



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.004/11

**A Quantização da Eletrodinâmica de Podolsky em
Equilíbrio Termodinâmico no Formalismo de
Matsubara-Fradkin**

Carlos Alberto Bonin

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Maio de 2011

Agradecimentos

- A Deus, por ter criado o Universo à Sua maneira, tão sutil, tão perfeita e por ter posto em mim essa sede insaciável, essa busca incessante;
- À minha mãe e ao meu avô, dos quais eu sempre pude contar com o apoio incondicional, cujas ações sempre, sempre foram além do dever familiar, chegando a ser um reflexo de Amor e de Dedicção Perfeitos;
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Pimentel, por tantas vezes me apontar o caminho da busca pelo conhecimento em meio às trevas da ignorância, por ter a paciência para comigo sempre à frente da minha inerente teimosia;
- À Danuce, *flor da minha manhã*, minha inseparável companheira nestes quatro anos, por todos os seus sacrifícios, por todos os momentos preciosos de atenção e de carinho;
- Ao CNPq, por ter financiado meu doutorado;
- À Neila, por ter encontrado o livro [1], que consiste numa compilação dos artigos do Fradkin, o qual, ousado dizer, facilitou incomensuravelmente minha pesquisa;
- Ao Dr. German Zembrano, por suas explicações sobre vínculos;
- Ao Dr. Mario Bertin, por ter me ensinado que os campos não vão a zero no infinito;
- Ao Dr. Julio Hoff, por me ensinar sobre dimensões extras;
- Ao Mestre John, por ter me ensinado o princípio de Schwinger;
- À Fabíola, por tantas vezes ter conseguido artigos na USP que eu não encontrava no IFT;
- Ao meu amigo Mestre Rodrigo Frehse, conhecido por muitos como Xiréque, pela hospitalidade e por ser alguém com quem sempre se pode contar;

- Ao meu amigo americano Mestre Marcelos Dias, *a. k. a.* Madias, por não permitir que a distância seja uma barreira intransponível;
- À minha amiga Doutora Alessandra Tomal, pelo compartilhamento de temores e dificuldades próprios de doutorandos;
- Ao Dr. Tadeu Lunardi, por guiar meus primeiros passos anos atrás;
- Aos meus amigos soviéticos, Alexander, Andriy e Katya, pelos bons momentos e pela ajuda com o idioma russo;
- Aos meus amigos indianos, Updesh, Keshav, Vikrant e Joty, a garota de um nome só, pelos ótimos momentos em Trieste e por terem me ensinado dança indiana. É realmente uma pena vinhos terem efeitos de esquecimento;
- Ao ICTP, que ofereceu condições ideais para lá eu desenvolver minha pesquisa;
- Aos Doutores Vu e meu amigo Yong Shan, por terem me mostrado um pouco da cultura chinesa;
- Ao Dr. Aparício, por me passar suas notas de teoria de campos à temperatura finita;
- Ao Mestre Bufalo, por me mostrar as “vantagens” de se ser um vegetariano;
- Ao Mestre Bicho-Pau, por várias discussões sobre a Vida, o Universo e Tudo Mais;
- Ao Mestre David *Goldmann* Barbato, por sua prestatividade;
- À Dona Clary, ao Seu Firmino e ao futuro engenheiro Maiquer Dudek, por tão bom acolhimento tantas e tantas vezes;
- Ao Marco Aurélio MAC, pelas aulas de inglês;
- À galera da comunidade Universo, por serem a alegria de um Orkut tão triste;
- A E. S. Fradkin (*in memoriam*), pelos seus feitos na Física Teórica;
- A J. R. R. Tolkien (*in memoriam*), por seu comprometimento com a coerência;

- À Wikipédia, especialmente por ser uma fonte inigualável de referências;
- A Wolframalpha, por disponibilizar gratuitamente um método virtual de resolução de problemas matemáticos;
- Por último, mas não menos importante, a todos os malacos, especialmente ao Dr. L. C., por seu legado patriarcal.

Resumo

Nesta tese estudaremos a eletrodinâmica quântica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico no formalismo de Matsubara-Fradkin. Uma vez que a eletrodinâmica de Podolsky é uma teoria de *gauge*, quantizar-la-emos com o método do campo auxiliar de Nakanishi, que é uma técnica invariante de Lorentz. Mostraremos que no caso do campo de Podolsky livre uma correção à lei de Stefan-Boltzmann é esperada e utilizaremos dados da radiação cósmica de fundo em microondas para limitar os possíveis valores do parâmetro de Podolsky. Investigaremos, também, as equações de Dyson-Schwinger-Fradkin e as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi da teoria em equilíbrio termodinâmico.

Palavras Chaves: Formalismo de Matsubara-Fradkin para teorias quânticas de campos em equilíbrio termodinâmico; densidade de Lagrangeana com derivadas de segunda ordem; eletrodinâmica de Podolsky; quantização de teorias de *gauge*; campo auxiliar de Nakanishi; modificação na lei de Stefan-Boltzmann.

Área do conhecimento: Teoria de Campos.

Abstract

In this thesis we study Podolsky quantum electrodynamics in thermodynamic equilibrium *via* Matsubara-Fradkin formalism. Since Podolsky electrodynamics is a gauge theory, we quantize it using Nakanishi's auxiliary field method, which is a Lorentz invariant procedure. For the case of free Podolsky field we show that a correction to the Stefan-Boltzmann law is expected and we set a thermodynamical limit for the Podolsky parameter using data from the cosmic microwave background radiation. We also study the Dyson-Schwinger-Fradkin equations and the Ward-Fradkin-Takahashi identities of the theory in thermodynamic equilibrium.

Keywords: Matsubara-Fradkin formalism for quantum field theories in thermodynamic equilibrium; Lagrangian density with second-order derivatives; Podolsky electrodynamics; quantization of gauge theories; Nakanishi's auxiliary field; modification of Stefan-Boltzmann law.

Knowledge field: Field theory.

Last of all Húrin stood alone. Then he cast aside his shield, and wielded an axe two-handed; and it is sung that the axe smoked in the black blood of the troll-guard of Gothmog until it withered, and each time that he slew Húrin cried: 'Aurë entuluva! Day shall come again!' Seventy times he uttered that cry; but they took him at last alive, by the command of Morgoth, for the Orcs grappled him with their hands, which clung to him still though he hewed off their arms; and ever their numbers were renewed, until at last he fell buried beneath them. Then binding him, they dragged him to Angband with mockery.

The Silmarillion, de J. R. R. Tolkien

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Comentários iniciais	1
1.2	A teoria termodinâmica	4
1.3	Um tributo a E. S. Fradkin	5
1.4	Em defesa de Maxwell	6
1.5	Sobre a necessidade de se estudar a teoria de Podolsky	6
1.6	Como ler esta tese	8
2	Fundamentos da quantização de campos em equilíbrio ter-	
	modinâmico	9
2.1	A matriz densidade	10
2.1.1	O <i>ensemble</i> grão-canônico	11
2.1.2	Sobre a inclusão de fontes	16
2.2	O campo escalar real	29
2.2.1	Das equações de campo ao funcional gerador	32
2.2.2	O funcional gerador em equilíbrio termodinâmico	34
2.2.3	A teoria de perturbação modificada de Fradkin	43
2.2.4	A função de Green não perturbativa	49
3	O campo eletromagnético de Podolsky	53
3.1	O princípio de <i>gauge</i>	53
3.2	A interpretação do parâmetro de Podolsky	57
3.2.1	As equações de Podolsky	57
3.2.2	Fixando o sinal do parâmetro livre	60
3.2.3	Os dois setores	63
3.3	A carga clássica de Noether	64
3.4	A quantização <i>a la</i> Dirac da parte fermiônica	66
3.4.1	Os vínculos da parte fermiônica	66
3.4.2	A quantização da parte fermiônica em equilíbrio	73
3.5	O método do campo auxiliar de Nakanishi	80

3.5.1	O princípio de Schwinger	82
3.5.2	A condição de Lorenz generalizada	85
3.5.3	Os campos fantasmas	86
3.5.4	A carga e o potencial químico fantasmas	90
3.6	Médias no <i>ensemble</i> de ordenamento de campos	101
3.6.1	Médias térmicas de certos operadores	103
3.6.2	As periodicidades das médias térmicas especiais	108
3.7	Representações de integração funcional	111
3.7.1	O funcional gerador termodinâmico	111
3.7.2	A função de partição	120
3.8	As equações de Dyson-Schwinger-Fradkin	127
3.8.1	As funções de Green no espaço de Fourier	134
3.9	As identidades de Ward-Fradkin-Takahashi	136
3.9.1	A transversalidade do tensor de polarização de Podolsky	138
3.9.2	A identidade de Ward	140
4	Implicações físicas da teoria de Podolsky	144
4.1	Correção na lei de Stefan-Boltzmann	144
4.1.1	A função de partição do campo de Podolsky livre	145
4.1.2	A densidade de energia interna do campo quântico de Podolsky	155
4.1.3	Limite termodinâmico para o parâmetro de Podolsky	157
4.2	O tensor de polarização	159
4.2.1	A forma geral do tensor de polarização em equilíbrio	160
5	Conclusões	168
5.1	O formalismo de Matsubara-Fradkin	168
5.2	A teoria de Podolsky	169
5.3	Perspectivas futuras	171
5.4	Comentários finais	172
A	O potencial eletrostático de Podolsky	173
B	O tensor densidade de energia e momento simétrico de uma teoria com derivadas de segunda ordem	176
B.1	Teoria geral	176
B.2	O tensor densidade de energia e momento de Podolsky	184

Capítulo 1

Introdução

1.1 Comentários iniciais

Compreender a mecânica quântica é difícil; compreender a teoria quântica de campos, mais difícil. A razão pode ser a dificuldade técnica envolvida. A razão pode ser puramente interpretativa. Para mim, é uma amálgama de ambas.

Do ponto de vista técnico, a dificuldade é enorme. Enquanto que os observáveis da mecânica quântica são associados a operadores de um espaço de Hilbert, as quantidades correspondentes na teoria de campos são *distribuições operatoriais* [2, 3, 4]. É um trabalho árduo manter a consistência matemática enquanto se visa obter resultados que possam ser comparados com dados experimentais. Essa tarefa é tão árdua que ela chega a ser rara. Em geral, trabalhos matematicamente rigorosos tendem a provar propriedades formais da estrutura teórica de uma teoria de campos [5]. Por outro lado, embora não seja uma regra de maneira alguma geral, trabalhos voltados para a fenomenologia seguem a tendência de não focar no formalismo matemático da teoria. Esta tese recai num limbo entre esses dois extremos: ela não é formal e não tem quase nenhuma fenomenologia. Ela é, no entanto, em primeiro lugar uma tentativa de se esclarecer alguns tópicos básicos de teoria de campos, em especial, nas situações de equilíbrio termodinâmico. Esse assunto é tratado como uma subárea da teoria de campos mas, do ponto de vista abordado nesta tese, a situação é inversa: da situação de equilíbrio pode-se obter os resultados de temperatura nula, mas a recíproca não vale. Matematicamente, esta tese é simplificada demais: distribuições são ingenuamente tratadas como funções. Além disso, pouco conhecimento prévio de teoria *quântica* de campos é necessário para acompanhar a exposição. Esta tese foi

escrita com a intenção de ser um guia para quem conheça mecânica quântica e teoria clássica de campos.

A quantidade de trabalhos voltados para interpretações da teoria quântica de campos é praticamente nula se comparada com o montante de literatura voltada para interpretações da mecânica quântica. É bem verdade que muito provavelmente alguma extensão ou adaptação da interpretação de Copenhague da mecânica quântica se aplique à teoria de campos. Mas teoria de campos não é mecânica quântica. Teoria de campos é uma teoria com seus efeitos e implicações físicas próprios e, dentre os mais surpreendentes, distintos da fenomenologia da mecânica quântica [6]. Enquanto que a mecânica quântica é uma teoria geral, com átomos e elétrons descritos pela mesma equação, na teoria de campos cada objeto de estudo é descrito por um campo. A descrição de um único átomo do ponto de vista de teoria de campos é, até o presente, um problema em aberto. Na mecânica quântica, o quadrado do módulo da função de onda possui uma interpretação probabilística. Na teoria de campos, não há funções de onda. Na mecânica quântica, o princípio de incerteza de Heisenberg sustenta que não faz sentido atribuir significado físico simultâneo aos observáveis posição e momento de um sistema. Na teoria de campos, por outro lado, “posição” não é, a rigor, um observável. Existem, ainda, muitas outras diferenças entre as teorias, mas o exposto provavelmente já sirva para indicar que as teorias são muito distintas e que a interpretação usual da mecânica quântica enfrenta algumas dificuldades que são muitas vezes ignoradas ao se estudar teorias de campos.

A fim de se evitar o algumas vezes enfadonho procedimento teórico de se calcular amplitudes de espalhamento no regime perturbativo, Stueckelberg e Feynmann desenvolveram uma espécie de atalho: o recurso conhecido como *grafos de Feynmann*. Nessa abordagem, em vez de se calcular termos e mais termos advindos da aplicação do teorema de Wick para um processo ou então de se calcular diversas derivadas funcionais de um funcional gerador complicado, basta desenhar uma quantidade finita de grafos topologicamente inequivalentes e, então, fazer-se uso das chamadas *regras de Feynmann* para se obter precisamente os mesmos resultados fornecidos pelas outras abordagens. Não há a menor dúvida do valor dessa técnica: muito tempo é poupado e grandes avanços na comparação das previsões teóricas com dados experimentais foram e vem sendo obtidos através de seu emprego. Infelizmente, interpretações equivocadas e razoavelmente difundidas desses grafos levam a conceitos físicos errôneos. O principal problema, na minha opinião, surge ao se atribuir a cada linha de um grafo o significado de representar uma partícula. As linhas internas de um grafo seriam uma representação da realidade objetiva durante um processo de colisão, por exemplo, segundo a referida visão. No entanto, do ponto de vista de uma interpretação positivis-

ta, apenas quantidades que possam ser medidas possuem significado físico. O evento da colisão não pode ser medido, mas apenas os estados inicial e final dos campos. Por essa razão, atribuir significado físico às linhas dos grafos de Feynmann não está de acordo com visões positivistas. Sendo a interpretação de Copenhagen positivista, seríamos forçados a abandoná-la em teoria de campos, bem como quaisquer de suas possíveis adaptações. Uma vez que a visão mencionada afirma a existência de uma realidade que não pode ser medida, a saber, as configurações das partículas durante processos de colisão, essa interpretação teria um caráter *realista*. Não é difícil, contudo, argumentar que uma visão realista desse tipo não possui consistência. Consideremos qualquer grafo de qualquer teoria que possua um *loop* interno. Segundo a visão realista, esse *loop* é interpretado como constituindo-se da criação de um par de partícula e antipartícula com sua subsequente mútua aniquilação. Porém, segundo as regras de Feynmann, esses eventos de criação e de aniquilação são integrados em todo o espaço-tempo. Ou seja, os eventos de criação e de aniquilação de pares devido à colisão que são causados pelo estado inicial e contribuem para o final não ocorrem somente durante o processo de colisão mas *em todo o ponto do espaço em todo o instante de tempo*. Teríamos, assim, não apenas partículas voando com velocidades e energias arbitrárias, mas também as partículas do estado inicial causando a criação de um par, digamos, cinco minutos depois do estado final ter sido medido viajando, então, no tempo para se aniquilar dez bilhões de anos atrás *e contribuindo para o resultado final*. Para evitar esse tipo de equívoco, os grafos não serão utilizados nesta tese. Todo este parágrafo, entretanto, foi incluído com a finalidade de chamar a atenção do leitor para essa questão, que é deliberadamente ignorada na grande maioria dos livros-textos sobre teoria de campos.

Esta tese tem um caráter construtivo, sendo que pouco conhecimento prévio dos assuntos abordados são necessários. Os operadores de campo, por exemplo, apresentados nesta tese podem, sem muitos problemas, serem entendidos como os operadores da mecânica quântica, com a extensão de que ao invés de um parâmetro temos um número maior correspondente ao número de dimensões espaço-temporais. De antemão afirmo que esta tese ficou mais longa do que eu gostaria, mas confesso que não fora a urgência do tempo, ela ainda seria um pouco maior. Devido à pressão temporal, alguns assuntos que eu gostaria de abordar ficaram de fora, dentre eles destaco a renormalizabilidade da teoria de Podolsky em equilíbrio termodinâmico, as soluções não perturbativas para as funções de Green e os fenômenos característicos de Física de plasmas, como a blindagem de Debye e oscilações coletivas [7, 8, 9].

1.2 A teoria termodinâmica

A termodinâmica é uma teoria desenvolvida no século XIX com o objetivo de se descrever processos envolvendo trocas de calor entre objetos macroscópicos. Seus desenvolvedores não conheciam a estrutura atômica da matéria, portanto o desenvolvimento da termodinâmica se deu com bases puramente empíricas e macroscópicas, salvo raras exceções. As leis básicas da termodinâmica, todavia, fazem menção apenas a quantidades macroscópicas, como o volume do sistema e a sua energia interna.

Um conceito central na teoria termodinâmica é o chamado *estado de equilíbrio termodinâmico*. É difícil dar uma descrição precisa do que seja esse estado. Na maioria dos casos, sua definição é *a posteriori*: a termodinâmica somente pode ser aplicada a sistemas que estejam em equilíbrio termodinâmico. Se eventualmente num determinado caso particular a teoria termodinâmica previr resultados contraditórios pelos dados experimentais, o sistema não está num estado de equilíbrio [10].

Embora falte uma definição precisa do conceito de equilíbrio termodinâmico, algumas de suas propriedades são conhecidas. Primeiramente, ele é um estado *macroscopicamente estacionário*. Isso significa que, contanto que apenas sejam realizados experimentos que meçam quantidades macroscópicas, os resultados são independentes do tempo. Isso não implica que o sistema seja *microscopicamente independente do tempo*. De fato, ele não é. Mesmo quando um determinado gás está em equilíbrio termodinâmico, suas moléculas constituintes estão descrevendo trajetórias complexas devido às incomensuráveis colisões mútuas. No entanto, no caso de teoria de campos, embora campos sejam objetos quânticos, assumi-los independentes do tempo é uma hipótese que simplifica a abordagem e garante, por exemplo, que medições de uma função dos campos no *ensemble* realizada em dois instantes distintos forneçam os mesmos resultados. A segunda propriedade fundamental consiste na ausência de memória do sistema. Dito de outra forma, dado um sistema em equilíbrio termodinâmico, por medições sobre o sistema é impossível saber como ele chegou ao estado de equilíbrio. Estudaremos no capítulo 4 a radiação cósmica de fundo em microondas, que constitui-se do campo eletromagnético quântico em equilíbrio termodinâmico. A questão de como a radiação de fundo atingiu a condição de equilíbrio não é abordada pela termodinâmica.

Nesta tese a conexão da estatística quântica com a termodinâmica é feita *via* limite termodinâmico. Neste processo, pela aplicação de limites apropriados encontra-se equações envolvendo termos que são, então, *identificados* com quantidades termodinâmicas. Desse ponto de vista, não se pode *deduzir* as leis da termodinâmica a partir de leis que governam os fenômenos

microscópicos, mas somente se pode fazer uma espécie de *associação* entre quantidades microscópicas e macroscópicas. O teorema H de Boltzmann mostra como a segunda lei da termodinâmica emerge a partir de uma teoria microscópica. No entanto, existe uma discussão sobre a validade desse teorema, uma vez que para se pode resolver as equações, Boltzmann fez a hipótese de *caos molecular* e essa hipótese, por si só, quebra a invariância temporal. Dito de outra forma, a fim de demonstrar a quebra da simetria temporal, Boltzmann supôs a quebra da simetria temporal. Essa questão também não é tratada nesta tese.

1.3 Um tributo a E. S. Fradkin

Grande parte do conteúdo desta tese é profundamente influenciada pelos trabalhos de E. S. Fradkin. Fradkin foi pioneiro em diversas áreas da Física Teórica mas, infelizmente, seu nome permanece esquecido. Apenas para citar alguns dos seus feitos, ele desenvolveu a formulação funcional da teoria quântica de campos e estatística quântica [11, 12]. Logo após Matsubara estabelecer as bases do formalismo baseado na matriz densidade do *ensemble* canônico para o tratamento da mecânica quântica em equilíbrio térmico, Fradkin estendeu seu formalismo para descrever teorias quânticas de campos no *ensemble* grão-canônico lançando, assim, as bases para a quantização de campos em equilíbrio termodinâmico [12, 13]. Fradkin também encontrou o sistema de equações renormalizadas das funções de Green obtidos por Dyson e Schwinger [11]. Nesse sistema de equações, Dyson conjecturou em 1949 uma certa relação, que foi provada no ano seguinte por Ward e ficou conhecida como *identidade de Ward*. Alguns anos mais tarde e antes de Takahashi, Fradkin provou todas as demais identidades conhecidas como *identidades de Ward-Fradkin-Takahashi* [14, 15]. Fradkin codescobriu independentemente de Landau e de Pomeranchuk o problema da carga nula da eletrodinâmica quântica. Fradkin inventou a teoria de perturbação modificada que leva seu nome [16]. Ele foi pioneiro no estudo da interação fraca e teorias de *gauge* não Abelianas, desenvolveu um método de quantização de teorias vinculadas, estudou teorias conformes, supergravidade, cordas e teorias de unificação.¹ Por seus feitos e por sua inspiração, esta tese é um tributo ao seu nome.

¹Consultar o apêndice de [1] para a lista completa.

1.4 Em defesa de Maxwell

Eletromagnetismo é sinônimo de J. C. Maxwell. Todo o desenvolvimento tecnológico e científico da humanidade deve-se, em grande parte, à teoria eletromagnética resumida nas quatro equações de Maxwell e na força de Lorentz [17]. Circuitos de computadores, transmissões de informação por fibras óticas e por ondas eletromagnéticas, celulares, *internet* sem fio, *lasers*, cartões magnéticos, câmeras de segurança, sistemas de navegação por satélite, sondas espaciais, correios eletrônicos, radiografias, ressonâncias magnéticas, fornos microondas, tudo isso tem por base a teoria de Maxwell. A versão quântica da eletrodinâmica Maxwelliana, juntamente com correções devido aos demais campos do Modelo Padrão das Partículas Elementares mantém, hoje, o recorde de previsão mais precisa de uma teoria já desenvolvida [18]. Sendo assim, há algo de errado com essa teoria?

Não.

Pelo menos se há, ainda não detectamos. Todas as previsões da teoria estão de acordo com os dados experimentais. Não existe no momento a *necessidade* de se estender a teoria, ou de adaptá-la, ou ainda de substituí-la por outra totalmente diferente.

Se assim, por qual razão estar-se-ia a teoria eletromagnética de Podolsky?

1.5 Sobre a necessidade de se estudar a teoria de Podolsky

A razão principal devido a qual a teoria de Maxwell é estudada é que ela exhibe as duas simetrias básicas empiricamente fundamentais do eletromagnetismo: a de Lorentz e a de *gauge* [19]. Uma alternativa razoavelmente conhecida para a teoria de Maxwell é a eletrodinâmica massiva, na qual o campo de Maxwell é substituído por um campo de Proca. Se a massa desse campo for suficientemente diminuta, é possível, pelo menos em princípio, descrever todos os resultados experimentais tão bem quanto a versão Maxwelliana. No entanto, a presença de uma massa no campo de *gauge*, não importando quão pequena seja ela, *quebra explicitamente a simetria de gauge*. Então, a menos que a simetria observada nos experimentos seja uma simetria aproximada, a eletrodinâmica massiva não pode fundamentalmente descrever a eletrodinâmica observada. A teoria de Podolsky, por outro lado, embora envolva um setor de Proca, é uma teoria que exhibe as duas simetrias fundamentais do eletromagnetismo, a saber, a de Lorentz e a de *gauge* [20, 21, 22]. Por ajustes apropriados do parâmetro livre da teoria seria, em princípio, possível

descrever todos os resultados experimentais do eletromagnetismo pelo menos tão bem quanto a teoria de Maxwell.

A resposta mais simples, então, para a questão levantada no início da seção anterior é que a teoria de Maxwell não é a única que, em princípio, está de acordo com todos os dados experimentais, não é a única capaz de descrever os circuitos de computadores e sistemas de navegação e não é a única que pode manter o recorde de previsão mais precisa. A teoria de Maxwell não é nada mais do que um limite, um caso especial da teoria de Podolsky. Além disso, de acordo com Cuzinato, de Melo e Pompeia em [23], a teoria de Podolsky é *a única extensão possível* do eletromagnetismo usual que contém derivadas de segunda ordem e que mantém a simetria de *gauge* e de Lorentz. Sendo Podolsky uma teoria de derivadas de ordens superiores, sua estrutura teórica é mais fascinante [24]. De fato, utilizando a teoria de Podolsky, J. Frenkel resolveu o antigo e famoso problema do “4/3 da eletrodinâmica clássica” [25]. Esse mesmo problema, do ponto de vista da teoria de Maxwell, permanece não solucionado. Conforme indicado por Cuzinato, de Melo, Medeiros e Pompeia em [26] com diversas propostas experimentais, a teoria de Podolsky pode ser fenomenologicamente testada. Na realidade, uma de suas implicações experimentais é um dos resultados desta tese [27].

Finalizando esta seção, parece-me conveniente citar Sir A. S. Eddington [28]:²

The law that entropy always increases - the second law of thermodynamics - holds, I think, the supreme position among the laws of Nature. If someone points out to you that your pet theory of the universe is in disagreement with Maxwell's equations - then so much the worse for Maxwell's equations. If it is found to be contradicted by observation - well, these experimentalists do bungle things sometimes. But if your theory is found to be against the second law of thermodynamics I can give you no hope; there is nothing for it but to collapse in deepest humiliation.

Com esse pensamento em mente, estudaremos justamente as questões termodinâmicas da teoria de Podolsky nesta tese.

²Tradução: “A lei de que a entropia sempre cresce - a segunda lei da termodinâmica - possui, penso eu, a posição suprema entre as leis da Natureza. Se alguém lhe mostrar que a sua teoria simples do universo está em desacordo com as equações de Maxwell - então azar das equações de Maxwell. Caso se descubra que ela é contradita pela observação - bem, esses experimentais fazem coisas tolas de vez em quando. Mas caso se descubra que sua teoria viola a segunda lei da termodinâmica eu não posso te dar esperanças; não resta nada para ela além de se afundar na mais profunda humilhação.”

1.6 Como ler esta tese

É impossível para um autor saber de antemão quem lerá seu trabalho. Eu fiz, contudo, algumas suposições sobre o leitor. Nem o formalismo nem a teoria aqui apresentados são, em geral, conhecidos. Então, suponho que o leitor tenha interesse principalmente por pelo menos um desses dois tópicos. Se o interesse do leitor for o formalismo de Matsubara-Fradkin, recomendo a leitura do capítulo 2. Nele o formalismo é apresentado dos primórdios, iniciando com a apresentação da matriz densidade de um *ensemble* em equilíbrio termodinâmico. O capítulo é finalizado com um exemplo de um campo escalar real com interação arbitrária. Caso o leitor esteja interessado na quantização da eletrodinâmica usual de Maxwell, basta recorrer ao terceiro capítulo tomando o limite $m_P \rightarrow \infty$ (ou, equivalentemente, $\lambda_P \rightarrow 0$) em todas as expressões sempre que o limite existir. Procedendo dessa forma, o leitor encontrará as expressões correspondentes na teoria Maxwelliana. Se, por outro lado, o interesse principal do leitor for a teoria de Podolsky, sua emergência a partir do princípio de *gauge* é apresentada na seção 3.1 e suas características mais básicas na seção 3.2. No restante do capítulo 3 é apresentada a quantização da teoria de Podolsky em equilíbrio termodinâmico. Algumas implicações fenomenológicas da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio são encontradas no capítulo 4. As conclusões são apresentadas no último capítulo.

Capítulo 2

Fundamentos da quantização de campos em equilíbrio termodinâmico

Neste capítulo estudaremos o formalismo de Matsubara-Fradkin da quantização de campos em equilíbrio termodinâmico [29, 12, 13]. Iniciaremos o capítulo introduzindo o conceito de *matriz densidade*, um operador que contém toda a informação a respeito do sistema quântico estudado [30]. A formulação da Mecânica Quântica em termos desse operador não é restrita aos casos dos estados puros (situações comumente descritas na Mecânica Quântica não-relativística pela equação de Schrödinger), mas também descreve sistemas em situações mais gerais [31]. Dentre tais situações, destacamos a de equilíbrio termodinâmico [32]. A fim de descrevermos um sistema quântico em equilíbrio, introduziremos o conceito de *ensemble*, que nada mais é do que o conjunto de estados sobre os quais as medições são realizadas. Como desejamos estudar o sistema quântico em equilíbrio, especializar-nos-emos no caso do *ensemble* grão-canônico. Esse *ensemble* é um dos possíveis conjuntos de estados que descrevem uma situação de equilíbrio termodinâmico. A seguir, estudaremos os análogos da evolução temporal em equilíbrio sendo que com o auxílio da matriz densidade encontraremos a equação satisfeita pelo funcional gerador. A partir dessa quantidade, que está relacionada intimamente com a matriz densidade, todas as funções de Green da teoria quântica podem ser obtidas.

2.1 A matriz densidade

O que segue é válido para o caso relativístico, contudo, não é uma formulação covariante de Lorentz.

A matriz densidade $\hat{\rho}$, um operador funcional dos operadores campos e momentos canonicamente conjugados aos campos, contém toda a informação de um sistema quântico. O *ensemble*, por sua vez, é o conjunto de estados no qual as medições são realizadas. Em diversas situações estamos interessados em *ensembles* puros e a descrição da Mecânica Quântica é feita de maneira usual - com a equação de Schrödinger, no caso da teoria quântica não relativística. Contudo, em muitas outras situações, estamos interessados em conjuntos de estados que não podem ser descritos de uma maneira tão simples. Em todos os casos, o *ensemble* é completamente definido uma vez dada a matriz densidade do sistema. No que segue, estudaremos a matriz densidade *normalizada* $\hat{\rho}$.¹ Com essa matriz, a média no *ensemble* de um operador arbitrário \hat{A} é

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{A}), \quad (2.1)$$

sendo Tr o traço.

No caso especial no qual o *ensemble* é puro, a matriz densidade é dada pelo projetor

$$\hat{\rho}_P = |\xi\rangle\langle\xi|, \quad (2.2)$$

sendo $|\xi\rangle$ o estado do sistema físico (que assumimos normalizado: $\langle\xi|\xi\rangle = 1$). Neste caso, vemos que a média no *ensemble* de um operador \hat{A} reduz-se ao seu valor esperado no referido estado $\langle\xi|\hat{A}|\xi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_P &= \text{Tr} (\hat{\rho}_P \hat{A}) = \text{Tr} (|\xi\rangle\langle\xi| \hat{A}) = \sum_n \langle b_n | \xi \rangle \langle \xi | \hat{A} | b_n \rangle \\ &= \sum_n \langle \xi | \hat{A} | b_n \rangle \langle b_n | \xi \rangle = \langle \xi | \hat{A} | \xi \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nesta expressão calculamos o traço numa base ortonormal arbitrária formada pelos vetores $\{|b_n\rangle\}$ e utilizamos a resolução da unidade nessa mesma base,

$$\hat{1} = \sum_n |b_n\rangle\langle b_n|. \quad (2.4)$$

¹A diferença entre as matrizes densidade normalizada e não normalizada ficará clara no que segue.

Vemos, dessa forma, que a média num *ensemble* puro coincide com a média obtida na teoria quântica usual. Assim sendo, não necessitamos da matriz densidade para descrever os resultados, embora a teoria da matriz densidade também forneça corretamente os resultados neste caso. Contudo, em geral, a matriz densidade não pode ser escrita na forma (2.2). Sua forma geral é

$$\hat{\varrho}_G = \sum_j w_j \hat{\varrho}_{P_j}, \quad (2.5)$$

sendo $w_j > 0$ satisfazendo $\sum_j w_j = 1$, a soma indo de 1 a um número que depende das características particulares do *ensemble* em questão e $\hat{\varrho}_{P_j}$ matrizes densidade de *ensembles* puros

$$\hat{\varrho}_{P_j} = |\xi_j\rangle\langle\xi_j|. \quad (2.6)$$

Vemos que a média nesse *ensemble* geral é

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_G &= \text{Tr}(\hat{\varrho}_G \hat{A}) = \text{Tr}\left(\sum_j w_j \hat{\varrho}_{P_j} \hat{A}\right) = \sum_j w_j \text{Tr}(\hat{\varrho}_{P_j} \hat{A}) \\ &= \sum_j w_j \langle \hat{A} \rangle_{\xi_j} \end{aligned} \quad (2.7)$$

e notamos que a igualdade (2.3) não é satisfeita, mas em seu lugar obtemos uma média de valores esperados de *ensembles puros* definida pelo conjunto dos *pesos estatísticos* $\{w_j\}$.

Uma vez apresentada a matriz densidade e o conceito de *ensemble*, estudaremos um dos *ensembles* que caracterizam o equilíbrio termodinâmico.

2.1.1 O *ensemble* grão-canônico

Uma teoria de campos pode apresentar um certo número de simetrias. De acordo com o teorema de Noether, associada a cada simetria contínua do sistema estudado existe uma quantidade, chamada de *carga de Noether*, que é conservada. A existência de quantidades conservadas numa teoria limita drasticamente seu comportamento, uma vez que a conservação de uma quantidade física constitui-se em um *vínculo* que o sistema deve respeitar. A fim de clarificar as ideias, consideremos o exemplo da teoria Newtoniana para

a mecânica de partículas. Consideremos, ainda, que esse sistema físico seja conservativo. Nesse caso, o sistema é invariante por translações temporais e, pela versão do teorema de Noether para partículas não relativísticas, a energia se conserva. Então, de todas as trajetórias concebíveis para cada uma das partículas, somente podem ser fisicamente realizadas aquelas que não violam o vínculo de conservação da energia. O mesmo ocorre para uma teoria clássica de campos: caso existam simetrias no problema e, conseqüentemente, cargas de Noether associadas ao sistema, de todas as configurações de campos imagináveis, o sistema físico somente exhibe aquelas que respeitem a conservação de cada uma das cargas. A versão quântica dessa propriedade existe: para uma teoria quântica de campos com um certo número de simetrias, teremos um certo número de *operadores* cargas de Noether.² A conservação de cada um desses operadores são vínculos aos quais o sistema está sujeito. Quando os elementos de um subconjunto dessas simetrias forem simetrias internas, contínuas e globais, o formalismo desenvolvido por Matsubara e Fradkin inclui os operadores cargas de Noether associados a elas na matriz densidade através da inclusão de multiplicadores de Lagrange. Esses multiplicadores de Lagrange são, posteriormente, identificados com os diversos potenciais químicos do problema. As quantidades termodinâmicas independentes utilizadas na descrição do sistema são, então, a temperatura $T = \beta^{-1}$, os potenciais químicos $\{\mu_j\}$ e o hipervolume em D dimensões V . O *ensemble* descrito por tais quantidades é chamado de *ensemble grão-canônico*.

Podemos encontrar a matriz densidade nesse *ensemble* impondo que as médias no *ensemble* dos operadores Hamiltoniano \hat{H} e cargas de Noether $\{\hat{N}_j\}$ coincidam com os valores da energia interna do sistema e dos valores termodinâmicos para as cargas de Noether, respectivamente,

$$\langle \hat{H} \rangle_{gc} = U; \quad (2.8)$$

$$\langle \hat{N}_j \rangle_{gc} = \mathcal{N}_j, \quad (2.9)$$

sendo $\langle \hat{A} \rangle_{gc}$ a média no *ensemble* calculada com a matriz densidade $\hat{\varrho}_{gc} = \hat{\varrho}_{gc}^{(T,V,\{\mu_j\})}$ do *ensemble* grão-canônico.

Além dessas condições, impomos uma condição de normalização da matriz

²Podem ocorrer que uma teoria exiba uma certa simetria no regime clássico e não a apresente em sua versão quântica. Esse fenômeno é chamado de *anomalia*.

densidade tal que a média no *ensemble* da identidade seja 1.³

$$\langle \hat{1} \rangle_{gc} = 1. \quad (2.10)$$

Essa condição é extremamente importante, pois garante que as médias no *ensemble* de operadores múltiplos da identidade sejam exatamente iguais ao fator de proporcionalidade entre eles e a identidade. Conforme veremos nas próximas seções, estudaremos a quantização do campo escalar na presença de fontes externas clássicas $J(\tau, \mathbf{x})$. No espaço de Hilbert, essas quantidades são um múltiplo da identidade: $J(\tau, \mathbf{x})\hat{1}$. De acordo com a condição acima, a média no *ensemble* dessa fonte clássica coincide com seu valor clássico: $\langle J(\tau, \mathbf{x})\hat{1} \rangle_{gc} = J(\tau, \mathbf{x})$.

Definimos a entropia S de um sistema quântico através da seguinte expressão:

$$S \equiv - \langle \ln(\hat{\varrho}_{gc}) \rangle_{gc}. \quad (2.11)$$

Essa definição é a versão quântica da entropia de Gibbs.

Ao se variar infinitesimalmente as quantidades termodinâmicas usadas para se definir o *ensemble* grão-canônico, quais sejam, a temperatura T , o volume V e os potenciais químicos $\{\mu_j\}$, de acordo com

$$T \rightarrow T' = T + \delta T; \quad (2.12)$$

$$V \rightarrow V' = V + \delta V; \quad (2.13)$$

$$\mu_j \rightarrow \mu'_j = \mu_j + \delta \mu_j, \quad (2.14)$$

a matriz densidade, ou seja, o *próprio ensemble grão-canônico* original, muda de acordo com:

$$\hat{\varrho}_{gc}^{(T,V,\{\mu_j\})} \rightarrow \hat{\varrho}_{gc}^{(T',V',\{\mu'_j\})} = \hat{\varrho}_{gc}^{(T+\delta T, V+\delta V, \{\mu_j\}+\{\delta \mu_j\})} = \hat{\varrho}_{gc}^{(T,V,\{\mu_j\})} + \delta \hat{\varrho}_{gc}. \quad (2.15)$$

Consequentemente, a média no *ensemble* de qualquer operador muda, pois o *próprio ensemble* mudou. Contudo, é hipótese da teoria termodinâmica que a entropia seja invariante sob essa troca, contanto que o novo *ensemble* seja ainda um *ensemble* grão-canônico. Portanto, como condição vinda da termodinâmica, impomos que a variação da entropia (2.11), com a matriz densidade sujeita aos vínculos (2.8-2.10), seja nula. A implementação

³A condição (2.10) juntamente com a definição de média no *ensemble* (2.1) são justamente as expressões que caracterizam a normalização do que chamamos de matriz densidade normalizada.

dos vínculos é feita através da adição de multiplicadores de Lagrange, que chamaremos de λ_U , $\{\lambda_{N_j}\}$ e λ_1 . Assim, impomos

$$\delta \left[\lambda_1 \langle \hat{1} \rangle_{gc} + \lambda_U \langle \hat{H} \rangle_{gc} + \lambda_{N_j} \langle \hat{N}_j \rangle_{gc} - \langle \ln(\hat{\varrho}_{gc}) \rangle_{gc} \right] = 0. \quad (2.16)$$

Utilizando a definição de média no *ensemble*:

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \text{Tr} \left[\lambda_1 \hat{\varrho}_{gc} + \lambda_U \hat{\varrho}_{gc} \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{\varrho}_{gc} \hat{N}_j - \hat{\varrho}_{gc} \ln(\hat{\varrho}_{gc}) \right] \right\} &= \text{Tr} \left\{ \left[(\lambda_1 - 1) \hat{1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln(\hat{\varrho}_{gc}) \right] \delta \hat{\varrho}_{gc} \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Uma vez que $\delta \hat{\varrho}_{gc}$ é arbitrário, devemos ter

$$(\lambda_1 - 1) \hat{1} + \lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j - \ln(\hat{\varrho}_{gc}) = \hat{0}, \quad (2.18)$$

sendo $\hat{0} = 0\hat{1}$. Também podemos escrever

$$\ln(\hat{\varrho}_{gc}) = (\lambda_1 - 1) \hat{1} + \lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j. \quad (2.19)$$

A solução dessa equação é

$$\hat{\varrho}_{gc} = e^{(\lambda_1 - 1)\hat{1} + \lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j} = e^{\lambda_1 - 1} e^{\lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j}, \quad (2.20)$$

sendo que utilizamos o fato de que a identidade comuta com todos os operadores existentes.

Agora, impomos a condição de normalização (2.10):

$$\begin{aligned} \langle \hat{1} \rangle_{gc} &= \text{Tr}(\hat{\varrho}_{gc} \hat{1}) = \text{Tr}(\hat{\varrho}_{gc}) \\ &= e^{\lambda_1 - 1} \text{Tr}(e^{\lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j}) = 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dessa expressão, encontramos a primeira relação entre os multiplicadores de Lagrange:

$$e^{\lambda_1 - 1} = \frac{1}{\text{Tr}(e^{\lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j})}, \quad (2.22)$$

ou seja,

$$\lambda_1 = \ln \left[\frac{1}{\text{Tr}(e^{\lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j})} \right] + 1 = 1 - \ln \left[\text{Tr}(e^{\lambda_U \hat{H} + \lambda_{N_j} \hat{N}_j}) \right]. \quad (2.23)$$

A fim de encontrarmos os demais multiplicadores de Lagrange, multiplicamos a equação (2.19) por $-\widehat{\varrho}_{gc}$, tomamos o traço e utilizamos os vínculos (2.8-2.9):

$$-\text{Tr} [\widehat{\varrho}_{gc} \ln (\widehat{\varrho}_{gc})] = S = \ln \left[\text{Tr} \left(e^{\lambda_U \widehat{H} + \lambda_{N_j} \widehat{N}_j} \right) \right] - \lambda_U U - \lambda_{N_j} \mathcal{N}_j. \quad (2.24)$$

Multiplicamos esse resultado pela temperatura:

$$TS = T \ln \left[\text{Tr} \left(e^{\lambda_U \widehat{H} + \lambda_{N_j} \widehat{N}_j} \right) \right] - T \lambda_U U - T \lambda_{N_j} \mathcal{N}_j, \quad (2.25)$$

ou

$$-T \ln \left[\text{Tr} \left(e^{\lambda_U \widehat{H} + \lambda_{N_j} \widehat{N}_j} \right) \right] = -T \lambda_U U - TS - T \lambda_{N_j} \mathcal{N}_j. \quad (2.26)$$

Comparamos essa expressão com a equação termodinâmica que define o grão-potencial $\Omega(T, V, \{\mu_j\})$:

$$\Omega(T, V, \{\mu_j\}) = U - TS - \mu_j \mathcal{N}_j. \quad (2.27)$$

Assim, identificamos:

$$\Omega(T, V, \{\mu_j\}) = -T \ln \left[\text{Tr} \left(e^{\lambda_U \widehat{H} + \lambda_{N_j} \widehat{N}_j} \right) \right]; \quad (2.28)$$

$$\lambda_U = -\beta; \quad (2.29)$$

$$\lambda_{N_j} = \beta \mu_j, \quad (2.30)$$

ou seja,

$$\Omega(T, V, \{\mu_j\}) = -T \ln \left\{ \text{Tr} \left[e^{-\beta(\widehat{H} - \mu_j \widehat{N}_j)} \right] \right\}. \quad (2.31)$$

Com isso, a matriz densidade normalizada do *ensemble* grão-canônico se escreve como

$$\widehat{\varrho}_{gc}^{(T, V, \{\mu_j\})} = \frac{e^{-\beta(\widehat{H} - \mu_j \widehat{N}_j)}}{\text{Tr} \left[e^{-\beta(\widehat{H} - \mu_j \widehat{N}_j)} \right]}. \quad (2.32)$$

Notamos que a matriz densidade normalizada é completamente especificada uma vez conhecido o operador $\exp \left[-\beta \left(\widehat{H} - \mu_j \widehat{N}_j \right) \right]$. Chamaremos esse operador de *matriz densidade não normalizada* $\widehat{\rho}_{gc}^{(T, V, \{\mu_j\})} = \widehat{\rho}_{gc}$ do *ensemble* grão-canônico

$$\widehat{\rho}_{gc} \equiv e^{-\beta(\widehat{H} - \mu_j \widehat{N}_j)}. \quad (2.33)$$

Em termos desse operador, a matriz densidade normalizada (2.32) e a média no *ensemble* (2.1) se escrevem respectivamente como

$$\hat{\varrho}_{gc} = \frac{\hat{\rho}_{gc}}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{gc})}; \quad (2.34)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}_{gc} \hat{A})}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{gc})}. \quad (2.35)$$

Além disso, recordemos que o potencial termodinâmico $\Omega(T, V, \{\mu_j\})$ é escrito como

$$\Omega(T, V, \{\mu_j\}) = -T \ln [Z(T, V, \{\mu_j\})], \quad (2.36)$$

sendo $Z(T, V, \{\mu_j\})$ a função de partição. De posse da função de partição podemos calcular todas as quantidades termodinâmicas. Com o auxílio das equações (2.31), (2.33) e (2.36), identificamos

$$Z(T, V, \{\mu_j\}) = \text{Tr}(\hat{\rho}_{gc}). \quad (2.37)$$

Vemos, assim, que a partir da matriz densidade não normalizada no *ensemble* canônico, doravante chamada apenas de matriz densidade, todas as quantidades termodinâmicas podem ser calculadas.

2.1.2 Sobre a inclusão de fontes

Consideremos uma teoria de campos cujo Hamiltoniano seja \hat{H} . Em geral, essa teoria terá um certo número de operadores cargas de Noether associados a simetrias internas globais. Denotaremos esse conjunto de operadores cargas de Noether por $\{\hat{N}_j\}$.⁴ Por esses operadores serem cargas de Noether, eles são conservados, donde eles comutam com o Hamiltoniano,

$$[\hat{H}, \hat{N}_j] = \hat{0}, \quad \forall j. \quad (2.38)$$

Consideremos, agora, que além dos campos quânticos usuais, tenhamos a presença de fontes clássicas externas no nosso problema. O que são fontes? Fontes são campos que aparecem na densidade de Lagrangeana do problema na forma $s(x)\varphi(x)$, sendo $s(x)$ a fonte e $\varphi(x)$ o campo do qual $s(x)$ é a fonte. Essas fontes são clássicas porque elas são funções, não operadores.

⁴Esse conjunto pode ser vazio.

Mais precisamente, suas representações no espaço de Hilbert são funções multiplicadas pela identidade, isto é, $s(x)\hat{1}$. Essas fontes são ditas externas porque seus únicos aparecimentos na densidade de Lagrangeana do problema são em termos do tipo $s(x)\varphi(x)$. Em outras palavras, suas dinâmicas não são consideradas.

Caso estivéssemos tratando de um problema clássico, a inclusão de termos de fonte alteraria a energia do problema, ou seja, alteraria a Hamiltoniana do mesmo. Como estamos tratando de um problema quântico, um novo termo é adicionado ao Hamiltoniano do problema. Denotaremos esse termo por \hat{H}_s :

$$\hat{H}_s = \int \hat{\mathcal{H}}_s(\mathbf{x}) d^D x, \quad (2.39)$$

sendo a densidade de Hamiltoniano das fontes dada por

$$\hat{\mathcal{H}}_s(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_j \left[s_j(\mathbf{x}) \hat{\phi}_j(\mathbf{x}) - (-1)^{P_j} \hat{\phi}_j(\mathbf{x}) s_j(\mathbf{x}) \right], \quad (2.40)$$

com $P_j = 1$ quando a fonte s_j comuta com seu campo associado e $P_j = -1$ quando ela for uma variável Grassmanniana.

Uma questão a ser destacada é que embora os operadores cargas de Noether comutem com o Hamiltoniano \hat{H} , estes não comutam, em princípio, com o Hamiltoniano das fontes \hat{H}_s . Sendo assim, se definíssemos o Hamiltoniano total \hat{H}_T como a soma dos Hamiltonianos do sistema sem fontes com o Hamiltoniano das fontes, isto é,

$$\hat{H}_T \equiv \hat{H} + \hat{H}_s, \quad (2.41)$$

teríamos como uma regra geral

$$\left[\hat{H}_T, \hat{N}_j \right] \neq \hat{0}. \quad (2.42)$$

A fim de tratarmos o problema de campos quânticos em equilíbrio termodinâmico na presença de fontes externas, consideremos a seguinte matriz densidade

$$\hat{\rho}_s(\beta) = \exp \left[-\beta \left(\hat{H}_T - \mu_j \hat{N}_j \right) \right], \quad (2.43)$$

sendo que assumimos a soma implícita em j tal que todas as cargas conservadas associadas a simetrias internas globais sejam incluídas. Essa matriz densidade depende da temperatura, do hipervolume D -dimensional e dos potenciais químicos mas, por conveniência de notação, somente sua dependência

com a temperatura está explicitada no primeiro membro. Derivando essa expressão com relação a β , temos

$$\frac{\partial \hat{\rho}_s(\beta)}{\partial \beta} = - \left(\hat{H}_T - \mu_j \hat{N}_j \right) \hat{\rho}_s(\beta). \quad (2.44)$$

Esta expressão é conhecida como equação de Bloch.

A fim de encontrarmos a matriz densidade do sistema com fontes externas, suponhamos o seguinte *Ansatz*:

$$\hat{\rho}_s(\beta) = \hat{\rho}(\beta) \hat{S}(\beta), \quad (2.45)$$

sendo $\hat{\rho}(\beta)$ a matriz densidade do sistema sem fontes externas em equilíbrio termodinâmico

$$\hat{\rho}(\beta) = \exp \left[-\beta \left(\hat{H} - \mu_j \hat{N}_j \right) \right]. \quad (2.46)$$

Esse operador satisfaz a equação de Bloch com o Hamiltoniano sem fontes:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(\beta)}{\partial \beta} = - \left(\hat{H} - \mu_j \hat{N}_j \right) \hat{\rho}(\beta). \quad (2.47)$$

Derivando o Ansatz (2.45) e utilizando as equações de Bloch (2.44) e (2.47), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_s(\beta)}{\partial \beta} &= \frac{\partial \hat{\rho}_0(\beta)}{\partial \beta} \hat{S}(\beta) + \hat{\rho}(\beta) \frac{\partial \hat{S}(\beta)}{\partial \beta} \\ &= - \left(\hat{H} - \mu_j \hat{N}_j \right) \hat{\rho}_s(\beta) + \hat{\rho}(\beta) \frac{\partial \hat{S}(\beta)}{\partial \beta} \\ &= - \left(\hat{H} + \hat{H}_s - \hat{H}_s - \mu_j \hat{N}_j \right) \hat{\rho}_s(\beta) + \hat{\rho}(\beta) \frac{\partial \hat{S}(\beta)}{\partial \beta} \\ &= - \left(\hat{H}_T - \mu_j \hat{N}_j \right) \hat{\rho}_s(\beta) + \hat{H}_s \hat{\rho}_s(\beta) + \hat{\rho}(\beta) \frac{\partial \hat{S}(\beta)}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

o que implica

$$\frac{\partial \hat{S}(\beta)}{\partial \beta} = -\hat{\rho}^{-1}(\beta) \hat{H}_s \hat{\rho}(\beta) \hat{S}(\beta). \quad (2.49)$$

O inverso da matriz densidade é dado por $\hat{\rho}^{-1}(\beta) = \hat{\rho}(-\beta)$. Para qualquer operador \hat{F} definimos sua dependência com a temperatura através de

uma transformação de similaridade com a matriz densidade do *ensemble* sem fontes:

$$\widehat{F}(\tau) \equiv \widehat{\rho}^{-1}(\tau) \widehat{F} \widehat{\rho}(\tau). \quad (2.50)$$

Assim:

$$\frac{\partial \widehat{S}(\beta)}{\partial \beta} = -\widehat{H}_s(\beta) \widehat{S}(\beta). \quad (2.51)$$

Essa expressão mostra que \widehat{S} depende unicamente de $\widehat{H}_s(\beta)$.

Dessa forma, reescrevemos a equação (2.51), trocando a variável β por τ :

$$\frac{\partial \widehat{S}(\tau)}{\partial \tau} = -\widehat{H}_s(\tau) \widehat{S}(\tau). \quad (2.52)$$

Integrando essa equação de 0 a β , encontramos

$$\widehat{S}(\beta) - \widehat{S}(0) = - \int_0^\beta d\tau \widehat{H}_s(\tau) \widehat{S}(\tau). \quad (2.53)$$

Das expressões (2.43), (2.45) e (2.46) vemos que

$$\widehat{\rho}_s(0) = \widehat{1} = \widehat{\rho}(0) \widehat{S}(0) = \widehat{S}(0). \quad (2.54)$$

Portanto, ficamos com

$$\widehat{S}(\beta) = \widehat{1} - \int_0^\beta d\tau \widehat{H}_s(\tau) \widehat{S}(\tau). \quad (2.55)$$

Essa equação é uma versão quântica de uma equação do tipo de Volterra. A solução da equação clássica pode ser obtida por meio de iteração. Tentando essa mesma técnica, encontramos

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\beta) &= \widehat{1} - \int_0^\beta d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1) \\
&= \widehat{1} - \int_0^\beta d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \left[\widehat{1} - \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \widehat{H}_s(\tau_2) \widehat{S}(\tau_2) \right] \\
&= \widehat{1} - \int_0^\beta d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \left\{ \widehat{1} - \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \widehat{H}_s(\tau_2) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[\widehat{1} - \int_0^{\tau_2} d\tau_3 \widehat{H}_s(\tau_3) \widehat{S}(\tau_3) \right] \right\} \\
&= \widehat{1} - \int_0^\beta d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \left\{ \widehat{1} - \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \widehat{H}_s(\tau_2) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[\widehat{1} - \int_0^{\tau_2} d\tau_3 \widehat{H}_s(\tau_3) (\widehat{1} - \dots) \right] \right\}. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Procedendo indefinidamente, observamos que a solução para o operador \widehat{S} pode ser escrita na seguinte forma:

$$\widehat{S}(\beta) = \widehat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j \widehat{H}_s(\tau_j), \tag{2.57}$$

com

$$\tau_0 \equiv \beta. \tag{2.58}$$

Definindo a função degrau de Heaviside $\theta(\tau)$ e o ordenamento T respectivamente como

$$\theta(\tau) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } \tau \geq 0, \\ 0, & \text{nos demais casos;} \end{cases} \tag{2.59}$$

$$T \left[\widehat{A}(\tau_1) \widehat{B}(\tau_2) \right] \equiv \begin{cases} \theta(\tau_1 - \tau_2) \widehat{A}(\tau_1) \widehat{B}(\tau_2) \pm \theta(\tau_2 - \tau_1) \widehat{B}(\tau_2) \widehat{A}(\tau_1), & \text{se } \tau_1 \neq \tau_2; \\ \widehat{A}(\tau_1) \widehat{B}(\tau_2), & \text{se } \tau_1 = \tau_2; \end{cases} \tag{2.60}$$

com o sinal negativo utilizado quando ambos os campos forem Grassmannianos e o positivo nos demais casos, podemos reescrever o operador \widehat{S} como

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\beta) &= \widehat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta \left[\prod_{j=1}^n d\tau_j \right] T \left[\prod_{k=1}^n \widehat{H}_s(\tau_k) \right] \\
&\equiv T \left\{ \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \widehat{H}_s(\tau) \right] \right\}, \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Podemos escrever o Hamiltoniano das fontes em termos de um operador densidade de Hamiltoniano da seguinte forma

$$\widehat{H}_s(\tau) = \int d^D x \widehat{\mathcal{H}}_s(\tau). \quad (2.62)$$

Agora, definimos:

$$\widehat{S}(\tau_1, \tau_2) \equiv T \left\{ \exp \left[- \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \widehat{H}_s(\tau) \right] \right\}. \quad (2.63)$$

Claramente,

$$\widehat{S}(\beta, 0) = \widehat{S}(\beta). \quad (2.64)$$

Com esse novo operador, temos a equação quântica de Volterra (2.55):

$$\widehat{S}(\beta, 0) = \widehat{1} - \int_0^\beta d\tau \widehat{H}_s(\tau) \widehat{S}(\tau, 0). \quad (2.65)$$

Temos, também

$$\widehat{S}(\tau, \tau') = \widehat{1} - \int_{\tau'}^\tau d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau'). \quad (2.66)$$

Derivando essa expressão com relação a τ :

$$\frac{\partial \widehat{S}(\tau, \tau')}{\partial \tau} = -\widehat{H}_s(\tau) \widehat{S}(\tau, \tau'). \quad (2.67)$$

Resolvendo essa equação por iteração, encontramos

$$\widehat{S}(\tau, \tau') = \widehat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=1}^n \int_{\tau'}^{\tau_{j-1}} d\tau_j \widehat{H}_s(\tau_j), \quad (2.68)$$

com $\tau_0 \equiv \tau$, ou seja:

$$\widehat{S}(\tau, \tau') = T \left\{ \exp \left[- \int_{\tau'}^\tau d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \right] \right\}, \quad (2.69)$$

conforme havíamos definido.

