



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.008/11

**Estrutura Algébrica de Hierarquias Integráveis e Problemas de
Valor de Contorno**

Guilherme Starvaggi França

Orientador

José Francisco Gomes

Outubro de 2011

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. José Francisco Gomes, por tudo o que me ensinou nestes últimos anos e pelas inúmeras discussões interessantes que tivemos. Hoje percebo, que muito da minha forma de resolver os problemas deve-se a sua influência, principalmente na objetividade em abordá-los. Prof. Frank, muito obrigado por sempre me receber em sua sala e esclarecer minhas dúvidas quando eu lhe solicitei. Agradeço também pela liberdade que me deu, para que eu pudesse me aventurar pelo vasto oceano dos sistemas integráveis, sabendo que se eu me perdesse, teria um farol para me ajudar a encontrar o caminho de volta.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Zimmerman, por estar sempre presente nas discussões e compartilhar suas ideias e sugestões. Prof. Zimmerman, muito obrigado por dividir seu conhecimento e pelo seu exemplo, que é uma inspiração para todos nós.

Prof. George Matsas, muito obrigado por suas palavras, que me influenciaram positivamente num momento difícil, me ajudando recuperar a motivação necessária para continuar.

Prof. Roberto Kraenkel, lhe agradeço por todas as discussões estimulantes que tivemos sobre oscilações paramétricas e a cadeia de pêndulos. Aprendi muita coisa estudando estes assuntos.

Agradeço a equipe da secretaria, Rosane, Luzinete e Meire, por serem sempre tão eficientes e prestativas. Agradeço em especial a Rosane, por ter me ajudado prontamente sempre que necessitei.

Agradeço a todos do IFT, demais professores, funcionários e estudantes. Agradeço ao CNPQ pelo suporte financeiro, sem o qual a realização deste trabalho seria impossível.

Agradeço à minha família, meus pais Luiz e Anna Gina e ao meu irmão Gustavo. Temos atravessado períodos difíceis e turbulentos, mas são nestes períodos de dificuldade onde encontramos os maiores aprendizados de vida. Também são nos momentos difíceis que o homem se revela, demonstrando o seu valor, e tenho orgulho de tudo aquilo que já superamos. Mãe, obrigado por sempre me acolher amorosamente, mesmo nos momentos que eu mesmo não me reconheço. Gu, obrigado por ser um sábio amigo e companheiro

fiel na busca por um propósito maior. Pai, muito obrigado por me dar condições para que eu pudesse estudar e chegar até aqui. Muito do que eu sou e do desenvolvimento de meus potenciais, eu devo a você. Obrigado pelo seu exemplo de persistência e determinação, é a você que dedico esta tese.

Agradeço minha avó Alice, meu tio Roberto, minha tia Irene e minha tia Suzana. Muito obrigado por todos os bons momentos que compartilhamos. Tio Roberto, obrigado pelas inúmeras conversas produtivas, numa tentativa de compreender a existência de um ponto de vista sutil e mais amplo.

Agradeço à minha tia Loredana, ao meu tio Dorival e aos meus primos Fábio, Felipe e Fabiana. Obrigado por todos os bons momentos que tivemos. Fábio, valeu por todas as corridas no Ibirapuera e por todos os momentos de descontração.

Agradeço aos meus queridos amigos, Cadu, Márcia Regina, Cintia, Mieko e Simone. Obrigado a todos vocês por fazerem parte da minha vida. Cadu e Regina, muito obrigado pelas lições de sabedoria que aprendi com vocês, muitas das quais acabo só percebendo depois. Minhas queridas amigas Cintia e Mieko, obrigado pelas conversas e pela amizade. Simone, muito obrigado pela sua forma intuitiva de me ajudar a perceber certos aspectos, e por ter me inspirado a reconhecer quem sou, quando eu mesmo já não acreditava mais em mim.

Dedicado ao meu pai, Luiz França Neto.

Resumo

Nesta tese abordamos dois problemas. O primeiro trata-se do problema de condição de contorno para hierarquias integráveis. Através do método de dressing, que foi utilizado com êxito para construir soluções do tipo sóliton com condição de contorno nula, propomos uma abordagem geral para resolver o problema com condição de contorno não nula, onde o vácuo possui uma configuração de campos não trivial. Aplicamos então este método, para as hierarquias mKdV e AKNS com condição de contorno constante. Introduzimos operadores de vértice que incorporam a condição de contorno do problema, generalizando os operadores de vértice utilizados anteriormente. Quando o vácuo tende a zero, recuperamos os resultados conhecidos com condição de contorno nula. Soluções interessantes como dark sólitons, table-top sólitons, kinks, breathers e wobbles são obtidas para todas as equações da hierarquia mKdV. Introduzimos também, uma deformação integrável da hierarquia mKdV que contém a equação de Gardner. Soluções com condição de contorno nula desta hierarquia estão relacionadas com soluções de vácuo não trivial da hierarquia mKdV.

O segundo problema consiste numa generalização da construção Lie algébrica da equação curvatura nula. A construção usual foi motivada pela estrutura dos modelos de Toda afim e é capaz de gerar as hierarquias mKdV/sinh-Gordon e AKNS/Lund-Regge. Propomos uma generalização que contém, além destas, outras hierarquias integráveis como as hierarquias de Wadati-Konno-Ichikawa (WKI) e Kaup-Newell (KN). Estas hierarquias contém modelos interessantes e alguns deles não foram suficientemente estudados, especialmente os de fluxo negativo. Mostramos que equações importantes, como a equação que descreve pulsos curtos em meios não lineares recentemente proposta por Schäfer-Wayne e o modelo bosônico de Thirring, surgem naturalmente desta construção. Além disso, esta construção abrange uma classe maior de modelos numa classificação algébrica sistemática. Mostramos que estas hierarquias estão relacionadas entre si através de transformações de gauge.

Palavras Chaves: álgebras de Kac-Moody; dressing; equações diferenciais; dinâmica não linear; problemas de valor de contorno;

Áreas do conhecimento: física matemática; sistemas integráveis; teoria de campos;

Abstract

In this thesis we approach two distinct problems. The first one deals with boundary value problems for integrable hierarchies. Through the dressing method, which was successfully employed in the construction of vanishing boundary soliton solutions, we propose an algebraic approach to solve the nonvanishing boundary value problem where the vacuum has a nontrivial field configuration. We apply the proposed method to the mKdV and AKNS hierarchies with a constant boundary value. We introduce vertex operators that takes into account the boundary condition, generalizing previous known vertex operators. When the vacuum tends to zero, we recover previous known results with vanishing boundary condition. Interesting solutions arises like dark solitons, table-top solitons, kinks, breathers and wobbles for the whole mKdV hierarchy. We also introduce an integrable deformation of the mKdV hierarchy containing the Gardner equation. Solutions of this deformed hierarchy are related with nontrivial vacuum solutions of the mKdV hierarchy.

The second problem consists in a generalization of the Lie algebraic structure of the zero curvature equation. The usual construction was motivated by affine Toda field theories and can generate the mKdV/sinh-Gordon and AKNS/Lund-Regge hierarchies. We propose a new construction that contains, besides them, other integrable hierarchies like the Wadati-Konno-Ichikawa (WKI) and Kaup-Newell (KN). We show that interesting models like the short-pulse equation recently proposed by Schäfer-Wayne and the bosonic Thirring model, arise naturally from this construction. Moreover, this construction embraces a larger class of models into a systematic algebraic classification. We show that all these hierarchies are related through gauge transformations.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Condição de curvatura nula e o método de dressing	5
2.1	Integrabilidade	5
2.2	Transformações de gauge	6
2.3	Construção de hierarquias integráveis	7
2.4	Método de dressing	9
2.5	Soluções com condição de contorno nula	11
2.6	Soluções com condição de contorno não nula	13
2.7	Sólitons com condição de contorno constante	15
2.8	Modelos que admitem um vácuo não trivial	16
3	Hierarquias integráveis	18
3.1	Hierarquia mKdV/sinh-Gordon	18
3.1.1	Fluxos de tempo positivo	19
3.1.2	Fluxos de tempo negativo	20
3.1.3	Fluxos de tempo negativo par	21
3.2	Hierarquia de Gardner	21
3.3	Hierarquia AKNS/Lund-Regge	24
3.3.1	Fluxos de tempo positivo	25
3.3.2	Fluxos de tempo negativo	26
4	Soluções do tipo sóliton com condição de contorno nula	28
4.1	Soluções da hierarquia mKdV/sinh-Gordon	28

4.2	Soluções da hierarquia AKNS/Lund-Regge	30
5	Soluções do tipo sóliton com condição de contorno não nula	34
5.1	Soluções das hierarquias mKdV e de Gardner	34
5.1.1	Breathers e wobblers	39
5.2	Soluções para a hierarquia AKNS	42
6	Construção generalizada de hierarquias integráveis	47
6.1	Segunda construção $(p, q) = (1, 1)$	48
6.2	Terceira construção $(p, q) = (2, 1)$	50
6.3	Hierarquia de Wadati-Konno-Ichikawa	50
6.3.1	Fluxos de tempo positivo	51
6.3.2	Fluxos de tempo negativo	53
6.3.3	A equação de pulso curto	55
6.4	Hierarquia de Kaup-Newell	55
6.4.1	Fluxos de tempo positivo	56
6.4.2	Fluxos de tempo negativo	57
6.4.3	Modelo de Thirring bosônico	58
7	Transformações de gauge entre hierarquias integráveis	60
7.1	Relação entre WKI e AKNS	60
7.1.1	Transformação de Bäcklund recíproca	61
7.2	Relação entre KN e AKNS	64
7.3	Miura como uma transformação de gauge	65
8	Conclusões e perspectivas	66
A	Álgebras de Lie	68
A.1	Álgebras de Lie semi-simples	68
A.2	Álgebras de Kac-Moody	72
A.3	Operadores de gradação	75
A.4	Álgebra \hat{sl}_2	76

Capítulo 1

Introdução

A maioria dos fenômenos físicos são descritos por equações diferenciais não lineares. Por outro lado, o estudo de sistemas não lineares geralmente é feito de forma perturbativa, mantendo os termos lineares dominantes, ou através de cálculos numéricos. Obviamente isso é feito porque não está disponível um ferramental matemático suficientemente poderoso e ao mesmo tempo simples, para que estes problemas possam ser abordados de forma exata.

Contudo, existe uma classe de modelos muito especiais dentro da dinâmica não linear que são os sistemas completamente integráveis. Estes sistemas, usualmente em 1+1 dimensões, embora já temos avanços consideráveis em sistemas integráveis de 2+1 e alguns modelos em 3+1 dimensões, são descritos por equações diferenciais parciais não lineares que podem ser resolvidas exatamente. A teoria de sistemas integráveis em 1+1 dimensões avançou significativamente desde a introdução do método de espalhamento inverso, que é uma das maiores realizações em física matemática dos últimos 40 anos. Isso permitiu que importantes conexões com teorias matemáticas belíssimas fossem reveladas, como álgebras de Kac-Moody, geometria algébrica, algumas conexões ainda misteriosas com teoria de números, funções Theta, o problema de fatorização de Riemann-Hilbert, dentre outras. Esses modelos possuem infinitas quantidades conservadas e suas soluções são chamadas de sólitons, que não possuem análogo para equações lineares. Apesar de ser uma onda, o sóliton tem comportamento corpuscular de energia localizada e interage elasticamente.

Do ponto de vista matemático, sistemas integráveis são interessantíssimos. Além

disso, eles ocorrem no mundo real em diversas áreas da física como em ótica não linear, física de plasmas, dinâmica de fluidos e condensados de Bose-Einstein. Modelos integráveis também surgem frequentemente em estudos teóricos de teorias de campo conforme, mecânica estatística e teoria de cordas.

Nesta tese, vamos tratar de sistemas integráveis clássicos em 1+1 dimensões, com uma formulação Lie algébrica de dimensão infinita que são as álgebras de Kac-Moody. Em [1, 2] foi proposto um método sistemático para construir hierarquias integráveis, que constitui uma classe de modelos não lineares obtidos através de uma estrutura algébrica bem definida. Além de propor um método para construir modelos, obtendo o par de Lax explicitamente, a classificação algébrica é consequência imediata desta construção. Através desta estrutura algébrica, em [2, 3, 4, 5] também foi proposto um método de encontrar soluções de todas as equações diferenciais de uma hierarquia integrável. Este é o conhecido método de dressing algébrico e é uma forma de resolver o problema de fatorização de Riemann-Hilbert [4] assumindo uma decomposição de Gauss do grupo. Este método utiliza operadores de vértice [6] para obter soluções do tipo sóliton, que determina sistematicamente a forma da solução, a relação de dispersão das ondas e a interação entre soluções multi-solitônicas. Estes trabalhos constituíram um grande avanço na área de sistemas integráveis devido a sua sistematização e generalidade. Outros métodos, como o método direto de Hirota, onde é necessário um bom ansatz para que funcione adequadamente, e mesmo o espalhamento inverso, costumam ser empregados individualmente para cada modelo. O método de dressing na forma proposta nestas referências resolve toda a hierarquia de equações de forma unificada.

Estas soluções automaticamente fixam uma condição de contorno nula. Implementar condições de contorno em sistemas integráveis ainda não é um problema bem compreendido e geralmente implica em uma grande dificuldade técnica. O primeiro resultado interessante que vamos apresentar é uma generalização do método de dressing para resolver problemas com condição de contorno não nula. Isso implica em deformações nas transformações de gauge do método de dressing. Além disso, os operadores de vértice anteriores não podem mais ser utilizados por não serem autoestados dos operadores de Lax no vácuo. Para contornar este problema, introduzimos novos operadores de vértice que dependem da condição de contorno e são autoestados dos operadores de Lax no vácuo.

Conseqüentemente, a relação de dispersão dependerá da condição de contorno bem como a interação entre os sólitons. Aplicamos este método para obter soluções com condição de contorno constante da hierarquia modificada de Korteweg-de Vries (mKdV) [7], obtendo soluções do tipo dark sólitons, kinks, table-top sólitons, breathers e a solução wobble [8, 9]. Construimos uma deformação integrável da hierarquia mKdV [7] que contém a equação de Gardner, cujas soluções com condição de contorno nula estão relacionadas com soluções com condição de contorno não nula da hierarquia mKdV. Este mesmo operador de vértice foi utilizado para resolver a subclasse de equações correspondentes a fluxos negativos pares da hierarquia mKdV/sinh-Gordon, proposta em [10]. Também estudamos soluções com condição de contorno não nula da hierarquia de Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS), introduzindo operadores de vértice apropriados para este caso. Um caso particular interessante são as soluções com condição de contorno não nula para a equação não linear de Schrödinger (NLS), que foram consideradas recentemente em [11].

A construção de hierarquias integráveis proposta em [1, 2] não inclui uma grande classe de modelos integráveis conhecidos. Então, propomos uma generalização da estrutura algébrica da equação de curvatura nula e com isso, incorporamos outras hierarquias integráveis nesta classificação. Construimos a hierarquia de Wadati-Konno-Ichikawa (WKI) reobtendo modelos previamente conhecidos [12, 13]. Fluxos negativos destas hierarquias são raramente investigados, por se tratarem de equações íntegro-diferenciais mais difíceis de serem obtidas. Entretanto, investigamos o primeiro fluxo negativo da hierarquia WKI e obtemos um modelo que ainda não foi previamente estudado. Uma redução deste modelo implica na equação proposta em [14] para descrever pulsos ultra-curtos em meios não lineares, como alternativa à equação NLS com não linearidade cúbica. Também consideramos a hierarquia de Kaup-Newell (KN) [15], que se enquadra nesta construção. O modelo mais conhecido desta hierarquia é a equação DNLS (derivative NLS). Investigamos o primeiro fluxo negativo desta hierarquia e obtemos um modelo que também não foi extensamente estudado, que é o modelo modificado de Pohlmeyer-Lund-Regge [16, 17]. Mostramos que uma redução deste modelo é equivalente ao modelo de Thirring bosônico. Finalmente, mostramos como todas estas hierarquias, AKNS, WKI e KN, estão relacionadas entre si por transformações de gauge.

Organizamos nosso trabalho da seguinte forma. No capítulo 2 discutimos a condição

de curvatura nula e a construção proposta em [1, 2]. Revisamos o método de dressing proposto em [2, 3, 4, 5] e introduzimos a generalização para condição de contorno não nula. Mostramos que os modelos relativísticos das hierarquias integráveis não podem ter solução com vácuo constante. No capítulo 3, construímos a hierarquia mKdV/sinh-Gordon e propomos uma deformação integrável da hierarquia mKdV contendo a equação de Gardner. Consideramos também uma nova classe de modelos, correspondente a fluxos negativos pares da hierarquia mKdV. Construímos a hierarquia AKNS/Lund-Regge e obtemos a equação NLS apropriada para condição de contorno não nula, com vácuo constante.

No capítulo 4, apresentamos as soluções com condição de contorno nula das hierarquias mKdV/sinh-Gordon e AKNS/Lund-Regge. No capítulo 5, construímos as soluções com condição de contorno não nula destas hierarquias e discutimos em detalhe os diferentes tipos de solução obtidas.

No capítulo 6, propomos uma construção generalizada da equação de curvatura nula e consideramos diversos modelos das hierarquias WKI e KN, dentre eles, a equação de pulso curto de Schäfer-Wayne e o modelo bosônico de Thirring. No capítulo 7, discutimos como as hierarquias AKNS, WKI e KN estão relacionadas através de transformações de gauge. No capítulo 8, resumimos nossos principais resultados e indicamos potenciais generalizações.

Capítulo 2

Condição de curvatura nula e o método de dressing

Introduzimos a construção de curvatura nula proposta em [1, 2] e mostramos que o método de dressing é uma transformação de gauge, mapeando soluções conhecidas em novas soluções da equação de curvatura nula. Discutimos, resumidamente, o método de dressing para condição de contorno nula, na forma proposta por [3, 4, 5]. Propomos uma generalização do método dressing para soluções com condição de contorno não nula. Discutimos a forma das soluções solitônicas com vácuo não trivial e mostramos que nem todos os modelos das hierarquias integráveis admitem este tipo de solução.

2.1 Integrabilidade

Uma hierarquia integrável é uma estrutura matemática capaz de gerar infinitas equações diferenciais parciais, não lineares e integráveis. Existem várias abordagens para se definir o que é integrabilidade [18]. Considere um modelo bidimensional contendo n campos $u(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$. Consideramos que integrabilidade, significa que o modelo pode ser reduzido à compatibilidade de um sistema linear

$$\begin{aligned}(\partial_x + U[u])\Psi &= 0, \\(\partial_t + V[u])\Psi &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde Ψ é elemento de um grupo e os operadores U e V pertencem a álgebra de Lie deste grupo. Estes operadores também são conhecidos como par de Lax. Eles dependem dos campos, suas derivadas e possivelmente integrais, como coeficientes lineares dos geradores da álgebra. Portanto, U e V são funcionais dos campos e denotamos esta dependência na forma $U = U[u] = U(u, u_x, u_{xx}, \dots, \int u dx, \dots)$ e analogamente $V = V[u]$. A condição de integrabilidade $\Psi_{xt} = \Psi_{tx}$, implica na equação de curvatura nula

$$[\partial_x + U[u], \partial_t + V[u]] = 0. \quad (2.2)$$

Portanto, se existirem operadores U e V tais que (2.2) reproduza as equações de movimento para os campos $u(x, t)$, o modelo em questão é integrável.

Encontrar operadores que resolvam a equação de curvatura nula, gerando modelos interessantes, não é um problema trivial. Mostraremos uma construção sistemática onde este problema é resolvido e modelos fisicamente relevantes são obtidos. Atualmente, não existe nenhum método para resolver o problema inverso. Dada uma equação diferencial, construir sua representação de curvatura nula ou afirmar que tal representação existe. O fato do modelo ser integrável, significa que a solução existe, mas não garante que será possível integrar as equações de movimento explicitamente. Mostraremos como obter soluções explícitas de um modelo que obedeça a equação de curvatura nula, através do método de dressing. A equação de curvatura nula também implica na existência de infinitas quantidades conservadas, característica que torna o sistema muito especial. As soluções usuais destes modelos receberam o nome de sólitons devido a suas características corpusculares de energia localizada e interação elástica, consequência do alto grau de simetria.

2.2 Transformações de gauge

A equação de curvatura nula é invariante por transformações de gauge. Seja $\tilde{\Psi} = g\Psi$, onde $g = g(x, t)$ é elemento de um grupo de transformações. Derivando $\tilde{\Psi}$ obtemos

$$\begin{aligned} (\partial_x + \tilde{U})\tilde{\Psi} &= 0 & \text{onde} & & \tilde{U} &\equiv gUg^{-1} - g_xg^{-1}, \\ (\partial_t + \tilde{V})\tilde{\Psi} &= 0 & \text{onde} & & \tilde{V} &\equiv gBg^{-1} - g_tg^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A condição de integrabilidade deste novo sistema implica em

$$[\partial_x + \tilde{U}, \partial_t + \tilde{V}] = 0, \quad (2.4)$$

mostrando que as transformações de gauge (2.3) preservam a equação de curvatura nula. Note que esta equação é válida no mesmo espaço de coordenadas (x, t) que a equação original (2.2).

2.3 Construção de hierarquias integráveis

Um dos problemas na área de sistemas integráveis, além da construção de modelos, é a sua classificação. Utilizando álgebras de Kac-Moody¹, nos trabalhos [1, 2] foi proposta uma forma de resolver ambos os problemas introduzindo uma construção geral para hierarquias integráveis, ou seja, uma classe de equações diferenciais obtidas através da mesma estrutura algébrica. Assim, a classificação é imediata. Esta construção de hierarquias integráveis foi subdividida em duas estruturas, correspondentes a fluxos de tempo positivo e negativo. Em [19] considerou-se ambas as estruturas de forma unificada gerando modelos mistos, onde uma equação de tempo positivo se combina com uma equação de tempo negativo, dentro da mesma hierarquia. A diferença essencial é que para fluxos positivos as equações são diferenciais, enquanto para fluxos negativos as equações são íntegro-diferenciais. Em alguns casos, as equações de fluxo negativo podem ser transformadas numa forma local através de transformações dos campos.

Seja $\widehat{\mathcal{G}}$ uma álgebra de Kac-Moody semi-simples e Q um operador de gradação que decompõe a álgebra em subespaços graduados,

$$\widehat{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{G}}^{(n)} \quad \text{onde} \quad [Q, \widehat{\mathcal{G}}^{(n)}] = n\widehat{\mathcal{G}}^{(n)}, \quad [\widehat{\mathcal{G}}^{(n)}, \widehat{\mathcal{G}}^{(m)}] \subset \widehat{\mathcal{G}}^{(n+m)}. \quad (2.5)$$

Seja $E^{(1)} \in \widehat{\mathcal{G}}^{(1)}$ um elemento semi-simples constante, ou seja, que não depende de x e t . Definimos os subespaços chamados kernel e image

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\equiv \{X \in \widehat{\mathcal{G}} \mid [E^{(1)}, X] = 0\}, \\ \mathcal{M} &\equiv \{X \in \widehat{\mathcal{G}} \mid \exists Y \in \widehat{\mathcal{G}} \text{ tal que } X = [E^{(1)}, Y]\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹Veja o Apêndice A para os conceitos algébricos envolvidos.

respectivamente. É possível mostrar que $\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$. Destas definições e da identidade de Jacobi segue que

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}. \quad (2.7)$$

Além disso, assumimos a estrutura de espaço simétrica

$$[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{K}. \quad (2.8)$$

Seja $A^{(0)} \in \mathcal{M}^{(0)}$ o operador que contém os campos da teoria, como coeficientes de uma combinação linear de geradores de grau zero em \mathcal{M} . Denotando a base do subespaço $\mathcal{M}^{(0)}$ por $\{T_i^{(0)}, \dots, T_n^{(0)}\}$, temos $A^{(0)}[u] = u_1 T_1^{(0)} + \dots + u_n T_n^{(0)}$. Portanto, o número de campos do modelo corresponde a dimensão do subespaço $\mathcal{M}^{(0)}$, que é finita. Definimos o par de Lax por [1]

$$U[u] \equiv E^{(1)} + A^{(0)}[u], \quad (2.9a)$$

$$V[u] \equiv \sum_{i=-m}^n D^{(i)}[u] = D^{(n)} + \dots + D^{(0)} + \dots + D^{(-m)}, \quad (2.9b)$$

onde $D^{(i)} \in \widehat{\mathcal{G}}^{(i)}$ e n, m são dois inteiros positivos arbitrários. Com os operadores na forma (2.9), podemos resolver a equação de curvatura nula (2.2) recursivamente em graus, começando do mais alto até o mais baixo. A equação correspondente a cada grau se decompõe ainda em componentes \mathcal{K} e \mathcal{M} , $D^{(i)} = D_{\mathcal{K}}^{(i)} + D_{\mathcal{M}}^{(i)}$, permitindo determinar todos os operadores $D^{(i)}$ em função dos campos $u = (u_1, \dots, u_n)$. A projeção da equação de curvatura nula no subespaço $\mathcal{M}^{(0)}$ gera as equações de movimento do modelo. Explicitamente, esta decomposição em graus fornece o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} [E^{(1)}, D^{(n)}] &= 0 & \text{grau } n+1 \\ \partial_x D^{(n)} + [E^{(1)}, D^{(n-1)}] + [A^{(0)}, D^{(n)}] &= 0 & \text{grau } n \\ & \vdots & \\ \partial_x D^{(1)} + [E^{(1)}, D^{(0)}] + [A^{(0)}, D^{(1)}] &= 0 & \text{grau } 1 \\ \partial_x D^{(0)} - \partial_t A^{(0)} + [E^{(1)}, D^{(-1)}] + [A^{(0)}, D^{(0)}] &= 0 & \text{grau } 0 \\ \partial_x D^{(-1)} + [E^{(1)}, D^{(-2)}] + [A^{(0)}, D^{(-1)}] &= 0 & \text{grau } -1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\partial_x D^{(-m+1)} + [E^{(1)}, D^{(-m)}] + [A^{(0)}, D^{(-m+1)}] &= 0 \quad \text{grau } -m + 1 \\
\partial_x D^{(-m)} + [A^{(0)}, D^{(-m)}] &= 0 \quad \text{grau } -m
\end{aligned}$$

onde a equação de movimento é dada por

$$\partial_x D_{\mathcal{M}}^{(0)} - \partial_t A^{(0)} + [E^{(1)}, D_{\mathcal{M}}^{(-1)}] + [A^{(0)}, D_{\mathcal{K}}^{(0)}] = 0. \quad (2.11)$$

Se considerarmos fluxos de tempo positivo da hierarquia, envolvendo somente operadores de grau positivo em (2.9b), $V = \sum_{i=0}^n D^{(i)}$, temos a equação de movimento

$$\partial_x D_{\mathcal{M}}^{(0)} - \partial_t A^{(0)} + [A^{(0)}, D_{\mathcal{K}}^{(0)}] = 0. \quad (2.12)$$

Para fluxos de tempo negativo, envolvendo somente operadores de grau negativo, $V = \sum_{i=-1}^{-m} D^{(i)}$, temos a equação de movimento dada por

$$\partial_t A^{(0)} - [E^{(1)}, D_{\mathcal{M}}^{(-1)}] = 0. \quad (2.13)$$

É importante observar que na construção proposta acima, não incluímos o termo central nem o operador derivada espectral em (2.9a), o que corresponde a utilizar somente a loop-álgebra. É possível incluir campos nestas componentes, porém, os campos de interesse físico aparecem associados aos outros operadores.

