *Qual a solução algébrica encontrada?*

3. *Faça um esboço da temperatura T em relação ao tempo t. Qual o comportamento desses pontos? Qual curva se ajusta a esses pontos? É compatível com a equação algébrica determinada em (2)?*
4. *Agora, calcule $T_a - T$. Esboce no plano cartesiano $T_a - T$ pelo tempo t. Qual a função y que melhor ajusta esses pontos? Usando o Excel, ajuste esses pontos determinando a expressão de ajuste no comando opções, clique em exibir equação no gráfico.*
5. *Agora calcule a temperatura usando o modelo $T(t) = \mathrm{T_a} - \mathrm{y}$, onde y é a função encontrada em (4).*
6. *Esboce em um mesmo gráfico os dados da T real e da estimada pelo modelo encontrado em (5). O que você observa?*
7. *O que acontece quando o tempo $t \to \infty$ no modelo encontrado em (5)? O que isto significa?*

Observação: O fato de T tender a T_a somente quando $t \to \infty$ pode dar a impressão que a equação (*) não se presta para modelar situações reais de estabilidade. Entretanto, em termos de modelagem matemática, $t \to \infty$ deve ser interpretado por: "t assume valores grandes, relativamente à evolução das variáveis analisadas". Por exemplo, neste modelo de resfriamento, na equação (*), podemos considerar que a temperatura de um corpo "atinge" a temperatura ambiente quando estiver "bem próxima" desta temperatura, digamos $T(t^*) = \pm 0{,}99T_a$ e isto ocorre em um tempo t^* finito.

Considerando $T(t^*) = \pm 0{,}99T_a$, calcule o tempo t^* necessário de equilíbrio para esse modelo e também para esses dados.

***Desafio:** Às 7 horas, um indivíduo é encontrado morto pela sua secretária, que liga imediatamente para a polícia. Às 10h30mim quando os peritos chegam ao local, verificam que a temperatura ambiente é de $22^\circ C$ e a temperatura do corpo é de $29{,}4^\circ C$. Meia hora após, o perito, novamente mede a temperatura do corpo e verifica que estava em $25{,}8^\circ C$. Passado mais 30 minutos, novamente, a temperatura é medida e é de $23{,}9^\circ C$. Após uma breve discussão entre os peritos, a secretária é presa. Por quê? (Obs. Considere que a temperatura normal de uma pessoa viva seja constante e igual a $36{,}5^\circ C$).*

A partir da leitura desse texto, os alunos começam a realizar as tarefas solicitadas discutindo as questões propostas. Marcos e Shen tomam os dados discretos da temperatura com relação ao tempo e utilizando ajuste de curvas da planilha constroem o diagrama de dispersão e concluem que os tais dados tinham o comportamento da função logarítmica, conforme ilustra a Figura 4.37.

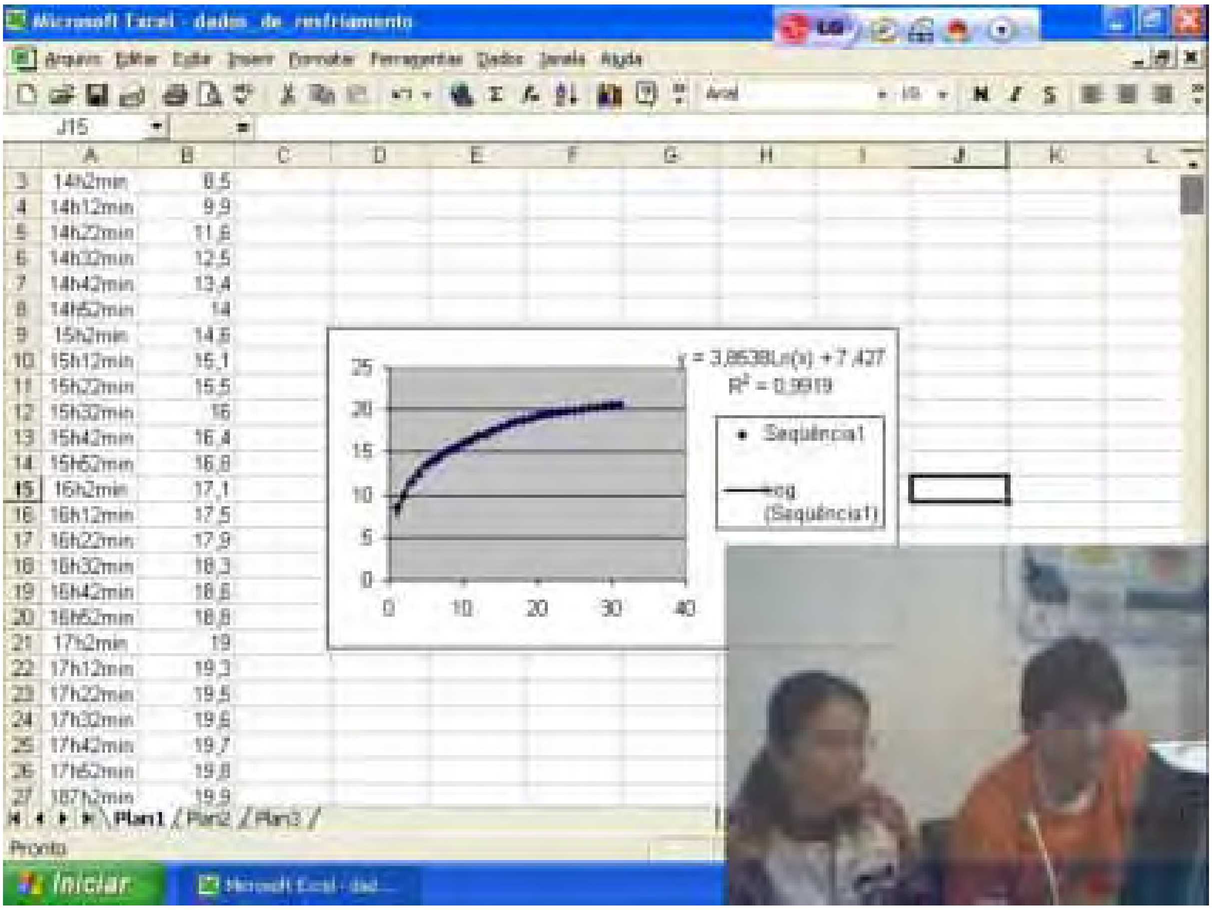


Figura 4.37. Shen e Marcos analisando a curva de ajuste dos dados

O trecho a seguir ilustra a minha intervenção na discussão dos alunos acerca do modelo que eles estavam elaborando.

Sueli: Esse comportamento que vocês estão vendo na tela aqui....(Estava me referindo ao diagrama de dispersão para os dados discretos do resfriamento que os alunos haviam feito usando a planilha eletrônica, Figura 4.37).
Marcos: Tá certo isso? É ln mesmo?
Sueli: Então, esse comportamento será que é ln(x)? Nós não fizemos nenhum estudo, ate agora, de modelos que parece com isso aí. Ou, por outro lado, se você analisar como esta temperatura está caindo, dá para tirar alguma conclusão acerca dela? Os modelos que nós estudamos até hoje, quais foram?
Marcos: Exponencial...
Sueli: Então, mas qual era a da exponencial? Do objeto em queda, era isso?
Marcos: Crescimento populacional de Malthus e Verhulst.
Sueli: Objeto em queda, como era o comportamento dos pontos?
Marcos: Era mais ou menos parecido com isso aí.
Sueli: A gente chamou de exponencial assintótica, não é? E como era a equação que gerou aquele comportamento?
Marcos: Era uma exponencial negativa?

Neste momento eu questiono os alunos sobre o comportamento da função *ln(x)* quando a variável *x* tende ao infinito e como era o comportamento da temperatura, dada na forma tabelar, que eles estavam analisando. Após essa discussão, analisando o comportamento da função logarítmica e o comportamento dos valores da temperatura, eles percebem que a função logarítmica não era um "bom" modelo para o fenômeno do resfriamento. E assim, sugeri que eles seguissem o roteiro da atividade proposta. Na seqüência, utilizam o Maple para determinar a solução analítica da equação $\frac{dT}{dt} = \lambda(T_a - T)$, obtendo a solução $T(t) = T_a + Ce^{-\lambda t}$. Ao considerar o problema de valor inicial (PVI) $\frac{dT}{dt} = \lambda(T_a - T), T(0) = 8{,}5$, obtiveram $T(t) = T_a + \left(\frac{17}{2} - T_a\right)e^{-\lambda t}$ como solução. Parecia que Marcos não estava entendendo essa resposta, pois ele questiona Shen sobre essa igualdade, conforme podemos observar no trecho do diálogo a seguir.

Marcos: E por que deu esse T_a *aí?*
Shen: Você teria que colocar T_a *igual a 20,8.*
Marcos: Por que?
Shen: Porque é o valor da temperatura ambiente.
Marcos: Mas não vai zerar porque é multiplicado por e ali. (ele se referia à solução encontrada).

Shen atribui, no comando dsolve do Maple, o valor de 20,8 para T_a e obtém a solução $T(t) = \frac{104}{5} - \frac{123}{10}e^{-\lambda t}$. Marcos comenta que essa solução T(t) tende a 20,8 quando o tempo aumenta.

Em seguida, minimizam a tela do Maple e voltam para a planilha de cálculo e montam o diagrama de dispersão para a variação de $T(t) - T_a$ com relação ao tempo, obtendo a expressão $y = 15{,}083e^{-0{,}1182x}$. No entanto, as variáveis da planilha são x e y e eles estavam trabalhando com as variáveis t e T, para o eixo das abscissas e para o eixo das ordenadas, respectivamente. Assim, eles analisam e reconhecem a relação entre as variáveis, identificando-as. Na seqüência montam uma tabela para os valores da temperatura estimada pelo modelo encontrado, $T(t) = 20{,}8 - 15{,}083e^{-0{,}1182t}$, onde t não representava o tempo, mas sim as tomadas de medida da temperatura. E Marcos questiona que se fizesse o gráfico da temperatura 'real' pela temperatura estimada, os pontos deveriam se comportar como a função identidade, ou seja, sua hipótese era que os valores estimados deveriam se comportar como os valores reais. Assim esperava que o gráfico gerado deveria ser o da identidade. Em seguida ele esboça o diagrama de dispersão para esses pontos (Figura 4.38), porém não avança na sua análise.

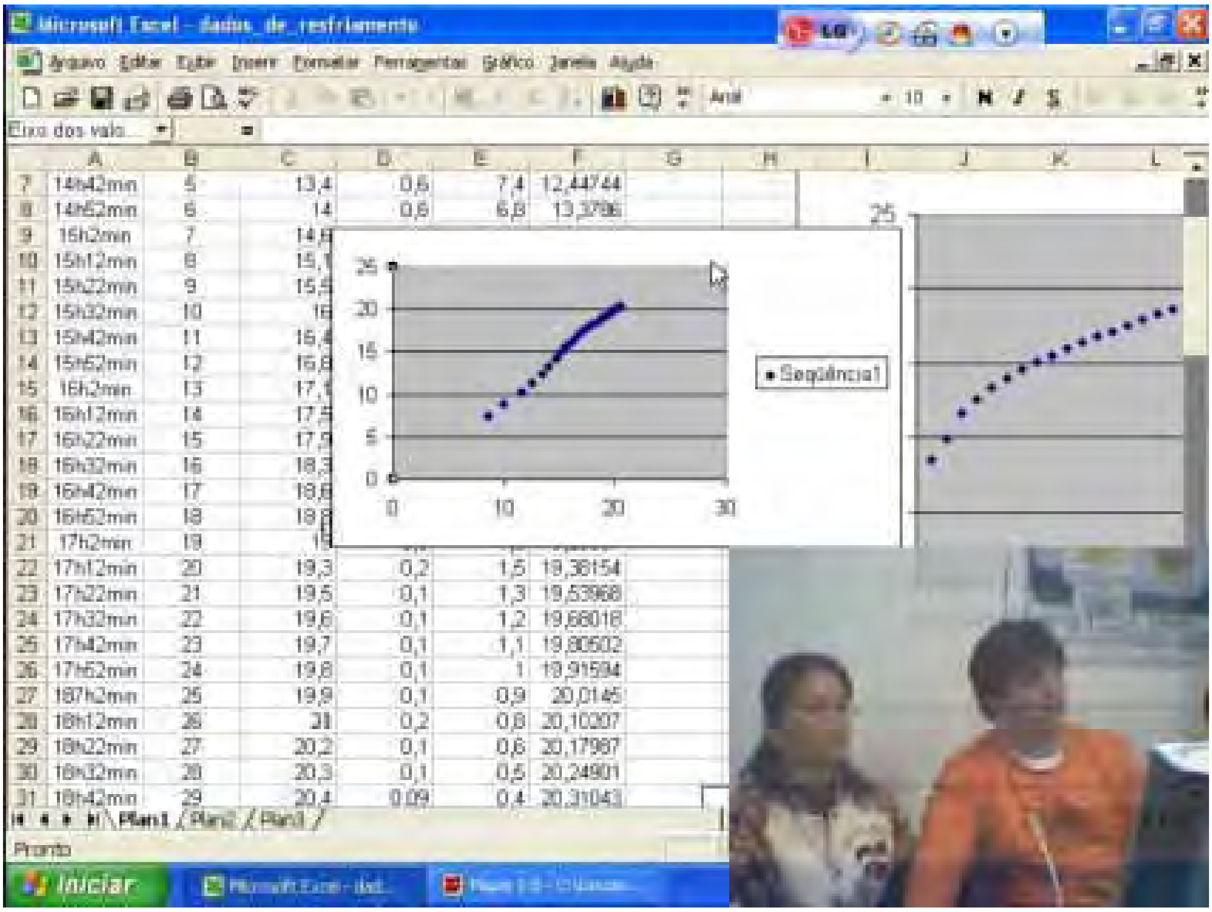


Figura 4.38. Marcos e Shen analisando os valores da Temperatura 'real' e estimada

Os alunos retomam as questões do roteiro. A partir desse momento, Adriano passa a discutir com Shen e Marcos. Retomam a planilha de cálculo e recalculam agora com o tempo t variando de 10 em 10 minutos de 0 a 300 minutos. Novamente analisam a solução encontrada pelo comando dsolve do Maple e concluem que o comportamento dos dados da temperatura é compatível com a solução encontrada, conforme nos mostra a transcrição do trecho da discussão dos alunos, apresentada a seguir.

Adriano: Ele quer saber qual o comportamento dos pontos e qual curva se ajusta aos pontos. E se é compatível com a equação algébrica determinada em (2).

Shen: Ele cresce...

Adriano: Tende a estabilizar, mas não se estabiliza...

Marcos: Conforme gráfico plotado no Excel. E qual o comportamento desses pontos? A temperatura cresce à medida que o tempo passa o tempo tendendo a se estabilizar em T_a né?

Shen: Isso, tendendo a temperatura ambiente.

Marcos: A temperatura é compatível com equação gerada em (2)? O que é o meu T_0?
Adriano: Temperatura inicial.
Marcos: Então o que acontece aqui? (apontando com o mouse a equação $T(t) = T_a + e^{-\lambda t}(T_0 - T_a)$) *Isso aqui, esta exponencial vai estar aqui em baixo na verdade, você concorda? Porque é menos né! Esse lambda é fixo, à medida que aumento o t... Isso aqui está aumentando e essa exponencial está dividindo isso aqui que também é fixo, então vai para zero, então T vai para Ta, concorda? Explico tudo isso ou só concordo?*
Adriano: Só concorda... (risos)

Nesse momento de análise o *software* de captura fez diferença, pois ele me permitiu seguir os passos que eles trilharam juntamente com o diálogo, os gestos e as expressões. Caso eu estivesse analisando as respostas por eles elaboradas somente lendo o papel, talvez eu não tivesse elementos para acompanhar o raciocínio que utilizaram para dar a resposta "sim" à pergunta: *Qual curva se ajusta a esses pontos? É compatível com a equação algébrica determinada em (2)?*

Ao refazer a planilha, considerando o tempo variando de 10 unidades, obtiveram o modelo $T(t) = 20{,}8 - 13{,}402e^{-0{,}01182t}$ para os dados analisados. Com esse modelo estimaram os valores para a temperatura e esboçaram o gráfico da temperatura estimada e da temperatura 'real' com relação ao tempo. E, Marcos retoma sua hipótese sobre esboçar um gráfico dos pontos da temperatura estimada versus a temperatura 'real', acreditando que assim, este deveria ter o comportamento da identidade. Shen comenta que dá quase o gráfico da identidade (Figura 4.39).

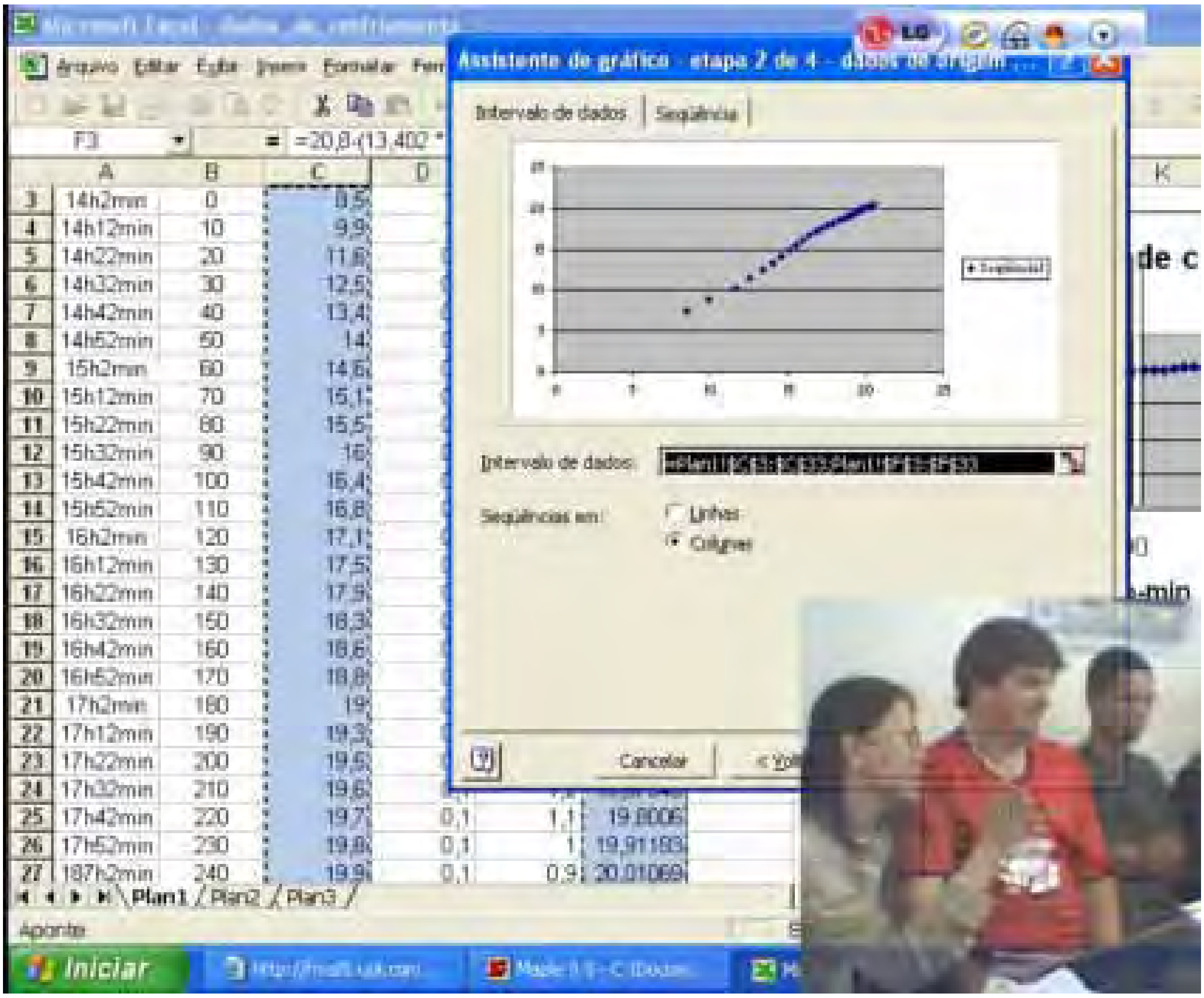


Figura 4.39. Shen, Marcos e Adriano analisando o diagrama de dispersão de temp. real X estimada

No entanto, parece que eles não sabiam explicar o porquê do gráfico obtido não ser exatamente o gráfico da função identidade. Esse fato pode ser elucidado já que o modelo estimado é obtido pelo ajuste de curvas da planilha eletrônica e, portanto é uma aproximação dos dados obtidos experimentalmente.

Dando prosseguimento ao roteiro da atividade eles passam a resolver o desafio proposto na atividade. Os alunos tomam os valores da temperatura do corpo com o passar do tempo, determinam uma curva que ajusta esses valores e obtêm o modelo $T(t) = 20{,}2 - 7{,}4333e^{-0{,}027t}$. Considerando o tempo de estabilidade, os alunos concluem que a secretária estava mentindo. Adriano questiona as condições que geraram o modelo, supondo que a temperatura do indivíduo poderia ser de $38^{\circ}C$, porém Marcos argumenta que a temperatura de uma pessoa é menor, que se a temperatura de uma pessoa estiver a essa temperatura, ela está em estado febril. Contudo Adriano insiste que uma pessoa poderia ter temperatura menor que $35^{\circ}C$. E comenta que se caso a secretária tivesse dito à polícia que chegou às 7 horas, já que é seu horário de entrada, e, no entanto ela tivesse chegado às 8 horas, essa mentira iria lhe custar muito caro. Ao buscar resolver o desafio proposto os alunos questionaram o modelo encontrado, bem como sua análise.

No terceiro momento desse episódio, Adriano e Viviane tomam os dados do segundo experimento, do resfriamento do líquido, tomados em condições diferentes. O roteiro para essa atividade pode ser observado no Quadro 4.5, a seguir.

Comparação dos dados experimentais

O mesmo experimento foi realizado duas vezes. Ou seja, foi tomada a temperatura da cerveja por duas vezes. No primeiro dia, foi utilizado 175 ml de cerveja, colocado em um copo e o termômetro foi colocado no copo e foi tomada as medidas dadas na tabela 1, à temperatura inicial de $12{,}3^{\circ} C$ e a temperatura ambiente era de $26{,}7^{\circ} C$.

No segundo dia, foi utilizado 350 ml de cerveja, com temperatura inicial de $8{,}5^{\circ} C$ e a temperatura ambiente de $20{,}8^{\circ} C$. O termômetro foi colocado diretamente dentro da lata da cerveja e os dados estão listados na tabela 2.

Determine um modelo para os dados da tabela 1, utilizando o Excel, como fizemos na aula passada. E em seguida, esboce no mesmo gráfico em uma mesma planilha, os dados reais e os valores estimados nos dois modelos e responda:

1. Quais os valores de λ para os dois experimentos?
2. Quais as expressões algébricas das soluções dos dois modelos? É compatível? O que você observa?
3. Qual, em sua opinião, é mais preciso? Qual dos dois modelos? E por quê?
4. O que você observa no gráfico onde desenhou os dados experimentais e os dados estimados juntos?

Quadro 4.5. Roteiro da atividade – comparação dos dados

Adriano e Viviane iniciam analisando os dados dos dois experimentos, conforme ilustra a Figura 4.40.

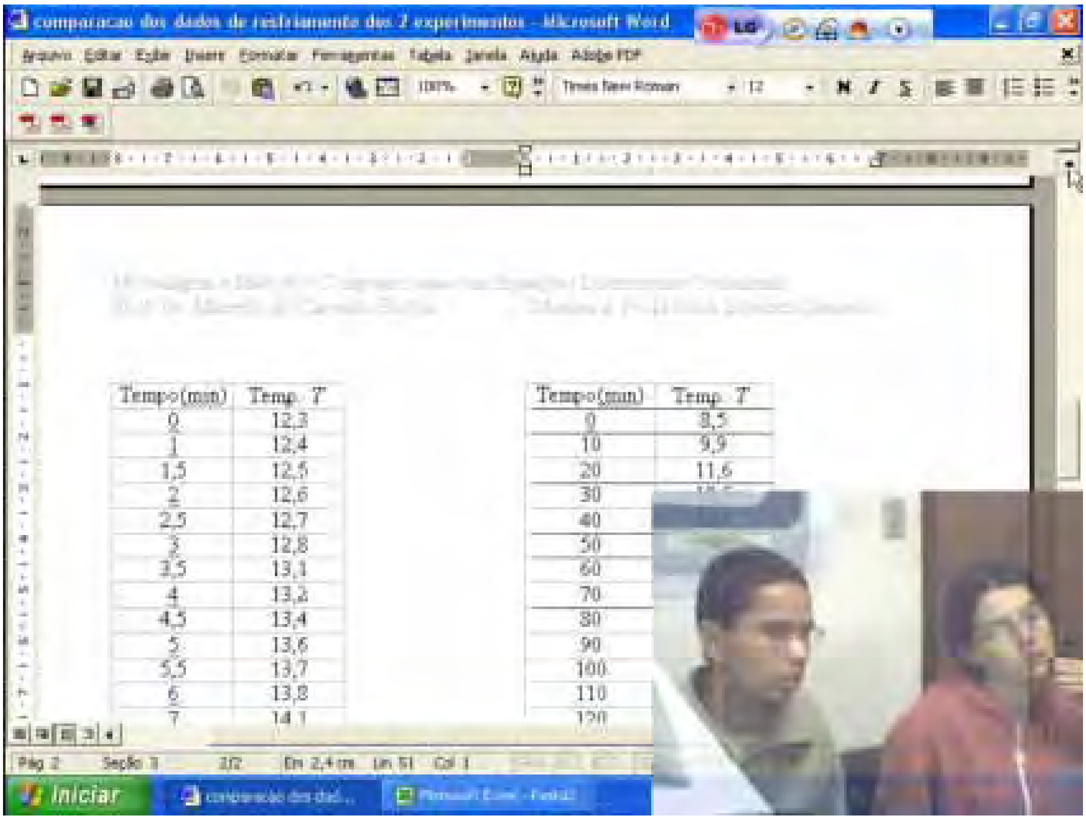


Figura 4.40. Adriano e Viviane analisando os dados dos dois experimentos

Através do ajuste para estes novos dados, obtiveram um modelo dado por $T(t) = 20{,}8 - 13{,}402e^{-0{,}0118t}$, como ilustra a Figura 4.41.

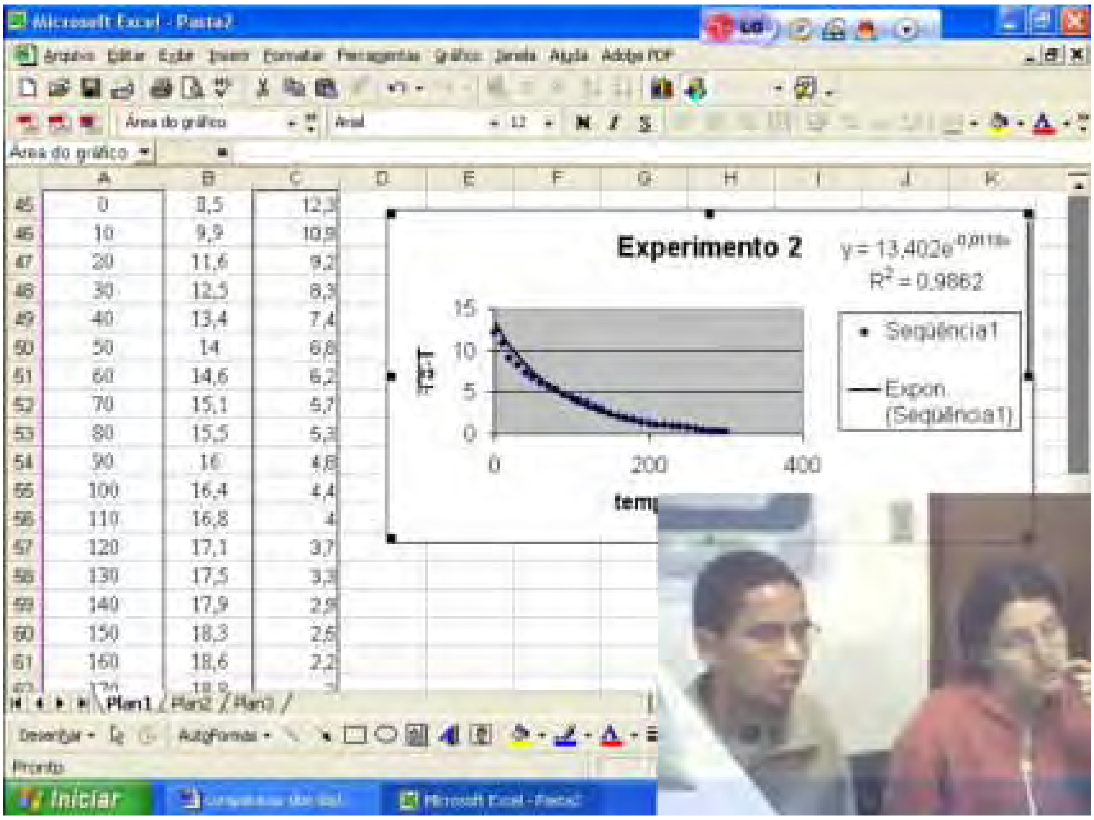


Figura 4.41. Adriano e Viviane ajustando os dados do segundo experimento

Enquanto que, com os dados do primeiro experimento, a solução era dada por $T(t) = 26{,}7 - 14{,}207e^{-0{,}0183t}$, conforme esboçado na Figura 4.42.

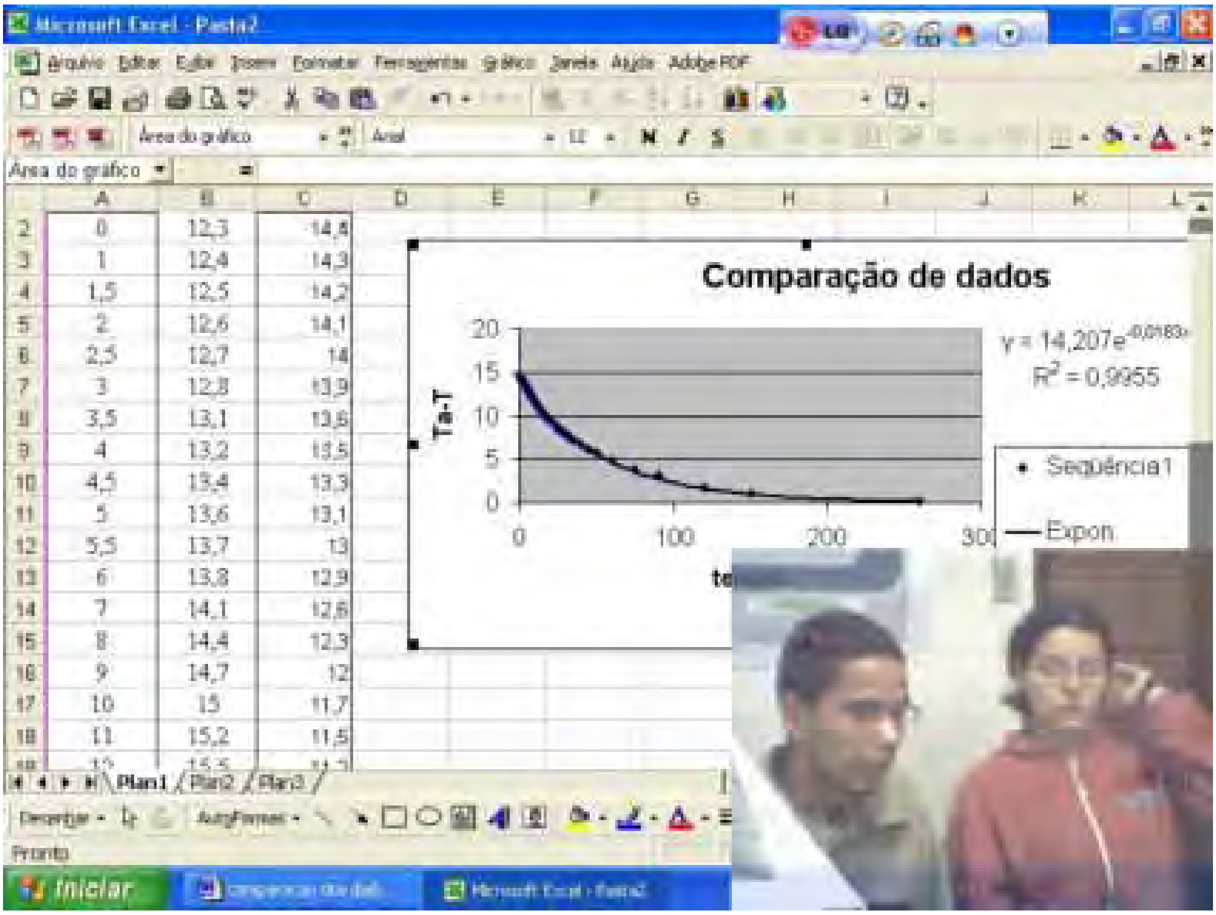


Figura 4.42. Adriano e Viviane ajustando os dados do primeiro experimento

Viviane: Acho que achamos o modelo né?