Derivando funcionalmente $\widehat{S}(\tau, \tau')$ com relação à fonte $s_j(\mathbf{x}, \tau_x)$, encontramos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \widehat{S}(\tau, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{1} - \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau') \right] \\
&= - \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \frac{\delta \widehat{H}_s(\tau_1)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \widehat{S}(\tau_1, \tau') - \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \frac{\delta \widehat{S}(\tau_1, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \\
&= \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \int d^D y \delta_{jl} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \delta(\tau_1 - \tau_x) \widehat{\phi}_l(\mathbf{y}, \tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau') + \\
&\quad - \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \frac{\delta \widehat{S}(\tau_1, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad - \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \frac{\delta \widehat{S}(\tau_1, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Da equação (2.66) com $\tau' = \tau_x$, temos

$$\widehat{S}(\tau, \tau_x) = \widehat{1} - \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau_x). \tag{2.71}$$

Agora, multiplicamos essa equação por $\widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau')$:

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') &= \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad - \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau').
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') &= \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad + \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau').
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \widehat{S}(\tau, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad - \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \frac{\delta \widehat{S}(\tau_1, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad + \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \times \\
&\quad \times \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') - \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \frac{\delta \widehat{S}(\tau_1, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)}. \quad (2.74)
\end{aligned}$$

A fim de resolvermos essa equação, supomos:

$$\frac{\delta \widehat{S}(\tau, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} = \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau'). \quad (2.75)$$

Resta-nos, agora, substituir tal *Ansatz* em (2.74) a fim de verificarmos sua consistência:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \widehat{S}(\tau, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad + \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \times \\
&\quad \times \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') - \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \times \\
&\quad \times \theta(\tau_1 - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad + \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \times \\
&\quad \times \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') - \int_{\tau'}^{\tau_x} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \theta(\tau_1 - \tau_x) \times \\
&\quad \times \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad - \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \theta(\tau_1 - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \times \\
&\quad \times \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau'). \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \widehat{S}(\tau, \tau')}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad + \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \times \\
&\quad \times \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') + \\
&\quad - \theta(\tau_x - \tau') \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau_1 \widehat{H}_s(\tau_1) \widehat{S}(\tau_1, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau') \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \theta(\tau_x - \tau') \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, \tau'), \quad (2.77)
\end{aligned}$$

o que mostra que nossa suposição é consistente e correta.

Assim, para $0 < \tau_x$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \widehat{S}(\tau, 0)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \theta(\tau - \tau_x) \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) \widehat{S}^{-1}(\tau_x, 0) \times \\
&\quad \times \widehat{\rho}^{-1}(\tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, 0) \widehat{\rho}(\tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) \left[\widehat{\rho}(\tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) \right]^{-1} \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, 0) \times \\
&\quad \times \widehat{\rho}(\tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0). \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Uma vez que $\widehat{S}(\tau, 0) = \widehat{S}(\tau)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \widehat{S}(\tau, 0)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \theta(\tau - \tau_x) \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) \left[\widehat{\rho}(\tau_x) \widehat{S}(\tau_x) \right]^{-1} \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, 0) \times \\
&\quad \times \widehat{\rho}(\tau_x) \widehat{S}(\tau_x) \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau_x) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, 0) \widehat{\rho}_s(\tau_x). \quad (2.79)
\end{aligned}$$

Agora, definimos, para qualquer operador \widehat{F} :

$$\widehat{F}^s(\tau) \equiv \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F} \widehat{\rho}_s(\tau), \quad (2.80)$$

que difere de (2.50) devido à presença do termo de fontes.⁵ Assim,

$$\frac{\delta \widehat{S}(\tau, 0)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} = \theta(\tau - \tau_x) \widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x). \quad (2.81)$$

⁵Uma vez que $\widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) = \widehat{\rho}_s(-\tau)$, notamos que $\widehat{F}^s(0) = \widehat{F}$.

Utilizando a definição (2.63) para $\tau > \tau_x$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\tau, \tau_x) \widehat{S}(\tau_x, 0) &= T \left\{ \exp \left[- \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau \widehat{H}_s(\tau) \right] \right\} T \left\{ \exp \left[- \int_0^{\tau_x} d\tau \widehat{H}_s(\tau) \right] \right\} \\
&= T \left\{ \exp \left[- \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau \widehat{H}_s(\tau) \right] \exp \left[- \int_0^{\tau_x} d\tau \widehat{H}_s(\tau) \right] \right\} \\
&= T \left\{ \exp \left[- \int_{\tau_x}^{\tau} d\tau \widehat{H}_s(\tau) - \int_0^{\tau_x} d\tau \widehat{H}_s(\tau) \right] \right\} \\
&= T \left\{ \exp \left[- \int_0^{\tau} d\tau \widehat{H}_s(\tau) \right] \right\} \\
&= \widehat{S}(\tau, 0).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Logo,

$$\frac{\delta \widehat{S}(\tau, 0)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} = \theta(\tau - \tau_x) \widehat{S}(\tau, 0) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x). \tag{2.83}$$

Uma vez que $\widehat{S}(\tau, 0) = \widehat{S}(\tau)$, encontramos o resultado

$$\frac{\delta \widehat{S}(\tau)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} = \theta(\tau - \tau_x) \widehat{S}(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x). \tag{2.84}$$

Com isso, a derivada funcional da matriz densidade com fontes com relação a uma das fontes é

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \widehat{\rho}_s(\tau)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{\rho}(\tau) \widehat{S}(\tau) \right] = \widehat{\rho}(\tau) \frac{\delta \widehat{S}(\tau)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \widehat{\rho}(\tau) \widehat{S}(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \\
&= \theta(\tau - \tau_x) \widehat{\rho}_s(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x).
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Para $\tau = \beta > \tau_x$, encontramos

$$\frac{\delta \widehat{\rho}_s(\beta)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} = \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x). \tag{2.86}$$

Calcularemos, agora, a derivada funcional do produto da matriz densi-

dade com fontes com um operador $\widehat{F}^s(\tau)$ arbitrário:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{F}^s(\tau) \right] &= \frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \widehat{\rho}_s(\tau) \right] \\
&= \frac{\delta \widehat{\rho}_s(\beta)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \widehat{\rho}_s(\tau) + \\
&\quad + \widehat{\rho}_s(\beta) \frac{\delta [\widehat{\rho}_s^{-1}(\tau)]}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \widehat{F}(0) \widehat{\rho}_s(\tau) + \\
&\quad \pm \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \frac{\delta \widehat{\rho}_s(\tau)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)}, \quad (2.87)
\end{aligned}$$

sendo que o sinal positivo é utilizado quando a fonte comuta com o operador \widehat{F} e o negativo usado quando esses objetos anti-comutam um com o outro.

Para qualquer matriz inversível M , temos

$$M^{-1}M = \widehat{1}. \quad (2.88)$$

A derivada dessa expressão é

$$\frac{\delta(M^{-1}M)}{\delta s} = \frac{\delta(M^{-1})}{\delta s}M + M^{-1}\frac{\delta M}{\delta s} = \frac{\delta(\widehat{1})}{\delta s} = \widehat{0}. \quad (2.89)$$

Ou seja,

$$\frac{\delta(M^{-1})}{\delta s}M = -M^{-1}\frac{\delta M}{\delta s}. \quad (2.90)$$

Multiplicando essa expressão pela inversa de M pela direita, encontramos a fórmula:

$$\frac{\delta(M^{-1})}{\delta s} = -M^{-1}\frac{\delta M}{\delta s}M^{-1}. \quad (2.91)$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{F}^s(\tau) \right] &= \frac{\delta \widehat{\rho}_s(\beta)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \widehat{\rho}_s(\tau) + \\
&\quad - \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \frac{\delta \widehat{\rho}_s(\tau)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \widehat{\rho}_s(\tau) + \\
&\quad \pm \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \frac{\delta \widehat{\rho}_s(\tau)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \\
&= \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \widehat{\rho}_s(\tau) + \\
&\quad - \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \theta(\tau - \tau_x) \widehat{\rho}_s(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \times \\
&\quad \times \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \widehat{\rho}_s(\tau) + \\
&\quad \pm \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{F}(0) \theta(\tau - \tau_x) \widehat{\rho}_s(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x), \quad (2.92)
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{F}^s(\tau) \right] &= \widehat{\rho}_s(\beta) \left\{ \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{F}^s(\tau) - \theta(\tau - \tau_x) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{F}^s(\tau) \mp \widehat{F}^s(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Se $\tau_x > \tau$, temos

$$\frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{F}^s(\tau) \right] \Big|_{\tau_x > \tau} = \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{F}^s(\tau). \quad (2.94)$$

Por outro lado, se $\tau > \tau_x$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{F}^s(\tau) \right] \Big|_{\tau > \tau_x} &= \widehat{\rho}_s(\beta) \left\{ \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{F}^s(\tau) + \right. \\ &\quad \left. - \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{F}^s(\tau) \pm \widehat{F}^s(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \right\} \\ &= \pm \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{F}^s(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Podemos resumir esses resultados como

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{F}^s(\tau) \right] &= \widehat{\rho}_s(\beta) \left[\theta(\tau_x - \tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{F}^s(\tau) + \right. \\ &\quad \left. \pm \theta(\tau - \tau_x) \widehat{F}^s(\tau) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \\ &= \widehat{\rho}_s(\beta) T \left[\widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{F}^s(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Logo, a derivada funcional de segunda ordem da matriz densidade com fontes é

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \widehat{\rho}_s(\beta)}{\delta s_l(\mathbf{y}, \tau_y) \delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \frac{\delta}{\delta s_l(\mathbf{y}, \tau_y)} \left[\frac{\delta \widehat{\rho}_s(\beta)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \right] \\ &= \frac{\delta}{\delta s_l(\mathbf{y}, \tau_y)} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \\ &= \widehat{\rho}_s(\beta) T \left[\widehat{\phi}_l^s(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \right]. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Seja o funcional gerador termodinâmico $Z_{GF}[\{s_j\}] = Z_{GF}^{\beta, \{\mu_j\}, V}[\{s_j\}]$ definido como

$$Z_{GF} [\{s_j\}] \equiv \text{Tr} [\widehat{\rho}_s(\beta)]. \quad (2.98)$$

Notamos, em particular, que a função de partição pode ser obtida a partir de Z_{GF} simplesmente fazendo-se as fontes nulas:

$$Z_{GF} [\{s_j = 0\}] = \text{Tr} [\widehat{\rho}_s(\beta)]|_{s=0} = \text{Tr} [\widehat{\rho}(\beta)] = Z(\beta). \quad (2.99)$$

Tomando o traço da equação (2.86), obtemos

$$\text{Tr} \left[\frac{\delta \widehat{\rho}_s(\beta)}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \right] = \frac{\delta \text{Tr} [\widehat{\rho}_s(\beta)]}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} = \frac{\delta Z_{GF} [\{s_j\}]}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} = \text{Tr} \left[\widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\phi}_j^s(\mathbf{x}, \tau_x) \right]. \quad (2.100)$$

Calculando essa expressão para fontes nulas e dividindo pela função de partição, encontramos:

$$\frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left[\widehat{\rho}(\beta) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \right] = \frac{1}{Z(\beta)} \left. \frac{\delta Z_{GF} [\{s_j\}]}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \right|_{s=0}. \quad (2.101)$$

Nesta expressão, o índice s foi retirado, pois quando as fontes são nulas $\widehat{\rho}_s(\beta) = \widehat{\rho}(\beta)$, e a definição (2.50) foi utilizada. Contudo, utilizando a equação (2.35), o primeiro membro dessa expressão coincide com a média térmica de $\widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x)$. Logo,

$$\left\langle \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \right\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \left. \frac{\delta Z_{GF} [\{s_j\}]}{\delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \right|_{s=0}. \quad (2.102)$$

Da mesma forma, podemos escrever a partir de (2.97):

$$\left\langle T \left[\widehat{\phi}_l(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\phi}_j(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \left. \frac{\delta^2 Z_{GF} [\{s_j\}]}{\delta s_l(\mathbf{y}, \tau_y) \delta s_j(\mathbf{x}, \tau_x)} \right|_{s=0}. \quad (2.103)$$

Vemos, portanto, que é possível obter médias no *ensemble* de campos e de ordenamentos de campos a partir do funcional gerador termodinâmico.

Até a presente seção tratamos da teoria geral da quantização de campos. A fim de tornar mais clara a apresentação do método de Matsubara-Fradkin, em especial o papel das fontes clássicas, no restante deste capítulo restringir-nos-emos ao caso do campo escalar.

2.2 O campo escalar real

Consideremos um campo escalar real clássico ϕ com auto-interação arbitrária num espaço-tempo $(D + 1)$ -dimensional. Tal campo é descrito pela seguinte densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + g \mathcal{L}_{int}(\phi). \quad (2.104)$$

Nesta expressão, m é um parâmetro real com dimensão de energia, g é um parâmetro real arbitrário adimensional e $\mathcal{L}_{int}(\phi)$ é a densidade de Lagrangeana de interação cuja forma é, em princípio, arbitrária no entanto, por uma questão de simplicidade, restringimo-nos aos casos nos quais ela não depende das derivadas do campo.

Nos casos nos quais a densidade de Lagrangeana de interação é uma função par do campo, o sistema possui uma invariância Z_2 , que consiste em substituir ϕ por $-\phi$ no presente caso. Tal simetria, embora seja interna, é também discreta. Para um único campo escalar real aparentemente não se pode ter simetrias internas, contínuas e globais, razão pela qual não há cargas de Noether associadas a tais simetrias. De antemão já notamos que não haverá potencial químico envolvido na descrição de um campo escalar real quantizado em equilíbrio térmico. Ainda assim, a simplicidade técnica associada ao se estudar o campo escalar real é atrativa o suficiente para o considerarmos nosso primeiro objeto de estudo nesta tese.

Associado ao campo $\phi(x)$ temos o seu momento canonicamente conjugado $\pi(x)$:

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_0 \phi(x)]} = \partial_0 \phi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial t}. \quad (2.105)$$

Visto que a relação entre o momento canônico e a derivada temporal do campo é linear ela é evidentemente inversível e, sendo ϕ o único campo envolvido no problema, vemos que não há vínculos. Evidencia-se aqui uma das vantagens de se estudar o campo escalar real. Veremos no próximo capítulo que a quantização, e mesmo o estudo clássico, de teorias vinculadas se apresentam como grandes dificuldades e enormes desafios. Voltando ao caso do campo escalar, os únicos parênteses de Poisson fundamentais não nulos são

$$\{\phi(x), \pi(y)\}_P^{x_0=y_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.106)$$

Podemos, também, escrever a densidade de Hamiltoniana canônica \mathcal{H}_C como

$$\mathcal{H}_C \equiv \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \left(\vec{\partial} \phi \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 - g \mathcal{L}_{int}(\phi). \quad (2.107)$$

A fim de quantizarmos esse sistema, substituímos as funções campo ϕ e momento canônico π por operadores campo $\hat{\phi}$ e momento canônico $\hat{\pi}$ e trocamos os parênteses de Poisson fundamentais, inclusive (2.106), por comutadores:

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y) \right]_{x_0=y_0} = \hat{0}; \quad (2.108)$$

$$\left[\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y) \right]_{x_0=y_0} = \hat{0}; \quad (2.109)$$

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y) \right]_{x_0=y_0} = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{1}, \quad (2.110)$$

sendo o comutador definido como

$$\left[\hat{A}, \hat{B} \right] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.111)$$

Uma condição necessária, embora não suficiente, para o equilíbrio termodinâmico é a estacionariedade, isto é, a independência temporal. Assumindo que o campo escalar esteja em equilíbrio termodinâmico, os operadores campo e momento devem ser independentes do tempo. Sendo assim, podemos calcular essas relações, digamos, para $x_0 = 0$ e reescrevê-las simplesmente como dependentes apenas das variáveis espaciais:

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{y}) \right] = \hat{0}; \quad (2.112)$$

$$\left[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y}) \right] = \hat{0}; \quad (2.113)$$

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y}) \right] = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{1}. \quad (2.114)$$

A matriz densidade que descreve esse sistema é

$$\hat{\rho}(\beta) = e^{-\beta \hat{H}}, \quad (2.115)$$

sendo \hat{H} o Hamiltoniano obtido pela integração em todo o espaço da densidade de Hamiltoniana canônica (2.107) com as funções campo e momento substituídas por operadores:

$$\widehat{H} = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \widehat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \left(\vec{\partial} \widehat{\phi} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \widehat{\phi}^2 - g \mathcal{L}_{int} \left(\widehat{\phi} \right) \right]. \quad (2.116)$$

Conforme chamamos a atenção já no início desta seção, a matriz densidade que descreve o campo escalar real em equilíbrio termodinâmico não depende de nenhum potencial químico devido à ausência de simetrias internas, contínuas e globais.

Podemos, ainda, considerar a presença de uma fonte externa clássica $J = J(x)$ para o campo escalar. A matriz densidade na presença da fonte externa é

$$\widehat{\rho}_s(\beta) = e^{-\beta \widehat{H}_T}, \quad (2.117)$$

sendo

$$\widehat{H}_T = \widehat{H} + \widehat{H}_s \quad (2.118)$$

com \widehat{H} dado por (2.116) e

$$\widehat{H}_s = - \int d^D x J(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\phi}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int d^D x \widehat{\mathcal{H}}_s(\mathbf{x}, \tau). \quad (2.119)$$

De acordo com a equação (2.80), podemos escrever a dependência de qualquer operador com o parâmetro associado à temperatura *na presença de fontes* a partir de uma transformação de similaridade desse operador com a matriz densidade com fontes. Em particular, para os operadores campo e momento, temos

$$\widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau) = \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \widehat{\phi}(\mathbf{x}) \widehat{\rho}_s(\tau); \quad (2.120)$$

$$\widehat{\pi}^s(\mathbf{x}, \tau) = \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \widehat{\pi}(\mathbf{x}) \widehat{\rho}_s(\tau). \quad (2.121)$$

Aplicando essa transformação de similaridade a cada uma das equações (2.112-2.114), vemos que seus segundos membros são invariantes por essa transformação. Um comutador, por sua vez, se transforma da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \left[\widehat{A}, \widehat{B} \right] \widehat{\rho}_s(\tau) &= \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \widehat{A} \widehat{B} \widehat{\rho}_s(\tau) - \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \widehat{B} \widehat{A} \widehat{\rho}_s(\tau) \\ &= \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \widehat{A} \widehat{\rho}_s(\tau) \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \widehat{B} \widehat{\rho}_s(\tau) + \\ &\quad - \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \widehat{B} \widehat{\rho}_s(\tau) \widehat{\rho}_s^{(-1)}(\tau) \widehat{A} \widehat{\rho}_s(\tau) \\ &= \widehat{A}^s(\tau) \widehat{B}^s(\tau) - \widehat{B}^s(\tau) \widehat{A}^s(\tau) = \left[\widehat{A}^s(\tau), \widehat{B}^s(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Dessa forma, as equações (2.112-2.114) podem ser reescritas como

$$\left[\widehat{\phi}(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\phi}(\mathbf{y}, \tau) \right] = \widehat{0}; \quad (2.123)$$

$$\left[\widehat{\pi}(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\pi}(\mathbf{y}, \tau) \right] = \widehat{0}; \quad (2.124)$$

$$\left[\widehat{\phi}(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\pi}(\mathbf{y}, \tau) \right] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}. \quad (2.125)$$

Essas são as relações de comutação fundamentais para a quantização do campo escalar real em equilíbrio termodinâmico.

2.2.1 Das equações de campo ao funcional gerador

Nesta seção, encontraremos o funcional gerador em equilíbrio termodinâmico a partir das equações de campo.

As chamadas equações de campo em equilíbrio termodinâmico são equações análogas às equações de movimento de Heisenberg da teoria quântica de campos num espaço-tempo de Minkowski. Na verdade, na ausência de potenciais químicos (exemplo do qual o presente caso é), a parte da restrição $0 \leq \tau \leq \beta$, as equações de campo são idênticas às equações de movimento num espaço-tempo Euclideano.

Derivando as expressões (2.120) e (2.121) com relação ao parâmetro τ e utilizando a matriz densidade (2.117), temos:

$$\frac{\partial \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = - \left[\widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{H}_T \right]; \quad (2.126)$$

$$\frac{\partial \widehat{\pi}^s(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = - \left[\widehat{\pi}^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{H}_T \right]. \quad (2.127)$$

A fim de calcularmos essas expressões, utilizamos o Hamiltoniano \widehat{H}_T dado por (2.118) e os comutadores fundamentais da teoria (2.123-2.125). Dessa forma, temos

$$\frac{\partial \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = - i\widehat{\pi}^s(\mathbf{x}, \tau); \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\pi}^s(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = - i \left\{ \vec{\partial}^2 \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau) - m^2 \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau) + \right. \\ \left. + g \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau) \right]}{\partial \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)} - J(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

A derivada de segunda ordem do campo $\widehat{\phi}$ com respeito ao parâmetro τ pode ser encontrada derivando-se a equação (2.128) com relação a τ e utilizando (2.129). O resultado é uma equação independente do operador momento canônico dada por

$$(\Delta + m^2) \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau) - g \frac{\partial \mathcal{L}_{int} [\widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)]}{\partial \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)} = J(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}. \quad (2.130)$$

Nesta expressão, o operador derivativo Δ é definido como o negativo do Laplaceano em $D + 1$ dimensões:

$$\Delta \equiv -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \vec{\partial}^2. \quad (2.131)$$

Multiplicamos a equação (2.130) pela matriz densidade do sistema com fontes externas pela esquerda:

$$(\Delta + m^2) \widehat{\rho}_s(\beta) \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau) - g \widehat{\rho}_s(\beta) \frac{\partial \mathcal{L}_{int} [\widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)]}{\partial \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)} = J(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\rho}_s(\beta). \quad (2.132)$$

Dada a definição (2.60), podemos substituir o operador associado com a derivada da densidade de Lagrangeano por

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int} [\widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)]}{\partial \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)} = T \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{int} [\widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)]}{\partial \widehat{\phi}^s(\mathbf{x}, \tau)} \right\}. \quad (2.133)$$

Com esse resultado e com o auxílio das relações (2.86) e (2.97), reescrevemos a expressão (2.132) como

$$(\Delta + m^2) \frac{\delta \widehat{\rho}_s(\beta)}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} - g \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]} \widehat{\rho}_s(\beta) = J(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\rho}_s(\beta). \quad (2.134)$$

Tomando o traço dessa expressão e utilizando a definição (2.98) e dividindo pela função de partição, obtemos

$$\left\{ (\Delta + m^2) \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} - g \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]} \right\} Z_{GF}[J] = J(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF}[J]. \quad (2.135)$$

Enfatizamos que substituímos a equação diferencial *operatorial* (2.130) por uma equação diferencial *funcional*. A vantagem mais evidente, além da simplicidade técnica relativa alcançada, é que o funcional gerador, sendo definido como um traço da matriz densidade, nos fornece todas as quantidades físicas que desejarmos, inclusive as termodinâmicas, mas não antes de sermos capazes de calcular Z_{GF} .

2.2.2 O funcional gerador em equilíbrio termodinâmico

O funcional gerador pode nos fornecer todas as funções de Green da teoria original, isto é, sem fontes externas. A função de partição da teoria original nada mais é do que o funcional gerador calculado para fontes nulas.

Existem dois métodos básicos para se calcular o funcional gerador. O primeiro deles, e certamente o mais comum, consiste em se calcular explicitamente o traço do segundo membro da definição (2.98). Isso é possível pois a matriz densidade do *ensemble* com fontes $\widehat{\rho}_s(\beta)$ é conhecida. A técnica consiste em se efetuar o cálculo via integração funcional. Devido à operação de traço, as integrações funcionais são realizadas sobre todas as configurações de campo e de momento canônico, que são autovalores dos operadores correspondentes. Certas condições de periodicidade sobre as configurações de campo são implicadas pela operação de traço. Um outro método para se obter Z_{GF} consiste em se resolver a equação diferencial funcional explicitamente. Tal método será nesta seção seguido.

Notamos que resolver a equação (2.135) para uma interação arbitrária parece não trivial. Portanto, iniciaremos o cálculo para a situação de campo livre, que é aparentemente mais simples.

O campo livre

A situação de campo livre é obtida fazendo-se $g = 0$ em (2.135). Denotemos o funcional gerador do caso livre de $Z_{GF}^F[J]$. Esse funcional gerador satisfaz:

$$(\Delta + m^2) \frac{\delta Z_{GF}^F[J]}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} = J(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF}^F[J]. \quad (2.136)$$

A fim de resolvermos essa equação diferencial funcional, aplicamos formalmente o inverso do operador diferencial $\Delta + m^2$ pela esquerda e ficamos com

$$\frac{\delta Z_{GF}^F [J]}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} = (\Delta + m^2)^{-1} J(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF}^F [J]. \quad (2.137)$$

Essa equação diferencial funcional se parece com a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dz(j)}{dj} = ajz(j), \quad (2.138)$$

cuja solução é

$$z(j) = z(0)e^{\frac{a}{2}j^2}. \quad (2.139)$$

Adaptando essa solução para a equação funcional (2.137), temos:

$$Z_{GF}^F [J] = Z_{GF}^F [0] \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\beta} d^{D+1}x J(\mathbf{x}, \tau) (\Delta + m^2)^{-1} J(\mathbf{x}, \tau) \right]. \quad (2.140)$$

Nesta equação empregamos uma notação que será corrente em toda a tese:

$$\int_{\beta} d^{D+1}x = \int_0^{\beta} d\tau_x \int_V d^Dx, \quad (2.141)$$

sendo que utilizaremos a notação τ para τ_x sempre que não houver confusão e a integral em \mathbf{x} é efetuada em todo o espaço D - dimensional, resultando numa dependência implícita do funcional gerador com o hipervolume V em D dimensões.

Ao deduzirmos a solução para a equação (2.136), utilizamos um operador que seria o inverso de $\Delta + m^2$. A fim de encontrarmos tal operador, consideremos uma função arbitrária $f(\mathbf{x}, \tau_x)$ com derivadas de terceira ordem em todos os pontos do espaço-tempo considerado. Nessas condições, deve valer

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \tau_x) &= (\Delta + m^2)^{-1} (\Delta^{(x)} + m^2) f(\mathbf{x}, \tau_x) \\ &= \int_{\beta} d^{D+1}y (\Delta + m^2)^{-1}(\mathbf{x}, \tau_x; \mathbf{y}, \tau_y) (\Delta^{(y)} + m^2) f(\mathbf{y}, \tau_y) \\ &= \int_{\beta} d^{D+1}y (\Delta^{(y)} + m^2) (\Delta + m^2)^{-1}(\mathbf{x}, \tau_x; \mathbf{y}, \tau_y) f(\mathbf{y}, \tau_y). \end{aligned} \quad (2.142)$$

Na última igualdade, realizamos duas integrações por partes. A fim de que essa expressão esteja correta, devemos ter (assumindo que a representação no espaço-tempo do operador inverso seja simétrico em τ_x e τ_y e em \mathbf{x} e \mathbf{y})

$$(\Delta^{(x)} + m^2) (\Delta + m^2)^{-1} (\mathbf{x}, \tau_x; \mathbf{y}, \tau_y) = \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.143)$$

Essa expressão mostra que $(\Delta + m^2)^{-1} (\mathbf{x}, \tau_x; \mathbf{y}, \tau_y)$ satisfaz a mesma equação que a função de Green $G_F (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)$ do operador $\Delta + m^2$ satisfaz:

$$(\Delta^{(x)} + m^2) G_F (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) = \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.144)$$

Portanto, essas duas funções devem ser iguais:

$$(\Delta + m^2)^{-1} (\mathbf{x}, \tau_x; \mathbf{y}, \tau_y) = G_F (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y). \quad (2.145)$$

Resta-nos, ainda, encontrar o termo $Z_{GF}^F [0]$ que aparece no funcional gerador da teoria livre. De acordo com (2.99), essa quantidade é igual ao traço da matriz densidade de um *ensemble* grão-canônico para o campo escalar real sem fontes externas e sem auto-interação:

$$Z_{GF}^F [0] = \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} \right). \quad (2.146)$$

O Hamiltoniano \hat{H}_0 que aparece nesta expressão é o Hamiltoniano do sistema livre, que pode ser obtido fazendo-se $g = 0$ em (2.116):

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \int d^D x \left[\hat{\pi}^2 + \left(\vec{\partial} \hat{\phi} \right)^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right]. \quad (2.147)$$

Essas duas últimas expressões deixam claro que $Z_{GF}^F [0]$ nada mais é do que a função de partição da teoria livre $Z_F(\beta)$.

Com todos esses resultados, escrevemos o funcional gerador do campo escalar real livre como

$$Z_{GF}^F [J] = Z_F(\beta) \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\beta} d^{D+1} x d^{D+1} y J (\mathbf{x}, \tau_x) G_F (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) J (\mathbf{y}, \tau_y) \right]. \quad (2.148)$$

Convém notar que o gerador funcional depende da função de partição livre e ainda não a calculamos. A função de partição é imprescindível, especialmente quando estamos interessados em calcular quantidades termodinâmicas, como a pressão ou a energia interna do sistema. Embora essa quantidade seja importantíssima para quantidades termodinâmicas, não a calcularemos explicitamente nesta seção. A razão para isso é que existem muitas quantidades,

como as diversas funções de Green da teoria (que no caso livre é apenas uma), que podem ser obtidas a partir do funcional gerador sem a necessidade de se conhecer a função de partição explicitamente. Como um exemplo, tomemos a função de Green do campo escalar livre $G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)$. Essa quantidade pode ser calculada através de

$$G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) = \frac{1}{Z_F(\beta)} \frac{\delta^2 Z_{GF}^F[J]}{\delta J(\mathbf{x}, \tau_x) \delta J(\mathbf{y}, \tau_y)} \Big|_{J=0}. \quad (2.149)$$

Dada a equação (2.148), vemos que a função de partição acaba sendo dividida por ela mesma. Dessa forma, a função de Green livre, embora dependa de quantidades termodinâmicas (como a temperatura, por exemplo), independe da função de partição. Essa mesma característica será partilhada por outras funções de Green de teorias mais complicadas.

O caso auto-interagente

Retornaremos, agora, para o caso com auto-interação. Nesse caso, o funcional gerador termodinâmico deve satisfazer a equação (2.135). Tentaremos resolver essa equação funcional complicada com o seguinte *Ansatz*:

$$Z_{GF}[J] = A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] Z_{GF}^F[J], \quad (2.150)$$

sendo $A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]$ um operador derivativo funcional por enquanto desconhecido. Nosso objetivo nesta seção é encontrá-lo. Substituindo o Ansatz (2.150) na equação funcional (2.135), encontramos:

$$J(\mathbf{x}, \tau) A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] Z_{GF}^F[J] = A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \left\{ (\Delta + m^2) \frac{\delta Z_{GF}^F[J]}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} + \right. \\ \left. -g \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]} Z_{GF}^F[J] \right\}. \quad (2.151)$$

Utilizando a equação (2.136) para o funcional gerador termodinâmico livre, ficamos com

$$J(\mathbf{x}, \tau) A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] Z_{GF}^F[J] = A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \left\{ J(\mathbf{x}, \tau) - g \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]} \right\} Z_{GF}^F[J]. \quad (2.152)$$

Embora essa equação seja satisfeita pelo funcional gerador termodinâmico livre $Z_{GF}^F(\beta)$, o operador que nele atua apenas depende de quantidades que dependem exclusivamente da interação. Mas o funcional gerador termodinâmico livre, por definição, não depende da interação. Logo, o operador que nele atua deve ser identicamente nulo para que a equação acima seja satisfeita. Assim, temos a seguinte equação operatorial:

$$J(\mathbf{x}, \tau) A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] = A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] J(\mathbf{x}, \tau) - g A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}, \quad (2.153)$$

ou

$$A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] J(\mathbf{x}, \tau) - J(\mathbf{x}, \tau) A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] = g A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}. \quad (2.154)$$

O primeiro membro dessa equação pode ser escrito como um comutador:

$$\left[A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right], J(\mathbf{x}, \tau) \right] = g \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]} A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]. \quad (2.155)$$

A fim de resolvermos essa equação, expandimos o operador A em potências da derivada funcional

$$A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\beta} \prod_{j=1}^n d^{D+1} x_j \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_j, \tau_{x_j})}. \quad (2.156)$$

Nesta equação, a_n são os coeficientes da expansão e, por definição,

$$\int_{\beta} \prod_{j=1}^0 d^{D+1} x_j \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}_j, \tau_{x_j})} = 1. \quad (2.157)$$

Calculamos, agora, o comutador da fonte J com sua derivada funcional.

Esse comutador atuando sobre um funcional F arbitrário fornece:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}, \tau_y)}, J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] F[J] &= \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}, \tau_y)} \{ J(\mathbf{x}, \tau_x) F[J] \} + \\
&\quad - J(\mathbf{x}, \tau_x) \frac{\delta F[J]}{\delta J(\mathbf{y}, \tau_y)} \\
&= \frac{\delta J(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta J(\mathbf{y}, \tau_y)} F[J] + J(\mathbf{x}, \tau_x) \frac{\delta F[J]}{\delta J(\mathbf{y}, \tau_y)} + \\
&\quad - J(\mathbf{x}, \tau_x) \frac{\delta F[J]}{\delta J(\mathbf{y}, \tau_y)} \\
&= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) F[J]. \tag{2.158}
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}, \tau_y)}, J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y). \tag{2.159}$$

Precisamos, ainda, calcular

$$\begin{aligned}
\left[A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right], J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\beta} \left[\prod_{j=1}^n d^{D+1} y_j \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}_j, \tau_{y_j})} \right], J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\int_{\beta} \left[\prod_{j=1}^n d^{D+1} y_j \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}_j, \tau_{y_j})} \right], J(\mathbf{x}, \tau_x) \right]. \tag{2.160}
\end{aligned}$$

Estudemos o comutador $\left[\prod_{j=1}^n B_j, C \right]$. Quando $n = 0$ temos, por definição

$$\left[\prod_{j=1}^0 B_j, C \right] = [1, C] = 0. \tag{2.161}$$

Quando $n = 1$:

$$\left[\prod_{j=1}^1 B_j, C \right] = [B_1, C]. \tag{2.162}$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned}
\left[\prod_{j=1}^2 B_j, C \right] &= [B_1 B_2, C] = B_1 B_2 C - C B_1 B_2 \\
&= B_1 B_2 C - B_1 C B_2 + B_1 C B_2 - C B_1 B_2 \\
&= B_1 (B_2 C - C B_2) + (B_1 C - C B_1) B_2 \\
&= B_1 [B_2, C] + [B_1, C] B_2. \tag{2.163}
\end{aligned}$$

Utilizando este resultado, encontramos para $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\left[\prod_{j=1}^3 B_j, C \right] &= [B_1 B_2 B_3, C] \\
&= B_1 B_2 [B_3, C] + [B_1 B_2, C] B_3 \\
&= B_1 B_2 [B_3, C] + B_1 [B_2, C] B_3 + [B_1, C] B_2 B_3.
\end{aligned} \tag{2.164}$$

E para $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\left[\prod_{j=1}^4 B_j, C \right] &= [B_1 B_2 B_3 B_4, C] \\
&= B_1 B_2 B_3 [B_4, C] + B_1 B_2 [B_3, C] B_4 + [B_1 B_2, C] B_3 B_4 \\
&= B_1 B_2 B_3 [B_4, C] + B_1 B_2 [B_3, C] B_4 + \\
&\quad + B_1 [B_2, C] B_3 B_4 + [B_1, C] B_2 B_3 B_4.
\end{aligned} \tag{2.165}$$

Isso nos leva a supor o seguinte resultado geral:

$$\left[\prod_{j=1}^n B_j, C \right] = \sum_{l=1}^n \left[\prod_{k=1}^{l-1} B_k \right] [B_l, C] \left[\prod_{r=l+1}^n B_r \right]. \tag{2.166}$$

Uma vez mais, temos

$$\prod_{k>j}^j B_k = 1. \tag{2.167}$$

Verifiquemos se o resultado geral proposto (2.166) fornece o resultado correto para $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\left[\prod_{j=1}^1 B_j, C \right] &= \sum_{l=1}^1 \left[\prod_{k=1}^{l-1} B_k \right] [B_l, C] \left[\prod_{r=l+1}^1 B_r \right] \\
&= \left[\prod_{k=1}^{1-1} B_k \right] [B_1, C] \left[\prod_{r=1+1}^1 B_r \right] = [B_1, C].
\end{aligned} \tag{2.168}$$

Este resultado é precisamente (2.162).

Agora, assumindo (2.166) para n , testemos sua validade para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\left[\prod_{j=1}^{n+1} B_j, C \right] &= \left[\left[\prod_{j=1}^n B_j \right] B_{n+1}, C \right] \\
&= \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] B_{n+1} C - C \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] B_{n+1} \\
&= \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] B_{n+1} C - \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] C B_{n+1} + \\
&\quad + \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] C B_{n+1} - C \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] B_{n+1} \\
&= \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] (B_{n+1} C - C B_{n+1}) + \\
&\quad + \left(\left[\prod_{j=1}^n B_j \right] C - C \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] \right) B_{n+1} \\
&= \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] [B_{n+1}, C] + \left[\left[\prod_{j=1}^n B_j \right], C \right] B_{n+1}. \quad (2.169)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.166) no último termo dessa expressão:

$$\begin{aligned}
\left[\prod_{j=1}^{n+1} B_j, C \right] &= \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] [B_{n+1}, C] + \sum_{l=1}^n \left[\prod_{k=1}^{l-1} B_k \right] [B_l, C] \left[\prod_{r=l+1}^n B_r \right] B_{n+1} \\
&= \left[\prod_{j=1}^n B_j \right] [B_{n+1}, C] + \sum_{l=1}^n \left[\prod_{k=1}^{l-1} B_k \right] [B_l, C] \left[\prod_{r=l+1}^{n+1} B_r \right] \\
&= \sum_{l=n+1}^{n+1} \left[\prod_{k=1}^{l-1} B_k \right] [B_l, C] \left[\prod_{r=l+1}^{n+1} B_r \right] + \\
&\quad + \sum_{l=1}^n \left[\prod_{k=1}^{l-1} B_k \right] [B_l, C] \left[\prod_{r=l+1}^{n+1} B_r \right] \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \left[\prod_{k=1}^{l-1} B_k \right] [B_l, C] \left[\prod_{r=l+1}^{n+1} B_r \right]. \quad (2.170)
\end{aligned}$$

Vemos que essa é justamente a relação (2.166) escrita para $n + 1$ em vez de n . Em outras palavras, sempre que (2.166) for válida para um certo n ,

ela será válida para $n + 1$. Por recursão, isso mostra que sempre que ela for válida para um certo n , ela será válida para todo $m > n$. Além disso, mostramos explicitamente sua validade para $n = 1$. Portanto, a suposição (2.166) é válida para todo $n \geq 1$. Assim, utilizando essa fórmula para (2.160), encontramos:

$$\begin{aligned}
\left[A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right], J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\int_{\beta} \left[\prod_{j=1}^n d^{D+1} y_j \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}_j, \tau_{y_j})} \right], J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\int_{\beta} \left[\prod_{j=1}^n d^{D+1} y_j \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}_j, \tau_{y_j})} \right], J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{l=1}^n \left[\int_{\beta} \prod_{k=1}^{l-1} d^{D+1} y_k \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}_k, \tau_{y_k})} \right] \times \\
&\quad \times \int_{\beta} d^{D+1} y_l \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}_l, \tau_{y_l})}, J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \times \\
&\quad \times \left[\int_{\beta} \prod_{r=l+1}^n d^{D+1} y_r \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}_r, \tau_{y_r})} \right]. \tag{2.171}
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado (2.159), temos:

$$\int_{\beta} d^{D+1} y_l \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{y}_l, \tau_{y_l})}, J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] = \int_{\beta} d^{D+1} y_l \delta(\mathbf{y}_l - \mathbf{x}) \delta(\tau_{y_l} - \tau_x) = 1. \tag{2.172}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left[A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right], J(\mathbf{x}, \tau_x) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{l=1}^n \left[\int_{\beta} \prod_{k=1}^{l-1} d^{D+1} y_k \frac{\delta}{\delta J(y_k)} \right] \times \\
&\quad \times \left[\int_{\beta} \prod_{r=l+1}^n d^{D+1} y_r \frac{\delta}{\delta J(y_r)} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{l=1}^n \int_{\beta} \prod_{k \neq l}^n d^{D+1} y_k \frac{\delta}{\delta J(y_k)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \int_{\beta} \prod_{k=1}^{n-1} d^{D+1} y_k \frac{\delta}{\delta J(y_k)} \\
&= \frac{\partial A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]}. \tag{2.173}
\end{aligned}$$

Com esse resultado, vemos que a equação (2.155) se torna

$$\frac{\partial A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J} \right]} = g \frac{\partial \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]}{\partial \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right]} A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right], \quad (2.174)$$

cujas solução é

$$A \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] = A_0 \exp \left\{ g \int_{\beta} d^{D+1}x \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right] \right\}. \quad (2.175)$$

A_0 é um operador que pode ser determinado pela condição de que, de acordo com o *Ansatz* (2.150), na ausência de interação A deve ser o operador identidade. Na ausência de interação temos $g = 0$ e

$$A^{(g=0)} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] = A_0 \exp \left\{ 0 \int_{\beta} d^{D+1}x \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau)} \right] \right\} = A_0 = \hat{1}. \quad (2.176)$$

Das equações (2.148), (2.150) e (2.176), encontramos o funcional gerador termodinâmico completo da teoria:

$$\begin{aligned} Z_{GF} [J] &= Z_F(\beta) \exp \left\{ g \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{z}, \tau_z)} \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left[\int_{\beta} d^D x d^D y J(\mathbf{x}, \tau_x) G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) J(\mathbf{y}, \tau_y) \right]. \end{aligned} \quad (2.177)$$

A partir desse funcional gerador termodinâmico, todas as quantidades físicas, sejam elas funções de Green ou observáveis termodinâmicos, podem ser calculados. Infelizmente, não existe uma expressão exata para o funcional gerador termodinâmico (2.177). Técnicas de aproximações se fazem necessárias. Na seção seguinte veremos brevemente a expansão perturbativa de $Z_{GF}(\beta)$ e ainda estudaremos um método não perturbativo.

2.2.3 A teoria de perturbação modificada de Fradkin

Fradkin desenvolveu uma teoria de perturbação modificada para teoria de campos à temperatura nula no espaço-tempo Euclidiano [16]. Nesta seção, estenderemos sua teoria para incluir efeitos térmicos.

Conforme vimos na subseção anterior, o funcional gerador termodinâmico para o campo escalar real com uma autointeração arbitrária em $(D + 1)$ - dimensões espaço-temporais é dado pela equação (2.177). A função de

partição da teoria completa, por sua vez, é obtida fazendo-se $J = 0$ no funcional gerador termodinâmico (2.177):

$$Z(\beta) = Z_F(\beta) \exp \left\{ g \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{z}, \tau_z)} \right] \right\} \times \\ \times \exp \left[\int_{\beta} d^D x d^D y J(\mathbf{x}, \tau_x) G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) J(\mathbf{y}, \tau_y) \right] \Big|_{J=0}. \quad (2.178)$$

O funcional gerador termodinâmico da teoria livre é dado por (2.148). Portanto, (2.177) pode ser escrito como

$$Z_{GF}[J] = \exp \left\{ g \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{z}, \tau_z)} \right] \right\} Z_{GF}^F[J] \quad (2.179)$$

e a função de partição como

$$Z(\beta) = \exp \left\{ g \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{z}, \tau_z)} \right] \right\} Z_{GF}^F[J] \Big|_{J=0}. \quad (2.180)$$

Contudo, para qualquer funcional $F[J]$, vale:

$$F[J] Z_F[J] \Big|_{J=0} = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}_F(\beta) T \left\{ F \left[\hat{\phi} \right] \right\} \right\} \\ = Z_F(\beta) \frac{\text{Tr} \left\{ \hat{\rho}_F(\beta) T \left\{ F \left[\hat{\phi} \right] \right\} \right\}}{Z_F(\beta)} \\ = Z_F(\beta) \left\langle T \left\{ F \left[\hat{\phi} \right] \right\} \right\rangle_F, \quad (2.181)$$

sendo $\left\langle \hat{O} \right\rangle_F$ a média do operador \hat{O} no *ensemble* grão-canônico livre, isto é, sem interação.

Vemos, assim, que a função de partição *completa* (2.180) pode ser escrita como

$$Z(\beta) = Z_F(\beta) \left\langle T \left\{ \exp \left\{ g \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\hat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\} \right\} \right\rangle_F. \quad (2.182)$$

A teoria de perturbação ordinária consiste em escrever essa expressão

como

$$\begin{aligned}
Z(\beta) &= Z_F(\beta) \left\langle T \left\{ \exp \left\{ g \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\widehat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\} \right\} \right\rangle_F \\
&= Z_F(\beta) \left\langle T \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l}{l!} \left\{ \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\widehat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\}^l \right\} \right\rangle_F \\
&= Z_F(\beta) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l}{l!} \left\langle T \left\{ \left\{ \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\widehat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\}^l \right\} \right\rangle_F \\
&= Z_F(\beta) \sum_{l=0}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!}, \tag{2.183}
\end{aligned}$$

sendo

$$z_l(\beta) \equiv \left\langle T \left\{ \left\{ \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\widehat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\}^l \right\} \right\rangle_F, \tag{2.184}$$

e truncar (2.183) em alguma potência da constante g .

Dada a condição (2.10), vemos imediatamente que

$$z_0(\beta) = 1.$$

A fim de reproduzirmos a teoria de perturbação modificada de Fradkin, tomamos o logaritmo da função de partição e o escrevemos como

$$\ln[Z(\beta)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g^k A_k(\beta). \tag{2.185}$$

Utilizando a expansão (2.183), obtemos:

$$\begin{aligned}
\ln[Z(\beta)] &= \ln \left[Z_F(\beta) \sum_{l=0}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!} \right] \\
&= \ln \left\{ Z_F(\beta) \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!} \right] \right\} \\
&= \ln[Z_F(\beta)] + \ln \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!} \right]. \tag{2.186}
\end{aligned}$$

Para $-1 < x < 1$ podemos expandir o segundo logaritmo do segundo membro dessa expressão em série de Taylor de acordo com

$$\ln(1+x) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r}. \tag{2.187}$$

Sob tal hipótese,

$$\ln \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!} \right] = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left[- \sum_{l=1}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!} \right]^r. \quad (2.188)$$

Utilizaremos, agora, a expansão multinomial [33]:⁶

$$\left(\sum_{j=1}^m a_j \right)^n = \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^m n_j = n}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^m n_k!} \prod_{l=1}^m a_l^{n_l}. \quad (2.189)$$

Com isso,

$$\left[- \sum_{l=1}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!} \right]^r = (-1)^r \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^{\infty} n_j = r}} \frac{r! \prod_{l'=1}^m \left[g^{l'} \frac{z_{l'}(\beta)}{l'!} \right]^{n_{l'}}}{\prod_{k=1}^m n_k!}. \quad (2.190)$$

Então, a equação (2.188) se torna

$$\begin{aligned} \ln \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!} \right] &= - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r} \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^{\infty} n_j = r}} \frac{r! \prod_{l'=1}^{\infty} \left[g^{l'} \frac{z_{l'}(\beta)}{l'!} \right]^{n_{l'}}}{\prod_{k=1}^{\infty} n_k!} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} (r-1)! \times \\ &\quad \times \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^{\infty} n_j = r}} \frac{\left\{ \prod_{l'=1}^{\infty} g^{l' n_{l'}} \right\} \prod_{l''=1}^{\infty} \left[\frac{z_{l''}(\beta)}{l''!} \right]^{n_{l''}}}{\prod_{k=1}^{\infty} n_k!} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^{\infty} n_j = r}} \left\{ \prod_{l'=1}^{\infty} g^{l' n_{l'}} \right\} \times \\ &\quad \times (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{\prod_{l''=1}^{\infty} \left[\frac{z_{l''}(\beta)}{l''!} \right]^{n_{l''}}}{\prod_{k=1}^{\infty} n_k!} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\{n_j\}} g^{\sum_{l'=1}^{\infty} l' n_{l'}} (-1)^{\sum_{j=1}^{\infty} n_j - 1} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_j - 1 \right)! \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k'}!} \left[\frac{z_{k'}(\beta)}{k'!} \right]^{n_{k'}}. \quad (2.191) \end{aligned}$$

⁶Essa técnica na mecânica estatística é conhecida como *expansão de cumulantes* [32].

Seja

$$\sum_{j=1}^{\infty} j n_j \equiv r. \quad (2.192)$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \ln [Z(\beta)] &= \ln [Z_F(\beta)] + \ln \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} g^l \frac{z_l(\beta)}{l!} \right] \\ &= \ln [Z_F(\beta)] + \sum_{r=1}^{\infty} g^r \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^{\infty} j n_j = r}} (-1)^{\sum_{j'=1}^{\infty} n_{j'} - 1} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_j - 1 \right)! \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k'}!} \left[\frac{z_{k'}(\beta)}{k'} \right]^{n_{k'}}. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Comparando este resultado com (2.185), encontramos

$$A_0(\beta) = \ln [Z_F(\beta)]$$

e, quando $k > 0$:

$$A_k(\beta) = \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^{\infty} j n_j = k}} (-1)^{\sum_{j'=1}^{\infty} n_{j'} - 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_j - 1 \right)! \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k'}!} \left[\frac{z_{k'}(\beta)}{k'} \right]^{n_{k'}}. \quad (2.194)$$

Sendo essa equação complicada demais para se vislumbrar facilmente qualquer tipo de implicação, calcularemos alguns termos explicitamente. Para $k = 1$ temos que $\sum_{j=1}^{\infty} j n_j = 1$ implica $n_1 = 1$ e $n_{j \neq 1} = 0$. Portanto:

$$A_1(\beta) = (-1)^{1-1} (1-1)! \frac{z_1(\beta)}{1!} = z_1(\beta). \quad (2.195)$$

Para $k = 2$, $\sum_{j=1}^{\infty} j n_j = 2$ implica $n_1 = 2$ e todos os outros $n_j = 0$ ou então $n_2 = 1$ e todos os demais $n_j = 0$. Então,

$$\begin{aligned} A_2(\beta) &= (-1)^{2-1} (2-1)! \frac{1}{2!} \left[\frac{z_1(\beta)}{1!} \right]^2 + (-1)^{1-1} (1-1)! \frac{1}{1!} \left[\frac{z_2(\beta)}{2!} \right]^1 \\ &= -\frac{[z_1(\beta)]^2}{2} + \frac{z_2(\beta)}{2} = \frac{1}{2} \{ z_2(\beta) - [z_1(\beta)]^2 \}. \end{aligned} \quad (2.196)$$

No caso no qual $k = 3$, $\sum_{j=1}^{\infty} j n_j = 3$ implica no seguinte: i) $n_1 = 3$ e todos os outros $n_j = 0$; ii) $n_1 = n_2 = 1$ e todos os outros $n_j = 0$ e iii) $n_3 = 1$ e todos os outros $n_j = 0$, donde

$$\begin{aligned}
A_3(\beta) &= (-1)^{3-1} (3-1)! \frac{1}{3!} \left[\frac{z_1(\beta)}{1!} \right]^3 + \\
&\quad + (-1)^{1+1-1} (1+1-1)! \frac{1}{1!1!} \left[\frac{z_1(\beta)}{1!} \right]^1 \left[\frac{z_2(\beta)}{2!} \right]^1 + \\
&\quad + (-1)^{1-1} (1-1)! \frac{1}{1!} \left[\frac{z_3(\beta)}{3!} \right]^1 \\
&= \frac{1}{3!} \{ z_3(\beta) - 3z_1(\beta) z_2(\beta) + 2[z_1(\beta)]^3 \}. \tag{2.197}
\end{aligned}$$

Para $k = 4$ temos que $\sum_{j=1}^{\infty} j n_j = 4$ implica: i) $n_1 = 4$ e os demais $n_j = 0$; ii) $n_2 = 2$ e os outros $n_j = 0$; iii) $n_1 = 2, n_2 = 1$ e todos os outros $n_j = 0$; iv) $n_1 = 1, n_3 = 1$ e todos os demais $n_j = 0$ e, finalmente, v) $n_4 = 1$ e os outros $n_j = 0$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
A_4(\beta) &= (-1)^{4-1} (4-1)! \frac{1}{4!} \left[\frac{z_1(\beta)}{1!} \right]^4 + (-1)^{2-1} (2-1)! \frac{1}{2!} \left[\frac{z_2(\beta)}{2!} \right]^2 + \\
&\quad + (-1)^{2+1-1} (2+1-1)! \frac{1}{2!} \left[\frac{z_1(\beta)}{1!} \right]^2 \frac{1}{1!} \left[\frac{z_2(\beta)}{2!} \right]^1 + \\
&\quad + (-1)^{1+1-1} (1+1-1)! \frac{1}{1!} \left[\frac{z_1(\beta)}{1!} \right]^1 \frac{1}{1!} \left[\frac{z_3(\beta)}{3!} \right]^1 + \\
&\quad + (-1)^{1-1} (1-1)! \frac{1}{1!} \left[\frac{z_4(\beta)}{4!} \right]^1 \\
&= \frac{1}{4!} \{ z_4(\beta) - 4z_1(\beta) z_3(\beta) - 3[z_2(\beta)]^2 + \\
&\quad + 12[z_1(\beta)]^2 z_2(\beta) - 6[z_1(\beta)]^4 \}, \tag{2.198}
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

De (2.185) podemos escrever

$$Z(\beta) = \exp \left[\sum_{k=0}^{\infty} g^k A_k(\beta) \right] = \prod_{k=0}^{\infty} e^{g^k A_k(\beta)} = Z_F(\beta) \prod_{k=1}^{\infty} e^{g^k A_k(\beta)}, \tag{2.199}$$

o que mostra que esta técnica não é a teoria de perturbação usual (2.183), que consiste numa expansão da função de partição em série de potências. Por exemplo, se conhecermos $A_2(\beta)$ exatamente, estaremos levando em consideração na função de partição termos de ordens muito superiores a g^2 .

