



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.002/05

**PARTÍCULAS DE SPIN $1/2$ E O PAPEL DA TORÇÃO NA
DESCRIÇÃO DA INTERAÇÃO GRAVITACIONAL**

Héctor Iván Arcos Velasco

Orientador

José Geraldo Pereira

Fevereiro de 2005

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelo apoio incondicional, e aos meus amigos Oscar, Juan, Boris, Paulo e William.

Agradeço ao grupo de gravitação do IFT, e muito especialmente ao meu orientador, José Geraldo Pereira. Não é possível resumir em poucas palavras meu agradecimento para com ele. Sempre estarei em dívida com ele.

Agradeço às agências de fomento CAPES e COLCIENCIAS. Seus apoios foram fundamentais.

Dedico esta tese a Beatriz, Danilo e Gabriel. Eles deram muito mais do que apoio, amor e esperança.

Resumo

Nesta tese, propomos soluções para dois problemas clássicos da gravitação. Primeiramente, consideramos um modelo para uma partícula fundamental de spin $1/2$, o qual faz uso da interpretação estendida de Hawking e Ellis para o espaço-tempo de Kerr-Newman. Ao mostrar que a estrutura topológica altamente não trivial da solução estendida de Kerr-Newman permite a existência de estados gravitacionais com momento angular semi-inteiro, as idéias de Wheeler de *carga sem carga* e *massa sem massa* são automaticamente incorporadas. O vetor de estado representando a solução de Kerr-Newman é construído, e mostra-se que sua evolução é governada pela equação de Dirac. Algumas conseqüências fenomenológicas do modelo são estudadas. Em seguida, na segunda parte da tese, abordamos o velho problema do papel desempenhado pela torção na descrição da interação gravitacional. Usando uma formulação não-holônoma do princípio de covariância geral, visto como uma versão *ativa* do princípio de equivalência forte, fazemos um estudo da prescrição de acoplamento minimal na presença de curvatura e torção. A prescrição de acoplamento minimal obtida através deste princípio é sempre equivalente àquela da relatividade geral, um resultado que reforça o ponto de vista teleparalelo, de acordo com o qual a torção não representa graus de liberdade adicionais para gravitação, mas simplesmente uma forma alternativa de representar o campo gravitacional. Propomos, então, uma formulação diferente para a gravitação que inclui esta nova interpretação para a torção, na qual o campo fundamental é representado, não pela métrica, mas por uma conexão. Consequentemente, paradigma da invariância por difeomorfismos é substituído neste modelo pela invariância sob o grupo local de Lorentz.

Palavras Chaves:

Gravitação, partículas de spin $1/2$, torção, conexão

Áreas do conhecimento:

1.05.03.01-3: Teoria Geral de Partículas e Campos

1.05.01.03-7: Relatividade e Gravitação

Abstract

We propose in this thesis solutions for two classical problems of gravitation. Firstly, by considering the Hawking and Ellis extended interpretation of the Kerr–Newman spacetime, we propose a model for a fundamental spin-1/2 particle. By showing that the highly non-trivial topological structure of the extended Kerr–Newman solution allows the existence of gravitational states with half-integral angular momentum, Wheeler’s idea of *charge without charge* and *mass without mass* are automatically incorporated in the model. The state vector representing the whole Kerr–Newman solution is then constructed, and its evolution is shown to be governed by the Dirac equation. Some phenomenological consequences of the model are explored. Then, in the second part of the thesis, we focus on the problem of the role played by torsion in the description of the gravitational interaction. By using a nonholonomous-frame formulation of the general covariance principle, seen as an *active* version of the strong equivalence principle, an analysis of the gravitational coupling prescription in the presence of curvature and torsion is made. The coupling prescription implied by this principle is found to be always equivalent with that of general relativity, a result that reinforces the teleparallel point of view, according to which torsion does not represent additional degrees of freedom for gravity, but simply an alternative way of representing the gravitational field. We propose then a reformulation of gravitation, which includes this new interpretation for torsion, and in which the fundamental field representing gravitation is not the metric, but a connection. Accordingly, the paradigm of the invariance under diffeomorphisms is replaced, in this model, by the local invariance under the Lorentz group.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Objetivos do trabalho	1
1.2	Notações e definições	4
2	Um Modelo de Partícula em Gravitação	7
2.1	Conceitos básicos	7
2.2	A solução de KN estendida	8
2.2.1	Propriedades básicas	8
2.2.2	Topologia da solução estendida de KN	10
2.2.3	Tensão superficial	14
2.3	Existência de estados com momento angular semi-inteiro	19
2.3.1	Condições topológicas	19
2.3.2	Comportamento sob rotações	20
2.4	Representação algébrica dos estados de KN	23
2.4.1	Estados espinoriais	23
2.4.2	Equação de evolução	25
2.5	Testes fenomenológicos	27
	Apêndices	28
A	O grupo de Lorentz e as transformações de paridade	29
B	Propriedades topológicas de K^3	31
3	O Papel da Torção na Descrição da Interação Gravitacional	33
3.1	Antecedentes	33
3.2	Princípio da covariância geral: caso não-holônomo	34
3.2.1	Referenciais não-holônomos	34
3.2.2	Equivalência entre efeitos inerciais e gravitacionais	36

3.2.3	O acoplamento minimal	37
3.3	Conseqüências físicas do acoplamento minimal	38
3.3.1	Partícula sem spin	38
3.3.2	Partícula com spin	39
3.3.3	Campos espinoriais	41
3.4	Gravitação como uma teoria para uma conexão	43
3.4.1	Transformações de Lorentz	43
3.4.2	Transformações da conexão e da tetrada	46
3.4.3	A conexão de spin como variável fundamental	49
3.4.4	O papel das coordenadas do espaço tangente	52
	Apêndices	53
	C Espaço das conexões	54
	4 Conclusões	56
	Referências	58

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos do trabalho

A relatividade geral é uma teoria de grande sucesso. Todas as experiências têm provado, até agora, que ela pode explicar os fenômenos clássicos da gravitação. Porém, o conhecimento da teoria não é completo: existem muitas situações onde ainda não sabemos como aplicar os princípios da teoria e/ou onde não podemos obter soluções devido à complexidade das equações. A pesquisa moderna em gravitação está concentrada nestas áreas e também nas possíveis generalizações da teoria, para assim explicar uma maior variedade de fenômenos físicos.

Nesta tese, iremos propor soluções para dois problemas da classe dos mencionados acima. No primeiro, procuraremos entender como aplicar a relatividade geral à descrição da estrutura das partículas fundamentais; no segundo, tentaremos entender o papel da torção na descrição da interação gravitacional, e como ela pode (ou não) mudar e generalizar a relatividade geral. Ainda que estes dois problemas sejam bastante diferentes entre si, eles compartilham o objetivo de se chegar a uma melhor compreensão de uma das teorias de maior sucesso na Física do século XX.

O primeiro problema pode ser melhor compreendido através de uma pergunta simples: seria possível descrever a estrutura de uma partícula fundamental de spin $1/2$ usando apenas a relatividade geral? Este é um problema antigo. Uma das primeiras idéias nesta área foi dada por J. A. Wheeler. Ele conjecturou que seria possível existir objetos com carga e massa, sem uma fonte de matéria. De acordo com suas idéias, carga e massa poderiam ser geradas pela auto-interação gravitacional de uma concentração de energia eletromagnética, as quais foram chamados de “geons”, ou pela não trivialidade da topologia do espaço tempo. Neste último caso, temos o exemplo do buraco de minhoca, ou “wormhole”. Um estudo detalhado destas

idéias, no entanto, levou à conclusão que a validade das mesmas é limitada. No caso dos geons, a concentração de energia eletromagnética necessária para gerar uma força gravitacional que mantivesse esta mesma energia numa região finita é enorme. Assim, tais objetos só poderiam existir sob condições muito especiais, possíveis só no início do universo, ou nas escalas de distâncias cósmicas. No caso dos objetos gerados pela topologia não trivial do espaço-tempo, é possível provar que eles podem existir só em escalas da ordem do comprimento de Planck (10^{-34} cm), a qual fica longe das dimensões conhecidas para as partículas fundamentais, como o elétron (10^{-11} cm). Além disso, o conceito de spin semi-inteiro não podia ser explicado com nenhuma das propostas de Wheeler.

Devido aos problemas mencionados, o objetivo de descrever a estrutura das partículas fundamentais através das idéias de Wheeler foi abandonado. Isto gerou espaço para que surgissem outras idéias, como as que deram origem à teoria de cordas, a qual tem apresentado avanços consideráveis nos últimos vinte anos. Esta teoria considera as partículas fundamentais como compostas por uma linha fechada, ou aberta, num espaço tempo multi-dimensional, numa escala da ordem da escala de Planck. Devido ao sucesso teórico desta teoria, pelo menos no que diz respeito à sua consistência e perspectivas futuras, novos trabalhos na linha das idéias de Wheeler tornaram-se limitados. Ainda assim, pode-se destacar dois trabalhos relevantes. O primeiro deles, de Friedman e Sorkin [1], onde esses autores demonstram que é possível existir estados gravitacionais com spin semi-inteiro. Vale ressaltar novamente que isso é possível apenas se o espaço-tempo tiver uma topologia não trivial. Outro trabalho relevante é do Punsly [2], no qual o autor demonstra que a solução de Kerr para as equações de Einstein transforma-se sob rotações da mesma forma que se transformaria um objeto com spin semi-inteiro. O método usado neste caso incluía eliminar a singularidade da solução através de um procedimento geométrico não muito bem justificado do ponto de vista físico.

Baseando-se nas idéias descritas acima, iremos propor nesta tese uma nova solução para a pergunta inicial. Esta solução contém os resultados de Friedman e Sorkin, sem abandonar as idéias de Wheeler, e com o uso da solução de Kerr-Newman para as equações de Einstein. Esta é uma solução com massa, momento angular e carga elétrica. Ela apresenta uma singularidade para o caso onde a massa é menor do que a soma da carga e do spin. Nossa proposta pode ser resumida no seguinte: uma vez que a singularidade seja eliminada através de argumentos físicos, as propriedades topológicas do espaço-tempo resultante permitem obter uma explicação clássica para

os conceitos de massa, spin e carga elétrica. Apresentaremos, então, na primeira parte da tese, um estudo dos conceitos necessários para se chegar ao resultado final, qual seja: a solução de Kerr-Newman pode ser considerada como um modelo viável para a estrutura do elétron, isto é, para uma partícula elementar de spin $1/2$.

O segundo problema a ser estudado refere-se ao papel da torção na descrição da interação gravitacional. Como é sabido, a teoria da relatividade geral de Einstein assume que a torção é nula: somente a curvatura é usada para explicar a interação gravitacional. A pergunta que surge naturalmente é a seguinte: existe alguma razão, teórica ou experimental, para se introduzir torção na teoria para gravitação? Em primeiro lugar, existem teorias, como as de Einstein-Cartan, onde a presença de torção gera novos fenômenos físicos. Nessas teorias, a torção aparece associada ao spin, e torna-se relevante apenas quando o spin torna-se importante. Esses novos fenômenos, portanto, poderiam ser observados apenas em escalas microscópicas, ou então perto de estrelas de nêutrons, onde o spin deve ser importante. Ao mesmo tempo, existe o equivalente teleparalelo da relatividade geral, onde a interação gravitacional é descrita apenas pela torção, sendo a curvatura assumida como sendo nula. A noção de paralelismo absoluto (ou teleparalelismo) foi introduzida por Einstein na década de 1920, na sua tentativa de unificar a gravitação e o eletromagnetismo. Mais ou menos três décadas depois, trabalhos de Møller [3], Pellegrini e Plebanski [4] e Hayashi e Nakano [5] produziram uma nova onda de interesse naquelas idéias, que desde então tem recebido uma considerável atenção, principalmente no contexto de teorias de gauge para os grupos de Poincaré e translação [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

Ainda que estas duas classes de teorias, as de Einstein-Cartan e a teleparalela, usam a torção no seu formalismo, os diferentes papéis que ela desempenha nessas teorias são incompatíveis entre si: enquanto na teoria teleparalela a torção é simplesmente uma alternativa à curvatura, não havendo portanto nenhuma nova física associada a ela, nas teorias de Einstein-Cartan, como já discutido, novos fenômenos são previstos para a física associada à torção. Como consequência, enquanto a teoria teleparalela é equivalente à relatividade geral, as teorias de Einstein-Cartan não são. Estamos, então, diante de um problema conceitual: qual o verdadeiro papel desempenhado pela torção na descrição da interação gravitacional? Em outras palavras, existe ou não novos fenômenos associados à torção?

É importante mencionar que em determinadas teorias de cordas, a torção aparece naturalmente. Se conseguirmos argumentos clássicos que nos leve a uma melhor compreensão do papel da torção, poderemos, em princípio, limitar a sua presença nestas

teorias. Isto terá conseqüências na teoria de cordas, a qual, como é sabido, ainda não é uma teoria completamente desenvolvida devido à sua extrema complexidade. Faremos então uma tentativa de esclarecer o verdadeiro papel da torção na descrição da interação gravitacional. Para isso, faremos uso do princípio de covariância geral, na sua versão não-holônoma. Este princípio, o qual pode ser interpretado como uma versão *ativa* do princípio da equivalência forte, nos levará a uma nova prescrição de acoplamento minimal entre os campos físicos e a gravitação. A equivalência desta prescrição com aquelas da relatividade geral e da teoria teleparalela, junto com o fato desta última ser uma teoria de gauge para o grupo das translações, nos levará a propor uma nova versão alternativa para a gravitação, onde o campo gravitacional é representado por uma conexão de Lorentz, e não pela métrica, como ocorre na relatividade geral. Esta nova teoria compartilha muitas propriedades com as teoria de gauge. Em particular, a invariância sob difeomorfismo da relatividade geral será trocada pela invariância sob o grupo local de Lorentz, resultando numa teoria muito próxima a uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz. Como resultado final desse estudo, obtemos que, para ser consistente com o princípio da covariância geral, ou seja, com o princípio da equivalência forte, o papel da torção na descrição da interação gravitacional deve ser aquele que ela desempenha nas teorias teleparalelas, isto é, simplesmente uma alternativa à curvatura. Apesar de ser uma interpretação completamente diferente da interpretação usual—presente nas teorias de Einstein-Cartan—essa nova interpretação é totalmente consistente, e não pode ser excluída *a priori* por argumentos teóricos. Além disso, como não existem evidências experimentais de novos fenômenos físicos associados à torção, podemos dizer que os dados experimentais existentes, pelo menos até agora, favorecem a interpretação proposta neste trabalho.

1.2 Notações e definições

Usaremos o alfabeto Grego ($\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$) para denotar os índices do espaço-tempo, e o alfabeto Latino maiúsculo ($A, B, C, \dots = 0, 1, 2, 3$) para denotar os índices relacionados ao espaço tangente, o qual é um espaço de Minkowski com métrica $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Usaremos o alfabeto Latino minúsculo ($i, j, k, \dots = 1, 2, 3$) para denotar os índices espaciais do espaço-tempo. De acordo com isso, as coordenadas do espaço-tempo, serão denotadas por x^μ , e aquelas para o espaço tangente por x^A . Posto que estas coordenadas são funções umas das outras, as

derivadas holônomas nestes dois espaços satisfazem as relações

$$\partial_\mu = (\partial_\mu x^A) \partial_A \quad \text{and} \quad \partial_A = (\partial_A x^\mu) \partial_\mu, \quad (1.1)$$

onde $\partial_\mu x^A$ é uma tetrada trivial, ou seja, uma tetrada holonôma, com $\partial_A x^\mu$ sua inversa.

Localmente, e com vetores base dados por $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$, os coeficientes de uma conexão $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ são definidos por

$$\nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \quad (1.2)$$

Sabendo a ação de ∇ nos vetores base, podemos calcular sua ação em qualquer campo vetorial V^ρ :

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\mu} V^\nu. \quad (1.3)$$

Agora, dada uma tetrada não trivial h^A_μ , as métricas do espaço-tempo e do espaço tangente estão relacionadas por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB} h^A_\mu h^B_\nu. \quad (1.4)$$

Uma conexão $\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ é compatível com a métrica se

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu} = 0. \quad (1.5)$$

Por outro lado, uma conexão de spin A_μ é uma conexão assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz,

$$A_\mu = \frac{1}{2} A^{AB}{}_\mu S_{AB}, \quad (1.6)$$

onde S_{AB} é uma representação dos geradores de Lorentz. Usando a tetrada, a conexão geral $\Gamma^\rho_{\nu\mu}$ relaciona-se com a conexão de spin $A^A{}_{B\mu}$ através de

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} = h_A{}^\rho \partial_\mu h^A_\nu + h_A{}^\rho A^A{}_{B\mu} h^B_\nu. \quad (1.7)$$

A relação inversa vem dada por

$$A^A{}_{B\mu} = h^A_\nu \partial_\mu h^B_\nu + h^A_\nu \Gamma^\nu_{\rho\mu} h_B{}^\rho. \quad (1.8)$$

Nesta tese, iremos separar as noções de espaço e conexões. Desde um ponto de vista formal, curvatura e torção são propriedades de uma conexão [14]. De fato, formalmente não existe curvatura ou torção do espaço-tempo, mas apenas curvatura ou torção de uma conexão. Isto se torna evidente quando lembramos que num mesmo

espaço-tempo podem existir várias conexões com diferentes curvatura e torção [15]. É importante observar que, no caso específico da relatividade geral, a universalidade da gravitação permite que a conexão de Levi–Civita possa ser incorporada na definição do espaço-tempo, posto que todas as partículas e campos sentem a mesma conexão. Porém, quando conexões com diferentes curvatura e torção existem simultaneamente, é muito mais conveniente considerar as conexões (com suas curvaturas e torções) como estruturas adicionais a uma variedade.

