

Vanessa Gayean de Castro Salvador dos Santos

Estudos de Sistemas Quânticos Não-Hermitianos com Espectro Real

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá

2009

## DADOS CURRICULARES

VANESSA GAYEAN DE CASTRO SALVADOR DOS SANTOS

NASCIMENTO	21.11.1975 – GUARATINGUETÁ/SP
FILIAÇÃO	Antonio Carlos de Castro Nancy Aparecida Vargas Gayean
1995/1999	Curso de Graduação em Licenciatura em Física na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista
2000/2002	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista

Em memória de Antonio Carlos de Castro

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por estar me ajudando a realizar meu sonho.

Ao professor Alvaro de Souza Dutra por sempre ter acreditado em mim. Aos professores do grupo de partículas e campos da Unesp-Campus de Guaratinguetá. Aos meus colegas do curso de pós-graduação.

Em especial, a Esequiel, Elias, minha mãe Nancy, meu pai Antonio in memoriam e aos meus avós.

A FAPESP e a CAPES pelo suporte financeiro.

Este trabalho contou com apoio das seguintes entidades

- CAPES- bolsista no período de maio/2005 a agosto/2006
- FAPESP - bolsista no período de setembro/2006 a dezembro/2008.

"E disse Deus: Haja luz; e houve luz (Gen sis 1:3)."

DOS SANTOS, V. G. C. S. **Estudos de Sistemas Quânticos não-hermitianos com Espectro Real**. 2009. 85 f. Tese (Doutorado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

## RESUMO

Nesta tese procuramos verificar e aprofundar os limites de validade dos chamados sistemas quânticos com simetria  $PT$ . Nestes tem-se, por exemplo, sistemas cuja hamiltoniana é não-hermitiana mas apresenta um espectro de energia real. Tal característica é usualmente justificada pela presença da simetria  $PT$  (paridade e inversão temporal), muito embora não haja ainda uma demonstração bem aceita na literatura desta propriedade de tais sistemas. Inicialmente estudamos sistemas quânticos não-relativísticos dependentes do tempo, sistemas em mais dimensões espaciais, a fim de verificar possíveis limites da simetria  $PT$  na garantia da realidade do espectro. Logo depois estudamos sistemas quânticos relativísticos em  $1+1D$  que possuem simetria  $PT$  com uma mistura adequada de potenciais: vetor, escalar e pseudo-escalar, sendo o potencial vetor complexo. Em seguida trabalhamos com densidades de lagrangiana com potenciais não-hermitianos em  $1+1$  dimensões espaço-temporais e em dimensões mais altas. A vantagem das baixas dimensões é que alguns sistemas possuem soluções não-perturbativas exatas. Finalmente, mostramos que não somente é possível ter um modelo consistente com dois campos escalares, mas também que a introdução de um número maior de campos permite que a densidade de energia também permaneça real.

**PALAVRAS-CHAVE:** equação de Dirac, equação de Schroedinger, simetria  $PT$ , hamiltonianas não-hermitianas,  $1+1 D$ , kinks, branas.

DOS SANTOS, V. G. C. S. **Studies non-Hermitian Quantum Systems with Real Spectra**. 2009. 85f. Tese (Doutorado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

## ABSTRACT

In this thesis we verify and try to deepen the limits of validity of the so called quantum systems with PT-symmetry. These are systems whose Hamiltonians are non-Hermitian but present real energy spectra. Such characteristic usually is justified by the presence of PT symmetry (parity and time inversion), despite of the fact that there is no well accepted demonstration in literature of this property of such systems yet. Initially we study time-dependent non-relativistic quantum systems in one spatial dimension in order to verify possible limits for which the PT symmetry grants the reality of the spectra. Soon later we study relativistic quantum systems in 1+1D that they possess symmetry PT with an convenient mixing of complex vector plus scalar plus pseudoscalar potentials is considered. After that, we work with a Lagrangian density with such features in 1+1 space-time dimensions and higher dimensions, in the context of field theory. The advantage of working in low dimensions is that, in such dimensions, some systems possess exact non-perturbative solutions. Finally, we show that not only it is possible to have a consistent model with two scalar fields, but also that the introduction of a bigger number of fields allows that the energy density also remains real.

**KEYWORDS:** Dirac equation, Schroedinger equation, PT-symmetry, non-Hermitian Hamiltonians, 1+1 D, kinks, branas.



# Sumário

<b>Lista de figuras</b>	<b>11</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>12</b>
1.1 Aplicações das Teorias não-hermitianas . . . . .	12
1.2 O contexto histórico da mecânica quântica não-hermitiana . . . . .	14
1.2.1 Literatura antes de 1998. . . . .	14
1.2.2 Literatura depois de 1998 . . . . .	17
<b>2 Estudo de sistemas quânticos não-hermitianos dependentes do tempo com espectro real</b>	<b>21</b>
2.1 Introdução . . . . .	21
2.2 A hamiltoniana não-hermitiana . . . . .	22
<b>3 Espectro real para a equação de Dirac não-hermitiana em 1+1 dimensões com acoplamento geral</b>	<b>28</b>
3.1 Introdução . . . . .	28
3.2 A equação de Dirac independente do tempo em 1+1 dimensões . . . . .	31
3.3 O problema efetivo PT simétrico . . . . .	33
3.4 Potenciais não-hermitianos com espectros reais . . . . .	35

	10
<b>4 Kinks em sistemas não-hermitianos de um campo escalar</b>	<b>41</b>
4.1 Introdução . . . . .	41
4.2 O método usual . . . . .	42
4.3 O método de Bogomol'nyi . . . . .	46
4.4 Estabilidade linear . . . . .	46
4.5 Aproximação BPS e acoplamento de férmions . . . . .	50
4.6 Análise de alguns modelos que aparecem na literatura . . . . .	54
4.7 Uma versão não-hermitiana dos modelos $\lambda\phi^4$ e Sine-Gordon . . . . .	57
4.8 Novos modelos de kinks não-hermitianos vindo do método de deformações	58
4.9 Mapeamento para um sistema hermitiano . . . . .	60
4.10 Caso de dois campos escalares interagentes . . . . .	62
<b>5 Modelos de dois campos escalares com simetria PT e branas</b>	<b>65</b>
5.1 Introdução . . . . .	65
5.2 Modelos consistentes com dois campos escalares . . . . .	66
5.3 Gravidade acoplada a campos escalares interagentes: Sólitons e fator de deformação . . . . .	70
5.4 Estabilidade e modo zero . . . . .	72
<b>6 Conclusões</b>	<b>76</b>
<b>Referências bibliográficas</b>	<b>79</b>
<b>A O valor esperado da energia</b>	<b>86</b>
<b>B Flutuações dos campos</b>	<b>90</b>

# Lista de Figuras

- 5.1 Comportamento do campo  $\phi$  em função de  $x$ , para:  $A_1 = 1; B_1 = 3; \gamma_1 = 1$  (linha fina contínua),  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -1.1$  (linha tracejada),  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = 1$  (linha média contínua), e para a parte imaginária do campo  $\chi$  com  $A_1 = 1 = B_1 = \gamma_1$  (linha grossa contínua). . . . . 69
- 5.2 Densidade de energia em função de  $x$  quando:  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -1.08$  (linha contínua) e  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = -2/3$  (linha tracejada) à esquerda, e  $A_1 = 1 = B_1 = \gamma_1$  (linha contínua) e  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = 4$  (linha tracejada) à direita. . . . . 69
- 5.3 Fator de dobra em função de  $x$ , para os casos onde: (esquerda)  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -2/3$  (linha contínua) and  $A_1 = 1; B_1 = 0.03; \gamma_1 = 1.2$  (linha tracejada); (direita)  $A_1 = 1 = B_1$  e:  $\gamma_1 = -2/3$  (linha fina contínua),  $\gamma_1 = -23/30$  (linha média contínua) and  $\gamma_1 = -17/30$  (linha tracejada). . . 72
- 5.4 Potenciais efetivos estáveis de branas com parede de domínio em função de  $r$  com:  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -1.01$  (esquerda).  $A_1 = 1; B_1 = 0.03; \gamma_1 = 1$  (linha contínua) and  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -1.2$  (linha tracejada) à direita da figura. . . . . 75
- 5.5 Densidade de energia em função de  $x$  para os casos onde a gravidade está presente:  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -0.7$  (linha contínua fina),  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = -0.5$  (linha tracejada) e  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = 1$  (linha contínua média). Note que no caso não-hermitiano ( $\gamma_1$  positivo) a densidade de é sempre positiva. . . . . 75

# Capítulo 1

## Introdução

Ao longo da história da mecânica quântica, a idéia de que apenas operadores hermitianos deveriam representar observáveis físicos, tem sido uma tônica. É fato que certamente o que se demonstra em qualquer curso de mecânica quântica de graduação é que, uma vez que um dado operador é hermitiano, seus autovalores e valores esperados são necessariamente reais e portanto, pelo menos a princípio, observáveis. Todavia é importante notar que o contrário não se demonstra, ou seja, o caso de que uma quantidade física observável seja necessariamente obtida a partir do valor médio de um operador hermitiano. Uma lei que também é afetada pela não hermiticidade do operador é a lei da continuidade, pois pode-se verificar que a equação de continuidade para sistemas hermitianos é válida, o que significa que o fluxo de probabilidade é zero. Já para sistemas não-hermitianos a equação de continuidade não é válida, ou seja, temos uma fonte ou sorvedouro de fluxo de probabilidade.

### 1.1 Aplicações das Teorias não-hermitianas

Os exemplos a seguir são uma uma revisão de [1] que apresenta maneiras que a teoria não-hermitiana tem sido utilizada.

Hatano e Nelson [2] utilizaram uma hamiltoniana com campo magnético não-hermitiano para semicondutores do tipo II. Bender, em sua primeira publicação sobre simetria PT [3], menciona que as teorias não-hermitianas tinham sido usadas mesmo para um modelo teórico da biologia populacional.

Em 1998, Cannata e outros [4] publicaram um trabalho sobre operadores de Schroedinger com os potenciais complexos que têm espectros reais. Em outras partes da introdução deste trabalho encontramos muitas referências aos usos notáveis de teorias não-hermitianas; é citada aqui para a referência :

“os sistemas quânticos caracterizados por hamiltonianas não-hermitianas são de interesse em diversas áreas da física teórica. Por exemplo, na física nuclear, estudam-se hamiltonianas e equações de Schroedinger padrões com potenciais complexos que, nesse contexto, são chamados de meios ópticos ou de potenciais nucleares médios. As interações não-hermitianas são discutidas igualmente em teorias de campo, por exemplo, ao estudar zeros de Lee-Yang. Mesmo em estudos recentes sobre transições da localização-deslocalização nos supercondutores e na descrição teórica da difração dos átomos, hamiltonianas não-hermitianas são de interesse.”

Em 2003, Killingbeck e Jolicard escreveram duas partes extensas de revisão dos operadores de onda de Bloch. A primeira parte de [5] usa a série de perturbação para uma hamiltoniana efetiva não-hermitiana na teoria nuclear. Também referências de hamiltonianas não-hermitianas sendo usadas em métodos iterativos para calcular um operador da onda com segunda convergência da ordem. A segunda parte de [6] menciona um potencial óptico que gera uma hamiltoniana não-hermitiana com uma base bi-ortogonal associada. Também se refere a um método de integração interativa que pode usar hamiltonianas não-hermitianas. Embora a hamiltoniana efetiva de Bloch seja não-simétrica ela pode proporcionar autovalores reais.

Em 2005, Znojil [7] escreveu extensivamente sobre as experiências na simetria PT na mecânica quântica (SPTMQ). Ele citou várias utilizações fenomenológicas de tal simetria: Teoria de Campos, Física Nuclear, Matéria condensada, Cosmologia e de magneto-hidrodinâmica. Ele destacou a relutância dos experimentalistas para enfraquecer a sua dependência em relação a modelos fenomenológicos hermitianos. Ele sugeriu que devemos procurar novas grandezas observáveis e que a simetria PT está enriquecendo o "laboratório de modelos solúveis". Ele resume dizendo que novos horizontes se abrem, tanto para a mecânica quântica relativística como para interpretações do paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen.

Em 2004, um trabalho de Ben-Aryeh [8] discute o uso de operadores não-hermitianos, para tratar fenômenos de espalhamento em física atômica e molecular. Este trabalho

realmente se aplica tanto em SPTMQ (Bender e outros) e em hamiltonianas pseudo-hermitianas (Mostafazadeh) para oscilações de Rabi de sistemas de dois níveis atômicos.

Bender e outros publicaram um estudo em 2004 [9], no qual indicam que qualquer hamiltoniana não-hermitiana pode ser usada para descrever quaisquer fenômenos experimentais perceptíveis, embora fossem usadas já para descrever os sistemas de interação [10]. Naquele estudo, sugeriram que “um sinal experimental de um hamiltoniana complexa pudesse ser encontrado na matéria condensada. Teria energia real, mas seria PT-simétrica e não-hermitiana.

Em 2004, Weigert [11] fez algumas aplicações notáveis de hamiltonianas não-hermitianas para descrever os meios ópticos absorventes, a dispersão não elástica dos núcleos, e outros mecanismos de perda a nível atômico ou molecular. Weigert igualmente notou que as teorias não-hermitianas “tinham sido redescobertas recentemente” dentro da física de partículas .

E outras aplicações apresentadas em referências mencionadas nesta tese.

## 1.2 O contexto histórico da mecânica quântica não-hermitiana

### 1.2.1 Literatura antes de 1998.

Agora, fazemos uma revisão do contexto histórico da mecânica quântica não-hermitiana encontrada em [1].

- Em 1959, Wu publicou um trabalho que calculava a energia do estado fundamental “das esferas de Bose” [10]. De acordo com o trabalho, um problema comum para este tipo de cálculo era a energia do estado fundamental ser “divergente”. Wu viu que usando uma hamiltoniana não-hermitiana não-diagonalizável evitava este problema. Notavelmente, esta hamiltoniana tinha autovalores reais. Entretanto, ele não ofereceu nenhuma justificativa para introduzir tal hamiltoniana, à exceção de que chegava-se a solução esperada. Em particular, obtiveram os números reais que representam baixos níveis de energia do sistema de Bose. Este trabalho segundo [1], é o mais antigo apresentando uma hamiltoniana não-hermitiana encontrada na literatura.

- Em 1967, Wong estudou a respeito de “hamiltonianas não-hermitianas [12]. Ele considerou que hamiltonianas de sistemas fechados são hermitianas, mas quando uma interação externa é considerada, a hamiltoniana perde sua hermiticidade. Conseqüentemente, sua classe de hamiltonianas seria um tipo de perturbação:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{H} \quad (1.1)$$

Aqui,  $\hat{H}_0$  é uma hamiltoniana hermitiana,  $\hat{H}$  é uma hamiltoniana não-hermitiana, e  $g$  é simplesmente um parâmetro que varia com a influência de  $\hat{H}$ .  $\hat{H}$  tem a limitação que pode somente ter um espectro discreto, a menos que parte de seu espectro coincida com a de  $\hat{H}_0$ . Nesse trabalho chama-se esta classe de “dissipativa”, mas não define-se inteiramente o termo. O estudo proporciona diversas propostas em relação à hamiltonianas desta classe. Entretanto, em nenhum ponto nele está mencionado a realidade do espectro. Além disso, os autovalores complexos parecem ser admitidos, contudo não há nenhuma explicação de como poderiam possivelmente ser fisicamente razoáveis.

Já em 1969, Wu e por Bender [13] discutiram um exemplo do oscilador anarmônico. Naquele trabalho eles não discutiram explicitamente hamiltonianas hermitianas ou não-hermitianas. A hamiltoniana para este modelo é

$$H = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4 \quad (1.2)$$

Em [13], o parâmetro  $\lambda$  é estendido para o plano complexo, de modo a incluir a não hermiticidade na hamiltoniana. Coincidentemente, esta estratégia foi adotada porque os métodos de aproximação para calcular o estado fundamental deste sistema também serem divergentes.

- Em 1975, Haydock e Kelly [14] publicaram um trabalho com hamiltonianas não-hermitianas para calcular a estrutura eletrônica do cristal arsênico. De acordo com este trabalho, “a teoria química do pseudo-potencial” causa freqüentemente uma representação não-hermitiana das interações entre as órbitas localizadas do elétron [14]. Este é um dos trabalhos mais antigos que dizem explicitamente sobre a condição da hermiticidade ser suficiente, mas não necessária para assegurar um espectro real.

- Em 1980, Stedman e Butler [15] publicaram um material de revisão sobre reversão temporal no campo e teoria de grupo. Em particular, concentrando-se no efeito

e nas regras de seleção para a reversão temporal no grupo de rotação  $SO(3)$ . Esta é a referência mais antiga encontrada por David [1] que fala sobre o “operador reversão temporal” com relação à conjugação complexa, como é usado na simetria de  $PT/CPT$ .

- Em 1981, Faisal e Moloney [16] estudaram um processo de decaimento quântico com hamiltonianas não-hermitianas e a equação de Schroedinger. Alegaram que como consequência do princípio da incerteza, um estado decaindo não pode ter grandes valores de energia, e que a largura de tal nível de energia poderia ser representada por um componente imaginário da energia. Além disso, tais energias complexas podem ser mostradas como sendo os autovalores da hamiltoniana não-hermitiana associada com o processo de decaimento. O trabalho também inclui uma não-unitaridade ainda auto-consistente (conservação da probabilidade) e o algoritmo para a evolução temporal.

Estes são apenas alguns exemplos de trabalhos de 1959 a 1998, que usam teorias não-hermitianas. O fator comum em todos estes trabalhos é que tais teorias foram introduzidas fenomenologicamente ou de maneira heurística. Ou seja, tais teorias foram escolhidas porque reproduziam a observação experimental. De um ponto de vista pragmático, as teorias meramente apropriadas às observações podiam ser consideradas razoáveis. Afinal, a natureza é sempre correta! No entanto, a literatura que permitia a utilização de um espectro complexo (por exemplo, autovalores de energia) nunca aparece para justificar ou explicar a validade de tais espectros. Conseqüentemente, desde que a predição dos autovalores seja a ligação crucial entre a teoria e a observação experimental, pareceria altamente questionável permitir autovalores que não poderiam fisicamente ser medidos.

- Um trabalho em 1997 de Hatano e Nelson [2] fez, entretanto, justificar o uso de um espectro complexo.

Durante todos os trabalhos mencionados aqui, não havia nenhuma base fundamental ou analítica para que as teorias não-hermitianas fossem escolhidas. As teorias não-hermitianas com espectros reais com base analítica não apareceram na literatura até 1998. Mas depois de 1998, este fato mudou a partir do trabalho de Bender e outros [3]. Logo depois, muitos outros cientistas estudaram a não-hermiticidade conforme dito na introdução desta tese.



## 1.2.2 Literatura depois de 1998

Bender e Boettcher [3] apresentaram uma resposta a esta questão da não-hermiticidade por meio de um exemplo. Naquele trabalho eles apresentaram o exemplo de uma hamiltoniana não hermitiana que, entretanto, apresenta um espectro de autovalores reais. Ao apresentar esse exemplo, eles ainda tentaram indicar a origem da realidade do espectro. Argumentava-se que o que garantiria a realidade do espectro seria a existência da simetria PT (paridade e inversão temporal) do operador, neste caso o hamiltoniano.

### Exemplo de potencial que obedece a simetria PT

O potencial PT-simétrico unidimensional apresentado em [118], [119]:

$$V(x) = -V_1 \sec h^2 x - iV_2 \tanh x \sec hx, \quad V_1 > 0,$$

tem dois casos:

*caso 1:*  $|V_2| > V_1 + 1/4$ , tem autovalores de energia real

$$E_{n^\pm} = - \left( n^\pm + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2} \right| \right)^2$$

onde

$$n^\pm = 0, 1, 2, \dots < \frac{1}{2} \left( \left| \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2} \right| - 1 \right)$$

*caso2:*  $|V_2| \leq V_1 + 1/4$  também tem autovalores de energia real

$$E_n = - \left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 - V_2} \right| \right)^2$$

e

$$n = 0, 1, 2, \dots < (s + t - 1)/2$$

com  $s = 2q + \frac{1}{2}$  e  $q = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} - \frac{1}{4}$ .

Entretanto, como se pôde verificar posteriormente, a simetria PT não é nem necessária nem suficiente para garantir que o espectro de energia seja real [17]. Adicionalmente, existem outras classes de hamiltonianas com potencias não-hermitianos que têm espectros reais sem possuírem a simetria PT. Isto pode ser visto, por exemplo, na

referência [17] onde discute-se sobre a pseudo-hermiticidade, a qual é definida como

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$$

onde o dagger denota o operador adjunto e  $\eta$  é um operador linear inversível não-hermitiano e é diferente para cada caso analisado. Um estudo detalhado sobre a pseudo-hermiticidade é feito em [17], [18].

Mostafazadeh [17] afirma em seu trabalho que a simetria PT é um caso particular da pseudo-hermiticidade e conclui que a pseudo-hermiticidade é uma condição necessária para o espectro ser real. Recentemente em 2008, Mostafazadeh publicou um trabalho onde ele mapeia uma hamiltoniana pseudo-hermitiana em uma hamiltoniana hermitiana de Schroedinger [19]. Apesar da lista de exemplos onde a não-hermiticidade ocorre crescer a cada dia [20]-[33], não existe uma demonstração definitiva, de qual simetria seria a responsável por esta propriedade, o que torna ainda mais interessante investigar o tema.

Entretanto, como não é objetivo deste trabalho a análise da pseudo-hermiticidade, não vamos nos aprofundar a esse feito.