2.2.4 A função de Green não perturbativa

Semelhantemente ao que fizemos para a função de partição, podemos buscar correções não perturbativas para a função de Green.

Com o auxílio de (2.179) e de (2.199), podemos escrever a função de Green exata na forma

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) &= \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^2 Z_{GF}[J]}{\delta J(\mathbf{y}, \tau_y) \delta J(\mathbf{x}, \tau_x)} \Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z(\beta) \delta J(\mathbf{y}, \tau_y) \delta J(\mathbf{x}, \tau_x)} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ g \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{z}, \tau_z)} \right] \right\} Z_F[J] \Big|_{J=0} \\
&= \frac{Z_F(\beta)}{Z(\beta)} \left\langle T \left\{ \hat{\phi}(\mathbf{x}, \tau_x) \hat{\phi}(\mathbf{y}, \tau_y) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \exp \left\{ g \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\hat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\} \right\} \right\rangle_F \\
&= \left[\prod_{k=1}^{\infty} e^{-g^k A_k(\beta)} \right] \left\langle T \left\{ \hat{\phi}(\mathbf{x}, \tau_x) \hat{\phi}(\mathbf{y}, \tau_y) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l}{l!} \left\{ \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\hat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\}^l \right\} \right\rangle_F \\
&= \left[\prod_{k=1}^{\infty} e^{-g^k A_k(\beta)} \right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l}{l!} \left\langle T \left\{ \hat{\phi}(\mathbf{x}, \tau_x) \hat{\phi}(\mathbf{y}, \tau_y) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left\{ \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\hat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\}^l \right\} \right\rangle_F \\
&= \left[\prod_{k=1}^{\infty} e^{-g^k A_k(\beta)} \right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l}{l!} w_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y), \quad (2.200)
\end{aligned}$$

sendo

$$w_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \equiv \left\langle T \left\{ \hat{\phi}(\mathbf{x}, \tau_x) \hat{\phi}(\mathbf{y}, \tau_y) \left\{ \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} \left[\hat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z) \right] \right\}^l \right\} \right\rangle_F. \quad (2.201)$$

Agora, escrevemos

$$\ln [G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g^k [B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y; \beta) - A_k(\beta)]. \quad (2.202)$$

Tomando o logaritmo de (2.200), obtemos

$$\begin{aligned}
\ln [G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)] &= \ln \left[\prod_{k=1}^{\infty} e^{-g^k A_k(\beta)} \right] + \ln \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{g^l}{l!} w_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[e^{-g^k A_k(\beta)} \right] + \\
&\quad + \ln \left[w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g^l}{l!} w_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[e^{-g^k A_k(\beta)} \right] + \ln \{ w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \times \\
&\quad \times \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g^l}{l!} \frac{w_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)} \right] \} \\
&= - \sum_{k=1}^{\infty} g^k A_k(\beta) + \ln [w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)] + \\
&\quad + \ln \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g^l}{l!} \frac{w_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)} \right].
\end{aligned}$$

Utilizando a mesma técnica empregada na subseção anterior, encontramos

$$\begin{aligned}
\ln \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g^l}{l!} \frac{w_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)} \right] &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\{n_j\}} g^{\sum_{j=1}^{\infty} n_j} \times \\
&\quad \times (-1)^{\sum_{j=1}^{\infty} n_j - 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_j - 1 \right)! \times \\
&\quad \times \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k'}!} \left[\frac{w_{k'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{k'! w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)} \right]^{n_{k'}}.
\end{aligned} \tag{2.203}$$

Novamente, seja

$$\sum_{j=1}^{\infty} j n_j \equiv r. \tag{2.204}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\ln [G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)] &= \ln [w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)] + A_0(\beta) - A_0(\beta) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} g^k \left\{ \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^{\infty} j n_j = k}} (-1)^{\sum_{j'=1}^{\infty} n_{j'} - 1} \times \right. \\
&\times \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_j - 1 \right)! \times \\
&\times \left. \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k'}!} \left[\frac{w_{k'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{k'! w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)} \right]^{n_{k'}} - A_k(\beta) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.205}$$

Desta equação e de (2.202), identificamos

$$\begin{aligned}
B_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y; \beta) &= \ln [w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)] + A_0(\beta) \\
&= \ln [w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)] + \ln [Z_F(\beta)]
\end{aligned} \tag{2.206}$$

e para todos os outros k :

$$\begin{aligned}
B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y; \beta) &= \sum_{\substack{\{n_j\} \\ \sum_{j=1}^{\infty} j n_j = k}} (-1)^{\sum_{j'=1}^{\infty} n_{j'} - 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_j - 1 \right)! \times \\
&\times \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k'}!} \left[\frac{w_{k'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{k'! w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)} \right]^{n_{k'}}.
\end{aligned} \tag{2.207}$$

Tomando a exponencial de (2.202) encontramos:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) &= \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} g^k [B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y; \beta) - A_k(\beta)] \right\} \\
&= w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \prod_{k=1}^{\infty} e^{g^k [B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y; \beta) - A_k(\beta)]}.
\end{aligned} \tag{2.208}$$

De acordo com a definição (2.201):

$$\begin{aligned}
w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) &= \left\langle T \left\{ \hat{\phi}(\mathbf{x}, \tau_x) \hat{\phi}(\mathbf{y}, \tau_y) \left\{ \int_{\beta} d^D z \mathcal{L}_{int} [\hat{\phi}(\mathbf{z}, \tau_z)] \right\}^0 \right\} \right\rangle_F \\
&= \left\langle T [\hat{\phi}(\mathbf{x}, \tau_x) \hat{\phi}(\mathbf{y}, \tau_y)] \right\rangle_F \\
&= G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y).
\end{aligned} \tag{2.209}$$

Logo, a função de Green completa se escreve como

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) = G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) \prod_{k=1}^{\infty} e^{g^k [B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y; \beta) - A_k(\beta)]}. \quad (2.210)$$

De acordo com (2.207), a correção de ordem mais baixa da teoria de perturbação modificada é

$$B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y; \beta) = \frac{w_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{w_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)} = \frac{w_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)}. \quad (2.211)$$

Utilizando também o resultado (2.195), temos:

$$\begin{aligned} G^{(e^g)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) &= G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) e^{g[B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y; \beta) - A_1(\beta)]} \\ &= G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) e^{g\left[\frac{w_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{G_F(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)} - z_1(\beta)\right]}. \end{aligned} \quad (2.212)$$

Essa expressão indica que mesmo em ordem mais baixa de teoria de perturbação modificada, a função de Green completa depende de uma maneira não linear da função de Green livre, propriedade não compartilhada pela função correspondente na teoria de perturbação usual. Exemplos mais concretos podem ser obtidos fixando-se o número de dimensões e a o termo de auto-interação. Infelizmente, tais exemplos não serão incluídos nesta tese.

Neste capítulo estabelecemos as bases do formalismo de Matsubara-Fradkin para a quantização de campos em equilíbrio termodinâmicos. Iniciamos com a construção da matriz densidade do *ensemble* grão-canônico, *ensemble* preferencial em teoria de campos devido às cargas de Noether associadas a simetrias internas. Apresentamos, também, o formalismo que consiste no emprego de fontes clássicas externas ao problema físico. Como um exemplo simples, aplicamos o formalismo de Matsubara-Fradkin ao campo escalar real em D dimensões espaciais com um termo de interação arbitrário. Por fim, apresentamos a extensão da teoria de perturbação modificada de Fradkin para situações de equilíbrio termodinâmico. Embora os resultados aqui apresentados sejam preliminares, os resultados não perturbativos aqui obtidos podem servir de alternativa aos processos de ressonância típicos das situações com temperaturas não nulas, como aqueles apresentados em [34] e [35].

Capítulo 3

O campo eletromagnético de Podolsky

Neste capítulo estudaremos o campo eletromagnético de Podolsky. Limitar-nos-emos ao caso de um espaço-tempo quadridimensional. Iniciaremos tratando do regime clássico da teoria. Da aplicação do princípio de *gauge* a uma teoria contendo somente férmions, veremos como o campo de Podolsky emerge como uma alternativa à teoria de Maxwell. A teoria de Podolsky depende de um parâmetro livre. Demonstraremos, então, que certas condições físicas limitam o sinal desse parâmetro. Como um preâmbulo para a quantização da teoria eletrodinâmica de Podolsky, realizaremos a análise de vínculos *a la* Dirac na parte fermiônica da teoria. De posse dos colchetes de Dirac da parte fermiônica, utilizaremos o formalismo de Matsubara-Fradkin para escrever as equações de campo quânticas fermiônicas da teoria. Introduziremos, em seguida, o método do campo auxiliar de Nakanishi para se obter as equações de campo quânticas termodinâmicas do campo de Podolsky. Como consequência desse método, veremos que a introdução de campos extras - ou *fantasmas* - ocorre naturalmente. Então, encontraremos a representação de integração funcional da função de partição. Estudaremos, em seguida, as equações de Dyson-Schwinger-Fradkin da teoria de Podolsky. Na sequência, estudaremos como a invariância de *gauge* das quantidades termodinâmicas implicam as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi.

3.1 O princípio de *gauge*

Nesta seção, iniciaremos com uma teoria clássica para férmions de spin 1/2.

A densidade de Lagrangeana de Dirac que descreve tais férmions é

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i(\gamma^\mu)_{ab} \left[\left(\frac{\lambda+1}{2} \right) \bar{\psi}_a \partial_\mu \psi_b + \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \partial_\mu \bar{\psi}_a \psi_b \right] - m_f \bar{\psi}_a \psi_a. \quad (3.1)$$

Nesta expressão, γ^μ 's são as matrizes de Dirac que satisfazem

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_{ab} = 2\delta_{ab}g^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

λ é um número real adimensional arbitrário, $\psi_a = \psi_a(x)$ e $\bar{\psi}_a = \bar{\psi}_a(x)$ são os campos fermiônicos, que são também Grassmannianos, m_f é um parâmetro arbitrário com dimensão de energia e assumimos soma implícita nos índices a e b de 1 a 4.

Notamos que a densidade de Lagrangeana (3.1) é invariante pela seguinte transformação $U(1)$ global:

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x) = e^{i\theta} \psi_a(x); \quad (3.3)$$

$$\bar{\psi}_a(x) \rightarrow \bar{\psi}'_a(x) = \bar{\psi}_a(x) e^{-i\theta}, \quad (3.4)$$

sendo θ um parâmetro constante real.

Essa simetria significa que os fenômenos físicos não se alteram se modificarmos o campo fermiônico por um fator de fase multiplicativo, contanto que essa fase seja a mesma em todos os pontos do espaço e em todos os instantes de tempo. Uma dúvida permanece: é possível escolher fases diferentes para pontos distintos do espaço e instantes de tempo diferentes? Nesse caso, o parâmetro da transformação $U(1)$ deve depender do ponto do espaço-tempo e a transformação se escreve como

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x) = e^{i\theta(x)} \psi_a(x); \quad (3.5)$$

$$\bar{\psi}_a(x) \rightarrow \bar{\psi}'_a(x) = \bar{\psi}_a(x) e^{-i\theta(x)}, \quad (3.6)$$

e a densidade de Lagrangeana de Dirac (3.1) se transforma como¹

$$\mathcal{L}_{Dirac} \rightarrow \mathcal{L}'_{Dirac} = \mathcal{L}_{Dirac} - \partial_\mu \theta(x) (\gamma^\mu)_{ab} \bar{\psi}_a \psi_b \neq \mathcal{L}_{Dirac}, \quad (3.7)$$

o que mostra que contrariamente ao caso da simetria global, os fenômenos físicos são diferentes se escolhermos fases diferentes para pontos distintos do espaço-tempo.

¹Sendo que \mathcal{L}'_{Dirac} é a notação para \mathcal{L}_{Dirac} com os campos ψ e $\bar{\psi}$ trocados por ψ' e $\bar{\psi}'$

A fim de encontrarmos uma densidade de Lagrangeana invariante sob uma transformação $U(1)$ local, recorreremos ao *princípio de gauge* [19]. Segundo esse princípio, devemos acrescentar à densidade de Lagrangeana (3.1) um termo de interação entre os campos fermiônicos e um campo vetorial $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu(x)$, chamado de *campo de gauge*, com a forma

$$\mathcal{L}_{IG} = -q_e \mathcal{A}_\mu (\gamma^\mu)_{ab} \bar{\psi}_a \psi_b, \quad (3.8)$$

sendo q_e um parâmetro adimensional arbitrário.

O campo de *gauge* também se transforma sob uma transformação $U(1)$ local, mas por ora desconhecemos como. Calculamos, dessa forma, a variação da soma $\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{IG}$ sob a transformação $U(1)$ local:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{IG} &\rightarrow \mathcal{L}'_{Dirac} + \mathcal{L}'_{IG} = \mathcal{L}_{Dirac} - \partial_\mu \theta(x) (\gamma^\mu)_{ab} \bar{\psi}_a \psi_b + \\ &\quad - q_e \mathcal{A}'_\mu (\gamma^\mu)_{ab} \bar{\psi}_a \psi_b \\ &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{IG} + \\ &\quad - q_e \left(\mathcal{A}'_\mu - \mathcal{A}_\mu + \frac{\partial_\mu \theta}{q_e} \right) (\gamma^\mu)_{ab} \bar{\psi}_a \psi_b. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A fim de encontrarmos a lei de transformação do campo de *gauge*, impomos a invariância dessa soma:

$$\mathcal{L}'_{Dirac} + \mathcal{L}'_{IG} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{IG}. \quad (3.10)$$

Dessa exigência, encontramos a transformação do campo de *gauge*:

$$\mathcal{A}'_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(x) - \partial_\mu \left[\frac{\theta(x)}{q_e} \right]. \quad (3.11)$$

Doravante, chamaremos a transformação $U(1)$ local de *transformação de gauge* $U(1)$.

Notamos, assim, que para que a teoria fermiônica seja invariante de *gauge*, ela não pode ser uma teoria livre: a interação entre os férmions e o campo de *gauge* fez-se necessária. A fim de termos uma teoria completa, necessitamos incluir um termo que descreve o campo de *gauge* livre. A densidade de Lagrangeana do campo de *gauge* livre deve depender apenas do campo \mathcal{A} , de suas derivadas de quaisquer ordens e de eventuais parâmetros. Além disso, essa densidade de Lagrangeana deve ser invariante de *gauge*, além de covariante de Lorentz.

Observamos que o tensor

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \quad (3.12)$$

é invariante de *gauge*, pois²

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathcal{A}'_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}'_\mu = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \left[\frac{\theta(x)}{q_e} \right] - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \left[\frac{\theta(x)}{q_e} \right] \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = \mathcal{F}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Então, uma possibilidade seria escrever um termo proporcional a $\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$, que é uma combinação invariante de Lorentz. De fato, a possibilidade mais simples para o termo de *gauge* livre consiste na densidade de Lagrangeana de Maxwell:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Caso utilizássemos essa densidade de Lagrangeana teríamos a eletrodinâmica ordinária, com elétrons e pósitrons interagindo com o campo eletromagnético de Maxwell.

Contudo, é um objetivo desta tese argumentar que a teoria de Maxwell não é a única possibilidade. Uma derivada do tensor (3.12) também é invariante de *gauge*. Podemos, então, acrescentar a (3.14) um termo que contém derivadas do tensor \mathcal{F} . Com isso, chegamos à densidade de Lagrangeana de Podolsky [20, 21, 22]:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \lambda_P \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} \partial_\xi \mathcal{F}^\xi{}_\nu. \quad (3.15)$$

O parâmetro λ_P é constante, real e possui dimensão de inverso de quadrado de energia. Ao campo \mathcal{A} descrito por essa densidade de Lagrangeana chamaremos campo eletromagnético de Podolsky. Nesta etapa, chamamos a atenção para o fato de que devido ao tensor \mathcal{F} depender de derivadas de primeira ordem do campo de *gauge*, a teoria de Podolsky, que envolve derivadas de primeira ordem desse tensor, contém derivadas de segunda ordem do campo eletromagnético. Chamamos, ainda, a atenção para o fato de que qualquer termo invariante de Lorentz e de *gauge* que envolva derivadas de segunda ordem do campo eletromagnético é idêntico ao termo que aparece em (3.15) a menos de um termo que é uma derivada total, conforme demonstrado por Cuzinatto, de Melo e Pompeia em [23].

²Assumimos nesta tese que o parâmetro θ possua derivadas de terceira ordem.

À teoria descrita pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{GED} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{IG} + \mathcal{L}_P \quad (3.16)$$

chamaremos de eletrodinâmica generalizada. Essa teoria descreve elétrons e pósitrons interagindo com o campo eletromagnético de Podolsky.

Ressaltamos que a eletrodinâmica de Podolsky é uma teoria invariante de Lorentz e de *gauge*. Vimos que o campo de Podolsky surgiu da aplicação do princípio de *gauge* ao grupo $U(1)$. A presença do parâmetro λ_P implicará em previsões com a teoria de Podolsky que diferem das de Maxwell.

3.2 A interpretação do parâmetro de Podolsky

Na seção anterior encontramos o campo eletromagnético de Podolsky a partir da aplicação do princípio de *gauge* ao grupo $U(1)$. Vimos que essa teoria eletrodinâmica generalizada depende de um parâmetro intrínseco do campo de Podolsky. Esse parâmetro, denotado por λ_P , possui uma interpretação física muito clara. Buscar essa interpretação é o objetivo da presente seção.

3.2.1 As equações de Podolsky

Iniciaremos esta seção buscando *as equações de Podolsky*, que são as equações análogas às quatro equações de Maxwell. Notamos, primeiramente, que a definição do tensor \mathcal{F} pela equação (3.12) é a mesma em ambas as teorias. Portanto, o tensor \mathcal{F} de Podolsky também satisfaz a identidade de Bianchi:³

$$\partial_\xi \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\xi} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\xi\mu} = 0. \quad (3.17)$$

Consideremos, também, a densidade de Lagrangeana de Podolsky com fontes:

$$\mathcal{L}_P^* = \mathcal{L}_P + j_\mu A^\mu, \quad (3.18)$$

sendo

$$j = (\rho, \mathbf{j}) \quad (3.19)$$

a quadridensidade de corrente elétrica.

³De fato, utilizando a definição (3.12), temos $\partial_\xi \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\xi} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\xi\mu} = [\partial_\xi, \partial_\mu] A_\nu + [\partial_\mu, \partial_\nu] A_\xi + [\partial_\nu, \partial_\xi] A_\mu = 0$.

As equações de Euler-Lagrange obtidas a partir dessa densidade de Lagrangeana são

$$(1 + 2\lambda_P \square) \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (3.20)$$

Nesta expressão, utilizamos o D'Alembertiano:

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\partial}^2. \quad (3.21)$$

Definimos, agora, os campos *elétrico* \mathbf{E} e *magnético* \mathbf{B} através das relações:

$$E^j \equiv \mathcal{F}^{0j}; \quad (3.22)$$

$$B^j \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{jkl} \mathcal{F}_{kl}. \quad (3.23)$$

Nestas expressões, j , k e l assumem os valores de 1 a 3 e ϵ^{jkl} é o tensor de Lèvi-Civita, um tensor totalmente antissimétrico com $\epsilon^{123} = 1$.

Da identidade de Bianchi (3.17) e das equações de Euler-Lagrange (3.20), encontramos as *equações de Podolsky*:

$$(1 + 2\lambda_P \square) \vec{\partial} \cdot \mathbf{E} = \rho; \quad (3.24)$$

$$\vec{\partial} \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (3.25)$$

$$(1 + 2\lambda_P \square) \left(\vec{\partial} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mathbf{j}; \quad (3.26)$$

$$\vec{\partial} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Observamos que as equações (3.25) e (3.27) são idênticas às equações correspondentes da teoria de Maxwell, pois estas decorrem da identidade de Bianchi. As equações que dependem das fontes, por outro lado, são as próprias equações de Euler-Lagrange da teoria. Estas são alteradas e dependem explicitamente do parâmetro livre da teoria de Podolsky.

Chamamos a atenção para o fato de que as consequências físicas da teoria de Podolsky já podem ser observadas a partir dessas equações. No caso sem fontes, isto é, com $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = \mathbf{0}$, as equações de Maxwell possuem a chamada *simetria de dualidade* [17]. Essa dualidade consiste nas seguintes trocas:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}'; \quad (3.28)$$

$$\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}'. \quad (3.29)$$

Na presença das fontes, as equações de Maxwell não mais exibem essa simetria. No entanto, pelas equações (3.24-3.27), vemos que o conjunto das equações de Podolsky não exhibe essa simetria *sequer* na ausência de fontes.

Ainda considerando a ausência de fontes, tomemos, como exemplo, a equação (3.24). Na teoria de Maxwell, na ausência de fontes, essa equação seria $\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} = 0$, ou seja, o divergente do campo elétrico somente é não nulo na presença de fontes. Contudo, de acordo com Podolsky, fazendo-se $\rho = 0$ em (3.24), temos que a divergência do campo elétrico satisfaz a seguinte relação:

$$\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} = -2\lambda_P \square \vec{\partial} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.30)$$

A existência de soluções não triviais dessa equação pode ser facilmente verificada reescrevendo-a na seguinte forma:

$$\left(\square + \frac{1}{2\lambda_P} \right) \vec{\partial} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.31)$$

Essa equação indica que o divergente do campo elétrico na teoria de Podolsky satisfaz a equação de Klein-Gordon com um parâmetro com dimensão de energia dado por $1/\sqrt{2\lambda_P}$. Sendo a equação de Klein-Gordon uma equação que descreve um campo livre, seu parâmetro com dimensão de energia é interpretado como sendo a massa do campo. Claramente, assumimos $\lambda_P \neq 0$, caso contrário recairíamos na teoria de Maxwell e a equação acima não poderia ser escrita. Contudo, nesta etapa, ainda não conhecemos o sinal do parâmetro. Se $\lambda_P > 0$, temos um campo escalar físico, isto é, com massa real. Caso contrário, temos um campo escalar taquiônico. No entanto, qualquer que seja o caso, ressaltamos que existem soluções não triviais de (3.31). Em outras palavras, na teoria de Podolsky, o divergente do campo elétrico pode ser não-nulo mesmo na ausência de fontes.

Consideremos, agora, a presença da densidade de carga elétrica ρ em (3.24), mas agora restringindo-nos ao caso estacionário. Neste caso, de acordo com as equações (3.12) e (3.22), temos

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\vec{\partial} A_0(\mathbf{x}) \quad (3.32)$$

e a equação (3.24) se simplifica [20]:

$$\left(2\lambda_P \vec{\partial}^2 - 1 \right) \vec{\partial}^2 A_0(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}). \quad (3.33)$$

Para uma fonte puntual com carga elétrica q localizada em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, a solução dessa equação é⁴

⁴Ver apêndice (A) e equação (A.11).

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi|\mathbf{x}|} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{2\lambda_P}}} \right). \quad (3.34)$$

Esse é o potencial eletrostático da teoria de Podolsky. Sua expressão equivalente para Maxwell é simplesmente $(4\pi|\mathbf{x}|)^{-1}$. Observamos que ela é modificada pela presença do parâmetro livre de Podolsky. Se $\lambda_P > 0$, temos uma correção exponencialmente decrescente para o potencial eletrostático de Maxwell. Por outro lado, se $\lambda_P < 0$, a correção é uma função senoidal da distância. As implicações físicas de cada uma dessas soluções são muito diferentes uma da outra. Necessitamos conhecer o sinal do parâmetro λ_P .

A fim de determinarmos o sinal do parâmetro λ_P , consideraremos o tensor densidade de energia da teoria de Podolsky livre na próxima seção.

3.2.2 Fixando o sinal do parâmetro livre

Nesta seção analisaremos a densidade de energia do campo de Podolsky livre. Essa quantidade é facilmente obtida como uma componente do tensor densidade de energia e momento. Infelizmente, como a teoria de Podolsky envolve derivadas de ordem superior, o cálculo desse tensor é não trivial. Dedicamos o apêndice B para apresentar um método apropriado para se calcular o tensor densidade de energia e momento primeiramente para uma teoria arbitrária e, em seguida, para a própria teoria de Podolsky. Assim, utilizando o resultado (B.84),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_P^{\mu\nu} = & -\mathcal{F}^{\mu\alpha}\mathcal{F}_\alpha^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} + 2\lambda_P \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\mathcal{F}^{\alpha\beta}\partial_\gamma\mathcal{F}_\beta^\gamma - \mathcal{F}^{\mu\alpha}\square\mathcal{F}_\alpha^\nu + \right. \\ & \left. -\mathcal{F}^{\nu\alpha}\square\mathcal{F}_\alpha^\mu - \mathcal{F}^{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial_\beta\mathcal{F}^{\beta\nu} - \mathcal{F}^{\nu\alpha}\partial_\alpha\partial_\beta\mathcal{F}^{\beta\mu} + \partial_\tau\mathcal{F}^{\tau\mu}\partial_\gamma\mathcal{F}^{\gamma\nu} \right), \quad (3.35) \end{aligned}$$

obtemos a densidade de energia do campo de Podolsky livre como a componente \mathcal{T}_P^{00} desse tensor. Utilizando as definições (3.22) e (3.23), encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_P^{00} = & -F^{0\alpha}F_\alpha^0 + \frac{1}{4}\eta^{00}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + 2\lambda_P \left(-\frac{1}{2}\eta^{00}\partial_\alpha F^{\alpha\beta}\partial_\gamma F_\beta^\gamma - F^{0\alpha}\square F_\alpha^0 + \right. \\ & \left. -F^{0\alpha}\square F_\alpha^0 - F^{0\alpha}\partial_\alpha\partial_\beta F^{\beta 0} - F^{0\alpha}\partial_\alpha\partial_\beta F^{\beta 0} + \partial_\tau F^{\tau 0}\partial_\gamma F^{\gamma 0} \right) \\ = & \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + 2\lambda_P \left[\left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right)^2 + \left(\dot{\mathbf{E}} - \vec{\partial} \times \mathbf{B} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 4\mathbf{E} \cdot \square \mathbf{E} + 4\mathbf{E} \cdot \vec{\partial} \left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right) \right] \right\}. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Devido à presença dos dois últimos termos desta expressão, a densidade de energia do campo de Podolsky livre, em princípio, **não é positiva-definida** no caso geral.

Restringindo-nos ao caso eletrostático, temos:

$$\mathcal{T}_{P(El)}^{00} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}^2 + 2\lambda_P \left\{ \left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right)^2 + 4 \left[\mathbf{E} \cdot \vec{\partial} \left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right) - \mathbf{E} \cdot \vec{\partial}^2 \mathbf{E} \right] \right\} \right\}. \quad (3.37)$$

Agora, notamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \vec{\partial} \left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right) - \mathbf{E} \cdot \vec{\partial}^2 \mathbf{E} &= \mathbf{E} \cdot \left[\vec{\partial} \left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right) - \vec{\partial}^2 \mathbf{E} \right] \\ &= \mathbf{E} \cdot \left[\vec{\partial} \times \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right) \right] \\ &= E^j \varepsilon^{jkl} \partial_k \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^l = \varepsilon^{jkl} E^j \partial_k \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^l \\ &= \partial_k \left[\varepsilon^{jkl} E^j \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^l \right] - \varepsilon^{jkl} \partial_k E^j \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^l \\ &= -\partial_k \left[\varepsilon^{kjl} E^j \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^l \right] + \\ &\quad + \varepsilon^{lkj} \partial_k E^j \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^l \\ &= -\partial_k \left[\mathbf{E} \times \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right) \right]^k + \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^2 \\ &= -\vec{\partial} \cdot \left[\mathbf{E} \times \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right) \right] + \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^2. \quad (3.38) \end{aligned}$$

Dessa forma, reescrevemos $\mathcal{T}_{P(El)}^{00}$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{P(El)}^{00} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}^2 + 2\lambda_P \left[\left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right)^2 + 4 \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right)^2 \right] \right\} + \\ &\quad - 4\lambda_P \vec{\partial} \cdot \left[\mathbf{E} \times \left(\vec{\partial} \times \mathbf{E} \right) \right]. \quad (3.39) \end{aligned}$$

De acordo com a equação (3.27), para o caso eletrostático temos $\vec{\partial} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Logo [20],

$$\mathcal{T}_{P(El)}^{00} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}^2 + 2\lambda_P \left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right)^2 \right]. \quad (3.40)$$

No eletromagnetismo de Maxwell sem fontes, temos $\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} = 0$. No entanto, conforme discutimos as consequências da equação (3.30), esse não é *necessariamente* o caso para o eletromagnetismo de Podolsky. Portanto, (3.40) é a densidade de energia do campo de Podolsky sem fontes para o caso eletrostático.

Impomos que essa densidade de energia seja positiva definida para campos elétricos não nulos:

$$\mathcal{T}_{P(EI)}^{00} \Big|_{\mathbf{E} \neq \mathbf{0}} > 0. \quad (3.41)$$

Essa hipótese implica na seguinte condição sobre o parâmetro livre λ_P :

$$\lambda_P > -\frac{\mathbf{E}^2}{2 \left(\vec{\partial} \cdot \mathbf{E} \right)^2}, \quad (3.42)$$

Essa inequação indica que esse parâmetro possui um certo limite inferior, que depende da configuração do campo elétrico particular para cada problema. Contudo, assumimos que esse parâmetro fosse constante, não um funcional do campo elétrico. Notamos que o segundo membro da inequação (3.42) é sempre negativo. Por conseguinte, para que o *parâmetro* λ_P *seja independente da configuração particular do campo, basta* que se cumpra:

$$\lambda_P > 0. \quad (3.43)$$

Assim, inspirados pelas equações (3.20), (3.31), (3.34) e (3.40), definimos

$$\lambda_P \equiv \frac{1}{2m_P^2}, \quad (3.44)$$

sendo m_P um parâmetro constante real não nulo com dimensão de energia. Chamaremos m_P de *parâmetro de Podolsky*. Em termos desse parâmetro, reescrevemos (3.20), (3.31) e (3.34) como

$$\left(\frac{\square}{m_P^2} + 1 \right) \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j^\nu; \quad (3.45)$$

$$(\square + m_P^2) \vec{\partial} \cdot \mathbf{E} = 0; \quad (3.46)$$

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi|\mathbf{x}|} (1 - e^{-m_P|\mathbf{x}|}); \quad (3.47)$$

A equação (3.46) indica que o parâmetro de Podolsky possa ser interpretado num certo sentido como uma massa de um campo.

Na próxima seção nos aprofundaremos nessa interpretação ao analisarmos os dois *setores* do campo de Podolsky.

3.2.3 Os dois setores

Nesta seção, estudaremos os dois setores da teoria eletromagnética de Podolsky.

Das equações (3.12) e (3.45), podemos escrever:

$$\left(\frac{\square}{m_P^2} + 1\right) (g^{\mu\nu}\square - \partial^\nu\partial^\mu) A_\mu = j^\nu. \quad (3.48)$$

Notamos que a solução completa dessa equação poderia ser escrita (ingênua e) formalmente como

$$A_\mu(x) = A_\mu^H(x) + \int d^4y \mathcal{G}_{\mu\nu}(x, y) j^\nu(y), \quad (3.49)$$

sendo $A_\mu^H(x)$ a solução geral da equação homogênea,

$$(\square + m_P^2) (g^{\mu\nu}\square - \partial^\nu\partial^\mu) A_\mu^H(x) = 0, \quad (3.50)$$

e $\mathcal{G}_{\mu\nu}(x, y)$ a função de Green que satisfaz:

$$\left(\frac{\square}{m_P^2} + 1\right) (g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)_{(x)} \mathcal{G}_{\nu\xi}(x, y) = \delta_\xi^\mu \delta(x - y). \quad (3.51)$$

Contudo, o operador diferencial $(\square + m_P^2) (g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)$ não possui inversa. Por conseguinte, não existe nenhuma função $\mathcal{G}_{\nu\xi}(x, y)$ que satisfaça a relação (3.51).

A fim de lidarmos com essa questão, impomos a *condição de Lorenz generalizada* sobre o campo de Podolsky [36]:

$$(\square + m_P^2) \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.52)$$

Utilizando essa condição, podemos reescrever (3.48) como

$$(\square + m_P^2) \square A^\mu = m_P^2 j^\mu. \quad (3.53)$$

O operador $(\square + m_P^2) \square$ é inversível, portanto nosso problema pode ser resolvido no caso geral.

Para a análise que desejamos realizar nesta etapa, consideremos a equação (3.53) na ausência de fontes:

$$(\square + m_P^2) \square A^\mu = 0. \quad (3.54)$$

Uma possível solução dessa equação é

$$A^\mu = A_{Max}^\mu + A_{Pro}^\mu, \quad (3.55)$$

sendo

$$\square A_{Max}^\mu = 0 \quad (3.56)$$

e

$$(\square + m_P^2) A_{Pro}^\mu = 0. \quad (3.57)$$

Essas expressões mostram que A_{Max}^μ é um campo vetorial sem massa, enquanto A_{Pro}^μ é um campo vetorial com massa m_P . Dito de outra forma, o campo eletromagnético clássico de Podolsky pode ser decomposto em uma soma de um campo de Maxwell com um campo de Proca. Esses dois campos são chamados de *setores* de Podolsky: A_{Max}^μ é seu setor sem massa enquanto A_{Pro}^μ é seu setor massivo. A equação (3.57) fornece, ainda, uma interpretação para o parâmetro de Podolsky: ele é a massa do setor massivo da teoria.

Nas seções seguintes trataremos da quantização da eletrodinâmica generalizada de Podolsky. Iniciaremos pela parte da teoria que depende dos campos Grassmannianos ψ e $\bar{\psi}$. Para esses campos utilizamos o processo de quantização de Dirac. Para a parte do campo de Podolsky utilizaremos o formalismo covariante de Nakanishi. Como um último tópico relacionado ao regime clássico da teoria, estudaremos brevemente a carga conservada da eletrodinâmica de Podolsky na próxima seção.

3.3 A carga clássica de Noether

Agora que já temos uma interpretação satisfatória para o parâmetro de Podolsky, escrevemos a ação associada à densidade de Lagrangeana (3.16):

$$S_{GED} [\mathcal{A}, \psi, \bar{\psi}] \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{IG} + \mathcal{L}_P). \quad (3.58)$$

Por construção, essa ação é invariante sob transformações $U(1)$ locais. Consideremos, agora, uma transformação $U(1)$ infinitesimal arbitrária *global*:

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x) = \psi_a(x) + i\delta\theta\psi_a(x) + \mathcal{O}(\delta\theta^2); \quad (3.59)$$

$$\bar{\psi}_a(x) \rightarrow \bar{\psi}'_a(x) = \bar{\psi}_a(x) - i\bar{\psi}_a(x)\delta\theta + \mathcal{O}(\delta\theta^2). \quad (3.60)$$

Sob essa transformação, a ação (3.58) se transforma como

$$\begin{aligned}
S[\mathcal{A}, \psi, \bar{\psi}] &\rightarrow S[\mathcal{A}, \psi', \bar{\psi}'] \\
&= S[\mathcal{A}, \psi, \bar{\psi}] + \delta_\theta S[\psi, \bar{\psi}] + \mathcal{O}(\delta\theta^2), \quad (3.61)
\end{aligned}$$

sendo

$$\delta_\theta S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \delta\theta \partial_\mu [\bar{\psi}_a (\gamma^\mu)_{ab} \psi_b]. \quad (3.62)$$

Dado que a ação (3.58) deve também ser invariante sob a transformação global acima, devemos ter $\delta_\theta S = 0$. Uma vez que a quantidade $\delta\theta$ é arbitrária, pelo teorema fundamental do cálculo variacional devemos ter que a quadricorrente

$$j^\mu(x) \equiv \bar{\psi}_a(x) (\gamma^\mu)_{ab} \psi_b(x) \quad (3.63)$$

satisfaz a equação de continuidade:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (3.64)$$

A equação de continuidade pode ser escrita na forma mais familiar em termos da densidade j^0 e da densidade de corrente associada \mathbf{j} :

$$\frac{\partial j^0(x)}{\partial t} = -\vec{\partial} \cdot \mathbf{j}(x). \quad (3.65)$$

Integrando em todo espaço tri-dimensional, encontramos a relação:

$$\frac{dN(t)}{dt} = - \int_s d^2\vec{\sigma} \cdot \mathbf{j}(x), \quad (3.66)$$

sendo a última integral calculada na superfície que engloba todo o espaço e

$$N(t) \equiv \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \bar{\psi}_a(x) (\gamma^0)_{ab} \psi_b(x). \quad (3.67)$$

Agora, assumimos que a densidade de corrente esteja contida em todo o volume, isto é

$$\int_s d^2\vec{\sigma} \cdot \mathbf{j}(x) = 0. \quad (3.68)$$

Essas últimas expressões mostram que a quantidade (3.67) é, na realidade, independente do tempo:

$$\frac{dN}{dt} = 0. \quad (3.69)$$

A quantidade N é chamada de *carga de Noether* e é a carga conservada classicamente na teoria de Podolsky associada à transformação $U(1)$ global, que também é interna e contínua [37].

Antes de finalizarmos esta seção, chamamos a atenção para o fato de que a conservação da carga de Noether N é independente da presença do campo de Podolsky. Isso se deve ao fato da variação da ação (3.62) devido à variação $U(1)$ global não depender do campo de *gauge*. Como consequência, a mesma carga conservada seria obtida no caso livre ou, ainda, no caso no qual considerássemos apenas os termos $\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{IG}$. Essa última propriedade será explorada durante a quantização da parte fermiônica da teoria.

3.4 A quantização *a la* Dirac da parte fermiônica

Desenvolveremos, nesta seção, a quantização da parte da teoria eletrodinâmica de Podolsky que depende dos campos fermiônicos. Iniciaremos com uma análise dos vínculos da teoria clássica e, logo em seguida, utilizaremos o princípio de correspondência para quantizar esse setor da teoria de Podolsky.

3.4.1 Os vínculos da parte fermiônica

A fim de podermos quantizar a teoria de Podolsky, faremos um estudo clássico dos vínculos da parte da teoria que envolve os campos fermiônicos.⁵ Para tal fim, notamos que a densidade de Lagrangeana \mathcal{L}_P em (3.16) não depende dos campos fermiônicos. Assim, a parte da teoria que descreve os férmions é estudada através da densidade de Lagrangeana \mathcal{L}_f , dada por:

$$\mathcal{L}_f \equiv \mathcal{L}_{GQED} - \mathcal{L}_P = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{int}. \quad (3.70)$$

Sendo a teoria de Podolsky diferente da teoria de Maxwell apenas na parte correspondente ao campo eletromagnético livre, a densidade de Lagrangeana \mathcal{L}_f descreve as partes fermiônicas de ambas as teorias. Por essa razão, o conteúdo desta seção não é original, mas uma revisão dos vínculos correspondentes à parte fermiônica da eletrodinâmica.

⁵O conteúdo desta subseção pode ser encontrado em [38, 39, 40, 41, 42].

Para esse setor da eletrodinâmica generalizada de Podolsky, definimos os momentos canônicos:

$$\pi_a(x) \equiv \frac{\partial_{\leftarrow} \mathcal{L}_f}{\partial [\partial_0 \bar{\psi}_a(x)]}; \quad (3.71)$$

$$\bar{\pi}_a(x) \equiv \frac{\partial_{\leftarrow} \mathcal{L}_f}{\partial [\partial_0 \psi_a(x)]}, \quad (3.72)$$

sendo a derivada Grassmanniana de um produto de campos Grassmannianos definida através da relação

$$\frac{\partial_{\leftarrow} (AB)}{\partial C} = \frac{\partial_{\leftarrow} A}{\partial C} B - A \frac{\partial_{\leftarrow} B}{\partial C}. \quad (3.73)$$

Calculando cada um dos momentos canônicos, encontramos:

$$\pi_a(x) = i \left(\frac{\lambda - 1}{2} \right) (\gamma^0)_{ab} \psi_b(x); \quad (3.74)$$

$$\bar{\pi}_a(x) = -i (\gamma^0)_{ba} \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right) \bar{\psi}_b(x). \quad (3.75)$$

Notamos, a partir dessas expressões, que nenhum desses momentos canônicos depende da derivada temporal de seu campo conjugado. Uma vez que uma função constante não é inversível, não há como escrever as derivadas temporais dos campos fermiônicos em termos de seus respectivos momentos canônicos conjugados. Isso significa que a teoria descrita pela densidade de Lagrangeana \mathcal{L}_f é vinculada. Seus *vínculos primários* são

$$\varphi_a(x) \equiv \pi_a(x) - i \left(\frac{\lambda - 1}{2} \right) (\gamma^0)_{ab} \psi_b(x) \approx 0; \quad (3.76)$$

$$\bar{\varphi}_a(x) \equiv \bar{\pi}_a(x) + i (\gamma^0)_{ba} \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right) \bar{\psi}_b(x) \approx 0. \quad (3.77)$$

O símbolo “ \approx ”, neste contexto, significa “igualdade fraca” no sentido de Dirac, isto é, a igualdade somente é válida na superfície dos vínculos.

A *densidade de Hamiltoniana canônica* para o setor fermiônico é definida como:

$$\mathcal{H}_C^f \equiv \partial_0 \psi_a \bar{\pi}_a + \partial_0 \bar{\psi}_a \pi_a - \mathcal{L}_f. \quad (3.78)$$

Escrevendo explicitamente os momentos canônicos, ficamos com

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_C^f &= -i(\gamma^j)_{ab} \left[\left(\frac{1+\lambda}{2} \right) \bar{\psi}_a \partial_j \psi_b - \left(\frac{1-\lambda}{2} \right) \partial_j \bar{\psi}_a \psi_b \right] + \\
&\quad + m_f \bar{\psi}_a \psi_a + q_e (\gamma^\mu)_{ab} \mathcal{A}_\mu \bar{\psi}_a \psi_b \\
&= -\frac{i}{2} (\gamma^j)_{ab} (\bar{\psi}_a \partial_j \psi_b - \partial_j \bar{\psi}_a \psi_b) + m_f \bar{\psi}_a \psi_a + q_e (\gamma^\mu)_{ab} \mathcal{A}_\mu \bar{\psi}_a \psi_b + \\
&\quad - \frac{i\lambda}{2} (\gamma^j)_{ab} \partial_j (\bar{\psi}_a \psi_b). \tag{3.79}
\end{aligned}$$

Sendo o último termo uma derivada total, a Hamiltoniana canônica acaba sendo independente de λ :

$$\begin{aligned}
H_C^f &\equiv \int d^3x \mathcal{H}_C^f \\
&= \int d^3x \left[-\frac{i}{2} (\gamma^j)_{ab} (\bar{\psi}_a \partial_j \psi_b - \partial_j \bar{\psi}_a \psi_b) + m_f \bar{\psi}_a \psi_a + q_e (\gamma^\mu)_{ab} \mathcal{A}_\mu \bar{\psi}_a \psi_b \right]. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

De posse da Hamiltoniana canônica, definimos a *Hamiltoniana primária* para o setor fermiônico:

$$H_P^f \equiv H_C^f + \int d^3x [\bar{\lambda}_a(x) \varphi_a(x) + \bar{\varphi}_a(x) \lambda_a(x)], \tag{3.81}$$

sendo $\bar{\lambda}_a(x)$ e $\lambda_a(x)$ os campos multiplicadores de Lagrange. Tendo em vista que os vínculos (3.76) e (3.77) são Grassmannianos, também os são os multiplicadores de Lagrange. A evolução temporal de qualquer quantidade $F(x)$ gerada pela Hamiltoniana primária fermiônica é obtida como solução da seguinte equação:

$$\dot{F}(x) = \left\{ F(x), H_P^f \right\}_B. \tag{3.82}$$

Sendo os parênteses de Berezin definidos para o caso de campos Grassmannianos como

$$\begin{aligned}
\{A(x), C(y)\}_B^{x_0=y_0} &\equiv \int d^3z \left[\frac{\partial_{\leftrightarrow} A(x)}{\partial \psi_a(z)} \frac{\partial_{\leftrightarrow} C(y)}{\partial \bar{\pi}_a(z)} + \frac{\partial_{\leftrightarrow} C(y)}{\partial \psi_a(z)} \frac{\partial_{\leftrightarrow} A(x)}{\partial \bar{\pi}_a(z)} \right] + \\
&\quad + \int d^3z \left[\frac{\partial_{\leftrightarrow} A(x)}{\partial \bar{\psi}_a(z)} \frac{\partial_{\leftrightarrow} C(y)}{\partial \pi_a(z)} + \frac{\partial_{\leftrightarrow} C(y)}{\partial \bar{\psi}_a(z)} \frac{\partial_{\leftrightarrow} A(x)}{\partial \pi_a(z)} \right], \tag{3.83}
\end{aligned}$$

sendo $x_0 = y_0 = z_0$.

Os chamados *parênteses de Berezin fundamentais* decorrem imediatamente dessa definição:

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.84)$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.85)$$

$$\{\psi_a(x), \pi_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.86)$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (3.87)$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.88)$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (3.89)$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.90)$$

$$\{\pi_a(x), \pi_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.91)$$

$$\{\pi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.92)$$

$$\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0. \quad (3.93)$$

Além disso, também podemos mostrar a seguinte relação:

$$\{A(x), C(y) D(z)\}_B^{x_0=y_0=z_0} = \{A(x), C(y)\}_B^{x_0=y_0} D(z) + \\ - C(y) \{A(x), D(z)\}_B^{x_0=z_0}. \quad (3.94)$$

A fim de estudarmos a estrutura canônica desse setor da eletrodinâmica, impomos as *condições de consistência* para os vínculos primários:

$$\dot{\varphi}_a(x) \approx 0; \quad (3.95)$$

$$\dot{\bar{\varphi}}_a(x) \approx 0. \quad (3.96)$$

Dessas condições, encontramos as seguintes relações:

$$- \{i(\gamma^j)_{ab} \partial_j - [m_f \delta_{ab} + q_e (\gamma^\mu)_{ab} \mathcal{A}_\mu(x)]\} \psi_b(x) + i(\gamma^0)_{ab} \lambda_b(x) \approx 0; \quad (3.97)$$

$$- \{i(\gamma^j)_{ba} \partial_j + [m_f \delta_{ba} + q_e (\gamma^\mu)_{ba} \mathcal{A}_\mu(x)]\} \bar{\psi}_b(x) - i(\gamma^0)_{ba} \bar{\lambda}_b(x) \approx 0. \quad (3.98)$$

Uma vez que γ^0 é sua própria inversa, encontramos os multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_a(x) \approx -i \{i(\gamma^0 \gamma^j)_{ab} \partial_j - [m_f(\gamma^0)_{ab} + q_e(\gamma^0 \gamma^\mu)_{ab} \mathcal{A}_\mu(x)]\} \psi_b(x); \quad (3.99)$$

$$\bar{\lambda}_a(x) \approx i \{i(\gamma^0 \gamma^j)_{ba} \partial_j + [m_f(\gamma^0)_{ba} + q_e(\gamma^0 \gamma^\mu)_{ba} \mathcal{A}_\mu(x)]\} \bar{\psi}_b(x). \quad (3.100)$$

Como todos os multiplicadores de Lagrange foram encontrados nesta etapa, concluímos que não há vínculos secundários nessa parte da teoria.

Com o intuito de classificarmos os vínculos primários, calculamos os parênteses de Berezin entre todos eles:

$$\{\varphi_a(x), \varphi_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.101)$$

$$\{\bar{\varphi}_a(x), \bar{\varphi}_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.102)$$

$$\{\varphi_a(x), \bar{\varphi}_b(y)\}_B^{x_0=y_0} = i(\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.103)$$

A existência de parênteses não nulos indica que esse conjunto de vínculos é de segunda classe. Sendo assim, sobre a superfície dos vínculos, podemos tornar os vínculos de segunda classe identicamente nulos. Por conseguinte, observamos que a Hamiltoniana primária, gerador das translações temporais, coincide com a Hamiltoniana canônica.

Agora, definimos a matriz C cujos elementos são $(\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}, \text{tais que } 1 \leq \alpha \leq 8, 1 \leq \alpha' \leq 8,)$

$$C_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; x_0) \equiv \{\Lambda_\alpha(x), \Lambda_{\alpha'}(y)\}_B^{x_0=y_0}. \quad (3.104)$$

Nesta expressão, temos (com $a \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq a \leq 4,)$

$$\Lambda_a(x) \equiv \varphi_a(x); \quad (3.105)$$

$$\Lambda_{a+4}(x) \equiv \bar{\varphi}_a(x). \quad (3.106)$$

Observamos que todos os elementos da matriz C são independentes do tempo (x_0) e escrevemos

$$C(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \hat{0} & i\gamma^0 \\ i(\gamma^0)^T & \hat{0} \end{bmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.107)$$

sendo $\hat{0} = 0\hat{1}_{4 \times 4}$.

Procuraremos, agora, a inversa dessa matriz. Ela deve satisfazer

$$\int d^3z C^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) C(\mathbf{z} - \mathbf{y}) = \hat{1}_{8 \times 8} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.108)$$

Supomos

$$C^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \quad (3.109)$$

sendo A , B , D e E matrizes quadradas com 16 elementos. Assim:

$$\begin{aligned} \int d^3z C^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) C(\mathbf{z} - \mathbf{y}) &= \int d^3z \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \widehat{0} & i\gamma^0 \\ i(\gamma^0)^T & \widehat{0} \end{bmatrix} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \\ &= \begin{bmatrix} iB(\gamma^0)^T & iA\gamma^0 \\ iE(\gamma^0)^T & iD\gamma^0 \end{bmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \widehat{1}_{8 \times 8} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \widehat{1}_{4 \times 4} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Temos então

$$iB(\gamma^0)^T = \widehat{1}_{4 \times 4}; \quad (3.111)$$

$$iA\gamma^0 = \widehat{0}; \quad (3.112)$$

$$iE(\gamma^0)^T = \widehat{0}; \quad (3.113)$$

$$iD\gamma^0 = \widehat{1}_{4 \times 4}. \quad (3.114)$$

Resolvemos três dessas equações imediatamente:

$$A = \widehat{0}; \quad (3.115)$$

$$E = \widehat{0}; \quad (3.116)$$

$$D = -i\gamma^0. \quad (3.117)$$

Quanto a (3.111), tomamos a transposta daquela equação:

$$\left[iB(\gamma^0)^T \right]^T = i \left[(\gamma^0)^T \right]^T (B)^T = i\gamma^0 (B)^T = \left(\widehat{1}_{4 \times 4} \right)^T = \widehat{1}_{4 \times 4}. \quad (3.118)$$

Multiplicando essa equação por $-i\gamma^0$ pela direita, encontramos:

$$-i\gamma^0 i\gamma^0 (B)^T = (B)^T = -i\gamma^0. \quad (3.119)$$

Tomando a transposta dessa expressão, obtemos:

$$B = -i(\gamma^0)^T. \quad (3.120)$$

Dessa forma, encontramos a inversa da matriz C :

$$C^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \widehat{0} & -i(\gamma^0)^T \\ -i\gamma^0 & \widehat{0} \end{bmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \quad (3.121)$$

De posse da inversa da matriz dos parênteses de Berezin dos vínculos de segunda classe, definimos os *parênteses de Dirac* entre duas quantidades F e G arbitrárias como

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}_D^{z_0=y_0} &\equiv \{F(x), G(y)\}_B^{z_0=y_0} + \\ &\quad - \int d^3z d^3w \{F(x), \Lambda_\alpha(z)\}_B^{z_0=y_0} C_{\alpha\alpha'}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{w}) \times \\ &\quad \times \{\Lambda_{\alpha'}(w), G(y)\}_B^{z_0=y_0}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Devido à forma da matriz C^{-1} , os parênteses de Dirac podem ser simplificados:

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}_D^{x_0=y_0} &= \{F(x), G(y)\}_B^{x_0=y_0} + \\ &\quad + i \int d^3z \{F(x), \varphi_a(z)\}_B^{x_0=z_0} (\gamma^0)_{ab}^T \{\bar{\varphi}_b(z), G(y)\}_B^{z_0=y_0} + \\ &\quad + i \int d^3z \{F(x), \bar{\varphi}_a(z)\}_B^{x_0=z_0} (\gamma^0)_{ab} \{\varphi_b(z), G(y)\}_B^{z_0=y_0}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Utilizando essa expressão, encontramos os *parênteses de Dirac fundamentais*:

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.124)$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = i(\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (3.125)$$

$$\{\psi_a(x), \pi_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.126)$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = \delta_{ab} \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (3.127)$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.128)$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = -\delta_{ab} \left(\frac{\lambda - 1}{2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (3.129)$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.130)$$

$$\{\pi_a(x), \pi_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = 0; \quad (3.131)$$

$$\{\pi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = i \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right) \left(\frac{\lambda - 1}{2} \right) (\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (3.132)$$

$$\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_D^{x_0=y_0} = 0. \quad (3.133)$$

Notamos ainda que os parênteses de Dirac fundamentais diferem muito dos parênteses de Berezin fundamentais (3.84-3.93). Segundo o método de quantização desenvolvido por Dirac, são os parênteses de Dirac, e não os de Berezin, os que devem ser utilizados em consonância com o princípio de correspondência sempre que o sistema físico apresentar vínculos. Na seção seguinte, utilizaremos tal princípio para quantizar a parte fermiônica da eletrodinâmica em equilíbrio termodinâmico.

