unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

ASSOCIANDO O COMPUTADOR À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FECHADOS:
ANÁLISE DE UMA EXPERIÊNCIA

NORMA SUELY GOMES ALLEVATO

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Lourdes de la Rosa Onuchic

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2005

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

ASSOCIANDO O COMPUTADOR À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FECHADOS:
ANÁLISE DE UMA EXPERIÊNCIA

Norma Suely Gomes Allevato

Orientadora: **Prof[a]. Dr[a]. Lourdes de la Rosa Onuchic**

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para a obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2005

510.285 Allevato, Norma Suely Gomes
A434a Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência / Norma Suely Gomes Allevato. – Rio Claro : [s.n.], 2005
f. 370

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática – Processamento de dados. 2. Software gráfico. Sala de aula. 3. Estudo e ensino . 4. Tecnologias informáticas. 5. Aprendizagem. I. Titulo

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Vera Figueiredo

Profa. Dra. Vera Lucia Xavier Figueiredo

Telma Gracias

Profa. Dra. Telma Aparecida Souza Gracias

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba

Prof. Dr. Geraldo Perez

Lourdes de la Rosa Onuchic

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

N.S.Gomes.

Norma Suely Gomes Allevato

Aluna

Rio Claro, 29 de março de 2005.

Resultado: Aprovada

*Ao meu marido, **Valdir**, e ao meu filho, **Fábio**, pela paciência e amor incondicional que me dedicaram durante a caminhada que culminou com este trabalho.*

*Ao meu querido irmão **Celso** que, certamente, estaria vibrando comigo por mais esta conquista. (in memorian)*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela proteção e auxílio, e por ter me presenteado com tantas pessoas maravilhosas, que foram presença constante nesta empreitada.

Ao meu amado marido, Valdir, pelo amor e dedicação inabaláveis, pelo incentivo e pela confiança que sempre depositou em mim.

Ao meu amado filho, Fábio, por ter suportado minha ausência, e por sempre me perguntar ao telefone: "Você já está vindo? A que horas você vai chegar?"

À querida Cida, por ter compreendido tão bem o quanto eu precisava de sua ajuda e por ter feito, por mim e pela minha família, muito mais do que tinha obrigação de fazer. Por ter cuidado com tanto carinho de minha casa, e especialmente do meu filho, na minha ausência.

À minha família toda, pelo incentivo constante e, de maneira especial, às minhas mães Cidinha e Jandira, e às minhas irmãs Lucelena e Solange por terem, também, tantas vezes, "assumido" meu filho por mim. À minha irmã Silvana por me dizer: "Eh! Deixe a gente ajudar!”, por sua imensa ajuda e apoio.

À D. Lourdes, minha orientadora querida, por ter me concedido o privilégio de sua convivência e de sua amizade; por ter confiado e exigido, desafiado e acompanhado; pela orientação segura e constante.

Ao Marcelo Borba, também pelo privilégio de sua amizade, pelo incentivo e pela confiança que depositou em mim.

À amiga Deinha, por ter sido uma companheira tão fiel, pelos momentos de alegria, de estudo e de reflexão.

Ao amigo Walter Paulette, por ter me acompanhado desde o início até o fim do doutorado, me incentivando e me ajudando.

Ao professor que abriu as portas de sua sala de aula para que eu fizesse minha pesquisa, pela sua coragem e por ter me proporcionado tão ricos momentos de reflexão e aprendizagem.

Aos membros do GPIMEM, pela aprendizagem, pela confiança e pelo carinho que sempre demonstraram.

Aos professores Marcelo Borba, Nilson Machado e Vera Figueiredo pelas valiosas sugestões apresentadas no exame de qualificação.

A todos os colegas do Programa de Pós-Graduação, pela convivência, pelo afeto, pelos momentos de alegria, de trabalho e de reflexão.

Aos meus professores, aos funcionários do Departamento de Matemática, da Biblioteca e da Seção de Pós-graduação e a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar de que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática, quando estão utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções. Ela foi desenvolvida seguindo a proposta metodológica de Romberg, a abordagem adotada foi do tipo qualitativa e a coleta de dados foi feita, essencialmente, por observação-participante em sala de aula, mas também foram utilizados questionários, entrevistas e análise documental.

A pesquisa foi desenvolvida com alunos de 2º semestre do curso superior de Administração de Empresas. O conteúdo central que estava sendo estudado era funções e a metodologia de ensino adotada pelo professor era o ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas, particularmente problemas fechados e relacionados a temas da área de Negócios. A proposta didática para a pesquisa era levar os alunos a trabalhar com estes problemas utilizando o *software* gráfico *Winplot*.

Problemas, no laboratório, muito parecidos com os que eram resolvidos em sala de aula, permitiram estabelecer um paralelo entre procedimentos e conhecimentos que os alunos utilizavam quando estavam sem o computador e quando estavam com ele. A mediação do *software* trouxe novas possibilidades no tocante aos processos de resolução dos problemas e causaram conflitos com as concepções prévias dos alunos sobre esta atividade.

A especificidade do *software* e dos problemas fez emergir problemas secundários e tanto evidenciou lacunas de conhecimento, como foi veículo para o "preenchimento" dessas lacunas e para a construção de novos conhecimentos. Ainda, a ênfase na representação gráfica de funções, condicionada pelo *software* gráfico, permitiu aos alunos experimentar novas formas de considerar antigos conteúdos.

Esta investigação também destacou a linguagem sob duas perspectivas. Os dados sugerem que semelhanças e diferenças entre a sintaxe do *software* e a linguagem matemática algébrica devem ser consideradas quando o computador é utilizado no ensino de Matemática. E, também, o confronto entre os termos próprios das linguagens utilizadas pelos atores participantes desse contexto – a Matemática, o *software*, as aplicações à área de Negócios, as pessoas – aponta para a possibilidade de novas abordagens de ensino, em que se dê maior atenção a estes aspectos.

PALAVRAS-CHAVE: Resolução de problemas, Computadores, Educação Matemática.

ABSTRACT

The objective of this study was to analyze how students relate what they do in the classroom, when using paper and pencil, with what they do in the computer laboratory, when using the computer to solve closed-ended problems about functions. It was done following the Romberg's methodological proposal, a qualitative research approach was used, and data collection involved mainly participant-observation in the classroom, although questionnaires, interviews, and document analysis were also employed.

The study was carried out with university-level students of Business Administration in their second semester. The central theme being studied was functions, and the mathematics teaching-learning approach adopted by the teacher was problem solving, in particular, closed problems and those related to the field of business. The didactic proposal of the research was to guide the students in using the graphing software *Winplot* to work with the problems.

The problems posed to the students in the laboratory were very similar to those solved in the classroom, which made it possible to draw parallels between the procedures and knowledge used by the students with and without the computer. The mediation of the software introduced new possibilities with respect to the problem-solving processes, and caused conflicts with students' previous conceptions regarding this activity.

The specificity of the software and the problems posed caused secondary problems to emerge, and pointed to gaps in knowledge, as well as serving as a vehicle to fill these gaps and construct new knowledge. In addition, the emphasis on graphic representations of functions, resulting from the use of the graphing software, allowed students to experiment with new ways of considering old themes.

This study also highlighted the language, from two perspectives. The data suggest that differences and similarities between the syntax of the software and the mathematical language of algebra should be considered when computers are introduced in the teaching of mathematics. Also, the confrontation between the terms from the different languages used by the actors participating in this context – mathematics, the software, the applications to the field of business, the people – point to the possibility of new teaching approaches that give greater attention to these aspects.

KEY WORDS: Problem solving, computers, mathematics education.

SUMÁRIO

ÍNDICE

ÍNDICE DE PROBLEMAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Introdução

INTRODUÇÃO

> O sujeito do conhecimento é um sujeito histórico que se encontra inserido em um processo igualmente histórico que o influencia.
>
> ALDA JUDITH ALVES-MAZZOTTI

Esta tese apresenta alguns resultados de uma pesquisa cujo fenômeno de interesse é o ensino de Matemática através da resolução de problemas utilizando os computadores.

Por vezes, ao pensar em sua redação, ou mesmo ao tentar redigi-la, assustava-me o desafio que seria escrever um texto (a tese) que, realmente, fosse o retrato desta trajetória de 4 anos em que se desenvolveu a pesquisa, durante o curso de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP em Rio Claro. Seria um trabalho difícil "contar tudo", começando com a apresentação do problema da pesquisa, passando pela metodologia, pelo levantamento bibliográfico, pelos dados, até chegar à sua análise e à apresentação dos resultados.

Estes momentos dedicados a escrever fizeram-me perceber melhor, não somente o peso da responsabilidade de relatar de forma consistente e bem fundamentada esta trajetória como a necessidade de buscar fatos e aspectos de uma caminhada que durou, na realidade, bem mais do que 4 anos. Essa percepção me faz lembrar as palavras de Romberg (1992) que, ao tratar das atividades realizadas pelos pesquisadores ao desenvolverem uma pesquisa, afirma: "toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular no mundo real" (p.51)[1]. Mas, se uma curiosidade desencadeia um processo de pesquisa, o que desencadeia uma curiosidade? No meu caso, creio que tal curiosidade tem raízes em experiências e vivências bem anteriores ao específico curso de doutorado durante o qual desenvolvi esta pesquisa.

Todas essas experiências e vivências apresentam-se em minha mente como um grande emaranhado de fatos não exatamente seqüenciais, às vezes nebulosos e, muitas vezes, bastante distantes no tempo. Neste capítulo proponho-me, inicialmente, a tentar resgatá-las, organizá-las e apresentá-las, acreditando que isto seja necessário, embora não

[1] Tradução de "*All research begins with curiosity about a particular phenomenon in the real world*".

suficiente, para atingir a consistência desejada e justificar este trabalho. Em seguida, a fim de fortalecer estas justificativas, farei uma breve apresentação de algumas pesquisas, apontando algumas lacunas percebidas a partir de estudos analisados. Então são apresentados os objetivos desta pesquisa e, finalmente, a forma como está organizada esta tese.

A TRAJETÓRIA PESSOAL E A GÊNESE DA INVESTIGAÇÃO

A TRAJETÓRIA ESCOLAR E ACADÊMICA - OPÇÃO PELA EDUCAÇÃO E PELA MATEMÁTICA

O interesse pela área de Educação, particularmente o desejo de ser professora, levou-me a optar pelo curso de Magistério no, então, 2º grau. Por apresentar um gosto explícito e uma relativa facilidade em Matemática, fui aconselhada várias vezes, inclusive por meus próprios professores, a optar por outra habilitação. Em suas falas, havia a expressão velada de uma crença que via o Magistério como um curso indicado para os considerados "menos capacitados". De fato, havia uma cultura vigente de que os alunos em geral mas, especialmente as alunas, que pareciam não ter "capacidade" para outras habilitações ou para o curso superior, deveriam ser encaminhados ao Magistério; assim, poderiam pelo menos "dar aulas num meio período".

Em especial, esta predileção pela Matemática alimentava em mim a intenção de seguir a vida escolar cursando uma licenciatura nesta área. Isto também era, na opinião de alguns, um forte motivo para eu não fazer o Magistério, uma vez que havia outras habilitações que poderiam me oferecer mais condições, no que se refere a conteúdos matemáticos. Seria isto, quem sabe, a expressão de uma idéia em que subsiste a crença de que para ensinar Matemática é mais importante saber Matemática do que saber ensinar, ou de que, para fazer Matemática é preciso conhecimento e preparação, mas para ensinar, não.

É fato que o Magistério não me dera uma forte formação matemática. Não tive dificuldade para passar no vestibular porque o curso superior de Matemática era pouco procurado, mas não foi sem dificuldade que cursei e concluí minha licenciatura em Matemática na Universidade Estadual de Londrina - UEL. Durante a licenciatura, porque tinha realmente gosto e interesse em aprofundar meus conhecimentos, cursei algumas disciplinas específicas do bacharelado, de modo que, com mais um semestre e muito estudo tornei-me também bacharel em Matemática. A essa altura já ministrava aulas, na rede pública estadual, para alunos de 5ª série e 2º grau.

Não era comum à época, como não o é também hoje, que muitos alunos gostassem de Matemática e quisessem, de fato, dedicar-se à docência. Alguns faziam o curso porque era fácil passar no vestibular e não conseguiam entrar nos cursos que realmente queriam; outros entravam em Matemática e ficavam tentando transferir-se para outros cursos como engenharias, agronomia; havia também os que achavam que o curso lhes daria condições de serem aprovados em concursos públicos; frustrados, muitos desistiam do curso antes mesmo do término do primeiro ano. Lembro-me de minha formatura com apenas cinco alunos, três dos quais haviam entrado na faculdade um pouco antes de mim; uma única formanda era minha colega de turma. Assim, incentivada por meus professores da faculdade, inscrevi-me no mestrado em Matemática Pura que era oferecido na própria universidade.

A TRAJETÓRIA PROFISSIONAL - OPÇÃO PELA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Logo em seguida fui convidada a ministrar aulas para os cursos superiores de Ciências Econômicas e Administração de Empresas, substituindo uma professora que estava em licença médica. Ser professora universitária era uma oportunidade ao mesmo tempo atraente e desafiadora. Dediquei-me com mais afinco ao mestrado, pois entendia que adquirir conhecimentos mais profundos de Matemática era indispensável às demandas profissionais que eu estava enfrentando. No semestre seguinte assumi outras aulas no departamento de Matemática, agora como professora contratada. Um tempo depois, o departamento abriu concurso público para professores e, tendo sido aprovada, tornei-me professora efetiva na universidade.

Após alguns anos, mestrado concluído e já com experiência em ensino superior, mudei-me para São Paulo onde continuei trabalhando: ministrei aulas para muitos cursos diferentes, de várias disciplinas diferentes, em universidades públicas e particulares.

Detalhes e reclamações à parte, não é fácil dar aulas de Matemática. Em geral, enfrentamos uma forte rejeição, por parte dos alunos, à disciplina, rejeição que eles transferem, muitas vezes inconscientemente, a nós, professores. Muitos alunos apresentam grandes dificuldades para aprender Matemática, tiram notas baixas nas avaliações, são reprovados várias vezes, questionam a necessidade da disciplina para sua formação. Os professores reclamam muito do baixo aproveitamento e desinteresse dos alunos nas disciplinas, da falta de recursos, da falta de apoio para qualificação e aperfeiçoamento profissional. Coordenadores e diretores alardeiam os altos índices de reprovação e pedem providências, renovação e atualização das práticas.

Foi neste quadro que, numa certa ocasião, por sugestão de um colega professor, nos propusemos a formar um grupo de estudos para estudar um *software*. Aprender a utilizá-lo, orientar os alunos de Cálculo dos mais diversos cursos a utilizá-lo também, elaborar trabalhos a serem realizados pelos alunos, eram alguns dos nossos objetivos. As dificuldades para viabilizar horários para os encontros, o alto custo do material (manuais, livros, etc) e do *software*, a falta de recursos por parte da instituição, entre outras razões, contribuíram para que, do grupo de estudos, restassem apenas intenções.

Ainda assim, já nessa época, alguns professores de alguns cursos, permitíamos que os alunos utilizassem calculadoras nas aulas de Cálculo, Matemática Financeira, Cálculo Numérico e Estatística. Não víamos problemas com isso, pelo contrário; as calculadoras pareciam ser fortes aliadas da aprendizagem em sala de aula. Mas não havia reflexão sistemática, por parte dos professores, sobre sua utilização: suas possibilidades, suas potencialidades, as implicações de sua utilização não eram analisadas. Apenas elaborávamos exercícios (Ou eram problemas?) que exigiam compreensão e raciocínio por parte dos alunos, que não fossem meras aplicações mecânicas de algoritmos ou rotinas. Entretanto, agora percebo que nem nós mesmos, os professores, tínhamos clareza do que queríamos ou fazíamos.

Apesar das dificuldades, o gosto pela profissão permanecia e ainda permanece. E, porque permanece, me torna mais atenta às suas vicissitudes, aos detalhes, às falhas e carências, e me faz buscar aprimoramento e aprofundar compreensões. Só que, naquele momento, eu sentia que estudar e aprender mais Matemática não me ajudaria no que eu queria. Os problemas que eu percebia com meus alunos, com minhas aulas, com minhas avaliações, não se resolveriam se eu não buscasse aprofundamento nas questões relativas ao ensino da Matemática.

Esta busca levou-me a ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, em Rio Claro, inicialmente como aluna especial.

Simultaneamente ocorreram mais dois fatos que foram decisivos nesta opção pela Educação Matemática. O primeiro foi um convite, por parte do diretor da faculdade em que eu trabalhava, para implementar um projeto que visava disponibilizar aulas de Cálculo, que fossem acessíveis aos alunos, via internet, como um recurso de apoio às aulas presenciais. O segundo foi uma proposta de emprego, numa faculdade em implantação, em que ministraria aulas de Matemática para alunos do curso de Administração de Empresas, em salas de aula totalmente informatizadas: alunos e professores com computadores de última geração. Quanto ao projeto das "aulas" pela internet, não pude assumir pois resolvi afastar-me daquela instituição para dedicar-me ao doutorado na UNESP, mas aceitei as aulas na nova faculdade. Eram poucas aulas por semana e parecia que não me tomariam muito tempo.

Confesso que o novo "ambiente de trabalho" era fascinante e, associado à possibilidade de desenvolver pesquisa, representava uma oportunidade de renovação de minha prática docente. Tinha muito trabalho: preparação de arquivos de aula em PowerPoint, sessões de treinamento para utilização e familiarização com os recursos, criação de estratégias para contornar as dificuldades com a nova configuração da sala de aula. Mas o fascínio, que inicialmente também estava presente nos alunos, logo deu lugar a uma espécie de frustração diante de algumas constatações: apesar dos recursos disponíveis e de todo o empenho, a maioria dos professores (em que me incluo) dava "aulas tradicionais". As aulas estavam aquém do esperado, não por serem tradicionais, mas pelos resultados que mostravam ao serem conduzidas tal e qual, apesar do novo contexto, eu diria, informatizado. Os alunos não apresentavam melhora, qualitativa ou quantitativa, na aprendizagem dos conteúdos matemáticos, estavam mais dispersos em sala de aula e apresentavam, agora, uma forte resistência à utilização de livros e do "lápis-e-papel".

Embora ainda iniciando meu contato com o programa de doutorado da UNESP, começava a vislumbrar uma possibilidade de pesquisa. Tive, então, conhecimento que no programa havia um grupo de professores e alunos desenvolvendo pesquisas na linha de Novas Tecnologias e Educação Matemática[2]; li alguns de seus trabalhos e conheci e conversei com alguns membros desse grupo.

Numa das disciplinas que cursei - Aprendizagem Matemática - ainda como aluna especial, por sugestão do então professor da disciplina, Geraldo Perez, fiz algumas leituras, resenhas e um trabalho sobre resolução de problemas que foi decisivo na definição de meu tema de pesquisa. Em princípio me causava uma certa estranheza este tema: "resolução de problemas é o que fazemos o tempo todo em Matemática; o que haveria para pesquisar a este respeito?", pensava ingenuamente. Mas através deste trabalho tive um primeiro contato com alguns nomes de peso em resolução de problemas, como Pólya (1945) e Schoenfeld (1980), e me interessei pelo assunto. Soube também que no programa também havia um grupo de pesquisa trabalhando nisto[3].

Num contato inicial para discussão do meu projeto de pesquisa, a Prof[a]. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, coordenadora do GTERP e orientadora deste trabalho, apresentou-me a visão de resolução de problemas como metodologia de ensino e, ficou definido, então, que minha pesquisa teria como fenômeno de interesse o ensino de Matemática através da resolução de problemas utilizando os computadores.

---

[2] GPIMEM - Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, coordenado pelo Prof. Dr Marcelo de Carvalho Borba. www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html

[3] GTERP - Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas, coordenado pela Prof[a]. Dra Lourdes de la Rosa Onuchic.

A LITERATURA E A RELEVÂNCIA DA INVESTIGAÇÃO

Uma vez que a relevância de uma investigação também se mede pela forma como ela se articula com as lacunas de pesquisas já realizadas, relacionadas aos aspectos de que trata, organizei esta seção em subseções intituladas de acordo com alguns desses aspectos, apresentando justificativas para...

... A PESQUISA EM SALA DE AULA

Thompson(1989), ao apresentar uma pesquisa sobre as concepções e crenças de professores de Matemática a respeito da resolução de problemas, destaca que os relatos de estudos em resolução de problemas não descrevem o que realmente acontece na sala de aula e falham na avaliação da eficácia do ensino, pois apresentam resultados quantitativos (como quantos problemas foram resolvidos) e não qualitativos. Assim, considera que o conhecimento sobre as práticas de ensino desejáveis é mais um folclore do que uma evidência de pesquisa.

Também Ponte (2000) valoriza a investigação e a reflexão sobre a prática e sugere que sejam realizados estudos que dêem especial atenção à experimentação de novas idéias na sala de aula:

> "Deste modo, o conhecimento profissional está estreitamente ligado à acção. Este conhecimento tem, necessariamente, uma forte relação com o conhecimento comum (usado na vida quotidiana) e ganha consistência quando se articula com o conhecimento acadêmico." (p.11)

Assim, embora minha pesquisa seja voltada mais aos alunos do que ao professor, sou levada a acreditar que ela é bastante relevante neste aspecto, pois se refere a uma investigação realizada, realmente, sobre a prática, e descreve e analisa o que realmente se passou em sala de aula, onde as situações vivenciadas pelos alunos são diretamente configuradas pela forma com que o professor conduz o ensino e vice-versa.

Acrescente-se a estes o fato de que a grande parte das pesquisas realizadas em sala de aula, envolvendo resolução de problemas, apresenta resultados quantitativos como: quantos problemas foram resolvidos ou quantos foram resolvidos corretamente, etc. A pesquisa que estou desenvolvendo é qualitativa, de modo que os aspectos analisados por mim terão um enfoque mais na natureza e aprofundamento das compreensões relativas à resolução de problemas.

... A PESQUISA COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E COMPUTADORES

Grande parte dos estudos sobre resolução de problemas tem destinado esforços no sentido de analisar qual é sua função no ensino e aprendizagem de Matemática, e esta função tem sido, freqüentemente, associada ao tipo de problema proposto aos alunos. Deste modo, os problemas são classificados, e classificações apresentadas por vários autores podem ser encontradas na literatura de pesquisa (SHIMADA, 1997; CONTRERAS, CARRILLO, 1998; HASHIMOTO, BECKER, 1999; DANTE, 2000; VAN DE WALLE, 2001; PEHKONEN, 2003;). O tipo dos problemas que foram propostos aos alunos participantes de minha pesquisa apresenta semelhanças com os exercícios de algoritmos e os problemas-padrão, apresentados por Dante (2000); com a concepção tecnológica, considerada por Contreras e Carrillo (1998); e, especialmente, com os problemas fechados, conforme entendem Shimada (1997) e Pehkonen (2003). Ocorre, porém, que a inclusão do computador, e particularmente, do *software* gráfico *Winplot*, mediando a resolução dos problemas colocou os alunos diante de situações que tornam consideravelmente nebulosas as fronteiras que definem estes tipos de problemas apontados por estes autores. Seus estudos não incluem a influência deste mediador, o computador, na configuração dos problemas e do que pode advir desta influência, no tocante à aprendizagem da Matemática através dos problemas. Em meu trabalho, vale destacar, foi possível, inclusive, estabelecer um paralelo entre utilizar ou não o computador na resolução do mesmo tipo de problema, o que permitiu perceber aspectos que não estão presentes em outros estudos.

Os procedimentos dos quais os alunos lançam mão e os conhecimentos prévios aos quais recorrem se modificam ao passarem da sala de aula para o laboratório. Estudos anteriores, baseados na "teoria da reorganização", de Tikhomirov (1981), dedicaram-se a analisar de que forma os processos de pensamento dos alunos se reorganizam neste novo contexto em que as tecnologias informáticas (TI) são utilizadas (BORBA, 1999; VILLARREAL, 1999; BORBA; PENTEADO, 2001; BENEDETTI, 2003). Inicialmente, gostaria de pontuar que nestes trabalhos as atividades realizadas pelos alunos foram preparadas especialmente para serem realizadas com algum tipo de tecnologia informática, com características de atividades abertas, pois tinham, na maior parte das vezes, objetivos exclusivos de pesquisa, diferentemente dos problemas resolvidos em meu estudo.

Percebo nestes estudos mais uma característica comum: eles põem foco nas representações múltiplas de funções, e analisam de que forma a coordenação entre estas representações – algébrica, numérica e gráfica – ajuda a promover uma compreensão matemática mais abrangente dos conteúdos matemáticos. Nestes estudos nenhuma das três representações ocupou lugar de destaque, no entanto, em minha pesquisa, há ênfase na representação gráfica em virtude da utilização de um *software* gráfico.

Um outro aspecto que desenvolvi neste trabalho refere-se à avaliação, tratado sob a perspectiva da detecção de lacunas de conhecimento nos alunos, e de como a resolução de problemas associada ao *software* serviu de apoio para a superação das dificuldades, para a aprendizagem de conteúdos matemáticos e para novas formas de compreender conteúdos já conhecidos. Trabalhos anteriores apontam para o potencial avaliativo da resolução de problemas (SCHROEDER; LESTER, 1989; CAMPBELL, 1996; ONUCHIC, 1999; VAN DE WALLE, 2001; DIEZMANN; WATTERS; ENGLISH, 2001). Porém, novamente, nenhum destes estudos considera a mediação do computador nas atividades e, em meu estudo, procurei mostrar e analisar como essas deficiências se manifestaram a partir da presença do computador, no ambiente de resolução de problemas.

Ademais, vi poucos trabalhos voltados à utilização de tecnologias informáticas, dedicarem-se a questões específicas acerca da avaliação. Bizelli e Borba (1999) fazem menção a questões relacionadas a isto; eles salientam que a carência de conhecimento matemático pode impedir a correta e efetiva utilização dos recursos de um *software*. Mas a avaliação não era o foco de seu estudo.

Dificuldades na resolução de problemas com a utilização do *Winplot* não foram decorrentes apenas da presença de lacunas de conhecimento nos alunos. Em meu estudo, no decorrer da resolução dos problemas, surgiram problemas secundários que me levaram a analisar aspectos relativos à linguagem. Pierce e Stacey (2002) desenvolveram um estudo em que o "*insight* algébrico" foi o centro das análises. Segundo as autoras, esta parte do sentido simbólico, necessário para encontrar uma solução matemática para um problema matemático, é afetada quando se faz Matemática utilizando *softwares* algébricos. Dois elementos, o reconhecimento de convenções e propriedades básicas (como das diferenças entre linguagens) e a identificação de características-chave dos objetos matemáticos, entre outros, compõem o *insight* algébrico. Os fatos que ocorreram durante minha investigação apontam para a necessidade de olhar com cuidado e levar em consideração a linguagem do *software* utilizado, particularmente a sua sintaxe, em relação à linguagem matemática algébrica. Os estudos de Henry Pollak (1986), e Waits e Demana (2000) indicam quais mudanças a tecnologia provoca na Matemática, e Borba e Penteado (2001) afirmam que a informática pode transformar o tipo de Matemática que é abordada em sala de aula. Porém, o caso da linguagem, da forma como considerei, refere-se a mudanças que a tecnologia provoca na forma de abordar os conteúdos matemáticos e, quem sabe, à inclusão de novos conteúdos no ensino, não especificamente considerados, ao menos até aqui, matemáticos.

Considero não menos relevantes os aspectos da linguagem voltados à terminologia, isto é, ao conjunto de termos que se utiliza na Matemática, em relação aos que o *software* em uso apresenta, aos que o professor utiliza e aos que a área de aplicação dos problemas exige (se forem aplicados a outras áreas). Estes aspectos relacionados à linguagem emergiram, especialmente, de um tipo de ensino bastante mais individualizado que se configurou no laboratório de Informática, em relação à sala de aula normal, das características dos enunciados e dos problemas propostos e, certamente, da forma como são nomeados e organizados os recursos do *Winplot*. Meus dados apontam para a necessidade de que professor e alunos "dominem esses termos", não simplesmente conhecendo seu nome, mas o significado daqueles termos, ou seja, a que conceito ele se refere. Alguns estudos (BENEDETTI, 2003; MACHADO, 2000; VILLARREAL, 1999) reiteram que, na presença de tecnologias informáticas, é preciso que o professor seja capaz de romper a rigidez que, em geral, caracteriza a organização das atividades. É preciso rever e promover mudanças na forma de tratar e na seleção dos conteúdos (WILLOUGHBY, 2000). Porém, vale destacar, nenhum desses estudos apontados anteriormente dedica-se, especificamente, a estes aspectos relacionados ao domínio da linguagem, ou melhor, das linguagens, sob a perspectiva que adotei em minha pesquisa.

Encerro esta seção com considerações de caráter um pouco mais geral. No tocante à utilização de recursos auxiliares de ensino e aprendizagem, durante a atividade de resolução de problemas, Ponte (1994) realizou um estudo em que procurou conhecer o que pensavam algumas professoras sobre a resolução de problemas. Uma das dificuldades apontadas por elas foi a de encontrar material de apoio apropriado para este tipo de atividade. Então Ponte (1994) afirma que, se é verdade que, em alguns casos, basta-nos o enunciado da tarefa e material de escrita, é também verdade que a utilização de recursos, como *software* dinâmico de Geometria e *softwares* algébricos, proporcionam a realização de investigações bastante interessantes que, de outro modo, se tornariam difíceis ou mesmo impossíveis de realizar. Portanto, têm sido apontadas características marcantes que tornam o computador um poderoso recurso de ensino, e as implicações de sua associação à resolução de problemas no ensino de Matemática merecem ser pesquisadas e analisadas. E, particularmente, entre as pesquisas que analisei, a utilização de *softwares* gráficos no ensino de Matemática, conforme ocorreu em minha pesquisa, não tem sido muito explorado.

A PERGUNTA DE PESQUISA

Assim, a partir do entrelaçamento de minha trajetória pessoal (escolar, acadêmica e profissional), das demandas trazidas pelas lacunas de pesquisa percebidas na literatura sobre resolução de problemas e computadores e, é claro, de elementos emergentes nos caminhos da própria pesquisa, foi possível elaborar uma pergunta diretriz. Esta pergunta é a expressão de quais foram, afinal, os objetivos desta investigação. Compreender...

De que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática, quando estão utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções?

A ORGANIZAÇÃO DA TESE

Esta tese está organizada em 8 partes, além das referências e anexos:

INTRODUÇÃO

Nesta parte, onde se insere a presente seção, apresento minha trajetória pessoal (escolar, acadêmica e profissional) seguida de uma breve apresentação da literatura de pesquisa relacionada à resolução de problemas e à utilização dos computadores na Educação Matemática, na tentativa de explicitar qual foi a gênese e qual é a relevância desta investigação. Segue-se a apresentação da pergunta de pesquisa e, finalmente, das linhas gerais do conteúdo de cada parte desta tese, isto é, de sua organização.

CAPÍTULO 1 - METODOLOGIA DA PESQUISA

No capítulo 1 apresento e discuto alguns elementos da proposta metodológica de Romberg (1992), que é voltada ao processo de desenvolvimento de uma pesquisa em Educação Matemática. Também explicito de que forma tal proposta fundamentou as opções que nortearam minha pesquisa. Justifico, ainda, a opção pela abordagem qualitativa e relato as mudanças realizadas no projeto inicial, e apresento os procedimentos adotados na coleta, registro e análise dos dados.

CAPÍTULO 2 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O capítulo 2 é dedicado a apresentar um retrato das pesquisas já desenvolvidas no âmbito da resolução de problemas. Inicialmente abordo a importância dos problemas como mola propulsora da atividade matemática e da produção do conhecimento matemático. Apresento posições sobre o que é um problema e sobre a função da resolução de problemas na Educação Matemática. Em seguida analiso algumas diferentes concepções sobre resolução de problemas e termino tratando de algumas questões voltadas mais especificamente à implementação da resolução de problemas em sala de aula.

CAPÍTULO 3 - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E COMPUTADORES

No capítulo 3 são apresentados alguns estudos voltados à inserção dos computadores no ensino. Inicio por uma reflexão sobre a relação do computador com a atividade humana e a aprendizagem de Matemática. Então dedico uma seção a destacar alguns aspectos emergentes deste contexto. Sigo analisando alguns estudos que abordam questões especificas, relacionadas à utilização do computador na sala de aula, e alguns que tratam de resolução de problemas e computadores.

CAPÍTULO 4 - CONTEXTO DO ESTUDO

O capítulo 4 foi destinado à apresentação das características do contexto em que esta pesquisa foi desenvolvida. Partindo de aspectos mais gerais até atingir os mais específicos, apresento informações referentes às demandas atuais para a formação do Administrador de Empresas e às leis que regem estes cursos; à instituição de ensino, ao curso e à disciplina onde realizei a pesquisa; ao perfil do professor da turma, dos alunos pesquisados e, até mesmo, do pesquisador.

CAPÍTULO 5 - DESCRIÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS

No conteúdo deste capítulo apresento descritiva e analiticamente os dados construídos na pesquisa. O capítulo foi organizado em várias partes, cada uma delas tratando de um dos subtemas relacionados ao tema de minha pesquisa, que é ensino de Matemática através da resolução de problemas utilizando os computadores. Os subtemas fixados foram: (1) a resolução de problemas com o computador e a resolução de problemas sem o computador, (2) a avaliação e (3) a linguagem. Em cada um desses subtemas são apresentados cenários, que são conjuntos de dados agrupados por estarem relacionados a um aspecto particular do subtema em questão.

CAPÍTULO 6 - OS DADOS À LUZ DA LITERATURA APRECIADA

As análises desenvolvidas no capítulo 5 são, aqui, ampliadas e aprofundadas através do relacionamento dos dados com a literatura de pesquisa apresentada e discutida nos capítulos 2 e 3, isto é, àquela que trata de resolução de problemas e do uso das tecnologias informáticas, especialmente os computadores, na Educação Matemática. Este capítulo foi organizado na mesma ordem em que os dados foram apresentados no capítulo 5, ou seja, de acordo com os subtemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta última parte, retomo minha pergunta de pesquisa a fim de sintetizar as compreensões e tecer algumas conclusões que construí ao longo desta investigação, e que foram orientadas por esta pergunta. Expresso o que sinto no tocante às contribuições que minha pesquisa possa trazer à Educação Matemática. Também comento as principais limitações que percebi em meu estudo, e aponto para novos estudos que podem ser realizados e que vislumbrei em função deste que realizei.

Capítulo 1

METODOLOGIA DA PESQUISA

Capítulo 1 - Metodologia da Pesquisa

1.1 - A complexidade do campo de estudos e a justificativa dos métodos
1.2 - O Modelo de Romberg e esta pesquisa neste modelo
- 1.2.1 - Identificação do fenômeno de interesse
- 1.2.2 - Modelo preliminar
- 1.2.3 - Relacionar com idéias de outros
- 1.2.4 - Estabelecimento das conjecturas
  - 1.2.4.1 - As conjecturas e a pergunta inicial
  - 1.2.4.2 - A metodologia de pesquisa qualitativa
  - 1.2.4.3 - A nova pergunta de pesquisa e a pergunta de pesquisa definitiva
- 1.2.5 - Estratégia geral para coleta de evidências
- 1.2.6 - Procedimentos específicos
  - 1.2.6.1 - Fase inicial do modelo preliminar
    - 1.2.6.1.1 - Análise documental
    - 1.2.6.1.2 - Questionários
    - 1.2.6.1.3 - Observação
    - 1.2.6.1.4.- Entrevista
  - 1.2.6.2 - Fase intermediária do modelo preliminar
- 1.2.7 - Fase final do modelo preliminar - Coletar evidências
  - 1.2.7.1 - Observação participante
  - 1.2.7.2 - O registro das evidências
    - 1.2.7.2.1 - Gravações
    - 1.2.7.2.2 - Documentos
    - 1.2.7.2.3 - Diário de campo
- 1.2.8 - Interpretar evidências
- 1.2.9 - Transmitir os resultados aos outros
- 1.2.10 - Antecipar as ações dos outros

CAPÍTULO 1

METODOLOGIA DA PESQUISA

> A pesquisa científica exige criatividade, disciplina, organização e modéstia, baseando-se no confronto permanente entre o possível e o impossível, entre o conhecimento e a ignorância.
>
> MIRIAM GOLDENBERG

Ao ingressar como aluna regular no programa de doutorado em Educação Matemática, defrontei-me com uma premente necessidade de compreender as perspectivas e os fundamentos de Metodologia de Pesquisa. Evidenciava-se uma lacuna em minha formação universitária de Graduação em Matemática, e até mesmo de Mestrado em Matemática Pura, no qual não houve preocupação com questões desta natureza. Entretanto, para fazer pesquisa em Educação Matemática, era preciso buscar subsídios à configuração e condução de um trabalho de investigação científica cuja consistência depende, também, dos recursos oferecidos pela Metodologia de Pesquisa e adotados pelo pesquisador.

Como bem coloca Severino (1996) "[...] a metodologia é um instrumental extremamente útil e seguro para a gestação de uma postura amadurecida frente aos problemas científicos, políticos e filosóficos que nossa educação universitária enfrenta" (p.18). Entendo, estendendo esta idéia, que tal instrumental deva ser utilizado em investigações em Educação, na realidade em qualquer nível.

Tendo sempre em mente que meu objetivo era desenvolver uma pesquisa em Educação, particularmente em Educação Matemática, tomei conhecimento das orientações de Thomas A. Romberg, apresentadas em um trabalho intitulado Perspectivas sobre Conhecimento e Métodos de Pesquisa[4], e publicado no *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, em 1992. Romberg é educador, matemático e professor de Currículo e Ensino do Centro Wisconsin de Pesquisa em Educação, da Universidade de Wisconsin - USA.

Neste capítulo de minha tese, pretendo apresentar e discutir alguns elementos dessa proposta metodológica de Romberg, que é voltada ao processo de desenvolvimento de uma

[4] Tradução de *Perspectives on Scholarship and Research Methods*.

pesquisa em Educação Matemática. Também pretendo explicitar de que forma tal proposta fundamentou as opções que nortearam minha pesquisa.

1.1. A COMPLEXIDADE DO CAMPO DE ESTUDOS E A JUSTIFICATIVA DOS MÉTODOS

A indiscutível complexidade do cenário em que se realiza o ensino-aprendizagem-avaliação da Matemática leva os professores e pesquisadores a buscarem fundamentação e perspectivas para investigar as variadas questões que surgem neste cenário. Esta complexidade decorre da presença e inter-relação de diversos fatores trazidos ao contexto escolar por, pelo menos, cinco elementos: o professor, os alunos, a disciplina (no caso, a Matemática), a escola e a sociedade.

Considerado o "guia" ou "gerente" do ensino, o professor norteia sua prática a partir do conhecimento do perfil e das necessidades de seus alunos. Ambos, alunos e professores, têm suas atividades condicionadas à estrutura escolar (organização, recursos, ideologias, ...) e às peculiaridades da disciplina, a Matemática, como pertencente a um conjunto de outras tantas disciplinas que integram as grades curriculares. Ademais, a instituição escolar foi criada por grupos sociais para preparar seus jovens a serem membros da sociedade. A respeito destas relações, Lüdke e André (1986) complementam:

> Cada vez mais se entende o fenômeno educacional como situado dentro de um contexto social, por sua vez inserido em uma realidade histórica, que sofre toda uma série de determinações. Um dos desafios atualmente lançados à pesquisa educacional é exatamente o de tentar captar essa realidade dinâmica e complexa do seu objeto de estudo, em sua realização histórica.(p.5).

Desta miríade de elementos surgem muitas questões e a necessidade de buscar em outras áreas como a Sociologia, a Filosofia, a Pedagogia e outras, subsídios para a condução de investigações que tragam possíveis respostas às questões. Quando as perspectivas de cada uma dessas áreas são trazidas para a Educação Matemática, esta produz seus próprios conjuntos de conceitos, métodos e procedimentos. A Educação Matemática constitui-se, então, em um rico campo de estudos, no qual a compreensão de suas próprias perspectivas e princípios é fundamental na condução de investigações e na escolha dos métodos de pesquisa. Diferentes métodos pressupõem e dependem não só das diferentes

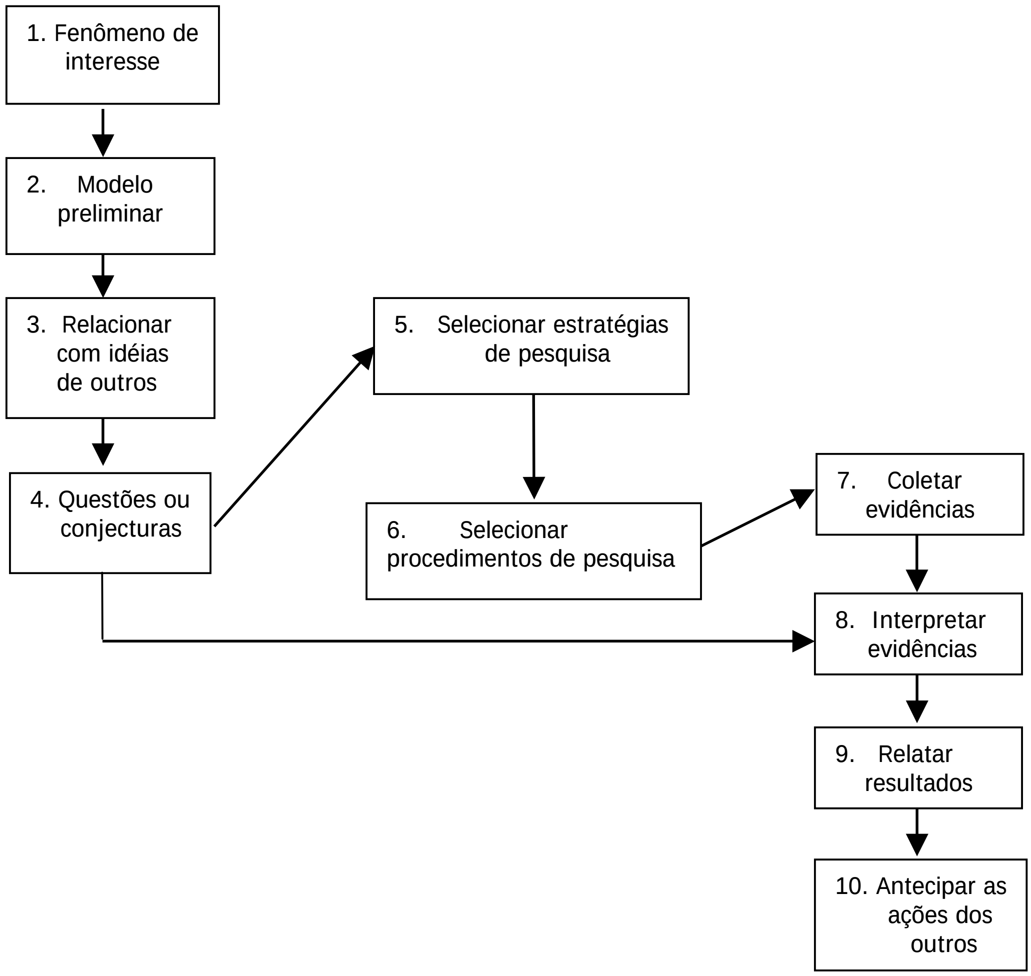
> "formas pelas quais as informações são coletadas, analisadas e relatadas, mas, também, dos muitos tipos de questões tipicamente levantadas e dos princípios e paradigmas sobre os quais os métodos para investigar tais questões são baseados"[5]. (ROMBERG, 1992, p.50)

[5] Tradução de *…way in which information is gathered, analyzed, and reported, but also the very types of questions typically asked and the principles or paradigms upon which the methods to investigate such questions are based.* (p.50)

1.2. O MODELO DE ROMBERG E MINHA PESQUISA NESTE MODELO

Romberg (1992) associa o termo "pesquisar" a um **processo** no qual se realizam atividades não de forma mecânica ou prescrita: "As atividades envolvidas em fazer pesquisa englobam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica".[6] (p.51) Neste sentido o bom pesquisador, assim como um bom artista, deve ser criativo e ousado, não significando, entretanto, que não existam critérios de avaliação e julgamento para o que é considerado um trabalho científico (ou artístico) aceitável.

A partir dessas considerações Romberg (1992) destaca dez atividades que considera essenciais ao desenvolvimento de uma pesquisa salientando que, embora sejam apresentadas seqüencialmente, não necessariamente se realizam nesta ordem e tampouco, na prática, se separam tão nitidamente:



(ROMBERG, 1992, p.51)

[6] Tradução de *The activities involved in doing research embody more characteristics of a craft than of a purely technical discipline*. (p.51)

Nos itens que seguem, apresento alguns esclarecimentos sobre cada uma dessas atividades, tratando de relacioná-las com as ações que nortearam minha pesquisa.

1.2.1. IDENTIFICAÇÃO DO FENÔMENO DE INTERESSE

O termo fenômeno pode ser entendido como "tudo o que é objeto da experiência possível, isto é, que se pode manifestar no tempo e no espaço segundo as leis do entendimento" (FERREIRA,1986). Japiassú e Marcondes (1996) apresentam o significado de fenômeno nos seguintes termos: "tudo o que é percebido, que aparece aos sentidos e à consciência".

A identificação do fenômeno de interesse (atividade 1), ou tema geral da pesquisa, situa a curiosidade do pesquisador e corresponde ao ponto de partida para um trabalho de pesquisa. Ele tem origem no emaranhado de relações que compõem as questões relativas à Educação Matemática e que a constituem um campo de estudos extremamente fértil.

O fenômeno de interesse desta pesquisa é

O ensino de Matemática através da resolução de problemas utilizando computadores.

O interesse e a relevância deste tema são justificados, inicialmente, pela curiosidade e necessidade, trazidas por fatos de minha trajetória acadêmica e profissional, de obter compreensões mais profundas a respeito de minha área de atuação, que é o ensino de Matemática, conforme já foi narrado na introdução. Somam-se a estes, imperativos trazidos pelas demandas e lacunas percebidas na área e que justificam pesquisar sobre tal tema. Esta percepção decorre da análise dos estudos já realizados que são relacionados ao tema desta investigação.

1.2.2. MODELO PRELIMINAR

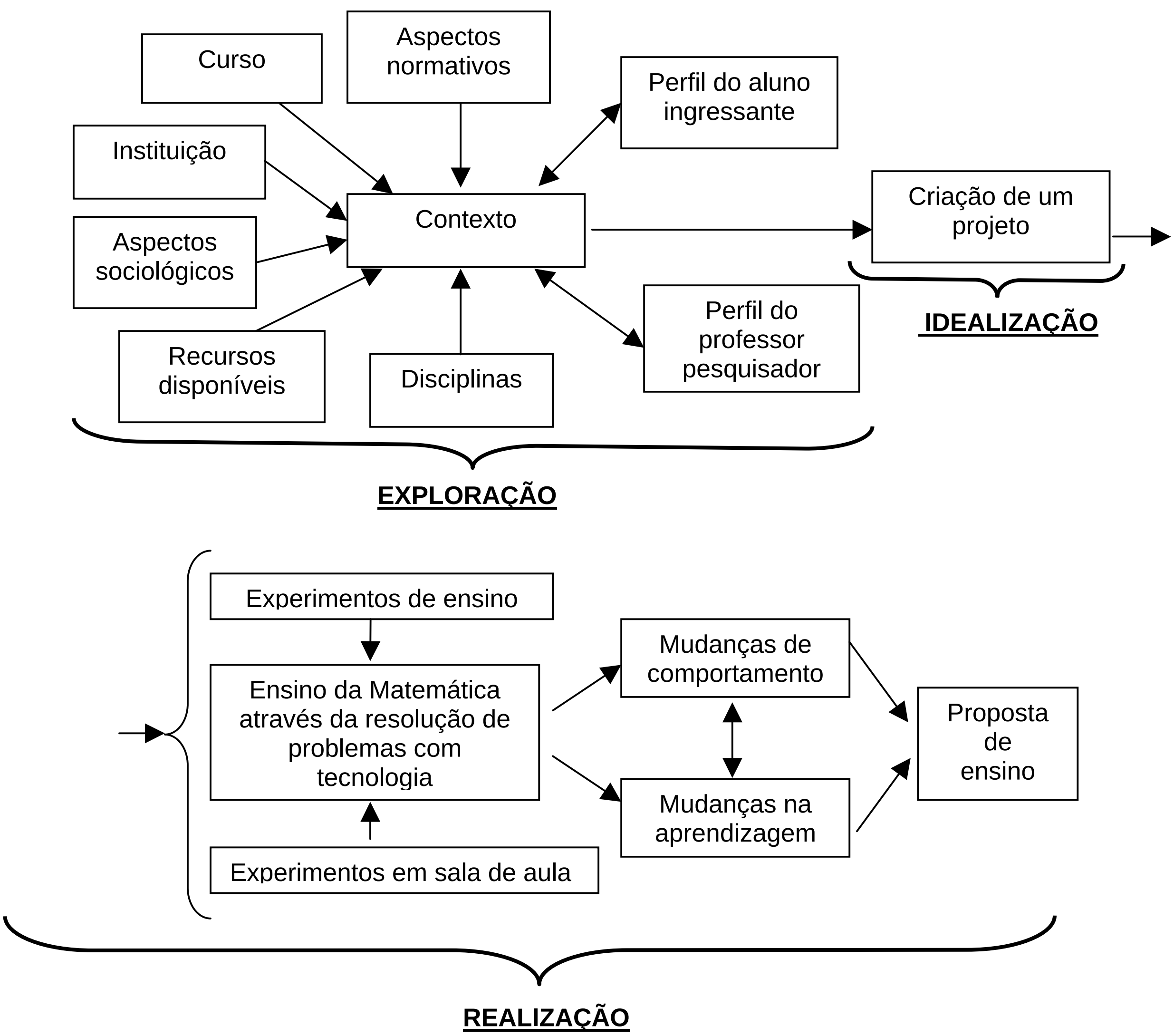
Ao recomendar a construção de um modelo preliminar como uma das atividades (atividade 2) que os pesquisadores devem realizar, Romberg (1992) se distingue de outros autores que tratam do assunto, tornando seu trabalho, neste aspecto, original. O modelo preliminar é um dispositivo heurístico[7] que ajuda a "clarear" um fenômeno complexo e serve como ponto de partida e como orientação para o desenvolvimento do processo de pesquisa. Consiste num esquema onde se indicam as variáveis componentes do fenômeno e as relações entre elas. Variáveis são os elementos que compõem e interferem no fenômeno de interesse.

[7] Heurística: "Que se refere à descoberta e serve de idéia diretriz numa pesquisa, de enunciação das condições da descoberta científica" (JAPIASSÚ; MARCONDES, 1996).

Tal como o nome enfatiza, o modelo **preliminar** reflete a idéia inicial do pesquisador sobre o fenômeno que pretende estudar. Ele poderá ser alterado, e a pesquisa ser reorientada, em virtude de novos e inesperados fatos ou fatores que possam surgir no decorrer da pesquisa.

Para esta pesquisa elaborei o modelo preliminar a seguir, no qual destaco três partes as quais expressam três momentos da pesquisa, a saber: a de exploração, a de idealização e a de realização, não necessariamente disjuntas. Conforme comentado no parágrafo anterior, no decurso da investigação alguns encaminhamentos e procedimentos, realmente, tiveram que ser modificados em relação a esta minha primeira "idéia". A forma como realmente se configuraram será esclarecida na seção 1.2.7.

MODELO PRELIMINAR



Na fase de exploração, a principal tarefa foi caracterizar o contexto da pesquisa, ou seja, tentar abarcar, tanto quanto possível, os elementos constituintes do cenário em que ela foi levada a cabo. Considero salutar remeter o leitor às considerações de Romberg (1992) e de Lüdke e André (1986), já analisadas na seção 1.1 deste capítulo, segundo as quais um dos desafios da pesquisa educacional é compreender e captar as complexas determinações históricas e sociais em que se inserem os fenômenos educacionais.

Na fase de idealização foram preparados as atividades e os experimentos para coleta de evidências, ou de dados, como é também conhecida. Na última fase, a de realização, foram realizados os experimentos, a interpretação das evidências e a elaboração do texto da tese.

1.2.3. RELACIONAR COM IDÉIAS DE OUTROS

Ao "relacionar o fenômeno de interesse com idéias de outros" (atividade 3), conforme diz Romberg (1992), o pesquisador procurará conhecer as pesquisas já desenvolvidas relacionadas ao seu tema. Conhecerá o que outros pesquisadores pensam e quais são suas idéias e concepções teóricas; identificará lacunas de pesquisa e saberá como tais idéias e concepções podem ampliar, explicar ou modificar o modelo preliminar.

Trata-se de conhecer "o estado da arte" e localizar sua pesquisa dentro do espectro daquelas já realizadas no campo de estudo em que ela se insere. Deste modo, o pesquisador irá, também, identificar-se com um grupo científico particular e esta identificação criará referências teóricas e metodológicas importantes à orientação da investigação. O trabalho de buscar referências em outros trabalhos acompanha toda a pesquisa. Um vasto conhecimento de estudos relacionados ao seu tema de investigação permitirá ao pesquisador ter parâmetros para o estudo do fenômeno, particularmente para a interpretação das evidências.

A pesquisa apresentada nesta tese apóia-se, especialmente, em dois campos teóricos: a resolução de problemas e a utilização dos computadores no ensino de Matemática. Assim, os trabalhos envolvendo resolução de problemas ou envolvendo a utilização dos computadores são, certamente, uma referência importante à minha pesquisa. Entretanto, em minha busca por essas referências percebi que são muito poucas as pesquisas que tratam desses dois aspectos simultaneamente, ou seja, que relacionam a utilização do computador a aspectos específicos ligados à resolução de problemas. Por isso, quero crer que se faz necessário desenvolver pesquisa sobre a prática em sala de aula, e analisar como os alunos, imersos num ambiente informatizado de aprendizagem e totalmente voltado à resolução de problemas, manifestam sua "produção matemática", como aprendem Matemática.

1.2.4. Estabelecimento das conjecturas

1.2.4.1. As conjecturas e a pergunta inicial

Baseadas na curiosidade geradora da investigação, isto é, no fenômeno de interesse, serão formuladas conjecturas ou levantadas questões de pesquisa (atividade 4). A orientação das questões no passado ou no presente, em geral, aplica-se melhor a estudos descritivos enquanto que as questões orientadas no futuro são próprias de estudos preditivos.

A respeito do meu fenômeno de interesse, elaborei, inicialmente, as seguintes conjecturas:

- o ensino da Matemática, no curso de Administração de Empresas, através da resolução de problemas promove atitudes de investigação, persistência, autoconfiança e aprendizagem de conteúdos matemáticos;
- o uso de computadores pode favorecer o ensino de Matemática no curso de Administração de Empresas, no sentido de estimular a criatividade e atitudes de investigação, bem como promover a experimentação;
- a inserção dos computadores no ensino da Matemática, no curso de Administração de Empresas, através da resolução de problemas leva aos alunos uma perspectiva mais prática e interessante da disciplina.

Na tentativa de formular uma questão, ou pergunta, de pesquisa que correspondesse às conjecturas apresentadas cheguei à seguinte:

De que forma se modifica o processo de ensino-aprendizagem-avaliação quando se oferece, a alunos do curso de Administração de Empresas, a oportunidade de aprender Matemática através da resolução de problemas utilizando computadores?

Entretanto, o amadurecimento de idéias que experimentei em minha caminhada no empreendimento desta pesquisa me levaram a repensar estas conjecturas e a pergunta de pesquisa. Vale destacar, nesta caminhada, dois "momentos" que foram totalmente determinantes neste amadurecimento: as longas e densas seções de orientação e os estudos e discussões realizados no GPIMEM e no GTERP. Este repensar foi decorrente, também, de uma melhor compreensão a respeito das questões relacionadas à metodologia de pesquisa, compreensão esta construída, especialmente, no decurso da disciplina Metodologia de Pesquisa Qualitativa.

Sigo, deste modo, apresentando algumas dessas compreensões para, em seguida, recolocar minha pergunta de pesquisa.

1.2.4.2. A METODOLOGIA DE PESQUISA QUALITATIVA

Referindo-se aos modelos "alternativos" ao positivismo, para as pesquisas em Ciências Sociais, Alves-Mazzotti (2001) analisa o paradigma qualitativo. Ela destaca que ele engloba uma vasta gama de tradições, cada uma delas com seus pressupostos e metodologias. Procurarei, a seguir, contemplar as características mais gerais e mais freqüentemente apontadas na literatura como sendo as que melhor configuram as pesquisas qualitativas (ALVES-MAZZOTTI, 2001; BOGDAN E BIKLEN, 1994; LÜDKE E ANDRÉ,1986).

1) As pesquisas qualitativas seguem uma tradição compreensiva ou interpretativa, significando que partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores, de modo que seu comportamento não se dá a conhecer de modo imediato, mas precisa ser desvelado.

2) Decorre da primeira, a visão holística dos estudos qualitativos, que parte do princípio de que a compreensão de um fenômeno só é possível a partir da compreensão das inter-relações que configuram um determinado contexto.

3) A tradição compreensiva e interpretativa pressupõe, também, a natureza descritiva dos dados. São realizadas descrições detalhadas de situações, fatos, pessoas e comportamentos observados; citações literais das falas das pessoas, trechos ou íntegras de documentos são freqüentemente registrados.

4) A abordagem indutiva também é uma característica marcante das pesquisas qualitativas. Ela permite ao observador realizar observações mais livres, deixando que padrões e categorias surjam natural e progressivamente durante a coleta e análise dos dados. Os pesquisadores não se prendem a buscar evidências que comprovem hipóteses definidas *a priori*.

5) A fonte direta dos dados nas pesquisas qualitativas é o ambiente natural. Os problemas são estudados no ambiente em que eles ocorrem naturalmente, supondo um contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e o fenômeno que está sendo investigado.

6) O principal instrumento de investigação é o próprio pesquisador. Ainda que alguns pesquisadores se utilizem de gravadores de áudio ou vídeo para registrar os dados, o entendimento que este tem dos registros feitos é o instrumento chave das análises.

7) A preocupação com o processo é que orienta as investigações qualitativas, mais do que com o produto. Ao pesquisador interessa observar como um fenômeno se

manifesta, como se evidencia, nas atividades e interações dentro do contexto do estudo.

A ênfase qualitativa no processo vem sendo apontada como particularmente útil e adequada a pesquisas educacionais. Utilizando-se de uma análise comparativa, Bogdan e Biklen (1994) justificam: "As técnicas quantitativas conseguiram demonstrar, recorrendo a pré e pós-testes, que as mudanças se verificam. As estratégias qualitativas patentearam o **modo** como as expectativas se traduzem nas actividades, procedimentos e interacções diários"(p.49).

1.2.4.3. UMA NOVA PERGUNTA DE PESQUISA E A PERGUNTA DE PESQUISA DEFINITIVA

A partir do entendimento destes aspectos que caracterizam as pesquisas qualitativas e compreendendo sua relevância para as pesquisas educacionais, julguei que o paradigma que melhor atende às expectativas que tenho para este trabalho de investigação é o qualitativo. Ele me possibilitaria adotar uma postura mais aberta na interpretação dos dados coletados, com ênfase na interpretação, e direcionaria meu olhar aos processos, mais que aos resultados. Tentei, então, desprender-me de minhas conjecturas iniciais; desprender sim, pois abandoná-las totalmente seria uma inútil pretensão, uma vez que significaria negar, também, alguns de meus pressupostos existenciais. Modifiquei ligeiramente a redação de minha pergunta de pesquisa, inserindo as expressões "**como se realiza**". Acredito que esta alteração tenha modificado profundamente seu significado, agora evidenciando mais os processos e o tratamento indutivo que pretendi dar à minha pesquisa.

A nova versão de minha pergunta de pesquisa foi

Como se realiza o processo de ensino-aprendizagem-avaliação quando se oferece a alunos do curso de Administração de Empresas a oportunidade de aprender Matemática através da resolução de problemas utilizando computadores?

Ocorreu ainda que, por ocasião do exame de qualificação, as percepções, observações e reflexões desenvolvidas em conjunto com os professores que compuseram a banca, ajudaram-nos a ver que os dados, naquele momento já coletados, dificilmente responderiam à pergunta de pesquisa anterior. Eu precisava direcionar o foco de minha busca e, entre outras decisões, uma foi a de não mais me preocupar com aspectos específicos da área de Administração de Empresas. Acrescente-se a esta decisão, a percepção de que meus dados configuravam situações características de experiências iniciais de utilização do computador no ensino, tanto por parte dos alunos como do professor. Assim, dando espaço ao já destacado tratamento indutivo que caracteriza as pesquisas qualitativas, percebi que os dados apresentavam-se de tal forma que trariam respostas mais apropriadas à seguinte pergunta:

De que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática, quando estão utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções?

E esta é, afinal, a pergunta que orienta esta minha pesquisa, cabendo destacar que, sem ignorar outros elementos constituintes do contexto em que ela foi desenvolvida, meu olhar esteve voltado mais aos alunos.

1.2.5. ESTRATÉGIA GERAL PARA COLETA DE EVIDÊNCIAS

A seleção de uma estratégia geral (atividade 5) bem como a seleção dos procedimentos de pesquisa compõem essencialmente uma parte de idealização da pesquisa. Ela resulta diretamente do fenômeno de interesse, da pergunta de pesquisa e do modelo preliminar. Ao selecionar a estratégia ficará determinado **o que** pesquisar.

A estratégia geral definida para esta pesquisa foi aplicar um projeto de ensino de Matemática através da resolução de problemas utilizando computadores, e analisar suas implicações.

1.2.6. PROCEDIMENTOS ESPECÍFICOS

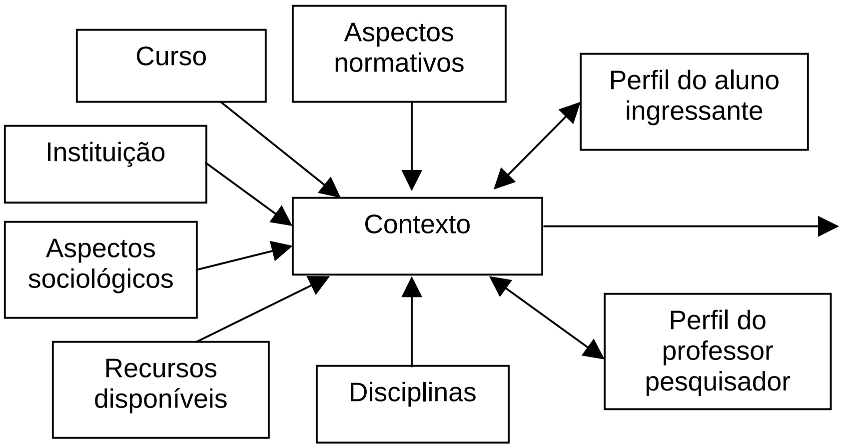
Tendo uma estratégia geral definida, o pesquisador escolherá que procedimentos serão utilizados para levar a cabo esta estratégia, isto é, ele decidirá **como** colocará em prática sua estratégia (atividade 6). Tais procedimentos fazem a ligação entre a estratégia geral e os métodos de pesquisa, tornando exeqüível o que foi idealizado.

Romberg (1992) ressalta que muitos métodos de pesquisa específicos têm sido apresentados na literatura, os quais classifica dividindo em três grupos. Um grupo refere-se àqueles que devem ser utilizados quando as evidências já existem; é o caso da historiografia, da análise de conteúdo (ou análise documental) e das análises de tendência, estes últimos visando principalmente fazer extrapolações. Num outro grupo estão os métodos usados quando as situações existem, mas as evidências precisam ser desenvolvidas; incluem-se aqui, entre outros, as entrevistas e as observações estruturadas, as entrevistas e as observações clínicas, os estudos de caso, a pesquisa-ação, a etnografia. Há ainda um terceiro grupo de métodos que devem ser aplicados quando as situações não existem e, portanto, precisam ser criadas para que as evidências possam ser desenvolvidas; neste grupo estão, por exemplo, os experimentos de ensino e os experimentos comparativos.

Retomarei o modelo preliminar apresentado na seção 1.2.2, desta vez considerando-o por partes, a fim de associar e justificar a escolha desses métodos e procedimentos para cada momento particular desta pesquisa. Ressalto que as fronteiras que separam os conceitos de método e procedimentos são notadamente difusas, de modo que tratarei de ambos, mais ou menos simultaneamente, a seguir.

1.2.6.1. FASE INICIAL DO MODELO PRELIMINAR

A fase inicial, de exploração (cujo diagrama reapresento a seguir), tem como objetivo caracterizar o contexto em que a pesquisa será desenvolvida. Foram utilizados os métodos de análise documental, questionários e entrevista.



1.2.6.1.1. ANÁLISE DOCUMENTAL

A análise documental é utilizada quando as evidências já existem, mas precisam ser selecionadas e organizadas. Aqui foram estudados documentos e trabalhos de pesquisa sobre aspectos da realidade social e profissional do administrador de empresas, leis e regulamentações para os cursos superiores de Administração de Empresas, o projeto pedagógico do curso na instituição e o programa da disciplina Matemática, onde a efetiva coleta de dados se realizou.

1.2.6.1.2. QUESTIONÁRIOS

Este método é utilizado quando as situações existem, mas as evidências precisam ser desenvolvidas. Foram aplicados questionários aos alunos do curso de Administração de Empresas e que cursam a disciplina Matemática II, a fim de delinear seu perfil (Anexo I). Foram constituídos de questões estruturadas a respeito de sua vida escolar, de sua relação com a Matemática, de sua experiência com a utilização de computadores no ensino e de sua opção profissional.

1.2.6.1.3. OBSERVAÇÃO

As informações necessárias para traçar o perfil do professor foram obtidas de uma entrevista e de conversas informais entre ele e o pesquisador. Mas também se pôde inferir importantes elementos sobre seu perfil a partir das observações realizadas na coleta de dados.

1.2.6.1.4. ENTREVISTA

Foi realizada uma entrevista semi-estruturada (Anexo II) com o professor, que permitiu esclarecer algumas de suas idéias e concepções sobre resolução de problemas, sobre o ensino de Matemática e sobre a utilização do computador no ensino de Matemática.

1.2.6.2. FASE INTERMEDIÁRIA DO MODELO PRELIMINAR

→ Criação de um projeto →

Na fase intermediária, de idealização, ocorreu a escolha dos *softwares* a serem utilizados pelos alunos e a elaboração de problemas geradores de novos conteúdos que seriam aplicados aos alunos da já referida turma de ingressantes do curso de Administração de Empresas. São problemas criados pelo pesquisador ou adaptados de livros-texto. Estes problemas tinham a finalidade de introduzir e orientar a compreensão e formação de conceitos como os de função, limites de funções, taxa média de variação, taxa de variação instantânea, derivada, e assim por diante, conforme o programa pré-estabelecido para a disciplina.

Os *softwares* escolhidos, inicialmente, foram o *Excel* e o *Winplot*. O *Excel*, sendo uma planilha eletrônica, possui vários atributos que o tornam um recurso bastante rico. Permite ao usuário relacionar estruturas de caráter numérico, algébrico, lógico e gráfico; possibilita o trabalho com grande quantidade de números e seu funcionamento recursivo constitui-se num atributo bastante interessante.

O *Winplot*[8] é um *software* gráfico, gratuito, muito eficiente no estudo de funções de uma ou duas variáveis, derivadas, integrais, equações diferenciais e outros assuntos. Deste modo, enquadra-se bem aos conteúdos que seriam trabalhados com os alunos, quais sejam: funções de uma variável, limites, derivadas e suas aplicações. É especialmente

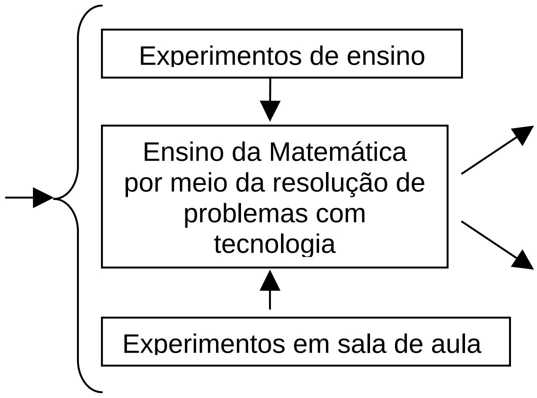
[8] A versão em português, preparada pelo Prof. Adelmo Ribeiro de Jesus, pode ser obtido no endereço http://math.exeter.edu/**rparris**/winplot.html.

simples de ser utilizado e disponível, atualmente, em português (sua versão original foi produzida em língua inglesa).

1.2.7. FASE FINAL DO MODELO PRELIMINAR - COLETAR EVIDÊNCIAS

É neste momento que se recolhem as informações que fornecerão subsídios para tentar responder às perguntas norteadoras da pesquisa. (ROMBERG; 1992)

A coleta de evidências foi esboçada, conforme já foi mostrado na seção 1.2.2., na parte referente à fase de realização (terceira fase) do meu modelo preliminar:



Nesta etapa foram, realizados, primeiramente, alguns experimentos-piloto, os quais consistiram da aplicação das atividades envolvendo resolução de problemas, em sala de aula. Estes experimentos haviam sido idealizados, inicialmente, para serem realizados com grupos pequenos de alunos. Entretanto, uma vez que a coleta de evidências seria feita em sala de aula, optamos, eu e minha orientadora, por realizar também os experimentos-piloto em sala de aula. Eles foram de fundamental relevância, pois apontaram possíveis ou necessários ajustes nos enunciados dos problemas, na orientação para a utilização do computador, bem como nos procedimentos adotados pelo professor na condução da atividade. Também sinalizaram para alguns aspectos que poderão ser relevantes na efetiva coleta e análise das evidências.

Esta coleta (atividade 7) consistiria na aplicação dos problemas em sala de aula e deveria ocorrer no segundo semestre do ano de 2002, ano em que foram realizados os experimentos-piloto. As atividades seriam aplicadas pelo próprio pesquisador, que era o professor da turma de alunos da disciplina Matemática, do primeiro semestre do curso superior de Administração de Empresas.

Entretanto, no momento em que iniciaria a coleta de evidências, por motivos administrativos, a faculdade onde ela seria realizada decidiu não formar a turma e, portanto, não havia tais alunos ingressantes que participariam da pesquisa. Tomo aqui as idéias de Skovsmose e Borba (2000), segundo as quais podem ocorrer três tipos de situação no decorrer de uma pesquisa, das quais a primeira é a que se refere à *situação corrente.* Trata-se de um conjunto de fatos e acontecimentos que configuram o cenário em que está inserida a pesquisa, e que é caracterizado por tomar uma direção não necessariamente imaginada pelo pesquisador.

O pesquisador, então, analisa possibilidades e idealiza encaminhamentos (*situação imaginada*) que possibilitem dar continuidade à pesquisa. Entre algumas alternativas analisadas para dar prosseguimento à minha pesquisa, optou-se por observar as aulas de um outro professor. Tal professor também ministra aulas de Matemática para alunos de Administração de Empresas e também fundamenta seu ensino em resolução de problemas. Ao ser consultado sobre esta possibilidade colocou-se prontamente à disposição. Propôs-se a dividir suas aulas realizando metade de cada uma delas na sala de aula convencional[9] e a outra metade no laboratório de Informática, utilizando o *software Winplot*. E assim foi que ocorreu a redefinição do método de coleta de evidências. Cabe aqui, um paralelo a um terceiro tipo de situação apresentada por Skovsmose e Borba (2000), a *situação arranjada,* a qual refere-se a uma alternativa prática de solução de imprevistos emergentes durante o processo de investigação, possibilidades alternativas assumidas pelo pesquisador.

Estes fatos nos remetem a um recurso bastante presente em pesquisas qualitativas, que é o, assim chamado, *design emergente*. Ele constitui-se na escolha e configuração de métodos e procedimentos de pesquisa no decurso de sua realização. Caracteriza-se por atender às demandas que surgem das contingências e fatos que emergem durante o processo de investigação. Não se trata de adotar o espontaneísmo, mas de compreender a necessidade de estabelecer um relacionamento interativo e flexível, em que os instrumentos se configuram a partir do objeto de pesquisa, evidenciando, isto sim, um certo grau de flexibilidade necessário ao rigor metodológico.

1.2.7.1. OBSERVAÇÃO PARTICIPANTE

O professor da turma foi muito solícito e aberto e explicitou sua satisfação, inclusive em poder contar com o auxílio do pesquisador na implementação das aulas utilizando o *software*. Ficou definido, assim, que eu adotaria a observação participante. De acordo com a classificação elaborada por Romberg (1992), e já comentada na seção 1.2.6, este método é utilizado quando a situação existe, mas as evidências precisam ser desenvolvidas. A situação, neste caso, refere-se à turma de alunos em questão, em suas aulas de Matemática II.

[9] Refiro-me à sala de aula em que os recursos auxiliares de ensino, à disposição do professor, são somente os tradicionais: a lousa e o giz. Doravante será designada, muitas vezes, apenas como "sala de aula" a fim de evitar repetições.

Este é um dos métodos mais utilizados pelos pesquisadores qualitativos. Na observação participante "o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar seu cotidiano [...]" (ALVES-MAZZOTTI, 2001, p.166).

No caso desta pesquisa, ela foi realizada durante um semestre, em quatro horas-aula semanais com a turma. Nas aulas em sala convencional, a aula era conduzida, essencialmente, pelo professor. Nestes momentos eu apenas observava e fazia anotações sobre essas observações. Quando o professor propunha problemas aos alunos eu os ajudava, individualmente ou nos grupos. Esta última era a forma como o professor recomendava que trabalhassem. Nestes momentos o pesquisador desempenhou, então, um papel mais ativo. Também era esta minha conduta nas aulas realizadas no laboratório de Informática, as quais eram totalmente destinadas à resolução de problemas utilizando o *Winplot*.

1.2.7.2. O REGISTRO DAS EVIDÊNCIAS

Para o registro dos dados foram utilizados três recursos: gravações, documentos elaborados pelos alunos e diário de campo. O capítulo 5 desta tese tratará de apresentar essas evidências.

1.2.7.2.1. GRAVAÇÕES

Os diálogos entre os alunos e o pesquisador, durante as atividades de resolução de problemas, com a utilização do computador ou não, isto é, na sala de aula convencional ou no laboratório, foram gravadas. Um mini-gravador foi mantido junto ao pesquisador, que gravava cada diálogo ocorrido entre ele e os alunos. Tais diálogos foram transcritos para posterior análise. Também a entrevista realizada com o professor foi gravada e transcrita e auxiliou sobremaneira na interpretação das evidências.

1.2.7.2.2. DOCUMENTOS

Todos os problemas resolvidos, em aula ou por ocasião das avaliações, na sala de aula ou no laboratório de Informática, eram entregues pelos alunos, ao professor, por escrito. Os alunos também entregaram impresso, um trabalho que o professor propôs para ser feito como tarefa, ou seja, em casa, utilizando o *Winplot*. Estes documentos me foram cedidos, de modo que se constituem, também, em fonte de dados.

1.2.7.2.3. DIÁRIO DE CAMPO

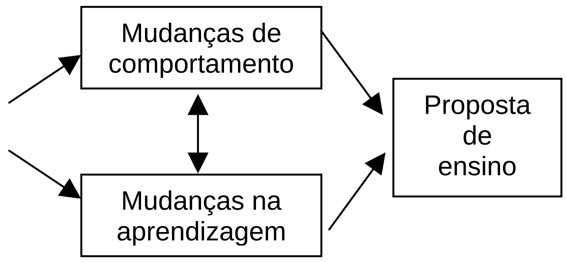
Um extenso e detalhado diário de campo foi elaborado após cada observação. As notas de campo constituem um relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, presencia e pensa durante e após a coleta de evidências. Nele há registro de idéias, reflexões, impressões e percepções, bem como de padrões que emergem dessas evidências.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) "as notas de campo são fundamentais para a observação participante" (p.150). Por isso optou-se por constituir um diário; ele complementa o que foi obtido das gravações dos diálogos.

1.2.8. INTERPRETAR EVIDÊNCIAS

Esta atividade (atividade 8) envolve, entre outras coisas, selecionar, categorizar e organizar as informações que foram coletadas (ROMBERG;1992).

A interpretação das evidências, também chamada análise de dados, iniciou-se durante a coleta de dados, tornando-se mais efetiva durante a redação das notas de campo. Nesta fase, já se percebia algumas regularidades, padrões ou tópicos presentes nas evidências as quais configuraram algumas categorias de análise.



As três últimas variáveis apresentadas no modelo preliminar (diagrama anterior) expressam mais fielmente as conjecturas iniciais que elaborei para esta pesquisa. Nelas o termo "mudanças" expressa intenções de comparação. O método indutivo abraçado *a posteriori*, quando da compreensão de sua conveniência em pesquisas qualitativas, permitiu, contudo, que outros elementos emergissem dos dados que, não menos relevantes, mereceram ser considerados.

Minha significativa experiência ensinando nos moldes ditos tradicionais me leva, natural e inevitavelmente, a fazer comparações e perceber diferenças entre aquele e este novo enfoque de ensino. Entretanto, comparar e estabelecer diferenças não mais representam o eixo central das análises dos dados obtidos.

A análise realmente sistemática iniciou-se após o encerramento da coleta de evidências, não sem antes fazer um intervalo, uma pausa. Assim, alguns poucos meses se passaram, sem que se realizasse qualquer trabalho sobre as evidências coletadas. Isto possibilita que o pesquisador, distanciando-se dos detalhes do campo, possa perceber os dados sob outras perspectivas, ler e desenvolver outras idéias, ganhar entusiasmo renovado pelas evidências. A este procedimento se dá o nome de estranhamento dos dados.

A interpretação das evidências foi feita, finalmente, por triangulação, fundamentada no inter-relacionamento do referencial teórico da pesquisa com os diferentes registros das evidências coletadas (BOGDAN; BIKLEN, 1994), e sempre norteada pelos objetivos e a pergunta da pesquisa. A triangulação, ao combinar e cruzar múltiplos aspectos (pontos de vista, métodos, fontes de dados, etc...) representa um valioso recurso de ampliação das possibilidades de validação dos resultados de uma pesquisa.

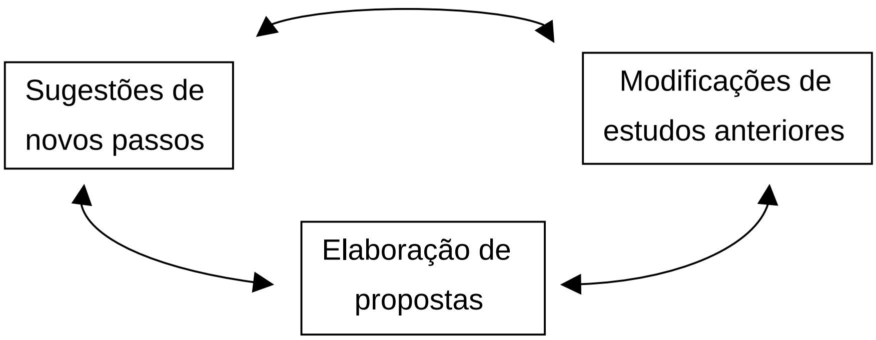
1.2.9. Transmitir os resultados a outros

Ser membro de uma comunidade científica implica na responsabilidade de transmitir aos pares os resultados de suas pesquisas (atividade 9). Comentários, críticas e sugestões são a fonte de novas questões para investigação, de novas idéias, ou mesmo reforçam e complementam idéias.

A participação em grupos de estudo, o GTERP e o GPIMEM, e em eventos científicos, e as discussões realizadas sobre esta pesquisa ou pesquisas afim, em vários momentos do seu desenvolvimento, conforme também ocorreu por ocasião do exame de qualificação, foram determinantes na sua configuração, encaminhamento e amadurecimento. (ALLEVATO, 2001, 2002, 2003)

1.2.10. Antecipar as ações de outros

Comentários e sugestões serão a fonte, também, de novas questões para investigação e são eles que criam, nas comunidades científicas, as "cadeias de investigação" (Romberg, p.53). O diagrama a seguir ilustra este processo:



Além disso, é importante que o pesquisador procure vislumbrar o alcance e perceber as possibilidades e limitações de seu estudo. Ao tratar desta questão Salomon (1999) afirma: "A importância da pesquisa científica se mede pelas mudanças que acarreta em nosso corpo de conhecimentos e/ou pelos novos problemas que suscita" (p.219).

Capítulo 2

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Capítulo 2 - Resolução de problemas

CAPÍTULO 2

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> Isto é, em resumo, a minha esperança para a resolução de problemas. Se nós fizermos o nosso trabalho corretamente, talvez as escolas se tornem lugares onde os alunos realmente aprendam a pensar.
>
> ALAN SCHOENFELD

Conforme relatei na introdução, o interesse por este tema é justificado por fatos de minha trajetória acadêmica e profissional, de aprofundar conhecimentos a respeito de minha área de atuação, que é o ensino de Matemática. Somam-se a estes fatos, a necessidade de detectar lacunas que justifiquem pesquisar sobre tal tema, bem como que enriqueçam minha pesquisa (ROMBERG;1992). Neste capítulo apresento um retrato parcial do que encontrei em minha busca pelo conhecimento das pesquisas já desenvolvidas no âmbito da resolução de problemas. O estudo da literatura relacionada a esse tema trouxe à tona alguns aspectos que procurarei destacar no texto a seguir. O capítulo está estruturado em três partes, começando por aquela em que abordo a importância dos problemas como mola propulsora da atividade e da produção do conhecimento matemático. Essa abordagem conduz a reflexões sobre o que é um problema e qual é a função da resolução de problemas na Educação Matemática. Percebem-se, então, algumas diferentes formas de se conceber a resolução de problemas: como um novo conteúdo, ou seja, ensinar **sobre** resolução de problemas; como aplicação de conteúdos, ou seja, ensinar **para** a resolução de problemas; como um meio de ensinar Matemática, ou seja, ensinar **através** da resolução de problemas. Essas concepções serão analisadas separada e mais detalhadamente na segunda seção. Em seguida, tratarei de algumas questões voltadas mais especificamente à implementação da resolução de problemas em sala de aula. Por fim, tento localizar a minha pesquisa no cenário da literatura apresentada.

2.1. OS PROBLEMAS E A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

2.1.1. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A ATIVIDADE MATEMÁTICA

Nas interações que se realizam em sala de aula entre professor e aluno, ou mesmo nas que ocorrem em situações do dia-a-dia, podemos perceber a forma como, em geral, a Matemática é concebida: como uma ciência exata, cujos resultados infalíveis são estruturados dedutivamente, essencialmente simbólica e abstrata; importante por ser indispensável à solução de problemas diversos que se configuram em outras ciências, nela mesma ou em problemas da vida diária; uma atividade "para poucos", para cuja execução se exige rigor de raciocínio e exatidão!

Entretanto, ao voltarmos o olhar para o processo de construção do conhecimento matemático, notamos que ele é dinâmico, caracterizado por incontáveis momentos em que prevalecem resultados obtidos experimental e indutivamente. Quantos não são os casos, na História da Matemática, em que constatamos a construção de conhecimento a partir da busca pela solução de um problema específico? Muitos resultados matemáticos não teriam sido obtidos não fosse a persistência e criatividade de pessoas motivadas por uma dúvida, por um problema e pela ânsia de resolvê-lo. Não terá sido esse o caso do matemático inglês Andrew Willes, ao demonstrar o Último Teorema de Fermat? A demonstração desse teorema foi um problema que desafiou matemáticos por aproximadamente 350 anos (SINGH,1999).

A História da Matemática está repleta de exemplos da força motivadora que alguns problemas podem ter, de modo que podemos afirmar: a Matemática não é infalível ou inquestionável; não está pronta e totalmente estruturada. Ela se desenvolve pela prática da crítica e da dúvida e move-se a partir de conhecimentos anteriores, em busca de novos conhecimentos necessários à solução de novos ou antigos, mas não resolvidos, problemas. Alguns exemplos podem ser encontrados, na literatura, de estudos que apresentam a resolução de problemas a partir de uma perspectiva histórica. (LESTER, 1994, 1993; GAZIRE, 1988)

Na tentativa de estabelecer um paralelo entre a construção do conhecimento científico e a resolução de problemas no ensino de Matemática, no caso, voltado à modalidade de estudo dirigido, Brasil (1964) afirma:

> Tradicionalmente o problema é empregado, pelos professores, na verificação e na fixação da aprendizagem. Atentando, porém, para a historia das ciências, notamos que o problema antecede invariavelmente as descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas. Por que no ensino da Matemática especialmente, invertemos a ordem natural das coisas?(p.22)

Sob uma ótica mais atual, Santos (2002) analisa as atuais tendências do ensino a respeito da resolução de problemas à luz do construtivismo e afirma que "de uma certa maneira, a idéia construtivista se apóia no próprio processo histórico de construção do conhecimento científico, cujos objetos foram sendo construídos como respostas a problemas específicos" (p.14).

Não se pode negar que a resolução de tais problemas matemáticos exige, também, algum domínio anterior da linguagem matemática, o conhecimento de fatos e a compreensão de algumas estruturas e relações que sustentam a Matemática como área de conhecimento.

Sob o ponto de vista da pesquisa em Educação Matemática, Ponte (1994) reitera que a resolução de problemas constitui-se num interessante foco de investigação porque, entre outras razões, ela envolve processos que são o coração da atividade matemática.

A concepção de Schoenfeld (1989) sobre a atividade matemática é a de que os matemáticos gastam seu tempo dando sentido[10] às coisas. Ele acredita que fazer Matemática é "dar sentido" e tornar-se um matemático inclui internalizar a estética da Matemática; a predileção pela análise e compreensão, por perceber as estruturas e as relações estruturais, ou seja, por perceber como as coisas se combinam.

Bassanezi (2002) salienta que, no processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão da resolução de problemas e da modelagem vem sendo defendida por várias pessoas e um dos argumentos é a de que elas "fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria Matemática em todas as suas facetas."(p.37)

Diante do exposto, entendo que cabe aos educadores matemáticos analisar de que forma a resolução de problemas deve ser inserida no ensino, para que a Matemática se configure aos alunos como algo com sentido, isto é, com uma finalidade compreensível, com os elementos integrados e funcionando "num todo".

2.1.2. O QUE É E O QUE NÃO É UM PROBLEMA (MATEMÁTICO)

Referindo-se à década de 1980, Schroeder e Lester (1989) afirmam que a resolução de problemas vinha sendo a parte do currículo de Matemática sobre a qual mais se escrevia e falava e, ao mesmo tempo, a menos compreendida. Embora o termo "problema" esteja bastante presente no dia-a-dia de pessoas que trabalham com Matemática, percebe-se que, ainda hoje, nem sempre seu uso vem acompanhado de um consciente posicionamento sobre o seu significado.

Ao apresentar os resultados de uma pesquisa realizada entre professores, Thompson (1989) detecta duas concepções presentes nas respostas dadas por eles, sobre o que é um problema. A primeira evidencia a concepção de um problema como uma "descrição de uma situação envolvendo quantidades estabelecidas, seguida de uma pergunta sobre alguma relação entre as quantidades cuja resposta pede a aplicação de uma

[10] Sentido: razão de ser, cabimento, lógica. Fazer sentido: ser compreensível, ser lógico. Ter sentido: ser concebível, ser aceitável. (FERREIRA, 1986)

ou mais operações aritméticas"[11] (p. 235). Nessa visão, considerada limitada pela autora, estão implícitas as noções de que o principal é obter a resposta e, uma vez obtida, o problema está feito, resolvido; de que há uma maneira correta e única de obter a resposta e essa, normalmente, é um número; de que para ter sucesso na resolução de um problema é preciso saber e lembrar o que fazer. A segunda concepção inclui quebra-cabeças, labirintos e atividades envolvendo ilusão de ótica e considera que problemas devem possibilitar uma variedade de abordagens para a resolução; não devem depender só de elementos conhecidos, mas conduzir à busca e descoberta de novas idéias e, em geral, envolvem desafio, diversão e frustração.

Polya (1962 apud HEMBREE; MARSH, 1993, p. 152), expressando sua concepção de uma maneira mais ampla, afirma que "ter um problema significa: buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido mas não imediatamente atingível."[12]

Ainda a este propósito, Wagner (2003) acredita que se tem um problema quando duas características se mostram presentes: (1) há uma necessidade não satisfeita e (2) são descobertos caminhos não óbvios para satisfazê-la. Ele afirma que uma situação sobre a qual se tem controle não corresponde a um problema e diz: "meus problemas me prendem – eles me fazem cativo"[13] (p.612).

Vale apresentar, também, a definição de Dante (2000) para um problema como sendo "qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la" (p.9), e a diferenciação que estabelece entre problema e problema matemático, ao afirmar que esse "é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la". Entre os problemas há os que chama de exercícios, considerando que esses, como o nome diz, constituem-se em recursos para exercitar, para praticar um determinado processo ou algoritmo.

A partir da concepção de que um problema deva ser utilizado no ensino de Matemática como ponto de partida para a aprendizagem, um problema é considerado como "qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm regras ou métodos prescritos ou memorizados, nem há um sentimento por parte dos estudantes de que há um método 'correto' específico de solução" (HIBERT; 1997 apud VAN DE WALLE; 2001, p.42).

[11] Tradução de *[...] description of a situation involving stated quantities, followed by a question about some relationship among the quantities whose answer called the application of one or more arithmetic operations*. (p.235)
[12] Tradução de *"to have a problem means: to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim"* (p.152).
[13] Tradução de *my problems hold me – they make me captive* (p. 612).

Sob esse enfoque é que Onuchic (1999) explicita sua compreensão sobre o que é um problema: "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver" (p.215). E esclarece que "o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória [...]" (p.215).

Concordando com essas últimas, a concepção que assumo nesta pesquisa é a de que uma questão será um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à resolução, mas está interessado em resolvê-la.

Ao analisar a literatura relativa à resolução de problemas observei que, além de diferentes concepções sobre **o que é** um problema, há, também, diferentes concepções sobre **qual é o objetivo** da resolução de problemas no ensino de Matemática. Sigo apresentando, então, a forma como alguns autores explicitam tais objetivos.

2.1.3. Os objetivos da resolução de problemas na Educação Matemática

Importantes pesquisas foram e estão sendo desenvolvidas buscando aprofundar compreensões sobre as implicações e finalidades da resolução de problemas no ensino de Matemática. Os problemas sempre ocuparam, invariavelmente, um lugar de destaque no ensino e nos currículos de Matemática. Entretanto a sua finalidade e outros aspectos relacionados à resolução de problemas passaram por mudanças. Essas ocorreram, principalmente, para tentar acompanhar as diferentes visões sobre o porquê de se ensinar Matemática, em geral, e resolução de problemas, em particular. Estudos há, em que se tentou analisar essas mudanças considerando a forma como a resolução de problemas se fazia presente nos currículos de Matemática (STANIC; KILPATRICK,1989).

George Polya (1980), em agosto de 1944, apresentou uma série de justificativas para o trabalho com resolução de problemas no ensino de Matemática. Colocou a prática de resolver problemas como inerente à natureza de qualquer atividade humana além de considerá-la fundamental para o desenvolvimento da inteligência, que se constitui num dos objetivos da educação.

Dentre outros, Dante (2000) apresenta alguns dos objetivos da resolução de problemas: levar o aluno a pensar produtivamente e desenvolver o raciocínio; muni-lo de estratégias para resolver problemas; dar-lhe oportunidade de se envolver com aplicações da Matemática, de enfrentar situações novas e de adquirir uma boa base matemática. Esse autor classifica os problemas em vários tipos e atribui a cada tipo um objetivo específico, conforme o quadro a seguir:

Tipo	Objetivo
Exercícios de reconhecimento	Levar o aluno a identificar ou lembrar um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade. Ex: Uma centena corresponde a quantas dezenas?
Exercícios de algoritmos	Treinar a habilidade de execução de um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores. Ex: Calcule [(-5+2).7:(-3)]
Problemas-padrão	Fixar fatos básicos e algoritmos vinculando seu emprego a situações do dia-a-dia em que é preciso transformar linguagem usual em linguagem matemática. Ex: Se a idade de José é o dobro da idade de Pedro e a soma das idades é 36, determine a idade de cada um.
Problemas-processo ou heurísticos (A esses ele chama, simplesmente, problemas)	Levar o aluno a pensar, arquitetar um plano de ação e elaborar uma estratégia para chegar à solução. Tais problemas não podem ser diretamente traduzidos para a linguagem matemática ou resolvidos por aplicação automática de um algoritmo. Iniciam o aluno no desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problema. Ex: Se numa reunião há 5 pessoas e cada uma troca um aperto de mão com todos os outros, quantos apertos de mão ocorrerão?
Problemas de aplicação ou situações-problema	Levar o aluno a coletar e organizar dados, matematizar uma situação real do dia-a-dia e resolver o problema utilizando a Matemática. Ex: Precisamos de um mural em nossa sala de aula, mas a escola não pode comprar. Podemos adquiri-lo de outro modo? Como? De que precisamos?
Problemas de quebra-cabeça	Desenvolver a percepção, motivar e desafiar o aluno através da chamada Matemática Recreativa. Ex: Sem tirar o lápis do papel, traçar exatamente quatro segmentos de reta que passem pelos nove pontos abaixo: . . . .

Nesta seção, com freqüência, serão apresentadas classificações de problemas por tipos, muito embora estejamos tratando de seus objetivos. Isso ocorre, na literatura, em função da consideração de que tais objetivos são determinados, em grande parte, pelo tipo de problema proposto e reciprocamente.

Para Schroeder e Lester (1989) a principal função da resolução de problemas deveria ser a de desenvolver a compreensão da Matemática dos estudantes. Eles também advogam que indicações de que os estudantes compreendem (ou compreendem mal ou não compreendem) determinadas idéias da Matemática freqüentemente surgem quando resolvem um problema.

Ao apresentarem suas considerações a respeito da função, ou seja, dos objetivos da resolução de problemas, esses autores salientam que essa função é, essencialmente, determinada pela abordagem que configura a atividade de ensino do professor: ensinar **sobre** resolução de problemas, **para** a resolução de problemas ou **através** da resolução de problemas.

Algumas ferramentas teóricas (categorias, critérios de classificação, etc.) têm sido elaboradas na tentativa de possibilitar uma melhor compreensão e diferenciação do papel que os professores outorgam à resolução de problemas nas aulas de Matemática, a partir de suas concepções sobre o ensino. Contreras e Carrillo (1998) acreditam, inclusive, que, reciprocamente, é muito provável que esse papel defina, em grande medida, a concepção de ensino subjacente. No relato de suas pesquisas esses autores utilizam categorias bem definidas para caracterizar e fazer um paralelo entre quatro tendências didáticas em resolução de problemas, não mutuamente exclusivas, conforme denominaram: tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa. Dentro da categoria relacionada ao sentido da Matemática escolar, um dos indicadores apontados refere-se aos objetivos da resolução de problemas, para cada uma destas tendências:

- tradicional: assimilar e afiançar a teoria aplicando-a;
- tecnológica[14]: principalmente dotar a teoria de um significado pragmático; introduzir um tema, sondar conhecimentos prévios e, algumas vezes, levar ao entendimento da teoria;
- espontaneísta: adquirir conhecimentos e incitar atitudes positivas, para comprometer os alunos com seu processo de aprendizagem;
- investigativa: aprender heurísticas e analisar processos para a construção e formalização de conceitos.

Shimada (1997) também relaciona os tipos de problemas à abordagem de ensino subjacente. Aos problemas tradicionalmente utilizados, ou seja, àqueles que têm somente

[14] Aqui, o termo tecnologia não está associado, conforme é usual, a recursos informáticos. Antes, refere-se a um "conjunto de conhecimentos, especialmente princípios científicos, que se aplicam a um determinado ramo de atividade". (FERREIRA, 1986)

uma resposta correta e predeterminada, ele denomina problemas fechados. E propõe chamar de problemas abertos àqueles que têm várias respostas corretas ou vários métodos para obter a resposta. Estes últimos, segundo o autor, devem ser os primeiros a serem apresentados na abordagem de ensino que chama "abordagem aberta", na qual o objetivo é fornecer oportunidade ao aluno de vivenciar experiências de ensino onde ele possa encontrar "algo novo" no processo.

Também Pehkonen (2003) trata desses dois tipos de problemas apresentando a seguinte caracterização: nos problemas fechados tanto a situação inicial como o objetivo final (resposta) do problema são pré-determinados. Se a situação inicial ou o objetivo final (ou ambos), deixam "espaço" para o resolvedor fazer escolhas, então se tem um problema aberto.

Van de Walle (2001) considera que os problemas abertos devem ser utilizados quando o objetivo é realizar explorações matemáticas. Ele apresenta os critérios de Hashimoto e Becker (1999) segundo os quais os problemas são abertos quando: o processo é aberto (são explorados múltiplos caminhos para a solução), o final é aberto (há múltiplas respostas corretas a serem descobertas), a formulação de novos problemas é aberta (os alunos exploram novos problemas relacionados ao problema dado).

Outras classificações, além das apresentadas aqui, podem ser encontradas nos trabalhos de Penteado Silva (1989) e Gazire (1988).

Em um texto intitulado *Ensino através da Resolução de Problemas*[15], Van de Walle (2001) trata da resolução de problemas como estratégia de ensino. A partir desse ponto de vista, ele afirma que tarefas ou problemas podem e deveriam ser propostos para envolver os estudantes em atividades para pensar sobre e para desenvolver a Matemática importante que eles precisam aprender. Assim como outros autores, Van de Walle (2001) valoriza, também, o potencial avaliativo da resolução de problemas. Segundo ele, essa atividade é uma fonte segura de valiosas informações que permitem ao professor, entre outras coisas, planejar as próximas aulas, ajudar os estudantes individualmente e avaliar seu progresso.

Concordo com os autores Schroeder e Lester (1989) e Van de Walle (2001) quando atribuem à resolução de problemas, a relevante função de avaliação no ensino. Entenda-se avaliação no sentido mais amplo, ou seja, como instrumento indicador de oportunidades para ampliação da compreensão sobre determinado conceito; para percepção da presença de concepções errôneas; para detecção de lacunas no conhecimento, de necessidades específicas e oportunidades de aprender; enfim, como qualquer recurso que permita redirecionar, se necessário, as condutas de ensino como um todo.

[15] Tradução de *Teaching Through Problem Solving*.

Vimos, então, algumas das diferentes formas de abordar a resolução de problemas. Por merecerem maior aprofundamento e pelas importantes implicações no ensino de Matemática, elas serão tratadas separada e mais detalhadamente nas próximas seções.

2.2. CONCEPÇÕES SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

É bastante vasta a literatura de pesquisa em Educação Matemática que trata de resolução de problemas e pode-se perceber, também, que o termo "resolução de problemas" é muito utilizado nos textos e livros-texto de Matemática. Apesar disso, conforme concordam Schroeder e Lester (1989), o significado do termo nem sempre é bem compreendido. Eles perceberam, em seus estudos, três formas de conceber a resolução de problemas: ensinar **sobre** resolução de problemas, ensinar **para** resolução de problemas e ensinar **via** (ou através da) resolução de problemas. (Grifos do autor, p.32)

De maneira diferente, Mendonça (1999) identifica essas concepções de acordo com o que segue:

1) como um **objetivo**, em que se ensina Matemática para resolver problemas;
2) como um **processo**, em que a ênfase está no desempenho e nas estratégias utilizadas pelos alunos;
3) como **ponto de partida**, em que o problema é considerado como um elemento que desencadeia um processo de construção do conhecimento.(Grifos da autora, p.16)

A autora considera que essa última concepção contraria a primeira e abrange, ao menos parcialmente, a segunda e esclarece que, sob essa perspectiva, os problemas são propostos ou elaborados para conduzir à formação dos conceitos antes de sua apresentação em linguagem matemática formal.

Considerando seis categorias de análise – metodologia, sentido da Matemática escolar, concepção de aprendizagem, papel do aluno, papel do professor e avaliação – Contreras e Carrillo (1998) identificaram as já citadas quatro concepções sobre resolução de problemas. No quadro a seguir, são apresentadas algumas características dessas concepções. Elas foram escolhidas entre muitas outras apresentadas pelos autores. Segundo minha leitura, estas são as que melhor caracterizam, sinteticamente, cada uma dessas concepções:

		Concepções			
Categorias	Indicadores	**Tradicional**	**Tecnológica**	**Espontaneísta**	**Investigativa**
Sentido da Matemática escolar	Tipo de problemas.	Problemas monográficos bem definidos. Resolução com processo e solução únicos.	Problemas monográficos bem definidos. Resolução com processo e solução únicos.	Problemas polivalentes que possibilitam modelar, sem um fim conceitual concreto; de processo e solução múltiplos.	Problemas polivalentes, incluindo os abertos. Condições iniciais modificáveis gerando novos problemas; de processo e solução múltiplos.
Metodologia	Quando e como se usam	Ao final dos temas, como aplicação da teoria ensinada.	Ao final dos temas, como aplicação da teoria ensinada.	Como veículo para potencializar o descobrimento espontâneo de noções.	Durante todo o processo como treinamento em unidades flexíveis de aquisição de conhecimento conceitual e procedimental.
Concepção de aprendizagem	Como se aprende.	Ampliando e reforçando um campo conceitual	Aplicando se estruturam conceitos.	Atribuindo significado ao conhecimento.	Participando da construção de redes semânticas.
Papel do aluno	O que faz.	Tenta identificar conceitos e algoritmos a aplicar.	Tenta assimilar os conceitos teóricos aplicando-os; reconstrói processos.	Desenvolve atividades de ensaio e erro.	Aborda o problema como uma investigação.
Papel do professor	Como reparte responsabilidades.	Inicia e protagoniza o processo de forma exclusiva.	Propõe e contextualiza o problema repartindo a função de protagonista com o aluno.	Sugere problemas.	Propõe problemas e envolve os alunos.
Avaliação	O que se avalia.	A aplicação mecânica de conceitos aprendidos.	Identificação e aplicação de algoritmos adequados.	Significado das noções construídas.	Relevância das noções construídas.