A equação de movimento (2.11) contém um modelo misto [19], combinando uma equação de tempo positivo n com uma equação de tempo negativo m . Note que, depois de definida a estrutura algébrica, para cada escolha de inteiros n e m em (2.9b), obtemos um modelo integrável, portanto, a construção (2.9) define uma hierarquia integrável contendo infinitas equações diferenciais. A classificação de cada modelo é automaticamente dada através de $\{\widehat{\mathcal{G}}, Q, E^{(1)}, n, m\}$. É possível mostrar que o primeiro fluxo negativo, $m = 1$ com equação de movimento na forma (2.13), corresponde a um modelo relativístico equivalente a uma redução hamiltoniana do modelo Wess-Zumino-Novikov-Witten [20].

2.4 Método de dressing

Mostraremos agora como encontrar soluções de todos os modelos contidos numa hierarquia integrável, através do método algébrico de dressing, proposto em [3, 4, 5, 6]. Dmons-

tramos que o método de dressing é uma transformação de gauge, portanto, preserva a equação de curvatura nula, mapeando uma solução conhecida em uma nova solução.

Suponha uma solução conhecida da equação de curvatura nula (2.1), denominada vácuo, contendo uma configuração de campos $u_0 = (u_{10}, \dots, u_{n0})$ onde $u_{i0} = u_{i0}(x, t)$. De (2.1) temos

$$U_0[u_0] = -\partial_x \Psi_0 \Psi_0^{-1}, \quad V_0[u_0] = -\partial_t \Psi_0 \Psi_0^{-1}. \quad (2.14)$$

Considere o problema matricial de Riemann-Hilbert [4] para o operador definido por

$$\Theta(x, t) \equiv \Psi_0 g \Psi_0^{-1}, \quad (2.15)$$

onde g é um elemento de grupo constante. Derivando esta expressão obtemos

$$\partial_x \Theta = [\Theta, U_0], \quad \partial_t \Theta = [\Theta, V_0]. \quad (2.16)$$

Assuma uma decomposição de Gauss do grupo

$$\Theta = \Theta_-^{-1} \Theta_+ \quad (2.17)$$

onde Θ_- e Θ_+ possuem somente geradores de grau negativo e positivo, respectivamente,

$$\Theta_- = \exp(X^{(-1)}) \exp(X^{(-2)}) \dots, \quad \Theta_+ = \exp(X^{(0)}) \exp(X^{(1)}) \dots, \quad (2.18)$$

onde $X^{(i)} \in \widehat{\mathcal{G}}^{(i)}$. Derivando (2.17) em relação a x e usando (2.16), obtemos a igualdade

$$\Theta_-^{-1} \partial_x \Theta_+ - \Theta_-^{-1} \partial_x \Theta_- \Theta_-^{-1} \Theta_+ = [\Theta_-^{-1} \Theta_+, U_0]. \quad (2.19)$$

Conjugando esta expressão na forma $\Theta_- (\dots) \Theta_+^{-1}$ e reordenando os termos, obtemos duas transformações de gauge — veja (2.3) — dadas por

$$\Theta_+ U_0 \Theta_+^{-1} - \partial_x \Theta_+ \Theta_+^{-1} = \Theta_- U_0 \Theta_-^{-1} - \partial_x \Theta_- \Theta_-^{-1} \equiv U, \quad (2.20)$$

onde definimos o operador U . Analogamente, derivando (2.17) em relação a t , obtemos duas transformações de gauge

$$\Theta_+ V_0 \Theta_+^{-1} - \partial_t \Theta_+ \Theta_+^{-1} = \Theta_- V_0 \Theta_-^{-1} - \partial_t \Theta_- \Theta_-^{-1} \equiv V. \quad (2.21)$$

Definindo $\Psi \equiv \Theta_+ \Psi_0$, ou equivalentemente $\Psi \equiv \Theta_- \Psi_0$, obtemos o sistema linear

$$(\partial_x + U)\Psi = 0, \quad (\partial_t + V)\Psi = 0. \quad (2.22)$$

A condição de integrabilidade deste sistema implica na equação de curvatura nula para os novos operadores U e V .

Mostramos portanto, que a solução do problema de Riemann-Hilbert

$$\Theta_-^{-1}\Theta_+ = \Psi_0 g \Psi_0^{-1} \quad (2.23)$$

implica que, uma solução conhecida da equação de curvatura nula, U_0 e V_0 , pode ser usada para construir novas soluções aplicando os operadores de dressing Θ_{\pm} , através das transformações de gauge

$$U = \Theta_{\pm} U_0 \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_x \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (2.24a)$$

$$V = \Theta_{\pm} V_0 \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_t \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1}. \quad (2.24b)$$

O procedimento para encontrar soluções para os campos u a partir dos campos no vácuo u_0 funciona da seguinte forma. Substituímos o operador (2.9a) e o operador U_0 do vácuo na transformação de gauge (2.24a) com Θ_+ . Como os campos estão em $A^{(0)}[u] \in \mathcal{M}^{(0)} \subset \widehat{\mathcal{G}}^{(0)}$, projetamos a equação em $\widehat{\mathcal{G}}^{(0)}$, o que fornecerá uma relação entre u , u_0 e funções associadas aos geradores de $e^{X^{(0)}}$ — veja (2.18). As funções contidas em $e^{X^{(0)}}$ são determinadas projetando (2.23) entre estados de peso mais alto, aniquilados por todos os geradores de grau positivo. Isto define as conhecidas funções tau. É importante notar que as soluções são classificadas de acordo com as escolhas do vácuo u_0 e do elemento de grupo g .

A loop álgebra não possui representação de peso mais alto, entretanto, a álgebra de Kac-Moody contendo o termo central, possui representação de peso mais alto. Portanto, no método de dressing é necessário levar em conta o termo central na relação (2.24a).

2.5 Soluções com condição de contorno nula

O método de dressing discutido na seção anterior é geral. A única condição assumida foi uma solução conhecida, denominada vácuo. Suponha agora que o vácuo tenha uma configuração onde todos os campos são nulos, $(u_1, \dots, u_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$ e portanto $A^{(0)} \rightarrow 0$. Com isso, (2.9a) implica que $U_0 = E^{(1)}$. Fazendo os campos nulos em (2.9b) e analisando

os sistema (2.10), vemos que $V_0 = D_{\mathcal{K}}^{(n)} + D_{\mathcal{K}}^{(-m)}$. Esta é certamente a solução mais simples possível da equação de curvatura nula.

Levando em conta a extensão central da álgebra de Kac-Moody, devemos adicionar uma componente no operador (2.9a). Note que, como o termo central comuta com todos os operadores, isto não altera a construção dos modelos. Denotando esta componente convenientemente por $-\nu_x \hat{c}$, a transformação de gauge (2.24a) envolvendo Θ_+ fica

$$E^{(1)} + A^{(0)}[u] - \nu_x \hat{c} = \Theta_+ E^{(1)} \Theta_+^{-1} - \partial_x \Theta_+ \Theta_+^{-1}, \quad (2.25)$$

onde ν é uma função que será determinada.

Seja B um elemento de grupo formado somente por geradores de $\widehat{\mathcal{G}}^{(0)}$, tal que o operador contendo os campos tenha a forma puro gauge

$$A^{(0)}[u] = -B_x B^{-1}. \quad (2.26)$$

Devido a decomposição de Gauss (2.17), a equação (2.25) deve ser válida para cada grau. Escolhendo somente a contribuição dos termos de grau zero obtemos

$$A^{(0)}[u] - \nu_x \hat{c} = -\partial_x \exp(X^{(0)}) \exp(-X^{(0)}). \quad (2.27)$$

Utilizando (2.26) concluímos que

$$\exp(X^{(0)})[u] = B[u] \exp(\nu \hat{c}). \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) no lado esquerdo de (2.23) e projetando a equação entre os estados de peso mais alto², obtemos

$$\langle \mu_0 | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \mu_0 \rangle = e^\nu, \quad \langle \mu_k | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \mu_l \rangle = \langle \mu_k | B[u] | \mu_l \rangle e^\nu, \quad (2.29)$$

onde $|\mu_0\rangle$ é o estado fundamental, aniquilado por todos os operadores exceto \hat{c} . Os estados genéricos $|\mu_k\rangle$ e $|\mu_l\rangle$ são aniquilados por todos os operadores de grau maior que zero, $X^{(i)}|\mu_k\rangle = 0$, $i > 0$. Considerando o lado direito de (2.23), definimos as funções tau

$$\tau_{00}(x, t) \equiv \langle \mu_0 | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_0 \rangle, \quad \tau_{kl}(x, t) \equiv \langle \mu_k | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_l \rangle, \quad (2.30)$$

²Veja o Apêndice A.

onde Ψ_0 é obtido integrando (2.14), que neste caso é dado por

$$\Psi_0 = \exp \left\{ -E^{(1)}x - (D_{\mathcal{K}}^{(n)} + D_{\mathcal{K}}^{(-m)})t \right\}. \quad (2.31)$$

As funções tau são calculadas algebricamente pois Ψ_0 é conhecido e o elemento de grupo g é supostamente dado. Substituindo (2.30) em (2.29), a solução dos modelos está implicitamente contida na expressão

$$\langle \mu_k | B[u] | \mu_l \rangle = \frac{\tau_{kl}}{\tau_{00}}. \quad (2.32)$$

É necessário escolher estados apropriados para extrair os campos associados a cada operador de B . Como um simples exemplo ilustrativo, suponha o caso abeliano de um único operador em $\mathcal{M}^{(0)}$, $A^{(0)} = u_1 T_1^{(0)}$ e B tem a forma

$$B = \exp \left(\phi_1 T_1^{(0)} \right). \quad (2.33)$$

De (2.26) concluímos que $u_1 = -\partial_x \phi_1$. Considere o estado $|\mu_1\rangle$, não aniquilado somente por $T_1^{(0)}$ e \hat{c} . Então, de (2.32) obtemos a solução

$$u_1 = -\partial_x \phi_1, \quad \phi_1 = \ln \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}} = \ln \frac{\langle \mu_1 | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_1 \rangle}{\langle \mu_0 | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_0 \rangle}. \quad (2.34)$$

Note que para obter uma solução explícita, é necessário ter uma forma definida para g . No caso de vácuo zero, g na forma de exponenciais de operadores de vértice foi proposta, para construir soluções solitônicas, por Babelon e Bernard [4] e as propriedades algébricas discutidas por Olive et al. [6]. Na próxima seção, vamos discutir como o método de dressing pode ser generalizado, utilizando operadores de vértice apropriados para condição de contorno não nula, contendo o caso de vácuo zero como caso particular.

2.6 Soluções com condição de contorno não nula

Vamos agora considerar o método de dressing para condições de contorno mais gerais [32]. Começamos assumindo um vácuo qualquer e depois especificamos para o caso onde os campos assumem um valor constante e diferente de zero.

Assuma que o vácuo tenha campos quaisquer, $u_0 = (u_{10}, \dots, u_{n0})$ onde $u_{i0} = u_{i0}(x, t)$ e assim $A^{(0)}[u] \rightarrow A_0^{(0)}[u_0]$. Neste caso, (2.9a) implica no operador $U_0(x, t) = E^{(1)} + A_0^{(0)}[u_0]$.

A transformação (2.24a) para Θ_+ , projetada em grau zero, fornece uma expressão mais geral que (2.28) contendo o vácuo explicitamente

$$A^{(0)}[u] - \nu_x \hat{c} = \exp(X^{(0)}) A_0^{(0)}[u_0] \exp(-X^{(0)}) - \partial_x \exp(X^{(0)}) \exp(-X^{(0)}). \quad (2.35)$$

Assumindo a forma

$$\exp(X^{(0)}) = B \exp(\nu \hat{c}) \quad (2.36)$$

e substituindo em (2.35), relacionamos os campos físicos do modelo contidos em $A^{(0)}[u]$ com as funções associadas a geradores de grau zero em B e os campos no vácuo u_0 . Esta relação é dada por

$$A^{(0)}[u] = B A_0^{(0)}[u_0] B^{-1} - B_x B^{-1}. \quad (2.37)$$

Observe que quando $A_0^{(0)}[u_0] \rightarrow 0$, recuperamos o caso de vácuo zero (2.26). A relação (2.37) é válida para qualquer condição de contorno.

Devido à escolha (2.36), que é a mesma de (2.28), as funções em B continuam sendo dadas implicitamente por

$$\langle \mu_k | B[u] | \mu_l \rangle = \frac{\tau_{kl}}{\tau_{00}} = \frac{\langle \mu_k | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_l \rangle}{\langle \mu_0 | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_0 \rangle}, \quad (2.38)$$

porém, com uma diferença fundamental. O vácuo é diferente, então Ψ_0 em (2.38) tem outra estrutura em relação (2.31). Note que, para obter Ψ_0 é necessário integrar o sistema linear (2.14). No caso geral onde U_0, V_0 dependem de x e t isso pode ser um problema complicado. No caso de um vácuo constante isso é trivial, pois $[U_0, V_0] = 0$, e portanto

$$\Psi_0 = \exp(-U_0 x - V_0 t). \quad (2.39)$$

Como um exemplo ilustrativo, considere o caso abeliano de um único operador em $\mathcal{M}^{(0)}$, $A^{(0)} = u_1 T_1^{(0)}$, $A_0^{(0)} = u_{10} T_1^{(0)}$ e $B = \exp(\phi_1 T_1^{(0)})$. Substituindo em (2.37) obtemos

$$u_1 = u_{10}(x, t) - \partial_x \phi_1 \quad \text{onde} \quad \phi_1 = \ln \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}}. \quad (2.40)$$

Observe que, se $u_{10} \rightarrow 0$, recuperamos a solução com condição de contorno nula (2.34).

2.7 Sólitos com condição de contorno constante

Consideramos uma forma para g onde as funções tau podem ser explicitamente calculadas. Soluções do tipo sóliton são obtidas escolhendo g na forma [6]

$$g = \prod_{i=1}^N \exp(F_i), \quad (2.41)$$

onde F_i é um operador de vértice. Suponha que F_i seja um autoestado simultâneo dos operadores de vácuo, i.e.

$$[U_0[u_0], F_i] = -\kappa_i(u_0)F_i, \quad [V_0[u_0], F_i] = -\omega_i(u_0)F_i. \quad (2.42)$$

Portanto,

$$[U_0x + V_0t, F_i] = -\eta_i(x, t; u_0)F_i \quad \text{onde} \quad \eta_i \equiv \kappa_i(u_0)x + \omega_i(u_0)t. \quad (2.43)$$

A função η_i contém a dependência espaço-temporal da solução, também conhecida como relação de dispersão. Além do vértice ser autoestado simultâneo destes dois operadores, para um dado modelo da hierarquia, ele será autoestado de qualquer outro V_0 correspondente a outro fluxo temporal. Isto decorre diretamente da construção (2.9), pois fluxos de diferentes tempos comutam. Além disso, note que U_0 e V_0 contém a condição de contorno corresponde a uma configuração de campos constante, o que sugere que o operador de vértice também pode ter uma dependência no vácuo para que (2.42) seja válida. A relação de dispersão (2.43) depende, portanto, da condição de contorno do problema u_0 .

Para calcular explicitamente as funções tau em (2.38), utilizamos (2.39) e a escolha (2.41), obtendo

$$\Psi_0 g \Psi_0^{-1} = \prod_{i=1}^N \exp(\Psi_0 F_i \Psi_0^{-1}) = \prod_{i=1}^N \exp(e^{\eta_i} F_i) \quad (2.44)$$

onde utilizamos a conhecida expansão $e^x y e^{-x} = y + [x, y] + \frac{1}{2!}[x, [x, y]] + \dots$ junto com a relação de dispersão (2.43). Tomando (2.44) entre os estados de peso mais alto e usando a propriedade de nilpotência dos operadores de vértice [6] entre os estados, i.e. $\langle \mu_k | F_i^n | \mu_l \rangle = 0$ para $n \geq 2$, obtemos

$$\tau_{kl} = \langle \mu_k | \prod_{i=1}^N \exp(e^{\eta_i} F_i) | \mu_l \rangle = \langle \mu_k | \prod_{i=1}^N (1 + e^{\eta_i} F_i) | \mu_l \rangle. \quad (2.45)$$

Expandindo explicitamente esta expressão,

$$\begin{aligned}\tau_{kl} &= \delta_{kl} + a_1 e^{\eta_1} + a_2 e^{\eta_2} + a_3 e^{\eta_3} + \dots \\ &+ a_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} + a_{13} e^{\eta_1 + \eta_3} + a_{23} e^{\eta_2 + \eta_3} + \dots \\ &+ a_{123} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} + \dots\end{aligned}\tag{2.46}$$

onde os elementos de matriz são dados por (lembrando que $F_i = F_i[u_0]$)

$$a_i[u_0] = \langle \mu_k | F_i | \mu_l \rangle, \quad a_{ij}[u_0] = \langle \mu_k | F_i F_j | \mu_l \rangle, \quad a_{ijk}[u_0] = \langle \mu_k | F_i F_j F_k | \mu_l \rangle, \quad \dots\tag{2.47}$$

Esta solução, consequência da escolha (2.41), é a forma das soluções do tipo sóliton. Esta forma vale tanto para condição de contorno constante quanto para condição de contorno nula, porém, note que os campos no vácuo u_0 aparecem na relação de dispersão (2.43) bem como nos elementos de matriz (2.47). Quando $u_0 \rightarrow (0, \dots, 0)$ devemos recuperar os resultados conhecidos com condição de contorno nula.

O número de vértices determina o número de sólitons. O ponto chave do método, consiste em obter operadores de vértice que satisfaçam (2.42). No caso de condição de contorno nula, estes operadores de vértice foram propostos em [3, 6]. No caso de condição de contorno constante, iremos introduzir operadores de vértice apropriados para as hierarquias mKdV e AKNS utilizando a álgebra $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{sl}_2$.

2.8 Modelos que admitem um vácuo não trivial

O vácuo corresponde a tomar um valor constante nos campos $u \rightarrow u_0 = (u_{10}, \dots, u_{n0})$ onde $u_{i0} = \text{const.} \neq 0$, de forma que o par de Lax (2.9) fica

$$U_0[u_0] = E^{(1)} + A_0^{(0)}[u_0],\tag{2.48a}$$

$$V_0[u_0] = D_0^{(n)} + D_0^{(n-1)} + \dots + D_0^{(0)} + D_0^{(-1)} + \dots + D_0^{(-m+1)} + D_0^{(-m)}.\tag{2.48b}$$

O vácuo deve ser solução da equação de curvatura nula $[U_0, V_0] = 0$. Observe que (2.48a) possui dois operadores defasados de um grau, na forma $U_0 = \mathcal{K}^{(1)} + \mathcal{M}^{(0)} \equiv \Omega^{(1)}$. Se V_0 for uma combinação linear de operadores defasados de um grau na forma $\Omega^{(j)} \equiv \mathcal{K}^{(j)} + \mathcal{M}^{(j-1)} = \lambda^{j-1} \Omega^{(1)}$, onde λ é o parâmetro espectral da loop-álgebra, então o vácuo será solução da equação de curvatura nula. Esta estrutura é possível, em princípio, para

todos os modelos da hierarquia por possuírem dois ou mais operadores em V , exceto o caso $m = 1$ da parte negativa da hierarquia, que possui somente um operador $V = D^{(-1)}$. Concluimos portanto, que o modelo relativístico de cada hierarquia integrável na forma (2.9), como por exemplo os modelos de sinh-Gordon e Lund-Regge, não possuem solução com condição de contorno correspondente a um vácuo constante.

Capítulo 3

Hierarquias integráveis

Utilizamos a construção algébrica do capítulo anterior para derivar os principais modelos das hierarquias mKdV/sinh-Gordon e AKNS/Lund-Regge. Mostramos que os fluxos negativos da hierarquia mKdV/sinh-Gordon possuem uma subclasse interessante de equações, correspondente a graus pares [10]. Estas equações não possuem solução com condição de contorno nula, ao contrário dos demais modelos da hierarquia. Construimos também uma deformação integrável da hierarquia mKdV que contém a equação de Gardner [7].

3.1 Hierarquia mKdV/sinh-Gordon

Considere $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{sl}_2$ e o operador de gradação principal $Q = \frac{1}{2}H^{(0)} + 2\widehat{d}$, que decompõe a álgebra da seguinte forma

$$\widehat{\mathcal{G}}^{(2j)} = \{H^{(j)}\}, \quad \widehat{\mathcal{G}}^{(2j+1)} = \{E_{\alpha}^{(j)}, E_{-\alpha}^{(j+1)}\}, \quad \widehat{\mathcal{G}}^{(0)} = \{H^{(0)}\}. \quad (3.1)$$

Escolhendo $E^{(1)} = E_{\alpha}^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}$ obtemos

$$\mathcal{K} = \{E_{\alpha}^{(j)} + E_{-\alpha}^{(j+1)}\}, \quad \mathcal{M} = \{E_{\alpha}^{(j)} - E_{-\alpha}^{(j+1)}, H^{(j)}\}. \quad (3.2)$$

O único operador em $\mathcal{M}^{(0)}$ é $H^{(0)}$, portanto, os modelos desta hierarquia possuem somente um campo, $A^{(0)} = vH^{(0)}$ onde $v = v(x, t)$. Devido a (3.1), definimos $D^{(2j)} = a_j H^{(j)}$ e $D^{(2j+1)} = b_j E_{\alpha}^{(j)} + c_j E_{-\alpha}^{(j+1)}$, onde os coeficientes a_j , b_j e c_j são funções determinadas em termos do campo v , resolvendo a equação de curvatura nula recursivamente em graus como mostrado em (2.10).

3.1.1 Fluxos de tempo positivo

Considerando somente operadores de grau positivo em (2.9b), temos a representação de curvatura nula para a hierarquia mKdV correspondente a fluxos de tempo positivo

$$[\partial_x + E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + vH^{(0)}, \partial_t + D^{(n)} + D^{(n-1)} + \dots + D^{(0)}] = 0. \quad (3.3)$$

A equação de movimento para cada modelo é dada na forma (2.12). A projeção de (3.3) no subespaço de grau $n+1$ — veja a primeira equação de (2.10) — implica que $D^{(n)} \in \mathcal{K}$, i.e. $n = 2j + 1$ devido a gradação (3.1) e (3.2). Isso mostra que só temos equações associadas a n ímpar.

Resolvendo (3.3) para $n = 3$, obtemos a conhecida equação mKdV que dá nome a parte positiva da hierarquia

$$4v_t = v_{3x} - 6v^2v_x. \quad (3.4)$$

O par de Lax associado a esta equação é dado por

$$\begin{aligned} U &= E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + vH^{(0)}, \\ V &= E_\alpha^{(1)} + E_{-\alpha}^{(2)} + vH^{(1)} + \frac{1}{2}(v_x - v^2)E_\alpha^{(0)} - \\ &\quad - \frac{1}{2}(v_x + v^2)E_\alpha^{(1)} + \frac{1}{4}(v_{xx} - 2v^3)H^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Resolvendo para $n = 5$, obtemos a equação modificada de Sawada-Kotera

$$16v_t = v_{5x} - 10v^2v_{3x} - 40vv_xv_{2x} - 10v_x^3 + 30v^4v_x, \quad (3.6)$$

cujo par de Lax é dado por

$$\begin{aligned} U &= E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + vH^{(0)}, \\ V &= E_\alpha^{(2)} + E_{-\alpha}^{(3)} + vH^{(2)} + \frac{1}{2}(v_x - v^2)E_\alpha^{(1)} - \\ &\quad - \frac{1}{2}(v_x + v^2)E_\alpha^{(2)} + \frac{1}{4}(v_{xx} - 2v^3)H^{(1)} + \\ &\quad + \frac{1}{8}(v_{xxx} - 6v^2v_x - 2vv_{xx} + v_x^2 + 3v^4)E_\alpha^{(0)} - \\ &\quad - \frac{1}{8}(v_{xxx} - 6v^2v_x + 2vv_{xx} - v_x^2 - 3v^4)E_\alpha^{(1)} + \\ &\quad + \frac{1}{16}(v_{xxxx} - 10v^2v_{xx} + 10vv_x^2 + 6v^5)H^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Equações de ordem mais alta podem ser obtidas escolhendo $n = 7, 9, \dots$ em (3.3).