3.4.2 A quantização da parte fermiônica em equilíbrio

Na seção anterior revisamos a estrutura canônica da parte fermiônica da eletrodinâmica. Agora, estudaremos a quantização desse setor das teorias de Maxwell e Podolsky.

O princípio de correspondência afirma que os parênteses de Dirac de campos Grassmannianos devem ser substituídos pelo anticomutador, definido como

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (3.134)$$

dividido por i juntamente com a substituição de campos por operadores. Assim, o conjunto de parênteses de Dirac fundamentais (3.124-3.133) é substituído pelo seguinte conjunto:

$$\left\{ \widehat{\psi}_a(x), \widehat{\psi}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = \widehat{0}; \quad (3.135)$$

$$\left\{ \widehat{\psi}_a(x), \widehat{\bar{\psi}}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = -(\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.136)$$

$$\left\{ \widehat{\psi}_a(x), \widehat{\pi}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = \widehat{0}; \quad (3.137)$$

$$\left\{ \widehat{\psi}_a(x), \widehat{\bar{\pi}}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = i\delta_{ab} \left(\frac{\lambda+1}{2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.138)$$

$$\left\{ \widehat{\bar{\psi}}_a(x), \widehat{\psi}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = \widehat{0}; \quad (3.139)$$

$$\left\{ \widehat{\bar{\psi}}_a(x), \widehat{\bar{\pi}}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = -i\delta_{ab} \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.140)$$

$$\left\{ \widehat{\bar{\psi}}_a(x), \widehat{\pi}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = \widehat{0}; \quad (3.141)$$

$$\left\{ \widehat{\pi}_a(x), \widehat{\pi}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = \widehat{0}; \quad (3.142)$$

$$\left\{ \widehat{\pi}_a(x), \widehat{\bar{\pi}}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = - \left(\frac{\lambda+1}{2} \right) \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) (\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.143)$$

$$\left\{ \widehat{\bar{\pi}}_a(x), \widehat{\bar{\pi}}_b(y) \right\}_{x_0=y_0} = \widehat{0}. \quad (3.144)$$

Os primeiros membros de todas essas equações exigem que os dois operadores presentes em cada anticomutador sejam calculados no mesmo instante de tempo. Os segundos membros dessas expressões são independentes do tempo. Um sistema em equilíbrio termodinâmico satisfaz estacionariedade, isto é, tal sistema físico é independente do tempo. Para a eletrodinâmica em equilíbrio termodinâmico, todos os operadores campos fermiônicos e seus respectivos operadores momento devem ser independentes do tempo. Isso significa, por exemplo, que $\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, t_1) = \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, t_2)$ para todos os t_1 e t_2 . Como estamos lidando com uma situação de equilíbrio termodinâmico escolhemos, sem perda de generalidade, $x_0 = y_0 = 0$ nas equações acima e reescrevemo-las de uma forma independente do tempo:

$$\{\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\psi}_b(\mathbf{y})\} = \widehat{0}; \quad (3.145)$$

$$\{\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\bar{\psi}}_b(\mathbf{y})\} = -(\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.146)$$

$$\{\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\pi}_b(\mathbf{y})\} = \widehat{0}; \quad (3.147)$$

$$\{\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\bar{\pi}}_b(\mathbf{y})\} = i\delta_{ab} \left(\frac{\lambda+1}{2}\right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.148)$$

$$\{\widehat{\bar{\psi}}_a(\mathbf{x}), \widehat{\psi}_b(\mathbf{y})\} = \widehat{0}; \quad (3.149)$$

$$\{\widehat{\bar{\psi}}_a(\mathbf{x}), \widehat{\bar{\pi}}_b(\mathbf{y})\} = -i\delta_{ab} \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.150)$$

$$\{\widehat{\bar{\psi}}_a(\mathbf{x}), \widehat{\pi}_b(\mathbf{y})\} = \widehat{0}; \quad (3.151)$$

$$\{\widehat{\pi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\pi}_b(\mathbf{y})\} = \widehat{0}; \quad (3.152)$$

$$\{\widehat{\pi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\bar{\pi}}_b(\mathbf{y})\} = -\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) (\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.153)$$

$$\{\widehat{\bar{\pi}}_a(\mathbf{x}), \widehat{\bar{\pi}}_b(\mathbf{y})\} = \widehat{0}. \quad (3.154)$$

Conforme notamos no regime clássico, a Hamiltoniana canônica (3.80) é o gerador das translações temporais. Sua versão quântica é

$$\begin{aligned} \widehat{H}_C = & -\frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{i}{2} (\gamma^j)_{ab} \left\{ \left[\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \partial_j \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}) \right] - \left[\partial_j \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}) \right] \right\} + \right. \\ & \left. -m_f \left[\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}) \right] - q_e (\gamma^\mu)_{ab} \widehat{\mathcal{A}}_\mu(\mathbf{x}) \left[\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}) \right] \right\}. \quad (3.155) \end{aligned}$$

Também podemos escrever o operador carga de Noether, que é a versão quântica da carga (3.67):

$$\widehat{N} = \frac{1}{2} \int d^3x (\gamma^0)_{ab} \left[\widehat{\psi}_a(\mathbf{x}), \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.156)$$

A matriz densidade correspondente à eletrodinâmica em equilíbrio termodinâmico com fontes externas é

$$\widehat{\rho}_s(\beta) = e^{-\beta(\widehat{H}_T - \mu_e \widehat{N})}, \quad (3.157)$$

sendo $\widehat{H}_T = \widehat{H}_C + \widehat{H}_P + \widehat{H}_s$, com \widehat{H}_P sendo o Hamiltoniano associado ao campo eletromagnético livre cuja única propriedade relevante para os nossos propósitos nesta seção é que comuta com \widehat{H}_C e \widehat{H}_s o Hamiltoniano das fontes que, em conformidade com (2.39) e (2.40), é dado por

$$\widehat{H}_s = - \int d^3x \left\{ \mathcal{J}^\mu(\mathbf{x}) \widehat{\mathcal{A}}_\mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} [\bar{\eta}_a(\mathbf{x}), \widehat{\psi}_a(\mathbf{x})] + \frac{1}{2} [\eta_a(\mathbf{x}), \widehat{\bar{\psi}}_a(\mathbf{x})] \right\}. \quad (3.158)$$

Neste operador, \mathcal{J} é a fonte do campo de *gauge* $\widehat{\mathcal{A}}$ e $\bar{\eta}$ e η as fontes Grassmannianas dos campos fermiônicos $\widehat{\psi}$ e $\widehat{\bar{\psi}}$, respectivamente.

A quantidade μ_e que aparece na matriz densidade (3.157) é o potencial químico associado à carga de Noether \widehat{N} .

Realizando uma transformação de similaridade com a matriz densidade $\widehat{\rho}_s(\tau)$ no operador $\widehat{H}_T - \mu_e \widehat{N}$ e utilizando (2.80), vemos que esse operador é invariante por essa transformação:

$$\widehat{H}_T^s - \mu_e \widehat{N}^s = \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \left(\widehat{H}_T - \mu_e \widehat{N} \right) \widehat{\rho}_s(\tau) = \widehat{H}_T - \mu_e \widehat{N}. \quad (3.159)$$

Aplicando essa mesma transformação a cada equação do conjunto de anticomutadores fundamentais (3.145-3.154) e utilizando

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \left\{ \widehat{A}, \widehat{B} \right\} \widehat{\rho}_s(\tau) &= \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \left(\widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}\widehat{A} \right) \widehat{\rho}_s(\tau) \\ &= \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{A}\widehat{B}\widehat{\rho}_s(\tau) + \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{B}\widehat{A}\widehat{\rho}_s(\tau) \\ &= \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{A}\widehat{\rho}_s(\tau) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{B}\widehat{\rho}_s(\tau) + \\ &\quad + \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{B}\widehat{\rho}_s(\tau) \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{A}\widehat{\rho}_s(\tau) \\ &= \widehat{A}^s(\tau) \widehat{B}^s(\tau) + \widehat{B}^s(\tau) \widehat{A}^s(\tau) \\ &= \left\{ \widehat{A}^s(\tau), \widehat{B}^s(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (3.160)$$

que é válida para quaisquer operadores \widehat{A} e \widehat{B} , obtemos o conjunto de anticomutadores fundamentais para a teoria em equilíbrio termodinâmico:

$$\{\widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = \widehat{0}; \quad (3.161)$$

$$\{\widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\bar{\psi}}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = -(\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.162)$$

$$\{\widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\pi}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = \widehat{0}; \quad (3.163)$$

$$\{\widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\bar{\pi}}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = i\delta_{ab} \left(\frac{\lambda+1}{2}\right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.164)$$

$$\{\widehat{\bar{\psi}}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = \widehat{0}; \quad (3.165)$$

$$\{\widehat{\bar{\psi}}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\bar{\pi}}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = -i\delta_{ab} \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.166)$$

$$\{\widehat{\bar{\psi}}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\pi}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = \widehat{0}; \quad (3.167)$$

$$\{\widehat{\pi}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\pi}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = \widehat{0}; \quad (3.168)$$

$$\{\widehat{\pi}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\bar{\pi}}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = -\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) (\gamma^0)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \widehat{1}; \quad (3.169)$$

$$\{\widehat{\bar{\pi}}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\bar{\pi}}_b^s(\mathbf{y}, \tau)\} = \widehat{0}. \quad (3.170)$$

Derivando a equação (2.80) com relação a τ , temos

$$\frac{\partial \widehat{F}^s(\tau)}{\partial \tau} = -\left[\widehat{F}^s(\tau), \widehat{H}_T - \mu_e \widehat{N}\right], \quad (3.171)$$

sendo que particularizamos para a matriz densidade (3.157).

Utilizando essa expressão para os campos fermiônicos e os anticomutadores fundamentais em equilíbrio, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} &= (\gamma^0)_{ab} \left[-i(\gamma^j)_{bc} \partial_j \widehat{\psi}_c^s(\mathbf{x}, \tau) + m_f \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) - \mu_e (\gamma^0)_{bc} \widehat{\psi}_c^s(\mathbf{x}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + q_e \widehat{\mathcal{A}}_\mu^s(\mathbf{x}, \tau) (\gamma^\mu)_{bc} \widehat{\psi}_c^s(\mathbf{x}, \tau) + \eta_b(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1} \right]; \end{aligned} \quad (3.172)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\bar{\psi}}_a^s(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} &= (\gamma^0)_{ba} \left[-i(\gamma^j)_{bc} \partial_j \widehat{\bar{\psi}}_c^s(\mathbf{x}, \tau) - m_f \widehat{\bar{\psi}}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \mu_e (\gamma^0)_{cb} \widehat{\bar{\psi}}_c^s(\mathbf{x}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. - q_e (\gamma^\mu)_{cb} \widehat{\mathcal{A}}_\mu^s(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\bar{\psi}}_c^s(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\eta}_b(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1} \right]. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Uma vez que γ^0 é sua própria inversa, podemos multiplicar cada uma dessas equações respectivamente por $(\gamma^0)_{da}$ e $(\gamma^0)_{ad}$ e, então, obtemos

$$\begin{aligned} \left[(\gamma^0)_{ab} \frac{\partial}{\partial \tau} + i (\gamma^j)_{ab} \partial_j \right] \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) &= [m_f \delta_{ab} - \mu_e (\gamma^0)_{ab}] \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \\ &+ q_e \widehat{\mathcal{A}}_\mu^s(\mathbf{x}, \tau) (\gamma^\mu)_{ab} \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \eta_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}; \end{aligned} \quad (3.174)$$

$$\begin{aligned} \left[(\gamma^0)_{ba} \frac{\partial}{\partial \tau} + i (\gamma^j)_{ba} \partial_j \right] \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) &= - [m_f \delta_{ba} - \mu_e (\gamma^0)_{ba}] \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \\ &- q_e (\gamma^\mu)_{ba} \widehat{\mathcal{A}}_\mu^s(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}. \end{aligned} \quad (3.175)$$

Observamos que os primeiros membros de ambas essas equações dependem do operador $\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \tau} + i \gamma^j \partial_j$. Para teorias de campos à temperatura nula, o correspondente operador tem a forma $i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i \gamma^j \partial_j$ que pode ser colocado na forma abreviada $i \gamma^\mu \partial_\mu$. Contudo, o operador $\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \tau} + i \gamma^j \partial_j$ aparentemente não pode ser escrito numa forma similar, pois o termo proporcional a γ^0 não é multiplicado pelo número i , enquanto que os demais termos o são. A fim de podermos escrever esse operador numa forma compacta, definimos as *matrizes de Dirac Euclidianas*:

$$\gamma_0^E \equiv \gamma^0; \quad (3.176)$$

$$\gamma_j^E \equiv i \gamma^j. \quad (3.177)$$

Essas matrizes satisfazem

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\}_{ab} = 2\delta_{\mu\nu} \delta_{ab}, \quad (3.178)$$

conforme pode ser verificado com o uso da equação (3.2).

Escrevendo $\partial/\partial\tau = \partial_0$, temos

$$\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \tau} + i \gamma^j \partial_j = \gamma_0^E \partial_0 + \gamma_j^E \partial_j = \gamma_\mu^E \partial_\mu, \quad (3.179)$$

sendo a soma implícita nos índices gregos agora efetuada na métrica Euclideana. Dessa forma, os primeiros membros das equações (3.184) e (3.185) são escritas numa forma covariante. No entanto, aquelas equações dependem de um termo proporcional ao operador $\gamma^\mu \widehat{\mathcal{A}}_\mu$. Assim, em termos das matrizes de Dirac Euclidianas, esse termo se torna

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \widehat{\mathcal{A}}_\mu &= \gamma^0 \widehat{\mathcal{A}}_0 + \gamma^j \widehat{\mathcal{A}}_j = \gamma^0 \widehat{\mathcal{A}}^0 - \gamma^j \widehat{\mathcal{A}}^j = \gamma_0^E \widehat{\mathcal{A}}^0 + i \gamma_j^E \widehat{\mathcal{A}}^j \\ &= -i \left(i \gamma_0^E \widehat{\mathcal{A}}^0 - \gamma_j^E \widehat{\mathcal{A}}^j \right) \end{aligned} \quad (3.180)$$

e novamente o número i nos impede de escrevermos as equações (3.184) e (3.185) de uma forma covariante. A fim de resolvermos esse problema, redefinimos o campo de *gauge* através de

$$\widehat{A}_0 \equiv i\widehat{\mathcal{A}}^0; \quad (3.181)$$

$$\widehat{A}_j \equiv -\widehat{\mathcal{A}}^j. \quad (3.182)$$

Em termos desse novo campo, temos

$$\gamma^\mu \widehat{\mathcal{A}}_\mu = i\gamma_\mu^E \widehat{A}_\mu, \quad (3.183)$$

com a soma tomada sobre a métrica Euclideana.

Em termos dessas novas quantidades, as equações de campo (3.184) e (3.185) são escritas como

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu^E)_{ab} \partial_\mu \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) &= [m_f \delta_{ab} - \mu_e (\gamma^0)_{ab}] \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \\ &+ iq_e \widehat{A}_\mu^s(\mathbf{x}, \tau) (\gamma_\mu^E)_{ab} \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \eta_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}; \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu^E)_{ab} \partial_\mu \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) &= - [m_f \delta_{ba} - \mu_e (\gamma^0)_{ba}] \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \\ &- iq_e (\gamma^\mu)_{ba} \widehat{A}_\mu^s(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) + \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Essas equações de campo podem ainda ser reescritas numa forma mais apropriada:

$$\left\{ (\gamma_\mu^E)_{ab} \widehat{D}_\mu^{(\mu_e, q_e)} \left[\widehat{A}^s \right] - m_f \delta_{ab} \right\} \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) = \eta_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}; \quad (3.186)$$

$$\left\{ (\gamma_\mu^E)_{ba} \widehat{D}_\mu^{(-\mu_e, -q_e)} \left[\widehat{A}^s \right] + m_f \delta_{ba} \right\} \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) = \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}, \quad (3.187)$$

com as seguintes definições

$$\widehat{D}_\mu^{(\mu_e, q_e)} \left[\widehat{A}^s \right] \equiv \widehat{1} \partial_\mu^{(\mu_e)} + iq_e \widehat{A}_\mu^s; \quad (3.188)$$

$$\partial_\mu^{(\mu_e)} \equiv \partial_\mu + \mu_e \delta_{\mu 0}. \quad (3.189)$$

Notamos que no formalismo de Matsubara-Fradkin o caráter Euclideano do espaço-tempo emerge naturalmente. Além disso, ao compararmos as equações (3.186) e (3.187), vemos que a equação de campo para o campo $\widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau)$ possui os parâmetros q_e , m_f e o potencial químico μ_e com sinais opostos aos daqueles presentes na equação de campo para o campo $\widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau)$.

Iniciamos esta seção realizando uma análise clássica da estrutura canônica da parte da eletrodinâmica, seja ela generalizada ou Maxwelliana, que envolve os campos fermiônicos. Observamos que a teoria é vinculada e, fazendo uso do formalismo de Dirac, definimos os parênteses de Dirac da teoria. De posse destes, utilizamos o princípio de correspondência para definirmos os anticomutadores fundamentais deste setor da teoria. Considerando uma situação de equilíbrio termodinâmico, encontramos as equações de campo fermiônicas para essa teoria. Na seção seguinte, consideraremos a quantização da parte da teoria que concebe o campo do *gauge*.

3.5 O método do campo auxiliar de Nakanishi

Na seção anterior empregamos o formalismo de Dirac a fim de realizarmos uma análise canônica e uma consequente quantização da parte da eletrodinâmica que envolve os campos fermiônicos. É possível aplicar essa mesma técnica para a quantização do campo de *gauge*, seja ele o campo de Maxwell ou o de Podolsky. No entanto, tal processo de quantização constitui-se numa abordagem não covariante. Em outras palavras, desconsiderando-se os efeitos térmicos, a quantização pelo método do Dirac *quebra a invariância explícita de Lorentz*. No caso da teoria em equilíbrio termodinâmico, a invariância explícita que é quebrada é a simetria $SO(4)$, que seria uma espécie de “versão Euclideana” do grupo de Lorentz. No formalismo de Dirac, a escolha de *gauge* natural é o *gauge de Coulomb* no caso da teoria de Maxwell, ou uma generalização dessa escolha para o caso de Podolsky. Em qualquer dos casos, essas escolhas de *gauge* são não covariantes. Ainda assim, uma tal quebra de covariância não é um grande problema. Ao se estudar o problema *via* integração funcional é possível passar de uma escolha de *gauge* não covariante para uma covariante através, por exemplo, do *Ansatz* de Faddeev-Popov. Como vimos na seção anterior, a análise da estrutura canônica de uma teoria vinculada é extensa e complexa. A situação é ainda mais complicada quando há vínculos de primeira classe no problema, como é o caso de teorias de campos de *gauge*.

Uma abordagem mais simples consistiria em se quantizar o campo de *gauge* mantendo intacta a invariância explícita de $SO(4)$. Dessa forma, a passagem de uma escolha de *gauge* não covariante para uma covariante seria desnecessária. Tal método foi desenvolvido por Nakanishi. Entre suas vantagens, citamos que sequer a análise de Dirac necessita ser implementada. Dessa forma, o método de Nakanishi é mais simples ao se estudar teorias de

gauge em equilíbrio termodinâmico do que o processo de quantização de Dirac.

Nesta seção aplicaremos o método de Nakanishi para a quantização do campo de Podolsky em equilíbrio termodinâmico. Conforme vimos na parte fermiônica, quando consideramos a quantização de campos em equilíbrio termodinâmico, a estrutura Euclideana do espaço-tempo naturalmente emerge. Sendo assim, consideraremos a versão Euclideana da densidade de Lagrangeana de Podolsky (3.15):

$$\mathcal{L}_P^E = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_P^2} \partial_\mu F_{\mu\nu} \partial_\xi F_{\xi\nu}. \quad (3.190)$$

Conforme chamamos a atenção na seção 3.2.3, as equações de Euler-Lagrange obtidas a partir da densidade de Lagrangeana de Podolsky sem fixação de *gauge* (3.18) dependem de um operador diferencial não inversível. A teoria descrita pela densidade de Lagrangeana Euclideana acima partilha dessa mesma característica, ou seja, as equações de Euler-Lagrange a partir dela obtidas também dependem de um operador diferencial que não pode ser invertido. Uma vez que estamos procurando uma teoria *quântica* em equilíbrio termodinâmico e levando em consideração que as funções de Green, que são, em síntese, inversas de operadores, desempenham um papel crucial em qualquer teoria quântica, concluímos que temos um problema. A fim de contornarmos essa dificuldade, consideremos o operador densidade de Lagrangeano de Nakanishi para a eletrodinâmica de Podolsky [43, 44]:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_N = & \frac{1}{4} \widehat{F}_{\mu\nu}^s \widehat{F}_{\mu\nu}^s + \frac{1}{2m_P^2} \partial_\mu \widehat{F}_{\mu\nu}^s \partial_\xi \widehat{F}_{\xi\nu}^s + \frac{1}{2} \left\{ \widehat{B}, G \left[\widehat{A}^s \right] \right\} - \frac{\alpha}{2} \widehat{B}^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\gamma_\mu^E)_{ab} \left\{ \left(\frac{\lambda+1}{2} \right) \left[\widehat{\psi}_a^s, \partial_\mu \widehat{\psi}_b^s \right] + \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \left[\partial_\mu \widehat{\psi}_a^s, \widehat{\psi}_b^s \right] \right\} + \\ & - \frac{1}{2} [m_f \delta_{ab} - \mu_e (\gamma^0)_{ab}] \left[\widehat{\psi}_a^s, \widehat{\psi}_a^s \right] + i \frac{q_e}{2} \widehat{A}_\mu^s (\gamma_\mu^E)_{ab} \left[\widehat{\psi}_a^s, \widehat{\psi}_b^s \right] + \\ & + J_\mu \widehat{A}_\mu^s + \frac{1}{2} \left[\bar{\eta}_a, \widehat{\psi}_a^s \right] + \frac{1}{2} \left[\eta_a, \widehat{\psi}_a^s \right]. \end{aligned} \quad (3.191)$$

Nesta expressão $\widehat{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \widehat{A}_\nu - \partial_\nu \widehat{A}_\mu$, α é um número real arbitrário adimensional não nulo conhecido como *parâmetro de gauge covariante*, \widehat{B} é chamado de *campo auxiliar de Nakanishi*, $G \left[\widehat{A} \right]$ é chamado de *operador de escolha de gauge* e $J_0 = -i\mathcal{J}^0$ e $J_k = \mathcal{J}^k$ são as componentes do quadrivetor Euclideano fonte clássica do campo de Podolsky.

Por definição, sob uma transformação de *gauge*,

$$\widehat{A}_\mu \rightarrow \widehat{A}'_\mu = \widehat{A}_\mu + \partial_\mu \widehat{f}, \quad (3.192)$$

para qualquer operador escalar de $SO(4)$ bem comportado \widehat{f} , o operador escolha de *gauge* satisfaz

$$G[\widehat{A}] \rightarrow G[\widehat{A}'] \neq G[\widehat{A}]. \quad (3.193)$$

Se o campo auxiliar for o operador nulo, a densidade de Lagrangeano $\widehat{\mathcal{L}}_N$ é invariante sob transformações de *gauge* (3.192) desde que façamos as fontes nulas. Nesse caso, temos simplesmente uma versão quântica mal definida de nossa teoria original. Se, por outro lado, o campo auxiliar não for nulo, mesmo que as fontes o sejam, o termo envolvendo o anticomutador de \widehat{B} com a escolha de *gauge* *quebra explicitamente a invariância de gauge* da densidade de Lagrangeano acima. Veremos, a seguir, que essa quebra explícita da invariância $U(1)$ pode levar a uma teoria quântica bem definida para a eletrodinâmica generalizada.

3.5.1 O princípio de Schwinger

A fim de construirmos uma teoria quântica termodinâmica para a eletrodinâmica de Podolsky, consideremos o operador ação termodinâmica associado à densidade de Lagrangeano (3.191):⁶

$$\widehat{S}_N = \int_\beta d^4x \widehat{\mathcal{L}}_N. \quad (3.194)$$

Consideremos, também, *variações infinitesimais mutuamente independentes* dos campos

$$\widehat{\psi}_a \rightarrow \widehat{\psi}'_a = \widehat{\psi}_a + \delta \widehat{\psi}_a; \quad (3.195)$$

$$\widehat{\bar{\psi}}_a \rightarrow \widehat{\bar{\psi}}'_a = \widehat{\bar{\psi}}_a + \delta \widehat{\bar{\psi}}_a; \quad (3.196)$$

$$\widehat{A}_\mu \rightarrow \widehat{A}'_\mu = \widehat{A}_\mu + \delta \widehat{A}_\mu; \quad (3.197)$$

$$\widehat{B} \rightarrow \widehat{B}' = \widehat{B} + \delta \widehat{B}. \quad (3.198)$$

Essas variações induzem a seguinte variação no operador ação termodinâmica:

⁶Na expressão (3.194) utilizamos a notação (2.141) com $D = 3$.

$$\widehat{S}_N \rightarrow \widehat{S}'_N = \widehat{S}_N + \delta\widehat{S}_N. \quad (3.199)$$

O *princípio de Schwinger* afirma que a variação desse operador, a saber, $\delta\widehat{S}_N = \widehat{S}'_N - \widehat{S}_N$, possui uma forma específica [45, 46, 47, 48]:

$$\delta\widehat{S}_N = \int_{\beta} d^4x \partial_{\mu} \widehat{V}_{\mu}, \quad (3.200)$$

sendo \widehat{V}_{μ} um operador vetorial que depende, em princípio, tanto dos campos quanto das suas variações. Invocando esse princípio, encontramos as seguintes equações de campo para as variações de cada campo:

$$\left\{ (\gamma_{\mu}^E)_{ab} \widehat{D}_{\mu}^{(\mu_e, q_e)} [\widehat{A}^s] - m_f \delta_{ab} \right\} \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) = \eta_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}; \quad (3.201)$$

$$\left\{ (\gamma_{\mu}^E)_{ba} \widehat{D}_{\mu}^{(-\mu_e, -q_e)} [\widehat{A}^s] + m_f \delta_{ba} \right\} \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) = \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}; \quad (3.202)$$

$$\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \partial_{\mu} \widehat{F}_{\mu\nu}^s - \frac{\delta G^* [\widehat{A}^s]}{\delta \widehat{A}_{\nu}^s} \widehat{B} = i \frac{q_e}{2} (\gamma_{\nu}^E)_{ab} [\widehat{\psi}_a^s, \widehat{\psi}_b^s] + J_{\nu} \widehat{1}; \quad (3.203)$$

$$\widehat{B} = \frac{1}{\alpha} G [\widehat{A}^s], \quad (3.204)$$

com

$$\widehat{B} \frac{\delta G [\widehat{A}]}{\delta \widehat{A}_{\mu}} \widehat{h}_{\mu} \equiv \frac{\delta G^* [\widehat{A}]}{\delta \widehat{A}_{\mu}} \widehat{B} \widehat{h}_{\mu} + \partial_{\mu} \widehat{g}_{\mu}, \quad (3.205)$$

sendo \widehat{h}_{μ} qualquer operador vetorial (em particular, estaremos a seguir interessados no caso em que $\widehat{h}_{\mu} = \widehat{A}_{\mu}$) e \widehat{g}_{μ} um operador vetorial funcional apropriado que, em princípio, depende de \widehat{B} , \widehat{A}_{μ} e \widehat{h}_{μ} .

As equações (3.201) e (3.202) são exatamente as equações de campo fermiônicas (3.186) e (3.187). Isso mostra que o emprego do princípio de Schwinger pode levar às equações de campo corretas da teoria.

Notamos, ainda, que a equação de campo (3.204) é exatamente solúvel para o campo auxiliar. De fato, sua solução para \widehat{B} é trivial, consistindo, na verdade, da própria equação (3.204). Utilizando essa solução exata na equação de campo (3.203), notamos que obtemos uma equação independente do campo auxiliar:

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)(\delta_{\mu\nu}\Delta + \partial_\nu\partial_\mu)\hat{A}_\mu^s - \frac{1}{\alpha}\frac{\delta G^*[\hat{A}^s]}{\delta\hat{A}_\nu^s}G[\hat{A}^s] &= i\frac{q_e}{2}(\gamma_\nu^E)_{ab}[\hat{\psi}_a^s, \hat{\psi}_b^s] + \\
&+ J_\nu\hat{1}. \tag{3.206}
\end{aligned}$$

Assim como no caso de Minkowski, o operador $\delta_{\mu\nu}\Delta + \partial_\nu\partial_\mu$ não é inversível. O passo crucial no método de Nakanishi consiste em se escolher uma forma particular do operador $G[\hat{A}]$ tal que o primeiro membro da equação acima seja um operador covariante local inversível que atue sobre o campo de *gauge*. No caso Maxwelliano, essa escolha é a *condição de Lorenz Euclidea*:

$$G[\hat{A}] = G_L[\hat{A}] \equiv \partial_\mu\hat{A}_\mu. \tag{3.207}$$

Para essa escolha:

$$\begin{aligned}
\hat{B}\frac{\delta G_L[\hat{A}]}{\delta\hat{A}_\mu}\hat{h}_\mu &= \hat{B}\frac{\delta(\partial_\nu\hat{A}_\nu)}{\delta\hat{A}_\mu}\hat{h}_\mu = \hat{B}\partial_\mu\hat{h}_\mu = -\partial_\mu\hat{B}\hat{h}_\mu + \partial_\mu(\hat{B}\hat{h}_\mu) \\
&= \frac{\delta G_L^*[\hat{A}]}{\delta\hat{A}_\mu}\hat{B}\hat{h}_\mu + \partial_\mu\hat{g}_\mu^{(L)}, \tag{3.208}
\end{aligned}$$

o que nos leva a identificar:

$$\frac{\delta G_L^*[\hat{A}]}{\delta\hat{A}_\mu} = -\partial_\mu; \tag{3.209}$$

$$\hat{g}_\mu^{(L)} = \hat{B}\hat{h}_\mu. \tag{3.210}$$

Substituindo o resultado para $\delta G_L^*[\hat{A}]/\delta\hat{A}_\mu$ em (3.206), obtemos

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\left\{\delta_{\mu\nu}\Delta + \left[1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)^{-1}\right]\partial_\nu\partial_\mu\right\}\hat{A}_\mu^s &= i\frac{q_e}{2}(\gamma_\nu^E)_{ab} \times \\
&\times [\hat{\psi}_a^s, \hat{\psi}_b^s] + J_\nu\hat{1}. \tag{3.211}
\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)^{-1} = m_P^2 (\Delta + m_P^2)^{-1}, \quad (3.212)$$

sendo $(\Delta + m_P^2)^{-1}$ a função de Green do campo escalar livre (2.144) com $m^2 = m_P^2$. Como tal função de Green é não local, o operador atuando no campo \widehat{A} na equação (3.211) é também não local e a condição de Lorenz Euclideana falha como uma escolha de gauge apropriada para a teoria de Podolsky.

Uma vez que a condição (3.207) revelou-se uma escolha que levou a uma equação de campo não local, na seção seguinte procuraremos uma escolha de *gauge* para a eletrodinâmica de Podolsky que cumpra os requisitos do método de Nakanishi.

3.5.2 A condição de Lorenz generalizada

Na seção anterior vimos que a condição de Lorenz Euclideana, embora satisfatória na eletrodinâmica Maxwelliana, mostra-se inapropriada para o campo de Podolsky. Em [36], Galvão e Pimentel estudaram a estrutura canônica da eletrodinâmica generalizada clássica. Inspirados por aquele trabalho, tentaremos como escolha de *gauge* a *condição de Lorenz Euclideana generalizada*:

$$G[\widehat{A}] = G_{GL}[\widehat{A}] \equiv \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right) \partial_\mu \widehat{A}_\mu. \quad (3.213)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \widehat{B} \frac{\delta G_{GL}[\widehat{A}]}{\delta \widehat{A}_\mu} \widehat{h}_\mu &= \widehat{B} \frac{\delta \left[\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right) \partial_\nu \widehat{A}_\nu \right]}{\delta \widehat{A}_\mu} \widehat{h}_\mu = \widehat{B} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right) \partial_\mu \widehat{h}_\mu \\ &= - \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right) \partial_\mu \widehat{B} + \\ &\quad + \partial_\mu \left[\widehat{B} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right) \widehat{h}_\mu - \frac{1}{m_P^2} \left(\partial_\nu \widehat{B} \partial_\mu \widehat{h}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \widehat{B} \widehat{h}_\nu \right) \right] \\ &= \frac{\delta G_{GL}^*[\widehat{A}]}{\delta \widehat{A}_\mu} \widehat{B} \widehat{h}_\mu + \partial_\mu \widehat{g}_\mu^{(GL)}. \end{aligned} \quad (3.214)$$

Desta expressão, identificamos

$$\frac{\delta G_{GL}^*[\widehat{A}]}{\delta \widehat{A}_\mu} = - \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \partial_\mu; \quad (3.215)$$

$$\widehat{g}_\mu^{(GL)} = \widehat{B} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \widehat{h}_\mu - \frac{1}{m_P^2} \left(\partial_\nu \widehat{B} \partial_\mu \widehat{h}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \widehat{B} \widehat{h}_\nu \right). \quad (3.216)$$

Substituindo (3.215) na equação (3.206), encontramos a seguinte equação de campo

$$P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} \widehat{A}_\nu^s(\mathbf{x}, \tau) = i \frac{q_e}{2} (\gamma_\mu^E)_{ab} \left[\widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau), \widehat{\psi}_b^s(\mathbf{x}, \tau) \right] + J_\mu(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}, \quad (3.217)$$

sendo que definimos o *operador diferencial de Podolsky* como:

$$P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} \equiv - \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \left\{ \Delta \delta_{\mu\nu} + \left[1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \right] \partial_\mu \partial_\nu \right\}. \quad (3.218)$$

O operador diferencial correspondente a este na teoria de Maxwell, a saber, $\delta_{\mu\nu} \Delta + (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial_\mu \partial_\nu$, pode ser tornado independente do termo $\partial_\mu \partial_\nu$. Isso é feito escolhendo o valor do parâmetro de *gauge* α como sendo igual a 1. Esse é o chamado *gauge de Feynmann-Stückelberg*. Conforme notamos pela definição acima, na teoria de Podolsky não há nenhum *gauge* no qual isso ocorra.

Dada a definição do operador diferencial (3.218), vemos que o primeiro membro da equação (3.217) consiste num operador diferencial covariante local inversível atuando sobre o campo de Podolsky. Isso mostra que a condição de Lorenz Euclideana generalizada (3.213) é uma escolha de *gauge* apropriada para a eletrodinâmica de Podolsky. Dessa forma, a equação (3.217) constitui-se numa equação de campo da teoria em equilíbrio termodinâmico. Uma vez que a solução exata da equação (3.204) foi utilizada, com o operador escolha de *gauge* dado pela condição de Lorenz Euclideana generalizada (3.213), vemos que as equações de campo não dependem do campo auxiliar. Isso justifica sua nomenclatura.

3.5.3 Os campos fantasmas

Consideremos o operador (3.191) sem os termos de fontes e com a escolha de *gauge* (3.213):

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}}_{NGL} = & \frac{1}{4} \widehat{F}_{\mu\nu}^s \widehat{F}_{\mu\nu}^s + \frac{1}{2m_P^2} \partial_\mu \widehat{F}_{\mu\nu}^s \partial_\xi \widehat{F}_{\xi\nu}^s + \frac{1}{2} \left\{ \widehat{B}, G_{GL} \left[\widehat{A}^s \right] \right\} - \frac{\alpha}{2} \widehat{B}^2 + \\
& + \frac{1}{2} (\gamma_\mu^E)_{ab} \left\{ \left(\frac{\lambda+1}{2} \right) \left[\widehat{\psi}_a^s, \partial_\mu \widehat{\psi}_b^s \right] + \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \left[\partial_\mu \widehat{\psi}_a^s, \widehat{\psi}_b^s \right] \right\} + \\
& - \frac{1}{2} \left[m_f \delta_{ab} - \mu_e (\gamma^0)_{ab} \right] \left[\widehat{\psi}_a^s, \widehat{\psi}_a^s \right] + i \frac{q_e}{2} \widehat{A}_\mu^s (\gamma_\mu^E)_{ab} \left[\widehat{\psi}_a^s, \widehat{\psi}_b^s \right].
\end{aligned} \tag{3.219}$$

Conforme já comentamos, o motivo pelo qual adicionamos o termo que depende do operador de escolha de *gauge* foi justamente promover uma quebra explícita da simetria $U(1)$ do eletromagnetismo de Podolsky. Sob uma transformação $U(1)$,

$$\widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \widehat{\psi}_a^{s'}(\mathbf{x}, \tau) = e^{-\frac{i}{q_e} \widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau)} \widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau); \tag{3.220}$$

$$\widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \widehat{\psi}_a^{s'}(\mathbf{x}, \tau) = \widehat{\psi}_a^s(\mathbf{x}, \tau) e^{\frac{i}{q_e} \widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau)}; \tag{3.221}$$

$$\widehat{A}_\mu^s(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \widehat{A}_\mu^{s'}(\mathbf{x}, \tau) = \widehat{A}_\mu^s(\mathbf{x}, \tau) + \partial_\mu \widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau) \tag{3.222}$$

$$\widehat{B}(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \widehat{B}'(\mathbf{x}, \tau) = \widehat{B}(\mathbf{x}, \tau), \tag{3.223}$$

o operador densidade de Lagrangeano acima se transforma de acordo com

$$\widehat{\mathcal{L}}_{NGL} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}'_{NGL} = \widehat{\mathcal{L}}_{NGL} + \frac{1}{2} \left\{ \widehat{B}, \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \widehat{\Lambda}^s \right\}, \tag{3.224}$$

que é, no caso geral, diferente de (3.219). No entanto, se o operador $\widehat{\Lambda}^s$ for tal que satisfaça a equação [44]

$$(\Delta + m_P^2) \Delta \widehat{\Lambda}^s = \widehat{0}, \tag{3.225}$$

vemos que $\widehat{\mathcal{L}}_{NGL}$ é invariante. Essa simetria da teoria é chamada de *simetria de gauge residual*.

A fim de levarmos o *vínculo* (3.225) em consideração na teoria, definimos o seguinte operador:

$$\widehat{\mathcal{L}}_c \equiv \widehat{\mathcal{L}}_{NGL} + \kappa \widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau) \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau), \tag{3.226}$$

sendo $\widehat{\mathcal{L}}_{NGL}$ a densidade de Lagrangeano $\widehat{\mathcal{L}}_N$ com a condição de Lorenz Euclideana generalizada, κ um parâmetro real constante que deverá ser fixado

posteriormente e $\widehat{\lambda}^s(\mathbf{x}, \tau)$ um operador multiplicador de Lagrange. Agora, reescrevemos esse multiplicador de Lagrange de acordo com

$$\widehat{\lambda}^s(\mathbf{x}, \tau) \equiv i\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau)v. \quad (3.227)$$

Nesta expressão, $\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau)$ é um operador campo Grassmanniano e v é uma constante Grassmanniana. Assim, vemos que

$$\begin{aligned} \kappa\widehat{\lambda}^s(\mathbf{x}, \tau) \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta\widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau) &= i\kappa\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau)v \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta\widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau) \\ &= i\kappa\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau) \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \left[v\widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ &= i\kappa\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau) \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned} \quad (3.228)$$

sendo $\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau) \equiv v\widehat{\Lambda}^s(\mathbf{x}, \tau)$ outro operador campo Grassmanniano. \widehat{C} e \widehat{C}^s são chamados de *campos fantasmas*.

Podemos reescrever o termo que depende dos fantasmas como

$$\begin{aligned} i\kappa\widehat{C}^s \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta\widehat{C}^s &= i\kappa\partial_\mu\widehat{C}^s \left(\frac{\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu}{m_P^2} + \delta_{\mu\nu} \right) \partial_\nu\widehat{C}^s + \\ &+ \partial_\mu \left\{ i\kappa \left[\widehat{C}^s \frac{\Delta}{m_P^2} \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - \overrightarrow{\partial}_\mu \right) \widehat{C}^s - \widehat{C}^s \partial_\mu\widehat{C}^s \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.229)$$

sendo que escrevemos $\widehat{C}^s\overleftarrow{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu\widehat{C}^s$ e $\overrightarrow{\partial}_\mu\widehat{C}^s \equiv \partial_\mu\widehat{C}^s$. Ao realizarmos variações infinitesimais independentes em cada campo fantasma, vemos que o operador compreendido entre as chaves no segundo membro dessa última expressão será uma parte da definição do operador \widehat{V}_μ da expressão (3.200). Como esse operador vetorial não contribui para as equações de campo, consideraremos doravante, sem perda de generalidade para os nossos propósitos, o seguinte operador densidade de Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_C &\equiv \widehat{\mathcal{L}}_c - \partial_\mu \left\{ i\kappa \left[\widehat{C}^s \frac{\Delta}{m_P^2} \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - \overrightarrow{\partial}_\mu \right) \widehat{C}^s - \widehat{C}^s \partial_\mu\widehat{C}^s \right] \right\} \\ &= \widehat{\mathcal{L}}_{NGL} + i\kappa\partial_\mu\widehat{C}^s \left(\frac{\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu}{m_P^2} + \delta_{\mu\nu} \right) \partial_\nu\widehat{C}^s. \end{aligned} \quad (3.230)$$

Assumimos que a constante Grassmanniana v atue no espaço dual do espaço de Hilbert como o negativo dela mesma. Essa hipótese, juntamente com a definição da transformação de *gauge* (3.220-3.223), implica na Hermiticidade do campo fantasma \widehat{C} . Dessa propriedade e da Hermiticidade do operador densidade de Lagrangeano, decorre:

$$\begin{aligned} \left[i\kappa\partial_\mu\widehat{C}^s \left(\frac{\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu}{m_P^2} + \delta_{\mu\nu} \right) \partial_\nu\widehat{C}^s \right]^\dagger &= -i\kappa\partial_\mu\widehat{C}^{s\dagger} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu}{m_P^2} + \delta_{\mu\nu} \right) \partial_\nu\widehat{C}^s \\ &= i\kappa\partial_\mu\widehat{C}^s \left(\frac{\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu}{m_P^2} + \delta_{\mu\nu} \right) \partial_\nu\widehat{C}^s. \end{aligned} \quad (3.231)$$

A única forma dessa equação ser satisfeita é se o operador \widehat{C} for anti-Hermiteano. Resumindo:

$$\widehat{C}^\dagger = \widehat{C}; \quad (3.232)$$

$$\widehat{C}^\dagger = -\widehat{C}. \quad (3.233)$$

A fim de encontrarmos as equações de campo fantasmagóricas, consideremos a inclusão das fontes fantasmagóricas, ou seja, os campos clássicos Grassmannianos $d(\mathbf{x}, \tau)$ e $\bar{d}(\mathbf{x}, \tau)$ que são fontes dos campos fantasmas \widehat{C} e \widehat{C}^s , respectivamente:

$$\widehat{\mathcal{L}}_{gs} \equiv \widehat{\mathcal{L}}_C + \frac{1}{2} [\bar{d}, \widehat{C}^s] + \frac{1}{2} [d, \widehat{C}]. \quad (3.234)$$

Realizando variações infinitesimais independentes em cada campo fantasma, encontramos suas equações de campo:

$$i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau) = d(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}; \quad (3.235)$$

$$i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta\widehat{C}(\mathbf{x}, \tau) = -\bar{d}(\mathbf{x}, \tau) \widehat{1}. \quad (3.236)$$

Observamos que essas equações descrevem campos não interagentes. Essa é uma consequência da escolha de *gauge* (3.213) ser linear no campo de Podolsky. Se ao invés da condição de Lorenz Euclideana generalizada tivéssemos escolhido uma condição não linear no campo eletromagnético, haveria interação entre os fantasmas e o campo \widehat{A} . Esse tipo de situação é muito comum

em teorias de *gauge* não Abelianas. No presente caso, no entanto, os campos fantasmas não interagem com os demais campos. Uma consequência dessa propriedade é que as equações funcionais do funcional gerador termodinâmico que dependem das fontes fantasmagóricas, ou de derivadas funcionais com relação a essas fontes, não dependem das outras fontes ou de derivadas funcionais com relação às outras fontes, conforme veremos na seção 3.6. Por conseguinte, o funcional gerador termodinâmico pode ser escrito como um produto de um termo que depende apenas nas fontes fantasmagóricas com um termo que depende de todas as outras fontes clássicas. Veremos, também, uma outra consequência das equações de campo fantasmagóricas serem livres na seção 3.8. Na referida seção, mostraremos que as equações de Dyson-Schwinger-Fradkin da teoria de Podolsky não dependem das funções de Green fantasmagóricas.

3.5.4 A carga e o potencial químico fantasmas

Na seção anterior introduzimos os campos fantasmas no problema com o objetivo de levar em consideração o vínculo (3.225). Esse vínculo, por sua vez, surgiu da invariância de *gauge* residual da teoria quântica. Contudo, a introdução desses novos campos implementou, também, uma nova simetria no problema. Observamos que (3.230) é invariante sob a seguinte transformação *global*:

$$\widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \widehat{C}^{s'}(\mathbf{x}, \tau) = e^{i\theta_0} \widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.237)$$

$$\widehat{\overline{C}}^s(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \widehat{\overline{C}}^{s'}(\mathbf{x}, \tau) = \widehat{\overline{C}}^s(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\theta_0}, \quad (3.238)$$

sendo θ_0 qualquer número real. Assim como ocorre com a simetria global semelhante a essa dos campos fermiônicos, há um operador carga conservado associado à esta invariância. Por se tratar de uma teoria com derivadas de segunda ordem, o modo mais simples de se encontrar tal operador é encontrando primeiramente seu correspondente clássico. Encontrar essa função clássica é nosso próximo objetivo.

A carga fantasma clássica

A fim de encontrarmos a carga fantasma, consideremos a seguinte densidade de Lagrangeana:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_g &= -i\kappa\partial^\mu\bar{C}\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu}{m_P^2}\right)\partial_\nu C \\
&= -i\kappa\partial^\mu\bar{C}\partial_\mu C - \frac{i\kappa}{m_P^2}\square\bar{C}\square C,
\end{aligned} \tag{3.239}$$

sendo C e \bar{C} campos Grassmannianos escalares de Lorentz, que chamaremos de *campos fantasmas clássicos*. Nesta subseção, a soma implícita é entendida como sendo com a métrica de Minskowski novamente.

Essa densidade de Lagrangeana possui uma invariância $U(1)$ global:

$$C \rightarrow C' = e^{i\theta_0}C; \tag{3.240}$$

$$\bar{C} \rightarrow \bar{C}' = \bar{C}e^{-i\theta_0} \tag{3.241}$$

para todo número real θ_0 . Agora, consideremos uma variação com um parâmetro infinitesimal $\delta\theta_0$:

$$C \rightarrow C' = C + i\delta\theta_0 C; \tag{3.242}$$

$$\bar{C} \rightarrow \bar{C}' = \bar{C} - i\bar{C}\delta\theta_0. \tag{3.243}$$

Sob essa transformação, a ação associada a (3.239),

$$S_g \equiv \int d^4x \mathcal{L}_g, \tag{3.244}$$

se escreve em primeira ordem no parâmetro como

$$S_g \rightarrow S_g + \delta S_g, \tag{3.245}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\delta S_g &= -\kappa\delta\theta_0 \int d^4x \partial^\mu \left\{ \partial_\mu\bar{C}C - \bar{C}\partial_\mu C - \frac{1}{m_P^2} [\partial_\mu(\square\bar{C}C) + \right. \\
&\quad \left. -\partial_\mu(\bar{C}\square C) + 2\partial_\mu\bar{C}\square C - 2\square\bar{C}\partial_\mu C] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.246}$$

Da imposição de que a ação seja invariante sob essa transformação infinitesimal, encontramos a seguinte equação de continuidade:

$$\partial^\mu g_\mu = 0, \tag{3.247}$$

sendo

$$g_\mu \equiv \kappa \left[\partial_\mu \bar{C} C - \bar{C} \partial_\mu C - \frac{1}{m_P^2} (\square \partial_\mu \bar{C} C - \square \bar{C} \partial_\mu C + \partial_\mu \bar{C} \square C - \bar{C} \square \partial_\mu C) \right]. \quad (3.248)$$

Assim como no caso da carga fermiônica, a integral espacial em todo o volume da componente temporal desse quadrivetor é uma quantidade conservada:

$$\int d^3x g_0 = \kappa \int d^3x \left[\partial_0 \bar{C} C - \bar{C} \partial_0 C - \frac{1}{m_P^2} (\square \partial_0 \bar{C} C - \square \bar{C} \partial_0 C + \partial_0 \bar{C} \square C - \bar{C} \square \partial_0 C) \right]. \quad (3.249)$$

Essa é a carga fantasma clássica. Embora ela seja uma constante do movimento, essa não é a forma mais apropriada a partir da qual se escreveria sua versão quântica fazendo-se uso do princípio de correspondência. A forma ideal de se escrever qualquer quantidade clássica que se queira quantizar é escrevendo-a não em termos de seus campos e suas derivadas temporais, mas em termos dos campos e de seus momentos canonicamente conjugados. A densidade de Lagrangeana (3.239) envolve derivadas de segunda ordem dos campos fantasmas. Portanto, sua estrutura canônica é mais complicada que a de uma teoria descrita por uma densidade de Lagrangeana que envolve apenas derivadas de primeira ordem dos campos. De acordo com o formalismo apresentado no apêndice B, o tensor de densidade de energia e momento de uma teoria de escalares com derivadas de segunda ordem é

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_g^{\mu\nu} &= \sum_{k=0}^1 \left[\bar{\pi}^{(k)\mu} \partial^\nu (\hat{\partial}^{(k)} C) + \pi^{(k)\mu} \partial^\nu (\hat{\partial}^{(k)} \bar{C}) \right] - \partial_\rho f^{\mu\rho\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_g \\ &= \bar{\pi}^{(0)\mu} \partial^\nu (\hat{\partial}^{(0)} C) + \pi^{(0)\mu} \partial^\nu (\hat{\partial}^{(0)} \bar{C}) + \\ &\quad + \bar{\pi}^{(1)\mu} \partial^\nu (\hat{\partial}^{(1)} C) + \pi^{(1)\mu} \partial^\nu (\hat{\partial}^{(1)} \bar{C}) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_g. \end{aligned} \quad (3.250)$$

Nesta expressão, utilizamos o fato de que $f^{\mu\rho\nu} = 0$ para campos escalares de Lorentz e também

$$\bar{\pi}^{(0)\mu} \equiv \bar{\Pi}^\mu - \underline{\partial}_\nu \bar{\Pi}^{\mu\nu}; \quad (3.251)$$

$$\pi^{(0)\mu} \equiv \Pi^\mu - \underline{\partial}_\nu \Pi^{\mu\nu}; \quad (3.252)$$

$$\bar{\pi}^{(1)\mu} \equiv n_\nu \bar{\Pi}^{\mu\nu}; \quad (3.253)$$

$$\pi^{(1)\mu} \equiv n_\nu \Pi^{\mu\nu}; \quad (3.254)$$

$$\widehat{\partial}^{(k)} \equiv \begin{cases} 1, & k = 0; \\ \widehat{\partial}, & k = 1. \end{cases} \quad (3.255)$$

com

$$\bar{\Pi}^\mu \equiv \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu C)} - \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu C)} + \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu C)} \right] \right\}; \quad (3.256)$$

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu \bar{C})} - \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \bar{C})} + \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \bar{C})} \right] \right\}; \quad (3.257)$$

$$\bar{\Pi}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu C)} + \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu C)} \right]; \quad (3.258)$$

$$\Pi^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \bar{C})} + \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \bar{C})} \right]; \quad (3.259)$$

$$\widehat{\partial} \equiv n^\mu \partial_\mu; \quad (3.260)$$

$$\underline{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu - n_\mu \widehat{\partial}. \quad (3.261)$$

Definamos, agora:

$$\bar{L}^\mu \equiv \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu C)}; \quad (3.262)$$

$$\bar{L}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu C)} + \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu C)} \right]; \quad (3.263)$$

$$L^\mu \equiv \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu \bar{C})}; \quad (3.264)$$

$$L^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \bar{C})} + \frac{\partial_{\hookrightarrow} \mathcal{L}_g}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \bar{C})} \right]. \quad (3.265)$$

Com isso, podemos escrever:

$$\bar{\pi}^{(0)\mu} = \bar{L}^\mu - 2\partial_\nu \bar{L}^{\mu\nu} + n_\nu n^\rho \partial_\rho \bar{L}^{\mu\nu}; \quad (3.266)$$

$$\pi^{(0)\mu} = L^\mu - 2\partial_\nu L^{\mu\nu} + n_\nu n^\rho \partial_\rho L^{\mu\nu}; \quad (3.267)$$

$$\bar{\pi}^{(1)\mu} = n_\nu \bar{L}^{\mu\nu}; \quad (3.268)$$

$$\pi^{(1)\mu} = n_\nu L^{\mu\nu}. \quad (3.269)$$

Podemos, também, escrever o tensor de energia e momento (3.250) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_g^{\mu\nu} &= \bar{\pi}^{(0)\mu} \partial^\nu \left(\hat{\partial}^{(0)} C \right) + \pi^{(0)\mu} \partial^\nu \left(\hat{\partial}^{(0)} \bar{C} \right) + \\ &\quad + \bar{\pi}^{(1)\mu} \partial^\nu \left(\hat{\partial}^{(1)} C \right) + \pi^{(1)\mu} \partial^\nu \left(\hat{\partial}^{(1)} \bar{C} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_g \\ &= \left(\bar{L}^\mu - 2\partial_\rho \bar{L}^{\mu\rho} \right) \partial^\nu C + \partial^\nu \bar{C} \left(L^\mu - 2\partial_\rho L^{\mu\rho} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_g + \\ &\quad + \partial_\rho \left[n_\sigma n^\rho \left(\bar{L}^{\mu\sigma} \partial^\nu C + \partial^\nu \bar{C} L^{\mu\sigma} \right) \right] \\ &\simeq \left(\bar{L}^\mu - 2\partial_\rho \bar{L}^{\mu\rho} \right) \partial^\nu C + \partial^\nu \bar{C} \left(L^\mu - 2\partial_\rho L^{\mu\rho} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_g. \end{aligned} \quad (3.270)$$

Nesta expressão, utilizamos a notação

$$A \simeq B \quad (3.271)$$

para indicar que

$$B = A + \partial_\mu W^\mu \quad (3.272)$$

para algum quadrivetor W .