De fato, ao analisar o conteúdo encontrado na literatura sobre resolução de problemas, pode-se perceber que existem controvérsias sobre o que é resolução de problemas. Em um estudo em que analisou o conhecimento, crenças, concepções e práticas de três professores de Matemática com relação à resolução de problemas, Ponte (1994) aponta que a existência de diversas e diferentes visões sobre resolução de problemas, entre professores e educadores matemáticos, é uma das razões pelas quais as pesquisas nessa linha se justificam e são tão interessantes. Alguns trabalhos apresentados no *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, realizado em 2001 na Holanda, refletem essa diversidade: Sorvari e Pehkonen experimentaram e analisaram as possibilidades de quatro métodos inovadores de ensino, todos eles baseados em resolução de problemas; Ferri e Kaiser estudaram os estilos de pensamento - visual, analítico ou conceitual - de adolescentes ao resolver problemas que exigiam diferentes estratégias de resolução; Cifarelli e Goodson-Espy investigaram como crenças e concepções matemáticas dos alunos influenciam e sustentam suas ações em resolução de problemas; Kato buscou os efeitos de atividades de ensino baseadas em resolução de problemas no desenvolvimento de habilidades metacognitivas[16]; entre outros estudos.

Observo, entre os trabalhos apresentados até aqui, algumas semelhanças e diferenças. A visão de Schroeder e Lester (1989), quanto a ensinar para a resolução de problemas, está muito relacionada à de Mendonça (1999), como objetivo, e à abordagem tecnológica apresentada por Contreras e Carrillo (1998). Também, o ensino através da resolução de problemas (SCHROEDER E LESTER, 1989) tem convergências com a resolução de problemas como ponto de partida (MENDONÇA, 1999) e com a concepção investigativa de Contreras e Carrillo (1998). Por outro lado, percebo uma diferença bastante significativa entre esse último trabalho e os demais: neste, os autores consideram a resolução de problemas dentro de um âmbito mais amplo de concepção de ensino, isto é, como determinada e determinante da concepção de ensino do professor, enquanto os outros tratam a resolução de problemas em seu escopo específico.

Tomando como referência os pontos de convergência entre os objetivos e as linhas gerais que se apresentam em alguns trabalhos sobre esse tema é possível caracterizar as diferentes concepções a respeito de resolução de problemas, muito embora, estudiosos e

[16] Metacognição refere-se ao conhecimento relativo aos processos cognitivos ou de qualquer coisa relacionada a eles, [...]. Por exemplo, eu me envolvo com metacognição...se noto que tenho mais dificuldade para aprender A do que B, [...], se me ocorre que devo examinar todas e cada alternativa em uma questão de múltipla escolha antes de decidir qual é a melhor delas...Metacognição refere-se, entre outras coisas, a um ativo monitoramento e conseqüente regulação e combinação dos processos relacionados aos objetos cognitivos ou dados nos quais eles se apóiam, geralmente a serviço de alguma (resolução de problema) meta ou objetivo concreto. (SCHOENFELD, 1992, p.347, tradução nossa)

pesquisadores nem sempre se manifestem, explicitamente, sobre a forma como concebem a resolução de problemas no ensino de Matemática, em relação a estes critérios. Essas diferentes concepções não são mutuamente exclusivas, de modo que, em alguns trabalhos se observam características de uma e de outra; tampouco as diferenças entre essas concepções são tão nítidas.

Assim, apresento a seguir três dessas concepções, por considerá-las mais evidentes e mais abrangentes. Elas também foram registradas no trabalho de Schroeder e Lester (1989). Considerando esses grandes objetivos e linhas gerais que orientam a resolução de problemas, elas se referem a:

- ensinar **sobre** resolução de problemas,
- ensinar **para** a resolução de problemas,
- ensinar **através da** resolução de problemas.

Ao apresentar e analisar as características de cada uma delas, separadamente, acredito que ficarão explicitadas, também, as diferenças entre essas concepções.

2.2.1. ENSINAR SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Algumas das diferentes maneiras de conceber a resolução de problemas podem, por vezes, ser associadas a uma filosofia, a uma ideologia mais ampla assumida com respeito ao ensino da Matemática. Ensinar sobre resolução de problemas, que me proponho a discutir nesta seção, corresponde a considerá-la como um novo conteúdo e tem sido associada às opções de ensino feitas após a Matemática Moderna.

Para Lima (1999), o ensino de Matemática deve abranger três componentes fundamentais os quais chama de conceituação, manipulação e aplicações. Ele explica que durante o período da Matemática Moderna, nas décadas de 60 e 70, ocorreu no ensino de Matemática uma forte predominância da conceituação, em detrimento dos outros dois componentes. E, sob essa ótica, a Matemática que então se ensinava nas escolas era mais "[...] um vago e inútil exercício de generalidades [...]" (p.3)

A frustração resultante da comprovação de que o ensino de Matemática, nesses moldes, essencialmente conceitual e caracterizado pelo excesso de formalismo, não atingiu o resultado esperado, foi evidente. O ensino, durante o período em que se assumiu a Matemática Moderna, preocupava-se excessivamente com as abstrações matemáticas e apresentava uma linguagem matemática universal que, embora concisa e precisa, caracterizava-se por adotar uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado, no sentido de que os alunos não conseguiam lhe atribuir significado (ONUCHIC,1999, 2003b;

ONUCHIC; ALLEVATO, 2004). Hoje se sabe que tampouco os professores, em sua maioria, compreendiam tal significado.

O quadro de insucesso configurado levou pesquisadores e educadores matemáticos a buscar alternativas para o ensino de Matemática. Voltaram-se, então, os olhos à resolução de problemas. As heurísticas ganharam força, constituindo-se em listas de sugestões e estratégias gerais, independentes do assunto particular. Elas auxiliavam a fazer aproximações, compreender um problema e dispor, eficientemente, os recursos para resolvê-lo. Portanto, foi sedimentada a crença de que era preciso ensinar os estudantes a resolver problemas ou, o que é o mesmo, ensinar sobre resolução de problemas.

Em 1980, Krulik e Reys lançaram o livro do ano do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)[17], totalmente dedicado a temas relacionados à resolução de problemas, intitulado *Problem Solving in School Mathematics*. Em toda a obra se percebe a forte ênfase que então se dava às heurísticas como forma de orientar os alunos na resolução de problemas. Alguns capítulos, como o capítulo 3 escrito por Schoenfeld, e o capítulo 14 escrito por Musser, destacam tal enfoque inclusive no título: *Heurístics in the Classroom* e *Problem-solving Strategies in School Mathematics*, respectivamente.

É importante observar que coube a George Polya o privilégio de ser o autor do primeiro capítulo dessa obra. Ressalte-se, ainda, que ao longo de todo o livro se pode perceber a forte influência que suas idéias, apresentadas no livro *How to Solve it* (1945), exerciam sobre as orientações para a implementação da resolução de problemas em sala de aula. O livro de Polya (1945) tornou-se referência nesse tema e possui uma tradução em português, relativamente recente, intitulada *A Arte de Resolver Problemas* (1994). Foi nesse trabalho que Polya colocou seu conhecido "roteiro" com orientações sobre como resolver um problema. Tal roteiro está reproduzido na abertura do livro de Krulik e Reys (1980). Dividido em quatro partes, ele indica que devem ser seguidas as seguintes etapas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer um retrospecto para examinar a solução obtida. O livro *How to Solve it* pode ser considerado, talvez, o mais importante exemplo entre os trabalhos com teor essencialmente voltado a ensinar sobre resolução de problemas.

Polya teve, e ainda tem, muitos seguidores. Pesquisadores, autores de livros e professores que seguem essa abordagem (DANTE, 2000; STEWART, 2001), defendem que, para atender às peculiaridades presentes na tarefa de resolver problemas, é

[17] O NCTM é uma organização profissional, sem fins lucrativos. Tem mais de 125 000 membros e é a principal organização para professores de Matemática nos níveis K-12 (nos EUA o ensino obrigatório corresponde aos, assim denominados, *prekindergarten* até *grade* 12, pré-primário até a escola secundária).

necessária a adoção de estratégias que devem ser utilizadas a fim de se ter uma orientação especifica de como se resolve um problema, ou seja, ensinam a resolver problemas, ou ainda, parafraseando Schroeder e Lester (1989), "ensinam sobre resolução de problemas."

Essa concepção pode ser percebida no trabalho de Thompsom (1989), no qual sugere que a resolução de problemas deva ser mais um conteúdo a ser ensinado. Esse trabalho, entre outros desenvolvidos e escritos nesse período, traz em suas entrelinhas a expressão da frustração que resultou do ensino de Matemática nos moldes da Matemática Moderna. Além disso, a orientação no sentido de fazer da resolução de problemas o foco da Matemática (NCTM,1980) escolar também não produzira os bons resultados esperados. Iniciava-se uma fase em que se esboçavam linhas para mudanças mas, apesar disso, Thompsom (1989) afirma que a resolução de problemas ainda era, senão a única, a melhor solução para os problemas com o ensino de Matemática. No artigo, a pesquisadora trata das dificuldades em relação a esse tema e reitera as idéias de Schoenfeld (1985) segundo as quais as razões para a complexidade em aprender e ensinar resolução de problemas são devidas às interconexões que o aluno precisa estabelecer entre:

- seus recursos matemáticos, por exemplo o conhecimento de fatos, conceitos e procedimentos;
- heurística, ou seja, métodos e regras de invenção e descoberta matemática;
- controle dos mecanismos necessários para coordenar esses recursos e métodos;
- crenças dos alunos sobre a Matemática, em geral, e sobre a resolução de problemas, em particular; e,
- a variedade de fatores afetivos e contextuais que envolvem a resolução de problemas.

Especialmente os segundo e terceiro itens, entre os cinco apresentados pela autora, nos remetem à abordagem de resolução de problemas em que se evidenciam as heurísticas. A autora ainda ressalta que se deve buscar respostas à seguinte questão: como ajudar os alunos em cada um dos aspectos anteriores e como ajudá-los a estabelecer a necessária interconexão entre eles? Ainda nesse mesmo trabalho, Thompson (1989) manifesta sua concordância com as idéias dominantes, nessa época, de que não se pode esperar progressos em resolução de problemas enquanto se ensina outras coisas, ou seja, é preciso ensinar a resolver problemas.

Em Thompsom (1989), a primeira concepção percebida entre os professores participantes de sua pesquisa insere-se nessa linha, pois sugere que, para ter sucesso na resolução de um problema, é preciso saber e lembrar o que fazer. Para saber e lembrar o que fazer é preciso aprender antes a fazê-lo.

Em seu livro, Dante (2000) afirma que "ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos" (p.30). Assim, considera que resolver problemas é uma das coisas, entre outras, que o professor deve ensinar aos alunos, ou que os alunos devem aprender. Estas outras coisas incluem ensinar conceitos, habilidades e algoritmos. Com isso, o autor deixa claro que a habilidade de resolver problemas não se fará presente ou se desenvolverá como conseqüência natural da aprendizagem de conteúdos matemáticos, conforme muitos acreditam, ou seja, que o aluno que domina os conteúdos não é, necessariamente, um bom resolvedor de problemas. Ele ressalta essa crença acrescentando que a resolução de problemas não constitui "um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamento que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos". Desse modo, considera a resolução de problemas como algo peculiar a ser ensinado, ou seja, que ao professor cabe a função de ensinar, também, a resolver problemas.

Dentro desse espírito de ensinar a resolver problemas, autores de livros didáticos recomendam a adoção de estratégias que devem ser ensinadas na resolução de problemas. Dante (2000) nos remete a George Polya (1994) apresentando um resumo das idéias desse estudioso que tem sido considerado, talvez, o mais forte representante dessa concepção. Nos itens que compõem este resumo evidencia-se a visão de que a resolução de um problema deve ser realizada através de estratégias próprias e bem definidas. O resumo traz em sua estrutura o modelo de quatro fases, consideradas por Polya como essenciais na resolução de problemas, caracterizando-se por apresentar uma seqüência de passos a serem seguidos para chegar à solução de qualquer problema. Ademais, por considerar importante que se conheça algumas estratégias específicas para a resolução de problemas, Dante (2000) apresenta, comenta e exemplifica estratégias como: tentativa e erro organizados, procurar padrões e generalizações, resolver primeiro um problema mais simples, reduzir à unidade e fazer um caminho inverso.

Também Gazire (1989) analisa várias das idéias de Polya acerca das ditas heurísticas e explica que, na Educação Matemática, o trabalho com resolução de problemas como novo conteúdo pode ser considerado como uma prática comentada desse tema. Ela lista algumas características desta concepção: munir o aluno de princípios gerais que emergiram da análise e observação de pessoas bem ou mal sucedidas em resolução de problemas; estudo do problema pelo problema, independente do conteúdo; estudo e agrupamento de estratégias para facilitar a resolução de problemas; preparação do aluno para escolher estratégias apropriadas a cada caso; pressuposição de que o aluno já domina o conteúdo.

Um dos problemas que se observou no ensino de Matemática, em que a resolução de problemas era baseada na adoção e domínio de estratégias, é o fato de que muitos entenderam que esse domínio seria atingido pela repetição. No ensino por repetição o aluno era submetido a longas listas de problemas, semelhantes uns aos outros, através dos quais o aluno treinava uma determinada técnica ou estratégia de resolução. Tais listas, constituídas de problemas do mesmo tipo e que podiam ser resolvidos de modo semelhante, visavam promover a fixação do caminho adotado para se chegar à solução. Ademais, se o aluno repetisse, nas avaliações, o que o professor havia feito, concluía-se que o aluno tinha aprendido (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).

Quanto a este aspecto, vale lembrar que a repetição de uma estratégia ou técnica operatória, mesmo que realizada corretamente, não garante a compreensão do conceito ou conteúdo matemático envolvido. Além disso, apesar de ter representado, em grande medida, uma reação ao que se praticava com a Matemática Moderna, entendo que as estratégias ensinadas dentro desta concepção, de ensinar sobre resolução de problemas, embora sob nova forma, também se apresentam imbuídas de um certo caráter genérico que tanto foi criticado na Matemática Moderna. Enquanto essa buscava estruturar toda a Matemática a partir da teoria dos conjuntos, no ensino sobre resolução de problemas estruturou-se a atividade matemática com base em estratégias, também mantendo as generalidades, desconsiderando as aplicações e desvinculando os problemas de seu contexto específico. Os conteúdos continuam sem sentido para o aluno, que é privado da oportunidade de descobrir por si mesmo.

2.2.2. ENSINAR PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O já citado trabalho de Thompson (1989) constitui-se num exemplo de que diferentes concepções sobre resolução de problemas muitas vezes se fazem simultaneamente presentes. Nele lê-se, em alguns pontos, a expressão "ensinar para a resolução de problemas"[18] utilizada pela autora para designar uma abordagem que envolve, além de propor problemas para os alunos resolverem, ajudá-los a utilizar e relacionar os recursos matemáticos que conhecem com os métodos de resolução e a coordená-los com fatores afetivos e contextuais.

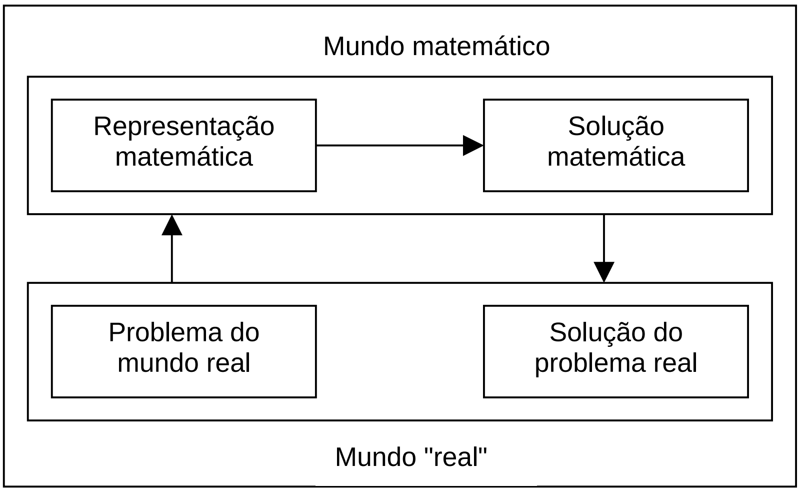
Essa é a visão que considera a Matemática como utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo. Nessa concepção o professor concentra-se no modo como a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas.

[18] Tradução de *teaching for problem solving*. (p.233)

Ele se preocupa com a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto para problemas em outros contextos, ou seja, ele ensina para a resolução de problemas.

Um estudo desenvolvido por Penteado Silva (1989), entre professores de 5ª série do 1º grau, revelou que a maioria deles apresenta os problemas após desenvolvida a parte teórica referente a um determinado tópico, de fato como aplicação de conteúdos.

Um grande perigo da adoção dessa visão é que ela pode levar a configurar a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade de cálculo ou de algum algoritmo (SCHROEDER; LESTER, 1989; GAZIRE, 1988). Portanto, de acordo com essa visão, a Matemática freqüentemente é ensinada separada de suas aplicações. Isto faz com que esse modelo seja melhor aplicado a problemas rotineiros, uma vez que problemas não rotineiros exigem mais do que um único conceito, operação ou estratégia para a sua resolução. Eles, em geral, requerem interpretação, transferência de conhecimentos e elaboração de conjecturas. A concepção da resolução de problemas como aplicação de conteúdos, considerada simplista pelos autores, pode ser representada pelo seguinte diagrama:



(SCHROEDER E LESTER, 1989, p.35)

É possível perceber que a concepção que ora descrevemos se refere à tendência que Contreras e Carrillo (1998) denominaram tendência tecnológica na resolução de problemas. Nela, os problemas apresentam-se como questões propostas ao final dos temas e como aplicação da teoria desenvolvida, ou seja, a resolução de problemas é utilizada para dotar a teoria de um significado prático. Nesse contexto, o aluno capta, repete estilos e aceita processos e resultados; sua atividade se limita a tentar assimilar os conceitos teóricos aplicando-os e reconstruindo processos. O professor propõe e contextualiza o problema, espera e corrige as respostas dos alunos, oferece chaves semânticas explícitas e implícitas e, finalmente, expõe seu processo de resolução como o mais correto. A avaliação é, portanto, um recurso sancionador em que os processos são considerados adequados ou não, de acordo com o que foi previsto pelo professor.

Van de Walle (2001) dá a esse tipo de abordagem de ensino o nome de paradigma do *teach-then-solve,* referindo-se à abordagem em que há uma nítida separação entre o que é ensinar Matemática e o que é resolver problemas, realizados nessa ordem.

Tal compreensão é compartilhada por Santos (2002). Ele assevera que nessa abordagem, freqüentemente o professor inicia comunicando o novo conteúdo, mostrando, em seguida, algumas aplicações através de exemplos. Segue-se, então, uma bateria de exercícios em que o aluno deverá aplicar o novo conhecimento; são os chamados exercícios de fixação.

Brasil (1964) dá a essa forma de ensinar o nome de ensino "atomístico": consiste em utilizar muitas aulas ensinando aos alunos os "átomos" necessários à compreensão de um conteúdo maior ou à solução de um problema, ambos posteriores àquelas aulas. Ressaltam-se primeiramente os aspectos lógicos para, depois, aplicar o conteúdo à resolução de problemas. Tais problemas são empregados como um meio de verificar se o aluno aprendeu a aplicar a teoria, ou como exercício para a fixação da aprendizagem.

Nas considerações que apresenta sobre as aplicações da Matemática, Lima (2000) advoga que correspondem a empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, elaborar conclusões ou previsões em problemas que vão desde situações simples do dia-a-dia até questões mais sutis relacionadas a outras áreas científicas, tecnológicas ou sociais. Ele considera que "[...] as aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino de Matemática é tão difundido e necessário [...]" (p.2), e acrescenta que, da forma como entende, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas. Ao analisar o papel que os exercícios de manipulação desempenham na resolução de problemas, ele reconhece que o manuseio eficiente de expressões numéricas e símbolos favoreça a formação de hábitos mentais desejáveis a quem faz Matemática. Tais exercícios, segundo ele, são imprescindíveis, entretanto precisam ser, entre outras coisas, comedidos e, sempre que possível, úteis ao emprego posterior, ou seja, passíveis de aplicação.

Lima (2000) reforça, ainda, a grande importância que atribui à aplicação dos conteúdos matemáticos na resolução de problemas quando afirma que "encontrar aplicações significativas para a matéria que está expondo é um desafio e deveria ser uma preocupação constante do professor" (p.5).

Com certeza, os usos e aplicações da Matemática merecem a atenção do professor e alunos, entretanto, a Matemática não pode ser ensinada como um acessório, subordinada a seus campos de aplicação. Os conceitos, as relações entre eles e os princípios que os unificam devem ser compreendidos.(ONUCHIC, 1999, 2003a; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004)

Entendo que esta forma de considerar a resolução de problemas ajude a tornar o ensino de Matemática mais interessante e dotado de sentido para os alunos. Porém pode também favorecer, nos alunos, a formação de uma concepção de Matemática que considero limitada: a de que a Matemática é "utilitária", ou seja, de que ela sempre tem (ou deveria ter) aplicação imediata. As limitações desta visão a respeito da Matemática, da forma como entendo, ocorrem por duas razões: porque limita a atividade do aluno à resolução de problemas rotineiros, uma vez que os problemas devem exigir a aplicação da teoria matemática já supostamente aprendida pelos alunos; e, também, porque ignora o potencial formador da Matemática, no tocante ao desenvolvimento do raciocínio, da capacidade de abstrair, relacionar, representar, tomar decisões e, por que não, criar.

2.2.3. Ensinar através da resolução de problemas

Ocorre que o intenso trabalho desenvolvido na década de 80, em torno da resolução de problemas, não proporcionou a melhora esperada e apresentou incoerências. A "falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de 'resolução de problemas ser o foco da Matemática escolar' " (SCHROEDER E LESTER,1989), conforme havia sido recomendado, para os anos 80, no documento Uma Agenda para a Ação. (NCTM, 1980)

Emergem, então, idéias sobre a possibilidade de considerar a resolução de problemas como um meio de ensinar Matemática. Nessa época, elas vieram associadas à retomada das idéias do construtivismo, segundo as quais os estudantes não mais são considerados como recipientes vazios a serem preenchidos, através da aprendizagem, com informações fragmentadas e desconexas. Antes, são seres pensantes aos quais deve-se proporcionar, através do ensino, oportunidades de interpretar situações ou problemas e de relembrar conhecimentos anteriores a fim de construir novos conhecimentos. (ONUCHIC,1999, 2003a; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004; SANTOS, 2002)

Essa visão é, de certa forma, compartilhada por Campbell (1996). Em seu trabalho, apresentado no Oitavo Congresso Internacional sobre Educação Matemática, realizado na Espanha, ela ressaltou, entre outras idéias, que construir conhecimento a partir de conhecimentos anteriores é uma das características do ensino nos moldes do construtivismo.

Ao tratar da influência das idéias construtivistas no ensino de Matemática, Santos (2002) relaciona a resolução de problemas aos processos históricos de construção do conhecimento científico e afirma que

> "esse modelo coloca o aluno na situação de alguém que precisa resolver um certo problema mas que não possui a ferramenta necessária (ou mais econômica) para fazê-lo; nessa situação, não existe outra solução, para o sujeito, que [não seja] construir essa ferramenta que permite a resolução de seu problema, numa situação análoga àquela vivida no processo de construção dos conceitos científicos." (p.14)

Abordando essa concepção de ensino, a qual chamam "ensino via resolução de problemas", Schroeder e Lester (1989) reforçam que ela seja considerada não somente como um dos objetivos de se ensinar Matemática mas, principalmente, como um meio de fazê-lo. Ao analisar os aspectos relevantes das diferentes maneiras de abordar esse assunto, eles ressaltam que o ensino via resolução de problemas é a abordagem mais coerente com as recomendações do NCTM, segundo as quais:

(1) habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas,
(2) o desenvolvimento de processos de pensamento de ordem superior deve ser estimulado através de experiências em resolução de problemas, e
(3) o ensino de Matemática deve ocorrer, por investigação orientada, em um ambiente de resolução de problemas.

No trabalho de Thompson (1989), há um relato das noções emergentes nas falas dos professores que participaram de um curso de verão em que a abordagem foi a resolução de problemas para ensinar Matemática. Foram destacadas as seguintes noções: da resolução de problemas como um processo geral para gerar conhecimento matemático; de que ela envolve busca e descoberta de padrões e regularidades, elaboração e teste de conjecturas e generalizações; de que é uma atividade em que uma estratégia muito usada é a descoberta indutiva e, ademais, que reforça a necessidade da prova matemática nessas generalizações do conhecimento matemático.

Defendendo que o ambiente de sala de aula de Matemática deva propiciar aprendizagem com sentido, Schoenfeld (1989) apresenta algumas experiências de outros pesquisadores, realizadas com alunos, envolvendo resolução de problemas, e desenvolve análises segundo duas suposições. A primeira considera a natureza[19] do ensino-aprendizagem da Matemática escolar como formada por fenômenos culturais e cognitivos, de modo que os dois não são separáveis. A segunda, sobre a natureza da Matemática,

[19] Natureza: força ativa que estabeleceu e conserva a ordem natural de tudo quanto existe. (FERREIRA, 1986)

supõe que no centro dessa natureza, fazer Matemática não só pode como deveria ser um ato de fazer sentido e, além disso, que os fatos e procedimentos que os alunos aprendem no ensino da Matemática deveriam ser um meio para um fim e não um fim em si mesmo.

Desenvolvendo sua análise sobre aspectos culturais e cognitivos, Schoenfeld (1989) afirma que as salas de aula são meios sociais, são microcosmos culturais, onde conjuntos de crenças e valores são perpetuados pelas práticas e rituais do dia-a dia. Se é intencional ou não, o fato é que a percepção que os estudantes têm sobre a que se refere a Matemática, é determinado pela cultura da Matemática escolar, pelo ambiente de aprendizagem. Ele explica que a prática da sala de aula, através da rede de atividades de todo dia, constitui a cultura matemática da sala de aula, ou seja, uma microcultura da cultura matemática. Uma observação que o autor considera importante é que o fato de "dar sentido" é contextualmente limitado e definido em um microcosmo pelas práticas da microcultura.

Um exemplo, tão típico quanto genérico, é o das longas listas de problemas propostas pelos professores aos alunos, sobre um determinado assunto matemático. Muitas vezes se verifica que os alunos automatizam procedimentos de tal modo que se, entre tantos, um determinado problema exigir deles um encaminhamento diferente, eles não são capazes de perceber. Os alunos simplesmente repetem, naquele problema, os mesmos procedimentos que vinham utilizando nos anteriores e produzem resultados incorretos; não param para pensar sobre cada problema individualmente, não atribuem sentido ao que lêem e ao que fazem.

Esse exemplo conduz à constatação de que dominar os procedimentos formais da Matemática é diferente de aprender Matemática que, por sua vez, é diferente de pensar matematicamente. Da forma como entende Schoenfeld (1989), os alunos devem ser levados a essa terceira atitude, ou seja, a de pensar matematicamente. Ele ressalta que aprender a pensar matematicamente envolve tanto dominar as ferramentas matemáticas (fatos e procedimentos) e desenvolver a compreensão de que a Matemática é uma atividade de dar sentido, quanto o hábito de usá-la desse modo. Que fazer Matemática é dar sentido às coisas, é tomar elementos e estruturas aparentemente matematicamente separados e perceber como se relacionam.

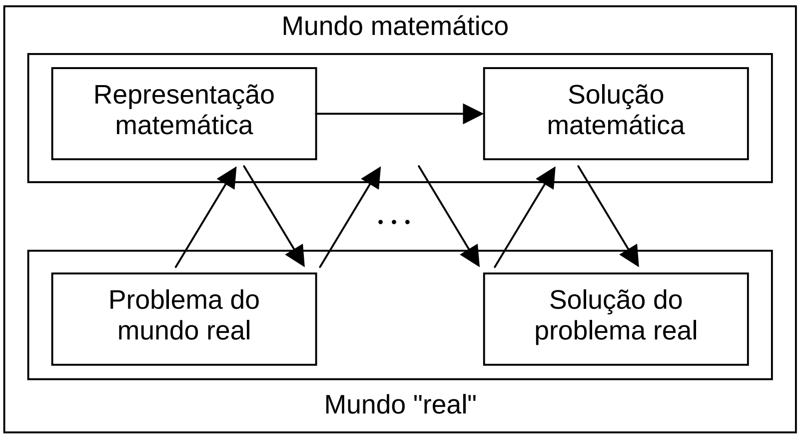
A esse propósito, num estudo em que analisou alguns aspectos que dificultam a resolução de problemas, Noddings (1989) apontou a falta de sub-habilidades de cálculo por parte dos alunos. Porém ele argumenta que a constatação dessa falta não deve ser usada como argumento para submeter os alunos a exaustivas listas de exercícios repetitivos, até que atinjam um determinado nível de competência, antes de apresentar-lhes a possibilidade de resolver problemas. Exercícios prévios de cálculo podem ser realizados a fim de que os alunos desenvolvam competências necessárias à compreensão de certos conteúdos. O problema é realizá-los tanto, que se tornem um fim em si mesmos, configurando-se aos alunos como, verdadeiramente, sem sentido.

Segundo Noddings (1989), a percepção do tipo de sub-habilidades necessárias exige do professor uma visão à frente, uma análise dos problemas e dos novos conceitos que serão ensinados, de modo que as sub-habilidades básicas possam ser identificadas e ensinadas ou revisadas eficientemente. Então, quando o professor chegar ao "grande tópico", os alunos perceberão o que é mais importante e o que é auxiliar ou secundário.

Também Campbell (1996) trata desse aspecto colocando que é importante o professor procurar determinar de que conhecimentos anteriores o aluno dispõe a fim de saber o que precisa de menor atenção e que "lacunas" de conhecimento existem, que precisam ser preenchidas. Ela enfatiza que a constatação da falta de conhecimentos anteriores não deve ser usada como justificativa para limitar a oportunidade de os alunos aprenderem algo mais.

Pensar matematicamente é um dos aspectos destacados também no estudo comparativo apresentado por Schroeder e Lester (1989). O ensino para a resolução de problemas, segundo entendem, limita a atividade matemática do aluno à resolução de problemas cujas soluções são encontradas simplesmente seguindo o modelo de um problema resolvido como exemplo pelo professor. Vários problemas semelhantes são resolvidos, na maior parte das vezes, corretamente, bastando para isso que o aluno escolha os números no enunciado e aplique uma determinada operação ou técnica operatória já conhecida. Esse tipo de atividade nem sempre exige do aluno pensamento matemático. E, se o aluno percebe que um determinado problema é diferente do exemplo dado, então se sente perdido e incapaz de resolvê-lo.

Schroeder e Lester (1989) elaboraram o diagrama a seguir para representar sua compreensão sobre como se realizam os processos de pensamento quando problemas não rotineiros são resolvidos e quando o ensino via resolução de problemas é adotado.



(SCHROEDER E LESTER, 1989, p.36)

Nesse modelo, conhecimentos estão em construção, isto é, novos conteúdos e processos matemáticos estão sendo aprendidos ao mesmo tempo em que são confrontados com conhecimentos já adquiridos. Nele os alunos vivenciam experiências mais ricas de aprendizagem da Matemática pois ela é autogerada em vez de ser imposta pelo professor ou pelo livro texto.

Cabe, neste momento, apresentar as palavras de Santos (2002) referentes à aprendizagem:

> a aquisição de novos conhecimentos está estreitamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo; em matemática costumamos dizer que o aluno aprende pela resolução de problemas, e não escutando o professor relatar esse objeto em sua aula (p.14).

Ele nos apresenta o seguinte esquema:

Primeiro momento: Permite que o aluno invista seus conhecimentos anteriores.	⇨	**Segundo momento:** Permite que o aluno tome consciência da insuficiência desse conhecimento.	⇨	**Terceiro momento:** Permite que o aluno CONSTRUA novos conhecimentos .

(SANTOS, 2002, p.15)

Santos (2002) explica que, nesse modelo, a estratégia consiste em colocar o aluno diante de um obstáculo que gerará um conflito. Esse, por sua vez, é gerado pela constatação de insuficiência e/ou de contradições entre antigos conhecimentos e a situação que lhe é apresentada, a qual chama situação-problema. Ele será "forçado" a criar mecanismos, a construir conhecimento para resolver a situação. Assim, a responsabilidade pela construção de novos conhecimentos é colocada nas mãos do aluno.

A partir dessas idéias e buscando uma compreensão mais ampla, retomamos as idéias de Schoenfeld (1989): cada sala de aula de Matemática deveria, a seu próprio modo, ser um microcosmo de certos aspectos da cultura matemática; um ambiente no qual os rituais e práticas do dia-a-dia tornem natural o pensar matematicamente. Os alunos deveriam ser conduzidos a fazer Matemática, a construir definições e resultados a partir de conhecimentos anteriores e das discussões entre eles ao invés de recebê-los prontos. Um conjunto de valores relacionados ao "fazer matemático", a crenças e predileções, pode ser induzido e reforçado por rituais e práticas nas quais os alunos se engajem, criando um ambiente de sala de aula norteado por uma cultura de "dar sentido".

Analogamente, Van de Walle (2001) analisa as implicações do paradigma do *teach-then-solve* em que se separa o ensino de Matemática da resolução de problemas, e adverte que ao fazer essa separação separa-se, também, a Matemática do "fazer Matemática". Da forma como ele entende, isso não faz sentido, uma vez que idéias matemáticas são resultados de experiências com resolução de problemas, e não o contrário.

Segundo nos parece, as idéias de Campbell (1996) acerca do construtivismo e do ensino de Matemática estão de acordo com essas concepções. Segundo a autora, os conceitos matemáticos devem ser examinados em termos de resolução de problemas para que sejam significativos, levando-se em conta que Matemática é parte invenção e parte convenção. Além disso, afirma que mesmo problemas abstratos podem ser significativos se o aluno compreende o problema e realmente se empenha em sua resolução.

Tais considerações nos conduzem às compreensões de Onuchic (1999, 2003a) segundo as quais a resolução de problemas deve ser adotada como uma metodologia de ensino, no sentido de que

> o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal (p.207).

A autora recomenda que o ensino de Matemática deve ocorrer em um ambiente caracterizado pela investigação, e que essa deve ser orientada pela resolução de problemas. Segundo esse enfoque, o ponto de partida das atividades matemáticas deixa de ser a definição e passa a ser o problema, de forma que "a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem." (p.215)

Relacionada a essa visão está a tendência investigativa apresentada por Contreras e Carrillo (1998) na qual o aluno aborda um problema como uma investigação. O problema tem caráter instaurador da aprendizagem; resolvem-se problemas durante todo o processo de aprendizagem dentro de um âmbito flexível de aquisição de conhecimento conceitual e procedimental. Favorece, ao aluno, a construção autônoma do conhecimento através de situações em que o aluno é capaz de criar e ampliar sua capacidade de resolver problemas.

Mesmo entre os matemáticos, cuja prática de ensino em geral reflete a forma como tradicionalmente concebem a Matemática - como uma seqüência de definições, teoremas, exemplos, aplicações - também há os que se manifestam nesse sentido. Lima (1999) reflete sobre a necessidade de buscar equilíbrio no currículo, através da consideração de três elementos fundamentais - conceituação, manipulação e aplicações. Em seu artigo, esse autor deixa clara sua opinião sobre os males causados pela supervalorização da manipulação. Ele reitera que ela é, dos três componentes, o mais presente em muitos livros adotados nas escolas, muito embora não exija criatividade, imaginação ou capacidade de raciocínio abstrato. E complementa: "Cada novo capítulo do curso deveria começar com um problema cuja solução requeresse o uso da matéria que vai começar a ser ensinada" (p. 6).

As afirmações de Onuchic (1999) também ratificam esse posicionamento acerca da manipulação, visto que explicitam a crença de que a verdadeira força da resolução de problemas não se restringe ao domínio de particularidades técnicas ou de conceitos, mas visa ao entendimento de como se relacionam e dos princípios que os unifica. Assim, é preciso atentar para a natureza interna da Matemática e para a forma como seus princípios são organizados, assim como para seus usos e aplicações (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004). Vale salientar, aqui, que a resolução de problemas como metodologia de ensino, defendida pelas autoras, não exclui as demais concepções. Isso significa que, quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto **sobre** resolução de problemas, quanto aprendem Matemática **para** resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática **através** da resolução de problemas.

Em seu texto, dirigido especialmente para professores, Van de Walle (2001) afirma, assim como o fazem também Schroeder e Lester (1989), que é difícil ensinar através da resolução de problemas. Entretanto ele apresenta algumas razões que justificam o esforço e entre elas estão:

- a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as idéias e sobre o "dar sentido";
- a resolução de problemas envolve os estudantes nos cinco padrões de processo descritos nos Standards (2000)[20]: resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação;
- a resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer Matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e auto-estima dos estudantes;
- a resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permite tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem; e
- os alunos se entusiasmam com o desenvolvimento da capacidade de compreensão que experimentam através de seu próprio raciocínio.

Ao finalizar esta seção, entendo que há alguns pontos, relativos a esta concepção, que merecem ser destacados. Primeiramente o fato de que o ensino através da resolução de problemas não exclui as demais concepções, constituindo-se assim em uma abordagem

[20] *Principles and Standards for School Mathematics* (2000) é uma publicação elaborada pelo NCTM que fornece as orientações para o ensino de Matemática nos níveis K-12, onde, além dos princípios apresentados, cinco padrões de conteúdo e cinco padrões de processo são estabelecidos.

mais completa e abrangente que as demais. Acredito, além disso, que favorecendo um trabalho mais autônomo, o conhecimento construído fará mais sentido para o aluno. Ele perceberá, por si só, suas reais condições e dificuldades. Isso aumenta a confiança em suas próprias capacidades e, tanto por parte dos alunos como do professor, possibilita uma avaliação mais efetiva e individualizada, e conseqüente realinhamento das atividades de ensino como um todo.

2.3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SALA DE AULA

2.3.1. O ENCAMINHAMENTO

Ao enumerar algumas características do que chamou ensino de Matemática de acordo com a teoria construtivista, Campbell (1996) considera que o professor deve: propiciar a construção do conhecimento a partir de conhecimentos anteriores, focalizar no pensamento e não na obtenção de respostas esperadas, dar tempo aos alunos para pensar, levar os alunos a explicar ou justificar suas respostas ou raciocínios, questionar os alunos, ouvi-los e ensiná-los a ouvir os colegas, explorar conceitos matemáticos em termos de resolução de problemas, promover o trabalho em grupos sempre diversificados de alunos (ora individualmente, ora em duplas, ora com a classe toda, etc).

Ressalte-se que o trabalho em grupo tem sido destacado em muitos estudos sobre resolução de problemas. Dentro do espírito da tendência investigativa, a negociação com os colegas no trabalho em grupo tem sido apontada como uma oportunidade de o aluno ampliar suas compreensões e capacidade de resolver problemas, de aprimorar seus processos e estratégias pessoais e de ampliar alternativas (CONTRERAS; CARRILLO; 1998; PENTEADO SILVA, 1989). Contreras e Carrillo (1998) defendem que a combinação de trabalho individual e em grupos favorece, ao aluno, a construção autônoma do conhecimento através de situações em que o aluno é capaz de criar e ampliar sua capacidade de resolver problemas, especialmente por ocasião da discussão final com toda a classe, quando o aluno discute suas compreensões com os demais colegas questionando e analisando seus métodos e estilo pessoal de resolução. Vale ressaltar que essas oportunidades configuram-se, portanto, para os alunos, como momentos de auto-avaliação ou de avaliação entre os alunos e dentro do próprio grupo, eliminando a necessidade de um julgamento externo, ou seja, de que o professor dirija a eles julgamentos do tipo "adequado ou não, correto ou não."

Van de Walle (2001) recomenda que um problema a ser proposto aos alunos para orientar a aprendizagem da Matemática deve ter três características. A primeira é que ele deve começar onde os alunos estão, isto é, deve levar em consideração o entendimento e os conhecimentos que o aluno já possui. A segunda característica apontada refere-se a que o aspecto mais problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado com o conteúdo matemático que se pretende que eles aprendam, de modo que questões secundárias não se tornem, ou desviem, o foco do trabalho de resolução do problema. E, finalmente, o problema deve exigir justificativas e explicações para as respostas e métodos apresentados.

Ele também apresenta um modo de encaminhar as aulas ensinando através de resolução de problemas, sugerindo que sejam realizadas em três fases:

FASE	OBJETIVO	PROCEDIMENTOS
Antes	Preparação	• Preparar mentalmente os estudantes para trabalhar no problema. • Certificar-se de que os estudantes entenderam a tarefa. • Certificar-se de que os estudantes entenderam suas responsabilidades.
Durante	Trabalho dos estudantes	• Deixar os alunos trabalharem sozinhos demonstrando respeito e confiança em suas habilidades. • Ouvir ativa e cuidadosamente. • Observar e avaliar o trabalho dos alunos. • Encorajá-los a testar suas idéias. • Fornecer apenas dicas e sugestões. • Não corrigir erros.
Depois	Discussão com a classe	• Aceitar as sugestões dos alunos sem avaliá-las. • Conduzir as discussões à medida que os estudantes justificam e avaliam seus resultados e métodos.

Na fase de preparação, Van de Walle (2001) apresenta algumas sugestões de ações do professor: começar com uma versão simplificada do problema, promover um *brainstorm*[21], estimular estimativas e cálculo mental, esclarecer as expectativas em relação ao trabalho. Ele assevera que o professor deve "sempre se certificar de que os alunos entenderam o problema antes de se colocarem a trabalhar nele". (p.47)

Na fase de trabalho dos estudantes, o professor deve demonstrar respeito e confiança nas habilidades dos alunos que devem, aconselha Van de Walle (2001), trabalhar em grupos. A função do professor muda nesta fase, de facilitador para um ativo ouvinte. Ele deve ouvir os alunos, obter explicações sobre o que estão fazendo ou, apenas, anotar observações que julgar relevantes. Em seguida, pode dar dicas e sugestões, encorajar os

[21] O termo *brainstorm* pode ser traduzido como "uma idéia genial". Trata-se de uma técnica que permite que todos se manifestem colocando suas idéias ao grupo, como numa tempestade *(storm)* de idéias.

alunos a testar suas idéias, sugerir extensões e generalizações, incentivar a busca de métodos alternativos de resolução e não corrigir ou apontar erros.

Na última fase, em que ocorre a discussão com a classe, é que a aprendizagem melhor se realiza. O autor destaca que esta etapa deve ser destinada não a checar, mas a compartilhar idéias, estratégias de resolução e respostas. Os estudantes explicarão suas estratégias de resolução do problema e justificarão a utilização dessas estratégias. Quando houver diferentes respostas, toda a classe deverá envolver-se na escolha e decisão de qual método ou resposta é a correta. Se essa decisão é tomada pelo professor, em geral, os alunos a aceitam sem questionar e, muitas vezes, sem entender. Quando a classe discute e compartilha idéias os alunos elevam sua auto-estima, tornam-se mais confiantes em suas habilidades e em seu potencial e , a partir do diálogo e da troca de idéias com os colegas, os alunos avaliam seu próprio trabalho, sem precisarem ser avaliados ou corrigidos pelo professor.

Também com o intuito de viabilizar a realização do ensino fundamentado na aprendizagem da Matemática através da resolução de problemas, Allevato e Onuchic (2003) sugerem aos professores que, em sala de aula, as atividades sejam encaminhadas seguindo as seguintes etapas: formar grupos de alunos e entregar a atividade, observar o trabalho dos grupos, intermediar o trabalho dos grupos através de questionamentos; após os grupos entregarem as soluções por escrito, registrar os resultados na lousa, analisar os resultados em plenária, encaminhar um consenso e formalizar o novo conteúdo[22].

Nesse trabalho apresentamos, portanto, um procedimento alternativo ao que é apresentado por Van de Walle (2001) para a fase inicial da atividade de resolução de problemas. Nossa sugestão é que o professor apresente o problema por escrito aos alunos e, durante alguns minutos, os grupos trabalhem sem nenhuma intervenção do professor; tampouco o professor lê com eles o problema (os alunos devem ser orientados, logo no início, de que esse será o procedimento adotado). Durante o tempo em que os alunos lêem e procuram interpretar e resolver o problema, o professor apenas observa. Procura perceber a forma como discutem, que dificuldades encontram, que sugestões oferecem e que procedimentos adotam. Procura também avaliar o nível de participação de cada aluno na realização da atividade. Em nosso artigo apresentamos uma experiência realizada nesses moldes, em que o conteúdo em foco era a taxa média de variação.

[22] Estas orientações foram inicialmente elaboradas com um grupo de professores participantes de um projeto da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) oferecido à Secretaria Estadual de Educação dentro de um Programa de Educação Continuada.

2.3.2. Dificuldades na implementação

Alguns autores referem-se especificamente às dificuldades na implementação da resolução de problemas nas aulas de Matemática.

Na pesquisa de Thompson (1989), os professores entrevistados apontaram alguns obstáculos à utilização da metodologia de ensino através da resolução de problemas em sala de aula, entre os quais merecem destaque: as restrições de tempo, em relação aos currículos pré-estabelecidos; a resistência dos alunos, já acostumados a outra rotina; a diversidade dos alunos, demonstrando diferentes tipos de habilidades, e a pouca experiência matemática de alguns professores. Com respeito a esse último aspecto Thompson enfatiza que o conhecimento matemático limitado é um sério obstáculo à prática de trabalhar bem a resolução de problemas.

Bassanezi (2002) também se refere à dificuldade relacionada à formulação de problemas. Numa experiência realizada com 30 professores de Cálculo, para os quais foi solicitado que formulassem um problema próprio, relativo à disciplina que ensinavam, ficou evidente que a formulação de problemas novos e interessantes nem sempre é uma atividade muito simples para um professor de Matemática. Elaborando suas considerações do ponto de vista da modelagem matemática, o autor considera que é preciso buscar estratégias que possibilitem o desenvolvimento de habilidades na criação de problemas.

As falas das professoras participantes da pesquisa realizada, e relatada, por Ponte (1994), com respeito à sua prática pedagógica, explicitam as seguintes dificuldades:

- para conduzir as discussões sobre os processos utilizados e as soluções dos problemas com toda a classe, de modo a valorizar e enriquecer esse momento tão importante da atividade;
- para encontrar bom material de apoio para a resolução dos problemas;
- para encontrar bons problemas, no sentido de integrar as atividades de resolução de problemas com a seqüência de conteúdos a serem ensinados;
- para controlar a ansiedade causada pela sensação de que a resolução de problemas toma muito tempo da aula;
- para superar incoerências causadas pelo confronto de antigas com as novas concepções e orientações curriculares acerca de resolução de problemas.

Um exemplo salutar de integração da metodologia de ensino da Matemática através da resolução de problemas à seqüência de conteúdos foi o projeto elaborado e aplicado por Pereira (2004) a alunos do 3º ciclo do ensino fundamental, em que trabalhou com as unidades temáticas: divisibilidade e números racionais.

Entretanto deve-se destacar que a implementação de novas metodologias em sala de aula exige repensar os currículos e conteúdos programáticos como um todo. Paulette (2003) apresentou um novo enfoque da disciplina Matemática para o curso superior de Administração de Empresas e propôs mudanças na ementa e no conteúdo programático da disciplina, a partir de experiências de ensino realizadas utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas. Nesse caso os conteúdos matemáticos foram construídos a partir de situações-problema retiradas do contexto da área de Administração de Empresas. Também BOLZAN (2003) apresenta um projeto em que adota a metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática através da resolução de problemas para o trabalho em sala de aula, de uma escola profissionalizante de mecânica industrial. Ele verificou que este trabalho pode contribuir significativamente com a formação do profissional mecânico, uma vez que liga a Matemática aprendida academicamente com a Matemática da prática de oficina.

Azevedo (1998) desenvolveu uma proposta de mudança curricular no curso de licenciatura em Matemática com o objetivo de melhor preparar os professores para implementar o ensino de Matemática via resolução de problemas em suas aulas.

Ao entrar no âmbito do confronto entre antigas e novas concepções e práticas pedagógicas e das dificuldades causadas por esse confronto, deve-se atentar para as investigações realizadas por Chapman (1999), cujos objetos de estudo têm sido as formas e a natureza das intervenções do professor, durante atividades de resolução de problemas. Seus estudos dão atenção aos possíveis símbolos e significados que o próprio professor constrói sobre seu comportamento em sala de aula. Tais símbolos referem-se a uma variedade de situações de sala de aula tais como quem fala, quando, como e sobre o que fala durante a aula. Outros exemplos de símbolos são: o modo como o professor organiza suas aulas, o modo como usa o tempo da aula e o espaço da sala, etc. Seu trabalho fundamenta-se na crença de que ajudar os professores a analisar esses símbolos os levará a compreender alguns padrões de intervenção emergentes em sua própria prática, e essa compreensão poderá facilitar mudanças nessa mesma prática.

Também Van de Walle (2001) aponta alguns dilemas com os quais se deparam os professores ao adotarem a resolução de problemas como meio de ensinar Matemática. Um deles refere-se a quanto dizer e quanto não dizer no momento em que os alunos estão trabalhando no problema e solicitam a ajuda do professor. Ele nos lembra que, se o professor manifestar preferência por determinado método, dificilmente os alunos usarão suas próprias estratégias para resolver o problema. Então sugere que os tipos de informação que o professor pode e deve fornecer aos estudantes são aqueles sobre convenções matemáticas (simbolismo e terminologia), abordagens alternativas e esclarecimentos sobre as idéias e métodos utilizados pelos estudantes. O importante é ter o cuidado de que as dicas fornecidas não eximam os estudantes da necessidade de refletir e criar.

Associados a esse, pode-se achar, na literatura, estudos que comprovam que a invenção de estratégias de resolução de problemas, por parte dos alunos, promove a compreensão e o desenvolvimento de significativos procedimentos matemáticos. (CARROL; PORTER, 1997)

Às dificuldades apresentadas, acrescente-se a falsa idéia de que a abordagem da resolução de problemas é incompatível com a cobrança que em geral é feita pelo domínio de habilidades básicas em Matemática, ou aquela de que nela não há lugar para praticar e treinar. O treino e a prática são imprescindíveis quando a velocidade e a precisão serão cobradas; o erro é acreditar que eles são um caminho para a aquisição e compreensão de conceitos.

Uma terceira dificuldade seria a falta de tempo para "cobrir" todos os tópicos listados nos programas de Matemática ao adotar a metodologia de ensino através da resolução de problemas. Quanto a isso Van de Walle (2001) acredita que se o professor trabalha com o objetivo de desenvolver as "grandes idéias", os principais conceitos, então os elementos menores serão atendidos à medida que o ensino avança. Entretanto, inversamente, se ele dirige o foco para cada item do programa da disciplina, é pouco provável que as grandes idéias e conexões sejam compreendidas. A pesquisa realizada por Penteado Silva (1989), com alunos de 1º grau trabalhando conteúdos referentes ao estudo de frações, mostrou que o ensino através da resolução de problemas não comprometeu o cumprimento do programa dentro do tempo disponível e proporcionou a abordagem deste conteúdo (e de outros que surgiram no decurso das atividades) de maneira bastante significativa.

Noddings (1989) realizou um estudo em que analisou alguns aspectos, mais voltados para o aluno, que dificultam a resolução de problemas que, em geral, exige do aluno o domínio daquilo que ele chama de "sub-habilidades", que correspondem a pré-requisitos matemáticos que, normalmente, estão relacionados à realização de cálculos.

Segundo a visão de Asman e Markovits (2001) as dificuldades também podem surgir em virtude do distanciamento existente entre o que chamam realidades, ou seja, entre o que o professor acredita e o que ele pratica (o professor nem sempre faz o que acredita ser melhor para os seus alunos), entre a realidade do professor e a realidade dos alunos (problemas envolvem situações que fazem sentido para o professor, mas não para os alunos), e entre a Matemática escolar e a realidade fora da escola (alguns alunos resolvem com grande habilidade situações do dia a dia que envolvem Matemática, mas não resolvem os problemas matemáticos propostos pelo professor em aula). (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2001).

Acredito que se deva considerar, também, uma distância entre novas e velhas orientações e entre novas e velhas práticas. Não é fácil para o professor que tem uma prática já bastante cristalizada mudar sua forma de trabalhar. Ao implementar o ensino através da resolução de problemas é preciso ter clareza do que é principal e o que é secundário entre tudo o que se quer ou precisa ensinar. É difícil, por exemplo, desprender-se das tradicionais listas de conteúdos programáticos para dar ênfase às grandes idéias; em geral não é fácil escolher que conteúdos são centrais e mais importantes, e que conteúdos são secundários. E tendo escolhido estes conteúdos é preciso propor bons problemas, ou seja, problemas que de fato dirijam o aluno ao que é pretendido. Tais problemas não precisam ser originais mas, muitas vezes, precisam sim ser criados pelo professor. E mais, a resistência dos alunos a novas metodologias e as diferenças individuais podem trazer dificuldades na implementação da resolução de problemas em sala de aula, muito embora elas sejam, em contrapartida, uma forte justificativa para a realização de trabalhos em grupo.

Em seu estudo, analisando as dificuldades encontradas pelos estudantes em atividades de investigação desencadeadas a partir de problemas propostos, Diezmann, Watters e English (2001) justificam que é importante conhecer bem essas dificuldades para que se possam criar possibilidades alternativas e melhorar o ensino de Matemática.

Eu completaria: é imprescindível analisar as dificuldades encontradas tanto pelos estudantes como pelos professores; e foi isso que tentei fazer nessa seção.

2.4 A MINHA PESQUISA NO CENÁRIO DAS PESQUISAS JÁ REALIZADAS

Após esta apreciação da literatura de pesquisa voltada à resolução de problemas resta salientar alguns aspectos da minha pesquisa em relação ao cenário apresentado por aquelas já realizadas. A fim de buscar coerência nesta tarefa retomo minha pergunta de pesquisa: **De que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática, quando estão utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções?**

Inicialmente, gostaria de destacar que poucas investigações voltadas à resolução de problemas descrevem o que realmente se passa em sala de aula. Penteado Silva (1989), Pereira (2004), Bolzan (2003) e Paulette (2003) apresentam esta característica, entretanto, as três primeiras correspondem a investigações baseadas em experiências que foram implementadas com o objetivo específico de pesquisa e apoiadas em determinados conteúdos escolhidos especialmente para este fim. Somente a última apresenta resultados obtidos de uma prática docente que pretendia promover um melhor aprendizado da matemática básica necessária ao administrador de empresas. De qualquer modo, a pesquisa de Paulette (2003) tem como principal objetivo apresentar uma **proposta** de ensino de Matemática através da resolução de problemas, distinguindo-se da minha, que tem como objetivo analisar as implicações desta prática. Considero conveniente, aqui, retomar as indicações de Thompson (1989) de que são necessárias mais pesquisas em sala de aula, e as de Ponte (2000), em que enfatiza a necessidade de se buscar uma maior consistência nas pesquisas através da articulação da prática com o conhecimento acadêmico. O professor que ministrou as aulas por mim observadas realizava todas as suas aulas baseadas em resolução de problemas, o que considero uma prática inovadora. Não vi nenhum estudo em contexto semelhante a este na revisão de literatura realizada.

Observei, ainda, nos estudos com os quais tomei contato, que os "olhares" estão bastante voltados às práticas e concepções dos professores ou à forma como deveria ou poderia se dar essa prática (VAN DE WALLE, 2001; CONTRERAS; CARRILLO, 1998; SCHROEDER; LESTER, 1989; NODDINGS, 1989; ONUCHIC, 1999, 2003a). Entretanto, não apresentam resultados obtidos quando da real implementação do ensino via resolução de problemas. Acrescente-se a isso o fato de que, em minha pesquisa, o "olhar" se volta para o aluno. Pereira (2004) também tinha como foco os alunos mas, como comentado no parágrafo anterior, restringiu sua investigação a um projeto específico.

Penso que a carência de resultados efetivos sobre como os alunos trabalham com resolução de problemas seja decorrente, também, de dificuldades metodológicas, ou seja, as orientações advindas da literatura referente à metodologia de pesquisa não "dão conta" da especificidade e da complexidade que se configura em sala de aula. Talvez por isso, um grande número de pesquisas realizadas em sala apresente resultados quantitativos (como quantos problemas foram resolvidos, ou quantos foram resolvidos corretamente), e não qualitativos, como é minha pesquisa.

A pesquisa destacando a resolução de problemas, no ensino superior, também não é muito freqüente. Soma-se a essa, a particularidade de que os problemas resolvidos pelos alunos da minha pesquisa foram, na maioria, relacionados à área de Administração de Empresas. Isso permitiu aos alunos, ao relacionar idéias matemáticas a esse contexto específico, que não a própria Matemática, manifestar carências e características que constituem importantes dados para avaliação e caracterização do ensino fundamentado na resolução de problemas como metodologia. Van de Walle (2001) e Schroeder e Lester (1989) dão indicações de que a resolução de problemas pode se constituir num eficiente recurso de avaliação, entretanto, seus estudos não trazem resultados a esse respeito.

Ao referir-me à avaliação quero considerá-la em seu mais amplo sentido,entendendo-a como totalmente integrada às atividades diárias em sala de aula, com objetivos, além de burocráticos, realmente didáticos de diagnóstico e conhecimento da realidade de sala de aula e das condições individuais dos alunos. Vários autores referem-se a "conduzir o ensino a partir de onde o aluno, e não o professor, está" (CAMPBELL, 1996; VAN DE WALLE, 2001; SANTOS, 2002). Como isso se manifesta no ambiente que observei, é um dos resultados que pretendo obter de minha pesquisa.

Finalmente, julgo prudente reafirmar que, com este capítulo que estou encerrando, pretendi esboçar um panorama dos trabalhos já realizados a respeito da resolução de problemas, a maioria resultante de pesquisa científica acadêmica. Ele é um retrato do levantamento bibliográfico que realizei durante a realização desta pesquisa de doutorado. Alguns dos trabalhos aqui apresentados se constituirão em referência teórica para a análise dos dados que coletei e, portanto, serão retomados no capítulo 6.

Capítulo 3

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E COMPUTADORES

Capítulo 3 - Educação Matemática e Computadores

CAPÍTULO 3

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E COMPUTADORES

> Poderemos ser a favor ou contra certas tecnologias - ainda que na realidade ninguém esteja nos perguntando se somos contra ou a favor -, mas o que não podemos nos permitir, inclusive para orientar as novas gerações, é delas não termos um conhecimento competente.
>
> LADISLAU DOWBOR

Muitos estudos já foram realizados com o intuito de analisar as implicações da inserção dos computadores no ensino. Um vasto levantamento bibliográfico foi realizado por Gonçalves (2000), que analisou a produção científica brasileira em vinte anos compreendidos no período de 1977 a 1997. Um meta-estudo foi realizado, por encomenda do Ministério da Educação da França, para avaliar as inovações e a produção relacionada às tecnologias de informação e comunicação na Educação. (LAGRANGE; ARTIGUE; LABORDE; TROUCHE, 2001)

Na Educação Matemática, várias pesquisas vêm sendo realizadas e é, também, bastante extensa e variada a produção. A literatura mostra, no caso específico do computador, que a maneira de utilizá-lo no ensino de Matemática foi gradualmente modificada. De qualquer modo as observações, feitas nos estudos já realizados, geralmente indicam que o comportamento dos estudantes que usam essa tecnologia informática (TI) parecia diferente dos demais, ou seja, daqueles que não tinham contato com ela. Em linhas gerais, essas pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores nos ambientes de ensino de Matemática conduz os estudantes a modos de pensar e de construir conhecimento que são típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. Tais pesquisas destacam aspectos como o uso regular de representações múltiplas, a construção do conhecimento como rede de significados, as discussões desses significados com os colegas e com o professor, entre outros.

Também os enfoques pedagógicos estão se modificando e os professores têm experimentado momentos de instabilidade em suas práticas (BORBA; PENTEADO, 2001, 2002). Assim, serão discutidos a seguir alguns aspectos como: finalidades de sua utilização, alguns aspectos emergentes, dificuldades, limitações e atitudes dos alunos e professores, em situações de ensino de Matemática em que foi utilizada esta tecnologia informática, o computador.

Por vezes, trabalhos relacionados a outras TI, como calculadoras e sensores, serão citados por trazerem contribuições que podem ser estendidas também aos computadores. Do mesmo modo, embora o foco deste trabalho esteja em conteúdos relacionados ao estudo de funções e na utilização de *software* gráfico, serão analisados alguns estudos relacionados com *softwares* algébricos e de geometria, por trazerem relevantes aportes a este estudo. Portanto, muitos desses trabalhos estão relacionados, às vezes, apenas indiretamente ao caso específico do meu trabalho. Entretanto, a análise desses estudos, me ajudou a perceber lacunas que justificam, bem como enriquecer, a investigação que realizei (ROMBERG;1992). Penso que a referência a esses trabalhos seja importante, também, para que este texto seja uma fonte de informações sobre alguns tipos de *software*, ditos educacionais, que podem ser utilizados no ensino de Matemática.

Para finalizar o capítulo, tentarei localizar minha pesquisa dentro deste espectro de pesquisas já realizadas.

3.1. A FUNÇÃO DO COMPUTADOR

3.1.1. O COMPUTADOR E A ATIVIDADE HUMANA

Ao empreender atividades de ensino com os computadores, é preciso tentar compreender o papel desse recurso nos ambientes em que se insere e qual é sua relação com a atividade humana. Alguns trabalhos já realizados, em especial no GPIMEM, abordam as diferentes perspectivas psicológicas que podem emergir dessa relação e, fundamentando-se nas compreensões de Tikhomirov (1981), consideram três teorias para caracterizar a relação “ser-humano-computador”: a teoria da substituição, a teoria de suplementação e a teoria de reorganização. (BENEDETTI, 2003; BORBA, 1999; BORBA; PENTEADO, 2001, 2002; VILLARREAL, 1999)

Segundo a teoria de substituição, o computador substitui o homem em todo o tipo de trabalho intelectual. Essa teoria baseia-se na suposição de que os problemas que o homem resolve também podem ser resolvidos pelo computador. Na teoria da suplementação, o computador é um recurso que incrementa o volume e a velocidade de processamento humano da informação, não como mediador, mas constituindo-se numa extensão quantitativa da atividade humana. No modo de reorganização, a estrutura da atividade intelectual humana é modificada pelo uso do computador, modificando os processos de criação, de busca e armazenamento de informações.

Ao analisar essas três perspectivas, Borba (1999) ressalta que a teoria da substituição é limitada no sentido de que ignora a complexidade dos processos humanos de pensamento envolvidos na escolha e resolução de problemas; que os processos desenvolvidos pelo computador são fundamentalmente diferentes daqueles realizados pelo ser humano. Da forma como entende esse autor, a segunda, a teoria da suplementação, também é limitada pois tem uma visão apenas quantitativa e não considera a natureza qualitativa do pensamento. A teoria da reorganização é a que melhor se aproxima da noção de "modelagem recíproca" proposta por Borba (1999), na qual o computador é visto como algo que molda o ser humano ao mesmo tempo em que é moldado por ele. O significado desta reorganização ficará mais claro no item 3.1.2 e na seção 3.2, onde são analisados, com mais cuidado, os aspectos emergentes dos ambientes de ensino em que ocorre a utilização do computador.

3.1.2. O COMPUTADOR E A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Há grande variedade de pesquisas já realizadas que buscam aprofundar as compreensões acerca da utilização da informática na Educação Matemática. No trabalho de Borba e Penteado (2001) são apresentados alguns exemplos de como a informática pode ser inserida em situações de ensino e aprendizagem de Matemática. Os exemplos apresentados referem-se a situações, de sala de aula ou de experimentos de ensino, em que os alunos utilizaram recursos como calculadoras gráficas, CBR[23] e *softwares* gráficos. Para explicar a perspectiva teórica que fundamenta sua visão de conhecimento, os autores nos remetem às idéias de Pierre Levy (1993) referentes à forma como as tecnologias da inteligência, nomeadamente a oralidade, a escrita e a informática, estiveram associadas à memória e ao conhecimento.

Nesse sentido, a oralidade era utilizada para estender nossa memória, ou seja, como forma de as sociedades guardarem importantes partes de sua cultura. Com a difusão da escrita, particularmente com o surgimento da mídia impressa, ocorre uma ênfase na linearidade do raciocínio; seqüências lógicas e narrativas ganham destaque com as mudanças técnicas que tornaram acessíveis o livro, o papel e instrumentos afins. Assim, associada à oralidade, a escrita promove formas de produção do conhecimento qualitativamente diferentes daquela. Da mesma forma, a informática traz formas de pensar qualitativamente diferentes das anteriores. A construção do conhecimento se faz, agora, com a forte presença de processos como, por exemplo, a simulação, a experimentação e a visualização.

A partir dessa perspectiva, Borba e Penteado (2001) rejeitam a visão dicotômica entre ser humano e técnica afirmando que

[23] CBR - *Calculator Based Ranger*: detector sônico de movimento que mede distância, velocidade e aceleração

> [...] os seres humanos são constituídos por técnicas que estendem e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses mesmos seres humanos estão constantemente transformando essas técnicas. Assim, não faz sentido uma visão dicotômica. Mais ainda, entendemos que conhecimento só é produzido com uma determinada mídia, ou com uma tecnologia da inteligência. É por isso que adotamos uma perspectiva teórica que se apóia na noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologias e não, como sugerem outras teorias, por seres humanos solitários ou coletivos formados apenas por seres humanos(p.46).

Estendendo o ponto de vista teórico de Levy (1993), é possível estudar a dinâmica das interações entre os seres humanos e as mídias disponíveis analisando a produção de conhecimentos matemáticos nesse grupo, por esse autor denominado coletivo pensante. Algumas pesquisas, realizadas no âmbito da Educação Matemática, são fortemente apoiadas, portanto, na crença de que os computadores vêm juntar-se às outras mídias comumente utilizadas para o ensino, reorganizando o pensamento deste coletivo. Ressaltam, ainda, que o trabalho dos educadores deve ser o de ver como a aprendizagem da Matemática se realiza e que possibilidades se configuram quando esses recursos são utilizados em atividades e investigações matemáticas. (BENEDETTI, 2003; BORBA, 1999)

Em sua pesquisa com alunos de Cálculo utilizando o *software Derive*, uma tecnologia CAS[24] que possibilita manipulação simbólica, construção de gráficos e tabelas com facilidade, Villarreal (1999) estendeu as já citadas idéias de Tikhomirov (1981) à atividade matemática. Ela verificou que algumas alunas, entre as que fizeram parte de seus experimentos de ensino, tinham o computador apenas como um suplemento, utilizando-o, muitas vezes, apenas para confirmar ou esclarecer conjecturas levantadas a partir da abordagem algébrica. Porém, o que ficou mais evidente e foi notado em vários momentos foi a relação de reorganização do pensamento, "de pensar com" o computador, quando da exploração do conceito de retas tangentes e derivadas.

Pierce e Stacey (2001) também realizaram pesquisa com alunos de um curso de Cálculo. As investigações foram desenvolvidas em aulas de um curso introdutório em que os estudantes utilizaram o *Derive*. Seu estudo, de caráter comparativo, sugere que o foco da aprendizagem desvia o foco dos procedimentos para os conceitos; os alunos do grupo experimental, que usaram CAS, mostraram significativa superioridade na compreensão dos conceitos matemáticos em relação ao grupo de controle, que freqüentou aulas sem essa tecnologia. Os alunos pareciam adotar estratégias de aprendizagem consideradas, na

---

[24] CAS (*computer algebra system*) - Sistemas de computação algébrica são programas que, em contraste com os programas de computação numérica, permitem cálculos matemáticos com expressões simbólicas ou, como são também chamadas, expressões algébricas.

literatura, como positivas, ou seja, as atitudes dos estudantes, ao fazer Matemática utilizando os CAS, apresentavam benefícios para o ensino:

> Havia fortes evidências de que o uso desta tecnologia era um estímulo para os estudantes usarem três estratégias de aprendizagem, as quais a literatura relaciona com melhora nos resultados da aprendizagem: o regular uso de representações múltiplas, as discussões das idéias com os colegas e a inclusão dos computadores nos debates. (p. 28)

Em seu trabalho, as autoras fazem referência à forma de aprendizagem de conceitos segundo a perspectiva do construtivismo, na qual a aprendizagem se constrói sobre a experiência. Destacam, então, que estudantes trabalhando com CAS podem vivenciar experiências mais numerosas e intensas do que é possível para estudante trabalhando com lápis e papel.

É notório que as compreensões sobre as relações e as implicações da utilização do computador no ensino têm conduzido educadores e pesquisadores a rever antigos, e supostamente cristalizados, padrões, metodologias e, até mesmo, currículos de ensino.

David Tall (1989) desenvolveu um trabalho onde analisa as vantagens de promover mudanças nos currículos com base nas possibilidades oferecidas pelo computador. Ele enfatiza que a forma curricular seqüencial, que parte de conceitos mais simples em direção a idéias mais complexas, e em que as atividades são organizadas em nível crescente de sofisticação, não mais faz sentido. O computador oferece a possibilidade de promover ambientes de aprendizagem onde o aluno pode explorar idéias mais complexas desde o início, e isso será determinante no processo de formação de imagens conceituais que o aluno realiza.

Tall (1989) utiliza o termo imagem conceitual para descrever "a estrutura cognitiva total que é associada a um conceito, a qual inclui todas as figuras mentais e as propriedades e processos associados"(p.37)[25]. Segundo afirma, a mente humana possui mecanismos que reconhecem regularidades implícitas em um determinado contexto e que conduzem-nos a formar nossas próprias e pessoais imagens conceituais sobre um conceito, por exemplo, matemático. No que se refere à aprendizagem, em um amplo sentido, quando as idéias são apresentadas em um contexto restrito, a imagem conceitual formada pelo aluno pode incluir características que são verdadeiras naquele contexto específico, mas não em um contexto geral. Desse modo, o computador poderá desempenhar um papel determinante em promover a formação de imagens conceituais mais amplas. Por exemplo: como uma reta tangente a uma circunferência toca essa circunferência em um único ponto, mas não a

[25] Tradução de *total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.* (p.37)

cruza, muitos alunos acreditam que isso ocorre com retas tangentes a qualquer curva. Quando se pede aos alunos para desenhar a reta tangente à curva $y = x^3$, por exemplo, no ponto de abscissa $x = 0$, surge um conflito. Tais conflitos podem ser aproveitados para ampliar as compreensões a esse respeito e o computador pode fornecer um rico contexto para discutir o conceito de tangente.

Complementando essas idéias, Tall (1989) atribui ao computador, também, a função de um *generic organizer*[26]. O termo é utilizado para designar um ambiente, ou micromundo, que permite ao aluno manipular exemplos e, se possível, contra-exemplos de um conceito matemático específico ou relacionar sistemas de conceitos. Esse ambiente ajuda o aluno a vivenciar experiências que prepararão sua estrutura cognitiva para que possa refletir para construir conceitos mais abstratos. O computador pode ser uma fonte rica de imagens visuais que seriam, por vezes, impossíveis de serem obtidas sem esse recurso. O exemplo utilizado pelo autor para ilustrar esse aspecto, é a possibilidade de ampliação, ou seja, de aumentar significativamente partes específicas de um gráfico e, visualmente, analisar a linearidade local (ou não) de um gráfico para complementar a noção de diferenciabilidade (ou não) de uma função em um ponto.

Promover mudanças no currículo, em geral, sugere revisão e/ou reestruturação dos conteúdos tratados em classe. Benedetti (2003) investigou as potencialidades de um *software* gráfico em processos de ensino e aprendizagem de conceitos relativos a funções não comumente estudadas pelos alunos participantes da pesquisa. Ele concluiu que o trânsito entre as diversas representações (algébrica, gráfica e tabulares) dessas funções, possibilitou minimizar o efeito do tratamento prototípico do ensino que inicia e enfatiza características das funções afim e quadrática, e ampliou as compreensões dos estudantes no tocante à monotonicidade, domínio e raízes de funções

Também Bizelli e Borba (1999) fazem uma reflexão sobre a necessidade de reestruturar os currículos de Matemática num contexto mais específico, dos cursos superiores de Química. Buscando saber que Matemática é necessária à formação de um químico, foram analisadas duas situações em que alunos do referido curso utilizaram o *software* gráfico *Origin 5.0*[27] para resolver problemas específicos de sua área. As observações levaram a concluir que para tirar o melhor proveito dessa TI o aluno precisa ter compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Ressalte-se que isso contraria a idéia,

[26] Preferi, nesse caso, não traduzir o termo *generic organizer,* mantendo-o na língua inglesa por considerar que expressa melhor os aspectos que se quer discutir nesse momento. Este procedimento será adotado, também, em outros momentos deste trabalho, com os termos *design*, *input*, *output*, etc.

[27] Programa que permite ao usuário fazer análise de dados e elaborar gráficos em duas ou três dimensões, a partir de uma planilha ou da expressão analítica da função.

por vezes presente, de que os computadores substituirão o ser humano em seu trabalho e que, portanto, ele só precisa aprender a operá-lo. Nos exemplos apresentados, esses conceitos incluem escala (escolha e leitura), equação da reta (coeficiente angular e linear), linearização de curvas e logaritmos. Cientistas químicos, e outros cientistas, utilizam o computador para representar fenômenos graficamente, processar e transformar dados experimentais, investigar modelos, controlar experimentos e preparar relatórios e documentos. Entretanto, o que foi percebido é que a carência de conhecimento matemático pode impedir a correta e efetiva utilização dos variados recursos de um *software* ou do computador.

Vale reafirmar, assim, que para utilizar eficientemente o computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (ou o professor) precisam ter conhecimento do que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Eles precisam saber Matemática embora, muitas vezes, uma Matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino.

Percebe-se, além disso, que novos estilos de pensar são condicionados, embora nem sempre naturalmente, pela presença do computador nesses ambientes. O grau de naturalidade com que isso ocorre depende, inclusive de crenças sobre o "fazer Matemática" e de vivências anteriores no seu ensino. Uma breve reflexão sobre isso será realizada a seguir.

3.2. ASPECTOS EMERGENTES

3.2.1. CRENÇAS SOBRE FAZER E ENSINAR MATEMÁTICA

Tall (1989) comenta que, em geral, os matemáticos acreditam que a natureza dos objetos com que trabalham é determinada por conceitos imutáveis, cuja realidade independe de fatores culturais. Em Matemática, historicamente, elementos conceituais têm conquistado supremacia sobre os observáveis. Entretanto, o caráter observável dos objetos produzidos ou processados pelas TI está, cada vez mais, ganhando destaque.

Segundo esse autor, o que ocorre é que forças culturais se configuram quando novas idéias são introduzidas, e as tecnologias informáticas as têm colocado em ação. Essas forças movem elementos de uma cultura a outra por um processo de difusão. Por vezes ocorre uma lacuna cultural em que os novos elementos levam algum tempo para se tornar parte da cultura; e algumas vezes há uma resistência cultural quando novos elementos definitivamente não são aceitos em substituição aos velhos.

Alguns novos elementos que nos foram trazidos pela chegada das TI, como os *desk-top*, telefones celulares e internet, já foram incorporados e rapidamente se tornaram parte da nova cultura. Outros, tais como o uso do computador para auxiliar ou mesmo promover a aprendizagem, estão sujeitos à lacuna cultural e à resistência por parte das comunidades de ensino. Verifica-se ainda, destaca Tall (1989), por vezes, uma complexa mistura que resulta da fusão do "velho" com o "novo".

Relacionam-se a isso, as percepções de Villarreal (1999) no que se refere aos estilos de abordar os conteúdos matemáticos. Mesmo na presença do computador, há alunos que se mostram claramente mais propensos a pensar algebricamente, demonstrando que conservam traços de um ensino que, tradicionalmente, enfatiza aspectos algébricos. Essa ênfase no algébrico pode ser associada às compreensões de Tall (1989): elas representam "velhas" forças que coexistem com as "novas", nesse particular, representadas pelas possibilidades visuais que as TI oferecem.

Não exatamente associado à informática, mas ao Cálculo, o trabalho de Aspinwall e Shaw (2002) apresenta exemplos baseados em experimentos feitos com dois estudantes que realizaram atividades envolvendo o conceito de derivada. Neste trabalho eles perceberam dois processos de pensamento: o geométrico e o analítico. Apesar disso, eles consideram que os estudantes freqüentemente apresentam raciocínio tipicamente analítico, e não visual. Uma das razões apontadas é a de que estudantes e professores em geral acreditam que fazer cálculo consiste em manipular com habilidade números e símbolos.

Este aspecto está relacionado com a possibilidade de "fazer Matemática à mão ou com tecnologia". Assim, merecem ser mencionadas as opiniões de estudantes e professores a este respeito. Silva (1999) realizou interessante pesquisa em que, entre outros resultados, mostra as concepções de professores a respeito do momento em que o computador deve e pode ser usado. A visão predominante foi a de que esse uso deve se dar após a exposição dos conteúdos pelo professor.

Também os alunos, na pesquisa de Pierce e Stacey (2001), manifestaram ter reservas quanto ao uso de CAS em Matemática. Alguns alunos preferem aprender os conceitos básicos primeiro sem o computador para depois recorrer a ele com objetivos de esclarecimento ou aprofundamento das compreensões. Isso daria, inclusive, mais confiança no manuseio da tecnologia. Consideram difícil aprender um conceito usando o computador porque ele, muitas vezes, não permite ao usuário saber o que foi feito ou como uma resposta foi obtida.

De qualquer modo, em geral, as pesquisas indicam que as relações entre os aspectos algébricos, gráficos e, até mesmo, numéricos podem ser aproveitadas para ampliar a compreensão de conceitos matemáticos. Essas possibilidades, ou seja, as de visualização e as de múltiplas representações serão analisadas com mais vagar, a seguir.

3.2.2. VISUALIZAÇÃO

Os estilos, de saber e pensar, característicos da cultura informática, podem ser condenados, ignorados ou não ser percebidos por não satisfazerem aos critérios e definições característicos de um tempo em que prevalecia a escrita. É o caso da imagem, recurso fundamental das tecnologias informáticas, das quais o computador ocupa, neste trabalho, posição de destaque. A abordagem visual de um conceito ou objeto, em Matemática ou em qualquer outra área do conhecimento, pode ser considerada, hoje, como um dos elementos que caracterizam novos estilos de construção do conhecimento.

Encontramos na pesquisa desenvolvida por Villarreal (1999) um extenso estudo sobre visualização que, embora seja um processo bastante privilegiado pelo ambiente computacional, é, muitas vezes, menosprezado dentro da Educação Matemática. Os relatos e análises dos episódios apresentados evidenciam, entre outros elementos, o pensamento matemático das estudantes em relação a esse processo. Observou-se que há conflito entre o conceito de derivada da função e a reta tangente ao gráfico da função, e que a forma usada por elas, para resolver um conflito gerado pelo computador, em geral, é algébrica. A autora comenta que isso pode ser decorrente da vivência que as estudantes têm com um ensino de Matemática realizado, historicamente, somente com os tradicionais lápis e papel e de forma essencialmente algébrica. Os relatos e análises dos episódios sugerem que a abordagem visual proporcionada pelo computador não é natural para as alunas, que recorriam, com freqüência, ao lápis e papel para resolver alguns conflitos. Entretanto, as imagens fornecidas pelo computador permitiram questionar suas concepções e, a partir daí, foi possível pensar nos conceitos de maneira mais ampla.

A autora apresenta critérios para caracterizar as abordagens algébrica e geométrica:

Abordagem algébrica	Abordagem visual
• Preferência por resoluções analíticas quando resoluções gráficas também são possíveis.	• Emprego de informações gráficas para resolver uma questão matemática que também poderia ser abordada algebricamente.
• Dificuldade para estabelecer interpretações gráficas das resoluções analíticas.	• Dificuldade para estabelecer interpretações algébricas das resoluções gráficas.
• Quando uma resolução gráfica é pedida, há necessidade de uma passagem prévia pelo algébrico.	• Quando resoluções gráficas são solicitadas, não há necessidade de uma passagem prévia pelo algébrico
• Facilidade para formular conjecturas e refutações ou gerar explicações a partir de fórmulas e equações.	• Facilidade para formular conjecturas e refutações ou dar explicações a partir de informações gráficas.

(VILLARREAL; p.337) (VILLARREAL; p.339)

Na realidade, o computador privilegia o pensamento visual sem implicar na eliminação do algébrico. No Cálculo pode-se empregar informações gráficas para resolver questões que também podem ser abordadas algebricamente e relacioná-las: é o caso da representação geométrica da função derivada que possibilita interessantes análises sobre o comportamento e os extremos das funções. Além disso, a abordagem visual tem demonstrado facilitar a formulação de conjecturas, refutações, explicações de conceitos e resultados, dando espaço, portanto, à reflexão. Pesquisadores salientam que visualização e manipulação simbólica devem complementar-se para que se obtenha uma compreensão matemática mais abrangente e completa, ou para que se resolvam conflitos que se apresentam aos alunos quando da utilização do computador. (BENEDETTI, 2003; BORBA; PENTEADO, 2001; PIERCE; STACEY, 2001; SOUZA JR, 2000; TALL, 1989; VILLARREAL, 1999)

Também Borba (1995), ao discutir as mudanças trazidas pelo uso do computador na Educação Matemática, percebe o incremento do uso da visualização e considera que ela deve ser encarada como um modo particular de conhecer, dentre outros, que fazem parte da atividade matemática. Em seu trabalho, o autor apresenta os procedimentos de um aluno ao realizar atividades envolvendo transformações de funções, utilizando o *software FunctionProbe*©[28]. No episódio apresentado, é ressaltado como o resultado visual (gráfico), apresentado pelo computador, gerou um conflito com as suposições do aluno a respeito da expressão algébrica que determinaria a translação horizontal de um gráfico. O desenrolar do episódio sugere que as possibilidades gráficas do *software* foram decisivas no raciocínio e no encaminhamento das alternativas para resolver tal conflito.

A possibilidade de manipular expressões algébricas e, deste modo, gerar uma grande variedade de gráficos dinâmicos, através do *software Mathematica,* foi explorada nos estudos de Kidron, Zehavi e Openhaim (2001). Enquanto estavam estudando aproximações de funções por polinômios de Taylor, os estudantes analisavam o resto e realizavam animações que ilustravam a convergência da série. Os autores observaram que os gráficos produzidos pelas animações estavam, num certo sentido, presentes nas mentes dos estudantes, mesmo quando os computadores eram desligados. Em seu estudo, apresentam uma situação em que a interação com os gráficos do computador ajudou os estudantes a superar algumas confusões causadas por idéias e imagens equivocadas a respeito do conceito de limite.

[28] Programa do tipo CAS, idealizado para ser utilizado em computadores Macintosh.

Benedetti (2003) expressa sua concordância com essas idéias de que a visualização da representação gráfica possibilitada pelo computador é um aspecto relevante a ser considerado e manifesta seu entendimento sobre tal aspecto afirmando:

> [...] o que se deseja aqui, concordando com esse autor, não é destacar esta ou aquela representação, mas proporcionar, aos estudantes, a possibilidade de uma interligação entre elas, que pode ocorrer de diversas maneiras, dependendo da forma como são encaminhadas as atividades com essas mídias. (p. 6)

Ele destaca a exploração das diversas representações (representações múltiplas) de funções como uma importante possibilidade a ser considerada nos processos de ensino deste tema em Educação Matemática.

Em um trabalho sugestivamente intitulado "Quando a Visualização é uma Barreira para a Compreensão Matemática"[29], Aspinwall e Shaw (2002b) nos advertem, entretanto, da necessidade de aprofundar compreensões e investigar de que modo se deve trabalhar nestes ambientes. Eles apresentam uma situação em que uma representação visual transformou-se num impedimento para a compreensão matemática do aluno a respeito da derivada. Este caso mostra que podem ocorrer dificuldades que atrapalham essa compreensão quando as representações múltiplas e imagens visuais são usadas concomitantemente, em especial quando o aluno manifesta preferência ou apresenta formas de pensamento predominantemente algébrico; os professores devem estar conscientes e atentos a isso.

3.2.3. Representações múltiplas

As investigações realizadas por Pierce e Stacey (2001) indicam que, se os recursos tecnológicos assim o permitem, os alunos "movem-se" livremente entre representações algébricas e gráficas de funções e que, familiarizados com este ambiente, demonstram preferência pelas representações gráficas. Entre as justificativas considere-se aquela baseada no fato de que alguns *softwares* (por exemplo, o *software* algébrico *Derive*) permitem passar de representações algébricas para representações gráficas com muita facilidade e rapidez.

Por outro lado, verificou-se que as tabelas ou representações numéricas eram menos, aliás, muito pouco utilizadas. É possível que isso reflita o fato de que, nas aulas, professores e alunos utilizam tabelas quase exclusivamente no desenvolvimento do que, em geral, se entende como uma fase de introdução conceitual, tradicionalmente inicial no estudo dos conteúdos, e raramente na resolução de problemas durante todo o estudo

[29] Tradução de *When Visualization Is a Barrier to Mathematical Understanding.*

desses conteúdos. Também pode ser decorrente da crença de que a representação numérica não tem sido considerada um recurso muito eficiente no caminho para a compreensão dos conceitos relacionados ao estudo de funções, embora sejam reconhecidas as vantagens de usar planilhas eletrônicas no estudo de limites de funções.

Um estudo interessante a esse respeito foi feito por Friedlander e Stein (2001) que tinham o objetivo de analisar, especialmente, dois aspectos: (1) a habilidade dos estudantes para escolher, utilizar e integrar várias representações e ferramentas nos processos de resolução de equações algébricas e (2) as soluções dos estudantes para equações algébricas em um ambiente que contém uma variedade de recursos. Os alunos tinham, à sua disposição, lápis e papel, o *software* gráfico *Mathemati-X*, a planilha de cálculo *Excel*, e o *software* algébrico *Derive*. Os resultados quantitativos abaixo registram as preferências dos doze estudantes participantes do estudo, para cada uma das equações:

Ferramenta / Equação	Lápis e papel	*Software* gráfico	*Software* algébrico	Indecisos
$1,2\ (x - 0,5) = 8,4$	10		2	
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2	5	3	2
* $x + y = -4$; $x + y = -4$	2	2	7	1
* $y = x + 1$; $y = x^2 + x$	2	5	4	1

* Sistemas de equações (Friedlander e Stein, p.445)

Ao serem entrevistados sobre as razões de suas escolhas pelos recursos computacionais, os alunos manifestaram, entre outras: o computador resolve o que os alunos não sabem resolver (sobre preferir o computador ao lápis e papel); o *software* gráfico é mais transparente (sobre a possibilidade de visualização) do que os programas de manipulação simbólica e, esses últimos não permitem a compreensão dos processos de solução, por isso sua legitimidade é questionável.

A possibilidade de coordenar representações múltiplas (gráficas, numéricas e algébricas), que é favorecida pelo computador, foi também assinalada por Borba (1995), que afirma que a Matemática visual ou discreta pode ser utilizada como recurso para atrair aqueles estudantes que rejeitam, explicita ou implicitamente, a hegemonia da Álgebra. No já citado experimento realizado, essa coordenação de representações foi utilizada, especialmente, para contrastar uma dada representação (no caso, a representação algébrica, a equação) com outra (o gráfico ou a tabela). O aluno desenvolveu um determinado raciocínio dentro dos domínios da representação algébrica que o levou a supor que a equação $y = (x+5)^2 + 3(x+5) + 5$ representava uma translação, do gráfico de $y = x^2 + 3x + 5$, de 5 unidades para a direita. Entretanto, a representação gráfica e a tabela, fornecidas pelo *Function Probe©* , chocou-se com sua suposição, que parecia tão certa na representação algébrica, olhada isoladamente. O desenrolar do episódio mostra como essa tensão, oferecida pelos recursos do computador, gerou no aluno, atitudes de busca e investigação.

As representações múltiplas foram, também, destaque nos experimentos conduzidos por Villarreal (1999), onde se percebe claramente quanto as conexões entre representações ajudaram as estudantes a esclarecer as noções de função derivada e reta tangente. Em sua tese, há um relato de um conflito, gerado pela imagem fornecida pelo computador, que surgiu quando a reta tangente a uma parábola parecia tocá-la em mais de um ponto. A primeira estratégia das estudantes foi recorrer ao *zoom*[30] a fim de obter uma melhor visualização. Entretanto a reta e a parábola pareciam sempre "confundir-se" nas vizinhanças do ponto de tangência. As alunas recorreram, então, à abordagem algébrica para resolver a questão: igualaram as equações da reta e da parábola para determinar seu(s) ponto(s) de interseção. Esse exemplo, entre outros apresentados, mostra a importância do trabalho com as representações múltiplas, proporcionadas pelo computador, e com as relações que as vinculam. Pode-se, através delas, conectar domínios que, de outra forma, permaneceriam separados, porém, se conectados, geram compreensões mais amplas e completas.

Nos experimentos de ensino conduzidos por Benedetti (2003) também emergiram questões e reflexões nesta linha. Ao investigar as potencialidades do *software* gráfico *Graphmatica*, ele analisou as ações dos estudantes na coordenação de representações múltiplas de funções não tradicionalmente estudadas pelos alunos em sala de aula, como as que são representadas analiticamente por $y = \sqrt{x}$, $y= 1/x$ e $y = x^3$. Seu estudo mostra a forma como conhecimentos foram construídos e novos significados foram atribuídos a estas funções a partir de experiências, vivenciadas pelos alunos em interação com o professor e pesquisador, que foram condicionadas pelo *design* do *software*.

No trabalho de Hershkowitz e Kieran (2001) são apresentadas análises de um estudo, com alunos investigando e resolvendo um problema envolvendo função afim, exponencial e quadrática. Nesse estudo se observou que os alunos realizaram várias ações envolvendo vários tipos de representações (algébrica, numérica e gráfica) simultâneas sempre que surgia a necessidade de compreensões do significado dos conceitos envolvidos.

Aspinwall e Shaw (2002a) discutem a importância das representações múltiplas analisando dois processos de pensamento que consideram contrastantes: o geométrico e o analítico. A posição dos autores não é a de que um processo seja superior ao outro, mas de que os estudantes freqüentemente constroem representações bastante diferentes e

[30] Aumento, ampliação da imagem na tela fazendo parecer que nos aproximamos dela. (DICIONÁRIO BABYLON-PRO, 2002)

idiossincráticas, as quais conduzem a diferentes compreensões de um conceito. Os autores ressaltam a importância de desenvolver nos alunos a habilidade de selecionar, aplicar e transladar entre diferentes representações para resolver um problema matemático. E afirmam que, ao invés de serem apresentados à e terem que interpretar a forma representacional que o professor prefere, os estudantes devem ser levados a criar e ver objetos matemáticos a partir de diferentes perspectivas. O desafio, então, para nós professores, é criar ambientes que exijam dos estudantes tornarem-se fluentes com uma variedade de representações[31].(p.439)

3.2.4. CONJECTURAS E REFUTAÇÕES

As representações múltiplas também são um importante recurso na verificação da veracidade de conjecturas levantadas a respeito de determinados fatos ou objetos matemáticos, ou na busca por compreensão dos conceitos matemáticos. Alguns episódios relatados por Villarreal (1999) e Benedetti (2003) mostram processos de pensamento caracterizados por um encadeamento de conjecturas que são, em alguns momentos, barradas; em outros momentos, confirmadas, e em outros, ainda, reformuladas a partir da interação e das respostas visuais dadas pelo computador. É neste processo de idas e vindas, desafios, comprovações e refutações que o conhecimento é construído.

No caso das estudantes protagonistas dos episódios apresentados por Villarreal (1999), as conjecturas eram elaboradas a partir de conhecimentos anteriores. Referem-se a suposições que, embora não verificadas, têm sustentação em alguma regra conhecida, em alguma concepção presente, ou mesmo numa sugestão apresentada pela colega. O computador auxiliou na verificação dessas conjecturas apresentando, a partir das instruções dadas, exemplos ou contra-exemplos que ajudaram a verificar a veracidade da conjectura ou a gerar uma nova.

> O pensamento das estudantes no ambiente computacional não segue um estilo dedutivista. Os aspectos visuais e as respostas advindas do computador influenciam o estilo de construção matemática feito por elas [as alunas]. Conjecturas e refutações parecem ser a base da lógica da aprendizagem matemática no ambiente computacional. (p.350)

Construindo, confirmando ou refutando conjecturas os alunos desenvolvem processos de coordenação de representações caracterizados pela experimentação que, na pesquisa de Benedetti (2003), foram possíveis graças ao aspecto dinâmico do *software* gráfico, aos seus comandos e à sua capacidade de esboçar diversos gráficos em pouco tempo.

---

[31] Tradução de *The challenge then for us as teachers is to create learning environments that require students to become fluent with a variety of representations.* (p.439)

Tem-se observado que essa lógica é conseqüência do fato de que o computador é um ambiente cibernético, isto é, que responde ao estudante, sabidamente, de acordo com regras pré-estabelecidas (PIERCE; STACEY, 2001; TALL, 1989). Essa é, inclusive, uma das diferenças consideradas relevantes entre esse ambiente de aprendizagem e aquele que se instaura somente com o uso do lápis e papel. Por isso, as conjecturas podem ser testadas pelo computador. Além disso, há uma neutralidade emocional nesse ambiente, no sentido de que o computador não faz julgamentos (como poderia fazer, por exemplo, o professor), mas, simplesmente, responde de acordo com algoritmos programados. Erros podem ser corrigidos sem limites de tolerância, de modo que os alunos se sentem menos frustrados ou ansiosos por seus erros ou exercícios incompletos. Desse modo, os estudantes sentem-se encorajados a explorar e testar suas idéias matemáticas. Configura-se um ciclo: *input* do estudante → *feedback* do computador → reflexão do estudante → novo *input* do estudante, até que o aluno tenha compreendido o conceito envolvido.

Borba e Penteado (2001, 2002) relacionam, a esses fatores, o enfoque experimental que o computador possibilita: "o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas" (p.43). Eles ressaltam que a formulação de conjecturas é um procedimento favorecido pelas TI e que, nesses contextos de ensino, a necessidade de sistematização do conteúdo decorre do processo de investigação, contrariamente ao que geralmente ocorre com as práticas tradicionais de ensino.

Um estudo desenvolvido por Souza Jr (2000), analisou a dinâmica, o envolvimento e os processos de produção de saberes de um grupo sobre ensinar e aprender Cálculo. A presença do computador no trabalho do grupo fez com que novos saberes fossem produzidos, que alguns antigos fossem repensados e, a partir daí, ocorressem mudanças nas práticas de ensinar Cálculo. Um professor afirmou: “acho que a gente não fica mais limitado a teoremas, demonstrações, exemplos e contra-exemplos".

Praticas tradicionais, por vezes, oferecem aos alunos ambientes em que há uma forte ênfase no método dedutivo e nas abstrações. Com as TI surge a noção de representações executáveis, no sentido de que idéias abstratas e conceitos matemáticos se tornam "reais" e podem ser matematicamente manipulados e transformados para testar suas conjecturas. (GÓMEZ, 2001)

Esse jogo de conjecturas e refutações confirma a presença de um considerável grau de imprevisibilidade que se estabelece nos ambientes informatizados e, particularmente, nos ambientes de ensino informatizados. As situações dirigem-se, por vezes, a caminhos totalmente inesperados. Rompe-se a rigidez linear que, em geral, caracteriza a organização das atividades de ensino, que ganham, agora, uma configuração de rede. Machado (2000) nos adverte que, "de um modo geral, a organização linear perpassa o conjunto das disciplinas escolares, embora seja especialmente aguda no caso da Matemática."(p.128)

3.2.5. CONHECIMENTO COMO REDE

Retomemos as concepções de Tall (1989), segundo as quais a mente humana não funciona de maneira seqüencial, mas possui o poder de reconhecer regularidades implícitas em determinado contexto. Isso conduz cada aluno a formar sua própria imagem conceitual dos conceitos matemáticos. Apresentando os conceitos matemáticos aos alunos em um contexto simplificador nós, inadvertidamente, apresentamos regularidades simplificadas as quais farão parte de sua imagem conceitual individual. Mais tarde estas estruturas cognitivas, profundamente impregnadas nos alunos, podem causar sérios conflitos cognitivos e agir como obstáculos na aprendizagem.

A associação do conhecimento a uma rede de significados contrapõe-se à de linearidade em que os conteúdos são ordenados em uma seqüência hierárquica que vai do mais simples ao mais complexo. Machado (2000) ressalta:

> Uma imagem emergente para a representação do conhecimento, inspirada, em grande parte, nas tecnologias informacionais, é a de rede. Conhecer seria como enredar, tecer significações. O que inclui o encadeamento mas abre inúmeras outras possibilidades de articulação de relações. [...] Nosso ponto de partida é o fato de que o conhecimento é algo que se constrói. A questão fundamental é como se constrói o conhecimento (p.100)

Uma rede é formada por nós e ligações entre eles de tal forma que numa rede de conhecimento, ou rede de significações, os nós representam os significados de objetos, lugares, pessoas, conceitos, etc. As ligações representam as relações entre esses nós, que se configuram por construções resultantes da experiência individual e social dos indivíduos. Sob essa ótica, ele destaca três características principais das redes, a saber: o acentrismo, a heterogeneidade e a metamorfose. O acentrismo indica que as redes de significações não têm um centro ou o centro pode estar em toda a parte, isto é, não há um centro absoluto. Nossa atenção elege centros de interesse, diretamente relacionados às circunstâncias e relações que vivenciamos. A heterogeneidade refere-se ao fato de que os nós/significados são, entre si, diferentes pois envolvem relações emergentes de vários contextos, de diversos conteúdos ou disciplinas. O conjunto das disciplinas desempenha o importante papel de caracterizar um mapeamento da rede. Seu tratamento pode ser feito de modo disciplinar mas, no entender de Machado (2000), isso se dará "sempre à custa de um empobrecimento em seu significado" (p.103). A metamorfose expressa um processo permanente de atualização que transforma continuamente as relações que configuram as redes. Assim, um significado nunca está definitivamente estabelecido e o conhecimento está em permanente estado de construção.

A constituição do conhecimento como rede é uma forte característica do pensamento de estudantes envolvidos em ambiente computacional. Não existe linearidade na forma de abordar o conteúdo matemático. As idéias dos estudantes caminham por percursos que se revelam particularmente diferentes da seqüência linear característica das aulas tradicionais. Os nós podem estar ligados diretamente uns aos outros ou pela passagem por outros nós. Desse modo não existe um caminho único e determinado que os ligue. Tais características têm promovido reflexões e conduzido a mudanças de perspectivas nas ações docentes, encaminhando-as, por exemplo, à interdisciplinaridade que se realiza no trabalho com projetos e à adoção de instrumentos de avaliação fundamentados mais em indicativos de competência e menos na "medida" do conhecimento.

A partir da investigação e da experimentação os alunos formulam, reformulam e rejeitam hipóteses; lançam novas questões e apresentam dúvidas em contextos não previstos pelo professor e que não surgiriam em outro ambiente. As investigações e explorações implementadas conduzem-se, por vezes, por caminhos inesperados configurando uma forma de aprender e pensar como "rede", tornando possível estabelecer conexões e novas relações de significados na aprendizagem. (BENEDETTI, 2003; VILLARREAL, 1999)

3.2.6. Concepções matemáticas que se repetem

Nesse ambiente, em que o computador está disponível para ser empregado na análise da validade ou mesmo da correção de concepções que os alunos possuem a respeito de determinados conceitos matemáticos, os alunos freqüentemente manifestam suas compreensões acerca de determinados conceitos. Villarreal (1999) percebeu, por exemplo, a presença, em várias estudantes, da concepção de que uma reta tangente é uma reta que toca a curva em um só ponto. Talvez essa concepção seja a manifestação da presença de uma imagem conceitual demasiadamente simplificada (TALL; 1989), e que pode ser ampliada com o auxilio do computador. Uma outra concepção que apareceu foi a identificação da função derivada com uma reta tangente. Em muitos momentos, também, foi percebida uma tendência, por parte das alunas participantes dos experimentos, de atribuir semelhanças entre os gráficos da função e de sua derivada. Não menos significativo é, associado à pouca familiaridade com funções polinomiais, o fato de as alunas tratarem algumas funções não polinomiais como se o fossem. Por exemplo, quando afirmam que o gráfico da função $f(x) = 3^{x^2}$ tem "formato parabólico".

Vão neste sentido as observações registradas no trabalho de Benedetti (2003). Ele constatou que os estudantes transferem para outras funções informações próprias de funções afim e quadrática. Afirmações como "se o *a* é positivo a função é crescente" são feitas pelos estudantes em situações em que a função em estudo tampouco possui um coeficiente assim denominado. As conjecturas apresentadas pelos alunos, verdadeiras ou não, puderam entretanto ser confirmadas com utilização do *software* gráfico.

Esses estudos mostram que, embora os estudantes tenham concepções erradas ou válidas só para alguns casos, o computador pode desafiar suas idéias através da apresentação de contra-exemplos, da comparação de suas conjecturas com as imagens fornecidas na tela, propiciando a ampliação das imagens conceituais dos estudantes referentes a determinado conceito.

A variedade de possibilidades de respostas que o computador pode apresentar conduz, também, a que os alunos, em sala de aula, comparem, entre si, as soluções obtidas. Eles analisam diferenças e semelhanças e discutem seus processos e resultados, e este ambiente de interação e colaboração pode ser considerado como bastante favorável ao ensino.