De uma forma geral, como esta investigação sobre a não-hermiticidade é recente, muito embora já exista um grande número de trabalhos no tema, há um amplo campo de investigação a ser realizado. Nesta tese tentaremos buscar ampliar e aprofundar o conhecimento das conseqüências advindas desta inusitada descoberta.

A maioria dos artigos dedicados ao assunto é de sistemas independentes do tempo e estados estacionários. Apesar de uma lista enorme de trabalhos dedicados a desenvolver e compreender a não-hermiticidade [1, 5-12], tanto quanto saibamos, poucos discutiram o caso de sistemas dependentes do tempo [34]. Hamiltonianas dependentes do tempo são muito importantes para a compreensão de diversos problemas na ótica quântica, na química quântica e em outras áreas da Física [35]-[50]. Particularmente podemos citar o exemplo das intensidades de campo eletromagnético em uma cavidade de Fabry-Pérot [38]. De fato, esse tipo de problema com potenciais não-hermitianos dependente do tempo, constitui uma linha de investigação que atrai ainda o interesse dos físicos [34], [47]-[50].

Uma das primeiras investigações que realizamos, ao estudar a simetria PT, já que esta simetria está intimamente relacionada à dependência temporal do sistema, foi verificar a implicação desta simetria para a realidade do espectro. Isso foi feito adicionando-se interações com dependência explícita do tempo e invariantes ou não sob PT [34].

Mais especificamente estudamos uma classe dos sistemas dependentes do tempo com hamiltonianos não-hermitianos [34], particularmente aqueles que consistem em um oscilador com massa e frequência dependentes do tempo, acrescido de um termo não-hermitiano linear com acoplamento dependente do tempo. Feito isto, discutimos o efeito da dependência temporal na realidade do valor médio da energia sem a simetria  $PT$ , tratando de um caso particular. Para este caso, vimos que apesar da hamiltoniana desta classe de sistemas ser não-hermitiana e violar a simetria  $PT$ , os valores médios das energias deste sistema são reais e dependentes do tempo, o que é uma conclusão interessante e demanda investigações adicionais.

Recentemente, alguns problemas de férmions relativísticos que interagem com potenciais não-hermitianos, escalares e vetoriais foram tratados na literatura [52], [53] -[60]. Em geral foi mostrado que para algumas configurações desses potenciais não-hermitianos, a equação de Dirac admite energias reais. Em 1+1 dimensões o problema de Dirac é mapeado facilmente em um problema de Sturm-Liouville ou, em outras palavras, em uma equação de Schroedinger independente do tempo com potenciais reais ou complexos, cujas soluções de auto-estado de energia são bem conhecidas. Um problema interessante que foi estudado neste contexto é o da equação de Dirac em 1+1 dimensões na presença de um potencial vetor complexo conveniente mais um potencial real escalar [52], no qual o potencial escalar faz o papel de uma massa dependente da posição.

Outro resultado dessa investigação, foi mostrar que a equação de Dirac em duas dimensões também tem espectro discreto real e pode ter auto-estados ligados de férmions, quando é considerada uma mistura conveniente de potenciais da seguinte maneira: vetor, escalar e pseudo-escalar; sendo o potencial vetor complexo. Configurações particulares desses potenciais foram trabalhadas com algum detalhe. Como dito acima, o método utilizado foi o mapeamento do problema de Dirac em um de Sturm-Liouville. Como referência foram utilizados alguns trabalhos que usaram este método e obtiveram bons resultados na procura de auto-estados ligados para férmions que interagem com uma mistura adequada de potenciais vetorial, escalar e pseudo-escalar em duas dimensões no espaço-tempo [61], [62] e também em quatro dimensões espaço-temporais [63], [64].

Fizemos também um trabalho [65], onde buscamos estender o estudo de sistemas unidimensionais independentes do tempo, para o caso de teorias clássicas de campos. Particularmente, obtivemos alguns kinks com potenciais não hermitianos para modelos

em 1+1 dimensões. Para isso, mostramos inicialmente que alguns sistemas estudados na literatura apresentam soluções que, ou são instáveis ou possuem energia total não real.

Ademais no trabalho [65], mostramos que é possível construir soluções topológicas para alguns modelos não-hermitianos apresentando um perfil tipo kink para o caso de um campo escalar interagindo consigo mesmo. Verificamos também que há uma extensão não trivial para o caso de dois campos escalares não lineares interagindo entre si. Mostramos ainda que, para o caso de dois ou mais campos escalares, a densidade de energia bem como o fator de deformação em alguns casos do cenário das branas, podem ser quantidades reais nestas condições, apesar da não-hermiticidade. Aqui então, introduzimos um sistema não-hermitiano com dois campos escalares com a propriedade de, além de ter a energia BPS real, ter também a densidade de energia e o fator de deformação reais no caso das branas cosmológicas. Em relação a esta última situação, observou-se que podem ser evitadas densidades de energia negativas que aparecem em alguns modelos hermitianos na literatura, e isto pode ser feito escolhendo uma região adequada dos parâmetros dos potenciais no nosso modelo não-hermitiano.

Esta tese se organiza da seguinte maneira: no capítulo 1, fazemos uma introdução sobre a não-hermiticidade seu contexto histórico, aplicações e a simetria  $PT$  na mecânica quântica não-relativística e relativística, kinks e em branas. No capítulo 2, falamos mais detalhadamente sobre este assunto para sistemas quânticos não-hermitianos com dependência temporal explícita com espectro real. No capítulo seguinte, investigamos este tema para a equação de Dirac não-hermitiana em 1+1 dimensões com acoplamento geral e com espectro real. No capítulo 4, estudamos kinks em sistemas com simetria  $PT$ . No capítulo seguinte, falamos sobre branas envolvendo a simetria  $PT$ . Finalmente, no último capítulo fazemos nossas considerações finais.

# Capítulo 2

## Estudo de sistemas quânticos não-hermitianos dependentes do tempo com espectro real

### 2.1 Introdução

Nos últimos anos, os sistemas com simetria  $PT$  introduzidos no artigo de Bender e Boettcher [3] atraíram muita atenção. Eles consistem em hamiltonianas não-hermitianas com autovalores reais que, entretanto, exibem simetrias de paridade e de reversão temporal, ou seja, quando fazemos uma inversão no espaço e tempo ( $P : x \rightarrow -x; T : t \rightarrow -t, i \rightarrow -i$ ). De fato, seguindo a referência [66], a operação de reversão temporal  $\psi(x, t) = \psi^*(x, -t)$ , mantém a equação de Schroedinger covariante até mesmo para hamiltoniana dependente do tempo. Como já dissemos, existem outras classes de hamiltonianas que tem espectros reais sem ter a simetria  $PT$  [17], e onde sistemas de simetria  $PT$  são espontaneamente quebradas [18], principalmente para autovalores de energia complexos. Também, conforme já foi dito, a maioria dos artigos dedicados ao assunto é de sistemas independentes do tempo e estados estacionários.

Aqui pretendemos resolver uma classe dos sistemas dependentes do tempo com hamiltonianas não-hermitianas, particularmente aqueles que consistem em um oscilador com massa e frequência dependentes do tempo, mais um termo não linear hermitiano com acoplamento dependente do tempo. Logo depois, discutiremos o efeito da dependência

temporal na realidade do valor médio da energia, versus a simetria PT, tratando de um caso particular.

## 2.2 A hamiltoniana não-hermitiana

O sistema a ser estudado é representado pela seguinte hamiltoniana não-hermitiana unidimensional [34],

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{m(t)\omega^2(t)}{2}x^2 + i\lambda(t)x. \quad (2.1)$$

que em princípio, pode preservar a simetria PT, dependendo da dependência temporal de seus parâmetros. De fato, é fácil compreender que a simetria PT impõe que  $\lambda(t)$  pode ser uma função par do tempo para  $m(t)$  e  $\omega^2(t)$  simétricas sob reversão temporal.

A equação de Schroedinger pode escrita com

$$-\frac{1}{2m(t)}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{2}m(t)\omega(t)^2x^2 + i\lambda(t)x\right]\psi(x,t) = i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}, \quad (2.2)$$

onde  $m(t)$ ,  $\omega(t)$  e  $\lambda(t)$  são funções dependentes do tempo (escolhemos  $\hbar = 1$  por enquanto).

Usualmente o oscilador harmônico forçado independente do tempo é resolvido por meio de uma translação de coordenadas. Quando tratamos de um oscilador harmônico forçado dependente do tempo, podemos nos certificar de que uma translação trivial das coordenadas  $x = y - i\frac{\lambda(t)}{2m(t)\omega^2(t)}$  não nos conduz a um oscilador harmônico com a massa e a frequência dependentes do tempo porque ficamos com uma derivada de primeira ordem e um termo em  $y$  adicional puramente dependente do tempo (veja Eq. (2.5) a seguir).

Para mostrar que a equação de Schroedinger (2.2) pode ser mapeada em uma equação que pode ser resolvida exatamente em várias situações, usamos as transformações que envolvem uma mudança de variáveis espaciais e reparametrização temporal [39], [41], [43], isto é

$$x = s(\tau)y + i\eta(\tau), \quad (2.3)$$

onde  $\tau$  é uma função univalente com relação ao tempo original  $t$  dada por

$$\tau(t) = \int^t \mu(\xi) d\xi, \quad \frac{d\tau(t)}{dt} = \mu(t). \quad (2.4)$$

Na transformação (2.3),  $\eta$  é uma função real e  $y$  é necessariamente complexo para manter a variável original  $x$  real. Depois da transformação de variáveis somos levados à seguinte equação

$$\begin{aligned} i\mu \frac{\partial \psi(y, \tau)}{\partial \tau} - i\frac{\mu}{s} [s'y + i\eta'] \frac{\partial \psi(y, \tau)}{\partial y} + \frac{1}{2ms^2} \frac{\partial^2 \psi(y, \tau)}{\partial y^2} - \\ - \left[ \frac{1}{2}m\omega^2(s^2y^2 + 2is\eta y - \eta^2) + i\lambda sy - \lambda\eta \right] \psi(y, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Neste ponto, a fim de obter a equação de Schroedinger nas novas variáveis, introduzimos uma função de onda redefinida

$$\psi(y, \tau) = \exp[i f(y, \tau)] \sigma(y, \tau), \quad (2.6)$$

que substituída na equação (2.5) leva a

$$\begin{aligned} \left\{ i\mu \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2ms^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}m\omega^2s^2 \left[ y^2 + \frac{2i}{s} \left( \eta + \frac{\lambda}{m\omega^2} \right) y - \frac{\eta}{s^2} \left( \eta + \frac{2\lambda}{m\omega^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2ms^2} \left[ i \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \frac{s'}{s} y \frac{\partial f}{\partial y} + i \frac{\eta' \mu}{s} \frac{\partial f}{\partial y} - \mu \frac{\partial f}{\partial \tau} \right\} \sigma(y, \tau) + \\ + \left[ i \frac{1}{ms^2} \frac{\partial f}{\partial y} - i\mu \frac{s'}{s} y + \frac{\eta' \mu}{s} \right] \frac{\partial \sigma(y, \tau)}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde o primo significa primeira diferenciação é em relação à  $\tau$ . Agora podemos escolher convenientemente a função arbitraria  $f(y, \tau)$  para garantir que o coeficiente do termo  $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$  desapareça. Assim, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = m\mu s s' y + im s \mu \eta', \quad (2.8)$$

que tem como solução geral

$$f(y, \tau) = \frac{1}{2} m\mu s s' y^2 + im s \mu \eta' y + f_\tau(\tau), \quad (2.9)$$

sendo que  $f_\tau(\tau)$  é uma função arbitrária no novo tempo  $\tau$ , que está ainda para ser determinada através de alguma imposição conveniente. Substituindo-a na equação (7), podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} & \left\{ i\mu \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2m s^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\mu}{2} \left[ \frac{m\omega^2 s^2}{\mu} + \frac{d}{d\tau} (m\mu s s') - \mu m s'^2 \right] y^2 + \right. \\ & \left. - i\mu s \left[ \frac{m\omega^2}{\mu} \left( \eta + \frac{\lambda}{m\omega^2} \right) + \frac{d}{d\tau} (m\mu \eta') \right] y + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \mu \frac{s'}{s} - \mu \frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} + \frac{1}{2} m\omega^2 \eta \left( \eta + \frac{2\lambda}{m\omega^2} \right) - \frac{m\mu^2 \eta'^2}{2} \right\} \sigma(y, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Escolhemos  $f_\tau(\tau)$  e impomos condições nas funções  $s(\tau)$ ,  $\eta(\tau)$  e  $\mu(\tau)$  para obter o potencial efetivo dependendo somente de  $y^2$ . Assim  $f_\tau(\tau)$  pode ser obtida através da equação:

$$\frac{df_\tau}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[ \frac{is'}{s} + \frac{m\omega^2 \eta}{\mu} \left( \eta + \frac{2\lambda}{m\omega^2} \right) - \mu m \eta'^2 \right], \quad (2.10)$$

cuja solução pode ser escrita da forma a seguir sem perda da generalidade

$$f_\tau(\tau) = i \ln \left( s^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \int^\tau \left[ \frac{m(\xi)\omega(\xi)^2 \eta(\xi)}{\mu(\xi)} \left( \eta(\xi) + \frac{2\lambda(\xi)}{m(\xi)\omega(\xi)^2} \right) - m(\xi)\mu(\xi) \eta'(\xi)^2 \right] d\xi. \quad (2.11)$$

Além disso  $s(\tau)$ ,  $\eta(\tau)$  e  $\mu(\tau)$  têm que satisfazer a equação

$$\frac{d}{d\tau} (m\mu \eta') = -\frac{m\omega^2}{\mu} \left( \eta + \frac{\lambda}{m\omega^2} \right), \quad (2.12)$$

que nos permite escrever a equação de Schroedinger correspondente na forma

$$\left[ i\mu \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2m s^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} m s^2 (\omega^2 + \Omega^2) y^2 \right] \sigma(y, \tau) = 0, \quad (2.13)$$

onde

$$\Omega^2 \equiv \frac{\mu}{m s} \frac{d}{d\tau} (m\mu s'). \quad (2.14)$$

Até agora, as funções  $s(\tau)$  e  $\mu(\tau)$  continuam arbitrárias desde que a equação (2.12) mantenha  $\eta(\tau)$  em termos de  $s(\tau)$  e  $\mu(\tau)$ . Então usamos esta arbitrariedade para obter uma equação mais simples para este problema. Uma possibilidade óbvia é impor que



fiqemos com uma equação de Schroedinger independente do tempo para  $\sigma(y, \tau)$

$$\mu \left( i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 y^2 \right) \sigma(y, \tau) = 0, \quad (2.15)$$

onde pode ser visto que a dependência do tempo foi fatorizada, implicando que

$$m s^2 \mu = m_0 = \text{const.}; \quad \frac{m s^2}{\mu} (\omega^2 + \Omega^2) = m_0 \omega_0^2 = \text{const.} \quad (2.16)$$

Das equações anteriores podemos ver que transformamos o problema original naquele de um oscilador harmônico usual com a massa e a frequência constantes.

Vamos agora tratar um caso particular, que pode ser usado para melhor compreensão do problema. A saber, tratamos o caso especial de um oscilador harmônico com um potencial linear dependente do tempo violando a simetria PT.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + i a t x \right) \psi(x, t) = i \hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}, \quad (2.17)$$

onde  $a$  é uma constante real arbitrária.

Neste momento faremos alguns comentários adicionais sobre a simetria PT. As transformações anteriores poderiam ser interpretadas de um ponto de visto ativo, procurando por uma transformação simétrica, como feita em [3] através de uma translação rígida de coordenadas, onde se interpreta o P simetricamente como dado  $x \rightarrow x_0 - x$ , contanto que  $x_0$  seja simétrico via PT, em vez do usual  $x \rightarrow -x$ . Na situação presente, a generalização natural pode ser dada por

$$x \rightarrow -\frac{2 i a t}{m \omega^2} - x. \quad (2.18)$$

O potencial é invariante sob esta transformação geral PT mas, infelizmente, a equação de Schroedinger não o é, como pode ser visto na transformação da derivada temporal, isto é

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{2 i a}{m \omega^2} \right) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.19)$$

Se estivermos interessados em recuperar a equação covariante, temos que eliminar a derivada primeira na coordenada espacial. Isto pode ser encontrado através de uma

redefinição da função de onda

$$\psi \rightarrow e^{\alpha x + i\beta t} \psi, \quad (2.20)$$

onde  $\alpha \equiv -\frac{2a}{\hbar^2 \omega^2}$  e  $\beta \equiv -\frac{2a^2}{m \hbar^3 \omega^4}$ . Uma vez que este tipo de redefinição não preserva a norma, não podemos interpretar estes tipos de transformações como gerando uma simetria para a equação de Schroedinger.

As transformações de coordenadas e do tempo dadas nas equações (2.3) e (2.4) podem ser simplificadas pela escolha:  $s(\tau) = \mu(\tau) = 1$ , ( $\tau = t$ ) e  $\eta(t) = -\frac{at}{m\omega^2}$ . Então na equação de Schroedinger (2.15) onde  $\omega_0 = \omega$  e  $m_0 = m$ , cujas soluções na transformação de coordenadas são dadas simplesmente por:

$$\sigma_n(y, t) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} y^2 - i(n + \frac{1}{2})\omega t} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right). \quad (2.21)$$

com os quais calculamos o  $\psi_n(y, t)$ . Neste momento, podemos calcular o valor esperado da energia do sistema. Para isto utilizamos, como é comum, a expressão

$$\langle \psi_n | H | \psi_n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) i \hbar \frac{\partial \psi_n(x, t)}{\partial t}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) \psi_n(x, t)}. \quad (2.22)$$

Depois de cálculos que estão melhores detalhados no apêndice A, podemos obter

$$\langle \psi_n | H | \psi_n \rangle = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega - \hbar \dot{\gamma}(t) - m\omega \dot{\eta} \left[ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) \left( y + 2 \frac{H_{n-1}(y)}{H_n(y)} \right) \psi_n(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) \psi_n(x, t)} \right]_{y=x-i\eta(t)}, \quad (2.23)$$

como vimos  $y = x - i\eta(t)$ , e onde

$$\gamma(t) = \frac{a^2 t}{2 \hbar m \omega^4} \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{3} \right). \quad (2.24)$$

Agora, usando a identidade integral [51].

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-(u-v)^2} H_m(u) H_n(v) \equiv 2^n \sqrt{\pi} m! v^{(n-m)} L_m^{(n-m)}(-2v^2) \text{ para } m \leq n, \quad (2.25)$$

onde  $L_m^a(z)$  é o polinômio associados de Laguerre, podemos calcular a normalização,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) \psi_n(x, t) = \frac{\sigma}{2^n \sqrt{\pi} n! L_n^{(0)}(-2w^2)} \exp \left[ -2i\alpha_0 f_\beta - \left( \frac{\alpha_0}{\zeta} \right)^2 \right], \quad (2.26)$$

onde  $w \equiv \frac{\alpha_0}{\zeta}$ ,  $\alpha_0 \equiv \frac{a}{\hbar\omega^2}$  e  $\zeta \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ . Os outros valores que são necessários para calcular a energia são dados respectivamente por

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) y \psi_n(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) \psi_n(x, t)} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{L_n^0(-2w^2)} \left( w + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \right) L_n^0(-2w^2), \quad (2.27)$$

e

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) \left( \frac{H_{n-1}(y)}{H_n(y)} \right) \psi_n(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x, t) \psi_n(x, t)} \equiv \frac{2w\zeta}{L_n^0(-2w^2)} L_{n-1}^{(1)}(-2w^2). \quad (2.28)$$

Usando os resultados anteriores, podemos computar a expressão do valor médio da energia na forma,

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | H | \psi_n \rangle &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \hbar\dot{\gamma}(t) - m\omega\dot{\eta} \left[ \frac{1}{\zeta} \frac{1}{L_n^0(-2w^2)} \left( w + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \right) L_n^0(-2w^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{2w\zeta}{L_n^0(-2w^2)} \right) L_{n-1}^{(1)}(-2w^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Deste modo provamos que a realidade do valor médio da energia dependente do tempo para as funções de onda exatas dadas neste capítulo é mantida apesar da não-hermiticidade da hamiltoniana. Para uma hamiltoniana não-hermitiana e que viola PT, isto é uma conclusão muito intrigante e demanda investigações adicionais a respeito da origem da realidade do valor médio da energia em tais sistemas que também podem ser considerados fortemente como candidatos para realizações físicas de interações não-hermitianas. Além disso podemos notar que, mesmo com o mapeamento dentro de um sistema hermitiano independente do tempo, Eq. (2.15), não é trivial verificar que o sistema original dependente do tempo tem energias reais. Na realidade é necessário usar a função de onda (2.6) para calcular o valor da energia.

# Capítulo 3

## Espectro real para a equação de Dirac não-hermitiana em 1+1 dimensões com acoplamento geral

### 3.1 Introdução

Nos últimos dez anos, os denominados sistemas PT, discutidos no trabalho de Bender e Boettcher [3] tem atraído muita atenção. Na realidade, há muitos trabalhos que tratam este novo tipo de situação [52, 53]. Eles consistem de hamiltonianas não-hermitianas com autovalores reais, que porém exibem simetria de paridade e reversão temporal. A equação de Schroedinger unidimensional independente do tempo é invariante sobre inversão de espaço ( $x \rightarrow -x$ ) e tempo ( $t \rightarrow -t$ ). Além disso, existem outras classes de hamiltonianas com espectro real sem ter simetria PT, como pode ser visto nos exemplos das referências, [17, 67]; e sistemas onde a simetria PT é espontaneamente quebrada com autovalores de energia complexos [18]. O problema sobre interações não-hermitianas dependente do tempo que não possuem simetria PT, porém admitem energias reais é considerado nas referências [34], [68]-[69].