Prosseguindo dessa forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_g^{\mu\nu} &\simeq \left(\bar{L}^\mu - \partial_\rho \bar{L}^{\mu\rho} \right) \partial^\nu C + \partial^\nu \bar{C} \left(L^\mu - \partial_\rho L^{\mu\rho} \right) + \\ &\quad + \partial_\rho \partial^\nu \bar{C} L^{\mu\rho} + \bar{L}^{\mu\rho} \partial_\rho \partial^\nu C - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_g. \end{aligned} \quad (3.273)$$

A componente zero-zero desse tensor é a densidade de energia, que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{T}_g^{00} &\simeq \left(\bar{L}^0 - 2\partial_k \bar{L}^{0k} - \partial_0 \bar{L}^{00} \right) \dot{C} + \dot{\bar{C}} \left(L^0 - 2\partial_k L^{0k} - \partial_0 L^{00} \right) + \\ &\quad + \ddot{\bar{C}} L^{00} + \bar{L}^{00} \ddot{C} - \mathcal{L}_g + \partial_k \left(\dot{\bar{C}} L^{0k} + \bar{L}^{0k} \dot{C} \right). \end{aligned} \quad (3.274)$$

A Hamiltoniana, por sua vez, é a integral da quantidade acima:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x \mathcal{E} \\
&\asymp \int d^3x \left[\left(\bar{L}^0 - 2\partial_k \bar{L}^{0k} - \partial_0 \bar{L}^{00} \right) \dot{C} + \dot{\bar{C}} \left(L^0 - 2\partial_k L^{0k} - \partial_0 L^{00} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \ddot{\bar{C}} L^{00} + \bar{L}^{00} \ddot{C} - \mathcal{L}_g + \partial_k \left(\dot{\bar{C}} L^{0k} + \bar{L}^{0k} \dot{C} \right) \right] \\
&= \int d^3x \left[\left(\bar{L}^0 - 2\partial_k \bar{L}^{0k} - \partial_0 \bar{L}^{00} \right) \dot{C} + \dot{\bar{C}} \left(L^0 - 2\partial_k L^{0k} - \partial_0 L^{00} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \ddot{\bar{C}} L^{00} + \bar{L}^{00} \ddot{C} - \mathcal{L}_g \right] + \int d^2s_k \left(\dot{\bar{C}} L^{0k} + \bar{L}^{0k} \dot{C} \right), \tag{3.275}
\end{aligned}$$

sendo a última integral na superfície da fronteira da região que engloba todo o espaço. Essa integral é nula por hipótese. Assim, podemos escrever a densidade de energia como

$$\mathcal{E} = \left(\bar{L}^0 - 2\partial_k \bar{L}^{0k} - \partial_0 \bar{L}^{00} \right) \dot{C} + \dot{\bar{C}} \left(L^0 - 2\partial_k L^{0k} - \partial_0 L^{00} \right) + \bar{L}^{00} \ddot{C} + \ddot{\bar{C}} L^{00} - \mathcal{L}_g. \tag{3.276}$$

Essa expressão nos leva às seguintes identificações:

$$\bar{\pi} \equiv \bar{L}^0 - 2\partial_k \bar{L}^{0k} - \partial_0 \bar{L}^{00}; \tag{3.277}$$

$$\pi \equiv L^0 - 2\partial_k L^{0k} - \partial_0 L^{00}; \tag{3.278}$$

$$\bar{P} \equiv \bar{L}^{00}; \tag{3.279}$$

$$P \equiv L^{00}, \tag{3.280}$$

sendo cada um desses momentos canônicos conjugado respectivamente a cada um dos campos C , \bar{C} , $D \equiv \dot{C}$ e $\bar{D} \equiv \dot{\bar{C}}$. Com o auxílio da densidade de Lagrangeana (3.239) e das definições (3.262-3.265), calculamos cada um desses momentos canônicos:

$$\bar{\pi} = -i\kappa \left(\frac{\square}{m_P^2} - 1 \right) \partial_0 \bar{C}; \tag{3.281}$$

$$\pi = i\kappa \left(\frac{\square}{m_P^2} - 1 \right) \partial_0 C; \tag{3.282}$$

$$\bar{P} = i\kappa \frac{\square}{m_P^2} \bar{C}; \tag{3.283}$$

$$P = -i\kappa \frac{\square}{m_P^2} C. \tag{3.284}$$

Em termos dos campos e momentos conjugados, a carga fantasma clássica conservada (3.249) é reescrita numa forma mais simples:

$$\int d^3x g_0 = -i \int d^3x (\bar{C}\pi + \bar{\pi}C + \bar{D}P + \bar{P}D). \quad (3.285)$$

Essa quantidade está, agora, escrita numa forma apropriada a partir da qual sua versão quântica pode ser facilmente encontrada.

O potencial químico fantasma

A partir da carga fantasma clássica (3.285), escrevemos sua versão quântica:

$$\hat{Q} \equiv -\frac{i}{2} \int d^3x \left([\hat{C}, \hat{\pi}] + [\hat{\pi}, \hat{C}] + [\hat{D}, \hat{P}] + [\hat{P}, \hat{D}] \right), \quad (3.286)$$

sendo que os operadores campos e momentos fantasmas satisfazem os seguintes anticomutadores fundamentais:⁷

$$\{\hat{C}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{1}; \quad (3.287)$$

$$\{\hat{\bar{C}}(\mathbf{x}), \hat{\bar{\pi}}(\mathbf{y})\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{1}; \quad (3.288)$$

$$\{\hat{C}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})\} = \hat{0}; \quad (3.289)$$

$$\{\hat{\bar{C}}(\mathbf{x}), \hat{\bar{\pi}}(\mathbf{y})\} = \hat{0}; \quad (3.290)$$

$$\{\hat{C}(\mathbf{x}), \hat{C}(\mathbf{y})\} = \hat{0}; \quad (3.291)$$

$$\{\hat{\bar{C}}(\mathbf{x}), \hat{\bar{C}}(\mathbf{y})\} = \hat{0}; \quad (3.292)$$

$$\{\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})\} = \hat{0}; \quad (3.293)$$

$$\{\hat{\bar{\pi}}(\mathbf{x}), \hat{\bar{\pi}}(\mathbf{y})\} = \hat{0}. \quad (3.294)$$

Uma vez que existe um novo operador carga conservado no sistema associado a uma simetria interna, contínua e global, devemos acrescentá-lo à matriz densidade do problema. Assim, em vez de (3.157), a matriz densidade que descreve o *ensemble* da eletrodinâmica generalizada em equilíbrio termodinâmico é

⁷Assumimos que esses operadores não dependem do tempo pois estamos interessados na situação de equilíbrio termodinâmico.

$$\widehat{\rho}_{gs}(\beta) \equiv \exp \left[-\beta \left(\widehat{\mathbb{H}}_T - \mu_e \widehat{N} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right]. \quad (3.295)$$

Nesta expressão, $\widehat{\mathbb{H}}_T = \widehat{H}_T + \widehat{H}_g + \widehat{H}_{gs}$, sendo \widehat{H}_T Hamiltoniano total que aparece na matriz densidade (3.157), \widehat{H}_g o Hamiltoniano dos campos fantasmas cuja forma explícita não é relevante para os nossos propósitos e \widehat{H}_{gs} o Hamiltoniano correspondente às fontes fantasmagóricas. Essa expressão também depende do *potencial químico fantasma* μ_g , ou seja, o potencial químico associado ao operador carga fantasma.

Visto que os campos fantasmas comutam com os demais campos do problema, essa matriz densidade pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\widehat{\rho}_{gs}(\beta) = \exp \left[-\beta \left(\widehat{H}_g + \widehat{H}_{gs} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \widehat{\rho}_s(\beta). \quad (3.296)$$

Definimos, também, a dependência de um operador arbitrário \widehat{F} com a temperatura através dessa nova matriz densidade como:

$$\widehat{F}^{gs}(\tau) \equiv \widehat{\rho}_{gs}^{-1}(\tau) \widehat{F} \widehat{\rho}_{gs}(\tau). \quad (3.297)$$

Contudo, devido à forma (3.296), notamos que para qualquer campo \widehat{w}_j que comute com os campos fantasmas, vale

$$\begin{aligned} \widehat{w}_j^{gs}(\tau) &= \widehat{\rho}_{gs}^{-1}(\tau) \widehat{w}_j \widehat{\rho}_{gs}(\tau) \\ &= \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \exp \left[\tau \left(\widehat{H}_g + \widehat{H}_{gs} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \widehat{w}_j \times \\ &\quad \times \exp \left[-\tau \left(\widehat{H}_g + \widehat{H}_{gs} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \widehat{\rho}_s(\tau) \\ &= \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{w}_j \exp \left[\tau \left(\widehat{H}_g + \widehat{H}_{gs} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[-\tau \left(\widehat{H}_g + \widehat{H}_{gs} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \widehat{\rho}_s(\tau) \\ &= \widehat{\rho}_s^{-1}(\tau) \widehat{w}_j \widehat{\rho}_s(\tau) = \widehat{w}_j^s(\tau). \end{aligned} \quad (3.298)$$

Uma vez que o campo de Podolsky e os campos fermiônicos comutam com os campos fantasmas, vemos que a dependência desses campos com a temperatura obtida através de (2.80) com a matriz densidade (3.157) coincide com a dependência via definição (3.297). Esta observação, na verdade, serve de justificativa da razão pela qual os resultados obtidos anteriormente para o campo de *gauge* e para os campos fermiônicos permanecem válidos, mesmo que tenhamos ignorado, num primeiro momento, a presença de outros campos, a saber, os fantasmas, no problema.

Para os campos fantasmas, no entanto, a situação é mais complicada. Primeiramente notamos que, assim como no caso de quaisquer outros campos, o operador carga fantasma deixa de ser conservado na presença das fontes externas. Uma consequência imediata desse fato é que, *em princípio*, temos $\widehat{\rho}_{gs}(\beta) \neq e^{\beta\mu_g\widehat{Q}} \exp\left[-\beta\left(\widehat{\mathbb{H}}_T - \mu_e\widehat{N}\right)\right]$. Contudo, notemos que existe ainda uma forma alternativa às expressões (3.295) ou (3.296) para essa matriz densidade:

$$\widehat{\rho}_{gs}(\beta) = \exp\left[-\beta\left(\widehat{H} + \widehat{H}_g - \mu_e\widehat{N} - \mu_g\widehat{Q}\right)\right] \widehat{S}_g(\beta). \quad (3.299)$$

Nesta expressão, $\widehat{H} = \widehat{H}_T - \widehat{H}_s$ e $\widehat{S}_g(\beta)$ é a generalização do operador $\widehat{S}(\beta)$ que inclui as fontes fantasmagóricas. Agora, notamos que

$$\exp\left[-\beta\left(\widehat{H} + \widehat{H}_g - \mu_e\widehat{N} - \mu_g\widehat{Q}\right)\right] = e^{\beta\mu_g\widehat{Q}} \widehat{\rho}_P(\beta), \quad (3.300)$$

com

$$\widehat{\rho}_P(\beta) \equiv \exp\left[-\beta\left(\widehat{H} + \widehat{H}_g - \mu_e\widehat{N}\right)\right], \quad (3.301)$$

pois a matriz densidade do primeiro membro de (3.300) não depende das fontes fantasmagóricas. Logo:

$$\widehat{\rho}_{gs}(\beta) = e^{\beta\mu_g\widehat{Q}} \widehat{\rho}_P(\beta) \widehat{S}_g(\beta). \quad (3.302)$$

A fim de simplificarmos ainda mais a notação, definimos

$$\widehat{\rho}_{Ps}(\beta) \equiv \widehat{\rho}_P(\beta) \widehat{S}_g(\beta). \quad (3.303)$$

Logo,

$$\widehat{\rho}_{gs}(\beta) = e^{\beta\mu_g\widehat{Q}} \widehat{\rho}_{Ps}(\beta). \quad (3.304)$$

Antes de prosseguirmos, notamos que, para os campos que comutam com os fantasmas, uma transformação de similaridade com (3.303) fornece:

$$\widehat{\rho}_{Ps}(\tau)^{-1} \widehat{w}_j \widehat{\rho}_{Ps}(\tau) = \widehat{w}_j^s(\tau). \quad (3.305)$$

Utilizando a definição (3.297) e a expressão (3.304), vemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{C}^{gs}(\mathbf{x}, \tau) &= \widehat{\rho}_{gs}^{-1}(\tau) \widehat{C}(\mathbf{x}) \widehat{\rho}_{gs}(\tau) \\
&= \widehat{\rho}_{P_s}^{-1}(\tau) e^{-\tau\mu_g \widehat{Q}} \widehat{C}(\mathbf{x}) e^{\tau\mu_g \widehat{Q}} \widehat{\rho}_{P_s}(\tau); \quad (3.306)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{C}}^{gs}(\mathbf{x}, \tau) &= \widehat{\rho}_{gs}^{-1}(\tau) \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}) \widehat{\rho}_{gs}(\tau) \\
&= \widehat{\rho}_{P_s}^{-1}(\tau) e^{-\tau\mu_g \widehat{Q}} \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}) e^{\tau\mu_g \widehat{Q}} \widehat{\rho}_{P_s}(\tau). \quad (3.307)
\end{aligned}$$

A fim de calcularmos essas expressões, utilizaremos a fórmula de Baker-Hausdorff [31]:

$$\begin{aligned}
e^{-\tau\mu_g \widehat{Q}} \widehat{C}(\mathbf{x}) e^{\tau\mu_g \widehat{Q}} &= \widehat{C}(\mathbf{x}) - \tau\mu_g [\widehat{Q}, \widehat{C}(\mathbf{x})] + \\
&\quad + \frac{(\tau\mu_g)^2}{2} [\widehat{Q}, [\widehat{Q}, \widehat{C}(\mathbf{x})]] + \dots; \quad (3.308)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-\tau\mu_g \widehat{Q}} \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}) e^{\tau\mu_g \widehat{Q}} &= \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}) - \tau\mu_g [\widehat{Q}, \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x})] + \\
&\quad + \frac{(\tau\mu_g)^2}{2} [\widehat{Q}, [\widehat{Q}, \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x})]] + \dots \quad (3.309)
\end{aligned}$$

O operador carga fantasma (3.286) depende de somas de produtos de dois operadores. Notemos, então, que, para quaisquer operadores \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{D} , vale

$$[\widehat{A}\widehat{B}, \widehat{D}] = \widehat{A} \{ \widehat{B}, \widehat{D} \} - \{ \widehat{A}, \widehat{D} \} \widehat{B}. \quad (3.310)$$

A partir dessa identidade, do operador carga fantasma (3.286) e dos anticomutadores fundamentais (3.287-3.294), calculamos:

$$[\widehat{Q}, \widehat{C}(\mathbf{x})] = -\widehat{C}(\mathbf{x}); \quad (3.311)$$

$$[\widehat{Q}, \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x})] = \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}). \quad (3.312)$$

Uma vez que o comutador do operador carga fantasma com um campo fantasma é proporcional ao próprio campo fantasma, as séries (3.308) e (3.309) se simplificam:

$$\begin{aligned}
e^{-\tau\mu_g\widehat{Q}}\widehat{C}(\mathbf{x})e^{\tau\mu_g\widehat{Q}} &= \left[1 + \tau\mu_g + \frac{(\tau\mu_g)^2}{2} + \frac{(\tau\mu_g)^3}{3!} + \dots \right] \widehat{C}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau\mu_g)^n}{n!} \widehat{C}(\mathbf{x}) = e^{\tau\mu_g} \widehat{C}(\mathbf{x}); \tag{3.313}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-\tau\mu_g\widehat{Q}}\widehat{\overline{C}}(\mathbf{x})e^{\tau\mu_g\widehat{Q}} &= \left[1 + (-\tau\mu_g) + \frac{(-\tau\mu_g)^2}{2} + \frac{(-\tau\mu_g)^3}{3!} + \dots \right] \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau\mu_g)^n}{n!} \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}) = e^{-\tau\mu_g} \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}). \tag{3.314}
\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados nas expressões (3.306) e (3.307), encontramos:

$$\widehat{C}^{gs}(\mathbf{x}, \tau) = e^{\tau\mu_g} \widehat{\rho}_{P_s}^{-1}(\tau) \widehat{C}(\mathbf{x}) \widehat{\rho}_{P_s}(\tau); \tag{3.315}$$

$$\widehat{\overline{C}}^{gs}(\mathbf{x}, \tau) = e^{-\tau\mu_g} \widehat{\rho}_{P_s}^{-1}(\tau) \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}) \widehat{\rho}_{P_s}(\tau). \tag{3.316}$$

Os campos fantasmas comutam com todos os termos do operador $\widehat{\rho}_{P_s}(\tau)$, salvo os que dependem do Hamiltoniano dos campos fantasmas e do Hamiltoniano das fontes fantasmagóricas. Isso é equivalente ao que ocorre com os campos que comutam com os fantasmas, sendo que aqueles campos comutam com todos os campos, à exceção dos respectivos Hamiltonianos totais. Naqueles casos, vale o resultado (3.305). Por essas razões, vemos que expressões semelhantes devem valer para os campos fantasmas, a saber,

$$\widehat{\rho}_{P_s}^{-1}(\tau) \widehat{C}(\mathbf{x}) \widehat{\rho}_{P_s}(\tau) = \widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau); \tag{3.317}$$

$$\widehat{\rho}_{P_s}^{-1}(\tau) \widehat{\overline{C}}(\mathbf{x}) \widehat{\rho}_{P_s}(\tau) = \widehat{\overline{C}}^s(\mathbf{x}, \tau). \tag{3.318}$$

Por fim, chegamos aos resultados [49]:

$$\widehat{C}^{gs}(\mathbf{x}, \tau) = e^{\tau\mu_g} \widehat{C}^s(\mathbf{x}, \tau); \tag{3.319}$$

$$\widehat{\overline{C}}^{gs}(\mathbf{x}, \tau) = e^{-\tau\mu_g} \widehat{\overline{C}}^s(\mathbf{x}, \tau). \tag{3.320}$$

Vemos, dessa forma, que, diferentemente do que ocorre com campos que comutam com os fantasmas, transformações de similaridade dos campos fantasmas com a matriz densidade do sistema geram uma dependência explícita

desses campos com o potencial químico fantasma. Esse potencial químico, por sua vez, precisou ser levado em conta no problema pois os campos fantasmas, que foram introduzidos na densidade de Lagrangeana do sistema para se levar em conta o vínculo (3.225) que surgiu da presença da simetria de *gauge* residual do problema, implicaram na presença de uma nova simetria na descrição do sistema físico, dada pela invariância da densidade de Lagrangeana (3.230) frente às transformações globais (3.237, 3.238).

3.6 Médias no *ensemble* de ordenamento de campos

As equações (3.186), (3.187), (3.217), (3.235) e (3.236) formam o conjunto das equações de campo da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico. Nessas equações está contida toda a informação do sistema físico. Caso seja possível resolver esse sistema de equações operatoriais não lineares, poderíamos calcular qualquer quantidade física que desejássemos. No entanto, conforme vimos no exemplo do campo escalar na capítulo anterior, é conveniente encontrarmos o funcional gerador termodinâmico da teoria, pois a partir dele também se pode calcular todas as quantidades físicas de interesse numa situação de equilíbrio. A fim de encontrarmos tal gerador, multiplicamos cada uma das equações de campo pela matriz densidade (3.295) e utilizamos as expressões (2.86) e (2.97). Procedendo dessa forma, obtemos as seguintes equações equivalentes às equações de campo (3.186), (3.187), (3.217), (3.235) e (3.236):

$$\left[(\gamma_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{(\mu_e)} - m_f \delta_{ab} \right] \frac{\delta \widehat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta \bar{\eta}_b(\mathbf{x}, \tau)} = -iq_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 \widehat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau) \delta \bar{\eta}_b(\mathbf{x}, \tau)} + \eta_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\rho}_{gs}(\beta); \quad (3.321)$$

$$\left[(\gamma_\mu^E)_{ba} \partial_\mu^{(-\mu_e)} + m_f \delta_{ba} \right] \frac{\delta \widehat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta \eta_b(\mathbf{x}, \tau)} = iq_e (\gamma_\mu^E)_{ba} \frac{\delta^2 \widehat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau) \delta \eta_b(\mathbf{x}, \tau)} + \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\rho}_{gs}(\beta); \quad (3.322)$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} \frac{\delta \widehat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta J_\nu(\mathbf{x}, \tau)} = iq_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 \widehat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta \eta_a(\mathbf{x}, \tau) \delta \bar{\eta}_b(\mathbf{x}, \tau)} + J_\mu(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\rho}_{gs}(\beta); \quad (3.323)$$

$$i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \frac{\delta \widehat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta \bar{d}(\mathbf{x}, \tau)} = d(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\rho}_{gs}(\beta); \quad (3.324)$$

$$-i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \frac{\delta \widehat{\rho}_{gs}(\beta)}{\delta d(\mathbf{x}, \tau)} = \bar{d}(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\rho}_{gs}(\beta). \quad (3.325)$$

De acordo com a equação (2.98), ao se tomar o traço da matriz densidade sobre os estados físicos do sistema, obtemos o funcional gerador termodinâmico. Dessa forma, tomando-se o traço de cada uma dessas expressões, obtemos o conjunto de equações funcionais satisfeitas pelo funcional gerador termodinâmico $Z_{GF} = Z_{GF} [J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}]$ da teoria de Podolsky:

$$\left[(\gamma_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{(\mu_e)} - m_f \delta_{ab} \right] \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \bar{\eta}_b(\mathbf{x}, \tau)} = -iq_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau) \delta \bar{\eta}_b(\mathbf{x}, \tau)} + \eta_a(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF}; \quad (3.326)$$

$$\left[(\gamma_\mu^E)_{ba} \partial_\mu^{(-\mu_e)} + m_f \delta_{ba} \right] \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \eta_b(\mathbf{x}, \tau)} = iq_e (\gamma_\mu^E)_{ba} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau) \delta \eta_b(\mathbf{x}, \tau)} + \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF}; \quad (3.327)$$

$$P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} \frac{\delta Z_{GF}}{\delta J_\nu(\mathbf{x}, \tau)} = iq_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \frac{\delta^2 Z_{GF}}{\delta \eta_a(\mathbf{x}, \tau) \delta \bar{\eta}_b(\mathbf{x}, \tau)} + J_\mu(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF}; \quad (3.328)$$

$$i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \bar{d}(\mathbf{x}, \tau)} = d(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF}; \quad (3.329)$$

$$-i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \frac{\delta Z_{GF}}{\delta d(\mathbf{x}, \tau)} = \bar{d}(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF}. \quad (3.330)$$

A vantagem desse sistema de equações sobre as equações de campo é que a solução do conjunto de equações (3.326-3.330) é um funcional, ao invés de um certo número de operadores campos.

Conforme afirmamos anteriormente, as equações diferenciais funcionais que envolvem derivadas funcionais com relação às fontes fantasmagóricas não envolvem derivadas funcionais com relação às outras fontes.

Na subseção seguinte veremos que essas equações funcionais podem ser convertidas em equações diferenciais envolvendo certos operadores que desempenharão um papel crucial nesta tese.

3.6.1 Médias térmicas de certos operadores

Embora já sejamos capazes de resolver o sistema de equações funcionais (3.326-3.330), nesta subseção buscaremos um conjunto de equações que relacionam diversas médias térmicas de certos operadores especiais. Também mostraremos algumas propriedades de tais operadores. Notemos que derivando funcionalmente cada equação do sistema de equações *funcionais* (3.326-3.330) com relação a uma fonte apropriada, encontramos um sistema de equações *diferenciais* relacionando diversas médias térmicas:

$$\begin{aligned} \delta_{ac} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) &= \left[(\gamma_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{(\mu_e)} - m_f \delta_{ab} \right] \left\langle T \left[\widehat{\psi}_c(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle + \\ &\quad - i q_e (\gamma_\nu^E)_{ab} \left\langle T \left[\widehat{\psi}_c(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{A}_\nu(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle; \end{aligned} \quad (3.331)$$

$$\begin{aligned} \delta_{ac} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) &= \left[(\gamma_\mu^E)_{ba} \partial_\mu^{(-\mu_e)} + m_f \delta_{ba} \right] \left\langle T \left[\widehat{\psi}_c(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle + \\ &\quad + i q_e (\gamma_\nu^E)_{ba} \left\langle T \left[\widehat{\psi}_c(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{A}_\nu(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle; \end{aligned} \quad (3.332)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\xi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) &= P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(x) \left\langle T \left[\widehat{A}_\xi(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{A}_\nu(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle + \\ &\quad + i q_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \left\langle T \left[\widehat{A}_\xi(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\psi}_b(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle; \end{aligned} \quad (3.333)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) = i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta_x \left\langle T \left[\widehat{C}(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{C}(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle; \quad (3.334)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) = -i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta_x \left\langle T \left[\widehat{C}(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{C}(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle. \quad (3.335)$$

As médias no *ensemble* que aparecem nos segundos membros dessas equações diferenciais acopladas são todas da forma $\left\langle T \left[\widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle$

com $a \in \mathbb{N}$ tal que $a = 1$ ou $a = 2$, sendo $\widehat{\phi}_r$ qualquer um dos campos e $\widehat{\Phi}_{rr'}^{(a)}$ um campo quando $a = 1$ e um produto de dois campos quando $a = 2$. Sendo assim, escrevemos

$$\widehat{\Phi}_{rr'}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) = \delta_{a1} \widehat{\phi}_r(\mathbf{x}, \tau_x) + \delta_{a2} \widehat{\phi}_r(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\phi}_{r'}(\mathbf{x}, \tau_x). \quad (3.336)$$

Utilizando a definição de ordenamento (2.60), temos:

$$\begin{aligned} \left\langle T \left[\widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle &= \theta(\tau_y - \tau_x) \left\langle \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \right\rangle + \\ &\pm \theta(\tau_x - \tau_y) \left\langle \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.337)$$

Concentrar-nos-emos na primeira média térmica do segundo membro dessa expressão. Devido à definição de média no *ensemble* (2.35), temos para esse termo:

$$\left\langle \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \right\rangle = \frac{\text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \right]}{\text{Tr} [\widehat{\rho}_g(\beta)]}, \quad (3.338)$$

sendo $\widehat{\rho}_g(\beta)$ a matriz densidade (3.295) com as fontes externas nulas, ou seja,

$$\widehat{\rho}_g(\beta) \equiv \exp \left[-\beta \left(\widehat{\mathbb{H}} - \mu_e \widehat{N} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right], \quad (3.339)$$

com $\widehat{\mathbb{H}} = \widehat{H}_P + \widehat{H}_C + \widehat{H}_g$ sendo o Hamiltoniano sem fontes.

Para os nossos propósitos é suficiente calcularmos o numerador do segundo membro da equação acima. Esse numerador é o traço de um operador. Uma propriedade do traço é sua invariância por mudança de base. Isto significa que podemos calculá-lo em qualquer base. Por conveniência, escolhamos a base simultânea da energia e das demais quantidades conservadas, a saber, o momento linear, a carga de Noether fermiônica e a carga fantasma. Tal base, denotada por

$$|E, \mathbf{P}, N, N_g\rangle = |\Upsilon\rangle \quad (3.340)$$

satisfaz as seguintes equações seculares:

$$\widehat{\mathbb{H}} |\Upsilon\rangle = E |\Upsilon\rangle; \quad (3.341)$$

$$\widehat{P}_k |\Upsilon\rangle = P_k |\Upsilon\rangle; \quad (3.342)$$

$$\widehat{N} |\Upsilon\rangle = N_e |\Upsilon\rangle; \quad (3.343)$$

$$\widehat{Q} |\Upsilon\rangle = N_g |\Upsilon\rangle, \quad (3.344)$$

Utilizando as equações de autovalores (3.341), (3.343) e (3.344) e a matriz densidade (3.339), vemos que o numerador do segundo membro de (3.338) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \right] &= \int d\Upsilon \langle \Upsilon | \exp \left[-\beta \left(\widehat{\mathbb{H}} - \mu_e \widehat{N} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \times \\ &\quad \times \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) | \Upsilon \rangle \\ &= \int d\Upsilon \exp \left[-\beta (E - \mu_e N_e - \mu_g N_g) \right] \times \\ &\quad \times \langle \Upsilon | \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) | \Upsilon \rangle. \end{aligned} \quad (3.345)$$

Em (3.345), denotamos a medida de integração múltipla por

$$d\Upsilon = c_\Upsilon dE dP_1 dP_2 dP_3 dN_e dN_g, \quad (3.346)$$

sendo c_Υ uma constante não nula apropriada.

A fim de calcularmos o valor esperado $\langle \Upsilon | \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) | \Upsilon \rangle$, recordamos a expressão (3.297) que, para fontes nulas, se torna

$$\widehat{F}(\tau) = \widehat{\rho}_g^{-1}(\tau) \widehat{F} \widehat{\rho}_g(\tau). \quad (3.347)$$

Dessa expressão, imediatamente notamos que $\widehat{F} = \widehat{F}(0)$.

Então, inserindo a resolução da unidade entre os operadores de campo, temos⁸

⁸A resolução da unidade é dada por $\mathbf{1} = \int d\Upsilon' |\Upsilon'\rangle \langle \Upsilon'|$. No que segue, os autovalores E' , P'_k , N'_e e N'_g são associados ao estado $|\Upsilon'\rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon | \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) | \Upsilon \rangle &= \int d\Upsilon' \langle \Upsilon | \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) | \Upsilon' \rangle \langle \Upsilon' | \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) | \Upsilon \rangle \\
&= \int \Upsilon' \langle \Upsilon | \widehat{\rho}_g^{-1}(\tau_y) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, 0) \widehat{\rho}_g(\tau_y) | \Upsilon' \rangle \times \\
&\quad \times \langle \Upsilon' | \widehat{\rho}_g^{-1}(\tau_x) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, 0) \widehat{\rho}_g(\tau_x) | \Upsilon \rangle \\
&= \int d\Upsilon' e^{-(\tau_x - \tau_y)[E - E' - \mu_e(N_e - N'_e) - \mu_g(N_g - N'_g)]} \times \\
&\quad \times \langle \Upsilon | \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, 0) | \Upsilon' \rangle \langle \Upsilon' | \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, 0) | \Upsilon \rangle.
\end{aligned} \tag{3.348}$$

O operador momento $\widehat{\mathbf{P}}$ é o gerador do grupo das translações espaciais. Por essa razão, podemos escrever [44]:

$$\widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, 0) = e^{-i\mathbf{y} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) e^{i\mathbf{y} \cdot \widehat{\mathbf{P}}}. \tag{3.349}$$

Devido a essa propriedade e à definição do operador $\widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}$, temos também

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}_{r'r'}^{(a)}(\mathbf{x}, 0) &= \delta_{a1} \widehat{\phi}_r(\mathbf{x}, 0) + \delta_{a2} \widehat{\phi}_r(\mathbf{x}, 0) \widehat{\phi}_{r'}(\mathbf{x}, 0) \\
&= \delta_{a1} e^{-i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) e^{i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} + \delta_{a2} e^{-i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) e^{i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} e^{-i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \widehat{\phi}_{r'}(\mathbf{0}, 0) e^{i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \\
&= e^{-i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \left[\delta_{a1} \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) + \delta_{a2} \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) \widehat{\phi}_{r'}(\mathbf{0}, 0) \right] e^{i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \\
&= e^{-i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \widehat{\Phi}_{r'r'}^{(a)}(\mathbf{0}, 0) e^{i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}}.
\end{aligned} \tag{3.350}$$

Substituindo esses resultados em (3.348), encontramos:

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon | \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) | \Upsilon \rangle &= \int d\Upsilon' e^{-(\tau_x - \tau_y)[E - E' - \mu_e(N_e - N'_e) - \mu_g(N_g - N'_g)]} \times \\
&\quad \times e^{i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}')} \times \\
&\quad \times \langle \Upsilon | \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) | \Upsilon' \rangle \langle \Upsilon' | \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{0}, 0) | \Upsilon \rangle.
\end{aligned} \tag{3.351}$$

Um resultado semelhante pode ser obtido a partir da segunda média térmica de (3.337). Para ela, temos

$$\left\langle \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \right\rangle = \frac{\text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \right]}{\text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \right]}, \quad (3.352)$$

e

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \right] &= \int d\Upsilon \exp[-\beta(E - \mu_e N_e - \mu_g N_g)] \times \\ &\times \left\langle \Upsilon \left| \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \right| \Upsilon \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.353)$$

com

$$\begin{aligned} \left\langle \Upsilon \left| \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \right| \Upsilon \right\rangle &= \int d\Upsilon' e^{(\tau_x - \tau_y)[E - E' - \mu_e(N_e - N'_e) - \mu_g(N_g - N'_g)]} \times \\ &\times e^{-i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}')} \times \\ &\times \left\langle \Upsilon \left| \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{0}, 0) \right| \Upsilon' \right\rangle \left\langle \Upsilon' \left| \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) \right| \Upsilon \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.354)$$

Dessa forma, (3.337) se torna

$$\begin{aligned} \left\langle T \left[\widehat{\phi}_r(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle &= \int \frac{d\Upsilon d\Upsilon'}{\text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \right]} \exp[-\beta(E - \mu_e N_e - \mu_g N_g)] \times \\ &\times \left[\theta(\tau_y - \tau_x) e^{i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}')} \times \right. \\ &\times e^{-(\tau_x - \tau_y)[E - E' - \mu_e(N_e - N'_e) - \mu_g(N_g - N'_g)]} \times \\ &\times \left\langle \Upsilon \left| \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) \right| \Upsilon' \right\rangle \left\langle \Upsilon' \left| \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{0}, 0) \right| \Upsilon \right\rangle + \\ &\pm \theta(\tau_x - \tau_y) e^{-i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}')} \times \\ &\times e^{(\tau_x - \tau_y)[E - E' - \mu_e(N_e - N'_e) - \mu_g(N_g - N'_g)]} \times \\ &\times \left. \left\langle \Upsilon \left| \widehat{\Phi}_{r'r''}^{(a)}(\mathbf{0}, 0) \right| \Upsilon' \right\rangle \left\langle \Upsilon' \left| \widehat{\phi}_r(\mathbf{0}, 0) \right| \Upsilon \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.355)$$

Embora o segundo membro dessa equação tenha uma forma tão complicada que à primeira vista podemos pensar que nada, ou pouca coisa, se possa concluir a partir dele, notamos que ele não depende dos valores absolutos de

\mathbf{x} , \mathbf{y} , τ_x e τ_y , mas apenas das diferenças $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\tau_x - \tau_y$ [13]. Portanto, é conveniente definirmos as seguintes quantidades

$$\left\langle T \left[\widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle \equiv D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y); \quad (3.356)$$

$$\left\langle T \left[\widehat{\psi}_b(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle \equiv S_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y); \quad (3.357)$$

$$\left\langle T \left[\widehat{C}(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{C}(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle \equiv \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y). \quad (3.358)$$

Da definição de ordenamento, temos também

$$\left\langle T \left[\widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) \widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, \tau_y) \right] \right\rangle = D_{\nu\mu}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \tau_y - \tau_x); \quad (3.359)$$

$$\left\langle T \left[\widehat{\psi}_b(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle = -S_{ba}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \tau_y - \tau_x); \quad (3.360)$$

$$\left\langle T \left[\widehat{C}(\mathbf{y}, \tau_y) \widehat{C}(\mathbf{x}, \tau_x) \right] \right\rangle = -\mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \tau_y - \tau_x). \quad (3.361)$$

As médias no *ensemble* (3.356-3.358) são quantidades muito especiais e desempenharão papéis cruciais nas seções seguintes. Na próxima subseção, mostraremos que essas médias térmicas especiais satisfazem certas propriedades de periodicidade.

3.6.2 As periodicidades das médias térmicas especiais

Na subseção anterior mostramos que as médias no *ensemble* de um ordenamento de dois campos possui a propriedade de depender apenas das diferenças dos parâmetros coordenada espacial e temperatura. Nesta seção demonstraremos outras propriedades muito importantes dessas quantidades: suas periodicidades. Para tal fim tomemos a definição (3.356) com $\tau_x = \tau$, $0 < \tau < \beta$ e $\tau_y = 0$. Utilizando a definição de ordenamento (2.60) a propriedade de ciclicidade do traço e a definição (3.347) temos [50, 51]:⁹

⁹A ciclicidade do traço consiste em $\text{Tr}(\widehat{A}\widehat{B}) = \text{Tr}(\widehat{B}\widehat{A})$, válida para quaisquer operadores \widehat{A} e \widehat{B} .

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau) &= \left\langle T \left[\widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, 0) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right] \right\rangle = \left\langle \widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, 0) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right\rangle \\
&= \frac{\text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, 0) \right]}{Z(\beta)} \\
&= \frac{\text{Tr} \left[\widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, 0) \widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right]}{Z(\beta)} \\
&= \frac{\text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{\rho}_g^{-1}(\beta) \widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, 0) \widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right]}{Z(\beta)} \\
&= \frac{\text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, \beta) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right]}{Z(\beta, V, \mu_e)} \\
&= \left\langle \widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, \beta) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right\rangle = \left\langle T \left[\widehat{A}_\nu(\mathbf{y}, \beta) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right] \right\rangle \\
&= D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau - \beta). \tag{3.362}
\end{aligned}$$

Essa expressão mostra que a função $D_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau)$ é periódica na variável τ com período β . De uma forma muito semelhante, calculamos

$$\begin{aligned}
S_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau) &= \left\langle T \left[\widehat{\psi}_b(\mathbf{y}, 0) \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \right] \right\rangle = - \left\langle \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \widehat{\psi}_b(\mathbf{y}, 0) \right\rangle \\
&= - \left\langle \widehat{\psi}_b(\mathbf{y}, \beta) \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \right\rangle = -S_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau - \beta). \tag{3.363}
\end{aligned}$$

Esse resultado mostra que, ao contrário de $D_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau)$, $S_{ab}(\mathbf{x}, \tau)$ é uma função antiperiódica na variável τ com “período” β .

Contudo, ao se repetir esses passos para (3.358), encontramos:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau) = - \frac{\text{Tr} \left[\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{\rho}_g^{-1}(\beta) \widehat{C}(\mathbf{y}, 0) \widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{C}(\mathbf{x}, \tau) \right]}{Z(\beta)}. \tag{3.364}$$

Utilizando a equação (3.320) com fontes nulas, temos:

$$\widehat{\rho}_g^{-1}(\beta) \widehat{C}(\mathbf{y}, 0) \widehat{\rho}_g(\beta) = \widehat{C}^g(\mathbf{y}, \beta) = e^{-\beta\mu_g} \widehat{C}(\mathbf{y}, \beta). \tag{3.365}$$

Logo,

$$\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau) = - e^{-\beta\mu_g} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau - \beta). \tag{3.366}$$

Se ao invés de (3.358), tivéssemos partido de (3.361), obteríamos:

$$\mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, -\tau) = -e^{\beta\mu_g} \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \beta - \tau). \quad (3.367)$$

Agora, substituímos (3.358) e (3.361) em (3.334) e (3.335), encontramos:

$$i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta_x \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y); \quad (3.368)$$

$$i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta_x \mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \tau_y - \tau_x) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y). \quad (3.369)$$

Essas duas expressões mostram que ambas as funções $\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)$ e $\mathcal{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \tau_y - \tau_x)$ são funções de Green do operador $i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta$. Isso fornece uma interpretação para essas funções. Além disso, isso mostra que essas duas funções são iguais. Isso implica:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau - \beta) = e^{2\beta\mu_g} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau - \beta). \quad (3.370)$$

Além da solução trivial $\mu_g = 0$, vemos que o potencial químico fantasma deve satisfazer:

$$\mu_g = \frac{in\pi}{\beta}, \quad (3.371)$$

com $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que um potencial químico fantasma não nulo não é um número real, a condição acima nos mostra que esse potencial químico não é uma quantidade termodinâmica observável.

Substituindo (3.371) em (3.366), encontramos a seguinte equação

$$\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau) = -e^{-in\pi} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau - \beta). \quad (3.372)$$

Donde vemos que a periodicidade da função de Green \mathcal{G} é condicionada à escolha do valor do potencial químico: se n for par (ou o negativo de um número par), a função \mathcal{G} é antiperiódica; se, por outro lado, n for ímpar (ou o negativo de um ímpar), essa função é periódica. Essa escolha, contudo, é determinada pela própria estrutura do formalismo. A fim de determiná-la, necessitamos estudar a função de partição da teoria.

3.7 Representações de integração funcional

Na seção anterior encontramos o conjunto de equações funcionais que o funcional gerador termodinâmico satisfaz. Nesta seção, mostraremos que é possível encontrar uma representação de integração funcional para o funcional gerador que satisfaz o referido conjunto de equações funcionais. Além disso, encontraremos, também, uma representação de integração funcional para a função de partição da teoria.

3.7.1 O funcional gerador termodinâmico

A fim de encontrarmos uma representação de integração para o funcional gerador termodinâmico, supomos a seguinte forma geral para tal representação:

$$Z_{GF} [J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \times \\ \times \exp \left[\int_{\beta} d^4x (J_{\mu} A_{\mu} + \bar{\eta}_a \psi_a - \bar{\psi}_a \eta_a - \bar{C} d + \bar{d} C) \right]. \quad (3.373)$$

Nesta expressão $\mathcal{D}A \equiv \prod_{\sigma=0}^3 \mathcal{D}A_{\sigma}$ e $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \equiv \prod_{a=1}^4 \mathcal{D}\bar{\psi}_a \mathcal{D}\psi_a$. A é um campo não Grassmanniano, enquanto que os demais campos sobre os quais a integração é realizada são Grassmannianos. Chamaremos também, por questão de conveniência, o campo A de campo de *gauge*, ou campo eletromagnético ou de Podolsky, ψ e $\bar{\psi}$ de campos fermiônicos e C e \bar{C} de fantasmas. A meta de se encontrar o funcional gerador termodinâmico é alcançada uma vez conhecida a função $\tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]$ e, em seguida, resolvida a integral funcional múltipla (3.373).

Conforme veremos a seguir, a representação funcional geral (3.373) está mal definida.

Das equações (2.103), (3.356), (3.357), (3.358) e (3.373), devemos ter¹⁰

¹⁰Escreveremos temporariamente $\tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] = \tilde{Z}_{GF}$.

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C A_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) A_\nu(\mathbf{y}, \tau_y) \tilde{Z}_{GF} \times \\
&\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4z (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]
\end{aligned} \tag{3.374}$$

$$\begin{aligned}
S_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \psi_a(\mathbf{x}, \tau_x) \bar{\psi}_b(\mathbf{y}, \tau_y) \tilde{Z}_{GF} \times \\
&\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4z (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]
\end{aligned} \tag{3.375}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C C(\mathbf{x}, \tau_x) \bar{C}(\mathbf{y}, \tau_y) \tilde{Z}_{GF} \\
&\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4z (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]
\end{aligned} \tag{3.376}$$

O resultado (3.362) mostra que a integração funcional sobre o campo A deve ser realizada sobre todas as configurações de campo que satisfazem condições periódicas de contorno, isto é, $A_\mu(\mathbf{x}, 0) = A_\mu(\mathbf{x}, \beta)$. A equação (3.363), por sua vez, nos mostra que as integrações funcionais sobre os campos ψ e $\bar{\psi}$ devem ser feitas sobre todas as configurações antiperiódicas $\psi_a(\mathbf{x}, 0) = -\psi_a(\mathbf{x}, \beta)$ e $\bar{\psi}_a(\mathbf{x}, 0) = -\bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \beta)$. A expressão (3.372), por outro lado, nos diz que as integrações funcionais sobre os campos C e \bar{C} satisfazem *ou* condições periódicas *ou* condições antiperiódicas, dependendo do valor do potencial químico fantasma (3.371). Denotando integração sobre configurações periódicas pelo índice P , antiperiódicas por $A - P$ e a que depende do valor potencial químico fantasma por (μ_g) , a representação de integração funcional geral *correta* para o funcional gerador termodinâmico é, ao invés de (3.373),

$$\begin{aligned}
Z_{GF}[J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}] &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \tilde{Z}_{GF}[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \times \\
&\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\mu A_\mu + \bar{\eta}_a \psi_a - \bar{\psi}_a \eta_a - \bar{C}d + \bar{d}C) \right].
\end{aligned} \tag{3.377}$$

A fim de obtermos uma expressão completa para o funcional gerador termodinâmico, precisamos encontrar a função $\tilde{Z}_{GF}[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]$. A forma

mais direta de se fazer isso é substituir a expressão (3.377) no conjunto de equações funcional (3.326-3.330). Como a única função a ser determinada é \tilde{Z}_{GF} , esperamos que tal substituição nos forneça um conjunto de equações para essa função. Substituindo (3.377) no sistema de equações funcionais (3.326-3.330), encontramos

$$\begin{aligned} \eta_a(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \left\{ (\gamma_\mu^E)_{ab} D_\mu^{(\mu_e, q_e)} [A] + \right. \\ &\quad \left. - m_f \delta_{ab} \right\} \psi_b(\mathbf{x}, \tau) \tilde{Z}_{GF} \times \\ &\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4y (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]; \end{aligned} \quad (3.378)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \left\{ (\gamma_\mu^E)_{ba} D_\mu^{(-\mu_e, -q_e)} [A] + \right. \\ &\quad \left. + m_f \delta_{ba} \right\} \bar{\psi}_b(\mathbf{x}, \tau) \tilde{Z}_{GF} \times \\ &\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4y (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]; \end{aligned} \quad (3.379)$$

$$\begin{aligned} J_\mu(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \left[P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} A_\nu(\mathbf{x}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. - i q_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \psi_b(\mathbf{x}, \tau) \right] \tilde{Z}_{GF} \times \\ &\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4y (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]; \end{aligned} \quad (3.380)$$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta C(\mathbf{x}, \tau) \times \\ &\quad \times \tilde{Z}_{GF} \exp \left[\int_\beta d^4y (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]; \end{aligned} \quad (3.381)$$

$$\begin{aligned} \bar{d}(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C (-i)\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \bar{C}(\mathbf{x}, \tau) \times \\ &\quad \times \tilde{Z}_{GF} \exp \left[\int_\beta d^4y (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]. \end{aligned} \quad (3.382)$$

A definição do operador $D_\mu^{(\mu_e, q_e)} [A]$ é semelhante a (3.188):

$$D_\mu^{(\mu_e, q_e)} [A] \equiv \partial_\mu^{(\mu_e)} + i q_e A_\mu, \quad (3.383)$$

com $\partial_\mu^{(\mu_e)}$ também dado por (3.189).

Sejam as quantidades:

$$S_{(A)} \equiv \frac{1}{2} \int_\beta d^4x A_\mu(\mathbf{x}, \tau) P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} A_\nu(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.384)$$

$$S_{(\psi, \bar{\psi})} \equiv - \int_\beta d^4x \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \left[(\gamma_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{(\mu_e)} - m_f \delta_{ab} \right] \psi_b(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.385)$$

$$S_{(C, \bar{C})} \equiv - i\kappa \int_\beta d^4x \partial_\mu \bar{C}(\mathbf{x}, \tau) \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{\overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu}{m_P^2} \right) \partial_\nu C(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.386)$$

$$S_{(int)} \equiv - iq_e \int_\beta d^4x (\gamma_\mu^E)_{ab} A_\mu(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \psi_b(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.387)$$

As derivadas funcionais de algumas combinações dessas quantidades com relação aos campos nos fornecem:

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} \left(S_{(\psi, \bar{\psi})} + S_{(int)} \right) = - \left\{ (\gamma_\mu^E)_{ab} D_\mu^{(\mu_e, q_e)} [A] - m_f \delta_{ab} \right\} \psi_b(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.388)$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(\mathbf{x}, \tau)} \left(S_{(\psi, \bar{\psi})} + S_{(int)} \right) = - \left\{ (\gamma_\mu^E)_{ba} D_\mu^{(-\mu_e, -q_e)} [A] + m_f \delta_{ba} \right\} \bar{\psi}_b(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.389)$$

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu(\mathbf{x}, \tau)} \left(S_{(A)} + S_{(int)} \right) = P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} A_\nu(\mathbf{x}, \tau) - iq_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \psi_b(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.390)$$

$$\frac{\delta S_{(C, \bar{C})}}{\delta \bar{C}(\mathbf{x}, \tau)} = - i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta C(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.391)$$

$$\frac{\delta S_{(C, \bar{C})}}{\delta C(\mathbf{x}, \tau)} = i\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \bar{C}(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.392)$$

Notamos que, a menos de alguns sinais, os segundos membros dessas equações são precisamente os termos que são integrados funcionalmente em (3.378-3.382) juntamente com a \tilde{Z}_{GF} e a exponencial que depende das fontes clássicas.

Chamaremos a soma de todas as quantidades (3.384-3.387) de *ação termodinâmica* e a denotaremos por $S_T = S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]$:

$$\begin{aligned}
S_T &\equiv S_{(A)} + S_{(\psi, \bar{\psi})} + S_{(C, \bar{C})} + S_{(int)} \\
&= \int_{\beta} d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_{\mu} P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} A_{\nu} - i\kappa \partial_{\mu} \bar{C} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{\overleftarrow{\partial}_{\mu} \overrightarrow{\partial}_{\nu}}{m_P^2} \right) \partial_{\nu} C + \right. \\
&\quad \left. - \bar{\psi}_a \left[(\gamma_{\mu}^E)_{ab} D_{\mu}^{(\mu_e, q_e)} [A] - m_f \delta_{ab} \right] \psi_b \right\}. \tag{3.393}
\end{aligned}$$

Visto que $S_{(C, \bar{C})}$ não depende nem do campo de *gauge* nem dos campos fermiônicos e $S_{(A)}$, $S_{(\psi, \bar{\psi})}$ e $S_{(int)}$ não dependem dos campos fantasmas, temos:

$$\frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} \left(S_{(\psi, \bar{\psi})} + S_{(int)} \right); \tag{3.394}$$

$$\frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \psi_a(\mathbf{x}, \tau)} = \frac{\delta}{\delta \psi_a(\mathbf{x}, \tau)} \left(S_{(\psi, \bar{\psi})} + S_{(int)} \right); \tag{3.395}$$

$$\frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta A_{\mu}(\mathbf{x}, \tau)} = \frac{\delta}{\delta A_{\mu}(\mathbf{x}, \tau)} \left(S_{(A)} + S_{(int)} \right); \tag{3.396}$$

$$\frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \bar{C}(\mathbf{x}, \tau)} = \frac{\delta S_{(C, \bar{C})}}{\delta \bar{C}(\mathbf{x}, \tau)}; \tag{3.397}$$

$$\frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta C(\mathbf{x}, \tau)} = \frac{\delta S_{(C, \bar{C})}}{\delta C(\mathbf{x}, \tau)}. \tag{3.398}$$

Com isso, todos os termos integrados em (3.378-3.382) dependerão de derivadas funcionais da ação termodinâmica:

$$\begin{aligned} \eta_a(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= - \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta S_T}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} \times \\ &\times \exp \left[\int_{\beta} d^4 y (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C} d + \bar{d} C) \right]; \quad (3.399) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= - \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta S_T}{\delta \psi_a(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} \times \\ &\times \exp \left[\int_{\beta} d^4 y (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C} d + \bar{d} C) \right]; \quad (3.400) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\mu}(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta S_T}{\delta A_{\mu}(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} \times \\ &\times \exp \left[\int_{\beta} d^4 y (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C} d + \bar{d} C) \right]; \quad (3.401) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= - \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta S_T}{\delta \bar{C}(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} \times \\ &\times \exp \left[\int_{\beta} d^4 y (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C} d + \bar{d} C) \right]; \quad (3.402) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{d}(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= - \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta S_T}{\delta C(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} \times \\ &\times \exp \left[\int_{\beta} d^4 y (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C} d + \bar{d} C) \right]. \quad (3.403) \end{aligned}$$

Resta-nos, ainda, reescrever os primeiros membros dessas expressões em formas mais convenientes para os nossos propósitos.

Consideremos o primeiro membro de (3.401) e utilizemos a representação (3.377) para o funcional gerador termodinâmico:

$$\begin{aligned}
J_\mu(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \times \\
&\quad \times J_\mu(\mathbf{x}, \tau) \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right] \\
&= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \times \\
&\quad \times \frac{\delta}{\delta A_\mu(\mathbf{x}, \tau)} \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right] \\
&= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \times \\
&\quad \times \frac{\delta}{\delta A_\mu(\mathbf{x}, \tau)} \left\{ \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \times \right. \\
&\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right] \left. \right\} + \\
&\quad - \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta A_\mu(\mathbf{x}, \tau)} \times \\
&\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right] \\
&= - \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta A_\mu(\mathbf{x}, \tau)} \times \\
&\quad \times \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\xi A_\xi + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]. \quad (3.404)
\end{aligned}$$

Neste resultados utilizamos a derivação funcional do produto de dois funcionais e o fato de que a integração funcional de uma derivada funcional total é nula [57].

Para o caso dos campos Grassmannianos o resultado é um pouco diferente do caso do campo de Podolsky. Explicitaremos os cálculos para o primeiro membro de (3.399). Os demais casos são similares. Então:

$$\begin{aligned}
\eta_a(\mathbf{x}, \tau) Z_{GF} &= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \times \\
&\quad \times \eta_a(\mathbf{x}, \tau) \exp \left[\int_{\beta} d^4x (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right] \\
&= - \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \times \\
&\quad \times \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} \exp \left[\int_{\beta} d^4x (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right] \\
&= - \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \times \\
&\quad \times \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} \left\{ \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \times \right. \\
&\quad \times \exp \left[\int_{\beta} d^4x (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right] \left. \right\} + \\
&\quad + \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} \times \\
&\quad \times \exp \left[\int_{\beta} d^4x (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right] \\
&= \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} \times \\
&\quad \times \exp \left[\int_{\beta} d^4x (J_{\xi} A_{\xi} + \bar{\eta}_c \psi_c - \bar{\psi}_c \eta_c - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]. \quad (3.405)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.404) e (3.405) nas expressões (3.399-3.403) encontramos as seguintes equações que \tilde{Z}_{GF} deve satisfazer:

$$\frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} = - \frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]; \quad (3.406)$$

$$\frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \psi_a(\mathbf{x}, \tau)} = - \frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \psi_a(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]; \quad (3.407)$$

$$\frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta A_\mu(\mathbf{x}, \tau)} = - \frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta A_\mu(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]; \quad (3.408)$$

$$\frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \bar{C}(\mathbf{x}, \tau)} = - \frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta \bar{C}(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]; \quad (3.409)$$

$$\frac{\delta \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta C(\mathbf{x}, \tau)} = - \frac{\delta S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}{\delta C(\mathbf{x}, \tau)} \tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]. \quad (3.410)$$

A solução desse conjunto de equações funcionais é

$$\tilde{Z}_{GF} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] = \tilde{Z}_0 e^{-S_T^{(\beta, \mu_e, V)} [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}, \quad (3.411)$$

sendo \tilde{Z}_0 uma constante.