Adriano: É a primeira pergunta a gente consegue responder. (Referindo-se aos valores de λ para os dois modelos.).

Adriano comenta que as constantes estão variando. Ele estava se referindo as constantes que multiplicam a função exponencial do modelo encontrado.

Adriano: Deixa eu só confirmar uma coisa se mudou, 13,402.
Viviane: 14,207deu o outro.
Adriano: A constante também está variando, por que será? Eu só copiar esses valores aqui pra ver se a gente consegue pensar alguma coisa aqui.

Continuando, os alunos partem para responder à segunda questão *"Quais as expressões algébricas das soluções dos dois modelos? É compatível? O que você observa?"* Essas questões procuravam elencar indícios sobre o entendimento dos alunos acerca do modelo que eles estavam elaborando. Podemos observar a discussão dos alunos no trecho transcrito a seguir.

Viviane: Como assim compatível? Compatível com o que? Uma é compatível com a outra?
Adriano: Acho que deve ser isso. Será que elas descrevem o mesmo fenômeno? Será que é isso que ela quer perguntar? Olha teoricamente eles não são compatíveis porque a minha constante que está multiplicando a exponencial é diferente, o lambda tudo bem porque tá numa aproximação.
Viviane: É, mais a gente tem que considerar também que no primeiro experimento a variação foi bem pequena do tempo né?!
Adriano: Foi mínima, então o que ela esta querendo tentar... Não sei, o que eu consigo entender da pergunta é o seguinte, será que existe uma equação que descreva esses experimentos independente da variação?
Viviane: Bom, vamos por as expressões aqui enquanto a gente pensa.
Adriano: O lambda também caiu, o r quadrado também caiu, a aproximação da primeira foi bem melhor. (Referia-se ao índice r quadrado do método de ajuste por mínimos quadrados).
Viviane: Bom, agora temos que ver se é compatível. E o que a gente observa.
Adriano: Olha eu penso o seguinte, se x for zero, se você aplicar x no y da função, nas duas, você teria que chegar no mesmo valor para elas serem compatíveis e eu vou chegar que 14,207 é diferente de 13,402.
Viviane: É! Verdade!
Adriano: Então elas não são compatíveis, pelo menos é isso que eu to enxergando. Porque elas não são compatíveis? O que tá fazendo isso é a variação, o tamanho da minha variação.
Viviane: Mas a gente tem que pensar que zero é o tempo zero, certo? Só que nunca vão ser, porque aqui a temperatura zero é 12,3 e aqui é 8,5. Então na verdade, acho que a gente não pode fazer essa comparação com o zero. Porque elas partem de lugares diferentes. (Nesse momento ela se referia ao raciocínio de Adriano que atribuiu o valor zero para a variável *x* para justificar a não compatibilidade dos modelos).
Adriano: Teoricamente a inicial de uma seria no tempo zero e da outra seria no instante já quando a temperatura é 8,5?
Viviane: Acho que sim né!
Adriano: Como ela montou essa tabela? Ela partiu os dois do zero? Eu não reparei.
Viviane: Partiu.
Adriano: Então ela está assumindo os dois tempos zero!
Viviane: Então, só que eles têm temperaturas diferentes.
Adriano: Então estão no mesmo tempo inicial zero, mas com temperaturas diferentes, então eu posso aplicar no tempo zero...
Viviane: Então, mas só que se eles partem de locais diferentes, não estou vendo o porquê as duas são iguais.
Adriano: Elas podiam ser compatíveis se de repente uma fosse linear que nem tá a primeira e a segunda, sei lá, dá 8,5, próximo desta, 7,6.
Viviane: Ou a gente podia ver se elas são compatíveis se a gente pegar tipo determinados tempos que estão a mesma temperatura, pode ser, mas não sei se existe esse tempo. Aqui óh, 16, 14 minutos e aqui 90 minutos? (Ela referia-se aos valores tabelados. Na primeira tabela para a temperatura de $16^{\circ}C$, o tempo correspondente era de 14 minutos e na segunda era de 90 minutos).
Adriano: Sem fazer as contas, eles não vão ser iguais nunca... Eles não têm o mesmo conjunto solução.

Após toda essa discussão, parece que Adriano convence Viviane que as duas equações encontradas não são compatíveis porque elas não possuem a mesma solução. Talvez tenham pensado dessa maneira, até o momento, pelo fato de não terem claro o significado do método numérico de ajuste de curvas para conjuntos discretos. E, esse método era algo totalmente novo para os alunos. No entanto, a discussão ainda não estava finalizada, parecia que Viviane não estava satisfeita com a conclusão que haviam chegado, pois ela retoma a discussão, conforme nos mostra, a seguir, o trecho de transcrição do diálogo dos alunos.

> *Viviane: Mas não é meio lógico elas não terem as mesmas soluções, porque são duas experiências diferentes?*
> *Adriano: Teoricamente elas teriam que ter assim, eu observo que teriam que ter soluções iguais, mas com uma equação que rege aquele tipo de experimento. Eu vou pegar vários tipos de temperaturas, eu vou pegar esse modelo e ele vai me dar uma resposta.*
> *Viviane: Será que se a gente fizer um gráfico em cima do outro a gente não enxerga mais alguma coisa?*

E, assim, utilizando o comando de inserir gráfico de dispersão da planilha eletrônica eles esboçam um gráfico usando os valores do tempo e da temperatura dos dois experimentos, em um mesmo sistema cartesiano, chegando a um desenho que não souberam interpretar. Percebem que o gráfico que gostariam de esboçar seria composto pelas temperaturas dos dois experimentos versus o tempo. No entanto, as tomadas de tempo foram distintas nos experimentos, ou seja, o domínio das funções, que eles buscavam determinar, não era idêntico e, portanto deveriam perceber a inclusão de conjuntos discretos. Podemos acompanhar esse momento de discussão, observando o trecho a seguir da transcrição do diálogo da dupla.

> *Adriano: Será então que é só o gráfico das variações?*
> *Viviane: Mas com que tempo?*
> *Adriano: Os tempos são diferentes né? Fazer com o primeiro tempo e as duas variações?*
> *Viviane: Será que ele faz?*
> *Adriano: Fazer ele vai fazer, mas...*
> *Viviane: Vamos ver o que dá!*

O gráfico gerado pelos alunos, considerando a variação do tempo do primeiro experimento versus as temperaturas medidas nos dois experimentos, é ilustrado pela Figura 4.43.

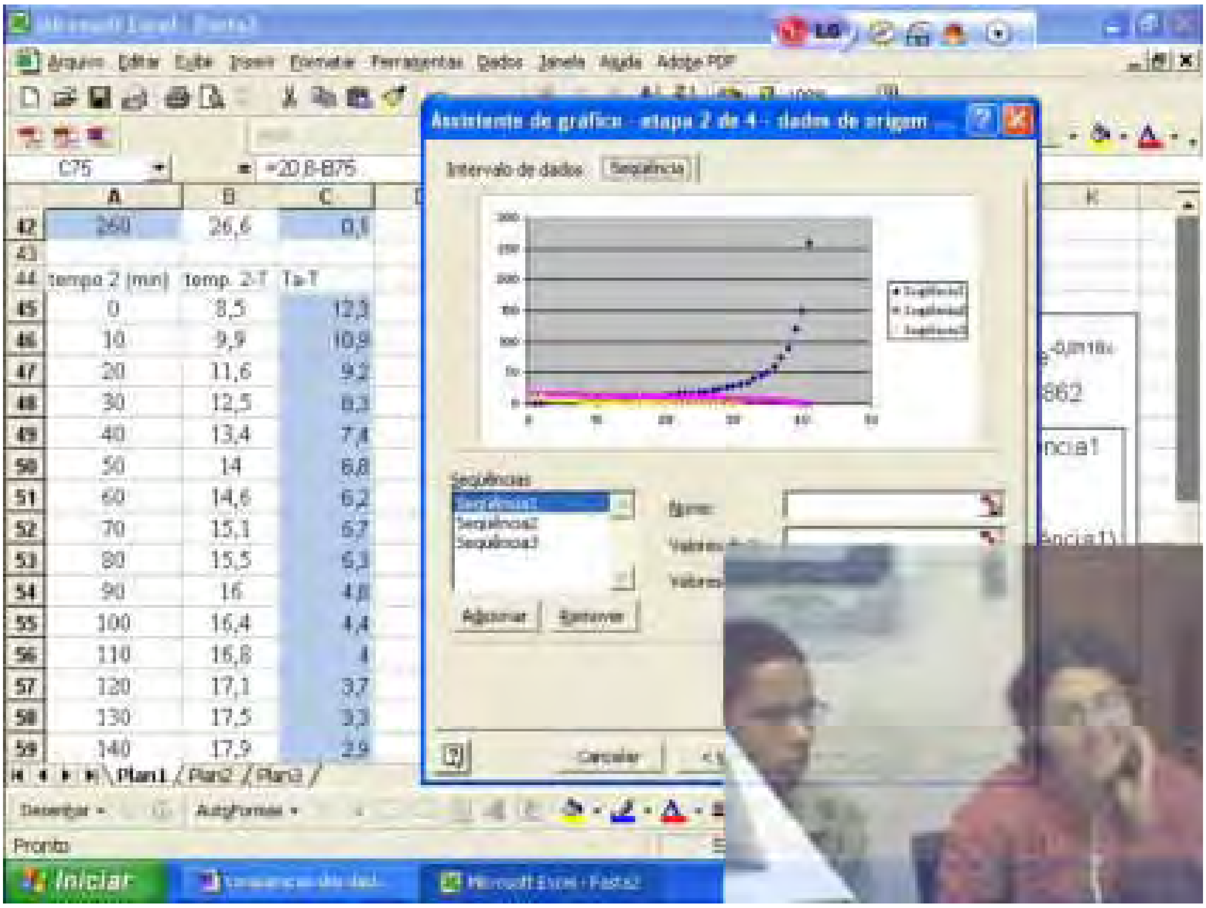


Figura 4.43. Adriano e Viviane observando o gráfico das variações da temperatura

Os alunos ficam surpresos com seu esboço, conforme podemos acompanhar no trecho da transcrição a seguir.

> *Viviane: Nossa!*
> *Adriano: Não tô entendendo mais nada do que ele tá fazendo...*

A dupla pergunta a Marcos e Shen, dupla que estava trabalhando no computador ao lado, se eles haviam conseguido fazer o gráfico. Marcos responde que o gráfico que eles estavam esboçando era o comportamento dos valores da temperatura medida e os valores da temperatura estimados pelo modelo e que, portanto seria interessante calcular os valores da temperatura estimada pelos dois modelos. Assim, Viviane e Adriano inserem as fórmulas dos modelos na planilha, obtendo os valores estimados. Observam que os valores estimados obtidos pelo modelo do primeiro experimento, ou seja, pela equação $26{,}7 - T(t) = 14{,}207e^{-0{,}0183t}$ estão mais próximos dos valores “reais” da temperatura que foram medidos experimentalmente, comparando-os com os valores estimados pelo segundo modelo, a equação $20{,}8 - T(t) = 13{,}402e^{-0{,}0118t}$. Nesse momento comentam com Marcos, o qual afirma ter obtido o mesmo comportamento em sua análise.

Eles observam que o valor de R^2 do ajuste dos dados do primeiro experimento é mais próximo de 1 do que o do segundo. Marcos comenta que essa análise que eles estavam fazendo era estatística, por isso buscava analisar o R^2 do ajuste. Viviane, observando o gráfico do ajuste dos pontos do segundo experimento, arrisca afirmar que essa diferença nos parâmetros dos modelos era devida aos primeiros pontos do conjunto dos valores da diferença de temperatura ambiente por temperatura medida do experimento 2. Ela aponta com o mouse os primeiros pontos da variação da temperatura que estão 'longe' da curva ajustada no gráfico, conforme ilustra a Figura 4.44. No entanto, Adriano parece não ter ouvido seu comentário e ela também não insistiu em sua análise.

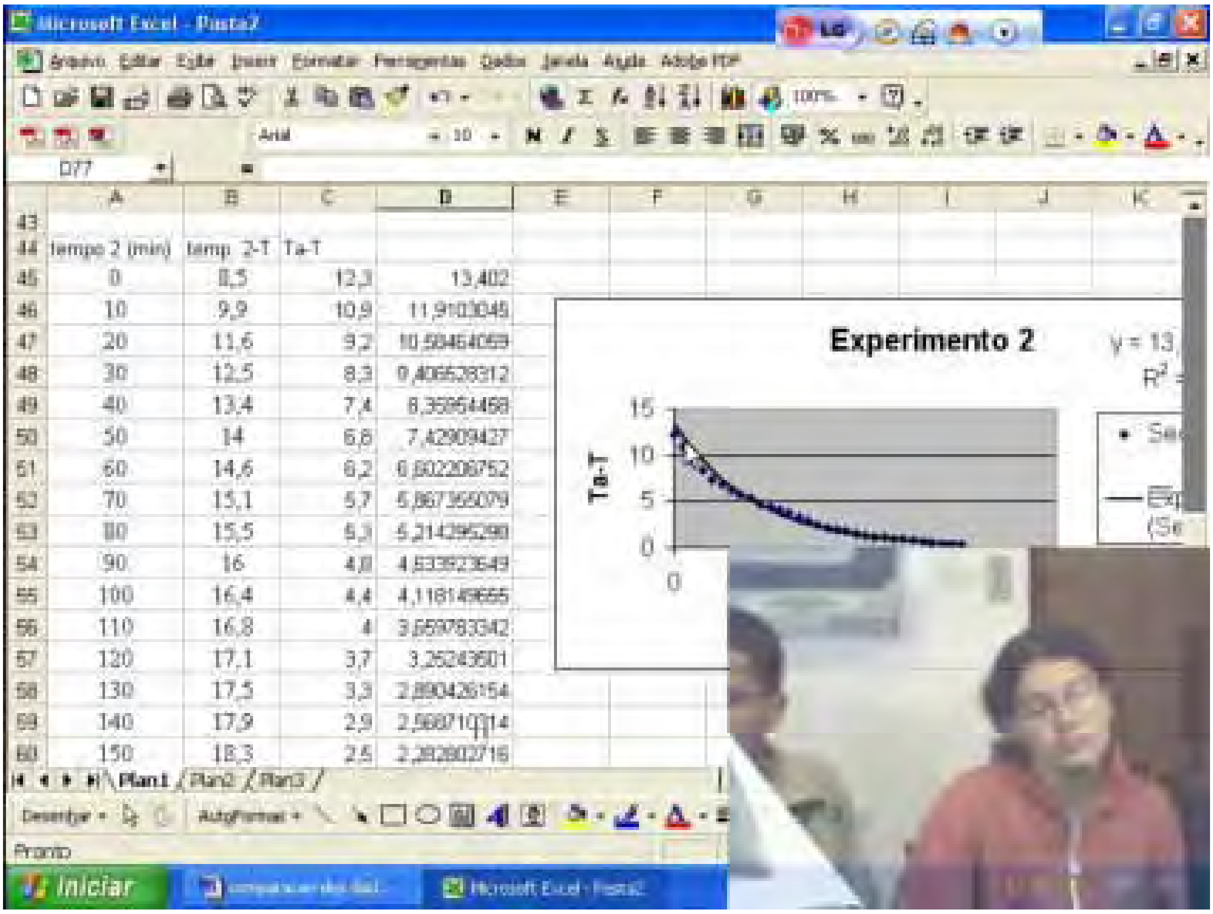


Figura 4.44. Viviane analisando o gráfico do ajuste da temperatura do experimento 2

Discutindo com dupla, Marcos e Shen, eles observaram que, para completar a planilha, faltava-lhes somente calcular a variação da temperatura ambiente pela temperatura estimada pelos modelos obtidos através do ajuste de curvas, completando assim os cálculos. Observam que, no primeiro experimento, a última temperatura tomada foi de $26{,}6^\circ C$ e o valor estimado pelo modelo foi de $26{,}576^\circ C$ e no segundo experimento a última temperatura medida foi de

$20{,}5^\circ C$ e o valor estimado foi de $20{,}41^\circ C$, concluindo então, que os dois modelos 'serviriam'.

Viviane ainda estava preocupada com o ser compatível, pois ela questiona *' – E agora o compatível?'* Adriano continua afirmando que *' – matematicamente não são compatíveis, pois não possuem a mesma solução'* e Viviane complementa *' – observamos que ambos são próximos do real'.*

Nessa discussão, Marcos comenta que os dois experimentos são compatíveis. E Adriano pergunta a Marcos se os modelos possuem a mesma solução. Marcos responde *' – não, são compatíveis com a realidade'.* Porém, Adriano retruca, *' – matematicamente, um sistema ser compatível é se tem a mesma solução'.*

Marcos insiste que é compatível com a realidade. Viviane comenta que concorda com Marcos, ou seja, que os modelos são compatíveis já que representam os dados reais das temperaturas dos dois experimentos.

Analisando esse trecho da discussão dos alunos, a impressão que tenho é que os alunos entenderam o significado do processo de elaboração de um modelo que ajustava os pontos dados. No entanto, a resposta dada com relação à compatibilidade das equações elaboradas pode ser talvez pelo fato de não conseguirem considerar as variações das condições em que os dois experimentos foram realizados e também pelo fato de não terem assimilado que quando ajustamos um conjunto de pontos discretos por uma função contínua estamos fazendo uma aproximação do fenômeno em questão. Outro motivo, que talvez também tenha ajudado na confusão, seja pelo fato de os alunos, principalmente Adriano, ter se prendido à expressão algébrica do modelo, não conseguindo entender a variação do parâmetro lambda.

Como os alunos não conseguiam chegar a um consenso solicitaram minha participação na discussão. Sugeri a eles que elaborassem um diagrama de dispersão contendo os valores 'reais' da temperatura dos dois experimentos e os dados estimados da temperatura.

A dúvida dos alunos, enquanto estavam discutindo como elaborar um gráfico único contendo os valores 'reais' e os estimados dos dois experimentos, consistia na variação do tempo, já que em um experimento os dados foram tomados de 10 em 10 minutos e no segundo a tomada de medida foi feita em períodos menores de tempo. Podemos observar esse momento através da transcrição da fala de Viviane, apresentado a seguir.

> *Viviane: Será que se a gente fizer um gráfico em cima do outro, a gente no enxerga mais alguma coisa? Será que é só o gráfico das variações? Mas com que tempo? São diferentes!*

Viviane e Adriano elaboraram o gráfico do diagrama de dispersão dos modelos (Figura 4.45). Nesta Figura, temos quatro diagramas de dispersão. Os pontos em verde e amarelo representam os dados ‘reais’ e os estimados do segundo experimento, enquanto que pontos em lilás e azul representam os dados do primeiro experimento.

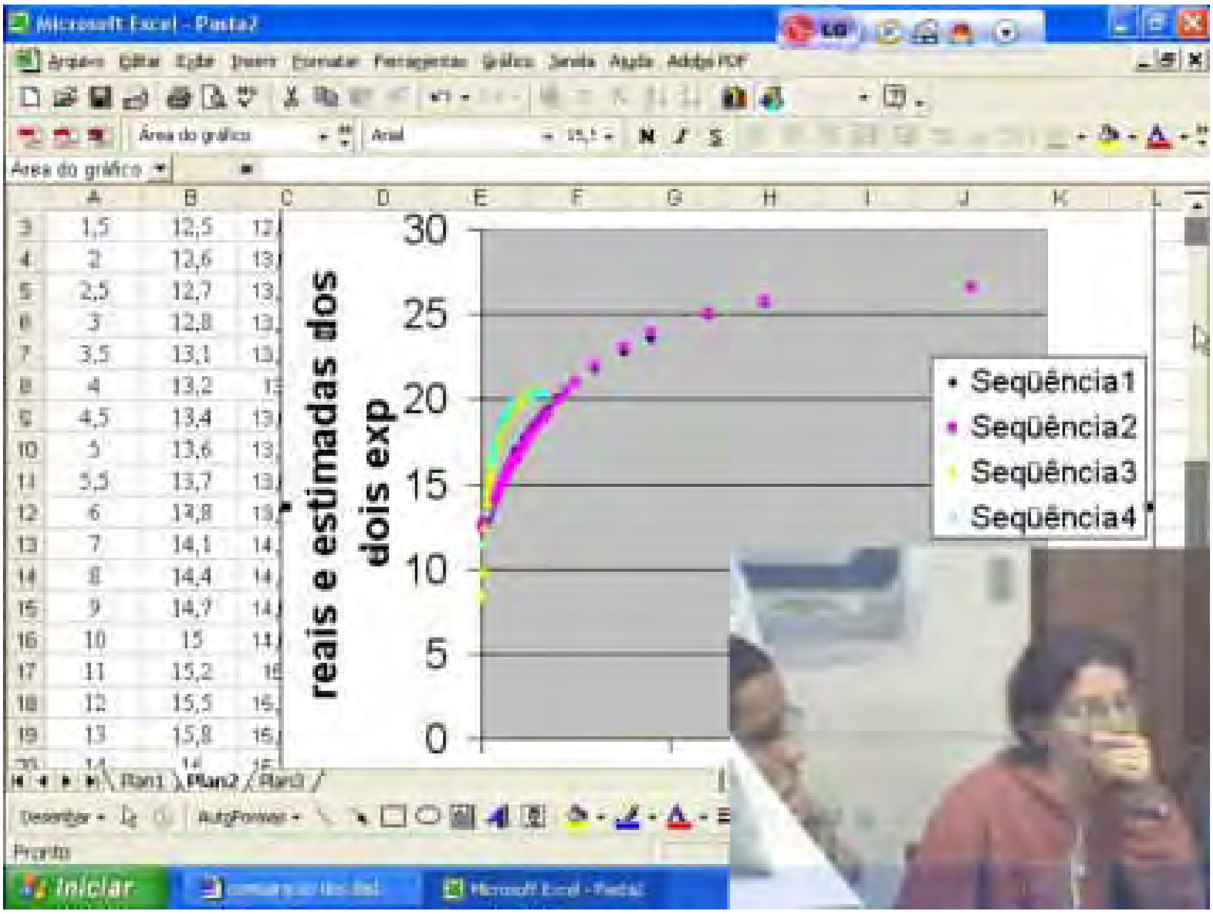


Figura 4.45. Adriano e Viviane analisando o diagrama de dispersão dos dados experimentais

A partir desse gráfico, a discussão dos alunos girou em torno das condições dos dois experimentos, já que em um deles a temperatura foi tomada com o líquido em um copo e o outro foi tomado direto da lata de alumínio. Observaram também que a temperatura ambiente foi diferente já que os experimentos foram realizados em dias diferentes. Foi observada também a variação do tempo em cada um dos experimentos, conforme podemos observar pelas tabelas 1 e 2 dadas no roteiro.

O desenvolvimento desta atividade, que propiciou aos alunos a elaboração e análise de um modelo para um conjunto de pontos discretos, levou os alunos a questionarem aspectos físicos do experimento, bem como aspectos teóricos da matemática.

O estudo do comportamento de conjuntos de pontos discretos, por meio de ajuste de curvas pelo Método dos Mínimos Quadrados, como o que foi realizado neste episódio, fazendo uso da planilha eletrônica ou de qualquer outro *software* apropriado, constitui uma ferramenta interessante ao se trabalhar com projetos de Modelagem Matemática, quando esta é considerada uma estratégia pedagógica. Isto ocorre devido ao fato de que, em geral, na maioria dos trabalhos que os alunos desenvolvem nestes projetos, os dados envolvidos nos estudos são dados discretos e, portanto, necessitam de um tratamento numérico.

Desta forma, encerro o Capítulo 4, que tem por objetivo a apresentação e a análise inicial dos dados por meio da elaboração dos episódios que foram constituídos da organização dos dados brutos da pesquisa coletados no curso de extensão. Estes episódios foram protagonizados pelos alunos da Matemática, trabalhando em duplas ou trios, nas várias atividades. Durante toda a elaboração e desenvolvimento do curso, e também durante a elaboração dos episódios, a pergunta *"Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?"* esteve presente guiando as ações.

Fatos relevantes que emergem da análise dos dados podem assim serem resumidos: a importância do desenvolvimento do processo de modelagem matemática, pois ficou evidente na discussão da dupla, a preocupação e necessidade de retornar às hipóteses assumidas inicialmente para entender a equação diferencial ordinária elaborada e mesmo propor tentativas de outros modelos que, segundo eles, melhor descreviam o fenômeno; a coordenação das várias mídias utilizadas, já que os alunos esboçavam seus rascunhos, cálculos e gráficos no caderno e no *software* e os comparava, a utilização de comandos do Winplot juntamente com os do Maple foi importante para o entendimento das curvas soluções dos modelos estudados; a elaboração e verificação de conjecturas, já que a dupla, inicialmente acreditava que a curva procurada era aproximada por uma exponencial, porém não tinham claro como justificar tal solução. A interação entre os alunos e as mídias é mais um fato relevante que também surge desta análise. Essa interação propiciou discussões e reorganizações de conceitos e, possivelmente também, a elaboração de novos conceitos com relação às equações diferenciais ordinárias.

Capítulo 5 – Investigando os episódios: aprofundando a análise

Introdução

Neste capítulo, os dados da pesquisa são analisados à luz da literatura estudada. Desta forma, a análise traz compreensões complementares àquelas elaboradas inicialmente no Capítulo 4.

Retomo alguns trabalhos de pesquisadores já apresentados nos Capítulos 2 e 3 e apresento outros, que foram incorporados à literatura da tese no decorrer da coleta e análise dos dados, para enfocar seus principais resultados confrontando-os com as características que emergiram dos dados.

Autores como Lévy, Borba, Rasmussen, Habre e Kallaher foram fontes de inspiração na elaboração do projeto e na execução da coleta dos dados. Outros, como Machado, Arcavi foram estudados após conclusão da coleta de dados junto aos alunos.

O trabalho de análise dos dados teve início logo após o processo de coleta, quando realizei a organização dos dados brutos em episódios. Nestes episódios são descritos os caminhos seguidos e as interpretações dos alunos em cada atividade realizada. Pois, como afirma Alves-Mazzotti (2004, p.170), esses dados

> precisam ser organizados e compreendidos. Isto se faz através de um processo continuado em que se procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões, relações, desvendando-lhes o significado. Este é um processo complexo, não-linear, que implica

> um trabalho de redução, organização e interpretação dos dados que se inicia já na fase exploratória e acompanha toda a investigação.

Sendo assim, neste Capítulo, aprofundo a análise para caracterizar as dificuldades e os entendimentos dos alunos ao estudarem os conceitos introdutórios de equações diferenciais ordinárias com o auxílio das TIC.

5.1. Aprofundando a análise inicial

Após a apresentação detalhada e a análise inicial dos dados apresentados no Capítulo 4, alguns temas emergentes podem ser evidenciados, retomando a pergunta diretriz desta pesquisa:

Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?

Esses temas emergentes, que estão relacionados com o desenvolvimento e produção matemática dos estudantes auxiliados pelas tecnologias da informação e comunicação, aparecem repetidamente nos episódios.

No decorrer das aulas do curso de extensão, os vários softwares foram integrados no desenvolvimento das atividades efetuadas pelos alunos participantes. O processo de visualização foi um dos aspectos importantes na análise qualitativa dos modelos matemáticos clássicos e das equações diferenciais ordinárias, em geral, analisadas. E, esse processo é bastante privilegiado no ambiente de investigação propiciado pela inserção das mídias informáticas.

Um dos temas que surge, na análise dos dados, é o que se refere à supremacia do aspecto algébrico ao geométrico observado nas discussões de algumas das duplas de alunos em determinado episódio. Acredito que esse fato tem origem em experiências relacionadas com a mídia "lápis e papel" e com o formalismo do tratamento matemático, frequentemente empregados nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, de forma geral, em toda a graduação. Outra característica presente em alguns dos episódios analisados é a elaboração de conjecturas realizadas pelos alunos nas discussões das atividades. No decorrer da discussão, por vezes suas conjecturas são refutadas, outras vezes são confirmadas. E, em muitas situações das discussões das atividades os alunos foram levados a utilizar, em uma mesma atividade, "lápis e papel", a planilha eletrônica, os softwares Winplot e Maple para explicar o que estavam observando ou para confrontar suas expectativas.

Uma característica presente em vários momentos dos episódios analisados é a não linearidade de raciocínio dos alunos na resolução das atividades propostas. Por vezes, uma determinada questão da atividade faz com que os alunos estabeleçam conexões com outros conceitos relacionados que não fazem, necessariamente, parte do assunto ali colocado. A noção de rede de significados se apresenta apropriada para analisar esse fato.

Sendo assim, os temas a serem discutidos se referem a: processo de visualização em atividades investigativas auxiliadas pelas mídias informáticas, abordagens geométrica e algébrica com as mídias informáticas, conhecimento como rede de significados.

A explanação desses tópicos propiciará um aprofundamento da análise detalhada em cada episódio apresentado, porém sem a pretensão de ser absoluta, já que cada leitor, a partir da leitura da descrição analítica dos dados apresentada no capítulo anterior, poderá observar outros temas que julgar relevantes em sua visão.

5.1.1. Processo de visualização em atividades investigativas auxiliadas pelas mídias informáticas

Arcavi (2003) afirma que a visão é um sentido central em nosso ser biológico e sociocultural. O autor busca em Adams e Victor (1993) a seguinte descrição para a esse sentido:

> A faculdade da visão é nossa mais importante fonte de informação sobre o mundo. (...) O estudo do sistema visual avançou extremamente o conhecimento do sistema nervoso. Certamente, sabemos mais sobre a visão do que qualquer outro sentido do sistema sensório (ARCAVI, 2003, p. 215).

Vivemos em um mundo onde a informação é, principalmente, transmitida através de invólucros visuais e, as tecnologias incentivam essa comunicação que é essencialmente visual. Consequentemente, como um ser biológico e sociocultural somos incentivados e instigados a observar não somente o que está em nosso campo de visão, mas também somos capazes de inferir sobre o que não somos capazes de "ver". Segundo McCormick et al (1987) citado por

Arcavi (2003), “visualização oferece um método de ver o despercebido” (p. 216, tradução minha[19]).

Desta forma, a visualização pode ser caracterizada como um objeto, uma imagem, e também como um processo, uma atividade (Bishop, 1989, p.7). A visualização no ensino da matemática tem sido considerada como uma componente chave do raciocínio na resolução de problemas e não somente relacionada às finalidades ilustrativas.