3.2.7. APRENDIZAGEM COLABORATIVA

Relacionadas a esse tema estão, de certa forma, as idéias de Machado (2000) quando afirma que

> [...] cresce a cada dia a importância da idéia de que conhecer é, cada vez mais, partilhar significados. Os significados, por sua vez, são construídos por meio de relações estabelecidas entre os objetos, as noções, os conceitos. Um significado é como um feixe de relações. O significado de algo é construído falando-se sobre o tema, estabelecendo conexões pertinentes, às vezes insuspeitadas, entre diversos temas. (p.101)

Observações feitas por pesquisadores mostram que, durante situações de ensino em ambiente computacional, os estudantes, em geral, escolhem trabalhar em grupo e tendem a discutir com mais interesse as atividades matemáticas. Desde que os computadores começaram a ser introduzidos no ensino, por volta de 1980, são apresentados relatos que testemunham a tendência marcante ao desenvolvimento de ambientes de aprendizagem colaborativa.

A partir de *feedbacks* oferecidos pelo computador os alunos iniciam uma troca de experiências, compartilham compreensões, dão sugestões aos colegas e caminham por um jogo de contra-exemplos, novas conjecturas e reformulação de conceitos. E nesse processo de desafios, críticas e revisão das conclusões se aprofundam compreensões matemáticas importantes e surgem novas dúvidas. As dúvidas resultam, por vezes, de informações e/ou ambigüidades apresentadas pela tecnologia que, desse modo, permite criar conexões que talvez não fossem possíveis de serem estabelecidas sem ela e sem o diálogo que se realiza entre os alunos ou entre alunos e o professor.

Discussões sobre conceitos ou sobre as relações entre rotinas numéricas e analíticas e o gráfico permitem aos estudantes privilegiar a compreensão conceitual em vez da aprendizagem de técnicas. No trabalho de Pierce e Stacey (2001) foi observado que a troca de idéias, permite aos estudantes refinar seus pensamentos com base no discurso e na experiência dos colegas. As autoras emprestam, da teoria de Vygotsky, a concepção de que as pessoas têm necessidade de submeter suas idéias a processos de negociação pessoal e social. Nesse caso, tais processos permitem aos estudantes a assimilação de novas informações dentro de seus atuais esquemas ou sua modificação à medida que vivenciam novas experiências. Esquemas são descrições ou imagens mentais que se restringem aos traços essenciais de um objeto ou um processo.

Sentindo-se bastante à vontade para trocar idéias com os colegas, os estudantes encontram respostas não somente para questões específicas propostas, na maioria dos casos pelo professor, como também para suas próprias dúvidas matemáticas, muitas vezes desencadeadas pelo computador. As interações entre os humanos e as coisas envolvidas neste cenário são condicionantes da forma como se realiza o pensamento nas situações de ensino.

3.2.8. Coletivos pensantes

Borba (1999) apoiou-se nas noções de Levy (1993), segundo as quais o pensamento é uma realização de um coletivo pensante formado por seres humanos e tecnologias intelectuais: a oralidade, a escrita e a informática. Ele credita a este aspecto o fato de que os estudantes continuam a usar outras mídias mesmo quando é dada ênfase às novas tecnologias, ou seja, uma vez que o pensamento é produzido por um coletivo, a unidade básica de conhecimento passa a ser o "ser-humano-lápis-e-papel-informática...", em que as reticências sugerem a possibilidade de que novos elementos sejam incorporados a este coletivo, sem que ocorra a exclusão dos velhos.

Benedetti (2003), também, fundamentou seu trabalho em Levy(1993). Suas análises foram realizadas sob o ponto de vista de que nas situações de ensino em que há a presença do computador e, possivelmente, de outros recursos informáticos (em seu caso havia também uma calculadora), ocorre uma clara articulação entre o *software* utilizado, a escrita e a calculadora; entre estes recursos e os alunos; entre os alunos; e entre estes e o professor. Todos estes atores constituem um coletivo que é sujeito do pensamento e produtor do conhecimento e, embora o foco principal de sua investigação esteja nos estudantes, a presença do pesquisador foi determinante nos resultados obtidos. Isto pôde ser constatado, especialmente, pelas características gerais do pesquisador, com experiência de vários anos no ensino médio e gosto explícito pela Álgebra.

Ele acredita que

> O *software* gráfico e as outras mídias estão presentes nesse ambiente intermídias, tanto em termos de tecnologias disponíveis aos atores humanos, como também nos conhecimentos prévios construídos com as tecnologias intelectuais diversas ao longo de suas respectivas histórias. Por essa razão, as interações entre humanos realizadas com as mídias potencializaram as dinâmicas dos coletivos pensantes estudados. (p.280)

Assim, não só as interações entre alunos e *software*, mas entre os alunos e entre o pesquisador e os alunos foram consideradas.

Pensemos, então, no coletivo que se configura em sala de aula com a presença dos computadores: que atores devem ser considerados e que implicações decorrem das infindáveis interações dentro deste coletivo são, não se pode negar, aspectos que ainda podem ser melhor compreendidos. A seguir serão tratadas mais algumas questões voltadas à inserção dos computadores, agora dentro da especificidade dos ambientes de sala de aula.

3.3. O COMPUTADOR EM SALA DE AULA

3.3.1. A FUNÇÃO DO PROFESSOR

Vale ressaltar que raramente é possível, e nem sempre necessário, que um usuário de computador tenha total conhecimento de como determinado *software* é programado ou quais as peculiaridades de sua implementação em um determinado tipo de equipamento (*hardware*). Tall (1989) adverte que, por isso, a ação de um outro agente externo é desejável, referindo-se ao professor. Sua justificativa é fundamentada nas implicações decorrentes dos ditos estímulos cibernéticos, que são aqueles que se originam "de sistemas que são configurados para agir de acordo com regras pré-estabelecidas"[32] (p.39). A imagem conceitual formada a partir de tais estímulos fornecidos pelo computador e construída na mente do aluno é, provavelmente, idiossincrática e o professor tem o papel de orientador a desempenhar através das discussões geradas nesse ambiente, num "Modo Socrático Avançado de ensinar e aprender"[33].

Algumas pesquisas mostram que a simples inserção de TI nas salas de aula não promove mudanças qualitativas desejáveis ao ensino. A concepção de ensino e as crenças

[32] Tradução de ...*system which are set up to act according to pré-ordained rules*. (p.39)

[33] Tradução de *Enhanced Socratic Mode of teaching and learning*. (p.40)

do professor são decisivas na configuração de sua prática ao implementar o uso dos computadores em aula e, até mesmo, na escolha do *software* que será utilizado (CANAVARRO, 1994; NIEDERHAUSER; STODDART, 2001). Ao professor cabe examinar cuidadosamente seus objetivos a fim de escolher os recursos mais apropriados, planejar e avaliar conscientemente a forma de utilizá-los.

Villarreal (1999) e Borba e Penteado (2001) apresentam casos em que as imagens fornecidas pelo computador desafiam concepções anteriores dos alunos sobre determinado tema ou conceito matemático. O professor deve aproveitar as eventuais ambigüidades e o caráter dinâmico deste recurso para estimular atitudes e promover um ambiente de investigação.

3.3.2. DIFICULDADES COM A UTILIZAÇÃO DO COMPUTADOR EM SALA DE AULA

Diante das novas características do ambiente e das relações que se configuram pela presença dos computadores às situações de ensino, algumas dificuldades têm sido apontadas para sua efetiva inserção.

Entre outras, é apontado um inevitável grau de imprevisibilidade causado, por vezes, aos alunos, pelas ambigüidades e limitações de algumas representações visuais. Villarreal (1999) e Benedetti (2003) apontam que essas ambigüidades são inerentes a esse recurso e exigem, dos usuários, habilidade de lidar com questões relativas à escala e ao espectro do plano cartesiano que são apresentados na tela. Embora tais ambigüidades pudessem, por vezes, ser aproveitadas pelos professores para explorar os recursos do computador ou, até mesmo, para conduzir os alunos a atividades de investigação, nem sempre o professor percebe essa oportunidade. Também ocorre que, embora perceba a oportunidade, o professor não saiba como encaminhar adequadamente a situação.

Um outro aspecto levantado por Benedetti (2003) refere-se à configuração do pensamento como rede nos ambientes informáticos. O trânsito por caminhos inesperados da rede pode levar a que algumas questões iniciais sejam abandonadas para se investir em outras, que uma meta seja substituída por outra, que o objetivo primeiro da atividade seja abandonado ou esquecido. Não que as discussões imprevisíveis emergentes durante determinadas atividades de ensino não sejam importantes; conforme já comentado, elas podem ampliar as compreensões dos alunos acerca de determinado tema. Mas o professor deve estar consciente de que há a possibilidade de que isso ocorra e decidir responsavelmente sobre o encaminhamento dessas atividades.

Há evidências de que, em virtude dessas dificuldades, muitos professores preferem conservar uma prática mais tradicional e previsível porque não sabem como trabalhar utilizando computadores com seus alunos. Parece, então, ser bastante apropriado que os professores que se iniciam com o trabalho docente com computadores sejam apoiados por colegas mais experientes, que tenham ajuda na preparação das aulas e que reflitam sobre as situações de ensino e as dificuldades encontradas. Canavarro (1994) considera três elementos – experimentação, discussão e reflexão – como essenciais para que o professor progressivamente integre o computador à sua prática.

Vai ao encontro dessas idéias a opinião de Souza Jr (2000) de que a presença do computador, associado a um processo de reflexão, pode possibilitar um desequilíbrio nas concepções do professor sobre o processo de ensino-aprendizagem. Porém isto propicia uma oportunidade de repensar a sua prática e tomar consciência de um novo papel em sala de aula, tanto do professor como do aluno.

Borba e Penteado (2001) admitem que o uso de tecnologia informática, em geral, constitui-se como uma situação de risco para o professor. A perda de controle e a obsolescência são aspectos que podem conduzi-lo ao que os autores denominaram "zona de risco", caracterizada pela incerteza, pela imprevisibilidade e pela necessidade de avaliação constante das ações.

Uma das razões apontadas para essa perda de controle são os problemas técnicos com os equipamentos. Tais problemas, às vezes, exigem uma solução rápida para que a aula seja realizada, e uma (a solução) ou outra (a rapidez) nem sempre são possíveis. Por vezes torna-se necessária a presença de um técnico, que nem sempre está disponível no momento que o professor precisa. Um técnico em informática é, ademais, um profissional que, em grande parte das escolas, não faz parte do quadro de pessoal. Outra razão para a perda de controle é a diversidade de caminhos e dúvidas que podem surgir quando os alunos trabalham com o computador. Borba e Penteado (2001) advertem que "por mais que o professor seja experiente é sempre possível que uma nova combinação de teclas e comandos leve a uma situação nova que, por vezes, requer um tempo mais longo para análise e compreensão"(p.55). O professor precisa estar disposto a lidar com situações imprevisíveis. Em seu livro apresentam algumas situações que ilustram esta possibilidade: uma delas envolve a utilização do *Geometricks*[34] para o estudo de elipses e hipérboles; uma outra se refere ao estudo da variação dos coeficientes de uma função quadrática por meio de calculadoras gráficas, e, há ainda, uma que visa o estudo de funções trigonométricas, em particular da função tangente por meio de um *software* gráfico.

O segundo aspecto que conduz o professor à zona de risco é a obsolescência. Ela impõe ao professor a necessidade, em geral sentida como dificuldade, de se colocar em

[34] *Software* de geometria dinâmica. www.rc.unesp.br/matematica/tricks

constante estado de atualização do conhecimento sobre o vocabulário, os *softwares*, os equipamentos, enfim, sobre as novidades que surgem, num ritmo inegavelmente veloz, na área de Informática. Dessas novidades decorre a necessidade, muitas vezes, de buscar novas formas de trabalho com os alunos.

Por essas razões, alguns professores preferem manter-se numa "zona de conforto", onde tudo é previsível, conhecido, controlável. Embora muitos manifestem o desejo de modificar sua prática, os professores se sentem inseguros e, apesar de insatisfeitos, preferem desenvolver seu trabalho dentro de padrões já cristalizados. Outros, ainda, transferem sua forma e estilo de trabalho da sala de aula convencional para o ambiente informático. Ocorre que

> [...] após um primeiro momento de fascínio e medo, no contato com as novas mídias, tende-se a reproduzir uma seqüência de atividades que mantém as rotinas conhecidas. Tais resultados representam momentos de transição de quem não foi socializado no uso da informática mas tenta incorporá-la à sua prática profissional. (PENTEADO; BORBA; 2000, p.62).

Embora reconheçam essas dificuldades, colocando-se como professores e apoiados em sua própria experiência, Pierce e Stacey (2001) testemunham que, no decorrer de vários anos, sua maneira de utilizar a tecnologia foi sendo gradualmente aprimorada. Essa colocação é compatível com as constatações de Kendal e Stacey (2001) obtidas de entrevistas e observações de aulas de cálculo com tecnologia CAS, conduzidas por duas professoras. Num segundo momento, de dois observados, elas modificaram suas condutas em relação ao primeiro: a primeira professora adotou procedimentos numéricos e gráficos de derivação com CAS, antes explicitamente descartados, e a segunda reduziu sensivelmente o uso de procedimentos simbólicos em relação aos adotados na primeira fase.

Somam-se às já discutidas, algumas outras dificuldades apontadas por Pierce e Stacey (2001): possíveis confusões entre a notação matemática convencional e a sintaxe própria dos *software,* notadamente os do tipo CAS, e o problema de reconhecer quando o computador está errado. Alguns alunos, ou mesmo professores, podem incorrer no erro de considerar o computador como uma autoridade. A literatura de pesquisa nesta linha, em geral, mostra que, contrariamente a uma crença inicial de que a chegada dos computadores "atrapalharia a aprendizagem" dos alunos, o conhecimento de conteúdos matemáticos se torna imprescindível no monitoramento das atividades realizadas e dos resultados obtidos com ele.

3.4. A "NOVA" MATEMÁTICA EMERGENTE

É relevante que os alunos entendam que a tecnologia não deve se constituir numa figura autoritária, e que sem o conhecimento matemático eles serão vítimas do misticismo do computador. Porém, o desenvolvimento tecnológico está mudando o tipo e a quantidade de Matemática que se deve ensinar, ou seja, é preciso rever e promover mudanças na forma de tratar e na seleção dos conteúdos. (WILLOUGHBY, 2000)

Parafraseando Henry Pollak (1986), Waits e Demana (2000) apontam quais mudanças a tecnologia provoca na Matemática:

- "Algumas matemáticas" tornam-se menos importantes (como as técnicas de manipulação simbólica).
- "Algumas matemáticas" tornam-se mais importantes (como a matemática discreta).
- "Algumas novas matemáticas" tornam-se possíveis (como a geometria dos fractais).

Embora estas mudanças estejam apontadas em um texto voltado à utilização de calculadoras no ensino, percebo que se aplicam, também, ao caso dos computadores, conforme veremos pelo exemplo a seguir.

Borba e Penteado (2001) apresentaram situações de ensino em que os alunos, utilizando calculadoras gráficas e o *software Fun*[35], para computador, formularam conjecturas bastante originais sobre um assunto matemático que tem sido trabalhado de forma bastante "estável". Numa das situações, a conjectura levantada por uma aluna, posteriormente confirmada como verdadeira, foi a de que quando o coeficiente *b,* na equação da parábola, é maior do que zero, a parábola corta o eixo y com sua parte crescente e, que quando ele for menor do que zero, ela corta o eixo y com sua parte decrescente. Num outro momento, ao explorarem como a variação do coeficiente *b* altera o gráfico da função quadrática $y = x^2 + bx + 3$, um grupo de alunos observa que, o vértice se movimenta descrevendo uma outra parábola, de equação $y = -x^2 + 3$. A conjectura do grupo tinha sido elaborada a partir da experimentação e da visualização de vários gráficos. Na exploração dessa conjectura, e na tentativa de demonstrá-la, uma interessante relação algébrica é obtida: "a função $y = -ax^2 + c$ descreve o deslocamento do vértice da parábola do tipo $y = ax^2 + bx + c$, quando variamos o coeficiente 'b' e os coeficientes 'a' e 'c' são mantidos fixos" (p.38). Na visão dos autores, a Informática associada a pedagogias que estejam em conformidade com ela, "podem transformar o tipo de Matemática que é abordada em sala de aula"(p.36).

[35] *Software* para o estudo de funções, criado por Marcelo de Carvalho Borba e Glauter Jannuzzi, ainda em desenvolvimento.

Constata-se, assim, que atividades de experimentação e investigação, favorecidas pela utilização do computador, podem levar à exploração de assuntos ou conteúdos matemáticos que, em geral, não são considerados em aulas onde ele não é utilizado.

Também ficou forte na pesquisa de Benedetti (2003) que o entrelaçamento das diversas mídias disponíveis, a saber: o lápis e papel, a calculadora e o computador, pode transformar qualitativa e quantitativamente a forma de se trabalhar com o tema funções. O caráter quantitativo se refere à possibilidade de representar graficamente muitas funções, por exemplo ao representar famílias de curvas, e qualitativamente ao estudar os efeitos que modificações na expressão analítica de uma função provocam em sua representação gráfica, em seu domínio, etc.

Percebemos, então, que a incorporação das TI aos antigos recursos utilizados por alunos e professores alteram, por assim dizer, os conteúdos tratados em sala de aula, e trazem a necessidade de refletir sobre essas mudanças. Que elementos "daquela" Matemática que se fazia ao utilizar somente o lápis e papel são, ou deveriam ser, mantidos e quais são modificados? O que, efetivamente, o aluno transfere daquele contexto anterior para este em que estão presentes as TI? Como se modifica a forma de tratar os conteúdos matemáticos?

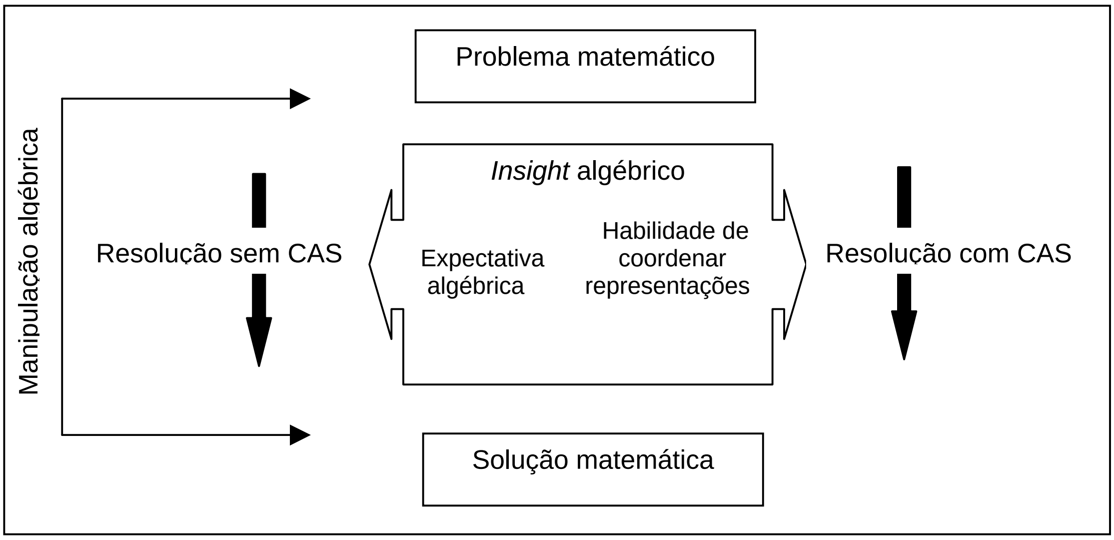
No trabalho intitulado "*Insight* algébrico: a Álgebra necessária para utilizar sistemas de computação algébrica"[36] , Pierce e Stacey (2002) mostram que a ênfase sobre diferentes aspectos do conhecimento algébrico muda quando as tecnologias CAS estão disponíveis nos ambientes de ensino. Por apoiar suas idéias na atividade de resolução de problemas, uma apresentação mais cuidadosa do trabalho de Pierce e Stacey (2002) será feita a seguir.

3.5. Resolução de problemas e computadores

Essas autoras definem "*insight* algébrico" como sendo a parte do sentido simbólico necessário para encontrar uma solução matemática para um problema formulado matematicamente e que, provavelmente, é afetada quando se faz Matemática utilizando tecnologia CAS. Ele inclui o que as autoras chamaram de a expectativa algébrica e a habilidade de coordenar representações. Para elas, enquanto muitas das habilidades técnicas e de manipulação algébrica são essenciais para a resolução de problemas "à mão" e não são necessárias quando se está trabalhando com CAS, o *insight* algébrico é essencial independentemente dos métodos ou recursos utilizados. Essa idéia é expressa no esquema

[36] Tradução de *Algebraic Insight: The Algebra Needed to Use Computer Algebra Systems*.

a seguir, que foi traduzido e adaptado da versão original:



(PIERCE; STACEY, 2002, p.624)

A expectativa algébrica envolve três elementos:

- o reconhecimento de convenções e propriedades básicas, por exemplo, das diferenças entre a linguagem matemática escrita à mão e a sintaxe dos CAS;
- a identificação de estruturas, por exemplo, que permitam fatorar as expressões algébricas de diferentes modos;
- identificação de características-chave, por exemplo, de que a função quadrática tem um extremo, ou de que uma função cúbica pode ter até três raízes reais.

Esses elementos permitem aos alunos controlar e monitorar os resultados apresentados pelo computador. Eles se manifestam, ou não, nas atividades de resolução de problemas com a utilização desse recurso sendo, de qualquer modo, essenciais a esse contexto.

O segundo aspecto do *insight* algébrico, é a habilidade de coordenar representações. Ela abrange:

- a coordenação de representações simbólicas e gráficas, por exemplo, de que o gráfico de uma função polinomial de grau quatro pode tocar o eixo x até quatro vezes;
- a coordenação de representações simbólicas e numéricas, como no caso da função afim à qual se pode associar variações constantes nos valores de y decorrentes de variações constantes em x.

Pierce e Stacey (2002) concluem que tais compreensões sobre o *insight* algébrico podem levar a mudanças nas abordagens atuais de ensino. Os elementos que compõem sua estrutura podem ajudar a orientar o foco das atividades àqueles elementos que precisam ser enfatizados no ensino e na sua avaliação. O *insight* algébrico é, segundo entendem as autoras, necessário para que os alunos tenham sucesso no trabalho com CAS para resolver problemas, para fazer e para aprender Matemática.

Mais especificamente, sobre a resolução de problemas e as várias representações, elas advogam que sua exploração a partir de várias perspectivas, aumenta a profundidade da compreensão de conceitos por parte dos alunos. Soma-se a isso o fato de que, na busca pela solução de um problema, a combinação de diversas abordagens possibilitada pelos CAS, exige muito menos esforço. Os estudantes devem ser encorajados a moverem-se entre as representações a fim de encontrar a informação procurada.

O computador amplia a gama de problemas que os estudantes podem resolver e não mais é preciso começar pelos mais simples em direção aos mais complexos. Vale lembrar aqui as concepções de Tall (1989), segundo as quais esse procedimento pode causar danos à aprendizagem no sentido de que conduz à formação de imagens conceituais restritas, ou limitadas, relativas aos conceitos matemáticos.

Embora, nas entrevistas realizadas por Pierce e Stacey (2001), os alunos tenham sugerido que é necessário compreender os conceitos matemáticos através de exemplos básicos feitos manualmente, as autoras destacam que, mesmo nesse caso, os CAS apresentam vantagem. Seus recursos encorajam os estudantes, ao compreenderem os princípios envolvidos nos exemplos simples, a aplicá-los em problemas que eles consideram mais difíceis, ou percebem como mais complicados.

Entendo que cabe ao professor a nem sempre fácil tarefa de escolher e/ou elaborar problemas que atendam ao que ele pretende que os alunos trabalhem em termos de conteúdos e conceitos matemáticos, e que aproveitem as possibilidades que as TI oferecem.

No tocante aos tipos de problemas que devem ser propostos aos alunos Borba e Penteado (2001) assinalam: "Traçar um gráfico de uma função como $y = 2^x$ pode ser um problema que engaje alguém em um coletivo onde não haja mídias informáticas, mas não o será onde houver um *software* que permite o traçado de gráficos" (p.47). Professores e educadores matemáticos devem estar atentos para a forma como o ensino de Matemática pode se constituir a partir das possibilidades que se apresentam nos ambientes em que se encontram presentes as TI.

Elas favorecem a exploração de problemas abertos e, ademais, em virtude da imprevisibilidade presente nas atividades realizadas com o computador, novos e inesperados problemas, na maior parte das vezes, propostos pelos próprios alunos, podem surgir. A citação a seguir refere-se ao problema de analisar o que ocorre com o gráfico de uma função quadrática quando variamos o coeficiente 'b' de sua equação:

> É interessante notar que, nessa ocasião, na qual temos um problema aberto ligado ao trinômio $y = ax^2 + bx + c$, chegamos a um problema mais específico, que é o de encontrar um gráfico que descreve o movimento do vértice. Esse último problema mobilizou boa parte da turma e, então, surge um terceiro problema, ligado à justificativa da solução encontrada para o anterior, que é provocado por um questionamento feito pelo professor. Para este terceiro problema, aparece uma solução que mostra a relação da álgebra com o gráfico. (BORBA; PENTEADO, 2001, p.38)

Foram também realizados outros estudos em que o computador se mostrou um poderoso instrumento ao ser aliado a atividades de resolução de problemas que visam à descoberta, ou redescoberta de novos conceitos matemáticos e, porque não dizer, à construção de novos conhecimentos. Segundo Borrões (1998), o computador "é o instrumento mais poderoso de que actualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar esse tipo de experiências aos seus alunos" (p.1). Guardadas as devidas proporções, parece inegável que se deva aliar as vantagens decorrentes de suas potencialidades para criar novas alternativas na busca de uma aprendizagem mais efetiva e significativa da Matemática.

O trabalho de Borrões (1998) apresenta propostas de atividades em Álgebra e Geometria, privilegiando os três tipos que, na opinião do autor, mais favorecem a aprendizagem significativa da Matemática: a aprendizagem por descoberta, a resolução de problemas e a modelação[37]. O autor considera que, na resolução de problemas, é fundamental que o aluno tenha um espírito aberto, no sentido de adotar uma atitude de curiosidade e exploração; a disposição de experimentar, de construir hipóteses e de demonstrar. Essas atitudes, desejáveis nos alunos, estão em forte sintonia com as potencialidades do computador que permitem explorar conceitos ou situações, descobrir relações ou semelhanças, modelar fenômenos, testar conjecturas, inventar e reinventar a Matemática.

As atividades propostas por ele envolvem a utilização de planilha de cálculo, o *Excel*, para a exploração do conceito de proporcionalidade direta, através de atividades de descoberta envolvendo a relação entre peso e volume de barras de ferro e entre área e perímetro de retângulos, e problemas e atividades de modelação com função quadrática, relacionados a transporte de passageiros.

As planilhas de cálculo também foram objetos de exame nas investigações realizadas por Hershkowits e Kieran (2001). Suas análises destacam as planilhas de cálculo (*Excel*) como uma alternativa eficiente para a resolução de problemas que visam estimular

[37] Preferi, neste caso, manter o termo modelação, utilizado pelo autor, embora se deva destacar que o termo refere-se ao que costumamos, no Brasil, chamar de modelagem.

procedimentos recursivos, entretanto, segundo suas compreensões, seu uso implica na necessidade de dedicar mais tempo à aprendizagem da Álgebra, uma vez que as representações algébricas parecem ter sua importância minimizada pelos alunos, quando utilizam esse recurso. Ademais, o uso de tais planilhas tem sido associado ao aspecto de "minimizar o esforço" do aluno nas atividades; tal argumento não deve ser utilizado para justificar seu uso no ensino de Matemática.

Waitts e Demana (2000), relacionando "velhos" (lápis e papel) e "novos" recursos (calculadora), entendem que há três possibilidades de enfoque para a resolução de problemas:

1. Resolver problemas usando lápis e papel e então conferir os resultados usando tecnologia.
2. Resolver problemas usando tecnologia e então confirmar os resultados usando lápis e papel.
3. Resolver problemas em que os alunos possam escolher se é mais apropriado usar lápis e papel, calculadora, ou uma combinação de ambos.

Considero oportuno acrescentar a estas 3 possibilidades apresentadas que há problemas matemáticos que só podem ser, ou poderiam ter sido, resolvidos com o computador. E em termos de ensino, algumas atividades de resolução de problemas só se tornaram possíveis graças à presença do computador na sala de aula.

Finalmente, o trabalho de Allevato e Onuchic (2003) discute as justificativas e desenvolve reflexões sobre as implicações da utilização da resolução de problemas como uma metodologia de ensino de Matemática, bem como sobre a associação do computador ao processo de construção do conhecimento e de formalização de conteúdos matemáticos. É apresentado o caso de uma aula cujo objetivo era levar os alunos, através de um problema, à construção/compreensão do conceito de Taxa Média de Variação (TMV); e para cuja resolução pôde ser utilizada a planilha eletrônica Excel. A diversidade de meios escolhidos pelos alunos para a resolução (algebricamente, pela tabela ou pelo gráfico) levou as autoras a ponderar sobre a possibilidade de permitir que o aluno escolha a forma de solução que lhe pareça mais natural ou mais simples. Acrescente-se a este, o fato de algumas duplas terem coordenado mais de um desses meios (representações múltiplas), o que permitiu uma compreensão mais ampla do conteúdo em questão. No tocante à forma e intensidade de utilização do computador para a resolução do problema, evidenciou-se a facilidade e rapidez com que os alunos implementaram múltiplas representações, bem como testaram conjeturas (como ocorreu quando a classe indicou uma segunda forma de calcular a TMV). Como vimos nos estudos já analisados, estes aspectos têm sido destacados como potencialmente favoráveis ao ensino pois desobrigam os alunos de tarefas essencialmente mecânicas ou operacionais, proporcionando mais tempo a reflexões de natureza interpretativa e conceitual.

3.6. A MINHA PESQUISA NO CENÁRIO DAS PESQUISAS JÁ REALIZADAS

Após analisar com uma relativa proximidade aspectos considerados na literatura de pesquisa voltada à utilização dos computadores na Educação Matemática, é preciso afastar-me um pouco. O afastamento me proporciona uma visão global deste amplo cenário, que é necessária à percepção das lacunas ainda existentes e, em especial, daquela em que se insere a minha pesquisa.

Ao buscar compreender **de que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática, quando estão utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções**, percebo, inicialmente, que não terei quase nenhum aporte de outras pesquisas que relacionam a utilização do computador a aspectos específicos relacionados à resolução de problemas. Pouquíssimos trabalhos apresentam esta característica (PIERCE; STACEY, 2002) e, que tenha a resolução de problemas como metodologia de ensino não encontrei nenhum.

Borba e Penteado (2001, 2002) acreditam que em ambientes de ensino em que estão presentes as TI, a sistematização do conteúdo decorre do processo de investigação, contrariamente ao que geralmente ocorre com as práticas tradicionais de ensino. Uma vez que esta também é uma característica do ensino de Matemática através da resolução de problemas, o que decorre da associação destes dois instrumentos?

Nos estudos considerados na revisão de literatura apresentada, foi dispensada grande atenção ao aspecto das representações múltiplas (BENEDETTI, 2003; BORBA, 1995; FRIEDLANDER; STEIN, 2001; PIERCE; STACEY, 2001; VILLARREAL, 1999) e é consenso que é preciso estimular os alunos a coordenar aspectos algébricos, gráficos e numéricos, especialmente por ocasião da exploração do conteúdo relativo a funções. Considero apropriado antecipar que as observações por mim realizadas sugerem que para utilizar eficientemente o *software* gráfico *Winplot* é, na realidade, não apenas conveniente mas necessário que o aluno domine, ou aprenda, aspectos da linguagem algébrica e, por que não dizer, da Álgebra. Neste particular, talvez meu trabalho possa complementar os até então realizados, no que tange aos novos aspectos matemáticos emergentes de ambientes informatizados de ensino. A linguagem, a propósito, está entre os temas que pretendo analisei a partir de meus dados, no sentido de que parece haver relação entre o domínio da linguagem matemática e a habilidade, ou possibilidade, de utilizar eficientemente o *software*, relação que também não foi explorada nos trabalhos consultados.

Pierce e Stacey (2002) referem-se ao *insight* algébrico necessário aos alunos que se envolvem em atividades de resolução de problemas com tecnologia CAS, mas a especificidade do *software* gráfico não foi considerada. Soma-se a este o fato de que, embora Benedetti (2003) tenha investigado situações com utilização desse tipo de *software*, não encontrei nenhum trabalho em que o *software Winplot* fosse o recurso informático utilizado, conforme é o meu caso.

Com relação à pesquisa feita em sala de aula, encontramos em Borba e Penteado (2001) vários exemplos de atividades com alunos de primeiro ano do curso de graduação em Biologia. Na disciplina Matemática Aplicada, ministrada pelo primeiro autor, calculadoras gráficas e *softwares* têm sido utilizados de forma acentuada por muitos anos e as atividades realizadas pelos alunos trazem a visualização e a experimentação para o centro da aprendizagem matemática.

Entretanto, retorno à questão da necessidade de desenvolver mais pesquisa sobre a prática e em sala de aula, e julgo procedente retomar as questões já formuladas no capítulo 1: imersos num ambiente informatizado de aprendizagem, e totalmente voltado à resolução de problemas, como os alunos manifestam sua "produção matemática"? Que novas possibilidades se apresentam a eles, quanto à forma de aprenderem Matemática?

Capítulo 4

CONTEXTO DO ESTUDO

Capítulo 4 - Contexto do Estudo

CAPÍTULO 4

CONTEXTO DO ESTUDO

> Para o investigador qualitativo divorciar o acto, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado.
>
> ROBERT BOGDAN; SARI BIKLEN

Neste capítulo pretendo apresentar as características do contexto em que minha pesquisa foi desenvolvida. A importância dessa caracterização apóia-se na visão holística que caracteriza os estudos qualitativos, conforme já foi comentado no capítulo 1. Ela parte do princípio de que a compreensão de um fenômeno só é possível a partir da compreensão das inter-relações que configuram um determinado contexto.

Lüdke e André (1986) enfatizam este aspecto afirmando que

> A justificativa para que o pesquisador mantenha um contato estreito e direto com a situação onde os fenômenos ocorrem naturalmente é a de que estes são muito influenciados pelo seu contexto. Sendo assim, as circunstâncias particulares em que um determinado objeto se insere são essenciais para que se possa entendê-lo. (p.12)

A indiscutível complexidade do cenário em que se realiza o ensino da Matemática leva os professores e pesquisadores a buscarem fundamentação e perspectivas para investigar as variadas questões que surgem neste cenário. Romberg (1992) apresenta as idéias de E. G. Begle (1961) segundo as quais esta complexidade decorre da presença e da inter-relação de, pelo menos, cinco elementos: o professor, os alunos, a disciplina (no caso, a Matemática), a escola e a sociedade.

As informações aqui apresentadas foram obtidas, especialmente, na fase inicial do modelo preliminar, que denominei fase de exploração (p.21). Partindo de aspectos mais gerais até atingir os mais específicos, trarei alguns dados que considerei relevantes, referentes às demandas atuais para a formação profissional, às leis, à instituição de ensino, ao curso, à disciplina; ao perfil do professor da turma, dos alunos pesquisados e, até mesmo, do pesquisador. Afinal, também é essencial às pesquisas qualitativas, mais do que buscar uma suposta neutralidade, que o pesquisador tenha consciência de sua interferência no objeto de pesquisa.(LÜDKE; ANDRÉ,1986)

Desse modo, o texto a seguir, está estruturado em subseções intituladas de acordo com cada um desses aspectos, buscando caracterizar...

4.1 ...AS DEMANDAS ATUAIS PARA A FORMAÇÃO PROFISSIONAL

Não somente o curso de Administração de Empresas, onde foi realizada esta pesquisa, mas os cursos superiores em geral, em que se tem como foco a formação profissional, têm sido constantemente orientados a direcionar suas ações à formação de cidadãos efetivamente capacitados a atender às atuais demandas sociais e do mundo do trabalho. Capacidade de adaptação a novas situações, persistência e criatividade no enfrentamento e busca de soluções para novos problemas são qualidades fundamentais que devem, tanto quanto possível, ser estimuladas e desenvolvidas com os alunos dos cursos superiores.

E a resolução de problemas, em Matemática, tem ganhado força porque, no tocante à área de Administração de Empresas, temos presenciado uma crescente valorização dos Métodos Quantitativos. Eles são utilizados na resolução de problemas envolvendo modelagem empresarial, planejamento financeiro, análises macro e microeconômicas, entre outros ramos da atividade empresarial. Não faltam exemplos que ratificam a grande importância da Matemática nos processos de tomada de decisões em empresas dos mais variados ramos de atividade.

Igualmente, a incorporação das tecnologias informáticas é parte das demandas que têm se apresentado aos profissionais em geral, e ao administrador de empresas em particular. Elas modificaram radical e totalmente, não somente a configuração física das empresas mas a maneira de fazer negócios, globalizando e configurando ilimitadas oportunidades e formas de controle e administração. As faculdades de Administração de Empresas têm se equipado, instalando recursos tecnológicos de última geração e cobrando a incorporação de tais recursos nos ambientes de ensino, particularmente nas aulas. Certamente, para que os alunos façam um bom uso da tecnologia atualmente disponível nas escolas, os professores também necessitam aprender a utilizá-la.

É neste quadro de demandas que se busca inserir a formação dos alunos do curso superior de Administração de Empresas que foram sujeitos desta pesquisa.

4.2 ...OS ASPECTOS NORMATIVOS E LEGAIS

Nesta seção procuro destacar alguns pontos das atuais orientações curriculares, diretrizes de curso, leis educacionais, etc., às quais estão sujeitos os atuais cursos de Administração de Empresas. Uma vez que esta pesquisa é apoiada em resolução de problemas e utilização dos computadores no ensino de Matemática, atenho-me a estes dois campos teóricos.

A resolução de problemas como metodologia de ensino tem sido recomendada em orientações curriculares atuais, vale ressaltar, desde o ensino fundamental, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN; 1998).

No ensino superior, em que se tem como foco a formação profissional, as ações devem ser conduzidas à formação de cidadãos capacitados para o mundo do trabalho. A própria LDB, em seu artigo 3º, § XI, estabelece como um dos fins da Educação Nacional a "vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais". A realidade social e profissional atual configura-se pelas constantes mudanças e pelo confronto e busca permanentes de solução para novos problemas.

Particularmente para os cursos de Administração de Empresas, as Diretrizes Curriculares determinam que as práticas pedagógicas devem favorecer a adoção de procedimentos que visem à problematização dos assuntos tratados e à assimilação ativa de conhecimentos. Essas mesmas diretrizes indicam que entre as habilidades que o profissional deve ter está reconhecer e definir problemas, e equacionar soluções.(BRASIL; 1999)

Bastante relevantes no contexto dessa discussão são as palavras de Richardson (1999)[38] ao refletir sobre as políticas educacionais no contexto da globalização e idealizar a escola do século XXI:

> "Na medida em que a infra-estrutura do local de trabalho evolui para uma comunidade de aprendizagem e o conhecimento passa a ser o centro social das atividades, as expectativas estarão orientadas na direção de preparar as futuras gerações para esse novo contexto de trabalho. Os alunos precisarão aprender a desenvolver um espírito crítico, um questionamento crescente e um raciocínio voltado para a solução de problemas". (p.154)

Assim, apesar da já grande diversidade de enfoques da ação docente, os professores têm sido levados a imprimir novas ações de ensino, caracterizadas por um relacionamento dialético entre teoria e prática. E "a integração com a contemporaneidade do mundo implica maior desenvolvimento e apropriação da ciência e tecnologia enquanto instrumentos da dinâmica do sistema produtivo" (BRASIL; 1999, p.3). Ao curso de Administração de Empresas as Diretrizes Curriculares recomendam explicitamente a incorporação das, assim chamadas, tecnologias inovadoras.

[38] Em conferência proferida no dia 04/11/1998 no Fórum de Debates sobre as Políticas e as Reformas Educacionais - UESC/BA.

Os organismos que fiscalizam e regulam as atividades profissionais promovem estudos e fornecem orientações para a formação superior. Em uma pesquisa nacional, encomendada pelo Conselho Federal de Administração, os entrevistados - administradores de empresas profissionais e professores desses cursos superiores - apontaram a necessidade de conhecimentos de Informática como um dos conhecimentos mais relevantes ao profissional desta área. (ANDRADE;1999)

Certamente as universidades se colocam atentas e buscam ajustar as características da formação que oferecem às orientações dadas por estes organismos oficiais e instituições.

4.3 ... A INSTITUIÇÃO

A universidade em que realizei minha pesquisa é uma instituição particular de ensino, localizada na cidade de São Paulo/SP. Com mais de 30 anos desde sua fundação conta, atualmente, com várias unidades tanto na cidade de São Paulo como fora dela, e oferece um grande número de cursos superiores na maioria das áreas do conhecimento.

Em seu catálogo geral lê-se, a respeito de seu trabalho, que a universidade busca o melhor na formação de nossa juventude, a fim de que entregue ao mercado de trabalho cabeças formadas para atender às demandas e à agilidade das mudanças que ocorrem nos meios e processos produtivos, "cada vez mais dependentes da eletrônica e de suas inovações."

A universidade conta com uma boa estrutura física: as unidades são estrategicamente localizadas, oferecendo uma relativa facilidade de acesso a alunos de diferentes regiões da cidade, os prédios e as salas de aula são amplos e bem conservados, e as unidades contam com bibliotecas, laboratórios e oficinas bem equipados.

Apesar disso, apresenta, como tantas outras, sinais da vertiginosa expansão quantitativa pela qual passou o Ensino Superior no Brasil, nas últimas décadas. As turmas são bastante numerosas e formadas por alunos que, de um modo geral, não têm dificuldade de ingressar no curso superior. Não porque estejam bem preparados, mas porque a universidade abre muitas vagas e oferece oportunidades de ingresso através de processos seletivos que se realizam mais de uma vez para compor cada nova turma. Certamente, é perceptível como muitas vezes é supervalorizada a quantidade em detrimento da qualidade.

Assim ocorre, também, no curso de Administração de Empresas e, especificamente, na turma em que realizei esta pesquisa.

4.4 ... O CURSO

Este curso de Administração de Empresas oferece habilitação em Administração Geral e seu currículo pleno é organizado em 8 semestres letivos.

As disciplinas que pertencem ao grupo dos, assim chamados, Métodos Quantitativos são ministradas nos 6 primeiros semestres e têm suas cargas horárias de acordo com a tabela a seguir:

Semestre	Disciplina	Carga - horária (hs/aula)
1º	Matemática I	80
2º	Matemática II	80
3º	Matemática Financeira I	40
4º	Matemática Financeira II	40
5º	Estatística I	80
6º	Estatística II	80

O curso é oferecido em período parcial, de modo que o aluno pode optar pelo horário matutino ou noturno.

4.5 ... A DISCIPLINA MATEMÁTICA II

A disciplina em que realizei a coleta de dados foi a Matemática II e, portanto, estendeu-se por todo um semestre - o segundo semestre do ano de 2002.

Quando realizei a coleta de dados, a turma já havia cursado, no primeiro semestre, a disciplina Matemática I. Apresento, a seguir os programas de Matemática I e II porque considero que isto seja importante para melhor compreender os fatos que se sucederam durante a coleta, alguns dos quais foram selecionados e serão apresentados e analisados no próximo capítulo.

Conteúdo programático e Planejamento Didático[39]

Disciplinas: Matemática I e II

Semestre letivo: 1º e 2º

Semanal: 4h/a

Professor:...........................

Campus:...............................

Turno: Matutino

Habilitação: Administração Geral

[39] O conteúdo é cópia de algumas partes do documento fornecido a mim, pelo professor da turma. Omiti o nome do professor e do campus a fim de preservar o anonimato do professor e da universidade.

Finalidade básica

A finalidade básica da disciplina Matemática é a de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Objetivos da disciplina

Capacitar o aluno para:

a) Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para formar melhores profissionais em Administração de Empresas
b) Identificar, interpretar e utilizar representações algébricas e geométricas em situações-problema, que envolvam temas da Administração de Empresas.
c) Compreender e familiarizar-se com técnicas e símbolos matemáticos que ajudem a estimular e organizar o pensamento.
d) Operar com formulações e modelos matemáticos.
e) Desenvolver formas de raciocínio lógico, crítico e analítico.
f) Desenvolver habilidades para a resolução de problemas, validando estratégias e resultados.
g) Expressar-se de maneira crítica e criativa na resolução de problemas.
h) Interagir com seus pares de forma cooperativa, buscando soluções para situações-problema.

Ementa da disciplina

Funções - aplicações à Administração, Economia e Ciências Contábeis - Ajustamento de curvas - Seqüências - Custo marginal - Receita marginal - Custo e Receita máxima - Lucro máximo.

Conteúdo programático

Matemática I (1º semestre)

1. Funções

1.1 Funções: Constante, Afim, Linear, Quadrática
1.2 Aplicações à Administração, à Economia e às Ciências Contábeis
1.3 Lei da Oferta e Demanda, Lei da Receita e Custo (lucro - prejuízo)
1.4 Funções: Modular, Raiz Quadrada e Hipérbole
1.5 Funções: Exponencial e Logarítmica
1.6 Exercícios aplicativos na Administração, Economia e Ciências Contábeis

Matemática II (2º semestre)

1. Ajustamento de curvas

1.1 Reta

1.2 Parábola

1.3 Regressão linear

1.4 Exercícios aplicativos na Administração , Economia e Ciências Contábeis

2. Seqüências

2.1 Limitada inferiormente e superiormente

2.2 Seqüência crescente e decrescente

2.3 Seqüência convergente e divergente

2.4 Imagem de uma função quando x assume os valores de uma seqüência

2.5 Exercícios aplicativos na Administração de Empresas

3. Custo e Receita Marginal

3.1 Para funções: constante, afim, quadrática, polinomial, exponencial e logarítmica.

3.2 Exercícios aplicativos na Administração, na Economia e nas Ciências Contábeis.

Conforme já foi esclarecido no capítulo 1, o método adotado para a coleta de dados foi a observação participante[40]. A turma observada era do período matutino; eram quatro horas/aula semanais, às segundas-feiras, começando às 8 horas da manhã e encerrando às 11 horas e 40 minutos, com um intervalo das 9 horas e 40 minutos até às 10 horas.

Vale reafirmar que, a essa altura, os alunos já haviam cursado a disciplina Matemática I, no primeiro semestre daquele mesmo ano de 2002, com o mesmo professor que estava, agora, encarregado da Matemática II.

A metodologia de ensino utilizada na disciplina era, como o próprio professor chamava, o ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas. Nesta metodologia o professor elaborava e apresentava, aos alunos, situações-problema cujos enunciados envolviam os conteúdos matemáticos que os alunos iam aprender em seguida. Vejamos, expressa por suas próprias palavras, registradas na entrevista, em que consiste essa metodologia:

> A metodologia que nós aplicamos sempre foi no mesmo estilo: eu começo um tópico da aula com um problema que estimula os alunos a pensar, a discutir. Ele é um **gerador da teoria** Matemática que vai surgir. Por exemplo: esse primeiro semestre [refere-se ao 1º semestre de 2002] nós

[40] Doravante será designada, muitas vezes, apenas como observação, a fim de evitar repetições.

> dedicamos a funções. Então, para conseguir o conceito de função nós propusemos quatro problemas introdutórios que ao final de sua aplicação nós pudemos, então, obter os conceitos da teoria de funções: o domínio de função, imagem...E começamos, então, a apresentar modelos de funções, que são as funções elementares. Então, a partir dos problemas, nós encontramos a teoria Matemática e apresentamos a Matemática que estava envolvida. Depois disso é que nós fazíamos problemas aplicativos.

A fala do professor sugere que a metodologia de ensino utilizada era constituída de duas fases diferentes, cada uma delas com objetivos diferentes para os problemas que eram propostos aos alunos. Uma primeira fase com problemas geradores de novos conteúdos, que eram discutidos e resolvidos antes da formalização do conteúdo matemático envolvido no problema, isto é, eram problemas utilizados para introduzir um novo conteúdo. E um segundo momento da metodologia em que os problemas visavam à aplicação do conteúdo matemático aprendido; esses o professor chamava "problemas aplicativos".

Agregado a esta metodologia, o professor optou por um enfoque voltado às aplicações na área de Administração de Empresas. Ele sente que as aplicações tornam as disciplinas de Matemática mais atraentes e que fazem com que aumente o interesse do aluno pela matéria, em sala de aula:

> É... a idéia é a seguinte: quando eu comecei a lecionar para a turma de Administração, onde os problemas que apareciam eram problemas originários de uma teoria Matemática que estava sendo aplicada, então, ele [o aluno] aparecia com uma lista de exercícios (...). Na maioria das vezes, não tinha, muitas vezes, relação com o curso que estava sendo feito que era, no caso, Administração. Mas eu, ao longo do tempo, achei que o aluno se interessava mais quando estava sendo falado da ... teoria junto com o curso de Administração, que ele estava fazendo. Estava relacionado, então ele tinha mais interesse, ele achava que aquilo servia pra ele.

Desse modo, a maior parte dos problemas geradores e dos problemas aplicativos eram relacionados a temas voltados à área de Administração de Empresas.

Também era marcante o fato de que os problemas propostos pelo professor, geradores ou aplicativos, eram problemas fechados, no sentido de Shimada (1997) e Pehkonen (2003), isto é, eram problemas de solução única e nos quais tanto a situação inicial (proposição, ponto de partida) como o objetivo final (resposta, meta) eram pré-determinados, conforme discutido no capítulo 2 (p.43 e 44).

No semestre em que participei das atividades da disciplina, as duas primeiras aulas (das 8h às 9h e 40 min) foram na sala convencional, conduzidas, essencialmente, pelo professor, enquanto eu observava e fazia anotações. Quando o professor propunha problemas para os alunos resolverem eu os ajudava, desempenhando, nestes momentos, um papel mais ativo, mais "participante". O professor sempre pedia para os alunos trabalharem em grupos de 2 ou 3. Quando tinham alguma dúvida no enunciado ou na resolução, eu e o professor os ajudávamos dando dicas e sugestões para a resolução. As duas últimas aulas (das 10h às 11h e 40 min) eram realizadas no laboratório de Informática e totalmente destinadas à resolução de problemas utilizando o *software Winplot*. O trabalho era, então, colocado totalmente nas mãos dos alunos, no sentido de que raramente ocorriam momentos de aula sob a condução do professor. Os enunciados eram entregues aos alunos em folhas xerografadas. Em duplas, os alunos se punham a resolver os problemas propostos. Quando a dupla terminava a resolução de um problema, entregava a resolução por escrito ao professor. Então a dupla recebia mais uma folha, com um novo problema, e assim por diante. Novamente eu e o professor os auxiliávamos quando solicitavam e, portanto, agora eu participava intensamente uma vez que estes eram os momentos relevantes para minha pesquisa. Todas as resoluções escritas dos problemas, feitas pelos alunos, me foram cedidas pelo professor, e se constituíram em fonte de dados.

O professor explicou como via o trabalho realizado naquele segundo semestre, em Matemática II, com a utilização do *Winplot*:

> Então... a metodologia de ensino é o ensino da Matemática via resolução de problemas. Só que nesse segundo semestre, nas aulas que você participou, nós estávamos **aplicando** e utilizando, agora, tecnologia, que é o uso do *Winplot*. Então, como nós estávamos falando da teoria de funções, então nós aproveitamos, nessas primeiras aulas de agosto, para dar o conhecimento do processador matemático, do *Winplot*. E então, foi ele que nós utilizamos.

Gostaria de salientar, complementando esta fala, o fato de que o professor conduziu as primeiras aulas no laboratório de Informática, daquele semestre, com o intuito de familiarizar os alunos com o *Winplot*.

Depois, durante o restante do semestre, essas aulas destinavam-se às aplicações, ou seja, à utilização do computador para resolver problemas em que eram aplicados os conteúdos relativos a funções, previamente vistos na sala de aula. Tais problemas eram, freqüentemente, semelhantes aos resolvidos nas primeiras aulas da manhã, em que os alunos estavam sem o computador. Ou seja, muitas vezes, problemas semelhantes aos resolvidos com lápis e papel (na primeira parte da manhã) eram propostos para serem resolvidos no laboratório (nas duas últimas aulas da manhã) pois, para o professor, tinham objetivos de fixação da aprendizagem e de aplicação na área de Administração de Empresas. Os problemas resolvidos com o *Winplot* apresentavam, por vezes, variações nos coeficientes das funções envolvidas, em relação aos resolvidos sem o computador, que geravam valores numéricos demasiadamente grandes para serem operados com lápis e papel. Mas os enunciados e expressões de funções eram similares e eram, também, sempre problemas fechados. Eu diria, ainda, que eram problemas que não apresentavam grandes complicações, mas envolviam os conteúdos básicos de funções.

Pedi ao professor que confirmasse os conteúdos que já haviam sido trabalhados no primeiro semestre, na disciplina Matemática I:

> Então... no primeiro semestre [em Matemática I], o primeiro modelinho de função é a função constante. Chegamos à função constante, de novo através de problemas introdutórios, depois problemas aplicativos. Depois partimos para a função afim; então, terminado o conceito da função afim, nós fazíamos problemas aplicativos do conceito da função afim. Depois fizemos, como terceira função, função quadrática; introduzimos dois problemas que foram os geradores da noção de trinômio do segundo grau, depois problemas aplicativos.

Deste modo, ao iniciarem Matemática II, os alunos já tinham aprendido os conteúdos relativos ao conceito de funções e as funções elementares do tipo constante, afim e quadrática.

4.6 ...OS RECURSOS DISPONÍVEIS

A universidade onde realizei minha pesquisa apresenta uma estrutura física bastante boa. Em termos de sala de aula não haveria nada a ressaltar a não ser o fato de estar sempre "em ordem" para a realização da aula: a sala estava sempre limpa e arrumada para receber os alunos, giz branco e colorido à disposição. O retroprojetor, quando solicitado, já estava na sala de aula quando chegávamos. Era possível xerografar material para as aulas, de tal forma que em todas as aulas o professor levava, para os alunos, os enunciados dos problemas em folhas impressas.

Um laboratório de Informática, entre vários de que a universidade dispõe, ficou reservado para a disciplina Matemática II, todas as segundas-feiras, durante todo aquele semestre. Embora utilizássemos o laboratório, habitualmente, apenas nas duas últimas aulas, ele estava reservado a manhã inteira, para as quatro aulas desta disciplina. Assim, uma única vez, em que o professor decidiu realizar todas as aulas daquela manhã utilizando o computador, o laboratório estava disponível. Era equipado com 30 computadores, todos muito novos, com recursos de *softwares* atualizados, ligados em rede e com acesso livre à Internet.

O *software* que utilizamos, o *Winplot*, é gratuito e não nos trouxe problemas no que diz respeito à instalação. O professor informou, logo no início do semestre, quando reservou o laboratório para as aulas, que este seria o *software* utilizado e, assim, um técnico se encarregou de instalar em todas as máquinas.

4.7 ...O PROFESSOR

O professor da turma é professor de Matemática por opção. Iniciou sua trajetória profissional fazendo, após o então curso ginasial (equivalente hoje, à segunda metade do ensino fundamental), o curso de formação de professor primário, e iniciou no magistério lecionando para o quarto ano primário. Fez curso superior de Matemática e passou, então, a lecionar em cursos preparatórios para vestibular. Na ocasião, ocupou também o cargo de diretor pedagógico.

Logo após sua formatura passou a trabalhar no ensino superior, lecionando várias disciplinas para vários cursos, numa instituição pública. Tem um vasto conhecimento de Matemática e grande experiência (mais de 30 anos) como professor. Sua caminhada se fez, quase totalmente, pela trilha do ensino tradicional o que não impede que seja marcada por momentos que atestam o trabalho realizado por alguém que é considerado um bom professor.

Apesar de uma prática visivelmente já cristalizada em muitos aspectos, é aberto à introdução dos computadores como auxiliares no ensino de Matemática. Não fez estudos específicos a este respeito, de tal modo que suas idéias acerca da utilização desta TI nas aulas de Matemática eram resultantes, unicamente, de algumas aulas que ministrou para alunos do curso de licenciatura em Matemática, nas quais já havia utilizado um pouco o *software Cabri-géomètre* e, mais intensamente, em aulas de Cálculo, o *Winplot*. Não realizou, portanto, estudos sistemáticos, teóricos ou práticos, sobre a utilização de tecnologias no ensino. Suas compreensões e opiniões quanto a isto são bastante intuitivas e resultantes das percepções que experimentou na prática.

Apesar de sua vasta experiência docente e visível segurança no que faz, é receptivo e aberto a novas alternativas, metodologias e recursos de ensino. Está sempre em busca de aperfeiçoamento através de cursos e leituras sobre o ensino de Matemática. Não faltarão exemplos, entretanto, em que sua abertura à introdução do computador nas aulas se embate com sua prática já consolidada pela longa experiência em ensino nos moldes tradicionais e sem a utilização dessa TI. Poderemos ver isso mais claramente na apresentação dos dados.

Não obstante sua dedicação e gosto pela profissão, experimentou uma considerável frustração com o ensino de Matemática quando começou a dar aulas para alunos de Administração de Empresas. Ele conta que havia um grande desinteresse e considera que o rendimento escolar destes alunos era desastroso. Adotou então, cerca de 3 anos antes desta pesquisa, esta nova metodologia de ensino, referida por ele "ensino-aprendizagem de

Matemática via resolução de problemas". Fez muitas leituras sobre resolução de problemas e apresenta um bom embasamento teórico sobre este tema.

Uma outra causa das dificuldades que o professor sentiu para dar aulas a estes alunos foi a grande diferença que eles apresentavam em relação aos alunos da faculdade pública em que lecionara por muitos anos, onde o vestibular era mais seletivo e os alunos chegavam ao curso superior bem mais preparados, em termos de conteúdos matemáticos. Por isso, uma de suas preocupações, ao trabalhar com o ensino de Matemática via resolução de problemas, é que o nível exigido seja compatível com o conhecimento matemático da turma, ou seja, com os conhecimentos matemáticos trazidos pelos alunos.

4.8 ...OS ALUNOS

Ao descrever os alunos, farei uma apresentação mais detalhada pois, embora sem ignorar outros elementos que possam condicionar ou interferir nos dados que coletei, foi fundamentalmente para eles que procurei voltar meu olhar, ou seja, os alunos foram os principais sujeitos de minha pesquisa.

A turma onde fiz a coleta de dados era constituída de 55 alunos, e as informações que apresentarei a seguir refletem suas características gerais, ou seja, representam elementos marcantes ou típicos da maioria dos alunos. São informações obtidas através de um questionário que foi aplicado aos alunos a fim de delinear seu perfil. Era constituído de questões estruturadas, relacionadas à sua vida escolar, sua relação com a Matemática, sua experiência com a utilização de computadores no ensino e sua opção profissional. (Anexo I)

A maior parte dos alunos, embora ainda bastante jovens, com idade compreendida entre 17 e 24 anos, estuda e trabalha. Freqüenta as aulas do curso de Administração de Empresas pela manhã e trabalha à tarde. A maioria tem uma jornada de pelo menos 6 horas diárias de trabalho, o que corresponde a 30 horas semanais. Embora solteiros, são alunos que precisam se sustentar; a atividade que exercem é, de fato, remunerada – apenas 2 alunos declararam exercer atividade do tipo estágio ou voluntária não remunerada.

Sua trajetória escolar se fez, basicamente, em escolas da rede pública de ensino, tanto no nível fundamental quanto no médio. Isso sugere uma categoria de alunos financeiramente carentes, uma vez que em nosso país, como sabemos, atualmente os filhos de famílias de classe média e alta têm freqüentado a rede particular de ensino nesses níveis. Estes alunos que participaram de minha pesquisa, tampouco fizeram curso preparatório pré - vestibular.

Considero importante frisar que a maior parte dos alunos não fez vestibular em outras universidades, além desta a que pertencem. E, ademais, os que tentaram entrar em outras instituições optaram por outra da rede particular, à exceção de uns poucos que tentaram ingressar em faculdades ou universidades públicas e não conseguiram. É salutar observar as razões que apresentaram para justificar a escolha desta universidade que freqüentam. Afirmações como: "porque sou funcionário aqui", "porque ganhei bolsa de estudos", "porque é perto de casa", "porque não passei em outro vestibular" foram as mais freqüentes. Elas atestam uma realidade em que o jovem que quer fazer um curso superior releva seus sonhos e trilha o caminho que é possível. Os alunos estudam onde podem e não onde querem.

Estes alunos ficaram alguns anos (em geral, mais de 3) sem estudar entre o final do ensino médio e o início da faculdade, período em que apenas trabalharam. Disseram que optaram pelo curso de Administração de Empresas porque gostam do curso ou porque é um curso profissionalmente promissor. Numa cidade como São Paulo, em que a produção industrial e a prestação de serviços movem o mercado, o curso de Administração de Empresas, embora não se destaque pela especificidade, oferece uma formação generalista que atrai estes jovens que precisam e buscam um "leque" maior de oportunidades.

Eles afirmaram que sabiam que o curso teria Matemática em sua grade curricular, e a consideram relevante para sua formação profissional. Curiosamente, para mim, disseram que gostam dessa disciplina e que apresentaram um bom desempenho nas disciplinas de Matemática no ensino médio. Alguns poucos, que a acham difícil, fizeram algumas colocações curiosas que acho procedente comentar. Foram frases como: "até o ensino médio a Matemática era fácil, mas na faculdade é difícil", "agora acho difícil porque o professor usa métodos diferentes e isso me confunde". Talvez estes alunos estejam estranhando a metodologia de ensino via resolução de problemas, adotada pelo professor. Penso que seja relevante ao educador matemático refletir a este respeito: acostumados a uma abordagem "padronizada" durante muitos anos, alguns alunos podem estranhar novas metodologias de ensino e, apesar de querermos ajudar e melhorar os níveis de aprendizagem, pode ocorrer que, na realidade, estejamos dificultando o trabalho dos alunos... Ou, no mínimo, que precisamos estar atentos a estes momentos de transição... É para se pensar.

Não creio que as dificuldades que manifestaram estivessem ligadas à introdução do computador nas aulas de Matemática II, por duas razões. Primeiro porque, quando responderam ao questionário para delinear seu perfil, ainda era início do semestre e eles apenas tinham sido apresentados ao *Winplot*. Também porque, neste questionário, declararam não ter ainda aprendido ou estudado Matemática utilizando o computador.

Gostaria ainda de destacar o fato de que a grande maioria dos alunos tinha computador em casa; dos que não tinham, apenas um único aluno declarou não ter acesso fácil a um. Ressalto que este aluno pode não ter considerado os computadores da universidade, onde sempre havia laboratório disponível aberto aos alunos. Ou esse aluno, de fato, não tinha tempo nenhum para utilizar o laboratório.

Para encerrar esta seção acho apropriado destacar algumas de minhas impressões sobre os alunos, por reforçarem o que obtive através dos questionários. A turma era formada por alunos que, realmente, não tinham tempo para se dedicar aos estudos. Apresentavam muitas deficiências de conteúdo matemático, muitas vezes, relativas a conteúdos básicos de ensino fundamental e médio. Isso será constatado na apresentação dos dados, no próximo capítulo. Gostaria de reafirmar, inclusive, que o professor da turma tinha preocupação e cuidado explícitos de adequar os conteúdos e problemas propostos na disciplina Matemática II ao nível dos alunos. Repito que os problemas eram simples, no sentido de que envolviam conteúdos básicos sobre funções, eram problemas fechados, sem novidades em termos de enunciado e, ainda assim, os alunos apresentavam dificuldades.

Apesar disso, tais alunos mostraram muito interesse nas aulas de laboratório, aulas estas que foram implementadas especialmente para que eu pudesse realizar minha pesquisa, e em que tive participação ativa junto aos alunos, auxiliando-os na resolução dos problemas.

4.9 ...O PESQUISADOR NESTE CONTEXTO

Não se trata, aqui, de trazer fatos de minha trajetória escolar e profissional, mesmo porque isso já foi feito na introdução. Esta seção visa, apenas, destacar alguns aspectos relativos à minha condição de pesquisadora, em especial aqueles que, julgo, foram determinantes da configuração das situações que vivenciei no decorrer da coleta de dados, algumas das quais selecionei para apresentar no próximo capítulo.

Tive uma formação essencialmente tradicional, mas tenho tentado, impulsionada pelas reflexões e estudos realizados na pós-graduação em Rio Claro, implementar mudanças que possam melhorar minha prática docente. Meus estudos no programa de doutorado voltam-se, também segundo já relatei, à resolução de problemas e à utilização dos computadores na Educação Matemática.

No capítulo 1, de metodologia, comentei que, inicialmente, havia me preparado para fazer a coleta de dados em minha própria sala de aula, a partir de problemas geradores de novos conteúdos e utilizando os computadores. Porém essa coleta não pôde ser realizada.

A nova configuração assumida, a observação-participante, nesse ambiente que acabei de apresentar, ocorreu em aulas que não tinham sua condução sob minha responsabilidade. Eu era como uma auxiliar do professor. As atividades (problemas) que eu havia elaborado tendo em vista minha própria sala de aula não mais se aplicavam a este novo contexto em que tínhamos mais alunos participantes da pesquisa, os conteúdos programáticos eram outros, as condições materiais eram diferentes, entre outras coisas.

Em alguns momentos, iniciais na efetiva coleta de dados, o professor sugeriu que eu preparasse alguns problemas para aplicar aos alunos. Preparei estes problemas e entreguei ao professor para apreciação. No entanto, apenas um ou dois deles puderam ser resolvidos de fato pelos alunos: eram bem mais longos do que os que o professor e os alunos estavam acostumados a trabalhar e tinham um caráter mais voltado à exploração e interpretação de fatos matemáticos. O professor achou que eles tomaram muito tempo da aula, e manifestou sua preocupação com a necessidade de "cumprir o programa" da disciplina. Assim, alguns deles foram reformulados, outros desprezados e, após duas ou três aulas nós estávamos trabalhando somente com os problemas elaborados pelo próprio professor.

Ainda que, nas aulas no laboratório, os alunos estivessem trabalhando em duplas, o número de alunos que atendíamos[41] era consideravelmente grande. Isso exigia muito de nós e, inegavelmente, causava uma certa ansiedade em, de fato, realizar, senão todas, pelo menos a maioria das atividades que haviam sido preparadas para aquela aula.

Finalmente, penso que seja relevante destacar que os alunos me consideravam como mais uma professora, que estava lá para ajudá-los. Assim foi que o professor me apresentou à turma, como alguém que estava lá para auxiliar nas aulas de laboratório. Para o professor eu era também uma auxiliar, de modo que, em nenhum momento percebi algum constrangimento ou comportamento artificial causado pela presença de uma pesquisadora, tanto por parte dos alunos como do professor.

Este é o quadro em que se desenvolveu esta pesquisa. Assim, após esta caracterização do contexto, a próxima tarefa é apresentar os dados, o que será feito no capítulo 5 a seguir.

[41] Utilizo, muitas vezes, a segunda pessoa no plural para referir-me ao trabalho conjunto realizado por mim e pelo professor da turma.

Capítulo 5

DESCRIÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS

Capítulo 5 - Descrição Analítica dos dados

CAPÍTULO 5

DESCRIÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS

> A pesquisa é talvez a arte de se criar dificuldades fecundas e de criá-las para os outros. Nos lugares onde havia coisas simples, faz-se aparecer problemas.
>
> PIERRE BOURDIEU

5.1. APRESENTAÇÃO DOS DADOS

5.1.1. FORMAS DE APRESENTAÇÃO E CONVENÇÕES UTILIZADAS

No conteúdo a seguir procurarei apresentar descritivamente os dados construídos nesta pesquisa em que busco elementos para compreender

De que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática, quando estão utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções?

Conforme esclarecido no capítulo de metodologia, utilizei três formas de registro de dados que estarão em destaque neste capítulo: diário de campo, documentos e gravações.

Nos momentos da análise sistemática dos dados, realizei cuidadosas leituras do conteúdo do **diário de campo** e selecionei algumas partes que julguei relevantes. Essas partes integram as análises que serão apresentadas neste capítulo, aparecendo de duas maneiras: (1) na forma de narrativa de um fato ou conjunto de fatos ocorridos em aula, ou (2) de comentários, explicações e esclarecimentos necessários para possibilitar uma melhor compreensão dos dados apresentados ao leitor.

Os **documentos** analisados são os problemas resolvidos pelos alunos e entregues por escrito ao professor, em situações de aula ou de avaliação. Seu conteúdo será apresentado através de descrição elaborada por mim, ou através da imagem do próprio documento, quando necessário ou conveniente. Os alunos também entregaram um trabalho que o professor propôs para ser feito inteiramente utilizando o *Winplot*. Este trabalho consistiu em uma extensa lista de problemas sobre funções, especialmente voltados à construção de gráficos. Envolve conteúdos relativos às funções constante, linear e afim, quadrática, modular, raiz quadrada, racional, exponencial e logarítmica. Propostos e resolvidos em sala de aula, ou nas aulas no laboratório, ou como atividade extra-classe, os problemas eram sempre fechados, mas no caso do trabalho, não eram problemas aplicados à área de Administração de Empresas. O roteiro (Anexo III) foi entregue impresso aos alunos no início do semestre, em agosto, na aula seguinte à da apresentação do *software* aos alunos. Eles fizeram o trabalho em casa, isto é, como atividade extra-classe, e entregaram, também impresso, ao professor. A entrega dos trabalhos foi marcada para o início de novembro e, atendendo a meu pedido, o professor consentiu que eu fizesse a correção. Assim, tais trabalhos também foram objeto de análise neste capítulo.

Narrativas, comentários e análises dos dados aqui apresentados estão apoiados, também, nas **gravações** dos diálogos, realizados durante as atividades de resolução de problemas, na sala de aula convencional ou no laboratório. Os diálogos incluem falas dos alunos, do professor da turma e do pesquisador. Nos diálogos realizados no laboratório, freqüentemente haverá falas de dois alunos uma vez que os 55 alunos normalmente trabalhavam em duplas, dividindo-se entre os 30 computadores disponíveis. Naturalmente, as transcrições integrais de todos os diálogos gravados em cada dia de observação passaram por uma seleção e os apresentados neste capítulo são aqueles considerados significativos para a estruturação, aprofundamento ou ampliação das análises apresentadas.

Considero conveniente, também, esclarecer que, para melhor organizar e apresentar estes diálogos, um conjunto de convenções foi criado com o qual o leitor se deparará na sua leitura: para o professor será utilizada a sigla Pr, para o pesquisador Pe e para os alunos Amn, Bmn, Cmn, etc, onde

- A, B, C... denotam cada aluno que participou do diálogo, ou seja, aluno A, aluno B, aluno C, etc.;
- a letra m refere-se ao dia da gravação; por exemplo A1n para o aluno A que participou da gravação do 1º dia de observação, A2n para o aluno A que participou da gravação do 2º dia de observação, etc.;
- a letra n refere-se ao diálogo dentro de cada dia de gravação; por exemplo Am1 para o aluno A que participou do 1º diálogo, Am2 para o aluno que participou do 2º diálogo, etc., ambos no mº dia de gravação.

Outras indicações aparecerão, tais como:

- (...) para indicar que não foi possível entender o que foi dito,
- (texto) quando há dúvida sobre se foi isso mesmo que foi dito, e
- [...] no caso de supressão de parte do diálogo, por não ser conveniente ou relevante no contexto de análise em questão,

- [texto] no caso de inclusão de comentário meu nos diálogos, por ser conveniente ou relevante esclarecer ao leitor o significado das falas,
- **palavra(s) em negrito** para mostrar que a pessoa que fala deu ênfase àquela(s) palavra(s).
- *palavras em itálico* para indicar termos referentes a comandos, janelas ou opções do *software Winplot*, que foi utilizado.

Aparecerá, ainda, algumas vezes a expressão [pausa], entre colchetes, para indicar pequenos intervalos de tempo de silêncio que, em geral, caracterizaram momentos em que os alunos refletiam sobre uma pergunta feita pelo pesquisador ou, reciprocamente, o pesquisador refletia sobre uma pergunta feita pelos alunos.

Vale esclarecer que, no texto a seguir, o termo "sala de aula" refere-se à sala de aula convencional que, conforme já comentado no capítulo 1, se refere àquela em que os únicos recursos auxiliares de ensino, à disposição do professor, são os tradicionais: a lousa e o giz. Para designar o laboratório de Informática utilizei apenas o termo "laboratório".

5.1.2. ORGANIZAÇÃO DO CAPÍTULO

O conteúdo deste capítulo foi organizado em várias partes, cada uma delas tratando de um subtema relacionado ao tema de minha pesquisa, que é o ensino de Matemática através da resolução de problemas utilizando os computadores.

O subtema constitui-se em uma categoria de análise, conforme é comumente chamado na literatura de metodologia de pesquisa. Em cada um dos 3 subtemas estabelecidos serão apresentados alguns cenários, que são conjuntos de dados agrupados por estarem relacionados a um aspecto particular do subtema em questão. Ou mesmo, um cenário é um conjunto de elementos entre os quais há episódios de aula, resoluções de problemas realizadas pelos alunos, narrativas e comentários relacionados a um determinado aspecto do subtema que está sendo considerado. Assim, um cenário contém fatos que ocorreram, em geral, em momentos diferentes e que tiveram origem nas diferentes formas de registro dos dados: diário de campo, documentos e gravações. O que determina a unidade de um cenário não é o fato de ter ocorrido em um momento específico, em um intervalo de tempo limitado, como em geral se faz com a apresentação por episódios. Antes, essa unidade se configura pela relação de todos os elementos do cenário com um aspecto particular do subtema ao qual pertence. Os cenários não são, necessariamente, disjuntos pois alguns fatos podem estar ligados a mais de um aspecto entre os considerados. A opção por essa forma de apresentação tem por objetivo evidenciar a triangulação dos dados. Por isso, embora o foco de minha pesquisa esteja nos alunos, muitas vezes inclui dados relativos ao professor. Retomo algumas palavras já registradas no capítulo 1: a triangulação, ao combinar e cruzar múltiplos aspectos (pontos de vista, métodos, fontes de dados, etc.) representa um valioso recurso de ampliação das possibilidades de validação dos resultados de uma pesquisa.

Após cada cenário, são feitos alguns comentários relativos aos avanços e às limitações das atividades realizadas pelos alunos e apresentadas naquele cenário. Tais avanços e limitações foram elaborados do ponto de vista do ensino e da aprendizagem da Matemática envolvida, e sob a perspectiva da resolução de problemas e da utilização dos computadores no ensino. A partir dessas limitações e avanços percebidos, faço uma tentativa de transcender os dados e aponto possibilidades para a proposição de novos problemas, e para novas abordagens que se possa dar ao ensino de Matemática fundamentado na resolução de problemas com a utilização do computador.

Portanto, a estrutura deste capítulo, apresentada de uma forma esquemática, é a seguinte:

<table>
<tr><th>Tema de pesquisa</th><th>Subtemas para análise</th><th>Cenários</th></tr>
<tr><td rowspan="8">O ensino de Matemática através da resolução de problemas utilizando os computadores.</td><td rowspan="3">A resolução de problemas com o computador e a resolução de problemas sem o computador</td><td>1. A dinâmica da aula e seus efeitos.</td></tr>
<tr><td>2. Relacionando conhecimentos e procedimentos.</td></tr>
<tr><td>3. Concepções sobre resolução de problemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A avaliação.</td><td>4. Problemas secundários evidenciam lacunas de conhecimento.</td></tr>
<tr><td>5. A compreensão dos estudantes cresce e se aprofunda.</td></tr>
<tr><td>6. O professor em foco e o foco do professor.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A linguagem.</td><td>7. A linguagem do computador pode ser a causa de um conflito.</td></tr>
<tr><td>8. A linguagem matemática e o uso do computador</td></tr>
</table>

5.2. SUBTEMA 1 - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM COMPUTADOR E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEM COMPUTADOR

No primeiro cenário deste subtema, tentarei mostrar como muda a dinâmica de aula no laboratório de Informática em relação ao contexto da sala de aula normal. Em seguida, no cenário 2, apresentarei alguns dados que indicam o que os alunos transferem, em termos de conhecimentos e procedimentos, de um ambiente para outro. No terceiro cenário mostrarei que concepções sobre resolução de problemas manifestaram quando utilizaram o computador nessa atividade.

5.2.1. A DINÂMICA DA AULA E SEUS EFEITOS

Meu objetivo ao construir este primeiro cenário retratando a dinâmica das aulas das quais participei é destacar alguns fatos marcantes daqueles momentos em que desenvolvi minha coleta de dados. Primeiro porque foram característicos dessa dinâmica, e segundo porque foram determinantes na análise desses dados: no refinamento da pergunta de pesquisa, na delimitação das questões parciais que atendessem à pergunta central, e na configuração dos subtemas ou categorias, ou seja, dos cenários que serão apresentados após este.

5.2.1.1 - CENÁRIO 1

Tão logo o semestre se iniciou, ou seja, na segunda aula do mês de agosto, levamos os alunos ao laboratório para lhes apresentar o *software Winplot.* Explicamos que é um *software* gráfico e **o que é** um *software* gráfico e, através de algumas funções simples, os alunos foram conhecendo os comandos que mais utilizariam durante o semestre, a forma de digitar as expressões das funções, de editar o gráfico e de ajustar a área de gráfico. Conheceram alguns recursos que o *Winplot* possui para obter as raízes das funções, a imagem de valores específicos da variável independente, a representação das funções em tabelas, a interseção de duas curvas, entre outras coisas.

Depois da aula de apresentação do *software*, durante o restante do semestre, as aulas no laboratório destinaram-se às aplicações, ou seja, à utilização do computador para resolver problemas cujo principal objetivo era aplicar os conteúdos que já haviam sido tratados na sala de aula. A forma dos enunciados dos problemas propostos no laboratório também era, freqüentemente, semelhante àquela dos já resolvidos apenas com lápis e papel na sala de aula.

Por ocasião da entrevista, procurei saber o que o professor pensava sobre isso, e perguntei se há diferença entre os problemas que são propostos para a sala de aula e os que são propostos para serem resolvidos no laboratório. E a resposta que obtive foi a seguinte:

> Pr: – Sim, têm. A diferença é bastante grande. Primeiro porque, quando a gente está trabalhando em sala de aula, em função do tempo e das informações que se quer passar pros alunos, a gente procura fazer com que os exemplos conduzam a respostas contendo números inteiros; problemas cuja resolução algébrica seja mais fácil; a determinação da raiz é uma raiz inteira, o gráfico seja um gráfico, também mais fácil. Porém, quando se está no laboratório, não dependemos desses valores e o gráfico pode ser, então, um gráfico realista. Utilizamos, então, várias vezes, modelos em que o número que estava envolvido era um número da ordem de 40, 50 mil!
> [...]
> Pr: – Olha, na verdade, eu penso assim: se em sala de aula eu posso resolver problemas cujos enunciados procuram conduzir a soluções, cuja álgebra envolvida seja uma álgebra com operações mais fáceis, eu posso ter, agora, no computador, problemas mais realistas, cujos valores numéricos sejam valores reais. Assim, ao invés de trabalhar com números cujos resultados são inteiros, eu posso trabalhar com números quaisquer.

De fato, os problemas propostos para serem resolvidos com o *Winplot* apresentavam, por vezes, esta diferença nos coeficientes das funções, em relação aos resolvidos sem ele. Muitas vezes envolviam números não inteiros ou demasiadamente grandes para serem resolvidos com lápis e papel. Entretanto, não obstante as palavras do professor enfatizando que "a diferença é bastante grande" entre os problemas resolvidos com e sem o computador, as expressões das funções eram semelhantes e os enunciados eram, freqüentemente, exatamente iguais. Num ou noutro ambiente, os problemas eram sempre fechados; este professor realmente não tinha em sua prática, a opção de trabalhar com problemas abertos.

Tomarei alguns exemplos para mostrar aqui. Entretanto, permito-me, neste momento, ainda não trazer muitos detalhes (diálogos, imagens do computador, imagens dos trabalhos dos alunos, etc.) porque serão mostrados em momento mais oportuno, em outros cenários. Aqui, meu objetivo é retratar a **dinâmica das aulas** e destacar como ela determinou a configuração dos subtemas que escolhi para analisar neste capítulo

Tomemos como primeiro exemplo uma das aulas, cujo conteúdo referia-se às funções racionais. O professor iniciou a aula, como de costume na sala de aula normal, colocando as seguintes funções de demanda e oferta[42] na lousa:

[42] Numa economia de livre mercado, a quantidade de um certo produto que o consumidor **procura** (quantidade de **demanda**) depende do preço unitário de venda desse produto. Uma **função de demanda** expressa a relação entre o preço por unidade (p) e a quantidade demandada (q_d). O mercado competitivo apresenta também uma relação entre o preço por unidade de um produto e a **disponibilidade** desse produto no mercado. Esta relação entre o preço por unidade (p) e a quantidade oferecida (q_o) é chamada de **função de oferta.**

$$\begin{cases} q_d = -6 + \dfrac{90}{p+5} \\ q_o = \dfrac{2}{5}p + 1 \end{cases}$$

Problema 1

e disse que iriam determinar o ponto de equilíbrio[43] e esboçar o gráfico. Os alunos já estavam familiarizados com este tipo de aplicação em que as funções q_d e q_o representam, respectivamente, a quantidade de demanda e a quantidade de oferta de um produto, e p representa o preço unitário do produto. O professor foi escrevendo a resolução algébrica na lousa: igualou as equações, $q_d = q_o$, e obteve dois valores de p: $p = 5$ e $p = -27{,}5$ dos quais o segundo foi descartado, uma vez que o preço não poderia ser negativo. Substituindo o valor 5 em p, numa das equações, o ponto de equilíbrio P_e = (5, q(5)) = (5,3) foi determinado.

A fim de esboçar os gráficos das funções dadas, o professor substituiu cada uma das variáveis pelo valor zero e determinou os pontos em que cada uma das curvas intercepta os eixos:

$$\begin{cases} q_d = -6 + \dfrac{90}{p+5} \\ p = 0 \quad \Rightarrow q_d = -6 + \dfrac{90}{0+5} = 12 \qquad \therefore A = (0{,}12) \\ q_d = 0 \quad \Rightarrow -6 + \dfrac{90}{p+5} = 0 \Rightarrow p = 10 \quad \therefore B = (10{,}0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} q_o = \dfrac{2}{5}p + 1 \\ p = 0 \quad \Rightarrow q_o = 1 \quad \therefore C = (0{,}1) \\ q_o = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{2}{5}p + 1 = 0 \Rightarrow p = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Então esboçou o gráfico, não sem destacar as posições das assíntotas e o fato de que, neste caso, o que fazia sentido mesmo era a parte de cada curva localizada no primeiro quadrante, uma vez que a variável independente p significa preço, e as variáveis dependentes q_d e q_o significam quantidades e, portanto, ambas assumem valores não negativos nesse contexto.

[43] No chamado **equilíbrio de mercado** a quantidade produzida é igual à quantidade demandada. Nessa situação a quantidade produzida é chamada quantidade de equilíbrio e o preço correspondente é chamado preço de equilíbrio. Portanto, o **ponto de equilíbrio** corresponde ao ponto onde ocorre a interseção do gráfico da oferta com o da demanda.

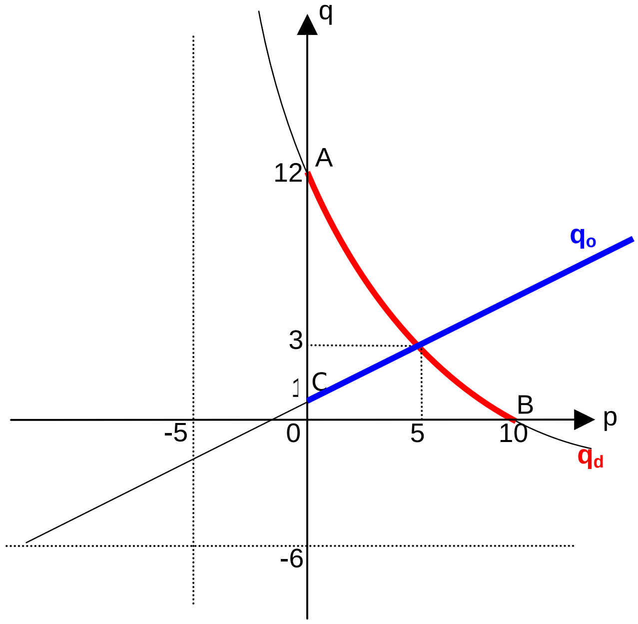


Gráfico 1

Feito o gráfico esclareceu à turma o significado do ponto de equilíbrio, mas não colocou na lousa nada sobre este aspecto. O professor realizou esta apresentação razoavelmente rápido, os alunos estiveram atentos e não fizeram perguntas, nem levantaram dúvidas relevantes.

Em seguida, ainda na sala de aula, o professor entregou impresso o seguinte problema para os alunos resolverem.

Problema das Lâmpadas Fluorescentes

As leis de oferta e demanda de lâmpadas fluorescentes são dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -4 + \dfrac{200}{p+20} \\ q_o = \dfrac{3}{5}p + 1 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O ponto de equilíbrio

(b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda

(c) Dar a análise econômica

Problema 2

Eles trabalharam em duplas, e o professor e eu os ajudávamos com dicas, sugestões e explicações, à medida que nos chamavam para esclarecer suas dúvidas. Vários grupos pediram nossa ajuda. As perguntas dos grupos foram principalmente sobre o item (c): "O que é para fazer aqui?" ou "O que é análise econômica?" ou outras parecidas. O professor já tinha falado sobre isso no primeiro problema, embora não tivesse registrado sua explicação na lousa. Os alunos mostraram não entender muito bem o significado do ponto de equilíbrio e das regiões do gráfico "fora" deste ponto: a situação estava relacionada com escassez ou excedente de mercado[44]. Os alunos gastaram todo o restante daquelas duas aulas iniciais (mais de uma hora) na resolução desse problema.

Após o intervalo, como já era habitual, fomos ao laboratório. O professor propôs, então, o problema a seguir, muito semelhante aos anteriores:

Suponha que as leis das lâmpadas fluorescentes fossem dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -2 + \dfrac{100}{p+10} \\ q_o = 0{,}03\,p^2 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O ponto de equilíbrio
(b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda
(c) Dar a análise econômica

Problema 3

Devemos observar a presença, agora, de coeficientes decimais na equação da função de oferta q_o.

Uma vez que o professor já tinha literalmente explicado como fazer um problema semelhante, e os alunos também já tinham resolvido um segundo problema igualmente muito parecido, utilizando lápis e papel, era de se esperar que esta "atividade", agora realizada no laboratório, não trouxesse dificuldades para os alunos, mas que se configurasse num recurso de fixação da aprendizagem. Os alunos poderiam, além disso, tirar proveito das possibilidades que o computador oferece no que diz respeito à maior rapidez e, conseqüentemente, à resolução de uma quantidade maior de problemas em menor tempo; maior precisão; melhor apresentação de gráficos; etc. Entretanto, agora, diante do computador, os alunos não sabiam o que fazer.

A orientação dada pelo professor aos alunos era a de que fizessem "tudo no computador" e só passassem as respostas para o papel. Mas a maior parte dos alunos começou a resolver o problema algebricamente para determinar o ponto de equilíbrio. Então nós os interrompíamos dizendo que não precisavam fazer isso, que fizessem os gráficos das funções primeiro e, a partir deles, o *Winplot* forneceria o ponto de equilíbrio. Uma dupla

[44] Quando o preço unitário (p) de um bem é maior que o preço de equilíbrio, a quantidade de oferta será maior que a quantidade de demanda, ou seja, haverá excesso de oferta do produto (**excedente de mercado**). Por outro lado, se o preço unitário (p) de um bem é menor que o preço e equilíbrio, a quantidade de demanda será maior que a quantidade de oferta, ou seja, haverá falta de oferta do produto (**escassez de mercado**).

estranhou o coeficiente decimal na função de oferta q_o e pensou em recorrer à calculadora para resolver as contas que surgiram ao tentar obter o ponto de equilíbrio algebricamente, igualando as expressões das duas funções:

A5.2: – Professora! Professora! É para resolver isso e pôr o gráfico aqui?

Pe: – É. Vocês vão fazer no computador e depois têm que passar para cá [no papel].

A5.2: – Ah, tá.

Pe: – Vocês vão entregar, igual ao que vocês entregaram na sala de aula. Só que agora vocês podem usar o *Winplot* para fazer o gráfico.

A5.2 para B5.2: – Tá. Então vamos fazer o gráfico.

A5.2: – Tem calculadora aqui?

Pe: – No *Winplot* não. O que você quer calcular?

A5.2: – Eu quero fazer essas contas para determinar o ponto de equilíbrio.

Pe: – Vejam, esse é um *software* gráfico; comecem pelos gráficos. Depois eu venho mostrar para vocês como obter o ponto de equilíbrio utilizando o *Winplot* mesmo.

Muitas duplas de alunos realmente demoraram a começar a resolver o problema. Diante da incerteza de "por onde começar", nos chamavam para perguntar o que fazer. E nas folhas que os alunos entregaram com a solução do problema pude perceber que outras várias duplas começaram resolver algebricamente o problema e, provavelmente, ao serem orientados de que este procedimento não era necessário neste caso, apagaram o que estavam fazendo.

Os alunos podem ter sido induzidos a este procedimento pelo próprio enunciado do problema que, conforme já comentei, tinha a mesma forma dos anteriores. Refiro-me, aqui, ao fato de que a primeira solicitação feita no enunciado é determinar o ponto de equilíbrio, como nos problemas anteriores resolvidos sem o *Winplot*. Só que agora, tendo em mãos um *software* gráfico, eles tinham que começar pelo gráfico para conseguir obter outros resultados do *software*. Isso era o que o professor queria que fizessem, conforme disse quando fui consultá-lo sobre isso:

Pe:– Aqui você quer que eles resolvam algebricamente ou não?

Pr:– Não.

Pe:– É só para fazer os gráficos e a interseção?

Pr:– É só para fazer os gráficos.

Pe:– E a partir deles obter quem é a interseção?

Pr:– É; é isso mesmo.

Mas os alunos não foram capazes de perceber isso por eles mesmos.

Passada essa fase inicial, os alunos se põem a esboçar os gráficos, e outras duas questões se impõem. A primeira, relacionada à necessidade de ajustar a área de gráfico: "por que o gráfico não aparece na tela?" Ao digitarem a equação da função de demanda q_d o gráfico não aparecia. Nesse momento o professor, percebendo que a dúvida era da maioria dos alunos, tentou orientar a turma toda de uma só vez, para que ganhássemos tempo. Mas sua tentativa não surtiu efeito pois cada dupla estava concentrada em suas próprias atividades, querendo fazer suas próprias tentativas; os alunos não prestaram atenção às orientações. Realizando um trabalho de atendimento de cada dupla, eu e o professor tivemos que fornecer orientações repetidas vezes de que precisavam ajustar os valores máximo e mínimo, em cada eixo cartesiano, para que apresentassem valores coerentes com os valores que a função assume. Isso se faz necessário para que a região, do plano cartesiano, mostrada pelo *Winplot* (área de gráfico) seja aquela onde realmente está localizado o gráfico da função.

Vencida esta dificuldade, mais um terceiro elemento se contrapõe à resolução do problema: onde devem ser colocados os parênteses na expressão -2 + 100/ x + 10 digitada no *Winplot* para que ela realmente corresponda à função $q_d = -2 + \frac{100}{p+10}$, solicitada no problema? Nas gravações dos diálogos entre mim e os alunos, estão registradas as muitas vezes que os alunos chamaram para perguntar sobre isso. Estes momentos trouxeram oportunidades de conversar com os alunos sobre vários aspectos das funções racionais, e me fizeram pensar sobre aspectos que envolvem a linguagem matemática em relação à linguagem do computador, entre outros.

Após estas etapas, os alunos precisaram de ajuda para responder ao item (c) do problema, isto é, para fazer a análise econômica do resultado. Utilizando uma linguagem coloquial, eu diria que "nem parece que tinham acabado de resolver, em sala de aula, um problema praticamente igual a esse". O fato é que os alunos demoraram todo o tempo da aula de laboratório daquela manhã na resolução desse problema. E não foi sem dificuldade que conseguiram chegar ao final.

Estes episódios apresentados são um exemplo, entre outros, envolvendo eventos desta natureza, de situações que me trouxeram alguns questionamentos. Que obstáculos são estes que estão se colocando diante dos estudantes, tão recorrentes e insistentes, que tanto interferem em sua atividade de resolução dos problemas diante do computador? Que aspectos de sua atividade matemática, realizada sem o computador, deveriam ser aproveitados neste ambiente com o computador e, vice-versa, que aspectos os alunos transferem daquele "antigo" contexto para este "novo" e que não deveriam estar sendo utilizados? Por que, apesar de estarem diante de um problema supostamente já conhecido e de um recurso "tão poderoso" para os auxiliar (o *Winplot*), eles estão tendo dificuldades para resolvê-lo?

Além disso, os problemas tampouco eram abertos, o que poderia dar margem a que diferentes alunos dessem encaminhamentos diferentes ao problema. Numa das conclusões parciais (diárias) de minhas anotações no diário de campo, conseqüência do que andava pensando com "meus botões", escrevi: poderia sugerir ao professor, como encaminhamento para minha pesquisa, situações em que problemas parecidos fossem resolvidos sem computador e com computador. Não foi preciso sugerir. O exemplo apresentado mostra que o próprio professor tinha essa conduta.

Todos estes fatos me levaram a refinar minha pergunta de pesquisa, incluindo nela a ênfase nos problemas fechados, e a considerar o fato de ter sido esta uma experiência de implantação do computador em sala de aula, por aquele professor. E, afinal, resultaram destes fatos e de outros que ainda serão apresentados, os subtemas escolhidos e já apresentados no início deste capítulo**:** a resolução de problemas com o computador e a resolução de problemas sem o computador, a avaliação e a linguagem.

Também foi essa dinâmica das aulas, diferente no laboratório em relação à sala de aula, que orientou minhas reflexões acerca de mais um conjunto de dados que apresentarei a seguir. Ele enfatiza os efeitos dessa dinâmica inclusive na forma de os alunos apresentarem as resoluções escritas dos problemas a eles propostos.

A aula em que ocorreram os fatos a seguir começou, na sala de aula (como de costume), com os alunos pedindo ao professor que esclarecesse algumas dúvidas sobre o problema que ele havia deixado como tarefa, ou seja, para ser feito em casa. Assim foi feito. Trata-se do seguinte problema, envolvendo uma função de demanda, do tipo raiz quadrada:

> Um empresário construiu um conjunto de casas denominado Vila dos estudantes e aluga cada casa a p reais por dia. Sabe-se que a quantidade de casas demandada é dada por $q = \sqrt{225 - 9p}$. Pede-se:
>
> (a) Esboçar o gráfico.
>
> (b) Quantas casas são alugadas se o preço for R$ 25,00?

Problema 4

A dúvida levantada pelos alunos referia-se a "que valores deveriam colocar em p" para conseguir esboçar o gráfico. O professor explicou que uma vez que p representa preço, um valor em dinheiro, não poderia ser negativo e sugeriu aos alunos que um dos valores atribuídos a p poderia ser 0 (zero). Continuou o raciocínio explicando que para o q ser 0 (zero) o valor de p teria que ser 25. Enquanto explicava registrava seu raciocínio na lousa e construía uma tabela auxiliar em que anotava esses valores:

p	225-9p	q
25	0	0
0	225	15

$$q = \sqrt{225 - 9p}$$
$$q = 0$$
$$225 - 9p = 0$$
$$p = 25$$

O professor não apresentou um gráfico muito detalhado, mas fez apenas um "rascunho", com o intuito de dar apenas uma orientação para que os alunos pudessem terminar suas resoluções. Ele apresentou o seguinte esboço do gráfico na lousa:

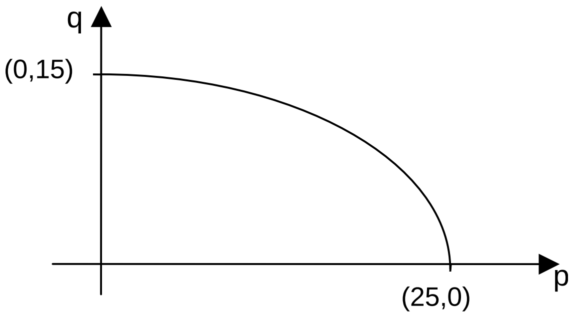


Gráfico 2

Os alunos terminaram, após a fala do professor, de registrar por escrito as resoluções do problema em suas folhas avulsas e entregaram a ele para correção. Estes trabalhos que eram propostos como tarefa sempre eram recolhidos no início da aula seguinte.

Esse episódio apresentado configurou-se em um momento de ensino essencialmente tradicional, ou seja, com uma forte centralização da atividade no professor como fonte da informação e com o aluno na posição de receptor. Embora tenha sido desencadeado por um questionamento feito por um grupo de três alunos, a turma toda esteve atenta às orientações dadas pelo professor.

Analisando os trabalhos entregues observei que, assim como no esboço do gráfico feito pelo professor na lousa, os alunos não indicaram a escala adotada em cada eixo. Com relação aos pontos de interseção do gráfico com cada eixo, eles registraram o par ordenado correspondente, isto é, escrevendo (0,15) para a interseção com o eixo das ordenadas e (25,0) para a interseção com o eixo das abscissas. O que habitualmente fazem é assinalar, unicamente, a coordenada correspondente àquele eixo onde ocorre a interseção, colocando o número 15 no ponto correspondente no eixo q e o número 25 no correspondente no eixo p. Também chamam a atenção as tabelas apresentadas pelos alunos, todas apresentando apenas dois valores para p, partindo de 25, tal como o professor fizera. Normalmente essas tabelas são montadas com vários valores para a variável independente.

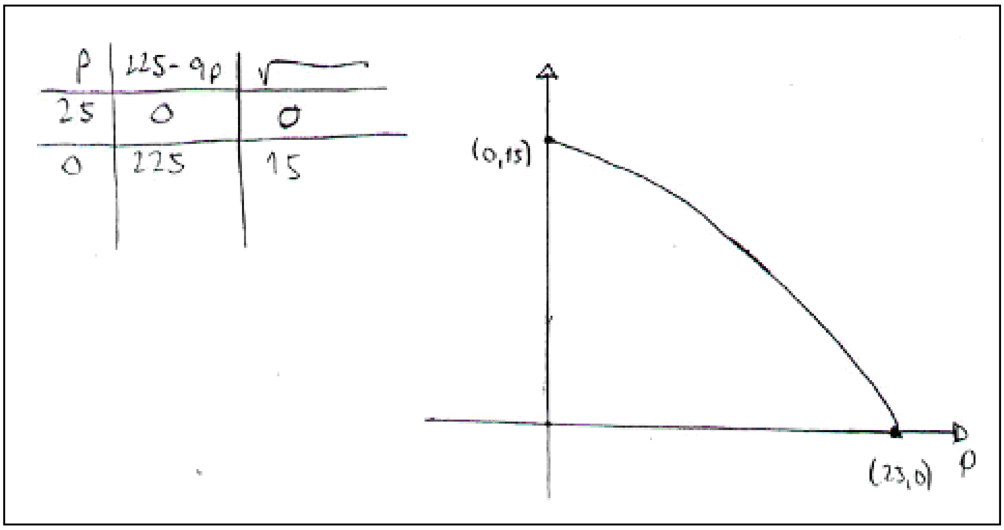


Figura 1

Percebi, portanto, que houve uma quase total adesão dos alunos à forma de resolução sugerida pelo professor, quanto à maneira de apresentá-la.

Essas peculiaridades observadas, de certa forma, são contrastadas pelas características das resoluções escritas apresentadas pelos alunos para um segundo problema que o professor propôs após esta fase inicial da aula:

> Um fabricante de geladeiras produz q aparelhos por semana ao custo total de $C_t = \sqrt{q+4}$ e receita total $R_t = (3/5)q$ (reais). Pede-se:
>
> (a) Ponto crítico.
>
> (b) Esboçar o gráfico das duas curvas.
>
> (c) Quando se tem lucro?

Problema 5

Os alunos resolviam o problema enquanto o professor e eu os ajudávamos quando apresentavam dúvidas. Às vezes o professor ia à lousa e explicava algum detalhe ou esclarecia dúvidas que eram gerais, isto é, que se manifestaram em vários grupos. Nestes momentos, apesar de seu empenho para ter a atenção de toda a turma, percebi que grande parte dos alunos, envolvida pelo trabalho nos grupos, não prestava atenção às explicações do professor.