Dessa forma, a representação de integração funcional do funcional gerador termodinâmico da teoria de Podolsky (3.377) é

$$\begin{aligned} Z_{GF} [J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}] &= \tilde{Z}_0 \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C e^{-S_T [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]} \times \\ &\times \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\mu A_\mu + \bar{\eta}_a \psi_a - \bar{\psi}_a \eta_a - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]. \end{aligned} \quad (3.412)$$

Ainda não se é, contudo, possível calcular essa expressão, pois a periodicidade dos campos C e \bar{C} ainda é um mistério. A fim de solucionarmos esse enigma, consideraremos, na próxima subseção, a função de partição da teoria de Podolsky.

3.7.2 A função de partição

Na subseção anterior encontramos uma representação de integração funcional para o funcional gerador termodinâmico da eletrodinâmica de Podolsky. Essa representação não está plenamente definida a menos que tenhamos alguma forma não ambígua de se escolher o valor do potencial químico fantasma. Uma resposta para essa questão pode ser obtida analisando-se a função de partição da teoria.

De acordo com a equação (2.99), a função de partição é um caso particular do funcional gerador termodinâmico no qual todas as fontes externas são tomadas como sendo a função identicamente nula. Procedendo dessa forma, a função de partição é facilmente obtida de (3.412) como sendo:

$$Z(\beta) = \tilde{Z}_0 \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C e^{-S_T[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}.$$
(3.413)

Essa é a função de partição completa da teoria. A partir dela, todas as quantidades termodinâmicas podem ser calculadas. Contudo, não se é possível calculá-la exatamente. O primeiro empecilho encontrado ao se tentar resolver as integrações funcionais presentes nessa representação de $Z(\beta)$ consiste em que não se pode resolver as integrações sobre os campos fantasmas, pois suas periodicidades ainda são desconhecidas. Segundo as definições (3.393) e (3.383), o único termo na ação termodinâmica e, conseqüentemente, na função de partição que envolve algum tipo de interação é o termo proporcional ao parâmetro q_e . Em particular, notamos que as periodicidades dos campos fantasmas não são afetadas pela interação. Em outras palavras, as periodicidades de C e \bar{C} são as mesmas tanto no caso com interação como no caso livre. Dessa forma, sem perda de generalidade para nossos presentes propósitos e por questão de simplicidade, consideremos no restante desta subseção o caso livre, ou seja, o caso no qual $q_e = 0$. Assim sendo, a função de partição do problema livre é dada por:

$$Z_F(\beta) = \tilde{Z}_0 \int_P \mathcal{D}A \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{(\mu_g)} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C e^{-S_T^F[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]},$$
(3.414)

com

$$S_T^F [A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}] \equiv \int_{\beta} d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_{\mu} P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} A_{\nu} - i\kappa \partial_{\mu} \bar{C} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{\overleftarrow{\partial}_{\mu} \overrightarrow{\partial}_{\nu}}{m_P^2} \right) \partial_{\nu} C + \right. \\ \left. - \bar{\psi}_a \left[(\gamma_{\mu}^E)_{ab} \partial_{\mu}^{(\mu_e)} - m_f \delta_{ab} \right] \psi_b \right\}. \quad (3.415)$$

A função de partição livre (3.414) pode ser resolvida exatamente. De fato, utilizando as representações de integração funcional para os determinantes, obtemos [62]:

$$Z_F(\beta) = \tilde{Z}_0 \text{Det}_P \left[P^{(m_P^2, \alpha)} \right]^{-\frac{1}{2}} \det_{(\mu_e)} \left[\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \right] \times \\ \times \det_{A-P} \left[(\gamma_{\mu}^E)_{ab} \partial_{\mu}^{(\mu_e)} - m_f \delta_{ab} \right]. \quad (3.416)$$

Nesta expressão, Det denota o determinante sobre o espaço-tempo Euclideo bem como sobre o espaço Hilbert, enquanto que \det representa o determinante sobre o espaço de Hilbert apenas. Os índices sob os determinantes desta expressão indicam as periodicidades das funções sobre as quais eles devem ser calculados. Assim, \det_P indicaria um determinante calculados sobre funções que satisfazem condições *periódicas* de contorno e \det_{A-P} , por outro lado, representa um determinante que deve ser calculado com o auxílio de funções satisfazendo condições *antiperiódicas* de contorno. $\det_{(\mu_e)}$, no entanto, indica um determinante que deve ser calculado sobre funções que satisfazem condições de contorno periódicas *ou* antiperiódicas, dependendo da escolha do valor do potencial quântico fantasmas (3.371).

Que \det_E denote o determinante *apenas* nos índices do espaço-tempo Euclideo. Com essa notação, consideremos o operador M dado por:

$$M_{\mu\nu} = A \delta_{\mu\nu} + B \partial_{\mu} \partial_{\nu}, \quad (3.417)$$

sendo A e B operadores diferenciais escalares de $SO(4)$. O determinante de M no espaço-tempo Euclideo é

$$\begin{aligned}
\det_E(M) &= \begin{vmatrix} A + B\partial_0^2 & B\partial_0\partial_1 & B\partial_0\partial_2 & B\partial_0\partial_3 \\ B\partial_0\partial_1 & A + B\partial_1^2 & B\partial_1\partial_2 & B\partial_1\partial_3 \\ B\partial_0\partial_2 & B\partial_1\partial_2 & A + B\partial_2^2 & B\partial_2\partial_3 \\ B\partial_0\partial_3 & B\partial_1\partial_3 & B\partial_2\partial_3 & A + B\partial_3^2 \end{vmatrix} \\
&= (A + B\partial_0^2) \begin{vmatrix} A + B\partial_1^2 & B\partial_1\partial_2 & B\partial_1\partial_3 \\ B\partial_1\partial_2 & A + B\partial_2^2 & B\partial_2\partial_3 \\ B\partial_1\partial_3 & B\partial_2\partial_3 & A + B\partial_3^2 \end{vmatrix} + \\
&\quad - B\partial_0\partial_1 \begin{vmatrix} B\partial_0\partial_1 & B\partial_1\partial_2 & B\partial_1\partial_3 \\ B\partial_0\partial_2 & A + B\partial_2^2 & B\partial_2\partial_3 \\ B\partial_0\partial_3 & B\partial_2\partial_3 & A + B\partial_3^2 \end{vmatrix} + \\
&\quad + B\partial_0\partial_2 \begin{vmatrix} B\partial_0\partial_1 & A + B\partial_1^2 & B\partial_1\partial_3 \\ B\partial_0\partial_2 & B\partial_1\partial_2 & B\partial_2\partial_3 \\ B\partial_0\partial_3 & B\partial_1\partial_3 & A + B\partial_3^2 \end{vmatrix} + \\
&\quad - B\partial_0\partial_3 \begin{vmatrix} B\partial_0\partial_1 & A + B\partial_1^2 & B\partial_1\partial_2 \\ B\partial_0\partial_2 & B\partial_1\partial_2 & A + B\partial_2^2 \\ B\partial_0\partial_3 & B\partial_1\partial_3 & B\partial_2\partial_3 \end{vmatrix}. \tag{3.418}
\end{aligned}$$

Os determinantes das matrizes de nove elementos operatoriais que aparecem nessa expressão podem ser calculados como se os elementos fossem números. Procedendo dessa maneira, obtemos:

$$\begin{vmatrix} A + B\partial_1^2 & B\partial_1\partial_2 & B\partial_1\partial_3 \\ B\partial_1\partial_2 & A + B\partial_2^2 & B\partial_2\partial_3 \\ B\partial_1\partial_3 & B\partial_2\partial_3 & A + B\partial_3^2 \end{vmatrix} = A^3 + A^2B(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2); \tag{3.419}$$

$$\begin{vmatrix} B\partial_0\partial_1 & B\partial_1\partial_2 & B\partial_1\partial_3 \\ B\partial_0\partial_2 & A + B\partial_2^2 & B\partial_2\partial_3 \\ B\partial_0\partial_3 & B\partial_2\partial_3 & A + B\partial_3^2 \end{vmatrix} = A^2B\partial_0\partial_1; \tag{3.420}$$

$$\begin{vmatrix} B\partial_0\partial_1 & A + B\partial_1^2 & B\partial_1\partial_3 \\ B\partial_0\partial_2 & B\partial_1\partial_2 & B\partial_2\partial_3 \\ B\partial_0\partial_3 & B\partial_1\partial_3 & A + B\partial_3^2 \end{vmatrix} = -A^2B\partial_0\partial_2; \tag{3.421}$$

$$\begin{vmatrix} B\partial_0\partial_1 & A + B\partial_1^2 & B\partial_1\partial_2 \\ B\partial_0\partial_2 & B\partial_1\partial_2 & A + B\partial_2^2 \\ B\partial_0\partial_3 & B\partial_1\partial_3 & B\partial_2\partial_3 \end{vmatrix} = A^2B\partial_0\partial_3. \tag{3.422}$$

Substituindo esses quatro resultados em (3.418), encontramos:

$$\begin{aligned}
\det_E(M) &= (A + B\partial_0^2) [A^3 + A^2B(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)] - B\partial_0\partial_1(A^2B\partial_0\partial_1) + \\
&\quad + B\partial_0\partial_2(-A^2B\partial_0\partial_2) - B\partial_0\partial_3(A^2B\partial_0\partial_3) \\
&= A^4 + A^3B(\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) = A^4 + A^3B\partial_\alpha\partial_\alpha \\
&= A^4 - A^3B(-\partial_\alpha\partial_\alpha) = A^4 - A^3B\Delta. \tag{3.423}
\end{aligned}$$

Para o caso especial no qual o operador M é o operador diferencial de Podolsky (3.218), temos

$$A = -\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\Delta; \tag{3.424}$$

$$B = -\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\left[1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\right] \tag{3.425}$$

O resultado acima, então, nos mostra que o seguinte resultado é obtido quando se calcula o determinante do operador diferencial de Podolsky apenas no espaço-tempo Euclidiano:

$$\begin{aligned}
\det_E[P^{(m_P^2, \alpha)}] &= \left[-\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\Delta\right]^4 - \left[-\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\Delta\right]^3 \times \\
&\quad \times \left\{-\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\left[1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\right]\right\}\Delta \\
&= \left[-\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\Delta\right]^4 \left\{1 - \left[1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\right]\right\} \\
&= \left[\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\Delta\right]^4 \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1\right)\right]. \tag{3.426}
\end{aligned}$$

Sendo $\text{Det}_P[P^{(m_P^2, \alpha)}] = \det_P\left\{\det_E[P^{(m_P^2, \alpha)}]\right\}$, escrevemos a função de partição livre (3.416) como

$$\begin{aligned}
Z_F(\beta) &= \tilde{Z}_0 \det_P \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \det_P \left[\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \right]^{-2} \times \\
&\quad \times \det_{(\mu e)} \left[\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \right] \det_{A-P} \left[(\gamma_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{(\mu e)} - m_f \delta_{ab} \right]. \tag{3.427}
\end{aligned}$$

O último determinante do segundo membro de (3.427) corresponde à função de partição de férmions livres, denotada nesta tese por $Z_D(\beta)$:

$$Z_D(\beta) = \det_{A-P} \left[(\gamma_\mu^E)_{ab} \partial_\mu^{(\mu_e)} - m_f \delta_{ab} \right]. \quad (3.428)$$

Uma vez que nos restringimos ao caso livre, temos um campo eletromagnético e um campo de Dirac livres em equilíbrio termodinâmico. Nessas condições, a função de partição do sistema é um produto de uma função de partição do campo de *gauge* por uma do campo de Dirac. Denotando a primeira por $Z_P(\beta)$, (3.427) tem a forma

$$Z_F(\beta) = Z_P(\beta) Z_D(\beta), \quad (3.429)$$

donde identificamos a função de partição do campo de Podolsky livre como:

$$\begin{aligned} Z_P(\beta) = & \tilde{Z}_0 \det_P \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \det_P \left[\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \right]^{-2} \times \\ & \times \det_{(\mu_e)} \left[\kappa \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta \right]. \end{aligned} \quad (3.430)$$

A fim de escolhermos um valor para o potencial químico fantasma, notamos que, à exceção do último termo, todos os demais determinantes dessa expressão são calculados utilizando-se funções periódicas. Ademais, o operador diferencial $\left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right) \Delta$ aparece não somente no termo cuja periodicidade é ainda indefinida, mas também, total ou parcialmente, nos outros determinantes que são calculados sobre funções periódicas. Com esses indícios, *impomos* que o determinante $\det_{(\mu_g)}$ seja calculado também sobre funções que satisfazem condições de contorno periódicas. Como essa periodicidade é a mesma da função de Green fantasma (3.372), escolhemos o número n no potencial químico fantasma (3.371) seja um número ímpar, a fim de que (3.372) seja uma condição de periodicidade. Procedendo dessa forma, substituímos a notação $\det_{(\mu_g)}$ por \det_P e encontramos:

$$Z_P(\beta) = \tilde{Z}_0 \det_P (m_P^2)^{\frac{3}{2}} \det_P \left[(\kappa^2 \alpha)^{-\frac{1}{3}} (\Delta + m_P^2) \right]^{-\frac{3}{2}} \det_P (\Delta)^{-1} \quad (3.431)$$

Recordemos que α é o parâmetro de *gauge* covariante. A fim de especificarmos um *gauge* covariante de $SO(4)$ basta especificarmos um valor real não nulo para α . Uma vez que a função de partição determina todas as quantidades termodinâmicas e estas não dependem da escolha de *gauge*, a

função de partição deve ser invariante por troca de *gauges*. Dessa forma, ela não deve depender *explicitamente* do parâmetro α . Lembremos, também, que o parâmetro κ foi introduzido na equação (3.226) como um dos fatores do multiplicador de Lagrange associado ao vínculo advindo da simetria de *gauge* residual. Seu valor permaneceu até o momento indeterminado. A fim de tornarmos a função de partição da teoria independente do parâmetro covariante de *gauge*, escolhemos o valor para o parâmetro κ como sendo

$$\kappa \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \quad (3.432)$$

Além disso, por conveniência, escolhemos a constante \tilde{Z}_0 como tendo o valor¹¹

$$\tilde{Z}_0 = \det_P (m_P)^{-3}. \quad (3.433)$$

Com essas escolhas para os dois parâmetros até então indeterminados, a função de partição do campo de Podolsky livre se escreve na seguinte forma:

$$Z_P(\beta) = \det_P (\Delta + m_P^2)^{-\frac{3}{2}} \det_P (\Delta)^{-1} \quad (3.434)$$

Vemos, assim, que a função de partição do eletromagnetismo de Podolsky é escrita como um produto de dois termos com a forma $\det_P (\Delta + M_j^2)^{-\frac{n_j}{2}}$, com $j \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq j \leq 2$. Esse termo constitui-se numa função de partição de um campo bosônico livre com massa M_j e n_j graus de liberdade. Logo, $Z_P(\beta)$ é um produto de uma função de partição de um campo bosônico com massa m_P e com três graus de liberdade por uma função de partição de um campo bosônico sem massa com dois graus de liberdade. Isso mostra que o campo de Podolsky livre em equilíbrio termodinâmico comporta-se como dois campos não interagentes: um *campo de Proca* com massa igual à massa do setor massivo do campo de Podolsky e um campo vetorial sem massa, isto é, um *campo de Maxwell*. O fato de esses dois campos não interagirem um com o outro é uma consequência direta do fato da teoria de Podolsky ser linear. Esse resultado foi obtido pela primeira vez por nós em [27] por um método inteiramente diferente: o do tempo imaginário.¹² A forma apresentada aqui foi também derivada por nós em [53].

¹¹A rigor, e essa “constante” pode ser função da constante de interação: $\tilde{Z}_0 = \tilde{Z}_0(q_e)$ e (3.433) seria válida para $\tilde{Z}_0(0)$. Para nossos propósitos, essa distinção não possui relevância.

¹²Nesse trabalho usamos a essência da técnica apresentada em [52].

Devido à escolha feita para o potencial químico fantasma, concluímos que a função de Green fantasmagórica (3.372) é periódica com período β ,

$$\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau) = \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau - \beta), \quad (3.435)$$

e que o funcional gerador termodinâmico e a função de partição da teoria de Podolsky se escrevem respectivamente como

$$\begin{aligned} Z_{GF}[J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}] &= \det_P(m_P)^{-3} \int_P \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}C \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_T[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]} \times \\ &\times \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\mu A_\mu + \bar{\eta}_a \psi_a - \bar{\psi}_a \eta_a - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]; \end{aligned} \quad (3.436)$$

$$Z(\beta) = \det_P(m_P)^{-3} \int_P \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}C \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_T[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]}. \quad (3.437)$$

Iniciamos esta seção com a proposta de uma representação de integração funcional para o gerador funcional. Essa representação dependia de uma função incógnita \tilde{Z} . Quase de imediato notamos que as periodicidades das funções $D_{\mu\nu}$, S_{ab} e \mathcal{G} proibiam as integrações sobre os campos de serem irrestritas. Essas condições implicavam que a integração sobre o campo de Podolsky deveria ser realizada sobre todas as configurações de campo que satisfizessem condições de contorno periódicas na variável associada com a temperatura cujos períodos fossem β . Uma condição semelhante deveria ser aplicada aos campos fermiônicos, contudo, no caso, as integrações deveriam ser realizadas sobre todas as condições de contorno antiperiódicas com as mesmas características. No entanto, devido à periodicidade da função de Green fantasmagórica ser, naquela etapa, desconhecida, sabíamos apenas que as integrações sobre os campos fantasmas deveriam ser restritas a campos com alguma periodicidade específica, porém não sabíamos qual. Substituindo a representação integral no conjunto de equações diferenciais funcionais que o gerador termodinâmico deveria satisfazer, encontramos um sistema de equações funcionais para a função incógnita. Resolvendo tal sistema, vimos que a função \tilde{Z} é proporcional à exponencial do negativo de uma quantidade que chamamos de ação termodinâmica. Possuíamos, assim, uma representação de integração funcional para o funcional gerador termodinâmico quase completa: restava-nos ainda determinar a periodicidade dos campos fantasmas. Fazendo as fontes nulas no gerador funcional encontramos a função de partição completa da teoria de Podolsky. Notamos,

então, que a periodicidade dos campos fantasmas não depende do termo de interação entre o campo de Podolsky e os campos fermiônicos. Restringimos nossa análise ao caso sem interação, que é exatamente solúvel. Conforme esperado, a função de partição da teoria livre se escreveu como um produto de dois termos. Um deles é a função de partição de férmions livres. Por conseguinte, identificamos o outro termo como sendo a função de partição do campo de Podolsky livre. Utilizando algumas “pistas”, escolhemos a periodicidade dos campos fantasmas como sendo, de fato, a periódica. Com isso, a função de partição do campo de Podolsky livre, após escolhermos valores apropriados para duas constantes que ainda precisavam ser determinadas, se escreveu como o produto de duas funções de partição bosônicas não interagentes: uma correspondente a um campo de Proca livre com massa igual à massa do setor massivo do campo de Podolsky e outra correspondente a um campo de Maxwell livre. Na seção seguinte estudaremos as equações de Dyson-Schwinger-Fradkin da teoria de Podolsky.

3.8 As equações de Dyson-Schwinger-Fradkin

Nesta seção estudaremos um conjunto de equações conhecido como equações de Dyson-Schwinger-Fradkin para a eletrodinâmica de Podolsky [54, 55, 56, 11]. Contudo, antes de iniciarmos a dedução de tais equações, notemos que devido à simetria $U(1)$ global, a ação termodinâmica (3.393) é invariante sob as seguintes trocas simultâneas:¹³

$$\psi_a(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \psi'_a(\mathbf{x}, \tau) = -\psi_a(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.438)$$

$$\bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \bar{\psi}'_a(\mathbf{x}, \tau) = -\bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.439)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \rangle &= \det_P(m_P)^{-3} \int_P \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}C \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \psi_a(\mathbf{x}, \tau) e^{-S_T[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]} \\ &= -\det_P(m_P)^{-3} \int_P \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{C}\mathcal{D}C \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \psi_a(\mathbf{x}, \tau) e^{-S_T[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]} \\ &= -\langle \widehat{\bar{\psi}}_a(\mathbf{x}, \tau) \rangle, \end{aligned} \quad (3.440)$$

com um resultado semelhante válido para $\langle \widehat{\bar{\psi}}_a(\mathbf{x}, \tau) \rangle$. Donde concluímos que as médias no *ensemble* de campos fermiônicos individuais são nulas:

¹³Essa transformação é uma transformação do tipo (3.3,3.4) com $\theta = \pi$.

$$\left\langle \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \right\rangle = \left\langle \widehat{\bar{\psi}}_a(\mathbf{x}, \tau) \right\rangle = 0. \quad (3.441)$$

Uma vez que a ação termodinâmica (3.393) com interação não é invariante pela troca $A_\mu \rightarrow A'_\mu = -A_\mu$, um resultado semelhante para a média do campo de Podolsky somente é válido no caso livre. Porém, devido à forma do operador (3.383), a seguinte relação vale:

$$D_\mu^{(\mu_e, q_e)} [A] = D_\mu^{(\mu_e, -q_e)} [-A]. \quad (3.442)$$

Donde se pode mostrar que a média no térmica do operador campo de Podolsky é uma função ímpar da constante de interação q_e . De fato, denotando a dependência com q_e explicitamente e trocando todos os A_μ por $-A_\mu$ nas integrais, temos:

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right\rangle_{(q_e)} &= \det_P(m_P)^{-3} \int_P \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi A_\mu(\mathbf{x}, \tau) \times \\ &\quad \times e^{-S_T^{(q_e)}[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]} \\ &= -\det_P(m_P)^{-3} \int_P \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi A_\mu(\mathbf{x}, \tau) \times \\ &\quad \times e^{-S_T^{(q_e)}[-A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]} \\ &= -\det_P(m_P)^{-3} \int_P \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi A_\mu(\mathbf{x}, \tau) \times \\ &\quad \times e^{-S_T^{(-q_e)}[A, \psi, \bar{\psi}, C, \bar{C}]} \\ &= -\left\langle \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \right\rangle_{(-q_e)}. \end{aligned} \quad (3.443)$$

Esse resultado mostra que medir a média térmica do operador campo eletromagnético de Podolsky num certo *ensemble* é equivalente a medir a média térmica do negativo desse campo num *ensemble* com todas as constantes q_e com os sinais trocados.

Utilizando a técnica apresentada na seção 3.6.1, calculamos a média no *ensemble* do campo de Podolsky:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \rangle &= \frac{\text{Tr} [\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau)]}{\text{Tr} [\widehat{\rho}_g(\beta)]} \\
&= \int \frac{d\Upsilon}{\text{Tr} [\widehat{\rho}_g(\beta)]} \langle \Upsilon \left| \exp \left[-\beta \left(\widehat{\mathbb{H}} - \mu_e \widehat{N} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \times \right. \\
&\quad \times \exp \left[\tau \left(\widehat{\mathbb{H}} - \mu_e \widehat{N} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] e^{-i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \widehat{A}_\mu(\mathbf{0}, 0) e^{i\mathbf{x} \cdot \widehat{\mathbf{P}}} \times \\
&\quad \left. \times \exp \left[-\tau \left(\widehat{\mathbb{H}} - \mu_e \widehat{N} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \right| \Upsilon \rangle \\
&= \int \frac{d\Upsilon}{\text{Tr} [\widehat{\rho}_g(\beta)]} \exp \left[-\beta (E - \mu_e N_e - \mu_g N_g) \right] \times \\
&\quad \times e^{-(\tau-\tau)(E - \mu_e N_e - \mu_g N_g)} e^{-i(\mathbf{x}-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}} \langle \Upsilon \left| \widehat{A}_\mu(\mathbf{0}, 0) \right| \Upsilon \rangle \\
&= \int \frac{d\Upsilon}{\text{Tr} [\widehat{\rho}_g(\beta)]} \langle \Upsilon \left| \exp \left[-\beta \left(\widehat{\mathbb{H}} - \mu_e \widehat{N} - \mu_g \widehat{Q} \right) \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \widehat{A}_\mu(\mathbf{0}, 0) \right| \Upsilon \rangle \\
&= \frac{\text{Tr} [\widehat{\rho}_g(\beta) \widehat{A}_\mu(\mathbf{0}, 0)]}{\text{Tr} [\widehat{\rho}_g(\beta)]} = \langle \widehat{A}_\mu(\mathbf{0}, 0) \rangle. \tag{3.444}
\end{aligned}$$

Vemos, então, que a média térmica do campo de Podolsky não depende dos parâmetros do espaço-tempo Euclídeo. Sendo assim, denotamos:

$$\langle \widehat{A}_\mu(\mathbf{x}, \tau) \rangle = \langle \widehat{A}_\mu \rangle. \tag{3.445}$$

A fim de encontrarmos as equações de Dyson-Schwinger-Fradkin, definiremos uma quantidade como o logaritmo do funcional gerador termodinâmico:

$$W [J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}] \equiv \ln \{ Z_{GF} [J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}] \}. \tag{3.446}$$

Definimos, também, as derivadas desse funcional:

$$\vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) \equiv \frac{\delta W [J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}]}{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)}; \quad (3.447)$$

$$\bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \equiv \frac{\delta W [J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}]}{\delta \eta_a(\mathbf{x}, \tau_x)}; \quad (3.448)$$

$$\chi_a(\mathbf{x}, \tau_x) \equiv \frac{\delta W [J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}]}{\delta \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau_x)}; \quad (3.449)$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \equiv \frac{\delta \vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta J_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)}; \quad (3.450)$$

$$\mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \equiv \frac{\delta \chi_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \eta_b(\mathbf{y}, \tau_y)}. \quad (3.451)$$

Escrevendo $Z_{GF} = e^W$ nas equações funcionais (3.326) e (3.328) e utilizando as quantidades definidas acima, encontramos:

$$J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) = P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(\mathbf{x}, \tau_x) \vartheta_\nu(\mathbf{x}, \tau_x) + \\ - i q_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \left[\mathcal{S}_{ba}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \tau_x, \tau_x) - \chi_b(\mathbf{x}, \tau_x) \bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \right]; \quad (3.452)$$

$$\eta_a(\mathbf{x}, \tau_x) = \left\{ (\gamma_\mu^E)_{ab} D_\mu^{(\mu_e, q_e)} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau_x)} + \vartheta(\mathbf{x}, \tau_x) \right] - m_f \delta_{ab} \right\} \chi_b(\mathbf{x}, \tau_x). \quad (3.453)$$

Derivando (3.452) e (3.453) funcionalmente com relação a $J_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)$ e $\eta_b(\mathbf{y}, \tau_y)$, respectivamente, e as utilizando uma vez mais, encontramos:

$$\delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) = P_{\mu\xi}^{(m_P^2, \alpha)}(\mathbf{x}, \tau_x) \mathcal{D}_{\xi\nu}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) + \\ - i q_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \frac{\delta \mathcal{S}_{ba}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \tau_x, \tau_x)}{\delta J_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)}; \quad (3.454)$$

$$\delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) = \left\{ (\gamma_\mu^E)_{ac} D_\mu^{(\mu_e, q_e)} \left[\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, \tau_x)} + \vartheta(\mathbf{x}, \tau_x) \right] + \right. \\ \left. - m_f \delta_{ac} \right\} \mathcal{S}_{cb}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y). \quad (3.455)$$

Agora, definimos os operadores tensor de polarização $\Pi_{\mu\nu}^{[s]}$ e de massa $\Sigma_{ab}^{[s]}$ implicitamente através das seguintes relações:

$$iq_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \frac{\delta \mathcal{S}_{ba}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \tau_x, \tau_x)}{\delta J_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} \equiv - \int_\beta d^4 z \Pi_{\mu\xi}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \tau_x, \tau_z) \mathcal{D}_{\xi\nu}^{[s]}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \tau_z, \tau_y); \quad (3.456)$$

$$iq_e (\gamma_\mu^E)_{ab} \frac{\delta \mathcal{S}_{cb}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)} \equiv - \int_\beta d^4 z \Sigma_{ac}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \tau_x, \tau_z) \mathcal{S}_{cb}^{[s]}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \tau_z, \tau_y) \quad (3.457)$$

Com o auxílio desses operadores, as equações (3.454) e (3.455) mostram que as quantidades (3.450) e (3.451) são as funções de Green *completas* da teoria, isto é, aquelas que levam em consideração os efeitos de interação de uma maneira *exata*:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)]^{-1} &= \delta_{\mu\xi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) P_{\xi\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(\mathbf{y}, \tau_y) + \\ &+ \Pi_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y); \end{aligned} \quad (3.458)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)]^{-1} &= \delta_{ac} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \left\{ (\gamma_\mu^E)_{cb} D_\mu^{(\mu_e, q_e)}[\vartheta(\mathbf{y}, \tau_y)] + \right. \\ &\left. - m_f \delta_{cb} \right\} - \Sigma_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y). \end{aligned} \quad (3.459)$$

Chamaremos $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}$ de função de Green de Podolsky e $\mathcal{S}_{ab}^{[s]}$ de função de Green fermiônica. É importante ressaltar que essas duas quantidades são as funções de Green completas da teoria *inclusive*, mas não somente, na presença das fontes clássicas externas.

Ambos os operadores $\Pi_{\mu\nu}^{[s]}$ e $\Sigma_{ab}^{[s]}$ são definidos nas equações (3.456) e (3.457) através de dependências implícitas de derivadas funcionais da função de Green fermiônica com respeito a uma fonte externa do campo de Podolsky. Estudaremos, então, um termo desse tipo. Utilizando a fórmula (2.91) e a definição (3.450):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta J_\mu(\mathbf{z}, \tau_z)} &= \int_\beta d^4 w \frac{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{w}, \tau_w)}{\delta J_\mu(\mathbf{z}, \tau_z)} \frac{\delta \mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{w}, \tau_w)} \\
&= \int_\beta d^4 w \mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; \tau_z, \tau_w) \times \\
&\quad \times \frac{\delta}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{w}, \tau_w)} \left\{ \left\{ \left[\mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \right]^{-1} \right\}^{-1} \right\} \\
&= - \int_\beta d^4 w \mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; \tau_z, \tau_w) \int_\beta d^4 u d^4 v \mathcal{S}_{ac}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \tau_x, \tau_u) \times \\
&\quad \times \frac{\delta \left\{ \left[\mathcal{S}_{cd}^{[s]}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau_u, \tau_v) \right]^{-1} \right\}}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{w}, \tau_w)} \mathcal{S}_{db}^{[s]}(\mathbf{v}, \mathbf{y}; \tau_v, \tau_y). \quad (3.460)
\end{aligned}$$

Definimos, agora, a *função de vértice completa* como

$$\Gamma_{\mu(ab)}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \tau_x, \tau_y, \tau_z) \equiv - \frac{i}{q_e} \frac{\delta \left\{ \left[\mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \right]^{-1} \right\}}{\delta \vartheta_\mu(\mathbf{z}, \tau_z)}. \quad (3.461)$$

Substituindo (3.459) nessa definição, podemos escrever a função de vértice na forma:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu(ab)}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \tau_x, \tau_y, \tau_z) &= (\gamma_\mu^E)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(\tau_z - \tau_y) + \\
&\quad + \frac{i}{q_e} \frac{\delta \Sigma_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta \vartheta_\mu(\mathbf{z}, \tau_z)}. \quad (3.462)
\end{aligned}$$

Em termos dessa função, a derivada (3.460) se escreve como

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)}{\delta J_\mu(\mathbf{z}, \tau_z)} &= - \int_\beta d^4 w d^4 u d^4 v \mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; \tau_z, \tau_w) \mathcal{S}_{ac}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \tau_x, \tau_u) \times \\
&\quad \times \Gamma_{\nu(cd)}^{[s]}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}; \tau_u, \tau_v, \tau_w) \mathcal{S}_{db}^{[s]}(\mathbf{v}, \mathbf{y}; \tau_v, \tau_y), \quad (3.463)
\end{aligned}$$

Substituindo essa expressão nas definições (3.456) e (3.457), identificamos:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) &= (q_e)^2 (\gamma_\mu^E)_{ab} \int_\beta d^4u d^4v \mathcal{S}_{bc}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \tau_x, \tau_u) \times \\ &\quad \times \Gamma_{\nu(cd)}^{[s]}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}; \tau_u, \tau_v, \tau_y) \mathcal{S}_{da}^{[s]}(\mathbf{v}, \mathbf{x}; \tau_v, \tau_x); \quad (3.464)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) &= - (q_e)^2 (\gamma_\mu^E)_{ac} \int_\beta d^4u d^4v \mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \tau_x, \tau_u) \times \\ &\quad \times \mathcal{S}_{cd}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \tau_x, \tau_v) \Gamma_{\nu(db)}^{[s]}(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{u}; \tau_v, \tau_y, \tau_u). \quad (3.465)\end{aligned}$$

As equações (3.454) e (3.455), (3.458) e (3.459) e (3.464) e (3.465) são todas versões distintas e equivalentes do que é conhecido como *equações de Dyson-Schwinger-Fradkin* para a eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico.

Os operadores tensor de polarização e de massa dependem implicitamente da constante q_e de uma maneira não trivial através das funções de Green e de vértice completas. Contudo, esse operadores dependem *explicitamente* de $(q_e)^2$. Essa propriedade, aliada com a expressão (3.462) para a função de vértice, mostra que no caso livre a função de vértice é proporcional a uma matriz de Dirac Euclideana:

$$\Gamma_{\mu(ab)}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \tau_x, \tau_y, \tau_z) \Big|_{q_e=0} = (\gamma_\mu^E)_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(\tau_z - \tau_y). \quad (3.466)$$

Calculando as funções de Green completas (3.450) e (3.451) para o caso de ausência de fontes externas e utilizando as equações (3.356), (3.357), (3.441) e (3.445), vemos que as funções de Green sem fontes dependem apenas das diferenças dos parâmetros espaço-temporais:

$$\mathcal{S}_{ab}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) = S_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) \equiv \mathcal{S}_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y); \quad (3.467)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu\nu}^{[0]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) &= D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) - \langle \hat{A}_\mu \rangle \langle \hat{A}_\nu \rangle \\ &\equiv \mathcal{D}_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y). \quad (3.468)\end{aligned}$$

Concluimos, então, que as funções de Green completas da teoria são funções afim das chamadas “médias térmicas especiais”, que são médias térmicas de ordenamento de campos.

3.8.1 As funções de Green no espaço de Fourier

Conforme vimos na seção 3.6.2, as funções de Green em equilíbrio termodinâmico estão sujeitas a condições de periodicidade na variável τ . A rigor, as expressões que utilizamos nesta seção apenas são válidas para a variável τ restrita ao intervalo $(0, \beta)$. A fim de que as funções de Green definidas acima não entrem em conflito com as condições já estabelecidas, estenderemos seu domínio de validade para todo $\tau \in \mathbb{R}$. A fim de realizarmos essa tarefa, definiremos duas distribuições chamadas *pentas de Dirac periódico* $\Delta_{\beta}^{+}(\tau)$ e *antiperiódico* $\Delta_{\beta}^{-}(\tau)$ como:¹⁴

$$\Delta_{\beta}^{\pm}(\tau) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^n \delta(\tau - n\beta) \quad (3.469)$$

e substituiremos toda “função” delta de Dirac $\delta(\tau)$ numa equação de uma função de Green apropriadamente por uma dessas novas distribuições. Com isso, por exemplo, vemos que as funções de Green da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_{\beta}^{+}(\tau_x - \tau_y) &= \int_{\beta} d^4 z \left[\delta_{\mu\xi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \Delta_{\beta}^{+}(\tau_x - \tau_z) P_{\xi\sigma}^{(m_P^2, \alpha)}(\mathbf{z}, \tau_z) + \right. \\ &\quad \left. + \Pi_{\mu\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \tau_x - \tau_z) \right] \mathcal{D}_{\sigma\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{y}, \tau_z - \tau_y); \end{aligned} \quad (3.470)$$

$$\begin{aligned} \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_{\beta}^{-}(\tau_x - \tau_y) &= \int_{\beta} d^4 z \left\{ \delta_{ac} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \Delta_{\beta}^{-}(\tau_x - \tau_z) \times \right. \\ &\quad \times \left\{ (\gamma_{\mu}^E)_{cd} D_{\mu}^{(\mu_e, q_e)} \left[\langle \hat{A} \rangle \right] - m_f \delta_{cd} \right\}_z + \\ &\quad \left. - \Sigma_{ad}(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \tau_x - \tau_z) \right\} \mathcal{S}_{db}(\mathbf{z} - \mathbf{y}, \tau_z - \tau_y). \end{aligned} \quad (3.471)$$

A fim de clarificar o papel do equilíbrio termodinâmico, escreveremos essas expressões no espaço de Fourier. Dadas as periodicidades das funções de Green, as transformadas de Fourier dessas quantidades na coordenada τ não serão dadas por integrais de Fourier, mas por séries:

¹⁴A razão para a nomenclatura é a seguinte: a primeira dessas distribuições definida foi a periódica, mas não recebia nenhum adjetivo. Ela constitui-se de uma série de deltas de Dirac igualmente espaçadas. Cada uma dessas deltas pode ser entendida como limites apropriados de sequência de funções Gaussianas. O gráfico da série de um elemento arbitrário dessa sequência com índice suficientemente grande lembra o desenho de um pente. Os adjetivos vêm das seguintes propriedades: $\Delta_{\beta}^{\pm}(\tau - \beta) = \pm \Delta_{\beta}^{\pm}(\tau)$.

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau_x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3k}{\beta (2\pi)^3} \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) e^{i(\omega_n^B \tau_x + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}; \quad (3.472)$$

$$\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{x}, \tau_x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3k}{\beta (2\pi)^3} \tilde{\mathcal{S}}_{ab}(\mathbf{k}, \omega_n^F) e^{i(\omega_n^F \tau_x + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}; \quad (3.473)$$

$$\Delta_{\beta}^{+}(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n^B \tau_x}; \quad (3.474)$$

$$\Delta_{\beta}^{-}(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n^F \tau_x}, \quad (3.475)$$

sendo que definimos as *frequências de Matsubara bosônicas* e *fermiônicas*, respectivamente, como:

$$\omega_n^B \equiv \frac{2n\pi}{\beta}; \quad (3.476)$$

$$\omega_n^F \equiv \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \quad (3.477)$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Utilizando representações de Fourier semelhantes para os operadores de massa e tensor de polarização, podemos reescrever (3.470) e (3.471) no espaço de Fourier:

$$\left[\tilde{P}_{\mu\xi}^{(m_P^2, \alpha)}(k^{Bn}) + \tilde{\Pi}_{\mu\xi}(\mathbf{k}, \omega_n^B) \right] \tilde{\mathcal{D}}_{\xi\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \delta_{\mu\nu}; \quad (3.478)$$

$$\left[i(\gamma_{\mu}^E)_{ac} \left(k_{\mu}^{Fn} - i\mu_e \delta_{\mu 0} + q_e \langle \hat{A}_{\mu} \rangle \right) - m_f \delta_{ac} - \tilde{\Sigma}_{ac}(\mathbf{k}, \omega_n^F) \right] \tilde{\mathcal{S}}_{cb}(\mathbf{k}, \omega_n^F) = \delta_{ab}. \quad (3.479)$$

Nestas expressões, $k_{\mu}^{Bn} \equiv (\omega_n^B, \mathbf{k})$, $k_{\mu}^{Fn} \equiv (\omega_n^F, \mathbf{k})$ e $\tilde{P}_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}$ é a transformada de Fourier do operador diferencial (3.218):

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(k^{Bn}) \equiv & - \left[\frac{(k^{Bn})^2}{m_P^2} + 1 \right] \left\{ (k^{Bn})^2 \delta_{\mu\nu} + \right. \\ & \left. - \left[1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{(k^{Bn})^2}{m_P^2} + 1 \right) \right] k_{\mu}^{Bn} k_{\nu}^{Bn} \right\}, \end{aligned} \quad (3.480)$$

com $(k^{Bn})^2 \equiv k_\mu^{Bn} k_\mu^{Bn} = (\omega_n^B)^2 + \mathbf{k}^2 \geq 0$.

O uso dos pentes de Dirac nos possibilitou escrever as equações das funções de Green no espaço de Fourier de uma forma local. Ademais, essas equações são similares às correspondentes da teoria usual, sem efeitos térmicos, no espaço de Minkowski. As principais diferenças entre essas versão são evidentes na equação (3.479), que depende explicitamente do potencial químico μ_e e da média no *ensemble* do operador campo eletromagnético de Podolsky.

Uma vez que a função de Green fantasmagórica é periódica, sua equação no espaço de Fourier é

$$\frac{i}{\sqrt{\alpha}} \left[\frac{(k^{Bn})^2}{m_P^2} + 1 \right] (k^{Bn})^2 \tilde{G}(\omega_n^B, \mathbf{k}) = 1. \quad (3.481)$$

Vemos que apesar dos campos fantasmas serem Grassmannianos, a função de Green a eles associada depende de frequências de Matsubara bosônicas, característica partilhada pelas funções de Green associadas a campos não Grassmannianos.

3.9 As identidades de Ward-Fradkin-Takahashi

Iniciamos este capítulo construindo uma teoria clássica invariante de *gauge* como motivação para se estudar a teoria de Podolsky. No entanto, ao se estudar a quantização do campo eletromagnético, uma quebra explícita da simetria $U(1)$ fez-se necessária. Uma dúvida permanece: apesar da quebra explícita da simetria de *gauge* no *processo* de quantização, a teoria quântica obtida é ou não uma teoria de *gauge*? A fim de elucidarmos essa questão, consideremos a seguinte transformação $U(1)$ nas funções integradas na representação (3.436) para o funcional gerador termodinâmico :

$$A_\mu(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow A'_\mu(\mathbf{x}, \tau) = A_\mu(\mathbf{x}, \tau) - \partial_\mu \zeta(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.482)$$

$$\psi_a(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \psi'_a(\mathbf{x}, \tau) = e^{iq_e \zeta(\mathbf{x}, \tau)} \psi_a(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.483)$$

$$\bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \bar{\psi}'_a(\mathbf{x}, \tau) = \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau) e^{-iq_e \zeta(\mathbf{x}, \tau)}; \quad (3.484)$$

$$C(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow C'(\mathbf{x}, \tau) = C(\mathbf{x}, \tau); \quad (3.485)$$

$$\bar{C}(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \bar{C}'(\mathbf{x}, \tau) = \bar{C}(\mathbf{x}, \tau), \quad (3.486)$$

sendo $\zeta(\mathbf{x}, \tau)$ uma função escalar de $SO(4)$ real e periódica na variável τ com período β .

A medida de integração funcional do funcional gerador é invariante sob essa transformação $U(1)$ [57]. Portanto, o funcional gerador termodinâmico se escreve como:

$$\begin{aligned} Z_{GF} = & \det_P(m_P)^{-3} \int_P \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \int_{A-P} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_T} \times \\ & \times \exp \left\{ - \int_\beta d^4y \left\{ \zeta \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right)^2 \Delta \partial_\nu A_\nu + \partial_\nu J_\nu \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_\mu \zeta P_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)} \partial_\nu \zeta - \bar{\eta}_a (e^{iq_e \zeta} - 1) \psi_a - \bar{\psi}_a (e^{-iq_e \zeta} - 1) \eta_a \right\} \right\} \times \\ & \times \exp \left[\int_\beta d^4x (J_\mu A_\mu + \bar{\eta}_a \psi_a - \bar{\psi}_a \eta_a - \bar{C}d + \bar{d}C) \right]. \quad (3.487) \end{aligned}$$

Visto que o funcional gerador termodinâmico era originalmente independente da função $\zeta(\mathbf{x}, \tau)$, a seguinte relação deve valer:

$$\left. \frac{\delta Z_{GF}}{\delta \zeta(\mathbf{x}, \tau_x)} \right|_{\zeta=0} = 0. \quad (3.488)$$

Dessas duas últimas expressões, encontramos a seguinte equação:

$$\left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right)^2 \Delta \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu} + \partial_\mu J_\mu + iq_e \left(\bar{\eta}_a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_a} - \eta_a \frac{\delta}{\delta \eta_a} \right) \right] Z_{GF} = 0. \quad (3.489)$$

Escrevendo o funcional gerador termodinâmico como $Z_{GF} = e^W$, podemos reescrever essa expressão como:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) = & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right)^2 \Delta \partial_\mu \vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) + \\ & -iq_e [\bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \chi_a(\mathbf{x}, \tau_x) - \eta_a(\mathbf{x}, \tau_x) \bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x)]. \end{aligned} \quad (3.490)$$

Dessa expressão decorrem todas as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi [58, 14, 15, 59].

3.9.1 A transversalidade do tensor de polarização de Podolsky

A fim de encontrarmos uma das identidades de Ward-Fradkin-Takahashi, calculemos a derivada funcional de (3.490) com relação ao campo $\vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu^{(x)} \frac{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} = & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right)^2 \Delta \partial_\mu^{(x)} \frac{\delta \vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} + \\ & -iq_e \left[\frac{\delta \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} \chi_a(\mathbf{x}, \tau_x) + \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \frac{\delta \chi_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} + \right. \\ & \left. - \frac{\delta \eta_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} \bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) - \eta_a(\mathbf{x}, \tau_x) \frac{\delta \bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} \right]. \end{aligned} \quad (3.491)$$

De acordo com os comentários da seção anterior sobre as distribuições pentes de Dirac,

$$\frac{\delta \vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} = \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_\beta^+(\tau_x - \tau_y). \quad (3.492)$$

Dessa mesma expressão, com índices e parâmetros trocados, temos:

$$\begin{aligned} \delta_{\xi\nu} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \Delta_\beta^+(\tau_z - \tau_y) = & \frac{\delta \vartheta_\xi(\mathbf{z}, \tau_z)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} = \int_\beta d^4x \frac{\delta \vartheta_\xi(\mathbf{z}, \tau_z)}{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)} \frac{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} \\ = & \int_\beta d^4x \mathcal{D}_{\xi\mu}^{[s]}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \tau_z, \tau_x) \frac{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)}. \end{aligned} \quad (3.493)$$

Donde identificamos:

$$\frac{\delta J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} = [\mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)]^{-1}. \quad (3.494)$$

Dessa forma, a equação (3.491) é equivalente a

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^{(x)} [\mathcal{D}_{\mu\nu}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y)]^{-1} = & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right)^2 \Delta \partial_\mu^{(x)} \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_\beta^+(\tau_x - \tau_y) + \\
& -iq_e \left[\frac{\delta \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} \chi_a(\mathbf{x}, \tau_x) + \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \frac{\delta \chi_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} + \right. \\
& \left. - \frac{\delta \eta_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} \bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) - \eta_a(\mathbf{x}, \tau_x) \frac{\delta \bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x)}{\delta \vartheta_\nu(\mathbf{y}, \tau_y)} \right].
\end{aligned} \tag{3.495}$$

De acordo com a definição (3.446), as derivadas funcionais de W definidas pelas equações (3.448) e (3.449) são:

$$\bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) = \frac{1}{Z_{GF}[J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}]} \frac{\delta Z_{GF}[J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}]}{\delta \eta_a(\mathbf{x}, \tau_x)}; \tag{3.496}$$

$$\chi_a(\mathbf{x}, \tau_x) = \frac{1}{Z_{GF}[J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}]} \frac{\delta Z_{GF}[J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}]}{\delta \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau_x)}. \tag{3.497}$$

Fazendo-se as fontes externas nulas e utilizando (2.102), encontramos:

$$\bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x)|_{s=0} = \left\langle \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \right\rangle; \tag{3.498}$$

$$\chi_a(\mathbf{x}, \tau_x)|_{s=0} = \left\langle \widehat{\psi}_a(\mathbf{x}, \tau_x) \right\rangle. \tag{3.499}$$

Então, de acordo com (3.441):

$$\bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x)|_{s=0} = \chi_a(\mathbf{x}, \tau_x)|_{s=0} = 0. \tag{3.500}$$

Portanto, ao se fazer as fontes clássicas nulas na equação (3.495), obtemos a seguinte relação:

$$\partial_\mu^{(x)} [\mathcal{D}_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)]^{-1} = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right)^2 \Delta \partial_\nu^{(x)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_\beta^+(\tau_x - \tau_y). \tag{3.501}$$

A fim de facilitar a interpretação dessa equação, escreve-la-emos no espaço de Fourier:

$$k_\mu^{Bn} \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{(k^{Bn})^2}{m_P^2} + 1 \right]^2 (k^{Bn})^2 k_\nu^{Bn}. \quad (3.502)$$

Notamos, agora, que o segundo membro dessa equação não depende da constante de acoplamento q_e . Portanto, ao se estudar o caso livre, ou seja, o caso no qual $q_e = 0$, basta substituir a inversa da função de Green de Podolsky completa primeiro membro dessa relação pela inversa da função de Green de Podolsky livre, que coincide com o operador diferencial de Podolsky (3.480):

$$k_\mu^{Bn} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(k^{Bn}) = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{(k^{Bn})^2}{m_P^2} + 1 \right]^2 (k^{Bn})^2 k_\nu^{Bn}. \quad (3.503)$$

De acordo com a equação (3.478), a relação entre as inversas da função de Green completa e da livre é:

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \tilde{F}_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(k^{Bn}) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B). \quad (3.504)$$

Substituindo a expressão (3.504) na equação (3.502) e levando (3.503) em consideração, obtemos:

$$k_\mu^{Bn} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = 0. \quad (3.505)$$

Essa relação é conhecida como a *transversalidade do tensor de polarização* da teoria de Podolsky em equilíbrio termodinâmico e é uma das identidades de Ward-Fradkin-Takahashi [14, 15, 59].

3.9.2 A identidade de Ward

Consideremos a transformada funcional de Legendre do funcional W :

$$\Gamma[\vartheta, \chi, \bar{\chi}; d, \bar{d}] \equiv W[J, \eta, \bar{\eta}, d, \bar{d}] - \int_\beta d^4x [J_\mu \vartheta_\mu + \bar{\eta}_a \chi_a - \bar{\chi}_a \eta_a]. \quad (3.506)$$

Derivando funcionalmente essa expressão com relação aos campos, vemos que

$$\frac{\delta\Gamma [\vartheta, \chi, \bar{\chi}; d, \bar{d}]}{\delta\vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)} = -J_\mu(\mathbf{x}, \tau_x); \quad (3.507)$$

$$\frac{\delta\Gamma [\vartheta, \chi, \bar{\chi}; d, \bar{d}]}{\delta\chi_a(\mathbf{x}, \tau_x)} = \bar{\eta}_a(\mathbf{x}, \tau_x); \quad (3.508)$$

$$\frac{\delta\Gamma [\vartheta, \chi, \bar{\chi}; d, \bar{d}]}{\delta\bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x)} = \eta_a(\mathbf{x}, \tau_x). \quad (3.509)$$

Portanto, podemos escrever (3.490) em termos de derivadas da função $\Gamma [\vartheta, \chi, \bar{\chi}; d, \bar{d}]$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta\vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_P^2} + 1 \right)^2 \Delta \partial_\mu \vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) + iq_e \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi_c(\mathbf{x}, \tau_x)} \chi_c(\mathbf{x}, \tau_x) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\chi}_c(\mathbf{x}, \tau_x)} \bar{\chi}_c(\mathbf{x}, \tau_x) \right]. \end{aligned} \quad (3.510)$$

Derivando essa expressão com relação aos campos $\bar{\chi}_a(\mathbf{y}, \tau_y)$ e $\chi_b(\mathbf{z}, \tau_z)$ e tornando as fontes nulas na sequência, encontramos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) \delta\chi_b(\mathbf{z}, \tau_z) \delta\bar{\chi}_a(\mathbf{y}, \tau_y)} \Big|_{s=0} &= iq_e \left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\chi}_a(\mathbf{y}, \tau_y) \delta\chi_b(\mathbf{x}, \tau_x)} \Big|_{s=0} \times \right. \\ &\quad \times \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \Delta_\beta^-(\tau_x - \tau_z) + \\ &\quad + \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\chi_b(\mathbf{z}, \tau_z) \delta\bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x)} \Big|_{s=0} \times \\ &\quad \left. \times \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_\beta^-(\tau_x - \tau_y) \right]. \end{aligned} \quad (3.511)$$

Semelhantemente ao caso da subseção anterior, as equações (3.451) e (3.509) nos mostram que

$$\frac{\delta^2\Gamma [\vartheta, \chi, \bar{\chi}; d, \bar{d}]}{\delta\chi_b(\mathbf{z}, \tau_z) \delta\bar{\chi}_a(\mathbf{x}, \tau_x)} = \left[\mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \right]^{-1}. \quad (3.512)$$

A derivada dessa equação com relação ao campo $\vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x)$ é, de acordo com (3.461), proporcional à função de vértice completa:

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \vartheta_\mu(\mathbf{x}, \tau_x) \delta \chi_b(\mathbf{z}, \tau_z) \delta \bar{\chi}_a(\mathbf{y}, \tau_y)} = \frac{\delta \left\{ \left[\mathcal{S}_{ab}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_x, \tau_y) \right]^{-1} \right\}}{\delta \vartheta_\mu(\mathbf{z}, \tau_z)} = i q_e \Gamma_{\mu(ab)}^{[s]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \tau_x, \tau_y, \tau_z). \quad (3.513)$$

Logo, (3.511) é

$$\partial_\mu^{(x)} \Gamma_{\mu(ab)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \tau_x, \tau_y, \tau_z) = [\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \tau_x - \tau_z)]^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta_\beta^-(\tau_x - \tau_y) + \\ - [\mathcal{S}_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y)]^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \Delta_\beta^-(\tau_x - \tau_z). \quad (3.514)$$

No espaço de Fourier, essa relação se escreve como:

$$p_\mu^{Bl} \tilde{\Gamma}_{\mu(ab)}(\mathbf{k}, \omega_n^F; \mathbf{p}, \omega_l^B) = \tilde{\mathcal{S}}_{ab}^{-1}(\mathbf{k} + \mathbf{p}, \omega_n^F + \omega_l^B) - \tilde{\mathcal{S}}_{ab}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n^F), \quad (3.515)$$

que é conhecida como *a identidade de Ward em equilíbrio termodinâmico* [58, 15]. A expressão acima deixa clara a dependência da função de vértice no equilíbrio com os dois tipos de frequência de Matsubara, o bosônico e o fermiônico e que a relação acima somente é válida quando se toma a quadridivergência Euclideana de $\Gamma_{\mu(ab)}$ no espaço de Fourier com o quadrimento térmico bosônico p^{Bl} . Uma vez que as funções de Green fermiônicas estão definidas *a priori* apenas para frequências de Matsubara fermiônicas, é interessante chamar a atenção para o fato de que o termo correspondente à frequência na primeira inversa da função de Green fermiônica do segundo membro de (3.515) é uma frequência de Matsubara *fermiônica*, apesar de ser uma soma de uma fermiônica com uma bosônica pois, $\omega_n^F + \omega_l^B = \omega_{n+l}^F$. A versão correspondente para temperatura nula seria $p^\mu \Gamma_{\mu(ab)}(k, p) = \mathcal{S}_{ab}^{-1}(k + p) - \mathcal{S}_{ab}^{-1}(k)$ [58]. No limite $p_\mu \rightarrow 0$ essa identidade coincidiria com a definição de uma derivada direcional e valeria a chamada *identidade de Ward diferencial*, $\Gamma_{\mu(ab)}(k, 0) = \partial \mathcal{S}_{ab}^{-1}(k) / \partial k^\mu$. Na situação de equilíbrio, contudo, não se pode escrever uma tal versão diferencial de (3.515) devido ao fato de que as frequências de Matsubara são discretas e igualmente espaçadas, donde não constituem pontos de acumulação, salvo realizada algum tipo de extensão analítica. Extensões analíticas são associadas com pequenos desvios do equilíbrio. Portanto, na situação de equilíbrio termodinâmico propriamente dita, apenas vale a identidade de Ward na versão (3.515).