O despercebido tomado no sentido literal, refere-se ao que somos incapazes de ver por causa das limitações de nosso sistema visual. Por exemplo, quando não conseguimos ver um objeto porque ele é pequeno ou porque estamos distante dele. E, nesse sentido desenvolvemos tecnologias que nos auxiliam a superar essas limitações, tornando o despercebido em perceptível. Por exemplo, a ampliação, obtida pelo microscópio, para visualizar as células vermelhas do sangue. Poderíamos já ter ouvido falar sobre as características da célula e elaborado determinada imagem através desses relatos. No entanto, ver a célula em si, com a ajuda da tecnologia, que supera a limitação de nosso sistema visual, não somente atende ao desejo de vê-la, bem como a apreciação desta pode aguçar nossa compreensão ou ainda nos instigar a investigar sobre novos aspectos dela.

Considerando agora, no sentido figurado, ver o despercebido refere-se ao mundo abstrato, do qual nenhuma tecnologia eletrônica ou óptica pode auxiliar. Neste caso, talvez precisemos de uma tecnologia cognitiva que nos ajude a transcender as limitações da mente no pensar, no aprender e no desenvolvimento de atividades de resolução de problemas. A Matemática, tratada como uma criação humana e cultural com seus objetos e entidades, diferente de fenômenos físicos, tais como os planetas ou as células do corpo humano, conta intensamente com a visualização e suas diferentes formas e níveis, (ARCAVI, 2003).

Assim, de acordo com Arcavi (2003)

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação e o uso da reflexão sobre retratos, imagens, diagramas, em nossa mentes ou no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar a informação, de pensar sobre e de desenvolver idéias previamente desconhecidas e avançar no entendimento.

Um tipo de despercebido que se encontra na Matemática, ou em disciplina que trabalham com manipulação de dados ou de estatísticas consiste na representação de dados, que pode ser dada de diversas maneiras, como por exemplo, na forma tabelar ou gráfica.

---

[19] Visualization offers a method of seeing the unseen” (McCormick et al (1987) apud Arcavi (2003)).

A elaboração de gráficos no tratamento de dados torna-se interessante no sentido que ao analisá-los podemos observar características gerais e particulares desses dados. Podemos afirmar, então, que a elaboração de gráficos, para investigar os dados, tem a finalidade de instigar a "revelação" de características importantes destes dados.

A importância da visualização pode ser também analisada com relação aos aspectos simbólicos. Pesquisadores da área de Matemática afirmam que "vêem" através das formas simbólicas, independentemente da sua complexidade. Para outros e, certamente para os estudantes de matemática, a visualização pode ter um papel poderoso, complementar em três aspectos: visualização como (a) suporte e ilustração de resultados essencialmente simbólicos, (b) um caminho possível de resolver conflitos entre soluções simbólicas e intuições e (c) como uma maneira de nos ajudar a conectar com e recuperar os conceitos básicos, os quais podem ser facilmente encaminhados por soluções formais, (ARCAVI, 2003).

Ainda podemos caracterizar a importância da visualização no processo de resolução de problemas. Davis (1984), citado em Arcavi (2003), descreve um fenômeno que ele denomina de seqüências visualmente moderadas (VMS). Segundo esse autor, VMS ocorre frequentemente em nosso dia a dia. Por exemplo, imagine a situação na qual você tenha que se dirigir a algum local que tenha ido uma ou duas vezes, há tempos atrás. Normalmente não se espera que você descreva minuciosamente o caminho até o local, mas espera-se que vá encontrando detalhes ou lugares do trajeto, como um estabelecimento, por exemplo, que sirvam como uma pista, e indo em direção a ela, recorde-se de outra dica e assim sucessivamente, até encontrar o local desejado. Você certamente não sabe o trajeto todo, mas tem recordações de partes e locais dele. Neste caso, a visualização pode funcionar como uma ferramenta para "sair" de situações em que o procedimento pode ser incerto. A visualização, aqui, não está relacionada diretamente aos conceitos ou às idéias, mas sim às percepções que conduzem as decisões processuais.

No entanto, Arcavi (2003) afirma que a visualização pode também ocupar um importante papel na busca da solução de problemas, não apenas em aspectos processuais. Para justificar sua afirmação, apresenta o exemplo[20] dado a seguir.

Seja n um número inteiro positivo e considere uma matriz quadrada, nxn, de números tais que o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna $(1 \le i, j \le n)$ é o menor entre i e j. Mostre que a soma de todos os números da matriz é dada por $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

[20] Este exemplo é apresentado em Arcavi (2003) e tem como referência o trabalho de Barbeau (1997, p.18).

Para $n = 5$, a matriz pode ser vista na Figura 5.1(a). Uma abordagem para visualizar a solução é apresentada na Figura5.1(b).

3° gnômon 5° gnômon

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) (b)

Figura 5.1. Matriz 5x5 com uma abordagem para determinar a soma dos números

Algebricamente, podemos observar que a soma dos números do k-ésimo gnômon – os números não excedendo k na k-ésima linha e k-ésima coluna – é dada por $2(1+2+3+...+(k-1))+k=k^2$, pois $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Assim, $2\left[\frac{k-1(k-1+1)}{2}\right]+k=k^2$. E, portanto, a soma de todos os números da matriz pode ser calculado somando todos os k-ésimos gnômons para *k* variando de *1* a *n*.

Esta solução possui elementos da visualização, pois a identificação dos gnômons como ‘subestruturas’ do todo, auxilia o estabelecimento de um padrão. E, portanto, como afirma Arcavi (2003), a visualização, neste exemplo, teve fundamental importância na resolução deste problema. Seu *status* não foi somente o de tradutor das indicações dadas no enunciado do problema, até porque o enunciado não oferece esses elementos utilizados. A estratégia utilizada foi “desenhada” pelo autor da demonstração. Ele se utilizou fortemente da visualização para “ver” essa demonstração. Provavelmente a inspiração para a estratégia usada fazia parte do conhecimento e da experiência precedente do autor que lhe ajudou a prever os valores numéricos das somas dos gnômons para em seguida somá-los no todo. Deste modo, possuir um repertório visual pode ser útil para inspirar soluções criativas na resolução de problemas.

Portanto, a visualização pode ser caracterizada de várias maneiras nas diversas situações. Em determinados momentos pode ser apenas ilustrativa, em outras, instigadora de percepções, de caminhos para realizar determinados procedimentos. Mas pode também ainda ser um fator importante para elucidar uma estratégia de resolução de um dado problema.

No decorrer da análise, surgem evidências das várias caracterizações da visualização. Por exemplo, na atividade da lei do resfriamento, quando os alunos utilizam a planilha de cálculo e esboçam o diagrama de dispersão, ao analisar o gráfico obtido eles buscam descobrir o comportamento da temperatura. Quando analisam os gráficos dos campos diretores dos vários modelos, eles buscam "ver" a solução procurada.

A questão da visualização é essencial no entendimento dos aspectos dinâmicos de um curso introdutório de equações diferenciais e o entendimento da derivada como variação de uma curva é central na interpretação de gráficos, bem como o comportamento das soluções ao longo do tempo e a existência de um estado de equilíbrio.

Quando a dupla Adriano e Ronaldo, no episódio "Modelo populacional de Verhurst" esboçou o gráfico do campo de direções para a equação $\frac{dp}{dt} = 0{,}5\left(1 - \frac{p}{k}\right)p$ atribuindo vários valores para k, analisando o comportamento dos vetores diretores, puderam concluir sobre as soluções constantes do modelo, como podemos observar pelas falas de Ronaldo e Adriano.

Ronaldo: Ah, ah!!! Tá aí. Olha lá onde é constante.

Adriano: Ele vai ser constante em três.

Com a análise do esboço gerado pelo *software* eles viram o que era despercebido, conforme afirma Arcavi (2003). Essa análise os ajudou a reorganizar o conceito de solução constante do modelo estudado, (BORBA e VILLARREAL, 2005), conforme observamos na fala dos alunos:

Ronaldo: Como nós não achamos isso, cara? Aqui também óh... (Apontando para o eixo das abscissas).

Adriano: Aliás, ele vai ter vários constantes, em zero...

Finalizando, acredito que a visualização consiste em processos de várias naturezas. Entretanto, concordo com Arcavi (2003) que o processo de visualização não somente organiza os dados em estruturas significativas. Ele constitui um importante fator que guia o desenvolvimento analítico de uma solução.

No entanto, temos também que considerar as dificuldades por ela impostas. Afinal todos nós vemos igual? É atribuída à Goethe a frase "nós não sabemos o que vemos, nós vemos o que sabemos". A segunda parte da frase "nós vemos o que sabemos" aplica-se para muitas situações nas quais os alunos não necessariamente vêem o que nós, professores ou pesquisadores, estamos vendo.

Esse fato aconteceu em diversos momentos durante o curso de extensão. Por exemplo, quando eu solicitava aos alunos, no episódio da lei do resfriamento, que eles avaliassem se os modelos obtidos eram compatíveis, parece evidente analisando as falas de Adriano e Viviane, que o que eu via por compatibilidade dos modelos não fazia parte do horizonte dos alunos.

Outra dificuldade acerca do processo de visualização surge da necessidade de transitar pelas representações visuais e analíticas de uma mesma situação. Esse é um dos processos centrais na compreensão da Matemática. E, aprender a compreender e ter habilidade na manipulação de múltiplas representações pode ser um processo demorado, tortuoso e não linear para os estudantes.

Esse foi um fato recorrente nos vários episódios. Podemos observar a importância do entendimento da equivalência entre as representações visuais e analíticas nos vários episódios analisados. Marcos e Shen na atividade do objeto em queda, Viviane e Ronaldo na atividade do modelo de Malthus, Viviane, Ronaldo e Adriano na atividade da lei do resfriamento.

A abordagem geométrica para analisar equações diferenciais pode encontrar neste fato uma das dificuldades para seu sucesso. Entender o campo de direções, entender o que é resolver uma EDO e relacionar esse entendimento com a busca da solução analítica é o maior desafio dessa abordagem.

5.1.2. Abordagens algébrica e geométrica com as mídias informáticas

Borba e Villarreal (2005) afirmam que existe uma tendência de reconhecimento da relevância da visualização no processo de aprendizagem matemática na comunidade dos educadores matemáticos. Porém, a abordagem visual não alcança o grau de importância que assume a abordagem algébrica nos processos de aprendizagem matemática. Ainda, segundo

Eisenberg e Dreyfus (1989) citados em Villarreal (1999), apesar da importância da visualização ser enfatizada, esta é pouco praticada no currículo de Matemática. Segundo esses autores, alunos talentosos e pesquisadores matemáticos rejeitam "ver" os conceitos, aborda-los visualmente.

Este fato estaria relacionado com o modo que a Matemática é difundida pelos professores e pesquisadores, geralmente, na forma oral e escrita. Esse processo de difusão da matemática leva ao condicionamento do pensamento matemático que é desenvolvido.

Nós somos ensinados a desconfiar de provas que fazem uso crucial dos diagramas, dos gráficos e de outras formas de representação não lingüísticas e, passamos esse desprezo para os estudantes. Entretanto, formas visuais de representação podem ser elementos legítimos de provas matemáticas, (ARCAVI, 2003).

Os matemáticos são cientes do valor de diagramas e outros recursos visuais tanto para o ensino quanto para pesquisa de descobertas matemáticas. Mas apesar da importância óbvia das imagens visuais em atividades cognitivas humanas, a representação visual permanece como um "cidadão de segunda classe" na teoria e na prática de matemática, (BORBA e VILLARREAL, 2005; ARCAVI, 2003).

No entanto, o condicionamento do pensamento matemático não é determinado pela mídia utilizada. Ao analisarmos os vários episódios nesta tese, observamos que existem estilos de abordagens diferentes para desenvolver as atividades matemáticas propostas, mesmo estando presentes, no desenvolvimento das atividades, os softwares, o lápis e papel, e a discussão entre os alunos e a professora/pesquisadora. Ou seja, as tecnologias da inteligência (oralidade, escrita e informática) estavam presentes, formando assim um coletivo pensante, e, no entanto esse ambiente não determinava a produção matemática desenvolvida, (LÉVY, 1993).

Observamos que dois tipos de abordagens surgiram no decorrer do desenvolvimento das atividades. Por vezes os alunos, em determinadas situações, buscavam resolver a atividade proposta explorando as representações gráficas. Em outras situações, os alunos buscavam explorar as expressões analíticas para resolver o que estava proposto. São estilos de abordagem com características próprias que coexistem.

Segundo Borba e Villarreal (2005) as abordagens algébrica e a visual poderiam ser caracterizadas, respectivamente, por:

> Preferência de resoluções algébricas quando resoluções gráficas também são possíveis; dificuldade para estabelecer interpretações gráficas das resoluções analíticas; quando uma resolução geométrica é pedida, há necessidade de uma passagem prévia pelo algébrico e facilidade para formular conjecturas e refutações ou gerar explicações a partir de fórmulas ou equações.
>
> Uso de informações gráficas para resolver questões matemáticas que também poderiam ser abordadas algebricamente; dificuldade para estabelecer interpretações algébricas das resoluções gráficas; não há necessidade de uma passagem prévia pelo algébrico, quando resoluções gráficas são solicitadas e facilidade para formular conjecturas e refutações ou dar explicações usando informações gráficas. (BORBA E VILLARREAL, 2005, pg. 93).

No caso de tendência à abordagem algébrica, o computador é pouco utilizado e as contas, em geral, são efetuadas "à mão" ou mentalmente. Já no caso da visual, o computador é utilizado, em geral, para realizar os cálculos e para validar ou refutar conjecturas.

Esses autores nos alertam que apesar das características serem dadas separadas, não implica que as abordagens sejam disjuntas ou exclusivas nas atividades matemáticas. Uma mesma pessoa pode utilizar a abordagem algébrica ou a visual dependendo do problema e da mídia com a qual está interagindo. Representações visuais e algébricas são complementares nos processos de aprendizagem matemática.

Por exemplo, no episódio campos de direções, Viviane insistia no início em resolver algebricamente as equações, ao invés de analisá-las por meio dos campos de direções. Já Adriano buscava analisar o campo de direções não se preocupando com a busca pela solução algébrica.

Borba (1995) argumenta que a mídia "lápis e papel", que é a mais tradicional no meio matemático, favorece a abordagem algébrica de questões matemáticas. No entanto, a mídia informática por sua vez, privilegia abordagens em que a visualização tem um papel fundamental.

Segundo Moreno e Azcárate Gimenez (2003), a concepção dos professores acerca da Matemática e, em particular de equações diferenciais, é bastante formalista o que leva a acreditar que existe uma supremacia da manipulação algébrica em relação aos tratamentos gráfico e numérico, considerando como um princípio inquestionável da aprendizagem significativa. E essa crença, por vezes, é passada para os alunos que também acreditam que a abordagem algébrica é mais confiável. Adriano no episódio da atividade do modelo de Verhulst comenta, em determinado momento, que tinha esboçado um gráfico, mas que não tinha certeza se ele estava correto, pois ainda não tinha determinado a solução da equação envolvida na atividade.

Um motivo que talvez também contribua para a relevância do algébrico é que, tradicionalmente, resolver tem sempre o significado de encontrar um valor par o desconhecido e, em equações diferenciais, o desconhecido são funções. Portanto, resolver uma EDO requer encontrar uma expressão para uma função desconhecida. Porém, na proposta adotada no curso de extensão, encontrar soluções de uma EDO significava em muitos casos, esboçar gráficos das soluções e analisá-los escrevendo sobre seu crescimento, decrescimento, razão da variação, e seu comportamento ao longo do tempo.

Habre (2000) pesquisou junto a alunos de um curso de EDO a abordagem geométrica para determinar o comportamento da equação. A maioria dos alunos não obteve sucesso nas atividades, pois não lembravam dos métodos de resolução e, muitos deles rejeitaram a abordagem geométrica por acreditarem no poder da representação simbólica da função solução.

Existem alunos que pensam que ao resolver algebricamente uma EDO conseguem obter todas as informações sobre ela. Isto reflete um erro conceitual comum sobre funções. Para esses alunos, a definição analítica de uma função é suficiente para conhecer tudo sobre ela e, acreditam que uma função é uma fórmula ou uma equação, sem qualquer referência à sua representação geométrica. Habre (2003) afirma que "um grande volume da matemática (ensino básico e universidade) é ensinado simbolicamente, criando uma crença entre os alunos que uma abordagem gráfica não é tão exata quanto uma simbólica".

Devido ao maior acesso às calculadoras gráficas e computadores, o uso de representações múltiplas tem sido extensivamente discutido, na comunidade de educadores matemáticos. Pesquisadores (Borba e Villarreal, 2005, Borba e Confrey, 1996) têm enfatizado a importância de uma abordagem desse tipo, uma vez que facilita a coordenação dos estudantes das representações matemáticas estabelecidas, como tabelas, gráficos cartesianos e expressões algébricas.

Durante o desenvolvimento das atividades propostas no curso, um aspecto reincidente foi a utilização, pelos alunos, de várias mídias ao mesmo tempo, aspecto que, por diversas vezes, os auxiliou na busca de validar ou refutar suas conjecturas.

Os alunos Marcos e Shen, na investigação do modelo do objeto em queda, utilizaram a planilha eletrônica para calcular os ângulos de alguns vetores diretores, utilizaram lápis e papel para esboçar "à mão", no caderno, o comportamento desses vetores e, na seqüência, esboçaram, no Winplot, o campo de direções com o intuito de confrontar com o esboço desenhado no caderno.

Ao esboçar os vetores diretores no caderno (Figura 4.5), suspeitaram que o comportamento das soluções, que têm esses vetores diretores como vetores tangentes às curvas soluções, seria próximo a uma parábola. Esse fato se deu, muito provavelmente, por conta de que eles tinham a conjectura de que a equação que regia a velocidade de um objeto em queda era dada por uma função quadrática e também pelo fato de terem desenhado poucos vetores diretores no esboço do caderno. Quando elaboraram o campo de direções utilizando o Winplot, o gráfico esboçado era apresentado no intervalo $[-4,+4]$, nos dois eixos cartesianos, e, portanto, diferente do comportamento que haviam desenhado no caderno. O *default* que o *software* apresenta é o gráfico dos vetores diretores na janela gráfica no intervalo $[-4,+4]$ e, no entanto a variação da velocidade calculada na planilha era de 10 unidades no intervalo $[0,100]$. Esse fato levou-os a questionar o esboço do caderno, o do *software* e a procurar também pela expressão algébrica da solução da equação diferencial ordinária, interpretando, assim, qual era a relação do que estavam analisando em cada uma das mídias utilizadas.

Quando Viviane e Ronaldo analisaram o modelo de Malthus, por meio da planilha de cálculo, é aparente a confusão dos alunos com o modelo representado pela EDO e a solução desta, que era uma função exponencial, que, de certa forma, também é um modelo que representa o fenômeno do crescimento populacional.

5.1.3. Conhecimento como rede de significados

A imagem do conhecimento como rede tem sido reforçada pela presença crescente das TIC no cotidiano. Segundo Machado (1995), o conhecimento era concebido como algo passível de acumulação, ou ainda como algo que vai sendo preenchido como um reservatório, preexistente no ser humano, talvez inicialmente vazio. Hoje em dia, apesar desta concepção não ser a mais aceita e defendida pela comunidade dos educadores, expressões como apropriação ou aquisição do conhecimento ainda são utilizadas. Tais expressões indicam a idéia do conhecimento como algo que se adquire ou que se toma posse.

Outra maneira de se conceber o conhecimento é por meio da idéia de cadeia cartesiana. Os elos dessa cadeia deveriam ser construídos linearmente na direção dos conceitos mais simples para os mais elaborados. Machado (1995) afirma que essa situação ainda se reflete nos argumentos que sustentam as retenções nos anos escolares, bem como a idéia de pré-requisito nos cursos de graduação.

Ramal (2002) afirma que, ao invés da concepção de uma visão estruturada para se representar o conhecimento, o saber, ou a própria sociedade, tem-se a concepção de descentramento, que ela define como sendo uma infinidade de pontos assincrônicos que não estão acabados, mas sim em contínua produção e/ou reprodução e negociação de sentidos e informações, gerando assim novos discursos, em uma troca sem regras pré-fixadas e em constante construção.

A idéia de construção vem sendo uma palavra-chave na discussão de como se gera o conhecimento. E, em particular, quando analisamos como se dá o ensino de equações diferenciais, o que encontramos, de maneira geral, são receituários para a busca de soluções algébricas com a aplicação de listas de exercícios, os quais podem ser resolvidos pelos métodos estudados. As aplicações são deixadas no segundo plano, o que leva os alunos a acreditarem somente na importância da busca da solução propriamente dita, sem a preocupação com o significado desta com relação ao modelo analisado.

Essa noção de, a partir de um determinado problema, buscar relações com conteúdos já estudados é o que Machado (1995) apresenta como o conhecimento em rede. Na concepção de rede de conhecimento, o autor afirma que a compreensão não pode ser simplesmente fruto da transmissão de informações, mas deve, sim, ser fruto da apreensão do significado do objeto do conhecimento. Essa rede é constituída por nós, que representam conceitos. As linhas que partem deles, ligando-os a outros nós, são as múltiplas relações que se estabelecem proporcionando a compreensão dos mesmos.

A aprendizagem deve ocorrer de forma dinâmica, significativa favorecendo o aparecimento de um número cada vez maior de conexões (relações). Respeitar as diferenças individuais, levar em consideração os aspectos afetivos, cognitivos e os valores de cada um, devem ser atitudes do professor. O papel que este assume é o de timoneiro, navegando com o aluno pela rede, estabelecendo mapas de relevância e tecendo significados.

É importante salientar a função das metáforas na rede, elas ajudam a ir de um nó a outro, ou seja: para aprender um conceito novo, precisamos do velho. Aquilo que dentro de nós já está perfeitamente compreendido nos leva à apreensão daquilo que é visto pela primeira vez.

Esse fato pode ser evidenciado no episódio “Objeto em queda”. Por diversas vezes, Marcos questionou o modelo $m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$. Ele comentava que se não tivesse a resistência do ar, o modelo deveria ser $m\frac{dv}{dt} = mg$ e que a solução procurada deveria ter o comportamento de uma parábola. E ainda comenta:

Marcos: Quer dizer que isso aí vai dar uma coisa e elevado a ou a elevado a? É que nós estamos viciados, o modelo que a gente está pensando é sem a resistência do ar, a gente está viciado lá na física, lá trás, por isso que nós estamos...

Percebe-se que os alunos buscavam entender o modelo em questão relacionando-o com algum outro que já haviam analisado anteriormente em sua vida acadêmica.

5.2. Tecendo algumas idéias

Neste capítulo foram apresentados e discutidos tópicos que emergiram a partir da pesquisa realizada. Com o intuito de enriquecer perspectivas pessoais, foram estabelecidas semelhanças e diferenças da análise apresentada no Capítulo 4 com relação à literatura estudada. A busca pelo confronto dos indícios encontrados nos dados com o referencial teórico é uma tentativa de dar “resposta” à pergunta diretriz desta pesquisa:

> Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?

Na pesquisa realizada, analisou-se um coletivo integrado pelos estudantes, a entrevistadora, os softwares Excel, Maple e Winplot, o software Camtasia, “lápis e papel”, as atividades para o estudo dos modelos matemáticos e EDO em geral, que constituiu uma situação particular.

Então, considerando essa situação em particular, observa-se como a produção matemática dos alunos se constitui em uma rede de significados que vai sendo tecida por meio de um processo de pensamento caracterizado por conjecturas e expectativas que vão sendo elaboradas, contestadas ou comprovadas em função dos dispositivos materiais e tecnológicos disponíveis. As questões matemáticas, relacionadas ao estudo de EDO, foram abordadas por meio das atividades propostas. Como a proposta desta pesquisa consiste em analisar possibilidades de ensino e aprendizagem de EDO por meio da análise qualitativa dos modelos, por meio dos campos diretores, a abordagem geométrica surge como uma abordagem privilegiada nas atividades propostas. No entanto, é observado que a abordagem algébrica está bastante presente no fazer dos alunos. Por diversas vezes, as abordagens foram utilizadas pelos alunos de modo combinado.

Embora o foco da pesquisa não tenha sido direcionado para o estudo das concepções dos alunos relacionadas com o conceito de derivada, elas fazem parte dos tópicos analisados, pois foi a partir dessas concepções que muitas atividades foram desenvolvidas, já que o conceito de campos de direções envolve o significado de derivada. Uma das dificuldades que o estudo mostra com relação à proposta de ensino de EDO, por meio da abordagem qualitativa dos modelos, encontra-se nas concepções dos alunos sobre o conceito de derivada.

Outro ponto importante que deve ser observado é o papel que o computador assumiu no desenvolvimento das atividades. Em determinadas situações, ele pode desempenhar um papel de facilitador das contas, em outras, ele surge como um ampliador da memória dos alunos e, em outras situações, ainda, ele possibilita a reorganização do pensamento dos alunos. (TIKHOMIROV , 1981; BORBA e VILLARREAL, 2005).

Em particular, a partir do estudo desenvolvido, pode-se afirmar que o computador assume tanto o papel de reorganizador quanto o papel de um suplemento nas atividades dos estudantes ao aprender conteúdos matemáticos, dependendo da abordagem que eles desenvolvam nesse ambiente mediado pelas mídias informáticas, do tipo de atividades propostas, da freqüência no uso e da familiaridade que se tenha com ele.

Além da influência advinda da proposta de trabalho de investigação dos modelos mediados pelos softwares, faz-se necessário observar que as características dos processos de produção matemática dos alunos descritos nesta tese são também produtos da metodologia adotada no curso de extensão. Embora existisse um roteiro a seguir a cada aula, ele era maleável no sentido que questões advindas do interesse particular dos alunos pudessem ser abordadas, gerando assim, caminhos a serem seguidos e tópicos a serem tratados. No entanto, além da coleta de dados, que foi realizada neste curso, existia a preocupação em dar andamento nas atividades, realizando o que havia sido proposto, já que ele configurava um curso de extensão para os alunos. Este fato, por vezes, me deixava angustiada no sentido que, além da pesquisadora, estava também ali a professora.

Finalizando, no decorrer desta pesquisa novas compreensões e indagações foram tecidas acerca dos processos de produção matemática de alunos, na situação particular de introdução às equações diferenciais ordinárias, que se desenvolvem mediados pelas mídias informáticas. A partir dessas compreensões e indagações, algumas considerações serão apresentadas no próximo capítulo, procurando estabelecer as limitações e a amplitude deste trabalho dentro da Educação Matemática, além das perspectivas docentes e de pesquisa que surgem.

Capítulo 6 – Considerações Finais

Abraham Arcavi em seu artigo “The role of visual representations in the learning of mathematics”, publicado em Education Studies in Mathematics, 2003, apresenta em uma figura, uma carta, considerada um clássico de representação gráfica dos dados, (Figura 6.1).

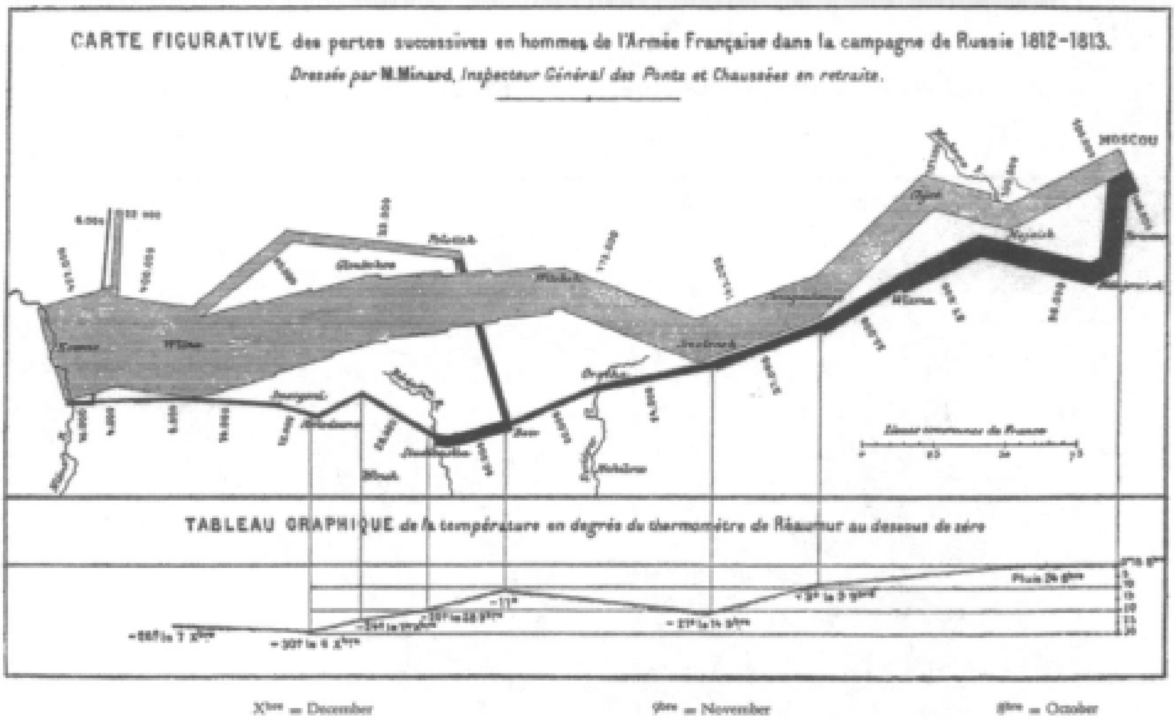


Figura 6.1. Carta figurativa da campanha de Napoleão em 1822

Tufte (1983), citado por Arcavi (2003), considera este gráfico como um "gráfico narrativo do espaço e do tempo", o qual reporta as perdas devastadoras sofridas na campanha de Napoleão em 1812. Ao observarmos o gráfico, no canto à esquerda, e a então Rússia Polonesa, vemos o começo da campanha de Napoleão, com um exército de 422,000 de homens, representados pela largura do ramo, a campanha em si e o recuo (ramo preto), o qual é conectado a uma carta secundária que mostra datas e temperaturas. O gráfico bidimensional diz a história inteira pela indicação das seis variáveis, a saber: o tamanho do exército, sua exata posição (bidimensional), direção, temperatura e datas em uma condensação global e compacta da informação. Segundo o autor, "a exposição verbal da informação nos permite 'ver' a história, vislumbrar alguns relacionamentos de causa-efeito, e possivelmente recordar nitidamente". Ele afirma que essa carta é uma ilustração da frase "vale mais um diagrama do que mil ou dez mil palavras", e que este fato se deve à sua organização bidimensional e não linear em oposição à escrita, a qual é caracterizada por sua exposição lógica e seqüencial (LEVY, 1993) e ao seu agrupamento dos conjuntos de informações, o qual pode ser apreendido, já que torna os dados perceptivelmente mais fáceis.

Ainda, citado em Arcavi (2003), Ancombe (1973) afirma que os gráficos podem ter várias finalidades, tais como: nos permitem perceber e apreciar algumas características amplas dos dados, nos permitem, também, olhar por trás delas para observar o que mais elas possuem de informação. Para exemplificar essa idéia ela apresenta os seguintes dados:

I		II		III		IV	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
10.0	8.04	10.0	9.14	10.0	7.46	8.0	6.58
8.0	6.95	8.0	8.14	8.0	6.77	8.0	5.76
13.0	7.58	13.0	8.74	13.0	12.74	8.0	7.71
9.0	8.81	9.0	8.77	9.0	7.11	8.0	8.84
11.0	8.33	11.0	9.26	11.0	7.81	8.0	8.47
14.0	9.96	14.0	8.10	14.0	8.84	8.0	7.04
6.0	7.24	6.0	6.13	6.0	6.08	8.0	5.25
4.0	4.26	4.0	3.10	4.0	5.39	19.0	12.50
12.0	10.84	12.0	9.13	12.0	8.15	8.0	5.56
7.0	4.82	7.0	7.26	7.0	6.42	8.0	7.91
5.0	5.68	5.0	4.74	5.0	5.73	8.0	6.89

Figura 6.2. Quatro conjuntos de dados

Esses dados podem ser caracterizados por um conjunto de parâmetros idênticos, Figura 6.3, a seguir.