3.1.2 Fluxos de tempo negativo

A parte negativa da hierarquia é gerada pela equação

$$[\partial_x + E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + vH^{(0)}, \partial_t + D^{(-m)} + D^{(-m+1)} + \dots + D^{(-1)}] = 0, \quad (3.8)$$

onde a projeção em grau zero fornece a equação de movimento (2.13). O caso $m = 1$ corresponde ao modelo relativístico de sinh-Gordon

$$\phi_{xt} = 2 \sinh 2\phi, \quad v = -\phi_x. \quad (3.9)$$

Note que ϕ é a função associada ao gerador de grau zero em (2.26), $B = \exp(\phi H^{(0)})$, e portanto $vH^{(0)} = -B_x B^{-1}$, $v = -\phi_x$. O par de Lax da equação de sinh-Gordon é dado por

$$\begin{aligned} U &= E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} - \phi_x H^{(0)}, \\ V &= e^{2\phi} E_\alpha^{(-1)} + e^{-2\phi} E_{-\alpha}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Trocando $\phi \rightarrow i\phi$ em (3.9) obtemos a equação de sin-Gordon

$$\phi_{xt} = 2 \sin 2\phi. \quad (3.11)$$

Note que estas equações estão nas variáveis do cone de luz. Introduzindo novas coordenadas $\xi = x + t$ e $\tau = x - t$ obtemos

$$\phi_{\xi\xi} - \phi_{\tau\tau} = 2 \sinh 2\phi, \quad \phi_{\xi\xi} - \phi_{\tau\tau} = 2 \sin 2\phi. \quad (3.12)$$

Este é o modelo relativístico mais simples das hierarquias integráveis pois corresponde ao caso abeliano onde temos somente um operador em $\mathcal{M}^{(0)}$. É possível obter equações integrais de ordem mais alta, associadas $m = 3, 5, \dots$ embora estas equações não possam ser escritas numa forma local. Como exemplo, citamos o caso $m = 3$

$$\phi_{xt} = 2e^{2\phi} \partial_x^{-1} [e^{-2\phi} \partial_x^{-1} (e^{2\phi} - e^{-2\phi})] + 2e^{-2\phi} \partial_x^{-1} [e^{2\phi} \partial_x^{-1} (e^{2\phi} - e^{-2\phi})], \quad (3.13)$$

onde definimos o operador integral $\partial_x^{-1} \equiv \int dx$.

3.1.3 Fluxos de tempo negativo par

Uma observação importante, que só foi considerada pela primeira vez em [10] é que ao contrário da parte positiva da hierarquia mKdV, não existe restrição de que m deve ser ímpar para fluxos negativos. Portanto, existem modelos associados a m par na parte negativa da hierarquia mKdV/sinh-Gordon. Resolvendo (3.8) para $m = 2$ obtemos

$$v_t + 2e^{-2\partial_x^{-1}v}\partial_x^{-1}e^{2\partial_x^{-1}v} + 2e^{2\partial_x^{-1}v}\partial_x^{-1}e^{-2\partial_x^{-1}v} = 0, \quad (3.14)$$

onde o par de Lax desta equação é dado por

$$\begin{aligned} U &= E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + vH^{(0)}, \\ V &= H^{(-1)} + 2e^{-2\partial_x^{-1}v}\partial_x^{-1}e^{2\partial_x^{-1}v}E_\alpha^{(-1)} - 2e^{2\partial_x^{-1}v}\partial_x^{-1}e^{-2\partial_x^{-1}v}E_{-\alpha}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Observe que ao contrário das outras equações como mKdV e sinh-Gordon, (3.14) não possui solução com condição de contorno nula $v = 0$. Entretanto, ela possui solução com condição de contorno constante $v = v_0$. Isso é válido para toda a subclasse de equações de fluxos negativos pares. Este é um fato interessante pois como veremos, sólitons com condição de contorno constante são usualmente chamados de dark sólitons e tem aplicações importantes em ótica não linear. Para esta subclasse de equações, portanto, as soluções do tipo sóliton devem necessariamente ser dark solitons.

A equação (3.14) pode ainda ser escrita numa forma local, derivando duas vezes em relação a x e reutilizando a própria equação,

$$v_{xxt} - 4v^2v_t - \frac{v_x v_{xt}}{v} - 4\frac{v_x}{v} = 0. \quad (3.16)$$

Outras equações, como $m = 4$ por exemplo, também podem ser consideradas embora não possam ser escritas numa forma local. Para detalhes veja [10].

3.2 Hierarquia de Gardner

Agora vamos considerar uma deformação integrável da hierarquia mKdV para fluxos de tempo positivo. A equação de Gardner apareceu pela primeira vez quando Miura [21, 22] introduziu sua famosa transformação

$$u = v^2 + v_x, \quad (3.17)$$

conectando a equação KdV

$$4u_t = u_{3x} - 6uu_x \quad (3.18)$$

com a equação mKdV

$$4v_t = v_{3x} - 6v^2v_x. \quad (3.19)$$

A transformação de Miura é altamente não trivial pois relaciona soluções de duas equações não lineares. Miura [21] percebeu que a equação KdV é invariante por transformações Galileanas. De fato, considere a mudança de coordenadas

$$x \rightarrow \xi + a\tau, \quad t \rightarrow \tau, \quad a = \text{const.} \quad (3.20)$$

Então, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - a\frac{\partial}{\partial \xi}$ e a equação KdV fica $4u_\tau - 4au_\xi = u_{3\xi} - 6uu_\xi$. O termo indesejável $-4au_\xi$ pode ser cancelado pelo termo não linear por uma translação no campo. Portanto, a equação KdV é invariante pela transformação (3.20) com

$$u(x, t) \rightarrow u(\xi, \tau) + \frac{2}{3}a. \quad (3.21)$$

Utilizando a transformação (3.20) na equação mKdV, ela se transforma em $4v_\tau - 4av_\xi = v_{3\xi} - 6v^2v_\xi$. Devido ao termo quadrático na não linearidade, uma translação no campo ainda é capaz de eliminar o termo $-4av_\xi$, porém, surge um novo termo não linear. Portanto, a equação mKdV é transformada na equação de Gardner

$$4v_\tau = v_{3\xi} - 6v^2v_\xi - 12v_0vv_\xi, \quad v_0 \equiv \left(\frac{2}{3}a\right)^{1/2}, \quad (3.22)$$

pela transformação (3.20) junto com a translação

$$v(x, t) \rightarrow v(\xi, \tau) + v_0. \quad (3.23)$$

A equação (3.22) é interessante por ser uma combinação das equações KdV e mKdV, contendo os dois tipos de não linearidade, e também porque pode ser considerada uma deformação integrável das equações KdV ou mKdV. Numa sequência de três trabalhos, Wadati [23, 24, 25] obteve soluções sóliton utilizando espalhamento inverso, transformações de Bäcklund e mostrou que (3.22) é um sistema Hamiltoniano integrável. Em [26] Kupershmidt considerou uma deformação da hierarquia KdV, relacionada com a equação de Gardner. Recentemente [27] a equação de Gardner foi utilizada para obter soluções

estáticas exatas da equação de Gross-Pitaevskii, que contém um potencial como armadilha de átomos e é um sistema não integrável. Este sistema é um bom modelo para condensados de Bose-Einstein.

A transformação (3.23), conectando soluções da equação mKdV com soluções da equação de Gardner, mostra que as soluções possuem condição de contorno diferente devido a constante aditiva v_0 . Portanto, soluções com condição de contorno nula da equação de Gardner estão relacionadas com soluções de condição de contorno não nula da equação mKdV e vice-versa.

A transformação (3.23) sugere a seguinte deformação na equação de curvatura nula (3.3), gerando a hierarquia de Gardner

$$[\partial_x + E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + (v_0 + v)H^{(0)}, \partial_t + D^{(n)} + \dots + D^{(0)}] = 0. \quad (3.24)$$

Resolvendo (3.24) para $n = 3$ obtemos

$$v_t = \frac{1}{4}v_{3x} - \left(v_0^2 - \frac{\alpha}{2}\right)v_x - 3v_0vv_x - \frac{3}{2}v^2v_x \quad (3.25)$$

onde α é uma constante de integração arbitrária. Escolhendo $\alpha = 2v_0^2$ obtemos a equação de Gardner

$$4v_t = v_{3x} - 12v_0vv_x - 6v^2v_x, \quad (3.26)$$

cujo par de Lax é dado por

$$\begin{aligned} U &= E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + (v_0 + v)H^{(0)}, \\ V &= E_\alpha^{(1)} + E_{-\alpha}^{(2)} + (v_0 + v)H^{(1)} + \frac{1}{2}(v_x - v^2 - 2v_0v + 2v_0^2)E_\alpha^{(0)} - \\ &\quad - \frac{1}{2}(v_x + v^2 + 2v_0v - 2v_0^2)E_{-\alpha}^{(1)} + \frac{1}{4}(v_{2x} - 2v^3 - 6v_0v^2 + 4v_0^3)H^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Considerando $n = 5$ obtemos a equação

$$\begin{aligned} 16v_t &= v_{5x} - 10v^2v_{3x} - 40vv_xv_{2x} - 10v_x^3 + 30v^4v_x - \\ &\quad - 20v_0vv_{3x} - 40v_0v_xv_{2x} + 120v_0^2v^2v_x + 120v_0v^3v_x, \end{aligned} \quad (3.28)$$

com o par de Lax

$$\begin{aligned}
U &= E_{\alpha}^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} + (v_0 + v)H^{(0)}, \\
V &= E_{\alpha}^{(2)} + E_{-\alpha}^{(3)} + (v_0 + v)H^{(2)} + \frac{1}{2}(v_x - v^2 - 2v_0v + 4v_0^2)E_{\alpha}^{(1)} - \\
&\quad - \frac{1}{2}(v_x + v^2 + 2v_0v - 4v_0^2)E_{-\alpha}^{(2)} + \frac{1}{4}(v_{2x} - 2v^3 - 6v_0v^2 + 4\mu^2v + 8v_0^3)H^{(1)} + \\
&\quad + \frac{1}{8}\{v_{3x} - 6v^2v_x - 2vv_{2x} + v_x^2 + 3v^4 - 12v_0vv_x - 2v_0v_{2x} + \\
&\quad\quad\quad + 4v_0^2v_x + 12v_0v^3 + 8v_0^2v^2 - 8v_0^3v + 8v_0^4\}E_{\alpha}^{(0)} - \\
&\quad - \frac{1}{8}\{v_{3x} - 6v^2v_x + 2vv_{2x} - v_x^2 - 3v^4 - 12v_0vv_x + 2v_0v_{2x} + \\
&\quad\quad\quad + 4v_0^2v_x - 12v_0v^3 - 8v_0^2v^2 + 8v_0^3v - 8v_0^4\}E_{-\alpha}^{(1)} + \\
&\quad + \frac{1}{16}\{v_{4x} - 10v^2v_{2x} - 10vv_x^2 + 6v^5 - 20v_0vv_{2x} - 10v_0v_x^2 + \\
&\quad\quad\quad + 30v_0v^4 + 40v_0^2v^3 + 16v_0^5\}H^{(0)}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

É importante notar que (3.28) não é obtida de (3.6) com a transformação (3.23). A equação (3.28) é uma combinação da equação de Sawada-Kotera com a equação modificada de Sawada-Kotera (3.6). Soluções desta hierarquia deformada utilizando operadores de vértice, e sua relação com as soluções da hierarquia mKdV foram discutidas em detalhe em [7], e também serão apresentadas nesta tese. Note que o parâmetro v_0 em (3.24) tem origem nas transformações (3.20) e (3.23). A equação de Gardner é amplamente utilizada para estudar ondas na água e na atmosfera [28, 29].

3.3 Hierarquia AKNS/Lund-Regge

Considere $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{sl}_2$ e operador de gradação homogêneo $Q = \widehat{d}$, que decompõe a álgebra em

$$\widehat{\mathcal{G}}^{(j)} = \{H^{(j)}, E_{\alpha}^{(j)}, E_{-\alpha}^{(j)}\}. \tag{3.30}$$

Escolhendo $E^{(1)} = H^{(1)}$ temos

$$\mathcal{K} = \{H^{(j)}\}, \quad \mathcal{M} = \{E_{\alpha}^{(j)}, E_{-\alpha}^{(j)}\}. \tag{3.31}$$

Existem dois operadores em $\mathcal{M}^{(0)}$ e portanto $A^{(0)} = qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}$, onde $q = q(x, t)$ e $r = r(x, t)$ são os campos desta hierarquia.

3.3.1 Fluxos de tempo positivo

Seja

$$D^{(j)} = a_j H^{(j)} + b_j E_\alpha^{(j)} + c_j E_{-\alpha}^{(j)} \in \widehat{\mathcal{G}}^{(j)}. \quad (3.32)$$

Considerando a parte positiva da hierarquia temos equação de curvatura nula

$$[\partial_x + H^{(1)} + qE_\alpha^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}, \partial_t + D^{(n)} + D^{(n-1)} + \dots + D^{(0)}] = 0. \quad (3.33)$$

O caso $n = 2$ fornece o sistema

$$\begin{aligned} q_t &= -\frac{1}{2}q_{xx} + (qr - q_0r_0)q, \\ r_t &= \frac{1}{2}r_{xx} - (qr - q_0r_0)r. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Na resolução da equação de curvatura nula (3.33), escolhemos os coeficientes constantes de (3.32) de forma conveniente, $a_2 = 1$ e $a_1 = 0$. Não há perda de generalidade nesta escolha pois estas constantes podem ser absorvidas por uma mudança de coordenadas. A constante de integração do coeficiente a_0 foi mantida, ao contrário do usual. Denotamos esta constante por $\frac{1}{2}q_0r_0$. Esta escolha foi feita para obtermos um sistema que admite solução com condição de contorno constante $q \rightarrow q_0$ e $r \rightarrow r_0$. Geralmente esta constante de integração é tomada como zero, fornecendo o conhecido sistema AKNS

$$\begin{aligned} q_t &= -\frac{1}{2}q_{xx} + q^2r, \\ r_t &= \frac{1}{2}r_{xx} - qr^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Note que ao contrário de (3.34), o sistema (3.35) não possui solução com condição de contorno constante. Tanto (3.35) quanto (3.34) possuem solução com condição de contorno nula $q \rightarrow 0$ e $r \rightarrow 0$. O par de Lax do sistema (3.34) é dado por

$$\begin{aligned} U &= H^{(1)} + qE_\alpha^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}, \\ V &= H^{(2)} + qE_\alpha^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)} - \frac{1}{2}(qr - q_0r_0)H^{(0)} - \frac{1}{2}q_xE_\alpha^{(0)} + \frac{1}{2}r_xE_{-\alpha}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Eliminando a constante de integração $q_0r_0 \rightarrow 0$, obtemos o par de Lax de (3.35). Escolhendo $q = \psi$, $r = \alpha\psi^*$, $t \rightarrow -it$ e $x \rightarrow ix$, onde α é uma constante, obtemos a equação NLS apropriada para condição de contorno constante

$$i\psi_t - \frac{1}{2}\psi_{xx} - \alpha(|\psi|^2 - |\psi_0|^2)\psi = 0. \quad (3.37)$$

Esta equação é interessante e foi objeto de estudo do recente trabalho de Zakharov e Gelash [11] com $\alpha = -1$. Do sistema (3.35) temos também a equação NLS usual

$$i\psi_t + \psi_{xx} - 2\alpha|\psi|^2\psi = 0. \quad (3.38)$$

Os casos $\alpha = \mp 1$ são conhecidos como “focusing” e “defocusing” NLS, respectivamente, e tem aplicações importantes em condensados de Bose-Einstein e ótica não linear.

Resolvendo (3.33) para o caso $n = 3$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{1}{4}q_{xxx} - \frac{3}{2}qrq_x, \\ r_t &= \frac{1}{4}r_{xxx} - \frac{3}{2}qrr_x, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde o par de Lax é dado por

$$\begin{aligned} U &= H^{(1)} + qE_\alpha^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}, \\ V &= H^{(3)} + qE_\alpha^{(2)} + rE_{-\alpha}^{(2)} - \frac{1}{2}qrH^{(1)} - \frac{1}{2}qxE_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2}r_xE_{-\alpha}^{(1)} + \\ &\quad + \frac{1}{4}(rq_x - qr_x)H^{(0)} + \frac{1}{4}(q_{xx} - 2q^2r)E_\alpha^{(0)} + \frac{1}{4}(r_{xx} - 2q^2r)E_{-\alpha}^{(0)}. \end{aligned}$$

Neste caso escolhemos as constantes $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ e as outras constantes de integração foram tomadas como zero. Note que o sistema (3.39) possui solução com condição de contorno constante $q \rightarrow q_0$ e $r \rightarrow r_0$. O sistema (3.39) se reduz a equação KdV quando $q = u$ e $r = \pm 1$ e a equação mKdV quando $r = \pm q = \pm v$. Se $q = v$ e $r = \alpha + \beta v$ obtemos a equação de Gardner (3.26) com coeficientes arbitrários

$$4v_t = v_{xxx} - 6\alpha vv_x - 6\beta v^2 v_x. \quad (3.40)$$

3.3.2 Fluxos de tempo negativo

A parte negativa desta hierarquia é gerada pela equação de curvatura nula

$$[\partial_x + H^{(1)} + qE_\alpha^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}, \partial_t + D^{(-m)} + D^{(-m+1)} + \dots + D^{(-1)}] = 0. \quad (3.41)$$

Considere $m = 1$

$$[\partial_x + H^{(1)} + A^{(0)}, \partial_t + D^{(-1)}] = 0. \quad (3.42)$$

Seguindo Leznov-Saveliev [30] suponha a seguinte solução

$$A^{(0)} = -B_x B^{-1}, \quad D^{(-1)} = BH^{(-1)}B^{-1}, \quad (3.43)$$

onde B é um elemento de grupo contendo geradores de grau zero na forma

$$B = \exp(\chi E_{-\alpha}^{(0)}) \exp(\phi H^{(0)}) \exp(\psi E_{\alpha}^{(0)}). \quad (3.44)$$

Substituindo (3.43) em (3.42) a projeção em grau -1 automaticamente se cancela e obtemos as equações de movimento na forma proposta em [30]

$$(B_x B^{-1})_t + [H^{(1)}, B H^{(-1)} B^{-1}] = 0, \quad (3.45a)$$

$$(B^{-1} B_t)_x + [B^{-1} H^{(1)} B, H^{(-1)}] = 0. \quad (3.45b)$$

A equação (3.45b) não é independente, mas foi obtida de (3.45a) expandindo-a e conjugando o resultado na forma $B^{-1}(\dots)B$. Estas duas equações implicam nos vínculos adicionais

$$\text{Tr}(B_x B^{-1} H^{(0)}) = \phi_x - \chi \psi_x e^{2\phi} = 0, \quad (3.46a)$$

$$\text{Tr}(B^{-1} B_t H^{(0)}) = \phi_t - \psi \chi_t e^{2\phi} = 0. \quad (3.46b)$$

É conveniente introduzir as funções auxiliares

$$\tilde{\psi} \equiv \psi e^{\phi}, \quad \tilde{\chi} \equiv \chi e^{\phi}, \quad \Delta \equiv 1 + \tilde{\psi} \tilde{\chi}. \quad (3.47)$$

Resolvendo (3.43) obtemos o par de Lax deste modelo em termos das funções de (3.44) ou (3.47), que é portanto

$$U = H^{(1)} + q E_{\alpha}^{(0)} + r E_{-\alpha}^{(0)} \quad (3.48a)$$

$$= H^{(1)} - \psi_x e^{2\phi} E_{\alpha}^{(0)} - (\chi_x + \chi^2 \psi_x e^{2\phi}) E_{-\alpha}^{(0)} \quad (3.48b)$$

$$= -\frac{\tilde{\psi}_x}{\Delta} e^{\phi} E_{\alpha}^{(0)} - \tilde{\chi}_x e^{-\phi} E_{-\alpha}^{(0)}, \quad (3.48c)$$

$$V = (1 + 2\psi \chi e^{2\phi}) H^{(-1)} - 2\psi e^{2\phi} E_{\alpha}^{(-1)} + 2\chi (1 + \psi \chi e^{2\phi}) E_{-\alpha}^{(-1)} \quad (3.48d)$$

$$= (1 + 2\tilde{\psi} \tilde{\chi}) H^{(-1)} - 2\tilde{\psi} e^{\phi} E_{\alpha}^{(-1)} + 2\tilde{\chi} (1 + \tilde{\psi} \tilde{\chi}) e^{-\phi} E_{-\alpha}^{(-1)}. \quad (3.48e)$$

Os vínculos (3.46) escritos em termos das funções (3.47) ficam

$$\phi_x = \frac{\tilde{\chi} \tilde{\psi}_x}{\Delta}, \quad \phi_t = \frac{\tilde{\psi} \tilde{\chi}_t}{\Delta}. \quad (3.49)$$

Utilizando estes resultados em (3.45a), é possível eliminar o campo ϕ e obter as equações de movimento do modelo de Lund-Regge [31, 16]

$$\partial_t \left(\frac{\tilde{\psi}_x}{\Delta} \right) + \frac{\tilde{\psi} \tilde{\psi}_x \tilde{\chi}_t}{\Delta^2} - 4\tilde{\psi} = 0, \quad \partial_t \left(\frac{\tilde{\chi}_x}{\Delta} \right) + \frac{\tilde{\chi} \tilde{\chi}_x \tilde{\psi}_t}{\Delta^2} - 4\tilde{\chi} = 0. \quad (3.50)$$

Capítulo 4

Soluções do tipo sóliton com condição de contorno nula

Utilizamos o método de dressing e operadores de vértice para construir as soluções solitônicas das hierarquias mKdV/sinh-Gordon e AKNS/Lund-Regge, com condição de contorno nula. Este capítulo não contém resultados novos, mas introduzimos estas soluções para comparar com as soluções de contorno não nula que serão apresentadas no capítulo seguinte.

4.1 Soluções da hierarquia mKdV/sinh-Gordon

Tomando $v = 0$ ($\phi = 0$) no par de Lax correspondente a cada modelo da hierarquia mKdV/sinh-Gordon, exceto os casos correspondentes a graus negativos pares, que não admitem este tipo de solução, obtemos o vácuo mais simples possível

$$U_0 = E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)} \equiv \Omega^{(1)}, \quad (4.1a)$$

$$V_0 = E_\alpha^{(n)} + E_{-\alpha}^{(n+1)} \equiv \Omega^{(2n+1)}. \quad (4.1b)$$

O operador (4.1a) vale para todas as equações da hierarquia enquanto (4.1b) vale para a equação mKdV com $n = 1$, para a equação de Sawada-Kotera com $n = 2$ e para a equação de sinh-Gordon com $n = -1$ e assim por diante. Seja

$$B = \exp(\phi H^{(0)}). \quad (4.2)$$

Resolvendo (2.26) obtemos $v = -\phi_x$. Integrando o sistema linear (2.14) temos

$$\Psi_0 = \exp(-\Omega^{(1)}x - \Omega^{(2n+1)}t). \quad (4.3)$$

Considere as funções tau dadas por (2.30) e escolha g na forma correspondente a soluções solitônicas (2.41), com o operador de vértice dado por

$$F_i \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \kappa_i^{-2n} \left(H^{(n)} - \frac{1}{2} \delta_{n0} \hat{c} + \kappa_i^{-1} E_{\alpha}^{(n)} - \kappa_i^{-1} E_{-\alpha}^{(n+1)} \right), \quad (4.4)$$

onde κ_i é um parâmetro complexo. Pode-se verificar que este operador de vértice é autoestado do vácuo,

$$[\Omega^{(2n+1)}, F_i] = -2\kappa_i^{2n+1} F_i. \quad (4.5)$$

Esta equação determina as relações de dispersão de cada modelo da hierarquia, implicando na dependência espaço-temporal

$$\eta_i = 2\kappa_i x + 2\kappa_i^{2n+1} t. \quad (4.6)$$

Observe que a única diferença entre soluções de diferentes modelos é a velocidade da onda $c = \omega_i/\kappa_i = \kappa_i^{2n}$. O último passo para obter a solução explícita é calcular os elementos de matriz do vértice (2.47). Considerando os estados de peso mais alto de $\hat{s}\ell_2$ obtemos ($l = 0, 1$),

$$\langle \mu_l | F_i | \mu_l \rangle = \frac{(-1)^{l+1}}{2}, \quad (4.7a)$$

$$\langle \mu_l | F_i F_j | \mu_l \rangle = \langle \mu_l | F_i | \mu_l \rangle \langle \mu_l | F_j | \mu_l \rangle a_{ij}, \quad a_{ij} \equiv \left(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2, \quad (4.7b)$$

$$\langle \mu_l | \prod_{i=1}^N F_i | \mu_l \rangle = \prod_{i=1}^N \langle \mu_l | F_i | \mu_l \rangle \prod_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^N a_{ij}. \quad (4.7c)$$

As expressões (4.7c) e (4.7b) mostram que o valor esperado de qualquer potência do vértice se anula, $\langle \mu_l | F_i^n | \mu_l \rangle = 0$, $a \geq 2$. Portanto, a solução geral da hierarquia mKdV/sinh-Gordon, com condição de contorno nula, é dada por

$$\phi = \ln \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}}, \quad v = -\phi_x. \quad (4.8)$$

A forma explícita das funções tau é dada por

$$\begin{aligned}\tau_U &= 1 + \langle F_1 \rangle_t e^{\eta_1} + \langle F_2 \rangle_t e^{\eta_2} + \langle F_1 F_2 \rangle_t e^{\eta_1 + \eta_2} + \dots \\ &= \sum_{J \subset I} \prod_{i \in J} \langle F_i \rangle_t \prod_{\substack{i, j \in J \\ i < j}} a_{ij} \prod_{i \in J} \exp(\eta_i)\end{aligned}\quad (4.9)$$

onde $\langle \bullet \rangle_t \equiv \langle \mu_t | \bullet | \mu_t \rangle$, $I = \{1, 2, \dots, N\}$ e a soma é feita sobre todos os subconjuntos de I . Esta expressão corresponde a solução N -sóliton. Como exemplo, considere a solução 3-sóliton,

$$\begin{aligned}\tau_{00} &= 1 - \frac{1}{2}e^{\eta_1} - \frac{1}{2}e^{\eta_2} - \frac{1}{2}e^{\eta_3} + \frac{1}{4}a_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} + \frac{1}{4}a_{13}e^{\eta_1 + \eta_3} + \frac{1}{4}a_{23}e^{\eta_2 + \eta_3} - \\ &\quad - \frac{1}{8}a_{12}a_{13}a_{23}e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}, \\ \tau_{11} &= 1 + \frac{1}{2}e^{\eta_1} + \frac{1}{2}e^{\eta_2} + \frac{1}{2}e^{\eta_3} + \frac{1}{4}a_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} + \frac{1}{4}a_{13}e^{\eta_1 + \eta_3} + \frac{1}{4}a_{23}e^{\eta_2 + \eta_3} + \\ &\quad + \frac{1}{8}a_{12}a_{13}a_{23}e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Estas funções devem ser substituídas em (4.8) e a_{ij} é dado por (4.7b). Se considerarmos a equação mKdV, de (4.6) temos $\eta_i = 2\kappa_i x + 2\kappa_i^3 t$, para a equação de Sawada-Kotera $\eta_i = 2\kappa_i x + 2\kappa_i^5 t$ e para a equação de sinh-Gordon $\eta_i = 2\kappa_i x + 2\kappa_i^{-1} t$.