Iniciamos este capítulo com o uso do princípio de *gauge* Abelian no regime clássico. Vimos que o campo de Podolsky surge como uma alternativa natural para o usual campo de Maxwell. Estudando as propriedades

clássicas do campo de Podolsky, fixamos o sinal de seu parâmetro livre e vimos que ele pode ser decomposto num setor massivo e num sem massa. Adentrando no domínio quântico, aplicamos o formalismo de quantização de Dirac para a parte fermiônica da teoria. Sendo o campo eletromagnético um campo de *gauge*, optamos por sua quantização *via* método de Nakanishi e vimos, na sequência, como os campos fantasmas surgem da simetria de *gauge* residual. A presença dos campos fantasmas implicou a existência de uma nova simetria na teoria e, por conseguinte, de uma nova carga conservada e de um novo potencial químico. Estudando médias térmicas, constatamos que ordenamentos de campos, que adiante seriam relacionados com as funções de Green, possuem certas periodicidades específicas. Na sequência, encontramos representações de integração funcional para o funcional gerador termodinâmico e para a função de partição da teoria de Podolsky. Então, escrevemos as equações de Dyson-Schwinger-Fradkin e encontramos representações para as funções de Green no espaço de Fourier. Como último tópico do capítulo, estudamos as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi da teoria em equilíbrio, enfatizando a transversalidade do tensor de polarização e a identidade de Ward em equilíbrio termodinâmico.

Capítulo 4

Implicações físicas da teoria de Podolsky

Nos capítulos anteriores apresentamos a teoria geral da quantização da teoria eletromagnética de Podolsky quando os efeitos térmicos são dominantes. Neste capítulo, estudaremos algumas consequências físicas e implicações fenomenológicas da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico.

4.1 Correção na lei de Stefan-Boltzmann

Uma vez que o campo eletromagnético de Podolsky difere do de Maxwell por conter implícita e intrinsecamente um setor massivo, a massa desse campo de Proca introduz uma escala de energia típica correspondente ao campo de *gauge*. Em princípio, esse campo de Proca deve afetar apreciavelmente todos experimentos eletromagnéticos desde que as energias envolvidas sejam comparáveis com a massa do campo de Podolsky. Um dos experimentos mais marcantes da história da Física diz respeito à radiação de corpo negro. Pode-se dizer que a versão mais antiga da teoria quântica surgiu quando Planck postulou a discretização dos possíveis valores para as trocas de energia entre os modos do campo eletromagnético e os osciladores constituintes do próprio corpo negro. Com o advento há algumas décadas da interpretação moderna das teorias de *gauge*, o mesmo fenômeno descrito por Planck é entendido de uma maneira mais fundamental como sendo o próprio *campo quântico eletromagnético Maxwelliano em equilíbrio termodinâmico*. Um dos resultados desse arcabouço teórico é a *lei de Stefan-Boltzmann*, que diz que a densidade de energia do campo eletromagnético em equilíbrio térmico é proporcional à quarta potência da temperatura [60]. Nosso objetivo nesta

seção é abordar o mesmo problema considerando o campo eletromagnético de Podolsky em vez do de Maxwell a fim de obtermos alguma consequência fenomenológica devido ao termo de derivadas de ordem superior do campo, presente na densidade de Lagrangeana da teoria.

É possível levar em consideração, pelo menos em algum nível de aproximação, os efeitos da interação do campo eletromagnético com os campos fermiônicos para se obter uma teoria mais completa [61]. Os experimentos relacionados à radiação de corpo negro, contudo, ainda não são capazes de detectar tais correções quânticas. Por essa razão, limitar-nos-emos ao caso de campos livres e como os campos fermiônicos livres não desempenham nenhum papel na radiação de corpo negro, consideraremos nesta seção apenas o campo de Podolsky livre.

4.1.1 A função de partição do campo de Podolsky livre

Conforme enfatizamos diversas vezes, a partir da função de partição se pode calcular todas as quantidades termodinâmicas. Na verdade, todas as quantidades termodinâmicas são determinadas pela derivada do logaritmo da função de partição com respeito ao inverso da energia térmica. Por essa razão, consideremos o logaritmo da função de partição do campo de Podolsky livre (3.434):

$$\ln [Z_P(\beta)] = -\ln \left[\det_P(\Delta) \right] - \frac{3}{2} \ln \left[\det_P(\Delta + m_P^2) \right]. \quad (4.1)$$

Nossa primeira tarefa é calcular cada um desses determinantes.

O determinante de Δ

O cálculo desse determinante é conhecido. Contudo, como é relativamente raro encontrá-lo em livros-textos, apresentaremos aqui os passos essenciais.

Utilizando uma representação funcional para o determinante, temos [62]

$$\left[\det_P(\Delta) \right]^{-\frac{1}{2}} = \int_P D\phi(\mathbf{x}, \tau) \exp \left[- \int_\beta dx \phi(\mathbf{x}, \tau) \Delta \phi(\mathbf{x}, \tau) \right], \quad (4.2)$$

sendo $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ uma função real e o índice P denotando integração funcional restrita sobre todas as configurações de campos que satisfazem condições periódicas de contorno com período β :

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, \beta). \quad (4.3)$$

A fim de calcularmos o segundo membro dessa expressão, consideremos a transformada de Fourier do campo ϕ . Por questão de simplificação

matemática, consideremos que o sistema encontra-se restrito a uma “caixa” com volume V .

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n, \mathbf{p}} e^{i(\omega_n^B \tau + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \tilde{\phi}_n(\mathbf{p}). \quad (4.4)$$

A escolha incomum do fator multiplicativo garante que a quantidade $\tilde{\phi}_n(\mathbf{p})$ seja adimensional. Uma vez que escrevemos uma decomposição em frequências de Matsubara bosônicas, temos uma transformada automaticamente periódica. Visto que estamos apenas analisando o caso do campo de Podolsky nesta seção, por questões de simplificação de notação denotaremos a frequência de Matsubara bosônica ω_n^B simplesmente por ω_n .

Da condição de realidade do campo, encontramos

$$\tilde{\phi}_n(\mathbf{p}) = \tilde{\phi}_{-n}(-\mathbf{p})^*. \quad (4.5)$$

Com isso,¹

$$\begin{aligned} [\det_P(\Delta)]^{-\frac{1}{2}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{n', \mathbf{p}'} d|\tilde{\phi}_{n'}(\mathbf{p}')| \right] \exp \left[-\beta^2 \sum_{n, \mathbf{p}} (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2) |\tilde{\phi}_n(\mathbf{p})|^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{n', \mathbf{p}'} d|\tilde{\phi}_{n'}(\mathbf{p}')| \right] \times \\ &\quad \times \left\{ \prod_{n, \mathbf{p}} \exp \left[-\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2) |\tilde{\phi}_n(\mathbf{p})|^2 \right] \right\} \\ &= \prod_{n, \mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\tilde{\phi}_n(\mathbf{p})| \exp \left[-\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2) |\tilde{\phi}_n(\mathbf{p})|^2 \right] \\ &= \prod_{n, \mathbf{p}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)}} = C \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{n, \mathbf{p}} \beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nesta expressão, C é uma constante multiplicativa na função de partição independente da temperatura e, por conseguinte, irrelevante para efeitos termodinâmicos. Então:

¹Nessa dedução utilizamos o resultado da integral Gaussiana: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, válido para $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ ou para $a = ib$ para qualquer $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \det_P (\Delta) &= \left\{ \left[\det_P (\Delta) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^{-2} = \left[\frac{1}{\sqrt{\prod_{n,\mathbf{p}} \beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)}} \right]^{-2} \\ &= \prod_{n,\mathbf{p}} \beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Finalmente:

$$\ln \left[\det_P (\Delta) \right] = \ln \left[\prod_{n,\mathbf{p}} \beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2) \right] = \sum_{n,\mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)]. \quad (4.8)$$

Esse é exatamente o cálculo realizado para a teoria de Maxwell.

O determinante de $\Delta + m_P^2$

Procedendo de maneira *inteiramente* análoga ao caso anterior, encontramos:

$$\ln \left[\det_P (\Delta + m_P^2) \right] = \sum_{n,\mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_P^2)]. \quad (4.9)$$

Portanto, o logaritmo da função de partição do campo livre de Podolsky pode ser escrito como

$$\ln [Z_P (\beta)] = - \sum_{n,\mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)] - \frac{3}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_P^2)]. \quad (4.10)$$

Na próxima seção, calcularemos essas séries.

O logaritmo da função de partição

Concentrar-nos-emos no caso massivo. Os cálculos correspondentes a esta etapa para o caso sem massa podem ser obtidos como um caso particular do caso com massa diferente de zero. Assim:

$$\begin{aligned} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_P^2)] &= \ln \left\{ \beta^2 \left[\left(\frac{2n\pi}{\beta} \right)^2 + \mathbf{p}^2 + m_P^2 \right] \right\} \\ &= \ln [(2n\pi)^2 + \beta^2 (\mathbf{p}^2 + m_P^2)] \\ &= \ln [(2n\pi)^2 + \beta^2 \omega^2 (p, m_P)], \end{aligned} \quad (4.11)$$

com

$$\omega(p, m_P) \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_P^2}.$$

Consideremos a seguinte integral:

$$\begin{aligned} \int_1^{[\beta\omega(p, m_P)]^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n\pi)^2} &= \int_{1+(2n\pi)^2}^{[\beta\omega(p, m_P)]^2 + (2n\pi)^2} \frac{d\alpha}{\alpha} \\ &= \ln [\beta^2 \omega^2(p, m_P) + (2n\pi)^2] - \ln [1 + (2n\pi)^2]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Esse cálculo fornece uma representação funcional para o termo que precisamos calcular:

$$\ln [(2n\pi)^2 + \beta^2 \omega^2(p, m_P)] = \int_1^{[\beta\omega(p, m_P)]^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n\pi)^2} + \ln [1 + (2n\pi)^2]. \quad (4.13)$$

Mas sendo o último termo independente de β , podemos abandoná-lo. Então:

$$\begin{aligned} \sum_{n, \mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_P^2)] &= \sum_{n, \mathbf{p}} \ln [(2n\pi)^2 + \beta^2 \omega^2(p, m_P)] \\ &= \sum_{n, \mathbf{p}} \int_1^{[\beta\omega(p, m_P)]^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n\pi)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{p}} \int_1^{[\beta\omega(p, m_P)]^2} d\theta^2 \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + (\frac{\theta}{2\pi})^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Utilizando o resultado

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + (\frac{\theta}{2\pi})^2} = \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right), \quad (4.15)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{n, \mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_P^2)] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{p}} \int_1^{[\beta\omega(p, m_P)]^2} d\theta^2 \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + (\frac{\theta}{2\pi})^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \int_1^{[\beta\omega(p, m_P)]^2} \frac{d\theta^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

mas

$$\frac{d\theta^2}{\theta} = \frac{2\theta d\theta}{\theta} = 2d\theta. \quad (4.17)$$

Portanto:

$$\sum_{n,\mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_P^2)] = -2 \left[- \sum_{\mathbf{p}} \int_1^{\beta\omega(p,m_P)} d\theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right) \right]. \quad (4.18)$$

Resolvendo a integral em θ , passando a série sobre \mathbf{p} para o contínuo e abandonando termos irrelevantes para a termodinâmica, encontramos:

$$\begin{aligned} \sum_{n,\mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_P^2)] &= -2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2}\beta\omega(p, m_P) + \right. \\ &\quad \left. - \ln [1 - e^{-\beta\omega(p,m_P)}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sendo essa expressão válida inclusiva para $m_P = 0$, obtemos o termo associado ao setor sem massa como um caso particular desse resultado:

$$\sum_{n,\mathbf{p}} \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)] = -2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2}\beta\omega(p, 0) - \ln [1 - e^{-\beta\omega(p,0)}] \right\}. \quad (4.20)$$

Assim, toda a informação termodinâmica do campo de Podolsky livre está contida na função de partição:

$$\begin{aligned} \ln [Z_P(\beta)] &= 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2}\beta\omega(p, 0) - \ln [1 - e^{-\beta\omega(p,0)}] \right\} + \\ &\quad + 3V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2}\beta\omega(p, m_P) - \ln [1 - e^{-\beta\omega(p,m_P)}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

O termo $V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2}\beta\omega(p, m) - \ln [1 - e^{-\beta\omega(p,m)}] \right\}$ corresponde ao logaritmo da função de partição de um grau de liberdade de um campo bosônico de massa m . Os fatores numéricos multiplicativos correspondem ao número de graus de liberdade de cada campo: dois para o caso sem massa e três para o setor massivo, conforme já havíamos antecipado no capítulo anterior. Vale ressaltar que fatores multiplicativos, dependentes ou não da temperatura, *no logaritmo da função de partição* têm consequências observáveis, ao

contrário de fatores numéricos multiplicativos independentes da temperatura na própria função de partição. Estes traduzem-se como fatores *aditivos* independentes da temperatura no logaritmo da função de partição, que não possuem implicações termodinâmicas.

A fim de calcularmos as integrais presentes em (4.21) notamos, primeiramente, que os termos do tipo $\frac{\beta\omega}{2}$ correspondem à energia do estado fundamental do campo de Podolsky (que, como ocorre com as teorias de campos mais usuais, diverge) e podem ser ignorados na análise subsequente.

Uma vez que o problema possui simetria esférica no espaço de Fourier, podemos calcular as integrais angulares presentes em (4.21) e escrever:

$$\ln [Z_P(\beta)] = \ln [Z(\beta)]_M + \ln [Z(\beta)]_P, \quad (4.22)$$

com

$$\ln [Z(\beta)]_M \equiv -\frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 - e^{-\beta p}); \quad (4.23)$$

$$\ln [Z(\beta)]_P \equiv -\frac{3V}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln[1 - e^{-\beta\omega(p, m_P)}]. \quad (4.24)$$

Calcularemos, agora, cada um desses termos.

A integral do setor sem massa

Escrevendo $p^2 = \frac{1}{3} \frac{dp^3}{dp}$ e integrando por partes, podemos escrever o termo sem massa como:

$$\ln [Z(\beta)]_M = \frac{1}{3} \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^3 \frac{d \ln(1 - e^{-\beta p})}{dp}. \quad (4.25)$$

O termo dependente da derivada pode ser escrito como

$$\frac{d \ln(1 - e^{-\beta p})}{dp} = \frac{d \ln(1 - e^{-\beta p})}{d(1 - e^{-\beta p})} \frac{d(1 - e^{-\beta p})}{dp} = \frac{\beta e^{-\beta p}}{1 - e^{-\beta p}}. \quad (4.26)$$

Visto que $\beta p > 0$ (a igualdade é um ponto de medida nula na integral (4.23) e foi, de fato, excluída de seu integrando a fim de ele seja um número real), temos $e^{-\beta p} < 1$ e podemos utilizar a série geométrica,

$$\frac{1}{1 - e^{-\beta p}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta p}, \quad (4.27)$$

donde

$$\ln [Z(\beta)]_M = \frac{\beta V}{3\pi^2} \int_0^\infty dp p^3 \sum_{k=1}^\infty e^{-k\beta p}. \quad (4.28)$$

Sejam

$$x \equiv \beta p; \quad (4.29)$$

$$p = \frac{x}{\beta}; \quad (4.30)$$

$$dp = \frac{dx}{\beta}. \quad (4.31)$$

Dessa forma,

$$\ln [Z(\beta)]_M = \frac{1}{3\pi^2} \frac{V}{\beta^3} \int_0^\infty dx x^3 \sum_{k=1}^\infty e^{-kx}. \quad (4.32)$$

Definimos uma integral um pouco mais geral dessa série como

$$I_n \equiv \int_0^\infty dx x^n \sum_{k=1}^\infty e^{-kx}. \quad (4.33)$$

A fim de resolvermos I_n , realizamos a seguinte mudança de variáveis:

$$y \equiv kx; \quad (4.34)$$

$$x = \frac{y}{k}; \quad (4.35)$$

$$dx = \frac{dy}{k} \quad (4.36)$$

Então, I_n se decompõe num produto de uma integral por uma série:

$$I_n = \left(\int_0^\infty dy y^n e^{-y} \right) \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{n+1}} \right). \quad (4.37)$$

Os elementos desse produto são independentes um do outro e são, ainda, representações de duas funções especiais: a série é uma representação da *função zeta Riemman* $\zeta(z)$ e a integral é uma representação da *função gama* $\Gamma(z)$:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{n+1}} = \zeta(n+1); \quad (4.38)$$

$$\int_0^\infty dy y^n e^{-y} = \Gamma(n+1). \quad (4.39)$$

Portanto:

$$I_n = \Gamma(n+1) \zeta(n+1). \quad (4.40)$$

Substituindo esse resultado em (4.32), vemos que aquela expressão se escreve numa forma simples:

$$\ln [Z(\beta)]_M = \frac{1}{3\pi^2} \frac{V}{\beta^3} I_3 = \frac{1}{3\pi^2} \frac{V}{\beta^3} \Gamma(4) \zeta(4). \quad (4.41)$$

Os valores particulares das duas funções especiais são:

$$\Gamma(4) = 3! = 6; \quad (4.42)$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}. \quad (4.43)$$

Logo, obtemos o resultado:

$$\ln [Z(\beta)]_M = \frac{\pi^2}{45} \frac{V}{\beta^3}. \quad (4.44)$$

Esse é o logaritmo da função de partição da teoria de Maxwell. Caso ignorássemos a contribuição de derivadas de segunda ordem característica da teoria de Podolsky, a expressão acima descreveria a radiação de corpo negro tal qual ela era estudada no início do século passado.

A integral do setor massivo

De uma forma semelhante ao caso sem massa, podemos escrever para a integral correspondente ao campo de Proca:

$$\ln [Z(\beta)]_P = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^3 \frac{d}{dp} \ln [1 - e^{-\beta\omega(p, m_P)}]. \quad (4.45)$$

Como $e^{-\beta\omega(p, m_P)} < 1$, também podemos utilizar a série geométrica no caso massivo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \ln [1 - e^{-\beta\omega(p, m_P)}] &= \frac{\beta p e^{-\beta\omega(p, m_P)}}{\omega(p, m_P)} \left[\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(p, m_P)}} \right] \\ &= \frac{\beta p}{\omega(p, m_P)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\beta\omega(p, m_P)}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Logo, o logaritmo da função de partição do setor massivo é

$$\ln [Z(\beta)]_P = \frac{\beta V}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^4}{\omega(p, m_P)} \sum_{k=1}^\infty e^{-k\beta\omega(p, m_P)}. \quad (4.47)$$

Reescrevendo a integral em termos de $\omega(p, m_P) = \sqrt{p^2 + m_P^2} \equiv \omega$, ficamos com

$$\ln [Z(\beta)]_P = \frac{\beta V}{2\pi^2} \sum_{k=1}^\infty \int_{m_P}^\infty d\omega (\omega^2 - m_P^2)^{\frac{3}{2}} e^{-k\beta\omega}. \quad (4.48)$$

Realizando a seguinte mudança de variável:

$$w \equiv \frac{\omega}{m_P}, \quad (4.49)$$

a expressão acima se torna

$$\ln [Z(\beta)]_P = \frac{\beta m_P^4 V}{2\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \int_1^\infty dw (w^2 - 1)^{2-\frac{1}{2}} e^{-n\beta m_P w}. \quad (4.50)$$

Contudo, para $n > -1/2$, temos a seguinte representação para a *função de Bessel modificada do segundo tipo* $K_n(z)$ [33]:

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_1^\infty e^{-zx} (x^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dx, \quad (4.51)$$

Logo, para $n = 2$ e $z = n\beta m_P$, temos:

$$\int_1^\infty dw (w^2 - 1)^{2-\frac{1}{2}} e^{-n\beta m_P w} = \frac{4\Gamma(\frac{5}{2})}{\sqrt{\pi} (n\beta m_P)^2} K_2(n\beta m_P). \quad (4.52)$$

Sendo

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad (4.53)$$

obtemos o seguinte resultado:

$$\int_1^\infty dw (w^2 - 1)^{2-\frac{1}{2}} e^{-n\beta m_P w} = \frac{3K_2(n\beta m_P)}{(n\beta m_P)^2}. \quad (4.54)$$

Portanto, o logaritmo da função de partição de um campo de Proca livre com massa m_P é

$$\ln [Z(\beta)]_P = \frac{3\beta m_P^4 V}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\beta m_P)}{(n\beta m_P)^2}. \quad (4.55)$$

Infelizmente, não há nenhuma forma fechada conhecida para a série que aparece nessa expressão, o que significa que as propriedades termodinâmicas de um campo vetorial massivo livre, ao contrário do que ocorre com um campo de massa nula, somente podem ser conhecidas aproximadamente.

A densidade de Lagrangeana do campo de Podolsky livre (3.15) escrita em termos da massa de Podolsky é

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_P^2}\partial_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu}\partial_\xi\mathcal{F}^\xi{}_\nu. \quad (4.56)$$

Tomando *ingenuamente* o limite da massa indo a infinito nessa densidade de Lagrangeana recaímos no caso usual de Maxwell (3.14):

$$\lim_{m_P \rightarrow \infty} \mathcal{L}_P = \mathcal{L}_M. \quad (4.57)$$

Esse resultado simples indica que a teoria de Maxwell é um limite da teoria de Podolsky: quando as energias envolvidas no problema físico forem desprezíveis frente à massa de Podolsky, a teoria de Maxwell é uma boa aproximação.² Sabemos que a teoria de Maxwell descreve muito bem todos os fenômenos eletromagnéticos conhecidos, inclusive aqueles associados à radiação de corpo negro. Nesse sentido, caso a teoria de Podolsky seja a teoria fundamental da interação eletromagnética, concluímos que os regimes de energia investigados até o presente são muito menores do que a escala típica do campo eletromagnético, a saber, m_P . Para o campo de Maxwell livre em equilíbrio termodinâmico existe apenas uma escala de energia: aquela definida pela energia térmica $T = \beta^{-1}$. Dessa discussão, concluímos que a massa de Podolsky deve ser muito maior do que os valores de energia térmica até o momento estudados. Dessa forma, restringiremos nossa análise aos casos nos quais as temperaturas sejam baixas o suficiente para a seguinte condição se cumprir:

$$\beta m_P \gg 1. \quad (4.58)$$

Nesses regimes de energia, podemos aproximar a função de Bessel modificada do segundo tipo por

$$K_2(n\beta m) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n\beta m}} e^{-n\beta m}, \quad (4.59)$$

²A sentença faz sentido caso se assuma que a teoria correta seja a de Podolsky.

para $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq 0$.

Com essa aproximação, a série cujo resultado não se conhece se simplifica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\beta m_P)}{(n\beta m_P)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\beta m_P)^{\frac{5}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-\beta m_P})^n}{n^{\frac{5}{2}}}. \quad (4.60)$$

Na aproximação de baixas temperaturas (4.58), vale $e^{-\beta m_P} \ll 1$. Consequentemente, também vale $(e^{-\beta m_P})^{n+1} \ll (e^{-\beta m_P})^n$ para todo n natural. Logo, o termo dominante na série do segundo membro de (4.60) é o correspondente a $n = 1$ e temos o seguinte resultado aproximado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\beta m_P)}{(n\beta m_P)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\beta m_P}}{(\beta m_P)^{\frac{5}{2}}}. \quad (4.61)$$

Portanto, o logaritmo da função de partição de um campo de Proca para temperaturas baixas é suficiente para que a energia térmica $T = \beta^{-1}$ seja muito inferior à massa m_P do campo é

$$\ln [Z(\beta)]_P \sim 3V \left(\frac{m_P}{2\pi\beta} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m_P}. \quad (4.62)$$

Agora que já calculamos, pelo menos aproximadamente, os logaritmos das funções de partição associadas aos dois setores do campo de Podolsky, podemos calcular as quantidades termodinâmicas que desejamos.

4.1.2 A densidade de energia interna do campo quântico de Podolsky

Substituindo os resultados (4.44) e (4.62) em (4.22), encontramos o logaritmo da função de partição do campo de Podolsky livre na aproximação de baixas temperaturas (4.58):

$$\ln [Z_P(\beta)] = \frac{\pi^2 V}{45 \beta^3} + 3V \left(\frac{m_P}{2\pi\beta} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta m_P}. \quad (4.63)$$

A densidade de energia interna do campo eletromagnético de Podolsky livre é obtida através da expressão:

$$u(T; m_P) \equiv -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial \ln [Z_P(\beta)]}{\partial \beta} \right|_V. \quad (4.64)$$

Realizando esse cálculo, obtemos o seguinte resultado:

$$u(T; m_P) = \sigma(T, m_P) T^4. \quad (4.65)$$

Nesta expressão, a função $\sigma(T, m_P)$ é

$$\sigma(T, m_P) \equiv \sigma_0 + \delta\sigma\left(\frac{m_P}{T}\right), \quad (4.66)$$

sendo

$$\sigma_0 \equiv \frac{\pi^2}{15} \quad (4.67)$$

a constante de Stefan-Boltzmann e

$$\delta\sigma\left(\frac{m_P}{T}\right) = \frac{45\sigma_0}{\sqrt{8\pi^7}} \left(\frac{m_P}{T}\right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{m_P}{T}}. \quad (4.68)$$

O resultado obtido com a teoria de Maxwell, a saber,

$$u_0(T) = \sigma_0 T^4, \quad (4.69)$$

constitui-se na *lei de Stefan-Boltzmann*. As expressões (4.65) e (4.66), no entanto, mostram que a teoria de Podolsky prevê uma correção nessa lei. Essa correção depende tanto da temperatura T quanto da massa de Podolsky m_P . Conforme esperado, essa correção tende a zero quando a massa de Podolsky é infinitamente maior do que a energia térmica:

$$\lim_{\frac{m_P}{T} \rightarrow \infty} \delta\sigma\left(\frac{m_P}{T}\right) = 0, \quad (4.70)$$

donde recupera-se o resultado de Maxwell, ou seja, a lei de Stefan-Boltzmann:

$$\lim_{\frac{m_P}{T} \rightarrow \infty} u(T; m_P) = u_0. \quad (4.71)$$

Entretanto, caso a massa de Podolsky seja finita, isto é, caso o campo eletromagnético seja corretamente descrito pela teoria de Podolsky em detrimento da teoria Maxwelliana, a expressão (4.65), que é experimentalmente verificável, pode ser usada para se detectar os efeitos do termo de derivadas superiores no eletromagnetismo mesmo que o valor da massa de Podolsky seja muito grande. Quanto mais alto o valor desse parâmetro, mais alta a temperatura deve ser a fim de que a correção (4.68) na lei de Stefan-Boltzmann seja mais facilmente acessível experimentalmente.

4.1.3 Limite termodinâmico para o parâmetro de Podolsky

Na subseção anterior mostramos que a teoria de Podolsky prevê uma correção na lei de Stefan-Boltzmann dada pela expressão (4.65) e argumentamos que essa expressão pode ser utilizada para se buscar assinaturas da possível existência do campo de Podolsky caso desvios do resultado calculado utilizando-se o campo Maxwell sejam detectados em experimentos. Essa mesma expressão para a modificação da lei de Stefan-Boltzmann pode ser utilizada com a finalidade de se estabelecer um limite para o parâmetro de Podolsky. Prosseguindo nessa linha de pesquisa, reescrevemos a constante de Stefan-Boltzmann (4.67) e a correção (4.68) no Sistema Internacional de Unidades:

$$\sigma_0 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{15} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}; \quad (4.72)$$

$$\delta\sigma \left(\frac{m_P c^2}{k_B T} \right) = \frac{3}{8\pi\sqrt{2\pi}} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2} \left(\frac{m_P c^2}{k_B T} \right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{m_P c^2}{k_B T}}. \quad (4.73)$$

Ou seja,

$$\left(\frac{m_P c^2}{k_B T} \right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{m_P c^2}{k_B T}} = \frac{8\pi\sqrt{2\pi}}{3} \frac{\hbar^3 c^2}{k_B^4} \delta\sigma \left(\frac{m_P c^2}{k_B T} \right). \quad (4.74)$$

A equação (4.66) nos permite interpretar $\delta\sigma \left(\frac{m_P c^2}{k_B T} \right)$ como sendo o *desvio* do valor esperado para a constante de Stefan-Boltzmann devido à presença do setor massivo da teoria de Podolsky. Uma vez que até o momento nenhum experimento detectou algum resultado sensivelmente diferente dos previstos pela teoria de Maxwell, o termo $\delta\sigma \left(\frac{m_P c^2}{k_B T} \right)$ deve ser *no máximo* igual ao erro experimental do valor da constante de Stefan-Boltzmann pois, do contrário, o resultado (4.65) estaria em conflito com os dados experimentais. Assim, deve sempre valer:

O valor experimental para a constante de Stefan-Boltzmann é [63]

$$\sigma_{\text{exp}} = (5,670277968 \pm 0,000040) \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}. \quad (4.75)$$

Ou seja, o erro em sua medição é

$$\delta\sigma_{\text{exp}} = 4,0 \cdot 10^{-13} \frac{W}{m^2 K^4}. \quad (4.76)$$

Conforme argumentamos, deve sempre valer:

$$\delta\sigma \left(\frac{m_P c^2}{k_B T} \right) \leq \delta\sigma_{\text{exp}}, \quad (4.77)$$

Substituindo essa condição na expressão (4.74) e utilizando

$$\hbar = 1,0545859 \cdot 10^{-34} \text{ Js}; \quad (4.78)$$

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad (4.79)$$

$$k_B = 1,38066 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}, \quad (4.80)$$

encontramos

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_P c^2}{k_B T} \right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{m_P c^2}{k_B T}} &\leq \frac{8\pi\sqrt{2\pi}}{3} \frac{\hbar^3 c^2}{k_B^4} \delta\sigma_{\text{exp}} \\ &= 2,4367381 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Logo, precisamos resolver a seguinte equação transcendental:

$$x^{\frac{5}{2}} e^{-x} = 2,4367381 \cdot 10^{-5}, \quad (4.82)$$

com $x = \frac{m_P c^2}{k_B T}$.

Quatro soluções aproximadas para a equação acima são³

$$x_1 \approx -0,0115272 - 0,00831657i; \quad (4.83)$$

$$x_2 \approx -0,0115272 + 0,00831657i; \quad (4.84)$$

$$x_3 \approx 0,0143621; \quad (4.85)$$

$$x_4 \approx 17,8236. \quad (4.86)$$

Uma vez que x é a razão entre a energia de repouso do fóton de Podolsky pela energia térmica, ela deve ser um número real. Logo, as raízes x_1 e x_2 estão excluídas. A solução x_3 é menor do que 1. Contudo, nossos resultados somente são válidos quando a energia de repouso associada ao setor massivo de Podolsky for muito maior do que a energia térmica. Logo, essa solução também está excluída. Por fim, verificamos que a solução $x_4 \approx 17,8236$ cumpre todos os requisitos. Qualquer valor de $x \geq x_4$ satisfaz (4.81) Assim, devemos ter:

³Agradecimentos a www.wolframalpha.com.

$$\frac{m_P c^2}{k_B T} \geq 17,8236, \quad (4.87)$$

ou seja,

$$m_P c^2 \geq 17,8236 k_B T. \quad (4.88)$$

Obtivemos, dessa forma, um limite inferior para a massa de Podolsky dependente da temperatura. A fim de fixarmos esse valor, precisamos fixar essa temperatura. Uma vez que estamos analisando a quantização do campo eletromagnético livre em equilíbrio termodinâmico essa temperatura deve ser a de algum corpo negro. Além disso, ela não pode ser muito alta, a fim de termos garantida a validade da aproximação (4.58) realizada anteriormente. A radiação cósmica de fundo em microondas satisfaz esses dois critérios: ela já foi chamada do mais perfeito corpo negro até a data e sua temperatura é extremamente baixa se comparada com a da grande maioria da matéria conhecida no universo [64, 65]. Por essas razões, consideremos como objeto de estudo a radiação cósmica de fundo em microondas. Sua temperatura é $T = 2,725K$. Assim, o limite (4.88) se torna:

$$m_P c^2 \geq 6,50577 \cdot 10^{-22} J. \quad (4.89)$$

Sendo

$$1eV = 1,602189 \cdot 10^{-19} J, \quad (4.90)$$

temos, abandonando novamente o Sistema Internacional de Unidades,

$$m_P \geq 4,06055 meV. \quad (4.91)$$

Concluimos, portanto, que os dados da radiação cósmica de fundo em microondas impõem um limite termodinâmico inferior para o valor da massa de Podolsky como sendo $m_P \sim 4,0 meV$. Dito de outra forma, qualquer valor para a massa m_P que seja *superior* a esse valor é compatível com os experimentos associados à radiação de corpo negro.

A publicação desse resultado na *Physical Review D* rendeu-nos também um destaque na seção “*Our choice from the recent literature*” da revista *Nature Physics* [27].

4.2 O tensor de polarização

No capítulo precedente definimos uma quantidade que denominamos “tensor de polarização” da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico

(3.456). A quantidade correspondente na teoria sem efeitos térmicos é o chamado “tensor de polarização *do vácuo*”. No entanto, as propriedades físicas desses dois operadores, embora com definições similares, são muito distintas. Estudar algumas propriedades básicas desse tensor quando se está numa situação de equilíbrio é o objetivo desta seção.

4.2.1 A forma geral do tensor de polarização em equilíbrio

Da definição de ordenamento de campos não Grassmannianos e das equações (3.356) e (3.359), temos:

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau) = D_{\nu\mu}(-\mathbf{x}, -\tau). \quad (4.92)$$

De acordo com (3.468), essa propriedade deve também ser compartilhada pela função de Green de Podolsky:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau) = \mathcal{D}_{\nu\mu}(-\mathbf{x}, -\tau). \quad (4.93)$$

Utilizando a representação de Fourier (3.472) na expressão acima, mostramos que

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \tilde{\mathcal{D}}_{\nu\mu}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B). \quad (4.94)$$

Notamos, ainda, que a equação

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n^B) \tilde{\mathcal{D}}_{\nu\xi}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \delta_{\mu\xi} \quad (4.95)$$

é válida para qualquer \mathbf{k} e qualquer $n \in \mathbb{N}$, em particular, é válida também para

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{-1}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) \tilde{\mathcal{D}}_{\nu\xi}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = \delta_{\mu\xi}. \quad (4.96)$$

Utilizando a propriedades (4.94) nessa equação, ficamos com

$$\delta_{\mu\xi} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{-1}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) \tilde{\mathcal{D}}_{\xi\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \tilde{\mathcal{D}}_{\xi\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{-1}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B). \quad (4.97)$$

O segundo membro dessa equação deve ser igual a $\tilde{\mathcal{D}}_{\xi\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) \tilde{\mathcal{D}}_{\nu\mu}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n^B)$, donde identificamos:

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\mu}^{-1}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n^B). \quad (4.98)$$

Essa equação é válida para o inverso da função de Green de Podolsky completa. Sendo a função de Green de Podolsky livre um caso particular da completa, também temos:

$$\tilde{P}_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \tilde{P}_{\nu\mu}^{(m_P^2, \alpha)}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B). \quad (4.99)$$

Da equação (3.478), identificamos

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \tilde{P}_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(k^{Bn}) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B), \quad (4.100)$$

ou seja,

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n^B) - \tilde{P}_{\mu\nu}^{(m_P^2, \alpha)}(k^{Bn}). \quad (4.101)$$

Logo, o tensor de polarização também possui a propriedade (4.94):

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = \tilde{\Pi}_{\nu\mu}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B). \quad (4.102)$$

Procuraremos, agora, a forma mais geral possível para o tensor de polarização da eletrodinâmica generalizada de Podolsky em equilíbrio termodinâmico. $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem. Existe um número finito de tensores de segunda ordem em termos dos quais $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$ possa ser escrito. Caso estivéssemos na ausência de efeitos térmicos, teríamos apenas o tensor métrico e o tensor de segunda ordem construído como um produto de dois quadrimomentos. No entanto, na situação de equilíbrio termodinâmico, temos ainda um outro quadrivetor disponível. O sistema físico em equilíbrio termodinâmico constitui-se de um *meio*. No presente caso, esse meio é um *plasma*, o chamado *plasma relativístico e quântico de Podolsky*. Devido à presença desse plasma, existe um referencial distinto dos demais: o referencial de repouso do meio. É nesse referencial que todas as nossas contas foram feitas. Entretanto é, em princípio, possível realizar uma transformação para outro referencial. Assim, num referencial arbitrário, temos os seguintes objetos disponíveis para através deles ou de combinações deles, formar um tensor de segunda ordem:

- o tensor métrico Euclidiano $\delta_{\mu\nu}$;
- o quadrimomento térmico k^{Bn} ;
- a quadri velocidade Euclidiana u do meio;
- o tensor completamente antissimétrico em quatro dimensões: $\varepsilon_{\mu\nu\xi\sigma}$.

Embora esse último tensor também esteja disponível na situação de temperatura nula, como o único quadrivetor com que ele pode ser contraído naquele caso é o quadrimomento, temos $\varepsilon_{\mu\nu\xi\sigma}k^\xi k^\sigma = 0$.

Portanto, a forma mais geral do tensor de polarização num referencial arbitrário, denotado por $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^g(k^{Bn}, k^{Bn} \cdot u)$ é

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^g(k^{Bn}, k^{Bn} \cdot u) &= A''(k^{Bn}, k^{Bn} \cdot u) \delta_{\mu\nu} + B''(k^{Bn}, k^{Bn} \cdot u) \frac{k_\mu^{Bn} k_\nu^{Bn}}{(k^{Bn})^2} + \\ &+ C''(k^{Bn}, k^{Bn} \cdot u) \frac{k_\mu^{Bn} u_\nu}{k^{Bn} \cdot u} + D''(k^{Bn}, k^{Bn} \cdot u) \frac{k_\nu^{Bn} u_\mu}{k^{Bn} \cdot u} + \\ &+ E''(k^{Bn}, k^{Bn} \cdot u) \frac{(k^{Bn})^2 u_\mu u_\nu}{(k^{Bn} \cdot u)^2} + \\ &+ I''(k^{Bn}, k^{Bn} \cdot u) \varepsilon_{\mu\nu\xi\sigma} \frac{k_\xi^{Bn} u_\sigma}{k^{Bn} \cdot u}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Nesta expressão, $a \cdot b \equiv a_0 b_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. As funções A'' , B'' , C'' , D'' , E'' e I'' são escalares de $SO(4)$. No referencial de repouso do meio $u_\mu \propto \delta_{\mu 0}$. Assim, nesse referencial, escrevemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) &= A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \delta_{\mu\nu} + B'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \frac{k_\mu^{Bn} k_\nu^{Bn}}{(k^{Bn})^2} + C'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \frac{k_\mu^{Bn} \delta_{\nu 0}}{\omega_n^B} + \\ &+ D'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \frac{k_\nu^{Bn} \delta_{\mu 0}}{\omega_n^B} + E'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \frac{(k^{Bn})^2 \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}}{(\omega_n^B)^2} + \\ &+ I'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \varepsilon_{0\mu\nu\xi} \frac{k_\xi^{Bn}}{\omega_n^B}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Nesse referencial, valem as seguintes relações (3.505) e (4.102). Dessas duas relações, temos

$$0 = k_\mu^{Bn} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = k_\mu^{Bn} \tilde{\Pi}_{\nu\mu}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B), \quad (4.105)$$

ou seja

$$k_\mu^{Bn} \tilde{\Pi}_{\nu\mu}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = 0. \quad (4.106)$$

Trocando k^{Bn} por $-k^{Bn}$ nessa expressão, obtemos

$$-k_\mu^{Bn} \tilde{\Pi}_{\nu\mu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = 0. \quad (4.107)$$

Dessa forma,

$$k_\nu^{Bn} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) = 0. \quad (4.108)$$

Calculando $\tilde{\Pi}_{\nu\mu}(-\mathbf{k}, -\omega_n^B)$ a partir de (4.104) e usando a propriedade (4.102), encontramos as seguintes relações entre as diversas funções escalares:

$$A'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = A'(\mathbf{k}, \omega_n^B); \quad (4.109)$$

$$B'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = B'(\mathbf{k}, \omega_n^B); \quad (4.110)$$

$$C'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = D'(\mathbf{k}, \omega_n^B); \quad (4.111)$$

$$D'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = C'(\mathbf{k}, \omega_n^B); \quad (4.112)$$

$$E'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = E'(\mathbf{k}, \omega_n^B); \quad (4.113)$$

$$-I'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = I'(\mathbf{k}, \omega_n^B). \quad (4.114)$$

Utilizando (3.505) e (4.111), encontramos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} 0 = & [A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + B'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + C'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B)] k_\nu^{Bn} + \\ & + [C'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + E'(\mathbf{k}, \omega_n^B)] \frac{(k^{Bn})^2 \delta_{\nu 0}}{\omega_n^B}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Agora, multiplicamos essa relação por $k_\nu^{Bn} \neq 0$ e encontramos:

$$A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + B'(\mathbf{k}, \omega_n^B) = -C'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) - C'(\mathbf{k}, \omega_n^B) - E'(\mathbf{k}, \omega_n^B). \quad (4.116)$$

Por outro lado, multiplicando (4.115) por $\delta_{\nu 0}$, obtemos:

$$A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + B'(\mathbf{k}, \omega_n^B) = -C'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) - [C'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + E'(\mathbf{k}, \omega_n^B)] \frac{(k^{Bn})^2}{(\omega_n^B)^2}. \quad (4.117)$$

Igualando (4.116) com (4.117), podemos mostrar a seguinte equação:

$$C'(\mathbf{k}, \omega_n^B) = -E'(\mathbf{k}, \omega_n^B). \quad (4.118)$$

Dessa relação e de (4.108), temos uma nova expressão:

$$\begin{aligned} 0 = & [A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + B'(\mathbf{k}, \omega_n^B) - E'(\mathbf{k}, \omega_n^B)] k_\mu^{Bn} + \\ & + [E'(\mathbf{k}, \omega_n^B) - E'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B)] \frac{(k^{Bn})^2 \delta_{\mu 0}}{\omega_n^B}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Tomando o produto escalar da equação acima com $k_\mu^{Bn} \neq 0$:

$$A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + B'(\mathbf{k}, \omega_n^B) = E'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B). \quad (4.120)$$

Tomando o produto escalar de (4.119) com $\delta_{\mu 0}$, obtemos

$$\begin{aligned} A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) + B'(\mathbf{k}, \omega_n^B) &= E'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \left[1 - \frac{(k^{Bn})^2}{(\omega_n^B)^2} \right] + \\ &+ E'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) \frac{(k^{Bn})^2}{(\omega_n^B)^2}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Igualando (4.120) com (4.121), mostramos:

$$E'(-\mathbf{k}, -\omega_n^B) = E'(\mathbf{k}, \omega_n^B). \quad (4.122)$$

De (4.120) e (4.122), temos ainda mais uma relação:

$$B'(\mathbf{k}, \omega_n^B) = E'(\mathbf{k}, \omega_n^B) - A'(\mathbf{k}, \omega_n^B). \quad (4.123)$$

Logo, a forma mais geral possível do tensor de polarização no referencial de repouso do meio é

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) &= A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu^{Bn} k_\nu^{Bn}}{(k^{Bn})^2} \right] + \\ &+ E'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \left[\frac{k_\mu^{Bn} k_\nu^{Bn}}{(k^{Bn})^2} - \left(\frac{k_\mu^{Bn} \delta_{\nu 0} + k_\nu^{Bn} \delta_{\mu 0}}{\omega_n^B} \right) + \frac{(k^{Bn})^2 \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}}{(\omega_n^B)^2} \right] + \\ &+ I'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \varepsilon_{0\mu\nu\xi} \frac{k_\xi^{Bn}}{\omega_n^B}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Redefinindo as funções:

$$A'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \equiv A(\mathbf{k}, \omega_n^B); \quad (4.125)$$

$$E'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \equiv B(\mathbf{k}, \omega_n^B); \quad (4.126)$$

$$I'(\mathbf{k}, \omega_n^B) \equiv I(\mathbf{k}, \omega_n^B), \quad (4.127)$$

reescrevemos o tensor (4.124) como⁴

⁴Para o caso da eletrodinâmica Maxwelliana, a expressão correspondente foi obtida por Fradkin [15].

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega_n^B) &= A(\mathbf{k}, \omega_n^B) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu^{Bn} k_\nu^{Bn}}{(k^{Bn})^2} \right] + \\
&+ B(\mathbf{k}, \omega_n^B) \left[\frac{k_\mu^{Bn} k_\nu^{Bn}}{(k^{Bn})^2} - \left(\frac{k_\mu^{Bn} \delta_{\nu 0} + k_\nu^{Bn} \delta_{\mu 0}}{\omega_n^B} \right) + \frac{(k^{Bn})^2 \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}}{(\omega_n^B)^2} \right] + \\
&+ I(\mathbf{k}, \omega_n^B) \varepsilon_{0\mu\nu\xi} \frac{k_\xi^{Bn}}{\omega_n^B}.
\end{aligned} \tag{4.128}$$

Escrito nessa forma, o tensor de polarização da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico é explicitamente transversal, uma vez que todos os tensores que multiplicam as funções escalares A , B e I são transversais. Essa é sua forma geral. Contudo, para fins práticos, faz-se necessário calcular as funções escalares explicitamente. Isso pode ser feito, por exemplo, através do cálculo explícito da equação (3.464). Conforme deduzimos, as funções A e B devem satisfazer as equações (4.109) e (4.113). É relativamente fácil se escrever uma função escalar de k^{Bn} que satisfaça uma dessas equações, visto que qualquer função de $(k^{Bn})^2 = (\omega_n^B)^2 + \mathbf{k}^2$ basta. Para a função I , contudo, a situação é mais sutil. Aparentemente, a única forma de se escrever uma função escalar que satisfaça (4.114) é construindo-a de tal forma que ela possua o mesmo sinal de $k^{Bn} \cdot u$, ou seja, sendo uma função ímpar dessa quantidade. Dessa forma, no referencial de repouso do meio, teríamos I como uma função ímpar de ω_n^B , uma vez que no referencial de repouso, $k^{Bn} \cdot u \propto \omega_n^B$. No entanto, uma vez que a condição (4.102) foi deduzida no referencial de repouso do plasma, não há garantias de que ela valha num referencial arbitrário como sendo dada pela troca de k^{Bn} por $-k^{Bn}$ com a *quadrivelocidade do meio fixa*. Se, porventura, a relação correspondente em outro referencial envolvesse a troca de u por $-u$ simultaneamente com a troca correspondente em k^{Bn} , não haveria função que satisfizesse (4.114) além da identicamente nula. O termo que multiplica a função B em (4.128) nos diz que a quadrivelocidade não deve trocar de sinal (pelo menos não u_0), do contrário deveríamos trocar $\delta_{\mu 0}$ por $-\delta_{\mu 0}$, e isso violaria a condição (4.113). Caso não tivéssemos recorrido à forma geral do tensor de polarização num referencial arbitrário (4.103) como ponto de partida, não haveria justificativa para um termo dependente apenas de ω_n^B ser invariante de $SO(4)$, mas se comportaria apenas como a componente zero de um quadrivetor Euclidiano. Em todo o caso, essa questão merece uma análise mais profunda que, infelizmente, não será realizada nesta tese.

Como um último tópico desta tese, consideremos a equação (3.464) na ausência de fontes externas calculada para $\tau_x = \tau$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e $\tau_y = 0$:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau) &= (q_e)^2 (\gamma_\mu^E)_{ab} \int_\beta d^4u d^4v \mathcal{S}_{bc}(\mathbf{x} - \mathbf{u}, \tau - \tau_u) \times \\ &\quad \times \Gamma_{\nu(cd)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}; \tau_u, \tau_v, 0) \mathcal{S}_{da}(\mathbf{v} - \mathbf{x}, \tau_v - \tau). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Notamos que o tensor de polarização pode, em princípio, ser calculado exatamente uma vez conhecidas a função de Green fermiônica *completa* da teoria bem como a função de vértice *completa*. A fim de conhecermos essas duas quantidades necessitaríamos, por exemplo, primeiramente do operador de massa Σ_{ab} e, então, substituir-lo-íamos em (3.459). Para calcularmos a função de vértice, basta derivarmos o resultado com relação ao campo ϑ_μ de acordo com (3.461). Para obtermos a função de Green completa, precisaríamos inverter a função (3.459). No entanto, de acordo com (3.465), o cálculo do operador de massa depende não somente das próprias funções de Green fermiônica e de vértice completas, como também da função de Green de Podolsky *completa*. Esta, por sua vez, seguindo (3.458), depende do operador de polarização, que é justamente a função que desejamos calcular através da equação acima. Nenhum método de cálculo viável para esse sistema de equações não lineares e acopladas conhecido com equações de Dyson-Schwinger-Fradkin que forneça resultados exatos é conhecido para a eletrodinâmica. Aproximações são necessárias.

A aproximação de ordem mais baixa em teoria de perturbação para esta expressão consiste em substituir as funções de Green fermiônica e de vértice *completas* por suas versões livres. Utilizando (3.466), a equação acima se simplifica:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(q_e)^2}(\mathbf{x}, \tau) = (q_e)^2 (\gamma_\mu^E)_{ab} (\gamma_\nu^E)_{cd} \mathcal{S}_{bc}^F(\mathbf{x}, \tau) \mathcal{S}_{da}^F(-\mathbf{x}, -\tau). \quad (4.130)$$

Essa forma simples revela uma propriedade notável da interação eletromagnética de Podolsky. Afirmamos no início do capítulo que, caso a teoria de Podolsky seja a descrição correta do eletromagnetismo é, em princípio, possível realizar experimentos para detectar a presença do setor massivo do campo eletromagnético. De fato, na seção anterior, estudamos como a lei de Stefan-Boltzmann é modificada pelo campo de Podolsky e estabelemos um limite inferior termodinâmico para o parâmetro livre da teoria. Esse limite foi estabelecido na situação de campo eletromagnético livre. Ao se considerar a interação, a equação (4.130) mostra um resultado inesperado: todos os fenômenos eletromagnéticos que dependem *exclusivamente* do tensor de polarização na teoria de Podolsky são indistinguíveis dos resultados previstos pela teoria de Maxwell em ordem mais baixa de teoria de perturbação.

Dessa forma, para se detectar a presença do parâmetro de Podolsky, ou se estuda propriedades características do campo eletromagnético livre, ou se estuda propriedades associadas ao operador de massa, ou se necessita ir além da ordem mais baixa de teoria de perturbação para efeitos de polarização.

Iniciamos este capítulo calculando explicitamente o logaritmo da função de partição do campo quântico de Podolsky livre. Vimos que essa quantidade era escrita como uma soma de um termo associado ao campo de Maxwell usual com outro associado a um campo de Proca com massa m_P . No caso do setor sem massa, foi possível calcular o logaritmo da função de partição exatamente. Contudo, no caso do setor massivo, somente pudemos expressar o resultado como séries de funções de Bessel. Considerando temperaturas associadas a energias térmicas muito inferiores à massa de Podolsky, pudemos calcular o logaritmo da função de partição do caso massivo aproximadamente. Vimos, então, que a densidade de energia interna do campo de Podolsky nessa aproximação induz uma correção mensurável na lei de Stefan-Boltzmann. Utilizando dados experimentais para a constante de Stefan-Boltzmann e da radiação cósmica de fundo em microondas foi possível estabelecer um limite para o parâmetro livre da teoria. Por fim, utilizando principalmente a transversalidade do tensor de polarização, escrevemos a forma mais geral desse tensor em equilíbrio termodinâmico.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 O formalismo de Matsubara-Fradkin

No capítulo 2 apresentamos o formalismo de Matsubara-Fradkin para a quantização de teorias de campo em equilíbrio termodinâmico [29, 12, 13]. Esse formalismo tem por base a matriz densidade do sistema e, por conseguinte, é uma abordagem fundamental [30, 31]. Esse método é, também, baseado em técnicas funcionais, que constituem-se num elegante formalismo para teorias quânticas de campos. Uma outra característica marcante do formalismo de Matsubara-Fradkin é que ele é em princípio não perturbativo. Mais que isso, ele é uma técnica exata. Por exemplo, a transversalidade do tensor de polarização (3.505) obtida com o formalismo de Matsubara-Fradkin não apenas é válida para *todas as ordens de teoria de perturbação*, mas como também é válida *mesmo que a teoria de perturbação não valha*. Embora o tenhamos apresentado para teoria de campos, esse formalismo não é restrito a ela. De fato, Matsubara o desenvolveu em sua forma original para a mecânica quântica e Fradkin resolveu aplicou a teoria para diversos exemplos não relativísticos [29, 13]. Enquanto que a base do formalismo chamado de “do tempo imaginário” repousa numa analogia entre a função de partição e a amplitude de transição do vácuo para o vácuo da teoria à temperatura nula constatamos que o formalismo de Matsubara-Fradkin permite-nos encontrar representações de integração funcional para a função de partição sem a necessidade de se recorrer a nenhuma analogia [50, 53, 62]. Além disso, no formalismo do tempo imaginário, faz-se necessário realizar-se de uma maneira *ad hoc* uma continuação analítica conhecida como *rotação de Wick* na variável temporal a fim de se obter o caráter Euclideo do espaço-tempo. Conforme vimos nas equações (2.130), (3.186) e (3.187), essa propriedade emerge natural e

automaticamente da estrutura teórica da abordagem de Matsubara-Fradkin. Outra abordagem conhecida como “formalismo do tempo real” considera não campos estáticos, mas dependentes do tempo. Ela é muito utilizada para se descrever pequenos desvios da situação de equilíbrio [8, 51]. Porém, embora não apresentada nesta tese, Fradkin desenvolveu uma extensão do formalismo para tratar de campos dependentes do tempo sendo capaz, dessa forma, de tratar situações levemente fora do equilíbrio de uma maneira similar ao formalismo do tempo real [13]. No terceiro capítulo tratamos da quantização em equilíbrio de uma teoria de *gauge* Abelianana. Vimos que a abordagem de Matsubara-Fradkin aliada ao poderoso método de quantização de Nakanishi nos permitiu obter uma descrição covariante do sistema quântico em todas as etapas [53]. Isso é incomum. De fato, em [27], utilizando o formalismo do tempo imaginário, quebramos a covariância de Lorentz a fim de podermos escrever corretamente a representação de integração funcional da amplitude de transição do vácuo para o vácuo e , logo em seguida, fazendo uso do chamado *Ansatz de Faddeev-Popov*, passamos de uma escolha de *gauge* não covariante para uma covariante. Todo esse empenho é desnecessário no método do campo auxiliar, pois todas as expressões são covariantes. Por fim, no capítulo 4 vimos que não somente a estrutura teórica da abordagem possui um “aspecto” formal, como também é possível obter a partir dela expressões que fornecem valores que podem ser comparados com dados experimentais [27].