N = 11
mean of X's = 9.0
mean of Y's = 7.5
equation of regression line: Y = 3 + 0.5X
standard error of estimate of slope = 0.118
t = 4.24
sum of squares $X - \overline{X}$ = 110.0
regression sum of squares = 27.50
residual sum of squares of Y = 13.75
correlation coefficient = .82
r^2 = .67

Figura 6.3. Os parâmetros dos dados

No entanto esses conjuntos de dados podem ser vistos completamente diferentes se os dados forem representados por diagramas de dispersão, como ilustrado na Figura 6.4.

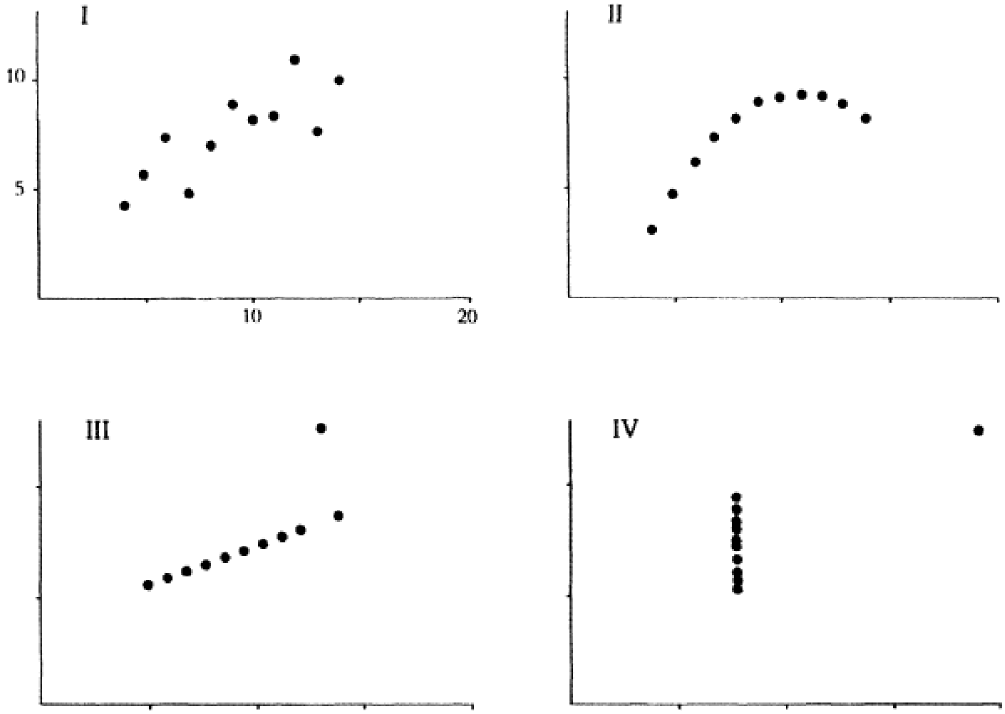


Figura 6.4. Diagrama de dispersão dos conjuntos de dados

Neste caso, os diagramas de dispersão apresentados na Figura 6.4 revelam características dominantes dos conjuntos dos dados, que não eram evidentes analisando os parâmetros que, neste caso, são idênticos.

De maneira análoga ao que Arcavi expõe nesses dois exemplos, é que apresento o gráfico dos campos de direções, como uma possibilidade de procurar elucidar o despercebido ao estudar uma EDO. Pois, ao estudar o modelo do populacional de Verhulst, em particular para a equação $\frac{dp}{dt} = 0{,}5\left(1 - \frac{p}{3}\right)p$, onde *p* representa a população de determinada espécie e *t* o tempo, podemos esboçar o gráfico dado na Figura 6.5, a seguir.

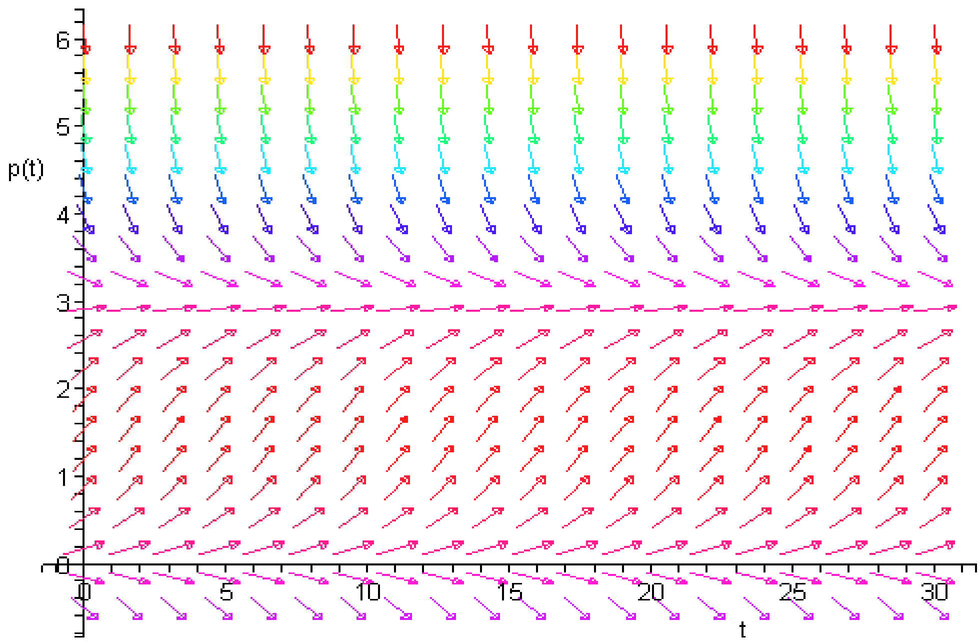


Figura 6.5. Campo de direções da equação diferencial ordinária $\frac{dp}{dt} = 0{,}5\left(1 - \frac{p}{3}\right)p$

Esse gráfico é bidimensional, porém ele apresenta relações entre curvas *p(t),* suas derivadas, por meio dos vetores tangentes, a cada ponto do plano, definido pelo tempo *t* e a população *p(t)*. Ou seja, temos pelo menos três variáveis envolvidas nesse gráfico.

Ao analisá-lo podemos elencar várias perguntas, tais como: quais características podem ser observadas das curvas soluções? Quais informações ele nos dá? Quando temos uma população inicial de 1 unidade, o que podemos concluir da curva solução quando o tempo tende ao infinito? Ou antes, disso, o que significa resolver essa equação? O que representam esses vetores esboçados no gráfico?

Como no gráfico da carta da Campanha de Napoleão, observar um gráfico dos campos de direções de uma equação diferencial ordinária nos leva a obter informações despercebidas sobre as curvas soluções da equação, mesmo sem necessariamente explicitar sua solução algébrica.

Como já explicitado durante os capítulos anteriores, analisar as possibilidades de se introduzir equações diferenciais ordinárias por meio do estudo de modelos clássicos da literatura através dos campos de direções, auxiliado pelas tecnologias informáticas, em pequena escala, ou seja, em um curso de extensão de 36 horas, desenvolvido por nove alunos do curso de Matemática de uma universidade pública do estado de São Paulo, foi o objetivo da tese de doutorado relatada aqui.

Agora, para finalizar esse trabalho, gostaria de elaborar algumas reflexões em torno das questões: quais as contribuições desse trabalho para a Educação Matemática? Quais frutos germinaram desse trabalho?

Ao responder essas questões apresento minha visão da pesquisa e certamente o leitor poderá discordar ou não com o que será colocado.

6.1. Contribuições para a Educação Matemática

Ao propor essa pesquisa, a intenção foi observar como os alunos, em uma situação próxima à da sala de aula, investigavam modelos matemáticos usando as ferramentas informáticas. Não tive a pretensão de elaborar uma classificação de como os alunos raciocinam determinado conteúdo e generalizar para uma classe toda, afinal cada aluno tem sua maneira de pensar.

Talvez também se espera desse trabalho conclusões do tipo se o ensino tornou-se melhor ou pior usando tais procedimentos. No entanto, levando em consideração a idéia de conhecimento enquanto rede (Machado, 1995; Levy, 1993), da concepção de seres humanos com mídias (Borba e Villarreal, 2005) têm-se mais sentido falar das transformações, de novas perspectivas e de obstáculos no ensino de equações diferenciais ordinárias. A forma de trabalho é diferente nessa proposta. Ao longo do Capítulo 4, encontram-se exemplos das possibilidades de exploração e também de dificuldades advindas do uso da mídia informática. Novas demandas surgem, como por exemplo, a coordenação da representação dos campos de direções elaborada pelos alunos no caderno, com o gráfico gerado pelo *software* e sua relação com a expressão algébrica da solução.

Neste trabalho pude evidenciar o que Villarreal (1999) coloca como coordenação intermídias, isto é, no desenvolvimento das atividades os alunos foram colocados em situações onde tiveram que relacionar as respostas das várias mídias com que estavam investigando dos modelos matemáticos. Como afirma a autora, existiu "a necessidade de uma coordenação entre as representações realizadas nas diferentes mídias, isto é, uma coordenação intermídias".

Indicar novos caminhos para o ensino de equações diferenciais ordinárias pode ser a expectativa de algum leitor. Talvez esse trabalho traga elementos que possam auxiliar pessoas interessadas no ensino dessa disciplina a elaborarem suas próprias propostas de ensino. Acredito que iniciar o curso de EDO com a idéia de Aplicação do par Modelagem Matemática/Aplicação, trazida em APPLICATIONS (2002), ou seja, iniciar com o estudo de modelos matemáticos clássicos da literatura, explorando-os com o auxílio das TIC, pode trazer mais possibilidades para o processo de aprendizagem dos alunos e, talvez assim, conseguir atribuir algum significado para essa disciplina, pois como afirma Hubbard (1994) citado em Habre (2000), a disciplina de equações diferenciais deveria ser o elo entre a Matemática e a Ciência.

O termo Modelagem Matemática aparece na Educação Matemática sob várias concepções diferenciadas em aspectos de sua definição. Existem pesquisadores que a utilizam como uma como uma abordagem de ensino. Para outros, a Modelagem Matemática é uma linha da Matemática Aplicada que a utiliza para resolver problemas da realidade.

Neste trabalho a Modelagem Matemática não surgiu nem como a concepção da Educação Matemática nem como a da Matemática Aplicada, mas sim como Aplicação Matemática, ou seja, a estratégia de estudar modelos matemáticos clássicos da literatura, como nesta tese, objeto em queda, modelo de Malthus, modelo de Verhulst e a lei do resfriamento, utilizando a abordagem qualitativa desses modelos, através das tecnologias de informação e comunicação.

Ainda cabe observar que apesar de Rasmussen (2001), Kallaher (1999) e Habre (2000) afirmarem, em suas pesquisas, que a inserção das TIC no ensino de Cálculo proporcionaria ao aluno na disciplina de EDO maiores facilidades por conta da já familiarização, nesta pesquisa esse fato não ocorreu. Como relatado em capítulos anteriores, os alunos participantes não tinham cursado disciplinas em seu curso, até então, com a utilização de softwares como uma abordagem pedagógica.

6.2. Caminhos futuros

Um dos aspectos importantes dessa pesquisa foi o fato desta ter sido desenvolvida dentro do GPIMEM. Mesmo tendo sido eu a responsável pelo projeto, elaboração, desenvolvimento e redação final da tese, as idéias desenvolvidas durante todo o processo foram, por diversas vezes, discutidas com os colegas do grupo. E, como coloca Levy (1993), um coletivo pensante se constitui onde cada um expõe suas idéias, suas crenças, seus objetivos e as interações entre os pares fazem com que, muitas vezes, essas idéias se modifiquem, ou mesmo se ampliem, constituindo uma rede de significados em torno dos objetivos comuns que norteiam o grupo. Acredito que essa vivência propiciada pelo grupo é fundamental para a formação do pesquisador e para o desenvolvimento de pesquisas futuras.

Outro fato que destaco como importante, para a minha formação como docente e pesquisadora, é o de ter exercitado o papel de ouvinte da fala dos estudantes. Por vezes, agora analisando os vídeos gerados nas aulas do curso de extensão, vejo o quanto, em determinadas situações, não ouvia os alunos, o quanto deveria ter ficado mais calada e os deixado falar. No entanto, com a ânsia de professora, que também assumi no curso e não somente a pesquisadora, queria que os alunos avançassem nas atividades e acabava por interferir demais em seus caminhos.

Essa tese encerra uma fase de minha vida acadêmica que teve origem na minha própria prática docente, da revisão da literatura e dos meus anseios como professora. Acredito que muitas das perguntas que persegui durante essa pesquisa foram encaminhadas. No entanto, muitas outras surgem quando penso na sala de aula de matemática. Afinal neste curso de extensão, o qual eu propus para ser o mais próximo a uma situação de sala de aula, foi constituído por mim professora/pesquisadora com nove alunos. E, ainda com uma proposta que era de um curso introdutório de EDO. Agora como levar essa proposta para uma disciplina regular de EDO? Será possível elaborar uma proposta para o ensino dessa disciplina a partir das compreensões aqui elaboradas?

Certamente, minha prática docente talvez ainda não esteja totalmente alterada, porém minha visão sobre ela, sim. E, a efetiva prática da sala de aula me fará buscar respostas para essas novas inquietações. Logicamente, as atividades desenvolvidas deverão ser reelaboradas e novamente aplicadas em situações de sala de aula, muito provavelmente, de forma paulatina com o passar do tempo.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ALVES-MAZZOTI, A. J. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais*: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2004.

APPLICATIONS and Modelling in Mathematics Education. *International Reviews on Mathematical Education*, v. 34, n. 5 ISSN 1615-679X. Disponível em: <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm025i1.pdf>. Acesso em: 22 out. 2007.

ARAÚJO, J. de L. *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática*: as discussões dos alunos. 2002. 173 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, 2002.

ARAÚJO, J.L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In BORBA, M.C. ARAÚJO, J.L. (Org.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics*, v. 52, n.3, p. 215-241, 2003.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, JR. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.

BATSCHELET, E. *Introdução à Matemática para Biocientistas*. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

BENEDETTI, F. C. *Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes*. 2003. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa: significados e a razão que a sustenta. *Revista Pesquisa Qualitativa,* São Paulo, v. 1, n. 1, p. 7-26, 2005.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa Segundo a Abordagem Fenomenológica. In: BORBA, M. C. ; ARAÚJO, J. L. (Org.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 99-112.

BISHOP, A. Review of research in visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v. 11, n.1, p. 7-16, 1989.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BONAFINI, F.C. *Explorando Conexões entre a Matemática e a Física com o Uso de Calculadora Gráfica e do CBL*. 2004. 275 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual, UNESP, São Paulo, 2004.

BORBA, M. C. Funções, representações múltiplas e visualização na Educação Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1995, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1995. p.71-90.

BORBA, M. C. Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Idéias Matemáticas. *BOLEMA*: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 9, n. 3 especial, p.83-102, 1994.

BORBA, M.; CONFREY, J. A Student´s Construction of Transformations of Functions in a Multiple Representational Environment. *Educational Studies in Mathematics*, v. 31, n. 3, p. 319-337, 1996.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104 p.

BORBA, M. C.; SCHEFFER, N. F. Coordination of Multiple Representations and Body Awareness. *Educational Studies in Mathematics,* Dordrecht, v. 57, n. 3, 2004.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: U.S.A., Springer, 2005. v. 39.

BOYCE, W. E. ; DIPRIMA, R. C. 7. ed. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* Rio de Janeiro: LTC, 2002.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: da teoria à prática. 13. ed. Campinas: Papirus, 2006.

GARNICA, A. V. M. Educação, matemática, paradigmas, prova rigorosa e formação do professor. In BICUDO, M. A. V.; CAPPELLETTI, I. F. (Org.) *Fenomenologia*: uma visão abrangente da Educação. São Paulo: Olho d'água, 1999.

GARNICA, A.V.M. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio.*BOLEMA:* Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, Ano 15, n. 18, p. 91-99, 2002.

GOLDENBERG. M. *A Arte de Pesquisar*: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 5.ed. Rio de Janeiro: Record, 2001. 112p.

HABRE, S. Exploring Student's Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reform Setting. *Journal of Mathematical Behavior,* v. 18, p. 455-472, 2000.

HABRE, S. Investigating student's approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology,* v. 34, n. 5, p. 651-662, 2003.

HOUSISS. A. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. 2925p.

JAVARONI, S. L. O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral em um Ambiente Informatizado: demonstrações ou mostrações. In.: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, LONDRINA. *Anais...*, Londrina, 2004, 1CD-ROM.

KALLAHER, M. (Ed.). *Revolutions in Differential Equations*: exploring ODEs with Modern Technology. Washington, USA: The Mathematical Association of America, 1999.

KLINE, M. *Mathematical Thought Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972.

LÉVY, P. *A Inteligência Coletiva*: por uma antropologia do ciberespaço. São Paulo: Edições Loyola, 2000.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência*: o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de C. I. da Costa. São Paulo: Editora 34, 1993.

LINCOLN, Y.; GUBA, E. *Naturalistic Inquiry*. Califórnia: Sage Publications, 1985.

LOURENÇO, M. L. A Demonstração com Informática Aplicada à Educação. *BOLEMA:* Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, Ano 15, n. 18, p. 100-111, 2002.

MACHADO, N.J. *Epistemologia e Didática:* as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.

MACHADO, N.J. *Matemática por assunto:* noções de cálculo. São Paulo: Scipione, 1988.

MORENO, M.; AZCÁRATE GIMÉNEZ, C. Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Enseñanza de Las Ciencias, v.21, n. 2, p.265-280, 2003.

OLÍMPIO JÚNIOR, A. *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática*: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2005. 263 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

PENTEADO, M.G. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In.: BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática*: Concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. (Seminários & Debates).

PLAAT, O. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Barcelona: Reverté, 1974.

RAMAL, A. C. *Educação na cibercultura:* hipertextualidade, leitura, escrita e aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2002.

RASMUSSEN, C. New Directions in Differential Equations: a framework for interpreting studentes'understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior,* Cidade, v. 20, p. 55-87, 2001.

REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SCUCUGLIA, R. *A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas*. 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

TIKHOMIROV, O. K. The Psychological consequences of computerization. In: WERRRTSCH, J.V. *The concept of activity in Soviet Psychology,* New York, p. 256-278, 1981.

VILLARREAL, M. E. O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas. 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. 3 ed. São Paulo: Markron Books, 2001. v. 2.

ANEXO 1 – As atividades

Introdução

Neste Anexo, apresento as atividades que foram desenvolvidas, por duplas e trios de alunos, no decorrer do curso de extensão “Modelagem e Métodos Computacionais em Equações Diferenciais Ordinárias”, com carga horária de 36 horas, oferecido aos alunos do Curso de Matemática. Esse curso de extensão foi o ambiente de investigação da coleta dos dados desta pesquisa.

Estão anexadas, no formato que elas foram aplicadas, as seguintes atividades: “aula derivada”, “aula familiarização”, “aula modelo do objeto em queda”, “aula modelo de Malthus”, “aula modelo de Verhulst”, “aula campo de direções”, “aula modelo de resfriamento”. Além dessas aulas, também foram desenvolvidas outras atividades, a saber: de apresentação do curso, de apresentação dos participantes, atividades de familiarização com os softwares utilizados e apresentação de seminários feitos pelos alunos no encerramento do curso.

1.1 - Aula derivada

Esta atividade tem por objetivo explorar o conceito geométrico de derivação. Essa atividade foi inspirada em atividades que o Prof. Marcelo de Carvalho Borba vem desenvolvendo ao longo dos anos em sala de aula e em pesquisas no GPIMEM. Seu enfoque é mediado pelas calculadoras gráficas.

1. Dado o gráfico de $f(x)$, e considerando o intervalo de domínio da função que aparece esboçado no gráfico, faça:

(A)

i) Descreva quais intervalos onde a função é crescente e decrescente.

ii) Identifique os pontos onde a função muda de crescente para decrescente ou vice-versa.

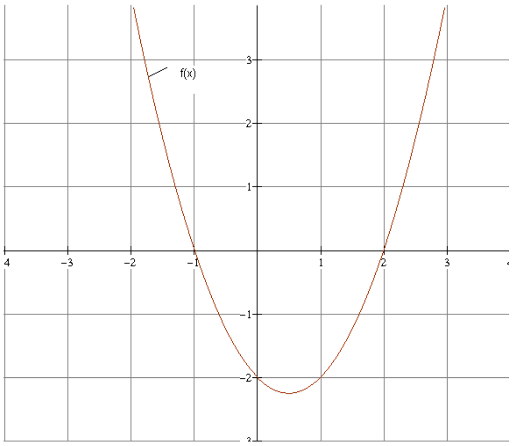
iii) Divida o domínio da função em subintervalos de 1 cm e marque esses pontos no gráfico.

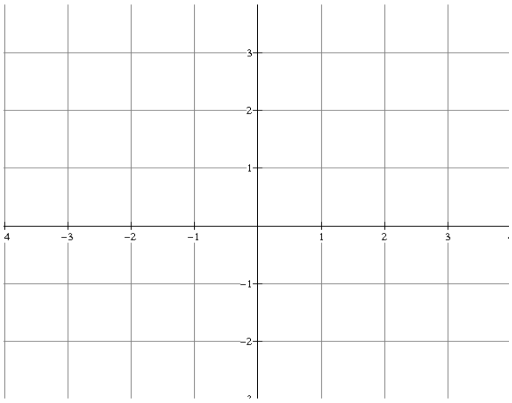
iv) Aproxime a curva dada por segmentos de retas unindo os pontos marcados.

v) Calcule o coeficiente angular de cada segmento de retas que você acabou de desenhar.

vi) Faça, agora, um gráfico representando os coeficientes angulares desses segmentos de retas em função de x, onde x pertence ao intervalo do domínio da função dada originalmente e observe o sinal deste gráfico.

vii) Desenhe no Winplot o gráfico de $y = x^2 - x - 2$ e utilize o comando inventário e derivar. Há semelhanças desse gráfico com o que você esboçou no papel? Sugestão: pense em unidades de comprimentos menores no item (iii).





(B)

i) Descreva quais intervalos onde a função é crescente e decrescente.

ii) Identifique os pontos onde a função muda de crescente para decrescente ou vice-versa.

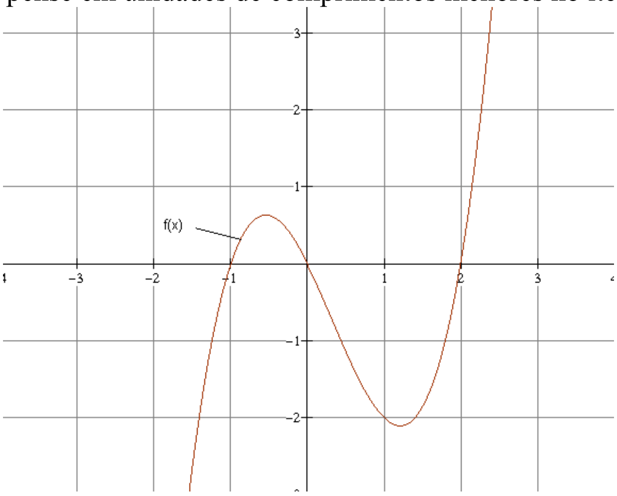
iii) Divida o domínio da função em subintervalos de 1 cm e marque esses pontos no gráfico.

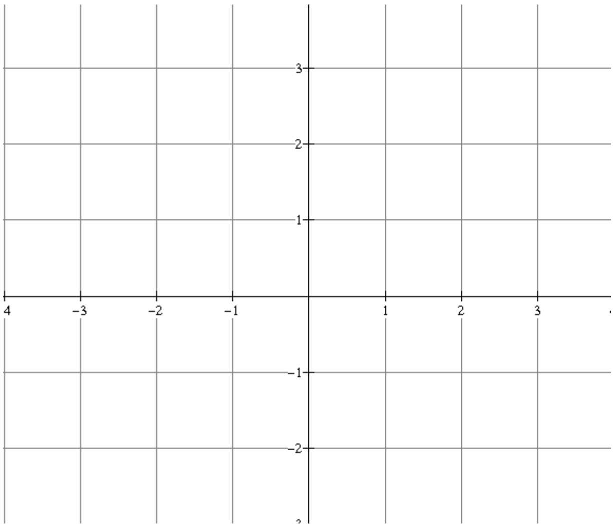
iv) Aproxime a curva dada por segmentos de retas unindo os pontos marcados.

v) Calcule o coeficiente angular de cada segmento de retas que você acabou de desenhar.

vi) Faça, agora, um gráfico representando os coeficientes angulares desses segmentos de retas em função de x, onde x pertence ao intervalo do domínio da função dada originalmente e observe o sinal deste gráfico.

vii) Desenhe no Winplot o gráfico de $y = x^3 - x^2 - 2x$ e utilize o comando inventário e derivar. Há semelhanças desse gráfico com o que você esboçou no papel? Sugestão: pense em unidades de comprimentos menores no item (iii).





(C)

i) Descreva quais intervalos onde a função é crescente e decrescente.

ii) Identifique os pontos onde a função muda de crescente para decrescente ou vice-versa.

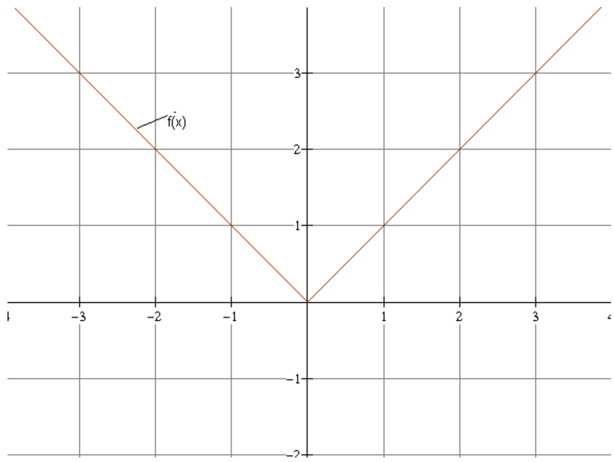
iii) Divida o domínio da função em subintervalos de 1 cm e marque esses pontos no gráfico.

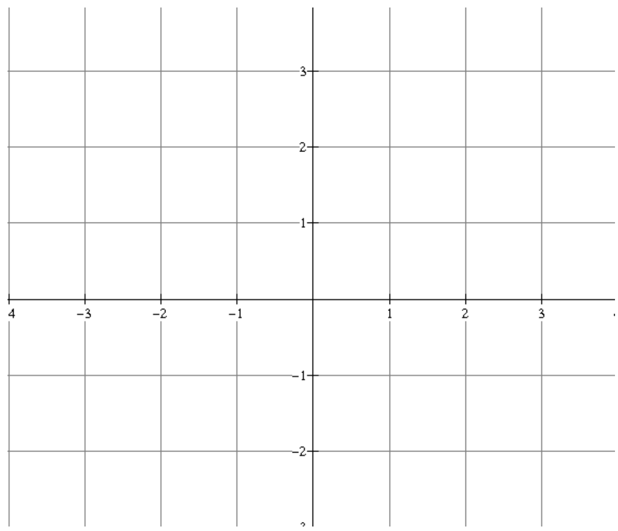
iv) Aproxime a curva dada por segmentos de retas unindo os pontos marcados.

v) Calcule o coeficiente angular de cada segmento de retas que você acabou de desenhar.

vi) Faça, agora, um gráfico representando os coeficientes angulares desses segmentos de retas em função de x, onde x pertence ao intervalo do domínio da função dada originalmente e observe o sinal deste gráfico.

vii) Desenhe no winplot o gráfico de $y = |x|$ e utilize o comando inventário e derivar. Há semelhanças desse gráfico com o que você esboçou no papel?





(D)

i) Descreva quais intervalos onde a função é crescente e decrescente.

ii) Identifique os pontos onde a função muda de crescente para decrescente ou vice-versa.

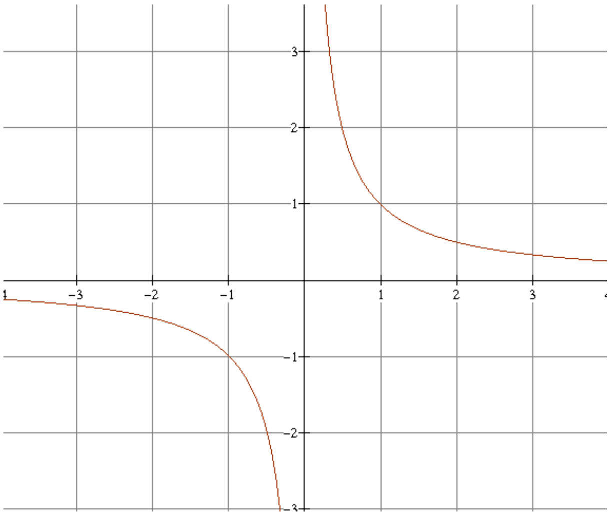
iii) Divida o domínio da função em subintervalos de 1 cm e marque esses pontos no gráfico.

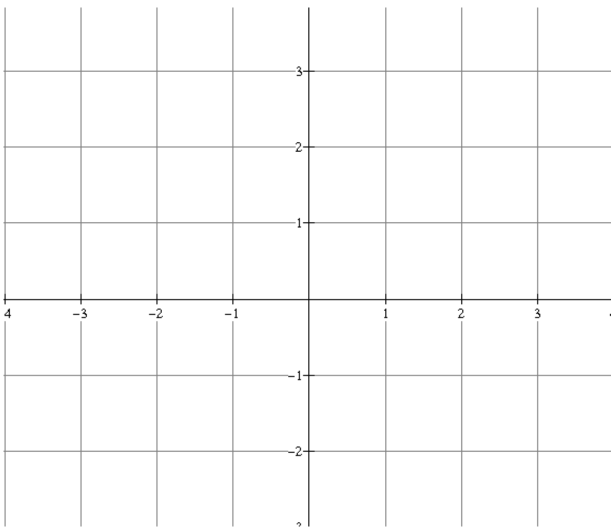
iv) Aproxime a curva dada por segmentos de retas unindo os pontos marcados.

v) Calcule o coeficiente angular de cada segmento de retas que você acabou de desenhar.

vi) Faça, agora, um gráfico representando os coeficientes angulares desses segmentos de retas em função de x, onde x pertence ao intervalo do domínio da função dada originalmente e observe o sinal deste gráfico.

vii) Desenhe no winplot o gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$ e utilize o comando inventário e derivar. Há semelhanças desse gráfico com o que você esboçou no papel? Sugestão: pense em unidades de comprimentos menores no item iii.