As soluções com condição de contorno nula valem para todas as equações com graus ímpares, tanto para fluxos positivos quanto negativos. A subclasse de equações com graus negativos pares não possui solução com condição de contorno nula, mas possui solução com condição de contorno constante e será tratada adiante.

4.2 Soluções da hierarquia AKNS/Lund-Regge

Fazendo $q = r = 0$ no par de Lax de cada modelo da hierarquia AKNS, obtemos o par de Lax do vácuo correspondente a condição de contorno nula

$$U_0 = H^{(1)} \equiv \Omega^{(1)}, \quad (4.11a)$$

$$V_0 = H^{(n)} \equiv \Omega^{(n)}. \quad (4.11b)$$

O operador (4.11a) vale para todos os modelos enquanto (4.11b) vale para o sistema AKNS (3.35) com $n = 2$, para o sistema (3.39) com $n = 3$ e para o modelo de Lund-Regge (3.50) com $n = -1$. A única mudança é para o sistema (3.34) onde $V_0 = \Omega^{(2)} + \frac{1}{2}q_0 r_0 \Omega^{(0)}$. Seja

$$B = \exp(\chi E_{-\alpha}^{(0)}) \exp(\phi H^{(0)}) \exp(\psi E_{\alpha}^{(0)}). \quad (4.12)$$

Então, (2.26) implica nas relações entre os campos q e r com as funções χ , ϕ e ψ . Estas relações já foram calculadas quando obtivemos o operador (3.48b). Integrando (2.14) obtemos

$$\Psi_0 = \exp(-\Omega^{(1)}x - \Omega^{(n)}t). \quad (4.13)$$

Seja g dado por (2.41), com os operadores de vértice definidos por

$$F_i \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \kappa_i^{-n} E_{-\alpha}^{(n)}, \quad (4.14a)$$

$$G_i \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \kappa_i^{-n} E_{\alpha}^{(n)}. \quad (4.14b)$$

Estes operadores de vértice satisfazem as seguintes equações de autovalor

$$[\Omega^{(n)}, F_i] = -2\kappa_i^n F_i, \quad [\Omega^{(n)}, G_i] = 2\kappa_i^n G_i, \quad (4.15)$$

que definem as relações de dispersão da hierarquia. A dependência espaço-temporal das soluções será portanto

$$\eta_i = 2\kappa_i x + 2\kappa_i^n t, \quad \xi_i = -2\kappa_i x - 2\kappa_i^n t. \quad (4.16)$$

Para o caso do sistema (3.34) temos

$$\eta_i = 2\kappa_i x + (2\kappa_i^2 + q_0 r_0)t, \quad \xi_i = -2\kappa_i x - (2\kappa_i^2 + q_0 r_0)t. \quad (4.17)$$

Utilizando (4.12) na solução geral (2.32) e escolhendo estados apropriados, obtemos as funções tau. Além dos estados $\{|\mu_l\rangle\}$, $l = 0, 1$, considere o estado

$$|\mu_2\rangle = E_{-\alpha}^{(0)}|\mu_1\rangle. \quad (4.18)$$

Então temos,

$$\begin{aligned} \tau_{00} &= e^\nu = \langle \mu_0 | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_0 \rangle, \\ \tau_{11} &= e^{\nu+\phi} = \langle \mu_1 | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_1 \rangle, \\ \tau_{12} &= \psi e^{\nu+\phi} = \langle \mu_1 | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_2 \rangle, \\ \tau_{21} &= \chi e^{\nu+\phi} = \langle \mu_2 | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_1 \rangle, \end{aligned} \quad (4.19)$$

e portanto

$$e^\phi = \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}}, \quad \psi = \frac{\tau_{12}}{\tau_{11}}, \quad \chi = \frac{\tau_{21}}{\tau_{11}}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\tau_{12}}{\tau_{00}}, \quad \tilde{\chi} = \frac{\tau_{21}}{\tau_{00}}. \quad (4.20)$$

Das relações entre os campos contidas em (3.48), chegamos a solução geral dos modelos da hierarquia AKNS. Para o modelo de Lund-Regge já temos os campos $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\chi}$ em termos das funções tau (4.20). Para os campos q e r temos

$$q = -\psi_x e^{2\phi} = \frac{(\tau_{11})_x \tau_{12} - \tau_{11} (\tau_{12})_x}{\tau_{00}^2}, \quad (4.21a)$$

$$r = -\tilde{\chi}_x e^{-\phi} = \frac{(\tau_{00})_x \tau_{21} - \tau_{00} (\tau_{21})_x}{\tau_{00} \tau_{11}}. \quad (4.21b)$$

Para obter a solução explícita, basta fixar o número de vértices e calcular os elementos de matriz. A solução contendo somente um vértice corresponde a uma solução exponencial da equação linearizada que não é interessante. A solução não trivial mais simples é obtida com dois vértices, $g = e^{F_1} e^{G_2}$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle \mu_k | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \mu_l \rangle &= \langle \mu_k | \exp(e^{\eta_1} F_1) \exp(\xi_2 G_2) | \mu_l \rangle \\ &= \delta_{kl} + \langle \mu_k | F_1 | \mu_l \rangle e^{\eta_1} + \langle \mu_k | G_2 | \mu_l \rangle e^{\xi_2} + \langle \mu_k | F_1 G_2 | \mu_l \rangle e^{\eta_1 + \xi_2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Os elementos de matriz relevantes, envolvendo um vértice, são

$$\langle \mu_l | F_i | \mu_l \rangle = 0, \quad \langle \mu_l | G_i | \mu_l \rangle = 0, \quad \langle \mu_1 | F_i | \mu_2 \rangle = 0, \quad (4.23a)$$

$$\langle \mu_2 | F_i | \mu_1 \rangle = 1, \quad \langle \mu_1 | G_i | \mu_2 \rangle = 1, \quad \langle \mu_2 | G_i | \mu_1 \rangle = 0. \quad (4.23b)$$

Os elementos envolvendo dois vértices são

$$\langle \mu_1 | F_i G_j | \mu_2 \rangle = 0, \quad \langle \mu_0 | F_i G_j | \mu_0 \rangle = \frac{\kappa_i \kappa_j}{(\kappa_i - \kappa_j)^2}, \quad (4.24a)$$

$$\langle \mu_2 | F_i G_j | \mu_1 \rangle = 0, \quad \langle \mu_1 | F_i G_j | \mu_1 \rangle = \frac{\kappa_j^2}{(\kappa_i - \kappa_j)^2}. \quad (4.24b)$$

Portanto, a solução envolvendo dois vértices é dada pelas relações (4.21) com as seguintes funções tau

$$\begin{aligned} \tau_{00} &= 1 + \langle \mu_0 | F_1 G_2 | \mu_0 \rangle \exp(\eta_1 + \xi_2), \\ \tau_{11} &= 1 + \langle \mu_1 | F_1 G_2 | \mu_1 \rangle \exp(\eta_1 + \xi_2), \\ \tau_{12} &= \exp(\xi_2), \\ \tau_{21} &= \exp(\eta_1). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Soluções envolvendo mais operadores de vértice, como por exemplo $g = e^{F_1}e^{F_2}e^{G_3}e^{G_4}$, podem ser calculadas analogamente, embora os elementos de matriz sejam mais trabalhosos.

Capítulo 5

Soluções do tipo sóliton com condição de contorno não nula

Utilizamos o método proposto na seção 2.6 para construir soluções das hierarquias mKdV, de Gardner e AKNS. Resolvemos também a subclasse de equações de fluxos negativos pares da hierarquia mKdV/sinh-Gordon. Introduzimos operadores de vértice apropriados que são autoestados de um vácuo não trivial. No limite onde os campos do vácuo tendem a zero, recuperamos as soluções conhecidas do capítulo anterior. Mostraremos que a hierarquia mKdV pode ter simultaneamente soluções dark sólitons, kinks, ondas de amplitude máxima chamada table-top sólitons, breathers e wobblers [7].

5.1 Soluções das hierarquias mKdV e de Gardner

Soluções com condição de contorno constante da hierarquia mKdV e de Gardner foram consideradas em detalhe em [7], e soluções da subclasse de equações negativa pares da hierarquia mKdV/sinh-Gordon em [10]. Nesta seção vamos mostrar resumidamente os principais resultados.

Seja

$$\Omega^{(2j+1)} \equiv E_{\alpha}^{(j)} + E_{-\alpha}^{(j+1)} + v_0 H^{(j)}. \quad (5.1)$$

Fazendo $v \rightarrow v_0$ no par de Lax dos modelos da hierarquia mKdV, exceto o modelo de sinh-Gordon que como já discutido na seção 2.8, não apresenta solução de vácuo constante,

obtemos o par de Lax do vácuo para cada modelo

$$U_0 = \Omega^{(1)}, \quad (5.2a)$$

$$V_0 = \Omega^{(3)} - \frac{1}{2}v_0^2\Omega^{(1)}, \quad (5.2b)$$

$$V_0 = \Omega^{(5)} - \frac{1}{2}v_0^2\Omega^{(3)} + \frac{3}{8}v_0^4\Omega^{(1)}, \quad (5.2c)$$

$$V_0 = \frac{1}{v_0}\Omega^{(-1)}. \quad (5.2d)$$

Nestas relações, (5.2a) é um dos operadores de Lax do vácuo e vale para todos os modelos. Os demais operadores valem individualmente, e.g. (5.2b) vale para a equação mKdV (3.4), (5.2c) para a equação modificada de Sawada-Kotera (3.6) e (5.2d) para a equação da parte negativa par (3.16). Outras possíveis equações da hierarquia seguem o mesmo padrão, como combinações lineares de $\Omega^{(2j+1)}$.

Para as equações da hierarquia de Gardner, tomando o limite $v \rightarrow 0$ em (3.27) e (3.29), obtemos

$$U_0 = \Omega^{(1)}, \quad (5.3a)$$

$$V_0 = \Omega^{(1)} + v_0^2\Omega^{(0)}, \quad (5.3b)$$

$$V_0 = \Omega^{(2)} + 2v_0^2\Omega^{(1)} + v_0^4\Omega^{(4)}, \quad (5.3c)$$

onde (5.3a) vale para todas as equações da hierarquia de Gardner, (5.3b) vale para (3.26) e (5.3c) para (3.28). Note que estamos considerando soluções com condição de contorno nula para a hierarquia de Gardner e soluções com condição de contorno constante para a hierarquia mKdV. Ambas estão relacionadas, pois ambos os problemas tem a mesma estrutura algébrica, porém, a interpretação de v_0 nas equações da hierarquia de Gardner é de um simples parâmetro constante que aparece nas equações diferenciais, e tem origem numa transformação de Galileu (3.20) e (3.23) e não de um vácuo com um campo constante como no caso da mKdV.

Integrando o sistema (2.14) obtemos

$$\Psi_0 = \exp(-U_0x - V_0t). \quad (5.4)$$

Suponha

$$B = \exp(\phi H^{(0)}). \quad (5.5)$$

Resolvendo (2.37) para a hierarquia mKdV obtemos

$$v = v_0 - \partial_x \phi = v_0 + \partial_x \ln \frac{\tau_{00}}{\tau_{11}}. \quad (5.6)$$

Para a hierarquia de Gardner, com vácuo zero, de (2.26) temos

$$v = -\partial_x \phi = \partial_x \ln \frac{\tau_{00}}{\tau_{11}}. \quad (5.7)$$

Note que quando $v_0 \rightarrow 0$ em (5.6) recuperamos o resultado (4.8) da solução com condição de contorno nula.

Seja g na forma (2.41), com o operador de vértice definido por

$$F_i \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\kappa_i^2 - v_0^2)^{-n} \left[H^{(n)} + \frac{v_0 - \kappa_i}{2\kappa_i} \delta_{n0} \hat{c} + \frac{1}{\kappa_i + v_0} E_{\alpha}^{(n)} - \frac{1}{\kappa_i - v_0} E_{-\alpha}^{(n+1)} \right]. \quad (5.8)$$

Este operador de vértice depende da condição de contorno e quando $v_0 \rightarrow 0$, recuperamos o vértice conhecido (4.4). Este novo operador de vértice satisfaz uma equação de autovalor para os operadores do vácuo (5.2), que é dada por

$$[\Omega^{(2n+1)}, F_i] = -2\kappa_i (\kappa_i^2 - v_0^2)^n F_i. \quad (5.9)$$

Esta equação determina a relação dispersão para cada modelo da hierarquia mKdV e também para os modelos da hierarquia de Gardner. Note que não seria possível resolver a equação de Gardner com condição de contorno nula com o vértice usual (4.4). As relações de dispersão da hierarquia mKdV dependem da condição de contorno, portanto, a velocidade destes sólitons dependem de v_0 . Para a equação mKdV, com o par de Lax do vácuo dado por (5.2a) e (5.2b), obtemos

$$\eta_i = 2\kappa_i x + (2\kappa_i^3 - 3v_0^2 \kappa_i) t. \quad (5.10)$$

Para a equação modificada de Sawada-Kotera (3.6), com o operador (5.2c), temos

$$\eta_i = 2\kappa_i x + \left(2\kappa_i^5 - 5v_0^2 \kappa_i + \frac{15}{4} v_0^4 \kappa_i \right) t. \quad (5.11)$$

No limite $v_0 \rightarrow 0$ recuperamos a relação (4.6). Para a equação da parte negativa par (3.16), com o operador (5.2d) temos

$$\eta_i = 2\kappa_i x + \frac{2\kappa_i}{v_0 (\kappa_i^2 - v_0^2)} t. \quad (5.12)$$

A parte temporal diverge no limite $v_0 \rightarrow 0$, mostrando que as equações da parte negativa par não possuem solução com condição de contorno nula, como esperado. Para as equações da hierarquia de Gardner, utilizando (5.3), temos para a equação de Gardner (3.26)

$$\eta_i = 2\kappa_i x + \{2\kappa_i(\kappa_i^2 - v_0^2) + 2\kappa_i v_0^2\} t = 2\kappa_i x + 2\kappa_i^3 t, \quad (5.13)$$

e para a equação (3.28)

$$\begin{aligned} \eta_i &= 2\kappa_i x + \left\{2\kappa_i(\kappa_i^2 - v_0^2)^2 + 4v_0^2\kappa_i(\kappa_i^2 - v_0^2) + 2v_0^4\kappa_i\right\} t \\ &= 2\kappa_i x + 2\kappa_i^5 t. \end{aligned} \quad (5.14)$$

É interessante notar que ao contrário das relações de dispersão da hierarquia mKdV, o parâmetro v_0 nas relação de dispersão da hierarquia de Gardner se cancela, mostrando que a velocidade destes sólitons não dependem de v_0 , pois estamos resolvendo um problema de condição de contorno nula.

Os elementos de matriz do operador de vértice (5.8) são dados por

$$\langle \mu_l | F_i | \mu_l \rangle = \frac{v_0 + \sigma_l \kappa_i}{2\kappa_i}, \quad \sigma_0 = -1, \sigma_1 = 1, \quad (5.15a)$$

$$\langle \mu_l | F_i F_j | \mu_l \rangle = \langle \mu_l | F_i | \mu_l \rangle \langle \mu_l | F_j | \mu_l \rangle a_{ij}, \quad a_{ij} \equiv \left(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2, \quad (5.15b)$$

$$\langle \mu_l | \prod_{i=1}^N F_i | \mu_l \rangle = \prod_{i=1}^N \langle \mu_l | F_i | \mu_l \rangle \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N a_{ij}. \quad (5.15c)$$

Note que o vértice (5.8) satisfaz a propriedade de nilpotência entre os estados, $\langle \mu_l | F_i^n | \mu_l \rangle = 0$, $n \geq 2$. Com estes resultados podemos calcular as funções tau para qualquer número de vértices, que então substituídas em (5.6) — ou (5.7) no caso da hierarquia de Gardner — e utilizando a relação de dispersão correta para cada modelo (5.10)–(5.12) — ou (5.13)–(5.14) no caso da hierarquia de Gardner — obtemos a solução N-sóliton explicitamente na forma

$$\begin{aligned} \tau_l &= 1 + \langle F_1 \rangle_l e^{\eta_1} + \langle F_2 \rangle_l e^{\eta_2} + \langle F_3 \rangle_l e^{\eta_3} + \langle F_1 F_2 \rangle_l e^{\eta_1 + \eta_2} + \\ &+ \langle F_1 F_3 \rangle_l e^{\eta_1 + \eta_3} + \langle F_2 F_3 \rangle_l e^{\eta_2 + \eta_3} + \langle F_1 F_2 F_3 \rangle_l e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} + \dots \\ &= \sum_{J \subset I} \prod_{i \in J} \langle \mu_l | F_i | \mu_l \rangle \prod_{\substack{i,j \in J \\ i < j}} a_{ij} \prod_{i \in J} \exp(\eta_i) \end{aligned} \quad (5.16)$$

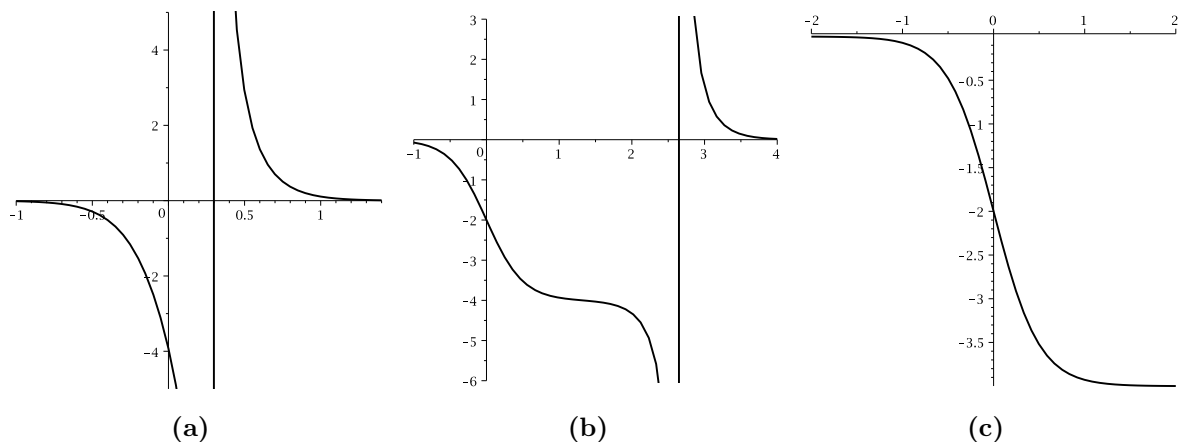


Figura 5.1: Soluções 1-sóliton da equação de Gardner quando $\kappa_1 \geq v_0$ e $v_0 > 0$. Escolhemos $v_0 = 2$ e $\kappa_1 = (3, 2.0001, 2)$ nas figuras (a, b, c), respectivamente. Quando $\kappa_1 \rightarrow v_0^+$ a solução em (a) se deforma, como mostrado em (b), até se tornar um kink quando $\kappa_1 = v_0$, como mostrado em (c). Soluções análogas valem para a equação mKdV, exceto que as soluções tendem a constante v_0 em $|x| \rightarrow \infty$ devido a condição de contorno não nula.

onde $I = \{1, 2, \dots, N\}$. As soluções da hierarquia mKdV com um vácuo constante são conhecidas como dark sólitons. Dark sólitons da equação NLS têm importantes aplicações em ótica não linear e condensados de Bose-Einstein. Como a equação mKdV aparece em física de plasmas, podemos esperar que dark sólitons da mKdV também tenha aplicações interessantes.

O comportamento dessas soluções varia de acordo com os valores de v_0 e κ_i . Além das soluções sólitons usuais, na Figura 5.1 mostramos um caso onde a solução se deforma até se tornar um kink. Na Figura 5.2 temos um caso mais interessante onde sólitons usuais e dark sólitons se deformam até se transformarem no chamado “table-top” sóliton, que é uma onda de amplitude máxima. Este tipo de solução foi extensamente estudada por Grimshaw et al. [28, 29] para a equação de Gardner, e inclusive observada em regiões costeiras do oceano. É importante observar que, substituindo as soluções com condição de contorno não nula da equação mKdV na transformação de Miura (3.17), obtemos soluções dark sóliton da equação KdV, entretanto, kinks e table-top sólitons não são observados. Isso mostra que as soluções interessantes da equação de Gardner são herdadas através da equação mKdV.

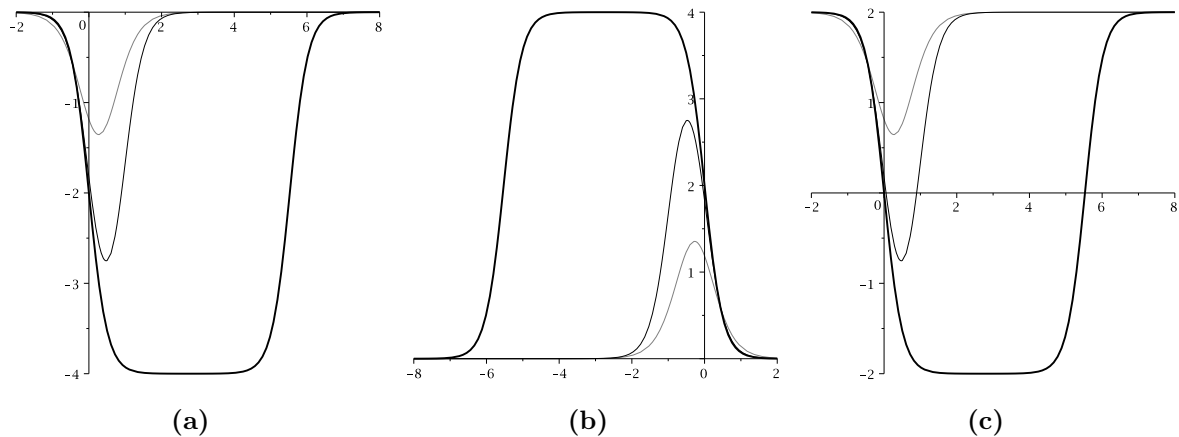


Figura 5.2: Soluções 1-sóliton para a equação de Gardner (a) e (b) e para a equação mKdV (c) quando $0 < \kappa_1 < v_0$. Os sólitons usuais aumentam de amplitude e se tornam estreitos quando κ_1 aumenta, mas quando $\kappa_1 \rightarrow v_0^-$ ele se torna o table-top sóliton, onde a amplitude atinge seu máximo. $v_0 = 2$ e $\kappa_1 = (1.5, 1.9, 1.999999999)$ em (a). Em (b) mudamos os sinais $v_0 \rightarrow -v_0$, $\kappa_1 \rightarrow -\kappa_1$ com os mesmos valores numéricos. Em (c) temos um dark sóliton e table-top sóliton para a equação mKdV, com os mesmo valores numéricos que em (a). Note o vácuo correspondente a $v_0 = 2$.

5.1.1 Breathers e wobbles

Ao contrário de soluções com vácuo zero, as soluções da hierarquia mKdV com vácuo constante e também as soluções com condição de contorno nula da hierarquia de Gardner, por conter o parâmetro v_0 , apresentam um comportamento mais rico dependendo das escolhas de κ_i e v_0 , podendo ter simultaneamente soluções do tipo sóliton e kink.