A curvatura e a torção da conexão $A^A{}_{B\mu}$ são definidas respectivamente por

$$R^A{}_{B\nu\mu} = \partial_\nu A^A{}_{B\mu} - \partial_\mu A^A{}_{B\nu} + A^A{}_{E\nu} A^E{}_{B\mu} - A^A{}_{E\mu} A^E{}_{B\nu} \quad (1.9)$$

e

$$T^A{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^A{}_\mu - \partial_\mu h^A{}_\nu + A^A{}_{E\nu} h^E{}_\mu - A^A{}_{E\mu} h^E{}_\nu. \quad (1.10)$$

Usando a relação (1.8), elas podem ser reescritas com índices espaço-temporais, e nesse caso assumem as formas

$$R^\rho{}_{\lambda\nu\mu} \equiv h_A{}^\rho h^B{}_\lambda R^A{}_{B\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho{}_{\eta\nu} \Gamma^\eta{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho{}_{\eta\mu} \Gamma^\eta{}_{\lambda\nu} \quad (1.11)$$

e

$$T^\rho{}_{\nu\mu} \equiv h_A{}^\rho T^A{}_{\nu\mu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}. \quad (1.12)$$

As componentes da conexão podem ser decompostas de acordo com

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\mu\nu} + K^\rho{}_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

onde

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (1.14)$$

é a conexão de Levi–Civita da relatividade geral, e

$$K^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_\nu{}^\rho{}_\mu + T_\mu{}^\rho{}_\nu + T^\rho{}_{\mu\nu}) \quad (1.15)$$

é o tensor de contorção. Usando a relação (1.7), a decomposição (1.13) pode ser reescrita em termos das conexões de spin, assumindo a forma

$$A^C{}_{A\nu} = \overset{\circ}{A}{}^C{}_{A\nu} + K^C{}_{A\nu}, \quad (1.16)$$

onde $\overset{\circ}{A}{}^C{}_{A\nu}$ é o coeficiente de rotação de Ricci, a conexão de spin da relatividade geral.

Capítulo 2

Um Modelo de Partícula em Gravitação

2.1 Conceitos básicos

A solução estacionária e simétrica de Kerr-Newman (KN) para as equações de Einstein foi encontrada realizando-se uma transformação complexa na tetrada da solução de Schwarzschild com carga (Reissner-Nordström) [16, 17, 18]. Para $m^2 \geq a^2 + q^2$, a solução de KN representa um buraco negro com massa m , momento angular por unidade de massa a , e carga q . Nas coordenadas de Boyer e Lindquist (r, θ, ϕ) , a solução de KN é dada por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{Rr}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2, \quad (2.1)$$

onde $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - Rr + a^2$ e $R = 2m - q^2/r$. Esta solução é invariante por uma mudança simultânea de $(t, a) \rightarrow (-t, -a)$ e $(m, r) \rightarrow (-m, -r)$, e separadamente por $q \rightarrow -q$. Este buraco negro é o estado final de um colapso gravitacional estelar, onde a estrela tem rotação e sua carga total é diferente de zero.

A estrutura da solução de KN muda totalmente quando $m^2 \leq a^2 + q^2$. Devido à ausência de um horizonte, ela não representa mais um buraco negro, e sim uma singularidade “nua” no espaço-tempo. Esta solução é de grande interesse porque ela descreve um objeto massivo com carga e spin, e com uma razão giromagnética igual àquela do elétron [17]. Como consequência, muitas tentativas para modelar o elétron usando a solução de KN com $m^2 \leq a^2 + q^2$ tem sido feitas [19, 20, 21, 22]. Em todos estes modelos, a singularidade circular é rodeada por uma bolha elipsoidal, ficando assim impossível de ser observada. Em outras palavras, a singularidade é considerada não física no sentido de que a presença da bolha impede sua formação.

Inspirado nos trabalhos de Barut [23, 24], que tentou explicar o *Zitterbewegung* que aparece na teoria de Dirac para o elétron, e também nos trabalhos de Wheeler

[25] sobre “matéria sem matéria” e “carga sem carga”, a proposta básica desta parte da tese é mostrar que a solução de KN com $m^2 \leq a^2 + q^2$, sem matéria exótica ao redor da singularidade, pode ser consistentemente interpretada como um modelo realista para o elétron.

2.2 A solução de KN estendida

2.2.1 Propriedades básicas

A solução de KN para $m^2 \leq a^2 + q^2$ exibe uma singularidade circular de raio a , a qual se localiza na fronteira de um disco onde as componentes da métrica deixam de ser bem comportadas. Quando o círculo é colocado no plano xy , com o centro do mesmo coincidindo com a origem de um sistema de coordenadas cartesianas, a simetria axial da solução (ao redor do eixo z) se torna explícita. Deve ser ressaltado que, quando trabalhamos com esta solução, os conceitos de massa e carga devem ser usados com cuidado pois a presença da singularidade proíbe o uso de conceitos e/ou leis físicas ao longo dos pontos da fronteira do disco.

A ausência de regularidade das componentes da métrica quando o disco é atravessado pode ser remediada considerando-se a extensão do espaço de acordo com a interpretação de Hawking e Ellis [26], deixando claro que a singularidade da fronteira do disco não pode ser eliminada por esta construção. A idéia básica da extensão é considerar que nosso espaço-tempo está colado pelo disco singular a um outro espaço-tempo idêntico. Em outras palavras, a superfície do disco (com os pontos superiores considerados diferentes dos inferiores) é interpretada como uma fronteira compartilhada entre nosso espaço-tempo, denotado por \mathbf{M} , e outro similar, denotado por \mathbf{M}' . De acordo com esta construção, as componentes da métrica de KN não são mais singulares através do disco, tornando possível a colagem suave dos espaços, gerando assim um grande e único espaço-tempo quadri-dimensional \mathcal{M} . Assumiremos a extensão de Hawking e Ellis como ponto de partida de nossa construção.

A colagem entre os dois espaços pode ser entendida mais facilmente fazendo um desenho bi-dimensional. Neste desenho a colagem é representada por cilindros sólidos que saem de um espaço para o outro. As principais conseqüências desta interpretação são:

- Podemos associar a carga elétrica da solução de KN em cada 3-variedade com o fluxo resultante de um campo elétrico preso na topologia, indo de um espaço

para outro, como foi proposto por Wheeler [25]. Quando as linhas do campo parecem terminar no anel singular (visto desde \mathbf{M} ou \mathbf{M}'), a igualdade no valor da carga elétrica em ambos lados de \mathcal{M} implica que nenhuma linha de campo pode desaparecer quando vai de \mathbf{M} para \mathbf{M}' , ou vice-versa. Então, em analogia com a geometria do buraco de minhoca (“wormhole”) presente nas soluções das equações de Einstein, deve existir um caminho contínuo para cada uma das linhas do campo elétrico. Em particular, a igualdade do momento magnético em ambos os lados de \mathcal{M} implica que as linhas de campo magnético devem também ser contínuas quando passam através do disco limitado pela singularidade.

- Podemos associar a massa da solução com a magnitude da curvatura da solução de KN. Em geral, a massa pode ser definida como a integral (usamos aqui a notação abstrata de Wald [27])

$$m = -\frac{1}{8\pi} \int_{\sigma} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d = -\frac{3}{8\pi} \int_V \nabla_{[e} \{ \epsilon_{ab]cd} \nabla^c \xi^d \}, \quad (2.2)$$

onde ϵ_{abcd} é o elemento de volume do espaço-tempo, $\xi^b = (\partial/\partial t)^b$ é um campo vetorial de Killing tipo espaço, V é uma hiper-superfície tipo espaço que rodeia a singularidade, e σ é a fronteira de V , a qual é topologicamente equivalente a uma esfera S^2 . Da última expressão, obtemos

$$m = \frac{1}{4\pi} \int_V R_{ab} n^a \xi^b dV, \quad (2.3)$$

onde n^a é um vetor unitário normal a V que aponta para o futuro, e dV é o elemento diferencial de volume, o qual, em termos das coordenadas de Boyer e Lindquist, é dado por

$$dV = \frac{1}{2} (a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta) \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (2.4)$$

A equação (2.3) mostra que m depende do tensor de Ricci do espaço-tempo. Esta equação foi obtida por Komar [28] e é válida para todos os espaços-tempos estacionários e assintoticamente planos. É importante mencionar que o volume de integração pode ser tanto a região com $r > 0$ ou a com $r < 0$. Além disso, podemos ver da equação (2.3) que no lado \mathbf{M} (r positivo), a massa é positiva, mas é negativa em \mathbf{M}' (r negativo). Os sinais de ξ^b e n^a não são fixos em \mathcal{M} pois eles podem ser positivos ou negativos. Deve-se notar também que a massa m é a massa total do sistema, isto é, ela inclui a parte gravitacional, eletromagnética e rotacional [29].

Agora, usando para a , m e q os valores conhecidos experimentalmente para o elétron, podemos escrever o momento angular interno L da solução de KN em cada lado de \mathcal{M} como

$$L = m a, \quad (2.5)$$

o qual, para uma partícula de spin $1/2$, assume o valor de $L = 1/2$. É, então, fácil verificar que o disco tem um diâmetro igual ao comprimento de onda Compton $(\lambda/2\pi)_e = 1/m$ para o elétron, e conseqüentemente a velocidade angular ω de um ponto situado no anel singular é

$$\omega = 2 m, \quad (2.6)$$

a qual é igual a frequência do *Zitterbewegung* de Barut [23] para um elétron pontual em órbita circular de diâmetro λ_e . Conseqüentemente, se a solução de KN é tomada como um modelo realista para o elétron, ela mostra desde o início uma origem clássica para a massa, a carga elétrica, a magnitude do spin, e também para o fator giromagnético $g = 2$. Diferentemente dos outros modelos já conhecidos para o elétron [19, 20, 21], não iremos supor nenhuma distribuição de matéria no disco ou em sua fronteira. Em vez disso, vamos considerar uma solução “vazia” de KN, porém com uma topologia não trivial.

2.2.2 Topologia da solução estendida de KN

Com uma simples análise da estrutura da métrica de KN, é possível isolar quatro estados fisicamente não equivalentes para cada lado de \mathcal{M} , isto é, \mathbf{M} e \mathbf{M}' . Estes estados podem ser identificados pelo sentido de rotação (a pode ser positiva ou negativa), e pelo sinal da carga elétrica (positiva ou negativa). Antes de escolher um eixo de rotação para o spin, estes estados são totalmente equivalentes (a menos de uma rotação). No entanto, depois de uma escolha, eles passam a ser fisicamente diferentes. Se colocarmos o disco de KN no plano xy de um sistema de coordenadas cartesiano, o vetor de spin ficará na direção $+z$ ou $-z$. Agora, cada uma destas soluções não equivalentes em \mathbf{M} devem ser coladas continuamente, através do disco de KN, com alguma outra do lado \mathbf{M}' , mas com carga oposta. Devido à necessidade de se fazer uma colagem contínua das componentes da métrica, ela deve levar em consideração o sentido de rotação dos anéis. Através de uma separação espacial entre os discos superior e inferior de cada variedade, as colagens podem ser representadas como cilindros sólidos (ver Fig. 2.1), o que explicita a diferença entre os discos superior e inferior. Por simplicidade, consideraremos só uma das duas possíveis

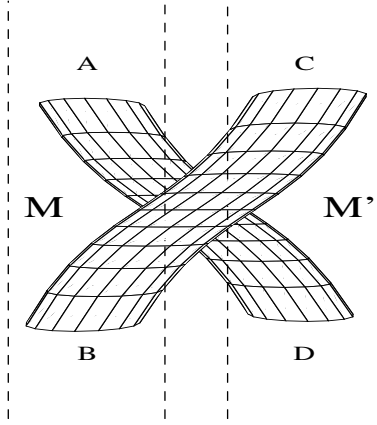


Figura 2.1: Para entender melhor a geometria intrínseca da variedade espacial de KN, desenhamos o disco $r = 0$ como se tivesse uma espessura finita, significando que as superfícies inferior e superior do disco são diferentes. O lado esquerdo de cada configuração representa o disco em \mathbf{M} , enquanto que o lado direito representa o disco em \mathbf{M}' . A superfície B deve ser colada com a C, e a superfície D com a A.

cargas elétricas em \mathbf{M} ($q < 0$, por exemplo). Na Fig. 2.2, as colagens tubulares entre \mathbf{M} e \mathbf{M}' são desenhadas novamente, mas agora levando em conta as diferentes direções do spin em cada disco, as quais são desenhadas como pequenas setas. As únicas diferenças entre estas configurações são as orientações do vetor de spin, e a geometria dos tubos.

Para entender melhor a topologia da seção espacial do espaço-tempo de KN, vamos obter sua métrica espacial, isto é, a métrica de sua seção espacial de 3 dimensões. Como a métrica quadridimensional de KN tem termos não diagonais, a forma correta do intervalo tri-dimensional é dada por [30]

$$d\gamma^2 = \left(-g_{ij} + \frac{g_{oi}g_{oj}}{g_{oo}} \right) dx^i dx^j \equiv \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.7)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. Aplicando esta fórmula à métrica de KN (equação (2.1)), obtemos

$$\begin{aligned} d\gamma^2 &= \left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2 + q^2} \right) dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &+ \left(\frac{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2mr + q^2} \right) (r^2 + a^2 - 2mr + q^2) d\phi^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A primeira coisa a ser notada é que as componentes espaciais são finitas nos pontos do anel, ou seja, em $r = 0$ e $\theta = \pi/2$. Isto não significa que a singularidade esteja

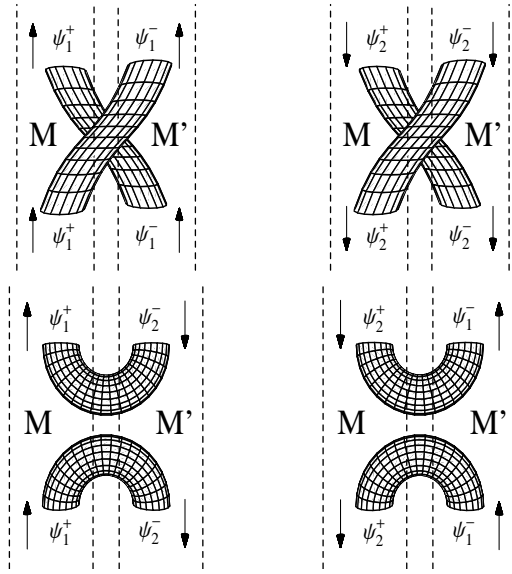


Figura 2.2: As quatro configurações geométricas da solução de KN para um valor fixo da carga elétrica. O disco $r = 0$ em cada espaço, isto é em M e M' , fica no plano $z = 0$. As setas indicam o sentido do vetor de spin.

ausente, mas simplesmente que só as derivadas da métrica são singulares, não a métrica. Podemos então dizer que a seção espacial da métrica de KN tem uma topologia bem definida. De fato, a função distância

$$d(p, q) = \int_p^q \sqrt{\gamma(u)} du$$

é facilmente provada ser finita para quaisquer pontos p e q do espaço. Então, a seção espacial de KN, denotada por \mathcal{M}^3 , tem uma estrutura topológica bem definida, e é conseqüentemente um espaço topológico. Ainda que ele tenha uma estrutura topológica bem definida, o espaço \mathcal{M}^3 não é localmente euclideo em todos pontos. Para entender isso, calculemos o comprimento espacial \mathcal{L} da fronteira do disco $r = 0$. Ele é dado por

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} d\gamma, \quad (2.9)$$

onde a integral é calculada para $r = 0$ e $\theta = \pi/2$. Como um simples cálculo mostra, o resultado da integral é zero, o que significa que a fronteira do disco é topologicamente um ponto de \mathcal{M}^3 . Então, uma bola aberta e centrada no ponto $(r = 0, \theta = \pi/2)$ não é difeomorfa a uma bola euclidea aberta, e conseqüentemente o espaço \mathcal{M}^3 não é localmente euclideo na borda do disco $r = 0$.

O problema anterior pode ser resolvido pelo uso do conceito de “carga sem carga” devido a Wheeler. De acordo com essa proposta, as linhas do campo elétrico não terminam nem iniciam em ponto algum: elas são sempre contínuas. É a topologia não trivial do espaço-tempo que, ao deixar preso o campo elétrico, faz com que as linhas de campo pareçam ter uma origem. Aplicando esta idéia à solução de KN, vemos que as linhas do campo elétrico terminam no anel singular somente do ponto de vista de 4-dimensões. Do ponto de vista tri-dimensional, elas terminam em um ponto (a fronteira do disco). Agora, se este ponto não é a origem das linhas de campo elétrico, então elas devem seguir um caminho contínuo até o lado com r negativo. Esta situação é bastante similar à presente na solução de Reissner-Nordström nas coordenadas de Kruskal-Szekeres [25], onde as linhas de campo elétrico podem ser continuadas até o lado com r negativo (deve-se notar que a solução, neste caso, não é totalmente estática posto que a coordenada tipo-tempo muda para tipo-espaço para pequenas distâncias da singularidade). De maneira análoga ao caso da solução de Reissner-Nordström, então, podemos eliminar uma vizinhança do ponto $r = 0$ da solução de KN, e colar as bordas resultantes. No caso de KN, considerando-se os valores para a carga, massa e spin do elétron, a coordenada temporal não muda sua natureza para tipo espaço em nenhum ponto, ficando a solução estacionária depois do procedimento de excisão. Além disso, baseado numa análise causal da solução, podemos escolher eliminar exatamente a região em forma de toro ao redor da singularidade, onde existem curvas fechadas tipo tempo não-causais. Usando a métrica (2.1), é fácil ver que a coordenada ϕ torna-se tipo tempo na região onde a seguinte desigualdade é válida [31]:

$$r^2 + a^2 - \left(\frac{q^2 - 2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) a^2 \sin^2 \theta < 0. \quad (2.10)$$

Eliminando esta região, o espaço-tempo de KN vira causal. Como já foi dito, esta região tem uma forma simples: ela é tubular e rodeia o anel singular tanto do lado $r > 0$ como do lado $r < 0$. Quando os valores de a , q e m são aqueles do elétron, a superfície da região tubular fica a uma distância de 10^{-34} cm do anel singular. Para estas distâncias infinitesimais, mudanças de topologia são muito prováveis de ocorrer, e assim uma mudança na conectividade do espaço-tempo não é improvável. A idéia de Wheeler pode assim ser implementada na solução de KN. Isto significa eliminar a região infinitesimal do lado positivo e negativo de r , e logo colar de novo a variedade mantendo a continuidade das linhas do campo elétrico e das componentes da métrica. Um desenho simples da região a ser eliminada pode ser visto na Fig. 2.3,

onde o sentido do gradiente de r foi desenhado em vários pontos. Como um exemplo,

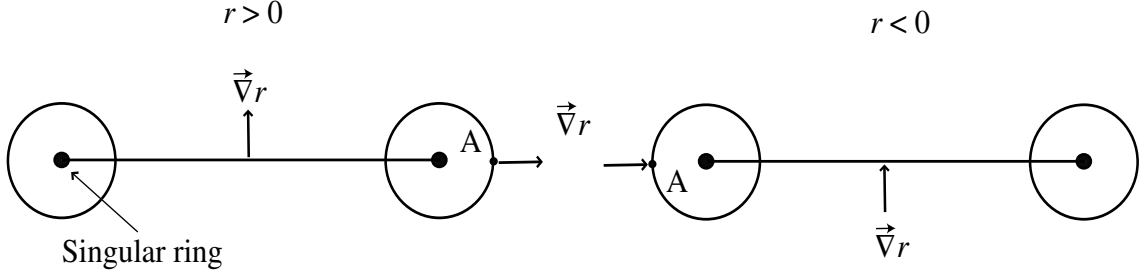


Figura 2.3: Região tubular a ser excisada em torno do anel singular. Diversas direções $\vec{\nabla}r$ são também indicadas, as quais mostram como as bordas nos lados com r positivo e negativo podem ser coladas de forma a manter a continuidade do espaço.

note-se que o ponto A do lado positivo de r deve ser colado ao ponto A do lado r negativo. Se continuamos colando todos os pontos da fronteira tubular, obteremos um caminho contínuo para as linhas do campo elétrico que fluem de um lado da solução de KN para o outro lado. A idéia de Wheeler fica totalmente implementada, gerando assim uma variedade tri-dimensional \mathcal{M}^3 , a qual é localmente euclídeana em todos pontos e, portanto, é uma variedade Riemanniana. Além disso, posto que não há mudança no sinal da curvatura extrínseca [21] na hipersuperfície $g_{\phi\phi} = 0$ quando é atravessada de $r > 0$ para $r < 0$, pode-se concluir que a colagem feita não gera tensões superficiais.