Os trabalhos que foram entregues com as resoluções desse problema ainda evidenciam regularidades entre eles, mas trazem características diferentes daquelas apresentadas para o anterior, muito embora a função C_t, nesse problema, seja da mesma família da função q do problema 4, ou seja, é uma função envolvendo raiz quadrada: os alunos registraram nos eixos as escalas utilizadas e percebem-se, nos vários trabalhos, tanto escalas diferentes utilizadas quanto opções diferentes para o maior e o menor valor de q e C_t considerados em cada eixo; alguns apresentaram a escala e o gráfico, não somente no primeiro mas, também, no segundo quadrante. Ao assinalarem os pontos de interseção dos gráficos com os eixos, muito poucos alunos o fizeram apresentando o par ordenado, mas indicaram apenas a coordenada correspondente àquele eixo no ponto de interseção. E, finalmente, todas as tabelas, apresentadas para apoiar a construção dos gráficos das funções envolvidas no problema 5, trazem vários valores da variável independente q. A figura a seguir é a imagem da resolução apresentada por um dos alunos:

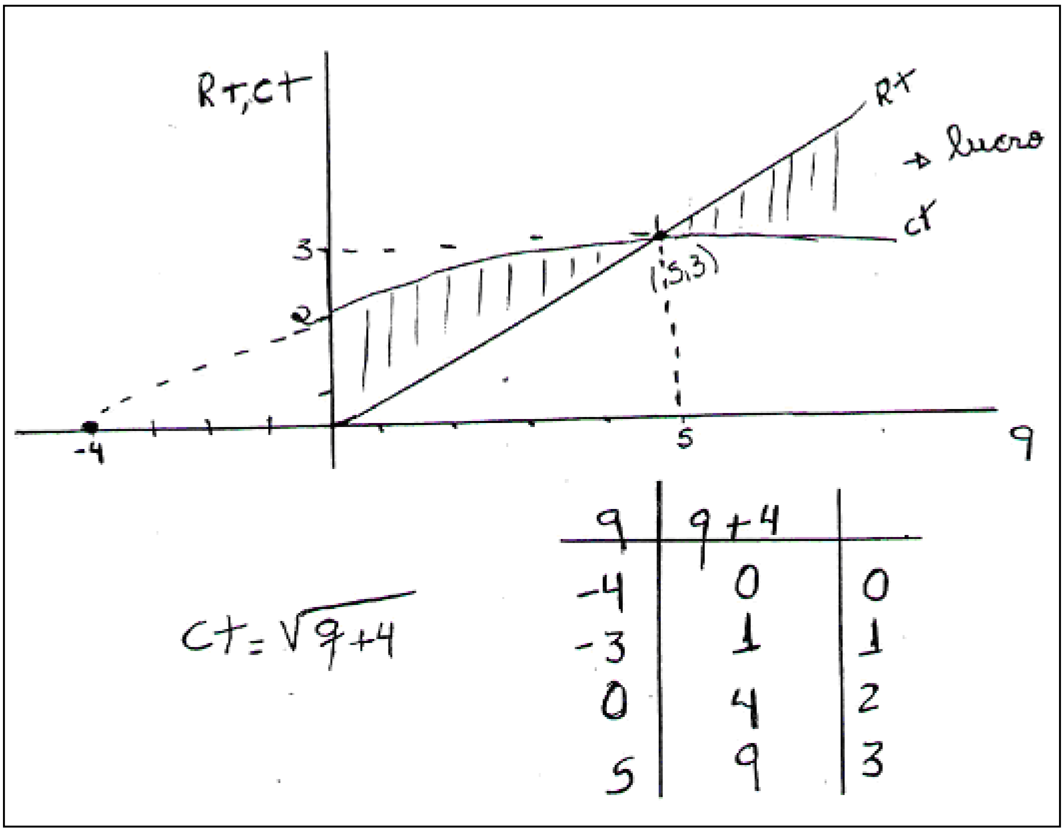


Figura 2

O ponto crítico, solicitado no item (a) do problema, consiste no ponto de interseção das duas curvas C_t e R_t[45]. Durante o atendimento às solicitações dos alunos nos grupos, percebi que os alunos não associavam o ponto a um **par** de valores, calculando e fornecendo como resposta ao ponto crítico somente o valor de q=5. Mesmo sendo orientados para calcular a imagem $C_t(5)$, ou a imagem $R_t(5)$, parece que alguns alunos não entenderam muito bem a

[45]Alguns autores de livros-texto voltados à Matemática aplicada à área de negócios dão **o nome de ponto crítico à abscissa do** ponto de interseção entre os gráficos das funções receita e custo. Portanto, aqui, a expressão "ponto crítico" não está relacionada às raízes da derivada, como é feito no Cálculo Diferencial e Integral. Um dos cenários apresentados mais adiante tratará com mais detalhes destas questões relacionadas à linguagem.

relação entre este par ordenado (5, $C_t(5)$) e o ponto, no gráfico, correspondente à interseção das duas curvas.

Estas observações me lembraram daqueles momentos, no laboratório, em que o professor tentava orientar toda a turma sobre o problema que iria propor para os alunos, em seguida, ou sobre alguma questão relativa ao problema com o qual já estavam trabalhando. Ele tentou fazer isso algumas vezes. Digo "tentou" por duas razões: se os alunos ainda não tinham iniciado suas atividades para a resolução do problema eles ouviam o professor, mas esqueciam-se de suas orientações ao fazê-lo e, se já estavam no decorrer da atividade, se envolviam de tal modo com a resolução no computador que não paravam o que estavam fazendo para ouvir o que ele dizia.

O professor que participou de minha pesquisa percebeu isso e manifestou-se a este respeito, informalmente, a mim. Também, numa destas aulas, mostrando um certo descontentamento com tal situação, ele disse à turma:

Pr:– Pessoal, a todo instante tenho que falar tudo de novo! Vou falar pela última vez! Se vocês não me ouvirem, paciência!

Esta é, de fato, uma característica marcante de atividades em laboratório de Informática. O professor deixa de ser o centro da atividade de ensino, que perde sensivelmente a ênfase na transmissão de conhecimentos, se este era o caso. Os alunos passam a desempenhar um papel mais ativo de construtor de seu conhecimento.

Também uma aluna expressou ter esta percepção de que o trabalho no laboratório exige um atendimento quase individualizado aos alunos por parte do professor. Ao final da aula, ela permaneceu um tempinho a mais no laboratório e me perguntou se eu continuaria acompanhando as aulas, ao que respondi que sim. Então ela justificou sua pergunta dizendo:

A3.35:– Só um professor é pouco para nos atender em aulas desse tipo.

Os fatos até então apresentados nesse cenário me levaram à curiosidade de buscar as características das resoluções dos problemas feitos pelos alunos no laboratório, onde o contexto de ensino se desenvolve numa situação em que os alunos, em duplas, realizam um trabalho mais autônomo, mais "descolado" das diretrizes sugeridas pelo professor. Ele sempre solicitava aos alunos que passassem a resolução para o papel, mesmo quando os problemas eram resolvidos com a utilização do *Winplot*.

Então, analisei as resoluções apresentadas para os problemas 6 e 7, a seguir, que foram resolvidos no laboratório:

Problema do tanque de óleo

Um complexo de apartamentos tem um tanque para armazenar óleo utilizado para aquecimento. Em primeiro de janeiro, encheu-se o tanque e não há previsão de entrega de óleo até março. Denote por **t** o número de dias contados após primeiro de janeiro e denote por **n** o número de galões de óleo no tanque. Baseado nos registros atuais do complexo de apartamentos, **n** e **t** estão relacionados pela equação

$$n = 30\,000 - 400t, \text{ pede-se:}$$

(a) Esboçar o gráfico da função n=n(t).
(b) Os interceptos em relação ao eixo Ox.
(c) Os interceptos em relação ao eixo Oy.
(d) O consumo semanal de óleo desse complexo de apartamentos.
(e) O significado do coeficiente angular da reta n=n(t).
(f) O significado do coeficiente linear da reta n=n(t).

Problema 6

No problema 6, constatei que os trabalhos dos alunos apresentam uma grande variedade de opções de apresentação dos gráficos quanto à escala e fixação do menor e maior valor de cada variável, considerados em cada eixo. A representação dos pontos de interseção do gráfico com os eixos, através de pares ordenados, é praticamente inexistente, mesmo havendo a solicitação explícita, nos itens (b) e (c), de determinar estes pontos. E, ainda, **nenhum** aluno mostrou a tabela auxiliar de valores em seus trabalhos escritos. As resoluções apresentadas nas figuras 3, 4 e 5, a seguir, apresentam estas características:

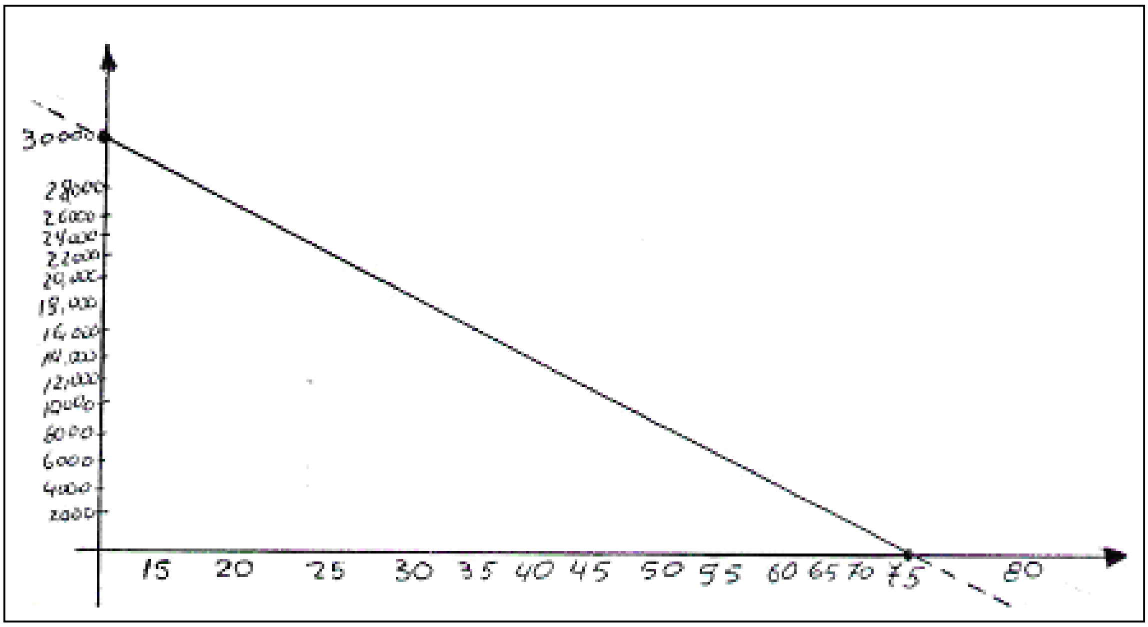


Figura 3

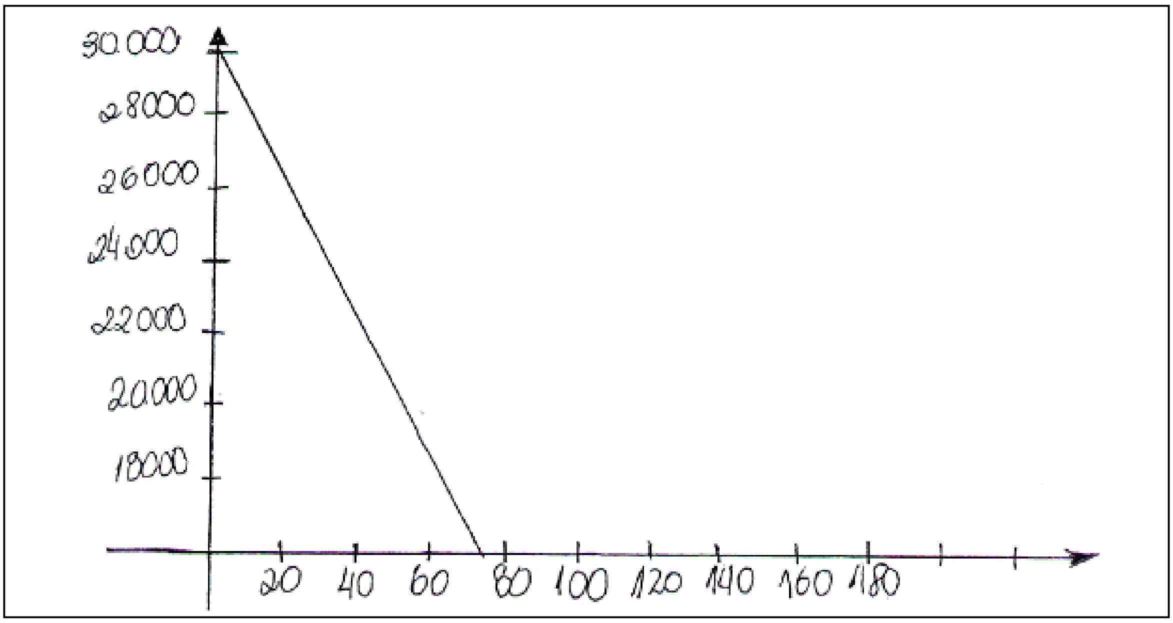


Figura 4

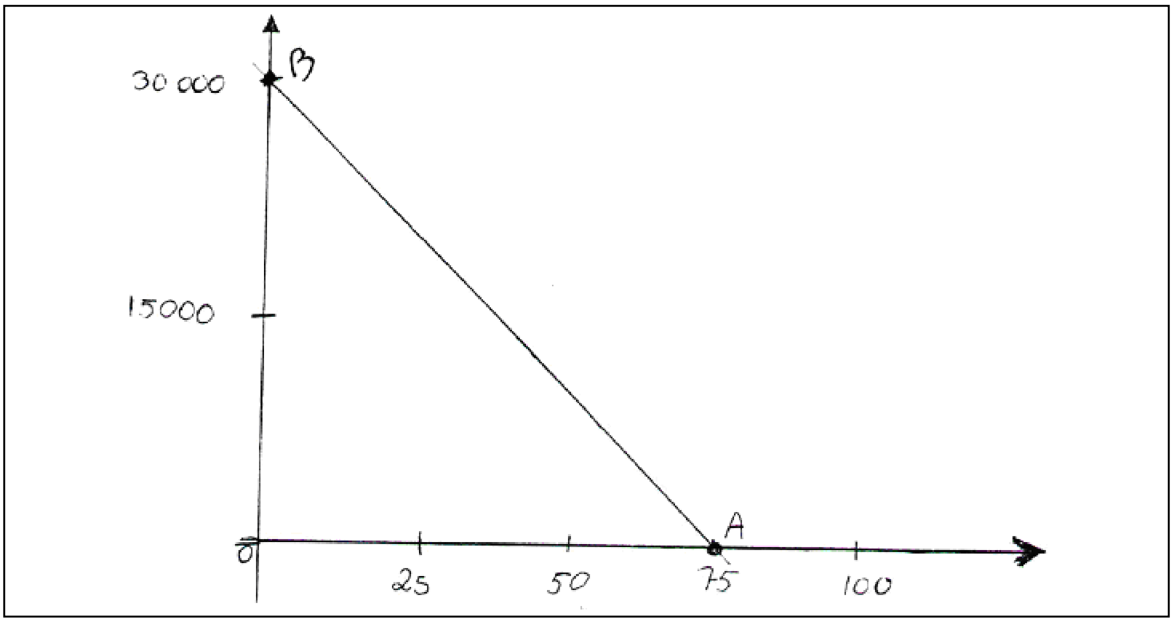


Figura 5

Também no problema 7:

Problema da companhia de software

Suponha que uma companhia de software produz e vende uma nova planilha a um custo de R$ 25,00 por cópia e que a companhia tem um custo fixo de R$ 10 000,00 por mês, determinar:

(a) O custo mensal como uma função (fórmula) do número q de cópias produzidas.

(b) O esboço do gráfico da função que você obteve no item (a).

(c) O custo quando x = 500.

(d) A partir de que quantidade se tem lucro, se o preço de venda for R$50,00 por cópia.

Problema 7

verifiquei as características anteriores e além disso: visíveis diferenças de apresentação dos gráficos no tocante à sua localização nos quadrantes e muitos erros de escala, ainda que os alunos tivessem apenas reproduzido, em papel, a imagem do gráfico que o *Winplot* mostrava, corretamente, na tela do computador. Escolhi dois exemplos, entre os trabalhos dos alunos, que são mostrados nas figuras 6 e 7:

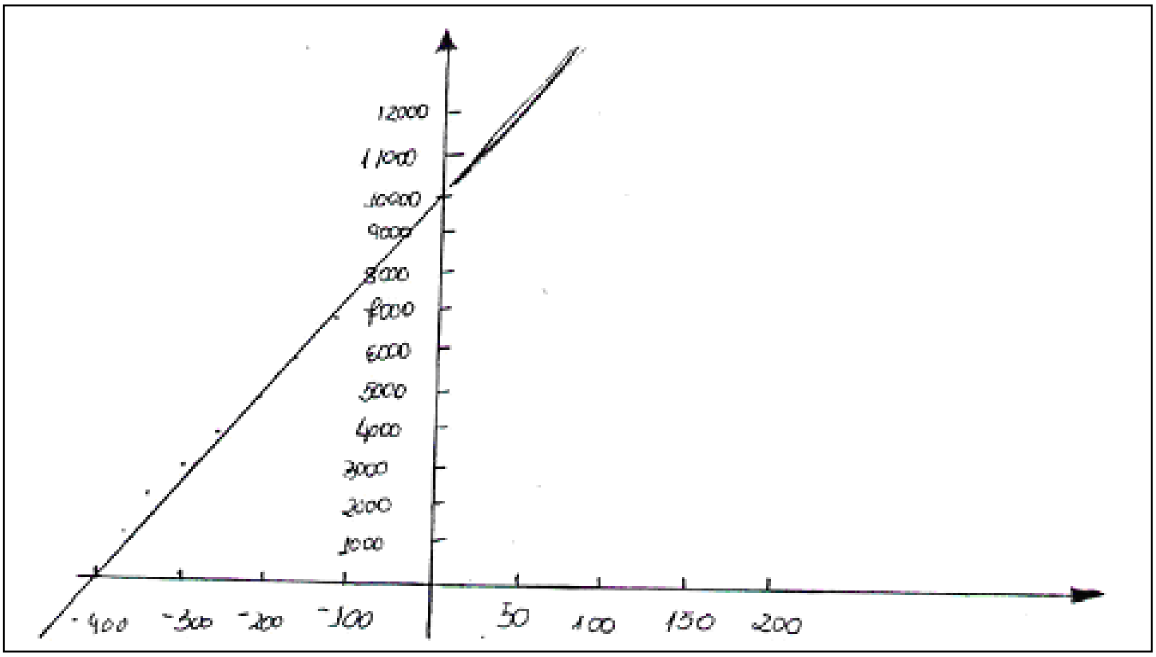


Figura 6

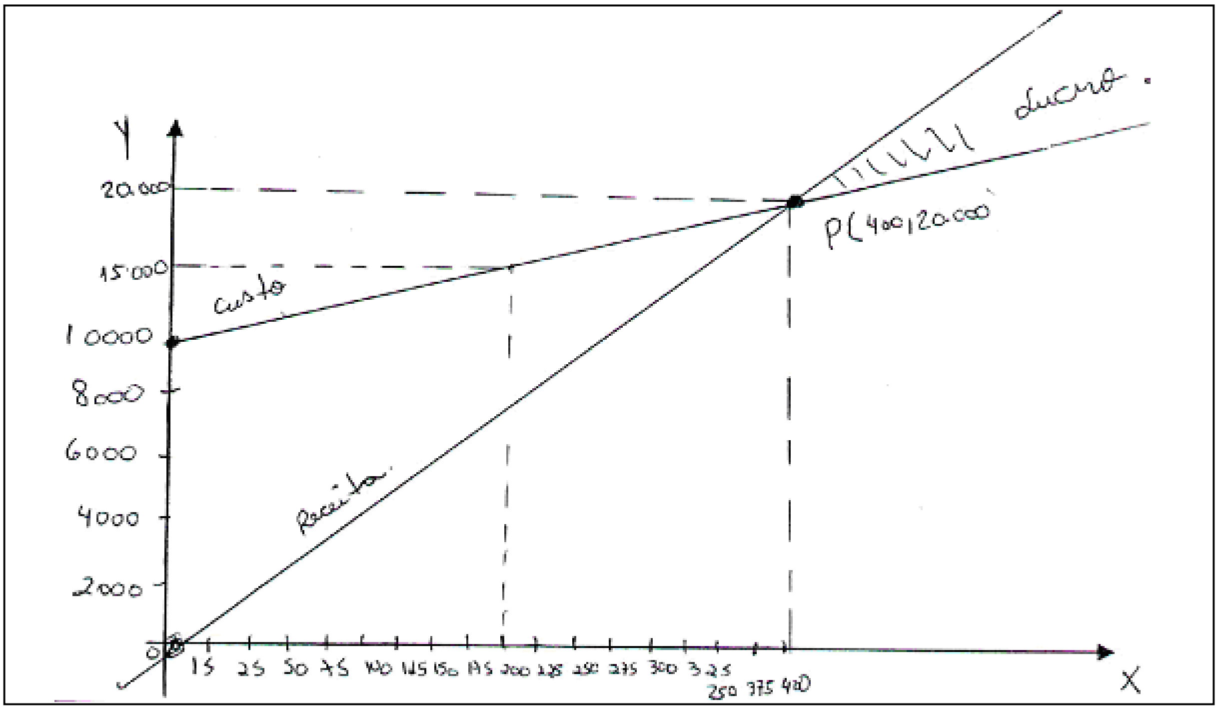


Figura 7

Nos dados apresentados percebemos o seguinte fato muito fortemente: na ocasião em que o professor assumiu o papel de condutor do processo de resolução do problema 4, os alunos adotaram, indistintamente, as orientações do professor, abrindo mão de suas preferências e métodos. Quando, no problema 5, eles realizaram um trabalho mais independente, suas resoluções mostraram características, além de variadas, sensivelmente diferentes daquelas sugeridas pelo professor no problema anterior. Esta descentralização do "comando" das atividades de ensino se manifesta ainda mais intensamente nos problemas 6 e 7, realizados no laboratório de Informática, quando as resoluções se apresentam claramente ainda mais variadas e diferentes daquelas apresentadas quando da resolução dos problemas sem a utilização do computador.

5.2.1.2 - LIMITAÇÕES

Acredito que o fato, de os problemas resolvidos com o computador serem parecidos com os resolvidos sem ele, limitou as oportunidades de os alunos perceberem quantas possibilidades a mais o computador oferece em relação ao contexto de sala de aula em que ele não se faz presente. Problemas preparados para serem resolvidos com a utilização de *software* gráfico favorecem estudos envolvendo variação nos coeficientes das funções, transformações de gráficos, entre outros. Certamente os problemas fechados acentuaram esta limitação, restringindo os procedimentos dos alunos à utilização de alguns recursos específicos, oferecidos pelo *software*. O fato de os problemas resolvidos com o *Winplot* apresentarem funções com coeficientes decimais, ou dados por números demasiadamente grandes para serem resolvidos com lápis e papel, não é o bastante para estimular, nos alunos, as atitudes de exploração que poderiam ser estimuladas nestes ambientes.

Além disso, problemas "quase iguais" na sala de aula e no laboratório podem levar os alunos a considerar o computador apenas como mais um elemento, entre os já disponíveis, ao qual se pode recorrer para resolver os mesmos problemas. Neste caso ele seria visto como um recurso meramente opcional e dispensável, uma vez que já haviam resolvido os problemas sem ele; sua utilização não apresentaria qualquer vantagem.

5.2.1.3 - AVANÇOS

Por outro lado, uma vez que são sensivelmente diminuídas as dificuldades inerentes a um novo problema - novo enunciado, nova função, novas solicitações - a resolução de problemas "já conhecidos" permitiu que os alunos experimentassem não somente diferentes formas de resolvê-los, como percebessem a diferença entre utilizar e não utilizar o *software* em sua resolução ou, o que é o mesmo, entre resolver um problema sem computador e com computador. Além disso, uma vez praticamente excluídos tais elementos complicadores, inerentes a um novo problema, foi possível que os alunos direcionassem o foco da resolução aos processos voltados à utilização do computador. Considero que estes momentos também sejam importantes para o progresso dos alunos em direção à otimização de sua utilização.

Finalmente, as características observadas, nas resoluções escritas apresentadas pelos alunos, sugerem que, em virtude de realizarem um trabalho de forma mais independente da do professor, os alunos se "mostraram mais" quando resolveram os problemas utilizando o *Winplot* do que quando estavam sem ele. Suas dificuldades de compreensão, as diferentes formas de expressão oral e escrita, entre outras, puderam ser mais bem percebidas.

5.2.1.4 - TRANSCENDENDO OS DADOS E APONTANDO POSSIBILIDADES

Gostaria de apontar para duas possibilidades que, em vista do que acabei de relatar, poderiam ser consideradas como localizadas nos extremos das abordagens possíveis para a resolução de problemas com a utilização do computador. Primeiramente, como não podia deixar de ser, de que fossem oferecidas, aos alunos, oportunidades de resolver problemas abertos. Esta não precisa ser uma prática constante, afinal seria mesmo complicado administrar esse tipo de atividade com uma turma tão numerosa de alunos. Mas poderia ser uma atividade realizada, ao menos, esporadicamente. Atividades mais abertas em geral são desencadeadoras de atitudes mais investigativas que, associadas às possibilidades oferecidas pelos recursos informáticos, propiciam aprofundamento e ampliação das compreensões dos conteúdos matemáticos.

E um segundo extremo seria resolver, de fato, exatamente os mesmos problemas pelos processos usualmente empregados em sala de aula e também utilizando o computador. Isso poderia ser feito no laboratório de Informática e talvez auxiliasse os alunos a relacionar o que fazem com o computador com o que fazem sem o computador, a perceber se há e quando há vantagem em utilizar o computador, ou mesmo se é e quando é imprescindível esta utilização.

5.2.2. RELACIONANDO CONHECIMENTOS E PROCEDIMENTOS

Em face desta dinâmica de aula, procurei detectar como os alunos relacionam o que fazem sem o computador com o que fazem com o computador. Mais especificamente, que aspectos da atividade matemática do aluno, em resolução de problemas sem o *Winplot*, não são, mas poderiam ser, aproveitados no ambiente com o computador. E também serão mostrados alguns aspectos que os alunos transferem daquele "antigo" contexto para este "novo" em que utilizam o *software* para resolver problemas semelhantes. Este é meu objetivo nesta seção.

5.2.2.1 - CENÁRIO 2

Quanto à ausência das tabelas nas resoluções escritas dos problemas que os alunos resolveram no laboratório, poder-se-ia supor que fosse gerada, simplesmente, pelo fato de que os alunos não precisaram dela, uma vez que o *Winplot* "funciona" a partir da digitação da expressão de uma função, ou seja, supostamente não seria necessário considerar sua tabela para obter o gráfico. O diálogo a seguir refere-se ao problema 7 (p.142) e pode nos oferecer subsídios para esta reflexão:

Pe: – Hum? O que aconteceu?

A3.17: – A gente não conseguiu...fazer.

Pe: – O que é que vocês querem fazer? A equação vocês já têm? Vão respondendo.

A3.17: – Tá aqui, 25...

Pe: – Isso. Já escreve aqui. Vocês têm que seguir o roteiro para não ficarem dando volta em coisa que não precisa.

O aluno, que falava pela dupla, não sabia explicar direito qual era a dúvida. Orientei para que fossem seguindo a ordem dos itens constantes no enunciado do problema, que escrevessem a resposta do item (a), se é que já sabiam qual era. Respondendo a este item, que solicitava o custo mensal como uma função do número q de cópias produzidas, o aluno escreveu $C_t = 25q + 10000$.

Então conduzi os alunos ao item (b), ou seja, ao esboço do gráfico da função obtida no item (a):

Pe: – Aqui é para desenhar o gráfico do...?

A3.17: – Custo.

Pe: – Vocês já têm, lá?

A3.17: – Então. Nós começamos a fazer aquela hora... Aí tinha dado...

Pe: – Mas não está ali o gráfico, ainda?

A3.17: – Não. Apagou tudo, não sei o que é que...

Pe: – Então comece tudo de novo. Feche essas janelas... *Equação*, *f(x)*=... A primeira coisa é colocar a equação.

A3.17 e B3.17: – Já está.

Pe: – Ah, já está!

B3.17: – Já está, a equação.

Os alunos acharam que o gráfico tinha sido apagado porque a tela do *Winplot* não mostrava nenhum gráfico, apesar de os alunos já terem digitado a equação:

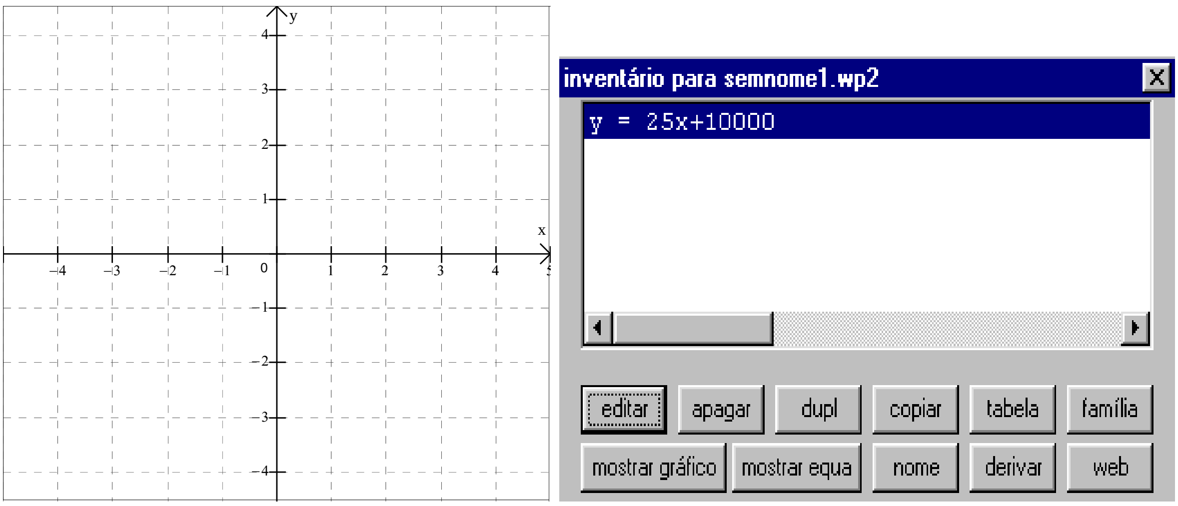


Figura 8

Então era preciso arrumar a área de gráfico que, naquele momento, se mostrava com o padrão inicial do *Winplot*: o eixo das abscissas de -5 até 5, e o eixo das ordenadas de -4.51531 a 4.51531. Perguntei aos alunos se já sabiam que valores essa função assume:

B3.17: – O mínimo tinha dado 115.

Pe: – Do y?

B3.17: – Isso.

Pe: – E o máximo? É isso?

B3.17: – Isso.

Pe: – Então, agora, vamos aqui: *Ver→Ver*; isso. Vamos pedir para o y ir de... -120... Vamos arredondar? Até 140. É aqui, olhe, *inferior* e *superior*, que é o y.

A3.17: – Cento e vinte a 140

Pe: – **Menos** 120 até 140.

B3.17: – Aí.

A seqüência de opções *Ver→Ver* permite escolher apropriadamente os valores menor e maior para numerar os eixos. Ao sugerir os valores -120 e 140 para o eixo das ordenadas eu estava seguindo a indicação dos próprios alunos.

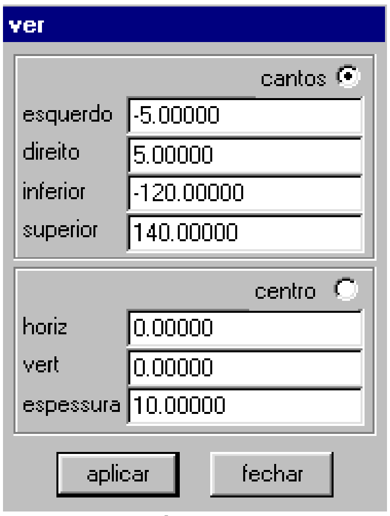


Figura 9

Pe: – Aplica; vamos ver o que acontece?

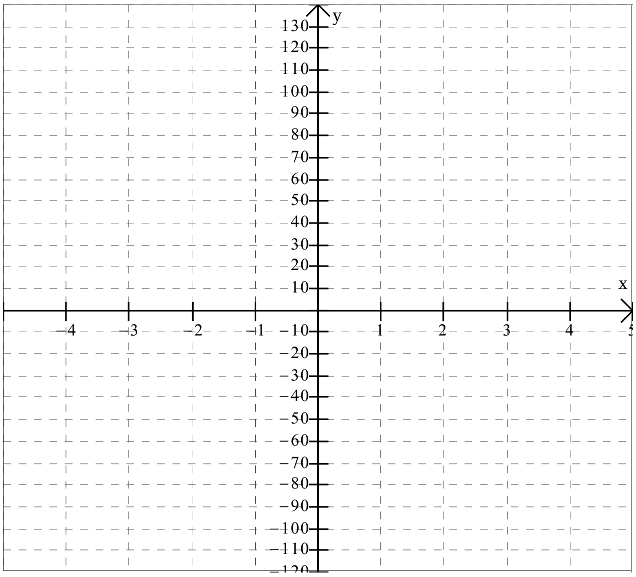


Figura 10

Pe: – Ainda não apareceu, né? Por que?

[pausa]

De fato os alunos mostravam que não sabiam o que estava acontecendo. Então sugeri que recorressem à tabela da função.

Pe: – Então vem aqui: *Misc*...eu gosto bastante de usar esse recurso aqui...*Tabela*. Abre a tabela que ele usou para desenhar o gráfico.

A opção *Misc* no menu do *software* traz entre outros recursos a opção de ver uma tabela de valores correspondente à função cuja expressão já foi digitada. O *Winplot* apresentou a seguinte tabela:

x	y
-5.00000	9875.00000
-4.60000	9885.00000
-4.20000	9895.00000
-3.80000	9905.00000
-3.40000	9915.00000
-3.00000	9925.00000
-2.60000	9935.00000
-2.20000	9945.00000
-1.80000	9955.00000
-1.40000	9965.00000
-1.00000	9975.00000
-0.60000	9985.00000
-0.20000	9995.00000

x	y
0.20000	10005.00000
0.60000	10015.00000
1.00000	10025.00000
1.40000	10035.00000
1.80000	10045.00000
2.20000	10055.00000
2.60000	10065.00000
3.00000	10075.00000
3.40000	10085.00000
3.80000	10095.00000
4.20000	10105.00000
4.60000	10115.00000
5.00000	10125.00000

Tabela 1

Pe: – O x vai de -5 até ...5. E o y está indo até...

A3.17: – É...

[pausa]

Pe: – Tem coisa errada! Esses valores que vocês me disseram eram dessa função?

A3.17: – Eram.

Pe: – Eu acho que não.

B3.17: – Será que a gente tinha colocado (...)?! Ah! Esses a gente colocou, **aquela** hora! Está certo!

Os alunos tinham tentado esboçar este gráfico com os mesmos valores que tinham utilizado no gráfico de um outro problema. Por isso o gráfico continuava não aparecendo.

Pe: – Então é por isso! Então não é esse valor. Vocês têm que ir com o y... Olha o valor dele aqui... 9 mil... 10 mil...Olha aqui, quantos valores grandes de y, e cada vez maiores. Então tem que marcar o y com estes números. Vamos ver se aparece, agora? Está aparecendo, está vendo?

A3.17 e B3.17: – Hã, hã.

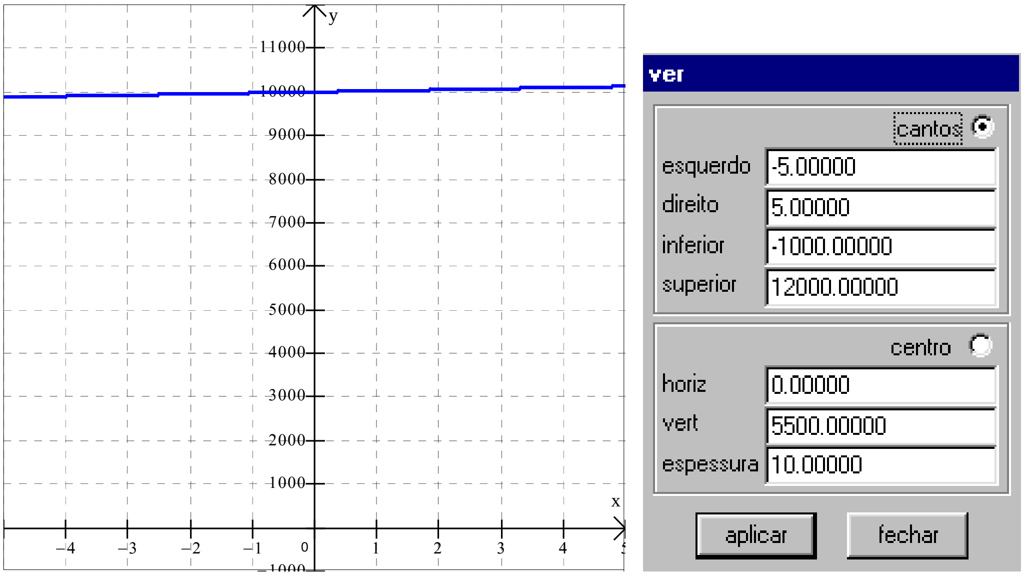


Figura 11

Pe: – Só que agora a gente tem que fazer aparecer mais para a direita, né? Porque nós queremos o primeiro quadrante, aqui. Tá? Então você tem que aumentar esse número. Em vez de ir até 5, vamos mais para a direita. Vamos pegar um número grande aqui? [...]

Procedendo deste modo os alunos chegaram a uma apresentação mais apropriada do gráfico da função:

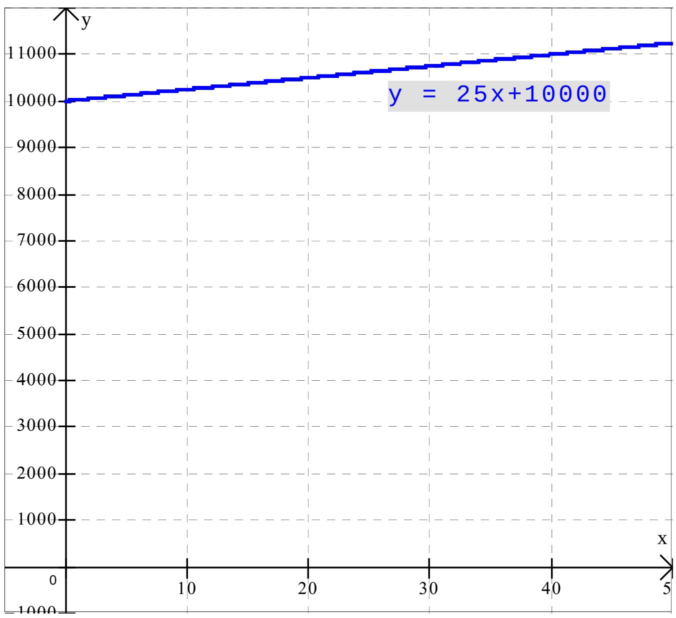


Gráfico 3

Essa dúvida (Por que não aparece o gráfico?) foi bastante freqüente entre os alunos da turma ao resolverem esse problema. Desse modo, percebi que nem sempre os alunos transferem os métodos ou procedimentos que utilizam na resolução de problemas sem o computador, para as situações em que têm a disponibilidade desse recurso, apesar de que, às vezes, essa transferência fosse apropriada. Refiro-me aqui ao emprego da tabela como recurso de apoio na construção de gráficos de funções. Nas aulas em que tinham apenas lápis e papel, os alunos sempre construíam uma tabela de valores para localizar alguns pontos no plano cartesiano e, assim, conseguir esboçar o gráfico de uma função. Mas, ao estarem utilizando o *software*, eles não se lembravam da tabela – nem de fazê-la à mão e nem de consultar a que o *Winplot* disponibilizava. E ainda, mesmo quando estavam trabalhando no laboratório, quando recorriam ao lápis e papel, não se lembravam da tabela.

Talvez pudéssemos supor que essa configuração dicotômica, que inclui aulas sem computador e aulas com computador, contribua para que o aluno não perceba as relações entre os procedimentos adotados na resolução de problemas sem o computador e os adotados com o computador. O próprio professor da turma, orientava os alunos no sentido de que, no laboratório, não precisavam resolver nada utilizando lápis e papel, mas que fizessem tudo no computador e só escrevessem as respostas. Aliás, uma vez inserida neste contexto, a fim de não me contrapor ao professor, minhas orientações dadas aos alunos também eram nesse sentido. A existência desses dois ambientes pode dificultar que o aluno relacione o que faz em um, com o que faz em outro ambiente.

Porém, acredito também, que as dificuldades surgem, muitas vezes, em função do recurso informático que estão utilizando. Talvez, neste caso específico, estivessem condicionados pelo *software* que, supostamente, deveria apresentar o gráfico da função a partir, apenas, de sua expressão algébrica. Mesmo os alunos que já sabiam que o *Winplot* constrói a tabela de valores da função, não recorriam a ela.

Podemos notar isso neste diálogo apresentado: ele reflete uma situação em que, embora fosse bastante apropriado recorrer à tabela, os alunos não o faziam. Além disso, apesar de a tabela sempre ter sido um apoio importante na construção de gráficos com a utilização do lápis e papel, com os quais estavam mais habituados, eles não montavam uma tabela auxiliar quando utilizavam o computador. No atendimento aos grupos, eu e o professor os levamos à tabela e valorizamos esse recurso, entretanto, mesmo assim, os trabalhos escritos não apresentam seu registro.

O diálogo a seguir também se refere a isto e relaciona-se ao seguinte problema:

Os proprietários de uma certa empresa de ônibus estimam que a receita total obtida com a linha que liga as ruas A e B é dada por R_t = 60p.(25-10p), onde p representa o preço da passagem (bilhete), em reais. O custo total é C_t = 200+325p.

(a) Esboce o gráfico de R_t e C_t.
(b) Determine que preço p deverá ser cobrado pela passagem para que seja obtida a máxima receita.
(c) Determine o ponto crítico dando a análise econômica
(d) Para que valores de p se tem lucro? Justifique sua reposta.
(e) Para que valores de p se tem prejuízo? Justifique sua resposta.
(f) Qual é o valor da receita e do custo se o preço do bilhete for R$1,20?

Problema 8

A3.20: – Prô!

Pe: – Hum?

A3.20: – Prof, olha só, não sei o que está acontecendo.

Pe: – Não aparece o gráfico?

A3.20: – Não. E olha só quanto deu o delta!

A aluna também estava com a mesma dificuldade: embora tivessem "entrado" a expressão da função, a tela do *Winplot* não mostrava o gráfico da função receita R_t. Ela estava tentando calcular algebricamente alguma coisa para resolver isso. Novamente a tabela não foi o recurso percebido para contornar sua dificuldade. Recomendei que consultasse a tabela.

Pe: – Vou dar uma dica: *Misc*. Significa miscelânea, tá? Tem um monte de coisas aí. Abre *Tabelas*. Essa tabela mostra pra você os valores de x que ele usou para desenhar o gráfico. Dá pra você ver mais para baixo, aqui, e os valores de y. Isso é x, e o y está daqui para lá. Então, -22 500 até... Quer ver? Menos 7 000... Olha os valores de y! Corre essa barrinha ali, só para a gente ir observando os valores. Até... Vai... Veja que ele pegou números como -7 000 e tarará, subiu, foi aumentando, depois diminuiu de novo.

A3.20: – Eu posso pegar esses números?

A aluna questionou a legitimidade deste procedimento ou não havia entendido, ainda, a relação daqueles números apresentados na tabela com o gráfico que ela estava tentando esboçar. De qualquer modo, a sua pergunta sugere que ela estranhou o procedimento que eu recomendei.

Pe: – Sim; a tabela faz você ver porque o gráfico não está aparecendo. Porque ele precisava desses números, e olha o seu onde está!

A3.20: – Então, se a senhora não falasse a gente nunca ia imaginar!

Este recurso já havia, sim, sido mostrado aos alunos, numa dessas aulas no laboratório, mas a aluna não tinha percebido. Esta era uma ocorrência bastante freqüente, conforme já comentamos – dificilmente conseguimos a atenção de toda a turma de alunos quando estão em atividade de uso do computador. Mas, digamos que a possibilidade de visualizar a tabela, no *Winplot*, não tivesse sido ainda apresentada aos alunos. A aluna preferiu tentar resolver algebricamente o problema a montar, por ela mesma, uma tabela. Com lápis e papel, freqüentemente os alunos montam uma tabela para auxiliar a construção de gráficos e, neste caso, seria bastante útil. Tentei levá-la a perceber isso no nosso diálogo:

Pe: – Então você relaciona os valores da tabela ao... Vamos supor que a gente estivesse na sala de aula: se minha tabela dá -7500, eu vou numerar [o eixo] a partir de -100?

A3.20: – Ah, não!

Pe: – Não vou! Então eu tenho que ir lá, e numerar o eixo direito.

A3.20: – Tá.

Pe: – Tenho que pedir o número que eu quero, entendeu?

A outra aluna que fazia parte da dupla também percebeu, então, como poderiam proceder e sugeriu o 2000 como o valor máximo de y.

B3.20: – Então a gente tem que colocar 2000...

Pe: – É isso. Aí vocês vão lá: *Ver* → *Ver* e arrumam o *inferior*, o *superior*, olhando por aqui [pela tabela].

A dúvida sobre a dificuldade de mostrar o gráfico estava resolvida. A aluna seguiu o diálogo apresentando outras dúvidas. Ela mostrava, no caderno, o que estava tentando calcular algebricamente:

A3.20: – Agora... Isso está certo?

Pe: – Você igualou as duas [C_t e R_t]?

A3.20: – Tem que igualar, né?

Pe: – Pra fazer o que? Porque aqui vocês só estão querendo o gráfico!

A3.20: – Não sei... por que eu igualei...

Pe: – Então, vamos ser bem objetivas? Segue o roteirinho [enunciado]!

B3.20: – Não precisa... usar isso aqui, né?

Pe: – Deixa aqui, por enquanto...

A3.20: – Ponto crítico! Ponto crítico!

Pe: – Ah, bom! Então você já está aqui, olhe.

A3.20: – É.

Em princípio a aluna havia se esquecido, mas depois se lembrou que igualara as equações de C_t e R_t para conseguir determinar algebricamente o ponto crítico, que é o ponto onde as duas curvas que representam estas funções se cruzam.

A3.20: – Melhor é ir por aqui, pelo enunciado.

Pe: – É, segue isso aqui. Pede o gráfico? Faz o gráfico primeiro.

B3.20: – Tá.

A3.20: – Mas o gráfico não é melhor fazer na mão e depois passar para cá, ou não?

Parece que, ao encontrar dificuldades para esboçar o gráfico, ela tenha sido levada a acreditar que seria melhor resolver à mão, primeiro. Ou teria pulado o item que pede o gráfico e se dirigido ao item (c), que poderia ser resolvido algebricamente. Como, na sala de aula, sempre igualavam as equações para determinar o ponto crítico, foi isso que tentou fazer neste momento também. Ao fazer isso, porém, também encontrou dificuldades; ela estranhou que o valor de delta era muito grande. Nem por isso as alunas se lembraram da tabela; o caminho escolhido foi "resolver algebricamente". Conduzi o diálogo tentando levá-la a explorar os recursos que o computador lhe colocava à disposição.

Pe: – Pense... se você estivesse sem ele [o caderno]? O que você faria?

A3.20: – Primeiro aqui [no computador].

Pe: – Como eu disse: se você recorre à tabela, e você acha -7000 aqui, você numera o eixo como?

A3.20: – Hã, hã.

Pe: – Ela ajuda você a acertar o gráfico e você faz tudo aqui, no computador. Você não precisa ter os dois trabalhos!

A3.20: – Tá.

Esse diálogo apresenta mais um momento em que se configura a forma como, ou o momento em que, os alunos relacionam (ou não) o que fazem em sala de aula com o que fazem no laboratório. Inicialmente teria sido bastante útil que a dupla tivesse recorrido a uma tabela auxiliar de valores, mesmo construída à mão, como costumavam fazer em sala de aula, para conseguir corrigir os valores de p, C_t e R_t nos eixos e conseguissem esboçar os gráficos. Esse não foi, contudo, o procedimento que escolheram. A dupla abandonou a tarefa de esboçar o gráfico e encaminhou-se ao cálculo do ponto crítico. Para isto elas recorreram ao que costumavam fazer quando não estavam trabalhando com o computador: calcular algebricamente, à mão, o ponto de interseção das curvas C_t e R_t.

Esta passagem é uma, entre tantas outras, em que os alunos se mostram mais propensos a utilizar procedimentos algébricos quando encontram algum obstáculo na resolução de problemas relacionados a funções. No caso do problema 7 (p.142) apresentado, certamente o cálculo algébrico poderia ajudar, mas também apresentou obstáculos pois trouxe dificuldades relativas a cálculos com valores muito grandes. A tabela já estava disponível e poderia ter sido consultada no *software*. E mesmo que fosse montada pelas próprias alunas, a tabela seria um recurso mais eficiente para ajudá-las a transpor o obstáculo que se lhes apresentava entre a proposição e a meta do problema.

Essa tendência ao algébrico se manifesta, de fato, fortemente. Não raro, os alunos trazem as "condutas algébricas", que estão habituados a utilizar, para os ambientes onde têm à disposição algum recurso informático, às vezes, até em momentos em que isso não poderia ser feito. Entre os alunos que observei percebi, por exemplo, confusões entre os padrões da linguagem algébrica escrita à mão (ou impressa) e a forma (sintaxe) como as expressões das funções deveriam ser digitadas no *Winplot*. Essas questões referentes à linguagem serão tratadas na seção 5.4, especialmente dedicada a este subtema.

No entanto, há um aspecto básico da Álgebra que os alunos não consideram naturalmente, que é determinante na utilização do *software Winplot* e, talvez, de outros *softwares*, e que interferiu consideravelmente na atividade dos alunos, quando resolviam estes problemas sobre funções. Trata-se da colocação dos parênteses nas expressões digitadas. Conforme já comentado brevemente no cenário 1, a dúvida sobre a necessidade (ou não) e o lugar correto de inseri-los nas expressões das funções foi levantada muitas vezes pelos alunos. Houve uma aluna que, tendo começado a fazer o trabalho "Aplicativos de Matemática" com antecedência, me pediu que esclarecesse algumas de suas dúvidas, muitas delas referentes a este aspecto.

O diálogo a seguir retrata uma parte de nossa conversa sobre o item (b) do problema 9, cujo enunciado é o seguinte:

Exercícios Grupo 04

Objetivos:

(a) Construir gráficos das funções **afins.**
(b) Determinar raízes, monotonicidade e sinal.

1. Para cada uma das funções a seguir, pede-se:
   - Traçar o gráfico
   - Verificar se é crescente ou decrescente.
   - Determinar a raiz e o encontro com o eixo y.
   - Verificar para que valores de x a função é positiva ou negativa (sinal das funções).

(a) $y = 2x - 3$	(b) $y = \frac{x}{3} + 1$	(c) $y = -2x + 3$

Problema 9

A5.30: – A letra (b); aí prô, essa não precisa de parênteses, não é?

Pe: – Não.

Na realidade a aluna só queria a confirmação de que a expressão $y = \frac{x}{3} + 1$ não precisava apresentar parênteses ao ser digitada no *Winplot*.

A5.30: – Olha o que eu fiz, ó: eu fiz o teste e tanto faz, com ou sem parêntese.

Pe: – Você tem razão!

A5.30: – Entendeu?

Pe: – Essa não precisa mesmo, pode ser direto.

A5.30: – Então tá.

Diante da dúvida, a aluna digitou a expressão de duas maneiras: com parênteses na fração, y = (x / 3) + 1, e sem parênteses nenhum, y = x / 3 + 1 . Então observou que os gráficos eram iguais e concluiu que os parênteses eram dispensáveis. Este era um procedimento bastante utilizado pelos alunos.

Entretanto no problema 10:

Exercícios Grupo 03

Objetivos:

(a) Determinar a equação da reta que passa por dois pontos dados.
(b) Determinar a equação da reta que passa por um ponto dado e seu coeficiente angular.
(c) Determinar a equação da reta que passa por um ponto dado e seu coeficiente linear.

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

	Passa pelo(s) ponto(s)	Coeficiente angular	Coeficiente linear
(a)	(1, 3)	2	
(b)	(1, 3)	3	
(c)	(2, 3)		1
(d)	(2, 3)		2

2. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

	Passa pelo(s) ponto(s)
(a)	(1, 0) e (0, 3)
(b)	(-2, 0) e (0, 2)
(c)	(-1, 0) e (0, 4)
(d)	(-2, 0) e (0, -1)

Problema 10

ocorreu que, resolvendo algebricamente o item 1.(d), esta mesma aluna encontrou a equação $y = \frac{1}{2}x + 2$ e, ao digitar a expressão no *Winplot*, ficou em dúvida sobre se era preciso ou não colocar parênteses. Vejamos o diálogo:

A5.30: – Vamos para o grupo 3?

Pe: – Vamos.

A5.30: – É o (d). Eu não sei se precisa colocar entre parênteses. Não, né? Vê lá, ó.

Pe: – É essa?

A5.30: – É. Eu acho que é sem parênteses, mas eu não tenho certeza, porque deu diferente.

Por alguma razão a aluna supôs que precisava colocar parênteses na expressão e, embora esta função seja semelhante à do grupo anterior, da forma como fez o *Winplot* gerou um gráfico diferente do obtido sem nenhum parêntese. A aluna optou pela segunda forma, mas não sabia justificar sua opção.

De fato, diante da dúvida sobre a forma de digitar a expressão da função, os alunos tentavam várias opções. O computador favorece este tipo de procedimento e, particularmente o *Winplot*, que é um *software* bastante simples de ser utilizado. Os alunos fazem experimentações, fazem tentativas e obtêm *feedback* relativamente rápido. No caso das funções, se duas formas diferentes de digitar a expressão geravam gráficos iguais os alunos concluíam que eram expressões equivalentes. Neste caso, concluíam que os parênteses eram dispensáveis. Porém, o diálogo apresentado, e tantos outros nesta linha, indicam que se as duas expressões geravam gráficos diferentes, os alunos, em geral, não sabiam como se decidir entre uma ou outra.

Seguindo nosso diálogo, confirmei à aluna que sua escolha estava correta, isto é, não era preciso colocar os parênteses. Mas só isso não foi suficiente para ela:

Pe: – Ela [a expressão digitada] está certa.

A5.30: – Está certa?

Pe: – Está.

A5.30: – <u>Como a senhora sabe</u>?

Os gráficos gerados pelas funções deste problema são os seguintes:

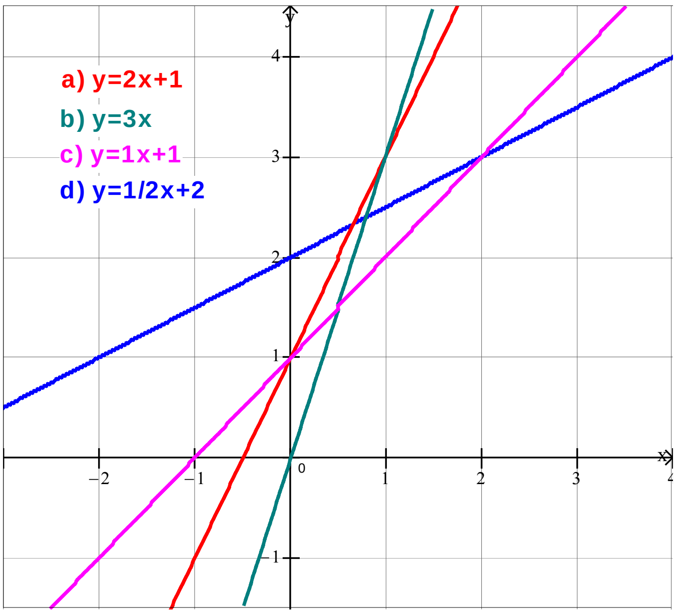


Gráfico 4

Como este era um grupo de problemas sobre função afim, eu lhe falei das coisas que havia pensado sobre este tipo de função, e que me levaram a concluir que não era preciso colocar parênteses.

Pe: – Vamos lá. Por que eu sei: por causa do coeficiente b, eu sei que ela [a curva $y=\frac{1}{2}x+2$] tinha que cruzar o eixo y no 2...

A5.30: – Hã, já matei, prô.

Pe: – Está vendo? Nessa [na função do item (c)] o b é 1, tem que cruzar no 1; esse b é zero [na função do item (b)], tem que cruzar no zero... Essa é uma coisa.

A5.30: – Hã, hã.

Pe: – Segunda coisa: esse coeficiente angular, $\frac{1}{2}$...

A5.30: – Hã...

Pe: – ... é menor do que esse aqui, olhe, que é 1.

A5.30: – Certo.

Pe: – Isso significa que essa reta tem que ter uma inclinação **maior** ...

A5.30: – ... do que a outra.

Pe: – ... do que essa. Então, eu olhei aqui. Olhe o gráfico da (b)...

A5.30: – É.

Pe: – ... e o gráfico da (d).

A5.30: – Está ótimo.

Pe: – Está vendo?

A5.30: – Estou. Então tá bom.

Outros momentos surgiram em que houve necessidade de ajudar os alunos a decidirem sobre a forma de digitar a expressão da função. O próximo diálogo refere-se a este aspecto, e ocorreu durante a resolução do seguinte problema, já apresentado também no cenário 1:

> Suponha que as leis das lâmpadas fluorescentes fossem dadas por:
>
> $$\begin{cases} q_d = -2 + \dfrac{100}{p+10} \\ q_o = 0{,}03\, p^2 \end{cases}$$
>
> Pede-se:
>
> (a) O ponto de equilíbrio
>
> (b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda
>
> (c) Dar a análise econômica

Problema 3

A dúvida estava na expressão da função racional $q_d = -2 + \frac{100}{p+10}$. Utilizando as variáveis x e y, como deveria ser no *Winplot*, o aluno digitou y = -2 +100 / x + 10 , e me chamou para confirmar se estava correto:

A5.9: – Esse aqui, a fórmula não é isso? Tem erro na fórmula?

Pe: – Desenhe! Vamos ver. Já tem um erro aí, mas eu quero que vocês vejam.

O gráfico não apareceu na primeira tentativa, mas este aluno logo percebeu que precisava ajustar a área de gráfico:

A5.9: – Ah, eu vou ter que arrumar a grade.

Pe: – Você sabe de onde até onde tem que ir [a numeração dos eixos]?

A5.9: – Sei. Deixe eu só mostrar pra senhora como está ficando...

[pausa]

Isto feito, a dupla mostrou o seguinte gráfico:

Gráfico 5

Então perguntei ao aluno:

Pe: – Olhe para a equação da função dada e me diga: qual é o domínio dessa função?

A5.9: – Hã?

Pe: – Qual é o número que a gente não pode colocar no lugar do p?

A5.9: – Menos 10... porque é zero.

Embora não tivesse se expressado corretamente, com a resposta "porque é zero", o aluno queria dizer que, uma vez que p = -10 anula o denominador da fração, este seria um valor que não poderia ser utilizado nesta função. Era isso mesmo que eu queria que pensassem: considerando a função apenas matematicamente, ou seja, ainda sem as restrições dadas pelo seu significado prático, qual era a relação entre o domínio da função e seu gráfico.

Pe: – Exatamente! Então, no seu desenho, um pedaço do gráfico tinha que estar à esquerda do -10 e outro pedaço à direita do -10.

A5.9: – É mesmo.

Pe: – E o seu não está.

A5.9: – O meu está no zero, à esquerda e à direita do zero .

Pe: – Isso. [...] Então tem uma coisa na equação que você vai ter que mudar. O que é?

[pausa]

Pe: – Ele está dividindo o 100, só pelo x; ele não está entendendo que é para dividir pelo x mais 10.

A5.9: – Como que eu faço?

Pe: – Como é que a gente diz para ele: "não divide só pelo x, divide por **tudo** que está depois da barra" [de divisão].

A5.9: – Coloca entre parênteses.

Pe: – Isso! Pra isso servem os parênteses.

A5.9: – Assim?

Agora o aluno digitou y = -2 +100 / (x + 10).

Pe: – Quer ver?

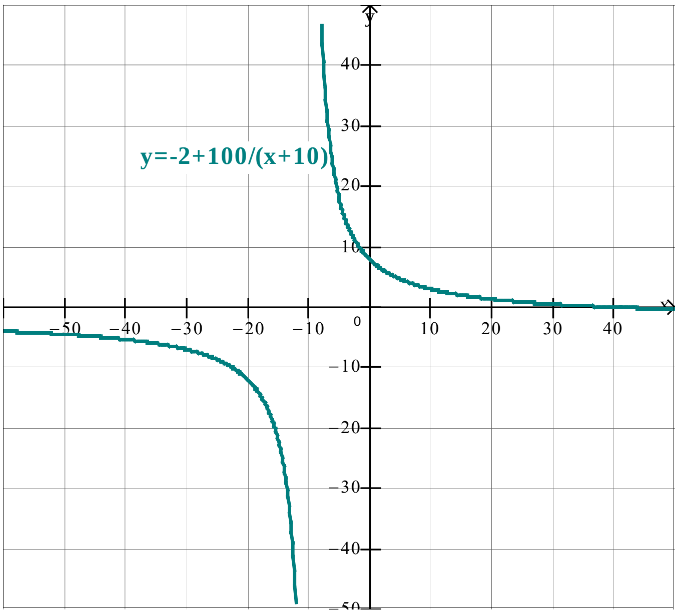


Gráfico 6

A5.9: – É, agora ele foi para o -10.

Novamente, neste caso, recorremos a um aspecto bastante peculiar e específico das funções reais dadas por expressões racionais que é o fato de o domínio ser constituído pelos números reais exceto aqueles que anulam o denominador da fração. Este raciocínio veio reforçar os fatos relacionados a este tipo de função, que era o que estava em foco nesta aula. E, ademais, possibilitou que o aluno percebesse a necessidade de corrigir a expressão da função digitada.

Em várias ocasiões os alunos se viam diante desse impasse; além dos já apresentados, há episódios envolvendo funções quadráticas com coeficientes fracionários, funções exponenciais, entre outras. Não resta dúvida de que a colocação dos parênteses nas expressões digitadas no *Winplot* se constituiu num obstáculo que os alunos tinham que transpor. E se, em alguns momentos, algumas dessas atividades lhes eram propostas pelo professor apenas em caráter de exercício de fixação, este obstáculo as constituiu em problemas para aqueles alunos. Ou seja, a presença de tal dificuldade constituiu o problema, uma vez que se apresentou entre a proposição e a meta e mobilizou os alunos na busca de recursos para a resolução.

Outras perguntas feitas pelos alunos podem ser retiradas dos diálogos gravados nas aulas de laboratório que constituem um conjunto significativo neste sentido:

A8.32: – Prô, me ajuda aqui? Senão eu vou chegar em casa e vou...dar "tiuti". Aqui, olhe, aqui põe os parênteses?

Pe: – Como?

A8.32: – É quatro... Não precisa de parênteses, né, Prô? [...] <u>Será que precisa</u>...?

Mais esta:

A5.30: – Como é que ficou...olhe. Ficou assim. <u>Agora, eu não sei se eu coloco isso entre parênteses</u>.

[...]

A5.30: – Está vendo que dá diferente se eu colocar entre parênteses? É o que a gente estava discutindo. Eu fiz assim só pra senhora ver que... que dá...

Pe: – Uma coisa dá diferente da outra?

A5.30: – É. [...] <u>E como é que eu vou saber, mesmo</u>?

E ainda:

A5.3: – <u>Como é que eu vou conseguir saber</u> se tem que colocar tudo entre parênteses?

Vários detalhes deste cenário me fizeram repensar sobre esta dificuldade dos alunos em reconhecer se é necessário ou não colocar parênteses na digitação da expressão de uma função. Inicialmente fui levada a este aspecto pelas dúvidas apresentadas pelos alunos, em vários momentos de aula, alguns dos quais acabei de relatar. Em cada momento em que a dúvida surgia, eu tentava levar o aluno a pensar sobre as características e propriedades da função envolvida no problema, de modo que fosse possível decidir sobre a necessidade dos parênteses naquele caso. Foi o que tentei fazer no episódio envolvendo as funções afins, no problema 10 (p.156): analisar e comparar os valores dos coeficientes das funções seria uma maneira de saber como e onde os gráficos deveriam estar localizados no plano cartesiano. A partir daí foi possível decidir sobre a equação da função. Mas este raciocínio resolveu a dúvida neste caso específico.

Esse foi, também, o procedimento utilizado para a função racional do problema 3 (p.158), ou seja, recorrer aos elementos próprios daquele tipo de função para corrigir a expressão e, conseqüentemente, o gráfico obtido.

Portanto, em cada caso discutido buscávamos algum recurso específico àquele caso para nos apoiarmos na decisão sobre a utilização dos parênteses. Porém, a dúvida continuava a aparecer em outros momentos, em outras funções, e os alunos ainda não tinham condições de resolver este problema. Ao dizer: "– Está vendo que dá diferente se eu colocar entre parênteses? É o que a gente estava discutindo." , esta aluna mostrou que se lembrou que esta questão já havia sido tratada anteriormente e, de fato, havia mesmo.

Entretanto, a pergunta feita, em seguida, pela aluna: "– E como é que eu vou saber, mesmo?" me leva a refletir sobre dois aspectos. Primeiramente, ela indica que colocar ou não os parênteses era sim, um problema, apesar de não estar explicitamente enunciado no roteiro do trabalho elaborado pelo professor. Tampouco estava entre os objetivos inicialmente definidos para os problemas propostos. Mas era um problema; afinal, não só a aluna participante deste diálogo, mas os alunos em geral, estavam diante de um impasse que precisavam e queriam resolver, mas não tinham os recursos imediatamente disponíveis para a resolução. Um segundo aspecto que considerei é que a presença das expressões "como saber, mesmo" na pergunta da aluna, reforçada pela recorrência da dúvida, sugere que ela estivesse precisando de uma referência mais genérica ou, no mínimo, mais abrangente para utilizar nesses casos. Talvez uma regra, um processo, uma forma mais eficiente e geral sobre a colocação dos parênteses nas expressões das funções.

Somam-se a estes episódios de aula as resoluções apresentadas pelos alunos para alguns grupos de problemas do trabalho. Iniciarei pelos que compõem o grupo 7:

Exercícios Grupo 07

Objetivos:
(a) Construir e interpretar gráficos de funções raiz quadrada
(b) Determinar os pontos de encontro com os eixos.

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema de eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x} \\ f_2(x) = \sqrt{x-1} \\ f_3(x) = \sqrt{x-2} \\ f_4(x) = \sqrt{x+2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x} \\ f_2(x) = \sqrt{2-x} \\ f_3(x) = \sqrt{2-2x} \\ f_4(x) = \sqrt{2-3x} \end{cases}$

2. Determinar os pontos de encontro com os eixos.

Problema 11

Ao empregar a forma de potência correspondente à raiz quadrada de x, x elevado a meio, vários alunos tiveram problemas com a colocação dos parênteses ao digitar a expressão no *Winplot*:

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	x^1/2
$\sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$	x-1^1/2
$\sqrt{x-2} = (x-2)^{1/2}$	x-2^1/2
$\sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2}$	x+2^1/2
$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$	1-x^1/2
$\sqrt{2-x} = (2-x)^{1/2}$	2-x^1/2
$\sqrt{2-2x} = (2-2x)^{1/2}$	2-2x^1/2
$\sqrt{2-3x} = (2-3x)^{1/2}$	2-3x^1/2

Tabela 2

Os gráficos apresentados nos trabalhos dos alunos, obtidos a partir do que eles digitaram, são:

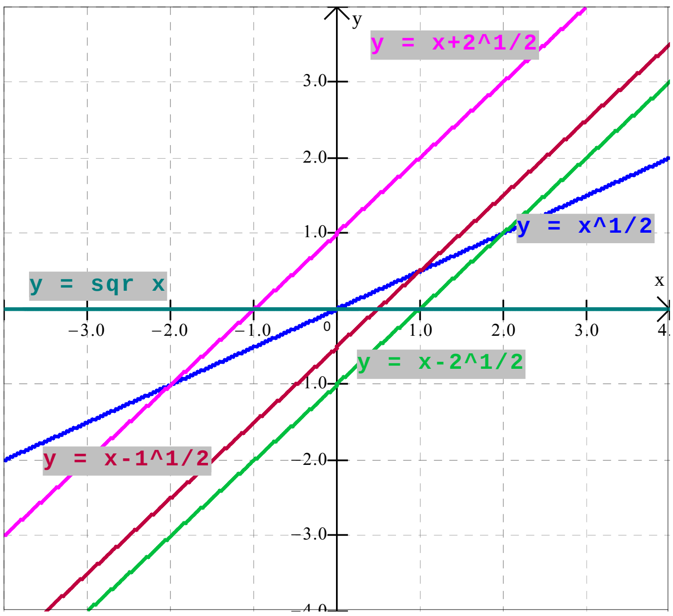


Gráfico 7

O que aconteceu nos gráficos dessas funções foi que, da forma como os alunos digitaram as expressões das funções, eles as transformaram em funções afins. Os gráficos apresentaram-se como retas e não como partes de parábolas, conforme deveria ocorrer.

Este tipo de erro também foi observado em outros grupos de problemas do trabalho, conforme veremos a seguir:

Exercícios Grupo 08

Objetivos:
(a) Construir gráficos de funções hipérboles[46].
(b) Determinar as assíntotas
(c) Determinar os pontos de encontro com os eixos

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema cartesiano.
2. Determinar as assíntotas e os encontros com os eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2 - \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = 2 - \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = 2 - \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$

Problema 12

Novamente, a colocação dos parênteses no lugar errado, ou sua falta, foram as principais causas dos erros detectados nas resoluções apresentadas nos trabalhos, para o problema 12:

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos
$\dfrac{1}{x+1}$	1 / x+1
$\dfrac{1}{x-1}$	1 / x-1
$\dfrac{1}{x-2}$	1 / x-2
$2-\dfrac{1}{x+1}$	2 - 1 / x+1
	2 - (1 / x+1)
$2-\dfrac{1}{x-1}$	2 - 1 / x-1
	2 - (1 / x-1)
$2-\dfrac{1}{x-2}$	2 - 1 / x-2
	2 - (1 / x-2)

Tabela 3

Assim, os gráficos obtidos pelos alunos, para as expressões sem parênteses, foram os seguintes:

[46] A expressão "função hipérbole", que aparece no objetivo (a) deste problema, era utilizada pelo professor para designar as funções racionais cujos gráficos eram hipérboles.

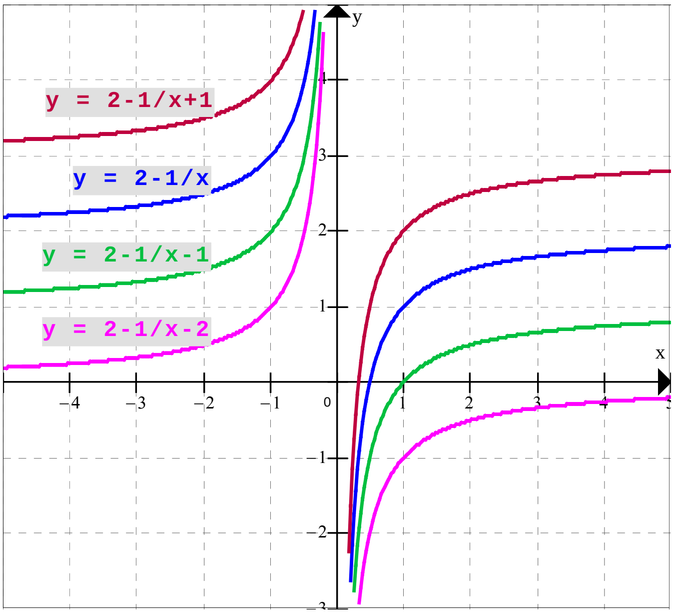


Gráfico 8

Ressalto que estas questões surgiram porque os alunos estavam utilizando o computador. Assim, o problema inicial que consistia em esboçar gráficos de funções empregando o *Winplot* desencadeou um novo problema relativo à colocação dos parênteses na expressão que precisava ser, agora, digitada para obter o gráfico correto. O que seria necessário, então, para encaminhar a resolução? A que os alunos poderiam ou deveriam recorrer e que servisse como critério geral para sanar essas suas duvidas, se é que este critério existe?

Foram essas indagações que me levaram a analisar com mais vagar as resoluções apresentadas pelos alunos, nos trabalhos. Fui buscar entender porque o *software* havia executado daquela maneira os comandos dados pelos alunos ao digitarem as expressões das funções da forma como fizeram, e que gráficos eram aqueles mostrados pelo computador. Embora nesta seção eu tenha trazido ao leitor os problemas do trabalho envolvendo funções raiz quadrada (Problema 11, p.162) e funções hipérboles (Problema 12, p.164), em vários outros problemas ocorreu fato semelhante: a falta e a colocação inadequada dos parênteses geraram gráficos que não correspondem à representação da função solicitada no trabalho. Todos eles somaram subsídios às minhas análises.

Retomarei apenas uma função de cada um dos problemas apresentados anteriormente, começando por uma do Problema 11. Quando os alunos digitaram a expressão $2-3x\text{^}1/2$, o *Winplot* mostrou o gráfico de uma reta porque ele executou primeiro a potência x^1, em seguida multiplicou este termo pelo número -3, dividiu por 2 e, finalmente, a isto somou 2. Deste modo, o gráfico que exibiu foi o da função $y = 2 - \frac{3x^1}{2}$.

Inserindo a expressão com parênteses (2-3x)^(1/2), a primeira operação considerada pelo computador seria a multiplicação de x pelo número -3, a este produto somaria 2 e elevaria tudo isso ao expoente $\frac{1}{2}$. O gráfico exibido seria, neste caso, o da função realmente solicitada no problema que era $y=\sqrt{2-3x}=(2-3x)^{1/2}$.

No caso do problema 12, a sentença 2 - (1 / x+1), fornecida pelos alunos ao *software,* impõe: a divisão de 1 por x, a adição de 1 a este quociente, a multiplicação disto pelo número -1 (resultando em $-\frac{1}{x}-1$) e a adição de 2. Executadas nesta ordem, as operações levaram ao gráfico de $y=2-\frac{1}{x}-1=1-\frac{1}{x}$. Se os parênteses tivessem sido colocados de modo diferente: 2 - 1 / (x+1), a adição de x com 1 iniciaria a seqüência de operações; esta soma dividiria o 1, em seguida o quociente obtido seria multiplicado pelo número -1 e acrescido de 2. O resultado corresponderia a $y=2-\frac{1}{x+1}$, de acordo com o enunciado.

Ou seja, o *software* executa as fórmulas digitadas seguindo a hierarquia das operações matemáticas. De acordo com as leis da Álgebra, considerando expressões matemáticas envolvendo várias operações, sabemos que são efetuadas primeiramente as potências e raízes (obedecendo à ordem em que aparecem), depois as multiplicações e divisões (também na ordem em que aparecem) e, finalmente, as adições e subtrações (novamente, na ordem em que aparecem). Por exemplo, se queremos calcular a imagem de $x=7$ na função

$$y=5x-\frac{x^2}{7}$$

fazemos

$$y=5.7-\underbrace{\frac{7^2}{7}}_{\text{Potência}}=\underbrace{5.7}_{\text{Multiplicação}}-\frac{49}{7}=35-\underbrace{\frac{49}{7}}_{\text{Divisão}}=\underbrace{35-7}_{\text{Subtração}}=28$$

Também é assim que o *Winplot* executaria as operações se lhe fornecêssemos a expressão $5x-x\verb|^|2/7$, assim escrita, horizontal e seqüencialmente, como é possível nesse ambiente.

Se essa ordem de execução precisa ser alterada, a linguagem algébrica convencionou que a ordenação seja feita através da utilização dos delimitadores, isto é, indicando as operações entre parênteses, colchetes e chaves, calculados nessa ordem. Suponhamos que a expressão anterior figure com os seguintes delimitadores:

$$y = 5\left[x - \left(\frac{x}{7}\right)^2\right]$$

Mantendo o valor x = 7, neste caso temos que calcular:

$$y = 5.\left[7 - \left(\frac{7}{7}\right)^2\right] = 5.\left[7 - 1^2\right] = 5.\left[7 - 1\right] = 5.6 = 30$$

Divisão Potência Subtração Multiplicação

Então, para obter o gráfico desta função, no *Winplot* deveria ser digitado 5(x-(x/7)^2).

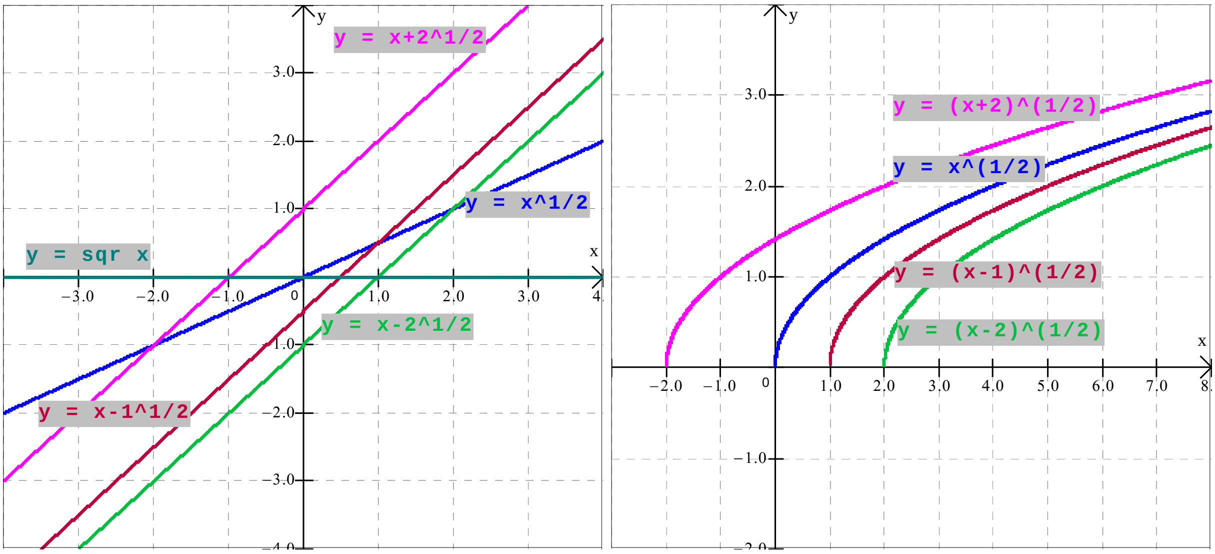
Este raciocínio algébrico responde à pergunta da aluna "– E como é que eu vou saber, mesmo?" sobre como digitar a expressão das funções no *Winplot*. A presença dos parênteses na expressão digitada, por exemplo no caso do problema 3 (p.158), $y = -2 + 100/(x + 10)$, é necessária para que seja executada primeiro a soma de x com 10 e, em seguida, a divisão de 100 por este resultado para, finalmente, subtrair 2 do termo obtido. Tal raciocínio também explica todos os erros que os alunos cometeram nos vários problemas do trabalho, incluindo os não apresentados aqui, e que envolvem funções exponenciais e modulares. Ele poderia ter sido adotado como a referência, como a regra geral de que os alunos precisavam para resolver os "problemas dos parênteses". Ou seja, respeitadas as especificidades próprias de sintaxe, a linguagem do *Winplot* não é totalmente diferente da linguagem matemática, mas é estruturada de acordo com as leis da Álgebra.

Vejamos, então, o que os alunos fizeram, o que deveriam ter feito, e o que o Winplot executou no problema 11 do trabalho:

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	x^1/2	$\frac{x^1}{2}$	x^(1/2)
$\sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$	x-1^1/2	$x - \frac{1^1}{2} = x - 0{,}5$	(x-1)^(1/2)
$\sqrt{x-2} = (x-2)^{1/2}$	x-2^1/2	$x - \frac{2^1}{2} = x - 1$	(x-2)^(1/2)
$\sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2}$	x+2^1/2	$x + \frac{2^1}{2} = x + 1$	(x+2)^(1/2)
$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$	1-x^1/2	$1 - \frac{x^1}{2}$	(1-x)^(1/2)
$\sqrt{2-x} = (2-x)^{1/2}$	2-x^1/2	$2 - \frac{x^1}{2}$	(2-x)^(1/2)
$\sqrt{2-2x} = (2-2x)^{1/2}$	2-2x^1/2	$2 - \frac{2x^1}{2}$	(2-2x)^(1/2)
$\sqrt{2-3x} = (2-3x)^{1/2}$	2-3x^1/2	$2 - \frac{3x^1}{2}$	(2-3x)^(1/2)

Tabela 4

A seguir estão, novamente, os gráficos apresentados nos trabalhos dos alunos ao considerarem as expressões sem os parênteses e, à direita, os gráficos que deveriam ser obtidos a partir das funções solicitadas:



Sem os parênteses Com os parênteses

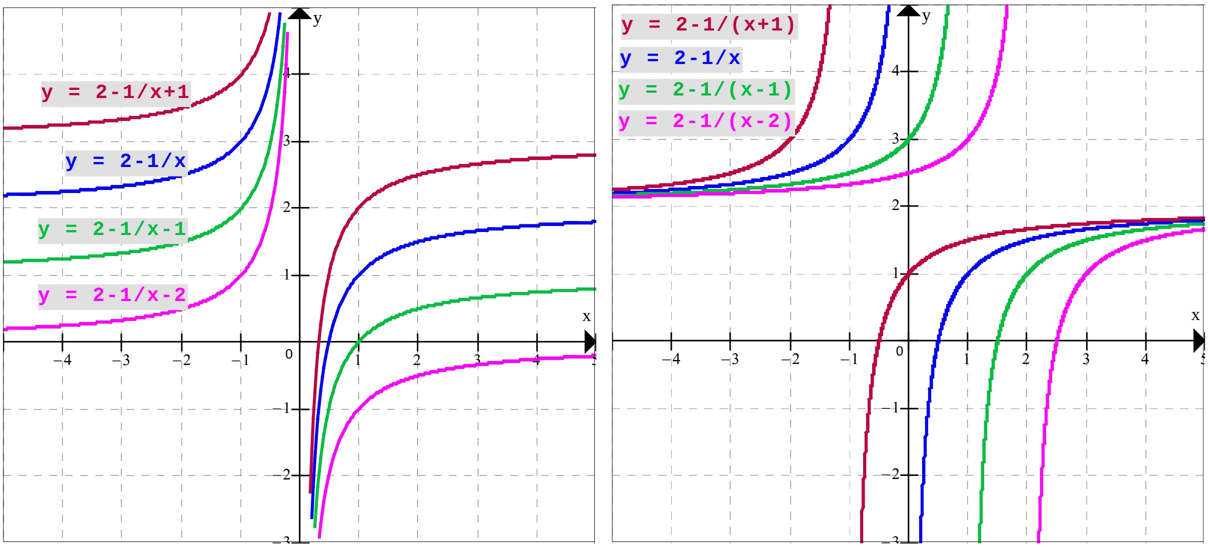
Gráfico 9

E, no caso do problema 12, o que ocorreu foi o seguinte:

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\frac{1}{x+1}$	1 / x+1	$\frac{1}{x}+1$	1 / (x+1)
$\frac{1}{x-1}$	1 / x-1	$\frac{1}{x}-1$	1 / (x-1)
$\frac{1}{x-2}$	1 / x-2	$\frac{1}{x}-2$	1 / (x-2)
$2-\frac{1}{x+1}$	2 - 1 / x+1	$2-\frac{1}{x}+1=3-\frac{1}{x}$	2 - 1 / (x+1)
	2 - (1 / x+1)	$2-\frac{1}{x}-1=1-\frac{1}{x}$	
$2-\frac{1}{x-1}$	2 - 1 / x-1	$2-\frac{1}{x}-1=1-\frac{1}{x}$	2 - 1 / (x-1)
	2 - (1 / x-1)	$2-\frac{1}{x}+1=3-\frac{1}{x}$	
$2-\frac{1}{x-2}$	2 - 1 / x-2	$2-\frac{1}{x}-2=\frac{1}{x}$	2 - 1 / (x-2)
	2 - (1 / x-2)	$2-\frac{1}{x}+2=4-\frac{1}{x}$	

Tabela 5

Assim, os gráficos que foram, e os que deveriam ter sido, obtidos pelos alunos são os seguintes:



Sem os parênteses

Com os parênteses colocados corretamente

Gráfico 10

Este cenário mostra, portanto, situações em que, de problemas com objetivos explícitos de construção e interpretação de gráficos, surgiu a necessidade de pensar sobre, de compreender como é estruturada e de utilizar regras algébricas básicas. Mas os alunos não percebem isso naturalmente e estas dúvidas se interpõem nas atividades dos alunos, ao resolverem problemas com a utilização deste *software* gráfico.

Além disso, quero novamente ressaltar o fato de que os problemas propostos pelo professor, embora não fossem problemas abertos, conduziram a caminhos diferentes daqueles a que se propunham inicialmente, e que esses novos caminhos foram condicionados pelo recurso informático que utilizavam, o *Winplot*. Penso que estes exemplos apresentados evidenciam a necessidade de os alunos transferirem seus conhecimentos algébricos, mesmo que básicos, para este contexto de utilização do computador na resolução destes problemas sobre funções.

5.2.2.2 - LIMITAÇÕES

O fato de os alunos não se lembrarem de consultar a tabela para conseguir arrumar a área de gráfico, quando estavam resolvendo problemas com o *Winplot*, pode significar que os alunos, ao trabalharem no laboratório, não estivessem agregando recursos de resolução ao conjunto dos que já possuíam quando utilizavam somente o lápis e papel. Tal como fazem com os procedimentos algébricos escritos, que são lembrados com freqüência pelos alunos, penso que o ideal seria que explorassem os recursos que o *software* oferece mas que, ao invés de substituírem os antigos por estes novos, fossem cada vez mais adicionando novos instrumentos e processos matemáticos ao seu repertório .

Quanto aos problemas do trabalho apresentados até aqui, considero que têm um caráter demasiado operacional e pouco analítico. Poderiam incluir itens pedindo que escrevessem o que estavam observando nos gráficos esboçados. Tais questões poderiam ajudar os alunos a aproveitar melhor os problemas do trabalho para aprofundarem e ampliarem seus conhecimentos sobre funções e isso, possivelmente, os ajudaria também a perceber seus erros.

Não resta dúvida de que o professor da turma tinha a intenção de que os alunos aprendessem "algo mais" com esse trabalho. Transformações nos gráficos de funções correspondem a um conteúdo que foi tratado, pelo professor, apenas uma vez e muito rapidamente em sala de aula. Na ocasião, apresentou o assunto como informação complementar e não como conteúdo central ou principal no estudo de funções. Desse modo, os problemas do trabalho, resolvidos pelos próprios alunos utilizando o *software Winplot*, lhes possibilitariam explorar conteúdos que não haviam sido tratados em sala de aula. Mesmo porque o computador é bem mais apropriado a atividades envolvendo as transformações nos gráficos das funções decorrentes de variações em seus coeficientes ou em seus termos constantes. Assim, os alunos estariam aprendendo Matemática através da resolução desses problemas.

5.2.2.3 - AVANÇOS

As dúvidas sobre a colocação dos parênteses, embora pudessem ter sido todas resolvidas recorrendo a aspectos básicos da Álgebra – a ordem de execução das operações e o uso dos delimitadores – geraram reflexões bastante significativas. Tais dúvidas e os diálogos sobre os parênteses permitiram que surgissem oportunidades de reforçar os fatos relacionados a cada tipo de função que estava em foco naquele momento, de aprofundar o conhecimento sobre cada tipo específico de função. Foi o que ocorreu no diálogo sobre o significado dos coeficientes das funções afins, sobre o domínio das funções racionais, etc. E, sem dúvida, também possibilitaram que os alunos percebessem a necessidade e o modo de corrigir a expressão da função digitada.

Finalmente, não obstante o fato de terem faltado solicitações de natureza interpretativa e analítica, o trabalho contribuiu para familiarizar melhor os alunos com o *software.* Após terem começado a fazê-lo, os alunos se mostraram bem mais habilidosos na utilização do *Winplot*. Este também era um dos objetivos do professor ao propor este trabalho aos alunos.

5.2.2.4 - TRANSCENDENDO OS DADOS E APONTANDO POSSIBILIDADES

Com relação à utilização de tabelas, uma sugestão que poderia ter sido dada aos alunos é a de que abrissem a tabela, disponível no *Winplot*, imediatamente após digitarem a expressão da função e a deixassem aberta enquanto arrumavam a área de gráfico. Este procedimento deveria ter sido enfatizado. Também poderiam ser elaborados problemas com questões que solicitassem análises das relações entre a tabela e o gráfico. Ou questões para serem respondidas a partir da tabela e em que o gráfico fosse um recurso para confrontar as respostas obtidas pelos alunos a estas questões.

A linguagem algébrica, que estrutura as expressões digitadas, também poderia ser trabalhada em problemas do tipo:

> <u>Problema</u>
> (a) Digite a expressão -2 - 1/x + 1, no *Winplot*, para esboçar o gráfico.
> (b) Altere a expressão anterior colocando parênteses de 4 modos diferentes e dê a expressão matemática equivalente.
> (c) Digite essas novas expressões criadas para esboçar os gráficos no *Winplot*. Analise a expressão matemática, a expressão digitada e o gráfico obtido, em cada caso.

Este tipo de problema alerta o aluno para considerar o aspecto da linguagem algébrica relacionado à ordem das operações, e o coloca de prontidão para, quando necessário, fazer uso dele. Além disso, pode contribuir para aprofundar seus conhecimentos sobre o conteúdo específico trabalhado, no caso funções racionais.

Finalmente, repito aqui o que já destaquei nas limitações: os problemas propostos no trabalho poderiam ser aprimorados com a inclusão de questões/perguntas de natureza interpretativa, criando oportunidades para que os alunos aprendessem mais Matemática e monitorassem eficientemente suas atividades de resolução de problemas com o *Winplot*.

5.2.3. CONCEPÇÕES SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para este cenário pretendo trazer alguns momentos da coleta de dados em que os alunos manifestaram suas concepções sobre resolução de problemas. Especificamente, mostrarei alguns diálogos, em que os alunos expressaram compreensões sobre resolver os problemas, no tocante às duas formas que estavam vivenciando: sem computador e com computador. Estas concepções nortearam fortemente as atividades realizadas pelos alunos durante as aulas no laboratório e embora, na maior parte do tempo, elas se fizessem presentes apenas sutil e tacitamente, neste cenário 3 pretendo mostrar alguns momentos em que elas foram explicitadas pelos alunos.

5.2.3.1 - CENÁRIO 3

Começarei por alguns fatos ocorridos numa manhã de aula que foi dedicada à resolução de problemas envolvendo função exponencial. Iniciando na sala de aula normal, o professor colocou na lousa as seguintes funções de receita total e custo total:

$$\boxed{\begin{cases} R_t = 4^{q+1} - 4 \\ C_t = 9.2^q - 6 \end{cases}}$$

Problema 13

O professor relembrou rapidamente algumas características básicas das funções exponenciais simples, como o fato de serem crescentes ou decrescentes se a base for um número maior que 1 ou entre 0 e 1, respectivamente; falou das interseções com os eixos, da concavidade, e fez os esboços na lousa:

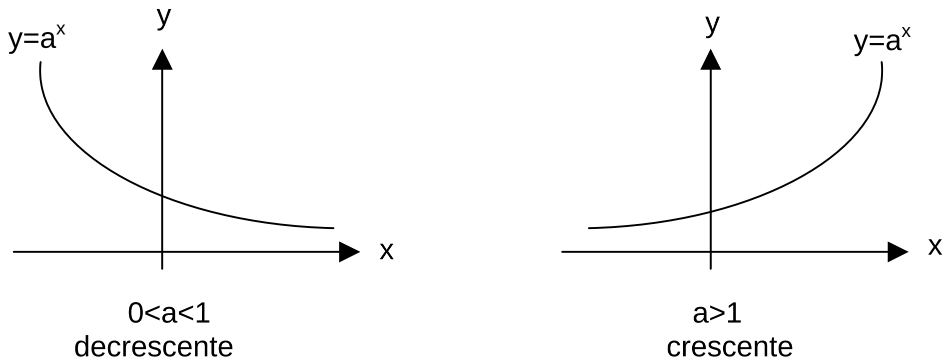


Gráfico 11

Então retornou ao problema proposto dizendo que a primeira coisa que fariam seria determinar o ponto crítico e, para isso, teriam que igualar as funções. Ele ia falando e resolvendo algebricamente, na lousa:

$R_t = C_t$

$4^{q+1} - 4 = 9 \,.\, 2^q - 6$

$4^{q+1} - 9 \,.\, 2^q + 2 = 0$

Neste ponto o professor chamou a atenção dos alunos para a possibilidade de transformar o termo da esquerda da equação em um trinômio do 2º grau, e continuou:

$(2^2)^{q+1} - 9 \,.\, 2^q + 2 = 0$

$2^{2q+2} - 9 \,.\, 2^q + 2 = 0$

$2^{2q}.2^2 - 9 \,.\, 2^q + 2 = 0$

$(2^q)^2.4 - 9 \,.\, 2^q + 2 = 0$

Fazendo $2^q = y$ temos: $4y^2 - 9.y + 2 = 0$.

Deu um tempo para os alunos copiarem e perguntou se tinham alguma dúvida sobre o que estava feito até ali. Uma aluna pediu esclarecimento sobre uma passagem. O professor voltou à lousa, respondeu à pergunta da aluna e seguiu com a resolução do problema, agora encaminhando-se à equação do 2º grau:

$$\begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = 49 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 2 \\ y_2 = 1/4 \end{array}$$

e calculou os valores de q:

$$y = 2^1 = 2^q \Rightarrow q = 1$$

$$y = 1/4 = 2^q \Rightarrow 2^{-2} = 2^q \Rightarrow \cancel{q = -2}$$

O professor lembrou aos alunos que a solução q = -2 deveria ser descartada uma vez que q significa quantidade e não poderia ser um número negativo. Então concluiu que o ponto crítico é obtido de q = 1. Escreveu na lousa: P = (1, 12) e continuou:

Pr: – Agora vamos para o gráfico.

Dizendo isso, seguiu montando duas tabelas para auxiliar no desenho do gráfico:

$R_t = 4^{q+1} - 4$

q	R_t
0	0
1	12

$C_t = 9 . 2^q - 6$

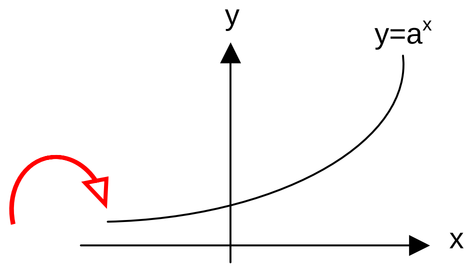
q	C_t
0	3
1	12

Antes de esboçar o gráfico disse aos alunos que para desenhar um gráfico "direitinho" era preciso "conhecer a curva". O professor sempre requisitava a participação de um ou outro aluno ou da turma em geral. Os alunos respondiam às suas perguntas opinando e sugerindo procedimentos e resultados.

Partiram, então, para analisar como ficaria o gráfico se a função receita fosse dada apenas por $R_1 = 4^{q+1}$. O professor perguntou como seria o gráfico se q assumisse valores muito grandes (positivos), ou muito pequenos (negativos).

Concluíram que, para valores de q "cada vez maiores" a função R_t também seria um número positivo "cada vez maior". Ou seja, que a função $R_1 \to +\infty$ quando $q \to +\infty$.

Para valores negativos de q os alunos tiveram dificuldade; apresentaram respostas erradas sugerindo que a função também iria para $-\infty$. O professor retomou o gráfico da função exponencial esboçado no início da aula, indicou com uma seta o lugar do gráfico que estavam analisando:



O professor explicou que, quando q assume valores "cada vez menores" (negativos) na função $R_1 = 4^{q+1}$, o resultado é equivalente ao obtido quando q cresce indefinidamente na função $\frac{1}{4^{q+1}}$. E este quociente obtido da divisão do número 1 por valores positivos que crescem indefinidamente formariam uma seqüência de números que se aproxima de 0 (zero). Ou seja, que a função $R_1 \to 0$ quando $q \to -\infty$.

Então, professor e alunos, concluíram que o gráfico da função $R_1 = 4^{q+1}$ fica muito próximo do eixo das abscissas para valores negativos de q, e que o gráfico da função $R_t = 4^{q+1} - 4$ "desce" quatro unidades em relação àquele.

Partindo da função $C_1=9.2^q$, professor e alunos desenvolveram raciocínio semelhante para compreenderem como se comporta a função $C_t = 9.2^q - 6$.

Então o professor esboçou o gráfico, reforçou que a situação em estudo exigia que considerassem a representação no primeiro quadrante e complementou seus comentários destacando que algumas regiões determinadas por essas curvas representavam situações de lucro e outras de prejuízo:

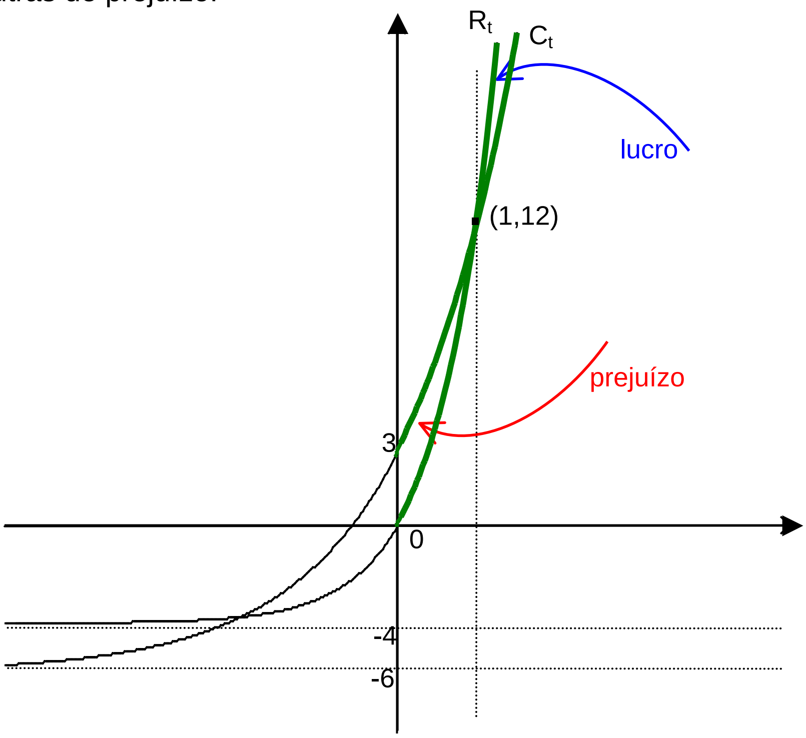


Gráfico 12

Para esclarecer melhor suas conclusões sobre lucro e prejuízo, o professor sugeriu aos alunos que estimassem quais seriam os valores das funções R_t e C_t para $q = 2$, $q = 3$, $q = 4$, etc. Embora sem escrever na lousa, estas estimativas foram feitas. Em conjunto, o professor e os alunos foram calculando mentalmente os valores dessas funções para alguns valores de q. E para cada um deles o professor ia perguntando:

Pr: – Qual é maior: R_t ou C_t ?

Com isso encerrou a resolução deste problema, aproximadamente às 9 horas da manhã. Nos 40 minutos que restavam até o intervalo, o professor aproveitou para iniciar o estudo da função logarítmica falando de algumas coisas básicas sobre os logaritmos.

Na segunda parte da aula, no laboratório, o problema proposto pelo professor foi o seguinte:

Problema do mercado de ações

Fernanda diz a Pedro que, no mercado de ações, sabe-se que a rentabilidade das ações da empresa A é descrita pela lei $R_A = 4^t$ e da empresa B pela lei $R_B = 10.2^t - 16$, onde t é o tempo em meses a partir de 1º de janeiro de 2001. Pede-se:

(a) Os pontos onde as rentabilidades são iguais.

(b) Esboçar o gráfico de R_A e R_B.

(c) Qual a melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês?

Problema 14

Como de costume, a orientação era a de que fizessem "tudo" no computador e registrassem apenas as respostas na folha que seria entregue para o professor. A esta altura, já mais familiarizados com o *Winplot* e com sua utilização na resolução dos problemas, os alunos partiram logo para o desenho do gráfico das funções (item (b) do problema) e para a determinação de seus pontos de interseção, necessários para responder ao item (a).

O gráfico obtido foi:

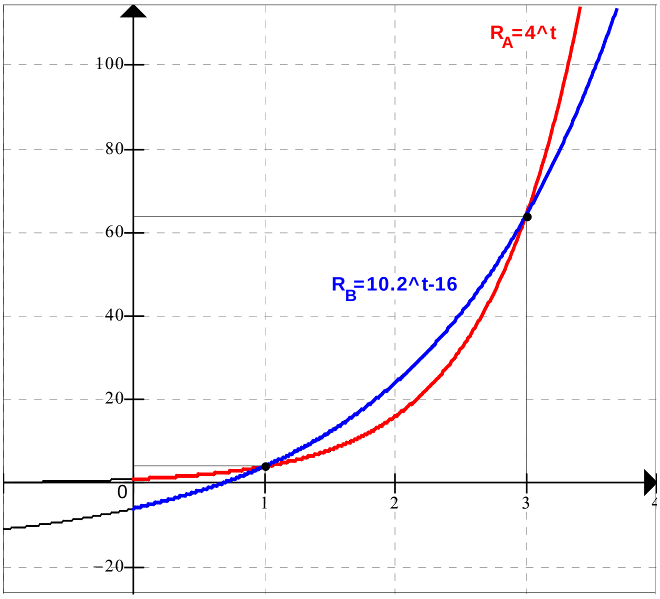


Gráfico 13

Uma vez que o contexto de aplicação a que se refere este problema - rentabilidade - é diferente daquele do problema resolvido anteriormente na sala de aula, as dúvidas levantadas estavam relacionadas ao item (c): qual a melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês?

O diálogo que apresento a seguir está relacionado a essa questão:

A8.12: – Nesse item (c), na verdade, eu vou ter que fazer o quê? Eu vou ter que substituir, não é?

Pe: – Há duas maneiras de fazer.

A8.12: – Hã.

Pe: – Você pode **calcular** qual é a rentabilidade até o 10º mês com a empresa A, depois **calcular** com a empresa B e verificar onde rende mais.

Confirmei que poderiam resolver por substituição, mas indiquei também a possibilidade de interpretarem o gráfico:

Pe: – E outro jeito é, como vocês já têm o gráfico pronto, simplesmente olhar no gráfico. Também dá, sem calcular mais nada.