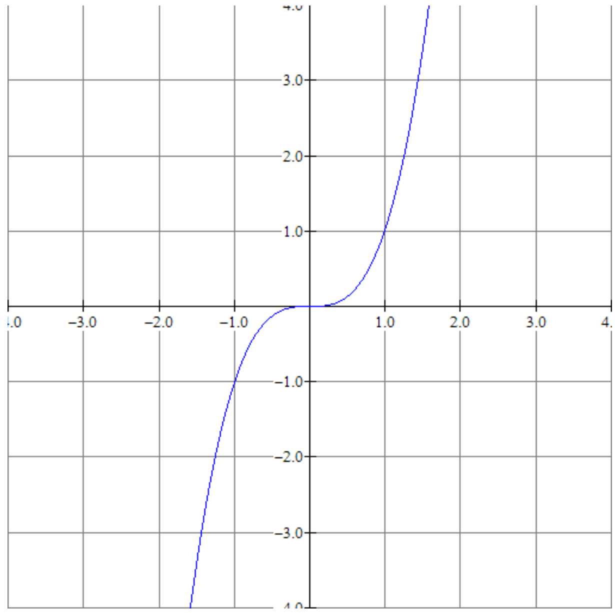


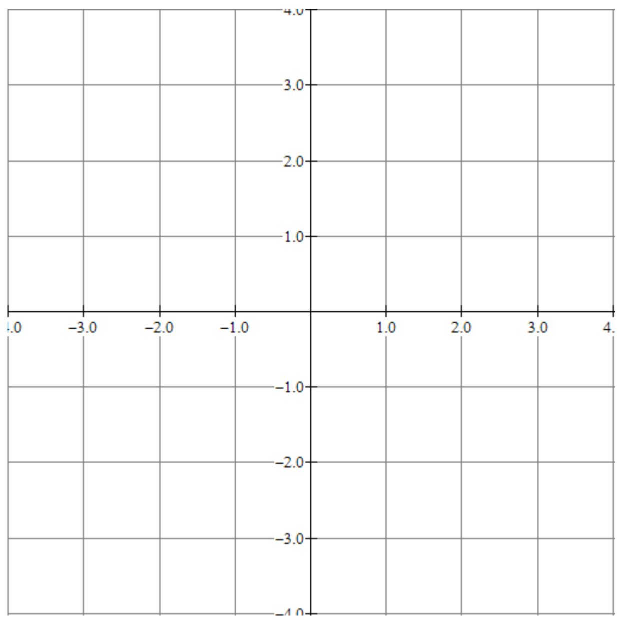
2. Dado o gráfico de $f'(x)$

(A)

i) Esboce o gráfico de $f(x)$, com $f(0) = 1$;

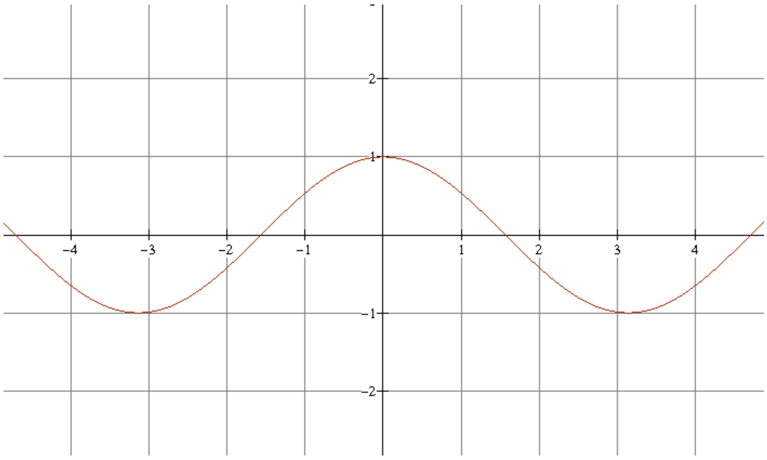
ii) Esboce o gráfico de $f(x)$, com $f(0) = -2$

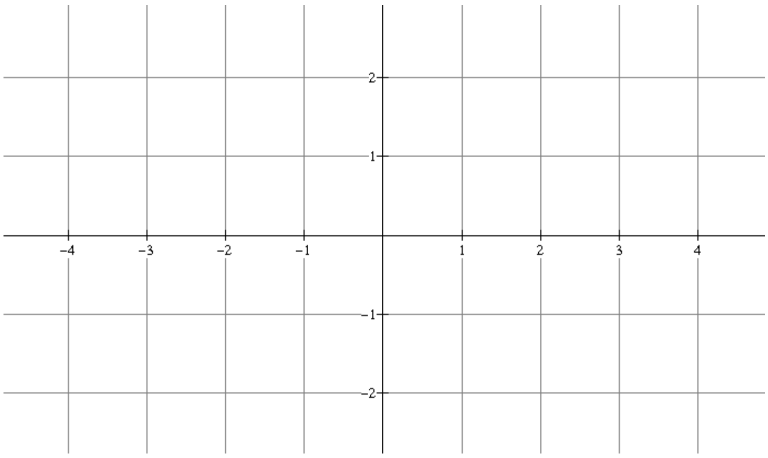




(B)

i) Esboce o gráfico de $f(x)$, com $f(0) = 0$;
ii) Esboce o gráfico de $f(x)$, com $f(0) = 1$.





1.2 - Aula familiarização

Esta atividade tem por objetivo explorar os conceitos iniciais de equações diferenciais ordinárias e propiciar a familiarização com alguns comandos do software Maple.

1. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x de modo que, em cada instante t, a velocidade é o dobro da posição. Ou seja, se chamarmos x = x(t) a posição da partícula, temos $\frac{dx(t)}{dt} = 2x$. Verifique que $x(t) = ke^{2t}$ satisfaz essa última igualdade.

2. Nos exercícios abaixo, verifique que a função y(x) indicada satisfaz a igualdade.

a) $2\left(\frac{dy(x)}{dx}\right) + y(x) = 0$; $y(x) = e^{\left(\frac{-x}{2}\right)}$ b) $\frac{dy(x)}{dx} + 20y(x) = 24$; $y(x) = \frac{6}{5} - \frac{6e^{-20x}}{5}$

c) $\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 6\frac{dy(x)}{dx} + 13y(x) = 0$; $y(x) = e^{3x}\cos(2x)$

3. Nos exercícios abaixo, verifique que a função indicada é solução implícita da equação diferencial dada. Encontre pelo menos uma solução explícita em cada caso. Faça o gráfico, usando o comando plot(f,t=a..b,x=c..d), das soluções explícitas determinadas. Encontre o intervalo de definição apropriado I para cada solução.

a) $\frac{dx(t)}{dt} = (x-1)(1-2x)$; $\ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = t$

b) $2xydx + (x^2 - y)dy = 0$; $-2x^2y + y^2 = 1$

4. Nos problemas abaixo, usando os cálculos no software, verifique que a função dada satisfaz a igualdade:

a) $\frac{d^4y(x)}{dx^4} - 20\left(\frac{d^3y(x)}{dx^3}\right) + 158\left(\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right) - 580\left(\frac{dy(x)}{dx}\right) + 841y(x) = 0$; $y(x) = xe^{5x}\cos(2x)$

b) $x^3\left(\frac{d^3y(x)}{dx^3}\right) + 2x^2\left(\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right) + 20x\left(\frac{dy(x)}{dx}\right) - 78y(x) = 0$;

$y(x) = 20\frac{\cos(5\ln x)}{x} - 3\frac{sen(5\ln x)}{x}$

5. Discuta com seu par e escreva o que vocês entendem por uma equação diferencial.
6. O que é resolver uma equação diferencial?
7. Como se caracteriza uma equação diferencial ordinária?
8. Que função você conhece do Cálculo que é igual à sua derivada? Que sua derivada seja k vezes ela mesma? Escreva cada resposta na forma de uma equação diferencial de primeira ordem com uma solução.
9. Que função ou funções você conhece do Cálculo cuja derivada segunda seja igual a ela mesma? Que sua derivada segunda seja o negativo dela mesma? Escreva cada resposta na forma de uma equação diferencial de segunda ordem com uma solução.

1.3 - Aula modelo de um objeto em queda

Esta atividade tem por objetivo investigar o comportamento de um objeto em queda, na atmosfera da terra, próximo ao nível do mar, considerando a hipótese de que a resistência que o ar atua nesse objeto é proporcional à sua velocidade de queda. Este é um exemplo clássico encontrado nos livros-texto de equações diferenciais. Os livros Boyce e DiPrima(2002) e Kallaher (1999) foram fontes consultadas para a elaboração desta atividade.

Modelo - um objeto em queda

Suponha que um objeto está caindo na atmosfera, perto do nível do mar. Vamos formular um modelo que representa essa situação, isto é, vamos determinar uma equação diferencial que descreve esse movimento e, posteriormente analisar qualitativamente sua solução e finalmente resolvê-la analiticamente.

O movimento ocorre durante um determinado intervalo de tempo, logo vamos usar t para representar o tempo. Além disso, vamos usar v para representar a velocidade do objeto em queda. A velocidade varia com o tempo, assim vamos considerar v como uma função de t; em outras palavras, t é a variável independente e v é a variável dependente. Vamos medir o tempo em segundos (s) e a velocidade em metros por segundos (m/s). Além disso, vamos supor que a velocidade v é positiva quando o sentido do movimento é para baixo, isto é, quando o objeto está caindo.

A lei física que governa o movimento de objetos é a segunda lei de Newton, que diz que a massa do objeto vezes sua aceleração é igual à força total atuando sobre o objeto. Em linguagem matemática, essa lei é expressa pela equação $F = ma$, onde m é a massa do objeto, a sua aceleração e F a força total que age sobre o objeto. E como $a = \frac{dv}{dt}$, temos $F = m\frac{dv}{dt}$. Mas ainda temos que considerar as forças que agem no objeto em queda livre. A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, ou mg, onde g é a aceleração devida à gravidade. Nas unidades de medida que escolhemos, g é determinada experimentalmente como sendo, aproximadamente igual a $g = 9{,}8\ {}^{m}\!/_{s^2}$ próximo à superfície da Terra. Existe, também, uma força devido à resistência do ar, que para essa atividade será considerada proporcional à velocidade, ou seja, γv , onde γv é uma constante e, é chamada de coeficiente da resistência do ar.

Assim, $F = mg - \gamma v$ e, portanto temos:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \qquad (1)$$

Essa última equação é um modelo matemático do objeto de massa m caindo na atmosfera, próximo ao nível do mar. Note que este modelo contém três constantes m, g e γ. As constantes m e γ dependem do objeto em particular que esta caindo e será diferente, em geral, para objetos diferentes. É comum referir-se a essas constantes como parâmetros, já que podem tomar um conjunto de valores durante um experimento. Por outro lado o valor de g é o mesmo para todos os objetos.

Resolver a equação (1) consiste em determinar uma função $v(t)$ que satisfaça esta equação. Sem perda de generalidade, vamos atribuir valores numéricos para m e γ. Vamos supor que $m = 10\ Kg$ e $\gamma = 2\ Kg/s$ portanto temos que resolver a equação

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5} \qquad (2)$$

Ao invés de resolver analiticamente a equação (2), podemos analisá-la qualitativamente, ou seja, investigar o comportamento das soluções sem de fato encontrar as soluções analiticamente. Vamos analisar a equação (2) de um ponto de vista geométrico.

Considere a equação diferencial $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$. Atribuindo valores para $v(t)$, calculamos a expressão à direita do sinal de igualdade na equação e assim encontramos o valor correspondente de $\frac{dv(t)}{dt}$.

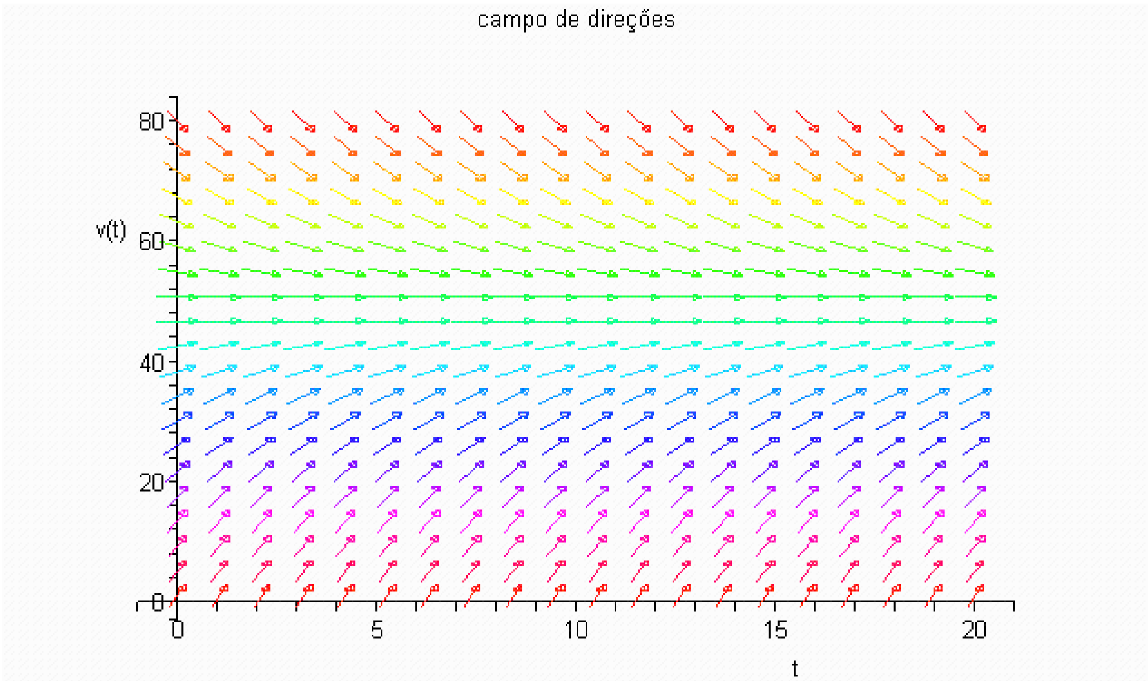
Por exemplo, se $v = 40$, então $\frac{dv}{dt} = 1{,}8$. Isto significa que a inclinação, isto é, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma solução desta equação tem valor 1,8 em qualquer ponto onde $v = 40$. Analogamente, se $v = 50$, então $\frac{dv}{dt} = -0{,}2$.

Podemos representar essas informações graficamente no plano tv desenhando segmentos unitários de reta com coeficiente angular 1,8 em diversos pontos ao longo da reta $v = 40$ e segmentos unitários de reta com coeficiente angular -0,2 em diversos pontos ao longo da reta $v = 50$.

1) Construa uma tabela, em uma planilha de cálculo, atribuindo valores para v, entre 0 e 100, de 5 em 5, e calcule $\frac{dv}{dt}$ e o angulo correspondente a esse coeficiente angular, usando a função ATAN no Excel e não se esqueça de converter em graus para facilitar o esboço do desenho. Faça um esboço dos segmentos unitários com esses coeficientes angulares, no plano tv, no papel.

2) Agora, no Winplot 2D, entre em Equação, diferencial, dy/dx e entre com a equação 9.8 - (y/5), e clique OK. Em Ver, clique em escala em x e y. Em seguida clique em PgDn no teclado. O que você observa no gráfico gerado? É semelhante ao que você esboçou no papel?

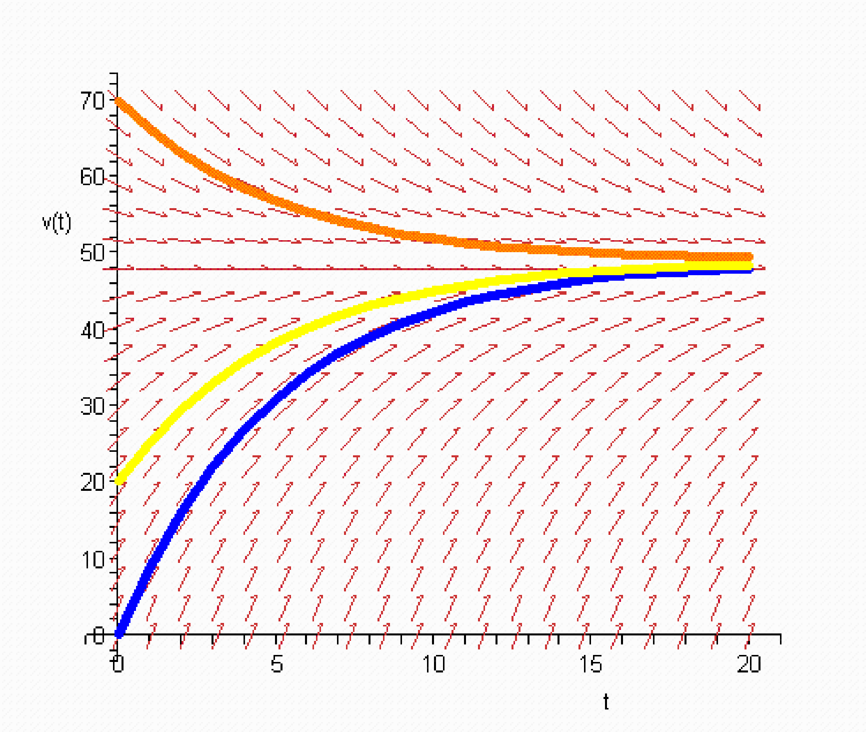
3) Em seguida, observe o próximo gráfico, que foi gerado no Maple:



4) O que você observa neste gráfico? Qual a relação deste gráfico com os valores que você obteve na planilha?

5) Qual o comportamento das soluções desta equação? Tende para infinito? Tende para algum valor constante?

6) Utilizando o Maple, obtemos o gráfico abaixo. Interprete-o. O que significam as curvas de linhas contínuas?



7) Qual é o valor crítico de v que separa os objetos cuja velocidade está aumentando daqueles cuja velocidade está diminuindo? Referindo-nos, novamente à equação, podemos perguntar: quais os valores de v que farão com que $\frac{dv}{dt}$ seja igual a zero?

8) Resolva a equação diferencial e compare seu comportamento ao que foi analisado através do campo de direções.

1.4 - Aula modelo de Malthus

Esta atividade tem por objetivo investigar um modelo matemático para o fenômeno de variação populacional. A elaboração desta atividade foi inspirada em Bassanezi (2002) e Kallaher (1999).

Modelos determinísticos de populações isoladas - Modelo de Malthus

Os biossistemas são quase sempre constituídos de um grande número de populações interrelacionadas. Assim uma população raramente pode ser considerada isolada, a não ser em condições ideais de laboratório ou quando não é possível individualizar no biossistema outra população interagindo com a primeira. Mesmo na análise de populações isoladas, muitos fatores podem contribuir com sua dinâmica - fatores abióticos (temperatura, vento, umidade, etc) e fatores de auto-regulação (espaço, alimento, idade, guerra, etc.)

A aprendizagem com modelagem, tanto do fenômeno quanto da própria matemática, consiste em utilizar gradativamente cada fator que interfere no fenômeno, dependendo de seu grau de importância.

Um primeiro modelo para o entendimento da dinâmica populacional é considerar que as populações interagem para persistirem, e para tal necessitam aumentar. A proposta de utilização da matemática para estabelecer um modelo de crescimento populacional humano começou com o economista inglês Tomas R. Malthus (1766-1834). Seu modelo é baseado em dois pressupostos:

1.O alimento é necessário à subsistência do homem;

2.A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente.

Supondo então, que tais pressupostos estejam garantidos, Malthus afirma que "a capacidade de reprodução do homem é superior à capacidade da terra de produzir meios para sua subsistência e, a inibição do crescimento populacional é devida à disponibilidade de alimentos. A população quando não obstaculizada, aumenta a uma razão geométrica. Os meios de subsistência aumentam apenas a uma razão aritmética. Pela lei de nossa natureza, que torna o alimento necessário à vida do homem, os efeitos dessas duas diferentes capacidades devem ser mantidos iguais". (Malthus: Economia, Textos de Malthus organizado pot T/ Szmrecsányi, Ed. Ática, 56-57, apud Rodney C. Bassanezi, Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. SP: Contexto, 2002, p 327).

Atualmente, em dinâmica populacional, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante (progressão geométrica ou crescimento exponencial), e desta forma, a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição. Assim o modelo de Malthus propõe um crescimento de vida "otimizada", sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento. Portanto o modelo malthusiano pode ser escrito como $\frac{dp(t)}{dt} = rp$, onde a constante r é chamada taxa de crescimento ou declínio, dependendo se é positiva ou negativa.

A equação de crescimento exponencial modela uma população cuja taxa de crescimento é proporcional ao seu tamanho presente. Vamos considerar a equação acima com $r = 1$, ou seja $\frac{dp}{dt} = p$.

1) Construa uma tabela para valores de p e $\frac{dp}{dt} = p$.

2) Esboce, em uma folha de papel, o gráfico de campo de direções, no sistema cartesiano tp.

3) Agora, no Winplot 2D, entre em Equação, diferencial, dy/dx e entre com a equação y, e clique OK. Em Ver, clique em escala em x e y. Em seguida clique em Pg Dn no teclado. O que voce observa no gráfico gerado? É semelhante ao que você esboçou?

4) Observe esse campo de direções e responda:

a) O que podemos afirmar das soluções desta equação?

b) Qual o comportamento para essas soluções quando t tende ao infinito?

c) Esse modelo é um "bom" modelo para o crescimento populacional?

d) Agora resolva analiticamente essa equação e compare sua solução com o campo de direções que você esboçou. O comportamento que você analisou através do campo de direções é coerente com essa solução que determinou?

5) Entre no site:

http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math100/notes/mordifeqs/dirfield.html e analise o que está acontecendo, qual a relação com o gráfico gerado acima?

1.5 - Aula modelo de Verhulst

Nesta atividade os alunos foram levados a investigar um modelo de crescimento populacional, o modelo de Verhulst. Para sua elaboração, as atividades tiveram como fonte os livros Bassanezi (2002) e Kallaher (1999).

Modelos determinísticos de populações isoladas - Crescimento logístico

A previsão mundial segundo o modelo malthusiano, atingiria números astronômicos em pouco tempo o que tornaria a Terra um planeta superlotado e inabitável, o que não ocorreu. Não é possível uma população crescer infinitamente, pois existem os chamados fenômenos sociais que alteram a taxa de crescimento r. Fatores como falta de alimento, limitações de espaço, fumaça causada por queimadas reduzem esta taxa r, fazendo com que r seja negativo e dão fim a este crescimento ilimitado.

Para levar em conta o fato de que a taxa de crescimento depende, realmente, da população vamos substituir a constante r por uma função $h(p)$. Essa função deve ter as seguintes características: $h(p) \sim r > 0$ quando p for pequeno; $h(p)$ decrescente quando p crescer e $h(p) < 0$ quando p for suficientemente grande.

A função mais simples com essas propriedades é $h(p) = r - ap$, onde a é também uma constante positiva. Assim a equação para o crescimento populacional é dada por $\frac{dp}{dt} = (r - ap)p$, chamada equação de Verhulst ou equação logística. Muitas vezes é reescrita na forma equivalente $\frac{dp}{dt} = r\left(1 - \frac{p}{k}\right)p$, onde $k = \frac{r}{a}$. A constante r é chamada de taxa de crescimento intrínseco, isto é, o crescimento na ausência de qualquer fator limitador.

Vamos inicialmente procurar as soluções mais simples desta equação, isto é, as soluções constantes. Para tal solução, $\frac{dp}{dt} = 0$ para todo t, chamadas de solução de equilíbrio da equação.

1) Determine as soluções constantes desta equação.

2) Analise o sinal de $\frac{dp}{dt}$.

3) Para visualizar outras soluções vamos considerar $r = \frac{1}{2}$ e $k = 3$, ou seja, vamos analisar a equação $\frac{dp}{dt} = 0{,}5\left(1 - \frac{p}{3}\right)p$.

4) Atribua valores para p e calcule $\frac{dp}{dt}$ e esboce no papel o campo de direções.

5) Agora, no Winplot2D, utilize o comando Equação, diferencial, dy/dx e entre com a equação $0{,}5\left(1 - \frac{y}{3}\right)y$, e clique OK. Em Ver, clique em escala em x e y. Em seguida clique em Pg Dn no teclado para "melhor" visualizar o campo de direções desta equação. O que você observa no gráfico gerado? É semelhante ao que você esboçou no papel?

6) Qual o comportamento das soluções que pode ser observado através do campo de direções? Ou seja:

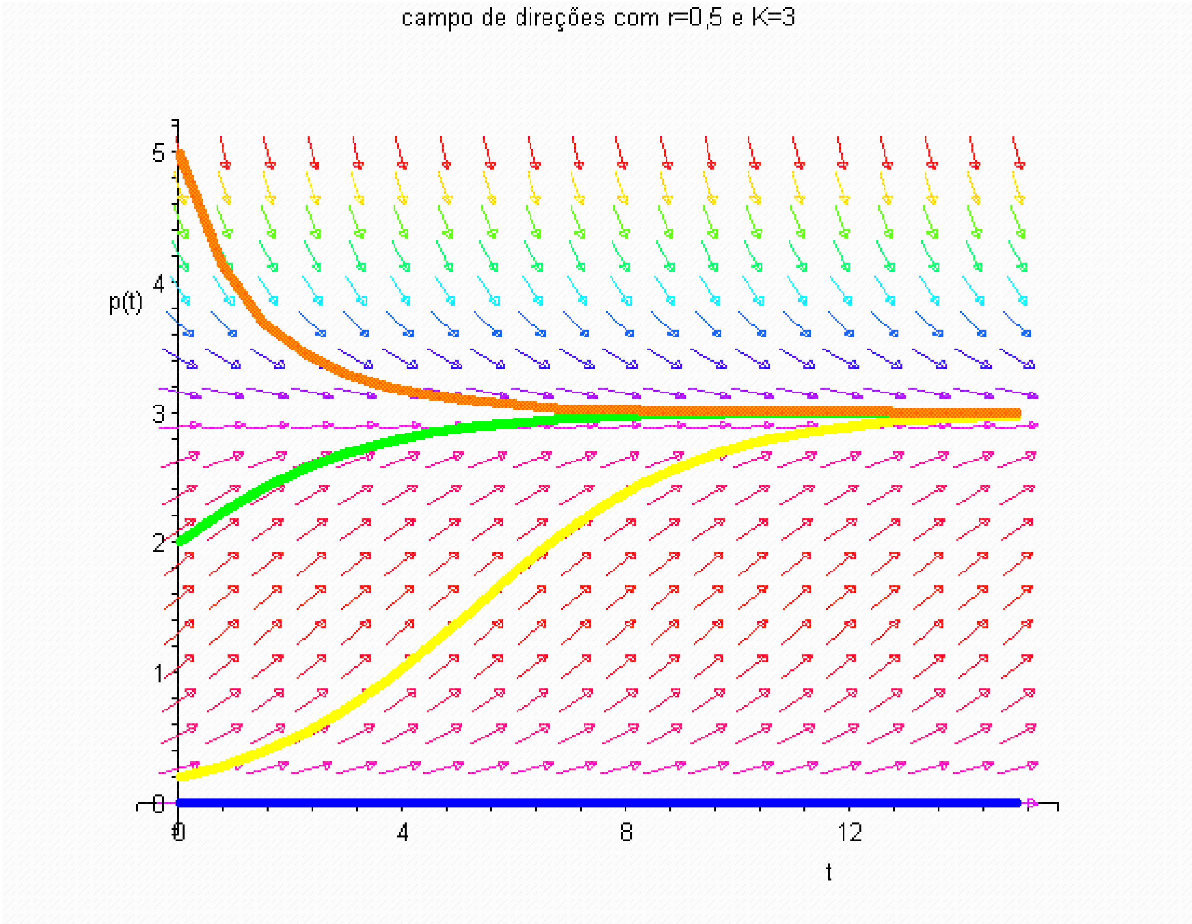
a) As curvas soluções tendem ao infinito, para zero, ou para algum valor constante quando o tempo vai para infinito?

b) A solução é periódica?

c) A solução atinge 0 somente quando t tende ao infinito, ou existe algum valor específico, tal como $t = 100$, para o qual a solução é igual a 0?

d) A solução eventualmente se aproxima a uma função mais familiar? Por exemplo, a solução "converge" para uma linha reta cuja inclinação pode ser estimada?

7) Utilizando o Maple, obtemos o gráfico abaixo. Como podemos interpretar as curvas deste gráfico? É semelhante a análise feita deste modelo?

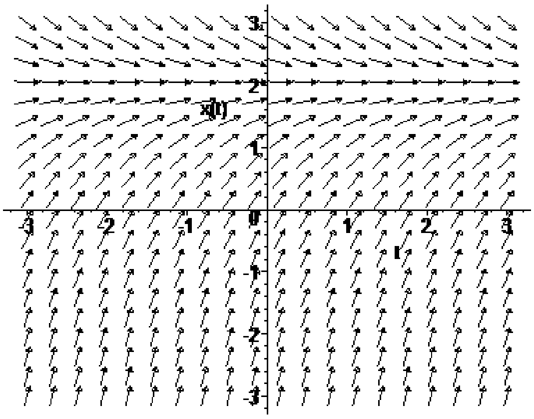


8) Agora resolva analiticamente essa equação e compare sua solução com o campo de direções que você esboçou. O comportamento que você analisou através do campo de direções é coerente com essa solução que determinou?

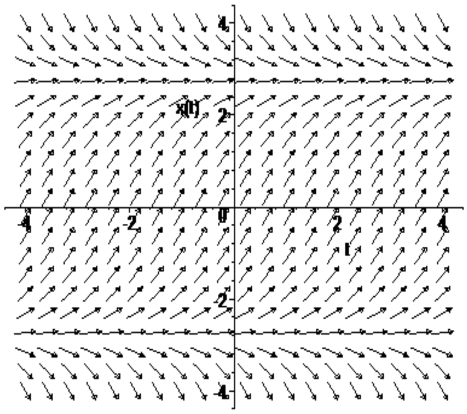
1.6 - Aula campo de direções

Discuta com seu colega o comportamento das equações diferenciais dadas abaixo e as relacione com o seu respectivo campo de direções. Justifique sua resposta:

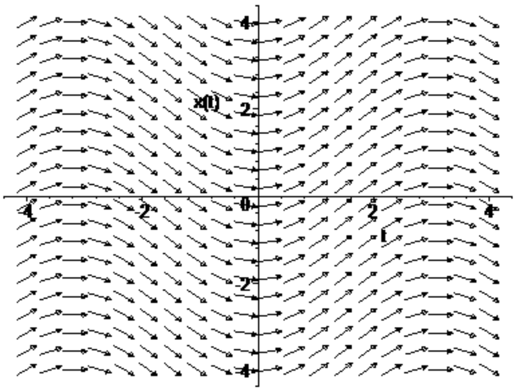
a) $\frac{dx}{dt} = sen(x)$ b) $\frac{dx}{dt} = sen(t)$ c) $\frac{dx}{dt} = 2 - x$ d) $\frac{dx}{dt} = x(2 - x)$ e) $\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{4}x^2$



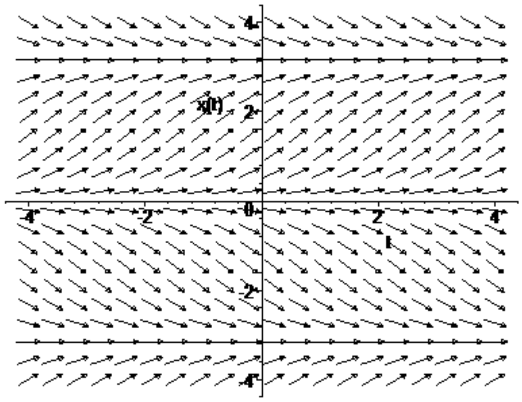
(i)



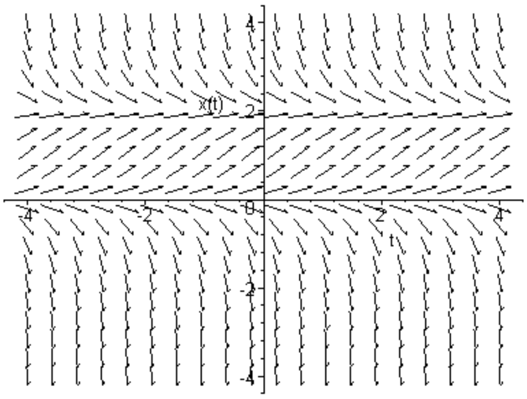
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

Figura 3.2 - Roteiro da atividade “campo de direções”

1.7 - Modelo de resfriamento

Modelo de resfriamento de um corpo – difusão de calor

Um corpo que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em um meio ambiente na temperatura T, tende àquela do meio que o cerca T_a. Assim, se a temperatura $T < T_a$, este corpo se aquecerá e, caso contrário, se resfriará. A temperatura do corpo, considerada uniforme, será, pois uma função do tempo $T(t)$.