2.2.3 Tensão superficial

A métrica tri-dimensional da hipersuperfície onde a componente $g_{\phi\phi}$ se anula é dada por

$$d\sigma^2 = \left[1 - \frac{R(r)r}{\rho^2}\right] d^2t - \rho^2 \left[\frac{1}{\Delta} + \left(\frac{d\Theta(r)}{dr}\right)^2\right] d^2r + \frac{2aR(r)r \sin^2 \Theta(r)}{\rho^2} dt d\phi, \quad (2.11)$$

onde $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \Theta(r)$, $\Delta = r^2 - R(r)r + a^2 + q^2$, $R(r) = 2mr - q^2/r$, e $\Theta(r)$ é uma função obtida pela anulação da componente $g_{\phi\phi}$. Esta função pode ser escrita como (ver Eq. (2.10))

$$\Theta(r) = \arcsin \left[\frac{a^{-1}(r^2 + a^2)}{\Delta^{1/2}} \right]. \quad (2.12)$$

Usamos r , ϕ e t como coordenadas intrínsecas, e com r tendo valores positivos e negativos. De acordo com o trabalho de Israel, o tensor de tensão superficial S_{ab}

aparece quando o valor da curvatura extrínseca K_{ab} da superfície muda de sinal ao atravessar a superfície. Sua forma é

$$-8\pi S_{ab} = [K_{ab}] - g_{ab}g^{cd}[K_{cd}], \quad (2.13)$$

onde $[K_{ab}] = K_{ab}^+ - K_{ab}^-$ é a diferença entre as curvaturas extrínsecas calculadas em cada lado da hipersuperfície, e $a, b = t, r, \phi$ são índices do sub-espço onde $\Theta(r)$ é definida. A curvatura extrínseca é obtida de

$$K_{ab} = n_{\mu|\nu}e_a^\mu e_b^\nu, \quad (2.14)$$

onde n_μ é o vetor unitário normal a hipersuperfície, com $n_{\mu|\nu}$ representando a derivação covariante no espaço-tempo quadri-dimensional de KN. Agora, como já foi afirmado (ver Fig. 2.3), a topologia da hipersuperfície é similar àquela de um toro. O vetor unitário normal pode ter componentes, por simetria, só nas coordenadas r e θ , ou seja, ele é normal à superfície da Fig. 2.3. As componentes do vetor podem ser calculadas sob a condição que sua norma sob a métrica de KN seja unitária. O modo mais fácil de calcular as componentes de n_μ é parametrizar a superfície $\Theta(r)$ usando r como parâmetro, e calculando o vetor tangente à superfície. Da condição de ortogonalidade com n_μ , e da condição de unitariedade, obtemos o sistema de equações

$$\Delta n_r + \Theta' n_\theta = 0 \quad (2.15)$$

$$-n_r^2 \frac{\Delta}{\rho^2} - n_\theta^2 \frac{1}{\rho^2} = -1, \quad (2.16)$$

onde a “linha” denota uma derivada com relação a r . Este sistema de equações tem como solução

$$n_\theta = \pm \frac{\rho}{\left(1 + \frac{(\Theta')^2}{\Delta}\right)^{1/2}} \quad (2.17)$$

$$n_r = \mp \frac{\Theta'}{\Delta} \frac{\rho}{\left(1 + \frac{(\Theta')^2}{\Delta}\right)^{1/2}}. \quad (2.18)$$

Os sinais do n_θ e n_r não são fixados pelas equações (2.15) e (2.16). Esta liberdade permite-nos escolher o sentido da direção normal, seja no espaço com r negativo, ou vice-versa. Este é um ponto muito importante, sendo que nossa escolha é o sinal *menos* para n_θ no lado $r > 0$ (ver Fig. 2.3). A prova de que as expressões para as componentes do vetor unitário são corretas pode ser obtida olhando seus valores

limites. Quando $\Theta' = 0$, o vetor normal fica no sentido de $\pm\theta$, isto é, no disco $r = 0$. Quando $\Theta' \rightarrow \infty$ (ou seja quando $\theta = \pi/2$), o vetor unitário fica no sentido $\mp r$. Ainda com a escolha do sinal “ $-$ ” para n_θ não é obvio que as normais coincidem, posto que a dependência de Θ' em r é escrita como uma soma de fatores de r e m :

$$\begin{aligned} n_r &= \frac{(q^2 - 2mr)(a^2 + r^2)(a^2(m+r) + r(2q^2 + r(-3m+r)))}{a \sqrt{1 + \frac{(a^2(m+r) + r(2q^2 + r(-3m+r)))^2}{(-r^4 + a^2(q^2 - r(2m+r)))\Delta^3}} \sqrt{1 - \frac{(a^2 + r^2)^2}{a^2\Delta}} \Delta^{\frac{7}{2}} \\ &= -f(r > 0, m > 0). \end{aligned} \quad (2.19)$$

A segunda linha é devido ao fato da mudança de sinal de r e m no lado $r < 0$. Nossa escolha nos leva a:

	$r > 0$	$r < 0$
n_θ	$-\frac{\rho}{\left(1 + \frac{(\Theta')^2}{\Delta}\right)^{1/2}}$	$-\frac{\rho}{\left(1 + \frac{(\Theta')^2}{\Delta}\right)^{1/2}}$
n_r	$f(r > 0, m > 0)$	$-f(r > 0, m > 0)$

Deve-se notar que o ângulo θ vai de 0 (no centro do disco superior $r = 0$) até π (no disco inferior $r = 0$), mas posto que o disco superior em $r > 0$ foi colado com o disco inferior em $r < 0$, a variável θ vai desde 0 no disco inferior em $r < 0$ até π no disco superior em $r < 0$. Assim, o vetor unitário normal às superfícies $\theta = \text{constante}$ muda de sinal no lado $r < 0$. Com tudo isto em mente, é possível ver que as normais coincidem em cada lado, posto que no lado $r < 0$ o sinal menos da componente n_r mostra que ela aponta no sentido contrário ao do vetor unitário \hat{r} do lado $r > 0$, isto é, na direção da singularidade para $\theta = \pi/2$.

Os resultados acima não garantem que a tensão superficial seja nula. Para verificar este fato, temos que calcular as componentes não nulas da curvatura extrínseca usando a equação (2.14). Fazendo isso, obtemos:

$$\begin{aligned} K_{tt}^\pm &= -\Gamma_{tt}^\alpha n_\alpha = -\Gamma_{tt}^r n_r - \Gamma_{tt}^\theta n_\theta, \\ K_{t\phi}^\pm &= -\Gamma_{t\phi}^\alpha n_\alpha = -\Gamma_{t\phi}^r n_r - \Gamma_{t\phi}^\theta n_\theta, \\ K_{rr}^\pm &= \partial_r n_r - \Gamma_{rr}^\alpha n_\alpha = \partial_r n_r - \Gamma_{rr}^r n_r - \Gamma_{rr}^\theta n_\theta, \\ K_{\phi\phi}^\pm &= -\Gamma_{\phi\phi}^\alpha n_\alpha = -\Gamma_{\phi\phi}^r n_r - \Gamma_{\phi\phi}^\theta n_\theta. \end{aligned}$$

Reescrevendo estas equações em termos das componentes da métrica, ficamos com:

$$K_{tt}^\pm = \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{tt} n_r + \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{tt} n_\theta, \quad (2.20)$$

$$K_{t\phi}^{\pm} = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{t\phi}n_r + \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{t\phi}n_\theta, \quad (2.21)$$

$$K_{rr}^{\pm} = \partial_r n_r - \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr}n_r + \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{rr}n_\theta, \quad (2.22)$$

$$K_{\phi\phi}^{\pm} = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\phi\phi}n_r + \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{\phi\phi}n_\theta. \quad (2.23)$$

Agora, para calcular o tensor de tensão superficial, devemos achar a diferença $[K_{ab}] = K_{ab}^+ - K_{ab}^-$. Esta diferença pode ser calculada mais facilmente se identificarmos os sinais no último conjunto de equações. Primeiramente, cada derivada da métrica com relação a r produz um termo que pode ser escrito como um fator linear de m e r ; estas derivadas, então, mudam de sinal quando a hipersuperfície é atravessada. Mas, como elas estão multiplicadas por n_r , não há mudança de sinal nestes termos. Por outro lado, é possível verificar que os termos envolvendo derivadas com relação a θ não têm termos lineares em r ou m ; ou seja, eles não mudam de sinal. O mesmo acontece com n_θ . Finalmente, a derivada $\partial_r n_r$ não contém termos lineares em r ou m , e assim, eles também não mudam de sinal. A conclusão é, então, que o tensor de tensão superficial da hipersuperfície $\Theta(r)$, onde os dois lados da solução de KN são colados, é nulo. Esta é uma propriedade muito especial da solução de KN.

Para complementar o cálculo anterior, vamos determinar a forma geométrica da superfície obtida pela colagem contínua das bordas tubulares ao redor da singularidade. Para fazer isto, devemos definir a aplicação $\mathcal{A} : S^1 \rightarrow S^1$, que é construída da seguinte forma: desenhe os dois círculos S^1 da Fig. 2.3, mas agora com centro nos pontos $(a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$ pertencentes a um sistema cartesiano de coordenadas. A aplicação $\mathcal{A}(p \in S^1)$ é definida como $\mathcal{A}(x, 0, z) = (-x, 0, -z)$, onde $(x, 0, z)$ são as coordenadas do ponto p . A forma desta aplicação é deduzida da restrição de colar as bordas tubulares mantendo a continuidade das componentes da métrica. A superfície determinada pela colagem é gerada pelo espaço quociente de S^1 pela relação de equivalência $p \sim \mathcal{A}(p)$, e pela rotação de π dos círculos ao redor do eixo z . Esta superfície coincide com a conhecida *Garrafa de Klein* (denotada por U_2), como pode ser verificado na Ref. [32]. É importante notar que a garrafa de Klein foi encontrada também por Punsly [2] no contexto da solução de Kerr, através de um procedimento de extensão da métrica que elimina o anel singular. Porém, em nosso caso, temos uma justificativa física para eliminar a singularidade: a continuidade das linhas do campo elétrico.

A eliminação do anel singular pode ser entendida mais facilmente considerando-se a função $r \rightarrow e^r$, a qual possibilita observar os dois lados da superfície $r = 0$. Esta

função é desenhada na Fig. 2.4, onde os círculos representam as pequenas vizinhanças eliminadas ao redor do anel singular. A imagem total da variedade tri-dimensional resultante é obtida girando o plano da figura por um ângulo π . Fica claro da figura que a variedade obtida será multiplamente conexa, posto que qualquer caminho que rodeia as regiões eliminadas não pode ser contraído a um ponto. As bordas das regiões eliminadas devem ser coladas mantendo a componente radial da métrica contínua. As outras componentes da métrica são iguais nestas bordas (devido à simetria rotacional), e portanto elas podem ser colados trivialmente. De acordo com

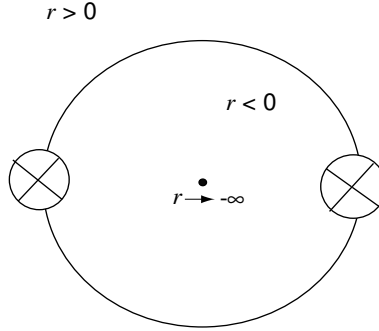


Figura 2.4: Vista da seção simétrica total bi-dimensional de \mathcal{M}^3 , obtida pela função $r \rightarrow e^r$. O círculo maior representa a superfície $r = 0$. O anel singular está localizado no equador, e os círculos pequenos representam as regiões infinitesimais eliminadas ao redor da singularidade.

a construção anterior, \mathcal{M}^3 é uma 3- variedade diferenciável. Esta variedade pode ser vista como

$$\mathcal{M}^3 = \mathbf{R}^3 \# \mathbf{K}^3 \# \mathbf{R}^3, \quad (2.24)$$

onde o primeiro \mathbf{R}^3 representa a seção assintótica de \mathbf{M} , o segundo \mathbf{R}^3 representa a seção assintótica de \mathbf{M}' , e o 3-espaço \mathbf{K}^3 é a variedade obtida pela compactificação pontual de \mathcal{M}^3 , a qual é obtida adicionando-se os pontos em $\{-\infty, \infty\}$. Então, cada 2-esfera, respectivamente em $+\infty$ e $-\infty$, deve ser tomada como um ponto de \mathbf{K}^3 . Se a ligação entre os dois discos fosse removida, \mathbf{K}^3 seria homotópico a duas 3-spheres disjuntas. Isto vem do fato que $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\} \simeq \mathbf{S}^3$. Porém, se as colagens existem, \mathbf{K}^3 não é simplesmente conexo pois existem caminhos fechados (aqueles ao redor da superfície U_2) não homotópicos à identidade. De fato, o primeiro grupo fundamental de \mathbf{K}^3 vem dado por $\pi_1(\mathbf{K}^3) = \mathbf{Z}$. Além disso, o segundo grupo fundamental de \mathbf{K}^3 é $\pi_2(\mathbf{K}^3) = \{\mathbf{e}\}$.

2.3 Existência de estados com momento angular semi-inteiro

2.3.1 Condições topológicas

Para que uma 3-variedade possua estados gravitacionais com momento angular semi-inteiro, ela deve apresentar certas condições topológicas. Estas condições foram explicitadas por Friedman e Sorkin [1], os quais obtiveram estes resultados baseados em trabalhos anteriores de Hendriks [33] sobre a teoria de obstruções em 3-dimensões. Para entender o resultado de Hendriks, é conveniente dividir a variedade \mathcal{M}^3 em uma região interior (\mathcal{M}_I^3), e em uma exterior (\mathcal{M}_E^3), de tal forma que $\mathcal{M}_I^3 \cap \mathcal{M}_E^3$ seja uma concha esférica. Depois disso, é necessário definir uma rotação pelo ângulo α da subvariedade \mathcal{M}_I^3 com respeito a \mathcal{M}_E^3 , como uma 3-geometria obtida cortando \mathcal{M}_I^3 em quaisquer esfera $S^3 \subset \mathcal{M}_I^3 \cap \mathcal{M}_E^3$, e colando de novo (depois da rotação) a parte interna com a externa. Em outras palavras, é preciso procurar um difeomorfismo que leve a 3-geometria final, obtida depois da rotação de $\alpha = 2\pi$, até a inicial, caracterizada por $\alpha = 0$. Se o difeomorfismo pode ser deformado até a identidade, os estados gravitacionais definidos na variedade só podem ter momento angular inteiro. Se o difeomorfismo não pode ser deformado até a identidade, então existem estados com momento angular semi-inteiro. Este difeomorfismo foi chamado por Hendriks de *rotação paralela à esfera*, e será denotado pela letra ρ .

Os resultados de Hendriks podem ser resumidos da seguinte forma. Se a divisão em uma região exterior e uma interior não é possível, então ρ não pode ser deformada até a identidade. Fisicamente, isto significa que se \mathbf{M} e \mathbf{M}' estão colados não só através da superfície $r = 0$, mas também através de outros pontos, \mathcal{M}^3 pode ter estados com momento angular semi-inteiro, posto que neste caso não existiriam regiões interiores e exteriores a uma concha que rodeie a superfície $r = 0$. Por outro lado, se a divisão é possível, então \mathcal{M}^3 terá estados só com momento angular inteiro se e somente se ela for uma soma conexa de 3-variedades compactas (sem borda),

$$\mathcal{M}^3 = \mathbf{R}^3 \# \mathbf{M}_1 \# \dots \# \mathbf{M}_k,$$

cada uma das quais (a) é homotópica a $P^2 \times S^1$ (P^2 é a 2-esfera projetiva real), ou (b) é homotópica a um fibrado S^2 sob S^1 , ou (c) tem um grupo fundamental $\pi_1(M_j)$ finito, com subgrupo 2-Sylow cíclico. Para ter estados com momento angular *semi-inteiro*, portanto, a 3-variedade \mathcal{M}^3 não deve cumprir nenhuma destas três condições.