A8.12: – Tá, mas aí...aí eu não estou entendendo...

Segui questionando os alunos a partir de suposições feitas sobre valores específicos de tempo e levando-os a responder com base na observação e interpretação do gráfico que tinham obtido com o *Winplot*:

Pe: – Suponham que vocês tivessem dois meses para aplicar o dinheiro; daqui a dois meses vocês têm que pagar uma dívida. Em qual empresa você colocaria: A ou B?

A8.12: – Na B.

Pe: – Por que?

A8.12: – Eu sei que é a B; agora...

Pe: – Por que você acha que é a B?

A8.12: – Porque ela está pra cima do...do...da A.

Pe: – Exatamente! Porque ela está pra cima da A. E se você tivesse que, daqui a 15 dias, pagar sua dívida...? Você deixaria o dinheiro aplicado durante meio mês; em qual você colocaria, na A ou na B?

A8.12: – Hummm...

Pe: – Meio mês, onde está?

A8.12: – Ah! Meio?

B8.12: – Ah, sim, seria na...

A8.12 e B8.12: – ...na A.

Pe: – Seria na A. E você precisou calcular pra saber isso?

B8.12: – Ah! Entendi!!

Pe: – E se você tivesse 4 meses, em qual você deixaria: na A ou na B?

B8.12: – Na A. Porque na A rende mais.

A8.12: – Na azulzinha, na B.

Neste momento houve uma discordância entre os dois alunos participantes da dupla. A forma como o gráfico "azul" , da função R_B, se apresentava na tela gerou dúvida. Ele se mostrava à direita do gráfico da função R_A na parte em que x > 3, e a aluna A8.12 achou que, por isso, o valor de R_B era maior que o de R_A:

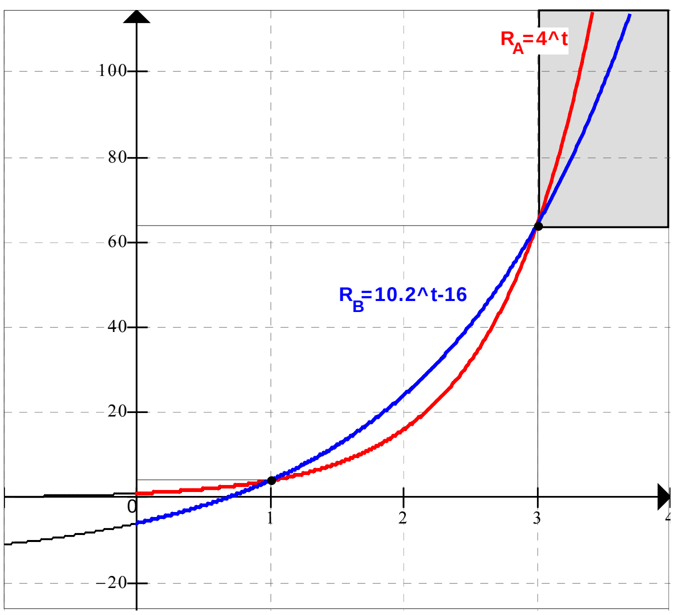


Gráfico 14

Pe: – No t igual a 4...?

B8.12: – É no A.

A8.12: – Eu acho que é o azul.

Pe: – Olhem qual está pra cima daqui pra cá [para x>3].

A8.12: – Ah, é o vermelho! É verdade.

Pe: – Você está vendo? Vai mudar o comportamento à direita do 3. De 3 pra lá, o A está pra cima do B.

A8.12: – E, no caso, entre esses dois pontos aqui, você coloca o B. [A aluna mostrava os pontos de abscissas x = 1 e x = 3]

Pe: – Isso! É só entre esses dois que o B está pra cima do A.

Mas o aluno B8.12 ainda estava reticente:

B8.12: – Tá, mas...

E perguntou:

B8.12: – Então é só responder se é R_A ou R_B? <u>E o cálculo</u>?

Pe: – Se ele está perguntando qual é a melhor escolha, a partir da observação do gráfico... é a empresa tal. Não **precisa** calcular, entendeu? Vocês **podem** calcular, mas não precisam.

É notório como em vários momentos daquela aula os alunos questionaram a "validade" da interpretação gráfica como recurso para responder ao item (c) do problema. Não sem razão. Haviam tido um considerável trabalho, naquele caso essencialmente algébrico, para resolver um problema semelhante na sala de aula, alguns minutos antes. Na ocasião, também chegaram ao gráfico, mas a interpretação não foi feita a partir dele. As razões para isso não são óbvias ou explícitas. Uma justificativa possível seria a falta de precisão e, conseqüentemente, de confiabilidade dos gráficos que fazemos à mão.

Mas é fato que, na ausência de recursos informáticos, o ensino de Matemática e, especificamente, a resolução de problemas matemáticos têm sido feitos por caminhos essencialmente algébricos e/ou numéricos. Lembremos que, ao final da resolução do problema 14, para tratar de questões relativas ao lucro ou prejuízo, o professor sugeriu que os alunos calculassem, por substituição, os valores das funções R_t e C_t para alguns valores de q (variável independente). E a relação desses resultados obtidos com os gráficos, ou a relação desses resultados com as posições relativas das curvas que representam as funções consideradas, não foram destacadas, embora já estivessem de posse dos gráficos.

Esta prática reforça a idéia de que é preciso "calcular" para resolver um problema matemático. O diálogo apresentado é um exemplo, escolhido entre tantos outros, em que os alunos manifestaram estranheza diante da possibilidade de apresentar a solução de um problema sem ter "calculado nada".

No diálogo com uma outra dupla, esta idéia de que é preciso calcular também se manifestou, embora de um modo um pouquinho diferente:

A8.15: – Professora, nossa dúvida é assim: quando ele pede "qual é a melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês", isso vai ser substituído aqui? Ou a gente tem que substituir no *Traço*...?

Pe: – Qual é a diferença entre substituir aqui ou no *Traço*? Tem diferença?

A8.15: – Não, acho que não.

A aluna estava perguntando se devia substituir valores de t nas expressões das funções e calcular à mão ou utilizando o *software*. No *Winplot* há uma janela chamada *Traço* que possibilita, movendo a barra de rolagem, que vejamos, acompanhando um cursor que se movimenta sobre o gráfico, o percurso descrito pelos pontos ao percorrermos alguns valores da variável independente:

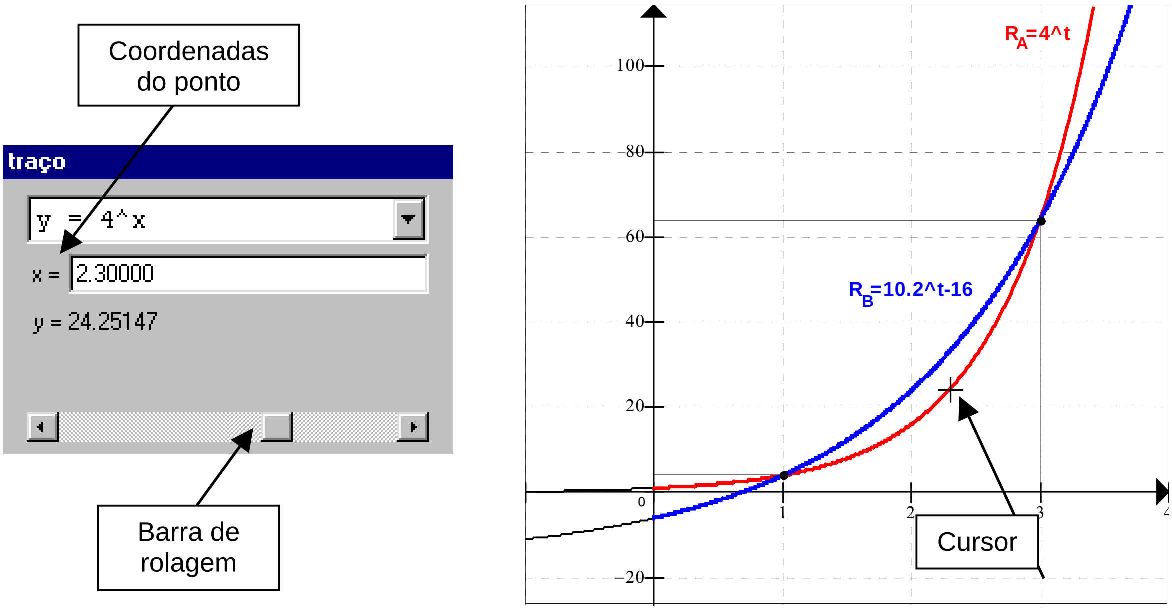


Figura 12

Utilizando esta janela, também podemos calcular a imagem de valores específicos da variável independente; basta digitar este valor na linha de comando de x e o *Winplot* retorna o valor da função y correspondente:

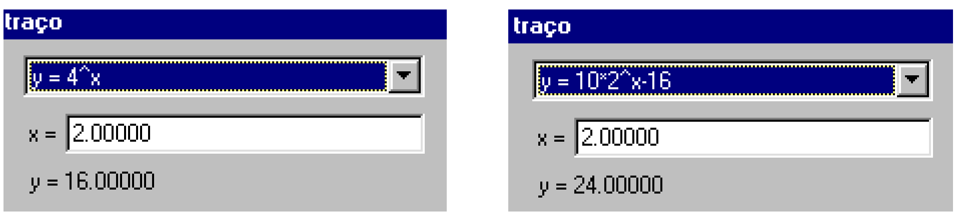


Figura 13

Esta era a outra possibilidade que a aluna via, além de substituir e calcular à mão, para determinar a melhor rentabilidade ao longo dos 10 meses de que falava o problema. De qualquer modo, ela achava que tinha que calcular as imagens para legitimar sua resposta à questão. A interpretação do gráfico não era cogitada.

Uma outra aluna, após um diálogo bastante semelhante ao primeiro aqui apresentado, em que lhe expliquei como interpretar o gráfico, disse:

A8.31: – Então, aqui no computador eu entendi...aqui tudo bem. <u>Mas como que você confirma isso...</u>?

E não muito diferente foi a indagação do aluno que participou de um outro diálogo, também sobre o mesmo problema. Após entender como responder à questão analisando o gráfico ele perguntou em tom de exclamação:

A8.20: – Mas como é que eu vou... <u>como é que eu vou demonstrar</u> que é a empresa B?

Ou seja, para estes alunos "ler e interpretar" o gráfico não era considerado um processo seguro, tanto que eles queriam algum modo de confirmar o que haviam obtido pela observação do gráfico. Além disso, quanto trabalho tinham feito para resolver o primeiro problema proposto naquele dia de aula, em que estavam sem o *software*!

Outros episódios ocorreram em que os alunos se manifestavam neste sentido, isto é, sugerindo que estavam achando que tinham que fazer algo mais, além de "olhar para o computador para encontrar a resposta".

Um outro exemplo que pode ser considerado ocorreu quando os alunos estavam resolvendo o seguinte problema no laboratório:

$$\begin{cases} q_d = 64 - 8p - 2p^2 \\ q_o = 10p + 5p^2 \end{cases}$$

Problema 15

O leitor já deve ter observado que, com relativa freqüência, o professor fornecia aos alunos apenas as expressões das funções envolvidas no problema, ou seja, apresentava o problema sem escrever o enunciado completo. Nestes casos ele falava o que queria que fizessem com aquelas funções. Em geral referiam-se a problemas cujos enunciados eram já familiares aos alunos e em que o professor pretendia destacar o tipo de função envolvida e/ou fixar processos de resolução. Para estas funções de demanda e oferta, o professor pediu que fizessem o gráfico e determinassem o ponto de equilíbrio.

Uma dupla me chamou para perguntar como poderia obter o ponto de interseção das duas curvas. Lembrei aos alunos que o *Winplot* tem, no menu *Dois,* a opção *Interseções*:

B3.9: – Mas para saber aquele ponto ali exato... Como é que é?

A3.9: – É. Exato.

Pe: – *Interseções*, então. A interseção é sempre entre duas curvas, então você vai no... *Dois →Interseções*. Olhe lá. A interseção entre essa curva e essa ...

B3.9: – É aquele ponto esquisito.

Esquisito, para este aluno, era um dos pontos de interseção cujas coordenadas eram números não inteiros.

O que o *Winplot* mostrava era:

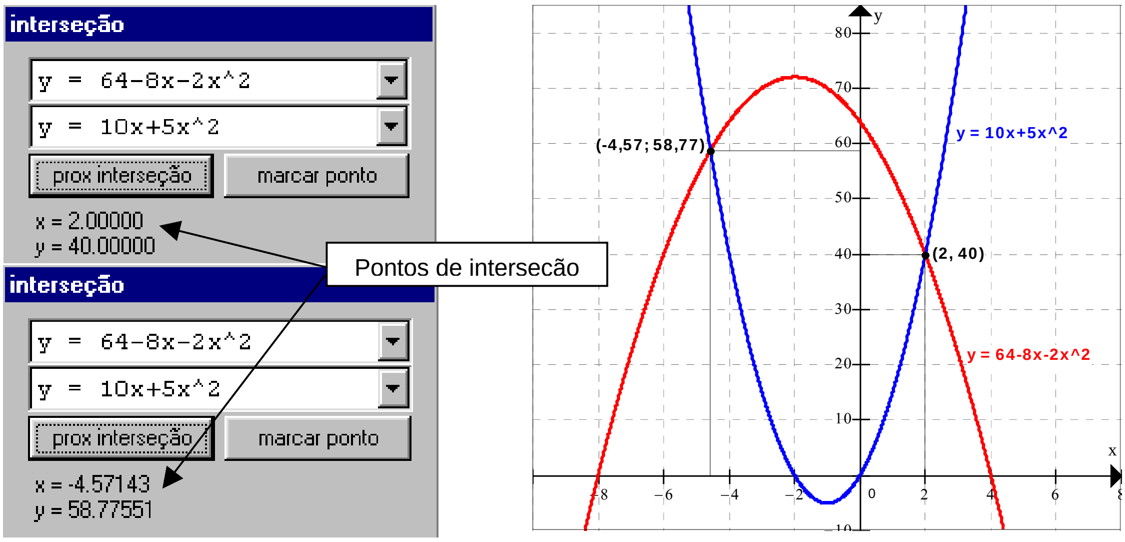


Figura 14

Pe: – ...é no ponto (2,40)... E se tiver mais uma... Pede *próximo*.

A3.9: – *Próximo*.

B3.9: – É aquele ponto lá.

Pe: – Olhe lá, -4... e 58...

B3.9: – Ah, tá!

Este aluno se deu por satisfeito, mas o outro...

A3.9: – O prô... Mas, então, o que ele quer que faça aqui, a reta e só esse ponto?

Pe: – O **gráfico** e o ponto de interseção.

A3.9: – **<u>Só isso</u>?**

Pe: – Está pronto o de vocês; é só passar [para o papel].

Considerando o contexto de aplicação do problema, o gráfico final deveria conter apenas a parte da curva no primeiro quadrante e, portanto, seria o seguinte:

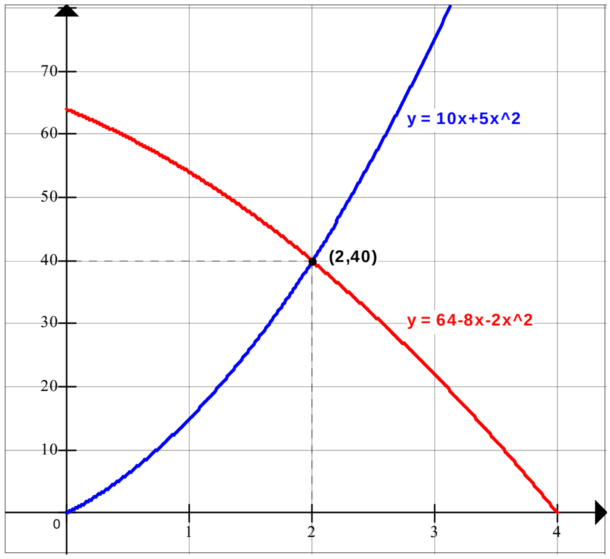


Gráfico 15

O fato é que a aluna achou muito pouco o que era para fazer. E, prefiro repetir, de fato era pouco, comparado ao trabalho algébrico que realizavam quando estavam na sala de aula resolvendo os problemas sem o *Winplot*.

Outros questionamentos desta natureza foram feitos pelos alunos, em outros momentos. Quando uma aluna tentava ajustar a área de gráfico, sugeri que consultasse a tabela de valores da função que o próprio *software* fornecia. Então a aluna perguntou em tom de exclamação:

A3.20: – **Eu posso** pegar esses números?

Pe: – Sim; a tabela faz você ver porque o gráfico não está aparecendo. Porque ele precisava desses números, e olha o seu onde está!

E na seqüência do diálogo a aluna disse:

A3.20: – Mas ... não é melhor fazer na mão e depois passar para cá [para o computador]? Ou não?

Em outro diálogo desta mesma aula um aluno perguntou:

A3.32: – Aqui não precisa **fazer conta**? É só localizar no gráfico e responder?

Numa aula sobre logaritmos, ao conversar com uma aluna sobre como resolver a equação $\log(2p+1)=1$, utilizando o *Winplot*, sugeri que considerasse cada termo da equação como uma função, que desenhasse o gráfico de cada uma delas e determinasse a interseção das duas curvas. Vejamos a reação da aluna:

Pe: – [Você] vai desenhar essa função, junto com essa, no mesmo gráfico. E então você vai verificar que essa função y = 1 cruza essa outra [$y = \log(2p+1)$].

A9.20: – Então aqui é a mesma coisa. Só desenha 1 [y=1].

Pe: – Também. Então, onde essa curva cruzar essa, é a resposta disso. É um ponto.

A9.20: – Ah, é um ponto?! Eu pensei que fosse pra resolver **aqui** [no papel, algebricamente].

Pe: – Dá pra resolver algebricamente, mas agora você tem o *Winplot*; resolve lá [no computador].

Para encerrar a apresentação dos fatos neste cenário gostaria, ainda, de apresentar um diálogo em que uma aluna perguntava sobre como resolver a inequação $\log_2\left(3 - p^2\right) > 0$:

A9.31: – Deixa eu perguntar um negócio pra senhora: aqui, olhe, é maior do que zero.

Pe: – É.

A9.31: – Então eu posso atribuir qualquer valor? Ou não?

Pe: – Não.

A9.31: – Posso atribuir o 1?

Pe: – Não. Ali está perguntando pra você... onde é que esse gráfico é positivo? Maior que zero significa positivo.

A9.31: – Então eu tenho que resolver igualando a zero...?

Pe: – Você tem que olhar no gráfico. Só utilizando o *Winplot*, você não tem que calcular nada, só olhar no gráfico.

A9.31: – Então, mas eu quero saber **sem** o *Winplot*!

Conforme já discuti anteriormente, relacionar aspectos algébricos e gráficos é uma prática recomendável, que pode auxiliar os alunos a ampliar suas compreensões a respeito de determinados conceitos relacionados a funções. Entretanto, é procedente destacar que a aluna participante deste último diálogo não tinha, ainda, resolvido o problema no computador. Ela queria não só, saber como fazer "**sem** o *Winplot*", mas queria fazer **primeiro** sem ele.

Nestes episódios apresentados, e em muitos outros momentos, os alunos expressaram sua concepção de que para resolver um problema é preciso "fazer contas". Eles se mostraram bastante receosos em responder às solicitações dos problemas apresentando apenas as conclusões obtidas pela observação e interpretação de gráficos. E não só isso. Em geral achavam que isso era muito pouco trabalho para resolver um problema. Mostraram-se admirados pelo fato de terem obtido a resposta somente a partir do gráfico e de sua interpretação. As expressões: – Só isso [que é para fazer] ? e – Não precisa fazer conta? e – Então é só responder se é R_A ou R_B? E o cálculo? e outras desta natureza estiveram muito presentes. Na afirmação: – Mas eu quero saber sem o *Winplot*! o tom da aluna sugere, inclusive, uma certa falta de confiança nos resultados ou conclusões obtidas somente a partir da análise dos gráficos. Esta aluna, também em outras ocasiões, demonstrou que se sente insegura em não realizar algum cálculo, ou algum trabalho algébrico adicional, que desse sustentação e confirmasse o que obtivera pelo *Winplot*.

Finalmente, creio ser procedente considerar que a falta de confiança manifestada pelos alunos pode estar relacionada, também, à sua pouca familiaridade com a utilização do computador como mediador em atividades de resolução de problemas matemáticos. Estou considerando esta pouca familiaridade no sentido de que a experiência que estes alunos vivenciaram naquele semestre em que realizei a pesquisa foi a primeira, conforme já comentado na descrição do contexto (cap.4), em que tinham um *software* em aulas de Matemática.

5.2.3.2 - LIMITAÇÕES

Quero partilhar, com os alunos participantes dos fatos aqui apresentados, o sentimento de que o problema 15 é consideravelmente limitado para o contexto do laboratório de Informática, isto é, para ser resolvido com a utilização do *software*, no sentido de que exigiu muito pouco trabalho matemático, por parte dos alunos. Contas, procedimentos algébricos, raciocínio matemático ou interpretação de resultados, foram elementos praticamente ausentes nas atividades dos alunos.

5.2.3.3 - AVANÇOS

O mesmo já não ocorreu com o problema 14. A presença do item (c), solicitando que os alunos analisassem "qual a melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês", levou os alunos, apoiados pelas intervenções feitas por mim e pelo professor, a praticar um procedimento ao qual não estavam habituados. E destaque-se que muitas intervenções e diálogos, tais como os apresentados aqui, foram realizados naquele dia, durante a resolução daquele problema.

Ele se constituiu numa evidente oportunidade de os alunos experimentarem mais uma forma de resolver problemas, qual seja, pensando matematicamente. Os ambientes informáticos favorecem atividades de natureza interpretativa, uma vez que desobrigam os alunos de realizarem tarefas essencialmente mecânicas e/ou operacionais. Neste caso, a interpretação teve forte apoio na visualização, aspecto que também tem sido destacado no contexto da utilização de computadores no estudo de funções.

O raciocínio desenvolvido pelos alunos ao interpretarem os gráficos para responder ao problema não se materializa na forma de registro escrito das seqüências de expressões algébricas ou numéricas. Entretanto, embora pareça que os próprios alunos não os considerem como tal, as reflexões e o raciocínio conduzidos na interpretação dos gráficos pertencem não somente a uma importante, mas fundamental, vertente da atividade matemática que deve ser, tanto quanto possível, desenvolvida nos alunos: a habilidade de pensar matematicamente. Além disso, é procedente lembrar que interpretar gráficos é uma atividade bastante presente na atividade do Administrador de Empresas, portanto é de extrema relevância que esta habilidade seja desenvolvida nos alunos que estão se preparando para esta profissão.

5.2.3.4 - TRANSCENDENDO OS DADOS E APONTANDO POSSIBILIDADES

No momento de apontar possibilidades, não vejo como não retomar algumas sugestões. Se um ensino historicamente realizado sob a hegemonia da Álgebra conduz os alunos a considerá-la como único instrumento na resolução de problemas e, se queremos modificar isso, penso que uma possibilidade seria propor problemas solicitando que os alunos realizassem um trabalho mais analítico e interpretativo.

E se, no cenário anterior, sugeri problemas com questões solicitando a análise de tabelas, aqui sugiro questões solicitando análise de gráficos e, possivelmente, questões que somente possam ser respondidas a partir deles.

5.3. SUBTEMA 2 - A AVALIAÇÃO

Os cenários 4 e 5, que apresentarei a seguir têm como objetivo destacar de que modo as atividades de resolução de problemas, com a utilização do *Winplot,* permitiram que os alunos se manifestassem e fornecessem importantes dados de avaliação sobre seu conhecimento matemático. O cenário 6 será dedicado a mostrar momentos em que o professor avalia sua prática a partir de percepções baseadas na experiência que está vivenciando, e muda, ou não, sua conduta em sala de aula.

5.3.1. PROBLEMAS SECUNDÁRIOS EVIDENCIAM LACUNAS DE CONHECIMENTO

Estarão em evidência neste cenário vários momentos em que os alunos manifestaram suas dúvidas e compreensões a respeito de conteúdos matemáticos já vistos anteriormente, ou seja, supostamente já conhecidos. Já foi apresentado, no capítulo 4, o perfil dos alunos, ocasião em que destaquei que "apresentavam muitas deficiências de conteúdo matemático, muitas vezes relativas a conteúdos básicos de ensino fundamental e médio" (p.120). Entretanto, o que mostrarei a seguir é como as atividades de resolução de problemas com a utilização do *Winplot* permitiram que as lacunas de conhecimento aflorassem e quais lacunas foram detectadas.

5.3.1.1 - CENÁRIO 4

A fim de organizar melhor a apresentação dos fatos neste cenário tratei de separar por assunto as dúvidas apresentadas pelos alunos, dúvidas que foram selecionadas para serem mostradas aqui sob a perspectiva de lacunas de conhecimento. Deste modo começarei por aquelas que se referem a números.

Numa das aulas anteriores à data marcada para que os alunos entregassem o trabalho "Aplicativos de Matemática" (Anexo III), uma aluna, tendo começado a fazê-lo com antecedência, me pediu que esclarecesse algumas de suas dúvidas. A dúvida estava já no primeiro grupo de problemas proposto no trabalho:

Exercícios Grupo 01

Objetivos:

(a) Construir e interpretar gráficos de funções constantes.
(b) Conhecer a imagem de pontos de funções dadas (traço).
(c) Determinar os pontos de encontro com os eixos.

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

   (a) y = 2 (b) y = 3 (c) $y = \sqrt{2}$

   (d) y = -2 (e) $y = \sqrt[3]{10}$ (f) $y = \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$

   O que é que os gráficos das funções anteriores têm em comum?

2. Seja a função dada por $y = \pi^2$, utilizando a função "Traço" verifique e marque os pontos da função no gráfico para:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
$\sqrt{2}$	

Problema 16

e era sobre a necessidade, ou não, de colocar os parênteses na expressão da função. Trarei aqui uma parte de nosso diálogo sobre o item 1.(c) deste grupo de problemas:

A5.30: – Olha só. Grupo 1... Letra c; essa aqui.

A pergunta da aluna estava relacionada, especificamente, à função $y = \sqrt{2}$.

A5.30: – Como é que ficou...olhe. Ficou assim. Agora, eu não sei se eu coloco isso entre parênteses.

Pe: – Dois elevado a meio...

A5.30: – Está vendo que dá diferente se eu colocar entre parênteses? É o que a gente estava discutindo. Eu fiz assim só pra senhora ver que... que dá...

Pe: – Uma coisa dá diferente da outra?

A5.30: – É. Então, se eu puser sem parênteses fica (diferente), que é essa de cima, dessa de baixo.

Pe: – Tá...

Ao tentar esboçar o gráfico da função $y = \sqrt{2}$, a aluna considerou a forma de potência, dois elevado a meio, mas ficou em dúvida se deveria colocar o expoente $\frac{1}{2}$ entre parênteses, 2^(1/2), ou não, 2^1/2. Ela digitou as duas expressões no *Winplot*, para comparar os gráficos, e observou que eram diferentes:

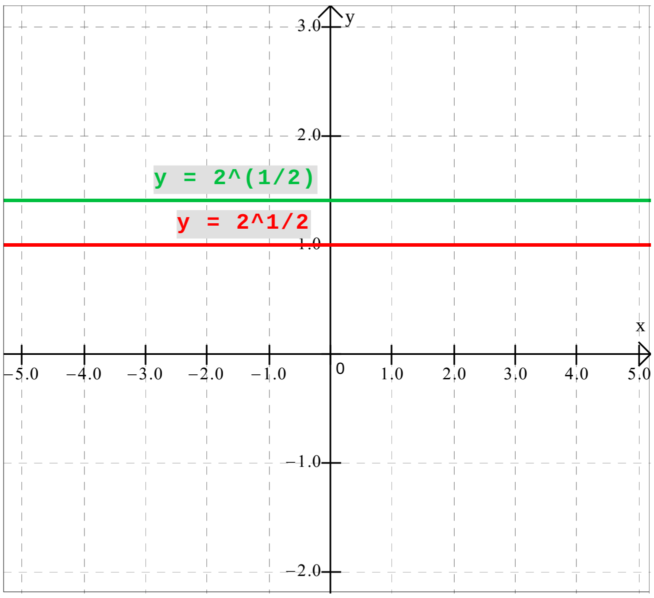


Gráfico 16

Pe: – Então vamos na...

A5.30: – E como é que eu vou saber, mesmo?

A aluna não sabia qual era o gráfico correto e nem sabia a que recorrer para decidir-se sobre colocar ou não os parênteses.

Pe: – ...então vamos à Matemática? Você sabe quanto vale, aproximadamente, a raiz de dois?

A5.30: – <u>É zero vírgula...alguma coisa, não é</u>?

Pe e A5.30: – Não.

Pe: – É um ...

A5.30: – Um vírgula...

Pe: – ...quatro. [...] é aproximadamente um vírgula quatro. Ele [o professor] podia ter escrito assim!

Escrevi a equação da função no papel do seguinte modo: y = 1,4.

Pe: – Se em vez de ele ter dado assim [$y = \sqrt{2}$], ele apresentasse aquela [y = 1,4], pra você, qual seria o gráfico certo, então?

A5.30: – De um vírgula quatro... Seria esse, o verdinho!

Pe: – Exato!

A5.30: – É! Entendi agora.

Segui o diálogo para ajudar a aluna a entender porque o outro gráfico obtido por ela estava incorreto.

Pe: – Tá. Então vamos ver o que é que está errado aqui? [...] Quando você digitou: 2...elevado...a 1...barra...2, ele entendeu: 2 elevado a **1**; e tudo isso...

A5.30: – ...dividido por 2.

Pe: – Que dá quanto?

A5.30: – Um. É verdade!

O que ocorreu quando a aluna digitou a expressão sem os parênteses, 2^1/2, é que o *Winplot* executou $\frac{2^1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Pe: – Por isso ele desenhou o gráfico passando pelo 1.

A5.30: – Então aqui é esse de cima. Entendi.

Pe: – Agora...?

A5.30: – Então tem que pôr [os parênteses].

Neste dia esta aluna perguntou muitas coisas, sobre todos os problemas do trabalho. Escolhi esse nosso primeiro diálogo porque ele evidencia uma lacuna de conhecimento básico: a aluna não sabe qual é o valor aproximado de $\sqrt{2}$. Num outro contexto talvez pudéssemos considerar isto irrelevante, entretanto, considero que seja importante perceber que esta dúvida emergiu porque a aluna estava diante do computador.

Digo isto porque sou levada a relembrar algumas palavras, do professor, já apresentadas no cenário 1. Por ocasião da entrevista, ele manifestou o seguinte:

> Pr: – Olha, na verdade, eu penso assim: se em sala de aula eu posso resolver problemas cujos enunciados procuram conduzir a soluções, cuja álgebra envolvida seja uma álgebra com operações mais fáceis, eu posso ter, agora, no computador, problemas mais realistas, cujos valores numéricos sejam valores reais. Assim, ao invés de trabalhar com números cujos resultados são inteiros, eu posso trabalhar com números quaisquer.

É preciso salientar que esta é uma prática comum entre nós professores. Na ausência de calculadoras, computadores ou outro recurso desta natureza, procuramos propor aos alunos problemas que não lhes tragam dificuldades de cálculo, a menos que este seja um dos objetivos do problema. Em geral a opção é utilizar números inteiros.

Vejamos como se manifestou um outro aluno a respeito dos valores das coordenadas do ponto de interseção entre as curvas dadas no problema 15:

$$\begin{cases} q_d = 64 - 8p - 2p^2 \\ q_o = 10p + 5p^2 \end{cases}$$

Problema 15

B3.9: – Mas para saber aquele ponto ali exato... Como é que é?

A3.9: – É [nós queremos saber] exato.

Relembrei aos alunos que o *Winplot* tem um recurso para determinar os pontos de interseção entre duas curvas.

Pe: – *Interseções*, então. A interseção é sempre entre duas curvas, então você vai no *Dois* →*Interseções*. Olhe lá. A interseção entre essa curva e essa ...

O *Winplot* mostrava que um dos pontos de interseção, localizado no segundo quadrante, era dado por (-4,57143 ; 58,77551). Percebi que, no momento em que requisitaram minha ajuda, os alunos já tinham determinado os pontos de interseção entre as curvas, pois o aluno B3.9 se lembrou que essas eram as mesmas coordenadas que já tinham encontrado. Ele disse para a sua colega:

B3.9: – <u>É aquele ponto esquisito</u>.

Porém, como obtiveram um ponto com tais números não inteiros para as coordenadas, duvidaram da correção da resposta – eram números muito "esquisitos". Ou seja, esquisito, para este aluno, era um dos pontos de interseção cujas coordenadas eram números não inteiros, com tantas casas decimais. Os alunos participantes desta pesquisa, claramente, não eram habituados a trabalhar com esses números em sala de aula.

Também ocorreram momentos em que percebi que faltava domínio de alguns elementos básicos relacionados ao conceito de função. O exemplo que apresentarei a seguir refere-se ao problema 10.2:[47]

Exercícios Grupo 03

2**.** Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções [afins]:

	Passa pelo(s) ponto(s)
(a)	(1, 0) e (0, 3)
(b)	(-2, 0) e (0, 2)
(c)	(-1, 0) e (0, 4)
(d)	(-2, 0) e (0, -1)

Problema 10.2

[47] Doravante, a fim de evitar repetições, utilizarei este tipo de numeração para designar apenas uma parte de um problema quando for mais apropriado apresentá-lo parcialmente. Neste caso, problema 10.2 refere-se à segunda parte do problema 10. A lista com os todos os problemas analisados neste trabalho, apresentados integralmente, está no Anexo IV.

A aluna queria saber se estava correto o que tinha feito:

A5.30: – Aqui, eu já fiz a função na mão!

A aluna me mostrou, em seu caderno, que já tinha determinado algebricamente as equações das funções. Sugeri que conferíssemos suas funções através dos gráficos que a aluna também já tinha feito no *Winplot.*

Pe: – Abre, lá. Você não tem esse arquivo aí?

A5.30: – Tenho.

Pe: – Vamos fazer isso. Vamos olhar lá.

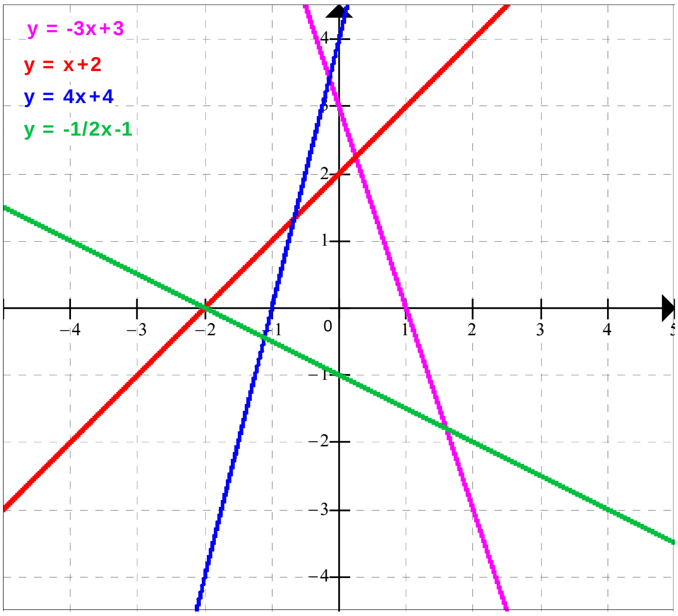


Gráfico 17

Pe: – Esse. Quer ver? Vamos olhar para a vermelha? A vermelha...é x mais 2...

A5.30: – Está passando pelo 2... que é o b, certo?

Pe: – x mais 2...

A5.30: – Não é verdade, Prô?

Pe: – É.

Sugeri à aluna que fôssemos conferindo na ordem e de acordo com o enunciado, ou seja, verificando se as retas estavam passando pelos pontos solicitados.

Pe: – Mas vamos ver: do primeiro par, qual é a equação?

A5.30: – É a rosinha.

Pe: – Menos 3x mais 3. Então a reta -3x+3 tem que passar no ponto (1,0)...Veja se está passando.

A5.30: – 1...

Pe: – (1,0)

A5.30: – <u>Zero aonde</u>?

Pe: – (1,0)

A5.30: – <u>Não tem nada de zero aqui</u>!

Pe: – Um ponto no plano cartesiano é sempre um par, não é? O x é 1 e o y é 0.

A5.30: – Ah, é!

O diálogo prosseguiu enquanto conferíamos todos os itens do problema. Na parte apresentada, é possível perceber que não era natural para esta aluna, como também não o era para vários outros (senti isso diversas vezes durante as aulas), que um ponto sobre um dos eixos cartesianos fosse representado por um par de coordenadas, e que uma delas fosse nula. Em geral, os alunos designavam um ponto sobre um eixo unicamente pela coordenada correspondente àquele eixo ao qual pertencia.

A dificuldade parecia estar em determinar as coordenadas de pontos quaisquer a partir do gráfico. Na situação que acabei de relatar a aluna tinha que "procurar" os pontos que eu estava lhe fornecendo, nas retas que já estavam sendo mostradas pelo computador. O caminho inverso eles faziam naturalmente: dados um ou mais pontos, localizá-los no plano e traçar uma curva passando por eles não causava nenhuma estranheza. Afinal, isso é o que fazem com freqüência na sala de aula, isto é, quando esboçam os gráficos à mão.

Na resolução do problema 15 (p.192) esse aspecto também surgiu. Duas alunas tinham a seguinte imagem na tela do computador:

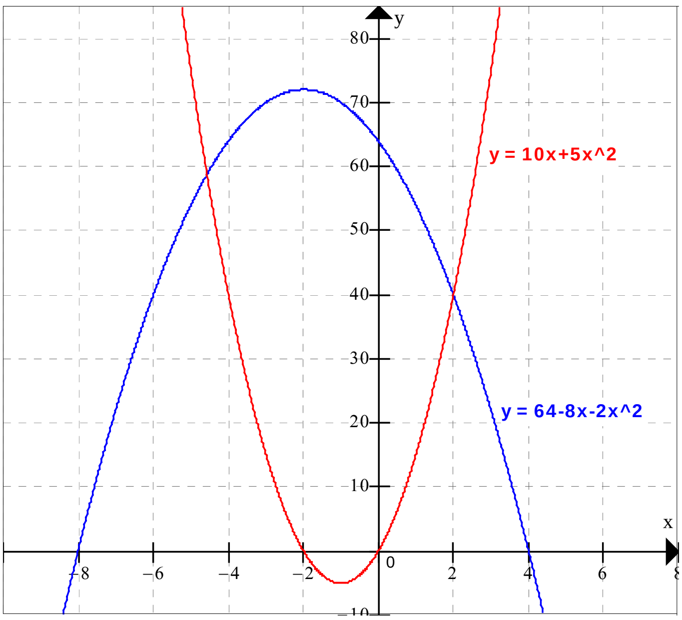


Gráfico 18

e queriam destacar a parte do gráfico localizada no primeiro quadrante. Para fazer isto, a maneira mais simples é solicitar ao *Winplot* que esboce novamente a curva, utilizando uma espessura maior no traçado e restringindo o domínio da função:

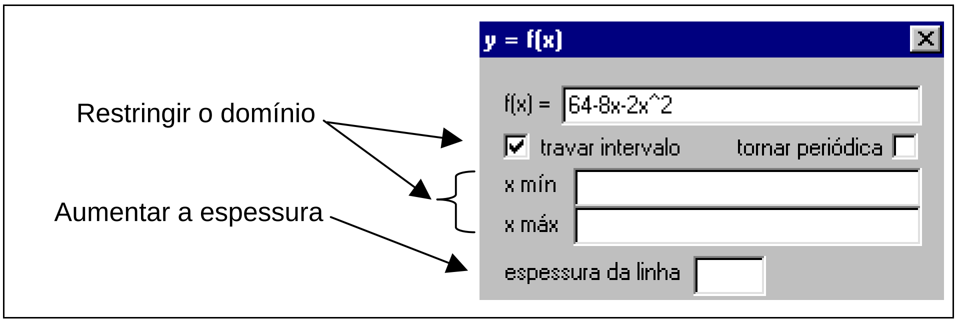


Figura 15

[...]

A3.7: – Se eu quiser mostrar a parte do primeiro quadrante, como é que eu faço?

Pe: Mesma coisa. Seleciona a equação da azul...

A3.7: – 64...

Pe: – Isso! Desenhe de novo, só que no intervalo apropriado para [a curva] ficar só no primeiro quadrante. Pense agora o valor de x, mínimo e máximo.

A3.7: – E como é que eu sei? Aqui é 70...

Pe: O x?

A3.7: – É.

B3.7: – O y!

Pe: – Ali [na janela do *software*] está pedindo o valor de x.

A3.7: – Então vai dar...

B3.7: – É daqui até aqui só?

Pe: – Então, o que seria? Quanto?

A3.7: – 4?

[pausa]

A3.7: – 0 e 4.

Pe: – Vamos lá. Aumente a espessura da linha, senão vai ficar igual à outra e você não vai conseguir ver.

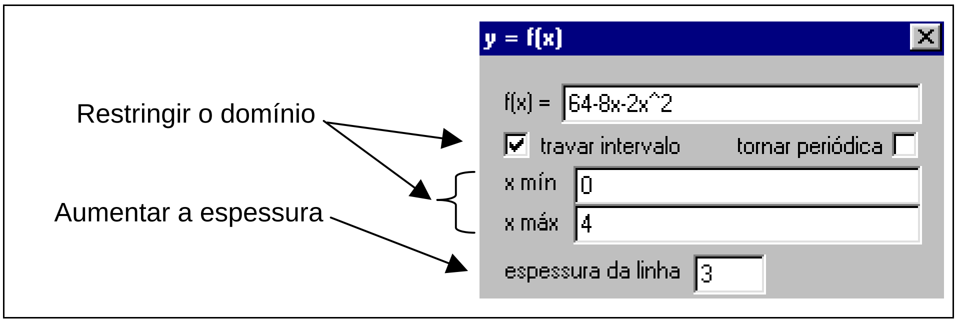


Figura 16

A3.7: – Ok?

Pe: – Não tenha medo, vai.

Então a nova imagem na tela do computador foi:

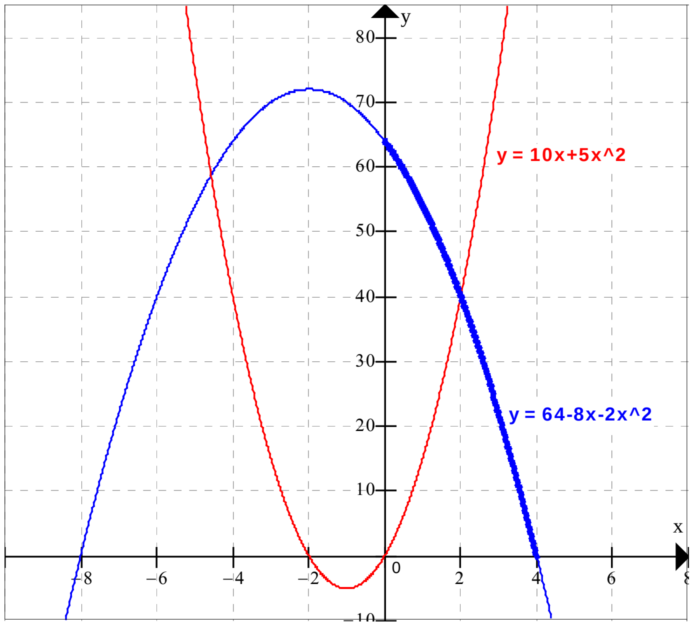
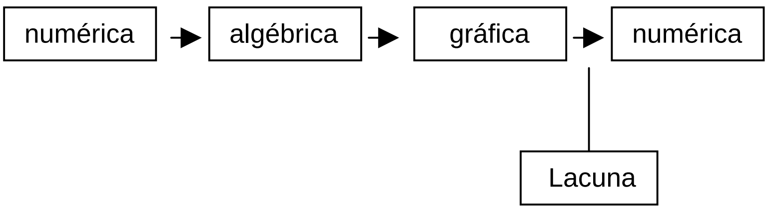


Gráfico 19

A3.7 e B3.7: – Deu, né?

Pe: – Deu. E descubram esse ponto, agora.

Associando as impressões que tive desses e de outros fatos relacionados, sou levada a considerar uma seqüência possível para o trânsito dos alunos entre as representações de funções:



No episódio relacionado ao problema 10.2 a aluna realizou sem entraves as passagens da representação numérica para a algébrica (quando obteve as expressões das retas a partir de pontos dados), e da representação algébrica para a gráfica (neste caso, mediada pelo *Winplot*). Mas, tendo o gráfico, precisou de ajuda para retornar à representação numérica e "enxergar" os pares ordenados representados por pontos deste gráfico. No caso do problema 15, também, as alunas precisaram de auxílio para determinar a abscissa dos pontos que possibilitariam restringir o seu gráfico, esboçado inicialmente para todo $x \in R$, ao primeiro quadrante.

Outros problemas que geraram muitos questionamentos por parte dos alunos foram os que envolviam sinal e, naturalmente, raízes das funções. Foi o caso do problema 9:

Exercícios Grupo 04

Objetivos:

(a) Construir gráficos das funções afins.
(b) Determinar raízes, monotonicidade e sinal.

1. Para cada uma das funções a seguir, pede-se:
   - Traçar o gráfico
   - Verificar se é crescente ou decrescente.
   - Determinar a raiz e o encontro com o eixo y.
   - Verificar para que valores de x a função é positiva ou negativa (sinal das funções).

(a) y = 2x - 3	(b) $y = \frac{x}{3} + 1$	(c) y = -2x + 3

Problema 9

A5.30: – Próximo...grupo 4. Nossa, esse aí deu... Foi foguinho!

[...]

A5.30: – Mas olha só.

Pe: – Desenhou o gráfico...?

A5.30: – Isso

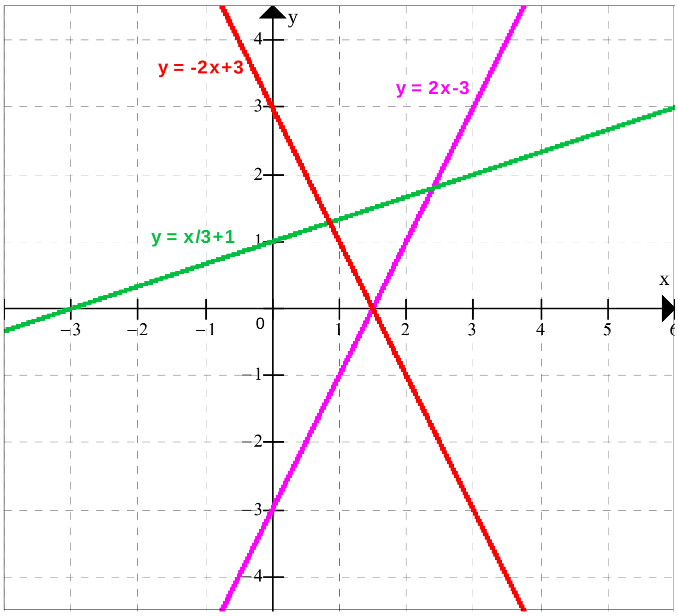


Gráfico 20

A aluna leu o enunciado do item onde tinha dúvida:

A5.30: – Olhe..."para que valores de x a função...é positiva e negativa (sinal da função)". Eu me baseei pelo sinal do x!

Pe: – Não...Do x?

A5.30: – Isso.

Pe: – Ali, veja, [está perguntando] quais valores de x fazem essa **função** ficar positiva e quais valores de x fazem essa **função** ficar negativa?

A5.30: – Então eu tenho que atribuir valores para x.

Comecei aceitando a sugestão da aluna e escolhi a função y = 2x - 3 (item 1.(a) do problema) como referência:

Pe: – Por exemplo, quando eu coloco x igual a zero o resultado dá positivo ou negativo?

A5.30: – Dá negativo.

Pe: – E se eu colocar x igual a...6...?

A5.30: – Positivo.

Pe: – Então, têm valores de x que fazem essa função ficar negativa...

A5.30: – Isso.

Pe: – ...e outros que fazem ficar positiva.

A5.30: – E como é que eu vou...colocar aqui [no papel]?

Tentei fazê-la pensar sobre a localização desses pontos no plano cartesiano:

Pe: – Quando você coloca o zero e a imagem dá -3, onde é que fica esse ponto [(0,–3)] ?

A5.30: – O do -3?

Pe: – x igual a zero, y igual a -3...

A5.30: – Menos 3... pra cá. Aqui em baixo.

Pe: – E quando a gente coloca x igual a 6 e o y dá positivo, onde fica o ponto [(6, 9)]?

A5.30: – Aqui.

Pe: – Isso. No primeiro quadrante.

[...]

Pe: – Então vamos pensar assim: quando o y dá negativo, o gráfico fica pra baixo.

[pausa]

Percebi que a aluna ainda estava em dúvida com alguma coisa:

Pe: – O ponto vai pra baixo.

A5.30: – <u>A senhora está falando desse aqui</u>?

A aluna estava associando os valores dos quais estávamos falando com os coeficientes angular e linear da equação:

Pe: – Não. Estou falando **do y**. Não estou falando nem do <u>a</u> e nem do <u>b</u>! Estou falando **do y**. Quando o y é negativo, a gente desce o ponto.

A5.30: – Tá.

Pe: – Quando o y dá positivo, a gente sobe o ponto.

A5.30: – Ceeerto!

Pe: – Ou seja, os gráficos têm um pedaço pra baixo do eixo x e um pedaço pra cima do eixo x.

A5.30: – Certo.

Pe: – Por que fica pra baixo? Porque o y é negativo. E por que fica pra cima? Por que o y é positivo. Tá?

A5.30: – Tá.

Pe: – Então nós temos alguns y negativos e alguns y positivos. E é isso que ele está perguntando pra você.

A5.30: – E como é que eu vou passar isso para o papel?

Retomei o gráfico que a aluna já tinha feito com as funções do problema:

Pe: Olhe para o gráfico: você só tem que distinguir no seu gráfico qual pedaço está abaixo do eixo x, e qual está acima do eixo x. O pedaço que estiver abaixo tem o y negativo.

A aluna percebeu que as funções $y = 2x - 3$ e $y = \frac{x}{3} + 1$ tinham comportamento semelhante, quanto ao sinal:

A5.30: – Que é a rosa...e a verde...?

Pe: – Desse ponto...

A5.30: – ...pra cá.

Pe: – Isso! Porque do ponto pra lá, é positivo. Está vendo? **O y** é assim: desse ponto pra esquerda é negativo...

A5.30: – Isso.

Pe: – ...e desse ponto pra direita...

A5.30: – Positivo.

Pe: – E como é que se chama este ponto?

A5.30: – Esse é uma interseção!

Pe: – Mas não tem um nome especial o ponto onde um gráfico cruza o eixo x?

A5.30: – Raiz?

Pe: – Raiz. Por isso a raiz é importante.

[...]

A5.30: – Então a gente vai ver pelo gráfico...?

Pe: – Sim, pelo gráfico; se ele está pra cima ou pra baixo.

A5.30: – Mas olha só: isso é da rosa.

Pe: – Da rosa.

A5.30: – Ahh!!

[...]

A5.30: – Tá. Então vamos ver pra rosa: quando o x é menor que um e meio... eu vou ter... Como se chama isso? y?

Pe: – O y, ou a função.

A5.30: – ...a função é negativa.

Pe: – Certo. A função é negativa, ou, o y é negativo.

A5.30: – Tá. Então, pra cima de um e meio é positivo; o x é maior que um e meio.

A aluna passou então para a função y = -2x + 3:

A5.30: – A mesma coisa aqui. Não!! Nesse aqui...

Pe: – Aqui?

A5.30: – ... por causa do x menor... uai Prô?! Aqui está ao contrário!!

Pe: – Está ao contrário. Isso!

A5.30: – É... essa aqui é crescente.

Pe: – A rosa é crescente.

A5.30: – Isso. E essa daqui é decrescente.

Pe: – Certo.

A5.30: – Para a decrescente... quando o x for maior que...que um e meio, vai ser negativa!

Pe: – Exatamente!

Embora seja consideravelmente longo (ainda que eu tenha suprimido alguns trechos muito repetitivos), o diálogo mostra como esta aluna não tinha noção do que é o sinal de uma função. E mostra, também, como ela foi gradativamente compreendendo, apoiada na sua experiência com a Álgebra trabalhada anteriormente (substituir valores em x) e na imagem fornecida pelo computador, o que representa este sinal.

Esta aluna era extremamente detalhista e fazia questão de pensar, entender e responder a cada solicitação feita nos problemas. Já comentei isto em outros momentos, o leitor deverá se lembrar, neste problema 9, diferentemente da maioria dos outros que compõem o trabalho proposto pelo professor, os itens solicitando a análise dos gráficos quanto à monotonicidade, raízes e sinal, foram de extrema importância. Apesar de fechado, o problema possibilitou que os alunos percebessem e sanassem suas dúvidas. Ao realizar a correção dos trabalhos pude constatar como estas dúvidas estavam, de fato, presentes naqueles alunos - a maioria não respondeu a estes itens.

Em uma outra circunstância, já após o encerramento daquele dia de aula, antes de se retirar do laboratório, um aluno me pediu que o ajudasse a entender o que era para fazer no item (c) do seguinte problema, que o professor havia deixado para ser feito em casa:

Considere a função

$$f(p) = \log_2(3 - p^2)$$

(a) Faça o gráfico.

(b) Diga se a função é de oferta ou de demanda.

(c) Para que valores de p se tem $\log_2(3 - p^2) > 0$?

Problema 17

Inicialmente ele me pediu que confirmasse se seu gráfico estava correto:

A9.41: – Professora, fica assim no computador, olha?
Pe: – Fica.

E prosseguiu perguntando:

B9.41: – Então; mas não sei o que é pra fazer aqui [no item (c)].
Pe: – É para você olhar para esse gráfico...
B9.41: – Hã, hã.
Pe: – E dizer onde ele é positivo.
A9.41: – Aqui é maior? [Estava perguntando sobre o sinal >.]
Pe: – Sim, maior que zero.
C9.41: – <u>Aí tem que ir no *Traço* e colocar os valores acima de zero, não é</u>?

O aluno achou que tinha que atribuir valores maiores que zero à variável independente p e calcular as imagens correspondentes f(p) utilizando o recurso *traço* do *software*. Creio não ser necessário apresentar o restante do diálogo. Definitivamente, aqueles alunos não tinham boa compreensão sobre sinal de funções e sobre seu significado em termos do gráfico das funções. Essa lacuna de conhecimento precisou ser sanada para que os alunos pudessem resolver os problemas que tinham este tipo de solicitação e que eram para ser resolvidos apenas "utilizando o computador", como solicitava o professor.

Passarei agora a apresentar alguns episódios em que surgiram oportunidades de ajudar os alunos a resolver os problemas, transpondo algumas barreiras constituídas por lacunas de conhecimento relacionadas a tipos específicos de funções.

O problema 16, já considerado no início deste cenário (p.186) também mostrou, por exemplo, que os alunos tinham dúvidas sobre funções constantes que, no problema, era o conteúdo central. Os episódios que mostram isso ocorreram numa aula de laboratório que, atendendo aos pedidos dos alunos, foi dedicada a tirar as dúvidas a respeito do trabalho. Novamente, a fim de evitar repetições e facilitar a referência ao problema, dividirei esse problema em duas partes:

Exercícios Grupo 01

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

   (a) y = 2 (b) y = 3 (c) $y = \sqrt{2}$

   (d) y = -2 (e) $y = \sqrt[3]{10}$ (f) $y = \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$

   O que é que os gráficos das funções anteriores têm em comum?

Problema 16.1

Nesse problema 16.1 muitos alunos perguntaram porque os gráficos só davam retas horizontais. Ou, tendo os gráficos prontos no computador, chamavam para perguntar se estava certo – muitos perguntaram isso!

A este respeito houve um diálogo bastante significativo com uma aluna que, tendo terminado o problema 16.1, já estava fazendo o problema 16.2:

Exercícios Grupo 01

2. Seja a função dada por $y = \pi^2$, utilizando a função "traço" verifique e marque os pontos da função no gráfico para:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
$\sqrt{2}$	

Problema 16.2

A aluna estava utilizando o recurso *Traço*, conforme solicitado, mas:

A4.1: – Eu não estou conseguindo calcular as imagens desses x que foram dados!

Pe: – Por que? Qual é a dificuldade?

A4.1: – O computador está dando sempre a mesma coisa, olhe!

A aluna foi introduzindo os valores de x que o professor forneceu no problema e, ao calcular as imagens correspondentes, o *Winplot* fornecia sempre o valor 9,86960:

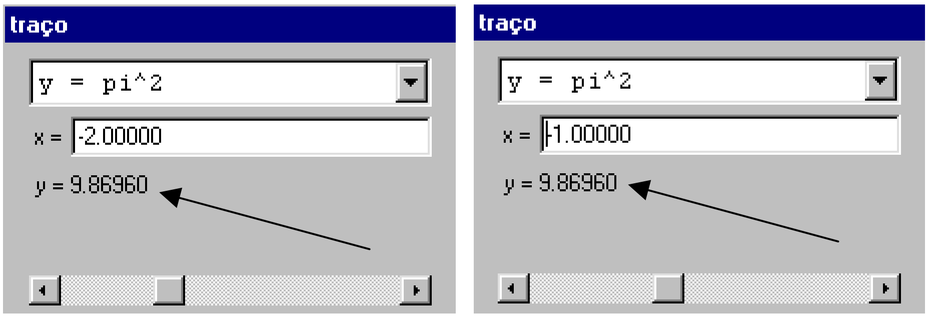


Figura 17

Pe: – Está errado?

A4.1: – Não está?

Pe: – O que deveria aparecer como resposta? Que "conta" o computador deveria fazer?

A4.1: – Não sei.

Repito que a aluna já tinha feito o problema 16.1, todo sobre funções constantes, mas parecia que não estava percebendo que a função y = π^2 era do mesmo tipo. Talvez a aluna a estivesse relacionando à expressão de uma função quadrática, ou não estivesse reconhecendo π, e também π^2 , como constantes. A função y = π^2 não é, de fato, usual e, como comentei no início deste cenário, tampouco para estes alunos, o número não inteiro π. Além disso, no problema 16.1 não havia a solicitação para calcular imagens de valores específicos de x. Foi a presença deste item no problema 16.2 que fez a diferença e trouxe dificuldades para a aluna.

Como o gráfico da função estava sendo mostrado na tela do computador recorremos a ele:

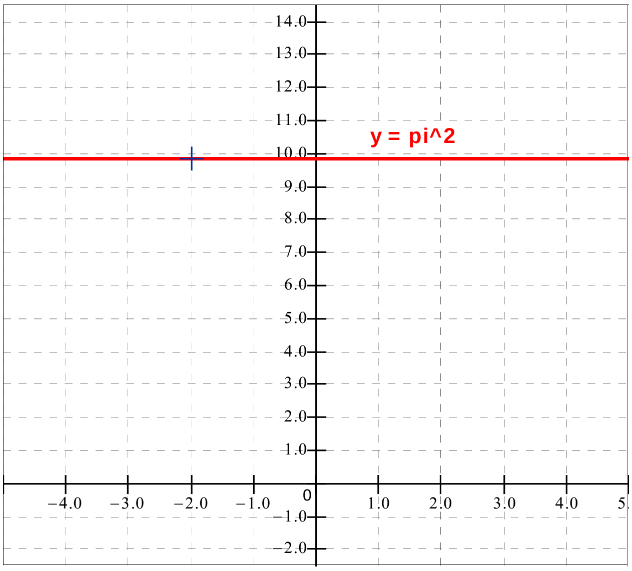


Gráfico 21

Pe: – Olhe para o seu gráfico; ele está certo?

A4.1: – Está.

Na realidade, a aluna sabia sim que y = π^2 era uma função constante e que, por isso, o gráfico seria uma reta paralela ao eixo x.

Pe: – Por que ele é uma reta paralela ao eixo x?

A4.1: – Não sei.

O que ela não sabia era que relação há entre os valores numéricos de y e o gráfico, nas funções constantes. Solicitei que abrisse a tabela que gerou o gráfico da função e observasse os valores de x e de y. Ela conferiu a expressão da função digitada para certificar-se de que estava correta. E ao abrir a tabela se admirou ao observar que o valor de y era sempre o mesmo:

x	y
-5.00000	9.86960
-4.50000	9.86960
-4.00000	9.86960
-3.50000	9.86960
-3.00000	9.86960
-2.50000	9.86960
-2.00000	9.86960
-1.50000	9.86960
-1.00000	9.86960
-0.50000	9.86960
0.00000	9.86960

x	y
0.50000	9.86960
1.00000	9.86960
1.50000	9.86960
2.00000	9.86960
2.50000	9.86960
3.00000	9.86960
3.50000	9.86960
4.00000	9.86960
4.50000	9.86960
5.00000	9.86960

Tabela 6

A4.1: – É sempre o mesmo valor! É o valor que aparece na janela do *Traço*! Então lá estava certo!

Pe: – E qual é o valor de π?

A4.1: – É 3,14. Está certo! E π^2 é 9 e pouco.

Pedi que escolhesse alguns pontos da tabela e, um a um, me mostrasse onde estavam localizados no gráfico. Rapidamente ela percebeu o que estava acontecendo:

A4.1: – Por isso o gráfico é horizontal!

Ela então entendeu, relacionando várias informações obtidas de diferentes recursos do software, como se comportava aquela função.

Essa passagem é uma representante escolhida entre várias outras em que os alunos manifestaram dúvidas da mesma natureza, ou seja, a respeito da função constante. Embora os fatos apresentados no início deste cenário estejam ligados a números, e este último à função constante, me parece que estão relacionados. O número π só foi colocado pelo professor na expressão da função porque este era um problema preparado para ser resolvido no computador, isto é, na ausência dele não seria pedido que os alunos calculassem o valor de π^2. Assim, também, a $\sqrt{2}$, a $\sqrt[3]{10}$ e o $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$, que aparecem no problema 16.1. Essas constantes, pouco familiares para os alunos, geraram desequilíbrio, no sentido de que causaram estranheza, se constituíram em obstáculos, e para superá-los os alunos tiveram que explicitar e superar suas dúvidas.

Em particular, neste último episódio apresentado, considero que o fato de o enunciado do problema trazer a função constante representada com o símbolo grego π, por π^2, a expressão digitada no *Winplot* ser "pi^2", e os valores da função nos pontos serem apresentados como 9.86960 pelo *software,* também potencializa o desencadeamento desses desequilíbrios.

Por outro lado, a diversidade de recursos (gráficos, tabelas, equações, cálculos numéricos) deste mesmo *software*, assim como a passagem de um recurso para outro, em muitos momentos ajudou os alunos a superar suas dificuldades.

Esta possibilidade de relacionar gráficos e equações fez emergir evidências de que esta turma de alunos participantes da pesquisa tinha lacunas no conhecimento, também sobre funções afins. Entre os diversos episódios que retratam isso, escolhi, para apresentar inicialmente, alguns relacionados ao problema 14:

Problema do mercado de ações

Fernanda diz a Pedro que, no mercado de ações, sabe-se que a rentabilidade das ações da empresa A é descrita pela lei $R_A = 4^t$ e da empresa B pela lei $R_B = 10.2^t - 16$, onde t é o tempo em meses a partir de 1º de janeiro de 2001. Pede-se:

(a) Os pontos onde as rentabilidades são iguais.
(b) Esboçar o gráfico de R_A e R_B.
(c) Qual a melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês?

Problema 14

A8.4: – Professora! É assim mesmo?

O gráfico que os alunos tinham na tela do computador era o seguinte:

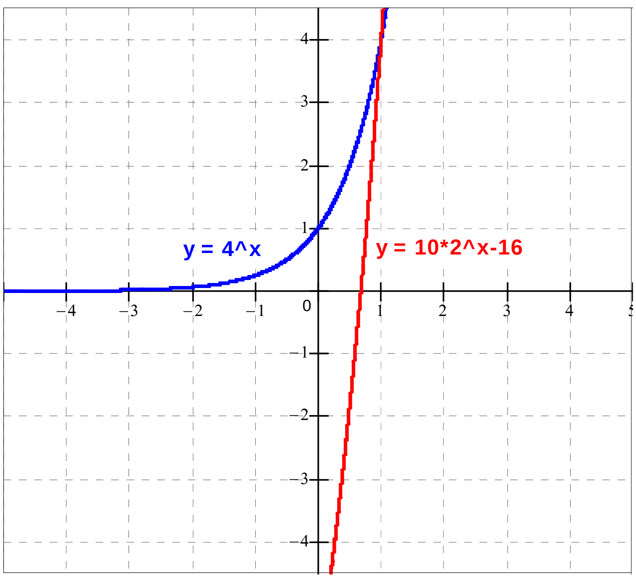


Gráfico 22

Tentei levar as alunas a se lembrarem do problema que tinham acabado de resolver na sala de aula, antes de virem ao laboratório, e que também envolvia funções desse tipo:

Pe: – É assim mesmo? Lembra do da sala? Era assim?

B8.4: – Era...

[pausa]

Pe: – Isso aqui parece reta. É reta?

B8.4: – Não. Ele [o da sala] era assim, né?

A aluna fez o "desenho" de uma exponencial com o dedo, na tela do computador. Mas logo em seguida se contradisse:

B8.4: – <u>Era bem reto assim</u>.

A8.4: – Ah, é!?

A colega, na dupla, se surpreendeu com a resposta da companheira. Então tentei fazer com que relacionassem o tipo de equação ao formato do gráfico.

Pe: – É reta? Aquilo [$R_B = 10.2^t - 16$] é equação de reta?

B8.4: – Acho que não.

Pe: – Não é equação de reta? Então por que o gráfico está parecendo reta?

[pausa]

Um aluno de outro grupo ouviu a conversa e se juntou a nós.

Pe: – Eu estou perguntado pra elas se isso é equação de reta ou não?!

C8.4: – <u>Não sei</u>.

Tratei de retomar alguns fatos sobre função exponencial que o professor tinha destacado na sala de aula:

Pe: – Lembra que o professor falou, lá na sala, da assíntota? No problema resolvido na sala tinha...uma que vinha no -4...

A8.4: – Isso.

Pe: – ...e a outra era no -6. E essa aqui [a do computador]: uma quase encostada no eixo x [a azul]; e a outra? Será que não vira também?

A8.4: – Mas ele quer ver isso?

Pe: – Olhem... Vocês têm é que responder aquilo ali. Mas, por exemplo, se esboçar o gráfico igual a uma reta e não for reta, fica errado!

Então uma aluna mudou os limites da área de gráfico e percebeu que seu aspecto já mudara:

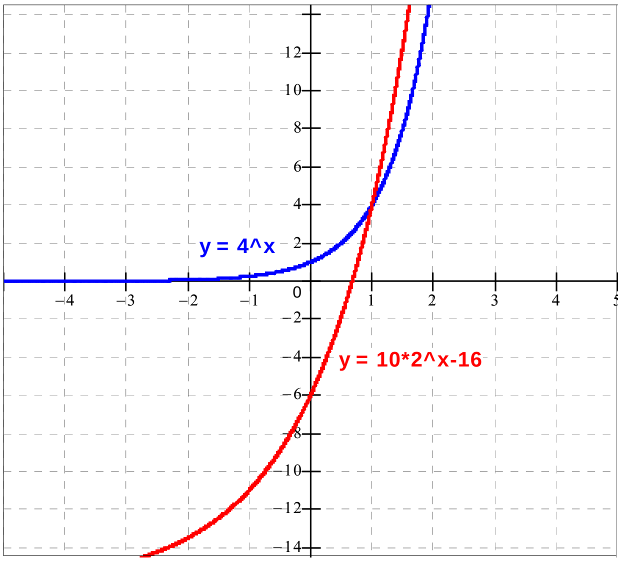


Gráfico 23

B8.4: – Assim... Assim!

Pe: – Olha lá, olha. Está melhorando, está vendo?

Este episódio mostra várias passagens em que, embora o professor e os alunos, àquela altura, já estivessem trabalhando com funções exponenciais, e as funções do 1º grau tivessem sido estudadas no semestre anterior, os alunos ainda apresentavam falhas em sua compreensão sobre este tipo de função. As falhas explicitadas dizem respeito a informações básicas sobre função afim como o tipo de expressão que representa esse tipo de função, o formato do gráfico, etc. E todas essas manifestações foram desencadeadas pela imagem que o computador ofereceu de início.

É evidente, também, que os alunos não estavam dominando os fatos relativos às funções exponenciais, mas essas estavam sendo ainda estudadas naquele momento. Por isso, as relacionadas a esse tipo de função, não estou considerando como lacuna de conhecimento.

Um diálogo que se seguiu ao anterior, também referente a este mesmo problema, enveredou pelo mesmo caminho do anterior:

A8.6: – Professora, olha aqui. Está bom?

Pe: – Olhe... Está razoável, eu diria. O que eu estava questionando, às meninas, era o seguinte: esse...desenho está parecendo uma reta. Ele é uma reta? [...] Dependendo de onde você olha o gráfico, você tem a impressão que aquilo é uma reta, e às vezes não é! Então vocês precisam olhar mais... essa curva... Se ela **não** for uma reta você erra o gráfico, lá [ao passar para o papel].

Ou seja, sugeri que as alunas aumentassem a área de gráfico, como fez a dupla anterior:

A8.6: – Olhar mais do que isso...? Eu coloquei -10 e 10.

A dupla tinha o gráfico a seguir na tela. Elas já haviam alterado a imagem da função que o *Winplot* mostrara inicialmente:

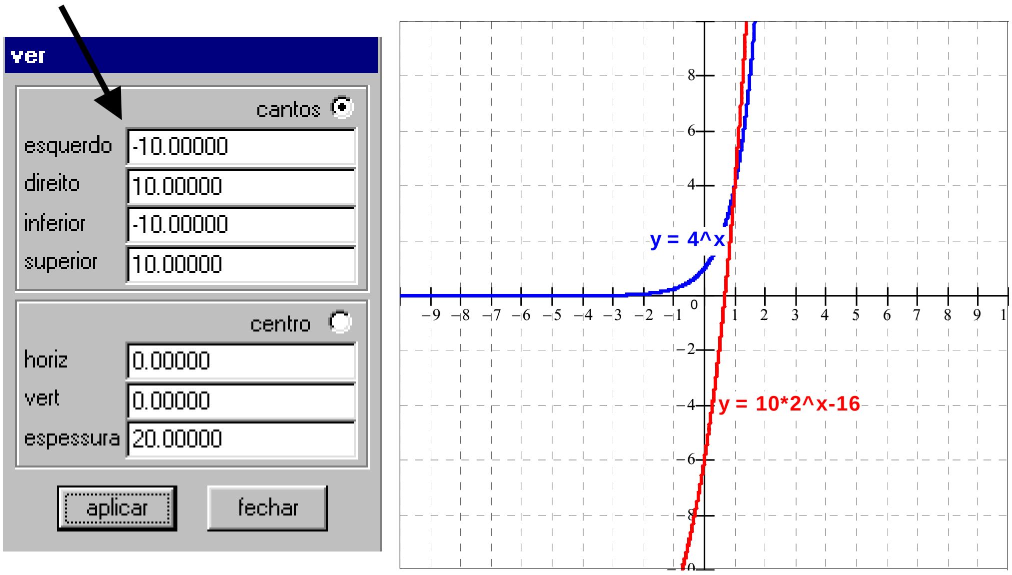


Figura 18

Embora já fosse um gráfico diferente daquele que o *Winplot* mostrava inicialmente, a imagem que tinham não era suficiente para que afirmassem se a curva era ou não uma reta. Novamente, para essa dupla, sugeri que pensassem na expressão da função:

Pe: – Isso é a equação de uma reta? Esse é um caminho pra vocês saberem.

B8.6: – Pra mim isso é uma curva (...).

Pe: – Então, mas...o que vocês precisam pensar é o seguinte: **essa** equação $[R_B = 10.2^t - 16]$ devia dar o gráfico de uma reta? Como é que é a equação de uma reta? E **essa** equação $[R_A = 4^t]$ é de que tipo de função? Então, que tipo de gráfico tinha que aparecer aí?

A8.6: – Essa equação está errada?

Pe: – A equação está certa.

[pausa]

Pe: – Vocês não lembram qual é a equação da reta? Quando que os gráficos dão reta? Que tipo de equação gera reta?

A8.6: – Do 2º grau?

Pe: – Do 2º grau é parábola.

A8.6: – Do 1º grau.

B8.6: – Do 1º grau?

[risos]

Pe: – Sim, do 1º grau! A do 1º grau, aquela... por exemplo: 2x [escrevi a equação no caderno da aluna]. Olhe: x elevado **a 1**.

O diálogo segue no sentido de diferenciar a equação de uma função afim da equação de uma função exponencial. Para os objetivos deste cenário, a parte apresentada até aqui é suficiente. Ela ratifica lacunas no conhecimento sobre funções do 1º grau que os alunos mostraram ao resolver um problema envolvendo funções exponenciais.

A propósito, outros fatos confirmam a existência dessas lacunas. Relatarei estes fatos brevemente apenas para complementar os já apresentados. Na sala de aula, uma aluna pediu ao professor que explicasse o que era para fazer no problema 10.1:

Exercícios Grupo 03

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

	Passa pelo(s) ponto(s)	Coeficiente angular	Coeficiente linear
(a)	(1, 3)	2	
(b)	(1, 3)	3	
(c)	(2, 3)		1
(d)	(2, 3)		2

Problema 10.1

Ele tomou o item (a) como exemplo, foi explicando à turma como obter a expressão da função e registrando sua resolução na lousa. Num certo momento, esta aluna, que estava sentada ao meu lado, me perguntou:

A: – O b é onde o gráfico cruza o eixo y?

Referia-se ao coeficiente b na equação geral, y = ax + b, da reta.

Pe: – Sim.

E ela continuou:

A: – E o **a** é onde o gráfico cruza o eixo x?

Pe: – Não!

A: – Não?

Confirmei que não e um diálogo se seguiu em que conversamos sobre a relação entre o a, ou seja, entre o coeficiente angular e a inclinação da reta.

Uma última passagem, envolvendo função afim, talvez deva ser considerada. Atendendo à solicitação de uma aluna fui corrigir alguns dos problemas do trabalho, que ela já tinha feito. Estávamos tratando do problema 18:

Exercícios Grupo 02

Objetivos:
(a) Construir e interpretar gráficos de funções lineares e afins.
(b) Verificar a influência no gráfico do coeficiente angular.
(c) Determinar a interseção de duas funções afins.

1. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:
(a) y = x (b) y = 2x (c) y = 3x
(d) $y = \frac{x}{2}$ (e) $y = \frac{x}{3}$ (f) $y = \frac{x}{4}$

2. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:
(a) y = 2x (b) y = 2x + 1 (c) y = 2x + 2
(d) y = 2x -1 (e) y = 2x - 2 (f) y = 2x - 3

3. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:
(a) y = x + 2 (b) y = 2x + 2 (c) y = 3x + 2
(d) y = -x + 2 (e) y = -2x + 2 (f) y = -3x + 2

4. Trace o gráfico do valor pago por uma refeição em função do peso (em gramas) de um restaurante que opera no sistema de refeição por quilo cujo preço é R$ 12,00 por quilo.

5. Resolver graficamente e analiticamente os sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 3 \end{cases}$	(d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$
(e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$	(f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Problema 18

e, especificamente, do problema 18.2:

Exercícios Grupo 02

2. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:
(a) y = 2x (b) y = 2x + 1 (c) y = 2x + 2
(d) y = 2x -1 (e) y = 2x - 2 (f) y = 2x - 3

Problema 18.2

Ela observou que os gráficos obtidos eram retas paralelas. Mas não sabia se estavam corretos:

A: – É assim mesmo que fica?

Questionei a aluna sobre a relação entre a inclinação da reta e os coeficientes da equação. Mas a aluna não sabia responder. Expliquei que a inclinação da reta depende do valor do coeficiente angular, que é o número "que multiplica o x" na equação y = ax + b. E ela me perguntou:

A: – Por que?

Creio não ser necessário alongar-me mais com a apresentação de lacunas de conhecimento sobre função afim. Apenas gostaria de enfatizar o papel relevante que os problemas, ao serem resolvidos com a utilização do computador, tiveram na explicitação dessas lacunas. As situações surgiram de problemas envolvendo funções afins ou outros tipos de funções, mas os resultados (visuais ou não) apresentados pelo *Winplot* foram sempre decisivos no desencadeamento das dúvidas.

Encerrarei este cenário trazendo algumas passagens em que os alunos demonstraram que não estavam dominando alguns fatos básicos ligados às funções quadráticas. Inicio por lembrar a resposta dada pela aluna A8.6 (p.205) quando perguntei qual é a forma da equação da reta; ela arriscou – Do 2º grau? Para iniciar precisarei retomar o problema 15:

$$\begin{cases} q_d = 64 - 8p - 2p^2 \\ q_o = 10p + 5p^2 \end{cases}$$

Problema 15

A dupla de alunos que participou do diálogo a seguir me chamou para perguntar várias coisas. Para os objetivos deste episódio interessa o início de nossa conversa:

A3.10: – Está certo até aqui?

Pe: – Está.

O gráfico que os alunos estavam me mostrando era o seguinte:

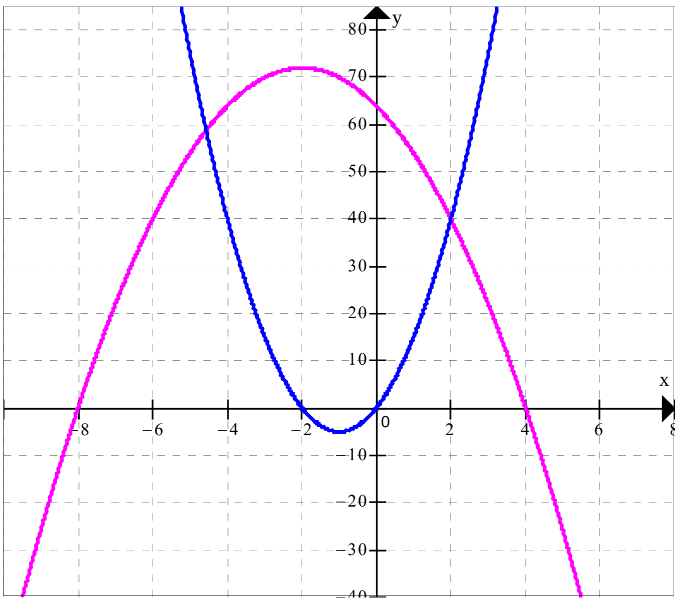


Gráfico 24

A3.10: – E Norma...

O aluno B3.10 interrompeu o colega e perguntou:

B3.10: – E como é que eu sei... Essa função aqui é de 10x... não é? 10 x mais 5 x ao quadrado?

Pe: – Como é que você pode ver isso?

B3.10: – <u>Então, como é que eu sei qual é a equação de cada curva</u>?!

Os alunos não tinham as equações das funções na tela. O *Winplot* só mostra as equações se o usuário selecionar esta opção no *software*.

Antes que eu pudesse falar qualquer coisa o aluno A3.10 interviu:

A3.10: – É só mostrar ali, olhe. A azul é da azul.

B3.10: – Hã hã!

A3.10: – Está vendo? Se a gente mostrar a rosa... *mostrar equa*... Olhe aí: a rosa é da rosa; a equação azul é da linha azul.

O aluno A3.10 simplesmente fez com que as equações aparecessem na tela do computador e mostrou ao colega que elas aparecem na mesma cor do gráfico:

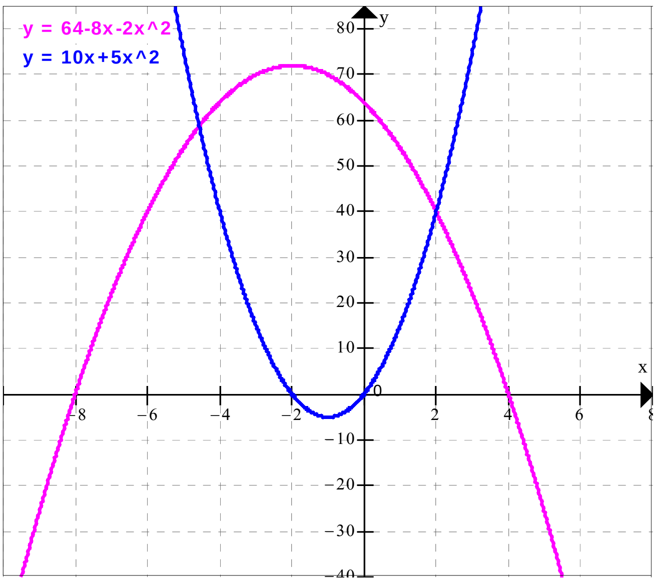


Gráfico 25

Tratei de chamar a atenção do aluno que perguntou para a relação entre a concavidade da parábola e o sinal do coeficiente de x^2. Também o ajudei a calcular mentalmente as raízes da função $y = 10x - 5x^2$. Mas ficou evidente, pela sua pergunta, que essas noções básicas sobre função quadrática não estavam prontamente presentes no seu repertório de conhecimentos.

Também durante a resolução do problema 8 pude perceber algumas falhas dos alunos ao trabalharem com as funções do 2º grau:

Os proprietários de uma certa empresa de ônibus estimam que a receita total obtida com a linha que liga as ruas A e B é dada por R_t = 60p.(25-10p), onde p representa o preço da passagem (bilhete), em reais. O custo total é C_t = 200+325p.

(a) Esboce o gráfico de R_t e C_t.
(b) Determine que preço p deverá ser cobrado pela passagem para que seja obtida a máxima receita.
(c) Determine o ponto crítico dando a análise econômica
(d) Para que valores de p se tem lucro? Justifique sua reposta.
(e) Para que valores de p se tem prejuízo? Justifique sua resposta.
(f) Qual é o valor da receita e do custo se o preço do bilhete for R$1,20?

Problema 8

A3.24: – Professora, veja se está certo, aqui, o gráfico...

Pe: – Vejo. É aquele ali?

A3.24: – Esse mesmo.

Pe: – Ih! Tem problema, hein? Essa parábola [R_t = 60p.(25-10p)] não tem a concavidade desse jeito que saiu no gráfico de vocês. Vocês digitaram alguma coisa errada. Confiram a equação que vocês digitaram.

A3.24: – A gente arredondou pra...

B3.24: – É.

A3.24: – Dividiu, né?

Pe: – Ah, simplificaram...

Pe e A3.24: – ...a equação?!

B3.24: – É!

Os alunos primeiro fizeram a multiplicação e eliminaram os parênteses da função receita: R_t = 60p.(25 -10p) = 1500p - 600p^2 . Em seguida simplificaram os coeficientes da expressão da função.

Pe: – Pode não!

A3.24: – Não pode?

Pe: – Vocês estão dividindo a receita. Vocês simplificaram por 20 ? Vocês dividiram sua receita por 20, vão receber a vigésima parte do que deveriam receber. Que tal, é bom ou não?

A3.24 e B3.24: – Não!

Pe: – Deixem como está; não mexam!

Ao transcrever o diálogo percebi que, na realidade os alunos dividiram os coeficientes por -20, pois inverteram a concavidade da curva. Então, inverteram o sinal da receita, o que não faz o menor sentido, pois as funções de receita ocorrem somente para valores positivos, tanto da variável dependente como da independente. Mas, de fato, só me lembrei disso após a aula.

Ao refletir sobre este último episódio, inicialmente, fui levada a considerar que não retratava um fato característico do ambiente com computador. Eu mesma já presenciei os alunos adotando este procedimento (simplificar a expressão de uma função) no contexto da sala de aula. Porém, um dos aspectos que tenho tentado salientar nesta minha investigação é de que forma os alunos transferem o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, para o laboratório de Informática, quando estão utilizando o *Winplot* na resolução de problemas.

E com isso em mente percebi que ao simplificarem a expressão da função receita dada no problema, estavam transferindo, inadequadamente, um procedimento algébrico adotado tipicamente na sala de aula. Obviamente, não a simplificação da expressão da função. Mas, em geral quando estamos calculando as raízes das funções, na ausência de calculadora ou computador, simplificamos a equação para reduzir os valores e facilitar os cálculos. Mas neste contexto, isso não era preciso. O *software* faria os cálculos necessários, os alunos não tinham que "se preocupar" com isso.

O erro cometido pelos alunos mostra que eles não tinham consciência de que, ao simplificarem os coeficientes da expressão da função, na realidade, alteraram o problema dado. Afinal, mesmo quando resolvemos uma equação algebricamente, embora todas as equações intermediárias pelas quais passamos tenham a mesma solução, cada uma delas não é igual, nem à equação anterior e nem à equação dada.

Este episódio ocorreu, como o leitor pode observar pela indexação que denota cada aluno, na terceira aula, isto é, no início do semestre. Nesta fase do trabalho, os alunos ainda estavam se familiarizando com a utilização do computador na resolução dos problemas. Neste dia de aula, eu e o professor tivemos muito trabalho para esclarecer aos alunos que precisavam ajustar a área de gráfico para que o gráfico desta função aparecesse adequadamente na tela. Este problema foi um dos escolhidos para o cenário 2, onde discuti esta questão. Considero fortemente a possibilidade de que esta dupla simplificou a expressão da função na tentativa de facilitar seu trabalho de estimar valores apropriados para fixar como limites nos eixos coordenados e obter uma representação gráfica satisfatória para a função. E assim, manifestaram esta lacuna de conhecimento que se refere, não somente a funções quadráticas, mas também à resolução de equações, conforme comentei no parágrafo anterior.

5.3.1.2 - LIMITAÇÕES

Uma das limitações que vejo nos dados apresentados neste cenário está ligada à natureza demasiadamente operacional e pouco interpretativa de alguns problemas, conforme já foi destacado em cenário anterior. Alguns alunos mais dedicados aproveitaram para refletir mais sobre o que estavam fazendo, mas os problemas não conduzem por si mesmos a essa conduta por parte dos alunos.

Uma outra limitação que percebo fortemente aqui não está propriamente nos problemas mas na forma como conduzi os alunos na sua resolução a partir das dúvidas que levantaram. Agora percebo que em muitos momentos assumi uma postura demasiado diretiva, quando poderia ter levado os alunos a explorarem mais os recursos disponíveis do software e a encontrarem de forma mais autônoma as respostas às suas questões.

Por exemplo, para obter o valor de $\sqrt{2}$ a aluna poderia ter explorado a função $y = \sqrt{x}$, assim como para determinar os outros valores envolvidos no problema 16, como $\sqrt[3]{10}$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$.

5.3.1.3 - AVANÇOS

Em princípio, a vantagem de poder utilizar números não inteiros nos problemas resolvidos com computador, como manifestou o professor, poderia ser considerada um aspecto demasiado pequeno diante de tantas possibilidades oferecidas por ele. Entretanto as situações que presenciei indicam que esses números ou constantes, pouco familiares para os alunos, associados à imagem fornecida pelo computador ou por resultados numéricos oferecidos por ele às solicitações feitas pelos alunos ao *software,* constituíram barreiras à obtenção da solução procurada. Portanto elas constituíram problemas, e tiveram que ser superadas durante a resolução.

As situações de ensino, de aprendizagem e de **avaliação** que foram desencadeadas por estes problemas são de extrema relevância. Durante sua resolução os alunos se mostraram. Mostraram suas dificuldades, explicitaram suas dúvidas e sanaram muitas delas. Especialmente para esses alunos, que tinham muitas deficiências de conhecimento matemático, inclusive de conteúdos básicos, a detecção dessas lacunas permitiu que a aprendizagem se fizesse a partir de onde os alunos estavam.

Se os alunos não sabiam o valor de $\sqrt{2}$, tiveram oportunidade de pensar sobre ele assim como sobre os outros valores envolvidos no problema 16. E esta foi, de fato, uma experiência inédita para eles.

Gostaria ainda de comentar sobre a importância de o professor propor variados tipos de problemas. O problema 16.2, diferente do problema 16.1, embora sejam ambos fechados e baseados no mesmo conteúdo (função constante), provocou questionamentos e levou a reflexões que permitiram compreender melhor tal conteúdo. Também se pode dizer isso sobre os problemas 9 e 10, ambos propostos para o trabalho: são fechados e sobre função afim. No entanto, os itens constantes no problema 9, solicitando análise dos gráficos possibilitaram aos alunos e a mim (professora, naquele contexto) detectar e sanar dúvidas sobre conceitos e conteúdos básicos, mas essenciais ao estudo de funções.

5.3.1.4 - TRANSCENDENDO OS DADOS E APONTANDO POSSIBILIDADES

Uma primeira possibilidade já foi sinalizada na seção sobre as limitações e relaciona-se ao trabalho com funções constantes. Para cada função constante do problema 16, eu poderia ter sugerido à aluna que recorresse à função não constante "associada" , isto é, para obter o valor da $\sqrt{2}$ seria consultada a função $y = \sqrt{x}$; para o valor da $\sqrt[3]{10}$, a função $y = \sqrt[3]{x}$, e assim por diante. Outros valores, mesmo não considerados no problema, poderiam ter sido explorados.

Uma outra sugestão refere-se à socialização das reflexões. Muitas dessas reflexões desenvolvidas com um ou dois alunos, poderiam ter sido compartilhadas com toda a turma. Embora isso represente uma dificuldade no laboratório (isso será melhor analisado ao longo desse subtema), me parece que o professor precisa buscar meios de conseguir, ao menos esporadicamente, com que a turma toda se envolva em discussões em torno de um problema comum, de uma dúvida comum, ou de um assunto que seja de interesse comum. Seriam momentos em que se busca o crescimento de todos, ou quase todos, os alunos. Eles, também, precisam habituar-se a isso, ou seja, precisam ser capazes de, quando necessário, desprender-se de suas próprias atividades para trabalhar no "grande grupo".

5.3.2. A COMPREENSÃO DOS ESTUDANTES CRESCE E SE APROFUNDA

Meu objetivo com o próximo cenário é mostrar como os alunos ampliaram seus conhecimentos sobre determinados conceitos e conteúdos matemáticos ao resolver os problemas utilizando o *Winplot*. Especificamente, pretendo destacar situações em que, a partir das dúvidas manifestadas, os alunos puderam aprofundar suas compreensões a respeito dos conteúdos que estavam sendo trabalhados naquele momento ou sobre aspectos que, embora não fossem itens explicitados no conteúdo programático, constituíram um novo conhecimento.

5.3.2.1 - CENÁRIO 5

Este cenário é estruturalmente parecido com o anterior. Os fatos serão apresentados por assuntos e serão caracterizados por momentos em que os alunos faziam questionamentos e esclareciam suas dúvidas sobre o problema que estavam resolvendo. A diferença é que no cenário 4 os assuntos (números; funções constante, afim, quadrática, etc.) haviam sido estudados no semestre anterior, em Matemática I e, sendo assim, as dúvidas foram tratadas como evidências da presença de lacunas de conhecimento.

Certamente, os episódios já apresentados até aqui também serviriam de exemplos de como os alunos aprenderam muitas coisas e compreenderam melhor ou em maior profundidade os assuntos que discutiam enquanto resolviam os problemas propostos utilizando o *software*. Permito-me repetir, pois já explicitei isto no início deste capítulo, que os cenários não são disjuntos; alguns episódios evidenciam mais de um aspecto entre os escolhidos para orientar cada cenário. É por isso que um mesmo problema é utilizado várias vezes e em cenários diferentes.

Pelos dados discutidos no cenário 4 podemos constatar que muitos alunos aprenderam muitas coisas que ainda não sabiam sobre funções: sobre suas raízes, seu sinal, sua representação gráfica e sobre o significado do gráfico em vários contextos. Aprenderam mais, também, sobre as funções constante, afim e quadrática. E é este o sentido que pretendo dar à avaliação, que é o subtema em questão nestes cenários 4, 5 e inclusive no próximo, onde estará em foco o professor. A detecção de lacunas não faz sentido como fim em si mesma. Ela está sendo considerada, aqui, sob o ponto de vista da percepção de oportunidades de promover avanços e ajudar os alunos a progredirem a partir das condições que manifestam ter.

Porém, neste cenário 5, os assuntos tratados referem-se: (a) aos que estavam sendo introduzidos em Matemática II, ou seja, àqueles que estavam sendo apresentados aos alunos naquele momento; ou (b) a assuntos novos que, embora não fossem explicitados como conteúdo da disciplina Matemática II, nem no conteúdo programático e nem pelo professor, surgiram em função da utilização do computador na resolução dos problemas.

Começo pela função hipérbole que, conforme já comentado, era a designação utilizada pelo professor para as funções racionais cujos gráficos eram hipérboles. O episódio a seguir ocorreu durante a resolução do problema 3:

Suponha que as leis das lâmpadas fluorescentes fossem dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -2 + \dfrac{100}{p+10} \\ q_o = 0{,}03\,p^2 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O ponto de equilíbrio

(b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda

(c) Dar a análise econômica

Problema 3

A5.9: – <u>Esse aqui, a fórmula não é isso? Tem erro na fórmula</u>?

O aluno digitou y = -2 +100 / x + 10 para a função de demanda e me chamou para confirmar se estava correto:

Pe: – Desenhe! Vamos ver. Já tem um erro aí, mas eu quero que vocês vejam.

O gráfico não apareceu na primeira tentativa, mas este aluno logo percebeu que precisava ajustar a área de gráfico. Isto feito, a dupla mostrou o seguinte gráfico:

Gráfico 26

Então perguntei ao aluno:

Pe: – Olhe para a equação da função dada e me diga: qual é o domínio dessa função?

A5.9: – Hã?

Pe: – Qual é o número que a gente não pode colocar no lugar do p?

A5.9: – Menos 10, porque é zero.

Ao responder "porque é zero", o aluno referia-se à impossibilidade de p assumir o valor -10, uma vez que anula o denominador da função racional. Certamente, o contexto de aplicação deste problema (função de demanda e oferta) impõe outras restrições além desta mas, considerando a função $q_d = -2 + \frac{100}{p+10}$ apenas matematicamente, seu domínio é $D = R - \{-10\}$.

Pe: – Exatamente! Então, no seu desenho, um pedaço do gráfico tinha que estar à esquerda do -10 e outro pedaço à direita do -10.

A5.9: – <u>É mesmo</u>.

Pe: – E o seu não está.

A5.9: – <u>O meu está no zero, à esquerda e à direita do zero</u>.

Pe: – Isso. [...] Então tem uma coisa na equação que você vai ter que mudar. O que é?

[pausa]

Pe: – Ele está dividindo o 100, só pelo x; ele não está entendendo que é para dividir pelo x mais 10.

A5.9: – Como que eu faço?

Pe: – Como é que a gente diz para ele: "não divide só pelo x, divide por **tudo** que está depois da barra" [de divisão].

A5.9: – Coloca entre parênteses.

Pe: – Isso! Pra isso servem os parênteses.

A5.9: – Assim?

Agora o aluno digitou y = -2 +100 / (x + 10).

Pe: – Quer ver?

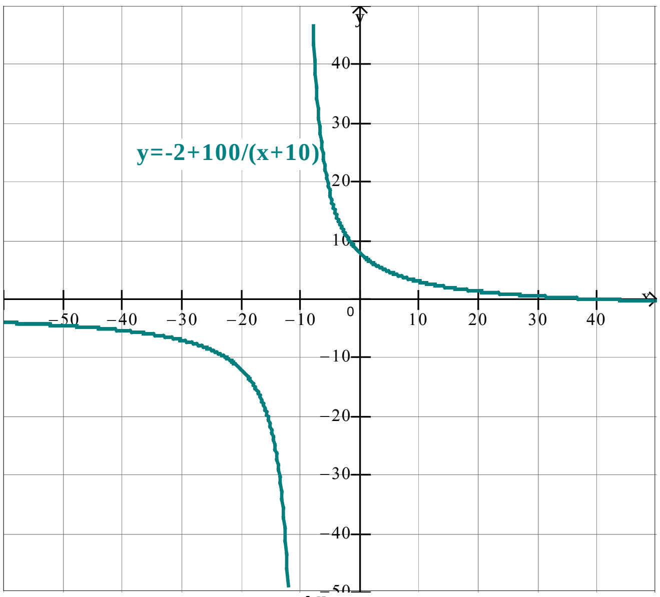


Gráfico 27

A5.9: – <u>É, agora ele foi para o -10</u>.

Ao esboçarem gráficos na sala de aula normal (sem o computador), aqueles alunos sempre pensavam que valores deveriam atribuir para a variável independente da função. Afinal, a primeira providência, naquelas situações, era montar uma tabela auxiliar com alguns pontos para, depois, localizar esses pontos no plano cartesiano e, em seguida, esboçar o gráfico. No entanto, quando lhes era solicitado que esboçassem gráficos de função racional utilizando o *Winplot*, aquela que poderia ser considerada uma etapa inicial (pensar no domínio da função) não era realizada pelos alunos. Afinal, como já comentei em cenários anteriores, o *software* apenas "exigia" a introdução da expressão algébrica da função para que o gráfico fosse mostrado na tela.

Desta maneira, os alunos podem ter a ilusão de que não é preciso considerar o domínio da função ao utilizar o *Winplot* para esboçar gráficos. O episódio anterior mostra como é necessário que os alunos saibam e considerem o domínio da função. Nesse caso, o aluno teve que considerá-lo, e saber que ele não inclui o valor real -10 foi essencial para que ele pudesse conferir o que o computador estava lhe oferecendo como solução e para que tivesse condições de corrigir o que estava fazendo.

Um outro aspecto que foi bastante discutido com os alunos diz respeito às assíntotas dessas funções. Para exemplificar isso escolhi uma passagem relacionada à resolução do problema 12:

Exercícios Grupo 08

Objetivos:
- (a) Construir gráficos de funções hiperbólicas.
- (b) Determinar as assíntotas
- (c) Determinar os pontos de encontro com os eixos

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema cartesiano.
2. Determinar as assíntotas e os encontros com os eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2-\dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = 2-\dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = 2-\dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = 2-\dfrac{1}{x-2} \end{cases}$

Problema 12

A5.30: – Grupo 8.

Pe: – Gráfico, assíntotas e encontro com os eixos.

[...]

A5.30: – Então vamos lá: "Construir os gráficos", já está aqui. "Determinar as assíntotas..." <u>Assíntotas...? Cadê esse negócio de assíntota, aqui</u>?

[risos]

Pe: – "O negócio de assíntota"... [Assíntotas] são aquelas retas... ele explicou lá na sala de aula... assim: isso é um muro, isso é um muro.

A5.30: – Isso.

Quando o professor apresentou as funções racionais do tipo $y = \frac{1}{x-a} + b$ aos alunos, estávamos na sala de aula. Na ocasião ele explicou o que eram as assíntotas comparando-as com um "muro" que limitava o gráfico da função: "daqui a função não passa." E apresentou o seguinte esboço na lousa:

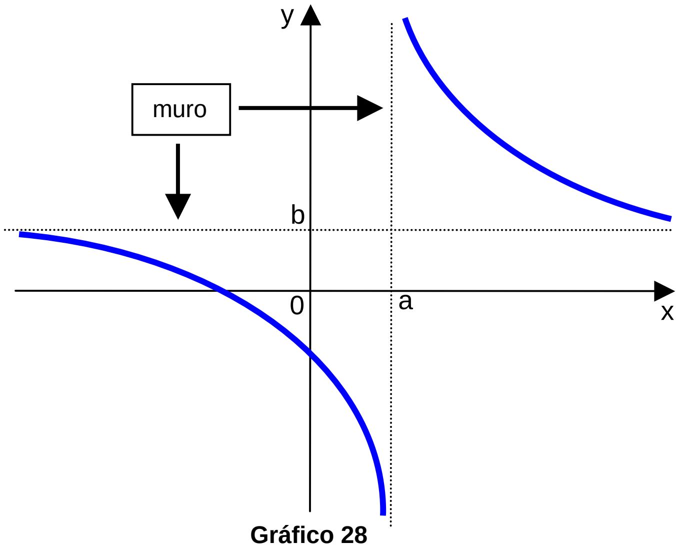


Gráfico 28

Nesse momento em que a aluna me perguntou sobre as assíntotas, também fiz um esboço em seu caderno:

Pe: – Daqui o gráfico não passa, daqui também não passa, né?

A5.30: – <u>Ah, prô, já sei, olhe! Aqui vai ser o -1 e aqui vai ser...o zero</u>?

Pe: – Exatamente.

A aluna logo relacionou as expressões das funções às assíntotas verticais correspondentes: à função $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ ela relacionou a assíntota x = -1, e à função $f_1(x) = \frac{1}{x}$ a assíntota x = 0. Então dirigiu-se aos gráficos que tinha esboçado utilizando o *Winplot* e disse:

A5.30: – Então, aqui é o f_2, que é o vermelho... Menos...vai ser -1... <u>Não. Deu errado</u>.

A aluna percebeu que o gráfico que obteve não era o da função solicitada no problema porque a assíntota não estava em x = -1:

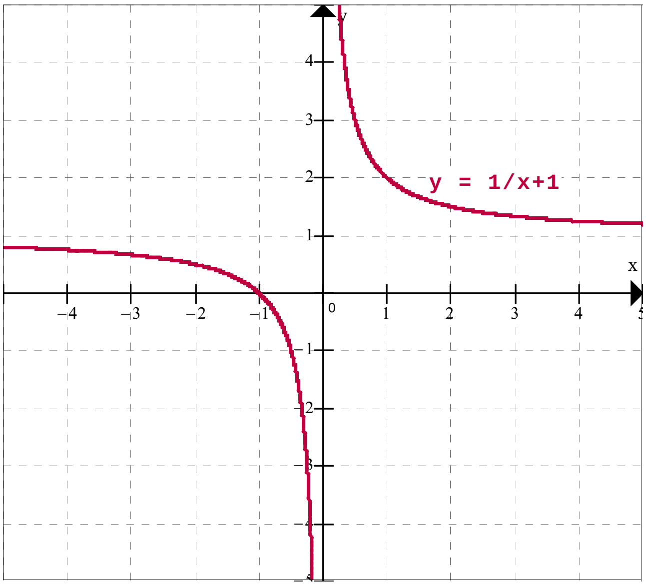


Gráfico 29

Retornou à função f_1 e conferiu também:

A5.30: – No f_1... a rosa está certa.