Com um termômetro de precisão decimal, e considerando que às 14 horas a temperatura ambiente era de $20{,}8°C$, as medidas da temperatura de cerveja de uma lata de $350\,ml$ foram tomadas. Os valores da temperatura T em relação ao tempo são dados na tabela abaixo:

Horas	temp. T
14h2min	8,5
14h12min	9,9
14h22min	11,6
14h32min	12,5
14h42min	13,4
14h52min	14
15h2min	14,6
15h12min	15,1
15h22min	15,5
15h32min	16
15h42min	16,4
15h52min	16,8
16h2min	17,1
16h12min	17,5
16h22min	17,9
16h32min	18,3
16h42min	18,6
16h52min	18,8
17h2min	19
17h12min	19,3
17h22min	19,5
17h32min	19,6
17h42min	19,7
17h52min	19,8
187h2min	19,9
18h12min	20
18h22min	20,2
18h32min	20,3
18h42min	20,4
18h52min	20,49
19h2min	20,5

Observe que quanto maior for valor de $|T - T_a|$ mais rápida será a variação de $T(t)$. Isto é evidenciado de forma mais precisa pela chamada Lei de resfriamento de Newton: "a taxa de variação da temperatura de um corpo (sem fonte interna) é proporcional à diferença entre sua temperatura $T(t)$ e a do meio ambiente T_a, em cada instante t". Ou seja,

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - T_a) = \lambda(T_a - T) \qquad (*)$$

onde $\lambda > 0$, pois se $T > T_a$ então $\frac{dT}{dt} < 0$ (esfria) e se $T < T_a$, $\frac{dT}{dt} > 0$ (esquenta) (VERIFIQUE COM OS DADOS).

Questões:

1. Qual é a solução trivial da equação (*)? E qual o seu significado físico?
2. Resolva, usando o comando dsolve do Maple, a equação (*), considerando que $T(0) = T_0$. Qual a solução algébrica encontrada?
3. Faça um esboço da temperatura T em relação ao tempo t. Qual o comportamento desses pontos? Qual curva se ajusta a esses pontos? É compatível com a equação algébrica determinada em (2)?
4. Agora, calcule $T_a - T$. Esboce no plano cartesiano $T_a - T$ pelo tempo t. Qual a função y que melhor ajusta esses pontos? Usando o Excel, ajuste esses pontos determinando a expressão de ajuste no comando opções, clique em exibir equação no gráfico.
5. Agora calcule a temperatura usando o modelo $T(t) = \mathrm{T_a} - \mathrm{y}$, onde y é a função encontrada em (4).
6. Esboce em um mesmo gráfico os dados da T real e da estimada pelo modelo encontrado em (5). O que você observa?
7. O que acontece quando o tempo $t \to \infty$ no modelo encontrado em (5)? O que isto significa?

Observação: O fato de T tender a T_a somente quando $t \to \infty$ pode dar a impressão que a equação (*) não se presta para modelar situações reais de estabilidade. Entretanto em termos de modelagem matemática, $t \to \infty$ deve ser interpretado por: "t assume valores grandes, relativamente à evolução das variáveis analisadas". Por exemplo, neste modelo de resfriamento, equação (*), podemos considerar que a temperatura de um corpo "atinge" a temperatura ambiente quando estiver "bem próxima" desta temperatura, digamos $T(t^*) = \pm 0{,}99 T_a$ e isto ocorre em um tempo t^* finito.

8. Considerando $T(t^*) = \pm 0{,}99 T_a$, calcule o tempo t^* necessário de equilíbrio para os esse modelo e também para esses dados.

Desafio: Às 7 horas, um indivíduo é encontrado morto pela sua secretaria que liga imediatamente para a polícia. As 10h30mim quando os peritos chegam ao local, verificam que a temperatura ambiente é de 22^* C e a temperatura do corpo é de $29{,}4^*$ C. Meia hora após, o perito, novamente mede a temperatura do corpo e verifica que estava em $25{,}8^*$ C. Passado mais 30 minutos, novamente, a temperatura é medida e é de $23{,}9^*$ C. Após uma breve discussão entre os peritos, a secretária é presa. Por quê? (Obs. Considere que a temperatura normal de uma pessoa viva seja constante e igual a $36{,}5^*$ C).

1.8 - Comparação dos dados dos experimentos

O mesmo experimento foi realizado duas vezes. Ou seja, foi tomada a temperatura da cerveja por duas vezes. No primeiro dia, foi utilizado 175 ml de cerveja, colocado em um copo e o termômetro foi colocado no copo e foi tomada as medidas dadas na tabela 1, à temperatura inicial de 12,3 C e a temperatura ambiente era de 26,7 C.

No segundo dia, foi utilizado 350 ml de cerveja, com temperatura inicial de 8,5 C e temperatura ambiente de 20,8 C. O termômetro foi utilizado diretamente na lata da cerveja e os dados estão listados na tabela 2.

Determine um modelo para os dados da tabela 1, utilizando o Excel, como fizemos na aula passada. E em seguida, esboce no mesmo gráfico em uma mesma planilha, os dados reais e os valores estimados nos dois modelos e responda:

1. Quais os valores de λ para os dois experimentos?
2. Quais as expressões algébricas das soluções dos dois modelos? É compatível? O que você observa?
3. Qual, em sua opinião, é mais preciso? Qual dos dois modelos? E por quê?
4. O que você observa no gráfico onde desenhou os dados experimentais e os dados estimados juntos?

Tempo(min)	Temp. T
0	12,3
1	12,4
1,5	12,5
2	12,6
2,5	12,7
3	12,8
3,5	13,1
4	13,2
4,5	13,4
5	13,6
5,5	13,7
6	13,8
7	14,1
8	14,4
9	14,7
10	15
11	15,2
12	15,5
13	15,8
14	16
15	16,2
16	16,5
17	16,7
18	17
19	17,1
20	17,2
22,5	17,7
25	18,1
27,5	18,5
30	18,8
32,5	19,2
35	19,5
40	20,1
45	20,6
50	21
60	21,8
75	22,8
90	23,6
120	24,9
150	25,6
260	26,6

Tabela 1

Tempo(min)	Temp. T
0	8,5
10	9,9
20	11,6
30	12,5
40	13,4
50	14
60	14,6
70	15,1
80	15,5
90	16
100	16,4
110	16,8
120	17,1
130	17,5
140	17,9
150	18,3
160	18,6
170	18,8
180	19
190	19,3
200	19,5
210	19,6
220	19,7
230	19,8
240	19,9
250	20
260	20,2
270	20,3
280	20,4
290	20,49
300	20,5

Tabela 2

Desta forma, o texto descrito neste anexo tem como objetivo apresentar as atividades que foram desenvolvidas no curso de extensão pelos alunos do curso de Matemática. Além dessas atividades aconteceram outras como, por exemplo, a exploração livre efetuada pelos alunos no início das aulas, ou o estudo dirigido que eles executaram sobre alguns métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias para a elaboração dos seminários, por eles apresentados, no final do curso. Porém, o desenvolvimento dessas atividades, aqui descritas, pelos alunos no LIEM – GPIMEM constituiu o cenário de coleta dos dados, conforme apresentado no capítulo de metodologia desta tese.

ANEXO 2 – Resumo geral do curso de extensão: cenário da coleta dos dados

Introdução

O curso iniciou-se com doze alunos, dos quais nove cumpriram todo o cronograma proposto. Sendo assim, foram considerados participantes dessa pesquisa, como já descrito no capítulo de metodologia, esses nove alunos que compareceram e participaram efetivamente de todas as aulas.

A dinâmica programada para o desenvolvimento do curso consistia na divisão dos alunos em dupla. Cada dupla trabalharia em um computador para desenvolver as atividades propostas. Esse formato de distribuição dos alunos foi sugerido levando em consideração questões metodológicas de pesquisa e de ensino, tais como a observação das discussões dos alunos no desenvolvimento das atividades, a necessidade, por vezes, de retomar atividades já iniciadas em outros momentos, o espaço físico para dois alunos por computador, a possibilidades dos dois alunos manipularem os vários softwares, dentre outras. No entanto, como já explicitado, os alunos se organizaram ora em dupla, ora em trios e, não necessariamente, compostos pelos mesmos alunos. No decorrer deste texto explicitarei a composição da dupla ou trio de alunos envolvidos nas situações descritas.

Cabe ressaltar, que o objetivo deste anexo, neste momento, consiste na elaboração de um sumário dos dados coletados, uma vez que em pesquisas dessa natureza, o volume de dados é grande e praticamente impossível de ser totalmente descrito. Em particular nesta pesquisa, os dados gerados não são somente de grande volume, são também de natureza diferenciada, pois além dos questionários, das filmagens da sala, do caderno de anotações dos alunos, a parte mais relevante dos dados consiste de vídeos, gerados pelo Camtasia, que contém em uma mesma imagem as ações executadas pelos alunos nas telas dos computadores, a imagem e as falas dos alunos. Ainda, o formato da apresentação das aulas, descritos aqui, tem por objetivo propiciar uma visão geral dos mesmos para posterior elaboração de temas que contemplem a questão norteadora:

Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?

Portanto, nas próximas seções apresentarei cada aula com transcrição de trechos de discussões dos alunos, atividades que foram desenvolvidas e figuras que se configuram representantes, sob minha visão de pesquisadora, dos dados dessa pesquisa. Alguns comentários meus, complementares, serão inseridos na própria transcrição, entre parêntesis, sempre que se fizerem necessários, para o entendimento da transcrição dos diálogos. Estou denotando por CA, o computador A que foi utilizado por um aluno ou uma dupla ou por um trio de alunos com o intuito de deixar claro o grupo de alunos que se formou no decorrer das aulas, já que o número de participantes era ímpar e também pelo fato de que, como acontece naturalmente em qualquer disciplina, os alunos faltaram no decorrer do curso.

Primeira aula – "apresentação"

Na primeira aula, dia 04//04/06 (terça-feira), estavam presentes onze alunos. Iniciamos aplicando um questionário (anexado a essa tese) contendo onze questões, sendo que as sete primeiras tinham o intuito de obter informações gerais acadêmicas dos alunos. Já as quatro últimas questões eram sobre EDO, cujo objetivo era de obter indícios do entendimento dos alunos sobre esse conteúdo. Em seguida, solicitei que se agrupassem em dupla ou no máximo em trios, conforme suas preferências. Informei-os que essa divisão dos grupos de alunos, se possível, deveria ser mantida em todas as aulas. Desta forma, nesta primeira aula os alunos se distribuíram da seguinte forma:

C A (computador A): Ivan;
C B (computador B): Shen e Marcos;
C C (computador C): Claudia e Kelly;
C D (computador D): Adriano;
C E (computador E): Luiz Alberto e Ronaldo;
C F (computador F): Marcela;
C G (computador G): Aline e Viviane.

Na seqüência, o professor Borba iniciou a aula apresentando a relevância do curso nesta pesquisa. Sendo assim apresentou os objetivos do curso, o horário e as normas de curso extracurricular. Em seguida, iniciei apresentando os objetivos de minha pesquisa, o planejamento do curso, a importância da participação deles no curso e, particularmente, a importância da participação deles na pesquisa.

Apresentei o software Camtasia que seria usado no decorrer do curso, para a geração dos vídeos. Adriano, um dos alunos declarou que, por razões particulares, não gostaria de ser filmado e este foi um dos motivos pelo qual, nesta aula, ele ficou sozinho no computador.

Dando continuidade à aula, cada aluno se apresentou. Contaram sobre suas pretensões em cursar Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, sobre o período letivo que estavam cursando, sobre suas experiências na disciplina de Cálculo e sobre suas experiências com a utilização de softwares no ensino de matemática. A maioria dos alunos tinha experiência anterior com softwares de geometria, cabri, geometricks e alguns com Maple. Porém, comentaram que, em geral, somente com conteúdos específicos de geometria eles haviam trabalhado com software. O perfil dos alunos é apresentado no capítulo anterior.

Na seqüência fiz uma breve apresentação dos softwares Winplot, Maple e da planilha eletrônica Excel. Alertei-os que iríamos ao mesmo tempo, desenvolvendo as atividades propostas e aprendendo a manipular tais softwares.

E finalmente, neste encontro, Geraldo Lima (técnico do laboratório LIEM – GPIMEM) fez um teste com o Camtasia e apresentou o vídeo gerado aos alunos, de tal forma que eles pudessem ter consciência de como estavam sendo gravados.

Segunda aula – "aula derivada"

Na segunda aula, dia 06//04/06 (quinta-feira), compareceram sete alunos, que assim se agruparam:

C A: Adriano (discutiu com Shen e Marcos);

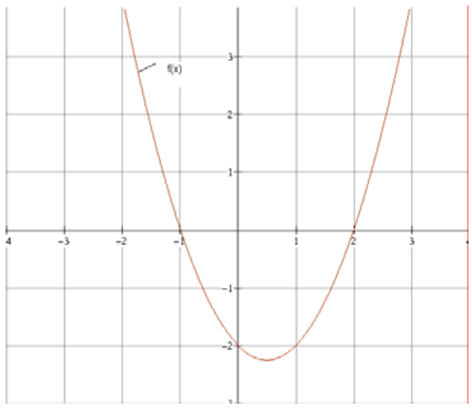
C B: Shen e Marcos;

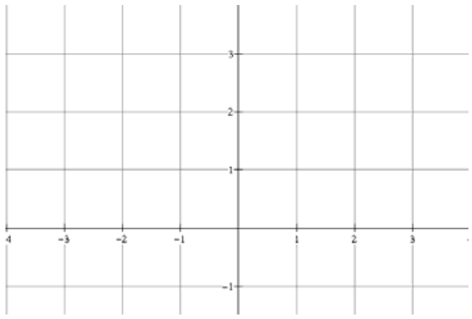
C C: Claudia e Kelly e

C E: Ronaldo e Viviane.

As atividades desta aula tinham por objetivo analisar o comportamento da derivada de uma função dada geometricamente, sem conhecer, inicialmente, sua expressão algébrica. Uma atividade desta aula é esboçada na Quadro A2.1.

1. Dado o gráfico de $f(x)$, e considerando o intervalo de domínio da função que aparece esboçado no gráfico, faça:
   i) Descreva quais intervalos onde a função é crescente e decrescente.
   ii) Identifique os pontos onde a função muda de crescente para decrescente ou vice-versa.
   iii) Divida o domínio da função em subintervalos de 1 cm e marque esses pontos no gráfico.
   iv) Aproxime a curva dada por segmentos de retas unindo os pontos marcados.
   v) Calcule o coeficiente angular de cada segmento de retas que você acabou de desenhar.
   vi) Faça, agora, um gráfico representando os coeficientes angulares desses segmentos de retas em função de x, onde x pertence ao intervalo do domínio da função dada originalmente e observe o sinal deste gráfico.
   vii) Desenhe no winplot o gráfico de $y = x^2 - x - 2$ e utilize o comando inventário e derivar. Há semelhanças desse gráfico com o que você esboçou no papel? Sugestão: pense em unidades de comprimentos menores no item (iii).





Quadro A2.1 - Atividade “aula derivada”

O trio Marcos, Shen e Adriano, comentou que o gráfico da derivada iria “espichar”, conforme ia refinando o intervalo, e os questionei se mudavam o intervalo. Já a dupla Viviane e Ronaldo, observaram que o primeiro coeficiente havia dado 4 e o outro 4,5 e que o limite da razão incremental no ponto -2 iria para 5. E assim pude entender o que estavam dizendo do “espichar” da derivada. Claudia integrante da dupla Claudia e Kelly observa que a função iria mudar, iria passar a ter uma só raiz e depois não mais. Imagino que ela estava conjecturando sobre o comportamento da função derivada comparando-a a função dada inicialmente.

Terceira aula – “aula familiarização”

Na terceira aula, dia 11/04/06 (terça-feira), compareceram 10 alunos:

C A: Adriano e Aline;

C B: Shen e Marcos;

C C: Claudia e Kelly;

C E: Ronaldo e Viviane e

C F: Marcela e Tiago.

A atividade tinha por objetivo introduzir o conceito de solução de uma edo e também propiciar a familiarização com os alguns comandos do Maple, conforme ilustrado, com a dupla Viviane e Ronaldo, na Figura A2.1.

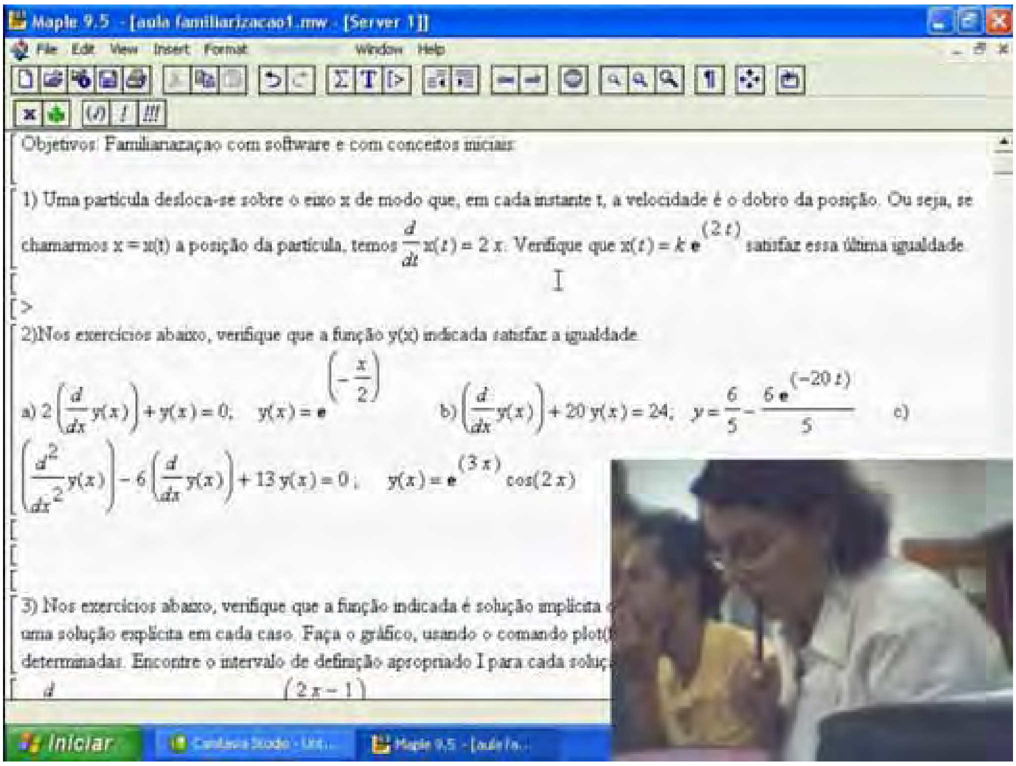


Figura A2.1 - Ronaldo e Viviane

Quarta aula

Nesta aula, dia 18/04/06 (terça-feira), compareceram 11 alunos:

C A: Adriano, Aline e Luiz Alberto;

C B: Shen e Marcos;

C C: Claudia e Kelly;

C E: Ronaldo; e Viviane e

C F: Marcela e Tiago.

Os alunos continuaram trabalhando nos exercícios da “aula familiarização”.

A dupla Ronaldo e Viviane questionou a sintaxe. Kelly e Claudia, questionam o que é uma solução implícita, que surge no exercício 3 desta atividade. Elas explicitaram a função algebricamente “na mão” e em seguida derivaram para verificar se iria satisfazer a equação dada. Outros alunos usaram o comando solve(f=a,x) do Maple.

Quinta aula

Na quinta aula, dia 25/04/06 (terça-feira), compareceram 7 alunos:

C A: Adriano, Aline e Luiz Alberto;

C B: Shen e Marcos;

C E: Ronaldo e Tiago.

Os alunos retomaram “aula derivada”. Adriano, no inicio falou de não saber a sintaxe do software e que isto estava atrasando. Já Marcos sugeriu a elaboração de uma biblioteca (apostila) com os principais comandos.

Discuti com cada dupla ou trio de alunos o comportamento da derivada. Marcos observou que sempre o ponto de inflexão da função seria um ponto de mínimo da derivada.

Com Ronaldo e Thiago, chegamos ao exercício de dada a derivada, buscar esboçar o gráfico da família de funções. Deveria ter elaborado algo no Excel, fazendo as somas para aproximar a função. Percebi que não ficou claro para os dois alunos essa análise.

Sexta aula – “aula modelos”

Na aula do dia 27/04/06 (quinta-feira), compareceram 5 alunos:

C A: Adriano;

C B: Shen e Marcos e

C C: Claudia e Kelly.

Os alunos trabalharam com as atividades da “aula1modelos”. Essa atividade tem por objetivo introduzir alguns modelos matemáticos e o conceito de campo de direções. Eles começam analisando o problema clássico da física de um objeto em queda. A Figura A2.2 ilustra a atividade que estava sendo iniciada pela dupla Claudia e Kelly.

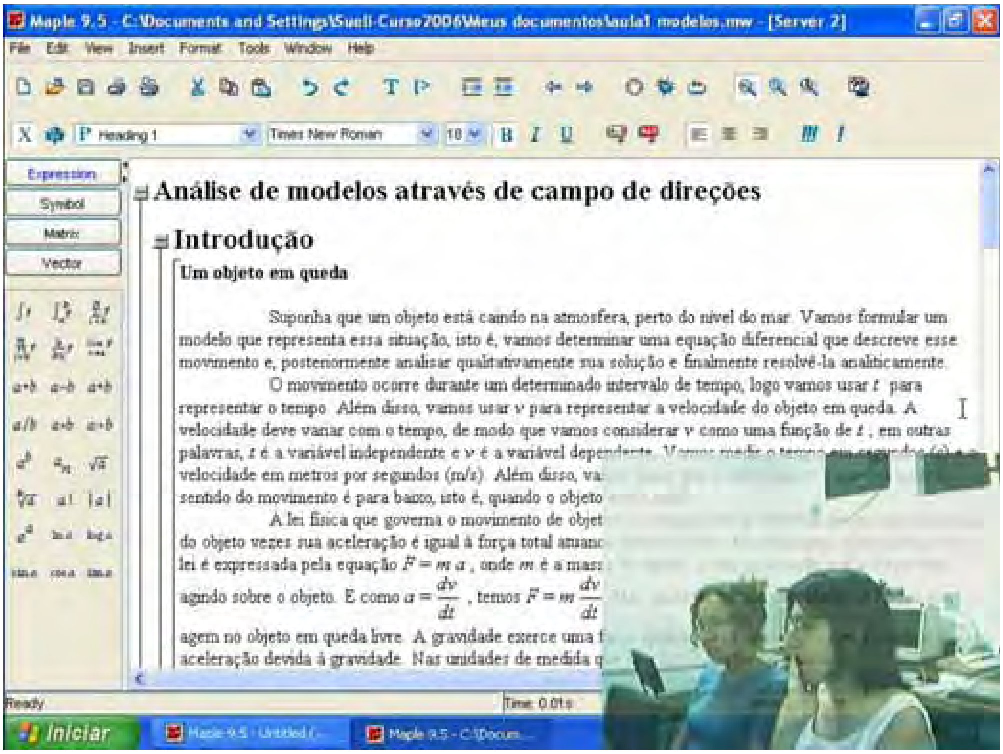


Figura A2.2 - Claudia e Kelly iniciando a atividade

As alunas solicitam minha intervenção na discussão do modelo em questão. Elas não estavam entendendo do que se tratava o termo γv da equação $m\dfrac{dv}{dt} = mg - \gamma v$, modelo este dado no texto da atividade, esboçada na Figura A2.3.

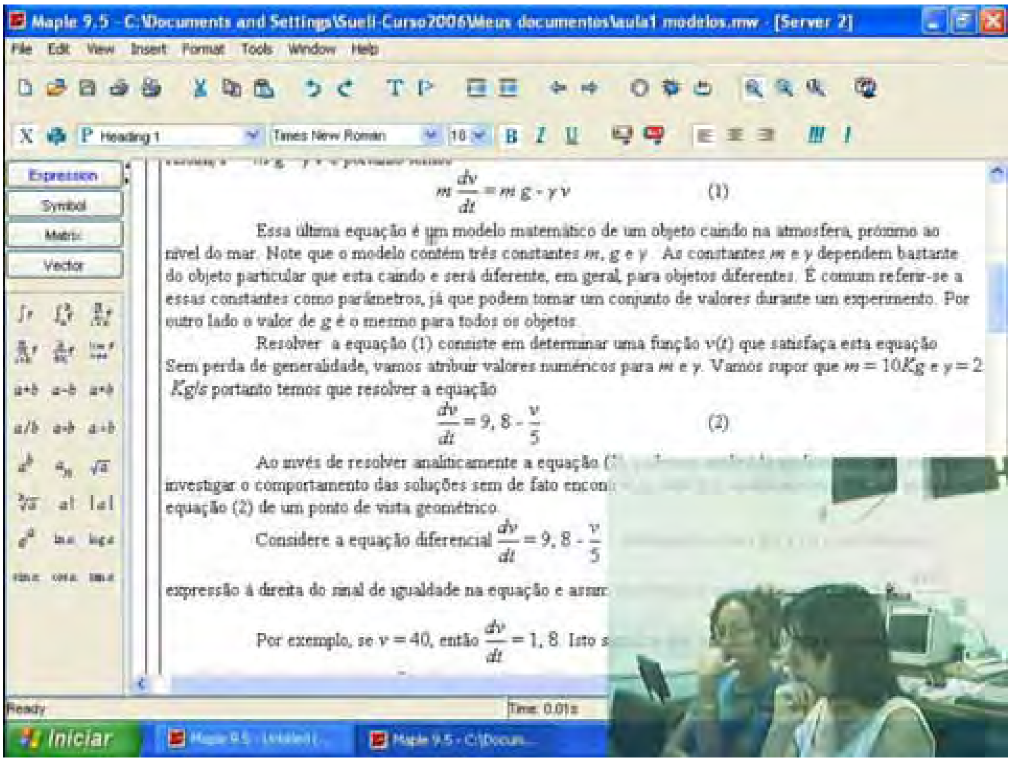


Figura A2.3 - Claudia e Kelly analisando o modelo

O texto abaixo é um trecho do diálogo que ilustra esta situação:

Kelly: E aqui oh (mostrando com o mouse a equação no texto). *Aqui você mostrou que a força ne!*

Sueli: Lá da física, o que a gente sabe?

Kelly: Certo, que a força é massa vezes aceleração.

Sueli: E o que é aceleração? É a variação da velocidade com relação ao tempo. E o lado de cá (mostrei com o mouse o lado direito da equação) *quais são as forças que atuam no objeto em queda?*

Claudia: O peso.

Sueli: Só o peso?

Neste momento, para exemplificar, eu amasso uma folha de papel, fazendo uma "bolinha" de papel e solto de uma determinada altura e peço que elas observem o que acontece com essa folha amassada, e em seguida, tomo outra folha, esta sem amassar, e novamente solto, como ilustra a Figura A2.4.

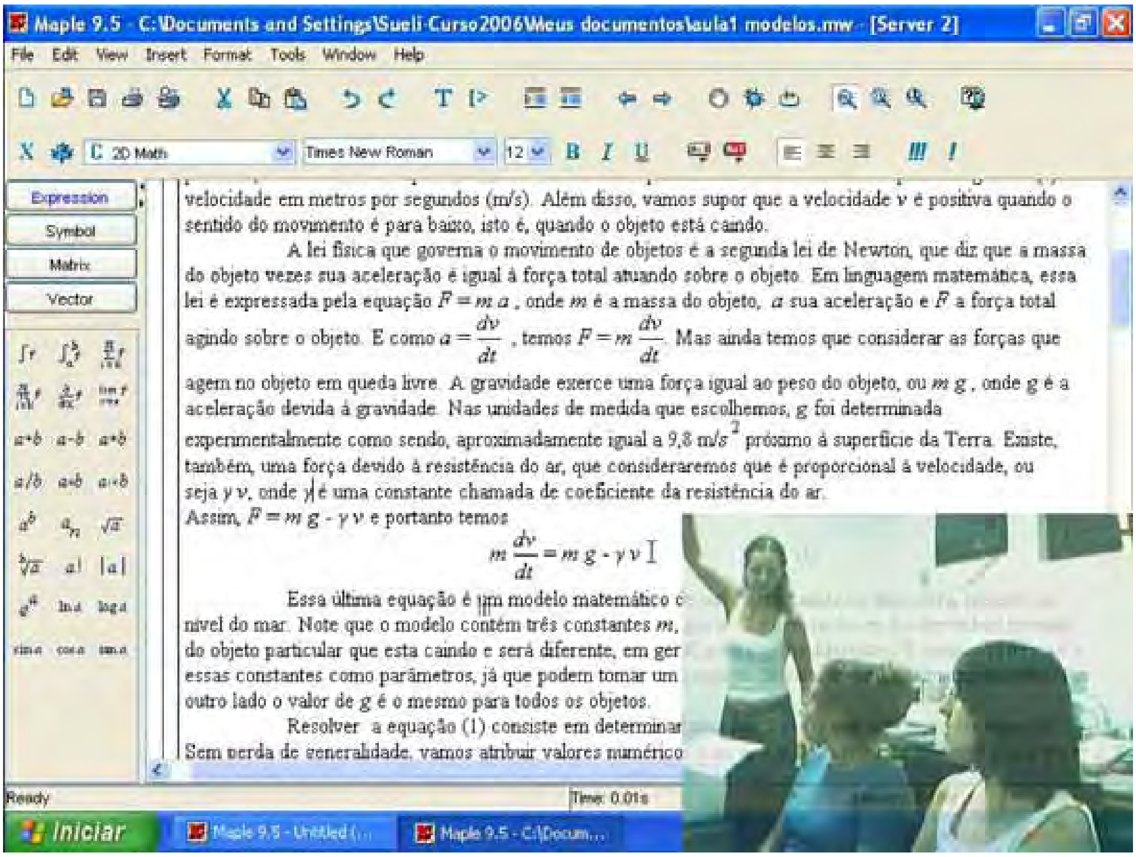


Figura A2.4 - Claudia e Kelly observando a queda da folha

E prosseguimos na discussão do modelo. Esta discussão é transcrita pelo trecho:

Sueli: Se eu pegar esse papel aqui e jogar e se eu pegar um amassado e jogar, eles caem do mesmo jeito?

Kelly: Tem a resistência do ar ai.

E assim discutimos sobre a área de superfície de contato do objeto em queda, chegando ao modelo matemático dado no texto. Após o término da leitura deste texto elas iniciam a realização das tarefas solicitadas, conforme ilustrado na Figura A2.5.

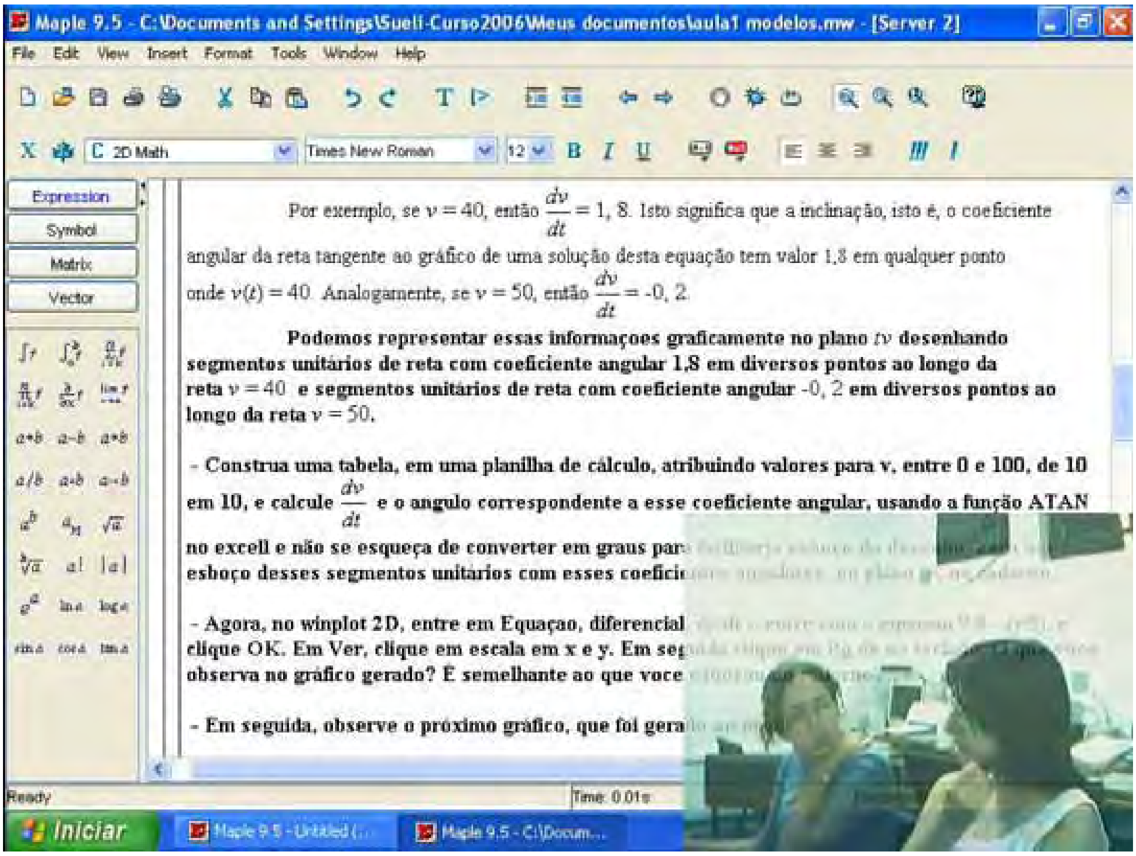


Figura A2.5 - Claudia e Kelly iniciando as questões

E assim elas iniciam a discussão entre elas. A discussão iniciada é transcrita pelo trecho:

Kelly: Então Claudia, o que vai acontecer [...] quando nós colocarmos, por exemplo, v=0, dv/dt vai ficar 9.8, certo?(anotando esses valores no caderno)

Claudia: ahah (concordando)

Kelly: O que vai ser 9.8?