De acordo com a decomposição (2.24), \mathcal{M}^3 pode ser visto como uma soma conexa

de dois \mathbf{R}^3 e \mathbf{K}^3 . Agora, como o estudo original de Hendriks foi feito para variedades topológicas compactas e sem fronteira, devemos compactificar \mathbf{K}^3 somando os dois pontos no infinito. Além de ser compacta, a 3-variedade assim obtida não possui fronteira (ver Apêndice B). Com isso, os resultados de Hendriks podem ser usados, e podemos dizer que a variedade \mathcal{M}^3 terá estados com momento angular semi-inteiro somente se \mathbf{K}^3 não cumprir alguma das três condições (a) até (c), descritas acima. A condição (a) é claramente violada, pois $\pi_1(\mathbf{K}^3) = \mathbf{Z}$, e posto que

$$\pi_1(P^2 \times S^1) = \pi_1(P^2) \oplus \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z},$$

\mathbf{K}^3 não pode ser homotópico a $P^2 \times S^1$. A condição (b) é mais sutil, mais é violada também. De fato, como é sabido [34], o número de fibrados não equivalentes de S^2 sobre S^1 são só dois: um trivial e um não-trivial. Posto que o não-trivial é sempre não-orientável, \mathbf{K}^3 não pode ser homotópico a este espaço pois é orientável por construção. Por outro lado, o fibrado trivial T^3 é construído tomando-se o produto direto de S^2 com S^1 . Com isso, temos que

$$\pi_1(T^3) = \pi_1(S^2 \times S^1) = \pi_1(S^2) \oplus \pi_1(S^1) = \{e\} \oplus \mathbf{Z},$$

o qual é, formalmente, o mesmo que $\pi_1(\mathbf{K}^3)$. Porém, o segundo grupo de homotopia de T^3 vem dado por

$$\pi_2(T^3) = \pi_2(S^2 \times S^1) = \pi_2(S^2) \oplus \pi_2(S^1) = \mathbf{Z} \oplus \{\mathbf{e}\},$$

e como $\pi_2(\mathbf{K}^3) = \{\mathbf{e}\}$, então claramente $\pi_2(\mathbf{K}^3) \neq \pi_2(\mathbf{T}^3)$. Assim, \mathbf{K}^3 não pode ser deformado homotopicamente até um fibrado S^2 sobre S^1 . Finalmente, como foi discutido na seção anterior, a condição (c) é violada também pois o grupo fundamental $\pi_1(\mathbf{K}^3) = \mathbf{Z}$ é infinito. Podemos concluir que o espaço-tempo de KN possui estados gravitacionais com momento angular semi-inteiro. Mais exatamente, podemos concluir que os estados gravitacionais tem spin 1/2.

2.3.2 Comportamento sob rotações

Usando a definição de ρ já introduzida, podemos analisar o efeito da rotação na região próxima de $r = 0$ da variedade \mathcal{M}^3 . As seguintes análises aplicam-se para quaisquer das duas possíveis interpretações, seja \mathbf{M} colado a \mathbf{M}' apenas pelo disco $r = 0$, ou em outros pontos também. Deve-se escolher, então, uma concha esférica com centro na superfície $r = 0$. Depois de escolher a concha, deve-se examinar o

efeito de uma rotação da 3-geometria da variedade. Por simplicidade, escolhamos uma concha centrada em $(0, 0, 0)$ e do lado $r > 0$, com um raio muito maior do que o raio da superfície $r = 0$. Dessa forma, a geometria fora da concha pode ser assumida como plana. Se fizermos agora uma rotação por um ângulo α ao redor de qualquer

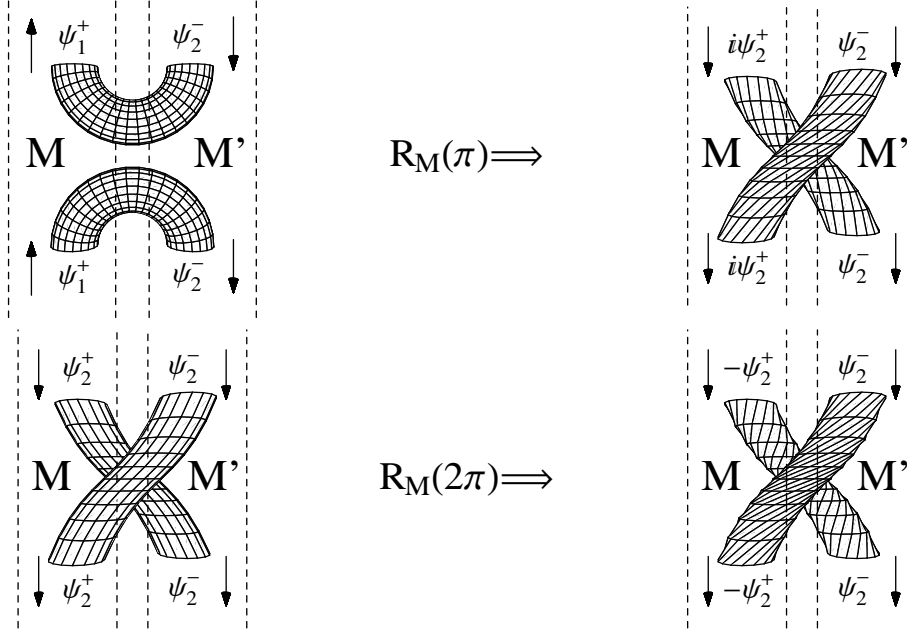


Figura 2.5: O efeito nos estados de KN das rotações ao redor do eixo x da região interior a uma concha que contém a superfície $r = 0$. O difeomorfismo que elimina a torção dos tubos pode ser visto como uma dilatação que o leva ao redor de um extremo do cilindro.

um dos eixos x , y , ou z da região interior à concha, a 3-geometria irá mudar. Esta mudança pode ser vista como uma torção nos tubos cilíndricos da Fig. 2.1. No caso específico de uma rotação ao redor do eixo x , a torção dos tubos é mostrado na Fig. 2.5 para $\alpha = \pi$ e $\alpha = 2\pi$.

Desta figura, pode-se deduzir que só após uma rotação de 4π a torção dos tubos pode ser eliminada dilatando-se o tubo e levando-o ao redor de um dos pontos extremos. Em outras palavras, só após uma rotação de 4π o difeomorfismo conexo à identidade, e que leva a métrica dos tubos torcidos à métrica dos tubos iniciais, pode ser definido. Este difeomorfismo é igual àquele que resolve o conhecido problema das tesouras de Dirac [35].

O efeito da rotação da região interior da concha escolhida pode também ser estudado fazendo primeiro uma transformação das coordenadas de Boyer-Lindquist que muda apenas a coordenada r :

$$(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (t, \ln R, \theta, \phi). \quad (2.25)$$

Esta transformação compactifica \mathbf{M}' , e leva os pontos do disco $r = 0$ à superfície $R = 1$. Uma forma simples da 3-variedade \mathcal{M}^3 após a transformação pode ser vista na Fig. 2.6. Nesta figura, os tubos que colam os espaços \mathbf{M} e \mathbf{M}' são desenhados verticalmente. Eles devem colar os pontos da superfície interna (exceto os pontos do equador) com os pontos da superfície externa. Os pontos de \mathbf{M}' são aqueles dentro da superfície central, a qual está definida por $R = 1$. Deve-se ressaltar que os grupos de homotopia de \mathcal{M}^3 não são modificados pela transformação.

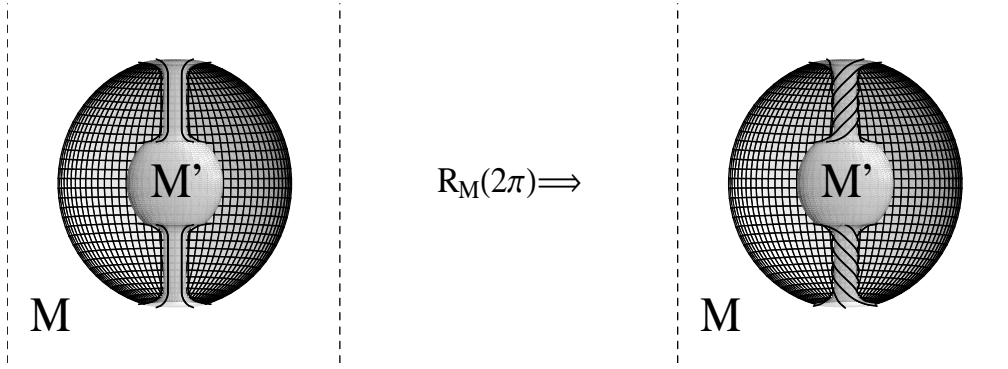


Figura 2.6: *Representação da variedade estendida de KN após a transformação de coordenadas $r \rightarrow \ln R$. A superfície central representa os pontos com $R = 1$, enquanto que \mathbf{M}' é representado pelos pontos interiores. A superfície externa representa também os pontos com $R = 1$, porém do ponto de vista de um observador no lado \mathbf{M} . Os tubos que colam os dois espaços estão desenhados verticalmente. À direita é representado o efeito de uma rotação de 2π na região interior a uma concha que contém o disco $r = 0$.*

Agora, uma rotação da região interior à concha que contém o disco $r = 0$ pode ser vista como uma torção dos tubos cilíndricos que colam os dois espaços. Para uma rotação de $\alpha = 2\pi$, esta torção não pode ser eliminada por um difeomorfismo homotópico à identidade, pois os extremos do cilindro devem manter-se fixos para que ele seja conexo à identidade. Para uma rotação de um ângulo $\alpha = 4\pi$, porém,

é possível eliminar a torção dos tubos pois neste caso existe um difeomorfismo homotópico à identidade que mantém os pontos extremos fixos. A forma deste difeomorfismo é a mesma daquela encontrado na pág. 309 da Ref. [25]. O fato da seção espacial da variedade de KN voltar ao seu estado inicial depois de uma rotação de 4π é uma maneira mais intuitiva de entender a existência de estados espinoriais.

2.4 Representação algébrica dos estados de KN

2.4.1 Estados espinoriais

Seguindo a Ref [1], denotamos por $\Upsilon(\mathcal{M}^3)$ o espaço das 3-métricas assintoticamente planas e positivas sob \mathcal{M}^3 . Já que a métrica em \mathcal{M}^3 está definida a menos de um difeomorfismo, pontos diferentes em $\Upsilon(\mathcal{M}^3)$ representam 3-métricas que diferem só pela geometria da colagem entre os lados da superfície $r = 0$. Definimos um vetor de estado ψ , na representação de Schrödinger, como um funcional do espaço $\Upsilon(\mathcal{M}^3)$. O operador generalizado de posição \widehat{g}_{ab} é definido como

$$\widehat{g}_{ab}\psi(g) = g_{ab}\psi(g), \quad (2.26)$$

o que significa que, para cada ponto de $\Upsilon(\mathcal{M}^3)$, temos um vetor de estado diferente $\psi(g)$. Da discussão da última seção, podemos dizer que (sob rotações) um caminho em $\Upsilon(\mathcal{M}^3)$ é fechado se e somente se o parâmetro do caminho varia desde 0 até 4π . Além disso, e já que os pontos de $\Upsilon(\mathcal{M}^3)$ estão em correspondência um-a-um com os estados $\psi(g)$, obtemos que o efeito de uma rotação de 2π em $\psi(g)$ não é igual ao efeito do operador identidade:

$$\widehat{R}(2\pi)\psi(g) = \psi(R(2\pi)g) = \psi(g' \neq g) \neq \psi(g).$$

Uma representação linear adequada para os estados $\psi(g)$ é uma que carregue, além da informação de massa e carga, também informação sobre o comportamento não trivial sob rotações, de acordo com as propriedades dos estados que representam a solução de KN. Como o estado $\psi(g)$ depende da métrica g_{ab} , não é simples deduzir sua forma geral. Como um primeiro passo, podemos separar o estado geral $\psi(g)$ em uma parte ψ^+ , definida na região com r positivo, e outra ψ^- , definida na região com r negativo:

$$\psi = a_+\psi^+ + a_-\psi^-. \quad (2.27)$$

Além disso, se escolhermos a direção do spin ao longo do eixo z , teremos duas possibilidades, conforme mostra a Fig. 2.2. Então, podemos escrever

$$\psi^+ = b_1\psi_1^+ + b_2\psi_2^+ \quad (2.28)$$

$$\psi^- = c_1\psi_1^- + c_2\psi_2^-. \quad (2.29)$$

Esta superposição é necessária pois só após uma medição da direção do spin podemos ter certeza do sinal de a na métrica (2.1). Substituindo (2.28) e (2.29) em (2.27), obtemos

$$\psi = a_+ (b_1\psi_1^+ + b_2\psi_2^+) + a_- (c_1\psi_1^- + c_2\psi_2^-). \quad (2.30)$$

Desejamos, também, que o estado $\psi(g)$ seja um autovetor dos operadores energia e spin. Esta condição significa que

$$S_z\psi_1^\pm = s_z\psi_1^\pm = \frac{1}{2}\psi_1^\pm, \quad (2.31)$$

$$S_z\psi_2^\pm = s_z\psi_2^\pm = -\frac{1}{2}\psi_2^\pm, \quad (2.32)$$

$$H\psi^+ = -i\partial_t\psi^+ = m\psi^+, \quad (2.33)$$

$$H\psi^- = -i\partial_t\psi^- = -m\psi^-, \quad (2.34)$$

onde S_z é o spin ao longo da direção z , H é o operador energia, e m é a massa da solução de KN. Nestas relações, temos usado implicitamente a correspondência entre massa e energia (lembre-se que m é negativa no setor com r negativo de \mathcal{M}^3).

Uma consequência natural do fato de um observador, tanto no lado positivo como no negativo de r , ver um vetor de estado que se transforma nele mesmo só após uma rotação de 4π , é a possibilidade de representar estes estados através de uma base de espinores do grupo de Lorentz $SL(2, \mathbf{C})$. Mais especificamente, cada um dos quatro estados não-equivalentes definidos no lado com r positivo pode ser representado por um espinor de Weyl que se transforma sob a representação $(1/2, 0)$. Analogamente, aqueles definidos no lado com r negativo podem ser representados por espinores de Weyl que se transformam sob $(0, 1/2)$ (ver Apêndice A). Além disso, de acordo com as equações (2.33) e (2.34), a representação linear para ψ deve conter uma parte proporcional a uma exponencial complexa da energia multiplicada pelo tempo. Finalmente, é importante notar que a representação não pode misturar ψ^+ e ψ^- pois eles estão definidos em regiões espaciais diferentes. Com isso, chegamos à seguinte

representação para $\psi(g)$:

$$\psi(g) = a_+ \left[b_1 e^{iEt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + a_- \left[c_1 e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.35)$$

Esta pode ser considerada como a representação linear mais simples de um estado geral $\psi(g)$ associado com a solução de KN em repouso.

2.4.2 Equação de evolução

Se desejamos que a solução anterior represente uma partícula, precisamos que ela seja auto-estado do momento (ou posição). Porém, fazer isto não é fácil pois a “posição” da partícula não é definida por um simples ponto no espaço-tempo. Assim, por exemplo, o operador momentum $-i\vec{\nabla}$ não é útil, pois ele está definido só para partículas pontuais. Para solucionar este problema, precisamos de uma representação aproximada para $\psi(g)$, válida no limite de grandes comprimentos desde o disco de KN. Neste limite, a solução de KN vai convergir para a métrica produzida por uma partícula pontual com spin e sem estrutura. Só neste caso o operador $-i\vec{\nabla}$ torna-se adequado para definir o momentum da partícula. Neste limite, podemos considerar a métrica de fundo como sendo plana, isto é, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Usando a forma de $\psi(g)$ dada pela Eq. (2.35), encontramos que sua adequada dependência no momentum da partícula vem dada pela exponencial $i\vec{p} \cdot \vec{x}$. Isto é devido ao fato que os dois fatores combinam-se para dar uma expressão covariante, e ao mesmo tempo o estado se torna um autovetor do momento. O estado $\psi(g)$ geral é então dado por

$$\psi_p(g) = a_+ e^{-ip_\mu x^\mu} \left[b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + a_- e^{ip_\mu x^\mu} \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.36)$$

Agora, das equações (2.33) e (2.34), podemos escrever a equação de evolução para o estado de KN como

$$\frac{1}{i} \partial_t \psi_p = H \psi_p \equiv E \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \psi_p \equiv E \beta \psi_p, \quad (2.37)$$

onde I_2 é a matriz identidade 2×2 . O sinal menos das componentes inferiores é consequência do fato dessas componentes do vetor de estado terem energia negativa. Uma forma mais conveniente da equação de evolução pode ser obtida fazendo uma transformação unitária. Escrevemos esta transformação como um caso particular da transformação de *Foldy-Wouthuysen* [36], a qual tem a forma

$$\mathbf{U} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} I_2 & -\frac{\sigma_i p_i}{E+m} \\ \frac{\sigma_i p_i}{E+m} & I_2 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

É possível verificar que

$$\Psi_p = \mathbf{U} \psi_p \quad (2.39)$$

é uma solução da equação de evolução modificada

$$\frac{1}{i} \partial_t \Psi_p = \mathbf{H} \Psi_p \equiv (\alpha_i p_i + \beta m) \Psi_p, \quad (2.40)$$

com

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{H} \mathbf{U}^\dagger \quad (2.41)$$

o Hamiltoniano transformado. A equação (2.40) é a forma usual da equação relativística de Dirac para o elétron. A conclusão básica é que a solução de KN pode ser representada por um vetor de estado que é solução da equação de Dirac. Além de ter todas as propriedades de uma solução da equação de Dirac, o estado de KN fornece uma explicação intuitiva para os conceitos de massa, spin e carga. Adicionalmente, é possível entender o fato que durante uma interação, os estados de energia positiva e negativa contribuem igualmente para a equação de Dirac. Entendemos, em particular, porque não é possível descrever estados inter-atuantes como estados só de energia positiva ou só de energia negativa. Isso se deve essencialmente ao fato desses estados, como foi mostrado na extensão da solução de KN, estarem “colados” topologicamente. Por outro lado, é possível descrever um estado livre em movimento com energia positiva (ou negativa) sem levar em conta as componentes de energia negativa (ou positiva). É importante observar que existe uma arbitrariedade na terminologia. O que chamamos de estado de energia negativa ou estado de energia positiva depende de qual lado da solução de KN está o observador. Porém, como a métrica de KN depende quadraticamente na carga elétrica, não é possível determinar em qual lado da solução se encontra um dado observador.