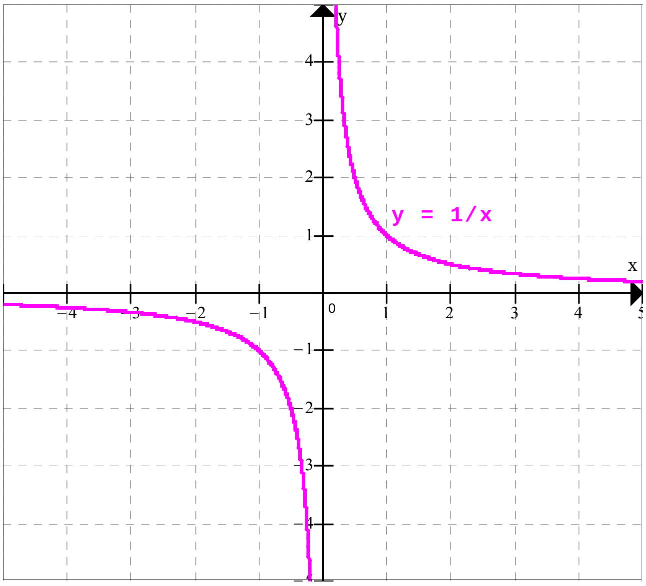


Gráfico 30

Pe: – Você viu que deu errado?

A5.30: – É o parêntese.

Pe: – Você viu a importância de saber a Matemática? Senão a gente não percebe que está errado!

A5.30: – Pior que é verdade!

Pe: – Está errado, não está?

A5.30: – É.Tem parênteses.

Ou seja, dirigindo-se a um aspecto diferente do que foi considerado no primeiro diálogo apresentado (domínio da função), este diálogo se encaminhou para a análise das assíntotas das funções. Ambos são aspectos importantes no estudo das funções racionais.

Gostaria de salientar sobre esses diálogos que, na realidade, eu falei muito pouco sobre as funções racionais, sobre seu domínio ou sobre suas assíntotas para os alunos. Eu apenas fui questionando e ajudando-os a se lembrarem de coisas que eles já tinham aprendido. Entretanto foi preciso que o problema suscitasse suas dúvidas e que eles recorressem a conhecimentos específicos sobre a função para que pudessem perceber o que estava errado e solucionassem essas dúvidas e o problema.

As assíntotas foram assunto de vários diálogos não só durante as aulas sobre funções racionais mas também exponenciais, como na resolução do problema 14:

Problema do mercado de ações

Fernanda diz a Pedro que, no mercado de ações, sabe-se que a rentabilidade das ações da empresa A é descrita pela lei $R_A = 4^t$ e da empresa B pela lei $R_B = 10.2^t - 16$, onde t é o tempo em meses a partir de 1º de janeiro de 2001. Pede-se:

(a) Os pontos onde as rentabilidades são iguais.
(b) Esboçar o gráfico de R_A e R_B.
(c) Qual a melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês?

Problema 14

A8.11: – Professora, como é que eu passo esse gráfico aqui para o papel?

Pe: – Reproduza aqui [no papel] **exatamente** o que está lá [na tela]...

A8.11: – Tá.

Pe: – ...que lá você tem tudo! Você tem que a curva vai até... menos... 16...

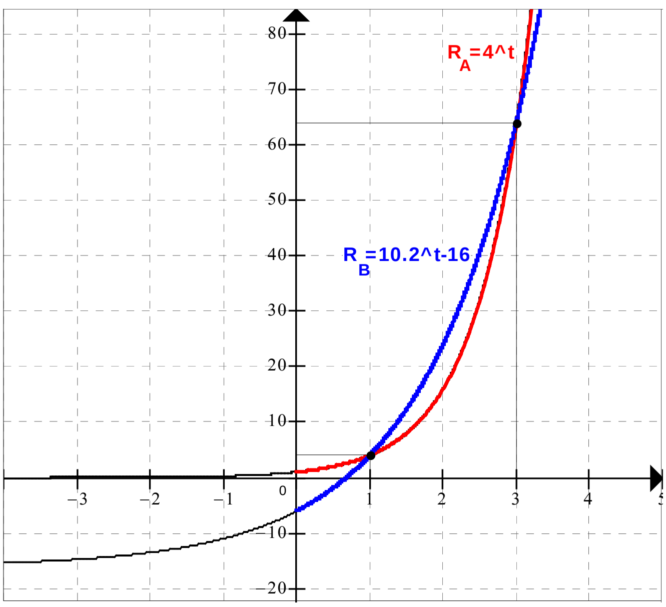


Gráfico 31

A8.11: – Então mas... eu marco o risco aqui na folha?

Pe: – Pode marcar!

O "risco" a que a aluna se referia era a assíntota horizontal da função $R_B = 10.2^t - 16$. Ela queria saber se era preciso representar a assíntota, também, ao esboçar o gráfico no papel. Mas estava fazendo confusão com sua localização:

A8.11: – Tá. E aqui também, marca o... Ah, não. Aqui vai ser no 16 positivo, não vai?

Pe: – No -16, aqui em baixo.

A8.11: – Não entendi.

Pe: – Essa $[R_A = 4^t]$ vai se aproximar do eixo x à medida que caminha pra esquerda. Aí [no computador] ela dá até a impressão que coincide com ele, mas nunca coincide, na verdade.

A8.11: – Mas é que a outra... não sei se tem assíntota lá...?

Pe: – A outra tem a assíntota no -16, que é exatamente esse número!

A8.11: – Mas, não tem que inverter o sinal?

Para determinar a assíntota vertical das funções do tipo $y = \frac{1}{x-a}$, a aluna invertia o sinal da constante que estava sendo somada à variável x e determinava, para este caso, que era x = +a. Ela, então, tentou fazer a mesma coisa para determinar a assíntota horizontal e da função exponencial. Mas a imagem do gráfico fornecida pelo *Winplot* não confirmava o que estava pensando. E antes que pudesse lhe explicar, ela mesma percebeu que seu raciocínio era válido somente para aquele tipo de função:

Pe: – Não. O que inverte o sinal é o outro...

A8.11: – De hipérbole?

Pe: – É.

A8.11: – Esse não tem que inverter nada de sinal...?

Pe: – Não.

Solicitei que a aluna esboçasse o gráfico da função $R = 10.2^t$. Utilizando a função *Traço* ajudei a aluna a ver que as imagens da função tendem a zero à medida que os valores de t tendem a valores negativos sempre menores:

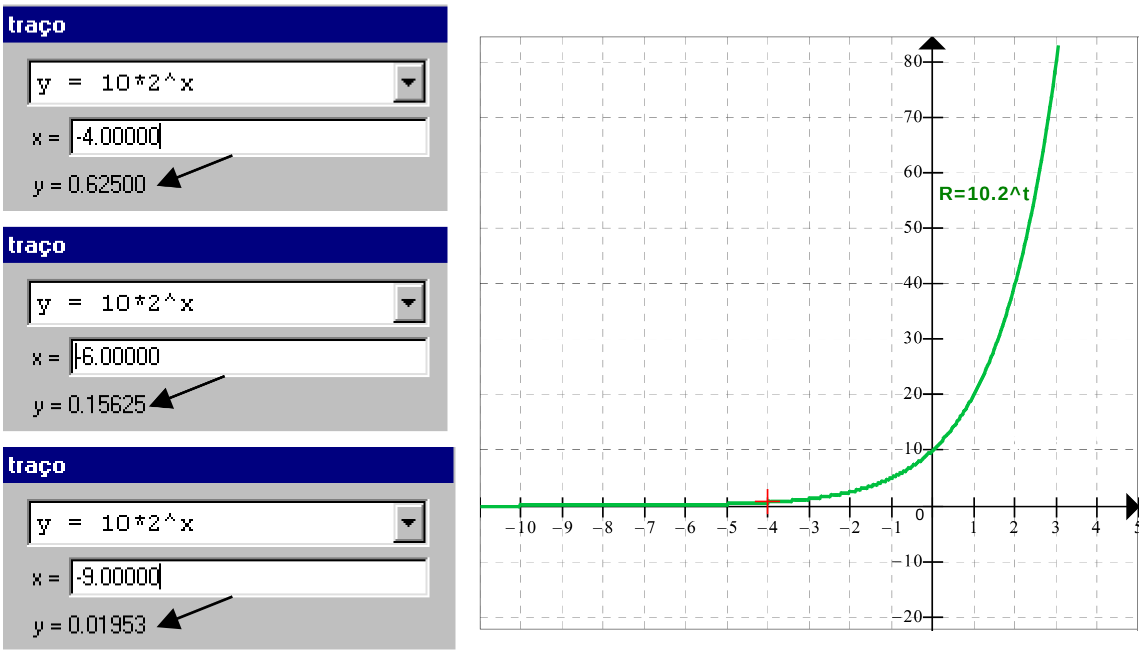


Figura 19

Pe: – Porque esse gráfico [$R = 10.2^t$] fica cada vez mais próximo do eixo x.

A8.11: – É mesmo.

E adotando o mesmo procedimento, a aluna percebeu que o gráfico de $R_B = 10.2^t - 16$ estava 16 unidades abaixo do anterior:

Pe: – Se você põe -16 [$R_B = 10.2^t - 16$], ele **desce** ...

A8.11: – <u>É. Ele desce para o -16</u>.

Assim como esta, vários alunos tiveram oportunidade, naquela aula de refletir sobre as assíntotas, as características e a posição dos gráficos das funções exponenciais no plano cartesiano.

Após este problema 14, e faltando pouco tempo para o encerramento daquela aula, o professor percebeu que não seria possível que os alunos resolvessem integralmente outro problema. Então entregou mais dois problemas aos alunos e disse que eram de tarefa, ou seja, que poderiam ser entregues na aula seguinte, mas que os alunos, que quisessem aproveitar o tempo que restava, poderiam começar a fazê-los naquele momento e aproveitar para esclarecer eventuais dúvidas.

Foi o que fez a aluna participante do diálogo a seguir, que é a mesma do diálogo anterior. E achei bastante significativa a sua fala ao me consultar sobre as assíntotas das funções envolvidas nesses problemas:

Conhecendo-se a função Custo Total e Receita Total dadas por $C_T = 4^{q+1}$ e $R_T = 8^{q^2-q}$, determinar: (a) O ponto crítico. (b) Os interceptos. (c) Esboçar o gráfico de C_T e R_T. (d) Análise econômica.

Problema 19

Conhecendo-se a função Custo Total e Receita Total dadas por $C_T = 2^q + 11$ e $R_T = 4^q - 1$, determinar: (a) O ponto crítico. (b) Os interceptos. (c) Esboçar o gráfico de C_T e R_T. (d) Análise econômica.

Problema 20

A aluna já observou que as funções do problema 19 não tinham as constantes somadas à exponencial, aquelas que provocariam a translação do gráfico paralelamente ao eixo das ordenadas (para cima ou para baixo), tais como na função R_B do problema 14:

A8.30: – Esses...esses aqui [$C_T = 4^{q+1}$ e $R_T = 8^{q^2-q}$], então, não vão ter porque eu estou me baseando por esse número.

Pe: – Pode ser que [a assíntota] coincida com o eixo x, igual à função 4 elevado a t, que vocês fizeram no trabalhinho; aquela vinha quase encostar no eixo x. A assíntota estava sobre o eixo x.

[...]

A8.30: – <u>Hum... Agora, esse daqui eu já posso me basear por esse número e por esse número</u>. [referia-se aos números 11 e -1, que aparecem no problema 20, da tarefa]

Pe: – Esse pode. Isso!

A8.30: – Só que não inverte o sinal.

Pe: – Não. E no caso de 4 elevado a t, se a assíntota coincide com eixo x, é como se você tivesse...quem, aqui? Que num...

A8.30: – <u>Zero</u>!

Pe: – <u>Zero. Isso mesmo</u>.

A8.30: – É.

A aluna entendeu que a função $R_A = 4^t$ é equivalente à $R_A = 4^t + 0$.

Pe: – O pontilhado [a aluna representava as assíntotas, no papel, por linhas pontilhadas] cai em cima do eixo x.

A8.30: – Certo. E quando ela é no zero não marca nada...?

Pe: – Não precisa, porque o pontilhado é em cima do eixo x.

A aluna retomou as funções do problema 20 e foi confirmando a localização das assíntotas:

A8.30: – <u>Aqui</u> [$C_T = 2^q + 11$] <u>vai ser no 11, passa um traço</u>...

Pe: – Isso.

A8.30: – ...<u>e no -1</u> [para $R_T = 4^q - 1$]; <u>passa um traço</u>.

Pe: – Isso.

A8.30: – Só isso...?

Pe: – É.

Considero este diálogo, realizado no mesmo dia de aula e com a mesma aluna do diálogo anterior, bastante relevante porque evidencia como a aluna avançou em sua compreensão sobre as assíntotas horizontais das funções exponenciais, do tipo das que estavam nos problemas. Este tipo de seqüência de diálogos com o mesmo aluno, ou com a mesma dupla de alunos, foi freqüente nas aulas em que realizei minha coleta de dados.

A função $R_T = 8^{q^2 - q}$, presente no problema 19, também trouxe oportunidades de discussão sobre o comportamento do gráfico no que diz respeito à monotonicidade ou o que é quase o mesmo, neste caso, o formato do gráfico:

A8.25: – Professora, só uma dúvida: como que eu escrevo isso aqui na máquina? Eu tinha colocado assim: 8... circunflexo...abre um parêntese... x... Eu fiz assim... Mas ele [o professor] falou que está errado.

A primeira tentativa da aluna foi digitar y = 8 ^ (x^2) - x.

A8.25: – ...depois eu fiz assim: eu coloquei outro parêntese aqui, no -x.

Em seguida ela digitou y = 8 ^ (x^2 - x). Mas estranhou o formato do gráfico:

A8.25: – <u>Mas dá parábola</u>?!

Quando o professor disse à aluna que havia erro no seu gráfico ela achou que mudando a disposição dos parênteses o formato do gráfico resultante seria bem diferente, mas não foi o que ocorreu. De qualquer modo os gráficos ficavam muito parecidos com parábolas. Os gráficos estavam apresentados na tela do computador:

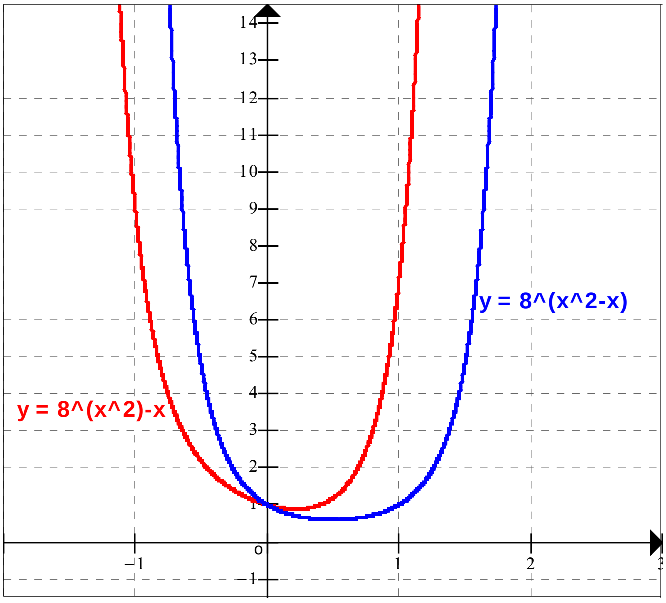


Gráfico 32

Pe: – Ah, então temos que pensar... [...] Eu acho que é assim [y=8 ^ (x^2 - x)] mesmo!

A8.25: – Eu também. Foi a única coisa que eu pensei.

Pe: – Será que está errado?

Comecei analisando o expoente quadrático da função:

Pe: – Essa parábola [$y = x^2 - x$] tem concavidade para cima e as raízes são zero e 1.

A8.25: – Hum...?

Ajudei a aluna a conferir isso substituindo os valores x = 0 e x = 1 na função $y = x^2 - x$:

Pe: – Se eu colocar zero no lugar do x, quanto dá o y?

A8.25: – Vai dar zero.

Pe: – E se eu colocar 1 no lugar do x, quanto dá o y?

A8.25: – Também dá zero.

Pe: – Isso. Então vamos voltar a essa função [$R_T = 8^{q^2-q}$]. Veja, se você põe zero ali [q = 0], dá oito elevado a zero, que é um. Olhe para o gráfico, ele está passando no (0,1). E se você colocar 1 [q = 1], também...

A8.25: – ... dá 1. Está certo.

Assim a aluna percebeu que o gráfico daquela função tinha mesmo que apresentar dois pontos de ordenada y = 1. Além de conferir numericamente, ela viu esses pontos no seu gráfico:

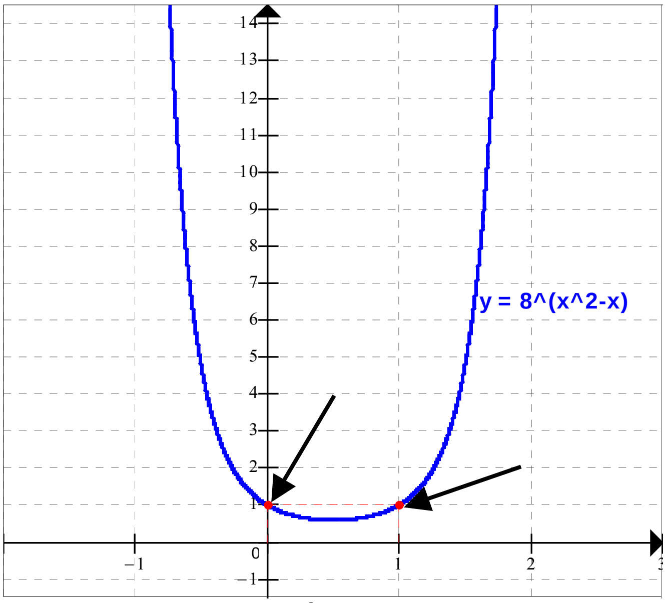


Gráfico 33

E, neste caso, a monotonicidade da função $R_T = 8^{q^2 - q}$ "acompanha" a monotonicidade da função quadrática que figura no expoente.

Pe: – E porque a parábola y = x^2 - x tem uma parte decrescente e uma parte crescente, então a exponencial de base 8 [maior que 1] também decresce e depois cresce...

A8.25: – Então está certo. É isso mesmo.

Pe: – É isso aí mesmo. Está certo.

Ao ouvir a gravação deste diálogo após a aula, percebi que ao final a aluna estava ainda um pouco relutante. Talvez não tenha ficado clara a relação entre a monotonicidade da função y = x^2 - x e a da função composta, de base 8, dada. De qualquer modo foi uma oportunidade ímpar, para esta aluna, presenciar um gráfico de função que ela estava considerando como uma função exponencial e que não é estritamente crescente ou estritamente decrescente, conforme estavam habituados.

Aliás, percebi na aula seguinte que tampouco o professor percebera estas características da função. No início dessa aula, quando tinham que entregar os problemas resolvidos, ainda na sala de aula, os alunos pediram para o professor "corrigir" o problema 19. Eles queriam saber se tinham acertado. Primeiro, o professor recolheu as folhas de quem tinha feito ou tentado fazer em casa e, atendendo à solicitação dos alunos, encaminhou-se à lousa e fez a correção de cada item:

(a) Ponto crítico

$R_t = C_t$

$8^{q^2 - q} = 4^{q+1}$

$(2^3)^{q^2 - q} = (2^2)^{q+1}$

$$2^{3q^2-3q} = 2^{2q+2}$$
$$3q^2 - 3q = 2q + 2$$
$$3q^2 - 5q - 2 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau resultante, determinou os valores de q:

$q_1 = 2$ e $q_2 = -\frac{1}{3}$ (não serve)

Como q significa quantidade e não poderia ser um número negativo, o valor $q_2 = -\frac{1}{3}$ foi descartado. Assim o ponto crítico P_c foi obtido a partir de $q_1 = 2$ e, também, registrado na lousa: $P_c = (2, 64)$.

O professor prosseguiu lembrando aos alunos que as funções exponenciais não interceptam o eixo x, por isso só determinariam as interseções com o eixo vertical:

(b) Os interceptos

$C_t = 4^{q+1}$ | $R_T = 8^{q^2-q}$

$q = 0 \Rightarrow C_t = 4 \Rightarrow A = (0, 4)$ | $q = 0 \Rightarrow R_t = 1 \Rightarrow B = (0, 1)$

Encaminhando-se ao item (c): Esboçar o gráfico de C_T e R_T, o professor chamou a atenção dos alunos para o fato de que à mão não iam conseguir um gráfico muito preciso; lembrou que havia pedido aos alunos que fizessem o gráfico no *Winplot*. Ele apresentou o seguinte esboço na lousa:

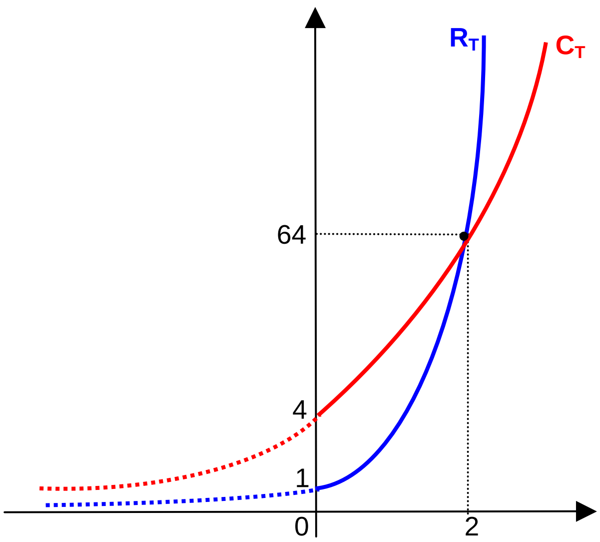


Gráfico 34

O próprio professor já havia chamado a atenção da turma para a impossibilidade de apresentar o gráfico com uma precisão satisfatória. Apesar disso e, ainda que se quisesse dar maior ênfase à parte localizada no primeiro quadrante (onde as funções de custo e receita fazem sentido), chamou minha atenção o fato de que o esboço apresentado pelo professor para a função receita não apresentava exatamente as características de monotonicidade que tinham gerado discussão com a aluna na aula anterior. Tal função não era estritamente crescente, como aparecia no esboço, mesmo considerada apenas no primeiro quadrante.

O fato de habitualmente considerarmos apenas valores inteiros para a variável independente com o intuito de facilitar os cálculos pode ter impedido o professor de perceber que em x = 0,5 o comportamento da função receita muda de decrescente para crescente. Ou, talvez, o professor não tenha mesmo desejado ocupar-se com tal nível de precisão naquele momento, por isso reafirmara aos alunos sobre sua recomendação de utilizar o *software* para obter o gráfico.

Foi curioso observar, inclusive, que nenhum aluno questionou o professor sobre o esboço que apresentou, nem mesmo os alunos que tinham feito o gráfico com o computador – possivelmente porque o professor já havia avisado que a precisão do gráfico feito à mão deixaria a desejar. De qualquer modo, considero importante destacar a grande vantagem que tiveram os alunos que realmente obtiveram o gráfico a partir do *Winplot*. A seguir está a imagem da resolução apresentada por um desses alunos que fizeram a tarefa:

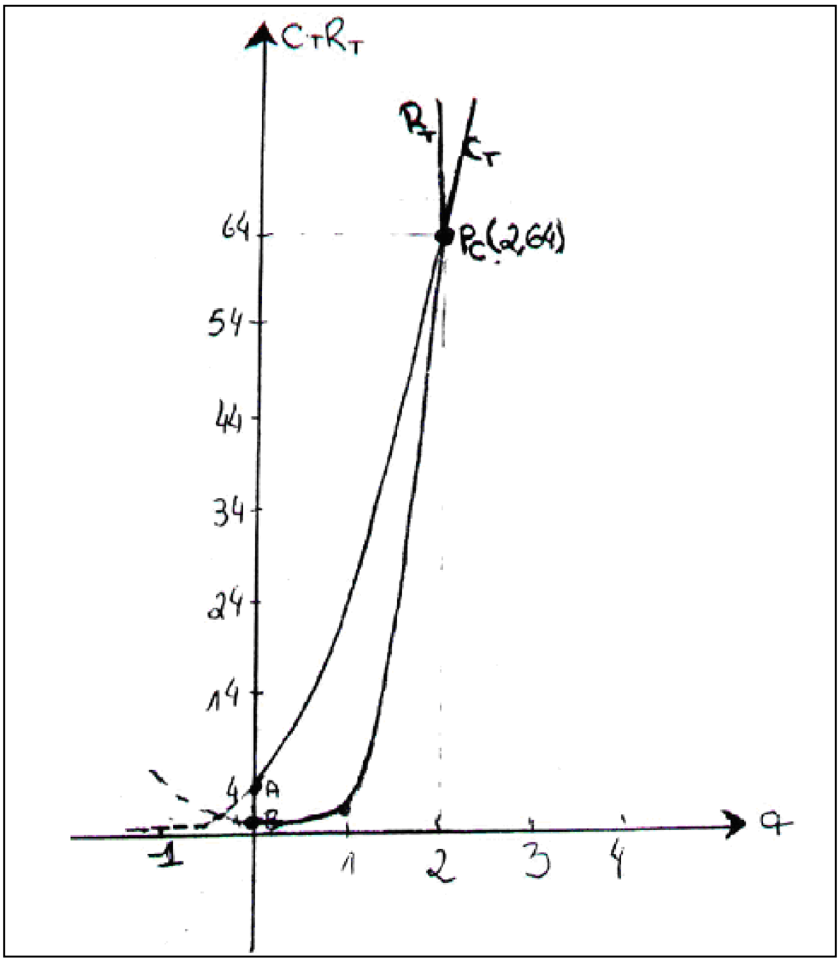


Figura 20

Os alunos, que não fizeram a tarefa, não tiveram conhecimento de como era, de fato, o gráfico daquela função. Estes, provavelmente, continuaram achando que os gráficos de funções com "a variável no expoente" são sempre estritamente crescentes ou estritamente decrescentes, como também achava a aluna participante do diálogo apresentado.

Com respeito às funções logarítmicas, o professor fizera, como de costume, a apresentação do conceito na sala de aula normal, quando apresentou a definição, calculou alguns logaritmos exatos, falou da função logarítmica e mostrou a posição relativa das curvas que representam a função logarítmica e a função exponencial de mesma base - simétricas em relação à reta y = x. Também apresentou algumas propriedades dos logaritmos, utilizando-as para resolver algebricamente algumas equações logarítmicas.

Na segunda parte daquele dia de aula, durante as atividades no laboratório, não faltaram, certamente, evidências de que os alunos têm realmente muitas dificuldades para entender o conceito de logaritmo, o que é o logaritmo neperiano, a relação entre o logaritmo e a exponencial, entre outras coisas. Porém, as situações em que estas evidências surgiram não eram características do ambiente "informatizado".

Especificamente, o aspecto que me chamou a atenção, no tocante à utilização do computador para a resolução de problemas, está relacionado à propriedade da mudança de base. Ela foi a última apresentada pelo professor na sala de aula e, naquele momento, ele fez questão de frisar que "na máquina" (computador) seria preciso utilizá-la porque o *Winplot* "só tem o logaritmo decimal e o logaritmo neperiano":

Pr: – Por exemplo, para desenhar o gráfico da função $y = \log_5 x$ nós teremos que digitar:

$$y = \log_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5} \qquad \text{ou} \qquad \log_5 x = \frac{\log x}{\log 5}$$

O professor, inclusive, registrou as igualdades acima na lousa. Porém, ao chegarem ao laboratório, ficou claro que os alunos não entenderam, de fato, qual era a importância disso ao utilizarem o *Winplot.*

As dúvidas surgiram quando os alunos se puseram a resolver o problema 21:

Considere a função

$$f(p) = \log_3(p^2 - 1)$$

(a) Faça o gráfico.

(b) Diga se a função é de oferta ou de demanda.

(c) Para que valores de p se tem $\log_3(p^2 - 1) = 1$?

Problema 21

A9.29: – <u>Professora, como é que eu digito esse 3</u>?

A aluna não sabia como indicar a base 3 do logaritmo ao digitar a expressão da função.

Pe: – Ele só entende logaritmo de base 10, que você digita *log*, e o logaritmo neperiano, que você digita *ln*. Então, quando você recebe um logaritmo de uma base que não é 10, você tem que escrever essa equação de outro jeito...

A9.29: – Certo...

Pe: – ... usando base 10.

A9.29: – Hã.

Pe: – Ou usando *ln*. Entendeu? E o jeito de fazer isso é transformar isso... dividindo a parte de cima...

B9.29: – ...dividido...

Pe: – ... pelo número de baixo.

Eu ia escrevendo no papel: $\log_3(p^2-1) = \dfrac{\log(p^2-1)}{\log 3}$

A9.29: – Certo. Ah, entendi.

Pe: – Entendeu? Aqui no computador, é como transformar raiz quadrada de x em x elevado a meio.

B9.29: – Certo.

Pe: – As duas são a mesma coisa, as duas expressões são equivalentes. Mas aqui não tem o desenho da raiz quadrada, a gente tem que fazer elevado a meio, não é assim?

A9.29: – <u>É. Eu entendi agora</u>.

Pe: – Aqui é a mesma coisa. Não tem o logaritmo com 3... então escreve desse jeito, utilizando outra base, mas as duas expressões são equivalentes.

Assim como estes, a grande maioria dos alunos precisou de explicação sobre esta propriedade. Mas a pergunta vinha sempre como a que iniciou este diálogo: "Professora, como é que eu digito esse 3?" ou

A9.10: – Não é essa aqui a fórmula?

Pe: – Quando você não põe nada ele entende que é base 10.

A9.10: – Ah, tá.

Pe: – Sempre que o logaritmo não tiver indicação da base vale a base 10.

A9.10: – <u>E se ele não fosse 10, como que eu colocaria</u>?

Conforme já comentei, o professor já havia explicado a propriedade na sala de aula, antes de irem ao laboratório. Aliás, ele estava mesmo tentando preparar os alunos para superarem uma dificuldade que ele estava antevendo que surgiria. Mas, naquele momento, a informação "entrou por um ouvido e saiu pelo outro". Vale frisar que, naquele momento em que o professor falava disso, os alunos estavam muito dispersos. A propriedade da mudança de base do logaritmo só fez sentido para aqueles alunos quando eles realmente precisaram dela. Era uma necessidade operacional, mas só quando essa necessidade surgiu foi que eles a entenderam e valorizaram.

Um outro aspecto que me chamou muito a atenção durante a resolução de problemas envolvendo funções logarítmicas, com o *Winplot*, emergiu da necessidade de resolver equações. No início da manhã, quando o professor estava fornecendo aos alunos as informações iniciais sobre logaritmos, ele resolveu, entre outras, a seguinte equação:

$$\log_3(x^2 - 1) = 1$$

A resolução algébrica foi registrada na lousa:

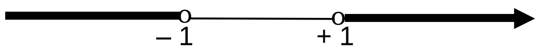
$$\log_3(x^2 - 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$$

Ele destacou que as duas soluções são válidas pois atendem à condição de existência do logaritmo:

$x^2 - 1 > 0$



O leitor deve observar que esta equação é quase igual à que foi dada no item (c) do problema 21. A diferença é que esta equação não está relacionada a funções de oferta ou demanda, como no problema, onde, por isso mesmo, a variável independente é p (e não x). O problema 21 foi proposto para ser resolvido no laboratório, logo após a aula em que o professor apresentou e resolveu a equação anterior com os alunos, na sala de aula. Novamente, aqui, problemas semelhantes são propostos na sala de aula normal e no laboratório. E novamente a atividade, ao ser realizada no laboratório, trouxe novidades.

Os alunos perguntavam como resolver a equação $\log_3(p^2 - 1) = 1$ utilizando o *Winplot*:

A9.17: – Como é que eu resolvo isso? Eu faço um...outro gráfico separado...?

O aluno já tinha feito o gráfico da função:

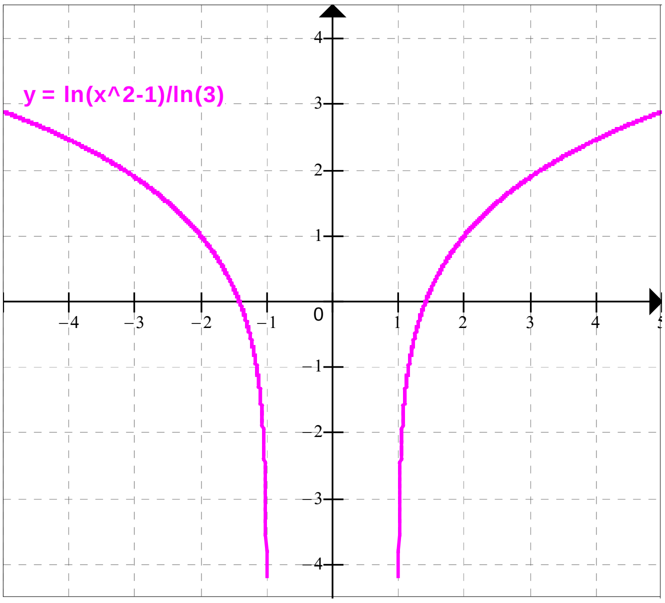


Gráfico 35

Pe: – Não precisa outro. Vamos entender o que é pra fazer aqui. Essa igualdade $\log_3(p^2-1)=1$, na verdade, contém duas funções. Essa é uma; e aquela, do lado direito do igual, é outra função.

Circulei cada um dos termos da equação na folha do aluno:

$$\log_3(p^2-1) \quad = \quad 1$$

A9.17: – Tá.

Pe: – Você já desenhou esse gráfico [$f(p)=\log_3(p^2-1)$], certo?

A9.17: – Hã, hã.

Pe: – Então desenha aquela $[y=1]$, agora. Quando você iguala duas funções o que é que você está procurando? Vamos lembrar da sala de aula. Lá na sala de aula, você se lembra quando o professor fazia o custo igual à receita? O que é que ele estava procurando?

A9.17: – O ponto crítico!

Pe: – Isso! **Ponto**, olha, **ponto** crítico. Você mesmo está dizendo: isso é um **ponto**. Tá? Então, lá, o que a gente fazia? Desenhava uma função, desenhava a outra ...

A9.17: – Hã, hã.

Pe: – ...e a gente descobria o **ponto** onde as duas se cruzam, o mesmo ponto obtido quando igualávamos as expressões das funções.

Voltei, então à equação do problema:

Pe: – Você já desenhou essa. Agora você vai desenhar a outra, e a resposta é a abscissa do ponto onde essa função cruza aquela função. Como é que digita aquela função?

A9.17: – Deixa eu pôr. y...

Pe: – Simplesmente põe o 1; y igual a 1.

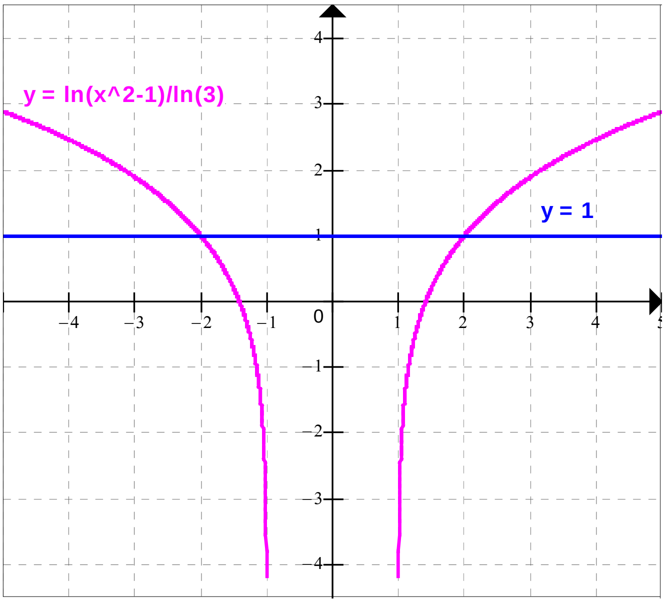


Gráfico 36

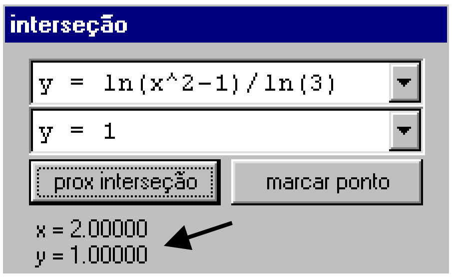
Pe: – Olhe lá. São esses pontos. O *Winplot* até calcula as coordenadas desses pontos. Você se lembra qual é o comando?

A9.17: – É *Interseção*.

Pe: – Isso. Vai lá pra você ver. Ele vai te dizer onde uma curva cruza a outra. Aí, olha, no x igual a ...

A9.17: – Dois.

Pe: – Isso. Marca o ponto e pede o próximo.



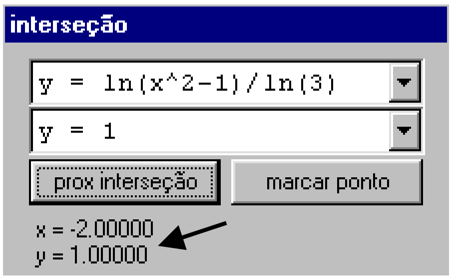


Figura 21

A9.17: – <u>Certo. Agora eu entendi</u>.

A uma certa altura daquela aula o professor deu esta orientação para a turma toda. Mas, como nem todos os alunos prestam atenção quando o professor tenta centralizar o comando das atividades e falar com todos ao mesmo tempo, tivemos que repeti-la muitas vezes naquele dia. A todo instante as duplas de alunos nos perguntavam como resolver a equação: "Como é que monta isso aqui?", "Isso é para resolver no papel?".

Situação semelhante ocorreu, nesta mesma aula, na resolução da equação proposta no problema 22:

> Considere a função
>
> $$f(p) = \log(2p+1)$$
>
> (a) Faça o gráfico.
>
> (b) Diga se a função é de oferta ou de demanda.
>
> (c) Para que valores de p se tem $\log(2p+1) = 1$?

Problema 22

A9.47: – Olha Norma, nós estamos na maior dificuldade aqui, pra conseguir esses exercícios.

Pe: – Eu estou vendo que vocês desenharam uma retinha aqui... desenharam e tiraram, desenharam e tiraram, desenhara e tiraram. Por que tiraram?

A9.47: – Porque achamos que não tinha...

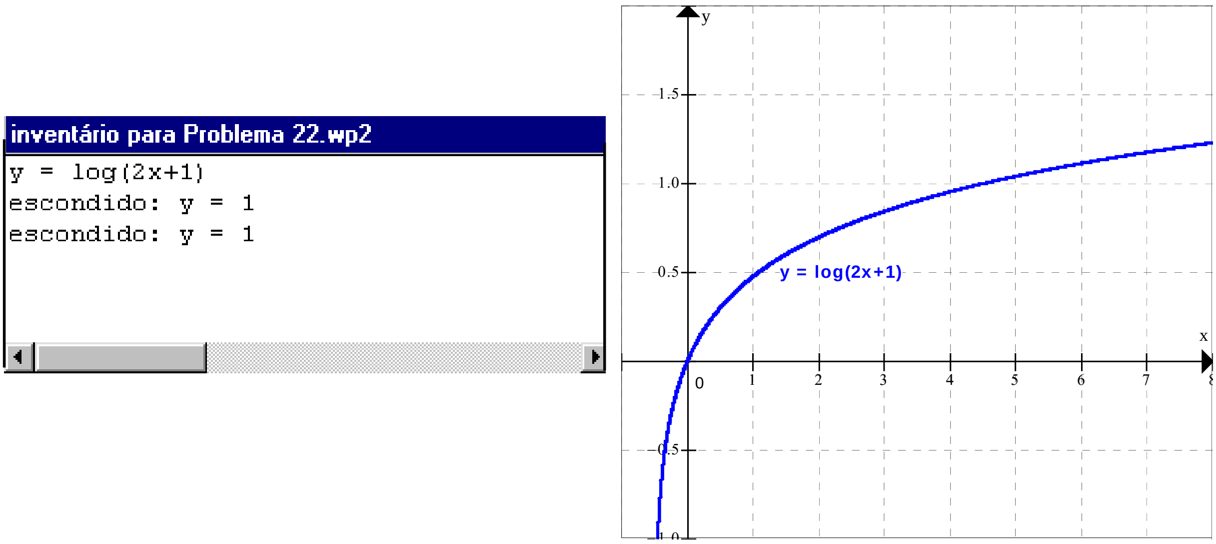


Figura 22

Pe: – Olhem, vou lembrar uma coisa pra vocês. Lá na sala de aula, quando a gente fazia a oferta igual à demanda...

Escrevi no papel, para as alunas: $q_o = q_d$.

Pe: – O que é que a gente estava procurando mesmo?

A9.47: – O ponto de equilíbrio.

Pe: – Isso! A palavra chave é **ponto**. Sempre que você iguala duas equações de funções você está achando um ponto, ou vários pontos, mas você está achando **pontos**.

A9.47: – Hã.

Pe: – Isso é uma equação de função $[f(p) = \log(2p+1)]$; e do lado direito do igual $[y = 1]$ é outra função. Tá? Você desenhou essa função, que dá esse gráfico; e do lado direito da equação... é outra função, é a reta.

A9.47: – <u>Ah, então estava certo</u>!

Pe: – É a reta.

A9.47: – Eu desenhei a reta lá no computador!

B9.47: – Hã, hã.

As alunas recolocaram a reta no *Winplot*:

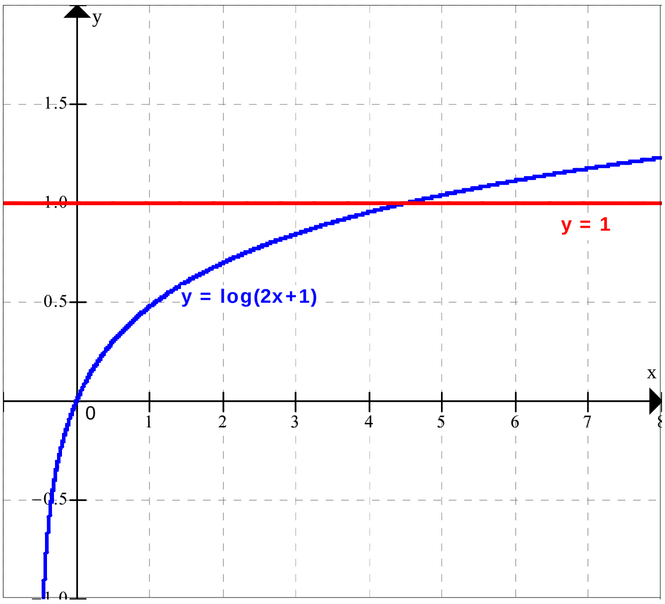


Gráfico 37

Pe: – Agora nós vamos fazer de conta que uma dessas fosse a oferta e que a outra fosse a demanda.

A9.47: – Ah, tá.

Pe: – O que é o **ponto** de equilíbrio? É esse ponto.

[pausa]

Pe: – Lembra disso? O ponto onde uma curva cruza a outra. Aqui é a mesma coisa. Você desenhou essa função e desenhou essa, o ponto onde as duas se cruzam vai dar a solução para aquela igualdade. Então, a resposta disso é você dizer que ponto é esse; aliás, quem é o p...

A9.47: – E quem é o y.

Pe: – A pergunta é " para que valores de **p** se tem $\log(2p+1) = 1$? Só está perguntando qual é o valor de p.

A9.47: – Entendi.

Pe: – Sempre que você resolve uma igualdade pode pensar: essa é uma função e essa é outra função.

A9.47: – Depois eu penso na igualdade.

Pe: – A solução da igualdade é um ponto.

A9.47: – Então tá.

Não justifica ficar apresentando mais diálogos semelhantes. Mas eles ocorreram, de fato, em grande número.

Na realidade, anotações sobre este aspecto estão presentes no meu diário desde o início. Aliás, já no primeiro dia de minhas observações os alunos resolveram um problema solicitando ponto crítico e gráfico. Durante todo o semestre o professor pediu para os alunos determinarem os pontos de equilíbrio e os pontos críticos. O que mudava era o tipo de função envolvida no problema: afim, quadrática, racional, exponencial, etc. Muitos problemas deste tipo foram resolvidos algebricamente, na sala de aula, e muitos foram resolvidos com o *Winplot*.

Antes desta aula sobre logaritmos, porém, a apresentação de cada função envolvida no problema se fazia de forma explícita e individual, ou seja, era dada cada uma das funções separadamente, como no caso dos problemas 19 e 20 (p.223), ou na forma usual de sistemas, como no problema 3 (p.215), nunca com a apresentação de uma equação.

Retomarei a resolução algébrica apresentada neste cenário para o problema 19 porque ela ilustra uma seqüência de procedimentos que os alunos realizaram muitas vezes durante aquele semestre. No problema 19, a fim de obter o ponto crítico, o primeiro passo foi igualar as expressões das funções R_t e C_t:

$$R_t = C_t$$

$$8^{q^2-q} = 4^{q+1}$$

Um trabalho de manipulação algébrica levou a uma seqüência de equações até chegar numa do 2º grau:

$$3q^2 - 5q - 2 = 0$$

cujas soluções $q_1 = 2$ e $q_2 = -\frac{1}{3}$ são, também, solução para todas as equações intermediárias e para a igualdade inicial, ou seja, 2 e $-\frac{1}{3}$ são os valores de q que tornam as funções R_t e C_t iguais. Desprezando o valor negativo, que não fazia sentido neste caso, por substituição em uma das duas funções o ponto crítico $P_c = (2, 64)$ foi obtido.

Assim, igualar duas funções dadas e daí obter equações e resolvê-las não trazia dificuldades - faziam isso com muita freqüência. O que os alunos não conseguiam era perceber o caminho inverso, isto é, ver uma equação como uma igualdade de duas funções, e este era o caminho necessário para resolver equações utilizando o *software*.

O grupo 9 de problemas do trabalho também tinha essa solicitação:

Exercícios Grupo 09

2. Resolver graficamente as seguintes equações exponenciais.

(a) $2^x = 16$	(b) $2^x = 32$	(c) $2^x = 64$	(d) $2^x = 128$	(e) $2^x = \frac{1}{16}$

Problema 23.2

E, tanto no trabalho (que estava sendo feito como tarefa) como nas atividades de aula observei a mesma coisa. No trabalho, apesar de já terem resolvido, algébrica e graficamente, sistemas em problemas anteriores (por exemplo, no Problema18), ao chegarem no problema 23.2 que solicitava, especificamente, a resolução de equações os alunos tiveram dificuldades. Vinham perguntar como fazer, no *Winplot*. Igualmente, nas aulas, embora tivessem trabalhado com pontos crítico e de equilíbrio inúmeras vezes, os alunos precisaram recorrer a um novo processo de resolver uma equação ao utilizarem o *Winplot*. É um novo processo porque é um processo que exige uma forma de entender as equações, diferente das que tinham vivenciado até então. Por isso, enquadro este aspecto no segundo tipo dos que estou considerando e apresentando neste cenário, isto é, como sendo um assunto novo para os alunos.

Agora vou avançar um pouco e, dos processos, passarei para uma análise das soluções obtidas algébrica e graficamente. Além das já analisadas, percebi muitas dificuldades, por parte dos alunos, em relacionar a solução obtida com pontos do plano cartesiano. Obtida a solução do sistema, algebricamente, pela igualdade das duas funções, o passo seguinte era, em geral, o de esboçar o gráfico e neste momento, novamente, percebi que os alunos vacilavam. A impressão que tenho é que os alunos não percebiam que aquele par ordenado obtido – como o par (2, 64) no caso do problema 19 – era, também, resultante do gráfico, ou melhor, da interseção das curvas que representam as funções. Os alunos esboçavam a curva de cada função e **"colocavam no"** desenho o ponto correspondente à solução obtida algebricamente, ao invés de **obtê-lo do** desenho. Tanto que, quando algum aluno se esquecia de registrar as coordenadas do ponto crítico no gráfico e eu perguntava que ponto era aquele, a partir **do gráfico**, muitos não sabiam responder, mesmo já tendo obtido a solução algebricamente. Eles não viam a relação entre o par ordenado obtido algebricamente e o ponto de interseção das curvas que representam as funções no plano cartesiano.

Apresentarei um episódio que ocorreu quando uma dupla de alunos me chamou para perguntar como fazer a análise econômica solicitada no problema 3. As funções dadas no problema eram

$$\begin{cases} q_d = -2 + \dfrac{100}{p+10} \\ q_o = 0{,}03\,p^2 \end{cases}$$

e os gráficos já estavam na tela do computador dos alunos:

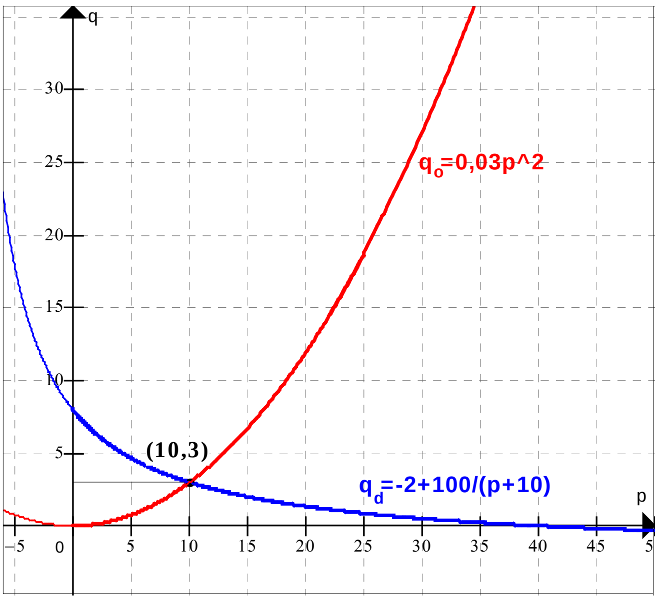


Gráfico 38

B5.23: – Professora, vamos entender agora a análise econômica. Não consigo entender.

Pe: – Vamos pensar assim: o que é que significa esse (10,3) que vocês descobriram, aqui, no gráfico?

B5.23: – Que ele é o ponto de equilíbrio.

Pe: – Mas o que é o ponto de equilíbrio neste caso? Explica pra mim.

A5.23: – Aqui neste primeiro quadrante…demanda... lucro...

Pe: – O 10 é valor do quê? p significa o quê?

A5.23: – Preço.

Pe: – De quê?

A5.23: – É...

Pe: – O que é que significa isso? Esse 10 é valor de quem, lá: de p, de q_o, ou de q_d ?

A5.23: – É de preço.

Pe: – Preço. E o 3?

B5.23: – Quantidade.

Procurei saber o que o outro aluno estava pensando:

Pe: – Você concorda?

A5.23: – <u>Quantidade...de oferta. Não...de demanda</u>!

B5.23: – <u>De oferta</u>.

Pe: – Olhem bem para o gráfico; está ...está escrito lá.

A5.23: – Eu sei que o 10 é preço...

Pe: – Qual curva passa nesse ponto, a demanda ou a oferta?

A5.23: – A demanda.

[pausa]

B5.23: – A oferta.

[risos]

Pe: – A oferta ou a demanda? O que é que o gráfico está mostrando? Qual das duas curvas está passando nesse ponto?

[pausa]

A5.23: – É essa aqui que está passando.

Pe: – E essa não?

A5.23: – Também está!

Pe: – As duas?

A5.23 e B5.23: – <u>As duas</u>!

Pe: – Ah, então o 10 é preço de oferta...

A5.23: – …e de demanda!!

B5.23: – Ah!

Pe: – É, as duas passam no mesmo ponto! Tá?

A5.23: – Então vale a mesma coisa.

Pe: – E vamos entender o que é isso. Se as duas passam no mesmo ponto, significa que quando o preço é 10, tanto a quantidade de oferta ...

A5.23: – …quanto a demanda são iguais.

Pe: – A quantidade de oferta é igual à quantidade de demanda. E qual é o valor dessas quantidades?

A5.23: – É 3. <u>Ah, entendi</u>!

B5.23: – São iguais.

Pe: – Não sobra...

A5.23: – nem falta produto.

Considero que este diálogo é bastante representativo do que estou querendo mostrar aqui: os alunos não relacionavam o ponto do plano cartesiano, interseção de duas curvas, com a igualdade de valores das funções, expressa pela equação, neste caso $q_o = q_d$, que tantas vezes eles montaram e resolveram algebricamente.

Também em alguns dos problemas do trabalho este aspecto apareceu. Por exemplo, no problema 18.5:

Exercícios Grupo 02

5. Resolver graficamente e analiticamente[48] os sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 3 \end{cases}$	(d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$
(e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$	(f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Problema 18.5

A aluna iniciou dizendo que não tinha conseguido resolver algebricamente alguns itens do problema. Quando ela me procurou, já tinha feito todos os gráficos no *Winplot*, e já tinha tentado resolver todos os sistemas algebricamente. Ela começou me mostrando as resoluções algébricas:

A5.30: – O (e) e o (f) eu não consegui. Eu fiz assim, ó, olha onde eu parei.
Pe: – E você tentou no *Winplot*?

Ela continuava "presa" às dificuldades algébricas:

A5.30: – Tentei, mas olha só: à mão vai zerar o x e vai zerar o y.

Tentei novamente levá-la aos gráficos para que relacionasse as duas formas de resolução:

Pe: – E o *Winplot*, o que ele disse disso?
A5.30: – O *Winplot*?
Pe: – O *Winplot* te conta porque você não conseguiu resolver lá.
A5.30: – <u>Conta</u>?
Pe: – O gráfico conta.

A aluna localizou o diretório com os gráficos que fizera:

A5.30: – Está aqui.

[48] A expressão “analiticamente” era a mais utilizada pelo professor. Porém continuarei a utilizar a expressão “algebricamente” pois é a que adotei desde o início da redação deste trabalho e é a que considero mais apropriada.

Pe: – Quando você resolve lá [no papel], as soluções são os pontos onde uma reta cruza a outra. Você reparou isso? Por exemplo, na letra (a)...

A5.30: – Aqui.

Eu ia lendo as soluções obtidas algebricamente pela aluna e ela ia olhando nos gráficos para conferir:

Pe: – Onde uma reta cruzou a outra? No ponto (3,2)?

A5.30: – Certo!

Pe: Que foi a solução que você achou resolvendo algebricamente.

A5.30: – Ah tá!

Pe: – Aqui [no item (b)] também?

A5.30: – Certo!

Apontei para as equações do item (e) que a aluna tinha no caderno, já com a variável y isolada:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \\[2ex] y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Pe: – Essas duas retas são o que?

A5.30: – Paralelas.

Pe: – Quando elas vão se cruzar, em que pont...

A5.30: – Nunca.

Pe: – Por isso você não conseguiu resolver analiticamente. Você está procurando, aqui, qual é o ponto onde essa reta cruza essa, e elas nunca se cruzam. Portanto o sist...

A5.30: – Então eu posso escrever isso?

Pe: – ...o sistema não tem solução.

A5.30: – Ah, tá.

A aluna foi, então, olhar como estavam as retas que representavam as expressões dadas no item (f), onde ela também tinha dúvida:

A5.30: – E o (f)? No (f) a retas se encontraram no (0,0).

Pe: – E ali [no papel] não deu?

A5.30: – Aqui ia zerar o x. Aí ia ficar -19 y igual a zero...

Pe: – Então o y também dá zero, não dá?

A5.30: – Dá. Isso que eu estou falando, que não existe! Vai dar zero, (0,0)!

Pe: – Existe sim, e está certo.

A5.30: – Aí, eu não preciso escrever nada!

Pe: – Achou o ponto! É (0,0)! É o ponto mesmo, olha lá, o *Winplot* mostrou!

A5.30: – É mesmo. Então isso eu escrevo aqui.

Este episódio também mostra que os alunos não relacionam a solução obtida algebricamente com a solução obtida graficamente. Vários alunos, ao apresentarem as soluções do problema 18.5 no trabalho, mostraram somente as retas sem destacar o ponto de interseção que era, efetivamente, a solução, muito embora grande parte desses alunos tivesse apresentado a solução correta obtida algebricamente.

Idealizei o seguinte esquema para tentar entender, afinal, o que estava acontecendo:

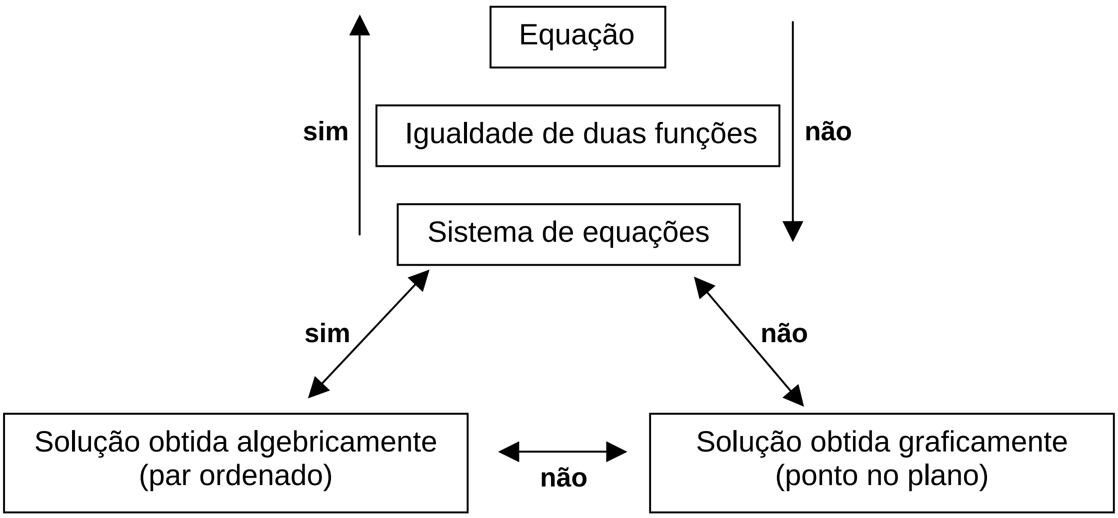


Figura 23

Ele resume a forma como olhei para os dados apresentados na última parte deste cenário e a forma como entendi o significado desses dados. A passagem de um sistema de equações para uma igualdade de funções e desta para uma equação ou conjunto de equações era feita de forma bastante natural pelos alunos, por isso o "**sim**" na seta que representa essa passagem. Porém, os alunos **não** tinham uma clara compreensão de que uma equação poderia ser resolvida como uma igualdade de funções, como se fossem dadas num sistema. A passagem para a obtenção da solução do problema, ou seja, a sua resolução podia ser feita por estes alunos, que agora estavam de posse de um *software* gráfico e de acordo com as possibilidades oferecidas pelo professor, de duas maneiras: algebricamente ou graficamente. A resolução algébrica levava os alunos a uma solução dada por um par ordenado, a qual era feita, também, sem dificuldades por eles. Por outro lado, **não** foi com a mesma facilidade e naturalidade que esses alunos apontavam um ponto (ou mais de um), interseção das curvas que representavam as funções, como a solução gráfica deste mesmo problema. Tampouco havia uma clara associação entre o par ordenado (solução pelo processo algébrico) e o ponto no plano cartesiano (solução pelo processo gráfico)

Finalmente, chamo a atenção do leitor para o fato de que as setas marcadas com **não** são as que estão, de algum modo, ligadas ao processo gráfico de resolver sistemas (ou equações). Mesmo aquela que indica o sentido da "equação" para a "igualdade de funções" e para o "sistema" considero, também, relacionada ao processo gráfico pois a necessidade de tal processo foi decorrente da presença do computador e, especificamente, do *software* gráfico *Winplot* mediando as atividades de resolução de problemas. O sentido inverso, do "sistema" para a "igualdade de funções" e, daí, para a "equação" estava sendo realizado não só desde o início do curso por esses alunos – em Matemática I os alunos não utilizavam o computador – como desde o início de sua vida escolar.

5.3.2.2 - LIMITAÇÕES

Ao analisar o episódio apresentado sobre o problema 19, envolvendo a função $R_T = 8^{q^2 - q}$, percebi que eu poderia ter explorado melhor a questão da monotonicidade ou mesmo outros aspectos relativos a outras características do gráfico da função como, por exemplo, os extremos. Além disso, na ocasião em que este problema foi dado aos alunos e estes fatos ocorreram, percebi que os problemas, em geral, propostos àqueles alunos continham poucas funções compostas como estas, que não são usualmente empregadas e conhecidas pelos alunos.

O assunto relativo às assíntotas, também não foi explorado em outras funções, a não ser nas racionais e exponenciais.

Uma outra limitação que percebi neste cenário refere-se a que estas reflexões sobre comportamento do gráfico, sobre domínio e sobre as assíntotas não foram compartilhadas com toda a turma no momento da aula. Como já frisei durante a apresentação dos dados, o atendimento era feito de modo essencialmente individualizado. Eu e o professor sempre trocávamos idéias e impressões, durante as aulas e depois delas; o que observava nas aulas e nos alunos, durante a coleta de dados, comentava com ele. Mas não cheguei a sugerir que colocasse estas questões para discussão com a turma toda. E acho que ele também não se deu conta disso, além de que ele sentia dificuldade em obter a atenção de toda a classe nas aulas de laboratório.

5.3.2.3 - AVANÇOS

Penso que a própria natureza deste cenário e todo o conjunto dos dados que ele traz evidenciam como os alunos cresceram no tocante ao conhecimento matemático. A forma como iniciavam os diálogos perguntando: "Esse aqui, a fórmula não é isso? Tem erro na fórmula?", "Cadê esse negócio de assíntota aqui?", "Como é que eu resolvo isso?" ou "Nós estamos na maior dificuldade aqui." sugere que lhes faltavam recursos para monitorar eficientemente sua resolução do, ou mesmo para resolver o, problema. Muitos alunos pedem este tipo de ajuda: "Professora, está certo até aqui?" ou "O nosso gráfico está certo?". É certo que, à medida que entendem melhor o conteúdo de que trata o problema e recorrem ao conhecimento deste conteúdo, os próprios alunos ganham mais autonomia e condições de realizar este monitoramento. O que percebi é que as possibilidades visuais e características do *software* gráfico que estavam utilizando tiveram papel decisivo na suscitação e na solução de questões relacionadas ao conteúdo envolvido e, portanto, no aprofundamento do conhecimento desse conteúdo.

Quanto aos episódios envolvendo a relação entre sistemas, equações, funções, e entre as soluções algébricas e gráficas, aspectos que foram apresentados no final do cenário, entendo que representam evidências de que este assunto pode ser considerado, em aula, sob um novo ponto de vista. O emprego do *software* gráfico trouxe a possibilidade de aprofundar antigas e criar novas relações, além de ampliar as compreensões sobre resolução de sistemas de equações.

5.3.2.4 - TRANSCENDENDO OS DADOS E APONTANDO POSSIBILIDADES

A passagem envolvendo a função $R_T = 8^{q^2-q}$ nos remete à possibilidade de incluir nos problemas expressões de funções não usualmente trabalhadas na ausência de recursos informáticos, como algumas funções compostas, bem como as resultantes de outras operações que não a composição, como a soma, a diferença, etc. O *Winplot* possui uma janela, denominada *Combinações*, com essas opções e que poderia ser utilizada para mediar essas atividades. E, novamente aqui, socializar com os colegas as informações adquiridas e conhecimentos construídos seria bastante enriquecedor.

Também vejo nos dados que compõem este cenário, como ocorreu em outros, fortes razões para propor problemas que estimulem os alunos a pensar, buscar resultados e tirar conclusões a partir de gráficos. Também há no *Winplot,* uma opção denominada *Adivinhar*, em que gráficos de funções são mostrados sem que seja exibida sua expressão algébrica, e que poderia ser explorada neste sentido. Poderíamos, ainda, ir além, tentando variar os problemas de modo que os alunos vivenciassem processos, ora algébrico, ora gráfico, ora numérico, de resolução. E, até, propor que exatamente o mesmo problema fosse resolvido de diversas maneiras.

5.3.3. O PROFESSOR EM FOCO E O FOCO DO PROFESSOR

Este é um cenário em que o professor ocupa posição central. Serão mostrados aqui dados em que ele manifestou, explicitamente (verbalizando seus pensamentos) ou implicitamente (através de suas atitudes em aula), suas idéias, concepções e impressões sobre a prática que estava experimentando de associar a utilização do *Winplot* à resolução de problemas para ensinar Matemática aos seus alunos. A partir daí, o professor tomava decisões e configurava sua prática, o que significa que mantinha uma atitude constante de avaliação das atividades de ensino.

5.3.3.1 - CENÁRIO 6

A opção por incluir esta seção voltada ao professor resulta da forma como vejo a avaliação, que é o subtema ao qual está relacionado este cenário. Acredito que as características, as implicações e a eficácia das atividades de sala de aula não devem ser determinadas a partir de informações oriundas só do aluno. Adotando uma visão de que a avaliação deva ter um caráter sistêmico, entendo que não poderia excluir o professor de minhas análises. Suas ações condicionam fortemente as dos alunos; o professor é uma engrenagem essencial do sistema que constitui o trabalho de sala de aula. Desconsiderar sua forma de pensar e de conceber o ensino seria uma forma reducionista, demasiado incompleta, de tratar a avaliação. Neste cenário apresentarei episódios em que o professor reflete sobre o que está percebendo em suas aulas e em seus alunos e adota condutas específicas a partir dessas percepções. Essas condutas condicionaram fortemente a configuração de minha investigação.

Resultam, daí, implicações metodológicas para minha pesquisa no sentido de que acredito, também, que meus dados ficarão fortalecidos com a presença da figura do professor nas análises, uma vez que esta presença também ratifica a triangulação dos dados. Por essas razões embora meu olhar, nesta pesquisa, esteja voltado aos alunos, neste cenário, mesmo breve, o professor estará em destaque. Os dados que serão apresentados aqui foram retirados, principalmente, do diário de campo e da entrevista feita com o professor algum tempo depois de encerrada a coleta de dados.

Entre as coisas que muito me chamaram a atenção, durante minhas observações, estavam as reações do professor e, conseqüentemente, as decisões que tomou ao perceber que, ao levar os alunos ao laboratório de Informática, dificilmente conseguia centralizar o comando das atividades realizadas por eles ou mesmo, fazer-se ouvir pela classe toda (ou, pelo menos, quase toda). Às vezes o professor se punha à frente da classe para tentar orientar a turma sobre algum aspecto particular que estava gerando dificuldade para muitos alunos mas, de fato, poucos o ouviam. Envolvidos na resolução dos problemas, os alunos conversavam – cada um com seu parceiro na dupla ou entre as duplas – e, em pontos diferentes do trabalho, realmente não davam atenção ao professor. Em alguns momentos o professor mostrou-se, inclusive, consideravelmente desgostoso com isso. No 3º dia de aula, ele disse aos alunos:

Pr:– Pessoal, a todo instante tenho que falar tudo de novo! Vou falar pela última vez! Se vocês não me ouvirem, paciência!

[...]

Pr:– Todos que agora não estão interessados, daqui a pouco vão me chamar para dar a mesma explicação?

No 5º dia:

Pr:– Pessoal, eu vou corrigir aluno por aluno? Quando vocês fazem [...] Não vou falar de novo isso.

Em função disso, o professor adotou a seguinte conduta: quando queria "falar" para toda a turma, ele o fazia na sala de aula, antes de se dirigirem ao laboratório. Em diversas ocasiões, inclusive, ele dava orientações sobre o *software* e sobre sua utilização, ainda quando estavam na sala de aula. Ele tentava preparar os alunos para o que iam ter que fazer no laboratório ou para as dificuldades que iriam encontrar ao resolverem os problemas no computador. Numa das aulas em que isso ocorreu, ele falou aos alunos que a expressão que deveria ser utilizada para o módulo é *abs(x),* e para a raiz quadrada é *sqr(x)*. Também falava sobre algumas opções básicas que o *software* possui para obter as raízes de funções (*Um* $\rightarrow$ *Zeros*) e para obter as interseções entre duas curvas (*Dois*$\rightarrow$*Interseções*), como na figura a seguir, entre outras coisas.

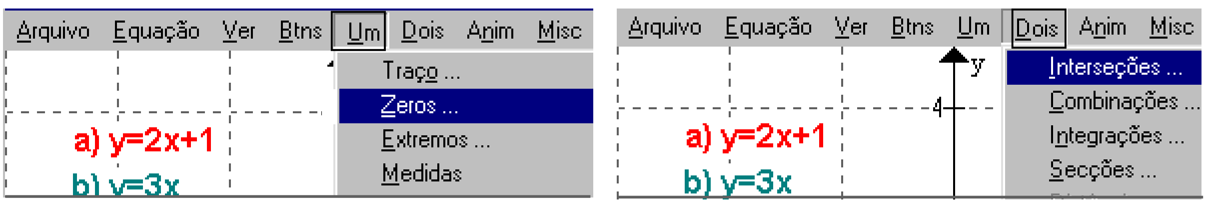


Figura 24

Eram freqüentes frases como:

Pr:– Aqui na sala de aula o gráfico é a última coisa que fazemos mas, na máquina, vocês irão fazer o caminho inverso: primeiro fazem o gráfico e depois as outras coisas.

Algumas vezes ele fornecia este tipo de informação aos alunos no laboratório, mas antes de apresentar o problema com o qual os alunos iriam trabalhar. Ou seja, ele fornecia orientações gerais na tentativa de ajudar os alunos, fornecendo a eles os pré-requisitos para o emprego do *Winplot* na resolução dos problemas.

A este respeito foi marcante o 9º dia de aula daquele semestre, fato que já foi incluído no cenário 5, mas que aqui será tratado sob outro ponto de vista. No primeiro horário, na sala de aula, o professor havia falado sobre os logaritmos, sobre suas propriedades, sobre a função logarítmica, e encerrou aquela parte da aula explicando a propriedade da mudança de base. Chamou a atenção dos alunos para o fato de que teriam que utilizá-la no *Winplot* para trabalhar com funções logarítmicas que tivessem base diferente de 10 e que não envolvessem logaritmo neperiano. Entretanto, ao iniciar a segunda parte da aula, no laboratório, os alunos já não sabiam como digitar $f(p) = \log_3(p^2 - 1)$ no *Winplot*. Comentei com o professor que os alunos não tinham entendido o que ele havia falado (minutos antes) sobre isso, pois muitos já estavam me perguntando como fazer:

Pe:– Vai ser preciso explicar de novo isso aqui [$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$], senão nós vamos ter que ensinar um por um, sobre a mudança de base.

Pr:– Eles **já** estão perguntando?

Pe:– Já. Quatro duplas já perguntaram. [E a aula mal tinha começado!]

A eficácia dessas ações realizadas pelo professor é questionável. Falar do *Winplot* quando os alunos não estavam diante do computador ou oferecer alternativas de procedimento para resolver situações que os alunos não estavam, ainda, presenciando, não fazia sentido para aqueles alunos. Especialmente porque eram novatos na utilização não só daquele *software*, mas do computador, na resolução de problemas matemáticos. Mas era esta a alternativa que aquele professor via, pelo menos naquele momento, para tentar fazer com que o maior número possível de alunos o ouvisse.

A percepção destes aspectos, pelo professor, condicionou, inclusive, sua metodologia de ensino como um todo. Ao iniciar a coleta de dados eu já sabia que a metodologia de ensino adotada pelo professor era o ensino de Matemática via resolução de problemas. Embora já tenha apresentado no capítulo 4, do contexto, considero procedente repetir aqui o que o professor falou, na entrevista, sobre a metodologia de ensino que utilizava:

> Pr:– A metodologia que nós aplicamos sempre foi no mesmo estilo: eu começo um tópico da aula com um problema que estimula os alunos a pensar, a discutir. Ele é um **gerador da teoria** Matemática que vai surgir. Por exemplo: esse primeiro semestre [refere-se ao 1º semestre de 2002] nós dedicamos a funções. Então, para conseguir o conceito de função nós propusemos quatro problemas introdutórios que ao final de sua aplicação nós pudemos, então, obter os conceitos da teoria de funções: o domínio de

> função, imagem...E começamos, então, a apresentar modelos de funções, que são as funções elementares. Então, a partir dos problemas, nós encontramos a teoria Matemática e apresentamos a Matemática que estava envolvida. Depois disso é que nós fazíamos problemas aplicativos.

Ou seja, ele partia de problemas geradores para introduzir novos conteúdos. Estes problemas eram discutidos e resolvidos, pelos alunos e pelo professor, antes da formalização do conteúdo matemático propriamente dito. Eu mesma presenciei aulas desse tipo durante minha coleta de dados. Foram aulas sobre as funções racionais, exponenciais e logarítmicas; sobre regressão linear, sobre seqüências e sobre derivadas.

Ocorre que, ao longo daquele semestre, observei, também, que o professor nunca introduzia um novo conteúdo no laboratório, mas sempre na sala de aula. Então, por ocasião da entrevista, questionei o professor sobre isso:

> Pe:– Do que observei no semestre em que coletei meus dados, você sempre introduzia um novo conteúdo, um novo conceito, na sala de aula normal.
> Pr:– Isso.
> Pe:– Eu não me lembro de você ter tido esse procedimento no laboratório, nenhuma vez. É isso mesmo?
> Pr:– A idéia é a seguinte: ao longo dessas aulas, de laboratório, nós presenciamos que o aluno tem uma dificuldade imensa em observar as informações dadas pelo professor. Ele não consegue ouvir o professor! Tem-se a impressão de que ele fica encantado com a máquina e ele abandona o professor lá na frente. E o professor pode dar a informação que quiser que ele não está ouvindo não; ele não participa. Então, a gente tem um trabalho muito grande na aula [com computador] porque, mesmo que uma dúvida seja tirada em público [naquela aula], eles chamam pra repetir a mesma pergunta pra gente, quase que aluno por aluno. Por isso eu faço a introdução de um novo conteúdo na sala de aula [normal], com problemas; depois de obtido, então, o conceito matemático, depois de a gente ter feito certas observações que vão ocorrer lá na aula [no laboratório], aí que a gente vai pra sala de computação. Tem que preparar os alunos antes...de entrar na sala de computação.
> [...]
> Pe:– Ou seja, no momento de introduzir um conceito, um conteúdo, a presença do professor e a atenção do aluno no professor... é importante...?
> Pr:– Isso.
> [...]
> Pr:– No laboratório eles ... não prestam mais atenção em nada, não sabem nem o que está acontecendo mais.
> Pe:– Então acho que você já respondeu à pergunta que eu ia te fazer... eu ia perguntar se alguma vez você já introduziu um conceito matemático no laboratório...?
> Pr:– Não. Nenhuma.
> Pe:– Você evita, mesmo, isso...?
> Pr:– Isso. Evito.

De fato, as aulas em que ele apresentou um novo conteúdo à turma foram sempre a partir de problemas, mas era ele quem dirigia as atividades. Ele ia questionando a turma ou algum aluno, ia conversando e solicitando sugestões e idéias, mas sempre estava no comando. Portanto, este professor considerava que precisava ter o comando das ações quando introduzia um novo conteúdo e, no laboratório, ele não conseguia isso com os alunos. A dispersão que ele percebia nos alunos impedia que ele lhes apresentasse algum novo conteúdo quando estavam diante do computador.

Uma das coisas que me causava bastante estranheza era que, quando estávamos na sala de aula, no primeiro horário, os alunos participavam menos da aula, quase não faziam perguntas; às vezes ficavam muito dispersos, às vezes conversando, exigindo que o professor chamasse a atenção, mesmo quando a aula era sobre um assunto novo. O professor percebeu isso e, inclusive, disse que "eu devia registrar isso no meu trabalho". Mas quando íamos para o laboratório, os alunos perguntavam muito, solicitavam muita ajuda, manifestavam-se e apresentavam muitas dúvidas. O professor percebeu alguns ganhos com isso, apesar das dificuldades anteriormente apontadas:

> Pr:– Eu diria que... como professor, hoje em dia, depois de ter conhecido a resolução de problemas, fiquei muito contente. Acho que estou conseguindo fazer com que os alunos tenham uma melhor aprendizagem com esse modelo. Acho que eu tenho, agora, um aumento de...de aprovação. Os alunos estão sendo mais aprovados. E noto que... ao trabalhar com computação, o aluno fica mais íntimo do professor, o aluno tem mais contato com o professor. Ele sabe comentar mais com o professor as dificuldades que ele tem. Mesmo na sala de aula, no trabalho em grupo, o aluno... passa a confiar mais no professor, ele fica mais íntimo desse professor...
> Pe:– Por que você acha que isso acontece?
> Pr:– ... ele dá mais palpite, ele tem mais comunicação, e assim por diante. Então... estar trabalhando com resolução de problemas e com o computador, me deixa muito mais contente. Acho que os alunos também me vêem como um professor mais moderno. E eles vêem que eles estão aprendendo a construir a Matemática, ao invés de receber aquela Matemática pronta.

Um outro aspecto que emergiu fortemente deste contexto foi, como se costuma chamar normalmente, "o andamento do programa". A introdução das aulas com a utilização do *Winplot* causou uma diminuição no ritmo de desenvolvimento dos conteúdos previstos no conteúdo programático da disciplina, em relação aos semestres anteriores, em que o professor ministrava todas as aulas sem o computador. Ele estava nitidamente preocupado com isso e manifestou essa preocupação várias vezes a mim.

Algumas situações relacionadas a isso merecem ser comentadas e outras reforçadas (pois já foram incluídas em cenários anteriores). No início do semestre, quando estava iniciando a coleta de dados, o professor sugeriu que eu preparasse alguns problemas para serem propostos aos alunos e resolvidos com o *Winplot*. Entretanto, os alunos demoraram mais do que o professor supôs para resolvê-los. Algumas razões para isso podem ser facilmente apontadas, outras são mais subjetivas; não se trata de analisá-las aqui. O fato é que em uma dessas aulas iniciais no laboratório, o professor tinha trazido em folhas impressas, como fazia habitualmente, cinco problemas e os alunos só conseguiram terminar um, o primeiro que foi entregue. Isso, claramente, preocupava o professor. Numa de nossas conversas, após o encerramento da aula, o professor disse:

Pr:– Acho que nós não podemos complicar os problemas. E temos que usar enunciados mais simples, senão os alunos não entendem.

A preocupação de adequar os problemas ao nível de compreensão dos alunos era real e explícita e, inegavelmente, os problemas elaborados pelo professor tinham uma linguagem bastante concisa. Alguns dos problemas que propus foram reformulados e, após os alunos terem resolvido os que preparei nesta primeira oportunidade, as outras aulas foram realizadas com problemas elaborados pelo próprio professor.

Com a prática de falar do *Winplot* ou ensinar, em sala de aula, procedimentos que os alunos teriam que adotar no laboratório, o professor tinha, também, o intuito de ganhar tempo. Ele sabia que, no laboratório, teria que falar a cada aluno, ou a cada dupla, e isso toma tempo. Até a sua opção de colocar em prática o ensino via resolução de problemas somente na sala de aula normal estava, também, relacionada a esta preocupação:

> Pe:– Os conteúdos matemáticos, então, você acha melhor introduzir sem computador...?
> Pr:– Sem computador, porque a gente não tem tempo, o tempo no laboratório... na hora que eles estão interpretando demora mais, eles podem ficar tentando... E muitas vezes, no computador, eles estão em duplas e um [aluno]... ou os dois estão operando o computador, é um que está manipulando, os dois dando palpite... E me parece que a preocupação deles fica mais com a máquina do que com o próprio problema.

Considero legítima a preocupação com o cumprimento do programa. Atender, tanto quanto possível, às exigências legais faz parte da atividade docente e, para isso, é preciso tomar decisões. Uma posição bastante marcante, assumida por parte deste professor, em função deste aspecto, foi a decisão de não mais levar os alunos para o laboratório a partir de um certo momento daquele semestre. A turma teria poucas aulas mais, até o início do período de avaliações finais, provas substitutivas, exames, etc. Então o professor resolveu assumir efetivamente o comando das atividades a fim de ganhar tempo, e as aulas sobre regressão linear, seqüências e noções de limites, e derivadas foram realizadas integralmente na sala de aula.

Quantidade e qualidade são elementos que, de fato, se fazem presentes nesses dilemas e nos momentos de decisão sobre o direcionamento e sobre o redirecionamento das atividades de ensino. E não me refiro à qualidade no sentido da possibilidade de ser bom ou ruim, melhor ou pior, mas no sentido do tipo de atividades que o professor pode propor e de experiências que pode proporcionar aos alunos. Até mesmo a quantidade de problemas que os alunos deveriam resolver numa aula, considero bastante relativo. Se em algumas aulas o professor se surpreendera com a pequena quantidade de problemas que os alunos faziam, em outras os alunos nos surpreendiam com um desempenho além do esperado:

Pe:– É...você está vendo? Um exercício pra eles [os alunos], agora, é pouco, na aula.

Pr:– É.

Pe:– Eles estão espertos, já!

Pr:– Eu achei que eles iam aproveitar, né, pra fazer os outros [da tarefa].

Pe:– É; mas não fazem isso. Eles vão embora.

Pr:– É assim mesmo!

Pe:– Eles estão craques... rapidinho eles fizeram o gráfico. Tiveram mais dificuldade foi pra interpretar.

Por outro lado, o trabalho Aplicativos de Matemática continha uma grande quantidade de tarefas a serem realizadas pelos alunos, sem representar, na minha opinião, proporcional avanço no tocante ao aprofundamento ou à ampliação das compreensões sobre os conteúdos envolvidos nos problemas. O próprio professor reconheceu que este trabalho era muito repetitivo:

Pr:– Eles [os alunos] desenharam muitos gráficos e não perceberam o que "estava acontecendo": a influência dos parâmetros no gráfico, a relação entre a equação e o formato do gráfico...

Quando o professor fez este comentário eu logo concordei e sugeri que ele incluísse itens, nos enunciados dos problemas, que exigissem que o aluno analisasse o que fez e escrevesse suas percepções e observações sobre cada conjunto de curvas. Quantidade e qualidade são critérios muito relativos, neste caso.

Em termos mais gerais, após a experiência vivida naquele semestre, a avaliação que o professor fez é de que os resultados foram bons:

> Pe:– Você consegue se lembrar bem de quando a gente levou aqueles alunos para o laboratório? O que você achou daquela experiência lá?
> Pr:– Olha, eu acho que foi uma das melhores experiências que eu tive. Eu tenho repetido essa experiência com quase todas as turmas.

Uma das razões que ele apontou para sua satisfação é a possibilidade de propor problemas mais "próximos" da realidade:

> Pr:– [...] O aluno pode, agora, receber do professor, problemas cujo enunciado está mais coerente com o que ocorre na realidade.

Uma outra razão é a motivação:

> Pr: – Os alunos pedem... exigem que a gente vá aos computadores, porque eles gostaram de manipular a máquina. [...] Faz com que eles tenham uma motivação muito grande. Então é normal os alunos, para quem eu dou quatro aulas seguidas, nas últimas duas aulas, ficarem ansiosos querendo ir pra sala de computação. Eles querem ir pra lá porque eles sabem que os problemas, lá, eles conseguem interpretar melhor. Eu acho que vale a pena sim.

Além da precisão proporcionada pelas imagens do computador:

> Pr:– A gente consegue perceber que eles conseguem interpretar melhor até o texto [enunciado], olhando para aquela tela.
> Pe: – Interpreta melhor do que...
> Pr: – Muito melhor que na sala de aula.
> Pe: – Do que se eles tivessem feito o gráfico na mão?
> Pr: – É. Porque na sala de aula eles têm uma dificuldade imensa de construir esse gráfico. E o gráfico não fica uma construção bem... é... perfeita. Eles constroem, por exemplo, muitas vezes, uma parábola, e essa parábola não é bem uma parábola, é quase que uma reta. O ponto de encontro não está na posição que deveria estar. Então, a visão do problema, na sala de aula, feito à mão, para muitos, não dá uma visão correta, enquanto que na máquina dá...

5.3.3.2 - LIMITAÇÕES

As dificuldades que o professor sentiu nas aulas de laboratório, em que não conseguia mais a atenção da turma, são típicas dos ambientes informáticos. Ao perceber isso ele adotou uma conduta alternativa que era dar orientações gerais sobre o computador antes de ir ao laboratório. Porém, em muitos momentos, isso me pareceu perda de tempo. Penso que a necessidade deve justificar a busca de recursos. Senão, as coisas ocorrem como se estivessem nos dando uma "solução para nenhum problema". Talvez fosse por isso que, ao chegarem ao laboratório, os alunos se punham a perguntar coisas que já tinham sido faladas, e tínhamos que explicar de novo. Quando o professor falava do *software*, ou do computador, e os alunos não estavam diante dele, as informações não faziam sentido para os alunos. Então, as informações não eram retidas.

E quando o professor sugeriu simplificar os problemas? Ou decidiu não mais oferecer aulas no laboratório? Havia um conflito entre a quantidade e a qualidade. Mas é natural que isto ocorra quando implementamos novas práticas de ensino. Alguns optam por recuar, no sentido de que preferem retomar as antigas práticas. Porém, a tendência é que, com a persistência, o professor caminhe para momentos de maior tranqüilidade, em que ele dosará com mais propriedade e segurança estes elementos.

A decisão de não utilizar o computador nas últimas aulas do semestre foi, a meu ver, uma pena. Os alunos já estavam familiarizados com o *Winplot*. Ele é um software que têm, inegavelmente, muitos recursos. Os alunos poderiam ter realizado atividades bastante interessantes com ele, especialmente sobre limites e derivadas.

5.3.3.3 - Avanços

Considero que o maior avanço que este cenário evidencia, em termos de ensino, é o sentimento, posteriormente manifestado pelo professor, na entrevista, de que associar a utilização do computador à resolução de problemas trouxe bons resultados: "Olha, eu acho que foi uma das melhores experiências que eu tive. Eu tenho repetido essa experiência com quase todas as turmas." Relembro ao leitor que este era um professor com uma longa trajetória na docência. E apesar disso e das dificuldades que sentiu naquele semestre, ele soube também perceber os bons resultados. E repito, que a persistência leva, em geral, ao aprimoramento. Ainda algumas palavras do professor, em um momento de informalidade: "Só que cada vez que eu dou a disciplina eu mudo algumas coisas. A gente vai melhorando!"

5.3.3.4 - Transcendendo os dados e apontando possibilidades

Uma possibilidade que vejo, a partir da sugestão dada pelo professor de "não complicar os problemas" e da visível melhora no desempenho dos alunos ao utilizar o *software*, é que a seqüência de problemas propostos aos alunos seja organizada de modo gradativo ao longo do semestre. A graduação pode atender a critérios relacionados ao grau de dificuldade tanto do conteúdo matemático como dos recursos disponíveis no *software*. Ou seja, à medida que os alunos demonstram maior familiaridade e têm mais facilidade na utilização do computador, pode-se propor problemas que exijam mais em termos de seus recursos, tendo em vista, sempre, é claro, o aprofundamento e ampliação do conhecimento matemático. Esta graduação poderia ser, também, qualitativa, no sentido de variar os tipos de problemas e os processos solicitados para sua resolução.

Esta possibilidade está, de certa forma, ligada à que vislumbro para o estudo de limites e derivadas, que o professor decidiu fazer sem o computador. Repito que, à altura do semestre em que estas aulas ocorreram, os alunos já estavam bem habilidosos na utilização do *Winplot*. A opção *Traço* já era bem conhecida por eles e, associada à visualização e interpretação dos gráficos, possibilita atividades bastante interessantes para o estudo de limites. Para derivadas, na janela de *Inventário*, também, na época, já bastante utilizada pelos alunos, há a opção *Derivar*, que fornece o gráfico da derivada e que poderia ter sido explorada e aproveitada naquele momento. Ainda na janela do *Traço* temos a possibilidade de esboçar retas tangentes em vários pontos do gráfico de uma função, através da solicitação de aproximações por polinômios de Taylor (*aprox Taylor*) de grau 1. Certamente seriam aulas qualitativamente diferentes das que o professor "coordenou" sobre esses assuntos, naquele final de semestre.

5.4. Subtema 3 - A linguagem

Nos próximos cenários estarão em foco vários tipos diferentes de linguagem. A concepção de linguagem assumida neste cenário é a de que ela é a forma de expressão própria de um indivíduo, classe, arte ou ciência. Assim, inclui o que costumamos chamar de nomenclatura, ou terminologia, ou seja, o conjunto de palavras, termos e expressões especializadas, próprias de um campo do conhecimento (FERREIRA; 1986). A linguagem do *software Winplot* e a linguagem matemática manuscrita e impressa serão consideradas no cenário 7. No cenário 8 serão confrontadas a linguagem matemática e as demais linguagens que se fizeram presentes na sala de aula. Meu objetivo ao considerar este subtema é analisar de que forma essas diferentes linguagens interferem na resolução de problemas com a utilização do computador.

5.4.1. A linguagem pode ser a causa do conflito

Nesta seção pretendo trazer alguns dados que evidenciam uma considerável interferência da linguagem nos fatos ocorridos no laboratório. São apresentados indícios de que a falta de domínio da sintaxe própria da linguagem do computador, particularmente, neste caso, da linguagem do *software Winplot*, interfere nos processos empreendidos pelos alunos na resolução dos problemas a eles propostos. Entendo que a linguagem, sob o ponto de vista que será tratado aqui, seja um subtema de extrema relevância uma vez que ela é uma condição necessária para a utilização satisfatória dos recursos do *software*. Em outras palavras, ela é um elemento a ser considerado *a priori* na resolução de problemas com a utilização do computador.

5.4.1.1 - Cenário 7

O problema a seguir foi proposto para ser resolvido no laboratório. Como era habitual, embora os alunos tenham utilizado o *Winplot*, a resolução foi entregue por escrito.

As funções de demanda e oferta referentes a uma certa marca de vídeo-cassete são dadas por

$$q_d = -0{,}1p^2 + 900 \qquad \text{e} \qquad q_o = \sqrt{1250\,p}$$

(a) Esboce o gráfico das duas funções.

(b) Determine o ponto de equilíbrio e explique seu significado econômico.

(c) Para que valores se tem escassez de oferta? Justifique sua resposta.

(d) Para que valores se tem excedente de oferta? Justifique sua resposta.

(e) Qual é a quantidade de demanda q_d e de oferta q_o correspondente ao preço de R$ 216,00?

Problema 24

Por ser aquela que atende ao que pretendo tratar neste cenário, me deterei na expressão da função $q_o = \sqrt{1250\,p}$. No *Winplot*, a sintaxe[49] específica para a raiz quadrada de x é *sqr(x)*. Porém, a forma mais utilizada pelos alunos, e que também pode ser empregada, é a forma de potência correspondente: x elevado a meio, ou seja *x^(1/2)*. Na aula em que trabalharam neste problema, muitos alunos nos chamaram para perguntar se era preciso ou não colocar parênteses ao digitar a expressão da função q_o no *Winplot*.

Como era habitual, alguns alunos "testaram" diferentes alternativas; começavam sempre digitando a expressão 1250x^1/2, totalmente sem parênteses; ou com uma dupla de parênteses na base da potência, (1250x)^1/2, ou seja, as primeiras tentativas eram sempre com a expressão sem os parênteses no expoente. Os alunos viram que os gráficos obtidos nestes dois casos eram iguais e, portanto, que as expressões digitadas eram equivalentes. Então chamavam a mim ou ao professor para confirmar se estava correto ou não. Alguns perceberam que o gráfico obtido não representava corretamente a função do tipo raiz quadrada $q_o = \sqrt{1250\,p}$ solicitada no problema. Estes também chamaram para perguntar "Por que o gráfico não está dando certo?" ou "O que está acontecendo?". A tabela e os gráficos a seguir mostram o que o *Winplot* executou a partir do que os alunos digitaram:

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\sqrt{1250\,p} = (1250\,p)^{1/2}$	(1250x)^1/2	$\dfrac{(1250x)^1}{2} = 625x$	(1250x)^(1/2)
	1250x^1/2	$\dfrac{1250x^1}{2} = 625x$	

Tabela 7

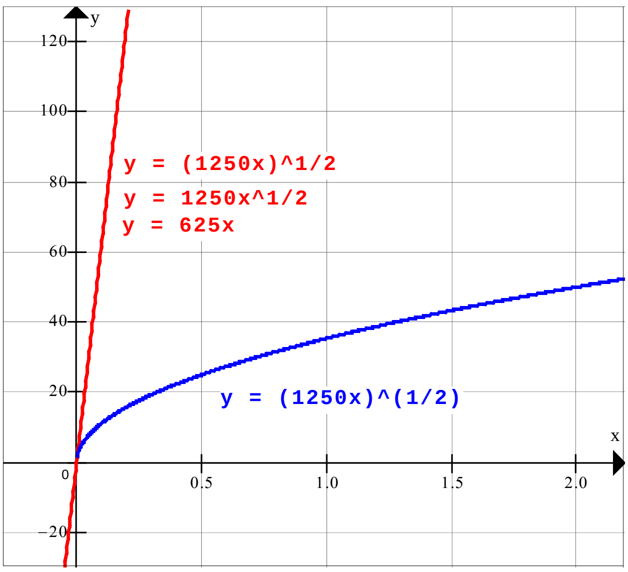


Gráfico 39

49 Componente da gramática de uma língua que constitui a realização da gramática universal e que contém os princípios e regras que produzem as sentenças gramaticais dessa mesma língua através da combinação de palavras e de elementos funcionais. (HOUAISS; 2001)

É curioso como, apesar de os alunos estarem sendo com freqüência alertados para pensarem na ordem de execução das operações, a dificuldade com a utilização dos parênteses na expressão a ser digitada, de certa forma, permanecia. Vale ressaltar que a forma (1250x)^(1/2), com os dois pares de parênteses, era sempre a última que os alunos tentavam, quando tentavam esta forma. Além disso, é bom observar que os alunos também já tinham resolvido um problema envolvendo raiz quadrada, alguns minutos antes, na sala de aula normal e, como não estavam utilizando o computador, obviamente estas dúvidas não surgiram.

No cenário 2, já foi apontado que esta dificuldade com a colocação dos parênteses nas expressões das funções que precisavam ser digitadas no *Winplot* também se manifestou através dos erros apresentados em alguns problemas do trabalho. Foi o caso do problema 11.1, também contendo funções com raiz quadrada:

Exercícios Grupo 07

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema de eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x} \\ f_2(x) = \sqrt{x-1} \\ f_3(x) = \sqrt{x-2} \\ f_4(x) = \sqrt{x+2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x} \\ f_2(x) = \sqrt{2-x} \\ f_3(x) = \sqrt{2-2x} \\ f_4(x) = \sqrt{2-3x} \end{cases}$

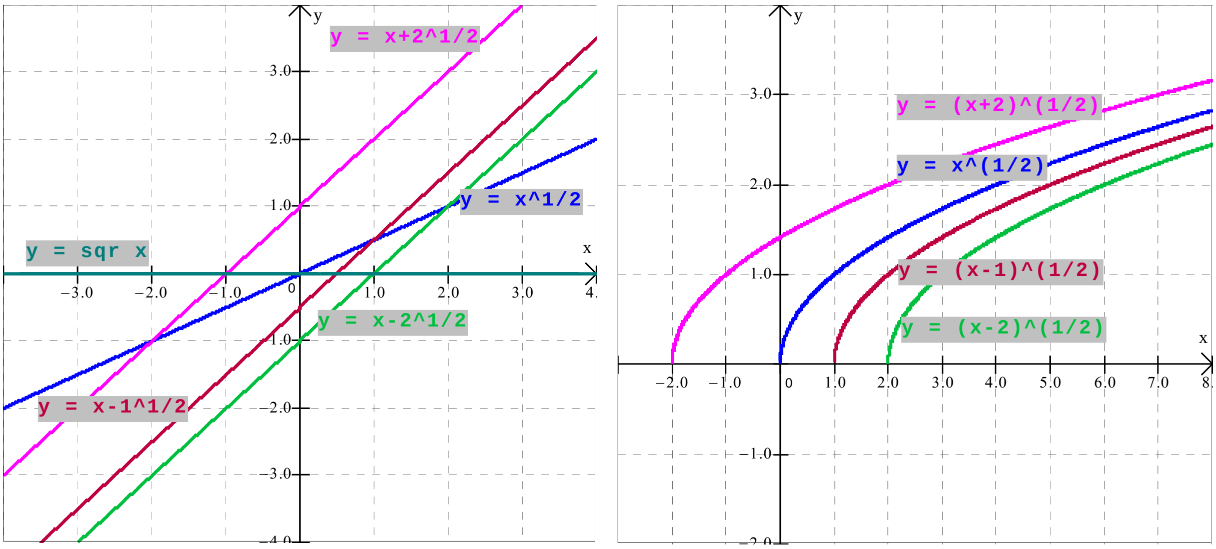
Problema 11.1

Os erros foram causados pela falta dos parênteses ou pela sua colocação no lugar errado, ao digitar a expressão no *Winplot*. A tabela a seguir mostra o item (a) desse problema:

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	x^1/2	$\frac{x^1}{2}$	x^(1/2)
$\sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$	x-1^1/2	$x - \frac{1^1}{2} = x - 0,5$	(x-1)^(1/2)
$\sqrt{x-2} = (x-2)^{1/2}$	x-2^1/2	$x - \frac{2^1}{2} = x - 1$	(x-2)^(1/2)
$\sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2}$	x+2^1/2	$x + \frac{2^1}{2} = x + 1$	(x+2)^(1/2)

Tabela 8

Desta forma, os gráficos obtidos pelos alunos e apresentados nos trabalhos foram os seguintes:



Sem os parênteses | Com os parênteses

Gráfico 40

Novamente, pude notar erros semelhantes a estes nas funções do item (c) do problema 23.1:

Exercícios Grupo 09

Construir os gráficos das funções de cada item em um mesmo sistema cartesiano.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 3^x \\ f_3(x) = 4^x \\ f_4(x) = 5^x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ f_2(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \\ f_3(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ f_4(x) = 5^{-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^{2x} \\ f_2(x) = 2^{3x} \\ f_4(x) = 2^{4x} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^{(x+1)} \\ f_2(x) = 2^{(x+2)} \\ f_4(x) = 2^{(x+3)} \\ f_5(x) = 2^{(x+4)} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^x + 1 \\ f_2(x) = 2^x + 2 \\ f_4(x) = 2^x + 3 \\ f_5(x) = 2^x + 4 \end{cases}$

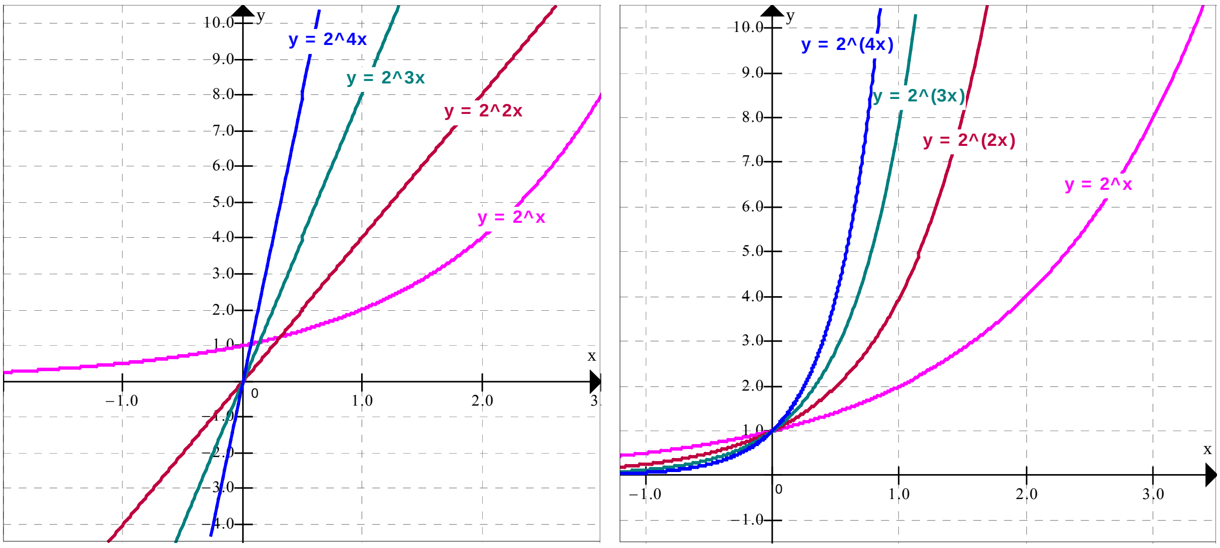
Problema 23.1

Vejamos como os alunos digitaram as expressões das funções exponenciais, sem parênteses no expoente:

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
2^x	2^x	2^x	2^x
2^{2x}	2^2x	$2^2x=4x$	2^(2x)
2^{3x}	2^3x	$2^3x=8x$	2^(3x)
2^{4x}	2^4x	$2^4x=16x$	2^(4x)

Tabela 9

Assim como ocorreu com o problema 11.1, os gráficos apresentados pelo *Winplot* foram retas quando, na realidade, deveriam ser exponenciais.



Sem os parênteses Com os parênteses

Gráfico 41

Além das funções raiz quadrada e exponencial, outros tipos de funções também trouxeram dúvidas sobre este aspecto. Numa das aulas, em que o professor tratou da função racional em problemas aplicativos, esta dúvida sobre os parênteses também surgiu. No início da manhã, na sala de aula, o professor resolveu, utilizando apenas lousa e giz, o problema 2, a seguir, já analisado também no cenário 1:

Problema das Lâmpadas Fluorescentes

As leis de oferta e demanda de lâmpadas fluorescentes são dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -4 + \dfrac{200}{p+20} \\ q_o = \dfrac{3}{5}p + 1 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O ponto de equilíbrio

(b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda

(c) Dar a análise econômica

Problema 2

Nesse momento a atenção esteve voltada para a forma algébrica de determinar o ponto de equilíbrio, para a localização das assíntotas e do gráfico no plano cartesiano, os valores para os quais p faz sentido, etc...