Mais recentemente, alguns problemas de interação de férmions com potenciais não-hermitianos de natureza escalar e vetorial têm sido pesquisados na literatura [52],[53]-[60]. Em geral, foi mostrado que para algumas configurações desses potenciais não-hermitianos, a equação de Dirac possui energias reais. Em 1+1 dimensões o problema de

Dirac é mapeado facilmente em um problema de Sturm Liouville ou, em outras palavras, em uma equação de Schroedinger independente do tempo com potenciais reais ou complexos cujas soluções de auto-estados e autovalores de energia são reais. Alguns autores [53], [54],[58], [70]-[72] têm estudado a equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac com massa constante no contexto da simetria PT e da pseudo-hermiticidade. Mustafa [53] estudou a energia exata para a partícula de Klein-Gordon e a partícula de Dirac com massa constante para o potencial complexo de Coulomb. Znojil [70] analisou a equação de Klein-Gordon que apresenta uma pseudo-hermiticidade. Egrifes e outros [54] investigaram os estados ligados das equações de Klein-Gordon e Dirac com massa constante para o potencial de Hulthén unidimensional na mecânica quântica PT-simétrica. Em [72], os autores pesquisaram a equação de energia dos estados ligados para versões PT-simétricas dos poços de potenciais de Rosen-Morse e Scarf II na teoria de Klein-Gordon com potenciais vetor e escalar igualmente misturados. Sinha e Roy [58] estudaram a equação de Dirac unidimensional solúvel com interações não-hermitianas escalares e pseudoscalares, possuindo espectro de energia real.

O acoplamento com potenciais escalares nas equações de Klein-Gordon e de Dirac pode ser considerado como uma massa efetiva dependente da posição. Usualmente é esperado que, no ambiente relativístico, a ambiguidade de ordenamento dos operadores de massa e momento que está presente no ambiente não-relativístico, deve desaparecer. De fato, é importante se lembrar que há dificuldades para definir a partir de primeiros princípios a equação de Dirac para férmions, e para a equação de Klein-Gordon para bósons, quando levamos em conta uma partícula de massa dependente do espaço-tempo. Isto acontece devido ao fato que na Física de Partículas e Campos a partícula deve pertencer a uma representação irredutível da álgebra de Poincarè [73, 74]. Deve-se poder achar geradores que especifiquem as propriedades da partícula, normalmente sua massa e helicidade. Porém, é bastante difícil realizar esta tarefa no caso da massa dependente da posição. Assim, deve-se lembrar que todas essas idéias usuais das equações relativísticas deveriam ser aplicadas ao caso da massa dependente da posição. Com esta consideração, Alhaidari [75] estudou a solução exata da equação de Dirac tridimensional para uma partícula carregada com distribuição de massa singular esfericamente simétrica no campo de Coulomb. Vakarchuk [76] investigou a solução exata da equação de Dirac para uma partícula cujas energia potencial e massa são inversamente proporcionais à distância no

caso de uma força central. Em [77], os autores consideraram a distribuição de massa constante, e resolveram aproximadamente o caso de uma massa dependente da posição do potencial de Hulthén. Em [78], os autores investigaram a solução exata da equação Klein-Gordon unidimensional com a massa dependente da posição para potencial inversamente linear. De fato, há poucas contribuições que vêm das soluções da equação de onda da massa efetiva relativística dependente da posição para alguns potenciais hermitianos e menos ainda para os potenciais não-hermitianos. Por isso, é de grande interesse investigar a solução da massa efetiva da equação de Klein-Gordon ou a massa efetiva da equação de Dirac para um potencial complexo não-hermitiano com espectro de energia real.

Um problema interessante resolvido neste contexto é o da equação de Dirac em 1+1 dimensões na presença de uma mistura conveniente de um potencial vetor complexo mais um potencial escalar real [52], onde o potencial escalar desempenha o papel de uma massa dependente da posição. Aqui, vamos mostrar que podemos considerar um sistema mais geral sem massa de férmions em 2D, interagindo com potencial vetor complexo mais uma mistura de potenciais escalar e pseudo-escalar que são responsáveis pelo “aparecimento” da massa para férmions. Tal cenário pode ser importante para sistemas da matéria condensada onde a condução elétrica é essencialmente unidimensional. Os potenciais escalares e pseudo-escalares podem ser pensados como defeitos na estrutura e os elétrons são igualmente sujeitos a um potencial de natureza vetorial devido aos íons na estrutura.

Nosso propósito neste trabalho é mostrar que a equação de Dirac em um mundo bidimensional pode ainda ter espectro discreto real e ter auto-estados de férmions, quando uma mistura conveniente dos potenciais vetor, escalar e pseudo-escalar é considerada, sendo o potencial vetor complexo. Configurações particulares desses potenciais são elaboradas com algum detalhe. O método utilizado foi o mapeamento do problema de Dirac no de Sturm-Liouville, que foi aplicado com sucesso na busca para estados ligados de férmions que interagem com uma mistura adequada de potenciais vetor, real escalar e pseudo-escalar [61] bidimensionalmente no espaço-tempo e também em quatro dimensões espaço-temporais [63, 64]. Chamamos a atenção para a simetria  $PT$  inerente da equação de Schroedinger que estamos tratando.

## 3.2 A equação de Dirac independente do tempo em 1+1 dimensões

Consideramos a equação de Dirac independente do tempo em 1+1 dimensões independente do tempo para um potencial  $\mathcal{V}$  sem massa, que pode ser escrita como

$$H\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (3.1)$$

$$H = c\alpha p + \mathcal{V}, \quad (3.2)$$

onde  $E$  é a energia do férmion,  $c$  é a velocidade da luz  $p$  é o operador momento e, finalmente,  $\alpha$  é uma matrizes quadradas hermitianas. A função positiva-definida  $|\Psi|^2 = \Psi^\dagger\Psi$ , satisfazendo a equação da continuidade, é interpretada como densidade de probabilidade. Esta interpretação é completamente satisfatória para estados de uma partícula. Escolhemos o  $\mathcal{V}$  assim:

$$\mathcal{V} = \beta M(x) + \beta\gamma_5 P(x) + V(x) + \beta\alpha\mathcal{A}(x) \quad (3.3)$$

onde  $\beta$  é uma matriz quadrada hermitiana satisfazendo as relações  $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ ,  $\{\alpha, \beta\} = 0$ .  $M(x)$  é o potencial escalar,  $P(x)$  um potencial pseudo-escalar,  $V(x)$  é a componente temporal do potencial bi-vetor de Lorentz, cujo componente espacial é  $\mathcal{A}(x)$ . O componente espacial do potencial bi-vetor não é considerado aqui, já que ele é real e pode ser eliminado do problema por uma transformação de gauge sem afetar a física. Uma vez que temos somente quatro matrizes 2 x 2 linearmente independentes, esta estrutura do acoplamento em  $\mathcal{V}$  é a mais geral possível que se pode considerar na equação de Dirac independente do tempo unidimensional.

Em termos do potencial  $\mathcal{V}$  a hamiltoniana (3.2) é escrita como:

$$H = c\alpha p + V(x) + \beta M(x) + \beta\gamma^5 P(x), \quad (3.4)$$

onde  $\gamma^5 = -i\alpha$ . As matrizes  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser escolhidas como matrizes de Pauli que satisfazem a mesma álgebra. Usamos  $\beta = \sigma_1$ ,  $\alpha = \sigma_3$ , e assim  $\beta\gamma^5 = -\sigma_2$ . Então, a equação (3.1) pode ser decomposta em duas equações diferenciais de primeira ordem acopladas para componentes superiores ( $\psi_+(x)$ ) e inferiores ( $\psi_-(x)$ ) do espinor  $\Psi(x)$ . Em

uma notação simplificada, e usando o sistema natural de unidades  $\hbar = c = 1$ , temos

$$\begin{aligned} -i\psi'_+ + M\psi_- + V\psi_+ + iP\psi_- &= E\psi_+ , \\ +i\psi'_- + M\psi_+ + V\psi_- - iP\psi_+ &= E\psi_- . \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde o primo significa a derivada em relação a  $x$ .

No caso em que todos os potenciais forem funções reais, a equação de Dirac é invariante sob a transformação reversão espacial (paridade). Recordamos que a transformação da paridade é uma transformação imprópria de Lorentz e que o espinor em é construído de outro espinor por meio da relação  $\tilde{\Psi}(\tilde{x}, t) = S\Psi(x, t) = e^{i\delta}\beta\Psi(x, t)$ , com  $\tilde{x} = -x$  e  $\delta$  uma constante de fase. Além disso, sob transformação de paridade,  $M(x)$  e  $V(x)$  não troca seu sinal e  $P(x)$  troca. As matrizes de transformação  $S^{-1}\beta S = \beta$  e  $S^{-1}\alpha S = \alpha$ .

As mesmas transformações poderiam ser usadas mesmo no caso em que os potenciais são complexos, mas se nós queremos a equação de Dirac invariante sob a combinação de transformações da paridade e da tempo-reversão e isto se torna mais complicado com um Hamiltoniano não-Hermitiano. Isto é porque a transformação reversão temporal implica que  $\mathcal{T}(i)\mathcal{T}^{-1} = -i$  e que os potenciais no Hamiltoniano são complexos. Assim, a reversão temporal não muda cada parte dos potenciais, desde que sejam independente tempo, o que muda é o sinal relativo entre as partes reais e imaginárias dos potenciais; conseqüentemente, a parte imaginária de cada um dos potenciais deve mudar sob a paridade de maneira inversa da sua parte real, para que a equação de Dirac fique invariante sob a combinação de transformações da paridade e reversão temporal. Em resumo, para que a simetria PT seja válida mesmo quando os potenciais são complexos, a parte imaginária dos potenciais vetor e escalar devem mudar seus sinais sob a transformação de paridade, visto que a parte imaginária do potencial pseudoscalar não muda. O espinor no sistema reversão temporal é obtido do espinor  $\tilde{\Psi}(\tilde{x}, t)$  por meio do seguinte a transformação  $\tilde{\Psi}_{\mathcal{T}}(\tilde{x}, t) = \mathcal{T}\tilde{\Psi}(\tilde{x}, t) = T\tilde{\Psi}^*(\tilde{x}, t)$ , com  $\tilde{t} = -t$  e  $T$  uma matriz quadrada tal que  $T^{-1}\beta^*T = \beta$  e  $T^{-1}\alpha^*T = -\alpha$ . Então  $T$  comuta com  $\beta$  e anticomuta com  $\alpha$ , logo  $T \equiv \beta$ .

Todos os exemplos de potenciais que estamos tratando, seguem a regra dada acima.



### 3.3 O problema efetivo PT simétrico

Sempre que consideramos somente o acoplamento dos potenciais escalar e pseudoescalar, as equações diferenciais podem ser desacopladas de tal modo que ambas as componentes do espinor satisfazem equações diferenciais de segunda ordem, similares à equação de Schroedinger. Incluindo-se o acoplamento com o potencial vetor, isto já não é mais possível. Embora seja possível mostrar que para isso um dos componentes obedece uma equação do tipo de Schroedinger, e o outro componente é dado em termos do primeiro, como foi feito na referência [52]. A partir de agora vamos usar este método. Aplicando a derivada espacial na primeira das equações (3.5) temos

$$-i\psi_+'' + A_+\psi_- + A_+' \psi_- = B\psi_+' + B'\psi_+ \quad (3.6)$$

onde definimos  $A_\pm \equiv A_\pm(x) = M(x) \pm iP(x)$  e  $B \equiv B(x) = E - V(x)$ . Substituindo a equação anterior nas expressões  $\psi_-'$  e  $\psi_-$  (3.5), obtemos a seguinte equação para o componente superior

$$-i\psi_+'' + i\frac{A_+'}{A_+}\psi_+' + \left[ \frac{BA_+'}{A_+} - B' + i(A_+A_- - B^2) \right] \psi_+ = 0, \quad (3.7)$$

e a equação que obedece o componente inferior pode ser reescrito como

$$\psi_- = \frac{1}{A_+} (i\psi_+' + B\psi_+). \quad (3.8)$$

Podemos notar que por meio da redefinição do componente superior

$$\psi_+(x) \equiv \sqrt{A_+}\chi(x), \quad (3.9)$$

o termo da derivada primeira pode ser eliminado e satisfaz a equação diferencial em  $\chi$

$$-i\chi'' + \left\{ \frac{BA_+'}{A_+} - B' + i(A_+A_- - B^2) + \frac{i}{2} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{A_+'}{A_+} \right)^2 - \frac{A_+''}{A_+} \right] \right\} \chi = 0, \quad (3.10)$$

a qual, por sua vez, pode ser escrita como uma equação de Sturm-Liouville, ou equação de Schroedinger,

$$-\chi'' + V_{eff}\chi = E^2\chi, \quad (3.11)$$

onde

$$V_{eff} = E \left( 2V + i \frac{A'_+}{A_+} \right) - iV' + i \left( \frac{A'_+}{A_+} \right) V + \left[ A_+ A_- - V^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{A'_+}{A_+} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{A''_+}{A_+} \right) \right]. \quad (3.12)$$

Utilizaremos as equações (3.7)-(3.12) ao longo deste capítulo. Nossa intenção é achar configurações convenientes de potenciais para a equação (3.11) que apresente soluções normalizáveis e autovalores positivos ou, em outras palavras, soluções de autoestado correspondendo a um espectro de energia discreto, com  $E^2 \geq 0$ . Naturalmente, as soluções para o componente inferior que satisfazem a equação (3.8) também devem ser normalizáveis.

Encontramos vários estudos da equação de Dirac em um mundo bidimensional com misturas convenientes de potenciais escalar e vetoriais. Até onde sabemos, a maioria deles assume uma relação intrínseca entre os potenciais escalar e vetor. Um caso típico que se trata na literatura e com um vínculo do tipo  $M(x) = \kappa V(x)$ , onde  $\kappa$  é positivo ou negativo, ( $|\kappa| > 0$ ) e  $M(x)$  é o potencial ligante [61]. Há alguns casos em quatro dimensões para os quais tal relação conveniente conduz a soluções analíticas e exatas para equação de Dirac. Aqui não teremos vínculo entre os potenciais a princípio. Pelo contrário, seguimos o mesmo procedimento utilizado na referência [52] que leva o potencial vetor a obedecer a relação mais geral:

$$V = \frac{i}{2} \left( \frac{A'_+}{A_+} \right) + \tilde{V} = \frac{i}{2} \left( \frac{M' + iP'}{M + iP} \right) + \tilde{V}. \quad (3.13)$$

Com esta relação a equação do tipo de Schroedinger (3.11) é dada por

$$-\chi'' + \left[ M^2 + P^2 - \tilde{V}^2 + 2E\tilde{V} - i\tilde{V}' \right] \chi = E^2 \chi. \quad (3.14)$$

E o potencial efetivo complexo escrito explicitamente em termos das partes real e imaginária dos potenciais é

$$V_{eff}(x) = \left( M_r^2 - M_i^2 + P_r^2 - P_i^2 - \tilde{V}_r^2 + \tilde{V}_i^2 + 2E\tilde{V}_r + \tilde{V}_i' \right) + 2i \left( M_r M_i + P_r P_i - \tilde{V}_r \tilde{V}_i + 2E\tilde{V}_i - \tilde{V}_r' \right) \quad (3.15)$$

onde  $M_r, M_i, P_r, P_i, \tilde{V}_r, \tilde{V}_i, \tilde{V}'_r, \tilde{V}'_i$  são respectivamente o potencial escalar real e imaginário, o potencial pseudo-escalar real e imaginário e  $\tilde{V}_r$  e  $\tilde{V}'_r, \tilde{V}_i$  e  $\tilde{V}'_i$  são as partes reais e imaginárias de  $\tilde{V}$  e sua derivada, mas a equação efetiva de Schroedinger possui simetria PT se  $M_r, \tilde{V}_r$  e  $P_i$  permanece invariante, e considerando que  $M_i, \tilde{V}_i$  e  $P_r$  mudam seus sinais sob transformação de paridade, como foi afirmado na segunda seção. Naturalmente, pensamos em casos nos quais a energia do problema de Dirac é real (positiva ou negativa) e a energia efetiva é  $E^2 \geq 0$ .

Todos os exemplos de potenciais que estamos tratando, seguem a regra dada acima.

### 3.4 Potenciais não-hermitianos com espectros reais

Pode-se notar que não é necessária a presença de  $\tilde{V}(x)$ , a fim de ter uma equação de Schroedinger efetiva, PT simétrica com potencial efetivo complexo. De fato podemos ver que a dependência em  $\tilde{V}$  nas coordenadas implica na existência de um potencial efetivo dependente da energia do problema de Dirac e, como consequência, levando a uma equação transcendental para a energia.

Como nosso primeiro exemplo, escolhemos potenciais que têm uma dependência quadrática na variável espacial o que é feito, com o propósito de tratar auto-estados completos e, depois, impomos restrições sobre os parâmetros destes potenciais. Neste exemplo, escolhemos

$$M(x) = a_0x^2, P(x) = i(a_1x^2 + b_1), \tilde{V}(x) = a_2x^2, \quad (3.16)$$

que é tal que o potencial efetivo fica

$$V_{eff} = (a_0^2 - a_2^2 - a_1^2)x^4 + (2Ea_2 - 2a_1b_1)x^2 - b_1^2 - 2ia_2x. \quad (3.17)$$

Como afirmamos, queremos um modelo exatamente solúvel, por isso fizemos restrições sobre os parâmetros dos potenciais, a fim de eliminar o termo quártico, obtendo o vínculo  $a_0 = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$ . Este vínculo nos leva ao seguinte potencial efetivo PT-simétrico do oscilador harmônico.

$$V_{eff} = \Omega^2 x^2 - 2ia_2 x - b_1^2, \quad (3.18)$$

onde  $\Omega(E)^2 = 2Ea_2 - 2a_1b_1$ . Agora fazendo a transformação  $x = y + 2ia_2/\Omega^2$ , obtemos a seguinte equação diferencial para  $\chi(y)$

$$-\frac{d^2\chi}{dy^2} + \Omega^2 y^2 \chi = \left[ E^2 + b_1^2 - \frac{a_2^2}{\Omega(E)^2} \right] \chi \quad (3.19)$$

e a energia é obtida da seguinte equação

$$E^2 = -b_1^2 + \frac{a_2^2}{\Omega(E)^2} + (2n + 1)\hbar\Omega(E). \quad (3.20)$$

que pode ser reescrita como

$$\left( E^3 - \frac{a_2}{2} \right) = (2n + 1)E\sqrt{2Ea_2},$$

que tomando o quadrado obtemos

$$y^2 - a_2 [1 + 2(2n + 1)^2] y + \frac{a_2^2}{4} = 0,$$

onde definimos  $y \equiv E^3$ , levando finalmente as soluções

$$E_{\pm} = \left( \frac{a_2}{2} \left\{ 1 + 2(2n + 1)^2 \pm \sqrt{[1 + 2(2n + 1)^2]^2 - 1} \right\} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Um comentário a fazer deste primeiro exemplo é relacionada a realidade do seu espectro e a existência de soluções complexas na sua energia. Obtivemos a solução para a energia, a qual é um polinômio de sexta ordem, que não tem solução analítica. Entretanto, encontramos um caso onde o problema pudesse ser reduzido ao de uma equação de segundo grau e neste caso mostramos que seu espectro de energia é real e positivo definido.