2.5 Testes fenomenológicos

Para testar a validade do modelo para o elétron descrito acima, é preciso procurar experiências onde os efeitos da extensão do elétron sejam manifestos. Primeiramente, devido à simetria do modelo, o momento dipolar elétrico da solução de KN é nulo, um resultado que está de acordo com os limites experimentais conhecidos [37]. Outro ponto importante é que o princípio da incerteza proíbe-nos de localizar o elétron em uma região menor do que seu comprimento de onda Compton sem produzir pares virtuais. Já que nosso modelo tem um tamanho da ordem do comprimento de onda Compton, é válido perguntar se este modelo contradiz as experiências que colocam um limite para o tamanho do elétron da ordem de 10^{-18} cm. Esta é uma pergunta difícil, porém uma resposta simples pode ser dada se observarmos que um *boost* (no sentido do spin) transforma os parâmetros m e a da solução de KN de acordo com [38]

$$a' = a\sqrt{1-v^2} \quad \text{e} \quad m' = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (2.42)$$

onde v é a velocidade do *boost*. Deve ficar claro que a e m são simples parâmetros da solução, os quais correspondem com o momento angular por unidade de massa e massa só no limite assintótico de grandes distâncias. Próximo da singularidade, a é o raio do anel singular, o qual, de acordo com Carter [31], não é possível observar. A “renormalização” dos parâmetros de KN tem sido discutida por muitos autores [39]. Assim, para uma velocidade maior, corresponderá um raio do anel singular menor. É simples provar, então, que dentro das energias usuais das experiências de espalhamento, o raio do anel não é maior do que o limite experimental. Em outras palavras, uma prova da extensão do elétron não pode ser obtida com experiências de espalhamento. Restam, então, experiências à baixas energias, onde os elétrons se movimentam com pequenas velocidades.

Como um exemplo de uma experiência à baixas energias, podemos considerar um par de elétrons presos a um plano bi-dimensional D . Se um campo magnético forte é aplicado perpendicularmente ao plano, os vetores de spin dos elétrons irão alinhar-se ao campo magnético. Assim, o disco de KN ficará paralelo a D . O fluxo magnético Φ através do plano é dado por

$$\Phi = \int_D \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_D \vec{\nabla} \times \vec{A}(z) \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial D} A(z)dz, \quad (2.43)$$

onde \vec{B} é o campo magnético, \vec{A} é o potencial vetorial definido em D , e $z = x + iy$ são coordenadas complexas para o plano. A fronteira de D é composta de três partes:

uma parte externa, e a fronteira ao redor de cada um dos dois elétrons. Usando condições periódicas na fronteira (na prática, o plano D deve ser finito para que os elétrons fiquem confinados), ficamos apenas com duas bordas não conexas. Neste espaço multiplamente conexo, o vetor potencial $\vec{A}(z)$ não é definido unívocamente, pois existem duas outras formas fechadas $\zeta_k^{-1}d\zeta_k$, $k = 1, 2$, com a propriedade [40]

$$\int_{\partial D_k} \zeta_k^{-1}d\zeta_k = 2\pi i, \quad (2.44)$$

onde ∂D_k é a fronteira de cada elétron. Devido a este fato, o cálculo do fluxo (2.43) deve levar em conta todas as configurações diferentes para $\vec{A}(z)$ [41]. Assumindo que todas as configurações tem o mesmo peso, e usando unidades com $q = 1$ (de tal forma que o *quantum* de fluxo fica $\Phi_0 = 1$), o fluxo total será

$$\begin{aligned} \Phi = & \oint_{\partial D_1 \cup \partial D_2} A(z)dz + \oint_{\partial D_1 \cup \partial D_2} \left(A(z)dz - \frac{i}{4\pi} \zeta_1^{-1}d\zeta_1 - \frac{i}{4\pi} \zeta_2^{-1}d\zeta_2 \right) \\ & + \oint_{\partial D_1 \cup \partial D_2} \left(A(z)dz - \frac{i}{4\pi} \zeta_1^{-1}d\zeta_1 \right) + \oint_{\partial D_1 \cup \partial D_2} \left(A(z)dz - \frac{i}{4\pi} \zeta_2^{-1}d\zeta_2 \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Usando a condição de quantização do fluxo

$$\oint_{\partial D_1 \cup \partial D_2} A(z) dz = n; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.46)$$

obtemos

$$\Phi = 4n - 2. \quad (2.47)$$

Se calcularmos agora a quantidade $\nu = \text{número de elétrons}/\text{número de quanta de fluxo}$, obtemos

$$\nu = \frac{2}{4n - 2} = \frac{1}{2n - 1}. \quad (2.48)$$

Esta montagem é usada no estudo do Efeito Hall quântico fracionário (FQHE) [42], e neste contexto a quantidade ν é chamada de *fator de preenchimento*. Nosso resultado é igual ao experimental se considerarmos que as interações entre os elétrons no plano ocorrem preponderantemente entre pares [43].

Apêndice A

O grupo de Lorentz e as transformações de paridade

Como é sabido, a álgebra de Lie complexificada do grupo de Lorentz $SL(2, \mathbf{C})$ é isomorfa à álgebra de Lie complexificada do grupo $SU(2) \otimes SU(2)$. De fato, se denotarmos por J_i os geradores das rotações infinitesimais, e por K_i os geradores dos *boosts* em \mathbf{M} , com $i, j, k = x, y, z$, os geradores complexos

$$A_i = \frac{1}{2} (J_i + iK_i) \quad \text{and} \quad A_i^\dagger = \frac{1}{2} (J_i - iK_i), \quad (\text{A.1})$$

satisfazem a álgebra de Lie de $SU(2)$:

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= i \epsilon_{ijk} A_k \\ [A_i^\dagger, A_j^\dagger] &= i \epsilon_{ijk} A_k^\dagger. \end{aligned}$$

Além disso, eles satisfazem

$$[A_i, A_j^\dagger] = 0, \quad (\text{A.2})$$

o que mostra que eles são independentes, ou equivalentemente, que eles formam um produto direto. Os dois operadores de Casimir $A_i A_i$ e $A_i^\dagger A_i^\dagger$ têm como autovalores $n(n+1)$ e $m(m+1)$, com $n, m = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Assim, cada representação pode ser rotulada pelo par (n, m) .

Agora, sob uma transformação de paridade, temos que

$$J_i \rightarrow J_i \quad \text{and} \quad K_i \rightarrow -K_i, \quad (\text{A.3})$$

o que mostra que os geradores A_i e A_i^\dagger estão também relacionados por uma transformação de paridade [44]. Por outro lado, se a métrica de KN (2.1) em \mathbf{M} é escrita em termos das coordenadas (t, r, θ, ϕ) , em \mathbf{M}' ela será escrita em termos de $(t, -r, \theta, \phi)$. Então, a função gradiente ∇r muda de sinal em \mathbf{M}' , e os vetores

unitários de um sistema de coordenadas Cartesiano serão negativos. Isto acontece porque os vetores unitários são perpendiculares às superfícies $r=constante$. Os dois lados da solução de KN, portanto, estão relacionados por uma transformação de paridade. A conclusão é que a relação entre \mathbf{M} e \mathbf{M}' é a mesma que aquela entre A_i e A_i^\dagger . Isso justifica o uso dos espinores de Weyl em \mathbf{M} transformando sob a representação $(1/2, 0)$, e o uso da representação $(0, 1/2)$ em \mathbf{M}' .

Apêndice B

Propriedades topológicas de \mathbf{K}^3

Seja $F : \mathcal{M}^3 \cup \{\pm\infty\} \longrightarrow \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ uma função do espaço métrico \mathcal{M}^3 (acrescido de dois pontos no infinito) sob o espaço Euclidiano tri-dimensional (mais um ponto no infinito). A função é definida por:

$$\begin{aligned} F(r, \theta, \phi) &= (e^r, \theta, \phi) \\ F(-\infty, \theta, \phi) &= (0, \theta, \phi) \\ F(\infty, \theta, \phi) &= (\infty, \theta, \phi). \end{aligned}$$

O espaço $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ é igual ao espaço \mathbf{R}^3 compactificado pelo método de Alexandroff, o qual é topologicamente equivalente a S^3 . A função F leva a superfície $r = 0$ da solução de KN até a esfera unitária com centro em $(0, 0, 0)$. O anel singular é levado até o equador da esfera. A função F é contínua em todos os pontos $c \in \mathcal{M}^3 \cup \{\pm\infty\}$ se, para qualquer número real positivo ε , existe um número real positivo δ tal que, para todo $p \in \mathcal{M}^3 \cup \{\pm\infty\}$ que satisfaz $d_\gamma(p, c) < \delta$, a desigualdade $d_\eta(F(p), F(c)) < \varepsilon$ é também satisfeita. Como a função distância definida pela métrica γ_{ij} de \mathcal{M}^3 , e que vem dada por (2.7), é finita em qualquer ponto, a condição de continuidade é válida para todo $p \in \mathcal{M}^3$. Porém, como a borda do disco $r = 0$ é só um ponto de $\mathcal{M}^3 \cup \{\pm\infty\}$, a função não é unívoca (um-a-um). De fato, o ponto $(r = 0, \theta = \pi/2)$ é mapeado no equador da esfera unitária. Agora, posto que S^3 é compacto, e F^{-1} é contínua, $\mathcal{M}^3 \cup \{\pm\infty\}$ é também compacta. Se eliminarmos um conjunto aberto de S^3 com a forma de um toro sólido (sem fronteira) ao longo do equador da esfera unitária, obteremos um sub-conjunto fechado de S^3 . Este sub-conjunto fechado é também compacto e tem como fronteira um toro bi-dimensional T^2 . Chamando de T^3 o toro sólido e de T_F^3 sua imagem sob F^{-1} , a função

$$(F^{-1})' : \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\} - \mathbf{T}^3 \longrightarrow \mathcal{M}^3 \cup \{\pm\infty\} - \mathbf{T}_F^3$$

é contínua. Consequentemente, $\mathcal{M}^3 \cup \{\pm\infty\} - T_F^3$ será compacto.

Agora, sejam (α, β) as coordenadas de $T^2 = S^1 \times S^1$, e seja $A : T^2 \longrightarrow T^2$ um mapa definido por $A(\alpha, \beta) = (\alpha + \pi, \beta + \pi)$. A superfície obtida pela relação de equivalência $A(p) \sim p$ e pelo quociente T^2/A , é a garrafa de Klein U_2 . Desta forma, cada ponto p de U_2 tem uma vizinhança em S^3 homeomorfa à bola Euclideana aberta. Isto implica que $\{\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\} - \mathbf{T}^3\}/\mathbf{A}$ é uma variedade compacta sem fronteira. Assim,

$$\mathcal{F} : \{\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\} - \mathbf{T}^3\}/\mathbf{A} \longrightarrow \{\mathcal{M}^3 \cup \{\pm\infty\} - \mathbf{T}_{\mathbf{F}}^3\}/\{(\mathbf{F}^{-1})' \circ (\mathbf{A})\} = \mathbf{K}^3$$

será uma função contínua desde um espaço compacto, o que significa que \mathbf{K}^3 é também compacto. Além disto, e devido a que \mathcal{F} é contínua, ela leva todo conjunto aberto de $\{\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\} - \mathbf{T}^3\}/\mathbf{A}$ até outro conjunto aberto de \mathbf{K}^3 , o que significa que \mathbf{K}^3 não tem fronteira: $\partial\mathbf{K}^3 = \mathbf{0}$.

Capítulo 3

O Papel da Torção na Descrição da Interação Gravitacional

3.1 Antecedentes

Na relatividade geral, a torção é sempre nula. Na gravitação teleparalela*, ao contrário, a curvatura é que é nula, sendo a descrição da interação feita apenas em termos da torção. É sabido, porém, que as duas teorias fornecem descrições totalmente equivalentes da interação gravitacional [46]. Uma consequência imediata desta equivalência é que a curvatura e a torção devem ser maneiras alternativas de descrever o campo gravitacional, e portanto relacionadas aos mesmos graus de liberdade do campo gravitacional. Esta propriedade é corroborada pelo fato do tensor simétrico de energia-momento aparecer como fonte nas duas teorias: como fonte de curvatura na relatividade geral, e como fonte de torção no teleparalelismo. Por outro lado, outras teorias para a gravitação, como Einstein-Cartan e teorias de gauge para o grupo de Poincaré e o grupo afim [47], consideram curvatura e torção como representando graus de liberdade independentes. Nestes modelos a torção tem sua origem nos espins das partículas fundamentais, e portanto ela só é importante quando a magnitude destes espins torna-se importante [48]. Isto pode acontecer tanto no nível microscópico, como perto de uma estrela de nêutrons. Assim, estas teorias consideram que a torção carrega graus de liberdade adicionais àqueles da curvatura, e assim novos fenômenos devem estar associados à torção. É claro, então, que existe uma diferença conceitual sobre o verdadeiro papel desempenhado pela torção na descrição da interação gravitacional.

*O nome gravitação teleparalela é usado para denotar a teoria geral com três parâmetros [45]. Aqui, usaremos este nome como sinônimo para o equivalente teleparalelo da relatividade geral, uma teoria obtida para uma escolha específica deste parâmetros.

A forma mais direta de se obter uma resposta sobre o verdadeiro papel que a torção desempenha dentro da gravitação, é achar uma única definição para o acoplamento minimal de quaisquer campo físico com a gravitação. Ainda que esta seja a forma mais direta, não é a mais simples. A dificuldade principal é que, diferentemente de outras interações da natureza, onde a covariância fixa uma única conexão de gauge, na gravitação em presença de curvatura e torção, a covariância não é suficiente para determinar a forma do acoplamento minimal. A razão de fundo é que o espaço das conexões de Lorentz é um espaço afim [49], e portanto sempre é possível somar um tensor a uma dada conexão sem destruir a covariância da teoria. Assim, existem infinitas possibilidades para o acoplamento minimal gravitacional.

Na procura por uma solução quanto ao verdadeiro papel da torção na descrição da gravitação, mostraremos neste capítulo como o uso do princípio da *covariância geral* (o qual diz que quaisquer das equações da relatividade especial pode-se tornar válida na presença de gravitação se ela é geralmente covariante, ou seja, se ela preserva sua forma sob transformações gerais de coordenadas) nos leva até uma escolha do acoplamento minimal que é totalmente equivalente àquele da relatividade geral, e ao mesmo tempo àquele do teleparalelismo. Este resultado leva-nos naturalmente a questionarmos se existe uma descrição da gravitação em termos de uma conexão de Lorentz, posto que, como é sabido, o teleparalelismo é uma teoria de gauge para o grupo das translações. Chegamos, assim, no final deste capítulo, a propor uma nova Lagrangeana para gravitação, a qual fornece as mesmas equações de movimento da relatividade geral, e além disso fornece uma interpretação da gravitação em termos de uma conexão de Lorentz, na qual a covariância por difeomorfismos é substituída pelo requerimento de invariância local sob o grupo de Lorentz. Finalmente, estudaremos como esta nova formulação usa a conexão de spin como variável fundamental na descrição Lagrangeana da teoria.

3.2 Princípio da covariância geral: caso não-holônomo

3.2.1 Referenciais não-holônomos

Seja $\{x^\mu\}$ um sistema de coordenadas inerciais do espaço-tempo de Minkowski, e seja $\{\partial_\mu\}$ os vetores base de um sistema de coordenadas ortonormal e global para o espaço-tempo. O referencial $\delta_A = \delta_A^\mu \partial_\mu$ pode ser interpretado como uma tetrada holônoma (trivial), com componentes δ_A^μ . Considere agora uma transformação local de Lorentz, isto é, uma transformação dependente do ponto: $\Lambda_A^B = \Lambda_A^B(x)$. Ela

fornece a nova base

$$h_A = h_A^\mu \partial_\mu, \quad (3.1)$$

com componentes

$$h_A^\mu(x) = \Lambda_A^B \delta_B^\mu. \quad (3.2)$$

Note-se que, devido ao carácter local da transformação de Lorentz, a nova base h_A é não-holônoma,

$$[h_A, h_B] = f^C_{AB} h_C, \quad (3.3)$$

onde f^C_{AB} é o coeficiente de não-holonomia. Agora, fazendo uso da propriedade de ortogonalidade das tetradas, observamos da equação (3.2) que o elemento do grupo de Lorentz pode ser escrito na forma $\Lambda_B^D = h_B^\rho \delta_\rho^D$. Usando esta expressão, temos que

$$(h_A \Lambda_B^D) \Lambda^C_D = \frac{1}{2} (f_B^C_A + f_A^C_B - f^C_{BA}). \quad (3.4)$$

Por outro lado, a ação que descreve uma partícula livre é

$$S = -mc \int ds, \quad (3.5)$$

sendo $ds = (\eta_{AB} dx^A dx^B)^{1/2}$ o intervalo invariante de Minkowski. Visto do referencial holônomo δ_A , a equação de movimento é dada por

$$\frac{dv^A}{ds} = 0, \quad (3.6)$$

onde $v^A = \delta^A_\mu v^\mu$, com $v^\mu = (dx^\mu/ds)$. Visto do referencial não-holônomo h_A , a equação de movimento (3.6) assume a forma

$$\frac{dV^C}{ds} + \frac{1}{2} (f_B^C_A + f_A^C_B - f^C_{BA}) V^A V^B = 0, \quad (3.7)$$

onde $V^C = \Lambda^C_D v^D = h^C_\mu v^\mu$, e onde usamos a identidade (3.4). É importante enfatizar que, ainda que estejamos no espaço-tempo plano da relatividade especial, temos a liberdade de escolher qualquer tetrada $\{h_A\}$ como referencial em movimento. O fato que, para cada $x \in M$, a base h_A pode ser transformada arbitrariamente (por Lorentz) introduz o termo compensatório $\frac{1}{2} (f_B^C_A + f_A^C_B - f^C_{BA})$ na equação de movimento da partícula livre. Este termo está relacionado apenas com as propriedades inerciais do referencial. Observe que a equação de movimento (3.7) pode também ser obtida da ação (3.5) escrita no referencial não-holônomo,

$$S = -mc \int (\eta_{AB} h^A h^B)^{1/2}, \quad (3.8)$$

onde, devido ao fato que a transformação de Lorentz é uma isometria, a métrica $\eta_{AB} = \Lambda_A^C \Lambda_B^D \eta_{CD}$ não muda, e $h^A = \Lambda^A_D \delta^D_\mu dx^\mu$.