5.2 A teoria de Podolsky

Esta tese trata da quantização da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico. Sendo assim, no segundo capítulo, vimos como o campo de Podolsky surge como uma alternativa ao de Maxwell a partir do próprio princípio de *gauge*. Vimos, na expressão (3.15), que a densidade de Lagrangeana da teoria de Podolsky contém um termo que depende de derivadas de segunda ordem do campo eletromagnético. Por essa razão, a estrutura canônica da teoria é mais rica e mais interessante [24, 36]. Vimos também que a teoria depende de um parâmetro livre que mais adiante foi chamado de *massa de Podolsky*. Apesar do campo conter uma massa, ele se decompõe em dois de tal forma que existem na teoria um setor sem massa e um massivo de uma tal maneira que a teoria como um todo é invariante de *gauge*. De fato, em [23], Cuzinatto, de Melo e Pompeia mostraram que a teoria de Podolsky é a única extensão possível do eletromagnetismo usual que contém termos de derivadas de segunda ordem que mantém intactas as duas simetrias básicas da interação eletromagnética: a de *gauge* $U(1)$ e a de Lorentz. Visto que

as equações de Podolsky (3.24-3.27) diferem das de Maxwell, o eletromagnetismo de Podolsky prevê resultados diferentes dos de Maxwell para alguns experimentos, conforme já foi proposto por Cuzinatto, de Melo, Medeiros e Pompeia [26]. Assim, o argumento da *navalha de Occam*, que afirma, basicamente, que se duas teorias explicam os mesmos fenômenos devemos optar pela mais simples, pode não se aplicar. Ao estudar a quantização da teoria em equilíbrio termodinâmico no formalismo de Matsubara-Fradkin, optamos pelo método covariante de Nakanishi. Esse método, enquanto mantém a covariância de $SO(4)$, *quebra a simetria de gauge* explicitamente. Vimos, então, que os campos fantasmas surgem devido à simetria de *gauge* residual e introduzem automaticamente uma nova invariância no problema. A essa nova simetria é associado um operador carga de Noether conservado e, a ele, um potencial químico. Conforme mostramos, as funções de Green da teoria satisfazem certas condições de periodicidade na variável τ . Essa propriedade implica que o potencial químico fantasma é um número imaginário puro e, portanto, não é observável termodinâmico. Escrevemos representações de integração funcional para o funcional gerador termodinâmico e da função de partição completos da teoria. Encontramos o conjunto de equações conhecido como equações de Dyson-Schwinger-Fradkin da teoria de Podolsky em equilíbrio termodinâmico e mostramos que as transformadas de Fourier das funções de Green dependem das frequências de Matsubara (3.476) e (3.477) [53]. Notamos, agora, que no limite de temperatura nula $T \rightarrow 0$ ou, equivalentemente, $\beta \rightarrow \infty$, as frequências de Matsubara tanto bosônicas quanto fermiônicas se tornam densas na reta real. Conforme essas frequências se tornam contínuas, as somas sobre as frequências de Matsubara se tornam integrais. Visto que as funções de Green são periódicas ou antiperiódicas com “período” β , nesse limite elas se tornam funções periódicas ou antiperiódicas com “período” infinito, ou seja, funções aperiódicas. Tomando, também, o limite $\mu_e \rightarrow 0$, todas as equações envolvendo funções de Green, como as equações de Dyson-Schwinger-Fradkin ou as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi se tornam versões Euclidianas daquelas encontradas para a teoria de Podolsky à temperatura nula no espaço-tempo de Minkowski encontradas em [66]. Por essa razão afirmamos no capítulo introdutório que a teoria quântica de campos em Minkowski seria um caso particular da teoria de campos em equilíbrio termodinâmico e não o contrário. Retornando ao caso com temperatura e potencial químico não nulos, mostramos as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi em equilíbrio termodinâmico, com ênfase na transversalidade do tensor de polarização (3.505) e na identidade de Ward (3.515). Nesta última ficou evidenciada uma característica do equilíbrio: sendo as frequências de Matsubara quantidades discretas, não se é possível escrever a forma diferencial da identidade de Ward, a menos que se recorra

a continuações analíticas, que estão associadas a desvios do equilíbrio, ou se tome o limite descrito acima, no qual a temperatura tende a zero e também não se tem equilíbrio termodinâmico. No capítulo 4 calculamos explicitamente a função de partição do campo de Podolsky livre. Esse cálculo somente foi possível porque assumimos a condição de temperaturas associadas a energias térmicas desprezíveis frente à massa de Podolsky (4.58). Em seguida, calculamos a densidade de energia interna do campo e mostramos que o setor massivo da teoria de Podolsky induz uma correção na lei de Stefan-Boltzmann. Essa correção pode, em princípio, ser mensurável e foi utilizada, em conjunção com dados experimentais da constante de Stefan-Boltzmann e da radiação cósmica de fundo em microondas, para se estabelecer um limite mínimo para o valor do parâmetro de Podolsky. Esse valor limite advindo da termodinâmica é $m_P \sim 4meV$ [27]. Esse valor pode ser melhorado com o mesmo tipo de experimento, bastando para isso se construir ou se encontrar um corpo negro tão preciso quanto a radiação cósmica de fundo em microondas mas que apresente uma temperatura maior. Se a temperatura se elevar muito, contudo, os efeitos quânticos da eletrodinâmica precisarão ser levados em conta, especialmente se a temperatura do corpo negro for tal que a energia térmica associada seja comparável à massa do elétron [61]. Na sequência, utilizamos a transversalidade do tensor de polarização (3.505), que é uma das identidades de Ward-Fradkin-Takahashi deduzidas no capítulo 3, para se escrever a forma mais geral desse tensor na situação de equilíbrio.

5.3 Perspectivas futuras

Como projetos futuros estudaremos certas propriedades clássicas do campo de Podolsky que ainda não são muito bem entendidas. A ausência da simetria de dualidade nas equações de Podolsky podem, talvez, fornecer alguma pista sobre a não observação de monopolos magnéticos [17]. Outra simetria presente no eletromagnetismo Maxwelliano e ausente no de Podolsky cujas implicações não são bem entendidas é a de escala, visto que a massa de Podolsky define um comprimento Compton característico.

No regime quântico da teoria de Podolsky, pretendemos estudar a renormalizabilidade da teoria, tanto à temperatura nula quanto na situação de equilíbrio térmico. Nesse último caso, também pretendemos estudar alguns fenômenos típicos de Física dos plasmas, como a blindagem de Debye e oscilações coletivas. Analisando atentamente as equações (3.452-3.455), vemos que elas são muito semelhantes àquelas da eletrodinâmica com “vácuo instável” [67]. A principal diferença ocorre que, ao se fazer as fontes nulas, uma possível média térmica não nula para o campo eletromagnético atua-

ria como um campo clássico externo constante. Campos eletromagnéticos clássicos não possuem significados físicos *contanto* que não estejam na presença de objetos quânticos, como ocorre no caso do efeito Aharonov-Bohm [68]. Pretendemos, assim, investigar a questão de se um possível valor não nulo para a média térmica do campo alteraria drasticamente o comportamento do plasma de Podolsky. Também temos a intenção de aplicar a teoria de perturbação modificada de Fradkin para uma teoria auto-interação específica do campo escalar, como por exemplo, a interação $\lambda\phi^4$, e também aplicá-la ao eletromagnetismo de Podolsky calculando, dessa forma, tanto correções não perturbativas para a função de partição como também estudando efeitos não perturbativos nas funções de Green.

Planejamos, ainda, estender o formalismo de Matsubara-Fradkin e a teoria de perturbação modificada de Fradkin para teorias de *gauge* não Abelianas, com a esperança de que o emprego dessas duas técnicas em conjunto possa lançar alguma luz sobre a questão da transição de fase da cromodinâmica quântica de uma fase que exhibe confinamento para uma desconfinada.

5.4 Comentários finais

Nesta tese apresentamos o formalismo de Matsubara-Fradkin e o aplicamos à teoria eletromagnética de Podolsky. As contribuições originais desta tese consistem na extensão da teoria de perturbação modificada de Fradkin para a situação de equilíbrio termodinâmico e a quantização da eletrodinâmica de Podolsky em equilíbrio termodinâmico, que consiste de quase todo o capítulo 3 e da totalidade do capítulo 4 [27, 53].

Apêndice A

O potencial eletrostático de Podolsky

Neste apêndice encontraremos o potencial eletrostático da teoria de Podolsky. Assumindo $\lambda_P \neq 0$, podemos reescrever (3.33) como

$$\left(\vec{\partial}^2 - \frac{1}{2\lambda_P}\right) \vec{\partial}^2 A_0(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{2\lambda_P}. \quad (\text{A.1})$$

Consideremos uma carga puntual q localizada na origem,

$$\rho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x}), \quad (\text{A.2})$$

e escrevamos as transformadas de Fourier do potencial eletrostático e da densidade de carga:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (\text{A.3})$$

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{A}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo essas transformadas em (A.1) e utilizando a independência linear das funções exponenciais, encontramos:

$$\tilde{A}_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\lambda_P} \frac{q}{\mathbf{k}^2 \left(\mathbf{k}^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)}. \quad (\text{A.5})$$

Com isso, podemos calcular (A.4):

$$\begin{aligned}
A_0(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\lambda_P} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{q}{\mathbf{k}^2 \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{2\lambda_P} \frac{2\pi q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} \\
&= \frac{1}{2\lambda_P} \frac{q}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{\left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} \left(\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \right) \\
&= \frac{1}{2\lambda_P} \frac{q}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kr)}{k \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} \\
&= \frac{1}{2\lambda_P} \frac{q}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\sin(kr)}{k \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)}, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

com $r \equiv |\mathbf{x}|$.

No limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, a última integral é substituída por

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty dk \frac{\sin(kr)}{(k+i\varepsilon) \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} &= \frac{1}{2i} \left[\int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr}}{(k+i\varepsilon) \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} + \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{-ikr}}{(k+i\varepsilon) \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} \right]. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

O cálculo de cada integral pode ser realizado com o auxílio do teorema dos resíduos de Cauchy e do lema de Jordan, resultando em:

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr}}{(k+i\varepsilon) \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} = -2\pi i \lambda_P e^{-\frac{r}{\sqrt{2\lambda_P}}}; \tag{A.8}$$

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{-ikr}}{(k+i\varepsilon) \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} = 2\pi i \lambda_P e^{-\frac{r}{\sqrt{2\lambda_P}}} - 4\pi i \lambda_P. \tag{A.9}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{\sin(kr)}{(k+i\varepsilon) \left(k^2 + \frac{1}{2\lambda_P}\right)} = 2\pi \lambda_P \left(1 - e^{-\frac{r}{\sqrt{2\lambda_P}}}\right). \tag{A.10}$$

Finalmente, o potencial eletrostático de Podolsky (A.6) é

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi|\mathbf{x}|} \left(1 - e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{2\lambda_P}}} \right). \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

O tensor densidade de energia e momento simétrico de uma teoria com derivadas de segunda ordem

Neste apêndice calcularemos o tensor densidade de energia e momento da teoria de Podolsky livre. Iniciamos com a teoria geral de se calcular o tensor de energia e momento simétrico para densidades de Lagrangeanas com derivadas de segunda ordem [69, 70, 71].

B.1 Teoria geral

Seja L uma densidade de Lagrangeana que depende de certos campos e de suas derivadas de primeira e segunda ordens:

$$L = L[\phi, \partial\phi, \partial^2\phi]. \quad (\text{B.1})$$

A variação intrínseca δ_0 dessa densidade de Lagrangeana satisfaz

$$[\delta_0, \partial] = 0. \quad (\text{B.2})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\delta_0 L &= \frac{\partial L}{\partial \phi^a} \delta_0 \phi^a + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta_0 (\partial_\mu \phi^a) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} \delta_0 (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a) \\
&= \frac{\partial L}{\partial \phi^a} \delta_0 \phi^a + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\mu (\delta_0 \phi^a) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \times \\
&\quad \times \partial_\mu \partial_\nu (\delta_0 \phi^a). \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\mu (\delta_0 \phi^a) = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta_0 \phi^a \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right] \delta_0 \phi^a, \tag{B.4}$$

e

$$\begin{aligned}
l_1 &\equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \partial_\mu \partial_\nu (\delta_0 \phi^a) \\
&= \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \partial_\mu (\delta_0 \phi^a) \right\} + \\
&\quad - \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \right\} \partial_\mu (\delta_0 \phi^a) \\
&= \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \partial_\mu (\delta_0 \phi^a) \right\} + \\
&\quad - \partial_\mu \left\{ \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \right\} \delta_0 \phi^a \right\} + \\
&\quad + \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \right\} \delta_0 \phi^a. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\delta_0 L &= \left\{ \frac{\partial L}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \right\} \right\} \delta_0 \phi^a + \\
&\quad + \partial_\mu [\Pi_a^\mu \delta_0 \phi^a + \Pi_a^{\mu\nu} \partial_\nu (\delta_0 \phi^a)], \tag{B.6}
\end{aligned}$$

sendo

$$\Pi_a^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} - \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \right\}; \tag{B.7}$$

$$\Pi_a^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} \right]. \tag{B.8}$$

Agora, definimos

$$\widehat{\partial} \equiv n^\mu \partial_\mu; \quad (\text{B.9})$$

$$\underline{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu - n_\mu \widehat{\partial}. \quad (\text{B.10})$$

n é um vetor unitário constante tipo tempo:

$$n^\mu n_\mu = 1. \quad (\text{B.11})$$

Com essas definições, vemos que

$$\partial_\mu = \partial_\mu + n_\mu \widehat{\partial} - n_\mu \widehat{\partial} = \partial_\mu - n_\mu \widehat{\partial} + n_\mu \widehat{\partial} \quad (\text{B.12})$$

$$= \underline{\partial}_\mu + n_\mu \widehat{\partial}. \quad (\text{B.13})$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \Pi_a^{\mu\nu} \partial_\nu (\delta_0 \phi^a) &= \Pi_a^{\mu\nu} (\underline{\partial}_\nu + n_\nu \widehat{\partial}) (\delta_0 \phi^a) \\ &= \Pi_a^{\mu\nu} \underline{\partial}_\nu (\delta_0 \phi^a) + n_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \widehat{\partial} (\delta_0 \phi^a); \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\Pi_a^{\mu\nu} \underline{\partial}_\nu (\delta_0 \phi^a) = \underline{\partial}_\nu (\Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a) - \underline{\partial}_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a; \quad (\text{B.15})$$

$$\Pi_a^{\mu\nu} \partial_\nu (\delta_0 \phi^a) = \Pi_a^{\mu\nu} \underline{\partial}_\nu (\delta_0 \phi^a) + n_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \widehat{\partial} (\delta_0 \phi^a) \quad (\text{B.16})$$

$$= \underline{\partial}_\nu (\Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a) - \underline{\partial}_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a + n_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \widehat{\partial} (\delta_0 \phi^a). \quad (\text{B.17})$$

Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi_a^\mu \delta_0 \phi^a + \Pi_a^{\mu\nu} \partial_\nu (\delta_0 \phi^a) &= \Pi_a^\mu \delta_0 \phi^a + \underline{\partial}_\nu (\Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a) + \\ &\quad - \underline{\partial}_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a + n_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \widehat{\partial} (\delta_0 \phi^a) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} &= (\Pi_a^\mu - \underline{\partial}_\nu \Pi_a^{\mu\nu}) \delta_0 \phi^a + n_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \widehat{\partial} (\delta_0 \phi^a) + \\ &\quad + \underline{\partial}_\nu (\Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Substituindo esse resultado na equação (B.6), encontramos

$$\begin{aligned} \delta_0 L &= \left\{ \frac{\partial L}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right] + \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \phi^a)} \right] \right\} \right\} \delta_0 \phi^a + \\ &\quad + \partial_\mu \left[(\Pi_a^\mu - \underline{\partial}_\nu \Pi_a^{\mu\nu}) \delta_0 \phi^a + n_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \widehat{\partial} (\delta_0 \phi^a) \right] + \partial_\mu \underline{\partial}_\nu (\Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Restringiremos nossa análise aos casos nos quais as variações façam o último termo dessa expressão satisfazer:

$$\begin{aligned}
l_2 &\equiv \int_R d^{D+1}x \partial_\mu \underline{\partial}_\nu (\Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a) = \int_B d\sigma_\mu \underline{\partial}_\nu (\Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 \phi^a) \\
&= \int_V d^D x \underline{\partial}_\nu (\Pi_a^{0\nu} \delta_0 \phi^a) = \int_V d^D x (\partial_\nu - n_\nu \widehat{\partial}) (\Pi_a^{0\nu} \delta_0 \phi^a) \\
&= \int_V d^D x [\partial_\nu (\Pi_a^{0\nu} \delta_0 \phi^a) - n_\nu \widehat{\partial} (\Pi_a^{0\nu} \delta_0 \phi^a)] \\
&= \int_V d^D x [\partial_0 (\Pi_a^{00} \delta_0 \phi^a) + \partial_j (\Pi_a^{0j} \delta_0 \phi^a) - n_\nu n_\mu \partial^\mu (\Pi_a^{0\nu} \delta_0 \phi^a)] \\
&= \int_V d^D x [\partial_0 (\Pi_a^{00} \delta_0 \phi^a) + \partial_j (\Pi_a^{0j} \delta_0 \phi^a) - n_0 n_0 \partial^0 (\Pi_a^{00} \delta_0 \phi^a)] \\
&= \int_V d^D x [\partial_0 (\Pi_a^{00} \delta_0 \phi^a) + \partial_j (\Pi_a^{0j} \delta_0 \phi^a) - \partial^0 (\Pi_a^{00} \delta_0 \phi^a)] \\
&= \int_V d^D x \partial_j (\Pi_a^{0j} \delta_0 \phi^a) = \int_S ds_j (\Pi_a^{0j} \delta_0 \phi^a) = 0, \tag{B.21}
\end{aligned}$$

sendo R a região que engloba todo o espaço-tempo $(D+1)$ - dimensional, V denota a fronteira dessa região, ou seja, um hiper-volume D - dimensional e S a hipersuperfície que delimita V . Nesta expressão, utilizamos um vetor n do tipo $n = (1, \mathbf{0})$.

A condição acima significa que consideramos apenas variações tais que o vetor cujas componentes espaciais são $\Pi_a^{0j} \delta_0 \phi^a$ sejam ortogonais à hipersuperfície S .

Com esses resultados, temos

$$\begin{aligned}
l_3 &\equiv \int_R d^4x \partial_\mu [\Pi_a^\mu \delta_0 \phi^a + \Pi_a^{\mu\nu} \partial_\nu (\delta_0 \phi^a)] \\
&= \int_B d\sigma_\mu [(\Pi_a^\mu - \underline{\partial}_\nu \Pi_a^{\mu\nu}) \delta_0 \phi^a + n_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \widehat{\partial} (\delta_0 \phi^a)] \\
&= \int_B d\sigma_\mu [(\Pi_a^\mu - \underline{\partial}_\nu \Pi_a^{\mu\nu}) \delta_0 \phi^a + n_\nu \Pi_a^{\mu\nu} \delta_0 (\widehat{\partial} \phi^a)] \\
&= \int_B d\sigma_\mu [\pi_a^{(0)\mu} \delta_0 \phi^a + \pi_a^{(1)\mu} \delta_0 (\widehat{\partial} \phi^a)] \\
&= \int_B d\sigma_\mu \sum_{k=0}^{N-1} \pi_a^{(k)\mu} \delta_0 (\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a). \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Nesta expressão, temos $N = 2$ como o número máximo das ordens das derivadas envolvidas no problema. Temos, também, as seguintes definições:

$$\pi_a^{(0)\mu} \equiv \Pi_a^\mu - \partial_\nu \Pi_a^{\mu\nu}; \quad (\text{B.23})$$

$$\pi_a^{(1)\mu} \equiv n_\nu \Pi_a^{\mu\nu}; \quad (\text{B.24})$$

$$\widehat{\partial}^{(k)} \equiv \begin{cases} 1, & k = 0; \\ \widehat{\partial}, & k = 1. \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

Definimos, agora, a quantidade G que chamaremos de *gerador*:

$$G = \int_B d\sigma_\mu \left[\sum_{k=0}^{N-1} \pi_a^{(k)\mu} \delta_0 \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) + L \delta x^\mu \right]. \quad (\text{B.26})$$

Introduzimos a variação total $\bar{\delta}$:

$$\bar{\delta} \phi^a = \delta_0 \phi^a + \phi^a(x) - \phi'^a(x) = \delta_0 \phi^a + \partial_\xi \phi^a(x) \delta x^\xi - \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{ab} \phi^b(x). \quad (\text{B.27})$$

Para as derivadas dos campos, temos um relação similar:

$$\bar{\delta} \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) = \delta_0 \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) + \partial_\xi \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) \delta x^\xi - \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{ab} \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^b \right). \quad (\text{B.28})$$

Resolvendo essa expressão para a derivada na forma

$$\delta_0 \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) = \bar{\delta} \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) - \partial_\xi \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) \delta x^\xi + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{ab} \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^b \right). \quad (\text{B.29})$$

Com isso, podemos reescrever o gerador como

$$G = \int_B d\sigma_\mu \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[\pi_a^{(k)\mu} \bar{\delta} \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) - \pi_a^{(k)\mu} \partial_\xi \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^a \right) \delta x^\xi + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \pi_a^{(k)\mu} S_{\alpha\beta}^{ab} \left(\widehat{\partial}^{(k)} \phi^b \right) \right] + L \delta x^\mu \right\}. \quad (\text{B.30})$$

Analogamente ao caso de derivadas de primeira ordem, definimos

$$f_{(k)}^{\mu\lambda\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[\pi_\alpha^{(k)\mu} S_{\alpha\beta}^{\lambda\nu} \widehat{\partial}^{(k)} \phi^\beta + \pi_\alpha^{(k)\nu} S_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} \widehat{\partial}^{(k)} \phi^\beta + \pi_\alpha^{(k)\lambda} S_{\alpha\beta}^{\nu\mu} \widehat{\partial}^{(k)} \phi^\beta \right], \quad (\text{B.31})$$

sendo $S_{\alpha\beta}^{\lambda\rho} = g^{\lambda\mu} g^{\rho\nu} S_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$. Podemos mostrar as seguintes propriedades de f :

$$\varepsilon_{\lambda\nu} f_{(k)}^{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\nu} \pi_{\alpha}^{(k)\mu} S_{\alpha\beta}^{\lambda\nu} \widehat{\partial}^{(k)} \phi^{\beta}; \quad (\text{B.32})$$

$$f_{(k)}^{\lambda\mu\nu} = -f_{(k)}^{\mu\lambda\nu}. \quad (\text{B.33})$$

Seja

$$\delta x_{\xi} = \varepsilon_{\xi\mu} x^{\mu} + a_{\xi}. \quad (\text{B.34})$$

Assim,

$$\frac{\partial(\delta x_{\xi})}{\partial x^{\rho}} = \varepsilon_{\xi\mu} \delta_{\rho}^{\mu} = \varepsilon_{\xi\rho}. \quad (\text{B.35})$$

Então,

$$\begin{aligned} f_{(k)}^{\mu\xi\rho} \varepsilon_{\xi\rho} &= f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \varepsilon_{\rho\xi} = -f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \varepsilon_{\xi\rho} = -f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \frac{\partial(\delta x_{\xi})}{\partial x_{\rho}} \\ &= -\frac{\partial\left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_{\xi}\right)}{\partial x_{\rho}} + \frac{\partial f_{(k)}^{\mu\rho\xi}}{\partial x_{\rho}} \delta x_{\xi}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Integrando o primeiro termo numa hipersuperfície S fornece:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \frac{\partial\left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_{\xi}\right)}{\partial x^{\rho}} &= \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \frac{\partial\left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_{\xi}\right)}{\partial x^{\rho}} + \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \frac{\partial\left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_{\xi}\right)}{\partial x^{\rho}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \frac{\partial\left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_{\xi}\right)}{\partial x^{\rho}} + \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_{\rho} \frac{\partial\left(f_{(k)}^{\rho\mu\xi} \delta x_{\xi}\right)}{\partial x^{\mu}}, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

ou seja

$$\int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \partial_{\rho} \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_{\xi} \right) = \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \partial_{\rho} \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_{\xi} \right) - \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_{\rho} \partial_{\mu} \left(f_{(k)}^{\rho\mu\xi} \delta x_{\xi} \right). \quad (\text{B.38})$$

Integrando essa expressão em duas hipersuperfícies $\sigma_{(2)}$ e $\sigma_{(1)}$ e calculando a diferença resulta em

$$\begin{aligned}
t_4 &\equiv \int_{\sigma(2)} d\sigma_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) - \int_{\sigma(1)} d\sigma_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\sigma(2)} d\sigma_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) - \frac{1}{2} \int_{\sigma(2)} d\sigma_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\sigma(1)} d\sigma_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) - \frac{1}{2} \int_{\sigma(1)} d\sigma_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{\sigma(2)} d\sigma_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) - \int_{\sigma(1)} d\sigma_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) \right] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\int_{\sigma(2)} d\sigma_\rho \partial_\mu \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) - \int_{\sigma(1)} d\sigma_\rho \partial_\mu \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_R d^{D+1}x \partial_\mu \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) - \frac{1}{2} \int_R d^{D+1}x \partial_\rho \partial_\mu \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_R d^{D+1}x [\partial_\mu, \partial_\rho] \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right) = 0. \tag{B.39}
\end{aligned}$$

Uma vez que o termo $\partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\xi} \delta x_\xi \right)$ é nulo entre duas hipersuperfícies, ele não contribui para o gerador. Então, podemos escrever G simplesmente como

$$G = \int_B d\sigma_\mu \left[\sum_{k=0}^{N-1} \pi_\alpha^{(k)\mu} \bar{\delta} \left(\hat{\partial}^{(k)} \phi^\alpha \right) - T^{\mu\nu} \delta x_\nu \right], \tag{B.40}$$

sendo que definimos o tensor densidade de energia e momento como

$$T^{\mu\nu} \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \left[\pi_\alpha^{(k)\mu} \partial^\nu \left(\hat{\partial}^{(k)} \phi^\alpha \right) - \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\nu} \right) \right] - g^{\mu\nu} L. \tag{B.41}$$

Para uma transformação de Poincaré:

$$\delta x_\nu = \varepsilon_{\nu\xi} x^\xi + a_\nu; \tag{B.42}$$

$$\bar{\delta} \left(\hat{\partial}^{(k)} \phi^\alpha \right) = 0 \tag{B.43}$$

e o gerador se escreve como

$$\begin{aligned}
F &= - \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} \delta x_\nu = - \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} (\varepsilon_{\nu\xi} x^\xi + a_\nu) \\
&= -\varepsilon_{\nu\xi} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\xi - \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} a_\nu.
\end{aligned} \tag{B.44}$$

Agora, definimos

$$P^\nu \equiv \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu}; \tag{B.45}$$

$$J^{\nu\xi} \equiv \int_B d\sigma_\mu M^{\mu\nu\xi}; \tag{B.46}$$

$$M^{\mu\nu\xi} \equiv T^{\mu\nu} x^\xi - T^{\mu\xi} x^\nu. \tag{B.47}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\nu\xi} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\xi &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\xi} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\xi - \frac{1}{2} \varepsilon_{\xi\nu} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\xi \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\xi} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\nu} x^\xi - \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\xi} \int_B d\sigma_\mu T^{\mu\xi} x^\nu \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\xi} \int_B d\sigma_\mu (T^{\mu\nu} x^\xi - T^{\mu\xi} x^\nu) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\xi} \int_B d\sigma_\mu M^{\mu\nu\xi} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\xi} J^{\nu\xi}.
\end{aligned} \tag{B.48}$$

Com isso,

$$G = -a_\nu P^\nu - \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\xi} J^{\nu\xi}. \tag{B.49}$$

Sendo G um gerador, temos

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0; \tag{B.50}$$

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\xi} = 0. \tag{B.51}$$

Dessas expressões, decorre

$$\begin{aligned}
\partial_\mu M^{\mu\nu\xi} &= \partial_\mu (T^{\mu\nu} x^\xi - T^{\mu\xi} x^\nu) = \partial_\mu (T^{\mu\nu} x^\xi) - \partial_\mu (T^{\mu\xi} x^\nu) \\
&= \partial_\mu T^{\mu\nu} x^\xi + T^{\mu\nu} \partial_\mu x^\xi - \partial_\mu T^{\mu\xi} x^\nu - T^{\mu\xi} \partial_\mu x^\nu \\
&= T^{\mu\nu} \partial_\mu x^\xi - T^{\mu\xi} \partial_\mu x^\nu = T^{\mu\nu} \delta_\mu^\xi - T^{\mu\xi} \delta_\mu^\nu \\
&= T^{\xi\nu} - T^{\nu\xi} = 0.
\end{aligned} \tag{B.52}$$

O resultado (B.52) mostra que o tensor densidade de energia e momento calculado dessa forma é automaticamente simétrico.

B.2 O tensor densidade de energia e momento de Podolsky

A densidade de Lagrangeana da teoria de Podolsky livre é

$$L_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \lambda_P \partial_\mu F^{\mu\xi} \partial_\nu F^\nu_\xi, \quad (\text{B.53})$$

sendo λ_P um parâmetro real constante com dimensão de inverso de energia quadrada.

O tensor densidade de energia e momento dessa teoria dado por (B.41) é

$$T_P^{\mu\nu} = \sum_{k=0}^1 \left[\pi_\alpha^{(k)\mu} \partial^\nu \left(\widehat{\partial}^{(k)} A^\alpha \right) - \partial_\rho \left(f_{(k)}^{\mu\rho\nu} \right) \right] - \eta^{\mu\nu} L_P. \quad (\text{B.54})$$

Nesta expressão, temos

$$\pi_\alpha^{(0)\mu} \equiv \Pi_\alpha^\mu - \partial_\nu \Pi_\alpha^{\mu\nu}; \quad (\text{B.55})$$

$$\pi_\alpha^{(1)\mu} \equiv n_\nu \Pi_\alpha^{\mu\nu}, \quad (\text{B.56})$$

com

$$\Pi_\alpha^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu A^\alpha)} - \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A^\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu A^\alpha)} \right] \right\}; \quad (\text{B.57})$$

$$\Pi_\alpha^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu A^\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A^\alpha)} \right] \quad (\text{B.58})$$

e

$$f_{(k)}^{\mu\gamma\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[\pi_\alpha^{(k)\mu} S_\beta^{\alpha\gamma\nu} \widehat{\partial}^{(k)} A^\beta + \pi_\alpha^{(k)\nu} S_\beta^{\alpha\gamma\mu} \widehat{\partial}^{(k)} A^\beta + \pi_\alpha^{(k)\gamma} S_\beta^{\alpha\nu\mu} \widehat{\partial}^{(k)} A^\beta \right]. \quad (\text{B.59})$$

Para um campo vetorial a quantidade $S_\beta^{\alpha\gamma\nu}$ é dada por

$$S_\beta^{\alpha\gamma\nu} = \eta^{\alpha\gamma} \delta_\beta^\nu - \eta^{\alpha\nu} \delta_\beta^\gamma. \quad (\text{B.60})$$

Agora, definimos

$$L_\alpha^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu A^\alpha)}; \quad (\text{B.61})$$

$$L_\alpha^{\mu\xi} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \partial_\xi A^\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\xi \partial_\mu A^\alpha)} \right]. \quad (\text{B.62})$$

Em termos dessas duas quantidades, podemos escrever

$$\pi_\alpha^{(0)\mu} = L_\alpha^\mu - 2\partial_\xi L_\alpha^{\mu\xi} + n_\xi \widehat{\partial} L_\alpha^{\mu\xi} \quad (\text{B.63})$$

$$\pi_\alpha^{(1)\mu} = n_\xi \Pi_\alpha^{\mu\xi} = n_\xi L_\alpha^{\mu\xi}. \quad (\text{B.64})$$

Com isso, $T_P^{\mu\nu}$ se torna

$$T_P^{\mu\nu} \asymp (L_\alpha^\mu - 2\partial_\xi L_\alpha^{\mu\xi}) \partial^\nu A^\alpha - \partial_\rho (f_{(0)}^{\mu\rho\nu} + f_{(1)}^{\mu\rho\nu}) - \eta^{\mu\nu} L_P, \quad (\text{B.65})$$

sendo que o símbolo \asymp indica, nesta tese, que os dois membros de uma equação são iguais a menos da adição de um termo que é uma derivada total - conferir a equação (3.271).¹

Agora, calculamos

$$f_{(0)}^{\mu\gamma\nu} = \frac{1}{2} \left[\pi_\alpha^{(0)\mu} S_\beta^{\alpha\gamma\nu} \widehat{\partial}^{(0)} A^\beta + \pi_\alpha^{(0)\nu} S_\beta^{\alpha\gamma\mu} \widehat{\partial}^{(0)} A^\beta + \pi_\alpha^{(0)\gamma} S_\beta^{\alpha\nu\mu} \widehat{\partial}^{(0)} A^\beta \right]; \quad (\text{B.66})$$

$$f_{(1)}^{\mu\gamma\nu} = \frac{1}{2} \left[\pi_\alpha^{(1)\mu} S_\beta^{\alpha\gamma\nu} \widehat{\partial}^{(1)} A^\beta + \pi_\alpha^{(1)\nu} S_\beta^{\alpha\gamma\mu} \widehat{\partial}^{(1)} A^\beta + \pi_\alpha^{(1)\gamma} S_\beta^{\alpha\nu\mu} \widehat{\partial}^{(1)} A^\beta \right], \quad (\text{B.67})$$

sendo

$$\pi_\alpha^{(0)\mu} S_\beta^{\alpha\gamma\nu} \widehat{\partial}^{(0)} A^\beta = \left(L_\alpha^\mu - 2\partial_\xi L_\alpha^{\mu\xi} + n_\xi \widehat{\partial} L_\alpha^{\mu\xi} \right) S_\beta^{\alpha\gamma\nu} A^\beta; \quad (\text{B.68})$$

$$\pi_\alpha^{(1)\mu} S_\beta^{\alpha\gamma\nu} \widehat{\partial}^{(1)} A^\beta = n_\xi L_\alpha^{\mu\xi} S_\beta^{\alpha\gamma\nu} \widehat{\partial} A^\beta. \quad (\text{B.69})$$

Assim, a soma de (B.66) com (B.67) é

¹Como as quantidades físicas energia e momento são obtidas através de integrais desse tensor, termos aditivos derivativos totais podem sempre ser ignorados sob o argumento de que ao se realizar a integração, as primitivas de tais termos são assumidas ortogonais à (hiper)superfície que engloba o sistema físico.

$$\begin{aligned}
f_{(0)}^{\mu\gamma\nu} + f_{(1)}^{\mu\gamma\nu} &= \frac{1}{2} \left[\left(\pi_{\alpha}^{(0)\mu} S_{\beta}^{\alpha\gamma\nu} A^{\beta} + \pi_{\alpha}^{(1)\mu} S_{\beta}^{\alpha\gamma\nu} \widehat{\partial} A^{\beta} \right) + \right. \\
&\quad + \left(\pi_{\alpha}^{(0)\nu} S_{\beta}^{\alpha\gamma\mu} A^{\beta} + \pi_{\alpha}^{(1)\nu} S_{\beta}^{\alpha\gamma\mu} \widehat{\partial} A^{\beta} \right) + \\
&\quad \left. + \left(\pi_{\alpha}^{(0)\gamma} S_{\beta}^{\alpha\nu\mu} A^{\beta} + \pi_{\alpha}^{(1)\gamma} S_{\beta}^{\alpha\nu\mu} \widehat{\partial} A^{\beta} \right) \right]. \quad (\text{B.70})
\end{aligned}$$

Cada uma das somas entre parênteses pode ser escrita como

$$\pi_{\alpha}^{(0)\mu} S_{\beta}^{\alpha\gamma\nu} A^{\beta} + \pi_{\alpha}^{(1)\mu} S_{\beta}^{\alpha\gamma\nu} \widehat{\partial} A^{\beta} \asymp (L_{\alpha}^{\mu} - 2\partial_{\xi} L_{\alpha}^{\mu\xi}) S_{\beta}^{\alpha\gamma\nu} A^{\beta}. \quad (\text{B.71})$$

Com isso, (B.70) se torna

$$\begin{aligned}
f_{(0)}^{\mu\gamma\nu} + f_{(1)}^{\mu\gamma\nu} &\asymp \frac{1}{2} \left[(L_{\alpha}^{\mu} - 2\partial_{\xi} L_{\alpha}^{\mu\xi}) S_{\beta}^{\alpha\gamma\nu} A^{\beta} + (L_{\alpha}^{\nu} - 2\partial_{\xi} L_{\alpha}^{\nu\xi}) S_{\beta}^{\alpha\gamma\mu} A^{\beta} + \right. \\
&\quad \left. + (L_{\alpha}^{\gamma} - 2\partial_{\xi} L_{\alpha}^{\gamma\xi}) S_{\beta}^{\alpha\nu\mu} A^{\beta} \right]. \quad (\text{B.72})
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos escrever (B.65) como

$$\begin{aligned}
T_P^{\mu\nu} &= (L_{\alpha}^{\mu} - 2\partial_{\xi} L_{\alpha}^{\mu\xi}) \partial^{\nu} A^{\alpha} - \eta^{\mu\nu} L_P + \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_{\gamma} \left\{ [(L^{\gamma\mu} - 2\partial_{\xi} L^{\gamma\mu\xi}) - (L^{\mu\gamma} - 2\partial_{\xi} L^{\mu\gamma\xi})] A^{\nu} + \right. \\
&\quad - [(L^{\nu\mu} - 2\partial_{\xi} L^{\nu\mu\xi}) + (L^{\mu\nu} - 2\partial_{\xi} L^{\mu\nu\xi})] A^{\gamma} + \\
&\quad \left. + [(L^{\gamma\nu} - 2\partial_{\xi} L^{\gamma\nu\xi}) + (L^{\nu\gamma} - 2\partial_{\xi} L^{\nu\gamma\xi})] A^{\mu} \right\}. \quad (\text{B.73})
\end{aligned}$$

Agora, calculamos:

$$L^{\gamma\mu} = -F^{\mu\gamma}; \quad (\text{B.74})$$

$$L^{\gamma\mu\xi} = \lambda_P (2\eta^{\mu\xi} \partial_{\tau} F^{\tau\gamma} - \eta^{\mu\gamma} \partial_{\tau} F^{\tau\xi} - \eta^{\xi\gamma} \partial_{\tau} F^{\tau\mu}); \quad (\text{B.75})$$

$$L^{\gamma\mu} - 2\partial_{\xi} L^{\gamma\mu\xi} = -F^{\mu\gamma} - 2\lambda_P (2\partial^{\mu} \partial_{\tau} F^{\tau\gamma} - \partial^{\gamma} \partial_{\tau} F^{\tau\mu}). \quad (\text{B.76})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T_P^{\mu\nu} &= - [F_{\gamma}^{\mu} + 2\lambda_P (2\partial^{\mu} \partial_{\tau} F^{\tau\gamma} - \partial_{\gamma} \partial_{\tau} F^{\tau\mu})] (\partial^{\nu} A^{\gamma} - \partial^{\gamma} A^{\nu}) - \eta^{\mu\nu} L_P + \\
&\quad - (1 + 2\lambda_P \square) \partial_{\tau} F^{\tau\mu} A^{\nu} - \lambda_P \partial^{\gamma} [(\partial^{\mu} \partial_{\tau} F^{\tau\gamma} + \partial_{\gamma} \partial_{\tau} F^{\tau\mu}) A^{\nu} + \\
&\quad + (\partial^{\mu} \partial_{\tau} F^{\tau\nu} + \partial^{\nu} \partial_{\tau} F^{\tau\mu}) A_{\gamma} - (\partial^{\nu} \partial_{\tau} F^{\tau\gamma} + \partial_{\gamma} \partial_{\tau} F^{\tau\nu}) A^{\mu}]. \quad (\text{B.77})
\end{aligned}$$

Utilizaremos, agora, as equações de Euler-Lagrange (3.20) para fontes nulas:

$$(1 + 2\lambda_P \square) \partial_\tau F^{\tau\mu} = 0. \quad (\text{B.78})$$

Com o auxílio dessa equação, podemos reescrever (B.77) como

$$T_P^{\mu\nu} \simeq F_\gamma^\mu F^{\gamma\nu} - \eta^{\mu\nu} L_P + 2\lambda_P (2\partial^\mu \partial_\tau F_\gamma^\tau - \partial_\gamma \partial_\tau F^{\tau\mu}) F^{\gamma\nu}. \quad (\text{B.79})$$

Contudo,

$$2\lambda_P (2\partial^\mu \partial_\tau F_\gamma^\tau - \partial_\gamma \partial_\tau F^{\tau\mu}) F^{\gamma\nu} \simeq 4\lambda_P \partial^\mu \partial_\tau F_\gamma^\tau F^{\gamma\nu} + 2\lambda_P \partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\gamma F^{\gamma\nu}. \quad (\text{B.80})$$

Utilizando a identidade de Bianchi (3.17), podemos escrever

$$\partial^\mu F^{\gamma\nu} = \partial^\gamma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\gamma\mu}. \quad (\text{B.81})$$

Dessa forma,

$$4\lambda_P \partial^\mu \partial_\tau F_\gamma^\tau F^{\gamma\nu} \simeq 4\lambda_P \partial^\tau F^{\mu\gamma} \partial_\tau F_\gamma^\nu - 4\lambda_P \partial^\gamma F^{\tau\mu} \partial_\tau F_\gamma^\nu, \quad (\text{B.82})$$

e

$$T_P^{\mu\nu} = F_\gamma^\mu F^{\gamma\nu} - \eta^{\mu\nu} L_P + 2\lambda_P (2\partial^\tau F^{\mu\gamma} \partial_\tau F_\gamma^\nu - 2\partial^\gamma F^{\tau\mu} \partial_\tau F_\gamma^\nu + \partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\gamma F^{\gamma\nu}). \quad (\text{B.83})$$

Escrito nesta forma, o tensor densidade de energia e momento da teoria de Podolsky é explicitamente simétrico.

Substituindo a densidade de Lagrangeana (B.53) nessa última expressão podemos mostrar que

$$\begin{aligned} T_P^{\mu\nu} = & -F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 2\lambda_P \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\gamma F_\beta^\gamma - F^{\mu\alpha} \square F_\alpha^\nu + \right. \\ & \left. -F^{\nu\alpha} \square F_\alpha^\mu - F^{\mu\alpha} \partial_\alpha \partial_\beta F^{\beta\nu} - F^{\nu\alpha} \partial_\alpha \partial_\beta F^{\beta\mu} + \partial_\tau F^{\tau\mu} \partial_\gamma F^{\gamma\nu} \right). \quad (\text{B.84}) \end{aligned}$$

Através dessa expressão podemos calcular a densidade de energia do campo de Podolsky livre em termos dos campos elétrico e magnético.

Referências Bibliográficas

- [1] FRADKIN, E. S. **Selected Papers on Theoretical Physics**, Ed. I. V. Tyutin, Lebedev Institute, Moscow (2007);
- [2] BOGOLIUBOV, N. N.; SHIRKOV, D. V. **Quantum Fields**, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. Massachusetts (1983);
- [3] ZEMANIAN, A. H. **Distribution Theory and Transform Analysis An Introduction to Generalized Functions, with Applications**, Dover Publications, Inc., New York (1965);
- [4] RIBEIRO BRAGA, C. L. **Notas de Física Matemática Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições**, Livraria da Física Editora (2006);
- [5] STROCCHI, F. **Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory**, Lecture Notes in Physics, Vol. 51, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltda., Singapore (1993);
- [6] UMEZAWA, H. **Advanced Field Theory Micro, Macro, and Thermal Physics**, American Institute of Physics Press, New York (1995);
- [7] NICHOLSON, D. R. **Introduction to Plasma Theory**, John Wiley & Sons, Inc., New York (1983);
- [8] Le BELLAC, M. **Thermal Field Theory**, Cambridge University Press (1996);
- [9] NARNHOFER, H.; REQUARDT, M.; THIRRING, W. **Quasi-Particles at Finite Temperatures**, *Commun. Math. Phys.* **92**, 247 (1983);
- [10] CALLEN, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**, 2nd. edn., John Willey & Sons, Inc., New York (1985);

- [11] FRADKIN, E. S. **The Quantum Theory of Fields I**, *Sov. Phys. JETP*. **29**, 121 (1955); *Sov. Phys. JETP*, **2**, N1 (1956), reproduzidos em [1];
- [12] FRADKIN, E. S. **The Green Functions Method in Quantum Statistics** *Sov. Phys. JETP*, **36(9)**, N4 (1959); . *Exp. Theor. Phys. USSR **36**, 1286 (1959), reproduzido em [1];*
- [13] FRADKIN, E. S. **The Green Function Method in Quantum Statistics** *Nucl. Phys.* **12**, 465 (1959) reproduzido em [1];
- [14] FRADKIN, E. S. **Concerning Some General Relations of Quantum Electrodynamics**, *J. Exp. Theor. Phys. USSR* **29**, 258 (1955), *Sov. Phys. JETP*. **2**, 361 (1956);, reproduzidos em [1];
- [15] FRADKIN, E. S. **Some General Relations in Statistical Quantum Electrodynamics**, *Sov. Phys. JETP*. **11**, N1 (1960); *J. Exp. Theor. Phys. USSR* **38**, 157 (1960), reproduzidos em [1];
- [16] FRADKIN, E. S. **Application of Functional Methods in Quantum Field Theory and Quantum Statistics (II)** *Nucl. Phys.* **76**, 588 (1966) reproduzido em [1];
- [17] JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**, 3rd. edn., John Wiley & Sons, Inc. (1999);
- [18] CZARNECKI, A. **A finer constant**, *Nature*, Vol 442, 516 (2006);
- [19] QUIGG, C. **Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions**, *Frontiers in Physics*, v. 56; The Benjamin/Cummings Publishing Company, In., Advanced Book Program Reading, Massachusetts (1983);
- [20] PODOLSKY, B. **A Generalized Electrodynamics Part I - Non-Quantum**, *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942);
- [21] PODOLSKY, B.; KIKUCHI, C. **A Generalized Electrodynamics Part II - Quantum**, *Phys. Rev.* **65**, 228 (1942);
- [22] PODOLSKY, B.; SCHWED P. **Review of a Generalized Electrodynamics**, *Rev. Mod. Phys.* **20**, N. 1, 40 (1948);
- [23] CUZINATTO, R. R.; de MELO, C. A. M., POMPEIA, P. J. **Second order gauge theory** *Ann. Phys.* **322**, 1211 (2007);

- [24] OSTROGRADSKY, M. V. *Mem. de l'Acad. Imper. des Sci. de St-Petersbourg* **4** 385 (1850);
- [25] FRENKEL, J. **4/3 problem in classical electrodynamics**, *Phys. Rev. E*, **54**, N.5, 5859 (1996);
- [26] CUZINATTO, R. R.; de MELO, C. A. M.; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA **How can one probe Podolsky Electrodynamics?** *arXiv:0810.4106v1/quantum-ph* (2008);
- [27] BONIN, C. A.; BUFALO, R.; PIMENTEL, B. M.; ZAMBRANO, G. E. R. **Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the Stefan-Boltzmann law**, *Phys. Rev. D* **81**, 025003 (2010) - destacado em *Nature Physics*, **Vol. 6**, 78 (2010). Também disponível em arXiv:hep-th/0912.2063;
- [28] EDDINGTON, A. S. **The Nature of the Physical World**, Cambridge University Press, Cambridge (1929);
- [29] MATSUBARA, T. **A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics**, *Progr. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955).
- [30] FANO, U. **Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques**, *Rev. of Mod. Phys.* **29**, N.1, 74 (1957);
- [31] SAKURAI, J. **Modern Quantum Mechanics**, Revised edition, Addison Wesley (1993);
- [32] REICHL, L. E. **A modern course in statistical physics**, 2nd edn, John Wiley & Sons (1998);
- [33] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**, 5th ed., Academic Press, New York, (2001);
- [34] ANDERSEN, J. O.; STRICKLAND, M. **Resummation in Hot Field Theories**, *Annals Phys.* **317**, 281 (2005);
- [35] KRAEMMER, U.; REBHAN, A. **Advances in perturbative thermal field theory**, *Rept.Prog.Phys.* **67**, 351 (2004);
- [36] GALVÃO, C. A. P.; PIMENTEL, B. M. **The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics** *Can. J. Phys.* **66**, 460 (1988);

- [37] KONOPLEVA, N. P.; POPOV, V. N. **Gauge fields**, Harwood Academic Publishers (1981);
- [38] DIRAC, P. A. M. **Generalized Hamiltonian dynamics**, *Can. J. Math.* **2** 129 (1950);
- [39] DIRAC, P. A. M. **The Hamiltonian form of field dynamics**, *Can. J. Math.* **3** 1 (1951);
- [40] DIRAC, P. A. M. **Lectures on Quantum Mechanics**, Dover Publications, Inc., Mineola, New York (2001);
- [41] SUNDERMEYER, K. **Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model**, Lecture Notes in Physics, 169, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1982);
- [42] GITMAN, D. M.; TYUTIN, I. V. **Quantization of Fields with Constraints**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1990);
- [43] NAKANISHI, N. **Covariant Quantization of the Electromagnetic Field in the Landau Gauge**, *Progr. Theor. Phys.* **35**, 1111 (1966);
- [44] NAKANISHI, N.; OJIMA, I. **Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltda, Singapore (1990);
- [45] SCHWINGER, J. S. **Quantum Dynamics**, *Science* **113** , 479 (1951);
- [46] SCHWINGER, J. S. **On Gauge Invariance and Vacuum Polarization**, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951);
- [47] SCHWINGER, J. S. **The Theory of Quantized Fields. I** *Phys. Rev.* **82**, 914 (1951);
- [48] SCHWINGER, J. S. **Relativistic Quantum Field Theory** *Science* **153**, 949 (1966);
- [49] HATA, H.; KUGO, T. **Operator formalism of statistical mechanics of gauge theory in covariant gauges**, *Phys. Rev. D* **21**, 3333 (1980);
- [50] KAPUSTA, J. I.; GALE, C. **Finite-Temperature Field Theory Principles and Applications**, 2nd Ed., Cambridge University Press, England (2006);

- [51] DAS, A. **Finite Temperature Field Theory**, World Scientific, New Jersey (1999);
- [52] BERNARD, C. W. **Feynman rules for gauge theories at finite temperature**, *Phys. Rev. D*, **9**, N. 12, 3312 (1974);
- [53] BONIN, C. A.; PIMENTEL, B. M. **The Matsubara-Fradkin Thermodynamical Quantization of Podolsky Electrodynamics**, arXiv:1105.3920v1, (2011);
- [54] DYSON, F. J. **The S matrix in quantum electrodynamics**, *Phys. Rev.* **75**, 1736 (1949);
- [55] SCHWINGER, J. S. **On the Green's functions of quantized fields I**, *Proc. Nat. Acad. Sc.* **37**, 452 (1951);
- [56] SCHWINGER, J. S. **On the Green's functions of quantized fields II**, *Proc. Nat. Acad. Sc.* **37**, 455 (1951);
- [57] CHAICHIAN, M.; DEMICHEV, A. **Path Integrals in Physics, Quantum Field Theory, Statistical Physics and other Modern Applications**, Vol. II, Institute of Physics Publishing Ltda (2001);
- [58] WARD, J. C. **An identity in quantum electrodynamics**, *Phys. Rev.* **78**, 182 (1950);
- [59] TAKAHASHI, Y. **On the generalized Ward identity**, *Nuovo Cimento* **6**, 371 (1957);
- [60] PATHRIA, R. K. **Statistical Mechanics**, 2nd. edn. Elsevier Ltd. (1996);
- [61] PARTOVI, M. H. **QED corrections to Planck's radiation law and photon thermodynamics**, *Phys. Rev. D* **50**, 1118 (1994);
- [62] WIPF, A. **Path Integrals**, *Notas de aula*, Theoretisch-Physikalisches-Institut Friedrich-Schiller-Universität, Max Wien Platz 1 (2001/2002);
- [63] MOHR, P. J.; TAYLOR, B.N. **CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002** *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1 (2005);
- [64] PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. **A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s**, *ApJL* **142** 1149 (1965);

- [65] WHITE, M., **Anisotropies in the CMB**, arXiv:astro-ph/9903232v1 (1999);
- [66] BUFALO, R.; PIMENTEL, B. M.; ZAMBRANO, G. E. R. **Path integral quantization of generalized quantum electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **83**, 045007 (2011);
- [67] FRADKIN, E. S.; GITMAN, D. M.; SHVARSTMAN, Sh. M. **Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum**, Springer-Verlag (1991);
- [68] AHARONOV, Y.; BOHM, D. **Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory**, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959);
- [69] BARUT, A. O.; MULLEN, G. H. **Quantization of Two-Component Higher Order Spinor Equations**, *Ann. Phys.* **20**, 184 (1962);
- [70] BARUT, A. O.; MULLEN, G. H. **Action Principle for Higher Order Lagrangians with an Indefinite Metric**, *Ann. Phys.* **20**, 203 (1962);
- [71] BARUT, A. O. **Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles**, Dover Publications Inc., New York (1964).