No segundo horário desse mesmo dia de aula, no laboratório, o professor pediu que resolvessem o problema 3:

Suponha que as leis das lâmpadas fluorescentes fossem dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -2 + \dfrac{100}{p+10} \\ q_o = 0{,}03\,p^2 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O ponto de equilíbrio
(b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda
(c) Dar a análise econômica

Problema 3

Este é, realmente, um problema muito parecido com o anterior. Só que aquele havia sido resolvido utilizando o lápis e papel. De qualquer modo acreditávamos que os alunos não teriam dificuldade para resolvê-lo. Entretanto, agora, diante do computador, os alunos não sabiam o que fazer, por onde começar. E uma questão que foi levantada várias vezes estava novamente relacionada à colocação dos parênteses. Um dos diálogos que mostram isso está reproduzido a seguir:

A5.3: – Professora, vem aqui um pouquinho! Prô, como é que eu vou saber se tem que colocar isso entre parênteses?

Pe: – Como é que a gente pode saber se tem que colocar entre parênteses? O que você faria se a professora não estivesse aqui? Vou deixar você pensar um pouquinho.

[pausa]

Um aluno da outra dupla se interessou e veio participar da conversa. Ele escrevia no papel enquanto falava:

B5.3 – É -2, mais 100 dividido por isso daqui tudo: x mais 10. Ele vai dividir esse daqui. Resolve isso primeiro, daí divide o 100!

Pe: – Está certo. Mas a nossa pergunta... a [pergunta] que ela está me fazendo é a seguinte: aqui [no papel], olhe... Não é preciso colocar um parêntese aqui; não preciso colocar um aqui.

B5.3: – Não?

Pe: – Você está com parêntese ali [na expressão escrita no papel]?

B5.3: – Não!

Pe: – E você tem dúvida que o 100 está sobre tudo isso?

B5.3: – Não!

Pe: – Não tem!?

B5.3: – Não.

Pe para A5.3 e B5.3: – Como é que eu sei se lá [no computador] é preciso ou não?

[pausa]

A5.3: – Então, porque eu fiz "sem", e deu uma coisa totalmente diferente... Eu fiz "com", dá totalmente diferente... Eu fiz com dois parênteses, deu totalmente diferente!

A aluna tinha esboçado os gráficos das funções digitando os parênteses em lugares diferentes da expressão para verificar o que aconteceria:

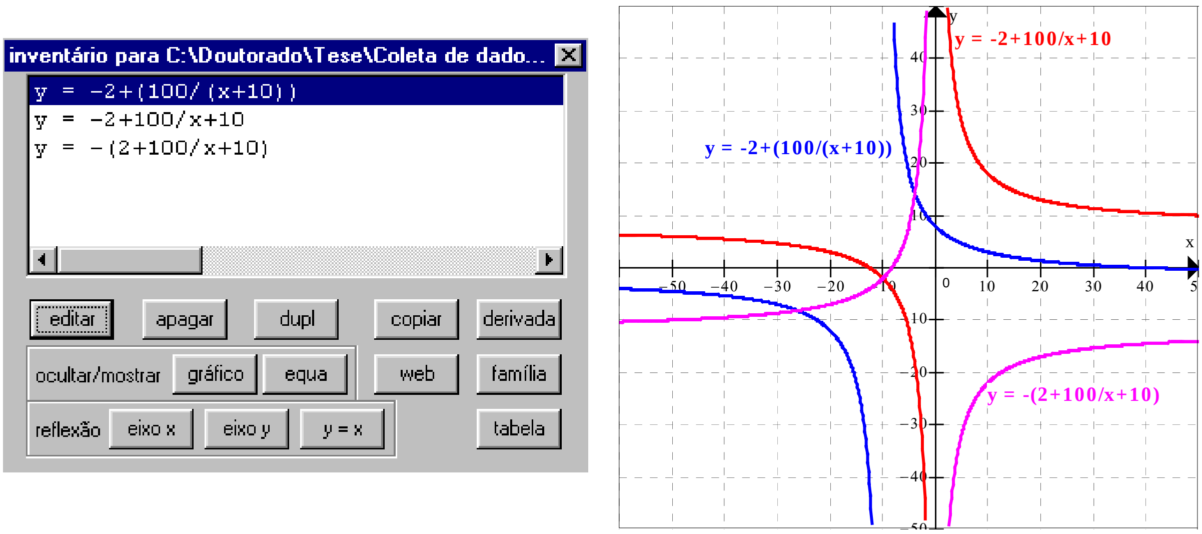


Figura 25

Pe: – Então a primeira conclusão que você tira disso é o quê? Foi muito importante você ter feito: sem, com uma dupla e com mais essa dupla [de parênteses]. Você percebeu três coisas diferentes?

A5.3: – Percebi.

Pe: – Tem diferença, com parêntese e sem parêntese?

A5.3: – É.

O colega indicou uma das alternativas:

B5.3: – Vai ficar no 100 sobre x mais 10, aí ele vai somar com o -2.

Ele sugeriu que a expressão $-2+\dfrac{100}{x+10}$ fosse digitada do seguinte modo: $-2+(100/x+10)$.

[pausa]

Pe: – Olha...

A5.3: – Hã...?

Pe: – Isso está de acordo com aquela conversa que nós tivemos na aula passada. Quem é que vai dizer pra gente qual dessas alternativas é a função certa, aquela que eu preciso? A primeira coisa é a gente saber o que está fazendo, precisa saber a Matemática!

A5.3: – É. A gente está trabalhando sobre isso.

A aluna confirmou que as funções racionais estavam sendo estudadas naquele momento, ou seja, era o conteúdo que estava sendo tratado nas aulas.

Com relação às funções racionais, o professor dera bastante destaque ao fato de que uma das características das funções do tipo $y = \frac{1}{x-a} + b$ é que as assíntotas se cruzam no ponto de coordenadas (a,b), ao qual se referia como "ponto bolinha". Num esboço, apresentara o gráfico abaixo, mostrando que a função não é definida para x = a e que $y \neq b$ pois $\frac{1}{x-a} \neq 0$:

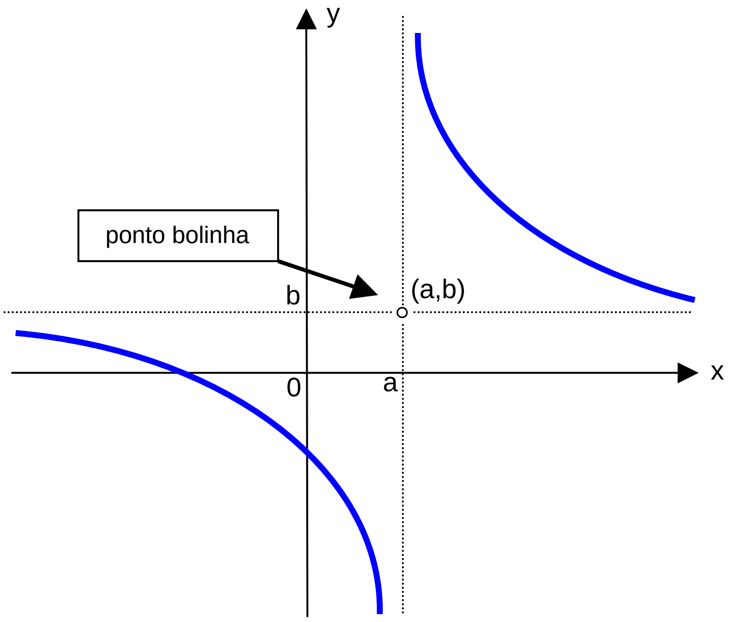


Gráfico 42

Usando a mesma linguagem utilizada pelo professor, questionei a aluna sobre as assíntotas da função $q_d = -2 + \frac{100}{p+10}$ dada no problema:

Pe: – Vamos lembrar daquele... ponto bolinha? Qual é o ponto bolinha aqui?

B5.3: – Menos 10 e -2.

A5.3: – Ele está no -10. O -10 e o (...).

Pe: – Pense, a partir do desenho que vocês fizeram para verificar o que ele mostra.

A5.3: – Hum!!

A aluna percebeu que um dos gráficos apresentava as assíntotas em x = -10 e $y = -2$, como deveria ser.

Pe: – Então... Você "arriscaria" o quê? Dessas três alternativas diferentes [das expressões digitadas], em qual delas você aposta para essa função?

A5.3: – Então, eu estou me baseando na aula de hoje, aqui. A gente estava trabalhando esse tipo de gráfico. É essa.

Dentre as três opções, a aluna escolheu a expressão y = - 2 + (100/(x+10)).

Pe: – Você preferiu deixar essa?

A5.3: – É. Essa deu certo.

Pe: – Como você sabe que está certa?

A5.3: – Porque ele está... Essa partezinha daqui está fechadinho (...)

A aluna se lembrou, também, que o gráfico da função de demanda é uma curva restrita ("fechadinha") ao primeiro quadrante, e com interseções com os eixos das abscissas e das ordenadas. De fato, a opção que escolhera estava correta, embora com parênteses em excesso.

Pe: – As outras não ficam desse tipo?

A5.3: – Não.

[...]

Pe: – Ok, é essa que você tem que deixar, tá?

A5.3: – Tá, bom. Agora tem que colocar a de baixo... Essa aqui é normal.

O termo "normal" referia-se ao fato de que a outra função a ser digitada 0,03x^2 não apresentava essa dificuldade dos parênteses.

Retomemos também o problema 12, pois estão relacionados a este aspecto os erros cometidos neste grupo de problemas do trabalho que também envolve funções racionais, conforme veremos a seguir:

Exercícios Grupo 08

Objetivos:

(a) Construir gráficos de funções hiperbólicas.
(b) Determinar as assíntotas.
(c) Determinar os pontos de encontro com os eixos.

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema cartesiano.
2. Determinar as assíntotas e os encontros com os eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2 - \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = 2 - \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = 2 - \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$

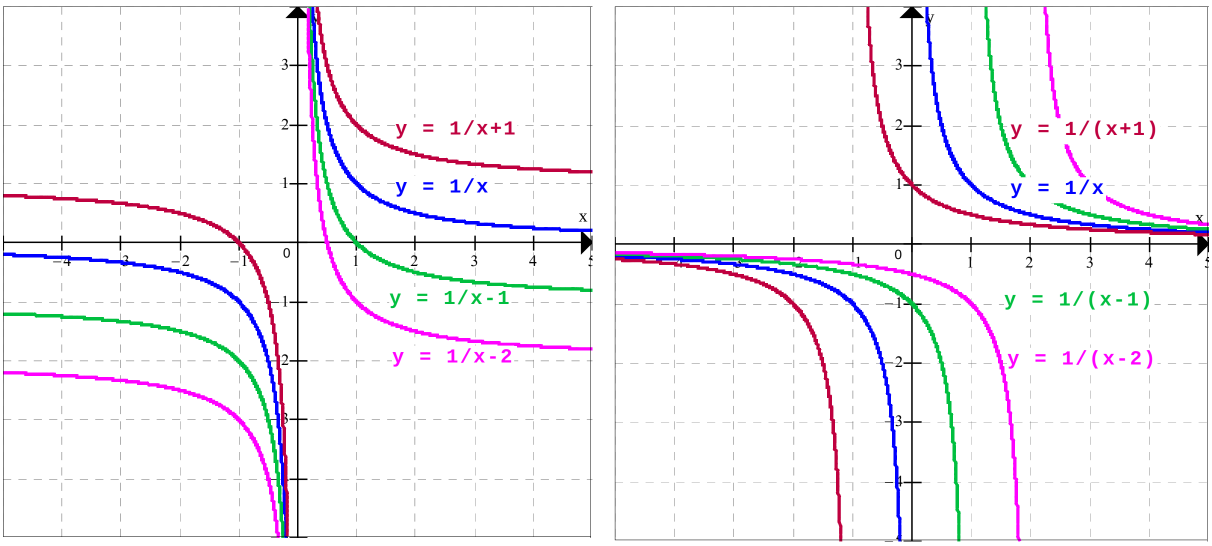
Problema 12

Novamente, os parênteses foram a causa dos erros cometidos pelos alunos. O que ocorreu foi o seguinte:

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\dfrac{1}{x}$	1 / x	$\dfrac{1}{x}$	1 / x
$\dfrac{1}{x+1}$	1 / x+1	$\dfrac{1}{x}+1$	1 / (x+1)
$\dfrac{1}{x-1}$	1 / x-1	$\dfrac{1}{x}-1$	1 / (x-1)
$\dfrac{1}{x-2}$	1 / x-2	$\dfrac{1}{x}-2$	1 / (x-2)

Tabela 10

Em virtude desses erros, os gráficos obtidos pelos alunos apresentaram-se do seguinte modo:



Sem os parênteses — Com os parênteses colocados corretamente

Gráfico 43

Neste grupo de funções representadas graficamente com a utilização do *software*, os alunos não perceberam, por exemplo, que constantes positivas adicionadas ou subtraídas da variável independente x provoca translações para a esquerda ou para a direita, respectivamente, nos gráficos das funções; e no problema 11, os alunos não associaram corretamente as expressões que digitavam com o formato do gráfico das funções, entre outras coisas.

É notório que, mesmo já tendo sido alertados para que recorressem às regras dadas pela Álgebra para a ordem de execução das operações, os alunos ainda apresentavam dúvidas sobre a colocação dos parênteses. Por isso, fui levada a crer que mais algum elemento, além da falta de referência à Álgebra, estava se interpondo entre os alunos e a resolução desses problemas, e que este elemento estivesse relacionado à "linguagem do *software*".

Assim, o que pretendo tratar aqui é que é preciso atentar para algumas características da linguagem que deve ser utilizada quando do emprego do computador na resolução de problemas deste tipo. Embora sejam problemas fechados e sem grandes pretensões em termos de exploração dos recursos e das possibilidades do *software*, eles permitiram que essas dúvidas dos alunos aflorassem. Elas conduzem a indícios de que é preciso perceber quais características da linguagem matemática são preservadas, e quais não são preservadas, quando passamos ao computador. Merece destaque o fato de os alunos já terem resolvido o "Problema das Lâmpadas Fluorescentes", num primeiro momento, sem o computador e, mesmo assim, terem encontrado dificuldade com ele ao utilizarem o *Winplot*. Nesta segunda situação, ou seja, ao utilizarem o *software* a dificuldade com a linguagem é que constituiu o problema.

No que se refere às funções que apresentam expoentes em sua expressão, como são as do tipo potência e exponencial, sabemos que com lápis e papel ou na forma de imprensa não apresentam possibilidade de escrita na forma horizontal, como deve ser a expressão digitada no computador:

Forma escrita: $\sqrt{x} = x^{1\!/\!2}$, e não há forma horizontal equivalente.

Forma digitada: x^(1/2), na forma horizontal.

A apresentação horizontal da expressão que deve ser digitada no *Winplot* (e em muitos outros *softwares*) exige que sejam utilizados os parênteses no expoente, pois, uma vez que as linguagens desses programas obedecem à ordem das operações, ditada pela Álgebra, a falta dos parênteses fará com que as potências sejam executadas antes das divisões. Por isso é que a expressão digitada x^1/2 representa a função $y = \frac{x^1}{2} = \frac{x}{2}$, e não a função $y = \sqrt{x} = x^{1\!/\!2}$. Assim, embora a ordem de execução das operações, seguida ao trabalhar com expressões utilizando lápis e papel, seja preservada ao executá-las no computador, a forma de representação da expressão, ou seja, a linguagem, apresenta diferenças. A representação de expressões com expoentes, com lápis e papel ou nos meios impressos, não exige parênteses, enquanto que a configuração horizontal utilizada na digitação dessas expressões no *Winplot* torna os parênteses indispensáveis. (Tabelas 9 e 10)

No caso das funções racionais isso se repete quando utilizamos a forma padrão ("não horizontal") de representar as funções, conforme foram dadas nos enunciados dos problemas. Entretanto devemos perceber que estas funções podem ser representadas matematicamente na forma horizontal e, se isso for feito, a disposição dos parênteses será a mesma na linguagem do computador:

Enunciado e forma equivalente (escrita ou impressa)	Forma matemática horizontal (escrita ou impressa)	Forma correta (digitada)
$\frac{1}{x+1}$	1 : (x+1)	1 / (x+1)
$2-\frac{1}{x+1}$	2 - 1 : (x+1)	2 - 1 / (x+1)

Tabela 11

Assim, a linguagem que representa funções racionais, com lápis e papel ou nos meios impressos, considerada na sua forma de apresentação horizontal é preservada na digitação dessas expressões no *Winplot* (Tabela 11). Ocorre que o habitual é apresentar as expressões das funções "não horizontalmente", como na primeira coluna da tabela anterior. E o que percebo é que, sendo assim, os alunos não recorrem à representação horizontal das expressões (também possível) como referência para a colocação dos parênteses nas expressões digitadas.

Outro fato interessante a respeito da linguagem, que está sendo discutida nesta seção, ocorreu nas resoluções dos problemas que compõem o grupo 6, enunciados assim:

Exercícios Grupo 06

Objetivos:

Construir e interpretar gráficos de funções modulares.

1. Construir os gráficos de cada item, num mesmo sistema cartesiano.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x\rvert \\ f_2(x) = \lvert x\rvert + 1 \\ f_3(x) = \lvert x\rvert + 2 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x+1\rvert \\ f_2(x) = \lvert x+2\rvert \\ f_3(x) = \lvert x+2\rvert \end{cases}$	(c) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x^2-2\rvert \\ f_2(x) = -\lvert x^2-2\rvert \\ f_3(x) = \lvert (x-2)^2-3\rvert \end{cases}$
(d) $\begin{cases} f(x) = \lvert x^2-4x+3\rvert \\ g(x) = x^2-4\lvert x\rvert+3 \end{cases}$		

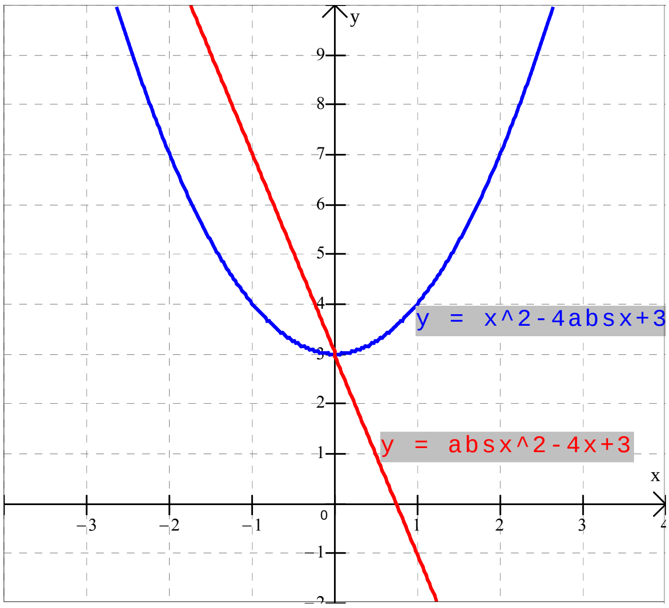
Problema 25

A sintaxe apropriada, no *Winplot*, para o módulo é *abs(x)*. No problema (25.1.d) todos os erros foram causados pela falta dos parênteses ao digitar a expressão no *Winplot*, ou pela sua colocação no lugar errado:

Enunciado	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou
$\lvert x^2-4x+3\rvert$	*abs*x^2-4x+3	-4x+3
$x^2-4\lvert x\rvert+3$	x^2-4*abs*x+3	x^2+3

Tabela 12

Aqui, novamente a expressão digitada não corresponde à sintaxe do *software*, que ignorou aquela parte da expressão sem sentido e considerou somente o restante. Foi assim que ocorreu todas as vezes que os alunos digitaram *abs* sem colocar os parênteses em seguida:



Sem os parênteses
Gráfico 44

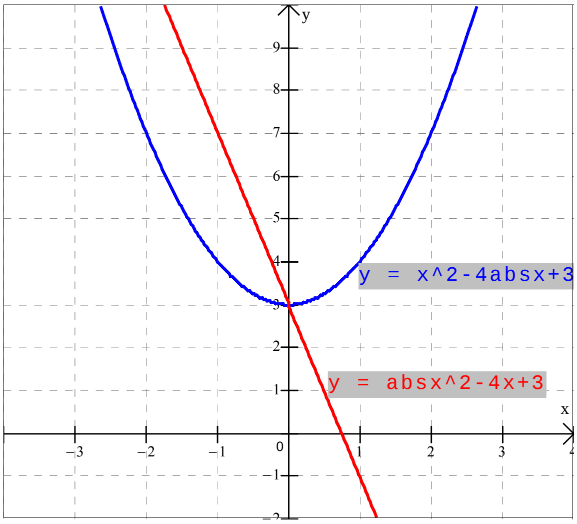
Neste caso observei que alguns alunos colocaram os parênteses na função $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$, digitando *abs*(x^2-4x+3), mas não colocaram na $f(x)=x^2-4\left|x\right|+3$, digitando x^2-4*abs*x+3. Estes fatos fazem parecer que os alunos transferiram um padrão da linguagem algébrica, quando utilizam lápis e papel, para este contexto em que o computador se fez presente. Na forma escrita à mão, ou mesmo na forma impressa, muitas vezes precisamos utilizar os parênteses para indicar que uma determinada função deve ser aplicada a uma soma (ou diferença) de vários termos. Quando queremos, por exemplo, indicar a operação 3 vezes o x, na forma escrita simplesmente usamos 3x; mas se o número 3 multiplica a soma de vários termos tais como x^2, -4x e 3, indicamos $3(x^2-4x+3)$, com parênteses. Do mesmo modo procedemos com as funções trigonométricas: *sen* x e *sen*(x^2-4x+3); com funções logarítmicas: *ln* x e *ln* (x^2-4x+3); entre outras. Creio que os alunos procederam deste modo ao digitarem as expressões acima no *Winplot*.

Vejamos, então o que deveria ter sido feito pelos alunos:

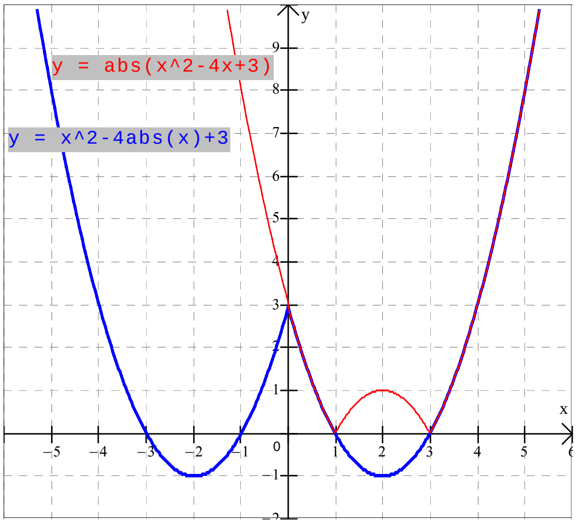
Enunciado	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\left\|x^2-4x+3\right\|$	*abs*x^2-4x+3	-4x+3	*abs*(x^2-4x+3)
$x^2-4\left\|x\right\|+3$	x^2-4*abs*x+3	x^2+3	x^2-4*abs*(x)+3

Tabela 13

e quais seriam os gráficos correspondentes às funções solicitadas no problema:



Sem os parênteses



Com os parênteses

Gráfico 45

Finalmente, esta transferência do padrão algébrico da escrita para o ambiente informático é confirmada pela presença deste mesmo procedimento adotado pelos alunos, em outros grupos de funções, por exemplo do já citado problema 11. Ao solicitarem os gráficos de funções raiz quadrada, utilizaram os parênteses apenas nos casos em que havia mais de um termo dentro da raiz e para a função $f(x) = \sqrt{x}$ não utilizaram os parênteses:

Enunciado	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\sqrt{x}$	*sqr x*	0	*sqr(x)*
$\sqrt{x-1}$	*sqr* (x-1)	$\sqrt{x-1}$	*sqr* (x-1)
$\sqrt{x-2}$	*sqr* (x-2)	$\sqrt{x-2}$	*sqr* (x-2)
$\sqrt{x+2}$	*sqr* (x+2)	$\sqrt{x+2}$	*sqr* (x+2)

Tabela 14

O que aconteceu no caso registrado na primeira linha da tabela apresentada é que, quando é digitada alguma expressão que não corresponde à sintaxe do *software,* ele "ignora" aquela parte da expressão e considera somente o restante. Foi assim que ocorreu todas as vezes que os alunos digitaram *sqr x* sem colocar os parênteses no x. Vê-se que o gráfico apresentado, na realidade da função f(x) = 0, foi obtido como se o aluno tivesse colocado a expressão $sqr\ x + 0$, em que *sqr x* foi ignorado.

E deste modo os gráficos apresentaram-se assim:

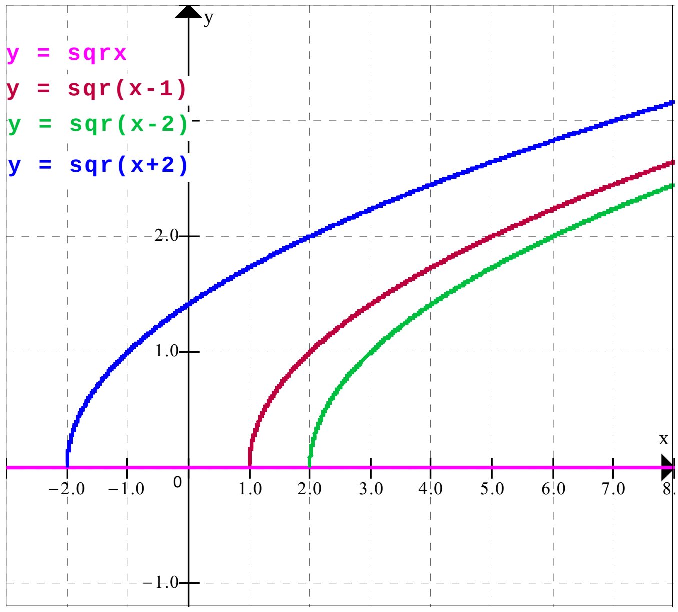


Gráfico 46

5.4.1.2 - Limitações

Ao fazer alusão a esses exemplos apresentados, não posso deixar de comentar que, conforme já se tem percebido com freqüência no ensino de Matemática, a repetição de um procedimento, de um mesmo tipo de problema, etc., não leva, necessariamente, à compreensão do conteúdo ou do conceito envolvido na atividade. No caso dos problemas 11, 12 e 23.1 e 25, a forma como foram elaborados os problemas fez com que os alunos repetissem as instruções dadas ao *Winplot* e esboçassem muitos gráficos sem, contudo, compreender o que estavam fazendo.

A falta de itens solicitando ao aluno que analisasse o comportamento dos gráficos ou que descrevesse as transformações ocorridas tornou a atividade pouco produtiva no tocante ao conteúdo específico envolvido no problema. Vale a pena observar que os problemas 24, 2 e 3, sendo aplicados a situações de oferta e demanda e contendo questões interpretativas, suscitaram dúvidas e levaram os alunos a refletir sobre a forma como estavam introduzindo as expressões das funções no *Winplot*.

5.4.1.3 - Avanços

Não obstante as limitações apontadas, entendo que a linguagem, sob o ponto de vista que foi tratado aqui, seja um aspecto de extrema relevância, uma vez que ela é um elemento a ser considerado *a priori* na resolução de problemas com a utilização do computador. As dificuldades relativas a ela podem ser a expressão da pouca experiência dos alunos na utilização deste *software*, mas constituíram-se num obstáculo explícito à obtenção da solução dos problemas. Por isso elas precisam ser superadas para que os alunos avancem a níveis mais criativos e produtivos de utilização do computador. A superação pode ser buscada a partir de uma melhor compreensão dessas dificuldades. Os procedimentos realizados, as soluções apresentadas e as dúvidas levantadas pelos alunos permitiram que estas questões relacionadas à linguagem fossem percebidas e acredito que levaram a essa melhor compreensão.

5.4.1.4 - TRANSCENDENDO OS DADOS E APONTANDO POSSIBILIDADES

Num nível bastante específico, volto-me à função modular, que foi o conteúdo central do problema 25. Os alunos teriam percebido os erros que cometeram se tivessem refletido sobre as transformações que o módulo causa ao ser aplicado em outras funções. Talvez esse não fosse mesmo o objetivo daquele problema. Muito embora isto não esteja explicitado, as funções propostas nos itens (a), (b) e (c) sugerem que o professor tinha em mente destacar quais variações ocorrem nos gráficos quando variam os termos independentes (ou constantes) de funções modulares. No entanto, problemas que exigissem do aluno um estudo comparativo do tipo "função sem o módulo" e "função com o módulo" seria bastante indicado para promover uma melhor compreensão das mudanças que o módulo provoca nas funções em que é aplicado. As funções quadráticas eram, já, bem conhecidas dos alunos que, inclusive, já tinham feito um problema anterior do próprio trabalho que envolvia muitos gráficos dessas funções. Elas poderiam ser o ponto de partida para este estudo comparativo.

5.4.2. A LINGUAGEM MATEMÁTICA E O USO DO COMPUTADOR

Neste oitavo cenário o foco será a linguagem matemática, particularmente os termos[50] que compõem a nomenclatura, ou seja, o vocabulário próprio da Matemática. Este aspecto veio à tona em momentos que sugerem que os alunos que tinham domínio dos nomes dos objetos matemáticos e de seu significado conseguiam utilizar de modo mais eficiente o *Winplot*. E, reciprocamente, que os alunos apresentavam dificuldades com a utilização do *software* em virtude da falta de domínio desses termos.

5.4.2.1 - CENÁRIO 8

O primeiro episódio que escolhi ocorreu na aula em que os alunos estavam resolvendo o problema 3:

[50] Termo: vocábulo ou locução que denomina conceito, prévia e rigorosamente definido, peculiar a uma ciência. (FERREIRA; 1986)

Suponha que as leis das lâmpadas fluorescentes fossem dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -2 + \dfrac{100}{p+10} \\ q_o = 0{,}03\,p^2 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O ponto de equilíbrio

(b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda

(c) Dar a análise econômica

Problema 3

Tendo digitado as equações das funções, os alunos obtinham os gráficos esboçados em seu domínio real. Quando utilizo o termo domínio não estou considerando, ainda, o contexto de aplicação do problema, mas seu significado estritamente matemático, ou seja, refiro-me ao subconjunto D do conjunto dos números reais R tal que, para todo $x \in D$, existe e é única a imagem $y=f(x)$ com $y \in R$. Então, para a função q_d no domínio D = R - {-10} e, para a função q_o em $D = R$, o que o *Winplot* mostrava era:

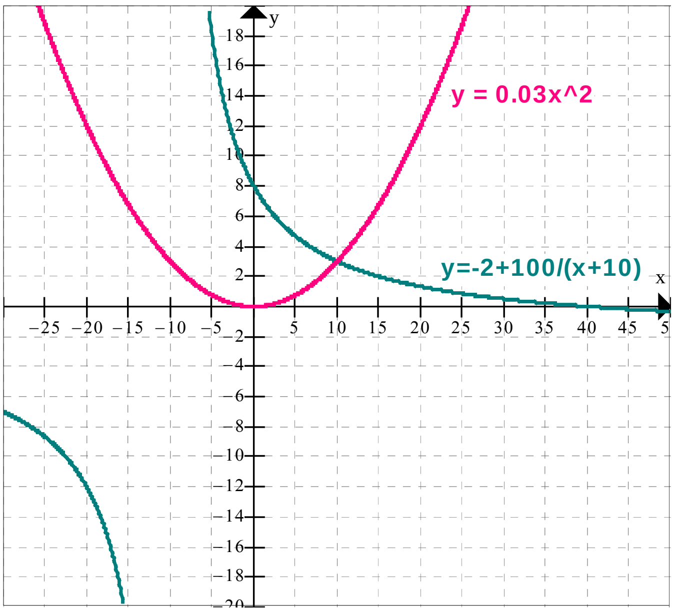


Gráfico 47

Mas considerando o contexto de aplicação das funções do problema, oferta e demanda, o gráfico teria que ser apresentado somente no primeiro quadrante, onde as variáveis independente e dependente, p para preço e q para quantidade, assumem valores não negativos.

A aluna participante do diálogo que vem a seguir já tinha obtido, apenas olhando para o gráfico, o ponto de interseção com o eixo y, que é o ponto (0,8), mas não pôde fazer o mesmo com o ponto de interseção com o eixo x, e não sabia como obtê-lo:

A5.7:– Prô, aqui eu achei o ponto A que eu quero: zero e 8. E o ponto B? No gráfico não dá!

Pe:– Dessa função [$q_d = -2 + \frac{100}{p+10}$]?

A5.7:– É. Olhe.

Pe:– Você quer saber onde essa curva cruza o eixo?

A5.7:– É.

Pe:– Como é que se chama esse ponto, onde o gráfico cruza o eixo x? Como é que se chama mesmo?

B5.7:– Não é raiz?

A5.7:– É raiz?

Pe:– É raiz. E tem também outro nome, vocês se lembram dele?

[pausa]

Pe:– Ele também se chama zero. [No *Winplot*] há essa alternativa para achar a raiz da função.

Quando eu falei deste outro nome da raiz (zero) de uma função, a aluna logo se lembrou onde estava esta alternativa no *Winplot.* Trata-se da opção *Zeros*[51]:

A5.7:– Está aqui.

Pe:– Isso. Ele calcula direto, veja se é isso que vocês estão querendo.

A5.7:– Mas para travar o intervalo... Eu não consegui. Eu vou no *Inventário*... Eu clico em *editar*... Aí eu tenho *travar intervalo*. Mas, de quanto até quanto eu quero travar?

Ela não sabia que números indicar para os valores apropriados de x mínimo e máximo:

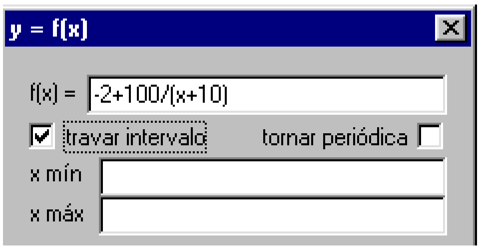


Figura 26

Pe:– Você quer travar para que fique no primeiro quadrante, não é mesmo?

[51] Neste cenário, freqüentemente aparecerão *palavras em itálico* que, conforme já explicado no início do capítulo, indicam termos referentes a comandos, janelas ou opções do *software Winplot.*

A5.7:– É. O fim fica lá na raiz , né?

Pe:– Exatamente. Você tem que dar esse valor de x aqui e esse valor de x para ele. [apontei os pontos de interseção sobre os eixos no gráfico]

A5.7:– Eu tenho que pegar aqui [na janela que calcula os zeros da função]?

Pe:– É. Então você vai dizer para ele "eu quero que trave nesse intervalo". Porque esse x aqui você já sabe que vale zero. Agora, o outro, você ainda tem que descobrir.

O companheiro na dupla logo viu qual era o valor que estava sendo indicado como zero da função:

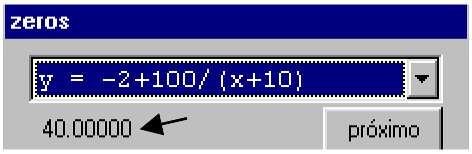


Figura 27

e sugeriu os valores para o intervalo:

B5.7:– Zero... 40.

A5.7:– Nossa, é 40?

B5.7:– É 40. Mas põe 50, direto, aí.

Pe:– Não pode! Vocês não querem o ponto que está em cima do eixo x? Então tem que ser um ponto que tem o y igual a zero; tem que ser o 40! Por isso ele se chama zero da função; porque zera a função, zera o y.

A5.7:– Ah!!!

Esta passagem mostra um dos momentos em que os alunos tiveram dificuldade com a utilização do *software* porque não conheciam o nome zero, que também pode ser empregado para designar a raiz de uma função. O leitor deve observar que, quando apresentei este termo à dupla, a aluna logo soube onde o *Winplot* tinha esta alternativa. E, no final do diálogo, quando lhes expliquei o porquê do nome zero, parece que o termo passou a fazer sentido para eles.

Observando as aulas daquele semestre, especialmente as realizadas fora do laboratório, onde o professor se mostrava mais, notei que ele tinha uma linguagem bastante, eu diria, peculiar de tratar os objetos matemáticos. Utilizava muitas metáforas. Chamava, com freqüência, de "pontos de encontro com os eixos", estes pontos das funções que ficam sobre os eixos coordenados. Ele utilizou este termo, inclusive, no enunciado de alguns problemas: "Determinar as assíntotas e os encontros com os eixos." Durante as aulas, várias vezes os alunos demonstraram não se lembrar do nome raiz de função, e o nome zero parece, mesmo, que poucos alunos conheciam.

Um outro episódio envolvendo os zeros. A aluna me consultava sobre o problema 26:

Exercícios Grupo 05

Objetivos:

(a) Construir gráficos de funções quadráticas, $f(x) = ax^2 + bx + c$

(b) Determinar os encontros com os eixos.

(c) Observar em cada grupo de exercícios o significado dos coeficientes *a*, *b* e *c*.

(d) Determinar o vértice da parábola.

1. Construir o gráfico das funções de cada item no mesmo sistema de eixos.

(a) $\begin{cases} f(x) = 1x^2 \\ g(x) = 2x^2 \\ h(x) = 3x^2 \\ i(x) = 4x^2 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f(x) = 1x^2 \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ h(x) = \frac{1}{3}x^2 \\ i(x) = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$	(c) $\begin{cases} f(x) = -x^2 \\ g(x) = -2x^2 \\ h(x) = -3x^2 \\ i(x) = -4x^2 \end{cases}$
(d) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^2 + 1 \\ h(x) = x^2 + 2 \\ i(x) = x^2 + 3 \end{cases}$	(e) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^2 - 1 \\ h(x) = x^2 - 2 \\ i(x) = x^2 - 3 \end{cases}$	(f) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = (x-1)^2 \\ h(x) = (x-2)^2 \\ i(x) = (x-3)^2 \end{cases}$
(g) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = (x+1)^2 \\ h(x) = (x+2)^2 \\ i(x) = (x+3)^2 \end{cases}$	(h) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x \\ g(x) = x^2 - 2x \\ h(x) = x^2 - 3x \\ i(x) = x^2 - 4x \end{cases}$	(i) $\begin{cases} f(x) = x^2 + x \\ g(x) = x^2 + 2x \\ h(x) = x^2 + 3x \\ i(x) = x^2 + 4x \end{cases}$

Problema 26

Comparando os gráficos dos itens (a), (b) e (c) ela percebeu que os vértices estavam todos na origem do plano cartesiano e que no item (d) isso não ocorreu:

A5.30:– Olha, aqui já deu diferente; na letra (d) os vértices deram... sobre o eixo.

Pe:– Olhe... Cuidado com esse jeito que você está colocando o vértice, hein?

A5.30:– Por que?

Esta era a imagem que a aluna tinha na tela do computador:

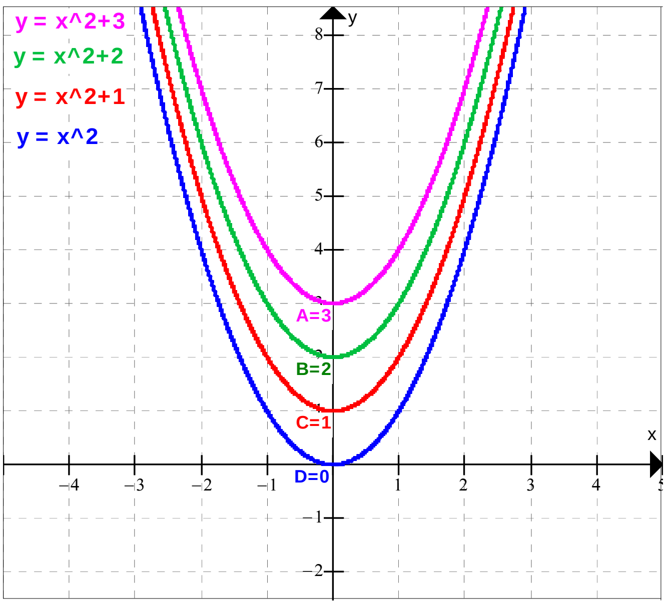


Gráfico 48

Pe:– Um ponto do plano tem... tem que ser dado sempre por dois números, nunca por um número só. O x...

A5.30:– Ah é, o zero também faz parte.

Pe:– Isso! O x e o y do ponto. É (0,3)...

A5.30:– As outras também...

Pe:– É (0,2)... Sempre que você se refere a um ponto do plano.

A5.30:– Nesse vértice também?

Pe:– É (0,0); é zero vírgula zero.

A5.30:– Está certo. Aqui também.

Em seguida ela quis confirmar o que era para fazer no problema:

A5.30:– Aqui não precisa marcar a raiz, né?

Pe:– Olhe, ele pediu as interseções com os eixos!

A5.30:– Interseções...?

Pe:– Raiz é interseção com o eixo, também, não é? Com o eixo x.

A aluna conferiu seus gráficos, constatou visualmente que as parábolas dos itens (a), (b) e (c), assim como a função $y = x^2$ do item (d), têm uma única raiz em x=0, e que as demais deste item não têm raízes. Ela dizia "esta não passa no eixo x" ou "esta passa no eixo x". Então seguiu no problema, dirigindo-se ao item (e):

Pe:– Mas essas passam.

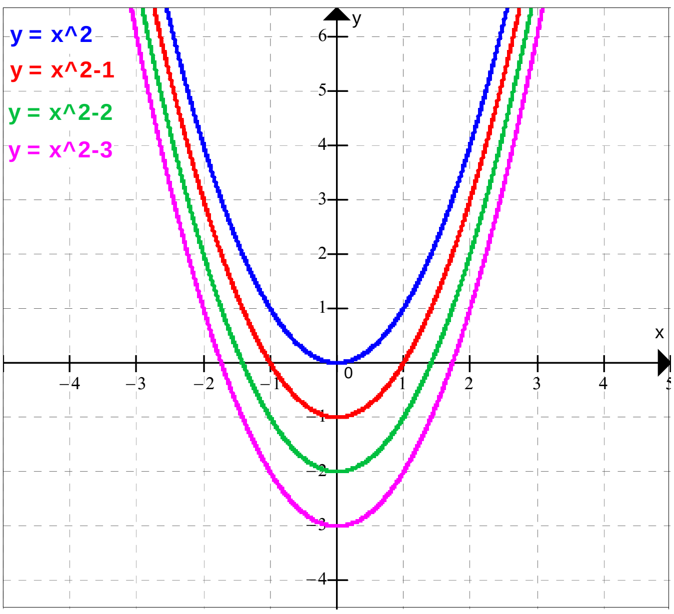


Gráfico 49

Só que ela não conseguia determinar as raízes apenas através da observação do gráfico:

A5.30:– Aí eu coloco o quê?

Pe:– Achar as raízes, né? Lembra dos *Zeros*?

A5.30:– Dos *Zeros*?!

Pe:– Ele calcula...

A5.30:– Ah, é! Zero é raiz!

Novamente, neste diálogo, a aluna demonstrou maior familiaridade com o termo raiz do que com o zero, apesar de ter, no final, se lembrado do segundo. E neste caso, em que se tem o *Winplot* como mediador dessas atividades, o nome zero é essencial, pois é assim que ele apresenta a opção para o seu cálculo:

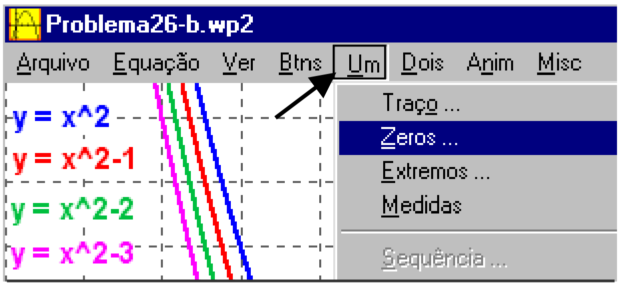


Figura 28

A aluna prosseguiu na resolução do item (e) começando pela função y = x^2 – 1, e verificou que as raízes são $x = 1$ e $x = -1$. Finalmente, ela queria marcar estes pontos no seu gráfico:

A5.30:– E aí, como é que eu marco?

Pe:– Você vai ter que ir na opção *Ponto* do *Winplot*.

A5.30:– Onde? Aqui?

Pe:– É. *Ponto*: 1 no x... Isso. Zero no y.

[pausa]

Pe:– Zero no y.

A5.30:– Zero?

Pe:– O primeiro ponto que você vai marcar não é esse, (1,0)?

A5.30:– Ah, isso era mesmo.

Pe:– Não é?

A5.30:– É. E é só isso?

Pe:– Agora você marca o (-1,0), que é a outra raiz.

Chamo a atenção do leitor para o fato de que está presente aqui um aspecto que já foi analisado no cenário 6: a ausência da relação entre o ponto (elemento geométrico) e o par ordenado correspondente (elemento numérico). Neste caso específico, a aluna demonstrou que não era natural, para ela, que um ponto sobre um dos eixos fosse um par ordenado com uma coordenada nula. Na primeira parte desse episódio precisei chamar sua atenção para a forma como tinha marcado os vértices das parábolas, localizados sobre o eixo y: ela registrara somente a ordenada do ponto, ignorando o valor zero para as abscissas. Em seguida, assim como fizeram outros alunos em outros momentos, manifestou pouca familiaridade com o nome zero, para a raiz de função. E nesta última parte do diálogo, deu sinais de que não tinha consciência do sentido que tinha esse nome, ou seja, da relação entre um ponto sobre o eixo x e o par ordenado cuja ordenada é 0(zero), razão pela qual se chama zero da função.

Apenas mais um exemplo de como o nome zero não era conhecido e, tampouco, significativo para aqueles alunos. A dúvida era como obter, pelo *Winplot*, a raiz da função $C_T = 200 + 325p$:

A3.30:– Professora, como é que faz (para determinar esse ponto)?

Pe:– Faz assim: *Zeros*... Abra essa janela. Quer ver? Pede a outra equação, a equação da reta.

A3.30:– A outra equação...

Pe:– Ele [o *software*] fala que número é o zero.

A3.30:– Menos 0,61.

Pe:– Está vendo? Pra essa equação essa é a raiz. Se eu quiser a outra raiz... Veja se tem outra e peça *próximo*.

A3.30:– Como é o nome desse ponto?

Pe:– Raiz ou zero... da função.

O leitor pode observar que no enunciado do problema 9, de que trata o próximo episódio, também ocorre o emprego das expressões raiz e encontro com o eixo. Novamente está ausente o termo zero, que é o nome utilizado pelo *Winplot*.

Exercícios Grupo 04

Objetivos:
(a) Construir gráficos das funções afins.
(b) Determinar raízes, monotonicidade e sinal.

1. Para cada uma das funções a seguir, pede-se:
   - Traçar o gráfico
   - Verificar se é crescente ou decrescente.
   - Determinar a raiz e o encontro com o eixo y.
   - Verificar para que valores de x a função é positiva ou negativa (sinal das funções).

(a) $y = 2x - 3$	(b) $y = \frac{x}{3} + 1$	(c) $y = -2x + 3$

Problema 9

Um aluno me perguntou sobre o sinal das funções. A partir do gráfico de y = 2x - 3, eu apontava para a raiz e explicava:

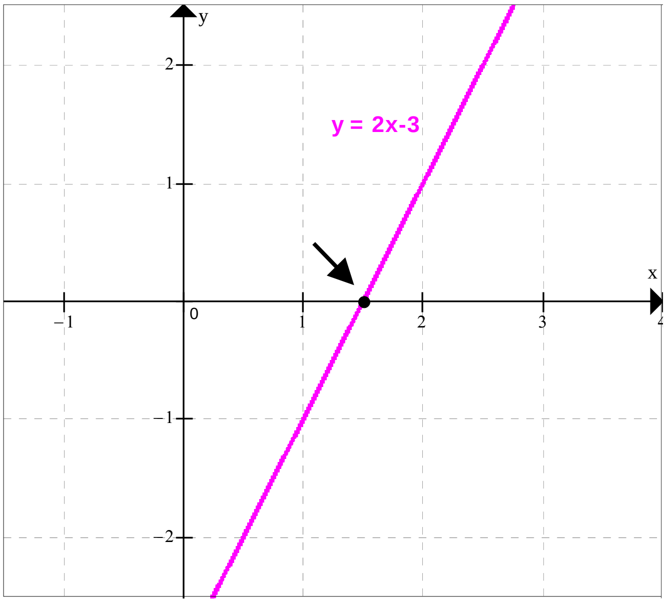


Gráfico 50

Pe:– [...] Está vendo? **O y** é assim: desse ponto pra esquerda [x < 1,5] é negativo...

A5.20: – Isso.

Pe:– ...e desse ponto pra direita [x > 1,5]...

A5.20: – Positivo.

Pe:– E como é que se chama este ponto?

A5.20: – Esse é uma interseção!

Pe:– Mas não tem um nome especial o ponto onde um gráfico cruza o eixo x?

A5.20: – Raiz?

Pe:– Raiz. Por isso a raiz é importante.

Neste caso, o aluno mostrou que tinha conhecimento dos termos raiz e interseção. E ele entendia, corretamente, que a raiz de uma função é o ponto obtido pela interseção do gráfico da função com o eixo x. Além disso, me parece que esse entendimento fazia com que o termo interseção tivesse mais sentido para ele, por isso ele o utilizou antes de se lembrar do termo raiz.

Com efeito, ao conversar com os alunos sobre os zeros, com freqüência vinham à tona termos como interceptos e interseções, que também foram motivo de confusão e questionamentos. Porém, embora também esteja relacionado à nomenclatura própria da linguagem matemática, neste caso o conflito era causado por diferenças de significado entre os termos que estávamos utilizando em aula e os que o *software* utiliza para nomear seus recursos.

Um dos momentos em que isto surgiu foi quando uma dupla me perguntou como obter, pelo *software*, as coordenadas do ponto de equilíbrio entre duas curvas, uma de demanda e uma de oferta:

B3.9:– Mas para saber aquele ponto ali, exato... Como é que é?

A3.9:– É. Exato.

Pe:– *Interseções*, então. A interseção é sempre entre duas curvas, então você vai à opção *Dois* e, em seguida, *Interseções.*

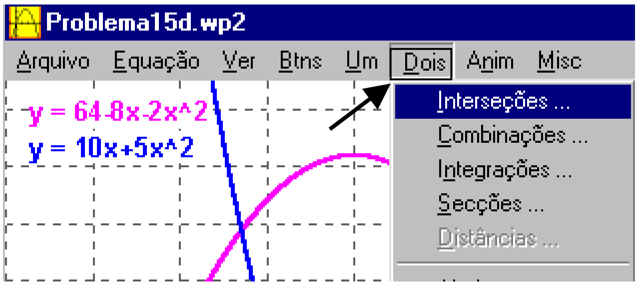


Figura 29

A aluna abriu a janela e verificou quais eram os pontos de interseção entre as curvas:

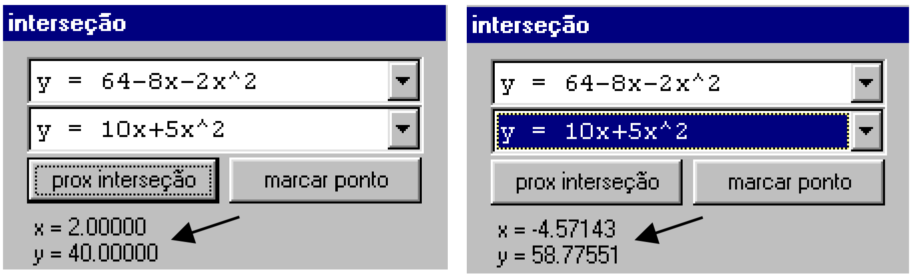


Figura 30

Pe:– Olhe lá. A interseção entre essa curva e essa...

B3.9: – É aquele ponto esquisito.

Pe:– ...é no ponto (2,40)... E se tiver mais uma... Pede *próximo*.

A3.9:– *Próximo*.

B3.9:– É aquele ponto lá [(-4,57143; 58,77551)].

Ou seja, o que o *Winplot* chama de *Interseção* é o ponto comum entre duas curvas, por isso ele tem o recurso na coluna correspondente à opção *Dois* do menu. Para utilizar a opção *Interseções,* do *Winplot*, o usuário precisa, de fato, fornecer ao *software* as expressões de duas funções. Ele não inclui nesta opção a possibilidade de obter as interseções de uma curva com os eixos coordenados. A menos que o usuário forneça a expressão de uma função que coincida com o eixo, como a reta y = 0, coincidente com o eixo x:

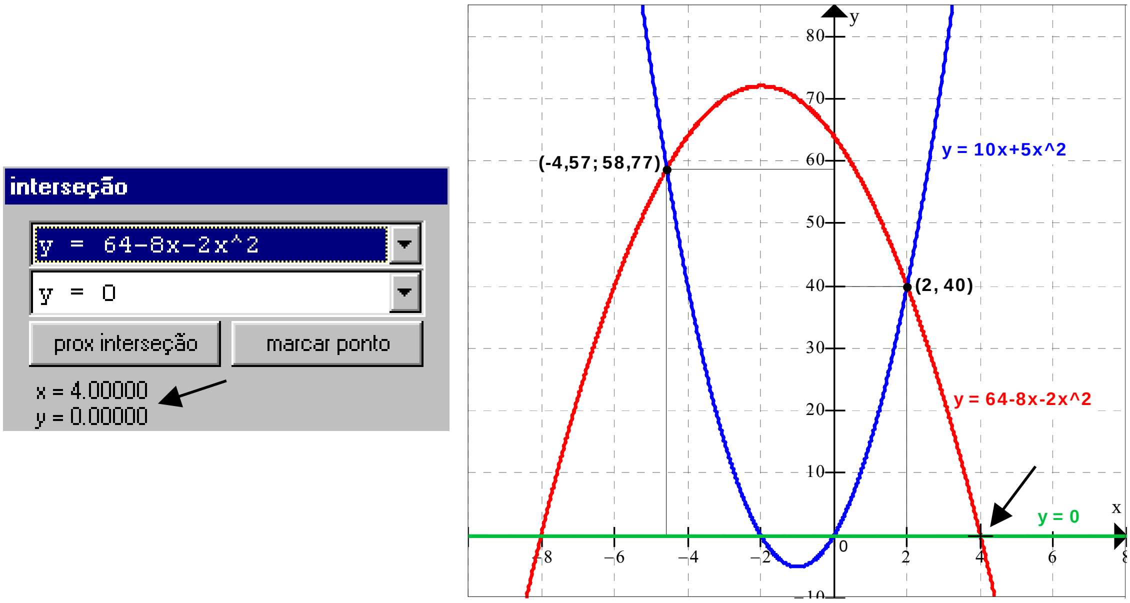


Figura 31

Porém, no estudo de funções de uma variável real, expressas em coordenadas cartesianas, que era o que estavam fazendo aqueles alunos, a interseção com o eixo y não poderia ser obtida desta forma. A reta que coincide com ele não representa uma função e, sendo assim, não poderia ser introduzida no *Winplot,* pois ele "exige" uma expressão dada por $f(x) = \dots$

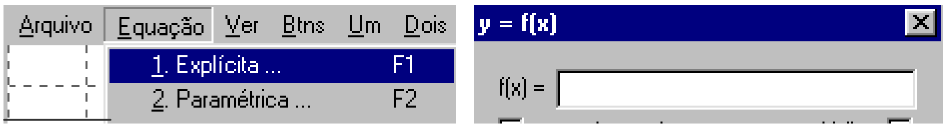


Figura 32

No *Winplot*, há opções específicas, conforme já comentado anteriormente, que podem ser utilizadas para determinar as interseções com os eixos: *Zeros*, para obter as coordenadas da interseção do gráfico com o eixo x; e *Traço*, onde se pode calcular a imagem de x=0 e, assim, determinar a ordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo y.

Portanto, o termo *Interseção,* no *Winplot*, não tem o significado que a aluna dera ao termo interseção, no diálogo anterior a este apresentado, onde chamou o ponto (1,5 ; 0) de interseção do gráfico com o eixo x, embora ambos possam ser considerados corretos. Certamente, minha fala "a interseção é sempre entre duas curvas", não corresponde à realidade. Entretanto, naquele momento, eu estava querendo que os alunos entendessem de que forma estão organizados os recursos disponíveis no *software* que estavam utilizando.

Não é para menos que, ao resolver o problema 20, este imbróglio voltou a aparecer envolvendo, agora, mais um termo – o termo intercepto:

Conhecendo-se a função Custo Total e Receita Total dadas por $C_T = 2^q + 11$ e $R_T = 4^q - 1$, determinar: (a) O ponto crítico. (b) Os interceptos. (c) Esboçar o gráfico de C_T e R_T. (d) Análise econômica.

Problema 20

A8.30:– O ponto crítico a gente dá através do...da interseção...?

Pe:– É.

A8.30:– E esses interceptos? O que são?

Em aula, o professor havia adotado o termo intercepto para designar a interseção dos gráficos das funções com os eixos coordenados. Eu ia explicando e apontando para os eixos, na tela do computador:

Pe:– São as interseções do gráfico com **o eixo** y e com **o eixo** x.

Quando apontei para o eixo x, a aluna se lembrou de mais um nome:

A8.30:– A abscissa, lá?

Pe:– Neste caso são os zeros...

A8.30:– É abscissa ou assíntota, que chama?

Mas confundiu os termos abscissa e assíntota. Esclareci à aluna, primeiramente, o que significam os termos abscissa e ordenada:

Pe:– Isto se chama abscissa; é o nome da coordenada x do ponto.

A8.30:– Hum...?

Pe:– E a coordenada y se chama ordenada.

Aproveitarei a seqüência deste diálogo para incluir o termo assíntota no rol dos que causavam muitas dúvidas nestes alunos:

A8.30:– E o que é assíntota?

Pe:– Assíntotas são aquelas linhas... Por exemplo: a reta y = -1, para a função $R_T = 4^q - 1$ do seu problema; que não é eixo... Que a gente sabe que daquela linha o gráfico não passa.

A8.30:– Mas eu não vejo a diferença, Prô.

Pe:– Por exemplo, quando você desenhou esse gráfico...

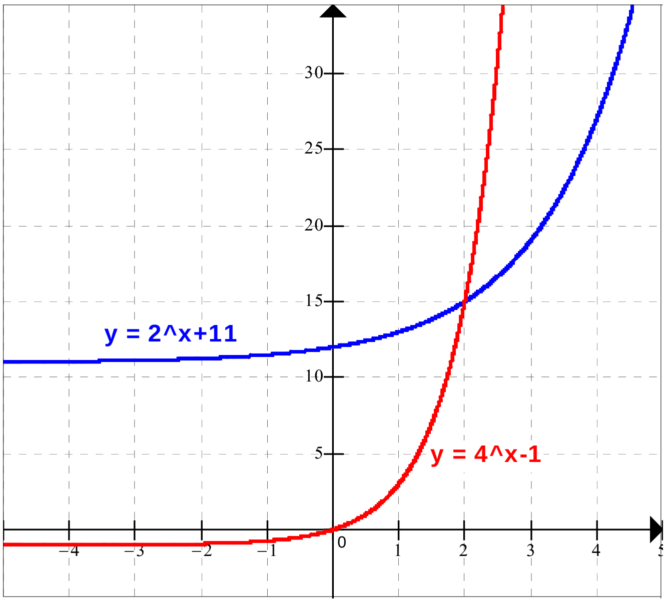


Gráfico 51

Novamente, eu ia apontando para os elementos na tela do computador:

Pe:– Isso é eixo, olhe, eixo x; esse se chama eixo das abscissas. Esse é o eixo das ordenadas. Agora... Nós podemos imaginar que seu gráfico tenha mais uma linha [y = -1] aqui. Ela não faz parte do gráfico, na verdade. A gente desenha essa linha só pra dizer: "Olha, o gráfico **não** passa... desse número que, nesse caso, é -1.

A8.30:– Está certo.

Pe:– Então, isso é a assíntota.

A8.30:– Tá

Pe:– E isso é eixo das abscissas, e isso é eixo das ordenadas. Agora... há gráficos que "tendem" ao próprio eixo...

A8.30:– Ao próprio eixo x?

Pe:– É. Por exemplo, o da função exponencial y = 4^x. Neste caso ele é eixo das abscissas, porque é o eixo x...

A8.30:– Tá.

Pe:– ...e, no entanto, também é assíntota, porque o gráfico da função se aproxima dele, mas nunca o atinge. Ele é assíntota porque ele é a linha que "segura" o gráfico.

A8.30:– Entendi.

[...]

A aluna esboçou o gráfico da função $R_T = 4^q - 1$ no caderno e, com ele, a assíntota horizontal y = -1. Em seu esboço, a curva exponencial de fato encostava na reta y = -1. Ela apontou para o ponto onde isso ocorria e continuou:

A8.30:– É isso que é o intercepto?

Ainda permanecia a dúvida do início do diálogo, isto é, a aluna estava confundindo o que o *Winplot* chama de *Interseção* (obtida por duas curvas, neste caso $R_T = 4^q - 1$ e $y = -1$) e o que não só o professor mas, também, muitos livros didáticos chamam de interceptos (obtidos entre uma curva e os eixos coordenados).

O fato é que os interceptos são particulares interseções, e o professor diferenciava um termo do outro. Tentei levar a aluna a perceber isso, e o diálogo sobre as assíntotas se ampliou com a retomada do significado de intercepto:

Pe:– Não. Intercepto é esse ponto, esse ponto...
A8.30:– Que encosta no eixo x...?
Pe:– ...que encosta **no eixo**, é. São os pontos onde o gráfico cruza **os eixos**.
A8.30:– É verdade.
Pe:– E não as assíntotas. Os eixos!
A8.30:– Eu vou anotar.
A8.30 e Pe:– São os pontos...
Pe:– ...onde o gráfico cruza **os dois** eixos: o eixo x e o eixo y.
A8.30:– Tá. Então é isso que é intercepto. Eu entendi agora.

Na realidade, não só as opções de termos que o professor faz para denominar os objetos matemáticos (entre os disponíveis na linguagem matemática), como também as características da linguagem corrente em aula se mostraram geradores de conflitos durante a resolução de problemas com a utilização do computador, para aqueles alunos. E o termo assíntota está relacionado a estes conflitos. O modo como os alunos aprenderam e compreenderam esse conceito foi bastante curioso. As assíntotas foram apresentadas aos alunos, pelo professor, numa aula sobre funções racionais. Naquela aula, realizada sem o computador, após resolver um problema gerador, que orientou a introdução desse tipo de função, o professor falou aos alunos a respeito de algumas transformações que ocorrem no seu gráfico. Partindo da função $y = \frac{1}{x}$, esboçou o gráfico, e disse que as retas x = 0 e y = 0 funcionam como "muros", que limitam a curva que representa a função. Na seqüência foi esboçando os gráficos das funções $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$, $y_2 = 2 + \frac{1}{x}$, $y_3 = \frac{1}{x+1}$, $y_4 = \frac{1}{x-2}$ e $y_5 = 2 + \frac{1}{x-3}$, entre outras. A cada novo gráfico ele destacava as assíntotas com giz de outra cor de tal modo que os alunos percebessem que constantes positivas somadas ou subtraídas à expressão de $y = \frac{1}{x}$ provocam deslocamento do gráfico paralelamente ao eixo y. Também mostrou que o deslocamento se faz paralelamente ao eixo x, caso estas constantes sejam somadas à ou subtraídas da variável independente x, respectivamente, para a esquerda e para a direita.

Numa outra aula, retomando este assunto, o professor lançou mão de mais uma metáfora bastante curiosa. Ele chamou de "ponto bolinha" o ponto de coordenadas (a,b) em que as assíntotas vertical e horizontal da função $y = \frac{1}{x-a} + b$ se cruzam. Ele apresentou o seguinte desenho aos alunos, já mostrado nos cenários 5 e 7:

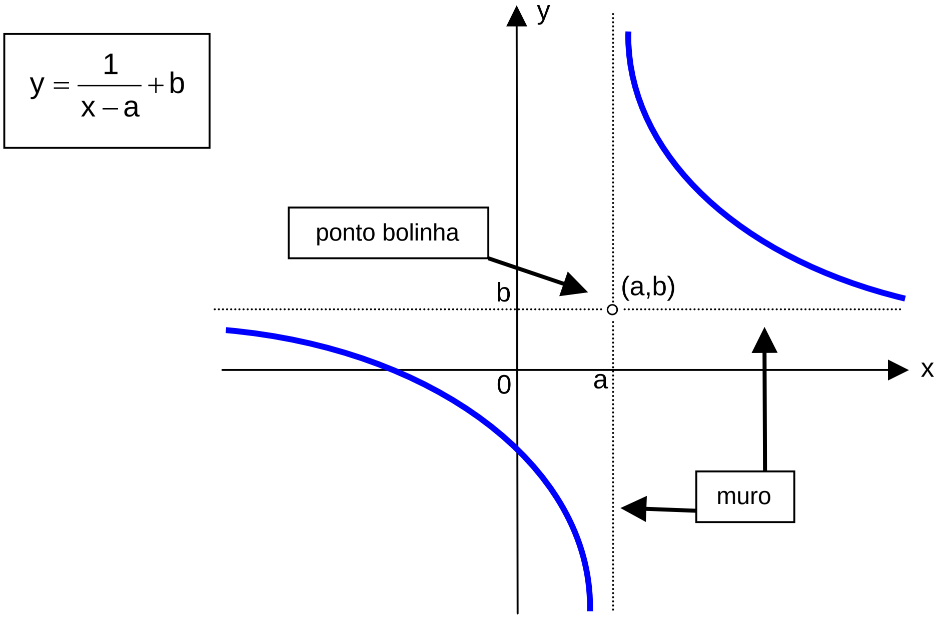


Gráfico 52

Tendo essas aulas como referência é que pretendo analisar os dois diálogos que apresentarei agora, e que também já foram apresentados em outros cenários. O primeiro está relacionado ao problema 12:

Exercícios Grupo 08

Objetivos:
(a) Construir gráficos de funções hiperbólicas.
(b) Determinar as assíntotas.
(c) Determinar os pontos de encontro com os eixos.

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema cartesiano.
2. Determinar as assíntotas e os encontros com os eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{x} \\ f_2(x) = \frac{1}{x+1} \\ f_3(x) = \frac{1}{x-1} \\ f_4(x) = \frac{1}{x-2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2 - \frac{1}{x} \\ f_2(x) = 2 - \frac{1}{x+1} \\ f_3(x) = 2 - \frac{1}{x-1} \\ f_4(x) = 2 - \frac{1}{x-2} \end{cases}$

Problema 12

A5.30:– Grupo 8...

Pe:– Gráfico, assíntotas e encontro com os eixos.

[...]

A5.30:– Então vamos lá: "Construir os gráficos", já está aqui. "Determinar as assíntotas..." Assíntotas...? Cadê esse negócio de assíntota, aqui?

[risos]

Pe:– "O negócio de assíntota"... [Assíntotas] são aquelas retas... Ele explicou lá na sala de aula... Assim: isso é um muro, isso é um muro.

A5.30:– Isso.

Pe:– Daqui o gráfico não passa, daqui também não passa, né?

A5.30:– Ah, Prô, já sei, olhe! Aqui vai ser o -1 [para a função $f_2 = \frac{1}{x+1}$] e aqui vai ser... o zero [para a função $f_1 = \frac{1}{x}$]?

Pe:– Exatamente.

E o segundo diálogo refere-se à função $q_o = -2 + \frac{100}{p+10}$, do problema 3. A aluna fez o gráfico da função digitando a expressão, no *Winplot*, de três modos diferentes e não sabia qual estava correto:

A5.3:– Então, porque eu fiz "sem", e deu uma coisa totalmente diferente... Eu fiz "com", dá totalmente diferente... Eu fiz com dois parênteses, deu totalmente diferente!

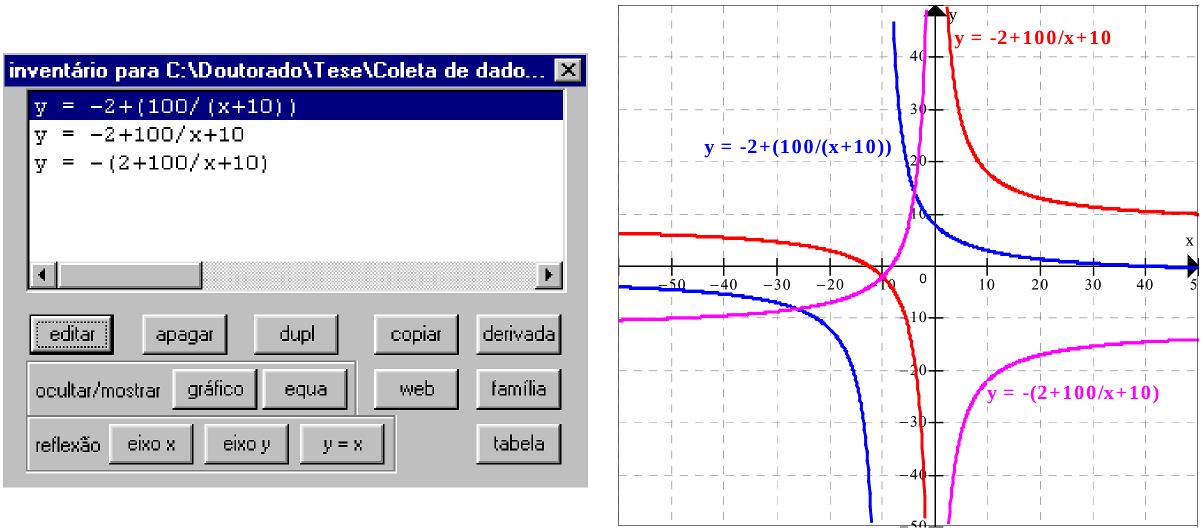


Figura 33

Tivemos um longo diálogo, mas ela e seu colega, na dupla, não estavam conseguindo decidir-se. Até que eu perguntei:

Pe:– Vamos lembrar daquele... ponto bolinha? Qual é o ponto bolinha aqui?

O colega respondeu prontamente:

B5.3:– Menos 10 e menos 2.

Esta prontidão em responder sobre o "ponto bolinha" também ocorreu quando falei dos "muros", no diálogo anterior a este. E a aluna tinha iniciado seus questionamentos assim: "Assíntotas...? Cadê esse negócio de assíntota, aqui?", sugerindo que não estava reconhecendo o termo assíntota. Conhecer os termos, os nomes dos objetos matemáticos, de fato não era o forte dos alunos daquela turma. Mas as metáforas que o professor utilizava como apoio eram realmente significativas para eles. Isso era notório. Percebia isso quando eu também recorria a elas para ajudar os alunos a sanar as dúvidas que me apresentavam. Relembro ao leitor parte de um diálogo sobre este mesmo problema 3:

Pe:– Olhe para a equação da função dada e me diga: qual é o domínio dessa função?

A5.9:– Hã?

Pe:– Qual é o número que a gente não pode colocar no lugar do p?

A5.9:– Menos 10... porque é zero.

Quando eu utilizei o termo domínio, o aluno não entendeu o que eu estava perguntando. Mas ao refazer a pergunta utilizando uma linguagem menos técnica, digamos assim, ele conseguiu não só entender o que eu estava perguntando, mas responder corretamente, o que significa que sabia o conteúdo.

No entanto, este tipo de ocorrência não surgia na sala de aula normal. Mas era freqüente no laboratório e nos momentos em que os alunos me procuravam para ajudá-los nos problemas do trabalho.

Os dados sugerem que o conhecimento de alguns termos matemáticos, e é claro de seu significado, é essencial para a utilização de *softwares* como o *Winplot* em que tais termos identificam os recursos oferecidos por ele. Isso se verificou no caso das dúvidas envolvendo os *Zeros* de funções, uma vez que as expressões mais utilizadas pela turma, e inclusive pelo professor, eram raízes ou o ponto de encontro com o eixo ou, até mesmo, intercepto com o eixo. Alguns enunciados de problemas apresentavam, por vezes, uma linguagem bastante próxima dessa, corrente em sala de aula: determinar as raízes e os encontros com os eixos. Mas o *software* não tem estas opções!

Também surgiram evidências de desencontros entre os significados dos termos utilizados pelos alunos, pelo professor e por mim, e os disponíveis no *Winplot*. Foi o que ocorreu com os termos intercepto, interseções (conceito matemático) e *Interseções* (nome utilizado, no *Winplot*, para os pontos comuns entre curvas).

Penso que o caso dos termos assíntota e domínio deva ser entendido sob uma outra perspectiva, pois não são elementos que identificam recursos do *software*. A carência de domínio destes e de outros termos se manifestava, essencialmente, no laboratório porque lá os alunos tinham menos apoio do professor na compreensão do problema ao iniciarem a resolução. Na sala de aula normal, em geral o professor dava algumas orientações sobre o problema, antes de os alunos iniciarem o trabalho. Mas não fazia isto no laboratório. Uma vez que os enunciados eram distribuídos em folhas impressas, cada dupla de alunos, ou cada aluno individualmente, tinha que ler e compreender o contexto de aplicação, os dados, as solicitações feitas no problema. E nos enunciados, a linguagem não tinha o caráter metafórico que tinha a linguagem falada do professor. Devo lembrar, também, ao leitor que, em diversas ocasiões, o professor propunha problemas "sem enunciado". Ele dizia aos alunos o que queria e me parece que isso era suficiente, pois as dúvidas eram mais freqüentes nos problemas "com enunciado". Porém, no laboratório, uma vez que o professor quase não conseguia falar a toda a turma, os alunos tinham que tratar de entender os enunciados dos problemas para resolvê-los. Então essas dúvidas apareciam. Foi isso que aconteceu quando o problema solicitou aos alunos que determinasse as assíntotas das funções, os interceptos com os eixos e, em outras ocasiões, quando lhes era pedido que analisassem o sinal das funções.

Foram os problemas propostos no trabalho, resolvidos no *Winplot*, destaque no tocante a este aspecto da linguagem. No enunciado do problema 18.5 lê-se: "Resolver graficamente e analiticamente os sistemas de equações". E alguns alunos vieram me perguntar o que significa "graficamente" e, especialmente, o que significa "analiticamente". Eles de fato não sabiam a diferença; não tinham vivenciado, até então, a possibilidade efetiva de utilizar estas duas formas de resolução.

Acrescentemos ainda, aos termos que os alunos deveriam dominar, aqueles relacionados ao contexto de aplicação dos problemas, isto é, os voltados à área de Administração de Empresas. Para as interseções entre curvas eram utilizadas expressões como ponto de equilíbrio e ponto crítico. Vejamos como o professor falou à turma, certa ocasião em que dava orientações sobre um determinado problema:

Pr:– Se vocês fizerem isso, olhem, as duas curvas vão aparecer aqui, neste desenho. E os dois [gráficos] vão se encontrar. O número de encontro é o 400, não é? Então. Este aqui é a receita e este é o custo. Àquele ponto lá nós chamamos ponto crítico.

O ponto crítico, no início da coleta de dados, causava estranheza inclusive a mim pois, segundo era de meu conhecimento, ele denotava os pontos onde a derivada primeira de uma função se anula. Entre as anotações que fiz no meu diário, no **primeiro** dia de minhas observações, está a frase: "Particularmente, estranho esta expressão 'ponto crítico', utilizada pelo professor, para a interseção entre as funções de custo e receita; creio não ser apropriada". Também no exame de qualificação, a conveniência da utilização da expressão ponto crítico para designar interseção entre curvas foi questionada. Porém ela é, de fato, utilizada na área de Negócios. A imagem abaixo foi retirada de um livro de Cálculo voltado a essas áreas (Morettin; 2003) em que os problemas dão destaque às aplicações encontradas em Administração de Empresas, Economia, Finanças, Ciências Contábeis e áreas afins:

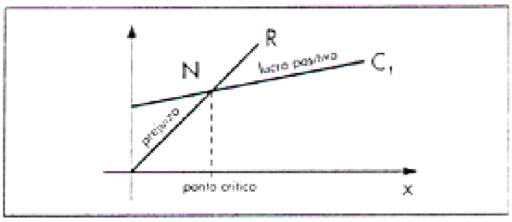
> Se colocarmos o gráfico da função receita desse exemplo e o da função custo do exemplo anterior num mesmo sistema de eixos teremos a Figura 3.30. Nessa figura, podemos observar que os gráficos interceptam-se num ponto N; nesse ponto a receita e o custo são iguais e conseqüentemente o lucro é zero. A abscissa desse ponto é chamada de ponto de nivelamento ou ponto crítico e indicada por x^*.
>
> Figura 3.30: Ponto crítico ou de nivelamento.
>
> 
>
>
> Observemos que:
>
> Se $x > x^*$, então $R(x) > C(x)$ e portanto $L(x) > 0$ (lucro positivo).
>
> Se $x < x^*$, então $R(x) < C(x)$ e portanto $L(x) < 0$ (lucro negativo ou prejuízo).

Figura 34

É preciso que o professor e, é claro, os alunos tenham consciência dessas coisas. Expressões diferentes podem ter significados iguais ou semelhantes, e expressões iguais podem ter significados diferentes. Eu pensava em como esse professor iria tratar o ponto crítico quando chegasse ao estudo de derivadas, com aqueles alunos. E o que ele fez foi, simplesmente, não utilizar esta expressão ao igualar a derivada a zero para pesquisar os possíveis extremos das funções. Foi a opção que fez e, conforme já manifestei antes, a atividade docente é mesmo densa de momentos em que é preciso optar, decidir.

Essas reflexões me levam a relembrar, também, quando o professor sugeriu:

Pr:– Acho que nós não podemos complicar os problemas. E temos que usar enunciados mais simples, senão os alunos não entendem.

Os enunciados dos problemas propostos por esse professor eram, inegavelmente, simples. Mas considero esta simplicidade, sobretudo, no tocante à concisão da linguagem, na brevidade dos enunciados, em geral, e no aspecto de que eram, em vários momentos, já conhecidos dos alunos. Quando resolviam vários problemas numa mesma aula, muitas vezes apenas a função envolvida no novo problema era diferente daquela do problema anterior. E também havia, no repertório do professor, um conjunto mais ou menos padrão de problemas para os quais ele nem apresentava o enunciado. Conforme já comentei, eram problemas cujos enunciados eram já familiares aos alunos e seu objetivo era destacar o tipo de função envolvida e/ou fixar processos de resolução. E estes, de fato, os alunos nem precisavam ler para saber o que era para fazer.

Isto também pode ter-se refletido na atividade de resolução de problemas daqueles alunos: era marcante como, ao chegarem ao laboratório e já de posse dos enunciados dos problemas, os alunos ficavam chamando para perguntar "o que era para fazer". Eles não liam os enunciados:

A3.20:– Agora... Isso está certo?

Pe:– Você igualou as duas [C_t e R_t]?

A3.20:– Tem que igualar, né?

Pe:– Pra fazer o quê? Porque aqui vocês têm que fazer o gráfico!

A3.20:– Não sei ...por que eu igualei...

Pe:– Então, vamos ser bem objetivas? Segue o roteirinho [enunciado]!

Em outro momento:

A5.30:– Aqui Prô, "vê se precisa marcar ponto"... Esse aqui, da letra (d) deu -2. Eu preciso marcar o pontinho?

Pe:– O que ele está pedindo no enunciado?

A5.30 e Pe:– Construir o gráfico.

Pe:– Então não precisa marcar ponto nenhum.

E mais uma passagem:

A5.30:– Aqui...eu acho que eu vou ter que organizar melhor, né?

Pe:– É... eu não poria... esses pontos de interseção.

A5.30:– Quando que precisa marcar o ponto de interseção?

Pe:– Vamos ver o enunciado?

A5.30:– Vamos.

Pe:– O que está pedindo?

A5.30:– Não está pedindo a interseção.

Pe:– Então. É por isso que está dando essa confusão. É porque você tem, aí, muitas retas. Você vai procurar todas as interseções?

A5.30:– Nossa! Tem razão!

Visivelmente, naquele ambiente, a leitura de enunciados e o desenvolvimento de habilidades de compreensão e interpretação não eram prioridade. Entretanto elas se mostraram essenciais na atividade de resolução de problemas com utilização do *Winplot*, para que os alunos tivessem condições de: entender o que o problema estava solicitando, saber que possibilidades representam os recursos disponíveis no *software* e de colocar esses recursos disponíveis "a serviço" das solicitações feitas no problema, ou seja, de sua resolução.

Para encerrar este cenário apresentarei, ainda, dois pequenos episódios. O primeiro se refere às funções do problema 16.2:

Exercícios Grupo 01

2. Seja a função dada por $y = \pi^2$, utilizando a função "traço" verifique e marque os pontos da função no gráfico para:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
$\sqrt{2}$	

Problema 16.2

A5.30:– Eu não sei fazer isso aqui, Prô! Está vendo, a função está certinha...?

Pe:– Está. Agora é na opção *Traço*, porque esse valor é de x e ele [o *Winplot*] calcula o y.

A5.30:– Mas tem que dar sempre o mesmo resultado, tanto que eu marquei o ponto aqui.

Pe:– Por que tem que dar o mesmo resultado?

A5.30:– Do... Porque o... Espera aí... Porque o... Sempre o x é que varia.

Pe:– Isso. E por que o y não varia?

A5.30:– Por que o y não varia?

Pe:– Hã...?

A5.30:– Porque ele é constante?

Pe:– Exatamente! O y, olhe, é sempre o valor de π elevado ao quadrado.

A5.30:– Tá.

Pe:– Ele é um valor constante. Por isso a função se chama "função constante".

A5.30:– Ah, é?!

O segundo episódio ocorreu a partir da dúvida sobre o formato do gráfico da função $R_B = 10.2^t - 16$:

Pe:– Isso aqui parece reta. É reta? [...] Aquilo [$R_B = 10.2^t - 16$] é equação de reta?

B8.4:– Acho que não.

Pe:– Não é equação de reta? Então por que o gráfico está parecendo reta?

[...]

Pe:– Ali, o x está no **expoente**, isso indica função **ex**...

Pe e B8.6:–...**ponencial**.

Pe:– Por isso, ela se chama função exponencial. E o gráfico não devia dar uma reta.

Uma última percepção que tive está apoiada, também, nos exemplos apresentados desde o início deste cenário, mas estes dois últimos episódios servem para reforçá-la. Percebi, em muitos momentos, que o conhecimento dos termos próprios da Matemática, incluindo a compreensão de seu significado, constitui elemento essencial no monitoramento das atividades de resolução de problemas com a utilização do computador.

A rapidez com que o computador executa os processos e comandos, a beleza e precisão não só de suas imagens, mas dos resultados numéricos que fornece, entre outros aspectos, fazem com que alunos como os participantes de minha pesquisa, iniciantes na sua utilização e deficientes de conhecimento matemático prévio, depositem muito crédito e demasiada confiança nos resultados fornecidos pelo computador. Estes estudantes precisam de referências às quais possam recorrer nos momentos de decisão, e acredito que os aspectos relativos à linguagem, que percebi em minha coleta de dados e registrei neste cenário, embora possam ser ainda muito melhor pesquisados e aprofundados, constituem não só uma referência possível, mas muito valiosa. Ela ajuda o aluno a compreender, a dar sentido ao que está fazendo.

5.4.2.2 - LIMITAÇÕES

A razão para dedicar todo este cenário à linguagem, na perspectiva que adotei aqui, ou seja, tratando da nomenclatura e da terminologia empregada em aula, é que ela foi destaque no contexto de minha pesquisa. Minha intenção não é, de modo algum, supervalorizar a nomenclatura em detrimento da compreensão dos conceitos matemáticos, mas considerar a linguagem, da qual a nomenclatura faz parte, sob uma ótica mais abrangente. Refiro-me ao domínio dos termos e, especialmente, do **significado**, não só da linguagem matemática, mas das linguagens próprias de todos os elementos envolvidos no contexto em que o ensino se realiza. Nas situações de resolução de problemas, em que foram colocados os alunos participantes de minha pesquisa, conviviam, com a linguagem matemática, a linguagem do *software*, a linguagem da área de negócios e a linguagem do professor. Em especial, tentei analisar em que medida o domínio da linguagem matemática interferia no desempenho dos alunos nestas atividades. Não faltaram exemplos de que a falta desse domínio manifestou-se através das dificuldades que os alunos sentiram ao resolver os problemas utilizando o *Winplot*, *software* que se utiliza, essencialmente, da linguagem matemática para nomear seus recursos embora, como vimos, apresente algumas diferenças.

Uma vez que estes aspectos não foram percebidos pelo professor, o ensino que dirigia não dava especial atenção ou ênfase a eles. Considero procedente repetir que as metáforas de que se servia o professor, para explicar alguns conceitos matemáticos, faziam realmente sentido para aqueles alunos. Elas, porém, mostraram-se insuficientes para que eles adquirissem autonomia na leitura, compreensão e resolução dos problemas e, ademais, na utilização autônoma das opções disponíveis no recurso que mediava suas atividades, o *software* gráfico *Winplot*. É preciso ponderar sobre: "Propor problemas com enunciados mais simples", conforme sugeriu o professor. Até que ponto, abreviar ou eximir do vocabulário os termos mais "técnicos" facilita a compreensão, como deu a entender que era sua recomendação?

5.4.2.3 - AVANÇOS

Novamente, aqui, assumo a perspectiva, tônica ao longo de todo este trabalho, de que os fatos apresentados neste cenário representaram impulso para os alunos atingirem um novo patamar. Os alunos que participaram destes episódios tiveram oportunidades de compreender melhor e de ampliar suas compreensões acerca de determinados conceitos e, sob a ótica da linguagem, dar sentido ao que estavam fazendo.

Creio, também, que as percepções, aqui apresentadas referentes à linguagem, oferecem subsídios para que, como professores, tenhamos os olhos voltados a este aspecto no momento em que introduzimos um recurso, como um *software* gráfico ou outro, no contexto das atividades de ensino.

5.4.2.4 - TRANSCENDENDO OS DADOS E APONTANDO POSSIBILIDADES

Considero que o que ocorreu nos episódios apresentados neste cenário foi um confronto entre as linguagens próprias de todos os atores participantes do contexto: a linguagem da Matemática, do *software*, das aplicações à área de Negócios, das pessoas. Esse confronto sugere a possibilidade de uma nova abordagem de ensino, em que se dê maior atenção a estes aspectos relativos à linguagem, ou melhor, às linguagens.

Nomeadamente com respeito à linguagem adotada pelo professor, considero que poderia ir além das metáforas no tratamento dos conceitos matemáticos e dar maior ênfase aos termos que são convenções da linguagem matemática, bem como ampliar e/ou adaptar a linguagem às necessidades impostas pelo *software* que estão utilizando. E não só isso como, quem sabe, poder-se ia propor problemas voltados à linguagem - matemática, ou do *software*, ou das aplicações, ou à sua comparação.

Capítulo 6

OS DADOS À LUZ DA LITERATURA APRECIADA

Capítulo 6 - Os dados à luz da literatura apreciada

6.1 - A resolução de problemas com o computador e a resolução de problemas sem o computador

6.2 - A avaliação

6.3 - A linguagem

CAPÍTULO 6

OS DADOS À LUZ DA LITERATURA APRECIADA

> Nessa releitura dos meus textos, fui percebendo que, apesar de tê-los escrito solitariamente, nunca na realidade os fiz sozinha. [...] Nenhum autor é sozinho, todo autor é *parceiro*, nem que seja apenas de seus teóricos.
>
> IVANI FAZENDA

Neste capítulo pretendo ampliar as análises já realizadas no capítulo 5, relacionando as evidências recolhidas à literatura de pesquisa relacionada, isto é, àquela que trata de resolução de problemas e do uso das TI, especialmente os computadores, na Educação Matemática. Ao "relacionar o fenômeno de interesse com idéias de outros" (ROMBERG; 1992) o pesquisador poderá, entre outras coisas, esclarecer e ampliar os resultados obtidos através de sua investigação. É uma análise de dados diferente. É olhar para os dados através de novas lentes, o que permite percebê-los sob outras perspectivas.

Os trabalhos que serão comentados aqui já foram discutidos nos capítulos 2 e 3, ou seja, serão retomados. Eles foram orientação e inspiração, e estiveram efetivamente presentes em cada etapa da pesquisa. Os capítulos 2 e 3 foram sendo construídos desde o início da pesquisa. Algumas referências foram adicionadas após a coleta de dados porque novos resultados de pesquisa sempre surgem, e a análise dos dados faz emergir novos aspectos. E para que o pesquisador compreenda melhor o que emergiu de sua investigação, as leituras de textos relacionados ao tema da pesquisa devem ser uma prática que se estende por todo o tempo em que ela se realiza.

Com o propósito de organizar melhor a apresentação das análises, estruturei este capítulo seguindo a ordem em que os dados foram apresentados no capítulo 5. Assim, primeiramente tratarei dos aspectos que foram discutidos na seção 5.2 em que o subtema era a resolução de problemas com o computador e a resolução de problemas sem o computador. Então, abordarei os aspectos relacionados ao que foi percebido sobre a avaliação e, em seguida, abordarei a linguagem.

6.1. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM O COMPUTADOR E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEM O COMPUTADOR

Com relação à dinâmica das aulas que se realizaram naquele semestre (cenário 1), uma característica marcante foi que as aulas no laboratório destinaram-se à resolução de problemas aplicativos, como os chamava o professor. Naquele contexto, o computador estava a serviço da resolução de problemas em que os alunos iriam aplicar os conteúdos que já haviam sido tratados na sala de aula. A metodologia adotada era o ensino de Matemática via resolução de problemas; aquela em que os conteúdos são apresentados e os conceitos construídos sempre a partir da resolução e discussão de um problema gerador. Entretanto, esta prática não era realizada no laboratório de Informática, mas sempre na sala de aula normal. Deste modo, os problemas que aqueles alunos resolveram tinham objetivos diferentes em cada um desses ambientes.

A classificação de problemas de acordo com seu objetivo está estreitamente ligada a uma concepção de ensino, conforme foi observado em alguns trabalhos (DANTE, 2000; CONTRERAS, CARRILLO, 1998). Tomando-os como referência considero que a abordagem dada aos problemas que os alunos participantes de minha pesquisa resolveram no laboratório **se aproxima** de dois tipos de problemas apresentados por Dante (2000): dos exercícios de algoritmos, em que o principal objetivo é treinar a habilidade de execução de um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores; e dos problemas-padrão, aplicados para fixar fatos básicos e algoritmos, vinculando seu emprego a situações do dia-a-dia em que é preciso transformar linguagem usual em linguagem matemática.

Ao utilizar a expressão **se aproxima**, o faço porque também percebo diferenças, além das semelhanças. Em minha pesquisa, os problemas resolvidos no laboratório destinavam-se, sim, a reforçar conhecimentos anteriores. Tanto que a forma dos enunciados dos problemas, propostos no laboratório, era semelhante àquela dos já resolvidos apenas com lápis e papel na sala de aula. Apesar disso, tais problemas não serviram de instrumento para o treino de habilidades de execução de algoritmos, como nos exercícios de algoritmos de que trata Dante (2000). Ao serem colocados para resolver os problemas utilizando o *Winplot*, os alunos experimentaram outros processos de resolução para aqueles problemas. Quanto a isso, vale lembrar: mesmo quando era apropriado que os alunos relacionassem o que estavam fazendo no computador com suas experiências e procedimentos adotados na sala de aula, eles não o faziam. Não recorriam, por exemplo, às tabelas para delimitar melhor a área de gráfico. Tampouco faziam uso de conhecimentos de Álgebra básica, como a ordem de execução das operações, para digitar as expressões das funções no *software*.

E, quanto aos problemas-padrão, a semelhança está em que eram problemas vinculados a situações do dia-a-dia, no caso, do cotidiano do Administrador de Empresas. Esta era uma tônica explícita no contexto de minha pesquisa. O professor intencionalmente propunha quase todos os seus problemas relacionados à área de Negócios. Mas esta característica trouxe para estes problemas a necessidade de considerar a linguagem específica desta área, que eu não chamaria de "linguagem usual", como fez Dante (2000). E, é claro, ao serem resolvidos com a mediação de um *software* gráfico, a linguagem do *software* também entrou em cena, configurando novas questões e trazendo implicações para a resolução de problemas. No meu caso, portanto, outras linguagens, além da usual e da matemática, convivem e configuram os problemas resolvidos pelos alunos.

No caso das opções definidas por Contreras e Carrillo (1998), a que melhor identifica a concepção de resolução de problemas presente em minha pesquisa é a tecnológica, definida pelos autores como aquela que visa, principalmente, dotar a teoria de significado pragmático. Nesta concepção, os problemas em geral têm processo e solução **únicos** e são propostos como aplicação da teoria ensinada.

Foi exatamente este aspecto da unicidade que me conduziu à caracterização dos problemas resolvidos pelos participantes de minha pesquisa como problemas fechados. Entre os trabalhos de autores que abraçam esta forma de classificar problemas, como abertos ou fechados (SHIMADA, 1997; PEHKONEN, 2003; VAN DE WALLE, 2001; HASHIMOTO, BECKER, 1999), identifico os de Shimada (1997) e Pehkonen (2003) como os que têm maior consonância com meu estudo. Eles caracterizam como fechados os problemas de solução única e nos quais tanto a situação inicial (proposição, ponto de partida) como o objetivo final (resposta, meta) são pré-determinados. Permito-me, a partir do que percebi com minha investigação, assinalar que a estas visões, se poderia ainda incluir a unicidade ou não do processo de resolução. Com isso quero dizer que, um problema pode ser fechado se, além das condições anteriores, ao aluno é indicado um processo único de resolução. E será aberto se dá ao aluno a liberdade de escolha quanto a estes elementos: a situação inicial, a resposta ou o processo de resolução. Sendo assim, novamente os problemas de minha pesquisa se enquadram na categoria dos fechados, pois, não deram aos alunos estas opções de escolha.

Não obstante as fronteiras, aparentemente muito nítidas, que definem um problema como fechado, vejo em meus dados um elemento que não tem sido considerado nestes trabalhos citados, talvez por não serem trabalhos que incluem as implicações decorrentes da presença do computador nas atividades de resolução de problemas. As caracterizações anteriores fazem crer que ao resolverem problemas fechados os alunos estão em situações de absoluta segurança, em que a homogeneidade de procedimentos, e a unicidade dos processos de resolução e da solução, não dão margem a dúvidas ou desvios do caminho correto de resolução.

Porém, a inclusão do computador, particularmente do *Winplot,* mediando a resolução dos problemas não somente impôs uma nova dinâmica às aulas, como também colocou os alunos diante de algumas dificuldades, que acabam por configurar problemas em que não mais era suficiente, embora fosse necessário, lançar mão de uma teoria já aprendida ou de um processo pré-definido. No cenário 2, os dados apresentam situações em que era necessário que eles recorressem às tabelas para definir os valores a colocar nos eixos, mas eles não faziam isso e, ademais, isso não era suficiente. Era necessário que eles considerassem a ordem de execução das operações para digitar as expressões, mas isto também não era suficiente. Era necessário que eles começassem a resolver os problemas esboçando o gráfico, mas eles não estavam habituados a isso. Enfim, a padronização que se poderia esperar na realização das atividades de resolução dos problemas não ocorreu.

O recurso à tabela é prática constante em sala de aula, mas não se verifica no laboratório. A presença do computador conduz os estudantes a novas formas de pensar, ocorre uma "reorganização do pensamento" (TIKHOMIROV, 1981), em que a estrutura da atividade intelectual humana é modificada pelo uso do computador. A teoria da reorganização do pensamento foi explorada em muitos trabalhos na Educação Matemática (BENEDETTI, 2003; BORBA, 1999; BORBA; PENTEADO, 2001; VILLARREAL, 1999) e se aproxima da noção de "modelagem recíproca" proposta por Borba (1999) – o computador é algo que molda o ser humano ao mesmo tempo em que é moldado por ele. Quero crer que foi isso que ocorreu quando, supondo que fosse suficiente introduzir a expressão algébrica para que o *Winplot* apresentasse o gráfico da função, os alunos não se lembravam das tabelas, ou seja, os procedimentos considerados pelos alunos estavam condicionados pelo recurso informático que estavam utilizando.

Embora os relatos de pesquisa, acima citados, tenham orientado minhas reflexões, considero conveniente ressaltar que todos eles referem-se a investigações em que as atividades propostas aos alunos foram preparadas, especialmente, para serem realizadas com algum tipo de tecnologia informática. Tinham características de atividades abertas, muito próprias e bem diferentes das que, em geral, são propostas para serem realizadas sem estes recursos. Não havia, como em meus dados, semelhanças entre os problemas resolvidos com e sem o computador. E as que foram analisadas nos trabalhos de Benedetti (2003) e Villarreal (1999) foram idealizadas com a finalidade exclusiva de pesquisa através de experimentos de ensino, enquanto que minha investigação, sendo em sala de aula, se deu num ambiente bastante mais natural. Inclusive porque os problemas que o professor propôs aos alunos participantes de minha pesquisa não sofreram grandes modificações para serem resolvidos com o computador. Aliás, não só eram semelhantes aos aplicados em sala de aula como eram fechados. Nenhum dos autores citados anteriormente tinha, também, os problemas fechados como pano de fundo nas atividades propostas aos alunos. E julgo procedente reafirmar que, no meu caso, muito embora fossem problemas fechados, as situações que se configuraram sugerem que, com o emprego do *Winplot*, alguns obstáculos inesperados se apresentaram aos alunos, e ao professor, tornando necessário considerar uma gama de aspectos que não eram esperados neste contexto.

Não obstante as restrições decorrentes do fato de serem problemas fechados, as resoluções escritas apresentadas para os problemas propostos no laboratório, mostram diversidades que sinalizam para um trabalho mais individualizado por parte dos alunos. Além de refletirem a visível descentralização do controle das atividades, por parte do professor, durante as aulas no laboratório, estas resoluções escritas sugerem que, para cada dupla de alunos (e, às vezes, para cada aluno), o problema era diferente. Nos dados apresentados percebemos este fato muito fortemente. Na sala de aula, onde o professor assumia o papel de condutor do processo de resolução dos problemas, os alunos adotavam, indistintamente, suas orientações, abrindo mão de suas preferências e métodos. Mas, com a descentralização do "comando" das atividades de ensino no laboratório de Informática, os alunos desenvolviam um trabalho mais independente, e suas resoluções mostram características, além de variadas, sensivelmente diferentes daquelas sugeridas pelo professor.

Van de Walle (2001), ao tratar das questões relativas à adoção da resolução de problemas como meio de ensinar Matemática, aponta para um dilema, com que se defronta o professor: refere-se a quanto dizer e quanto não dizer no momento em que os alunos estão trabalhando num problema. Ele adverte que, se o professor manifestar preferência por determinado método ou forma de apresentação da resolução, dificilmente os alunos usarão seus próprios meios para resolver o problema.

O trabalho mais independente do professor, que caracteriza o ensino realizado no laboratório de Informática, trazendo consigo a necessidade de o professor oferecer um atendimento quase que individualizado aos alunos, gera implicações que podem ser consideradas boas ou ruins, do ponto de vista do ensino. Não resta dúvida de que atender individualmente os alunos em sala de aula, especialmente se a turma for numerosa, é uma real dificuldade para o professor. Entretanto este tipo de atendimento possibilita que o professor conheça melhor seu aluno; que perceba melhor suas idéias e concepções; e que identifique suas dificuldades.

No estudo desenvolvido por Villarreal (1999) foram destacadas algumas concepções matemáticas que repetidamente os alunos manifestaram durante os experimentos. Nos dados que se apresentaram em meu estudo, uma concepção que se mostrou bastante presente nos alunos é a de que para resolver um problema é preciso calcular, desenvolver e registrar algébrica ou numericamente um raciocínio (Cenário 3). E isso se mostrou através da surpresa que os alunos manifestavam quando lhes era apresentada a possibilidade de responder às questões dos problemas a partir da visualização, compreensão e interpretação dos gráficos de funções. A surpresa dos alunos é causada pelo que se tem tratado na literatura de "confronto" entre crenças e concepções típicas de um ensino feito nos moldes ditos tradicionais e as que se apresentam com a chegada das TI. Tal confronto foi analisado por alguns autores, sob variadas perspectivas.

Segundo Tall (1989) isso ocorre porque, historicamente, os elementos conceituais têm ganhado supremacia sobre os observáveis, porém estes últimos são os que têm ganhado destaque com a presença das TI. O caráter observável dos objetos produzidos ou processados pelo computador foi destacado, também, nas análises dos episódios apresentados por Villarreal (1999). Ela desenvolveu um extenso estudo sobre visualização e verificou que, de fato, a abordagem visual proporcionada pelo computador não é natural para os alunos que, nos experimentos que realizou, recorriam com freqüência ao lápis e papel para resolver alguns conflitos. Estes conflitos eram causados pelo confronto entre (a) suas concepções anteriores a respeito de determinado objeto matemático e as imagens fornecidas pelo computador, ou entre (b) sua vivência com um ensino de Matemática essencialmente algébrico e as possibilidades visuais de apresentar tais objetos utilizando o computador, ou mesmo entre (c) a utilização do lápis e papel e a do computador. No tocante à visualização Borba (1995) considera que deva ser encarada como um modo particular de conhecer, dentre outros, que fazem parte da atividade matemática.

Percebo nestes estudos uma característica comum: eles consideram a visualização como uma forma de abordar, especificamente, os objetos matemáticos, e analisam como esta abordagem pode ser aproveitada para complementar as demais abordagens possíveis (algébrica, numérica, ou outra) para, deste modo, promover uma compreensão matemática mais abrangente dos conteúdos matemáticos.