Como segundo exemplo, sugerimos a seguinte configuração para os potenciais escalar e pseudo-escalar

$$\begin{aligned} M(x) &= i\omega_1 x + m_1, \\ P(x) &= \omega_2 x + im_2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

com  $\omega_1$ ,  $m_1$ ,  $\omega_2$  e  $m_2$  sendo constantes reais. O potencial vetor, usando  $(\tilde{V} = 0)$ , é com-

plexo e dado por

$$V(x) = -\frac{(\omega_1 + \omega_2) [(m_1 - m_2) - i(\omega_1 + \omega_2)x]}{2[(\omega_1 + \omega_2)^2 x^2 + (m_1 - m_2)^2]}, \quad (3.22)$$

e o potencial efetivo na equação de Schroedinger em  $\chi(x)$  é

$$V_{eff}(x) = \omega^2 x^2 + 2i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)x + (m_1^2 - m_2^2), \quad (3.23)$$

com  $\omega^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2$ , é PT-simétrico. Definindo a variável  $y = x + i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)/\omega^2$ , obtemos

$$-\frac{d^2 \chi}{dy^2} + \omega^2 (y^2 + \lambda^2) \chi = E^2 \chi, \quad (3.24)$$

cujas auto-funções não normalizadas e autovalores são dados, respectivamente, por

$$\chi_n(y) = e^{-\omega y^2/2} H_n(\sqrt{\omega} y) \quad (3.25)$$

e

$$E^2 = \omega(2n + 1) + \lambda^2 \omega^2, \quad (3.26)$$

onde  $H_n(\sqrt{\omega} y)$  são os polinômios de Hermite de grau  $n$  e  $\lambda^2 = \left(\frac{\omega_1 m_2 + \omega_2 m_1}{\omega^2}\right)^2$ . Consequentemente, o componente superior do espinor de Dirac pode ser escrito como

$$\psi_{+,n}(y) = N \sqrt{\omega} (y^2 + \lambda^2)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}(\omega y^2 - i\theta(y))} H_n(\sqrt{\omega} y), \quad (3.27)$$

onde  $\theta(y) = \tan^{-1}(y/\lambda)$ , e  $N$  é uma constante de normalização. Recordando a equação (3.8) e a expressão para o potencial vetor,  $V(x) = iA'_+/2A_+$ , temos a seguinte equação para o componente inferior

$$\psi_-(y) = \frac{1}{\sqrt{A_+(y)}} \left( i \frac{d\chi}{dy} + E\chi \right), \quad (3.28)$$

que pode ser escrita em termos dos polinômios de Hermite

$$\psi_{-,n}(y) = \frac{N}{\sqrt{\omega} (y^2 + \lambda^2)^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}(\omega y^2 + i\theta(y))} [(\pm |E_n| - i\omega y) H_n(\sqrt{\omega} y) + i2n\sqrt{\omega} H_{n-1}(\sqrt{\omega} y)]. \quad (3.29)$$

O sinal superior (inferior) do fator  $\pm |E_n|$  na expressão acima representam os sinais posi-

tivo (negativo) da energia e  $|E_n| = \sqrt{\omega(2n+1) + \lambda^2\omega^2}$ . A constante de normalização  $N$  é obtida pela definição de normalização dos auto-estados

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_n|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_{+,n}(y)|^2 + |\psi_{-,n}(y)|^2) dy = 1, \quad (3.30)$$

a qual pode ser escrita em termos da variável  $u = \sqrt{\omega}y$

$$2|N|^2 \int_0^{+\infty} du \frac{e^{-u^2}}{(u^2 + \lambda^2\omega)^{1/2}} \{ [2(u^2 + \lambda^2\omega) + (2n+1)] H_n^2(u) - 2nH_{n-1}(u)H_{n+1}(u) \} = 1, \quad (3.31)$$

onde usamos a relação de recorrência  $2uH_n(u) = 2nH_{n-1}(u) + H_{n+1}(u)$ . A seguir, vamos fornecer a constante de normalização para os dois níveis mais baixos de energia,

$$\begin{aligned} N_0 &= \left\{ e^{-\lambda^2\omega/2} (1 + 2\lambda^2\omega) K_0(\lambda^2\omega/2) + \sqrt{\pi} U(1/2, 0, \lambda^2\omega) \right\}^{-1/2}, \\ N_1 &= \left\{ e^{-\lambda^2\omega/2} [2(1 + \lambda^4\omega^2) K_0(\lambda^2\omega/2) + 2\lambda^2\omega(1 - \lambda^2\omega) K_1(\lambda^2\omega/2)] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\pi}(1 + 2\lambda^2\omega) U(1/2, 0, \lambda^2\omega) \right\}^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $K_0(z/2)$  e  $K_1(z/2)$  são funções de Bessel modificadas de segunda ordem e segundo tipo e  $U(a, b, z)$  é a função hipergeométrica confluenta.

O terceiro exemplo de problema exatamente solúvel que apresentamos é um no qual  $\tilde{V} = V_0$  (constante). Esta escolha para  $\tilde{V}$  é conveniente porque conseguimos nos livrar da dependência para o potencial efetivo na energia, como pode ser visto na equação (3.14) e, conseqüentemente, evitamos uma equação transcendental para os autovalores da energia. Esta complicação é, de fato, uma característica do potencial efetivo não-relativístico quando consideramos a equação Dirac com uma mistura de potenciais vetor e pseudoscalar.

Como terceiro exemplo, escolhemos os potenciais escalar e pseudo-escalar do seguinte modo

$$\begin{aligned} M &= iM_1 \tanh(\mu x) + M_0, \\ P &= P_1 \tanh(\mu x) + iP_0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde  $M_1, P_1, M_0, P_0$  são constantes reais. Assim, o potencial vetor é também complexo

e dado por

$$V = -\frac{\mu (P_1 + M_1) [(M_0 - P_0) - i(M_1 + P_1) \tanh(\mu x)] \operatorname{sech}(\mu x)}{2 (M_0 - P_0)^2 + (M_1 + P_1)^2 \tanh^2(\mu x)} + V_0, \quad (3.34)$$

e a equação efetiva de Schroedinger (3.14) pode ser escrita como

$$-\chi'' - V_{eff}\chi = \varepsilon\chi, \quad (3.35)$$

onde de (3.14)

$$V_{eff}(x) = -(P_1^2 - M_1^2)\operatorname{sech}^2(\mu x) + 2i(M_0M_1 + P_0P_1) \tanh(\mu x) \quad (3.36)$$

e

$$\varepsilon = (E - V_0)^2 - (P_1^2 - M_1^2) + (P_0^2 - M_0^2). \quad (3.37)$$

Esse potencial efetivo é uma generalização do potencial de Ronsen-Morse II (hiperbólico) [25, 26] e já foi considerado em problemas de Schödinger não-hermitianos com simetria PT [17],[67]. Os autovalores da energia efetiva podem ser escritos convenientemente como (F. Cooper 1995, Phys. Rep.)

$$\varepsilon_n = -\mu^2(a_n^2 - b_n^2), \quad (3.38)$$

onde

$$a_n = (1/2) \left[ \sqrt{1 + (2U_0/\mu)^2} - (2n + 1) \right] \quad \text{e} \quad b_n = \Omega/\mu^2 a_n, \quad (3.39)$$

com  $U_0^2 = P_1^2 - M_1^2$ ,  $\Omega = M_0M_1 + P_0P_1$  e  $n = 0, 1, 2, \dots < s = (1/2) \left[ \sqrt{1 + (2U_0/\mu)^2} - 1 \right]$ . Assim os autovalores das energias do problema de Dirac são dados pela seguinte relação

$$E_n = V_0 \pm \sqrt{U_0^2 - U_1^2 - \mu^2(a_n^2 - b_n^2)}, \quad (3.40)$$

onde  $U_1^2 = P_0^2 - M_0^2$ . A fim de ter espectros reais devemos impor a seguinte relação  $U_0^2 - U_1^2 \geq \mu^2(a_n^2 - b_n^2)$  entre os parâmetros do potencial. Esses valores mostram que este tipo de vínculo não é uma consequência de um potencial complexo na equação efetiva de Schroedinger. Ele aparece devido ao tipo do acoplamento e a configuração dos potenciais que consideramos no problema relativístico.

Se o potencial tem  $n_{\max} + 1$  estados ligados, então podemos dizer que  $s = n_{\max} + \delta$ ,

com  $0 < \delta < 1$ . Observamos que para  $\Omega^2 = \mu^4 \delta^4$ , o fator  $\mu^2(a_n^2 - b_n^2)$  diminui no intervalo  $[0, n_{\max}]$ . O valor máximo encontrado para  $\mu^2(a_n^2 - b_n^2)$  é  $\mu^2(s^2 - \delta^4/s^2)$ . Portanto, as relações

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \mu^4 \delta^4 \\ U_0^2 - U_1^2 &> \mu^2 \left[ (n_{\max} + \delta)^2 - \frac{\delta^4}{(n_{\max} + \delta)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

são necessárias para manter o espectro real. Neste caso temos somente um estado ligado por exemplo, correspondendo a  $n_{\max} = 0$ . Obtemos  $M_0 M_1 + P_0 P_1 = \mu^2 \delta^2$ ,  $P_0^2 - M_0^2 \leq P_1^2 - M_1^2 = \mu^2 \delta (2\delta + 1)$ .

Em geral, o componente superior do espinor é dado por

$$\psi_{+,n}(z) = N_+ |A_+(z)|^{1/2} e^{i\alpha(z)/2} (1 - z^2)^{a_n/2} \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right)^{b_n} P_n^{(a_n+b_n, a_n-b_n)}(z), \quad (3.42)$$

onde,  $z = \tanh(\mu x)$ ,  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  são os polinômios de Jacobi de grau  $n$  [79]. Logo, o componente inferior pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \psi_{-,n}(z) &= N_- |A_+(z)|^{-1/2} e^{-i\alpha(z)/2} \mu (1 - z^2)^{a_n/2} \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right)^{b_n} \times \\ &\quad \times [-(a_n z + 2b_n - E_n + V_0) P_n^{(a_n+b_n, a_n-b_n)}(z) \\ &\quad + (1 - z^2) \frac{d}{dz} P_n^{(a_n+b_n, a_n-b_n)}(z)] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nas expressões (3.42) e (3.43), da equação (3.9) com  $M$  e  $P$  dados em (3.33) temos,  $|A_+(z)| = \sqrt{(M_0 - P_1 z)^2 + (M_1 z + P_0)^2}$  e  $\alpha(z) = \tan^{-1}((M_1 z + P_0)/(M_0 - P_1 z))$ .

As constantes de normalização são encontradas pela definição de normalização

$$\int_{-1}^{+1} dz (1 - z^2)^{-1} (|\psi_{+,n}|^2 + |\psi_{-,n}|^2) = 1.$$

Neste capítulo estudamos a equação de Dirac em 1+1D com simetria PT para sistemas não-hermitianos, usando o acoplamento mais geral possível.



# Capítulo 4

## Kinks em sistemas não-hermitianos de um campo escalar

### 4.1 Introdução

Embora menos comuns que sistemas lineares, sistemas não-lineares que possuem excitações solitônicas são muito interessantes e importantes em muitos modelamentos físicos, biológicos e químicos [80]. Um exemplo muito importante aparece na condutividade elétrica de alguns materiais orgânicos [81].

Usualmente, objetos topológicos aparecem como paredes de domínio, cordas e monopolos e ocorrem quando os modelos têm pelo menos dois vácuos degenerados. Não obstante, há alguns modelos que desafiam este bom senso como o modelo de Liouville [82], [83], o chamado modelo "sem vácuo" [85], [86] e, mais recentemente, um modelo onde o kink interpola entre dois pontos de inflexão em vez de vácuos [87]. De fato, alguns anos atrás foi mostrado que, pelo menos em alguns casos como o desse modelo, é possível introduzir um modelo ortodoxo, que possui vácuos degenerados cujo limite é precisamente o modelo "sem vácuo", dando origem a uma espécie de regularização de algumas de suas propriedades [88].

O propósito neste capítulo é combinar alguns dos ingredientes anteriores de uma teoria clássica em 1+1 D. Exploramos uma classe incomum de configurações topológicas em 1+1 dimensões. Os sistemas que tratamos a hamiltoniana é não-hermitiana mas a energia da configuração do campo é real e estável sob pequenas perturbações lineares. Mostramos que as propriedades habituais dos kinks de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield

(BPS) ainda são válidas nesta nova e promissora classe de sistemas.

## 4.2 O método usual

Antes de entrar no conteúdo explícito desse trabalho, vamos fazer uma breve revisão de alguns conceitos seguindo a referência [89] que serão utilizados mais adiante. Inicialmente, consideremos um campo escalar  $\phi(x, t)$  cuja dinâmica é governada pela densidade de lagrangiana invariante de Lorentz

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (4.1)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi) \quad (4.2)$$

onde  $V(\phi)$  é o potencial do sistema,  $\dot{\phi}$  e  $\phi'$  são respectivamente a derivada primeira de  $\phi$  em relação ao tempo e a posição. De onde obtemos a equação de onda

$$\square \phi \equiv \ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial V}{\partial \phi(x, t)}. \quad (4.3)$$

com  $\ddot{\phi}$  e  $\phi''$  derivadas segunda em relação ao tempo e a posição respectivamente. Esta é uma equação de onda cujos termos não lineares dependem da escolha de  $V(\phi)$ .

À medida que  $t$  varia, a energia total do sistema  $E$  dada por

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) \quad (4.4)$$

é conservada. É interessante considerarmos sistemas em que  $V(\phi)$  seja limitado inferiormente

$$V(\phi) \geq V(\phi)_{\text{Mínimo}} = 0 \quad (4.5)$$

em que existam  $M$  pontos de mínimo absoluto ou seja

$$\phi = g^i, i = 1, \dots, M. \quad (4.6)$$

Então a energia funcional é também minimizada quando o campo  $\phi(x, t)$  é constante no espaço-tempo em qualquer um desses valores.

Aqui vamos nos concentrar nas soluções estáticas para as quais (4.3) se reduz à

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (4.7)$$

Não deixamos de considerar a dependência temporal das soluções, uma vez que podemos fazer um boost de Lorentz a fim de obter o campo em qualquer instante.

Neste caso as soluções estão sujeitas a algumas condições de contorno. A onda solitária deve ter energia finita e densidade de energia localizada. E em vista disso, o campo deve se aproximar, quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , de um dos valores  $g^i$ , para que a densidade de energia tenda a zero nos extremos. Assim, se  $V(\phi)$  tem um único mínimo em  $\phi = g$ , então a solução estática deve ter  $\phi(x) \rightarrow g$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Se houver vários mínimos degenerados, então  $\phi(x)$  deve tender para algum valor de  $g^i$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e qualquer outro valor para  $g^i$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

Dadas essas condições de contorno, pode-se resolver a equação diferencial ordinária de segunda ordem, por quadratura, qualquer que seja  $V(\phi)$ .

Assim multiplicando a equação (4.7) por  $\phi'$  tem-se

$$\phi' \phi'' = V_\phi \phi' = \frac{dV}{dx}, \quad (4.8)$$

logo

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\phi'^2}{2} - V \right] = 0$$

ou

$$\frac{\phi'^2}{2} = V + c, \quad (4.9)$$

escolhendo  $c = 0$  para que (4.4) seja finita, temos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm [2V(\phi)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

e que após a integração nos leva a

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi_0(x)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{[2V(\phi)]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.11)$$

onde  $x_0$  é uma constante arbitrária de integração. Como vimos anteriormente, as condições de contorno das soluções de  $\phi(x)$ , nos dizem que quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\phi(x)$  deve se aproximar da vizinhança dos mínimos de  $V(\phi)$ . Conseqüentemente  $V(\phi)$  se anulará somente quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Em geral busca-se soluções para equações diferenciais ordinárias, de segunda ordem, porém não lineares. A não linearidade representada pelo potencial  $V(\phi)$ , como foi visto, é de interesse aqui, no sentido de fornecer mais de um mínimo, e cujas derivadas sejam contínuas em todo o espaço. Então, procura-se encontrar mínimos desse potencial para assim interpretar estas soluções que minimizam o potencial como soluções do vácuo. Por simplicidade consideramos aqui o potencial  $V(\phi)$  como uma função do campo escalar real  $\phi$ , tal que  $V(\phi) \geq 0$ .

Exemplo:

Vamos considerar o caso do modelo  $\lambda\phi^4$  [90][91], onde o potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda(\phi^2 - a^2)^2 \quad (4.12)$$

com  $\lambda$  e  $a$  constantes. Este potencial possui dois mínimos e é limitado inferiormente.

Assim a equação (4.10) fica

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{\lambda(\phi^2 - a^2)} \quad (4.13)$$

Escolhendo  $\phi(x_0) = 0$ , integrando sobre  $\phi$  e invertendo a equação a fim de obter  $\phi$  em função de  $x$ , chegamos ao resultado,

$$\bar{\phi}(x) = \pm a \tanh[\lambda a(x - x_0)] \quad (4.14)$$

Este tipo de perfil desta solução é chamado de kink. De fato, kinks são soluções solitônicas que tem e 1+1 D que exibem a forma descrita acima nas coordenadas  $x$  mas também evolui no tempo. A evolução temporal é construída a partir da solução estática

por meio de um "boost" de Lorentz [Nivaldo]. De fato esta solução estática pode ser pensada como sendo construída no sistema de referência do kink.

Na expressão (4.15) os sinais  $\pm$  referem-se respectivamente ao kink e ao antikink.

É interessante destacarmos algumas propriedades simétricas da lagrangiana sob as transformações

$$x \leftrightarrow -x \quad (4.15)$$

e

$$\phi \leftrightarrow -\phi \quad (4.16)$$

que separadamente são refletidas em relações que assumem particularmente uma forma simples ao escolhermos  $x_0 = 0$ ,

$$\phi_{kink}(x) = -\bar{\phi}_k(x) = \bar{\phi}_{\bar{k}}(-x). \quad (4.17)$$

onde os índices  $k$  e  $\bar{k}$  se referem ao kink e antikink respectivamente.

A densidade de energia da solução kink será

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\phi')^2 + \bar{V}(\phi) = 2\bar{V}(\phi) \quad (4.18)$$

com  $\bar{V}(\phi)$  sendo o potencial no campo clássico  $\bar{\phi}$ , e usando (4.14) com  $m = \lambda a^2$

$$\varepsilon(x) = \left(\frac{m^4}{2\lambda}\right) \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right]. \quad (4.19)$$

A energia total do kink, algumas vezes chamada de massa clássica do kink  $M_{cl}$  é dada por

$$M_{cl} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varepsilon(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \lambda a^3 \quad (4.20)$$

que é, portanto, finita.

### 4.3 O método de Bogomol'nyi

A energia do sistema cuja densidade de lagrangiana é dada pela equação (4.1) para a configuração estática é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) dx, \quad (4.21)$$

Notamos que a energia das soluções estáticas pode ainda ser reescrita na forma [89]

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \phi' \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \phi' \right] dx. \quad (4.22)$$

Como o primeiro termo desta integral não pode ser negativo, então a energia mínima será dada por

$$E_{BPS} = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sqrt{2\bar{V}} \phi' \right] dx = \mp \int_{-\infty}^{\infty} 2\bar{V}(\phi) dx \quad (4.23)$$

com a condição

$$\bar{\phi}' \pm \sqrt{2\bar{V}(\phi)} = 0. \quad (4.24)$$

É interessante ressaltar que a equação acima é de primeira ordem e suas soluções também são soluções da equação de movimento. Note ainda que o método de Bogomol'nyi, além de possibilitar a obtenção de equação diferencial de primeira ordem, simplifica a tarefa de escrever a energia mínima associada à configuração estática. As soluções de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) da configuração de campo obedece a equação de primeira ordem.

### 4.4 Estabilidade linear

É importante mostrar que as soluções obtidas são estáveis, pelo menos sob pequenas perturbações, de tal forma que o kink não se desfça facilmente.

### Perturbações de pequena amplitude

Para tratar este problema considera-se perturbações de pequenas amplitudes em torno da solução estática  $\bar{\phi}(x)$

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(x) + \eta(x, t) \quad (4.25)$$

a fim de linearizar a equação dependente do tempo. Isto é realizado substituindo a solução perturbada (4.25) na equação de movimento, fazendo a expansão de Taylor para  $V(\phi)$  em torno da solução estática  $\bar{\phi}(x)$  e preservando termos somente até primeira ordem em  $\eta$ . Entretanto, esse processo também pode ser realizado considerando a perturbação da solução estática (4.25) direto na densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi), \quad (4.26)$$

e expandindo seus termos até  $\eta^2$

$$(\partial_\mu \phi)^2 = (\partial_\mu \bar{\phi} + \partial_\mu \eta)^2 = (\partial_\mu \eta)^2 + 2\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \eta + (\partial_\mu \bar{\phi})^2, \quad (4.27)$$

$$V \cong \bar{V} + \eta \bar{V}' + \frac{1}{2} \eta_c^2 \bar{V}'' , \quad (4.28)$$

o que nos leva a

$$\mathcal{L} \cong \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} \eta_c^2 \bar{V}'' - \frac{d\bar{\phi}}{dx} \frac{d\eta}{dx} - \eta \bar{V}' - \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 - \bar{V}. \quad (4.29)$$

onde

$$\bar{V}' \equiv \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\bar{\phi}}, \quad \bar{V}'' \equiv \frac{d^2V}{d\phi^2} \Big|_{\bar{\phi}}, \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.30)$$

Algumas simplificações podem ser feitas na densidade de lagrangiana provenientes de integrações por partes e da eliminação de termos de superfície

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta = -\frac{1}{2} \eta (\partial_\mu \partial^\mu) \eta \quad (4.31)$$

$$-\eta \frac{d\bar{\phi}}{dx} \frac{d\eta}{dx} = \eta \frac{d^2 \bar{\phi}}{dx^2} \quad (4.32)$$

gerando

$$\mathcal{L} \cong -\frac{1}{2}\eta(\square + \bar{V}'')\eta + \eta \left( \frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} - \bar{V}' \right) - \left[ \bar{V} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 \right] \quad (4.33)$$

Considerando que a solução clássica  $\bar{\phi}(x, 0)$  obedece à equação

$$\frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} - \bar{V}' = 0, \quad (4.34)$$

e desconsiderando o termo independente de  $\eta$ , que não altera sua equação de movimento,  $L$  assume a forma

$$\mathcal{L} \cong -\frac{1}{2}\eta(\square + \bar{V}'')\eta, \quad (4.35)$$

que conduz à equação de movimento para o campo da perturbação  $\eta(x, t)$

$$-\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \bar{V}'' = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \quad (4.36)$$

Utilizando agora o método de separação de variáveis, ou seja, fazendo  $\eta(x, t) = \eta(x)T(t)$  na equação para  $\eta$  chega-se a

$$\frac{1}{\eta} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \bar{V}'' \right) \eta = \frac{1}{T} \frac{d^2T}{dt^2}, \quad (4.37)$$

em que de um lado temos dependência só em  $x$  e de outro só em  $t$ . Dessa forma, ambos devem ser iguais e constantes, digamos  $\varepsilon$ , de onde seguem as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \varepsilon T(t) = 0 \quad (4.38)$$

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + \bar{V}'' \right) \eta(x) = \varepsilon \eta(x). \quad (4.39)$$

onde  $\varepsilon$  é a constante de separação. A primeira destas equações possui a solução

$$T(t) = C_1 e^{\sqrt{-\varepsilon}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\varepsilon}t}. \quad (4.40)$$

Se  $\varepsilon < 0$ , esta solução “explode” quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Como estamos considerando pequenas perturbações  $\eta(x, t) = n(x)T(t)$  então devemos ter  $\varepsilon \geq 0$  (neste caso  $T(t)$  é oscilatória).