Seguindo as sugestões de roteiro dadas na atividade, elas iniciam a confecção de uma tabela no Excel para determinar as várias direções para a composição do campo de direções solicitado. No entanto, as alunas estavam com dificuldade de manipular a planilha eletrônica e sendo assim, elas solicitaram minha atenção novamente.

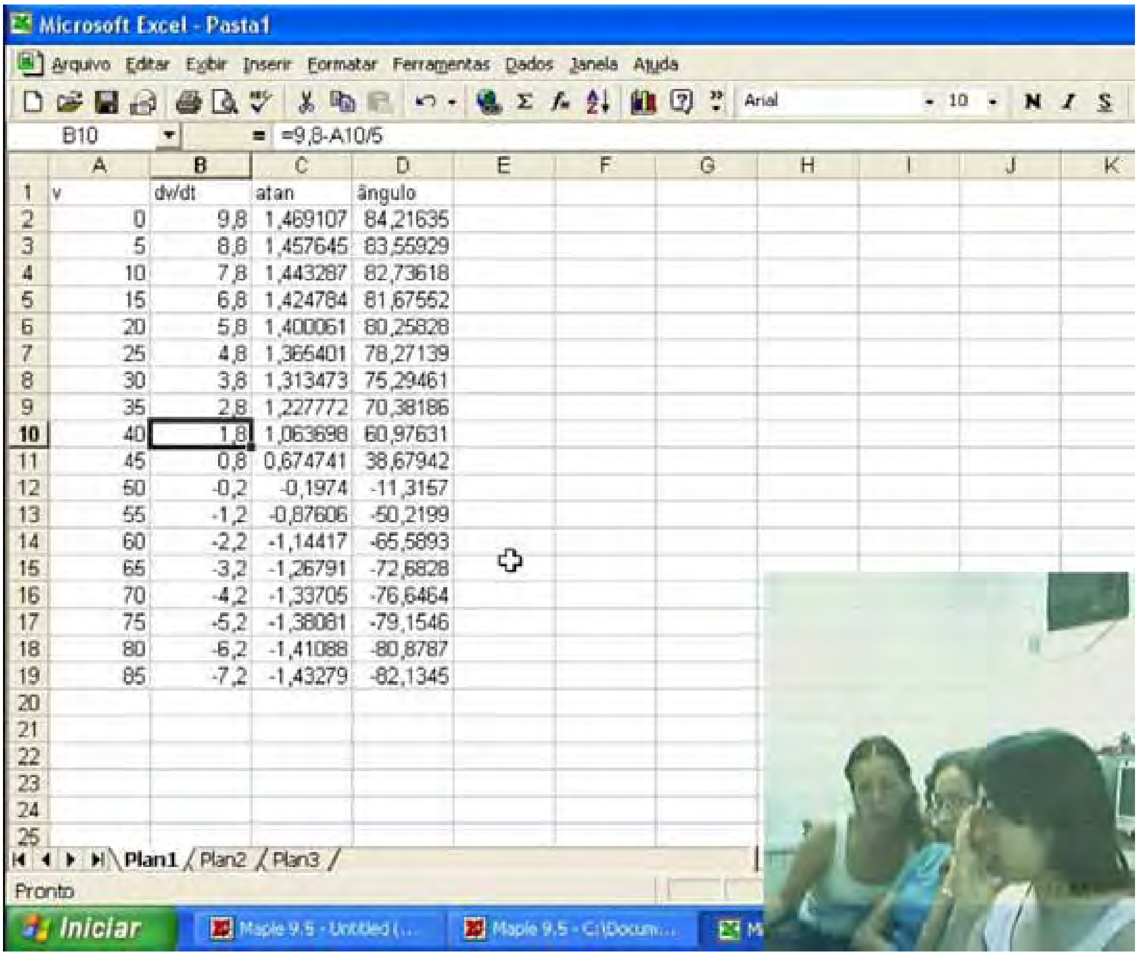
Sueli: E ai meninas onde vocês pararam, onde vocês enroscaram?

Kelly: Não conseguimos definir as funções.

Sueli: Ai meu Deus, deviam ter me chamado antes.

Claudia: Ah, mas eu falei e ai você não...(reclamando da minha demora)

E assim, as auxiliei na elaboração da tabela, construindo passo a passo e obtivemos a planilha ilustrada na figura A2.6.



	A	B	C	D
1	v	dv/dt	atan	ângulo
2	0	9,8	1,469107	84,21635
3	5	8,8	1,457645	83,55929
4	10	7,8	1,443287	82,73618
5	15	6,8	1,424784	81,67562
6	20	5,8	1,400061	80,25828
7	25	4,8	1,365401	78,27139
8	30	3,8	1,313473	75,29461
9	35	2,8	1,227772	70,38186
10	40	1,8	1,063698	60,97631
11	45	0,8	0,674741	38,67942
12	50	-0,2	-0,1974	-11,3157
13	55	-1,2	-0,87606	-50,2199
14	60	-2,2	-1,14417	-65,5893
15	65	-3,2	-1,26791	-72,6828
16	70	-4,2	-1,33705	-76,6464
17	75	-5,2	-1,38081	-79,1546
18	80	-6,2	-1,41088	-80,8787
19	85	-7,2	-1,43279	-82,1345

Figura A2.6 - Claudia, Kelly e a pesquisadora discutindo sobre a tabela

A partir desses valores fomos construindo o campo de direções no caderno.

Sétima aula

Na sétima aula: dia 02/05/06 (terça-feira), compareceram 8 alunos:

C A: Aline e Tiago;

C B: Shene Marcos;

C C: Claudia e Kelly e

C E: Ronaldo e Viviane

Os alunos continuaram a trabalhar com a atividade aula1modelos, que haviam começado na aula passada.

Retomei a discussão iniciada, na aula passada, com a dupla Claudia e Kelly sobre a composição do campo de direções. Continuamos a discussão explorando o Winplot com a opção “2D/equação/diferencial/dy/dx”, como ilustrado na figura A2.7.

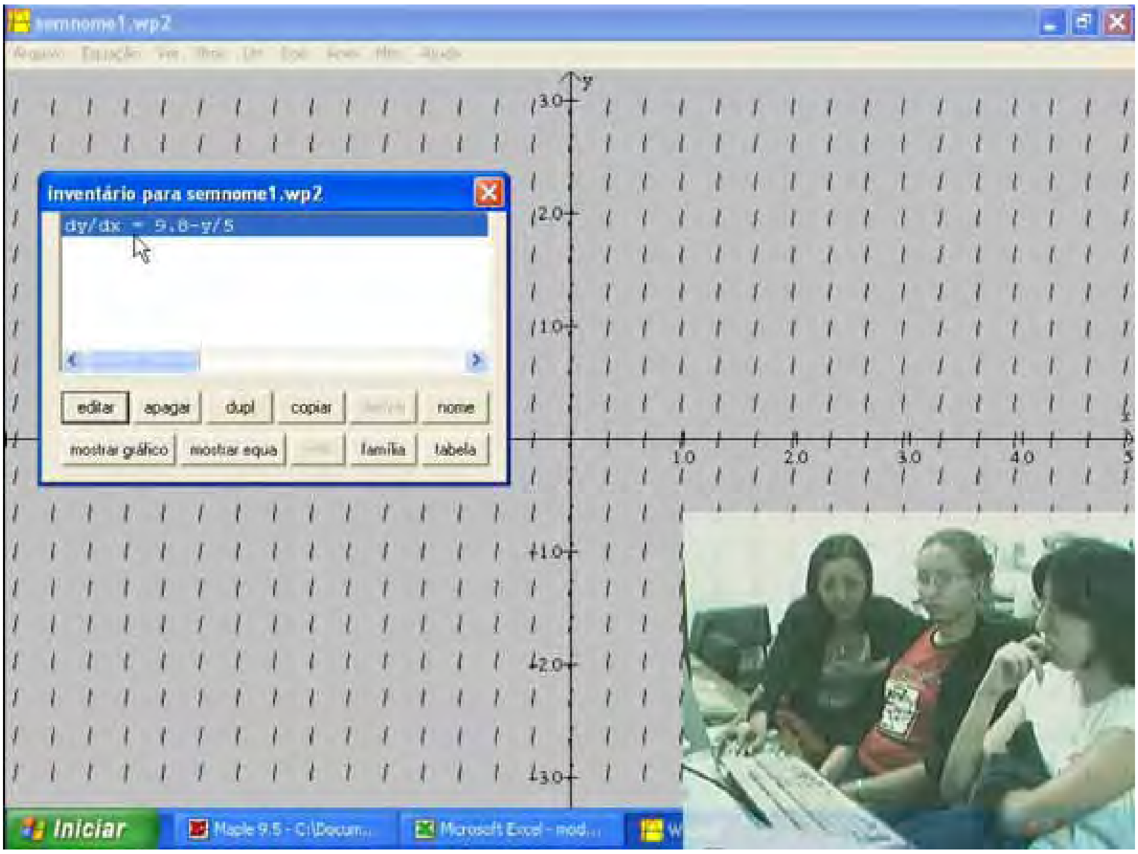


Figura A2.7 - Claudia e Kelly observando o gráfico gerado no Winplot

A análise deste gráfico, esboçado na Figura A2.7, gerou a discussão que é apresentada neste trecho:

> *Sueli: Olha ai! Nós entramos com essa equação e ele gerou isso aqui ta?* (mostrei, com o mouse, o gráfico gerado pelo Winplot) *Só que está bom?O desenho que está ai está bom para representar esse gráfico?Qual a variação do Excel que a gente calculou?*
>
> *Kelly: De cinco em cinco né?*
>
> *Sueli: De quanto a quanto?*
>
> *Kelly: De o a 100.*
>
> *Sueli: Essa representação ai* (apontando para a tela do computador) *está parecida com essa que vocês fizeram no caderno?*
>
> *Kelly: Não!*
>
> *Sueli: Por que não está? Ou por outro lado, onde que essa representação está; se você fosse identificar no teu desenho, onde que a sua representação estava mostrada aqui?(*apontando o gráfico esboçado no caderno)

Claudia: Eles estão.... um número muito baixinho. [...] Seria lá longe que vai dar esse desenho.

Kelly: Ele está aqui embaixo essa representação (apontando a região [0,2]X[0,2] do sistema cartesiano esboçado, por elas, no caderno). Ele está fazendo a mudança de ângulo muito pequena.

E assim, usando o comando ‘pg dn’ fomos ajustando a tela em exibição e o gráfico foi se delineando, próximo ao esperado pelas alunas, conforme ilustrado na FiguraA2.8.

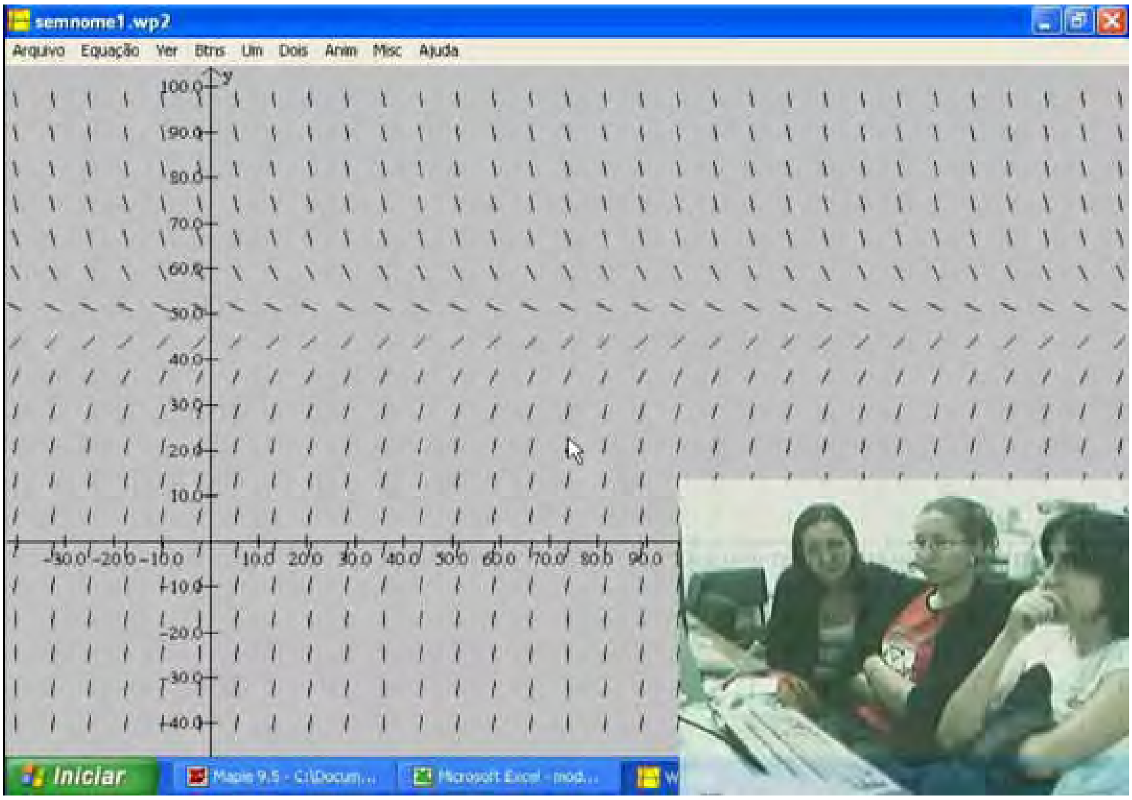


Figura A2. 8 - Claudia e Kelly com a pesquisadora analisando a janela representada

Podemos observar nesse trecho a importância da representação gráfica de uma função, a questão da escala, das possibilidades ou dificuldades, num certo sentido, que o software esta demandando. Os alunos têm que saber “ler” os dados que o software está fornecendo através do gráfico gerado pelo software.

A partir do gráfico ilustrado na Figura A2.8 questiono sobre o comportamento das curvas soluções do modelo, observando o gráfico do campo de direções, conforme ilustra o trecho selecionado:

Sueli:O que estas retinhas (segmentos de reta) *está dizendo pra gente?*

Kelly: Que a curva vai começar aqui próximo do zero e ela vai inclinando, vai tendendo a... a 45. (ela esboça com o mouse, na tela do computador, o traço contínuo de uma curva saindo de (0,0) tendendo para v=49, que ela estima em 45, sujeito ao comportamento dos vetores do gráfico).

Sueli: Pega outra curva qualquer, sei lá, só tem essa curva ai?

Kelly: Vai ser a mesma coisa aqui em cima (esboçando, com o mouse na tela do computador, o traço contínuo de uma curva saindo de (0,100) e tendendo para v=49, que ela estima em 45, sujeito ao comportamento dos vetores do gráfico).

Sueli: E o que será que isso vai representar no próprio modelo que estávamos fazendo, considerando que eu tenha resistência do ar, considerando que eu tenha uma massa de 10 Kg, que é a massa do objeto...Considerando algumas coisas né!

Em seguida sugiro que elas voltem ao texto do modelo para responder as questões lá colocadas. E questiono se o gráfico gerado no Winplot é parecido com aquele do texto que foi gerado no Maple. Questiono ainda se as curvas tendem para v=45, sugiro que elas verifiquem a escala do gráfico e Kelly comenta que é próximo a 50. Retomo a equação do modelo $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$ e a discussão continua, como mostra o trecho:

Sueli: Como será que nós poderíamos pensar nessa equação?

Claudia: Deixa eu, fazer uma coisa aqui!

Neste momento, Claudia minimiza a janela do texto e abre a janela da planilha para examinar a mudança de sinal da inclinação e comenta:

Claudia: É no 50 que ele muda de positivo para negativo.

Sueli: Será no 50 mesmo?

Kelly: Entre 45 e 50! Teria que pegar pontos menores ai nesse intervalo.

Neste momento sugiro que, ao invés de variar de 5 em 5 na tabela, que o façam de 2 em 2, obtendo uma nova tabela. Analisando essa tabela de valores para o campo de direções elas observam que a variação do sinal do ângulo, acontece entre 48 e 50. E a discussão continua como podemos observar no trecho:

Claudia: Será que é 49?

Sueli: Será que é 49? A gente podia ter pensado em colocar de um em um. [...] Está entre quanto e quanto?

Claudia: 48 e 50

Sueli: Então a gente podia pensar em sair do 30. (elas alteram a tabela) *E ai o que aconteceu?*

Claudia: É 49!

Sueli: Quer dizer que se eu soltar a 49m/s o que acontece? Ou a hora que chegar a 49 m/s o que acontece? O que será que esse 49 representa nesse desenhinho que vocês fizeram aqui? (mostrando o esboço do caderno)

Claudia: É onde vai ficar constante. É onde o gráfico fica constante.

Sueli: Que mais podemos falar? Se eu estiver analisando aqui (abro a janela do gráfico do campo de vetores no Maple) *o 49 vai estar mais ou menos aqui. Qual a inclinação ai?*

Kelly: É zero.

Sueli: E as curvas parecem que estão indo pra ai. E o que isso representa no modelo? Se eu olhar aqui nesse modelo, o que será que significa no modelo esse 49?

Claudia: Nesse modelo? dv/dt é...

Sueli: Quanto é dv/dt pelo gráfico, pela tabela?

Claudia: De qual você quer saber?

Sueli: Desse ponto que você está olhando!

Claudia: zero!

Sueli: Se você tivesse zerado aqui a própria equação $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5} = 0$*, o que iria dar?*

Kelly: v=49.

Sueli: Então a gente diz que v=49 é uma constante. Se eu colocar v=49. Lembra da primeira aula que trabalhamos com os conceitos de equação (edo). *Achar a solução de uma equação diferencial é achar o que?*

Kelly: As várias soluções!

Sueli:As várias soluções, mas o que que é solução de uma equação diferencial?O que é achar uma solução dessa equação diferencial?

Elas continuam respondendo as questões solicitadas na atividade.

Nesta aula, com a dupla Claudia e Kelly ficou evidente a intervenção do professor. Parece que somente com os softwares e com o texto da atividade as alunas não conseguiriam avançar. A presença do professor parece ter sido fundamental na discussão das alunas.

Oitava aula

Nesta aula, dia 04/05/06 (quinta-feira), compareceram 8 alunos:

C A: Adriano e Luiz;

C B: Shene Marcos;

C C: Claudia e Kelly e

C E: Ronaldo e Viviane

Iniciei a aula com todos os alunos em volta da mesa, discutindo o modelo, ou melhor, a formulação do modelo. Eles foram recordando das condições do fenômeno que gerou o modelo, da analise do campo de direções, Shen esboçou, na lousa, duas soluções particulares para algumas condições iniciais. Kelly sugeriu que a velocidade ia de positiva para negativa, mas ai alguém ponderou que então a curva solução deveria ser uma parábola. Perguntei que função se assemelhava as curvas desenhadas, e Viviane (talvez) sugeriu ser a exponencial. Na seqüência, perguntei a eles do que vinha a ser uma edo agora, o que era resolver, se quando começaram o curso eles tinham esses conceitos. Kelly respondeu que antes de iniciar o curso, ela não sabia do que se tratava e agora ela se arrisca em definir. Passei então para resolver analiticamente na lousa.

Após o término da resolução analítica, os alunos foram para os computadores para trabalhar na atividade aula1modelos com os comandos dsolve do Maple com a finalidade de determinar as soluções analíticas da edo. A figura A2.9 ilustra a dupla Shen e Marcos nesta atividade.

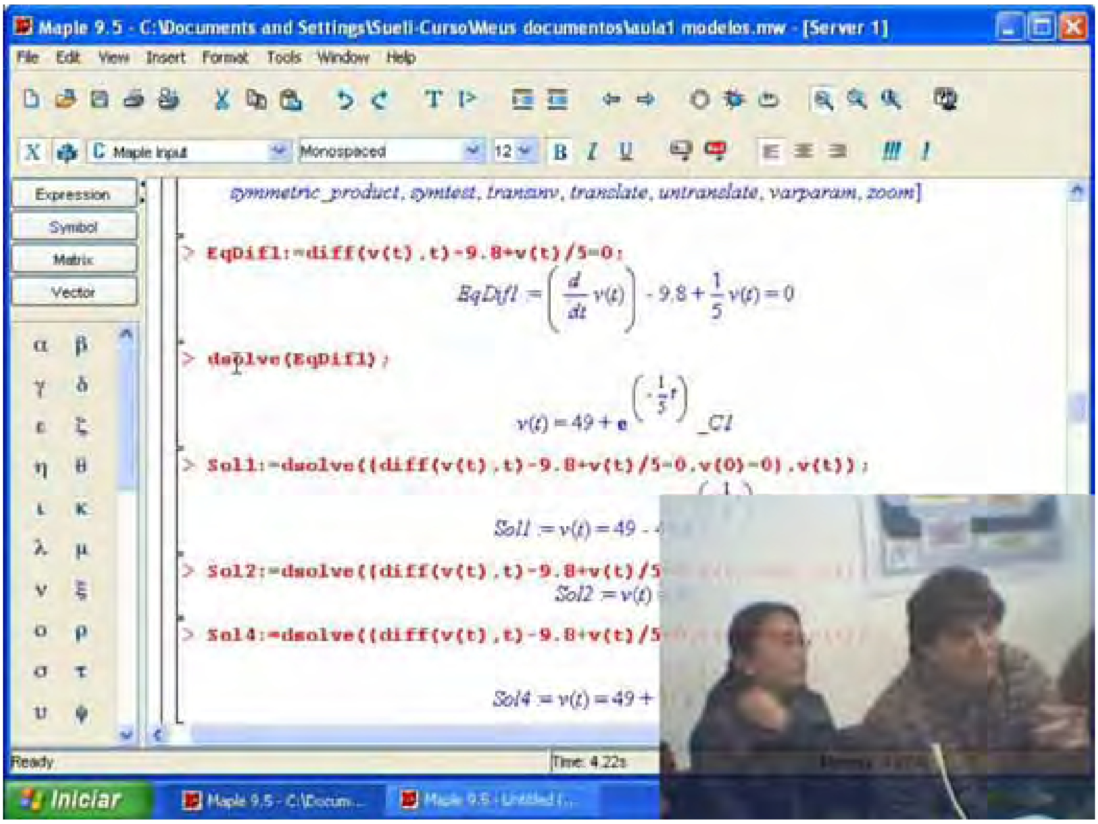


Figura A2.9 - Shen e Marcos buscando a solução analítica

Marcos explicita que não está entendendo os comandos utilizados, que esta apenas reproduzindo o que era solicitado na atividade. Assim, retomo com a dupla a sintaxe dos comandos com os seus significados.

Na seqüência, eles esboçam várias soluções do modelo através do comando plot e buscam analisar os vários gráficos obtidos, conforme pode ser ilustrado na figura A2.10.

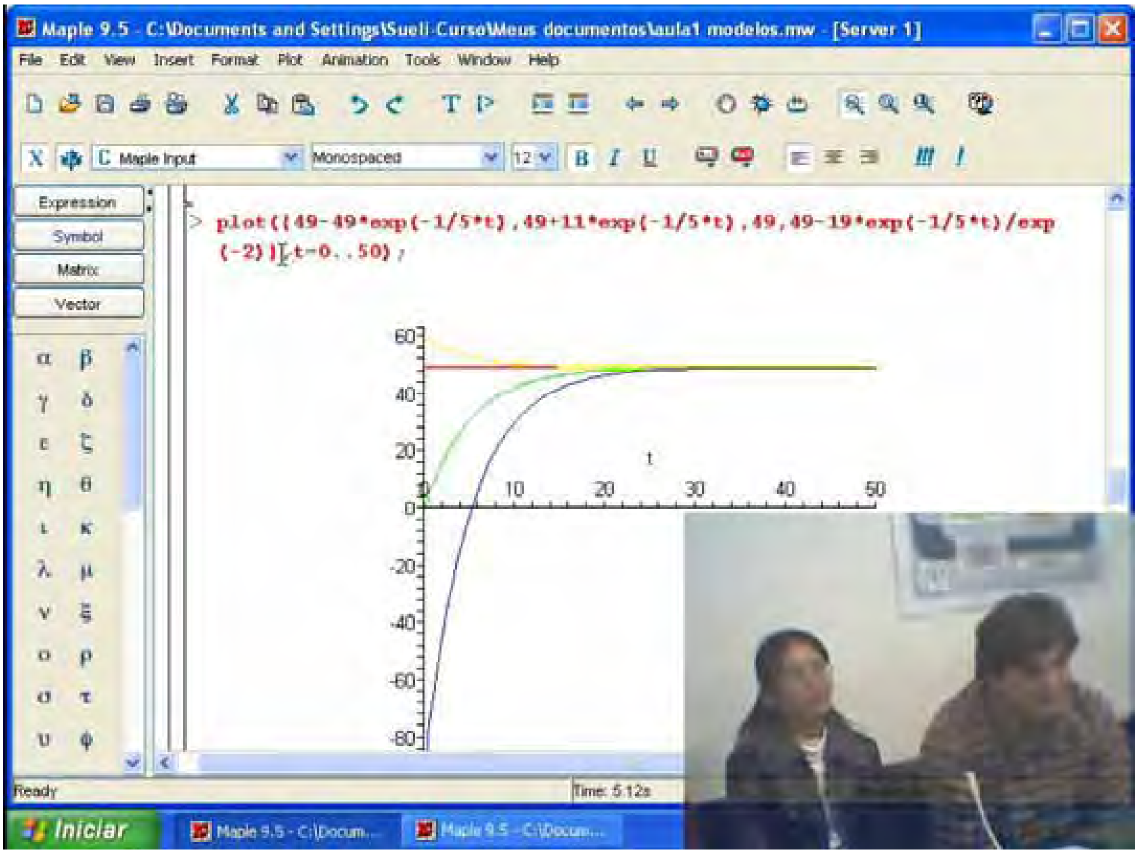


Figura A2.10 - Shen e Marcos analisando o gráfico das soluções do modelo

Com a dupla Claudia e Kelly discuti sobre as várias curvas desenhadas e Claudia explicitou que queria desenhar uma curva passando pelo ponto (10,v(10)) na curva v tal que v(0)=0 e então exploramos os comandos para determinar a tal curva.

Nona aula

Nesta aula, dia 09/05/06 (terça-feira), compareceram 6 alunos,

C A: Adriano e Tiago;

C B: Shene Marcos e

C E: Ronaldo e Viviane

A atividade proposta era analisar o modelo de crescimento populacional de Malthus. Era dado um texto, que contém uma breve introdução deste modelo.

A Figura A2.11 ilustra o momento em que a dupla Ronaldo e Viviane estavam lendo o texto e como a atividade era dada.

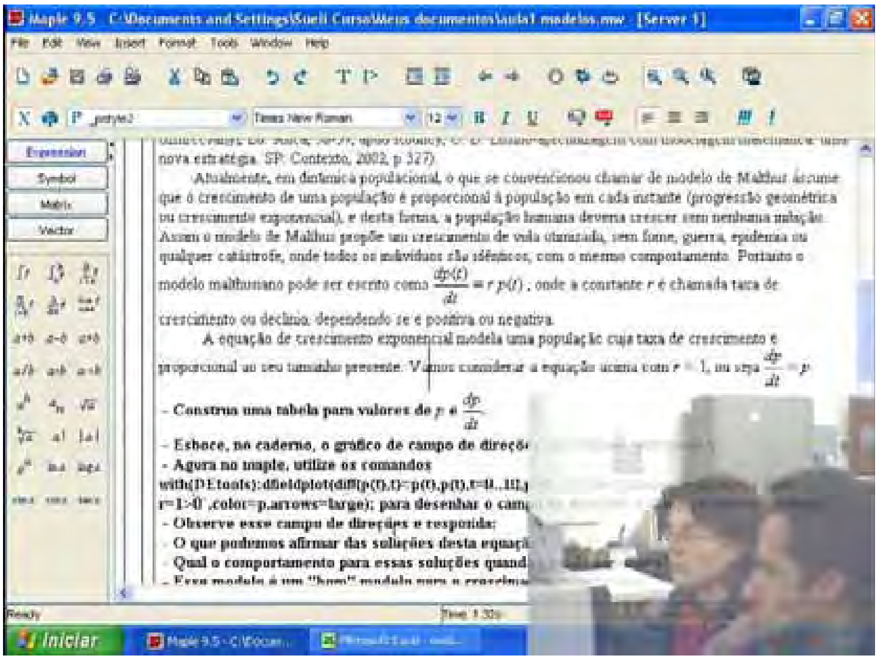


Figura A2.11 - Ronaldo e Viviane lendo o texto dado

Viviane e Ronaldo, seguindo os passos sugeridos, constroem na planilha de cálculo uma tabela de valores da população p por dp/dt relacionadas pela equação diferencial $\frac{dp}{dt} = p$, e também calculam os ângulos dos vetores do campo de direções para esboçar no papel, como ilustrado na Figura A2.12.

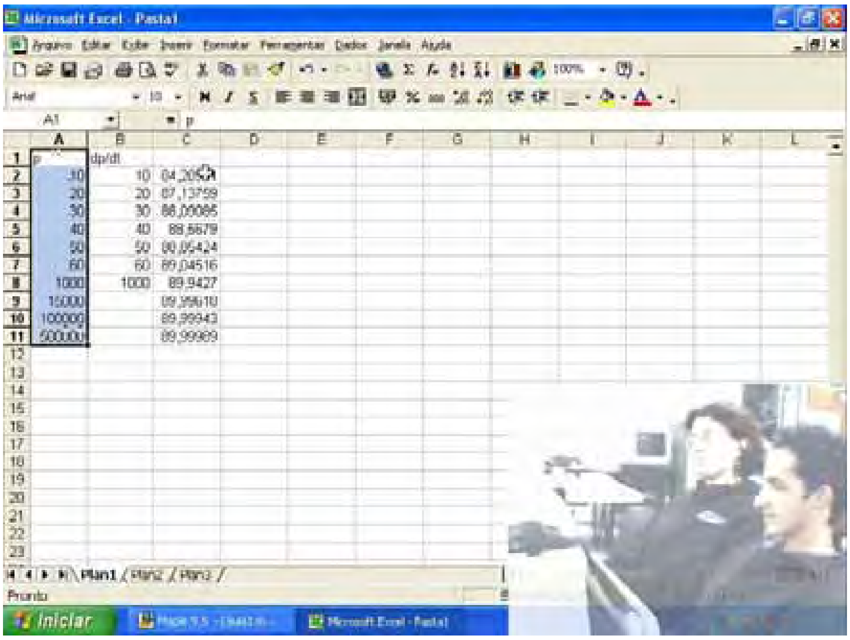


Figura A2.12 - Elaborando a tabela na planilha

Viviane observa que a variação das inclinações é pequena conforme o p varia e que o ângulo tende para 90 graus.