A expressão geral da solução do tipo breather pode ser obtida da solução 2-sóliton, escolhendo números de onda complexo conjugados $\kappa_1 = \kappa_2^* = \alpha + i\beta$, o que implica que as relações de dispersão terão a forma $\eta_1 = \eta_2^* = \xi + i\zeta$, para funções reais $\xi = \xi(x, t)$ e $\zeta = \zeta(x, t)$ a serem determinadas. De (5.15) temos $\langle V_1 \rangle_l = \langle V_2 \rangle_l^* = a_l - ib$, onde

$$\begin{aligned}
 a_l &= \frac{v_0 \alpha}{2(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{\sigma_l}{2}, \\
 b &= \frac{v_0 \beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)},
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

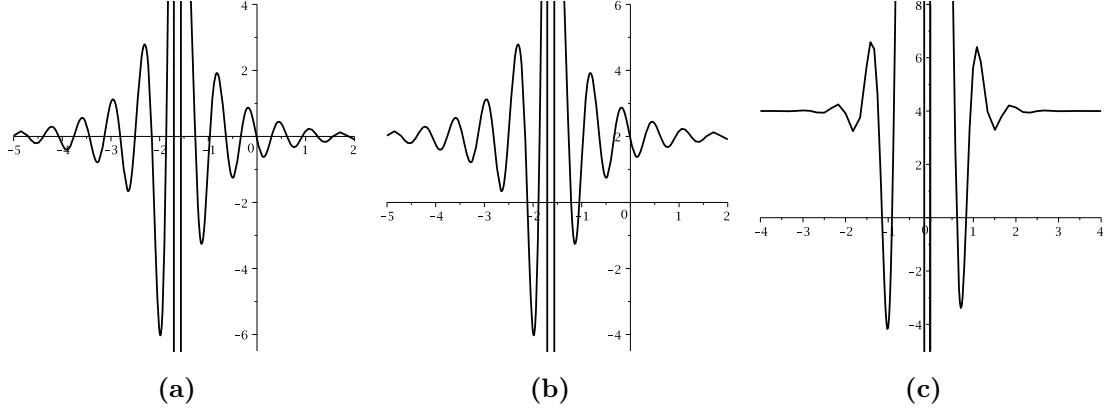


Figura 5.3: (a) breather da equação de Gardner, (b) breather da equação mKdV: $v_0 = 2$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 5$. (c) breather da equação KdV — $v_0 = 2$, $\alpha = 1.5$, $\beta = 4$ — utilizando a transformação de Miura (3.17).

e também

$$\langle V_1 V_2 \rangle_l = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} (a_l^2 + b^2). \quad (5.18)$$

Portanto, a formula geral do breather é dada por

$$\tau_l = 1 + 2e^\xi \left[a_l \cos \zeta + b \sin \zeta - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} (a_l^2 + b^2) e^\xi \right]. \quad (5.19)$$

Um gráfico dessa solução é ilustrado na Figura 5.3 para as equações de Gardner, mKdV e KdV. Note o vácuo não nulo nestes dois últimos casos.

A solução do tipo wobble para a equação de sine-Gordon foi proposta por Kälberman em [8]. Posteriormente, Ferreira et al. [9] perceberam que que esta solução corresponde a 3-sólitons, onde dois deles se combinam para formar um breather e o terceiro é um kink. Seguindo esta idéia, mostramos que as equações da hierarquia mKdV com condição de contorno não nula e as equações da hierarquia de Gardner com condição de contorno nula, também possuem solução do tipo wobble. Considere a solução 3-sóliton de (5.16) com $\kappa_1 = \kappa_2^* = \alpha + i\beta$ e $\kappa_3 = v_0$. Então $\eta_1 = \eta_2^* = \xi + i\zeta$ e $\eta_3 \equiv \xi_{v_0}$ é uma função real dependendo de v_0 . De (5.15) temos $\langle V_3 \rangle_l = \delta_{l1}$ e $\langle V_1 V_3 \rangle_l = \langle V_2 V_3 \rangle_l^* = \delta_{l1} (c_l + id_l)$ onde

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_3}{\kappa_1 + \kappa_3} = \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3} \right)^* = \gamma + i\nu, \quad (5.20)$$

$$\gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - v_0^2}{(\alpha + v_0)^2 + \beta^2}, \quad \nu = \frac{2\beta v_0}{(\alpha + v_0)^2 + \beta^2}, \quad (5.21)$$

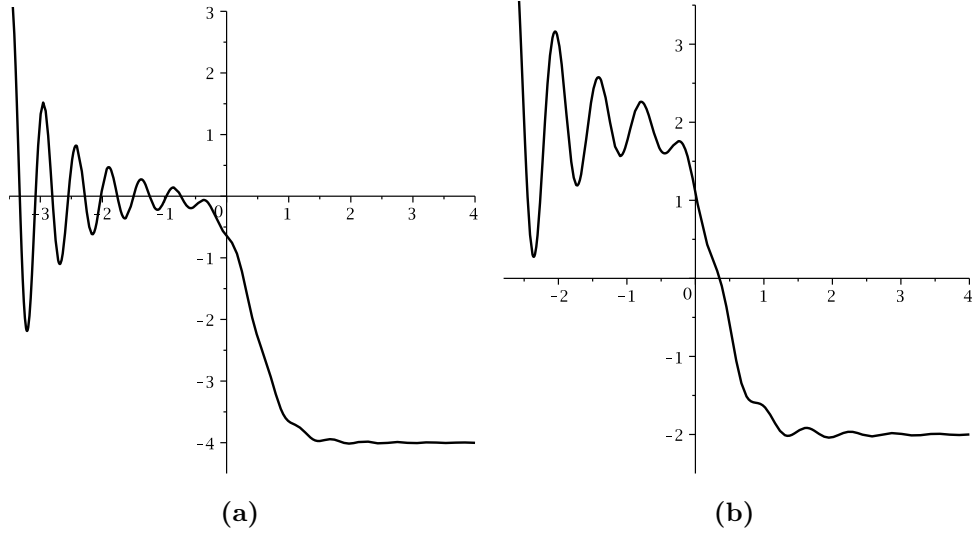


Figura 5.4: Em (a) temos a solução wobble da equação de Gardner com parâmetros $\kappa_1 = \frac{1}{2} + 6i$, $\kappa_2 = \frac{1}{2} - 6i$, $\kappa_3 = v_0 = 2$, $t = -0.02$. Em (b) temos o wobble da mKdV com parâmetros $\kappa_1 = \frac{1}{2} + 5i$, $\kappa_2 = \frac{1}{2} - 5i$, $\kappa_3 = v_0 = 2$, $t = -0.02$.

e portanto

$$\begin{aligned} c_l &= a_l(\gamma^2 - \nu^2) + 2b\gamma\nu, \\ d_l &= 2a_l\gamma\nu - b(\gamma^2 - \nu^2). \end{aligned} \quad (5.22)$$

A fórmula geral do wobble é então dada por

$$\begin{aligned} \pi_{ll} &= 1 + 2e^\xi \left[a_l \cos \zeta + b \sin \zeta - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} (a_l^2 + b^2) e^\eta \right] + \\ &+ 2\delta_{l1} e^{\xi + \eta_{v_0}} \left[c_l \cos \zeta - d_l \sin \zeta - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} (a_l^2 + b^2) (c_l^2 + d_l^2) e^\xi + \frac{1}{2} e^{-\xi} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Um gráfico da solução wobble para as equações de Gardner e mKdV é mostrado na Figura 5.4. Note que a equação KdV não possui wobble pois ela não possui solução kink.

A relação de dispersão explícita para a equação mKdV envolvida nestas soluções é

$$\begin{aligned} \xi &= 2\alpha x + 2\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{3}{2}v_0^2)t, \\ \zeta &= 2\beta x - 2\beta(\beta^2 - 3\alpha^2 + \frac{3}{2}v_0^2)t, \\ \eta_{v_0} &= 2v_0 x - v_0^3 t. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para a equação modificada de Sawada-Kotera (3.6) temos

$$\begin{aligned}\xi &= 2\alpha x + 2\alpha\left(\alpha^4 - 10\alpha^2\beta^2 + 5\beta^4 - \frac{5}{2}v_0^2\alpha^2 + \frac{15}{2}v_0^2\beta^2 + \frac{15}{8}v_0^4\right)t, \\ \zeta &= 2\beta x + 2\beta\left(\beta^4 - 10\alpha^2\beta^2 + 5\alpha^4 + \frac{5}{2}v_0^2\beta^2 - \frac{15}{2}v_0^2\alpha^2 + \frac{15}{8}v_0^4\right)t, \\ \eta_{v_0} &= 2v_0x + \frac{3}{4}v_0^5t.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Para a equação de Gardner (3.26)

$$\begin{aligned}\eta &= 2\alpha x + 2\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)t, \\ \zeta &= 2\beta x - 2\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)t, \\ \eta_{v_0} &= 2v_0x + 2v_0^3t.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Para a equação (3.28)

$$\begin{aligned}\eta &= 2\alpha x + 2\alpha(\alpha^4 - 10\alpha^2\beta^2 + 5\beta^4)t, \\ \zeta &= 2\beta x + 2\beta(\beta^4 - 10\alpha^2\beta^2 + 5\alpha^4)t, \\ \eta_{v_0} &= 2v_0x + 2v_0^5t.\end{aligned}\tag{5.27}$$

5.2 Soluções para a hierarquia AKNS

Tomando campos constantes nos operadores de Lax, novamente os termos em \mathcal{M} sobrevivem. Seja

$$\Omega^{(j)} \equiv H^{(j)} + q_0 E_\alpha^{(j-1)} + r_0 E_{-\alpha}^{(j-1)}.\tag{5.28}$$

Tomando o limite $q \rightarrow q_0$ e $r \rightarrow r_0$ nos pares de Lax da hierarquia AKNS obtemos

$$U_0 = H^{(1)} + q_0 E_\alpha^{(0)} + r_0 E_{-\alpha}^{(0)} = \Omega^{(1)},\tag{5.29a}$$

$$V_0 = H^{(2)} + q_0 E_\alpha^{(1)} + r_0 E_{-\alpha}^{(1)} = \Omega^{(2)},\tag{5.29b}$$

$$\begin{aligned}V_0 &= H^{(3)} + q_0 E_\alpha^{(2)} + r_0 E_{-\alpha}^{(2)} - \frac{1}{2}q_0 r_0 (H^{(1)} + q_0 E_\alpha^{(0)} + r_0 E_{-\alpha}^{(0)}) \\ &= \Omega^{(3)} - \frac{1}{2}q_0 r_0 \Omega^{(1)}.\end{aligned}\tag{5.29c}$$

Para as demais equações da hierarquia AKNS, sem considerar o modelo de Lund-Regge que não possui solução com condição de contorno constante como discutido na seção 2.8, temos o mesmo padrão, operadores como combinações lineares de $\Omega^{(j)}$. Integrando (2.14) temos

$$\Psi_0 = \exp(-U_0 x - V_0 t).\tag{5.30}$$

Suponha

$$B = \exp(\chi E_{-\alpha}^{(0)}) \exp(\phi H^{(0)}) \exp(\psi E_{\alpha}^{(0)}). \quad (5.31)$$

Resolvendo (2.37) obtemos os campos q e r como função de χ , ϕ , ψ e do vácuo. Estas relações são dadas por

$$\phi_x = r_0 \psi (1 + \chi \psi e^{2\phi}) - q_0 \chi e^{2\phi} + \chi \psi_x e^{2\phi}, \quad (5.32a)$$

$$q = e^{2\phi} (q_0 - r_0 \psi^2 - \psi_x), \quad (5.32b)$$

$$r = r_0 e^{-2\phi} + e^{2\phi} (q_0 \chi^2 - r_0 \chi^2 \psi^2) - \chi_x - \chi^2 \psi_x e^{2\phi}. \quad (5.32c)$$

Como esperado, no limite $q_0, r_0 \rightarrow 0$ recuperamos as relações obtidas em (3.48c). Introduzindo as funções auxiliares $\tilde{\chi} \equiv \chi e^{\phi}$, $\tilde{\psi} \equiv \psi e^{\phi}$ e $\Delta \equiv 1 + \tilde{\chi} \tilde{\psi}$, é possível simplificar as expressões (5.32) na forma

$$q = \frac{q_0}{\Delta} e^{2\phi} - \frac{\tilde{\psi}_x}{\Delta} e^{\phi}, \quad (5.33a)$$

$$r = r_0 \Delta e^{-2\phi} - \tilde{\chi}_x e^{-\phi}. \quad (5.33b)$$

Projetando (2.38) nos estados apropriados, temos as relações com as funções tau

$$e^{\phi} = \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}}, \quad \chi = \frac{\tau_{21}}{\tau_{11}}, \quad \psi = \frac{\tau_{12}}{\tau_{11}}, \quad \tilde{\chi} = \frac{\tau_{21}}{\tau_{00}}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\tau_{12}}{\tau_{00}}. \quad (5.34)$$

Substituindo estas relações em (5.33) obtemos a dependência explícita para a solução com condição de contorno não nula da hierarquia AKNS,

$$q = q_0 \frac{\tau_{11}^2}{\tau_{00}^2 + \tau_{12}\tau_{21}} + \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}} \frac{(\tau_{00})_x \tau_{12} - \tau_{00} (\tau_{12})_x}{\tau_{00}^2 + \tau_{12}\tau_{21}}, \quad (5.35a)$$

$$r = r_0 \frac{\tau_{00}^2 + \tau_{12}\tau_{21}}{\tau_{11}^2} + \frac{(\tau_{00})_x \tau_{21} - \tau_{00} (\tau_{21})_x}{\tau_{00}\tau_{11}}. \quad (5.35b)$$

Agora introduzimos os operadores de vértice apropriados para o caso de vácuo constante. Considere g na forma usual (2.41), com os operadores de vértice definidos por

$$F_i \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\kappa_i - \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right) \right]^{-n} F_i^{(n)} \quad (5.36a)$$

$$\text{onde } F_i^{(n)} = -\frac{q_0}{\kappa_i} H^{(n)} + \frac{q_0(\kappa_i^2 - q_0 r_0)}{\kappa_i(\kappa_i^2 + q_0 r_0)} \delta_{n0} \hat{c} - \frac{q_0^2}{\kappa_i^2} E_{\alpha}^{(n)} + E_{-\alpha}^{(n)}, \quad (5.36b)$$

$$G_i \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\kappa_i - \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right) \right]^{-n} G_i^{(n)} \quad (5.36c)$$

$$\text{onde } G_i^{(n)} = -\frac{r_0}{\kappa_i} H^{(n)} - \frac{r_0(\kappa_i^2 - q_0 r_0)}{\kappa_i(\kappa_i^2 + q_0 r_0)} \delta_{n0} \hat{c} + E_{\alpha}^{(n)} - \frac{r_0^2}{\kappa_i^2} E_{-\alpha}^{(n)}. \quad (5.36d)$$

No limite $q_0, r_0 \rightarrow 0$ recuperamos os vértices utilizados com condição de contorno nula (4.14)¹. Pode-se verificar que estes vértices satisfazem as seguintes equações de autovalor para vácuo (5.29),

$$[\Omega^{(n)}, F_i] = - \left[\frac{1}{2} \left(\kappa_i - \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right) \right]^{n-1} \left[\kappa_i + \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right] F_i, \quad (5.37a)$$

$$[\Omega^{(n)}, G_i] = + \left[\frac{1}{2} \left(\kappa_i - \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right) \right]^{n-1} \left[\kappa_i + \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right] G_i. \quad (5.37b)$$

De fato, estes operadores de vértice foram obtidos exigindo uma equação de autovalor. Depois de alguns cálculos chegamos na forma proposta em (5.36). A dependência espaço-temporal das soluções do sistema (3.34), tendo a equação NLS com condição de contorno constante como caso particular (3.37), é então dada por

$$\begin{aligned} \eta_i &= + \left(\kappa_i + \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right) x + \frac{1}{2} \left(\kappa_i^2 - \frac{(q_0 r_0)^2}{\kappa_i^2} \right) t, \\ \xi_i &= - \left(\kappa_i + \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right) x - \frac{1}{2} \left(\kappa_i^2 - \frac{(q_0 r_0)^2}{\kappa_i^2} \right) t. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Para o sistema (3.39) temos

$$\begin{aligned} \eta_i &= + \left(\kappa_i + \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right) x + \frac{1}{4} \left(\kappa_i^3 - 3\kappa_i q_0 r_0 - 3 \frac{(q_0 r_0)^2}{\kappa_i} + \frac{(q_0 r_0)^3}{\kappa_i^3} \right) t, \\ \xi_i &= - \left(\kappa_i + \frac{q_0 r_0}{\kappa_i} \right) x - \frac{1}{4} \left(\kappa_i^3 - 3\kappa_i q_0 r_0 - 3 \frac{(q_0 r_0)^2}{\kappa_i} + \frac{(q_0 r_0)^3}{\kappa_i^3} \right) t. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Para obter a forma explícita das funções tau, ainda falta calcular os elementos de matriz envolvendo os operadores de vértice (5.36). Os elementos de matriz envolvendo

¹A menos de um fator $1/2$, $\kappa_i/2 \rightarrow \kappa_i$.

um vértice são

$$\langle \mu_0 | G_i | \mu_0 \rangle = -\frac{r_0(\kappa_i^2 - q_0 r_0)}{\kappa_i(\kappa_i^2 + q_0 r_0)}, \quad \langle \mu_0 | F_i | \mu_0 \rangle = \frac{q_0(\kappa_i^2 - q_0 r_0)}{\kappa_i(\kappa_i^2 + q_0 r_0)}, \quad (5.40a)$$

$$\langle \mu_1 | G_i | \mu_1 \rangle = \frac{-2\kappa_i r_0}{\kappa_i^2 + q_0 r_0}, \quad \langle \mu_1 | F_i | \mu_1 \rangle = \frac{-2q_0^2 r_0}{\kappa_i(\kappa_i^2 + q_0 r_0)}, \quad (5.40b)$$

$$\langle \mu_1 | G_i | \mu_2 \rangle = 1, \quad \langle \mu_1 | F_i | \mu_2 \rangle = -\frac{q_0^2}{\kappa_i^2}, \quad (5.40c)$$

$$\langle \mu_2 | G_i | \mu_1 \rangle = -\frac{r_0^2}{\kappa_i^2}, \quad \langle \mu_2 | F_i | \mu_1 \rangle = 1. \quad (5.40d)$$

Note que no limite $q_0, r_0 \rightarrow 0$ recuperamos os resultados (4.23). Ao contrário do caso de condição de contorno nula, a solução contendo um vértice apenas não é trivial. Escolhendo o elemento de grupo $g = e^{F_1}$ temos

$$\begin{aligned} \tau_{00} &= 1 + \frac{q_0(\kappa_1^2 - q_0 r_0)}{\kappa_1(\kappa_1^2 + q_0 r_0)} e^{\eta_1}, \\ \tau_{11} &= 1 - \frac{2q_0^2 r_0}{\kappa_1(\kappa_1^2 + q_0 r_0)} e^{\eta_1}, \\ \tau_{12} &= -\frac{q_0^2}{\kappa_1^2} e^{\eta_1}, \\ \tau_{21} &= e^{\eta_1}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Nestas expressões devemos substituir a relação de dispersão correta, (5.38) ou (5.39). Resultado análogo vale para G_1 , trocando $\eta_1 \rightarrow \xi_1$ e os elementos de matriz. Para uma solução contendo dois vértices na forma $g = e^{F_1} e^{G_2}$ temos

$$\tau_{00} = 1 + \langle \mu_0 | F_1 | \mu_0 \rangle e^{\eta_1} + \langle \mu_0 | G_2 | \mu_0 \rangle e^{\xi_2} + \langle \mu_0 | F_1 G_2 | \mu_0 \rangle e^{\eta_1 + \xi_2}, \quad (5.42a)$$

$$\tau_{11} = 1 + \langle \mu_1 | F_1 | \mu_1 \rangle e^{\eta_1} + \langle \mu_1 | G_2 | \mu_1 \rangle e^{\xi_2} + \langle \mu_1 | F_1 G_2 | \mu_1 \rangle e^{\eta_1 + \xi_2}, \quad (5.42b)$$

$$\tau_{12} = \langle \mu_1 | F_1 | \mu_2 \rangle e^{\eta_1} + \langle \mu_1 | G_2 | \mu_2 \rangle e^{\xi_2} + \langle \mu_1 | F_1 G_2 | \mu_2 \rangle e^{\eta_1 + \xi_2}, \quad (5.42c)$$

$$\tau_{21} = \langle \mu_2 | F_1 | \mu_1 \rangle e^{\eta_1} + \langle \mu_2 | G_2 | \mu_1 \rangle e^{\xi_2} + \langle \mu_2 | F_1 G_2 | \mu_1 \rangle e^{\eta_1 + \xi_2}. \quad (5.42d)$$

Além dos elementos de matriz de um vértice, a propriedade de nilpotência foi explicita-

mente verificada e os seguintes elementos de matriz de dois vértices calculados,

$$\langle \mu_0 | F_i G_j | \mu_0 \rangle = \frac{(\kappa_i^2 - q_0 r_0)(\kappa_j^2 - q_0 r_0)(\kappa_i \kappa_j + q_0 r_0)^2}{(\kappa_i^2 + q_0 r_0)(\kappa_j^2 + q_0 r_0)\kappa_i \kappa_j (\kappa_i - \kappa_j)^2}, \quad (5.43a)$$

$$\langle \mu_1 | F_i G_j | \mu_1 \rangle = \frac{\{q_0 r_0(\kappa_i - \kappa_j)^2 + (\kappa_i \kappa_j - q_0 r_0)^2\}(\kappa_i \kappa_j + q_0 r_0)^2}{(\kappa_i^2 + q_0 r_0)(\kappa_j^2 + q_0 r_0)\kappa_i^2 (\kappa_i - \kappa_j)^2}, \quad (5.43b)$$

$$\langle \mu_1 | F_i G_j | \mu_2 \rangle = -2q_0 \frac{(\kappa_i \kappa_j - q_0 r_0)(\kappa_i \kappa_j + q_0 r_0)^2}{(\kappa_i^2 + q_0 r_0)(\kappa_j^2 + q_0 r_0)(\kappa_i - \kappa_j)\kappa_i^2}, \quad (5.43c)$$

$$\langle \mu_2 | F_i G_j | \mu_1 \rangle = -2r_0 \frac{(\kappa_i \kappa_j - q_0 r_0)(\kappa_i \kappa_j + q_0 r_0)^2}{(\kappa_i^2 + q_0 r_0)(\kappa_j^2 + q_0 r_0)(\kappa_i - \kappa_j)\kappa_j^2}. \quad (5.43d)$$

Durante a realização destes cálculos, Zakharov e Gelash [11] consideraram em seu recente trabalho, novas soluções da equação focusing NLS (3.37). Nosso método inclui não somente soluções desta equação, mas de toda a hierarquia AKNS e temos uma prescrição sistemática para gerar N-sólitons com condição de contorno constante. Além disso, nosso método mostra a origem algébrica da relação de dispersão e a interação entre ondas do tipo sóliton através dos elementos de matriz dos operadores de vértice. Mais detalhes podem ser encontrados em [32].

Capítulo 6

Construção generalizada de hierarquias integráveis

Vamos propor uma generalização na construção discutida na seção 2.3 para a equação de curvatura nula. Fazendo isso, poderemos incorporar uma classe mais abrangente de modelos integráveis dentro de uma classificação algébrica sistemática.

Seja $\widehat{\mathcal{G}}$ uma álgebra de Kac-Moody semi-simples e Q um operador de gradação tal que

$$\widehat{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{G}}^{(n)} \quad \text{onde} \quad [Q, \widehat{\mathcal{G}}^{(n)}] = n\widehat{\mathcal{G}}^{(n)}, \quad [\widehat{\mathcal{G}}^{(n)}, \widehat{\mathcal{G}}^{(m)}] \subset \widehat{\mathcal{G}}^{(n+m)}. \quad (6.1)$$

Seja $E^{(p)}$ um elemento semi-simples e constante de $\widehat{\mathcal{G}}^{(p)}$, que decompõe a álgebra nos subespaços kernel e image, $\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$, definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\equiv \{X \in \widehat{\mathcal{G}} \mid [E^{(p)}, X] = 0\}, \\ \mathcal{M} &\equiv \{X \in \widehat{\mathcal{G}} \mid \exists Y \in \widehat{\mathcal{G}} \text{ tal que } X = [E^{(p)}, Y]\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

A identidade de Jacobi implica que

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}, \quad (6.3)$$

e também assumimos a estrutura de espaço simétrica

$$[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{K}. \quad (6.4)$$

Seja $A^{(q)} \in \mathcal{M}^{(q)}$ o operador que contém os campos da teoria. Considere uma base de $\mathcal{M}^{(q)}$ dada por $\{T_1^{(q)}, \dots, T_n^{(q)}\}$ e os campos $u = (u_1, \dots, u_n)$. Então, temos a combinação

linear $A^{(q)}[u] = u_1 T_1^{(q)} + \dots + u_n T_n^{(q)}$. Considere o par de Lax definido por

$$\begin{aligned} U[u] &\equiv E^{(p)} + A^{(q)}[u], \\ V[u] &\equiv \sum_{i=-m \times p}^{n \times p} D^{(i)}[u] = D^{(np)} + D^{(np-1)} + \dots + D^{(q)} + \dots + D^{(-mp)}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde $p \geq q$. A construção da seção 2.3, proposta em [2, 1], corresponde ao caso específico onde $(p, q) = (1, 0)$ — veja (2.9) e (2.10). Quando projetamos a equação de curvatura nula em cada subespaço graduado, vemos que o termo $E^{(p)}$ é responsável por acoplar as equações de graus subsequentes. A projeção da equação de curvatura nula no subespaço $\mathcal{M}^{(q)}$ fornece as equações de movimento.