O problema de estabilidade então se resume a mostrar que os autovalores  $\varepsilon$  positivos que satisfazem.

$$\hat{H} \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + \bar{V}'' \quad (4.41)$$

é não negativo, ou seja, se seus autovalores são maiores ou iguais a zero. Se for este o caso, então a solução  $\bar{\phi}(x)$  é linearmente estável sob flutuações lineares.

Até agora não especificamos o potencial  $V(\phi)$ , nem impusemos qualquer condição sobre ele. Vamos, então, considerar os modelos descritos por potenciais inferiormente limitados, da forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W^2(\phi) \quad (4.42)$$

cujas soluções saturam o limite de Bogomol'nyi (minimizam a energia do sistema). Para estes modelos temos então que

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_\phi^2 + WW_{\phi\phi} \quad (4.43)$$

onde  $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$ , e  $W$  é chamado por nós de superpotencial, termo "emprestado" da teoria quântica supersimétrica.

Não é difícil verificar que este operador pode ser fatorado na forma

$$\hat{H} = a^\dagger a \quad (4.44)$$

onde

$$a = \frac{d}{dx} \pm W, \quad a^\dagger = -\frac{d}{dx} \pm W \quad (4.45)$$

são operadores adjuntos um do outro.

No caso em que o operador  $H$  tem essa forma seus autovalores são não-negativos. Para mostrarmos este fato, notemos primeiro que  $H$  é hermitiano, já que

$$\hat{H}^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^\dagger = a^\dagger a = H, \quad (4.46)$$

de modo que suas autofunções associadas a diferentes autovalores são ortogonais e podem

ser normalizadas, pois estamos considerando o espaço das funções contínuas de quadrado integrável entre  $-\infty$  e  $\infty$ . Tomando um conjunto ortonormal completo de autofunções de  $\hat{H}$ ,  $n_\alpha(x)$ , onde  $\alpha = 0, 1, \dots$  de tal forma que

$$\hat{H}n_\alpha(x) = \varepsilon_\alpha n_\alpha(x), \quad (4.47)$$

com

$$\langle n_\alpha | n_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.48)$$

Assim, soluções estáticas que minimizam a energia em sistemas de um campo escalar descritos por potenciais positivos definidos são estáveis sob pequenas perturbações lineares.

Os operadores adjuntos da hamiltoniana  $\hat{H} = a_+ a_-$ , como mostrado em [94] para o caso em geral, campos escalares reais acoplados, tem seus autovalores positivo-definidos e, como uma consequência, os modelos são estáveis sob pequenas flutuações quânticas.

Todavia, como estamos enfrentando um caso onde o superpotencial não é hermitiano, os operadores  $a_\pm$  não são conjugados um do outro. Como uma consequência, o procedimento anterior não é necessariamente válido. Então, pretendemos executar uma verificação direta da estabilidade nas próximas seções. Isto será feito calculando a solução da energia do menor nível de energia e a função de onda explicitamente, em cada caso analisado.

## 4.5 Aproximação BPS e acoplamento de férmions

Nesta seção estudamos várias propriedades e aproximações normalmente válidas para o modelo usual não linear hermitiano, de onde as mudanças esperadas ou características resultantes da extensão para modelos não-hermitianos..

A densidade de lagrangiana para um campo escalar, considerada aqui é dada pela equação (4.1).

Na condição de BPS apresentada na seção 4.3 [92], usada para apresentar a solução dos modelos considerados neste estudo, podemos escrever o potencial em termos

do superpotencial, que é dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (4.49)$$

onde  $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$ , e  $W$  enfatizando é chamado por nós de superpotencial, termo "emprestado" da supersimetria, e a energia da configuração estática pode ser obtida como:

$$E_{BPS} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} - W_\phi \right)^2 + 2W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right]. \quad (4.50)$$

Observando esta equação, notamos que a configuração de campo que minimiza a energia obedece a equação diferencial de primeira ordem a seguir

$$\frac{d\bar{\phi}}{dx} = \bar{W}_\phi(\phi), \quad (4.51)$$

e suas energias podem ser escritas como

$$\begin{aligned} E_{BPS} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \bar{W}_\phi \frac{d\phi}{dx} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx} \bar{W}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{W}(\phi) = |\bar{W}(\phi(+\infty)) - \bar{W}(\phi(-\infty))| \\ E_{BPS} &= |\bar{W}(\phi(\infty)) - \bar{W}(\phi(-\infty))|. \end{aligned} \quad (4.52)$$

tomado como soluções assintóticas.

O estado fundamental para os bósons, que é permitido devido a invariância translacional, pode ser obtida da solução da equação

$$a \psi_0(x) = \left( -\frac{d}{dx} + \bar{W}_{\phi\phi} \right) \psi_0(x) = 0, \quad (4.53)$$

substituindo a equação de BPS (4.51) em (4.53), obtemos uma relação entre o modo-zero bosônico e o superpotencial

$$\psi_0(x) = N_0 \bar{W}_\phi, \quad (4.54)$$

onde  $N_0$  é uma constante de normalização. Isto nos permite mostrar que a normalização

do modo zero está relacionada à energia BPS através de:

$$\int |\psi_0(x)|^2 dx = N_0^2 \int \bar{W}_\phi^2 dx = N_0^2 \int \bar{W}_\phi d\phi = N_0^2 E_{BPS} \equiv 1, \quad (4.55)$$

e finalmente obtemos o modo-zero bosônico normalizado:

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{E_{BPS}}} \bar{W}_\phi, \quad (4.56)$$

não levando em consideração um fator de fase constante arbitrário.

Notamos então que se conhecermos o estado de modo-zero de um dado potencial na mecânica quântica não-relativística é possível, por meio da equação (4.66), construir um modelo de teoria quântica de campos clássica não-linear. Este procedimento já foi realizado nas referências [95], [96]. Desta forma podemos nos indagar se é possível construir modelos de teoria quântica clássica não-linear partindo de uma equação de estabilidade com potencial em (4.44) ou (4.46) complexo. um exemplo de tal potencial foi apresentado na introdução.

Vamos agora procurar outras características possíveis para os modelos não-hermitianos, além da realidade da energia de configuração dos sólitons de tal modo que o modelo seja tão bem comportado como um hermitiano. Para isso estudamos também algumas características do acoplamento com férmions.

Por exemplo, calculando o modo zero fermiônico. Usando neste caso, como foi feito em [86],[88], o acoplamento de Yukawa dado por  $f(\phi) \bar{\psi} \psi$ , onde escolhemos  $f(\phi) = g W_{\phi\phi}$  ( $g = 1$ , para permitir uma versão supersimétrica do modelo [97]), chegamos à equação de Dirac para férmios

$$i \gamma^1 \frac{d\Psi}{dx} + f(\phi) \Psi = 0, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

e usando a representação na qual  $i \gamma^1 \rightarrow \sigma_3$  obtemos as seguintes equações para as componentes do espinor,

$$\pm \frac{d\psi_\pm}{dx} + f(\phi) \psi_\pm = 0. \quad (4.58)$$

A equação acima pode ser escrita como:

$$\frac{d\psi_{\pm}}{\psi_{\pm}} = \mp f(\phi) dx = \mp g W_{\phi\phi} \frac{d\phi}{W_{\phi}}, \quad (4.59)$$

que integrando nos leva ao espinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} C_+ W_{\phi}^{-g} \\ C_- W_{\phi}^g \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

onde  $C_{\pm}$  são constantes arbitrárias de integração. Todavia, supondo que a função  $W_{\phi}$  seja bem comportada, anulando-se quando  $x \rightarrow \pm \infty$ , a normalização do espinor anterior adquire a forma

$$\int |\Psi|^2 dx = \int dx [ |C_+|^2 W_{\phi}^{-2g} + |C_-|^2 W_{\phi}^{2g} ] \equiv 1, \quad (4.61)$$

o que impõe uma das constantes, até então arbitrárias, deva ser escolhida sendo igual a zero. Caso contrário, o espinor não será de quadrado integrável e, como consequência, ficamos com duas possíveis soluções, dependendo do sinal de  $g$ ,

$$\Psi_+ = C_+ W_{\phi}^{-g} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g < 0; \quad \Psi_- = C_- W_{\phi}^g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g > 0. \quad (4.62)$$

De fato, a normalização do espinor indica condições adicionais na constante  $g$ . Voltando à integral de normalização, agora dada por,

$$\int |\Psi_{\pm}|^2 dx = |C_{\pm}|^2 \int dx W_{\phi}^{(\mp 2g)} = |C_{\pm}|^2 \int W_{\phi}^{(\mp 2g-1)} d\phi, \quad (4.63)$$

uma vez mais notamos que  $|g| \leq \frac{1}{2}$  ou a integração pode divergir. Porém, neste momento algumas diferenças podem aparecer dependendo do modelo considerado. Para estarmos bastante claros com relação a este ponto, consideremos o caso limitado por exemplo  $g = \pm \frac{1}{2}$ , onde temos,

$$|C_{\pm}|^2 \int W_{\phi}^{(\mp 2g-1)} d\phi = |C_{\pm}|^2 \int d\phi = |C_{\pm}|^2 (\phi(+\infty) - \phi(-\infty)). \quad (4.64)$$

É evidente que em modelos como o "sem vácuo", o modo-zero fermiônico não é normalizável, devido à divergência do kink [86] [88]. Porém, para qualquer modelo topológico com diferentes vácuos finitos, o caso anterior é absolutamente admissível. De fato, os modelos que vamos propor nesta seção admitem normalização do modo-zero fermiônico para estas constantes de acoplamento, contanto que a diferença entre os campos assintóticos seja real.

Agora, considerando os casos onde uma extensão da supersimetria do modelo é permitida, ou seja, para  $g = \pm 1$  [97]. A normalização do modo fermiônico zero, fica bastante semelhante ao caso bosônico,

$$C_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{E_{BPS}}}. \quad (4.65)$$

## 4.6 Análise de alguns modelos que aparecem na literatura

Iniciemos pelo estudo de alguns modelos na teoria de campos como aqueles analisados por Bender, Brody, e Jones para campos escalares com auto-interação [98],[99]. Nesta seção verificamos a possibilidade da existência de soluções topológicas desses modelos. O primeiro caso que consideramos é aquele em que tem-se o com uma interação cúbica complexa [99], caracterizado pelo potencial:

$$V(\phi) = ig\phi^3 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2, \quad (4.66)$$

com um superpotential dado por:

$$W_{\phi} = \phi\sqrt{\mu^2 + 2ig\phi}. \quad (4.67)$$

Então, aplicando o método usual desenvolvido anteriormente na seção 4.2, pode-se obter a seguinte solução clássica:

$$\bar{\phi}(x) = i \frac{\mu^2}{2g} \left[ \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\mu x}{2} \right) \right] \quad (4.68)$$

Essa é uma configuração de campo conhecida como "lump"[87], já que seu comportamento assintótico é não-topológico ( $\bar{\phi}(+\infty) = 0 = \bar{\phi}(-\infty)$ ), a qual foi traçada somente sua parte real.

É importante enfatizar que a solução anterior é uma solução válida para a equação (4.51) se  $x < 0$ , mas não é válida se  $x > 0$ . Porém, nossa meta é encontrar uma solução da equação

$$\left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = W_\phi^2 \quad (4.69)$$

que é obtida da equação diferencial de segunda ordem que governa o sistema. De fato, para esta última equação, a solução anterior está correta para todo eixo x.

Assim, esta configuração de campo conecta o único mínimo real que existe no potencial a ele mesmo. Normalmente os "lumps" são instáveis, todavia, como foi enfatizado na seção anterior, a nova situação em que se considera sistemas não-hermitianos poderá gerar outras possibilidades. Assim, podemos tentar ver se há qualquer possibilidade de adquirir um "lump" estável em um ambiente não-hermitiano. Para isto analisamos a equação de estabilidade, que neste exemplo é dada por

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \mu^2 \left( 3 \tanh \left( \frac{\mu x}{2} \right)^2 - 2 \right) \right] \eta_m(x) = \omega_n^2 \eta_m(x), \quad (4.70)$$

da qual o estado fundamental terá a auto-função e a auto-valor de energia são dados respectivamente por

$$\eta_0(x) = N_0 \operatorname{sech} \left( \frac{\mu x}{2} \right)^3; \quad \omega_0^2 = -\frac{5}{4} \mu^2, \quad (4.71)$$

onde  $N_0$  é uma constante de normalização. A partir desse resultado concluímos que, como ocorre normalmente, a solução "lump" é instável. Também neste exemplo é interessante notar que, apesar do lump ainda ser instável, seu potencial de estabilidade é real.

Agora, consideramos o próximo exemplo [98], no qual

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2 (\mu^2 + 2i g \phi^\varepsilon), \quad (4.72)$$

onde  $\varepsilon$  é uma constante arbitrária a principio e

$$W_\phi \equiv \phi \sqrt{\mu^2 + 2ig\phi^\varepsilon}, \quad (4.73)$$

com a seguinte solução exata

$$\phi_{cl}(x) = \left[ i \frac{\mu^2}{2g} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\mu \varepsilon x}{2} \right) \right]^{\frac{1}{\varepsilon}}. \quad (4.74)$$

Note que, esta é uma solução da equação (4.69) válida ao longo de todo o eixo real e não é válida para a equação (4.51). Porém, infelizmente, obtemos outro "lump" não importa o grau do potencial caracterizado pelo valor do parâmetro  $\varepsilon$ . É simples mostrar que neste caso o potencial que aparece na equação de estabilidade (4.70) é representado por

$$V(x) = \mu^2 \left[ 1 - \frac{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{\mu \varepsilon x}{2} \right)^2 \right], \quad (4.75)$$

podemos obter duas soluções para a função de onda e a energia do estado fundamental

$$\begin{aligned} \eta_0^{(1)}(x) &= N_0 \operatorname{sech} \left( \frac{\mu \varepsilon x}{2} \right)^{-2((1+\varepsilon)/\varepsilon)} \\ \omega_0^2 &= -\mu^2 \varepsilon (2 + \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.76)$$

e

$$\begin{aligned} \eta_0^{(2)}(x) &= N_0 \operatorname{sech} \left( \frac{\mu \varepsilon x}{2} \right)^{((2+\varepsilon)/\varepsilon)} \\ \omega_0^2 &= -\frac{\mu^2 \varepsilon}{4} (4 + \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Para obter o sóliton estável,  $\eta_0(x)$  não pode divergir nos contornos. Além disso a energia do estado fundamental deve ser positiva definida, garantindo que a configuração seja estável. Estas condições levam-nos a concluir que a segunda solução deve ser descartada. Porém, em contraste com o comportamento habitual dos "lumps", aqui obtemos um resultado bastante interessante porque, na faixa  $-1 < \varepsilon < 0$ , esta configuração de campo é estável. Além disso, estes "lumps" estáveis ocorrem para o caso de potenciais de campo não-singulares nesta faixa. Este resultado notável e não trivial, até onde sabemos, nunca foi observado para os sistemas hermitianos habituais. É interessante notar que a estabilidade deste "lump" acontece em uma faixa do parâmetro onde a simetria PT é quebrada e o espectro é parcialmente complexo [3].



Investigamos também a possível existência de kinks na teoria quântica de campos nos modelos introduzidos em [18] mas, uma vez mais, até pudemos verificar não há kinks nestes casos.

Todavia, estamos interessados principalmente em configurações topológicas de campo estáveis. Particularmente, nosso questionamento é a respeito do chamado kink BPS. Assim, procuraremos tal tipo de estruturas na próxima seção.

## 4.7 Uma versão não-hermitiana dos modelos $\lambda\phi^4$ e Sine-Gordon

Começamos esta seção, onde tentamos construir uma configuração tipo kink, por meio de uma extensão do modelo  $\lambda\phi^4$ . Um superpotential de teste pode ser proposto tal como:

$$W_\phi(\phi) = \phi^2 + 2ia\phi - b^2, \quad (4.78)$$

do qual a expressão do kink BPS é determinada por:

$$\phi_{kink}(x) = -ia - \alpha \tanh(\alpha x)$$

com  $\alpha = \sqrt{b^2 - a^2}e$ , esta é uma função complexa e com valores assintóticos complexos ( $\phi_{kink}(\infty) = ia - \alpha$  e  $\phi_{kink}(-\infty) = ia + \alpha$ ), a energia correspondente para esta configuração de campo é absolutamente real para  $b^2 > a^2$ , sendo dada por

$$E_{BPS} = \frac{4}{3}\alpha^3, \quad (4.79)$$

que tem o mesmo comportamento da energia BPS do modelo hermitiano  $\lambda\phi^4$  usual no limite quando  $a = 0$ .

Veamos a análise da estabilidade deste kink. Seu potencial de estabilidade pode ser escrito como

$$V(x) \equiv V_{\phi\phi} = 2\alpha^2 [2 - 3 \operatorname{sech}(\alpha x)^2], \quad (4.80)$$

Mais uma vez obtivemos um potencial exatamente solúvel hermitiano típico ( $b >$

a) cuja solução de energia mais baixa não divergente é dada por  $\eta_0 = N_0 \operatorname{sech}(\alpha x^2)$  e, neste caso, o menor nível de energia é zero. De fato, a equação de Schroedinger para o potencial anterior tem seu espectro de energia positivo definido. Isto nos leva a concluir que o modelo é estável. Vejamos agora a extensão do modelo de Sine-Gordon, que será considerada através do seguinte superpotential

$$W_\phi(\phi) = \cos(\phi) + i a \sin(\phi) + b,$$

cuja solução topológica pode ser escrita como

$$\phi_{kink}(x) = 2 \arctan \left[ \frac{-i a - 2 \beta \tanh(\beta x)}{b - 1} \right], \quad (4.81)$$

onde  $2\beta \equiv \sqrt{1 - (a^2 + b^2)}$ .

Assim, se quisermos manter o perfil usual de kink, restringiremos os parâmetros dos potenciais mantendo  $\beta$  real. Neste exemplo, a energia da configuração de campo é real mas sua expressão tem uma forma bastante complicada que, por isso, não será escrita aqui explicitamente. Apesar disto, pode-se verificar numericamente que as soluções são reais numa faixa dos parâmetros dos potenciais.

## 4.8 Novos modelos de kinks não-hermitianos vindo do método de deformações

Antes de partir para a construção de novos sólitons para modelos hamiltonianos não-hermitianos PT-simétricos, começamos introduzindo outros kinks que aparecem em 1 + 1 dimensões. Esta técnica começa com nada mais que a equação usual que do cálculo das soluções BPS [92], já apresentada anteriormente:

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V(\phi)}. \quad (4.82)$$

É fácil ver que, começando com a equação diferencial de segunda ordem para a configuração estática:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (4.83)$$

e multiplicando ambos os lados por  $\frac{d\phi}{dx}$ , obtemos

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) = \frac{d}{dx} (V(\phi)), \quad (4.84)$$

que nos permite recuperar a equação (4.82), a menos de uma constante de integração arbitrária que está relacionada com a arbitrariedade na escolha do valor mínimo da energia potencial. Assim, podemos escrever uma espécie de invariante, responsável em última instância pelo mapeamento clássico entre os kinks de modelos diferentes [100]:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} = x - x_0 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}. \quad (4.85)$$

Em geral podemos reescrever a equação anterior simplesmente como  $\phi = f(\varphi)$ , como foi originalmente feito por Bazeia e colaboradores, quando do desenvolvimento do chamado de método de deformações [87].

Então, podemos tentar gerar um novo modelo não-hermitiano com energia real de configurações tipo kink começando, por exemplo, do modelo  $\lambda\phi^4$  não-hermitiano estabelecido na seção anterior. Para isto podemos usar, por exemplo, a seguinte função de deformação

$$f(\varphi) = \sinh(\varphi). \quad (4.86)$$

Fazendo assim, chegamos ao seguinte superpotential [87]:

$$W(\varphi) = \sinh(\varphi) + 2ia \ln(\cosh(\varphi)) - 2(1+b^2) \arctan h \left( \tanh \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right). \quad (4.87)$$

com a solução

$$\varphi(x) = \operatorname{arcsinh}(-ia + \alpha a \tanh(\alpha a x)), \quad (4.88)$$

onde  $\alpha \equiv \sqrt{b^2 - a^2}$ . A configuração correspondente de energia BPS pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} E_{BPS} = & \left| -2a \arctan \left[ \frac{2\alpha a^2}{(1 + (\alpha^2 - 1)a^2)} \right] - 2a\alpha + \right. \\ & + \alpha^2 \{ \arg [1 + \tan(h_+)] - \arg [1 + \tanh(h_-)] + \\ & \left. - \arg [1 - \tan(h_+)] + \arg [1 - \tanh(h_-)] \} \right|. \end{aligned} \quad (4.89)$$

onde  $h_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \arcsin(a(1 \pm i\alpha))$  e  $\arg[z]$  é o ângulo de fase, com  $z$  dado em radianos. Apesar do fato que este novo caso de uma configuração kink não-hermitiana levar a cálculos consideravelmente mais prolongados, sua energia é real, como exigido para ser um observável. Neste caso o potencial de estabilidade é determinado por

$$V(x) = \frac{(1 + a^2 + \alpha^2(a^2 - 1) - a^2\alpha^2 \operatorname{sech}(a\alpha x)^2)}{\sqrt{1 - a^2(1 + i\alpha \tanh(a\alpha x))^2}}, \quad (4.90)$$

que é PT simétrico mas, infelizmente, pelo menos até onde sabemos, não é de uma classe de potenciais não-hermitianos exatamente solúveis. Assim, para conferir a estabilidade do kink poderíamos resolve-lo numericamente, o que pode ser um passo futuro desta pesquisa. Porém, contanto que uma aproximação seja válida, na qual  $\alpha$  é pequeno e  $a < 1$ , pode-se aproximar o potencial anterior como:

$$U(x) \simeq U_2 x^2 + i U_1 x + U_0, \quad (4.91)$$

com  $U_0 \equiv \frac{1+a^2-\alpha^2}{\sqrt{1-a^2}}$ ,  $U_1 \equiv \frac{a^3\alpha^2(1+a^2-\alpha^2)}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}$  e  $U_2 \equiv \frac{a^4\alpha^4(1+a^2(2\alpha^2-7)+\alpha^2)}{2(1-a^2)^{\frac{5}{2}}}$ . Para valores pequenos de  $\alpha$ , há uma faixa de  $a$  que conduz a um  $U_2$  positivo, de forma que tratamos com um oscilador PT-simétrico com frequência real. Garantindo assim a realidade do espectro e, por conseguinte, a uma configuração de kink estável.