Meu trabalho, então, se distingue dos anteriores quando apresenta as concepções manifestadas pelos alunos a respeito da resolução de problemas. Nele, a legitimidade do processo de visualização é que foi, de certa forma, questionada pelos alunos. Os alunos demonstraram estranheza quanto à validade de considerar a interpretação obtida pela análise dos gráficos como processo suficiente para a resolução dos problemas. E, esteve presente nos meus episódios, um conflito gerado pela não necessidade do registro escrito deste processo, ou seja, de como foram obtidas as soluções.

Não sem razão os alunos apresentaram estas concepções. E, somando-se às anteriores, uma justificativa pode ser encontrada nas análises que Schoenfeld (1989) desenvolve sobre os aspectos culturais e cognitivos nos ambientes de ensino. Ele afirma que as salas de aula são meios sociais, são microcosmos culturais, onde conjuntos de crenças e valores são perpetuados pelas práticas e rituais do dia-a dia. Assim, a percepção que os estudantes têm, sobre a que se refere a Matemática, é determinado pela cultura da Matemática escolar, pelo ambiente de aprendizagem. Particularizo estas considerações sobre "a que se refere a Matemática" para "a que se refere a resolução de problemas". A experiência que os alunos de minha pesquisa tinham com resolução de problemas foi que os levou às concepções que manifestavam: a exclusividade do lápis e papel; a ênfase nos processos algébricos de resolução e na manipulação de técnicas operatórias, os escassos momentos dedicados à interpretação gráfica; entre outros fatores que em geral configuram o ensino, podem tê-los levado a abraçar essas concepções.

Há de se considerar, também, conforme salienta Tall (1989), que alguns novos elementos que nos foram trazidos pela chegada das TI já foram incorporados e rapidamente se tornaram parte de uma nova cultura. Outros, tais como o uso do computador para auxiliar ou mesmo promover a aprendizagem, estão sujeitos à lacuna cultural, isto é, eles levam algum tempo para se tornar parte da cultura. Os alunos, em meu estudo, estavam sendo introduzidos ao uso do computador naquele momento. É natural que possuam concepções que trouxeram de suas experiências anteriores e que ocorram momentos de instabilidade gerados, por vezes, por uma mistura que resulta da "fusão do velho com o novo", conforme diz Tall (1989).

De qualquer modo, quanto a este aspecto da interpretação de gráficos, percebo que meu trabalho está, novamente, em sintonia com as idéias de Schoenfeld (1989), segundo as quais dominar os procedimentos formais da Matemática é diferente de aprender Matemática que, por sua vez, é diferente de pensar matematicamente. Da forma como entende, os alunos devem ser levados a essa terceira atitude, ou seja, a de pensar matematicamente. Em meu estudo, ao analisarem e interpretarem os gráficos para chegarem às soluções das questões propostas nos problemas, os alunos estiveram praticando uma forma de pensamento matemático. Reafirmo que, neste caso, as interpretações tiveram forte apoio na visualização, aspecto de relevância nos ambientes em que há a utilização do computador.

A associação do computador à resolução de problemas também trouxe à tona as dificuldades e dúvidas dos alunos sobre determinados conteúdos matemáticos, assim como lhes possibilitou aprofundar seus conhecimentos a respeito dos conteúdos que estavam estudando. Ou seja, configurou-se como importante recurso de avaliação.

6.2. A AVALIAÇÃO

Não poderia deixar de reafirmar, neste momento, meu entendimento sobre avaliação. A posição que assumi neste trabalho é a de que ela é um instrumento indicador de oportunidades para ampliação da compreensão sobre determinado conceito; para percepção da presença de concepções errôneas; para detecção de lacunas no conhecimento, de necessidades específicas e oportunidades de aprender; enfim, é um recurso que oferece subsídios ao redirecionamento, se necessário, das condutas de ensino como um todo.

O potencial avaliativo da resolução de problemas tem sido destacado em alguns estudos tais como os de Van de Walle (2001), Diezmann, Watters e English (2001), Onuchic (1999), Campbell (1996), Schroeder e Lester (1989) e outros. O primeiro, recomendando a resolução de problemas como estratégia de ensino, considera que os problemas podem e devem ser propostos para envolver os estudantes em atividades de pensar sobre e para desenvolver a Matemática que eles precisam aprender. Segundo ele, estas atividades são uma fonte segura de valiosas informações que permitem ao professor ajudar os estudantes individualmente e avaliar seu progresso.

Diezmann, Watters e English (2001) ressaltam a importância de conhecer bem as dificuldades dos alunos para que se possam criar possibilidades alternativas e melhorar o ensino de Matemática.

Onuchic (1999) assevera que se deve proporcionar aos alunos, através do ensino, oportunidades de interpretar situações ou problemas e de relembrar conhecimentos anteriores a fim de construir novos conhecimentos. (ONUCHIC,1999, 2003a; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004; SANTOS, 2002)

Campbell (1996) trata desse aspecto colocando que o professor precisa determinar de que conhecimentos anteriores o aluno dispõe a fim de saber o que precisa de menor atenção e que lacunas de conhecimento existem, que precisam ser preenchidas. A autora enfatiza que a constatação da falta de conhecimentos anteriores não deve ser usada como justificativa para limitar a oportunidade de os alunos aprenderem algo mais.

Estes argumentos estão em consonância com as idéias de Schroeder e Lester (1989), de que o ensino deve estar sempre atrelado ao que o aluno já sabe. Segundo eles, as indicações de que os estudantes compreendem (ou compreendem mal ou não compreendem) determinadas idéias da Matemática freqüentemente surgem quando resolvem um problema. Van de Walle (2001) ratifica esta afirmação recomendando que um problema a ser proposto aos alunos deve começar onde os alunos estão, isto é, deve levar em consideração o entendimento e os conhecimentos que o aluno já possui.

As situações de resolução de problemas em que foram colocados os participantes de minha pesquisa, algumas delas discutidas no cenário 4, confirmam o que estes estudiosos defendem. Elas se constituíram em oportunidades em que os alunos explicitaram suas dúvidas, suas carências de conhecimento, enfim, os alunos mostraram "onde estavam". Estes alunos mostraram possuir muitas lacunas de conhecimento que precisavam ser "preenchidas". Eram lacunas relativas a números e a conceitos relacionados ao estudo de funções tais como raiz e sinal da função e formato do gráfico. E, em meu estudo, procurei mostrar e analisar como essas deficiências se manifestaram, **a partir da presença do computador**, no ambiente de resolução de problemas. Não encontrei esta especificidade nos trabalhos sobre resolução de problemas que apontei anteriormente e nos que consultei sobre computadores.

Antes de retomar aspectos particulares que percebi em meus dados, julgo importante destacar o papel que os problemas fechados desempenharam no tocante à avaliação. Uma vez que neste tipo de problema a situação inicial (proposição, ponto de partida), o processo de resolução e o objetivo final (resposta, meta) eram pré-determinados, ele restringe as atividades dos alunos a formas específicas de tratamento do problema. Não fosse a mediação do computador, conforme já comentei e foi marcante em minha pesquisa, abrir alguns caminhos inesperados apesar dos problemas fechados, poderíamos dizer que os percursos, os procedimentos, enfim, cada elemento das resoluções realizadas pelos alunos estariam univocamente determinados. Certamente, uma perspectiva reducionista, que ignora as diferenças individuais, culturais e de formação dos alunos confirmaria esta unicidade que tem natureza apenas teórica, no meu modo de ver. Repito: muitos obstáculos, variados e inesperados, se apresentaram aos alunos ao resolverem os ditos problemas fechados utilizando o *Winplot*.

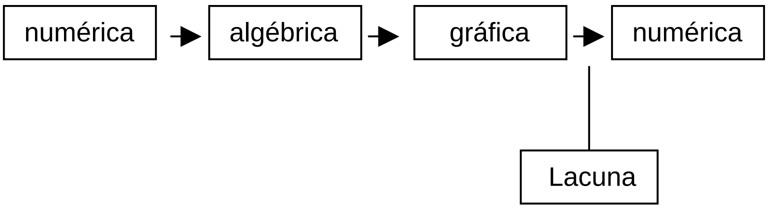
No entanto, seria demasiado ingênuo negar que o caráter fechado dos problemas limitou consideravelmente as possibilidades de os alunos fazerem escolhas e enveredarem por processos de resolução diversos, ou encontrarem soluções diferenciadas, ou chegarem a conclusões diferentes uns dos outros, para o mesmo problema. Porém essas limitações trazidas pelos problemas fechados, àquele contexto, permitiram que os aspectos relativos à demonstração de lacunas de conhecimento fossem convergentes. O que quero dizer é que elas se mostraram recorrentes, várias duplas de alunos manifestavam as mesmas dúvidas e dificuldades em momentos diferentes ao longo daquele semestre. Isto sugere que aqueles problemas serviram de instrumento não só de avaliação individual, em que cada aluno se mostra, demonstrando habilidades e conhecimentos pessoais e únicos, ou demonstrando sua falta. Eles foram um valioso recurso de avaliação do conjunto dos alunos, apresentando um retrato da turma e fazendo emergir informações que podem ser consideradas como relativas ao contexto, mais do que somente a um caso ou aluno específico.

Também sinto que os problemas fechados permitiram que as lacunas de conhecimento percebidas apontassem para aspectos particulares dos conteúdos matemáticos, como a pouca familiaridade com o trabalho com os números não inteiros, a falta de compreensão do que é raiz e sinal de função, o desconhecimento do significado dos coeficientes nas expressões das funções afim e quadrática, entre outros.

A utilização do *software Winplot* trouxe, para estas evidências relacionadas à avaliação, um elemento que tem sido bastante explorado na literatura de pesquisa: as representações múltiplas. Estudos anteriores tais como os desenvolvidos por Borba (1995), Villarreal (1999), Pierce e Stacey (2001, 2002), Friedlander e Stein (2001), Aspinwall e Shaw (2002a, 2002b), Benedetti (2003) e tantos mais, trataram das representações múltiplas. Em seus trabalhos são estudados os estilos de pensamento dos estudantes e como estes estilos configuram sua atividade matemática. O trânsito entre as representações algébrica, numérica e gráfica, esta última em geral relacionada à visualização, é analisado e se busca compreender de que forma a coordenação entre estas representações promove a ampliação, aprofundamento e construção de conhecimentos e de novos significados para os objetos matemáticos. Com exceção dos estudos de Aspinwall e Shaw (2002a, 2002b) que abordam este aspecto independente de tecnologias informáticas, e do de Benedetti (2003) em que os alunos utilizaram também um *software* gráfico, o *Graphmatica*, todos os demais foram desenvolvidos a partir da utilização de *softwares* algébricos. E em todos estes estudos nenhuma das três representações ocupou lugar de destaque, e as representações múltiplas foram estudadas em conjunto, com ênfase nas relações entre elas e na forma como estas relações condicionam o trabalho e a construção do conhecimento pelo aluno. Isso é percebido mesmo no trabalho de Benedetti (2003), em que foi utilizado um *software* gráfico:

> [...] o que se deseja aqui, [...], não é destacar esta ou aquela representação, mas proporcionar, aos estudantes, a possibilidade de uma interligação entre elas, que pode ocorrer de diversas maneiras, dependendo da forma como são encaminhadas as atividades com essas mídias. (p. 6)

Percebo, então, uma diferença entre estes trabalhos e alguns resultados que obtive nesta tese. Durante a coleta de dados e, posteriormente, ao analisar os dados sob lentes que buscavam identificar lacunas de conhecimento, o trânsito entre a representação gráfica e a representação numérica se destacou. Ou seja, em vários momentos e em vários problemas os alunos mostraram, nitidamente, dificuldades de relacionar a representação gráfica à representação numérica, neste sentido, isto é, partindo da representação gráfica. Tentei resumir estas percepções em um esquema já apresentado no capítulo 5, mas repito aqui para relembrar ao leitor e esclarecer o que quero dizer:



Da forma como percebi em minha pesquisa, a ênfase para a representação gráfica, neste conjunto de possíveis representações para as funções, foi decorrente de duas particularidades de minha pesquisa, em relação às demais. Primeiramente, do caráter fechado dos problemas resolvidos e, particularmente, da unicidade do processo de resolução. O leitor deve se lembrar que, ao se dirigirem ao laboratório de Informática, os alunos eram orientados para que fizessem "tudo no computador". Portanto, só lhes foi oferecida uma única alternativa para a resolução do problema. E, associada a ela, a segunda particularidade: esta alternativa única referia-se à utilização de um *software* gráfico e, assim, colocou a representação gráfica em posição de relevo, naquele contexto.

A esse propósito, num estudo em que analisou alguns aspectos que dificultam a resolução de problemas, Noddings (1989) apontou a falta de sub-habilidades de cálculo por parte dos alunos. No contexto de seu estudo não estava presente qualquer tipo de tecnologia informática. Porém, em vista destas idéias, Noddings (1989) defende uma posição que considero salutar transferir ao que fiz em meu estudo, ou seja, ele assevera que a percepção do tipo de sub-habilidades necessárias exige do professor uma visão à frente, uma análise dos problemas e dos novos conceitos que serão ensinados, de modo que as sub-habilidades básicas possam ser identificadas e ensinadas eficientemente.

A detecção de lacunas, deficiências, carências ou qualquer que seja o termo que se adote, não foi tomada por mim como fim em si mesma, mas foi considerada como ponto de partida para que os alunos crescessem, que avançassem a partir de suas reais condições. É nessa perspectiva que analisei, também, os fatos relativos aos conteúdos que estavam sendo apresentados aos alunos naquele semestre e que foram relatados no cenário 5. E a representação gráfica, estando em evidência naquele contexto de resolução de problemas ao qual se associou a utilização do *Winplot*, foi a mola propulsora de avanços na compreensão mais efetiva daqueles conteúdos. Segundo Aspinwall e Shaw (2002a) os estudantes devem ser levados a criar e ver objetos matemáticos a partir de diferentes perspectivas. O desafio para os professores, é criar ambientes que exijam dos estudantes tornarem-se fluentes com uma variedade de representações.

Se os alunos não eram "fluentes" no tratamento com representações gráficas, tiveram oportunidade de desenvolver-se nisto. Trabalhando com o *software* e observando os gráficos, os alunos puderam compreender melhor alguns aspectos relacionados às funções exponenciais e racionais, como o domínio dessas funções, o formato dos gráficos, as assíntotas e a influência das constantes presentes nas expressões das funções na posição dos gráficos no plano cartesiano. Os problemas secundários que surgiram e mobilizaram os alunos foram importantes para o aprofundamento dos conhecimentos sobre os conteúdos que estavam aprendendo. Van de Walle (2001) considera que o aspecto mais problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado com o conteúdo matemático que se pretende que eles aprendam, de modo que questões secundárias não se tornem, ou desviem o foco do trabalho de resolução do problema.

Situações envolvendo funções compostas, como aquela em que foi analisada a função $R_T = 8^{q^2-q}$, também desafiaram os alunos e sinalizaram para a possibilidade de tratar com funções não usualmente trabalhadas na ausência de recursos informáticos, como algumas funções compostas, bem como as resultantes de outras operações que não a composição, como a soma, a diferença, etc. Ressalte-se os experimentos de ensino conduzidos por Benedetti (2003) em que também emergiram questões e reflexões nesta linha. Ao investigar as potencialidades do *software* gráfico *Graphmatica*, ele analisou as ações dos estudantes na coordenação de representações múltiplas de funções não tradicionalmente estudadas pelos alunos em sala de aula, como as que são representadas analiticamente por $y = \sqrt{x}$, $y = 1/x$ e $y = x^3$. Seu estudo mostra a forma como conhecimentos foram construídos e novos significados foram atribuídos a estas funções, a partir de experiências vivenciadas pelos alunos em interação com o professor e o pesquisador.

Julgo procedente, neste momento, recorrer ao que Tall (1989) chamou de imagem conceitual individual, que é aquela que a mente humana forma através de mecanismos que reconhecem regularidades implícitas em um determinado contexto e que conduzem-nos a formar nossas próprias e pessoais imagens conceituais sobre um conceito, por exemplo, matemático. No tocante à aprendizagem, quando as idéias são apresentadas em um contexto restrito, a imagem conceitual formada pelo aluno pode incluir características que são verdadeiras naquele contexto específico, mas não em um contexto geral. Desse modo, o computador poderá desempenhar um papel determinante na promoção da formação de imagens conceituais mais amplas. O formato do gráfico da função $R_T = 8^{q^2-q}$, apresentado pelo computador, ampliou uma imagem conceitual prévia da aluna na qual uma função com a variável no expoente era estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Problemas envolvendo funções logarítmicas, especialmente os que solicitavam a resolução de equações, também permitiram que os alunos adicionassem novas compreensões e estabelecessem relações entre o que, até então, consideravam como três elementos supostamente independentes na Matemática: a resolução de sistemas de equações, a resolução de equações e a igualdade de duas funções (Figura 23). Foi curioso perceber que considerar uma equação como uma igualdade de funções, e esta igualdade como a expressão de um processo de resolução de um sistema de equações, não era natural para aqueles alunos e isto só pode ser percebido porque os alunos foram induzidos a utilizar processo gráfico para resolver equações, em virtude da presença do computador, especificamente, do *software* gráfico *Winplot* mediando as atividades de resolução de problemas. O sentido inverso, do "sistema" para a "igualdade de funções" e, daí, para a "equação" era o que habitualmente faziam antes de estarem de posse do *software*. Estas relações poderiam ser consideradas como referentes a conteúdos básicos para aqueles alunos, estudantes de primeiro ano de um curso superior. Entretanto ganharam um novo significado. E, não só isso, a partir dos diálogos e reflexões que ocorreram, estes aspectos passaram a fazer sentido para aqueles alunos.

Levar os alunos a pensar, a refletir sobre o que fazem e a dar sentido ao que fazem têm sido apontadas como as principais finalidades da resolução de problemas na Educação Matemática. Referências importantes sobre isto são os trabalhos de Schoenfeld (1989), embora não considere as tecnologias informáticas. Ele acredita que fazer Matemática é "dar sentido" e que aprender Matemática exige atitudes de busca por compreensão, por perceber as estruturas e as relações estruturais, ou seja, por perceber como as coisas se combinam. Não poderia deixar de enfatizar que foi isso que ocorreu com os alunos quando se viram diante da necessidade de resolver equações com o *Winplot* e que, para isso, tiveram que compreender novas relações entre velhas estruturas, isto é, entre estruturas que já conheciam, mas apenas associadas a processos tipicamente algébricos.

Schoenfeld (1989) defende, ainda, idéias segundo as quais as razões, para a complexidade em aprender e ensinar resolução de problemas, são as interconexões que o aluno precisa estabelecer entre seus recursos matemáticos, por exemplo o conhecimento de fatos, conceitos e procedimentos. E, também, à necessidade de coordenar esses recursos e métodos. O recurso que condicionou o surgimento da necessidade das relações que apontei entre sistemas, equações e igualdade de funções foi o *software Winplot*. Ele configurou uma dificuldade para os alunos na resolução dos problemas envolvendo equações. Esta dificuldade, ao ser superada, ampliou o conhecimento dos alunos com a compreensão de novas relações e permitiu que eles dessem sentido ao que estavam fazendo.

As afirmações de Onuchic (1999) também ratificam esse posicionamento, visto que explicitam a crença de que a verdadeira força da resolução de problemas não se restringe ao domínio de particularidades técnicas ou de conceitos, mas visa ao entendimento de como se relacionam e dos princípios que os unifica. Sob o ponto de vista de que a resolução de problemas deva ser uma metodologia de ensino, isto é, que o ensino deveria ser realizado através da resolução de problemas, a autora defende que um problema deve ser olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Não havia, nas atividades que foram analisadas em meu estudo, a intenção explícita de ensinar novos conteúdos através dos problemas que os alunos resolveram no laboratório, com a mediação do *Winplot*. O professor afirmara que, embora praticasse o ensino de Matemática via resolução de problemas, ele somente construía novos conceitos e conteúdos, com os alunos, na sala de aula normal. Também não deixou dúvidas de que os problemas propostos, aos alunos no laboratório, tinham o propósito de fixação de conceitos e aplicação, de conhecimentos já adquiridos, à resolução de outros problemas, na maior parte das vezes, voltados a aspectos da área de Negócios.

No entanto, o que verifiquei foi que, não obstante as limitações impostas pelo seu caráter fechado, os problemas não se constituíram em meras aplicações do que os alunos já haviam, supostamente, aprendido. Se fossem assim, não seriam problemas. Antes, eles se apresentaram aos alunos como novos problemas porque, especialmente em virtude da utilização do *software*, fizeram aflorar inesperados obstáculos à sua resolução, mobilizaram os alunos na busca de novas formas de considerar os objetos matemáticos e proporcionaram oportunidades importantes de construção de conhecimento por aqueles alunos. Sob esse enfoque é que Onuchic (1999) explicita sua compreensão sobre o que é um problema: "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver" (p.215). E esclarece que "o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória [...]" (p.215). Ela concorda que os usos e aplicações da Matemática merecem a atenção do professor e alunos, entretanto, advoga que a Matemática não pode ser ensinada como um acessório, subordinada a seus campos de aplicação. Os conceitos, as relações entre eles e os princípios que os unificam devem ser compreendidos.(ONUCHIC, 1999, 2003a; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004)

A avaliação feita pelo professor, apresentada no cenário 6, para esta experiência de introduzir o *Winplot* nas suas aulas foi, no geral, positiva. As dificuldades que sentiu de ter a atenção da turma nas aulas de laboratório fazem parte de um conjunto de percepções de quem experimenta uma nova prática. A metodologia de ensino via resolução de problemas não era nova para ele, mas ela ganhou nova configuração, neste caso, com a incorporação do computador às atividades de ensino.

Na literatura de pesquisa sobre resolução de problemas podemos apontar para alguns trabalhos que discutem estas dificuldades. Nas entrevistas conduzidas por Thompson (1989), os professores apontaram alguns obstáculos à utilização da metodologia de ensino através da resolução de problemas, entre os quais estão: as restrições de tempo, em relação aos currículos pré-estabelecidos; a resistência dos alunos, já acostumados a outra rotina; a diversidade dos alunos, demonstrando diferentes tipos de habilidades, e a pouca experiência matemática de alguns professores.

Van de Walle (2001) também destaca a dificuldade para "cobrir" todos os tópicos listados nos programas de Matemática ao fundamentar o ensino em resolução de problemas. Ele recomenda que o professor trabalhe com o objetivo de desenvolver as "grandes idéias", os principais conceitos. E, então, os elementos menores serão atendidos à medida em que o ensino avança.

Essa dificuldade foi, de fato, sentida pelo professor que participou de minha investigação e teve forte influência nas decisões que tomou para a condução das aulas. Houve atraso no cumprimento dos conteúdos previstos para aquele semestre, atraso que foi acentuado, em virtude das dificuldades decorrentes da diversidade dos alunos, demonstrando diferentes tipos de habilidades, que é a segunda dificuldade apontada por Thompson(1989). Em virtude desse atraso o professor decidiu não mais utilizar o computador nas aulas. Penso que esta decisão esteja vinculada de um lado à pouca experiência, não experiência matemática, como aponta Thompson (1989) - pois esta o professor tinha muita – mas com a utilização de tecnologia com aqueles alunos e, de outro, com sua vasta experiência docente. Sua pequena experiência com tecnologia, associada à sua vasta experiência no ensino sem ela, fez com que confiasse mais e se sentisse mais seguro trabalhando nos moldes daquela em que tinha maior vivência.

Borba e Penteado (2001, 2002) ressaltam que, com a inclusão das TI, os enfoques pedagógicos estão se modificando e os professores têm experimentado momentos de instabilidade em suas práticas. Eles reconhecem que o uso de tecnologia informática, em geral, constitui-se como uma situação de risco para o professor. A perda de controle e a obsolescência são aspectos que podem conduzi-lo ao que os autores denominaram "zona de risco", caracterizada pela incerteza, pela imprevisibilidade e pela necessidade de avaliação constante das ações. Por essas razões, alguns professores preferem manter-se numa "zona de conforto", onde tudo é previsível, conhecido, controlável. Embora muitos manifestem o desejo de modificar sua prática, os professores se sentem inseguros e, apesar de insatisfeitos, preferem desenvolver seu trabalho dentro de padrões já cristalizados. O que foi, senão isto, que orientou as decisões tomadas pelo "meu" professor?

Somam-se a estas idéias, os resultados que Silva (1999) obteve em uma pesquisa em que mostra as concepções de professores a respeito do momento em que o computador deve e pode ser usado. A visão predominante foi a de que esse uso deve se dar após a exposição dos conteúdos pelo professor. Assim, não havendo tempo para ambas as coisas, o professor optou por apresentar aos alunos os conteúdos que faltavam, e não mais utilizar o computador.

Entre as dificuldades apontadas por Thompson (1989), a segunda – a resistência dos alunos, já acostumados a outra rotina – não ocorreu, uma vez que os alunos já estavam tendo aulas de Matemática com aquele professor desde o semestre anterior. A metodologia fundamentada em resolução de problemas não era novidade para eles. O computador, sim, é que era o diferencial e, como sentiu o professor, parece que sua utilização deixou os alunos mais motivados.

Embora reconheçam essas dificuldades, colocando-se como professores e apoiados em sua própria experiência, Pierce e Stacey (2001) testemunham que, no decorrer de vários anos, sua maneira de utilizar a tecnologia foi sendo gradualmente aprimorada. Essa colocação é compatível com as constatações de Kendal e Stacey (2001) obtidas de entrevistas e observações de aulas de cálculo com tecnologia CAS, conduzidas por outras duas professoras. Também isso sentiu meu professor, sentimento manifestado por suas próprias palavras: "Eu tenho repetido essa experiência com quase todas as turmas. [...]Só que cada vez que eu dou a disciplina eu mudo algumas coisas. A gente vai melhorando!"

6.3. A LINGUAGEM

A fim de minimizar as dificuldades do trabalho com resolução de problemas em sala de aula, Van de Walle (2001) procura apontar algumas características recomendáveis aos problemas a serem propostos aos alunos para orientar a aprendizagem da Matemática. E, uma delas é a de que o aspecto mais problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado com o conteúdo matemático que se pretende que eles aprendam, de modo que questões secundárias não se tornem, ou desviem, o foco do trabalho de resolução do problema.

Considero que as questões relacionadas à linguagem, apontadas nos cenários 7 e 8, estejam relacionadas a isso no sentido de que se apresentaram aos alunos como problemas secundários e, de fato, em muitos dos casos apresentados, desviaram os alunos do caminho que se pretendia que seguissem com os problemas em que estavam trabalhando. Estes problemas secundários têm, no entanto, uma especificidade diferente daqueles a que Van de Walle (2001) se refere, pois em seu trabalho não considera a presença das TI, e em minha pesquisa eles foram decorrentes da utilização do computador e, em muitos momentos, especificamente da utilização do *Winplot* na resolução dos problemas propostos.

Ao tratar deste aspecto é inevitável que eu retome algumas análises, já apresentadas no capítulo 5, a respeito das características dos problemas propostos no trabalho Aplicativos de Matemática, que foi feito integralmente utilizando o s*oftware*. Muitas dificuldades explicitadas por alguns alunos fizeram com que eu voltasse meu olhar aos erros apresentados nos trabalhos entregues. Muitos desses erros foram cometidos porque os alunos transferiram padrões da linguagem algébrica escrita à mão e impressa para as expressões que eram digitadas no computador. Nos trabalhos em que isso ocorreu, muitos gráficos que foram esboçados não correspondiam às funções que eram indicadas no enunciado do problema, sem que aqueles alunos se dessem conta disso. E digo "muitos gráficos" porque os problemas que compunham o trabalho solicitavam, realmente, muitos gráficos.

O caráter demasiadamente operacional e repetitivo desses problemas e estes repetidos erros apresentados pelos alunos não deixam dúvidas de que os alunos não estavam pensando no que estavam fazendo e, tampouco, perceberam ou tiveram consciência do conteúdo matemático que era o foco de cada um daqueles problemas. Estudos anteriores (NODDINGS,1989; SCHOENFELD, 1989; ONUCHIC, 1999, 2003a; VAN DE WALLE, 2001) trataram deste aspecto relacionado às atividades com ênfase na repetição, no treino de habilidades. No entender de Noddings (1989) a constatação da falta de sub-habilidades nos alunos não deve ser usada como argumento para submetê-los a exaustivas listas de exercícios repetitivos, até que atinjam um determinado nível de competência, antes de apresentar-lhes a possibilidade de resolver problemas. Exercícios prévios podem ser realizados a fim de que os alunos desenvolvam competências necessárias à compreensão de certos conteúdos. O problema é realizá-los tanto, que se tornem um fim em si mesmos, configurando-se aos alunos como, verdadeiramente, sem sentido. Ao defender este ponto de vista, Noddings (1989) o fez da perspectiva da resolução de problemas.

Porém julgo que, no caso de meu estudo, ele se aplica ao uso do computador. Um dos objetivos que o professor tinha com o trabalho era, como ele próprio afirmou, familiarizar os alunos com a utilização do *Winplot*; para que estivessem melhor preparados para resolver os problemas com ele. Não vou negar que este objetivo tenha sido parcialmente atingido. As análises que fiz dos trabalhos indicam, porém que, para muitos daqueles alunos, aqueles problemas não fizeram o menor sentido, do ponto de vista da construção de conhecimento matemático.

Muitos daqueles alunos automatizaram procedimentos de tal modo que, entre tantos, quando um determinado problema ou item do problema exigia deles um encaminhamento diferente, eles não foram capazes de perceber. Os alunos simplesmente repetiram, naquele problema, os mesmos procedimentos que vinham utilizando nos anteriores produzindo resultados incorretos; não pararam para pensar sobre cada problema individualmente, não atribuíram sentido ao que liam e ao que faziam, não estiveram pensando matematicamente. (SCHOENFELD, 1989). Estes alunos, considerando o computador como uma autoridade, simplesmente "acataram" a solução apresentada por ele para os gráficos solicitados, não pensaram no que estavam fazendo.

Neste sentido um dos aspectos, enfatizados pelo grupo envolvido na pesquisa de Souza Jr (2000), diz respeito à elaboração de atividades para serem realizadas pelos alunos utilizando o computador. A posição norteadora foi a de que é importante que estas atividades possibilitem a interação do aluno com a máquina, permitindo que o aluno desenvolva uma atitude crítica na interpretação dos resultados fornecidos por ela. Os professores expressaram, ainda, que o aprendizado crítico inclui a capacidade de o aluno julgar e analisar e que, para isso, é necessário que ele trabalhe com os conceitos.

Dirigindo-se especialmente a professores, Van de Walle (2001) afirma que a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as idéias e sobre o "dar sentido". Então, da forma como alguns alunos fizeram aquele trabalho, as atividades realizadas não se constituíram, de fato, em problemas. Ele assevera que o problema deve exigir justificativas e explicações para as respostas e métodos apresentados, o que vai ao encontro do que já comentei nas análises apresentadas com os dados: a inclusão de itens solicitando ao aluno que analisasse o comportamento dos gráficos ou que descrevesse as transformações ocorridas tornaria a atividade bastante mais produtiva no tocante ao conteúdo específico envolvido naqueles problemas do trabalho. Assim, a atividade justificaria a utilização do computador, no sentido de que estaria voltada a um conteúdo que "é mais difícil de ser tratado sem o computador".(SOUZA JR, 2000)

Voltemos o olhar, agora, àqueles episódios envolvendo os alunos que perceberam as particulares relativas à linguagem que precisavam ser consideradas naqueles problemas. Para estes alunos, aquelas atividades eram problemas. E associemos a estes episódios os que ocorreram envolvendo os problemas propostos em aula. As questões secundárias referiam-se, sempre, à dificuldade de os alunos reconhecerem se era necessário ou não colocar parênteses na digitação da equação de uma função. Às vezes os alunos digitavam a expressão da função de várias maneiras, isto é, com e sem parênteses, ou com estes colocados em lugares diferentes na expressão, conforme mostram os dados. De posse das representações gráficas das funções, os alunos comparavam os gráficos e, se se mostravam iguais, então concluíam que os parênteses eram dispensáveis. Trata-se da experimentação, procedimento bastante utilizado pelos alunos na presença do computador. Em virtude do rápido *feedback* (BORBA; PENTEADO, 2001) e das possibilidades de visualização de gráficos os alunos testam seus resultados e conjecturas continuamente. (VILLARREAL, 1999; TALL, 1989)

Nos diálogos apresentados os alunos lançaram mão do que haviam aprendido sobre domínio e sobre os diferentes tipos de funções, sobre assíntotas e sobre as características das funções aplicadas à área de Negócios, e estes recursos resolveram suas dúvidas, em muitos daqueles casos. Repito, recorrer à Matemática é, sem dúvida, um procedimento seguro e recomendável. Porém, quer me parecer que entender melhor a "linguagem do computador" ou a linguagem do *software* pode ser também importante. Saber em que essa linguagem se assemelha e em que se diferencia da linguagem escrita parece, também, ser necessário.

Penso que estas questões estão relacionadas a alguns aspectos destacados por Pierce e Stacey (2002) como: possíveis "confusões" entre a notação matemática convencional e a sintaxe do software, e o problema de reconhecer quando o computador está errado. Essas autoras chamam de "*insight* algébrico" a parte do sentido simbólico necessário para encontrar uma solução matemática para um problema formulado matematicamente e que, provavelmente, é afetada quando se faz Matemática utilizando tecnologia CAS. No meu caso estou relacionando este aspecto à utilização do *software* gráfico *Winplot*.

O *insight* algébrico inclui o que as autoras chamaram de expectativa algébrica, a qual envolve vários elementos. Um deles refere-se ao reconhecimento de convenções e propriedades básicas, por exemplo, das diferenças entre a linguagem matemática escrita à mão e a sintaxe dos CAS. Ele pode ser percebido, nos dados apresentados nesta tese, quando os alunos "confundiram" a linguagem algébrica com a linguagem do *software* e omitiram parênteses que, naquele ambiente, eram indispensáveis. A horizontalidade da linguagem que se utiliza no *Winplot*, e em tantos outros *softwares* e aplicativos, nem sempre presente na linguagem algébrica manuscrita ou impressa, também configura diferenças entre estas duas linguagens. Estas diferenças devem ser consideradas mas, segundo sugerem minhas observações, não são percebidas naturalmente pelos alunos.

Um outro elemento que compõe a expectativa algébrica refere-se à identificação de características-chave, identificação que resulta, muitas vezes, de um outro componente do *insight* algébrico que é a habilidade de coordenar representações múltiplas de funções . Em meu trabalho, ele aparece nas respostas (gráficos) apresentadas pelos alunos, em que manifestaram a ausência de reconhecimento das características próprias de determinadas funções. Com respeito às funções envolvendo raiz quadrada, os erros nos gráficos do problema 11, por exemplo, poderiam ter sido percebidos pelos alunos se eles tivessem se lembrado de que as funções dadas, envolvendo raiz quadrada, são partes de parábolas e não poderiam ser representadas por retas. Ou mesmo, no caso do problema 23.1, os alunos não associaram as funções exponenciais ao formato que estes gráficos deveriam apresentar.

Esses dois elementos – o reconhecimento de convenções e propriedades básicas (como das diferenças entre linguagens) e a identificação de características-chave – entre outros levantados por Pierce e Stacey (2002), são relevantes porque, segundo elas entendem, eles permitem aos alunos controlar e monitorar os resultados apresentados pelo computador. Eles se manifestaram nas atividades de resolução de problemas com a utilização desse recurso mostrando-se essenciais a esse contexto.

Ao discutirem os tipos de problemas que devem ser propostos aos alunos Borba e Penteado (2001) assinalam: "Traçar um gráfico de uma função como $y = 2^x$ pode ser um problema que engaje alguém em um coletivo onde não haja mídias informáticas, mas não o será onde houver um *software* que permite o traçado de gráficos" (p.47). Quero concordar com os autores porém julgo procedente fazer uma ressalva. Traçar o gráfico de $y = 2^x$ pode não ser um problema se se tem em mãos um *software* gráfico. Porém, traçar os gráficos de $y = 2^x$, $y = 2^{2x}$, $y = 2^{3x}$, $y = 2^{4x}$, como foi pedido no problema 23.1, foi um problema e o que configurou o problema foram estas questões relacionadas à linguagem.

Conforme já manifestei nas análises de dados desenvolvidas nos cenários 7 e 8, acredito que o domínio da linguagem é uma condição necessária para a utilização satisfatória dos recursos do *software* pois é um elemento a ser considerado *a priori* na resolução de problemas com a utilização do computador. As dificuldades relativas a ela podem ser a expressão da pouca experiência dos alunos na utilização deste *software*, mas constituíram-se num obstáculo explícito à obtenção da solução dos problemas. E, ademais, sua superação pode permitir que os alunos avancem a níveis mais criativos e produtivos de utilização do computador.

Em seus estudos Henry Pollak (1986), e Waits e Demana (2000) apontam quais mudanças a tecnologia provoca na Matemática. Borba e Penteado (2001) afirmam que a

Informática pode transformar o tipo de Matemática que é abordada em sala de aula. O caso da linguagem, da forma como considerei aqui, penso que se refere a mudanças que a tecnologia provoca na forma de **abordar** os conteúdos matemáticos.

Considero não menos relevantes os aspectos da linguagem que foram destacados no último cenário, o cenário 8. O estudo sobre *insight* algébrico apresentado por Pierce e Stacey (2002) não se refere àqueles aspectos da linguagem que foram analisados naquele cenário, voltados para os **termos** utilizados na Matemática, em relação aos que o *software* em uso apresenta, aos que o professor utiliza e aos que as aplicações específicas dos problemas exigem (como a área de Negócios). Porém estas mesmas autoras, em seu outro artigo (PIERCE; STACEY, 2001), relatam uma pesquisa desenvolvida com alunos de um curso de Cálculo em que os estudantes utilizaram o *software Derive*. Este estudo sugere que, quando os alunos utilizaram aquela TI, o foco da aprendizagem desviou-se dos procedimentos para os conceitos.

Sinto esta percepção das autoras muito próxima das questões envolvendo o domínio dos termos matemáticos que os alunos precisaram incorporar, ao seu repertório, para conseguir resolver os problemas. Reitero que quando me refiro a "dominar os termos" não estou considerando simplesmente o conhecimento do nome, mas do significado daquele termo e, explicitando melhor a ligação com o estudo de Pierce e Stacey (2001), refiro-me ao conhecimento do conceito a que aquele termo se refere. Por exemplo: se em vários momentos foi necessário que os alunos acrescentassem mais o nome zero da função ao que, até então, chamavam apenas de raiz da função, apenas saber mais este nome não foi suficiente. Foi preciso, também, que eles entendessem claramente que este(s) nome(s) estava associado ao conceito de raiz, ou seja, àquele valor da abscissa que anula a ordenada, naquela função. Sem isso, a resolução do problema não seria realizada. Naquelas situações apresentadas, o procedimento seria simples e composto de um único passo: simplesmente abrir a janela do *software* com aquele nome, por exemplo, *zeros*. Mas, realmente isso não foi suficiente. Sem conhecer o conceito, os alunos não saberiam que teriam que recorrer àquela opção.

Bizelli e Borba (1999) também fazem menção a questões relacionadas a isto. Seu estudo também foi desenvolvido num contexto específico, o dos cursos superiores de Química. Nas observações que fizeram dos alunos resolvendo problemas específicos de sua área, utilizando o *software* gráfico *Origin 5.0*, perceberam que a carência de conhecimento matemático pode impedir a correta e efetiva utilização dos variados recursos de um *software* ou do computador.

Muito embora estes aspectos ligados às linguagens não se refiram a conteúdos propriamente matemáticos, considero de extrema relevância que sejam considerados nos ambientes de ensino de Matemática em que são utilizadas as TI. Talvez este seja uma novo conteúdo a ser considerado, cuja necessidade foi trazida com a chegada dessas tecnologias. Os estudos envolvendo tecnologias informáticas no ensino de Matemática têm comprovado que, nestas situações, os alunos lançam novas questões e apresentam dúvidas em contextos não previstos pelo professor e que não surgiriam em outro ambiente. É preciso que o professor seja capaz de romper a rigidez que, em geral, caracteriza a organização das atividades (BENEDETTI, 2003; MACHADO, 2000; VILLARREAL, 1999). É preciso rever e promover mudanças na forma de tratar e na seleção dos conteúdos. (WILLOUGHBY, 2000)

Termino esta seção acrescentando: nenhum dos estudos apontados anteriormente dirige-se, no entanto, especificamente ao domínio da linguagem, ou melhor, das linguagens sob a perspectiva que adotei em minha pesquisa. De fato, não encontrei na literatura que consultei, sobre resolução de problemas e sobre Educação Matemática e computadores, referências a respeito deste aspecto específico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerações finais

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> A importância da pesquisa científica se mede pelas mudanças que acarreta em nosso corpo de conhecimentos e/ou pelos novos problemas que suscita". (Salomon, 1999, p.219).

RETOMANDO A PERGUNTA DE PESQUISA

Estando na parte final deste relatório de pesquisa, e tendo acrescentado as análises feitas no capítulo 6 às que desenvolvi no capítulo 5, sou levada a retomar minha pergunta de pesquisa:

De que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática, quando estão utilizando o computador na resolução de problemas fechados sobre funções?

Após todas as reflexões que fiz tendo esta pergunta como norte, volto-me aos cenários que construí com as evidências recolhidas e desenvolvidas durante a coleta de dados e percebo que eles se encaixam, como peças de um quebra-cabeça. Não obstante tantas questões que ficaram sem respostas, em grande parte novas questões que surgiram na trajetória da pesquisa, o estudo que apresentei trouxe, realmente, muitas respostas. Não creio que seja apropriado trazer muitos detalhes do estudo a esta seção, pois isto seria demasiado repetitivo. Os detalhes estão colocados no que registrei até aqui. Meu objetivo, agora, é tentar sintetizar, comentar em linhas gerais, as compreensões que construí ao longo desta investigação.

A introdução de aulas com a utilização do computador, muito embora os alunos já estivessem familiarizados com a metodologia de ensino de Matemática via resolução de problemas, mudou totalmente a **dinâmica das aulas**. **Os efeitos** dessas mudanças foram sentidos tanto pelo professor como pelos alunos, uma vez que desafiaram antigos padrões de procedimentos adotados, até então, para a condução das aulas e para a resolução de problemas, naquela turma. Embora os problemas propostos no laboratório fossem fechados e muito parecidos com os que os alunos estavam acostumados a resolver na sala de aula, a mediação do *software* gráfico *Winplot* e a configuração de um trabalho mais individualizado no laboratório trouxeram novos desafios no tocante aos processos de resolução e aos procedimentos e conhecimentos aos quais os alunos tiveram que recorrer para resolver os problemas.

A divisão das aulas em dois ambientes bem definidos, sala de aula e laboratório de Informática, fez emergir evidências que mostraram como os alunos estavam **relacionando conhecimentos e procedimentos** adotados quando resolviam problemas com o computador, com os adotados quando estavam sem o computador. Especialmente, alguns aspectos relacionados à utilização de tabelas e a conhecimentos relativos a conteúdos de Álgebra básica, emergiram desse paralelo entre os dois ambientes.

Também foram marcantes os episódios em que, em função da forma como os alunos podiam obter as soluções dos problemas ao utilizarem o *Winplot* – pela interpretação e análise de gráficos – os alunos manifestaram suas **concepções sobre resolução de problemas.** Nos momentos em que isso ocorreu, os alunos expressaram sua concepção de que para resolver problemas é preciso "fazer contas" e de que a resolução de um problema está totalmente atrelada ao registro escrito desta resolução. A interpretação de gráficos, como uma forma de pensamento matemático, não era considerada válida como processo de resolução.

A resolução dos problemas com a utilização do *Winplot* mostrou, também, ser um poderoso instrumento de avaliação. A especificidade do *software* utilizado e dos problemas que foram propostos aos alunos fez emergir **problemas secundários** que **evidenciaram lacunas de conhecimento**, ao mesmo tempo em que foi veículo para o "preenchimento" dessas lacunas. O caráter fechado dos problemas, associado à característica de ser um *software* gráfico aquele que os alunos estavam utilizando, permitiu que dúvidas sobre conteúdos, muitas vezes de conteúdo fundamental e médio, fossem explicitadas e sanadas.

Igualmente ocorreu com os conteúdos que os alunos estavam aprendendo ou com os quais estavam trabalhando naquele semestre. A utilização do *software* permitiu que os alunos construíssem novos conhecimentos, e os dados mostram que **a compreensão dos estudantes cresce e se aprofunda** ao tratarem os conteúdos com o apoio desta TI. E não só isso. A ênfase na representação gráfica de funções dada pela presença do *software* e a unicidade do processo de resolução, característica de problemas fechados, permitiu que os alunos percebessem novas formas de considerar antigos conteúdos.

E, ao falar de avaliação, foi preciso colocar também o **professor no foco** de minhas análises e considerar **o foco do professor**. A forma como este professor interpretou aquela experiência que estava vivenciando e suas características próprias, especialmente na qualidade de professor, orientaram as decisões que tomou para a condução das aulas ao longo daquele semestre. Ele sentiu dificuldades que desafiaram suas antigas práticas; modificou algumas delas e optou por conservar outras. Mostrou flexibilidade em alguns aspectos e rigidez em outros. Mas tomou decisões baseadas no que observava, ou seja, mantinha-se em permanente estado de avaliação.

Dificuldades superadas e dúvidas sanadas fizeram parte permanente da rotina daquelas aulas de resolução de problemas com o *Winplot*. E um dos aspectos que ficou evidente foi que, neste contexto, muitas vezes **a linguagem do computador pode ser a causa de um conflito**. Aspecto não muito considerado ao se introduzir a utilização do computador no ensino de Matemática, a linguagem própria do *software*, no meu caso o *Winplot*, apresenta semelhanças e diferenças em relação à linguagem matemática algébrica, conhecida dos alunos. Meu estudo sugere que a percepção dessas semelhanças e diferenças é um aspecto importante a ser considerado nos ambientes de ensino em que as TI são utilizadas.

O domínio da **linguagem matemática e o uso do computador** mostraram estar estreitamente ligados. Os episódios analisados apresentam dilemas resultantes do confronto entre as linguagens próprias de todos os atores participantes do contexto: a linguagem da Matemática, do *software*, das aplicações à área de Negócios, das pessoas. Esse confronto sugere a possibilidade de uma nova abordagem de ensino, em que se dê maior atenção a estes aspectos relativos à linguagem, ou melhor, às linguagens e, especialmente aos termos que são convenções da linguagem matemática, a fim de atender às necessidades impostas pelo *software* que estão utilizando na resolução dos problemas.

E, afinal, tendo obtido tais respostas à minha questão de pesquisa, registro ainda algumas reflexões finais. A experiência vivida pelos alunos sujeitos desta pesquisa foi realmente muito importante para eles, no sentido da aprendizagem matemática. Carentes que eram de alternativas que os ajudassem a superar suas dificuldades e deficiências, eles realmente foram envolvidos pelas resoluções dos problemas no laboratório de informática.

Tinham dúvidas, embora básicas, para perguntar e sanavam suas dúvidas; às vezes sentiam-se perdidos diante do computador, mas tratavam de se localizar; chegaram com pouca "bagagem matemática" no início daquele semestre, mas saíram com muito mais no final dele.

As questões e aspectos de base que discuti neste trabalho (sobre relacionar procedimentos, sobre avaliação e linguagem), certamente, surgiram condicionadas pelo contexto em que a pesquisa se realizou. Nem poderia ser diferente tratando-se de pesquisa. E, devemos nos lembrar, este é o contexto, e particularmente, a realidade dos alunos que recebemos em grande parte das universidades particulares (e, às vezes, públicas) em nosso país.

Então, resta-nos ampliar esta investigação e tentar avaliar se tais questões e aspectos também não se fazem presentes, embora de outras formas, se for desenvolvida em contextos diferentes: com alunos com outro perfil, em outros cursos superiores, envolvendo outros conteúdos matemáticos, enfim...

AS CONTRIBUIÇÕES DESTE ESTUDO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Destino, agora, uma pequena seção a expressar o que sinto no tocante às contribuições que ele possa trazer à Educação Matemática.

Inicialmente gostaria de destacar que, embora esta pesquisa tenha sido desenvolvida com uma turma de alunos de curso superior, como o tema central dos problemas foi o estudo de funções, ele pode ser uma referência, também, a professores de ensino médio, que trabalham com este conteúdo e têm interesse por resolução de problemas e tecnologias informáticas.

Mas o que sinto mais forte é o fato de que meu estudo realmente reflete o contexto de sala de aula. Não obstante as dificuldades metodológicas que isto acarretou, ele é o retrato das circunstâncias em que se vêem, alunos e professores, nestes momentos de transição, em que se tenta implementar inovações às práticas de sala de aula. E não só isso, ele de fato reflete a realidade de muitas salas de aula, em que temos alunos sem uma boa formação prévia, sem tempo para estudar e que, nem por isso, precisam ser privados de experimentar novas formas de construir conhecimento.

Particularmente no contexto da inserção de tecnologias informáticas no ensino, muito se tem falado da necessidade de que as atividades propostas pelos professores aos alunos sejam especialmente preparadas para este contexto. Não vou descartar esta configuração, que seria a ideal. Porém, ela nem sempre corresponde à realidade.

É possível sim que, a partir da experiência que tem, o professor ouse incluir novos atores, como as TI, em sua prática. A proposição de problemas abertos é a mais recente corrente no tocante à resolução de problemas, e as TI têm sido apontadas como favoráveis à exploração de conteúdos e idéias matemáticas a partir deste tipo de problemas. Mas se o professor não tem experiência com este tipo de atividade, que sejam problemas fechados.

Porque os problemas eram fechados (alguns poderão classificá-los como simples ou como problemas usuais de livros-texto) foi possível perceber questões de base no contexto da utilização dos computadores no ensino de Matemática. Foi por isso que me voltei à linguagem, condição *sine qua non* para sua utilização. Meu estudo mostra, também, o potencial da resolução desse tipo de problemas ao serem associados ao computador: na detecção de lacunas, na construção de novos conhecimentos, na condução dos alunos à reflexão e à prática de pensar matematicamente, e de pensar de modos diferentes daqueles a que estão acostumados. Os alunos participantes de minha pesquisa tiveram a oportunidade de "perceber" suas dúvidas, pensar sobre elas, manifestá-las e saná-las. E, de fato, muitos desses alunos aproveitaram efetivamente essas oportunidades de avançar no conhecimento dos conteúdos nos quais estavam trabalhando – a aluna que não sabia o valor da $\sqrt{2}$ e que confundiu os termos abscissa e assíntota, tornou-se monitora da disciplina no semestre seguinte.

Por isso acredito que esta investigação vem atender aos apelos de alguns pesquisadores, entre os quais destaco Ponte (2000), de que são necessárias mais pesquisas em sala de aula e de que é necessário buscar uma maior consistência nas pesquisas através da articulação da prática com o conhecimento acadêmico. Espero que meu trabalho, de fato, atenda a este apelo e ajude a todos aqueles que se interessam por resolução de problemas e tecnologias informáticas a obter uma melhor compreensão das vicissitudes de sala de aula.

AS LIMITAÇÕES DESTE ESTUDO

Da forma como percebo, as principais limitações deste meu estudo estão relacionadas a dificuldades metodológicas advindas, exatamente, da realização de pesquisa no contexto da sala de aula.

Inicio retomando o fato de que os alunos estranharam os problemas que elaborei e que foram aplicados no início da coleta de dados. O professor também percebeu as dificuldades dos alunos e, de um modo bastante natural, a partir de um certo ponto os problemas propostos aos alunos eram os elaborados pelo professor. Assim percebi que, às vezes, os objetivos que se tem para a pesquisa conflitam com os objetivos ou com os mecanismos próprios do ambiente de ensino em que ela está sendo realizada. Acredito que um diálogo constante entre o pesquisador e professor, desenvolvendo reflexões acerca do ensino e da pesquisa, suaviza estes conflitos, mas não creio que possam ser total ou facilmente eliminados.

A preocupação do professor com o andamento do programa, por exemplo, influenciou não só suas decisões, mas também influenciou a mim, no sentido de que trouxe constrangimentos com relação a propor formas de trabalho alternativas, a sugerir tipos de problemas diferentes, enfim... Em muitos momentos faltou convergência entre o que o professor queria com seu ensino e o que o pesquisador queria com sua pesquisa, apesar da abertura e de toda a boa vontade que o professor demonstrou ao oferecer sua sala de aula para a realização da investigação.

A constatação do atraso na apresentação dos conteúdos previstos para aquele semestre, também influenciou não só a forma de o professor atender os alunos mas, igualmente, a minha maneira de atendê-los, nas aulas de laboratório. Ao transcrever e analisar os dados percebi que, muitas vezes, ao atender aos chamados dos alunos, assumi uma conduta mais diretiva do que, talvez, se pudesse considerar apropriado para a coleta de dados de minha pesquisa.

Considero que esta conduta é condicionada, também, fortemente pela minha formação e maior tempo de prática docente nos moldes dito "tradicionais", assim como pela minha falta de experiência neste tipo de pesquisa, qual seja, a pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Embora muitas situações pudessem, por vezes, ser aproveitadas por mim para explorar os recursos do computador ou, até mesmo, para conduzir os alunos a atividades de investigação, nem sempre fui capaz de perceber estas oportunidades.

Igualmente, o contexto de ensino se sobrepôs ao da pesquisa no tocante às resoluções escritas dos problemas, entregues pelos alunos ao professor e cedidas a mim, posteriormente. Ele enfraqueceu esses trabalhos escritos como documentos de pesquisa, pois os alunos queriam acertar as resoluções dos problemas, nós (eu e o professor) também queríamos que acertassem e, não só os ajudamos a acertar como também a apresentar as resoluções dentro dos padrões que o professor julgava adequado, do ponto de vista do ensino, repito. E, além disso, sabemos que muitos alunos copiam os trabalhos de seus colegas. Assim, os trabalhos escritos não forneceram muitas informações significativas para minha pesquisa. O leitor vai se lembrar, agora, que eles foram pouco utilizados neste estudo. Van de Walle (2001) aponta que "quanto dizer e quanto não dizer" é uma das dificuldades ao ensinar através da resolução de problemas. E eu completaria que "quanto dizer e quanto não dizer" é também uma dificuldade quando se faz pesquisa em sala de aula.

AS PERSPECTIVAS DE NOVOS ESTUDOS

Chegando ao final deste relatório de pesquisa, não poderia me furtar de apontar para as possibilidades de novos estudos que podem ser realizados, e que vislumbrei em função deste que realizei.

Primeiramente, não poderia deixar de indicar a possibilidade de se desenvolver estudos envolvendo problemas abertos. Inegavelmente, as pesquisas com as quais tive contato, com o foco na utilização de tecnologias informáticas, foram desenvolvidas a partir de atividades que tinham um caráter essencialmente aberto. Porém quero pontuar para a necessidade de se saber melhor o que acontece quando se coloca os alunos para trabalhar com problemas abertos, com tecnologias informáticas, estabelecendo este paralelo que fiz aqui, entre o trabalho sem o computador e o trabalho com o computador.

Vejo, também, mais dois particulares caminhos de pesquisa para este tipo de investigação que sugeri anteriormente. O primeiro buscaria compreensões acerca das possibilidades e dos limites que se configurem do trabalho com problemas abertos e TI, e com alunos que tenham um perfil tal como o dos participantes de minha pesquisa. Eles eram alunos que passaram por uma formação básica aparentemente deficiente, demonstraram grande insuficiência de conhecimento matemático prévio, e tinham pouco tempo para estudar. A literatura relacionada aponta que a resolução de problemas abertos exige um certo grau de autonomia, iniciativa, criatividade e conexões entre conhecimentos. Resta saber até que ponto alunos com este perfil apresentariam estas condições. E o segundo caminho seria, talvez, uma configuração parecida mas envolvendo alunos com boa formação básica, alunos que apresentem sólida formação matemática.

Deixo ao leitor, ainda, uma idéia que norteava a pesquisa que pretendia realizar quando ingressei no programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp. As razões e alguns detalhes da mudança no projeto inicial já foram apresentados no capítulo 1, de metodologia; não cabe repeti-los aqui. Mas não conheci nenhum estudo que analisasse as decorrências de adotar a metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas com tecnologias informáticas, ou seja, que lançasse mão de problemas geradores para introduzir conteúdos a partir de problemas que seriam resolvidos com a mediação do computador (no caso do que tinha em mente) ou qualquer outra TI.

Porém, esta investigação que, efetivamente, realizei também abre caminhos para uma análise mais profunda a respeito de alguns aspectos de apontei na apresentação e análise dos dados: a avaliação e a linguagem. As análises que elaborei foram, por opção, norteadas pelas leituras acerca de resolução de problemas, e tecnologias informáticas e Educação Matemática. Não tomei como referência estudos que tratassem especificamente da avaliação ou da linguagem, porque este não era o objetivo deste trabalho. Creio, no entanto, que muito se poderia desenvolver, ainda, tomando esta literatura como apoio, especialmente no caso da linguagem que, acredito, desempenha um papel de extrema relevância no contexto da utilização das TI na Educação Matemática. Creio que seja um estudo que deva ser desenvolvido, e que este subtema mereça ser aprofundado.

Durante esta pesquisa também tive oportunidade de refletir um pouco sobre a constituição da autoridade no momento em que o aluno se vê diante de alguma dúvida matemática ao resolver problemas utilizando o computador. Quero dizer com isso que alguns alunos chamam o professor para que lhes diga o que fazer ou lhes ajude a sanar suas dúvidas. Outros, relativamente fluentes na utilização do computador lançam mão de seus recursos e, a partir do *feedback* oferecido por ele, decidem-se e apresentam a solução, ou seja, atribuem autoridade ao computador, acreditam nele, confiam nele. E há os que recorrem ao conhecimento matemático que possuem ou, embora com a ajuda do professor, apóiam-se nesse conhecimento para sanar sua dúvida e resolver o problema. Decidi-me, por diversas razões, não destinar empenho a esta questão neste trabalho. Porém, fica como sugestão para que outras pesquisas desenvolvam este subtema.

AINDA NÃO É O FIM

Fica, finalmente, ao leitor a tarefa de dar a este relatório de pesquisa um significado próprio, aquele que lhe é atribuído pelos olhos de quem não viveu as experiências que eu vivi na trajetória desta pesquisa. Os meus estão impregnados de pessoas com as quais convivi no curso de pós-graduação da Unesp, dos amigos que fiz, dos professores que me acompanharam, da orientadora segura e fiel, e do professor e dos alunos que participaram de minha pesquisa. Eles estão enxertados de conhecimentos que adquiri com as aulas, com as leituras, com as participações em congressos. Não são mais capazes de enxergar por si mesmos, também porque foram moldados pela saudade causada pelo distanciamento da família, pelo cansaço físico e mental que tantas vezes foi maior do que a força de vontade, e pela consciência de que muito mais e melhor poderia ter sido feito.

Muitas perspectivas podem se abrir, a partir dos olhos do leitor, que não fui capaz de perceber e apontar neste capítulo final. Mas também isto faz parte da pesquisa e, apesar do cansaço, fica a esperança gratificante de que, uma vez inconcluso, ele tenha aberto caminhos para que outros imprimam, também, sua trajetória.

Afinal, "é sempre maior o trabalho que fica a ser feito do que aquele que foi realizado." (VILLARREAL, 1999, p.372)

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. Como pesquisar em Educação Matemática: a proposta de Romberg. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2001, São Paulo. **Anais do V Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo**: PUC, 2001. p.359-363.

________. O ensino da matemática por meio da resolução de problemas usando computadores. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2002, Campinas. **Anais do VI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática.** Campinas: UNICAMP, 2002a. p.672-679.

________. O papel das teorias científicas e a evolução do conceito de *Grounded Theory* - uma alternativa em pesquisas qualitativas. In: FÓRUM DE INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA, 3., 2002, Juiz de Fora. **Anais do III Fórum de investigação qualitativa.** Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2002b. p.1-8.

________. A associação dos computadores à metodologia de resolução de problemas trazendo novas possibilidades para o ensino de Matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. **Anais da 11ª Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003. p.1-14.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas e o uso do computador na construção do conceito de Taxa Média de Variação. **Revista de Educação Matemática,** São Paulo, n.8, p.37-42. 2003.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais.** São Paulo: Pioneira, 2001. p.109-188.

ANDRADE, R. O. B. **Perfil, formação e oportunidades de trabalho do Administrador profissional.** São Paulo: ESPM, 1999. 144p.

ASMAN, D.; MARKOVITS, Z. The use of real world knowledge in solving mathematical problems. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001.v.2, p.65-72.

ASPINWALL, L.; SHAW, K. L. Representations in Calculus: Two Contrasting Cases. **Mathematics Teacher.** Reston, v.95, n.6, p.434-439. 2002a.

ASPINWALL, L.; SHAW, K. L. When Visualization Is a Barrier to Mathematical Understanding. **Mathematics Teacher,** Reston, v.95, n.9, p.714-717. 2002b.

AZEVEDO, L. L. **Uma proposta de mudança na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na Metodologia de Ensino de Matemática via Resolução de Problemas.** 1998. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002. 389p.

BENEDETTI, F. C. **Funções, Software gráfico e Coletivos Pensantes.** 2003. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BIZELLI, M. H. S. S. ; BORBA, M. C. O conhecimento matemático e o uso de softwares gráficos. **Educação Matemática em Revista,** São Paulo, n.7, p.45-54.1999.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336p.

BOLZAN, W. J. **A Matemática nos cursos profissionalizantes de Mecânica.** 2003. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BORBA, M. C. Funções, representações múltiplas e visualização na Educação Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1995, Rio de Janeiro. **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.** Rio de Janeiro: IM - UFRJ, 1995. v.1, p.71-90.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M.A.V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.285-295.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104p.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Pesquisas em Informática e Educação Matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p.239-251. 2002.

BORRÕES, M. L. C. **O Computador na Educação Matemática**. Lisboa, 1998. 78p.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**, Lei n° 9394 / 96. Brasília, DF.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - 5ª. a 8ª. séries: Matemática. Brasília, 1998. 148p.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Ensino Superior. **Diretrizes Curriculares para os Cursos de Graduação em Administração**. Brasília, 1999.

BRASIL, L. A. S. **Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio**. São Paulo: Fundo de Cultura, 1964. 98p.

CAMPBELL, P. F. Characteristics of constructivist instruction. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 8., 1996, Sevilha. **Eighth International Congress on Mathematical Education,** Sevilha, Espanha, 1996. **(***Handout*).

CANAVARRO, A. P. O computador nas concepções e práticas dos professores de Matemática. **Quadrante**, Lisboa, v.3, n.2, p.25-49. 1994.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na Vida Dez, na Escola Zero.** 11.ed. São Paulo: Cortez, 2001. 182p.

CARROL, W.; PORTER, D. Invented strategies can develop meaningful mathematical procedures. **Teaching Children Mathematics,** Reston. p.370-374, 1997.

CHAPMAN, O. Teacher intervention during mathematical problem-solving instruction. **Quadrante.** Lisboa, v.8, p.169-188. 1999.

CIFARELLI, V. V.; GOODSON-ESPY, T. The role of Mathematical Beliefs in the Problem Solving Actions of College Algebra Students. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education***.* Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. v.2, p.265-272.

CONTRERAS, L.C.; CARRILLO, J. Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula*.* **Educación Matemática**, v.10, n.1, p.26-37. 1998.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12.ed. São Paulo: Editora Ática, 2000. 175p.

DIEZMANN, C. M.; WATTERS, J. J.; ENGLISH, L.D. Difficulties Confronting Young Children Undertaking Investigations. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. v.2, p.353-360.

DOWBOR, L. **Tecnologias do conhecimento:** os desafios da educação*.* Petrópolis: Vozes, 2001. 85p.

FERREIRA. A. B. H. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.** 2.ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986. 1838p.

FERRI, R. B.; KAISER, G. First results of a study in different mathematical thinking styles of school children. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. v.1, p.323.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática*.* In: PROFMAT 99, 1999, Lisboa. **Actas do ProfMat 99**. Lisboa: APM, p.91-101.

FRIEDLANDER, A.; STEIN, H. Students' Choice of Tools in Solving Equations in a Technological Learning Environment. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP

FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. v.1,p.441-447.

GAZIRE, E. S. **Perspectivas da Resolução de Problemas em Educação Matemática.** 1988. 169 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1988.

GÓMEZ, J. L. L. The role of technology in the study of semiotic representations in Mathematics. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht**. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. v.1, p.339.

GONÇALVES, I. A. Informática e educação: panorâmica da produção intelectual brasileira. **Educação & Tecnologia**. Belo Horizonte, v. 5, n.1, p.43-54. 2000.

HEMBREE, R.; MARSH, H. Problem Solving IN Early Childhood: Building Foundations. In: JENSEN, R. J. (Ed) **Research Ideas for the Classroom** – Early Childhood Mathematics. New York: Macmillan, 1993. p.151-170.

HERSHKOWITZ, R.; KIERAN, C. Algorithmic and Meaningful Ways of Joining Together Representatives within the same Mathematical Activity: an Experience with Graphing Calculators. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. p.96-110.

HOUAISS. A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1.ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. 2925p.

JAPIASSÚ, H., MARCONDES, D. **Dicionário Básico de Filosofia.** 3.ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1996. 296p.

KATO, H. Effects of teaching for development of metacognitive ability - classroom sessions. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics** Education. Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. vol. 1, p.324.

KENDAL, M.; STACEY, K. Influences on and Factors Changing Technology Privileging. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. vol. 3, p.217-224,.

KIDRON, I.; ZEHAVI, N.; OPENHAIM, E. Teaching the limit concept in a CAS environment: Students' dynamic perceptions and reasoning. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. vol. 3, p.241-248.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **Problem Solving in School Mathematics.** Reston: NCTM, Yearbook, 1980.

LAGRANGE, J.; ARTIGUE, M.; LABORDE, C.; TROUCHE, L. A Meta Study on IC Technologies in Education - Towards a multidimensional framework to tackle their integration. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. *Proceedings of the* **25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001.vol. 1, p.111-125.

LESTER, F. K. What has happened to mathematical problem-solving research. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais do 1º. Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.** Rio de Janeiro: IM - UFRJ, 1995. p.57-68.

LESTER, F. K. Musings about research on mathematical problem solving. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v.25, n.6, p.660-675. 1994.

LEVY, P. **As Tecnologias da Inteligência**: O Futuro do Pensamento na Era da Informática. Rio de Janeiro:Editora 34, 1993. 208p.

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações - os três componentes do ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.41, p.1-6, 1999.

LÜDKE, M.,ANDRÉ, M. E. D. **A. Pesquisa em educação***:* abordagens qualitativas. São Paulo: E.P.U., 1986. 99p.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. **Cálculo:** Funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Savaiva, 2003. 408p.

MENDONÇA, M.C. D. Resolução de Problemas Pede (Re)Formulação*.* In: ABRANTES, P. et al (Org.). **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo.** Lisboa: APM, 1999. p.15-33.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action.** Reston: NCTM, 1980. 29 p.

________. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston: Library of Congress Cataloguing, 2000. 402p.

NIEDERHAUSER, D. S.; STODDART, T. Teachers' instructional perspectives and use of educational software. **Teaching and Teacher Education.,** v.17, p.15-31, 2001.

NODDINGS, N. Preparing Teachers to Teach Mathematical Problem Solving. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989. p.244-258.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

________. Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. **.** IN: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. *Anais da 11ª Conferência Interamericana de Educação Matemática.* Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003. **Anais da 11ª Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003a. p.1-11.

________. Educação Matemática & Perspectivas e Desafios. IN: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. **Anais da 11ª Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003. *Anais da 11ª Conferência Interamericana de Educação Matemática.* Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003b. p.1-12.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org). **Educação Matemática** - pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

PAULETTE, W. **Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações, no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista - Unip**. 2003. 398 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

PENTEADO SILVA, M. G. **Resolução de problemas -uma perspectiva de trabalho em sala de aula.** 1989. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. **A informática em ação**. São Paulo: Olho d'Água, 2000. 80p.

PEREIRA, M. **O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do ensino fundamental.** 2004. 262 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

PEHKONEN, E. State-of-the-Art in Problem Solving: Focus on Open Problems. In: PROMATH, 2003, Berlin**. Proceedings of ProMath 2003.** Berlin: Verlag Franzbecker, 2003. p.93-111.

PIERCE, R.; STACEY, K. Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. **Mathematics Education Research Journal,** Austrália, v.13, n.1, p.28-46, 2001.

PIERCE, R.; STACEY, K. Algebraic Insight: The Algebra Needed to Use Computer Algebra Systems. **Mathematics Teacher.** Reston, v.95, n.8, p.622-627, 2002.

POLLAK, H. O. The effects of Technology for School Mathematics. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 5., 1986, Boston. **Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education.** Boston, 1986. p.346-351.

POLYA, G. *How to Solve It.* Princeton: Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. On Solving Mathamatical Problems in High School. In: KRULIK, S.; REYS, R. E.(Ed.).**Problem Solving in School Mathematics**. Reston: NCTM,Yearbook, 1980. p.1-2.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2 ed, 1994. 196p.

PONTE, J. P. Mathematics teachers' professional knowledge. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 18., 1994, Lisboa. **Proceedings Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Lisboa, 1994. vol. I, p.195-210.

PONTE, J. P. A investigação sobre o professor de Matemática: Problemas e perspectivas. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2000, Serra Negra. **Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Serra Negra, 2000.

RICHARDSON, R. J. A escola do século XXI. In: OLIVEIRA, M.N. (Org) **As políticas educacionais no contexto da globalização.** Ilhéus: Editus, 1999. p.147-161.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap.3, p.49-64.

SALM, C. O Impacto das Novas Tecnologias e a Educação. In: BORGES. A. S. et al. **O diretor-articulador do projeto da escola**. São Paulo: FDE, 1992. p.15-20. (Série Idéias)

SALOMON, D. V. **Como fazer uma monografia.** 9.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999. 412 p.

SANTOS, M. C. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo. v.9, n.12, p.11-15, 2002.

SCHOENFELD, A. H. Heurístics in the classroon. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Ed.) **Problem Solving in School Mathematics.** Reston: NCTM, Yearbook, 1980. p.9-22.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving .** Flórida: Academic Press, 1985.

SCHOENFELD, A. H. Problem Solving in Context. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989. p.82-92.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap.15, p.334-370.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989. p.31-42.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 20.ed. São Paulo: Cortez, 1996. 272p.

SHIMADA, S. The Significance of an Open-Ended Approach. In: BECKER, J.P.; SHIMADA, S. (Ed.). **The Open-Ended Approach:** A New Proposal for Teaching Mathematics. Reston: NCTM, 1997. p.1-9.

SILVA, M. D. F. **O computador na formação inicial do professor de Matemática: um estudo a partir das perspectivas de alunos - professores.** 1999. 179 f. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat.** Rio de Janeiro: Editora Record, 1999. 323p.

SKOVSMOSE, O.; BORBA, M. **Research methodology and critical Mathematics Education,** Roskilde: Centre of Research in Learning Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, n.18, 2000.

SORVARI, J.; PEHKONEN, E. Promoting mathematical thinking: a pilot study for innovative learning environments. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. vol. 4, p.201-208.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989. p.1-23.

STEWART, J. **Cálculo** . 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2001. 579 p.

TAILLE, Y. Educação. **Folha de São Paulo**, São Paulo, 13 abr.1997. Caderno Mais.

TALL, D. Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change. **For the Learning of Mathematics**, Canada, v.3, n.9, p.37-42, 1989.

THOMPSON, A. G. Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989. p.232-243.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. **The concept of activity in Soviet Psychology.** New York: M. E. Sharpe, 1981. p.256-278.

VAN DE WALLE, J. A. Teaching Through Problem Solving. In: VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics.** New York: Longman, 2001. p.40-61.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

WAGNER, D. R. We Have a Problem Here: 5 + 20 = 45*.* **Mathematics Teacher,** Reston, v.96, n.9, p.612-616. 2003.

WAITS, B. K.; DEMANA, F. Calculators in Mathematics Teaching and Learning: Past, Present and Future. In: **Learning Mathematics for a New Century.** Reston: NCTM. 2000. cap.5, p.51-66.

WILLOUGHBY, S. S. Perspectives on Mathematics Education. In: **Learning Mathematics for a New Century.** Reston: NCTM. 2000. cap.1, p.1-15.

ANEXOS

ANEXO I

QUESTIONÁRIO

Objetivo: Obter dados para uma investigação a respeito do perfil dos alunos da disciplina Matemática II, do curso de Administração de Empresas.
Pesquisadora: Norma Suely Gomes Allevato
Orientadora: Profª Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
Instituição: Unesp - Universidade Estadual Paulista - Campus de Rio Claro

1. DADOS PESSOAIS

1.1 Nome (opcional)____

1.2 Sexo
( ) Masculino ( ) Feminino

1.3 Idade
( ) 17 a 20 anos
( ) 21 a 24 anos
( ) 25 a 30 anos
( ) 31 a 40 anos
( ) mais de 40 anos

1.4 Lugar de origem (Cidade/Estado)____________________________________

1.5 Lugar de residência (Cidade/Estado)_________________________________

1.6 Há quanto tempo reside na cidade indicada?____________________________

1.7 Estado civil
( )Solteiro ( )Casado ( )Divorciado/desquitado ( )Viúvo ( )Outros

1.8 Ocupação:
( ) Só estuda ( ) Estuda e trabalha

2. DADOS ACADÊMICOS

2.1 Rede de ensino onde freqüentou o Ensino Fundamental
( ) Pública ( ) Particular

2.2 Rede de ensino onde freqüentou o Ensino Médio
( ) Pública ( ) Particular

2.3 Fez cursinho pré - vestibular?
( ) Sim ( ) Não

2.4 Prestou vestibular em outras instituições?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, em quais?
____
____
____

3. DADOS PROFISSIONAIS

3.1 Se trabalha, qual é o número de horas semanais trabalhadas?
____

3.2 Se trabalha, qual é o horário de trabalho ?
____

3.3 Se trabalha, o tipo de atividade que exerce é:
( ) Remunerada
( ) Não remunerada (estágio, trabalho voluntário, etc)

4. O CURSO E A FACULDADE

4.1 Você entrou na faculdade imediatamente após ter terminado o Ensino Médio?
( ) Sim ( ) Não
Se não, que atividades exerceu neste intervalo de tempo?
____
Se ficou sem estudar, foi por quanto tempo?
____

4.2 Por que escolheu esse curso?
____

4.3 Por que escolheu esta Universidade?
____

5. A MATEMÁTICA

5.1 Gosta de matemática?
( ) Sim ( ) Não ( ) É indiferente

5.2 Como considera a matemática?
( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

5.3 Como foi seu desempenho em matemática no Ensino Médio?
( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Bom ( ) Ótimo

5.4 Sabia que teria Matemática no curso que você está cursando?
( ) Sim ( ) Não ( ) Imaginava

5.5 Considera que estudar matemática é relevante para a sua formação profissional?
( ) Sim ( ) Não
Justifique.
____
____
____

5.6 Você já estudou matemática usando o computador?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, de que modo? Se puder, especifique a disciplina e/ou o programa de computador que utilizou.
____
____
____

5.7 Você tem computador em casa?
( ) Sim ( ) Não

5.8 Em caso negativo, tem acesso fácil a um computador em outro local?
( ) Sim ( ) Não
Onde?
____

Se há mais alguma informação que julga relevante acrescentar, use este espaço.
____
____
____

Obrigada pela participação !
Setembro/2002

ANEXO II

Entrevista com o professor

Você deve se lembrar que quando observei suas aulas, para coletar dados para minha pesquisa, os alunos já haviam freqüentado um semestre de aulas com você. Para que eu possa entender melhor os dados que coletei, gostaria que me esclarecesse alguns pontos sobre aquele primeiro semestre, que eu não observei.

1) Eu gostaria de saber, primeiramente, que metodologia de ensino você utilizou com seus alunos?

2) Você pode explicar como você usou esta metodologia?

3) Que conteúdos você trabalhou com os alunos naquele primeiro semestre?

4) O que é um problema para você?

5) Os problemas que você propõe aos seus alunos estão, na maioria, no contexto da Administração de Empresas. Para você, qual é importância desses problemas contextualizados?

6) Percebi que você chama de "ponto crítico" o ponto de intersecção de duas curvas que representam as funções de receita e custo. Por que utiliza este termo? Ele é utilizado na área de negócios?

7) Qual sua opinião sobre aquele semestre em que levamos os alunos para ter aulas no laboratório de informática? O que você achou da experiência com aqueles alunos?

8) Para você, há diferença entre os problemas preparados para serem resolvidos em sala de aula normal e os problemas preparados para serem resolvidos com a utilização do computador? Se sim, que diferenças são essas?

9) Sobre os problemas que compõem o trabalho proposto aos alunos:
   - Você poderia comentar o que pretendia com aquele trabalho?
   - Você poderia comentar, ao menos brevemente, o que pretendia com cada um dos grupos de exercícios?
   - O que significa interpretar gráficos de funções do tipo "tal"?

10) Por que chama as atividades de Exercícios Grupo 01, Exercícios Grupo 02, etc.? Você não considera que são problemas?

11) No enunciado dos Exercícios Grupo 01 você utiliza o termo "traço" com que sentido?

12) Lembro-me que no semestre em que observei as aulas de laboratório de sua turma você fazia questão de apresentar os novos conteúdos aos alunos na sala de aula normal. Por que?

13) Você já "apresentou" (introduziu) um novo conteúdo matemático, aos seus alunos de Administração, no laboratório de informática e utilizando o computador?

14) Então você acha que não é possível empregar a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas utilizando o computador?

ANEXO III

APLICATIVOS DE MATEMÁTICA

UNIDADE - I

Funções reais de uma variável

Agosto/2002

Conteúdo

1. Funções constantes
2. Funções lineares e afins.
3. Equação da reta.
4. Raízes, monotonicidade e sinal da função afim.
5. Funções quadráticas.
6. Funções modulares.
7. Função raiz quadrada.
8. Função hipérbole.
9. Função exponencial.
10. Função logarítmica.

Dicas e sugestões para utilização do programa Winplot.

1) Executar cada grupo de exercícios num mesmo gráfico.
2) Para cada função, utilizar uma cor diferente.
3) Indicar a lei ao lado de seu respectivo gráfico inserindo-o no formato texto.
4) Responder às perguntas inserindo-as em formato texto.
5) Por simplificação, deixamos de explicitar o domínio e o contradomínio, apresentando apenas a lei.
6) Exibir nos gráficos:
    a) As setas dos eixos.
    b) Os nomes dos eixos.
    c) As linhas de grade e a escala sobre os eixos.
    d) Utilizar "espessura da linha" = 2 e densidade = 2.

Exercícios Grupo 01

Objetivos:

(a) Construir e interpretar gráficos de funções constantes.

(b) Conhecer a imagem de pontos de funções dadas (traço).

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

(a) $y = 2$ (b) $y = 3$ (c) $y = \sqrt{2}$

(d) $y = -2$ (e) $y = \sqrt[3]{10}$ (f) $y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

O que é que os gráficos das funções anteriores têm em comum?

2. Seja a função dada por $y = \pi^2$, utilizando a função "traço" verifique e marque os pontos da função no gráfico para:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
$\sqrt{2}$	

Exercícios Grupo 02

Objetivos:

(a) Construir e interpretar gráficos de funções lineares e afins.
(b) Verificar a influência no gráfico do coeficiente angular.
(c) Determinar a intersecção de duas funções afins.

1. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:

(a) $y = x$ (b) $y = 2x$ (c) $y = 3x$

(d) $y = \frac{x}{2}$ (e) $y = \frac{x}{3}$ (f) $y = \frac{x}{4}$

2. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:

(a) $y = 2x$ (b) $y = 2x + 1$ (c) $y = 2x + 2$

(d) $y = 2x - 1$ (e) $y = 2x - 2$ (f) $y = 2x - 3$

3. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:

(a) $y = x + 2$ (b) $y = 2x + 2$ (c) $y = 3x + 2$

(d) $y = -x + 2$ (e) $y = -2x + 2$ (f) $y = -3x + 2$

4. Trace o gráfico do valor pago por uma refeição em função do peso (em gramas) de um restaurante que opera no sistema de refeição por quilo cujo preço é R$ 12,00 por quilo.

5. Resolver graficamente e analiticamente os sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 3 \end{cases}$	(d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$
(e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$	(f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Exercícios Grupo 03

Objetivos:

(a) Determinar a equação da reta que passa por dois pontos dados.

(b) Determinar a equação da reta que passa por um ponto dado e seu coeficiente angular.

(c) Determinar a equação da reta que passa por um ponto dado e seu coeficiente linear.

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

	Passa pelo(s) ponto(s)	Coeficiente angular	Coeficiente linear
(a)	(1, 3)	2	
(b)	(1, 3)	3	
(c)	(2, 3)		1
(d)	(2, 3)		2

2. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

	Passa pelo(s) ponto(s)
(a)	(1, 0) e (0, 3)
(b)	(-2, 0) e (0, 2)
(c)	(-1, 0) e (0, 4)
(d)	(-2, 0) e (0, -1)

Exercícios Grupo 04

Objetivos:

(a) Construir gráficos das funções afim.

(b) Determinar raízes, monotonicidade e sinal.

1. Para cada uma das funções a seguir, pede-se:
   - Traçar o gráfico
   - Verificar se é crescente ou decrescente.
   - Determinar a raiz e o encontro com o eixo y.
   - Verificar para que valores de x a função é positiva ou negativa (sinal das funções).

(a) $y = 2x - 3$	(b) $y = \frac{x}{3} + 1$	(c) $y = -2x + 3$

Exercícios Grupo 05

Objetivos:

(a) Construir gráficos de funções quadráticas, $f(x) = ax^2 + bx + c$

(b) Determinar os encontros com os eixos.

(c) Observar em cada grupo de exercícios o significado dos coeficientes *a*, *b* e *c*.

(d) Determinar o vértice da parábola.

1. Construir o gráfico das funções de cada item no mesmo sistema de eixos.

(a) $\begin{cases} f(x) = 1x^2 \\ g(x) = 2x^2 \\ h(x) = 3x^2 \\ i(x) = 4x^2 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f(x) = 1x^2 \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ h(x) = \frac{1}{3}x^2 \\ i(x) = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$	(c) $\begin{cases} f(x) = -x^2 \\ g(x) = -2x^2 \\ h(x) = -3x^2 \\ i(x) = -4x^2 \end{cases}$
(d) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^2 + 1 \\ h(x) = x^2 + 2 \\ i(x) = x^2 + 3 \end{cases}$	(e) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^2 - 1 \\ h(x) = x^2 - 2 \\ i(x) = x^2 - 3 \end{cases}$	(f) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = (x-1)^2 \\ h(x) = (x-2)^2 \\ i(x) = (x-3)^2 \end{cases}$
(g) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = (x+1)^2 \\ h(x) = (x+2)^2 \\ i(x) = (x+3)^2 \end{cases}$	(h) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x \\ g(x) = x^2 - 2x \\ h(x) = x^2 - 3x \\ i(x) = x^2 - 4x \end{cases}$	(i) $\begin{cases} f(x) = x^2 + x \\ g(x) = x^2 + 2x \\ h(x) = x^2 + 3x \\ i(x) = x^2 + 4x \end{cases}$

Exercícios Grupo 06

Objetivos:

Construir e interpretar gráficos das funções modulares.

1. Construir os gráficos de cada item, num mesmo sistema cartesiano.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x \rvert \\ f_2(x) = \lvert x \rvert + 1 \\ f_3(x) = \lvert x \rvert + 2 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x+1 \rvert \\ f_2(x) = \lvert x+2 \rvert \\ f_3(x) = \lvert x+3 \rvert \end{cases}$
(c) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x^2 - 2 \rvert \\ f_2(x) = -\lvert x^2 - 2 \rvert \\ f_3(x) = \lvert (x-2)^2 - 3 \rvert \end{cases}$	(d) $\begin{cases} f(x) = \lvert x^2 - 4x + 3 \rvert \\ g(x) = x^2 - 4\lvert x \rvert + 3 \end{cases}$

Exercícios Grupo 07

Objetivos:

(a) Construir gráficos de funções raiz quadrada

(b) Determinar os pontos de encontro com os eixos.

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema de eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x} \\ f_2(x) = \sqrt{x-1} \\ f_3(x) = \sqrt{x-2} \\ f_4(x) = \sqrt{x+2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x} \\ f_2(x) = \sqrt{2-x} \\ f_3(x) = \sqrt{2-2x} \\ f_4(x) = \sqrt{2-3x} \end{cases}$

2. Determinar os pontos de encontro com os eixos.

Exercícios Grupo 08

Objetivos:

(a) Construir gráficos de funções hipérbole.

(b) Determinar as assíntotas.

(c) Determinar os pontos de encontro com os eixos

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema cartesiano.
2. Determinar as assíntotas e encontro com os eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2 - \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = 2 - \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = 2 - \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$

Exercícios Grupo 09

Objetivos:

(a) Construir e interpretar gráficos de funções exponenciais.

(b) Verificar que sempre o sinal da exponencial é positivo

1. Construir os gráficos das funções de cada item em um mesmo sistema cartesiano.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 3^x \\ f_3(x) = 4^x \\ f_4(x) = 5^x \end{cases}$		(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ f_2(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \\ f_3(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ f_4(x) = 5^{-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x \end{cases}$
(c) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^{2x} \\ f_3(x) = 2^{3x} \\ f_4(x) = 2^{4x} \end{cases}$	(d) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^{(x+1)} \\ f_3(x) = 2^{(x+2)} \\ f_4(x) = 2^{(x+3)} \\ f_5(x) = 2^{(x+4)} \end{cases}$	(e) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^x + 1 \\ f_3(x) = 2^x + 2 \\ f_4(x) = 2^x + 3 \\ f_5(x) = 2^x + 4 \end{cases}$

2. Resolver graficamente as seguintes equações exponenciais.

(a) $2^x = 16$	(b) $2^x = 32$	(c) $2^x = 64$	(d) $2^x = 128$	(e) $2^x = \frac{1}{16}$

Exercícios Grupo 10

Objetivos:

(a) Construir e interpretar gráficos de funções logarítmicas.

(b) Verificar a monotonicidade.

1. Construir os gráficos das seguintes funções logarítmicas no mesmo sistema cartesiano.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \log_3 x \\ f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \\ f_3(x) = \log x \\ f_4(x) = \log_{\frac{1}{10}} x \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = \ln x \\ f_2(x) = \ln(2x) \\ f_3(x) = \ln(3x) \\ f_4(x) = \ln(4x) \\ f_5(x) = \ln(5x) \end{cases}$	(c) $\begin{cases} f_1(x) = \ln x \\ f_2(x) = 2x \ln x \\ f_3(x) = 3x \ln x \\ f_4(x) = 4x \ln x \\ f_5(x) = 5x \ln x \end{cases}$	(d) $\begin{cases} f_1(x) = \ln x \\ f_2(x) = \ln(\frac{x}{2}) \\ f_3(x) = \ln(\frac{x}{3}) \\ f_4(x) = \ln(\frac{x}{4}) \\ f_5(x) = \ln(\frac{x}{5}) \end{cases}$

(e) $\begin{cases} f_1(x) = \ln x \\ f_2(x) = \ln(x+1) \\ f_3(x) = \ln(x+2) \\ f_4(x) = \ln(x+3) \\ f_5(x) = \ln(x+4) \end{cases}$	(f) $\begin{cases} f_1(x) = \ln x + 1 \\ f_2(x) = \ln x + 2 \\ f_3(x) = \ln x + 3 \\ f_4(x) = \ln x + 4 \\ f_5(x) = \ln x + 5 \end{cases}$	(g) $\begin{cases} f_1(x) = \log_2 x^2 \\ f_2(x) = \log_2(x^2+1) \\ f_3(x) = \log_2(x^2+2) \\ f_4(x) = \log_2(x^2+3) \\ f_5(x) = \log_2(x^2+4) \end{cases}$

ANEXO IV

LISTA DE PROBLEMAS ANALISADOS

$$\begin{cases} q_d = -6 + \dfrac{90}{p+5} \\ q_o = \dfrac{2}{5}p + 1 \end{cases}$$

Problema 1

Problema das Lâmpadas Fluorescentes

As leis de oferta e demanda de lâmpadas fluorescentes são dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -4 + \dfrac{200}{p+20} \\ q_o = \dfrac{3}{5}p + 1 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O ponto de equilíbrio

(b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda

(c) Dar a análise econômica

Problema 2

Suponha que as leis das lâmpadas fluorescentes fossem dadas por:

$$\begin{cases} q_d = -2 + \dfrac{100}{p+10} \\ q_o = 0{,}03\, p^2 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) O ponto de equilíbrio

(b) Esboçar os gráficos da oferta e da demanda

(c) Dar a análise econômica

Problema 3

Um empresário construiu um conjunto de casas denominado Vila dos estudantes e aluga cada casa a p reais por dia. Sabe-se que a quantidade de casas demandada é dada por $q = \sqrt{225 - 9p}$. Pede-se:

(a) Esboçar o gráfico.

(b) Quantas casas são alugadas se o preço for R$ 25,00?

Problema 4

Um fabricante de geladeiras produz q aparelhos por semana ao custo total de $C_t = \sqrt{q+4}$ e receita total $R_t = (3/5)q$ (reais). Pede-se:

(a) Ponto crítico.

(b) Esboçar o gráfico das duas curvas.

(c) Quando se tem lucro?

Problema 5

Problema do tanque de óleo

Um complexo de apartamentos tem um tanque para armazenar óleo utilizado para aquecimento. Em primeiro de janeiro, encheu-se o tanque e não há previsão de entrega de óleo até março. Denote por **t** o número de dias contados após primeiro de janeiro e denote por **n** o número de galões de óleo no tanque. Baseado nos registros atuais do complexo de apartamentos, **n** e **t** estão relacionados pela equação

n = 30 000 - 400t, pede-se:

(a) Esboçar o gráfico da função n=n(t).

(b) Os interceptos em relação ao eixo Ox.

(c) Os interceptos em relação ao eixo Oy.

(d) O consumo semanal de óleo desse complexo de apartamentos.

(e) O significado do coeficiente angular da reta n=n(t).

(f) O significado do coeficiente linear da reta n=n(t).

Problema 6

Problema da companhia de software

Suponha que uma companhia de software produz e vende uma nova planilha a um custo de R$ 25,00 por cópia e que a companhia tem um custo fixo de R$ 10 000,00 por mês, determinar:

(a) O custo mensal como uma função (fórmula) do número q de cópias produzidas.

(b) O esboço do gráfico da função que você obteve no item (a).

(c) O custo quando x = 500.

(d) A partir de que quantidade se tem lucro, se o preço de venda for R$50,00 por cópia.

Problema 7

Os proprietários de uma certa empresa de ônibus estimam que a receita total obtida com a linha que liga as ruas A e B é dada por R_t = 60p.(25-10p), onde p representa o preço da passagem (bilhete), em reais. O custo total é C_t = 200+325p.

(a) Esboce o gráfico de R_t e C_t.

(b) Determine que preço p deverá ser cobrado pela passagem para que seja obtida a máxima receita.

(c) Determine o ponto crítico dando a análise econômica

(d) Para que valores de p se tem lucro? Justifique sua reposta.

(e) Para que valores de p se tem prejuízo? Justifique sua resposta.

(f) Qual é o valor da receita e do custo se o preço do bilhete for R$1,20?

Problema 8

Exercícios Grupo 04

Objetivos:
(a) Construir gráficos das funções afins.
(b) Determinar raízes, monotonicidade e sinal.

1. Para cada uma das funções a seguir, pede-se:
- Traçar o gráfico
- Verificar se é crescente ou decrescente.
- Determinar a raiz e o encontro com o eixo y.
- Verificar para que valores de x a função é positiva ou negativa (sinal das funções).

(a) $y = 2x - 3$	(b) $y = \frac{x}{3} + 1$	(c) $y = -2x + 3$

Problema 9

Exercícios Grupo 03

Objetivos:
(a) Determinar a equação da reta que passa por dois pontos dados.
(b) Determinar a equação da reta que passa por um ponto dado e seu coeficiente angular.
(c) Determinar a equação da reta que passa por um ponto dado e seu coeficiente linear.

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

	Passa pelo(s) ponto(s)	Coeficiente angular	Coeficiente linear
(a)	(1, 3)	2	
(b)	(1, 3)	3	
(c)	(2, 3)		1
(d)	(2, 3)		2

2. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

	Passa pelo(s) ponto(s)
(a)	(1, 0) e (0, 3)
(b)	(-2, 0) e (0, 2)
(c)	(-1, 0) e (0, 4)
(d)	(-2, 0) e (0, -1)

Problema 10

Exercícios Grupo 07

Objetivos:
(a) Construir e interpretar gráficos de funções raiz quadrada
(b) Determinar os pontos de encontro com os eixos.

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema de eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x} \\ f_2(x) = \sqrt{x-1} \\ f_3(x) = \sqrt{x-2} \\ f_4(x) = \sqrt{x+2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x} \\ f_2(x) = \sqrt{2-x} \\ f_3(x) = \sqrt{2-2x} \\ f_4(x) = \sqrt{2-3x} \end{cases}$

2. Determinar os pontos de encontro com os eixos.

Problema 11

Exercícios Grupo 08

Objetivos:

(a) Construir gráficos de funções hiperbólicas.
(b) Determinar as assíntotas
(c) Determinar os pontos de encontro com os eixos

1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema cartesiano.
2. Determinar as assíntotas e os encontros com os eixos.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2 - \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = 2 - \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = 2 - \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$

Problema 12

$$\begin{cases} R_t = 4^{q+1} - 4 \\ C_t = 9.2^q - 6 \end{cases}$$

Problema 13

Problema do mercado de ações

Fernanda diz a Pedro que, no mercado de ações, sabe-se que a rentabilidade das ações da empresa A é descrita pela lei $R_A = 4^t$ e da empresa B pela lei $R_B = 10.2^t - 16$, onde t é o tempo em meses a partir de 1º de janeiro de 2001. Pede-se:

(a) Os pontos onde as rentabilidades são iguais.
(b) Esboçar o gráfico de R_A e R_B.
(c) Qual a melhor escolha da rentabilidade se o dinheiro ficar disponível até o 10º mês?

Problema 14

$$\begin{cases} q_d = 64 - 8p - 2p^2 \\ q_o = 10p + 5p^2 \end{cases}$$

Problema 15

Exercícios Grupo 01

Objetivos:

(a) Construir e interpretar gráficos de funções constantes.
(b) Conhecer a imagem de pontos de funções dadas (traço).
(c) Determinar os pontos de encontro com os eixos.

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:

   (a) y = 2 (b) y = 3 (c) $y = \sqrt{2}$

   (d) y = -2 (e) $y = \sqrt[3]{10}$ (f) $y = \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$

   O que é que os gráficos das funções anteriores têm em comum?

2. Seja a função dada por $y = \pi^2$, utilizando a função "traço" verifique e marque os pontos da função no gráfico para:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
$\sqrt{2}$	

Problema 16

Considere a função

$$f(p) = \log_2(3 - p^2)$$

(a) Faça o gráfico.

(b) Diga se a função é de oferta ou de demanda.

(c) Para que valores de p se tem $\log_2(3 - p^2) > 0$?

Problema 17

Exercícios Grupo 02

Objetivos:

(a) Construir e interpretar gráficos de funções lineares e afins.
(b) Verificar a influência no gráfico do coeficiente angular.
(c) Determinar a intersecção de duas funções afins.

1. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:

(a) $y = x$	(b) $y = 2x$	(c) $y = 3x$
(d) $y = \frac{x}{2}$	(e) $y = \frac{x}{3}$	(f) $y = \frac{x}{4}$

2. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:

(a) $y = 2x$	(b) $y = 2x + 1$	(c) $y = 2x + 2$
(d) $y = 2x - 1$	(e) $y = 2x - 2$	(f) $y = 2x - 3$

3. Traçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos das seguintes funções:

(a) $y = x + 2$	(b) $y = 2x + 2$	(c) $y = 3x + 2$
(d) $y = -x + 2$	(e) $y = -2x + 2$	(f) $y = -3x + 2$

4. Trace o gráfico do valor pago por uma refeição em função do peso (em gramas) de um restaurante que opera no sistema de refeição por quilo cujo preço é R$ 12,00 por quilo.

5. Resolver graficamente e analiticamente os sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 3 \end{cases}$	(d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$
(e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$	(f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Problema 18

Conhecendo-se a função Custo Total e Receita Total dadas por $C_T = 4^{q+1}$ e $R_T = 8^{q^2-q}$, determinar:

(a) O ponto crítico.
(b) Os interceptos.
(c) Esboçar o gráfico de C_T e R_T.
(d) Análise econômica.

Problema 19

Conhecendo-se a função Custo Total e Receita Total dadas por $C_T = 2^q + 11$ e $R_T = 4^q - 1$, determinar:

(a) O ponto crítico.
(b) Os interceptos.
(c) Esboçar o gráfico de C_T e R_T.
(d) Análise econômica.

Problema 20

Considere a função

$$f(p) = \log_3(p^2 - 1)$$

(a) Faça o gráfico.

(b) Diga se a função é de oferta ou de demanda.

(c) Para que valores de p se tem $\log_3(p^2 - 1) = 1$?

Problema 21

Considere a função

$$f(p) = \log(2p + 1)$$

(a) Faça o gráfico.

(b) Diga se a função é de oferta ou de demanda.

(c) Para que valores de p se tem $\log(2p + 1) = 1$?

Problema 22

Exercícios Grupo 09

Objetivos:

(a) Construir e interpretar gráficos de funções exponenciais.
(b) Verificar que sempre o sinal da exponencial é positivo

1. Construir os gráficos das funções de cada item em um mesmo sistema cartesiano.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 3^x \\ f_3(x) = 4^x \\ f_4(x) = 5^x \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ f_2(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \\ f_3(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ f_4(x) = 5^{-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^{2x} \\ f_3(x) = 2^{3x} \\ f_4(x) = 2^{4x} \end{cases}$	(d) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^{(x+1)} \\ f_3(x) = 2^{(x+2)} \\ f_4(x) = 2^{(x+3)} \\ f_5(x) = 2^{(x+4)} \end{cases}$	(e) $\begin{cases} f_1(x) = 2^x \\ f_2(x) = 2^x + 1 \\ f_3(x) = 2^x + 2 \\ f_4(x) = 2^x + 3 \\ f_5(x) = 2^x + 4 \end{cases}$

2. Resolver graficamente as seguintes equações exponenciais.

(a) $2^x = 16$	(b) $2^x = 32$	(c) $2^x = 64$	(d) $2^x = 128$	(e) $2^x = \frac{1}{16}$

Problema 23

As funções de demanda e oferta referentes a uma certa marca de vídeo-cassete são dadas por

$$q_d = -0{,}1p^2 + 900 \qquad e \qquad q_o = \sqrt{1250\,p}$$

(a) Esboce o gráfico das duas funções.

(b) Determine o ponto de equilíbrio e explique seu significado econômico.

(c) Para que valores se tem escassez de oferta? Justifique sua resposta.

(d) Para que valores se tem excedente de oferta? Justifique sua resposta.

(e) Qual é a quantidade de demanda q_d e de oferta q_o correspondente ao preço de R$ 216,00?

Problema 24

Exercícios Grupo 06

Objetivos:

Construir e interpretar gráficos de funções modulares.

1. Construir os gráficos de cada item, num mesmo sistema cartesiano.

(a) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x \rvert \\ f_2(x) = \lvert x \rvert + 1 \\ f_3(x) = \lvert x \rvert + 2 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x+1 \rvert \\ f_2(x) = \lvert x+2 \rvert \\ f_3(x) = \lvert x+2 \rvert \end{cases}$	(c) $\begin{cases} f_1(x) = \lvert x^2 - 2 \rvert \\ f_2(x) = -\lvert x^2 - 2 \rvert \\ f_3(x) = \lvert (x-2)^2 - 3 \rvert \end{cases}$
(d) $\begin{cases} f(x) = \lvert x^2 - 4x + 3 \rvert \\ g(x) = x^2 - 4\lvert x \rvert + 3 \end{cases}$		

Problema 25

Exercícios Grupo 05

Objetivos:

(a) Construir gráficos de funções quadráticas, $f(x) = ax^2 + bx + c$
(b) Determinar os encontros com os eixos.
(c) Observar em cada grupo de exercícios o significado dos coeficientes *a*, *b* e *c*.
(d) Determinar o vértice da parábola.

1. Construir o gráfico das funções de cada item no mesmo sistema de eixos.

(a) $\begin{cases} f(x) = 1x^2 \\ g(x) = 2x^2 \\ h(x) = 3x^2 \\ i(x) = 4x^2 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} f(x) = 1x^2 \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ h(x) = \frac{1}{3}x^2 \\ i(x) = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$	(c) $\begin{cases} f(x) = -x^2 \\ g(x) = -2x^2 \\ h(x) = -3x^2 \\ i(x) = -4x^2 \end{cases}$
(d) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^2 + 1 \\ h(x) = x^2 + 2 \\ i(x) = x^2 + 3 \end{cases}$	(e) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^2 - 1 \\ h(x) = x^2 - 2 \\ i(x) = x^2 - 3 \end{cases}$	(f) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = (x-1)^2 \\ h(x) = (x-2)^2 \\ i(x) = (x-3)^2 \end{cases}$
(g) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = (x+1)^2 \\ h(x) = (x+2)^2 \\ i(x) = (x+3)^2 \end{cases}$	(h) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x \\ g(x) = x^2 - 2x \\ h(x) = x^2 - 3x \\ i(x) = x^2 - 4x \end{cases}$	(i) $\begin{cases} f(x) = x^2 + x \\ g(x) = x^2 + 2x \\ h(x) = x^2 + 3x \\ i(x) = x^2 + 4x \end{cases}$

Problema 26