A condição de solubilidade da equação de curvatura nula é de que todos os operadores $D^{(j)}$ sejam determinados em função dos campos de $A^{(q)}[u]$, pelas equações de grau diferente de q e pela componente \mathcal{K} da projeção em grau q . Contudo, não são para todos os valores de (p, q) que isso é possível. Se $p = 0$ as equações de diferentes graus não se acoplam e portanto não gera modelos. Se $(p, q) = (2, 0)$ as equações tem a mesma estrutura do caso $(p, q) = (1, 0)$, onde as equações se acoplam de dois em dois graus e os operadores de grau ímpar são irrelevantes¹. Portanto, os casos interessantes correspondem a $p \geq 1$ e $p = q + \alpha$ onde $\alpha = 0, 1$. Além do caso $(p, q) = (1, 0)$, vamos considerar as construções $(p, q) = (1, 1)$ e $(p, q) = (2, 1)$, que correspondem a hierarquias interessantes como veremos.

Em [42, 43] foi considerada uma generalização para operadores de graus mais altos, especificamente para os modelos relativísticos de Toda. O caso $p = q$ e também outros fluxos temporais, correspondente a modelos não relativísticos, porém igualmente relevantes, não foram considerados.

6.1 Segunda construção $(p, q) = (1, 1)$

Considere o par de Lax dado por (6.5) no caso específico onde $(p, q) = (1, 1)$. A projeção da equação de curvatura nula em cada subespaço graduado implica no seguinte conjunto

¹Isso equivale a trocar o parâmetro spectral $\lambda \rightarrow \lambda^2$.

de equações

$$\begin{aligned}
[E^{(1)} + A^{(1)}, D^{(n)}] &= 0 && \text{grau } n + 1 \\
\partial_x D^{(n)} + [E^{(1)} + A^{(1)}, D^{(n-1)}] &= 0 && \text{grau } n \\
&\vdots \\
\partial_x D^{(2)} + [E^{(1)} + A^{(1)}, D^{(1)}] &= 0 && \text{grau } 2 \\
\partial_x D^{(1)} - \partial_t A^{(1)} + [E^{(1)} + A^{(1)}, D^{(0)}] &= 0 && \text{grau } 1 \\
\partial_x D^{(0)} + [E^{(1)} + A^{(1)}, D^{(-1)}] &= 0 && \text{grau } 0 \\
&\vdots \\
\partial_x D^{(-m+1)} + [E^{(1)} + A^{(1)}, D^{(-m)}] &= 0 && \text{grau } -m + 1 \\
\partial_x D^{(-m)} &= 0 && \text{grau } -m
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Cada uma destas equações se decompõe ainda em componentes \mathcal{K} e \mathcal{M} . Note que a equação de movimento é dada pela projeção em $\widehat{\mathcal{G}}^{(1)}$,

$$\partial_x D_{\mathcal{M}}^{(1)} - \partial_t A^{(1)} + [E^{(1)}, D_{\mathcal{M}}^{(0)}] + [A^{(1)}, D_{\mathcal{K}}^{(0)}] = 0. \tag{6.7}$$

Os fluxos de tempo positivo envolvem somente operadores de grau maior ou igual a 1, i.e. $V = \sum_{i=1}^n D^{(i)}$. A equação de movimento neste caso é dada por

$$\partial_x D_{\mathcal{M}}^{(1)} - \partial_t A^{(1)} = 0. \tag{6.8}$$

Os fluxos de tempo negativo envolvem somente operadores de grau menor ou igual a 1, i.e. $V = \sum_{i=-m}^1 D^{(i)}$ e a equação de movimento mantém a forma (6.7). A equação (6.7) também fornece modelos mistos se considerarmos operadores de grau positivo e negativo simultaneamente.

6.2 Terceira construção $(p, q) = (2, 1)$

Considere o caso $(p, q) = (2, 1)$ e portanto o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}
[E^{(2)}, D^{(2n)}] &= 0 && \text{grau } 2n + 2 \\
[E^{(2)}, D^{(2n-1)}] + [A^{(1)}, D^{(2n)}] &= 0 && \text{grau } 2n + 1 \\
\partial_x D^{(2n)} + [E^{(2)}, D^{(2n-2)}] + [A^{(1)}, D^{(2n-1)}] &= 0 && \text{grau } 2n \\
&\vdots \\
\partial_x D^{(2)} + [E^{(2)}, D^{(0)}] + [A^{(1)}, D^{(1)}] &= 0 && \text{grau } 2 \\
\partial_x D^{(1)} - \partial_t A^{(1)} + [E^{(2)}, D^{(-1)}] + [A^{(1)}, D^{(0)}] &= 0 && \text{grau } 1 \\
\partial_x D^{(0)} + [E^{(2)}, D^{(-2)}] + [A^{(1)}, D^{(-1)}] &= 0 && \text{grau } 0 \\
&\vdots \\
\partial_x D^{(-2m+2)} + [E^{(2)}, D^{(-2m)}] + [A^{(1)}, D^{(-2m+1)}] &= 0 && \text{grau } -2m + 2 \\
\partial_x D^{(-2m+1)} + [A^{(1)}, D^{(-2m)}] &= 0 && \text{grau } -2m + 1 \\
\partial_x D^{(-2m)} &= 0 && \text{grau } -2m
\end{aligned} \tag{6.9}$$

A equação de movimento contendo a hierarquia completa é dada por

$$\partial_x D_{\mathcal{M}}^{(1)} - \partial_t A^{(1)} + [E^{(2)}, D_{\mathcal{M}}^{(-1)}] + [A^{(1)}, D_{\mathcal{K}}^{(0)}] = 0. \tag{6.10}$$

Fluxos positivos são gerados com $V = \sum_{i=1}^{2n} D^{(i)}$ e a equação de movimento tem a forma

$$\partial_x D_{\mathcal{M}}^{(1)} - \partial_t A^{(1)} = 0. \tag{6.11}$$

Fluxos negativos são gerados com $V = \sum_{i=-2m}^0 D^{(i)}$ e a equação de movimento fica

$$\partial_t A^{(1)} - [E^{(2)}, D_{\mathcal{M}}^{(-1)}] - [A^{(1)}, D_{\mathcal{K}}^{(0)}] = 0. \tag{6.12}$$

A equação (6.10) também é capaz de fornecer modelos mistos, combinando uma equação de tempo positivo com uma equação de tempo negativo.

6.3 Hierarquia de Wadati-Konno-Ichikawa

A hierarquia de Wadati-Konno-Ichikawa (WKI) foi proposta em [12] e é interessante por conter não linearidades mais fortes do que no caso AKNS. Além disso, a dispersão e não

linearidade são acopladas num único termo, ao contrário da maioria das equações que é uma soma de termos lineares e não lineares. A hierarquia WKI se enquadra na construção proposta em (6.5) com $(p, q) = (1, 1)$.

Considere a álgebra $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ e o operador de gradação homogêneo $Q = \widehat{d}$, de forma que a decomposição da álgebra fica

$$\widehat{\mathcal{G}}^{(i)} = \{E_\alpha^{(i)}, E_{-\alpha}^{(i)}, H^{(i)}\}. \quad (6.13)$$

Seja $E^{(1)} = H^{(1)}$ e portanto $A^{(1)} = q(x, t)E_\alpha^{(1)} + r(x, t)E_{-\alpha}^{(1)}$. Devido a (6.13) temos $D^{(i)} = a_i E_\alpha^{(i)} + b_i E_{-\alpha}^{(i)} + c_i H^{(i)}$, onde os coeficientes são funções que serão determinadas em termos dos campos q e r .

6.3.1 Fluxos de tempo positivo

Considerando somente fluxos de tempo positivo da hierarquia WKI, temos a equação de curvatura nula

$$[\partial_x + H^{(1)} + qE_\alpha^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)}, \partial_t + D^{(n)} + D^{(n-1)} + \dots + D^{(1)}] = 0. \quad (6.14)$$

O caso $n = 1$ fornece as relações $q_t = q_x$ e $r_t = r_x$, como ocorre em todas as hierarquias integráveis. Considere o caso $n = 2$. A projeção da equação (6.14) num subespaço de grau 3 fornece $a_2 = c_2 q$ e $b_2 = c_2 r$. A projeção em grau 2 implica no sistema

$$a_1 = c_1 q - \frac{1}{2} \partial_x a_2, \quad b_1 = c_1 r + \frac{1}{2} \partial_x b_2, \quad \partial_x c_2 = r a_1 - q b_1. \quad (6.15)$$

Substituindo as duas primeiras equações na terceira obtemos

$$\frac{(c_2)_x}{c_2} = -\frac{(qr)_x}{2(1+qr)}, \quad \partial_x \ln(c_2) = -\frac{1}{2} \partial_x \ln(1+qr), \quad c_2 = (1+qr)^{-1/2}. \quad (6.16)$$

Utilizando este resultado novamente no sistema anterior,

$$a_1 = c_1 q - \frac{1}{2} \left(\frac{q}{(1+qr)^{1/2}} \right)_x, \quad b_1 = c_1 r + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{(1+qr)^{1/2}} \right)_x. \quad (6.17)$$

A componente \mathcal{K} da projeção em grau 1 implica que $\partial_x c_1 = 0$ e a componente \mathcal{M} nas equações de movimento

$$\begin{aligned} \partial_t q + \frac{1}{2} \partial_x^2 \left(\frac{q}{(1+qr)^{1/2}} \right) &= 0, \\ \partial_t r - \frac{1}{2} \partial_x^2 \left(\frac{r}{(1+qr)^{1/2}} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde escolhemos $c_1 = 0$. Este sistema de equações é o análogo do sistema AKNS para esta hierarquia. O par de Lax explícito para o modelo (6.18) é dado por

$$\begin{aligned} U &= H^{(1)} + qE_\alpha^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)}, \\ V &= \frac{q}{(1+qr)^{1/2}}E_\alpha^{(2)} + \frac{r}{(1+qr)^{1/2}}E_{-\alpha}^{(2)} + \frac{1}{(1+qr)^{1/2}}H^{(2)} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{q}{(1+qr)^{1/2}} \right)_x E_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{(1+qr)^{1/2}} \right)_x E_{-\alpha}^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Fazendo $q = \psi$, $r = \alpha\psi^*$, $t \rightarrow -i$ e $x \rightarrow ix$, obtemos o análogo da equação NLS para a hierarquia WKI

$$i\partial_t\psi - \frac{1}{2}\partial_x^2 \left(\frac{\psi}{(1+\alpha|\psi|^2)^{1/2}} \right) = 0. \quad (6.20)$$

Considere agora o caso $n = 3$. As projeções em graus 4 e 3 fornecem os mesmos coeficientes do caso anterior

$$c_3 = (1+qr)^{-1/2}, \quad a_3 = q(1+qr)^{-1/2}, \quad b_3 = r(1+qr)^{-1/2}, \quad (6.21)$$

$$a_2 = c_2q - \frac{1}{2} \left(\frac{q}{(1+qr)^{1/2}} \right)_x, \quad b_2 = c_2r + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{(1+qr)^{1/2}} \right)_x. \quad (6.22)$$

A projeção em grau 2 fornece o sistema

$$\partial_x a_2 + 2a_1 - 2c_1q = 0, \quad \partial_x b_2 - 2b_1 + 2c_1r = 0, \quad \partial_x c_2 + b_1q - a_1r = 0. \quad (6.23)$$

Substituindo as duas primeiras equações na terceira obtemos uma equação diferencial para o coeficiente c_2 ,

$$(c_2)_x(1+qr) + \frac{c_2}{2}(qr)_x = \frac{r}{4} \left(\frac{q}{(1+qr)^{1/2}} \right)_{xx} - \frac{q}{4} \left(\frac{r}{(1+qr)^{1/2}} \right)_{xx}. \quad (6.24)$$

A solução desta equação é dada por

$$c_2 = \frac{1}{4} \frac{q_x r - q r_x}{(1+qr)^{3/2}}. \quad (6.25)$$

Com este coeficiente determinamos todos os coeficientes anteriores. A projeção em grau 1 fornece $\partial_x c_1 = 0$. Escolhendo $c_1 = 0$, obtemos portanto as equações de movimento

$$\begin{aligned} \partial_t q - \frac{1}{4} \partial_x^2 \left(\frac{q_x}{(1+qr)^{3/2}} \right) &= 0 \\ \partial_t r - \frac{1}{4} \partial_x^2 \left(\frac{r_x}{(1+qr)^{3/2}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

O par de Lax deste modelo é

$$\begin{aligned}
U &= H^{(1)} + qE_{\alpha}^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)}, \\
V &= \frac{q}{(1+qr)^{1/2}}E_{\alpha}^{(3)} + \frac{r}{(1+qr)^{1/2}}E_{-\alpha}^{(3)} + \frac{1}{(1+qr)^{1/2}}H^{(3)} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{q_x}{(1+qr)^{3/2}}E_{\alpha}^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{r_x}{(1+qr)^{3/2}}E_{-\alpha}^{(2)} + \frac{1}{4}\frac{q_xr - qr_x}{(1+qr)^{3/2}}H^{(2)} + \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\frac{q_x}{(1+qr)^{3/2}}\right)_x E_{\alpha}^{(1)} + \frac{1}{4}\left(\frac{r_x}{(1+qr)^{3/2}}\right)_x E_{-\alpha}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Fazendo $r = q = u$ e $t \rightarrow -4t$ obtemos a equação

$$\partial_t u + \partial_x^2 \left(\frac{u_x}{(1+u^2)^{3/2}} \right) = 0. \tag{6.28}$$

Esta equação foi obtida em [13] para descrever uma barra elástica sobre um impulso em uma de suas extremidades, e por isso é conhecida como “elastic beam equation”. Este modelo tem aplicações práticas no estudo da aerodinâmica de uma asa de avião por exemplo. Fazendo $r = 1$, $q = v - 1$ e $t \rightarrow -2t$ o sistema (6.26) se reduz a equação de Dym

$$v_t = (v^{-1/2})_{xxx}. \tag{6.29}$$

Esta equação apareceu pela primeira vez num trabalho de Kruskal [33] e é atribuída a um trabalho não publicado de Harry Dym.

6.3.2 Fluxos de tempo negativo

Até onde sabemos, fluxos negativos da hierarquia WKI [12] não foram previamente considerados. Vamos considerar o primeiro fluxo negativo e mostrar que uma redução deste sistema corresponde a um modelo interessante, que foi proposto recentemente para descrever pulsos ultra-curtos em meios não lineares e tem atraído atenção em pesquisas recentes.

A parte negativa da hierarquia WKI é gerada pela equação de curvatura nula

$$[\partial_x + H^{(1)} + qE_{\alpha}^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)}, \partial_t + D^{(-m)} + \dots + D^{(0)} + D^{(1)}] = 0. \tag{6.30}$$

Considere $m = 1$, correspondente ao primeiro fluxo negativo. A projeção em grau -1 implica que a_{-1} , b_{-1} e c_{-1} são todos constantes. A projeção em grau zero implica no

sistema

$$\begin{aligned}
\partial_x a_0 + 2a_{-1} - 2c_{-1}q &= 0, \\
\partial_x b_0 - 2b_{-1} + 2c_{-1}r &= 0, \\
\partial_x c_0 + b_{-1}q - a_{-1}r &= 0.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Escolhendo as constantes arbitrárias $a_{-1} = b_{-1} = 0$ e integrando este sistema obtemos

$$a_0 = 2c_{-1}\partial_x^{-1}q, \quad b_0 = -2c_{-1}\partial_x^{-1}r, \quad c_0 = \text{const.} \tag{6.32}$$

A projeção em grau 2 implica que $a_1 = c_1q$ e $b_1 = c_1r$. A projeção em grau 1 fornece as equações de movimento e uma equação adicional,

$$\begin{aligned}
\partial_x a_1 + 2a_0 - 2c_0q &= q_t, \\
\partial_x b_1 - 2b_0 + 2c_0r &= r_t, \\
\partial_x c_1 + b_0q - a_0r &= 0.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Utilizando esta última equação obtemos

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2c_{-1}\partial_x^{-1} (r\partial_x^{-1}q + q\partial_x^{-1}r), \\
a_1 &= 2c_{-1}q\partial_x^{-1} (r\partial_x^{-1} + q\partial_x^{-1}r), \\
b_1 &= 2c_{-1}r\partial_x^{-1} (r\partial_x^{-1} + q\partial_x^{-1}r).
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Escolhendo as constantes arbitrárias como $c_0 = 0$ e $c_{-1} = 1$, obtemos as equações de movimento não locais

$$\begin{aligned}
q_t &= 2\partial_x [q\partial_x^{-1} (r\partial_x^{-1}q + q\partial_x^{-1}r)] + 4\partial_x^{-1}q, \\
r_t &= 2\partial_x [r\partial_x^{-1} (r\partial_x^{-1}q + q\partial_x^{-1}r)] + 4\partial_x^{-1}r.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Este sistema de equações pode ser escrito numa forma local, introduzindo novos campos definidos por

$$q \equiv \phi_x, \quad r \equiv \rho_x. \tag{6.36}$$

Assim temos $r\partial_x^{-1}q + q\partial_x^{-1}r = \partial_x(\phi\rho)$ e portanto

$$\begin{aligned}
\phi_{xt} &= 4\phi + 2(\phi\rho\phi_x)_x, \\
\rho_{xt} &= 4\rho + 2(\phi\rho\rho_x)_x.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Estas equações são simétricas pela troca dos campos e correspondem ao análogo das equações de Lund-Regge para a hierarquia WKI. Seu par de Lax é dado por

$$\begin{aligned} U &= H^{(1)} + \phi_x E_\alpha^{(1)} + \rho_x E_{-\alpha}^{(1)}, \\ V &= 2\phi\rho\phi_x E_\alpha^{(1)} + 2\phi\rho\rho_x E_{-\alpha}^{(1)} + 2\phi\rho H^{(1)} + 2\phi E_\alpha^{(0)} - 2\rho E_{-\alpha}^{(0)} + H^{(-1)}. \end{aligned} \tag{6.38}$$

6.3.3 A equação de pulso curto

Fazendo $t \rightarrow \frac{1}{4}t$ e $\rho = \phi = u$ no sistema de equações (6.37), obtemos a equação

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6} (u^3)_{xx}. \tag{6.39}$$

Esta equação foi recentemente proposta por Schäfer e Wayne [14] para descrever pulsos ultra-curtos em meios não lineares. A propagação de pulsos em fibras óticas é usualmente descrita pela equação NLS com não linearidade cúbica. Entretanto, a equação NLS não é uma boa aproximação das equações de Maxwell no limite onde os pulsos são estreitos. Por outro lado, a equação (6.39) se torna uma aproximação cada vez melhor neste regime e por isso ficou conhecida como equação de pulso curto (SPE — short pulse equation). Em [34] Sakovich e Sakovich perceberam que esta equação era integrável, em [35] Brunelli obteve operadores de recursão e considerou a estrutura bi-Hamiltoniana. Soluções periódicas foram obtidas por Matsuno em [36] e uma derivação matematicamente precisa desta equação, partindo das equações de Maxwell, foi feita no recente trabalho de Pelinovsky e Schneider [37]. Note que o sistema (6.37) corresponde a uma generalização de duas componentes da equação (6.39).

6.4 Hierarquia de Kaup-Newell

Kaup e Newell (KN) [15] foram os primeiros a resolver a equação de Schrödinger contendo uma derivada de uma não linearidade cúbica (equação DNLS — derivative nonlinear Schrödinger), utilizando o espalhamento inverso. O par de Lax utilizado por eles pode ser generalizado para se construir uma hierarquia de equações, que recebe o nome de hierarquia KN. Esta hierarquia se enquadra no caso $(p, q) = (2, 1)$ da construção proposta em (6.5).

Considere a álgebra $\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{s\ell}_2$ e operador de gradação homogêneo $Q = \widehat{d}$, de forma que a decomposição da álgebra fica

$$\widehat{\mathcal{G}}^{(i)} = \{E_\alpha^{(i)}, E_{-\alpha}^{(i)}, H^{(i)}\}. \quad (6.40)$$

Seja $E^{(2)} = H^{(2)}$ e portanto $A^{(1)} = q(x, t)E_\alpha^{(1)} + r(x, t)E_{-\alpha}^{(1)}$. Devido a (6.40) temos $D^{(i)} = a_i E_\alpha^{(i)} + b_i E_{-\alpha}^{(i)} + c_i H^{(i)}$.

6.4.1 Fluxos de tempo positivo

Considerando fluxos positivos da hierarquia KN, temos a equação de curvatura nula

$$[\partial_x + H^{(2)} + qE_\alpha^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)}, \partial_t + D^{(2n)} + D^{(2n-1)} + \dots + D^{(1)}] = 0. \quad (6.41)$$

Considere o caso $n = 2$. Projetando as equações em cada grau é possível obter todos os coeficientes a_i, b_i, c_i e as integrações necessárias para obtê-los são triviais. Tomando as constantes de integração como zero e escolhendo o único coeficiente constante e arbitrário como $c_4 = 1$, obtemos os sistema de equações

$$\begin{aligned} q_t &= -\frac{1}{2}q_{xx} - \frac{1}{2}(q^2 r)_x, \\ r_t &= \frac{1}{2}r_{xx} - \frac{1}{2}(qr^2)_x. \end{aligned} \quad (6.42)$$

O par de Lax deste sistema é dado por

$$U = H^{(2)} + qE_\alpha^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)}, \quad (6.43a)$$

$$\begin{aligned} V &= H^{(4)} + qE_\alpha^{(3)} + rE_{-\alpha}^{(3)} - \frac{1}{2}qrH^{(2)} - \\ &\quad - \frac{1}{2}(q^2r + qx)E_\alpha^{(1)} - \frac{1}{2}(qr^2 - r_x)E_{-\alpha}^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.43b)$$

Fazendo $q = \psi$, $r = \alpha\psi^*$ e $t \rightarrow -2it$ no sistema (6.42), obtemos a conhecida equação DNLS

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \alpha(|\psi|^2\psi)_x = 0. \quad (6.44)$$

As soluções desta equação, utilizando o espalhamento inverso foram consideradas em [15]. A equação DNLS possui amplas aplicações em física de plasmas e ótica não linear.

Consideramos agora o caso $n = 3$. Os cálculos são um pouco mais trabalhosos que no caso anterior, mas não apresentam dificuldades maiores. O sistema de equações resultante,

escolhendo as constantes de integração nulas e o único coeficiente arbitrário e constante como $c_6 = 1$, é dado por

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{1}{4}q_{xxx} + \frac{3}{8}(q^3r^2)_x + \frac{3}{4}(qrq_x)_x, \\ r_t &= \frac{1}{4}r_{xxx} + \frac{3}{8}(q^2r^3)_x - \frac{3}{4}(qrr_x)_x. \end{aligned} \quad (6.45)$$

O par de Lax deste modelo é

$$U = H^{(2)} + qE_\alpha^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)}, \quad (6.46a)$$

$$\begin{aligned} V &= H^{(6)} + qE_\alpha^{(5)} + rE_{-\alpha}^{(5)} - \frac{1}{2}qrH^{(4)} - \frac{1}{2}(q^2r + qx)E_\alpha^{(3)} - \\ &\quad - \frac{1}{2}(qr^2 - r_x)E_{-\alpha}^{(3)} + \frac{1}{8}(2rq_x - 2qr_x + 3q^2r^2)H^{(2)} + \\ &\quad + \frac{1}{8}(2q_{xx} + 6qrq_x + 3q^3r^2)E_\alpha^{(1)} + \frac{1}{8}(2r_{xx} - 6qrr_x + 3q^2r^3)E_{-\alpha}^{(1)} \end{aligned} \quad (6.46b)$$

Fazendo $t \rightarrow it$, $x \rightarrow -ix$ e $q = u = r^*$ em (6.45) obtemos a equação

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{8}(|u|^4u)_x - \frac{3}{4}i(|u|^2u_x)_x, \quad (6.47)$$

que possui uma derivada de uma não linearidade de quinta ordem.

6.4.2 Fluxos de tempo negativo

Fluxos negativos da hierarquia KN, utilizando a construção (6.5), são gerados pela equação de curvatura nula

$$[\partial_x + H^{(2)} + qE_\alpha^{(1)} + rE_{-\alpha}^{(1)}, \partial_t + D^{(-2m)} + D^{(-2m+1)} + \dots + D^{(0)}] = 0. \quad (6.48)$$

Considere o primeiro fluxo negativo, correspondente a $m = 1$. A projeção de (6.48) em grau 2 implica que $a_0 = b_0 = 0$. A projeção em grau -2 em a_{-2} , b_{-2} , c_{-2} todos constantes. A projeção em grau -1 em $a_{-1} = 2c_{-2}\partial_x^{-1}q$ e $b_{-1} = -2c_{-2}\partial_x^{-1}r$. A projeção em grau zero implica que $a_{-2} = b_{-2} = c_{-1} = 0$ e $c_0 = 2c_{-2}\partial_x^{-1}(q\partial_x^{-1}r + r\partial_x^{-1}q)$. Assim, escolhendo a constante arbitrária $c_{-2} = 1$, obtemos as equações não locais

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}q_t &= \partial_x^{-1}q - q\partial_x^{-1}(q\partial_x^{-1}r + r\partial_x^{-1}q), \\ \frac{1}{4}r_t &= \partial_x^{-1}r + r\partial_x^{-1}(q\partial_x^{-1}r + r\partial_x^{-1}q). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Esta equação pode ser escrita numa forma local introduzindo os campos

$$q \equiv \phi_x, \quad r \equiv \rho_x. \quad (6.50)$$

Obtemos então as equações de movimento

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\phi_{xt} &= \phi - \phi\rho\phi_x, \\ \frac{1}{4}\rho_{xt} &= \rho + \phi\rho\rho_x,\end{aligned}\tag{6.51}$$

com seu par de Lax dado por

$$U = H^{(2)} + \phi_x E_\alpha^{(1)} + \rho_x E_{-\alpha}^{(1)},\tag{6.52a}$$

$$V = H^{(-2)} + 2\phi E_\alpha^{(-1)} - 2\rho E_{-\alpha}^{(-1)} + 2\phi\rho H^{(0)}.\tag{6.52b}$$

O sistema (6.51) é conhecido como sistema modificado de Pohlmeyer-Lund-Regge e é equivalente a terceira equação de Painlevé de acordo com [17]. Até onde sabemos, este modelo não foi previamente reconhecido como sendo um fluxo negativo da hierarquia KN.