## 4.9 Mapeamento para um sistema hermitiano

Nesta seção mostramos como fazer uma conexão entre um sistema não-hermitiano e um hermitiano. Aqui procuramos uma versão quântica [100] da equivalência clássica realizada em [87]. Começando com a densidade lagrangiana do modelo original dada pela equação (4.1), que é uma equação fundamental para a quantização na integral de caminho de Feynman.

Fazendo a mesma transformação usada no caso da equação diferencial, agora no caso da densidade de lagrangiana,  $\phi = f(\varphi)$ , obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} f_{\varphi}^2 \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - V(f(\varphi)), \quad (4.92)$$

e sua densidade de hamiltoniana ficará escrita como

$$H = \frac{1}{2 f_\varphi^2} \Pi_\mu \Pi^\mu + V(f(\varphi)), \quad (4.93)$$

onde  $\Pi_\mu = f_\varphi^2 \partial_\mu \varphi$ . É importante lembrarmos, para fins de comparação e interpretação, que quando a transformação é introduzida diretamente na equação diferencial, como ocorre no tratamento usual de sistemas deformados [87], a densidade de lagrangiana deformada tem a forma

$$L_d = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{V(f(\varphi))}{f_\varphi^2}. \quad (4.94)$$

Vemos que para uma classe de transformações onde a parte imaginária da transformação é constante, a densidade de lagrangiana resultante pode ser considerada real. Calculando a energia das configurações estáticas obtemos

$$E_{BPS} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ f_\varphi \frac{d\varphi}{dx} - \sqrt{2V(f(\varphi))} \right\}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dx W_\varphi \frac{d\varphi}{dx}, \quad (4.95)$$

onde

$$W_\varphi = \frac{dW}{d\varphi} \equiv f_\varphi \sqrt{2V(f(\varphi))}, \quad (4.96)$$

e o mínimo da energia corresponderá ao caso onde

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sqrt{2V(f(\varphi))}}{f_\varphi}, \quad (4.97)$$

da qual com a ajuda da equação diferencial de segunda ordem correspondente, (4.83) é determinada por

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left( \frac{f_{\varphi\varphi}}{f_\varphi} \right) \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \frac{V_\varphi}{f_\varphi^2} = 0. \quad (4.98)$$

Não é difícil mostrar que as soluções da equação diferencial de primeira ordem (4.97) são soluções também das equações de segunda ordem correspondentes. Com relação à energia BPS da solução, pode-se verificar da equação (4.95) que

$$E = \left[ \int d\varphi \left( f_\varphi \sqrt{2V(f(\varphi))} \right) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \left[ \sqrt{2V(f(\varphi(x)))} \right] \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}. \quad (4.99)$$

Finalmente, como conseqüência da transformação  $\phi(x) = f(\varphi(x))$ , concluímos que a energia de ambos os sistemas será igual quando a transformação for diretamente realizada

na densidade de lagrangiana.

Como consequência, um exemplo capaz de gerar muitos sistemas não-hermitianos com energias reais BPS é aquele no qual  $\varphi = \varphi + ia + b$ . Para esta escolha especial de transformação, obtemos para ambas as formulações que:

$$L_d = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi + ia + b). \quad (4.100)$$

Em conclusão, começamos com um modelo hermitiano, e obtemos um não-hermitiano, que é equivalente ao hermitiano a nível quântico (não há nenhuma correção quântica para esta transformação linear).

## 4.10 Caso de dois campos escalares interagentes

Nesta seção apresentamos uma tentativa de apresentar uma extensão dos cálculos anteriores para o caso onde o sistema é representado por dois campos escalares que interagem entre si. Seguimos um método recentemente publicado que leva a soluções exatas completas para algumas classes de dois campos interagindo entre si [101].

Para lidar com esse problema, seguindo o procedimento comum para obter soluções BPS [92] para sistemas não-lineares, vamos especificar a forma da densidade de lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - V(\phi, \chi), \quad (4.101)$$

impondo que o potencial deve ser escrito em termos de um superpotential da forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right)^2. \quad (4.102)$$

onde  $W(\phi, \chi)$  é uma função de ambos os campos. Como vimos, a chamada energia para configurações BPS pode ser calculada simplesmente através de

$$E_B = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2 \right], \quad (4.103)$$

o que nos leva a

$$E_B = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \pm W_\chi \right)^2 \mp 2 \left( W_\chi \frac{d\chi}{dx} + W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right) \right], \quad (4.104)$$

Neste caso, podemos ver facilmente que as soluções com energia mínima da equação diferencial de segunda ordem para as soluções estáticas em 1+1 dimensões podem ser resolvidas através de equações diferenciais de primeira ordem acopladas não lineares

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi(\phi, x), \quad \frac{d\chi}{dx} = W_\chi(\phi, x), \quad (4.105)$$

onde  $W_\phi \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi}$  e  $W_\chi \equiv \frac{\partial W}{\partial \chi}$ . Dessa forma, obtemos a energia BPS finalmente dada por

$$E_{BPS} = |W(\phi_j, \chi_j) - W(\phi_i, \chi_i)|, \quad (4.106)$$

onde  $\phi_i$  e  $\chi_i$  são os  $i$ -ésimos estados de vácuo do modelo [102].

Neste momento, é importante observar que as soluções BPS vão assintoticamente para estados de vácuo. Em outras palavras, os vácuos atuam como condições de contorno implícitas das equações BPS.

Agora, em vez de aplicar o método das órbitas tentativas [102]-[104], notamos que é possível escrever a seguinte equação

$$\frac{d\phi}{W_\phi} = dx = \frac{d\chi}{W_\chi} \quad (4.107)$$

onde  $dx$  é uma espécie de invariante. Obtemos então que

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi} \quad (4.108)$$

Esta última equação é uma equação diferencial não-linear que relaciona os campos escalares do modelo. Assim, se pudermos resolvê-la completamente, a função  $\phi(\chi)$  pode ser usada para eliminar um dos campos, deixando a equação (4.107) desacoplada. Finalmente, isto desacopla a equação diferencial não-linear de primeira-ordem que pode ser resolvida em geral, mesmo que numericamente.

De agora em diante, escolhemos um caso particular para exemplificar o método, que pode ser usado para modelar vários sistemas [102]. Na realidade mostramos que para

esta situação, a equação (4.108) pode ser mapeada em uma equação diferencial linear, da qual é possível obter a solução geral. Neste caso o superpotencial é escolhido como:

$$W(\phi, \chi) = -\lambda\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3 + \mu\phi\chi^2, \quad (4.109)$$

onde  $\mu = \mu_R + i\mu_I$  e a equação (4.108) pode ser escrita como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{\lambda(\phi^2 - 1) + \mu\chi^2}{2\mu\phi\chi}. \quad (4.110)$$

Neste momento podemos verificar que, fazendo a transformação  $\phi^2 = \rho + 1$ , a equação anterior torna-se

$$\frac{d\rho}{d\chi} - \frac{\lambda}{\mu\chi}\rho = \chi, \quad (4.111)$$

a qual é uma equação diferencial linear. É interessante observar que sua solução particular normalmente corresponde ao resultado apresentado na literatura ( $\mu_I = 0$ ) [102]. A solução geral é obtida facilmente, levando a

$$\rho(\chi) = \phi^2 - 1 = c_0 \chi^{\frac{\lambda}{\mu}} - \frac{\mu}{\lambda - 2(\mu)} \chi^2, \quad (4.112)$$

onde  $c_0$  é uma constante arbitrária de integração. Substituindo estas soluções em uma das equações (4.107), e resolvendo-as, obtemos uma solução generalizada para o sistema. Em geral não conseguimos resolver  $\chi$  em termos de  $\phi$ , mas o contrário sempre é possível. Substituindo  $\phi(\chi)$  na equação para o campo  $\chi$ , obtemos

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\mu\chi \sqrt{1 + c_0 \chi^{\frac{\lambda}{\mu_R + i\mu_I}} - \left(\frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\right) \chi^2}. \quad (4.113)$$

Resolvemos a equação anterior para ambos casos:  $c_0 = 0$  e  $c_0 = -2$  com  $\mu_R = 1$ ,  $\mu_I = 1$  e  $\lambda = 1$ . No primeiro achamos soluções tipo "lump", ambos para o primeiro campo  $\chi$ . No segundo caso ( $c_0 \neq 0$ ) achamos kinks para ambos os campos.

Infelizmente, a energia BPS é complexa neste último caso, provavelmente devido ao fato que a parte imaginária dos campos também tem um perfil do tipo kink, diferente do que ocorre em todos os outros casos não-hermitianos considerados com energia BPS real, cujo sóliton tem parte imaginária que tem um perfil tipo "lump".

Essa dificuldade deverá ser eliminada no próximo capítulo.



# Capítulo 5

## Modelos de dois campos escalares com simetria $PT$ e branas

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior, mostramos que é possível considerar algumas configurações de campo topológicas não usuais onde a hamiltoniana do sistema é não-hermitiana mas, mesmo assim, apresenta configurações de campo estáveis com sua energia total real [3]. Em particular, foi observado que a maioria das propriedades usuais dos kinks Bogolmol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) [92] são satisfeitas nesta situação. Foi verificada a possibilidade de introduzir modelos  $PT$ -simétricos com sólitons BPS e manter a energia BPS real, bem como manter o acoplamento com os férmions de Dirac consistente [65]. Porém, uma possível crítica pode ser levantada sobre essas soluções, pode-se questionar a densidade de energia, que ainda é uma quantidade complexa, apesar do fato de que a energia total ser uma quantidade real. Além disso, naquele capítulo a tentativa de introduzir um modelo consistente com dois campos escalares interagentes foi infrutífera, mesmo restringindo-nos ao caso onde a energia total é real mas sua densidade correspondente não o é.

Neste capítulo mostraremos que, não somente é possível ter um modelo consistente com dois campos escalares, mas também que a introdução de um número maior de campos permite que a densidade de energia também se torne real. De certo modo, isto faz com que seja mais plausível a existência dessas soluções topológicas não-hermitianas em um modelo fisicamente consistente e aceitável.

O estudo de hamiltonianas não-hermitianas com espectros reais é um assunto que tem tido um crescente interesse. Como vimos anteriormente, nos últimos anos [105]-[106] há um grande interesse neste assunto nos casos de mecânica quântica. Há também um número crescente de extensões muito interessantes e aplicações destas idéias para a teoria quântica de campos [65], [105]-[106].

Por outro lado, desde o descobrimento de Randall e Sundrum [107] que a gravidade quadridimensional pode ser percebida como uma parede de domínio no espaço-tempo de cinco dimensões, surgiu um grande interesse nesse mecanismo [110]. Mais precisamente, a idéia de mundos de branas é muito mais velha [111], e estes são elementos importantes de um programa mais ambicioso, isto é, o da super-corda como teoria do tudo. Assim, uma das metas do nosso estudo é mostrar que é possível estender a aplicabilidade dos modelos PT-simétricos para essa área. Como vamos ver ao longo deste capítulo, a construção de branas [110] pode ser feita usando a solução topológica não-hermitiana sem perda da realidade daquela quantidade. Na realidade, no caso não-hermitiano é possível evitar densidades de energia negativas incômodas que estão presentes em alguns modelos hermitianos analisados na literatura [110].

Para os sistemas que analisaremos, é comum trabalhar com um método desenvolvido para tratar casos especiais para os quais as soluções do tipo sólitons da equação diferencial não-linear de segunda ordem são equivalentes àquelas não lineares de primeira ordem, as chamadas soluções topológicas (BPS) [92], utilizado no capítulo 4. As soluções BPS têm sido encontradas em aplicações a uma grande variedade de sistemas, cuja dinâmica pode ser descrita aproximadamente por modelos quânticos não lineares com interação entre campos escalares em 1+1 dimensões [110].

## 5.2 Modelos consistentes com dois campos escalares

Nesta seção utilizamos a extensão dos cálculos, feita na seção 10 do capítulo 4 no caso de um campo escalar onde agora o sistema é representado por dois campos escalares.

Estamos em um ponto privilegiado para mostrar que o uso de dois ou mais campos escalares BPS, permite o aparecimento das densidades de energia reais positivo definidas. Observando as equações vistas no capítulo anterior, podemos ver que a densidade de energia da configuração BPS pode ser escrita como:

$$\varepsilon(x) = \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2, \quad (5.1)$$

de onde podemos concluir que, por exemplo se  $\chi$ , um dos campos, é uma função imaginária pura, a energia pode ser real e uma quantidade definida positiva sob certas condições. Como veremos abaixo, este é o caso modelo que apresentamos neste capítulo.

Por outro lado a fim de obter uma solução para estes sistemas não lineares, pode-se escolher alguns métodos disponíveis. Podemos aplicar o método usual da órbita tentativa, ou um cálculo direto da órbita  $\phi(\chi)$  relembrando a equação (4.118),

$$\frac{d\phi}{W_\phi} = dx = \frac{d\chi}{W_\chi}, \quad (5.2)$$

tal que

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}. \quad (5.3)$$

Como dito no capítulo anterior, esta última equação é uma equação diferencial não linear que relaciona os campos escalares do modelo. Podemos resolvê-la completamente, então a função  $\phi(\chi)$  pode ser usada para eliminar um dos campos, obtendo assim as equações desacopladas (4.105).

No capítulo anterior, um modelo particular foi escolhido, e definido pelo seguinte superpotencial [65]

$$W(\phi, \chi) = -\lambda\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3 + (\mu_R + i\mu_I)\phi\chi^2. \quad (5.4)$$

Como observamos, o sistema anterior tem sua energia BPS complexa, basicamente devido ao fato que a parte imaginária dos campos tem um perfil do tipo kink. Em todos os outros casos com energia real BPS considerados no capítulo anterior, a parte imaginária da configuração de campo tem um perfil tipo "lump", assim não fornece nenhuma contribuição imaginária para a energia total, uma vez que esta última depende primordialmente do comportamento assintótico da configuração de campo.

Vamos agora apresentar a expressão explícita para o superpotencial que escolhemos como exemplo particular, o qual pode ser usado para evitar alguns problemas encontrados em nossa tentativa prévia de obter um modelo não-hermitiano com dois campos escalares. Como vamos verificar, o modelo que discutimos agora é mais consistente, uma

vez que, não somente apresenta uma energia total real, mas também tem densidade de energia real e fator de deformação reais, apesar do fato que ambas soluções da hamiltoniana como sólitons serem funções complexas. O modelo é tal que seu superpotencial é escrito assim:

$$W(\phi, \chi) = \frac{\alpha_1}{3}\phi^3 + \beta_1\phi + \frac{\alpha_2}{3}\chi^3 + \beta_2\chi + \gamma_1\phi\chi^2 + \gamma_2\phi^2\chi, \quad (5.5)$$

e usando o método das órbitas tentativas [112], com a seguinte equação da órbita

$$S\chi^2 + B_2^2\phi^2 - 2B_1B_2\chi - A_1^2B_2^2 = 0, \quad (5.6)$$

onde usamos a definição  $S = A_1^2 + B_1^2$ . As soluções que pudemos achar neste caso são explicitamente determinadas por

$$\phi = A_1 \tanh(x) + B_1 \operatorname{sech}(x), \quad \chi = B_2 \operatorname{sech}(x), \quad (5.7)$$

onde definimos os seguintes parâmetros

$$B_2 = -B_1 \sqrt{-\frac{S}{S + 2\gamma_1 A_1^3}}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{A_1} \left( R^2 - \frac{\gamma_1 A_1 B_1^2}{S + 2\gamma_1 A_1^3} \right), \quad \beta_1 = -A_1 \left( R^2 + \frac{\gamma_1 A_1 B_1^2}{S + 2\gamma_1 A_1^3} \right), \quad (5.8)$$

$$\beta_2 = -\gamma_2 A_1^2, \quad \gamma_2 = \frac{QR}{2A_1}, \quad \alpha_2 = \frac{R(S + 2\gamma_1 A_1^3) [B_1^2 - A_1(A_1 + 2\gamma_1 S)]}{2SQ(A_1 B_1^2)}, \quad (5.9)$$

e usamos as definições:  $Q = \sqrt{1 + 2\gamma_1 A_1}$  e  $R = \sqrt{-\frac{S(1+2\gamma_1 A_1)}{S+2\gamma_1 A_1^3}}$ . Vemos que os parâmetros dos potenciais estão relacionados entre si como consequência das restrições necessárias para obter uma solução analítica simples. Pode ser notado ainda que, para  $\gamma_1$  e  $A_1$  positivos, obtemos um modelo onde o campo  $\chi$  é uma função imaginária pura e, além disso, os parâmetros do potencial  $\gamma_2$  e  $\beta_2$  são números imaginários puros, obtendo assim a hamiltoniana do sistema não-hermitiano. A energia BPS correspondente para a configuração de campo anterior é então dada por

$$E_{BPS} = \frac{4}{3} \alpha_1 A_1^3. \quad (5.10)$$

Na figura 5.1 a seguir, representamos algumas configurações típicas dos campos  $\phi$  e  $\chi$ , onde escolhemos os parâmetros a fim de garantir que  $\phi$  é real, e  $\chi$  é imaginário.

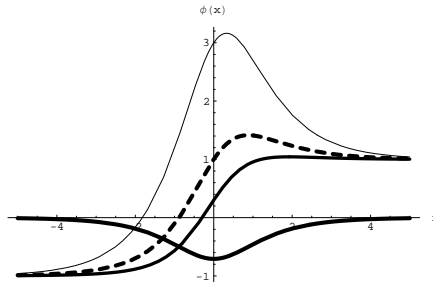


Figura 5.1: Comportamento do campo  $\phi$  em função de  $x$ , para:  $A_1 = 1; B_1 = 3; \gamma_1 = 1$  (linha fina contínua),  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -1.1$  (linha tracejada),  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = 1$  (linha média contínua), e para a parte imaginária do campo  $\chi$  com  $A_1 = 1 = B_1 = \gamma_1$  (linha grossa contínua).

Como dissemos acima, pode ser que os parâmetros dos potenciais possam ser manipulados na figura 5.2, a fim de manter a densidade de energia real e positivo definida. Assim, temos um exemplo muito mais forte no qual a realidade da energia BPS não depende do comportamento assintótico da configuração de campo, mas é garantida localmente porque a própria densidade de energia é uma quantidade real ao longo de todo o eixo espacial.

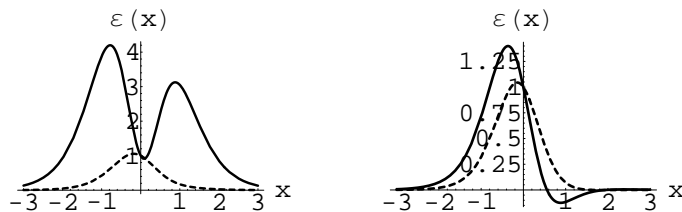


Figura 5.2: Densidade de energia em função de  $x$  quando:  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -1.08$  (linha contínua) e  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = -2/3$  (linha tracejada) à esquerda, e  $A_1 = 1 = B_1 = \gamma_1$  (linha contínua) e  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = 4$  (linha tracejada) à direita.

Pode-se observar que  $\phi$  apresenta um comportamento do tipo kink e, por construção,  $\chi$  tem um comportamento tipo "lump". É interessante observar que  $\phi$  apresenta um comportamento incomum, sendo similar a algumas configurações encontradas na literatura [113], para modelos completamente diferentes, mas que estão relacionados à transições de fase das branas no espaço-tempo curvo. Esta é uma das razões pelas quais decidimos investigar o impacto dos sólitons não-hermitianos para estes tipos de cenários cosmológicos, o que será feito a seguir.

### 5.3 Gravidade acoplada a campos escalares interagentes: Sólitons e fator de deformação

Nesta seção queremos investigar o impacto do sistema não-hermitiano analisado na seção anterior sobre o cenário das branas [110, 114]. Por essa razão, analisamos a ação da gravidade em cinco dimensões acopladas com dois campos escalares interagentes, a qual podem ser representados por [114]:

$$S = \int d^4x dr \sqrt{|g|} \left[ -\frac{1}{4}R + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) - V(\phi, \chi) \right], \quad (5.11)$$

onde  $g \equiv \det(g_{ab})$  e, para garantir que o espaço quadridimensional tenha a invariância de Poincaré, é normalmente suposto que

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = e^{2A(r)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2; \quad a, b = 0, \dots, 4, \quad (5.12)$$

onde  $r$  é a chamada dimensão extra, os índices  $a$  e  $b$  da métrica se referem as suas respectivas componentes: 0, 1, 2, 3, 4,  $\eta_{\mu\nu}$  a métrica usual de Minkowski e  $e^{2A(r)}$  o chamado fator de deformação. Uma hipótese comum é a de que o fator de deformação depende somente da dimensão extra  $r$ . Além disso, pode-se supor que os campos escalares também só dependam da dimensão extra  $r$ .