3.2.2 Equivalência entre efeitos inerciais e gravitacionais

De acordo com o princípio de covariância geral, a equação de movimento válida na presença de gravitação pode ser obtida da correspondente equação de movimento da relatividade especial, simplesmente trocando o termo compensatório inercial por uma conexão A^C_{AB} que represente um campo gravitacional verdadeiro. Usaremos aqui apenas conexões assumindo valores no grupo de Lorentz, e conseqüentemente com não-metricidade nula. Neste caso, e na presença de curvatura e torção, a conexão satisfaz [50]

$$A^C_{BA} - A^C_{AB} = T^C_{AB} + f^C_{AB}, \quad (3.9)$$

onde T^C_{BA} é a torção da conexão A^C_{AB} . O uso desta equação para três combinações diferentes de índices permite obter

$$A^C_{AB} = \frac{1}{2} (f_B^C{}_A + f_A^C{}_B - f^C_{BA}) + \frac{1}{2} (T_B^C{}_A + T_A^C{}_B - T^C_{BA}). \quad (3.10)$$

Assim, o termo compensatório da equação (3.7) pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{2} (f_B^C{}_A + f_A^C{}_B - f^C_{BA}) = A^C_{AB} - K^C_{AB}, \quad (3.11)$$

onde

$$K^C_{AB} = \frac{1}{2} (T_B^C{}_A + T_A^C{}_B - T^C_{BA}) \quad (3.12)$$

é o tensor de contorção. A equação (3.11) é uma expressão do princípio de equivalência. De fato, o lado esquerdo da equação envolve apenas propriedades *inerciais* dos referenciais, porém o lado direito contém quantidades puramente *gravitacionais*. Usando esta expressão na equação (3.7), obtemos

$$\frac{dV^C}{ds} + A^C_{AB} V^A V^B = K^C_{AB} V^A V^B. \quad (3.13)$$

Esta é a equação de movimento de uma partícula na presença de curvatura e torção, obtida a partir do princípio de covariância geral. Ela propõe uma interpretação clara para a contorção, a qual aparece desempenhando o papel de uma força gravitacional [51]. Devido à identidade

$$A^C_{AB} - K^C_{AB} = \overset{\circ}{A}{}^C_{AB}, \quad (3.14)$$

onde $\overset{\circ}{A}{}^C_{AB}$ é a conexão de spin da relatividade geral, a equação de movimento (3.13) é totalmente equivalente à equação da geodésica da relatividade geral.

3.2.3 O acoplamento minimal

A equação de movimento (3.13) pode ser reescrita na forma

$$V^\mu \mathcal{D}_\mu V^C \equiv V^\mu [\partial_\mu V^C + (A^C{}_{B\mu} - K^C{}_{B\mu}) V^B] = 0, \quad (3.15)$$

com \mathcal{D}_μ uma derivada covariante que, quando aplicada a um campo vetorial qualquer X^C , assume a forma

$$\mathcal{D}_\mu X^C = \partial_\mu X^C + (A^C{}_{B\mu} - K^C{}_{B\mu}) X^B. \quad (3.16)$$

Usando a representação vetorial dos geradores do grupo de Lorentz [44],

$$(S_{AB})^C{}_D = i(\delta_A^C \eta_{BD} - \delta_B^C \eta_{AD}), \quad (3.17)$$

ela se torna

$$\mathcal{D}_\mu X^C = \partial_\mu X^C - \frac{i}{2} (A^{AB}{}_\mu - K^{AB}{}_\mu) (S_{AB})^C{}_D X^D. \quad (3.18)$$

Agora, ainda que obtida para o caso de um campo vetorial de Lorentz (quadri-velocidade), é possível mostrar que o termo compensatório (3.4) é o mesmo para qualquer campo. De fato, chamando de $g \equiv g(\Lambda)$ a um elemento do grupo de Lorentz numa representação arbitrária, pode-se mostrar que

$$(h_{Ag})g^{-1} = -\frac{i}{4} (f_{BCA} + f_{ACB} - f_{CBA}) J^{BC}, \quad (3.19)$$

onde J^{BC} denota o correspondente gerador de Lorentz. Neste caso, a derivada covariante (3.18) terá a forma

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} (A^{AB}{}_\mu - K^{AB}{}_\mu) J_{AB}. \quad (3.20)$$

Conseqüentemente, na presença de curvatura e torção, o acoplamento minimal dos campos que carregam uma representação arbitrária do grupo de Lorentz, é dado por

$$\partial_A \equiv \delta^\mu{}_A \partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_A \equiv h^\mu{}_A \mathcal{D}_\mu. \quad (3.21)$$

Devido à relação (3.14), este acoplamento é claramente equivalente ao acoplamento minimal da relatividade geral. O acoplamento minimal (3.20) é uma conseqüência da afinidade do espaço das conexões de Lorentz (ver Apêndice C).

3.3 Conseqüências físicas do acoplamento minimal

3.3.1 Partícula sem spin

Como uma primeira aplicação do acoplamento minimal (3.20), podemos considerar o caso de uma partícula sem spin e com massa m . A idéia é obter a equação de movimento a partir de primeiros princípios, e logo comparar com àquela obtida usando o acoplamento minimal.

Analogamente com o caso eletromagnético [30], a integral de ação que descreve uma partícula sem spin em interação com um campo gravitacional, no contexto das teorias de gauge, é

$$S = \int_a^b \left[-m c d\sigma - \frac{1}{c^2} B^A{}_\mu \mathcal{P}_A dx^\mu \right], \quad (3.22)$$

onde $d\sigma = (\eta_{AB} dx^A dx^B)^{1/2}$ é o intervalo invariante do espaço-tempo plano, e \mathcal{P}_A é a carga de Noether associada com a invariância da ação sob translações [52]. Em outras palavras, $\mathcal{P}_A = m c u_A$ é o quadri-momentum da partícula, com u^A a correspondente quadri-velocidade não-holônoma. A variação da ação (3.22) fornece a equação de movimento [53]

$$\frac{du^C}{ds} + A^C{}_{AB} u^A u^B = K^C{}_{AB} u^A u^B, \quad (3.23)$$

com $A^C{}_{AB}$ uma conexão que apresenta simultaneamente curvatura e torção. Esta equação é uma mistura de equação de força e geodésica, com a contorção desempenhando o papel de força. Por outro lado, como é bem conhecido, a equação de movimento para uma partícula livre é

$$\frac{du^A}{d\sigma} \equiv u^C \partial_C u^A = 0. \quad (3.24)$$

Uma comparação entre estas últimas duas equações mostra que a equação de movimento (3.23) pode ser obtida da equação de movimento livre (3.24), trocando-se $\partial_C \rightarrow \mathcal{D}_C = h^\nu{}_C \mathcal{D}_\nu$, com \mathcal{D}_ν a derivada covariante (3.20) escrita na representação vetorial (3.17), que é a representação apropriada para uma derivada agindo sobre u^A [44]. Isto mostra a consistência do acoplamento minimal definido pela equação (3.21). Além disso, usando a relação (3.14), a equação de movimento (3.23) resulta equivalente à equação da geodésica da relatividade geral:

$$\frac{du^C}{ds} + \overset{\circ}{A}{}^C{}_{AB} u^A u^B = 0. \quad (3.25)$$

A equação de força (3.23) e a equação da geodésica (3.25), descrevem a mesma trajetória física. Isto significa que, mesmo na presença de torção, as partículas sem

spin sempre seguem uma trajetória que pode ser representada por uma geodésica do espaço-tempo Riemanniano subjacente. Isto conduz a uma re-interpretação do papel físico da torção em relação às teorias de Einstein-Cartan, assim como em relação às outras teorias de gauge para gravitação. De fato, de acordo com nossos resultados, a torção aparece simplesmente como uma forma alternativa à curvatura de descrever o campo gravitacional.

3.3.2 Partícula com spin

Consideremos agora o movimento de uma partícula clássica de massa m e spin s num campo gravitacional na presença de curvatura e torção. A integral de ação que descreve esta partícula, no contexto de uma teoria de gauge, é

$$S = \int_a^b \left[-m c d\sigma - \frac{1}{c^2} B^A{}_\mu \mathcal{P}_A dx^\mu + \frac{1}{2} \Omega^{AB}{}_\mu \mathcal{S}_{AB} dx^\mu \right], \quad (3.26)$$

onde \mathcal{S}_{AB} é a carga de Noether associada com a invariância da ação sob transformações de Lorentz [52], e $\Omega^{AB}{}_\mu = A^{AB}{}_\mu - K^{AB}{}_\mu$ e a conexão de spin *dinâmica* que aparece na derivada covariante (3.20). Em outras palavras, \mathcal{S}_{AB} é a densidade de momento angular, a qual satisfaz a relação de Poisson

$$\{\mathcal{S}_{AB}, \mathcal{S}_{CD}\} = \eta_{AC} \mathcal{S}_{BD} + \eta_{BD} \mathcal{S}_{AC} - \eta_{AD} \mathcal{S}_{BC} - \eta_{BC} \mathcal{S}_{AD}. \quad (3.27)$$

O terceiro termo da ação (3.26), portanto, representa o acoplamento do spin da partícula com o campo gravitacional. Note-se que, de acordo com esta prescrição, o spin da partícula acopla minimamente ao coeficiente de rotação de Ricci, pois devido à relação (3.14), temos que $\Omega^{AB}{}_\mu = \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu$.

Na presença de curvatura e torção, portanto, o Routhiano obtido da ação (3.26) é

$$\mathcal{R}_0 = -m c \sqrt{u^2} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{1}{c^2} B^A{}_\mu \mathcal{P}_A u^\mu + \frac{1}{2} \Omega^{AB}{}_\mu \mathcal{S}_{AB} u^\mu, \quad (3.28)$$

onde o vínculo fraco $\sqrt{u^2} \equiv \sqrt{u_A u^A} = \sqrt{u_\mu u^\mu} = 1$ foi introduzido no primeiro termo. A equação de movimento para a trajetória da partícula é obtida de

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu} \int \mathcal{R}_0 ds = 0, \quad (3.29)$$

enquanto que a equação de movimento para o spin é obtida de

$$\frac{d\mathcal{S}_{AB}}{ds} = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{S}_{AB}\}. \quad (3.30)$$

Agora, a quadri-velocidade e a densidade de momento angular da partícula devem satisfazer os vínculos

$$\mathcal{S}_{AB}\mathcal{S}^{AB} = 2\mathbf{s}^2, \quad (3.31)$$

$$\mathcal{S}_{AB}u^A = 0. \quad (3.32)$$

Infelizmente, no entanto, as equações de movimento obtidas do Routhiano \mathcal{R}_0 não satisfazem estes vínculos. Existem basicamente duas formas de incluir os vínculos no Routhiano. Aqui, seguiremos o método usado por Yee e Bander [54], o qual consta dos seguintes passos. Primeiro, introduzimos uma nova expressão para o spin,

$$\tilde{\mathcal{S}}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} - \frac{\mathcal{S}_{AC}u^C u_B}{u^2} - \frac{\mathcal{S}_{CB}u^C u_A}{u^2}. \quad (3.33)$$

Este novo tensor satisfaz a relação de Poisson (3.27) com a métrica $\eta_{AB} - u_A u_B / u^2$. Um novo Routhiano que incorpore os vínculos de acima pode ser obtido trocando-se \mathcal{S}_{AB} por $\tilde{\mathcal{S}}_{AB}$ na equação (3.28), e somando-lhe o termo

$$\frac{du^A}{ds} \frac{\mathcal{S}_{AB}u^B}{u^2}.$$

O novo Routhiano vem, então, dado por

$$\mathcal{R} = -m c \sqrt{u^2} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{1}{c^2} B^A{}_{\mu} \mathcal{P}_A u^\mu + \frac{1}{2} \Omega^{AB}{}_{\mu} \mathcal{S}_{AB} u^\mu - \frac{\mathcal{D}u^A}{\mathcal{D}s} \frac{\mathcal{S}_{AB}u^B}{u^2}, \quad (3.34)$$

onde

$$\frac{\mathcal{D}u^A}{\mathcal{D}s} = u^\mu \mathcal{D}_\mu u^A,$$

com \mathcal{D}_μ dado pela equação (3.20). Usando o Routhiano (3.34), a equação de movimento para o spin é

$$\frac{\mathcal{D}\mathcal{S}_{AB}}{\mathcal{D}s} = (u_A \mathcal{S}_{BC} - u_B \mathcal{S}_{AC}) \frac{\mathcal{D}u^C}{\mathcal{D}s}, \quad (3.35)$$

a qual coincide com aquela da relatividade geral. Fazendo uso do formalismo Lagrangeano, o próximo passo é obter a equação de movimento para a trajetória da partícula. Através de um cálculo direto, obtemos

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}s} (m c u_C) + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}s} \left(\frac{\mathcal{D}u^A}{\mathcal{D}s} \frac{\mathcal{S}_{AC}}{u^2} \right) = \frac{1}{2} (R^{AB}{}_{\mu\nu} - Q^{AB}{}_{\mu\nu}) \mathcal{S}_{AB} u^\nu h_C{}^\mu, \quad (3.36)$$

onde

$$Q^A{}_{B\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu K^A{}_{B\nu} - \mathcal{D}_\nu K^A{}_{B\mu} + K^A{}_{D\mu} K^D{}_{B\nu} - K^A{}_{D\nu} K^D{}_{B\mu}. \quad (3.37)$$

Usando os vínculos (3.31-3.32), é fácil provar que

$$\frac{\mathcal{D}u^A}{\mathcal{D}s} \frac{\mathcal{S}_{AC}}{u^2} = -u^A \frac{\mathcal{D}\mathcal{S}_{AC}}{\mathcal{D}s}.$$

Conseqüentemente, a equação (3.36) torna-se

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}s} \left(m c u_C + u^A \frac{\mathcal{D}\mathcal{S}_{CA}}{\mathcal{D}s} \right) = \frac{1}{2} (R^{AB}{}_{\mu\nu} - Q^{AB}{}_{\mu\nu}) \mathcal{S}_{AB} u^\nu h_C{}^\mu. \quad (3.38)$$

Definindo o momentum generalizado

$$\mathbb{P}_C = h_C{}^\mu \mathbb{P}_\mu \equiv m c u_C + u^A \frac{\mathcal{D}\mathcal{S}_{CA}}{\mathcal{D}s},$$

obtemos

$$\frac{\mathcal{D}\mathbb{P}_\mu}{\mathcal{D}s} = \frac{1}{2} (R^{AB}{}_{\mu\nu} - Q^{AB}{}_{\mu\nu}) \mathcal{S}_{AB} u^\nu. \quad (3.39)$$

Esta é a equação que governa o movimento da partícula na presença de curvatura e torção. Ela é escrita em termos de uma conexão geral de Cartan, assim como em termos de sua curvatura e torção. Ela pode ser reescrita em termos do coeficiente de rotação de Ricci apenas, em cujo caso ela se reduz à equação de Papapetrou [55]. Ela pode também ser reescrita em termos da conexão de spin teleparalela [56], em cujo caso ela se reduz ao equivalente teleparalelo da equação de Papapetrou,

$$\frac{\dot{\mathcal{D}}\mathbb{P}_\mu}{\mathcal{D}s} = -\frac{1}{2} \dot{Q}^{AB}{}_{\mu\nu} \mathcal{S}_{AB} u^\nu, \quad (3.40)$$

com $\dot{Q}^{AB}{}_{\mu\nu}$ dado pela equação (3.37) escrita em termos da torção de Weitzenböck. Note-se que o spin da partícula, neste caso, acopla-se a um tensor escrito somente em termos da torção, e que faz o papel de uma curvatura.

3.3.3 Campos espinoriais

Para estudar o caso de um espinor de Dirac na presença de curvatura e torção, vamos examinar primeiro o Lagangeano de Dirac no espaço-tempo plano, o qual pode ser escrito na forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^A \delta_A{}^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^A \delta_A{}^\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi, \quad (3.41)$$

onde $\delta_A{}^\mu$ é uma tetrada trivial, m é a massa da partícula, e $\{\gamma^A\}$ são as matrizes de Dirac numa dada representação. Fazendo uso da prescrição de acoplamento (3.21) na representação espinorial, cujos geradores são dados por

$$J^{BC} = \frac{\sigma^{BC}}{2} := \frac{i}{4} [\gamma^B, \gamma^C],$$

obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} h_A{}^\mu \gamma^A \mathcal{D}_\mu \psi - \mathcal{D}_\mu \bar{\psi} h_A{}^\mu \gamma^A \psi \right) - m \bar{\psi} \psi, \quad (3.42)$$

onde o operador derivada de Fock-Ivanenko é dado por

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} (A^{BC}{}_\mu - K^{BC}{}_\mu) \sigma_{BC} \psi. \quad (3.43)$$

Esta derivada covariante define o acoplamento minimal para campos de spin 1/2 na presença de curvatura e torção. A derivada funcional de \mathcal{L} com respeito a $A^{BC}{}_\mu - K^{BC}{}_\mu \equiv \overset{\circ}{A}{}^{BC}{}_\mu$ fornece, como é o usual, o tensor de spin. Um cálculo direto mostra que a equação de movimento correspondente é dada por

$$i\gamma^A h_A{}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi = m \psi, \quad (3.44)$$

que é a equação de Dirac na presença de curvatura e torção. Esta equação é totalmente equivalente à equação de Dirac da relatividade geral [57].