O sistema de equações (6.51) é invariante pelas transformações

$$x \rightarrow \alpha x, \quad t \rightarrow \alpha^{-1}t, \quad \phi \rightarrow \alpha^{1/2}\phi, \quad \rho \rightarrow \alpha^{1/2}\rho,\tag{6.53}$$

onde α é uma constante arbitrária.

Fazendo $t \rightarrow it$, $x \rightarrow -ix$ e $r = q^*$ o sistema (6.49) se reduz a equação não local

$$\frac{i}{4}q_t = i\partial_x^{-1}q - q\partial_x^{-1}(q\partial_x^{-1}q^* + q^*\partial_x^{-1}q)\tag{6.54}$$

e a sua equação complexo conjugada. A forma local desta equação é uma redução do sistema (6.51)

$$\frac{1}{4}\phi_{xt} = \phi - i|\phi|^2\phi_x.\tag{6.55}$$

A equação (6.54) — ou equivalentemente (6.55) — é equivalente ao modelo de Thirring bosônico como mostraremos a seguir. Note que o sistema (6.51) é mais geral, contendo o modelo de Thirring bosônico como caso particular. Portanto, o sistema (6.51) relaciona diversos modelos importantes.

6.4.3 Modelo de Thirring bosônico

Esta relação com o modelo de Thirring bosônico foi motivada pelos resultados de [38]. Considere a equação (6.54), bem como sua respectiva equação conjugada. É imediato que

$$\frac{1}{4}(q^*q_t + qq_t^*) = q^* \int q dx + q \int q^* dx.\tag{6.56}$$

Portanto, fazendo a mudança $q \rightarrow -\frac{1}{2}q$, $t \rightarrow -\frac{1}{8}t$ e $x \rightarrow 2x$, obtemos a equação

$$q_t = - \int q dx + \frac{i}{2}q \int \partial_t |q|^2 dx. \quad (6.57)$$

Sejam as novas funções definidas por

$$\phi_1 \equiv \frac{1}{2}q \exp\left(-\frac{i}{4} \int |q|^2 dx\right), \quad \phi_2 \equiv -\frac{i}{2} \int q \exp\left(-\frac{i}{4} \int^x |q|^2 dx'\right) dx. \quad (6.58)$$

Derivando ϕ_1 em relação a t e usando a equação (6.57) obtemos

$$\partial_t \phi_1 = i\phi_2 + \frac{i}{4}\phi_1 \int \partial_t |q|^2 dx. \quad (6.59)$$

Utilizando novamente a equação (6.57), bem como as definições (6.58), a seguinte igualdade é válida

$$\begin{aligned} \int (q^* q_t + q q_t^*) dx &= - \int \left(q^* \int^x q dx' + q \int^x q^* dx' \right) dx, \\ &= - \int q dx \int q^* dx, \\ &= -4\phi_2 \phi_2^*. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Substituindo este resultado em (6.59), e calculando $\partial_x \phi_2$ da própria definição (6.58), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} i\partial_t \phi_1 + \phi_2 - \phi_2 \phi_2^* \phi_1 &= 0, \\ i\partial_x \phi_2 - \phi_1 - \phi_1 \phi_1^* \phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Este é o modelo de Thirring massivo para campos bosônicos. Obtivemos importantes relações considerando o primeiro fluxo negativo da hierarquia KN. Concluimos portanto, que o sistema modificado de Pohlmeyer-Lund-Regge (6.51), terceira equação de Painlevé e modelo de Thirring bosônico (6.61) estão todos relacionados, sendo o mais geral deles o sistema (6.51). Todos estes modelos estão contidos na hierarquia KN e correspondem ao primeiro fluxo de tempo negativo.

Capítulo 7

Transformações de gauge entre hierarquias integráveis

Vamos mostrar como as hierarquias anteriores são equivalentes, relacionadas por transformações de gauge. Isso implica que os modelos associados ao mesmo fluxo temporal de hierarquias diferentes estão conectados. Os resultados que iremos apresentar foram motivados pelos trabalhos de Wadati–Sogo [39] e Rogers–Wong [40].

7.1 Relação entre WKI e AKNS

A relação entre estas duas hierarquias foi proposta inicialmente por Ishimori [41]. Como vimos na seção 2.2, transformações de gauge preservam a equação de curvatura nula. O operador relacionado com o problema linear da componente espacial da hierarquia WKI é dado por

$$\tilde{U} = H^{(1)} + \tilde{q}E_{\alpha}^{(1)} + \tilde{r}E_{-\alpha}^{(1)}, \quad (7.1)$$

enquanto para a hierarquia AKNS temos

$$U = H^{(1)} + qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}. \quad (7.2)$$

Considere a transformação de gauge

$$U' = g(H^{(1)} + qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)})g^{-1} - g_x g^{-1} \quad (7.3)$$

e assumamos que g seja solução da projeção em grau zero desta equação, i.e.

$$g^{-1}g_x = qE_\alpha^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}. \quad (7.4)$$

Esta relação determina g em termos dos campos q e r da hierarquia AKNS. Suponha g na forma

$$g = \exp(-\psi E_\alpha^{(0)}) \exp(-\phi H^{(0)}) \exp(-\chi E_{-\alpha}^{(0)}) = B^{-1}. \quad (7.5)$$

Resolvendo (7.4) obtemos as mesmas relações obtidas em (3.48b), que são

$$\phi_x = \chi\psi_x e^{2\phi}, \quad q = -\psi_x e^{2\phi}, \quad r = -\chi_x - \chi^2\psi_x e^{2\phi}. \quad (7.6)$$

Substituindo (7.5) na transformação (7.3) obtemos

$$U' = gH^{(1)}g^{-1} = (1 + 2\chi\psi e^{2\phi})H^{(1)} + 2\psi(1 + \chi\psi e^{2\phi})E_\alpha^{(1)} - 2\chi e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(1)}. \quad (7.7)$$

Contudo, o operador U' ainda não está na forma (7.1) devido a componente de $H^{(1)}$. Até aqui, o que obtivemos foi um mapeamento entre os problemas lineares, $\tilde{\Psi} = g\Psi$,

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi = -U\Psi &\quad \mapsto \quad \partial_x \tilde{\Psi} = -U'\tilde{\Psi}, \\ \partial_t \Psi = -V\Psi &\quad \mapsto \quad \partial_t \tilde{\Psi} = -V'\tilde{\Psi}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde

$$V' = gVg^{-1} - g_t g^{-1}. \quad (7.9)$$

e V é o operador (2.9b) para um dado fluxo de tempo da hierarquia AKNS. Portanto, para relacionar a construção da hierarquia WKI com a da AKNS é necessário mais do que uma transformação de gauge. Para eliminar o coeficiente de $H^{(1)}$ em (7.7) precisamos de uma transformação que preserve a estrutura da equação de curvatura nula.

7.1.1 Transformação de Bäcklund recíproca

Para fazer a transformação discutida na seção anterior, vamos utilizar o resultado proposto por Rogers e Wong [40]. Considere uma lei de conservação na forma

$$\partial_t T + \partial_x F = 0, \quad (7.10)$$

onde $T = T[u] = T(u, u_x, \dots, \int u dx, \dots)$ é um funcional dos campos, suas derivadas e possivelmente integrais, assim como F também tem a mesma forma. Seja a transformação de Bäcklund dada por

$$dx' = T dx - F dt, \quad t' = t. \quad (7.11)$$

Note que a lei de conservação (7.10) é consequência desta transformação, pois decorre da compatibilidade de $\frac{\partial x'}{\partial x} = T$ e $\frac{\partial x'}{\partial t} = -F$. Fazendo uma segunda transformação na mesma forma

$$dx'' = T' dx' - F' dt', \quad t'' = t', \quad (7.12)$$

teremos $dx'' = T'T dx - (T'F + F')dt = dx$, se e somente se

$$T' = \frac{1}{T}, \quad F' = -\frac{F}{T}, \quad (7.13)$$

onde agora $T' = T'[u'] = T'(u, u_{x'}, \dots, \int u dx', \dots)$ e analogamente para F' . Como consequência de (7.12), obtemos uma nova lei de conservação devido a compatibilidade de $\frac{\partial x}{\partial x'} = T'$ e $\frac{\partial x}{\partial t'} = -F'$,

$$\partial_{t'} T' + \partial_{x'} F' = 0. \quad (7.14)$$

Além disso, a transformação de Bäcklund (7.11) implica na seguinte mudança de coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{T'} \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{F'}{T'} \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (7.15)$$

Concluindo, uma transformação do tipo (7.11) com os vínculos (7.13), preserva todas as equações expressas na forma (7.10), além de que ela é a sua própria inversa. Efetuando duas transformações consecutivas recuperamos o caso inicial.

Considere agora o sistema linear de equações

$$\partial_x \Psi = -U \Psi, \quad \partial_t \Psi = -V \Psi. \quad (7.16)$$

Fazendo uma transformação do tipo (7.11), e portanto usando a mudança de coordenadas (7.15), obtemos um sistema equivalente em novas coordenadas, contanto que os vínculos (7.13) sejam respeitados

$$\begin{aligned} \partial_{x'} \Psi &= -U' \Psi \quad \text{onde} \quad U' = \frac{1}{T} U, \\ \partial_{t'} \Psi &= -V' \Psi \quad \text{onde} \quad V' = V + \frac{F}{T} U. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Utilizando (7.17) e (7.13) é fácil verificar que duas transformações seguidas recupera os operadores iniciais, $U'' = \frac{1}{T'}U' = U$ e $V'' = V' + \frac{F'}{T'}U' = V$.

Podemos utilizar uma transformação de Bäcklund recíproca para eliminar o coeficiente do termo de $H^{(1)}$ em (7.7). Portanto, utilizando (7.11), considere a transformação $(x, t) \rightarrow (\xi, \tau)$ tal que

$$d\xi = Tdx - Fdt, \quad \tau = t, \quad (7.18)$$

onde $T = 1 + 2\chi\psi e^{2\phi}$ e F será obtido utilizando as equações de movimento do fluxo correspondente e integrando a relação $\partial_x F = -\partial_t T$. Com isso, obtemos a transformação de coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial x} = T \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - F \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (7.19)$$

Utilizando estas transformações em (7.8), obtemos o sistema equivalente

$$\partial_\xi \tilde{\Psi} = -\tilde{U} \tilde{\Psi}, \quad \partial_\tau \tilde{\Psi} = \tilde{V} \tilde{\Psi}, \quad (7.20)$$

onde

$$\tilde{U} = \frac{1}{T}U' = H^{(1)} + \tilde{q}E_\alpha^{(1)} + \tilde{r}E_{-\alpha}^{(1)} \quad (7.21)$$

e portanto de (7.7) obtemos

$$\tilde{q}(\xi, \tau) = \frac{2\psi + 2\chi\psi^2 e^{2\phi}}{1 + 2\chi\psi e^{2\phi}} = 2 \frac{\tau_{00}^2 \tau_{12} + \tau_{12}^2 \tau_{21}}{\tau_{00}^2 \tau_{11} + 2\tau_{11} \tau_{12} \tau_{21}}, \quad (7.22a)$$

$$\tilde{r}(\xi, \tau) = \frac{-2\chi e^{2\phi}}{1 + 2\chi\psi e^{2\phi}} = -2 \frac{\tau_{11} \tau_{21}}{\tau_{00}^2 + 2\tau_{12} \tau_{21}}, \quad (7.22b)$$

onde utilizamos as relações (4.19) e (4.20) para expressar os campos da hierarquia AKNS em termos das funções tau. Note que temos uma relação implícita na dependência espaço-temporal (7.18) e que depende da equação de movimento correspondente a cada fluxo da hierarquia AKNS através de F . Portanto, a hierarquia WKI está relacionada com a hierarquia AKNS por transformação de gauge e mais transformação de Bäcklund recíproca. As soluções da hierarquia WKI não são dadas numa forma explícita como as soluções da hierarquia AKNS, mas pela forma (7.22) e uma relação implícita envolvendo as coordenadas (7.18). Esta relação é a origem das soluções loop-sólitons obtidas por Ishimori [41] e também por Matsuno [36], onde ele obteve soluções da equação de pulso curto (6.39) através de uma transformação que a relaciona com a equação de sinh-Gordon. Como sabemos, a equação de sinh-Gordon pode ser obtida como um caso particular da equação corresponde ao primeiro fluxo negativo da hierarquia AKNS.

7.2 Relação entre KN e AKNS

Seguindo [39], podemos relacionar as hierarquias KN e AKNS por transformação de gauge. Notando que podemos trocar o parâmetro espectral da loop-álgebra sem alterar a estrutura algébrica da equação de curvatura nula, fazemos $\lambda \rightarrow \lambda^2$ na construção da hierarquia AKNS e temos

$$U = H^{(2)} + qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}. \quad (7.23)$$

Para o operador de Lax da hierarquia KN temos

$$\tilde{U} = H^{(2)} + \tilde{q}E_{\alpha}^{(1)} + \tilde{r}E_{-\alpha}^{(1)}. \quad (7.24)$$

Considere a seguinte representação matricial para os operadores de $\hat{s}\ell_2$

$$H^{(n)} = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & -\lambda^n \end{bmatrix}, \quad E_{\alpha}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{-\alpha}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^n & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Seja

$$g(\lambda) = \begin{bmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

o elemento de grupo da transformação de gauge

$$\tilde{U} = gUg^{-1} - g_xg^{-1}. \quad (7.27)$$

Substituindo os operadores na representação matricial, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\lambda\tilde{q}c = rb - a_x, \quad (7.28a)$$

$$\lambda\tilde{q}d = qa - 2\lambda^2b - b_x, \quad (7.28b)$$

$$\lambda\tilde{r}a = rd + 2\lambda^2c - c_x, \quad (7.28c)$$

$$\lambda\tilde{r}b = qc - d_x. \quad (7.28d)$$

Assumindo que $a \sim \lambda^0$, (7.28a) implica que $b \sim \lambda^0$ e $c \sim \lambda^{-1}$. Para que (7.28d) seja consistente, devemos ter $c = 0$ e $d \sim \lambda$ ou $b = 0$ e $d \sim \lambda^{-1}$. Considerando o primeiro caso, a solução do sistema é dada por

$$g = \begin{bmatrix} f^{-1} & -\tilde{q}f \\ 0 & 2\lambda f \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad f \equiv \exp\left(\frac{1}{2} \int \tilde{q}\tilde{r}dx\right), \quad (7.29)$$

e a relação entre os campos fica

$$r = \frac{1}{2}f^{-2}\tilde{r}, \quad q = -f^2(\tilde{q}_x + \frac{1}{2}\tilde{q}^2\tilde{r}). \quad (7.30)$$

Considerando o segundo caso, $b = 0$ e $d \sim \lambda^{-1}$, a solução do sistema é

$$g = \begin{bmatrix} f & 0 \\ \tilde{r}f & f^{-1} \\ \frac{\tilde{r}f}{2\lambda} & \frac{f^{-1}}{2\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad f \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\int \tilde{q}\tilde{r}dx\right), \quad (7.31)$$

e a relação entre os campos

$$q = \frac{1}{2}f^{-2}\tilde{q}, \quad r = f^2\left(\tilde{r}_x - \frac{1}{2}\tilde{q}\tilde{r}^2\right). \quad (7.32)$$

Esta é a solução encontrada em [39]. Encontrar as relações inversas, \tilde{q} e \tilde{r} em função de q e r não é simples. De qualquer forma, mostramos que as duas hierarquias, AKNS e KN, estão relacionadas por transformação de gauge.

7.3 Miura como uma transformação de gauge

Como mostrado na seção 3.3.1, a hierarquia KdV é pode ser gerada pelo operador

$$\tilde{U} = H^{(1)} + E_{-\alpha}^{(0)} + uE_{\alpha}^{(0)} = \begin{bmatrix} \lambda & u \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad (7.33)$$

enquanto a hierarquia mKdV por

$$U = H^{(1)} + vE_{-\alpha}^{(0)} + vE_{\alpha}^{(0)} = \begin{bmatrix} \lambda & v \\ v & -\lambda \end{bmatrix}. \quad (7.34)$$

Considere a transformação de gauge

$$\tilde{U} = gUg^{-1} - g_xg^{-1} \quad (7.35)$$

com o operador g na forma (7.26). Substituindo os operadores obtemos um sistema de equações cuja solução é dada por

$$g = \begin{bmatrix} 2\lambda + v & v \\ 1 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad u = v^2 \mp v_x. \quad (7.36)$$

Portanto, a transformação de Miura surge naturalmente como uma transformação de gauge entre as hierarquias mKdV e KdV.

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

Nesta tese, propomos um método para resolver o problema de condição de contorno não nula para hierarquias integráveis, através do método de dressing. A condição de contorno aparece como uma solução conhecida, denominada vácuo, a partir da qual construímos uma solução mais geral por transformação de gauge. Propomos um método geral, válido, a princípio, para qualquer hierarquia integrável construída com uma estrutura algébrica definida e qualquer condição de contorno. Consideramos explicitamente somente o caso de condição de contorno onde os campos assumem um valor constante e não nulo, onde as soluções são construídas utilizando operadores de vértice que são autoestados do par de Lax no vácuo. Aplicamos o método para as hierarquias mKdV e AKNS, onde introduzimos operadores de vértice apropriados. Soluções interessantes da hierarquia mKdV foram obtidas, mostrando que, a introdução de um campo não nulo no vácuo faz com que a relação de dispersão e interação entre multi-sólitons dependam da condição de contorno. Mostramos que as equações da hierarquia mKdV admitem soluções do tipo dark sóliton, table-top sólitons, kinks e wobbles quando a condição de contorno não se anula. Estes tipos de solução não existem para a condição de contorno nula. A subclasse de equações de graus negativo pares da hierarquia mKdV, não possuem solução com condição de contorno nula, mas possuem solução com condição de contorno constante.

Construímos uma deformação integrável da hierarquia mKdV, que contém a equação de Gardner. Soluções desta hierarquia também foram encontradas e mostramos que as soluções interessantes da equação de Gardner, tem origem na sua relação com as soluções

da equação mKdV com condição de contorno não nula.

Propomos uma nova construção algébrica da equação de curvatura nula, e incorporamos as hierarquias AKNS, WKI e KN numa classificação algébrica consistente. Obtivemos o primeiro fluxo negativo da hierarquia WKI e uma redução deste sistema ao caso de um único campo é equivalente à equação de pulso curto proposta por Schäfer-Wayne, que é um bom modelo para pulsos ultra-curtos em meios não lineares. Portanto, nosso sistema pode ser considerado como uma generalização de duas componentes da equação de pulso curto.

Consideramos o primeiro fluxo negativo da hierarquia KN e obtivemos um modelo modificado de Pohlmeyer-Lund-Regge. Mostramos também, que uma redução deste modelo ao caso de um único campo é equivalente ao modelo de Thirring clássico para campos bosônicos. Portanto, este sistema também pode ser considerado uma generalização de duas componentes do modelo de Thirring bosônico.

Mostramos que essas três hierarquias estão relacionadas através de transformações de gauge, o que prova diversas relações, como por exemplo, a ligação do modelo de Thirring com a equação de sinh-Gordon e a ligação da equação de pulso curto também com a equação de sinh-Gordon. Sabemos que cada um destes modelos está contido no primeiro fluxo negativo de sua respectiva hierarquia.

Extensões dos nossos resultados podem ter implicações interessantes e estão sendo consideradas. A primeira extensão, seria considerar o método de dressing com soluções mais gerais, como soluções periódicas. É conhecido que modelos integráveis possuem soluções mais gerais que sólitons através de funções elípticas. Seria interessante obter este tipo de solução através do método de dressing, o que ainda é um problema em aberto. Quanto a construção de curvatura nula, pode-se considerar extensões supersimétricas das hierarquias WKI e KN. Isso corresponderia a versões supersimétricas da equação de pulso curto e do modelo de Thirring bosônico. Também podem ser considerados os modelos gerados pela gradação principal, pois só consideramos a gradação homogênea.

Apêndice A

Álgebras de Lie

Fazemos uma breve revisão sobre os conceitos de álgebras de Lie, de dimensão finita e infinita, necessários para compreensão da matemática envolvida nesta tese. Entretanto, a título de realização dos cálculos, somente a álgebra $\hat{A}_1 \sim \hat{sl}_2$ e suas relações de comutação, apresentadas na seção A.4, é suficiente. Para o leitor interessado em mais detalhes e numa introdução consistente à álgebras de Kac-Moody, indicamos as referências [44], [45] e [46].

A.1 Álgebras de Lie semi-simples

Uma *álgebra de Lie* \mathcal{G} é um espaço vetorial com uma operação bilinear chamada de *comutador* $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, tal que

$$\begin{aligned} [X, Y] + [Y, X] &= 0 && \text{(anti-simetria),} \\ [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] &= 0 && \text{(identidade de Jacobi).} \end{aligned} \tag{A.1}$$

A *dimensão* da álgebra de Lie é a dimensão de seu espaço vetorial. Toda álgebra de Lie está associada a um grupo de Lie G , onde os elementos deste grupo são obtidos exponenciando os elementos da álgebra, i.e. $\forall X \in \mathcal{G}, e^X \in G$.

Uma *representação* de \mathcal{G} é uma associação de cada elemento de \mathcal{G} com um operador agindo sobre um espaço vetorial, de forma que as relações de comutação sejam preservadas, i.e. se $D(X)$ é uma representação de \mathcal{G} , então $D([X, Y]) = [D(X), D(Y)]$. A dimensão da representação é a dimensão do espaço vetorial sobre o qual os operadores agem. Uma

representação matricial é dita *irredutível* quando as matrizes não podem ser escritas na forma diagonal por blocos.

Uma representação particularmente útil é a *representação adjunta*, onde \mathcal{G} atua sobre seu próprio espaço vetorial. Esta representação é obtida na forma $X \mapsto \text{ad}_X$, onde $\text{ad}_X Y \equiv [X, Y]$. Esta representação permite definir uma *forma bilinear simétrica* sobre \mathcal{G} , chamada forma de Killing, $(X, Y) \equiv \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$. Esta forma bilinear é invariante $([X, Y], Z) = (X, [Y, Z])$.

Um *ideal* de \mathcal{G} é um subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$ tal que $[\mathcal{I}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{I}$. Uma álgebra de Lie é *simples* se não possui nenhum ideal próprio¹. Uma álgebra de Lie é *semi-simples* se não possui nenhum ideal abeliano² próprio.

A álgebra \mathcal{G} é completamente definida especificando um conjunto de geradores $\{T_i\}$ e suas relações de comutação

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c. \quad (\text{A.2})$$

Os elementos $f_{ab}{}^c$ são chamados coeficientes de estrutura e caracterizam completamente \mathcal{G} . Na representação adjunta, os elementos de matriz são dados por $(\text{ad}_{T_a})_b{}^c = f_{ab}{}^c$.

Um elemento $X \in \mathcal{G}$ é chamado de semi-simples se ad_X é uma matriz diagonalizável na representação adjunta. Assim, a *subálgebra de Cartan* é definida pelos elementos hermitianos independentes em (A.2), que são semi-simples e que expandem uma subálgebra abeliana máxima. A subálgebra de Cartan é denotada por \mathcal{H} e seus geradores são $\{H_a\}$, $a = 1, \dots, r$ e podem ser todos diagonalizados simultaneamente. Pode-se mostrar que todas as possíveis subálgebras de Cartan são isomórficas e a sua dimensão é denotada por $r = \text{rank}(\mathcal{G})$.

Seja $H \in \mathcal{H}$ e $E_\alpha \in \mathcal{G}$ os autovetores de ad_H na representação adjunta,

$$\text{ad}_H E_\alpha = \alpha(H) E_\alpha. \quad (\text{A.3})$$

O mapeamento $\alpha : H \rightarrow \alpha(H) \in \mathbb{R}$ é uma função linear sobre \mathcal{H} . As funções α pertencem ao espaço dual a \mathcal{H} , $\alpha \in \mathcal{H}^*$. Essas funções α são chamadas de *raízes* e o conjunto de todas as raízes de \mathcal{G} é denotado por Δ . As raízes sempre ocorrem em pares, pois se α é uma raiz então $-\alpha$ também é, e como só existe um E_α associado a α as raízes são

¹Próprio significa um subconjunto diferente de \mathcal{G} e de \emptyset .

²Um subconjunto é abeliano se todos seus elementos comutam entre si.

não degeneradas. Além disso, nenhum múltiplo de uma raiz $c\alpha$ para $c \in \mathbb{C}$ é uma raiz, exceto $c = \pm 1$. Então, $\{H_i, E_\alpha\}$ forma uma base da álgebra de Lie \mathcal{G} e utilizando a invariância da forma de Killing e (A.3), pode-se mostrar que $(H_i, E_\alpha) = 0$ e $(E_\alpha, E_\beta) = 0$ se $\alpha + \beta \neq 0$.