Nesse caso deve-se partir das equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (5.13)$$

onde  $G$  representa a constante de Newton,  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  representam o tensor de Ricci e o escalar de curvatura respectivamente. O tensor de Ricci correspondente à métrica  $g_{ab}$  é

$$R_{\mu\nu} = e^{2A}(4A'^2 + A'')\eta_{\mu\nu} \quad (5.14)$$

com

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (5.15)$$

e os símbolos de Christoffel dados por

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} \equiv \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} (g_{\nu\mu;\lambda} + g_{\nu\lambda;\mu} - g_{\lambda\mu;\nu}) \quad (5.16)$$

em que  $g_{\mu\nu;\lambda} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$ . Os primos denotam derivadas em relação a variável  $r$ . A partir da equação (5.11) até a (5.16), seguindo os cálculos da referência [108], obtêm-se que:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial\phi}, \quad \frac{d^2\chi}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\chi}{dr} = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial\chi}, \quad (5.17)$$

e

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -\frac{2}{3} \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right], \quad \left( \frac{dA}{dr} \right)^2 = \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right] - \frac{1}{3} V(\phi, \chi). \quad (5.18)$$

Como pode ser demonstrado [110, 114], essas equações não-lineares acopladas de segunda ordem têm outras equações diferenciais de primeira ordem que compartilham soluções com elas, e isso é determinado por

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial\phi}, \quad \frac{d\chi}{dr} = \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial\chi}, \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{2}{3} W(\phi, \chi), \quad (5.19)$$

contanto que o potencial  $V(\phi, \chi)$  seja escolhido como pertencente a uma determinada classe de potenciais que podem ser escritos em termos de um superpotencial dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial\phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial\chi} \right)^2 \right] - \frac{4}{3} W(\phi, \chi)^2. \quad (5.20)$$

Note que, uma vez que obtemos as soluções das duas primeiras equações para os campos escalares, torna-se uma tarefa de simples integração a obtenção de  $A(r)$  e, como consequência, a determinação do fator de deformação.

Usando as soluções de campos, bem como o superpotencial sob análise, obtemos depois da integração espacial que

$$e^{2A(r)} = \cosh(x) \frac{8A_1^2\alpha_1}{9} e^{-\frac{4}{9}A_1B_1[2\arctan(\tanh(\frac{x}{2})) + \operatorname{sech}(x)\tanh(x)] - \frac{2}{9}A_1^2 \left[ \frac{(S+2\gamma_1A_1^3 - 2A_1\gamma_1B_1^2)}{S+2\gamma_1A_1^3} \right]} \tanh(x)^2, \quad (5.21)$$

onde a constante de integração foi escolhida de modo a obtermos  $e^{2A(0)} = 1$ . Notamos que o fator de deformação é mantido real.

Na figura 5.3 são descritos alguns comportamentos típicos das branas que surgem de nosso sistema não-hermitiano. Pode-se observar que os casos não-hermitianos, representados pela linha tracejada na figura à esquerda, correspondem aos valores positivos dos parâmetros  $A_1$  e  $\gamma_1$ . Além disso, eles apresentam perfis bem comportados, que são muito similares aos apresentados na literatura para hamiltonianas hermitianas [110].

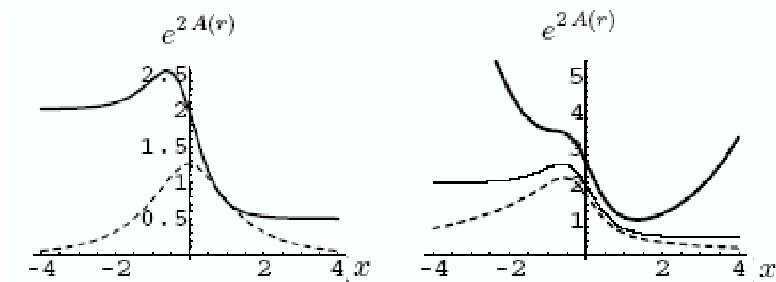


Figura 5.3: Fator de dobra em função de  $x$ , para os casos onde: (esquerda)  $A_1 = 1 = B_1$ ;  $\gamma_1 = -2/3$  (linha contínua) and  $A_1 = 1$ ;  $B_1 = 0.03$ ;  $\gamma_1 = 1.2$  (linha tracejada); (direita)  $A_1 = 1 = B_1$  e:  $\gamma_1 = -2/3$  (linha fina contínua),  $\gamma_1 = -23/30$  (linha média contínua) and  $\gamma_1 = -17/30$  (linha tracejada).

## 5.4 Estabilidade e modo zero

Um passo importante para a construção de um modelo consistente não-hermitiano na teoria de campos, que apresenta soluções de paredes de domínio no cenário das branas, é provar que elas são estáveis sob pequenas perturbações na métrica. Em geral, porém, isto é complicado de ser feito completamente em um grupo de equações com flutuações gerais na métrica ao redor do potencial num modelo onde a gravidade é acoplada a um escalar. Isto acontece como consequência de ter-se um complicado sistema de equações diferenciais de segunda ordem não-lineares acopladas [114, 110]. Felizmente, entretanto, há um setor onde as flutuações da métrica desacoplam dos campos escalares. Isso pode ser mostrado se introduzimos uma perturbação na métrica como em [114]:

$$ds^2 = e^{2A(r)} (\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (5.22)$$

da qual, utilizando cálculos da referência [108], e partindo da equação (5.11) até a (5.16), chega-se a



$$\frac{d^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\bar{h}_{\mu\nu}}{dr} - e^{-2A} \partial_\rho \partial^\rho \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.23)$$

onde  $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv P_{\mu\nu\lambda\rho} h^{\lambda\rho}$ , e  $P_{\mu\nu\lambda\rho}$  é o projetor. Por outro lado, com algumas redefinições na função

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-\frac{3}{2}A} \psi_{\mu\nu}, \quad (5.24)$$

e a transformação de variável  $z = \int e^{-A(r)} dr$  [110], pode-se reescrever a equação anterior como um tipo de equação de Schroedinger

$$-\frac{d^2 \psi_{\mu\nu}}{dz^2} + U_{eff}(z) \psi_{\mu\nu} = k^2 \psi_{\mu\nu}, \quad (5.25)$$

onde o potencial efetivo é definido por

$$U_{eff}(z) = \frac{9}{4} \left( \frac{dA}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{d^2 A}{dz^2}. \quad (5.26)$$

A equação diferencial anterior pode ainda ser escrita como

$$a^+ a \psi_{\mu\nu}(z) \equiv \left( -\frac{d}{dz} + \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \left( \frac{d}{dz} + \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \psi_{\mu\nu}(z) = k^2 \psi_{\mu\nu}. \quad (5.27)$$

onde, devido à estrutura supersimétrica da equação diferencial para o modo zero (nota-se que o termo  $k^2$  é positivo definido ou zero), pode ser mostrado que não existem soluções com autovalores negativos [115]. Assim o sistema é estável nestas condições.

Neste ponto, normalmente, calcula-se a solução do modo zero do sistema [110], devido ao fato de que esta garante a existência de um graviton quadridimensional sem massa [107, 110]. Porém, podemos observar que o comportamento que aparece é semelhante ao fator de deformação, de modo que pode-se pensar que há alguma relação entre eles. A seguir mostramos que estas duas quantidades realmente apresentam a mesma forma genérica. Pensando nisso, partimos da equação (5.23), redefinimos a função  $\bar{h}_{\mu\nu}$  como  $\bar{h}_{\mu\nu} = e^{-2A(r)} \xi_{\mu\nu}(r)$ , e obtemos a seguinte equação

$$\frac{d^2 \xi_{\mu\nu}}{dz^2} - 2 \left( \frac{d^2 A}{dz^2} + 2 \left( \frac{dA}{dz} \right)^2 \right) \xi_{\mu\nu} + k^2 e^{-2A} \xi_{\mu\nu} = 0, \quad (5.28)$$

a qual, para o modo zero ( $k^2 = 0$ ), pode ser reescrita como

$$\left(\frac{d}{dz} + 2\frac{dA}{dz}\right)\left(\frac{d}{dz} - 2\frac{dA}{dz}\right)\xi_{\mu\nu} = 0, \quad (5.29)$$

de onde, finalmente, pode-se ver que a solução de modo zero, a menos de um fator de normalização é precisamente o fator de deformação

$$\xi_{\mu\nu}^{(0)} = N_0 e^{2A(r)}. \quad (5.30)$$

Assim vemos que não é realmente necessário plotar o fator de deformação, como costuma ser feito em alguns trabalhos na literatura, uma vez que seu comportamento qualitativo é o mesmo do fator de deformação.

O último item a ser analisado neste capítulo é aquele relacionado aos potenciais de estabilidade. Aqui, como consequência da expressão complicada do fator de deformação, não é fácil escrever de um modo analítico a expressão da transformação de variáveis  $r = r(z)$ . Assim, para fazer uma análise do potencial de estabilidade vamos escrevê-la em termos da variável original  $r$ . Para isso usamos o fato de que  $\frac{dA}{dz} = e^A \frac{dA}{dr}$  como feito em [113]. Então obtemos

$$U_{eff}(r) = \frac{3}{4}e^{2A} \left(2\frac{d^2A}{dr^2} + 5\left(\frac{dA}{dr}\right)^2\right). \quad (5.31)$$

Obviamente, o potencial anterior não é igual àquele na variável  $z$ . Porém, a forma geral e características em ambas as variáveis são as mesmas. Alguns exemplos de potenciais de estabilidade são representados na figura 5.4 na página a seguir. Uma vez mais, os casos não-hermitianos (linha contínua na parte esquerda) são bem semelhantes àqueles dos modelos hermitianos considerados na literatura [110].

Finalmente, antes de terminar este capítulo, sentimos que é necessário frisar que, contrariamente ao caso de alguns modelos hermitianos [109],[110], as configurações topológicas não-hermitianas obtidas neste capítulo, são capazes evitar densidades de energia negativas. Deste modo, a densidade da energia é escrita como

$$\varepsilon_{warp}(x) = e^{2A} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx}\right)^2 \right] + V(\phi, \chi) \right\},$$

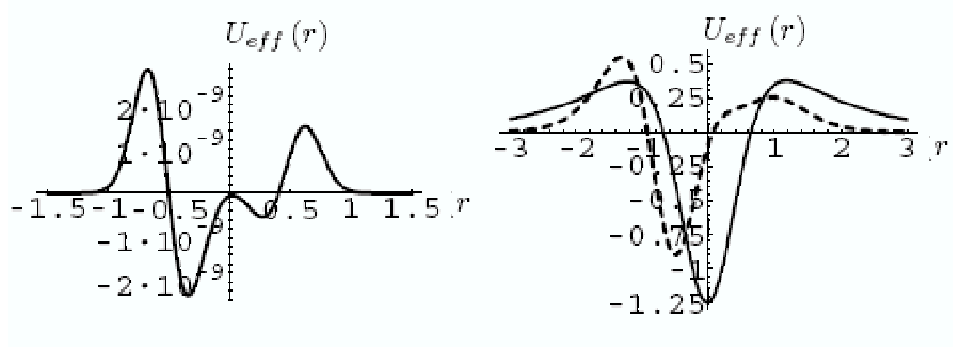


Figura 5.4: Potenciais efetivos estáveis de branas com parede de domínio em função de  $r$  com:  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -1.01$  (esquerda).  $A_1 = 1; B_1 = 0.03; \gamma_1 = 1$  (linha contínua) and  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -1.2$  (linha tracejada) à direita da figura.

e a eliminação das densidades de energia negativas é feita através de uma limitação apropriada da região de validade dos parâmetros do potencial. Esta característica é ilustrada na figura 5.5, onde pode-se ver claramente que a densidade de energia negativa pode ser evitada, quando  $\gamma_1$  e  $A_1$ , são positivos para pequenos valores de  $B_1$ , e este é o exemplo da versão não-hermitiana do modelo que estamos estudando aqui.

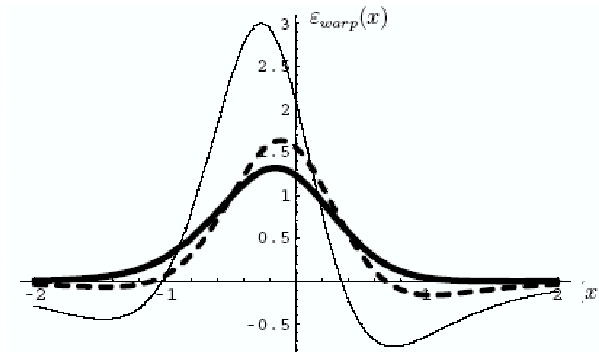


Figura 5.5: Densidade de energia em função de  $x$  para os casos onde a gravidade está presente:  $A_1 = 1 = B_1; \gamma_1 = -0.7$  (linha contínua fina),  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = -0.5$  (linha tracejada) e  $A_1 = 1; B_1 = 0.3; \gamma_1 = 1$  (linha contínua média). Note que no caso não-hermitiano ( $\gamma_1$  positivo) a densidade de é sempre positiva.

# Capítulo 6

## Conclusões

Do estudo de sistemas não-hermitianos nos atentamos para sistemas dependentes do tempo e violando a simetria  $PT$ . Obtivemos um resultado novo, interessante e que demanda investigações adicionais. Os valores médios das energias são reais e dependentes do tempo, as funções de onda deste sistema são exatas. Desse resultado vemos que a simetria  $PT$  nem sempre é válida. Então, talvez fosse interessante estudar estes sistemas analisando a chamada pseudo-hermiticidade. Podemos notar também que, mesmo com o mapeamento dentro de um sistema hermitiano independente do tempo (Eq. (2.15)), não é trivial verificar que o sistema original dependente do tempo têm energias reais. Na realidade é necessário usar a função de onda (2.6) para calcular explicitamente o valor médio da energia.

Mostramos que a equação de Dirac em duas dimensões também tem espectro discreto real e pode admitir férmions, quando é considerada uma mistura de potenciais conveniente da seguinte maneira: vetor, escalar e pseudo-escalar; sendo o potencial vetor complexo. Estendemos então, o problema de férmions em 1+1 dimensões, interagindo com potenciais complexos, considerando o acoplamento mais geral possível para a equação de Dirac independente do tempo em duas dimensões. Por meio de alguns exemplos, o problema original com potenciais complexos pode ser resolvido exatamente e ter espectro real. Os exemplos que temos, nos levam a considerar operadores hamiltonianos não-hermitianos como o de Schroedinger com potenciais complexos, mas que possuem simetria  $PT$ . De fato, a simetria  $PT$  também é observada na equação de Dirac quando a parte imaginária de cada potencial é transformada sob simetria de paridade de maneira reversa da parte real. E isto garante que a equação de Schroedinger independente do tempo do

problema efetivo será  $PT$  simétrica no sentido abordado aqui, já que o potencial efetivo conterà uma parte real e uma imaginária sendo que a parte imaginária troca de sinal sob paridade. Seria muito interessante a análise da pseudo-hermiticidade do operador de Dirac com a mistura de potenciais que consideramos bem como a verificação da existência de casos em que o potencial seja real.

Outro ponto notável sobre estes exemplos, além de serem resolvidos exatamente, é que eles ligam auto-estados de férmions, apesar da presença do potencial vetor. Como se sabe, é difícil ligar férmions quando temos uma interação com o potencial vetor, uma vez que estes dão origem a campos elétricos que são responsáveis pela produção de pares. De acordo com o que acontece quando temos uma mistura conveniente de potenciais escalar e vetor potencial como em [61], achamos que a presença dos potenciais escalar e pseudo-escalar, embora complexos, são responsáveis pelo aparecimento de uma massa efetiva para o férmion  $e$ , como consequência, a energia da produção de pares se torna mais alta do que a energia que o campo elétrico fornece ao férmion [52]. Confinamento de férmions com potencial vetor, como no primeiro exemplo tratado no capítulo 3 desta tese, é um caso particular. Certamente pode-se verificar que um dos espectros relativísticos que encontramos é muito similar ao do chamado “oscilador de Dirac” em  $1+1$  dimensões em [116]. Nesta referência um férmion massivo é acoplado ao potencial linear; esta interação sendo do tipo pseudo-escalar, é a versão bidimensional do acoplamento em quatro dimensões, do momento magnético anômalo com um campo elétrico saindo no “oscilador de Dirac” [117], e que pode ser visto como um mecanismo para acoplamento de férmions em  $3+1$  dimensões.

No estudo sobre kinks, observamos que os sistemas não-hermitianos que preservam a simetria  $PT$  podem exibir configurações clássicas topológicas com energia total real, que é estável sob pequenas perturbações lineares e pode-se acoplar a férmions preservando a supersimetria. Este é um passo importante para considerar os sistemas denominados  $PT$ -simétricos como candidatos fisicamente aceitáveis em teoria quântica de campos. Baseados nestes resultados prósperos, pretendemos ampliar a análise presente procurando vórtices consistentes e instântons em sistemas  $PT$ -simétricos.

Na investigação sobre branas, introduzimos um sistema não-hermitiano com dois campos escalares com a propriedade de, além de ter a energia BPS real, ter também a densidade de energia real, como também o fator de deformação no caso das branas

cosmológicas. Em relação a esta última situação, vimos que podem ser evitadas densidades de energia negativas que aparecem em alguns modelos hermitianos na literatura, e isto pode ser feito escolhendo uma região conveniente dos parâmetros dos potenciais em um modelo não-hermitiano. Tal propriedade pode ajudar na perspectiva futura da construção de um sistema não-hermitiano consistente em teoria quântica de campos.

Finalmente, verificamos, que a não-hermiticidade é um assunto de interesse muito antigo conforme visto no apêndice A, tem muitas aplicações em mecânica quântica, teoria clássica de campos e em modelos cosmológicos. E também por isto, vemos que este assunto tem diversas possibilidades de perspectivas futuras.

# Referências Bibliográficas

- [1] Gilson, D. R.. Tese de doutorado, "An Introduction and brief topical review of non-hermitian quantum mechanics", "University of Hull"(2008).
- [2] Hatano Naomichi, David R. Neslon, Phys. Rev. B **56**(14) (1997) 1.
- [3] C. M. Bender e S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 5243.
- [4] Cannata F, G Junker e J Trost., "Schrödinger operators with complex potential but real spectrum", arXiv:quant-ph/9805085 **29** (1998).
- [5] Killingbeck J P e Georges Jolicard, J. Phys. A **36** (2003) R105.
- [6] Jolicard Georges e John P Killingbeck, J. Phys. A **36** (2003) R411.
- [7] Znojil Miloslav, Caliceti Emanuela, Cannata Francesco, Ventura Alberto, Physics Letters A **335** (2005) 26.
- [8] Yacob Ben-Aryeh, Ady Mann e Itamar Yaakov, J. Phys. A **37** (2004) 12059.
- [9] Bender Carl M, Joachim Brod, Andr´e Refig e Moretz E Reuter, J. Phys. A **37** (2004) 10139.
- [10] Wu Tai Tsun, Phys. Rev. **115** (1959) 1390.
- [11] Weigert Stefan, Czechoslovak Journal of Physics, **54** (2004), 147.
- [12] Wong Jack, J.Math.Phys **8**, (1967)  $N_0$ .10.
- [13] Wu Tai Tsun, Bender Carl, Phys. Rev. **184** (1969), 1231.
- [14] Haydock R e M J Kelly, J. Phys. C: Solid State Phys. **8** (1975), 197.
- [15] Stedman G E e Butler P H, J. Phys. A **13** (1980) 3125.

- [16] Faisal F H M e J V Moloney, J. Phys. B: At. Mol. Phys. **14** (1981) 3603.
- [17] A. Mostafazadeh, J. Math Phys. **43** (2002) 205; .ibid. **43** (2002) 2814; ibid. **43** (2002) 3944.
- [18] P. Dorey, C. Dunning and R. Tateo, J. Phys. A **34** (2001) L391. C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones , Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 270401
- [19] A. Mostafazadeh, J. Math Phys. **41** (2008) 244020..
- [20] I. V. Yurkevich e I. V. Lerner, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 5080.
- [21] C. M. Bender, Phys. Rep. **315** (1999) 27.
- [22] F. M. Fernandez, R. Guardiola, J. Ros et al, J. Phys. A **32** (1999) 3105.
- [23] W. D. Weiss, Eur. Phys. J D **7** (1999) 1.
- [24] G. A. Mezincescu, J. Phys. A **33** (2000) 4911.
- [25] N. Rosen e P.M. Morse, Phys. Rev. **42** (1932) 210.
- [26] A. Khare e B. P. Mandal, Phys. Lett. A **272** (2000) 53.
- [27] B. Bagchi e C. Quesne, Mod. Phys. Lett. A **16** (2001) 2449.
- [28] G. S. Japaridze, J. Math. Phys. **35** (2002) 1709.
- [29] B. Basu-Mallick, Int. J. Mod. Phys. B **16** (2002) 1875.
- [30] S. Albeverio, S. M. Fei e P. Kurasov, Lett. Math. Phys. **59** (2002) 227.
- [31] T. Sharpee, M. I. Dykman e P. M. Platzman, Phys. Rev. A **65** (2002) 032122.
- [32] M. Znojil, Phys. Atom. Nucl. **65** (2002) 1149.
- Proceedings of the “Pseudo-Hermitian Hamiltonians in Quantum Mechanics”, Czech. J. Phys. **54** (2004) 1.
- [33] Proceedings of the “Pseudo-Hermitian Hamiltonians in Quantum Mechanics II”, Czech. J. Phys. **54** (2004) 1005.
- [34] A. de Souza Dutra, M. Hott e V. G. C. S. dos Santos, Europhys. Lett. **71** (2005) 166.