Viviane: Olha lá Nardo, tende a parar em 90!

E assim os alunos continuam na discussão do roteiro proposto.

Décima aula

Na décima aula, dia 11/05/06 (quinta-feira), compareceram 6 alunos,

C A: Adriano e Ronaldo;

C B: Shene Marcos e

C C: Claudia e Kelly

Nesta aula, os alunos continuaram a explorar o modelo populacional de Malthus.

Décima primeira aula

Nesta aula, dia 16/05/06 (terça-feira), compareceram os alunos:

C A: Adriano e Aline;

C B: Shen e Marcos;

C C: Claudia e Kelly;

C E: Ronaldo e Tiago

Os grupos de alunos exploraram o modelo de crescimento populacional de Verhurst. Solicitei que também resolvessem analiticamente os modelos.

A dupla Adriano e Aline, seguindo o roteiro, discutem sobre o campo de direções. O trecho transcrito abaixo refere-se a uma parte do diálogo dos alunos.

Adriano: Esboce no caderno o campo de direções.

Aline: Isso foi feito no Excel.

Adriano: Isso ai a gente teria que transferir para o caderno. São aqueles anguluzinhos [..] Vai chegar um momento que aquela curva tem que virar. Ela tem que chegar no ponto de equilíbrio. É isso que o exercício 2 queria na análise de sinal. A gente saber onde essa curva troca de sinal.

Aline: Porque pra mim o que não ficou muito claro é o campo de direções. Eu sei que é um campo pra onde ela...

Adriano: Um campo de direções é uma coisa assim, eu fixo um vetor pequenininho aqui, lá ta dando 89, meu vetor vai vir assim oh (esboçando no caderno) *Só o que acontece, ele vai ver de uma maneira tal que vai chegar num ponto que ele vai ter um equilíbrio.*

Aline: É como se fosse isso daqui óh. (esboçando uma curva no caderno) *É como se tivesse um limite assim.*

Adriano: Isso. Ai a gente teria que saber onde é esse limite[..] pra onde ele ta caminhando. Eu vou só deixar rascunhado aqui porque eu também não tenho idéia de como eu vou chegar nele.

Na seqüência eles continuam analisando o modelo utilizando os comandos do Maple, e esboçam o campo de direções, que é ilustrado na figura A2.13.

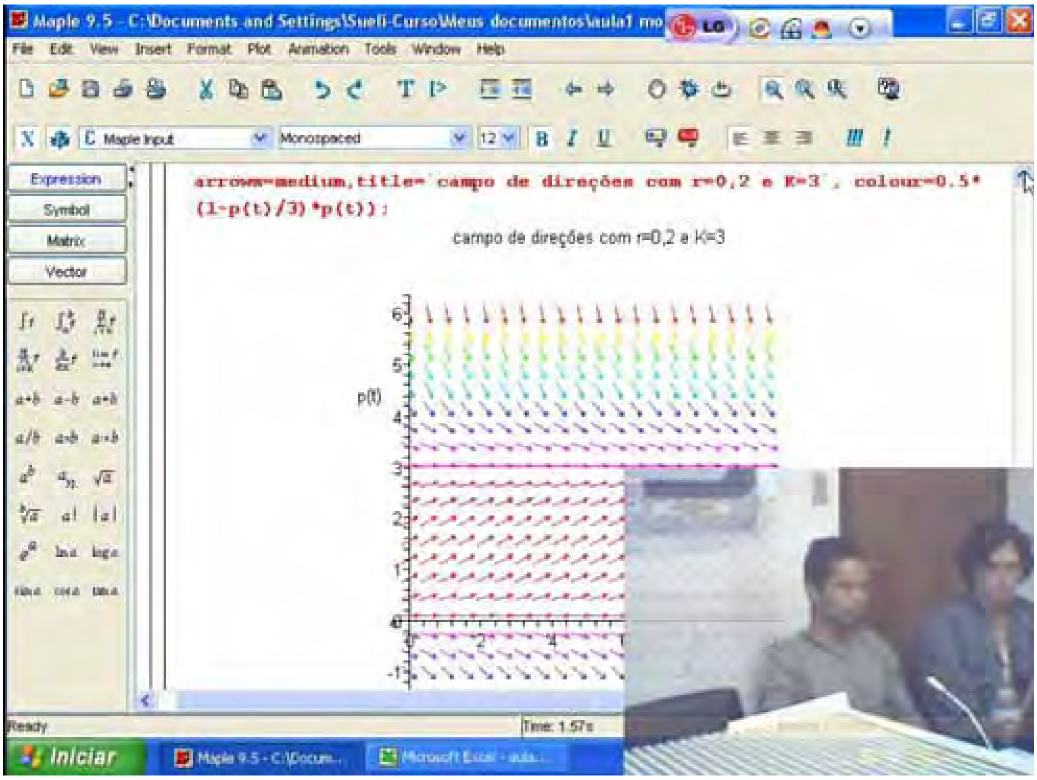


Figura A2.13 - Adriano e Aline analisando o campo de direções

O trecho transcrito abaixo ilustra a discussão dos alunos acerca deste gráfico.

Adriano: Olha lá é o que você estava fazendo.

Aline: Na verdade é uma linha

Adriano: No 3 é onde é o ponto de equilíbrio que a gente teria que ter achado na mão.

Aline: Pra o menos um ta indo pra baixo, ou seja, a partir do zero acaba.

Adriano: Estranho. Não dá pra pensar em população negativa, mas ele continua fazendo.

Aline: Mas as vezes é uma população que ta decrescendo.

Adriano: Acho que isso depende muito de onde você vai avaliar ne. Por exemplo, se você vai avaliar pra intervalos acima de 3, você vai ver que ela é decrescente, porque ta todos os gráficos descendo (ele faz um gesto com a mão de varias curvas decrescentes).

Aline: Então ela vai ta sempre tendendo a 3.

Adriano: Acima de zero ela vai pra 3

Adriano: Vai tender a 3. Abaixo de zero ela é decrescente, não tende mais pra zero. Ela parte de zero, mas não tende pra zero. Acho que basicamente é o que você construiu no caderno (aponta para o caderno, ilustrado na Figura A2.14).

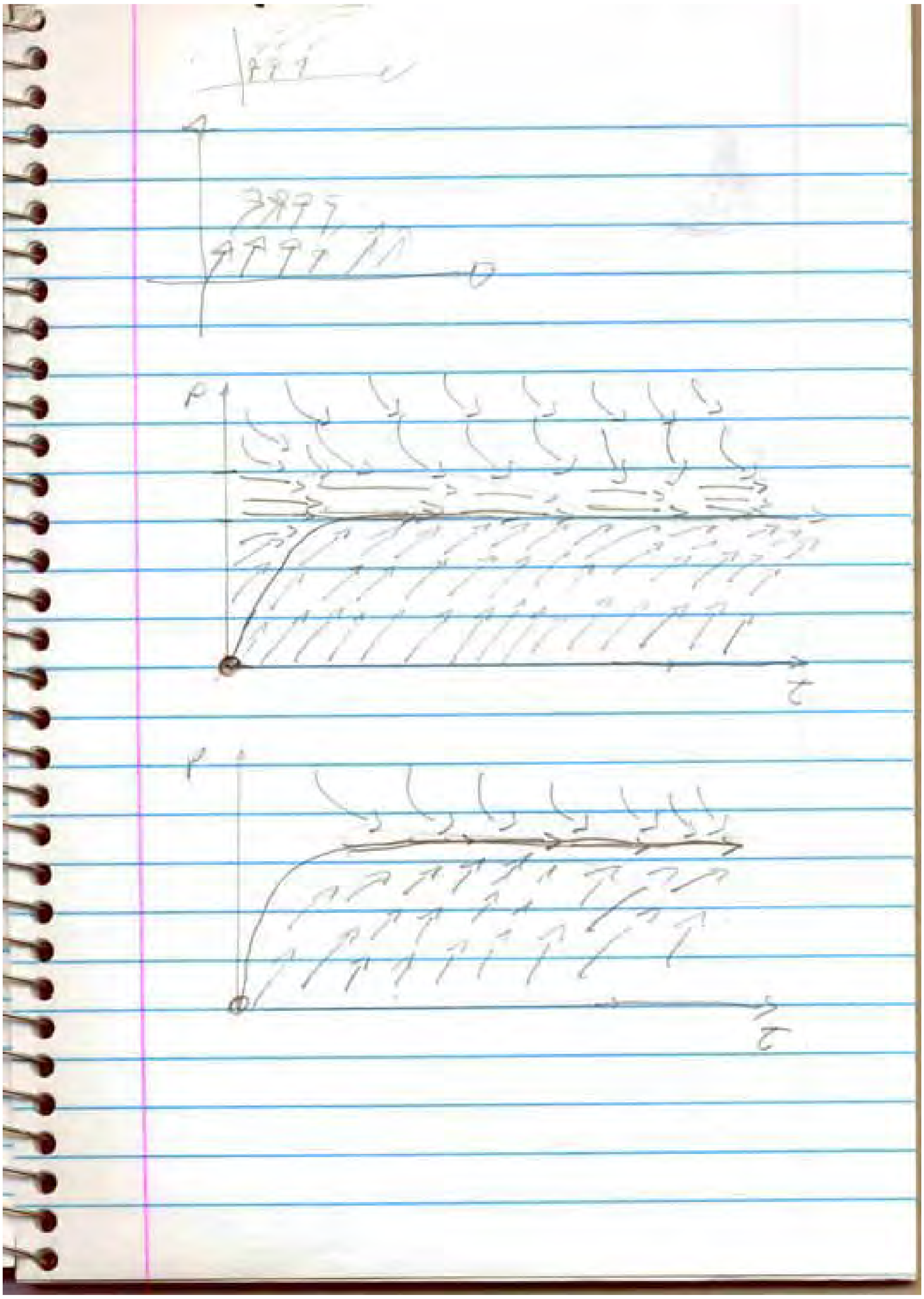


Figura A2.14 - Esboço do campo de direções e curva solução elaborado por Aline

Aline: Não era isso.

Adriano: Se você pensar, se você pegar um caminho aqui e tenta levar leva, ele vai dar uma curva parecida com a sua. (Adriano faz um gesto com a mão mostrando na tela o comportamento da curva)

Aline: É que na verdade o que eu tinha feito sobre a faixa ta certo, mas ao mesmo tempo, ta vendo que perto da faixa é como se não tivesse nenhum, é como se tivesse um espaço.

Adriano: É onde a derivada troca de sinal.

Aline: É onde ela troca de sinal né!

Adriano: Esse ponto que a gente olhou lá é praticamente 3 e alguma coisa no outro gráfico.

Neste momento eles voltam para o gráfico do comportamento da função f(p) e verificam que esta possui um ponto de máximo que é exatamente o ponto de inflexão da função solução procurada, ilustrado na figura A2.15.

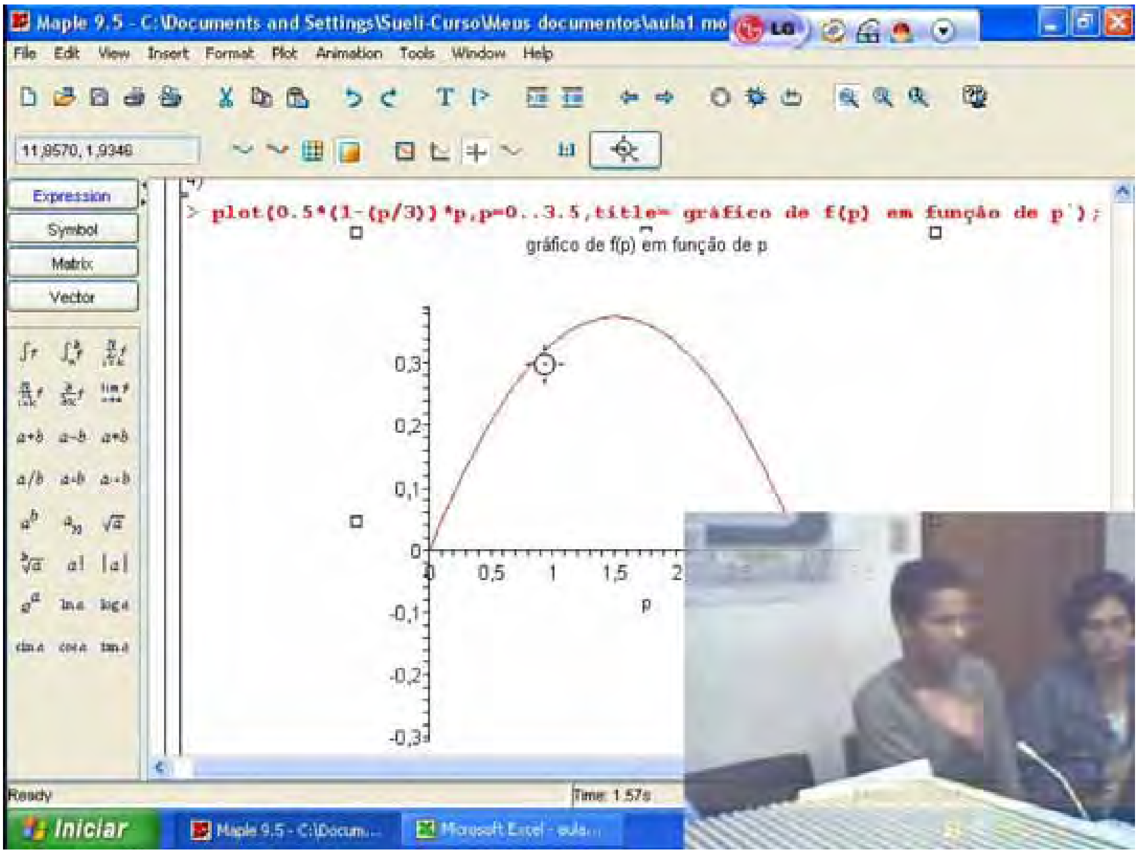


Figura A2.15 - Adriano e Aline observando o gráfico da função f(p)

Os alunos estavam fazendo referência ao ponto p=1,5. Eles apontaram com o mouse no ponto correto, porém estavam equivocados com a ordenada do ponto, por isso disseram em 3 e pouco.

Décima segunda aula – "campos de direções"

Nesta aula, dia 18/05/06 (quinta-feira), compareceram 7 alunos:

C A: Adriano, Viviane e Ronaldo;

C B: Shene Marcos e

C C: Claudia e Kelly

Os alunos exploraram as atividades da aula “campos de direções”, na qual era solicitado que os alunos discutissem em seus pares sobre o comportamento das equações diferenciais dadas e as relacionassem com o seu respectivo campo de direções. Era solicitado que eles justificassem suas repostas.

Os alunos analisaram os gráficos dados, utilizaram a planilha de cálculo para calcular os vetores tangentes para o esboço do campo de direções. O trecho abaixo ilustra o início da discussão da dupla Shen e Marcos que foi propiciada por esta atividade.

Marcos: dx/dt=sen(x), dx/dt=sen(t), qual a diferença disso?

Shen:variando o x o outro o t...

Marcos:É isso o que to querendo enxergar... Integrar esse treco ai né?!Bem que isso daí sem integrar já dá pra fazer,oh?! Já dá pra relacionar facinho,porque oh!!!Aqui vai ser o sen(x)

Shen: A hora que integrar vai ser cos(x)

Marcos: Aqui ta x oh, o que que ta aqui?

Shen: Pra mim aqui é x e aqui é y.

Marcos: Aqui ta t né?Quando ooo.. ta fácil de tirar não ta? Quando t for zero, dx/dt vai ser seno de zero, quanto dá seno de zero?To fazendo a (b) tá?!

Shen; A b?

Marcos: A b.t dx/dt. t igual a zero, seno de zero é?

Shen: Zero.

Marcos: Zero. Quando ele for... quando t for pi sobre dois, quanto que dá?

Shen: Ah quando x for pi sobre dois...

Marcos: Dá um.

Shen: Isso.

Marcos: menos pi sobre dois, menos um, menos pi?!

Shen: Zero.

Marcos: Zero. Daqui pra cá ele cresce?

Shen: hah hah....de zero a pi sobre dois.

Marcos: Aqui vai dar mais ou menos um e meio.

Shen: Ah como?

Marcos: Mais o menos né, pi sobre dois, três vírgula quatorze por dois, aproximadamente, um e meio. Então no um e meio, dx dt vai ser um. Como que é a inclinação um? Assim?

Shen: Inclinação um, perai..noventa graus?!

Marcos: Então no um e meio tem que ser noventa graus mais ou menos não é?

Shen toma a folha que contem os gráficos dos campos de direções e observa que não tem nenhum comportamento assim.

Shen: Nenhum.

Marcos: Nenhum?Aqui oh!Não. Quando x é zero, dx/dt é zero. Acho que é essa aqui oh!(indica o gráfico iv).

Shen: O b, letra b?

Marcos: Que quando é pi sobre dois vai ser um. Ou não?!O gráfico aqui no eixo (mostra o eixo da abscissa) *é t?*

Shen: Isso.

Marcos: E aqui é x (mostrando a primeira equação). *Seno de zero é quanto?*

E a dupla continua a discussão buscando responder o solicitado.

Décima terceira – "modelo de resfriamento"

Nesta aula, dia 23/05/06 (terça-feira), compareceram 7 alunos:

C B: Shen e Marcos e Aline;

C C: Claudia e Kelly;

C E: Ronaldo e Viviane.

Os alunos iniciaram as atividades da aula "modelo do resfriamento". Na elaboração desta atividade eu realizei um experimento. Com um termômetro de precisão decimal, a temperatura ambiente de $20{,}8 \circ \mathrm{C}$, as medidas da temperatura da cerveja de uma lata de $350ml$ foram tomadas. Os valores da temperatura T em relação ao tempo são dados em uma tabela. Para o desenvolvimento desta atividade as mídias utilizadas foram: textos, Excel e Maple.

Inicialmente, Adriano e Ronaldo conjecturaram, através dos cálculos que fizeram utilizando a planilha eletrônica, que o comportamento da temperatura analisada seria aproximada por uma função logarítmica, fato ilustrado na figura A2.16.

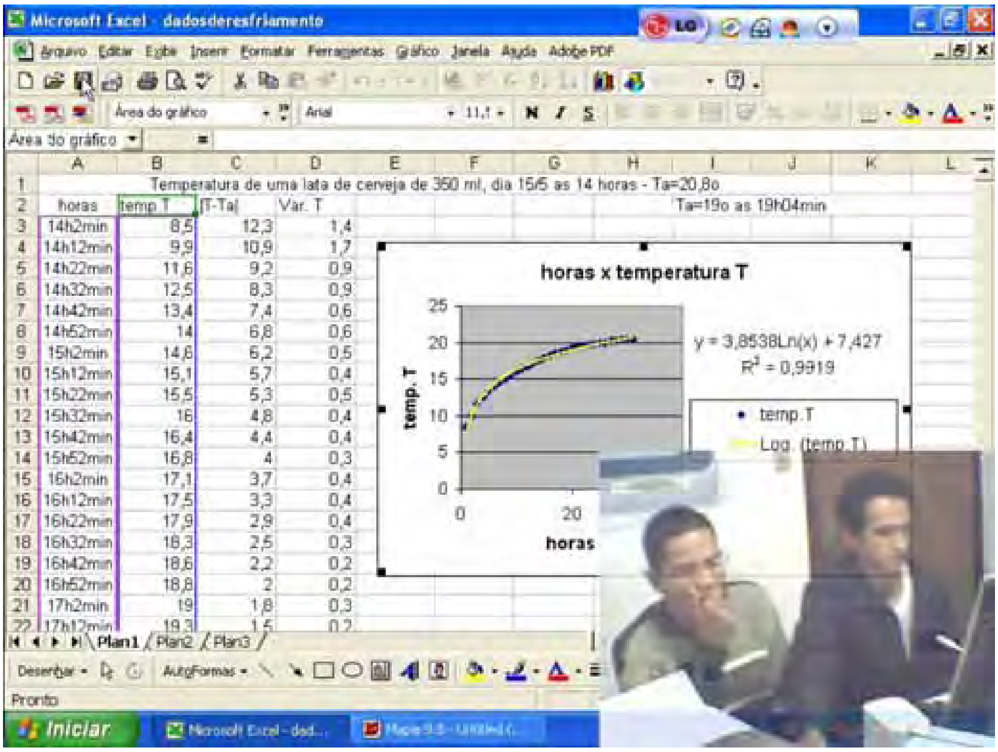


Figura A2.16 - Adriano e Ronaldo elaborando o modelo de resfriamento

No entanto, ao procurar a solução algébrica do modelo analisado, usando comando do Maple, eles verificaram que a função exponencial assintótica era a solução procurada, conforme podemos ilustrar na figura A2.17.

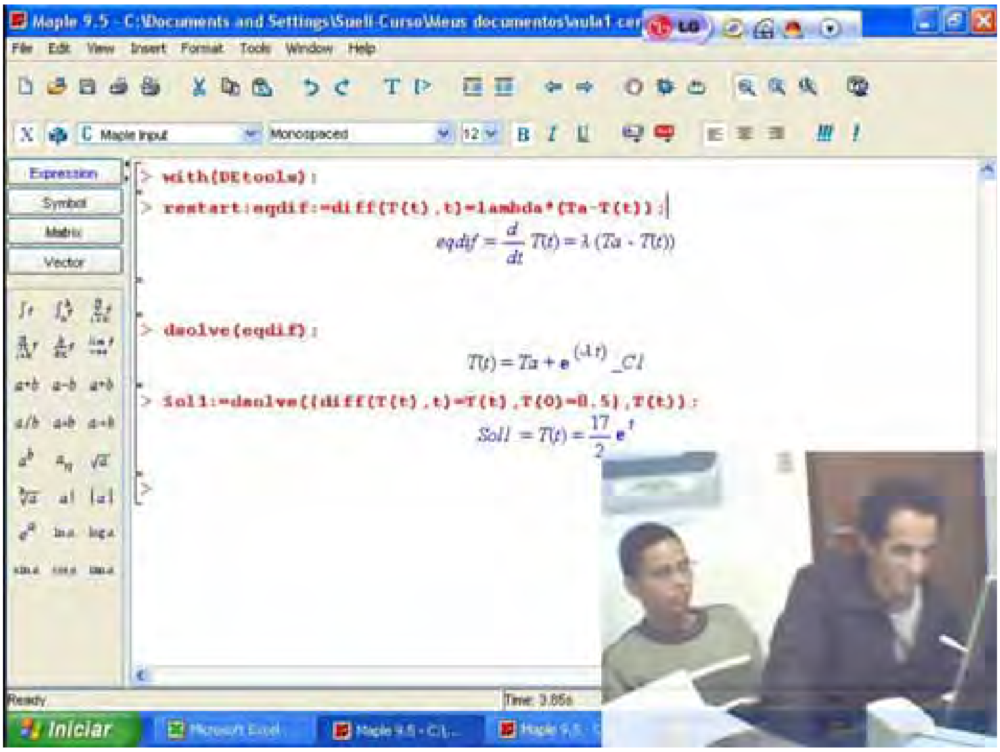


Figura A2.17 - Adriano e Ronaldo determinando a solução analítica da edo

Em seguida eles retomam a planilha e reelaboram o modelo, obtendo assim a aproximação exponencial, ilustrado na figura A2.18.

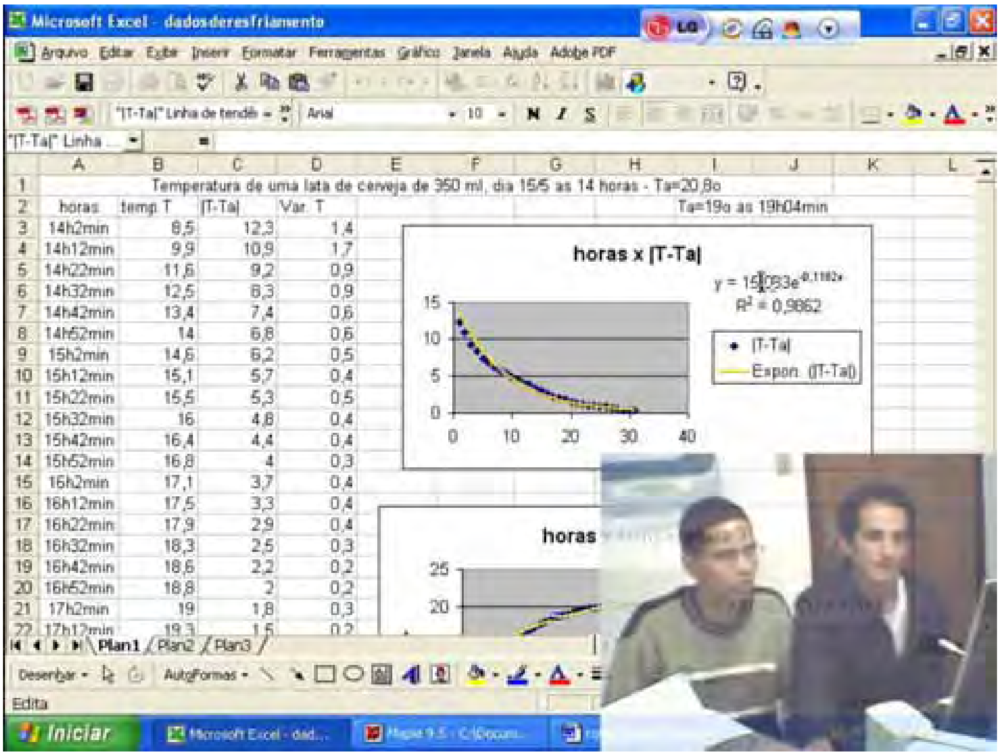


Figura A2.18 - Adriano e Ronaldo reformulando o modelo

Este exemplo mostra a coordenação das várias representações de uma função auxiliando na compreensão do modelo analisado.

Décima quarta aula

Na aula do dia 25/05/06 (quinta-feira), compareceram 4 alunos:

C A: Adriano e Ronaldo e

C B: Shen e Marcos;

Nesta aula, as duas duplas presentes retomaram a exploração da atividade “modelo do resfriamento”.

Décima quinta aula

Nesta aula, dia 30/05/06 (terça-feira), compareceram 8 alunos:

C B: Adriano, Shen e Marcos;

C C: Claudia e Kelly e

C E: Aline, Viviane e Tiago;

Os alunos retomaram a exploração do modelo da lei do resfriamento. A discussão da resolução do modelo, realizada utilizando comandos do Maple e o esboço do gráfico do campo de direções modelo matemático feito no Winplot, possivelmente, possibilitou o entendimento do comportamento do modelo exponencial assintótico da temperatura versus tempo.

Décima sexta aula

Nesta aula, dia 01/06/06 (quinta-feira), compareceram 8 alunos:

C A: Adriano e Viviane;

C B: Shen e Marcos;

C C: Claudia e Kelly

As duplas trabalharam com a comparação entre os dados da temperatura da lata de cerveja e dos dados da temperatura do copo de cerveja.

As discussões que surgiram nas análises desses modelos nos remetem ao estudo de funções, variáveis dependentes e independentes, comportamento de funções, conteúdos explorados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. No caso particular dos dados discretos somos levados a estudar ajuste de funções. E ainda cabe salientar que no caso discreto não tivemos a oportunidade de desenvolver os métodos numéricos para resolução de edo.

Décima sétima aula

Nesta aula, dia 06/06/06 (terça-feira), compareceram 6 alunos:

C A: Adriano e Shen;

C E: Viviane e Ronaldo;

C C: Claudia e

C : Thiago(sozinho e não trabalhou na maquina).

Os alunos trabalharam na preparação do seminário.

Décima oitava aula

Na décima oitava aula, dia 19/06/06 (segunda-feira), compareceram 7 alunos,

C B: Adriano, Marcos e Shen;

C C: Claudia e Kelly, Maq Mat 08;

CG: Thiago e Aline.

Os alunos continuaram trabalhando na preparação da apresentação do seminário.

Décima nona aula

Nesta aula, dia 12/06/06 (segunda-feira) compareceram os alunos Aline, Adriano, Shen, Marcos, Viviane, Tiago, Ronaldo, Claudia e Kelly.

Começamos com a apresentação do trio formado por Shen, Marcos e Adriano. Eles apresentaram o modelo da membrana, discutiram o modelo e apresentaram a solução analítica deste. Em seguida Claudia e Kelly apresentaram o que é uma equação diferencial separável, como se caracteriza e como se resolve. Fizeram um exemplo e solicitaram para que a turma fizesse outro. E em seguida fizeram a resolução da lousa deste exemplo. Na seqüência Thiago e Aline apresentaram o que são as equações diferenciais homogêneas e a mudança de variável utilizada para resolvê-la e apresentaram dois exemplos. Para terminar, Viviane e Ronaldo apresentaram o método de fator integrante para resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem e apresentaram o modelo de despoluição de lagoas.

Vigésima aula – avaliação e encerramento

Nesta aula, dia 19/06/06 (segunda-feira) compareceram os alunos Aline, Adriano, Shen, Marcos, Viviane, Tiago, Ronaldo, Claudia e Kelly. Inicialmente aplicamos o segundo questionário, que será anexado na redação final da tese. As questões deste questionário consistem nas quatro últimas questões do primeiro questionário aplicado. O intuito de aplicar as mesmas questões, específicas de edo, no início e no final do curso teve como objetivo buscar indícios da atuação do curso na formação matemática desses alunos participantes. Esse material ainda será analisado.

Desta forma, como já colocado no início deste anexo, o objetivo maior deste texto foi elaborar um resumo geral das aulas, apresentando como elas aconteceram, qual foi o fio condutor proposto no curso, visto que este foi o cenário de coleta dos dados desta pesquisa.

ANEXO 3 – Questionário inicial aplicado aos alunos do curso de extensão

CURSO DE EXTENSÃO: MODELAGEM E MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Professor Responsável: Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba
Monitora: Profa. Ms. Sueli Liberatti Javaroni (aluna de doutorado – PGEM – UNESP/Rio Claro)

Nome: ____

1. Em quais anos você cursou (ou cursa) a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I?

____

____

____

2. Faça uma avaliação do seu desempenho/compromisso ao cursar Cálculo Diferencial e Integral I.

____

____

____

____

3. Considera que a sua média final nesta disciplina foi coerente comparado ao seu empenho?

____

____

____

____

4. Quando cursou esta disciplina, foi utilizado algum software? Qual?

____

____

____

____

5. Na disciplina de Cálculo I, o conteúdo de equações diferenciais ordinárias foi abordado? Foi usado algum software para explorar esse conteúdo?

____

____

____

____

6. Por quais motivos se inscreveu neste curso de extensão?

7. O que você espera deste curso de extensão? Quais as suas expectativas?

8. O que é uma equação diferencial ordinária?

9. O que é resolvê-la?

10. Você já usou? Precisou?

11. Acha que vai usar ou precisar? Por quê?

12. O que é uma equação diferencial ordinária?

13. O que é resolvê-la?

14. Você já usou? Precisou?

15. Saberia citar exemplos de problemas onde teremos uma equação diferencial ordinária?

ANEXO 4 – Questionário final aplicado aos alunos do curso de extensão

CURSO DE EXTENSÃO: MODELAGEM E MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Professor Responsável: Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba
Monitora: Profa. Ms. Sueli Liberatti Javaroni (aluna de doutorado – PGEM – UNESP/Rio Claro)
Nome: ____

1. O que é uma equação diferencial ordinária?

____
____
____

2. O que é resolvê-la?

____
____
____

3. Você já usou? Precisou?

____
____
____

4. Saberia citar exemplos de problemas onde teremos uma equação diferencial ordinária?

____
____
____
____
____
____