É possível introduzir um isomorfismo entre \mathcal{G} e \mathcal{G}^* através da forma de Killing, $\alpha \in \mathcal{G}^* \rightarrow H_\alpha \in \mathcal{G}$, onde

$$\alpha(H) = (H_\alpha, H), \quad \forall H \in \mathcal{H}. \quad (\text{A.4})$$

A forma de Killing também induz um produto interno entre as raízes de \mathcal{H}^*

$$(\alpha, \beta) = (H_\alpha, H_\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathcal{H}^*. \quad (\text{A.5})$$

Para cada raiz α existem três geradores associados $\{H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ que forma uma subálgebra sl_2 de \mathcal{G} . Como as raízes ocorrem em pares e os geradores de \mathcal{H} são hermitianos, temos as seguintes relações de hermiticidade

$$H_i^\dagger = H_i, \quad E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}. \quad (\text{A.6})$$

As raízes expandem \mathcal{H}^* , porém, elas não são todas independentes. Pode-se escolher um subconjunto de raízes de Δ , $\{\alpha_i\}$ $i = 1, \dots, r$ tal que qualquer raiz pode ser obtida como uma combinação linear $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$, onde n_i são números inteiros de mesmo sinal. Os elementos desta base, α_i , são chamados de *raízes simples*. Se $n_i > 0$, α é uma *raiz positiva*, caso contrário *negativa*. Existe uma raiz $\theta = \sum_i n_i \alpha_i$ formada pelo conjunto máximo de $n_i \geq 0$ chamada de *raiz de peso mais alto*.

Da identidade de Jacobi temos

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = \{\alpha(H_i) + \beta(H_i)\} [E_\alpha, E_\beta]. \quad (\text{A.7})$$

Então, existem três situações:

1. Se $\alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow [E_\alpha, E_\beta] \sim E_{\alpha+\beta}$.
2. Se $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow [E_\alpha, E_\beta] \in \mathcal{H}$. Da invariância de Killing e (A.4),

$$(H, [E_\alpha, E_\beta]) = ([H, E_\alpha], E_{-\alpha}) = \alpha(H)(E_\alpha, E_{-\alpha}) = (H, (E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha) \quad (\text{A.8})$$

$$\text{logo, } [E_\alpha, E_\beta] = (E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha.$$

3. Se $\alpha + \beta \notin \Delta \Rightarrow [E_\alpha, E_\beta] = 0$.

Portanto, na base $\{H_i, E_\alpha\}$ temos as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_\alpha] &= \alpha(H_i)E_\alpha, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= \begin{cases} N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta} & (\alpha + \beta \in \Delta) \\ (E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha & (\alpha + \beta = 0) \\ 0 & (\alpha + \beta \notin \Delta) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde $N_{\alpha\beta}$ é uma constante. Nesta base, a álgebra \mathcal{G} é decomposta da seguinte forma

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha} \mathcal{G}_{\alpha} = \mathcal{H} \oplus \Delta_+ \oplus \Delta_- \quad (\text{A.10})$$

que é a chamada decomposição de raízes e Δ_{\pm} denota o espaço de raízes positivas e negativas, respectivamente. Dado o espaço de raízes Δ toda a informação sobre as relações de comutação entre os geradores pode ser reconstruída, portanto, Δ especifica completamente a álgebra \mathcal{G} . Também podemos codificar toda essa informação na *matriz de Cartan* $A = (a_{ij})$, que é definida em termos de raízes simples

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad i, j = 1, \dots, r. \quad (\text{A.11})$$

A matriz de Cartan satisfaz $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leq 0$ e $a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0$ para $i \neq j$. Na verdade, essa é a definição da matriz de Cartan e poderíamos ter partido daqui e definir todas as propriedades de \mathcal{G} com base na matriz de Cartan. A matriz de Cartan para álgebras semi-simples também satisfaz $\det(A) \neq 0$, o que deixa de ser verdade no caso de álgebras de Kac-Moody. Também vemos que $0 \leq a_{ij}a_{ji} \leq 4$, sendo que 4 é excluído pela independência linear das raízes simples.

A matriz de Cartan pode ser representada graficamente pelo diagrama de Dynkin, que é construído associando um ponto à cada raiz simples α_i e ligando os pontos relacionados a α_i e α_j por $a_{ij}a_{ji}$ linhas. Se $\alpha_i^2 > \alpha_j^2$ coloca-se uma flecha apontando para o ponto referente a α_j . Dessa forma, todas as álgebras de Lie simples são classificadas com base na matriz de Cartan e só existem 9 tipos: $A_r \sim sl(r+1)$, $B_r \sim so(2r+1)$, $C_r \sim sp(2r)$, $D_r \sim so(2r)$ e também as chamadas álgebras excepcionais E_6, E_7, E_8 e F_4, G_2 .

Como os geradores da subálgebra de Cartan podem ser todos diagonalizados simultaneamente, podemos usar uma representação qualquer sobre um espaço vetorial V onde os vetores $|\phi\rangle$ são autoestados de $H \in \mathcal{H}$,

$$H|\phi\rangle = \phi(H)|\phi\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Os autovalores $\phi(H) \in \mathcal{H}^*$ são chamados *pesos*. Na representação adjunta os pesos são chamados de raízes. Podemos utilizar uma base de *pesos fundamentais* denotados por $\{\mu_i\}$ $i = 1, \dots, r$ definidos por

$$\frac{2(\mu_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \equiv \delta_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

Das relações de comutação obtemos

$$HE_\alpha|\phi\rangle = \{\phi(H) + \alpha(H)\}E_\alpha|\phi\rangle \quad (\text{A.14})$$

e portanto $E_\alpha|\phi\rangle \sim |\phi + \alpha\rangle$ também é um vetor peso. Como o espaço vetorial é finito, deve existir um estado $|\mu\rangle$ que seja aniquilado pelos operadores E_α , $E_\alpha|\mu\rangle = 0$. O vetor $|\mu\rangle$ é chamado de *estado de peso mais alto* e o seu autovalor μ é o *peso mais alto*, e pode ser escrito como uma soma de números inteiros positivos $\mu = \sum_i m_i \mu_i$. Para uma representação irredutível, pode-se mostrar que este estado é único.

A.2 Álgebras de Kac-Moody

É possível definir uma álgebra de dimensão infinita a partir de \mathcal{G} , através de uma série de Laurent no parâmetro espectral $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$L(\mathcal{G}) \equiv \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}(\lambda, \lambda^{-1}) = \{X \otimes \lambda^n \mid X \in \mathcal{G}, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{A.15})$$

$L(\mathcal{G})$ é chamada de *loop-álgebra*. As relações de comutação da loop-álgebra são então definidas por

$$[X \otimes \lambda^n, Y \otimes \lambda^m] \equiv [X, Y] \otimes \lambda^{n+m}. \quad (\text{A.16})$$

Suponha um operador $\hat{c} \in \mathcal{G}$, chamado de *termo central*, que comuta com todos os demais operadores

$$[\hat{c}, X \otimes \lambda^n] = 0, \quad \forall X \otimes \lambda^n \in L(\mathcal{G}). \quad (\text{A.17})$$

Redefinimos o comutador (A.16) por

$$[X \otimes \lambda^n, Y \otimes \lambda^m] \equiv [X, Y] \otimes \lambda^{n+m} + \frac{1}{2}n\delta_{n+m,0}(X, Y)\hat{c}, \quad (\text{A.18})$$

onde (X, Y) é a forma de Killing sobre \mathcal{G} . Pode-se mostrar que esta extensão central é única e que (A.18) satisfaz as propriedades de anti-simetria e identidade de Jacobi. Das relações de comutação (A.9) vemos que a segunda dessas relações implica que a raiz α é infinitamente degenerada para todos os operadores $E_\alpha \otimes \lambda^n$. Para eliminar essa degenerescência, é necessário introduzir um novo operador cujos autovalores dependam de n . Isto é feito definindo o operador derivada espectral,

$$\hat{d} \equiv \lambda \frac{d}{d\lambda} \quad (\text{A.19})$$

que só atua sobre o parâmetro λ da loop-álgebra

$$\begin{aligned} [\hat{d}, X \otimes \lambda^n] &= nX \otimes \lambda^n, \\ [\hat{d}, \hat{c}] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

O operador \hat{d} mede a potência do parâmetro spectral. Então, a álgebra de Kac-Moody é definida por

$$\hat{\mathcal{G}} \equiv L(\mathcal{G}) \oplus \mathbb{C}\hat{c} \oplus \mathbb{C}\hat{d}. \quad (\text{A.21})$$

Note que \hat{d} induz uma gradação natural em \mathcal{G} , $\hat{\mathcal{G}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\mathcal{G}}^{(n)}$, onde os subespaços $\hat{\mathcal{G}}^{(n)}$ são definidos por $[\hat{d}, \hat{\mathcal{G}}^{(n)}] = n\hat{\mathcal{G}}^{(n)}$ e satisfazem $[\hat{\mathcal{G}}^{(n)}, \hat{\mathcal{G}}^{(m)}] \subset \hat{\mathcal{G}}^{(n+m)}$.

A forma de Killing sobre $\hat{\mathcal{G}}$ também é redefinida,

$$\begin{aligned} (X \otimes \lambda^n, Y \otimes \lambda^m) &= (X, Y)\delta_{n+m,0}, \\ (\hat{d}, X \otimes \lambda^n) &= (\hat{d}, \hat{d}) = (\hat{c}, X \otimes \lambda^n) = (\hat{c}, \hat{c}) = 0, \\ (\hat{c}, \hat{d}) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Daqui por diante denotamos $X^{(n)} \equiv X \otimes \lambda^n$. Então, as relações de comutação de $\hat{\mathcal{G}}$ na base $\{H_i^{(n)}, E_\alpha^{(n)}\}$ são dadas por

$$\begin{aligned} [H_i^{(n)}, H_j^{(m)}] &= \frac{1}{2}n\delta_{n+m,0}(H_i, H_j)\hat{c} \\ [H_i^{(n)}, E_\alpha^{(m)}] &= \alpha(H_i)E_\alpha^{(n+m)} \\ [E_\alpha^{(n)}, E_\beta^{(m)}] &= \begin{cases} N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}^{(n+m)} & (\alpha + \beta \in \Delta) \\ (E_\alpha, E_{-\alpha})\{H_\alpha^{(n+m)} + \frac{1}{2}n\delta_{n+m,0}\hat{c}\} & (\alpha + \beta = 0) \\ 0 & (\alpha + \beta \notin \Delta) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

A subálgebra de Cartan é expandida por $\{H_1^{(0)}, \dots, H_r^{(0)}, \hat{c}, \hat{d}\}$ e a raiz associada aos operadores $E_\alpha^{(n)}$ é

$$\hat{\alpha} = (\alpha, 0, n). \quad (\text{A.24})$$

A raiz associada a $H_i^{(n)}$ é

$$n\delta = (0, 0, n) \quad \text{onde} \quad \delta = (0, 0, 1). \quad (\text{A.25})$$

Em (A.24) α é a raiz da álgebra finita correspondente \mathcal{G} . Note que os operadores de \mathcal{G} correspondem ao modo $n = 0$. Além disso, temos as relações de hermiticidade

$$H_i^{(n)\dagger} = H_i^{(-n)}, \quad E_\alpha^{(n)\dagger} = E_{-\alpha}^{(-n)}, \quad \hat{c}^\dagger = \hat{c}, \quad \hat{d}^\dagger = \hat{d}. \quad (\text{A.26})$$

Da mesma forma que para a álgebra de dimensão finita, é possível obter estados de peso mais alto $\{|\mu_l\rangle\}$, $l = 1, \dots, r$, que são aniquilados por todos os geradores de potência positiva no parâmetro spectral,

$$\begin{aligned} E_\alpha^{(0)}|\mu_l\rangle &= 0 & (\alpha > 0) \\ E_{\pm\alpha}^{(n)}|\mu_l\rangle &= 0 & (n > 0) \\ H_i^{(n)}|\mu_l\rangle &= 0 & (n > 0) \\ H_i^{(0)}|\mu_l\rangle &= \mu_l(H_i)|\mu_l\rangle \\ \hat{c}|\mu_l\rangle &= c|\mu_l\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde c é um número e o peso fundamental $\mu_l(H_i) = (\mu_l)_i$ é uma componente do vetor $\mu_l = [(\mu_l)_1, \dots, (\mu_l)_r]$. Também existe um estado de peso mais alto, denotado por $|\mu_0\rangle$, que é aniquilado por todos os geradores exceto pelo termo central

$$\hat{c}|\mu_0\rangle = c|\mu_0\rangle. \quad (\text{A.28})$$

Note que os estados $E_\alpha|\mu_l\rangle$ também são estados de peso mais alto pois, $H_i^{(0)}E_\alpha^{(n)}|\mu_l\rangle = \{\mu_l(H_i) + \alpha(H_i)\}E_\alpha^{(n)}|\mu_l\rangle$ e portanto $E_\alpha^{(n)}|\mu_l\rangle \sim |\alpha + \mu_l\rangle$.

Agora, escolhemos uma normalização para a forma de Killing entre os geradores e isso define completamente as relações de comutação. Vamos utilizar a *base de Chevalley*, de

forma que

$$\begin{aligned}
[H_i^{(n)}, H_j^{(m)}] &= \frac{4}{\alpha_i^2} n \delta_{ij} \delta_{n+m,0} \hat{c} \\
[H_i^{(n)}, E_{\pm\alpha}^{(m)}] &= \pm \frac{2\alpha \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} E_{\pm\alpha}^{(n+m)} \\
[E_\alpha^{(n)}, E_\beta^{(m)}] &= \begin{cases} N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}^{(n+m)} & (\alpha + \beta \in \Delta) \\ \ell_i \cdot H_i^{(n+m)} + \frac{2}{\alpha^2} n \delta_{n+m,0} \hat{c} & (\alpha + \beta = 0) \\ 0 & (\alpha + \beta \notin \Delta) \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

onde $N_{\alpha\beta}$ é uma constante, $a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ é a matriz de Cartan de \mathcal{G} , α e β são raízes quaisquer, e.g, $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$, α_i são as raízes simples de \mathcal{G} e ℓ_i são inteiros definidos pela expansão $\alpha/\alpha^2 = \sum_i \ell_i \alpha_i / \alpha_i^2$.

A.3 Operadores de gradação

Seja $\widehat{\mathcal{G}}$ uma álgebra de Kac-Moody e \mathcal{G} sua álgebra de Lie finita correspondente. Uma \mathbb{Z} -gradação decompõe a álgebra nos subespaços

$$\widehat{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{G}}^{(n)}, \quad [\widehat{\mathcal{G}}^{(n)}, \widehat{\mathcal{G}}^{(m)}] \subset \widehat{\mathcal{G}}^{(n+m)}, \tag{A.30}$$

onde $\widehat{\mathcal{G}}^{(n)}$ é um subespaço de grau n ,

$$[Q_s, \widehat{\mathcal{G}}^{(n)}] = n \widehat{\mathcal{G}}^{(n)}, \tag{A.31}$$

onde o operador de gradação Q_s é definido por

$$Q_s \equiv \sum_{l=1}^r s_l \frac{2\mu_l \cdot H^{(0)}}{\alpha_l^2} + N_s \hat{d}. \tag{A.32}$$

Nesta definição o vetor $s = (s_1, \dots, s_r)$ é composto de números inteiros positivos e μ_l são os pesos fundamentais satisfazendo (A.13). Também temos $N_s = \sum_{i=0}^r s_i m_i$, onde $\theta = \sum_{l=1}^r m_l \alpha_l$ é a raiz de peso mais alto de \mathcal{G} e $m_0 = 1$. As gradações importantes que vamos considerar são a *homogênea* e a *principal*, definidas por

$$s_{\text{hom}} = (1, 0, 0, \dots, 0), \tag{A.33a}$$

$$s_{\text{prin}} = (1, 1, 1, \dots, 1). \tag{A.33b}$$

Existem gradações intermediárias entre essas duas, mas não iremos considerá-las.

A.4 Álgebra \hat{sl}_2

Seja \hat{A}_1 a álgebra de Kac-Moody obtida através da álgebra de Lie finita $A_1 \sim sl_2$, que possui somente uma raiz α . Os geradores de A_1 são $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H\}$ e vamos escolher a normalização $\alpha^2 = 2$. Dessa forma, as relações de comutação para a álgebra de Kac-Moody \hat{A}_1 na base de Chevalley são

$$\begin{aligned}
 [H^{(n)}, H^{(m)}] &= 2n\delta_{n+m,0}\hat{c} \\
 [H^{(n)}, E_{\pm\alpha}^{(m)}] &= \pm 2E_{\pm\alpha}^{(n+m)} \\
 [E_\alpha^{(n)}, E_\beta^{(m)}] &= \begin{cases} H^{(n+m)} + n\delta_{n+m,0}\hat{c} & (\alpha + \beta = 0) \\ 0 & (\text{caso contrário}) \end{cases} \quad (\text{A.34}) \\
 [\hat{c}, E_{\pm\alpha}^{(n)}] &= [\hat{c}, H^{(n)}] = [\hat{c}, \hat{d}] = 0 \\
 [\hat{d}, E_{\pm\alpha}^{(n)}] &= nE_{\pm\alpha}^{(n)} \\
 [\hat{d}, H^{(n)}] &= nH^{(n)}
 \end{aligned}$$

Uma observação importante é que a construção dos modelos integráveis pelo método de curvatura nula, não envolve a álgebra completa, mas somente a loop-álgebra, que é obtida fazendo $\hat{c} = 0$ nas relações (A.34). Entretanto, para obter soluções destes modelos pelo método de dressing é necessário utilizar a álgebra completa, com extensão central, pois utilizamos estados de peso mais alto que não existem para a loop-álgebra.

As gradações principal e homogênea, definidas em (A.32), são

$$Q_{\text{hom}} = \hat{d}, \quad Q_{\text{prin}} = \frac{1}{2}H^{(0)} + 2\hat{d}. \quad (\text{A.35})$$

A representação de peso mais alto corresponde as expressões (A.27)–(A.28) onde o número c é fixado como sendo $c \equiv 1$.

Referências

- [1] H. Aratyn, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, *Algebraic construction of integrable and super integrable hierarchies*, Proc. XI International Conference on Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-11)(Prague, Czech Republic, 2004), arXiv:hep-th/0408231v1.
- [2] H. Aratyn, J. F. Gomes, E. Nissimov, S. Pacheva, A. H. Zimerman, *Symmetry flows, conservation laws and dressing approach to the integrable models*, Proc. NATO Advanced Research Workshop on Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories (NATO ARW - UIC 2000)(Chicago), arXiv:nlin/0012042v1.
- [3] O. Babelon, D. Bernard, *Affine solitons: A relation between tau functions, dressing and bäcklund transformations*, *Int. J. Mod. Phys. A* **8** 507 (1993).
- [4] O. Babelon, D. Bernard, *Dressing symmetries*, *Commun. Math. Phys.* **149** 279 (1992), arXiv:hep-th/9111036v1.
- [5] L. A. Ferreira, J. L. Miramontes, J. S. Guillén, *Tau-functions and dressing transformations for zero-curvature affine integrable equations*, *J. Math. Phys.* **38** 882 (1997).
- [6] I. D. Olive, N. Turok, J. W. R. Underwood, *Affine toda solitons and vertex operators*, *Nucl. Phys. B* **409** 509 (1993).
- [7] J. F. Gomes, G. S. França, A. H. Zimerman, *Nonvanishing boundary condition for the mKdV hierarchy and the Gardner equation*, Aceito para publicação *J. Phys. A* (2011), arXiv:1110.3247v1 [nlin.SI].
- [8] G. Kälbermann, *The sine-Gordon wobble*, *J. Physics A* **37** 11603 (2004).

- [9] L. A. Ferreira, B. Piette, W. J. Zakrzewski, *Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model*, *Phys. Rev. E* **77** 036613 (2008).
- [10] J. F. Gomes, G. S. França, G. R. de Melo, A. H. Zimerman, *Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions*, *J. Physics A* **42** 445204 (2009), arXiv:0906.5579.
- [11] V. E. Zakharov, A. A. Gelash, *Soliton on unstable condensate*, arXiv:1109.0620v2 [nlin.SI] (2011).
- [12] M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa, *New integrable nonlinear evolution equations*, *J. of Phys. Soc. of Japan* **47** 1698 (1979).
- [13] Y. H. Ichikawa, K. Konno, M. Wadati, *Nonlinear transverse oscillation of elastic beams under tension*, *J. of Phys. Soc. of Japan* **50** 1799 (1981).
- [14] T. Schäfer, C. E. Wayne, *Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media*, *Physica D* **196** 90 (2004).
- [15] D. J. Kaup, A. C. Newell, *An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation*, *J. Math. Phys.* **19** 798 (1978).
- [16] F. Lund, T. Regge, *Unified approach to strings and vortices with soliton solutions*, *Phys. Rev. D* **14** 6 (1976).
- [17] T. Kikuchi, *Symmetries in the third painlevé equation arising from the modified Pohlmeyer-Lund-Regge hierarchy*, arXiv:1103.6075v1 [nlin.SI].
- [18] V. E. Zakharov, *What is integrability?*, Springer-Verlag (1991).
- [19] J. F. Gomes, G. R. de Melo, A. H. Zimerman, *A class of mixed integrable models*, *J. Physics A* **42** 275208 (2009).
- [20] J. Balog, L. Fehér, L. O’Raifeartaigh, *Toda theory and W-algebra from a Gauged WZNW point of view*, *Ann. of Phys.* **203** 76 (1990).
- [21] R. M. Miura, *Korteweg-de Vries and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation*, *J. Math. Phys.* **9** 1202 (1968).

- [22] R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion*, *J. Math. Phys.* **9** 1204 (1968).
- [23] M. Wadati, *Wave propagation in nonlinear lattice. I.*, *J. of Phys. Soc. of Japan* **38** 681 (1975).
- [24] M. Wadati, *Wave propagation in nonlinear lattice. II.*, *J. of Phys. Soc. of Japan* **38** 673 (1975).
- [25] M. Wadati, *Wave propagation in nonlinear lattice. III.*, *J. of Phys. Soc. of Japan* **41** 1499 (1976).
- [26] B. A. Kupershmidt, *On the Nature of the Gardner transformation*, *J. Math. Phys.* **22** 449 (1981).
- [27] B. A. Malomed, Y. A. Stepanyants, *The inverse problem for the Gross-Pitaevskii equation*, *Chaos* **20** 013130 (2010).
- [28] R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, A. Slunyaev, *Generation of large-amplitude solitons in the extended Korteweg–de Vries equation*, *Chaos* **12** 1070 (2002).
- [29] R. Grimshaw, A. Slunyaev, E. Pelinovsky, *Generation of solitons and breathers in the extended Korteweg-de Vries equation with positive cubic nonlinearity*, *Chaos* **20** 013102 (2010).
- [30] A. N. Leznov, M. V. Saveliev, *Two-dimensional exactly and completely integrable dynamical systems*, *Commun. Math. Phys.* **89** 59 (1983).
- [31] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *The complex sine-Gordon equation as a symmetry flow of the AKNS hierarchy*, *J. Physics A* **33** L331 (2000), arXiv:nlin/0007002v3.
- [32] J. F. Gomes, G. S. França, A. H. Zimerman, *Dressing approach to the nonvanishing boundary value problem for the AKNS hierarchy*, Proc. Quantum Theory and Symmetries 7 (QTS7)(Prague, Czech Republic, 2011).

- [33] M. Kruskal, *Nonlinear wave equations*, Lecture Notes in Physics vol. 38 pg. 310-354, Springer (1975).
- [34] A. Sakovich, S. Sakovich, *The short pulse equation is integrable*, *J. of Phys. Soc. of Japan* **74** 239 (2005).
- [35] J. C. Brunelli, *The short pulse hierarchy*, *J. Math. Phys.* **46** 123507 (2005).
- [36] Y. Matsuno, *Periodic solutions of the short pulse model equation*, *J. Math. Phys.* **49** 073508 (2008).
- [37] D. Pelinovsky, G. Schneider, *Rigorous justification of the short-pulse equation*, arXiv:1108.5970v1 (2011).
- [38] B. G. Konopelchenko, I. B. Formusatic, *On the structure of nonlinear evolution equations integrable by the Z_2 -graded quadratic bundle*, *J. Physics A* **15** 2017 (1982).
- [39] M. Wadati, K. Sogo, *Gauge transformations in soliton theory*, *J. Physics A* **52** 394 (1983).
- [40] C. Rogers, P. Wong, *On reciprocal Bäcklund transformations of inverse scattering schemes*, *Physica Scripta* **30** 10 (1984).
- [41] Y. Ishimori, *A relationship between the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur and Wadati-Konno-Ichikawa schemes of the inverse scattering method*, *J. Physics A* **51** 3036 (1982).
- [42] J. L. Gervais, M. V. Saveliev, *Higher grading generalisations of the Toda systems*, *Nucl. Phys. B* **453** 449 (1995), arXiv:hep-th/9505047v2.
- [43] L. A. Ferreira, J. L. Gervais, J. S. Guillén, M. V. Saveliev, *Affine Toda systems coupled to matter fields*, *Nucl. Phys. B* **470** 236 (1996), arXiv:hep-th/9512105v1.
- [44] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to classical integrable systems*, Cambridge University Press (2003).
- [45] P. Goddard, D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics*, *Int. J. Mod. Phys. A* **1** 203 (1986).

[46] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press (1994).