- [35] P. G. L. Leach, SIAM J. Appl. Math. **34** (1978) 496.
- [36] P. G. L. Leach, J. Phys. A **23** (1990) 2695.
- [37] P. G. L. Leach, J. Math. Phys. **18** (1977) 1902; **21** (1980) 300; **26** (1985) 1613.
- [38] R. K. Colegrave and M. S. Abdalla, Opt. Acta **30** (1983) 861; **28** (1981) 495.
- [39] A. de Souza Dutra and B. K. Cheng, Phys. Rev. A **39** (1989) 5897.
- [40] H. R. Lewis and K. R. Symon, Phys. Fluids **27** (1984) 192.
- [41] C. Farina and A. de Souza Dutra, Phys. Lett. A **123** (1987) 297.
- [42] B. R. Holstein, Am. J. Phys. **57** (1989) 714.
- [43] A. de Souza Dutra, C. Farina and L. C. de Albuquerque, Phys. Lett. A **156** (1991) 371.
- [44] C. F. Lo, Phys. Rev. A **45** (1992) 5262.
- [45] J. Y. Ji, J. K. Kim and S. P. Kim, Phys. Rev. A **51** (1995) 4268.
- [46] I. A. Pedrosa, G. P. Serra and I. Guedes, Phys. Rev. A **56** (1997) 4300.
- [47] I. Guedes, Phys. Rev. A **63** (2001) 034102.
- [48] M. Feng, Phys. Rev. A **64** (2001) 034101.
- [49] I. Sturzu, Phys. Rev. A **64** (2001) 054101.
- [50] A. S. de Castro and A. de Souza Dutra, Phys. Rev. A **67** (2003) 054101.
- [51] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, “Table of Integrals, Series and Products ” (Academic, New York, 1980), fórmula 7.347.7.
- [52] C.S Jia and A. de Souza Dutra, J. Phys. A **39** (2006) 11877; Ann. Phys. (NY) **323** (2008) 566.
- [53] O. Mustafa, J. Phys. A **36** (2003) 5067.
- [54] M. Simek and H. Egrifes, J. Phys. A **37** (2004) 4379. H. Egrifes and R. Sever, Phys. Lett. A **344** (2005) 117.

- [55] Z. Ahmed, Phys. Lett. A **282** (2001) 343.
- [56] Y. F. Diao, L. Z. Yi and C. S. Jia, Phys. Lett. A **332** (2004) 157.
- [57] A. Sinha and P. Roy, J. Phys. A **37** (2004) 2509.
- [58] A. Sinha and P. Roy, Mod. Phys. Lett A **20** (2005) 2377.
- [59] C.S. Jia, Y.F. Diao and J.Y. Liu, Int. J. Theor. Phys. **47** (2008) 664. C.S. Jia, J.Y. Liu, P.Q. Wang and C.S. Che, Phys. Lett. A **369** (2008) 274.
- [60] O. Mustafa and S.H. Mazharimousavi, Int. J. Theor. Phys. **47** (2008) 1112.
- [61] L.B. Castro, A.S. de Castro and M. Hott, Europhys. Lett. **77** (2007) 20009.
- [62] L.B. Castro, A.S. de Castro and M. Hott, Int. J. Mod. Phys. E **16** (2007) 3002.
- [63] C.Y. Chen, Phys. Lett. A **339** (2005) 283.
- [64] A. de Souza Dutra and M. Hott, Phys. Lett A. **356** (2006) 215.
- [65] A. de Souza Dutra, A. C. F. do Amaral Jr. and V. G. C. S. dos Santos, Phys. Rev. D **75** (2007) 125001.
- [66] E. Merzbacher, "Quantum Mechanics" (John Wiley & Sons, New York, 1970).
- [67] Z. Ahmed, Phys. Lett. A **290** (2001) 19.
- [68] C. Yuce, Phys. Lett. A **336** (2005) 290.
- [69] A. Mostafazadeh, Phys. Lett. B **650** (2007) 208.
- [70] M. Znojil, J. Phys. A **37** (2004) 9557.
- [71] H. Egrifes e R. Sever, Phys. Lett. A **344** (2005) 117.
- [72] Y. F. Diao, L. Z. Yi e C. S. Jia, Phys. Lett. A **332** (2004) 157.
- [73] R. Jakiw e V. P. Nair, Phys. Rev. D **43** (1991) 1933.
- [74] D. Dalmazi e A. de Souza Dutra, Phys. Lett. B **343** (1995) 225; Phys. Lett. B **414** (1997) 315.
- [75] A. D. Alhaidari, Phys. Lett. A **322** (2004) 72.

- [76] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A **38** (2005) 4727.
- [77] X. L. Peng, J. Y. Liu e C. S. Jia, Phys. Lett. A **352** (2006) 478.
- [78] A. de Souza Dutra e C. S. Jia, Phys. Lett. A **352** (2006) 484.
- [79] M. Abramowitz e I.A. Stegun, Hebook of Mathematical Functions, Dover, Toronto, 1965.
- [80] C. K. Chiang, C. R. Fincher, Jr., Y. W. Park, A. J. Heeger, H. Shirakawa, E. J. Louis, S. C. Gau and A. G. MacDiarmid, Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 1098.
- [81] H. W. Fink and C. Schöenberger, Nature **398** (1999) 407.
- [82] E. D'Hoker and R. Jackiw, Phys. Rev. D **26** (1982) 3517.
- [83] E. D'Hoker and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1719.
- [84] E. D 'Hoker, D. Z. Freedman and R. Jackiw, Phys. Rev. D **28** (1983) 2583.
- [85] I. Cho and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **59** (1999) 021701; **59** (1999) 063510.
- [86] D. Bazeia, Phys. Rev. D **60** (1999) 067705.
- [87] D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, Phys. Rev. D **66** (2002) 101701(R).
- [88] A. de Souza Dutra and A. C. Amaro de Faria Jr., Phys. Rev. D **72** (2005) 087701.
- [89] Faria Júnior, A. C. A. de. Dissertação de mestrado "Equivalência Clássica e Quântica entre Sólitos", Universidade Estadual Paulista (2005).
- [90] Dashen, R.F., Hasslacher, B. e Neveu, A. Phys. Rev. D **10**, 4130, (1974).
- [91] Goldstone, J.e Jackiw, R. (1975), Phys. Rev. D **11**, 1486, (1975).
- [92] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35** 760 (1975) ; E. B. Bolgomonyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 861.
- [93] D. Bazeia, R. F. Ribeiro and M. M. Santos, Phys. Rev. E **54** (1996) 2943.
- [94] D. Bazeia, M. M. Santos, Phys. Lett. A **217** (1996) 28.
- [95] G. Flores-Hidalgo and N. F. Svaiter, Phys. Rev. D **66** (2002) 025031.

- [96] T. Vachaspati, Phys. Rev. D **69** (2004) 043510.
- [97] B. Chibisov and M. Shiffman, Phys. Rev. D **56** (1997) 7990.
- [98] C. M. Bender, D. C. Brody and F. Jones, Am. J. Phys. **71** (2003) 1095.
- [99] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 251601.
- [100] A. de Souza Dutra and A. C. Amaro de Faria Jr., Czech. J. Phys. **54** (2004) 1229.
- [101] A. de Souza Dutra, Phys. Lett. B **626** (2005) 249.
- [102] D. Bazeia and F. A. Brito, Phys. Rev. D **61** (2000) 105019.
- [103] E. D'Hoker and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1719.
- [104] Y. S. Kyvshar, D. E. Pelinovsky, T. Creteigny and M. Peyard, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 5032.
- [105] C. M. Bender e S. Boettcher, J. Phys. A **31** (1998) L273.
- [106] C. M. Bender, D. C. Brody e H. F. Jones, Phys. Rev. D **73** (2006) 025002.
- [107] L. Randall e R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370. Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690.
- [108] Faria Júnior, A.C. A. de. Tese de doutorado, "Sólitons e Gravitação", Universidade Estadual Paulista (2008).
- [109] D. Bazeia, J. Furtado and A. R. Gomes, JCAP **02** (2004) 002.
- [110] D. Bazeia e A. R. Gomes, J. High Energy Phys. **05** (2004) 012.
- [111] V. A. Rubakov e M. E. Schaposhnikov, Phys. Lett. B **125** (1983) 136.
- [112] R. Rajaraman, "Solitons and Instantons"(North Holland, Amsterdam, 1982).
- [113] A. Campos, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 141602.
- [114] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser e A. Karch, Phys. Rev. D **62** (2000) 046008.
- [115] V. I. Afonso, D. Bazeia e L. Losano, Phys. Lett. B **634** (2006) 526.

- [116] F. Domínguez-Adame e M.A. González, *Europhys. Lett.* **13** (1990) 193.
- [117] D. Ito, K. Mori e E. Carriere. *Nuovo Cimento A* **51** (1967) 1119.
- [118] Ahmed Z., *Phys. Lett. A* **282** (2001) 343.
- [119] Ahmed Z., *Phys. Lett. A* **287** (2001) 295.

# Apêndice A

## O valor esperado da energia

Neste apêndice calculamos com maiores detalhes, o valor esperado da energia de um oscilador harmônico com um potencial linear dependente do tempo violando a simetria PT, conforme apresentado no capítulo 2.

Sendo  $\psi$  um estado genérico

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n. \quad (\text{A.1})$$

O valor médio da energia será então dado por:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = i\hbar \left\langle \psi \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \psi \right\rangle, \quad (\text{A.2})$$

de modo que

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^* a_m^* a_n \dot{\psi}_n = i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} a_m^* a_n \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^* \dot{\psi}_n \quad (\text{A.3})$$

e fazendo a translação

$$y = x - i f_\beta(t), \quad (\text{A.4})$$

temos que

$$\dot{\psi}_n = i \left\{ \left[ \dot{f}_\gamma - \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right] + \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right) \dot{f}_\beta y - \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \dot{f}_\beta \left( \frac{H'_n}{H_n} \right) \right\} \psi_n, \quad (\text{A.5})$$

com

$$\psi_n(x, t) = N_n e^{\alpha_0 x} e^{if_\gamma(t)} e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)y^2} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right), \quad (\text{A.6})$$

de forma que podemos escrever

$$\psi_n^* \dot{\psi}_n = i \left\{ \left[ \dot{f}_\gamma - \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \right] \psi_n^* \psi_n + \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right) \dot{f}_\beta \psi_n^* y \psi_n - \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \dot{f}_\beta \psi_n^* \left( \frac{H'_n}{H_n} \right) \psi_n \right\}, \quad (\text{A.7})$$

ou seja, precisamos calcular as seguintes integrais:

$$\text{i) } I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_n|^2 = \frac{|N_n|^2}{\sigma} e^{[2i\alpha_0 f_\beta + (\alpha_0/\sigma)^2]} 2^n \sqrt{\pi} (n!) L_n^{(0)}(-2\omega^2) \equiv 1 \text{ (normalização)}, \quad (\text{A.8})$$

o que implica em:

$$N_n = \frac{\sqrt{\sigma} e^{-(i\alpha_0 f_\beta + \frac{1}{2}(\frac{\alpha_0}{\sigma})^2)}}{\left[ 2^n \sqrt{\pi} (n!) L_n^{(0)}(-2\omega^2) \right]^{1/2}}. \quad (\text{A.9})$$

$$\text{ii) } I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^* \psi_n; \quad (\text{A.10})$$

$$\text{iii) } I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^* y \psi_n; \quad (\text{A.11})$$

$$\text{iv) } I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^* \left( \frac{H'_n}{H_n} \right) \psi_n; \quad (\text{A.12})$$

Veamos então a segunda delas:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^* \psi_n = N_m^* N_n \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2\alpha_0 x} e^{i(m-n)\omega t} H_m^* \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right) H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right) \\ &= N_m^* N_n e^{i(m-n)\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2\alpha_0 x} e^{i(m-n)\omega t} H_m^*(\sigma y) H_n(\sigma y) e^{-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)y^2} \end{aligned}$$

$$I_1 = N_m^* N_n e^{i(m-n)\omega t} \frac{e^{[2\alpha_0 f_\beta + (\alpha_0/\sigma)^2]}}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(z-w)^2} H_m^*(z) H_n(z); \quad (\text{A.13})$$

onde  $z \equiv \sigma y$ ,  $\sigma \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  e  $w \equiv \alpha_0/\sigma$ .

Uma vez que temos a identidade matemática:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(z-w)^2} H_m^*(z) H_n(z) = [2^n \sqrt{\pi} (m!) W^{(n-m)} L_m^{(n-m)}(-2\omega^2)] \quad \text{para } m \leq n; \quad (\text{A.14})$$

ficamos com:

$$I_1 = N_m^* N_n e^{i(m-n)\omega t} \frac{e^{(2i\alpha_0 f_\beta + (\alpha_0/\sigma)^2)}}{\sigma} 2^n \sqrt{\pi} (m!) W^{(n-m)} L_m^{(n-m)}(-2\omega^2) \quad (\text{A.15})$$

que substituindo a normalização (A.8), nos leva a

$$I_1 = 2^{\frac{(n-m)}{2}} \sqrt{\frac{m!}{n!}} W^{(n-m)} \left[ \frac{L_m^{(n-m)}(-2\omega^2)}{\sqrt{L_n^{(0)}(-2\omega^2) L_m^{(0)}(-2\omega^2)}} \right] e^{i(m-n)\omega t}. \quad (\text{A.16})$$

Calculando agora a  $I_2$  :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^* y \psi_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2\alpha_0 x} e^{-\sigma y^2} H_m^*(\sigma y) H_n(\sigma y), \quad (\text{A.17})$$

com a translação de coordenadas definida em (A.4), temos:

$$I_2 = e^{2\alpha_0 f_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dy y e^{2\alpha_0 y} e^{-\sigma y^2} H_m^*(\sigma y) H_n(\sigma y), \quad (\text{A.18})$$

definindo  $z = \sigma y$ , ficamos com

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{e^{[2i\alpha_0 f_\beta + (\alpha_0/\sigma)^2]}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz z e^{-(z-\alpha_0/\sigma)^2} H_m^*(z) H_n(z) = \\ &= \frac{e^{[2i\alpha_0 f_\beta + (\alpha_0/\sigma)^2]}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz (z-w) e^{-(z-w)^2} H_m^*(z) H_n(z) + w \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(z-w)^2} H_m^*(z) H_n(z). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$



Utilizando a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz (z-w) e^{-(z-w)^2} H_m^*(z) H_n(z) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(z-w)^2} H_m^*(z) H_n(z), \quad (\text{A.20})$$

e também a equação (A.14), teremos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{e^{\left[2i\alpha_0 f_\beta + w^2\right]}}{\sigma^2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} + W \right) 2^n \sqrt{\pi} (m!) W^{(n-m)} L_m^{(n-m)}(-2\omega^2) = \\ &= \frac{2^n \sqrt{\pi} (m!) e^{\left[2i\alpha_0 f_\beta + w^2\right]}}{\sigma^2} \left\{ W^{(n-m+1)} L_m^{(n-m)}(-2\omega^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} [W^{(n-m)} L_m^{(n-m)}(-2\omega^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

logo, obtemos finalmetne que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2^n \sqrt{\pi} (m!) e^{\left[2i\alpha_0 f_\beta + w^2\right]}}{\sigma^2} \left\{ W^{(n-m+1)} L_m^{(n-m)}(-2\omega^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-m)}{2} W^{(n-m)} L_m^{(n-m)}(-2\omega^2) - W^{(n-m+1)} \frac{\partial}{\partial u} L_m^{(n-m)}(u) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

da mesma maneira podemos calcular o  $I_3$ , que juntamente com  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  nos leva às equações (2.26) e (2.27), e finalmente a (2.28).

# Apêndice B

## Flutuações dos campos

Aqui faremos uma revisão de como calcular as flutuações do campo, já realizada na literatura [114], [108], e seguimos o procedimento de [108]. As equações (5.17) e (5.18) podem ser obtidas utilizando as equações de Einstein para a ação (5.13) e fazendo uma perturbação na métrica (5.22) representada por um campo tensorial perturbativo  $h_{\mu\nu}(x, y)$ . Uma análise perturbativa em relação aos campos escalares  $\phi$  e  $\chi$  também pode ser realizada considerando  $\phi \rightarrow \phi + \epsilon\tilde{\phi}$  e  $\chi \rightarrow \chi + \epsilon\tilde{\chi}$ , onde  $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(x, y)$  e  $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}(x, y)$  a fim de representar as respectivas perturbações. A variável  $x$  representa  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  e  $x^4 = y$  identifica a dimensão extra, que no capítulo 5, é denotada por  $r$ . A variação da ação em relação aos campos escalares e a métrica é considerada até a segunda ordem em  $\epsilon$  a fim de se obter as equações para as flutuações.

A métrica total pode ser expressa sob a forma

$$ds^2 = e^{2A(r)} (\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (\text{B.1})$$

de onde podemos obter o tensor de Ricci. As equações de flutuações a ordem zero fornecem as equações (5.14), enquanto que em primeira ordem pode-se encontrar a partir de (5.15) e (5.16) que

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = e^{2A} \left( \frac{1}{2} \partial_r^2 + 2A' \partial_r + A'' + 4A'^2 \right) h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} e^{2A} A' \partial_y (\eta^{kl} h_{kl}) +$$

$$-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{kl}(\partial_\mu\partial_\nu h_{kl} - \partial_\mu\partial_k h_{\nu l} - \partial_\nu\partial_k h_{\mu l}), \quad (\text{B.2})$$

$$R_{44}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(\partial_y^2 + 2A'\partial_y\right)\eta^{kl}h_{kl}. \quad (\text{B.3})$$

e

$$R_{\nu 5}^{(1)} = \frac{1}{2}\eta^{kl}\partial_y(\partial_k h_{\nu l} - \partial_\nu h_{kl}) \quad (\text{B.4})$$

As equações de Einstein podem ser expressas na forma das equações de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}T_\alpha^\alpha, \quad (\text{B.5})$$

onde o tensor energia-momento em primeira ordem tem a forma:

$$\bar{T}_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{2}{3}e^{2A}\left[2\tilde{\phi}\frac{\partial V(\phi,\chi)}{\partial\phi} + 2\tilde{\chi}\frac{\partial V(\phi,\chi)}{\partial\chi}\right]\eta_{\mu\nu} + 2V(\phi,\chi)h_{\mu\nu}, \quad (\text{B.6})$$

$$\bar{T}_{55}^{(1)} = 4\phi'\tilde{\phi}' + \frac{4}{3}\left[\tilde{\phi}\frac{\partial V(\phi,\chi)}{\partial\phi} + \tilde{\chi}\frac{\partial V(\phi,\chi)}{\partial\chi}\right], \quad (\text{B.7})$$

e

$$\bar{T}_{\nu 5}^{(1)} = 2\phi'\partial_\nu\tilde{\phi}. \quad (\text{B.8})$$

A análise perturbativa que resulta na equação de movimento para as flutuações escalares  $\tilde{\phi}$  e  $\tilde{\chi}$ , pode ser realizada por meio de uma expansão até a segunda ordem em  $\varepsilon$  para as flutuações escalares e tensoriais e para o potencial  $V(\phi,\chi)$ , o que fornece

$$e^{2A}\square\tilde{\phi} - 4A'\tilde{\phi}' - \tilde{\phi}'' + \tilde{\phi}\frac{\partial^2 V(\phi,\chi)}{\partial\phi^2} + \tilde{\chi}\frac{\partial^2 V(\phi,\chi)}{\partial\phi\partial\chi} = \frac{1}{2}\phi'\eta^{\mu\nu}h'_{\mu\nu}, \quad (\text{B.9})$$

para  $\tilde{\phi}$  e

$$e^{2A}\square\tilde{\chi} - 4A'\tilde{\chi}' - \tilde{\chi}'' + \tilde{\chi}\frac{\partial^2 V(\phi, \chi)}{\partial\phi^2} + \tilde{\phi}\frac{\partial^2 V(\phi, \chi)}{\partial\phi\partial\chi} = \frac{1}{2}\chi'\eta^{\mu\nu}h'_{\mu\nu}. \quad (\text{B.10})$$

Em função das equações (5.18) a equação  $R_{\mu\nu}^{(1)} = \bar{T}_{\mu\nu}^{(1)}$  simplifica adquirindo a forma

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + e^{2A}\left(\partial_y^2 + 2A'\partial_y\right)h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{kl}\left(\partial_\mu\partial_\nu h_{kl} - \partial_\mu\partial_k h_{kl} - \partial_\nu\partial_k h_{\mu l}\right) \\ & + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}e^{2A}A'\partial_y\left(\eta^{kl}h_{kl}\right) + \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}e^{2A}\left[2\tilde{\phi}\frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial\phi} + 2\tilde{\chi}\frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial\chi}\right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A descrição da gravidade linearizada na forma das equações de flutuação da métrica é desenvolvida no setor transversal e sem traço, onde a gravidade se desacopla do campo de matéria. Para isso  $h_{\mu\nu}$  se transforma como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu kl}h^{kl}, \quad (\text{B.12})$$

onde o projetor é dado por

$$P_{\mu\nu kl} = \frac{1}{2}\left(\pi_{\mu k}\pi_{\nu l} + \pi_{\mu l}\pi_{\nu k}\right) - \frac{1}{3}\pi_{\mu\nu}\pi_{kl}, \quad (\text{B.13})$$

com

$$\pi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square}, \quad (\text{B.14})$$

o que reduz as equações de flutuação da métrica finalmente para

$$\bar{h}''_{\mu\nu} + 4A'\bar{h}'_{\mu\nu} = e^{-2A}\square\bar{h}_{\mu\nu}. \quad (\text{B.15})$$