Como é bem conhecido, a torção pode ser decomposta em termos irredutíveis sobre o grupo global de Lorentz [58]:

$$T_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3} (t_{\lambda\mu\nu} - t_{\lambda\nu\mu}) + \frac{1}{3} (g_{\lambda\mu} T_\nu - g_{\lambda\nu} T_\mu) + \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} S^\rho. \quad (3.45)$$

Nesta expressão, T_μ , S^ρ e $t_{\lambda\mu\nu}$ são respectivamente as partes vetorial, axial, e tensorial da torção. Em termos dessas componentes, pode-se mostrar que

$$\frac{i}{4} K^{BC}{}_A \gamma^A \sigma_{BC} = -\gamma^A \left(\frac{1}{2} T_A + \frac{3i}{4} S_A \gamma^5 \right), \quad (3.46)$$

onde $\gamma^5 = \gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Assim, a derivada covariante (3.43), multiplicada por γ^μ , resulta

$$\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi = \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{4} A^{BC}{}_\mu \sigma_{BC} - \frac{1}{2} T_\mu - \frac{3i}{4} S_\mu \gamma^5 \right) \psi, \quad (3.47)$$

onde $\gamma^\mu \equiv \gamma^\mu(x) = \gamma^A h_A{}^\mu$. É interessante observar que a derivada funcional do Lagrangeano (3.42) com respeito à conexão $A^{BC}{}_\mu$ ainda fornece o tensor de spin. Além disso, as derivadas com respeito a T_μ e S_μ fornecem respectivamente as correntes vetoriais e axiais do campo espinorial. Finalmente, a equação de Dirac (3.44) fica

$$i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{4} A^{BC}{}_\mu \sigma_{BC} - \frac{1}{2} T_\mu - \frac{3i}{4} S_\mu \gamma^5 \right) \psi = m\psi. \quad (3.48)$$

Esta é a forma final da equação de Dirac na presença de curvatura e torção, escrita em termos das componentes irredutíveis da torção. No caso específico da gravitação teleparalela, $A^{BC}{}_\mu = 0$, e a equação de Dirac fica escrita apenas em termos das partes axial e vetorial da torção [59]. No caso da relatividade geral, onde a derivada de Fock-Ivanenko é $\overset{\circ}{\mathcal{D}}{}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} \overset{\circ}{A}{}^{BC}{}_\mu \sigma_{BC} \psi$, se a conexão de spin $\overset{\circ}{A}{}^{BC}{}_\mu$ é escrita em termos do coeficiente de não-holonomia $f^A{}_{BC}$, uma decomposição similar àquela da equação (3.46) pode ser feita, e a equação de Dirac resulta escrita somente em termos do traço e do pseudo-traço de $f^A{}_{BC}$.

3.4 Gravitação como uma teoria para uma conexão

A prescrição de acoplamento minimal proposta na seção anterior implica que a interação gravitacional acopla-se com a matéria de forma indiferente à teoria que a descreve. Por exemplo, esta interação pode ser descrita pela relatividade geral ou pela teoria teleparalela, sendo que em qualquer destes casos o acoplamento minimal resulta totalmente equivalente. Será possível, então, ter uma descrição da interação gravitacional através de uma teoria que seja totalmente equivalente a relatividade geral, e que além disso incorpore as características de “gauge” que possui o teleparalelismo? [60, 61] A resposta a esta pergunta é afirmativa em muitos aspectos. Para entender esta afirmação, vamos a estudar em primeiro lugar as consequências de se trocar o “grupo” de difeomorfismo pelo grupo local de Lorentz como o grupo de transformações da gravitação. Como veremos, ao se fazer isso, o campo fundamental da gravitação deixa de ser a métrica, e passa naturalmente a ser a conexão de spin.

3.4.1 Transformações de Lorentz

A forma mais geral dos geradores das transformações de Lorentz infinitesimais é [44]

$$J_{AB} = L_{AB} + S_{AB}, \quad (3.49)$$

onde

$$L_{AB} = i(x_A \partial_B - x_B \partial_A) \quad (3.50)$$

é a parte orbital e S_{AB} é a parte de espin dos geradores. A forma explícita desta última depende do spin do campo em consideração. Os geradores J_{AB} satisfazem a relação de comutação

$$[J_{AB}, J_{CD}] = i(\eta_{BC} J_{AD} - \eta_{AC} J_{BD} - \eta_{BD} J_{AC} + \eta_{AD} J_{BC}), \quad (3.51)$$

a qual deve identificar-se com a álgebra de Lie do grupo de Lorentz. Cada conjunto de geradores L_{AB} e S_{AB} satisfazem a mesma relação de comutação que J_{AB} , e comutam entre si.

Uma transformação de Lorentz é chamada de local se o parâmetro da transformação depende da posição. Este tipo de transformação gera uma mudança na forma funcional de qualquer campo físico. Como primeiro passo para entender o efeito destas transformações na estrutura de um espaço-tempo Riemanniano M^4 , vamos considerar a transformação de Lorentz das coordenadas x^A do espaço tangente

a cada ponto $x \in M^4$. Essa transformação pode ser escrita na forma

$$\delta_L x^A = -\frac{i}{2} \epsilon^{CD} L_{CD} x^A \equiv -\epsilon^A{}_D x^D, \quad (3.52)$$

com $\epsilon^{CD} \equiv \epsilon^{CD}(x^\mu)$ o parâmetro da transformação. Devido ao fato do espaço tangente ser transitivo sob translações (o espaço tangente é um espaço de Minkowski), cada par de pontos relacionado por uma transformação de Lorentz pode também ser relacionado por uma translação. De fato, usando a forma explícita de L_{CD} , a transformação (3.52) pode ser reescrita como

$$\delta_L x^A = -i \xi^C P_C x^A, \quad (3.53)$$

a qual é uma translação com

$$\xi^C = \epsilon^C{}_D x^D \quad (3.54)$$

como parâmetro, e $P_C = -i \partial_C$ como gerador. Isto significa, que uma transformação infinitesimal de Lorentz das coordenadas do tangente é formalmente equivalente a uma translação com ξ^C como parâmetro.

De outra parte, devido ao fato das coordenadas x^A se comportarem como vetores sob transformações de Lorentz, podemos interpretar o conjunto delas $\{x^A(x^\mu)\}$ como um campo vetorial. Neste caso, os geradores de Lorentz são aqueles da representação vetorial (3.17), o que conduz a seguinte transformação:

$$\delta_S x^A = -\frac{i}{2} \epsilon^{CD} (S_{CD})^A{}_B x^B \equiv \epsilon^A{}_D x^D. \quad (3.55)$$

Assim, usando as equações (3.53) e (3.55), podemos escrever o resultado de uma transformação *total* de Lorentz local sobre as coordenadas do espaço tangente como

$$\delta_J x^A \equiv -\frac{i}{2} \epsilon^{CD} J_{CD} x^A = 0. \quad (3.56)$$

Este resultado, consistente por si só, vem do fato que uma transformação de Lorentz muda simultaneamente os índices vetoriais e o argumento de um campo vetorial qualquer $V^A(x)$, dando como resultado final uma transformação a ponto fixo:

$$\delta V^A(x) \equiv V'^A(x) - V^A(x) = -\frac{i}{2} \epsilon^{CD} J_{CD} V^A(x). \quad (3.57)$$

No caso da coordenada do tangente, as transformações cancelam entre si, dando um resultado nulo. Para todos os outros campos físicos, J_{AB} gera uma mudança apenas na forma funcional do campo. No caso de um campo de matéria qualquer, escrevemos a transformação de Lorentz como [44]

$$\delta_J \Psi \equiv \Psi'(x) - \Psi(x) = -\frac{i}{2} \epsilon^{AB} J_{AB} \Psi(x), \quad (3.58)$$

onde a forma explícita de L_{AB} é a mesma para todos os campos, mas aquela para S_{AB} depende da representação de Lorentz a qual pertence Ψ . Note-se que os geradores orbitais podem agir no argumento espaço-temporal de $\Psi(x^\mu)$ devido às relações

$$\partial_A = (\partial_A x^\mu) \partial_\mu \quad \text{and} \quad \partial_\mu = (\partial_\mu x^A) \partial_A.$$

Além disso, usando a forma explícita para L_{AB} , a transformação de Lorentz (3.58) pode ser reescrita na forma

$$\delta_J \Psi = -i \xi^C P_C \Psi - \frac{i}{2} \epsilon^{AB} S_{AB} \Psi, \quad (3.59)$$

com ξ^C dado pela equação (3.54). De novo, observamos que a parte orbital da transformação se reduz a uma translação, e assim a transformação de Lorentz de um campo geral Ψ pode ser escrita como uma translação mais uma transformação de spin pura. Ainda que ela tenha esta forma especial, é importante notar que (3.59) não é uma transformação de Poincaré, mas sim uma verdadeira transformação de Lorentz. Isto é devido ao fato que $[P_C, S_{AB}] = 0$.

Agora, nosso objetivo é chegar a uma teoria para a gravitação que inclua dois ingredientes: que seja uma teoria com simetria local, ou de gauge, e que seja equivalente à relatividade geral. Esta última condição deve incluir a prescrição de acoplamento minimal proposta na seção 3.2.3. Assim, do ponto de vista de uma teoria de gauge, a derivada de um campo de matéria geral deve ser covariante sob as transformações locais de Lorentz geradas por J_{AB} [15], ou seja,

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_C \Psi = \partial_C \Psi + \frac{1}{2} \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_C \frac{\delta_J \Psi}{\delta \epsilon^{AB}}, \quad (3.60)$$

onde $\overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_C = \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu h_C{}^\mu$. Substituindo a transformação (3.58), obtemos

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_C \Psi = \partial_C \Psi - \frac{i}{2} \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_C J_{AB} \Psi. \quad (3.61)$$

Usando a identidade

$$\frac{i}{2} \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu J_{AB} = \frac{i}{2} \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu S_{AB} + \overset{\circ}{B}{}^A{}_\mu P_A, \quad (3.62)$$

onde $\overset{\circ}{B}{}^A{}_\mu \equiv \overset{\circ}{A}{}^A{}_{B\mu} x^B$, a derivada covariante (3.61) assume a forma

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_C \Psi = h_C{}^\mu \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \Psi, \quad (3.63)$$

onde

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu S_{AB} \quad (3.64)$$

é o operador derivada covariante do Fock-Ivanenko [62], e $h_C{}^\mu$ é a inversa da tetrada [63]

$$h^C{}_\mu = \partial_\mu x^C + \overset{\circ}{A}{}^C{}_{D\mu} x^D \equiv \overset{\circ}{D}_\mu x^C. \quad (3.65)$$

A exigência de covariância local sob transformações de Lorentz conduz a uma expressão para a tetrada em termos de a conexão de spin e das coordenadas do espaço tangente. Essa tetrada é, então, uma variável não fundamental da teoria: o papel das variáveis fundamentais fica para $A^C{}_{D\mu}$ e para as coordenadas x^A .

A equação (3.63) é claramente equivalente à prescrição de acoplamento minimal (3.21), e está composta de duas partes. A derivada de Fock-Ivanenko é responsável pelo acoplamento do spin do campo de matéria à gravitação. Este acoplamento não é universal pois depende do conteúdo de spin do campo de matéria. Por outro lado, a tetrada que aparece multiplicando a derivada de Fock-Ivanenko, é responsável pelo acoplamento da energia e momentum do campo de matéria à gravitação. Esta parte do acoplamento minimal é universal no sentido que todos os campos de matéria da natureza respondem da mesma forma à sua ação. Como a parte não trivial da tetrada vem dos geradores orbitais de Lorentz, podemos dizer que estes geradores são os responsáveis pela universalidade da interação gravitacional.

3.4.2 Transformações da conexão e da tetrada

Para se ter uma idéia intuitiva do efeito das transformações locais de Lorentz, é necessário obter a forma das transformações infinitesimais da conexão de spin. Isto, junto com as transformações para as coordenadas do espaço tangente (3.56), nos permitirá escrever a forma das transformações para a tetrada, e conseqüentemente para a métrica.

Como primeiro passo, lembremos que a forma de um elemento geral do grupo de Lorentz é

$$U_J = U_L U_S = U_S U_L \equiv \exp \left[-\frac{i}{2} \epsilon^{AB} J_{AB} \right], \quad (3.66)$$

onde

$$U_S = \exp \left[-\frac{i}{2} \epsilon^{AB} S_{AB} \right] \quad \text{e} \quad U_L = \exp \left[-\frac{i}{2} \epsilon^{AB} L_{AB} \right]. \quad (3.67)$$

Por construção, sob uma transformação local de Lorentz gerada por U_J , a derivada covariante (3.63) transforma-se como

$$\overset{\circ}{D}'_{C'} \Psi'(x) = U_J \overset{\circ}{D}_C \Psi(x). \quad (3.68)$$

Note-se que, além da rotação de Lorentz nos índices matriciais (ou de spin) de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_C$, a qual é a única transformação que aparece nas teorias de Yang-Mills (internas), o índice do espaço-tempo (externo) é também transformado. Usando as expressões [44]

$$\Psi(x) = U_S^{-1} \Psi'(x') \quad \text{e} \quad \Psi'(x) = U_L \Psi'(x')$$

na transformação (3.68), ela assume a forma

$$U_L^{-1} \overset{\circ}{\mathcal{D}}'_{C'} U_L = h_C{}^\mu U_S \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu U_S^{-1}. \quad (3.69)$$

Usando a definição da derivada de Fock-Ivanenko

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \frac{1}{2} \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu \frac{\delta_S \Psi}{\delta \epsilon^{AB}},$$

onde

$$\delta_S \Psi \equiv \Psi'(x') - \Psi(x) = -\frac{i}{2} \epsilon^{AB} S_{AB} \Psi \quad (3.70)$$

é a mudança total em $\Psi(x)$, pode-se facilmente verificar que esta derivada transforma-se como

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}'_\mu = U_S \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu U_S^{-1}. \quad (3.71)$$

Essa expressão fornece a transformação usual de gauge da conexão,

$$\overset{\circ}{A}'_\mu = U_S \overset{\circ}{A}_\mu U_S^{-1} + i U_S \partial_\mu U_S^{-1}, \quad (3.72)$$

cuja versão infinitesimal é

$$\delta_S \overset{\circ}{A}{}^{CD}{}_\mu = - \left(\partial_\mu \epsilon^{CD} + \overset{\circ}{A}{}^C{}_{A\mu} \epsilon^{AD} + \overset{\circ}{A}{}^D{}_{A\mu} \epsilon^{CA} \right) \equiv - \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \epsilon^{CD}. \quad (3.73)$$

Vemos assim que as transformações de gauge da conexão de Lorentz são geradas pela representação matricial (de spin), ou seja, pelos geradores S_{AB} .

Substituindo-se agora a equação (3.71) na lei de transformação (3.69), obtemos

$$U_L^{-1} \overset{\circ}{\mathcal{D}}'_{C'} U_L = h_C{}^\mu \overset{\circ}{\mathcal{D}}'_\mu \equiv \overset{\circ}{\mathcal{D}}'_C. \quad (3.74)$$

É claro desta expressão que a parte orbital dos geradores é responsável pelas transformações de Lorentz do índice do espaço-tempo da derivada covariante $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_C$. De fato, chamando de $\Lambda^{A'}{}_C \equiv (U_S)^{A'}{}_C$ ao elemento do grupo de Lorentz na representação vetorial, a transformação da tetrada pode ser escrita na forma usual

$$h_C{}^\mu = \Lambda^{A'}{}_C h_{A'}{}^\mu,$$

e assim vemos que

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}'_{C'} = \Lambda_{C'}{}^A \overset{\circ}{\mathcal{D}}'_A \equiv U_L \overset{\circ}{\mathcal{D}}'_C U_L^{-1}. \quad (3.75)$$

Isto significa que

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}'_{C'} = \Lambda_{C'}{}^A U_S \overset{\circ}{\mathcal{D}}'_A U_S^{-1}, \quad (3.76)$$

que é a lei de transformação usual para a derivada covariante (ver Ref. [64], pág. 368). É importante ressaltar os diferentes papéis dos geradores de Lorentz: a parte de spin S_{AB} gera as transformações de gauge (internas), enquanto a parte orbital L_{AB} é a responsável pela transformação do índice espaço-temporal (externo) da derivada covariante.

Vamos obter, agora, a transformação de Lorentz infinitesimal da tetrada (3.65). A transformação gerada por S_{AB} corresponde à mudança total da tetrada, isto é, $\delta_S h^A{}_\mu \equiv h'^A{}_\mu(x') - h^A{}_\mu(x)$. Da equação (3.65), temos que

$$\delta_S h^A{}_\mu = \partial_\mu(\delta_S x^A) + (\delta_S \overset{\circ}{A}{}^A{}_{d\mu}) x^D + \overset{\circ}{A}{}^A{}_{D\mu}(\delta_S x^D). \quad (3.77)$$

Usando as equações (3.55) e (3.73), é simples ver que

$$\delta_S h^A{}_\mu = \epsilon^A{}_C h^C{}_\mu \equiv -\frac{i}{2} \epsilon^{CD} (S_{CD})^A{}_B h^B{}_\mu, \quad (3.78)$$

como deve ser, posto que $h^A{}_\mu$ é um campo vetorial de Lorentz no índice algébrico. Por outro lado, a transformação gerada por L_{CD} corresponde a uma mudança somente na coordenada, isto é, $\delta_L h^A{}_\mu \equiv h'^A{}_\mu(x') - h^A{}_\mu(x)$. Posto que $\overset{\circ}{A}{}^{CD}{}_\mu$ responde somente à representação S_{CD} , observamos da equação (3.65) que

$$\delta_L h^A{}_\mu = \partial_\mu(\delta_L x^A) + \overset{\circ}{A}{}^A{}_{D\mu}(\delta_L x^D). \quad (3.79)$$

Usando a transformação (3.53), obtemos

$$\delta_L h^A{}_\mu = -\overset{\circ}{\mathcal{D}}'_\mu \xi^A. \quad (3.80)$$

É simples ver que $\delta_L h^A{}_\mu$ induz no tensor métrico (equação (1.4)) a transformação

$$\delta_L g_{\mu\nu} = -\overset{\circ}{\nabla}'_\mu \xi_\nu - \overset{\circ}{\nabla}'_\nu \xi_\mu, \quad (3.81)$$

onde $\xi_\nu = \xi_A h^A{}_\nu$, e $\overset{\circ}{\nabla}'_\mu$ é a derivada covariante na conexão de Levi-Civita (equação (1.14)). Como é sabido, a equação (3.81) representa a resposta da métrica $g_{\mu\nu}$ a difeomorfismos espaço-temporais $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ [30]. Em outras palavras, as transformações de Lorentz geradas por L_{AB} são equivalentes às transformações gerais de

coordenadas espaço-temporais. Isto significa que a formulação usual da relatividade geral está incluída como um caso particular desta formulação mais geral, a qual permite a inclusão de campos com spin inteiro e semi-inteiro desde as bases da formulação. Além disso, observamos que o tensor energia-momento de qualquer campo de matéria deve ser obtido, de acordo com o teorema de Noether [65], da invariância do Lagrangeano sob uma transformação de Lorentz gerada por L_{AB} apenas [66]. Com relação a este último ponto, é interessante notar que a derivada funcional do Lagrangeano para um campo de matéria com relação à conexão de spin fornece usualmente o tensor de spin. Em nosso caso, porém, devido à dependência da tetrada na conexão de spin,

$$\mathcal{J}^\mu{}_{AB} = \frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu} \quad (3.82)$$

representará agora o momento angular *total*, isto é, a soma dos momentos angulares de spin e orbital. De fato, como a tetrada dependa da conexão de spin, a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{J}^\mu{}_{AB} = \frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^C{}_\rho} \frac{\delta h^C{}_\rho}{\delta \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu}. \quad (3.83)$$

Porém, da equação (3.65), observamos que

$$\frac{\delta h^C{}_\rho}{\delta \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu} = \delta^\mu{}_\rho (\delta^C{}_A x_B - \delta^C{}_B x_A). \quad (3.84)$$

Substituindo esta relação na equação (3.83), obtemos

$$\mathcal{J}^\mu{}_{AB} = x_A \Theta^\mu{}_B - x_B \Theta^\mu{}_A, \quad (3.85)$$

onde

$$\Theta^\mu{}_A = -\frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^A{}_\mu} \quad (3.86)$$

é o tensor energia-momento. Como \mathcal{L} é invariante sob transformações locais de Lorentz, $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^\mu{}_A h^{A\nu}$ será o tensor de energia-momento simétrico (ver Ref. [64], pág. 371), e $\mathcal{J}^\mu{}_{AB}$ representará o tensor momento angular *total* [67].

3.4.3 A conexão de spin como variável fundamental

Toda teoria de gauge tem com variável fundamental uma conexão. Esta conexão permite definir o tensor curvatura, o qual é usado para construir os invariantes da teoria. Por exemplo, o Lagrangeano da teoria é construído a partir deste tensor de

curvatura fazendo uma contração dos índices internos com outro tensor, formando assim um Lagrangeano quadrático na curvatura. No caso da relatividade geral, o Lagrangeano é obtido a partir de uma contração do tensor de curvatura com a métrica, ou equivalentemente, com a tetrada. Isto é impossível numa teoria de gauge usual, pois não existe uma variável como a tetrada, que consegue relacionar índices do espaço “externo” com índices do espaço “interno” para assim formar possíveis invariantes lineares na curvatura para usar como Lagrangeano. Esta é uma diferença fundamental da gravitação com as teorias de gauge internas, isto é, do tipo Yang-Mills.

Uma ação bem conhecida para a gravitação, que usa a conexão de spin como variável fundamental, é chamada de ação de Palatini, a qual pode ser escrita na forma

$$S_P = \frac{1}{4k^2} \int_{\mathcal{R}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{ABCD} h^A{}_{\mu} h^B{}_{\nu} \overset{\circ}{\Omega}{}^{CD}{}_{\rho\sigma}, \quad (3.87)$$

onde $k^2 = 8\pi G/c^4$, ϵ_{ABCD} é o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita na variedade \mathcal{M} compatível com η_{AB} , e

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = h^A{}_{\mu} h^B{}_{\nu} h^C{}_{\rho} h^D{}_{\sigma} \epsilon_{ABCD}, \quad (3.88)$$

com $\epsilon_{0123} = h \equiv \det(h^A{}_{\mu})$. É claro, desta ação, que a conexão de spin não é a única variável da chamada formulação de Palatini. A tetrada h_{μ} é também considerada como variável da teoria. As equações de movimento correspondentes são

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^A{}_{\mu} - \frac{1}{2} h^A{}_{\mu} \overset{\circ}{\Omega} = 0, \quad (3.89)$$

e

$$\partial_{\mu} h^A{}_{\nu} - \partial_{\nu} h^A{}_{\mu} + [\overset{\circ}{A}_{\mu}, h_{\nu}]^A = 0, \quad (3.90)$$

onde a primeira é a conhecida equação de Einstein, a qual é obtida variando-se a ação com relação à tetrada, enquanto a segunda é obtida variando-se a ação com relação à conexão de spin.

É usual assumir que a equação (3.90) pode ser resolvida para $\overset{\circ}{A}{}^A{}_{B\mu}$, sendo que neste caso a conexão de spin deixa de ser o campo fundamental da formulação, sendo este papel assumido pela tetrada, a qual carrega então toda a informação da teoria. Introduzindo-se a solução $\overset{\circ}{A}_{\mu} = \overset{\circ}{A}_{\mu}(h_{\nu})$ na ação (3.87), ela se reduz à ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} \equiv S_P(h_{\nu}, A_{\mu}(h_{\nu})) = \frac{1}{2k^2} \int_{\mathcal{R}} d^4x h \overset{\circ}{R}, \quad (3.91)$$

onde $\overset{\circ}{R}$ é a curvatura escalar de $\overset{\circ}{A}_\mu = \overset{\circ}{A}_\mu(h_\nu)$. No caso de uma teoria de gauge, como já foi dito, a conexão é a variável fundamental. Se quisermos obter uma teoria para a gravitação que compartilhe esta propriedade, é necessário inverter o método, isto é, não procurar por uma solução do tipo $\overset{\circ}{A}_\mu = \overset{\circ}{A}_\mu(h_\nu)$, mas sim do tipo $h_A^\mu = h_A^\mu(A_\nu)$. Isto é possível em nosso caso pois já temos a forma da dependência funcional da tetrada com a conexão de spin.

Usando a relação (3.65), podemos escrever a ação (3.87) como

$$S'_P = \frac{1}{4k^2} \int_{\mathcal{R}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{ABCD} \overset{\circ}{D}_\mu x^A \overset{\circ}{D}_\nu x^B \overset{\circ}{\Omega}^{CD}{}_{\rho\sigma}, \quad (3.92)$$

a qual está escrita em termos da conexão $\overset{\circ}{A}_\mu$ e das coordenadas do tangente x^A . Com esta nova ação, o vínculo (3.90), o qual estabelece que a torção é nula na relatividade geral, usando a equação (3.65), assume a forma

$$\overset{\circ}{T}^A{}_{\mu\nu} \equiv \overset{\circ}{\Omega}^A{}_{B\mu\nu} x^B = 0. \quad (3.93)$$

Como a torção é nula, os vínculos são triviais. É interessante observar que a torção aparece como uma medida da não-ortogonalidade entre curvatura e as coordenadas do espaço tangente. Por outro lado, as equações de movimento para as coordenadas do espaço tangente fornecem uma nova equação, dada por

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu \left[\overset{\circ}{\Omega}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu \overset{\circ}{\Omega} \right] = 0. \quad (3.94)$$

Como podemos ver, essa é a forma contraída da segunda identidade de Bianchi da relatividade geral. Esta equação, será estudada na sub- seção seguinte.

Temos, então, uma teoria para a gravitação que é equivalente à relatividade geral, e ao mesmo tempo tem uma conexão para o grupo de Lorentz como campo fundamental. Além disso, analogamente às teorias de Yang-Mills, as quais possuem uma única identidade de Bianchi, nessa teoria as duas identidades de Bianchi da relatividade geral são reduzidas a uma única. Para verificar como isso ocorre, lembremos que a relatividade geral possui duas identidades de Bianchi, uma para a torção, dada por

$$\overset{\circ}{\Omega}^A{}_{\rho\mu\nu} + \overset{\circ}{\Omega}^A{}_{\nu\rho\mu} + \overset{\circ}{\Omega}^A{}_{\mu\nu\rho} = 0, \quad (3.95)$$

e outra para a curvatura, dada por

$$\overset{\circ}{D}_\rho \overset{\circ}{\Omega}^A{}_{B\mu\nu} + \overset{\circ}{D}_\nu \overset{\circ}{\Omega}^A{}_{B\rho\mu} + \overset{\circ}{D}_\mu \overset{\circ}{\Omega}^A{}_{B\nu\rho} = 0. \quad (3.96)$$

Multiplicando-se a identidade (3.96) por x^B , e usando a relação (3.93), o resultado é facilmente visto ser a identidade de Bianchi (3.95) para a torção. Em outras palavras, uma teoria cuja tetrada tem a forma (3.65), terá sempre uma única identidade de Bianchi.

3.4.4 O papel das coordenadas do espaço tangente

As coordenadas do espaço tangente x^A possuem uma interpretação dupla em nossa formulação. Elas podem ser interpretadas tanto como um conjunto de quatro funções escalares, em cujo caso as transformações de Lorentz agem com os geradores orbitais, como um campo vetorial $x^A(x^\mu)$, em cujo caso as transformações de Lorentz agem com os geradores matriciais na representação vetorial. Quando elas são consideradas como um campo vetorial, sua derivada covariante de Fock-Ivanenko é dada por

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu x^C = \partial_\mu x^C + \frac{1}{2} \overset{\circ}{A}{}^{AB}{}_\mu \frac{\delta_S x^C}{\delta \epsilon^{AB}}, \quad (3.97)$$

a qual pode ser reescrita através da equação (3.55) como

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu x^C = \partial_\mu x^C + \overset{\circ}{A}{}^C{}_{B\mu} x^B \equiv h^C{}_\mu. \quad (3.98)$$

Assim, a derivada covariante de Fock-Ivanenko do campo vetorial $x^A(x^\mu)$ coincide com o campo da tetrada. Podemos observar, então, que o campo gravitacional—através da conexão $\overset{\circ}{A}{}^C{}_{D\mu}$ —se acopla às coordenadas do tangente, com constante de acoplamento igual a 1. Podemos, então dizer que as coordenadas $\{x^A\}$ respondem à interação gravitacional, e portanto temos um resultado importante: a não trivialidade da tetrada tem sua origem exatamente neste acoplamento. Uma tetrada trivial representaria uma simples transformação de coordenadas, e não um verdadeiro campo gravitacional. A métrica obtida da relação $g_{\mu\nu} = \eta_{AB} h^A{}_\mu h^B{}_\nu$ não seria, nesse caso, mais do que a métrica de Minkowski escrita em coordenadas arbitrárias. É o acoplamento entre a conexão e as coordenadas do tangente que produz a não trivialidade da métrica Riemanniana, na qual se baseia a descrição da gravitação na relatividade geral. Além disso, devido ao fato da parte não trivial da tetrada, dada por $\overset{\circ}{B}{}^A{}_\mu = \overset{\circ}{A}{}^A{}_{B\mu} x^B$, ser obtida dos geradores orbitais de Lorentz (ver equação (3.62)), e também ao fato deles agirem nos argumentos dos campos, os geradores orbitais L_{AB} aparecem como os responsáveis pela universalidade da gravitação.

Agora, se as coordenadas do tangente são consideradas como um campo vetorial, elas devem ter sua própria densidade Lagrangeana. Assumindo que esta densidade

existe, e que este campo vetorial é não-massivo, o Lagrangeano natural em uma variedade Riemanniana para um campo que responde à interação de gauge é

$$\mathcal{L}_x = -\epsilon_\Lambda \frac{h}{2} \eta_{CD} \eta^{AB} \overset{\circ}{\mathcal{D}}_A x^C \overset{\circ}{\mathcal{D}}_B x^D, \quad (3.99)$$

onde ϵ_Λ é uma constante positiva com dimensões de densidade de energia, introduzida para dar ao Lagrangeano as dimensões corretas. Usando o fato que

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_A x^C = h^\mu{}_A \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu x^C \equiv h_A{}^\mu h^C{}_\mu = \delta_A^C, \quad (3.100)$$

o qual surge das propriedades de ortogonalidade $h^A{}_\mu h_A{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ e $h^A{}_\mu h_B{}^\mu = \delta^A{}_B$, chegamos a

$$\mathcal{L}_x = -2h\epsilon_\Lambda. \quad (3.101)$$

Assim, o Lagrangeano para o campo vetorial x^A não é outra coisa que um termo cosmológico para as equações do campo gravitacional, com

$$\Lambda = \frac{16\pi G}{c^3} \epsilon_\Lambda \quad (3.102)$$

no papel de constante cosmológica. Em outras palavras, podemos dizer que o termo cosmológico é simplesmente um Lagrangeano para as coordenadas do tangente, interpretadas como um campo vetorial. Este resultado fornece uma nova interpretação para a energia escura do universo a qual [68], de acordo com nosso modelo, teria origem no acoplamento sempre presente entre a conexão de spin e as coordenadas do tangente. Deve-se observar, porém, que o valor de Λ não depende da intensidade deste acoplamento, e fica como um parâmetro livre. De fato, mesmo na ausência de gravitação, quando a tetrada vira trivial, se as coordenadas do espaço tangente ainda são consideradas como um campo vetorial, seu Lagrangeano continuará sendo um termo cosmológico.

O papel das coordenadas x^A na descrição da interação gravitacional torna-se ainda mais claro se observarmos a equação de movimento (3.94). Esta equação não é uma equação dinâmica para x^A , mas sim um vínculo para a geometria do espaço-tempo: a identidade de Bianchi contraída para a curvatura deve ser válida sempre. Isto mostra também que toda a descrição da interação gravitacional é feita pela conexão de spin $\overset{\circ}{A}{}^A{}_{B\mu}$.

Apêndice C

Espaço das conexões

A consistência da prescrição de acoplamento minimal (3.20) tem sua origem no fato do espaço de conexões geral ser um espaço afim, homotopicamente trivial e infinito [69]. No caso específico das conexões de Lorentz, um ponto neste espaço é caracterizado por uma conexão

$$A = A^{bc}{}_{\mu} J_{bc} dx^{\mu}, \quad (\text{C.1})$$

que apresenta ao mesmo tempo curvatura e torção. Na linguagem de formas diferenciais, curvatura e torção estão definidas respectivamente por

$$R = dA + AA \equiv \mathcal{D}_A A \quad (\text{C.2})$$

e

$$T = dh + Ah \equiv \mathcal{D}_A h, \quad (\text{C.3})$$

onde \mathcal{D}_A denota a diferencial covariante na conexão A . Agora, dadas duas conexões A e \bar{A} , a diferença

$$k = \bar{A} - A \quad (\text{C.4})$$

é também uma 1-forma com valores na álgebra de Lie de Lorentz, mas que se transforma covariantemente:

$$k = UkU^{-1}. \quad (\text{C.5})$$

Sua derivada covariante vem dada por

$$\mathcal{D}_A k = dk + \{A, k\}. \quad (\text{C.6})$$

É simples então verificar que, dadas duas conexões tal que $\bar{A} = A + k$, suas curvaturas e torções estarão relacionadas por

$$\bar{R} = R + \mathcal{D}_A k + k k \quad (\text{C.7})$$

e

$$\bar{T} = T + k h. \quad (\text{C.8})$$

O efeito de somar um co-vetor k a uma conexão qualquer A , é mudar suas 2-formas de curvatura e torsão [70].

Escrevemos, agora, a equação (C.4) em componentes:

$$A^a{}_{bc} = \bar{A}^a{}_{bc} - k^a{}_{bc}. \quad (\text{C.9})$$

Como $k^a{}_{bc}$ é um co-vetor com valores na álgebra de Lie de Lorentz, ele é necessariamente anti-simétrico nos *primeiros dois* índices. Separando $k^a{}_{bc}$ nas partes simétrica e anti-simétrica nos *últimos dois* índices, obtemos

$$k^a{}_{bc} = \frac{1}{2}(k^a{}_{bc} + k^a{}_{cb}) + \frac{1}{2}(k^a{}_{bc} - k^a{}_{cb}). \quad (\text{C.10})$$

Definindo

$$k^a{}_{bc} - k^a{}_{cb} \equiv t^a{}_{cb} = -t^a{}_{bc}, \quad (\text{C.11})$$

e usando esta equação para três combinações de índices, é simples verificar que

$$k^a{}_{bc} = \frac{1}{2}(t_a{}^c{}_b + t_b{}^c{}_a - t^a{}_{bc}). \quad (\text{C.12})$$

Isto significa que a diferença entre quaisquer duas conexões de Lorentz tem a forma de um tensor de contorção.

Capítulo 4

Conclusões

As principais conclusões desta tese podem ser divididas em duas partes. Na primeira, referente ao modelo de partícula elementar baseado na extensão de Hawking e Ellis da solução de Kerr–Newmann, podemos ressaltar os seguintes pontos:

- Foi proposto um modelo para o elétron [71], o qual fornece uma interpretação clássica para o momento angular de spin. A presença de estados gravitacionais com spin semi-inteiro aparece como consequência de uma topologia não trivial.
- As idéias de Wheeler para explicar os conceitos de carga elétrica e massa foram incorporadas ao nosso modelo. Em outras palavras, nosso modelo situa-se num ponto intermediário entre os modelos de geons e os buracos de minhoca (*wormholes*). A massa e a carga elétrica são assim explicadas sem necessidade de se introduzir qualquer tipo de matéria ao modelo.
- Usando a interpretação de Hawking e Ellis, obtivemos uma representação algébrica para a solução de Kerr–Newman, e mostramos que esta representação evolui de acordo com a equação de Dirac.
- As consequências fenomenológicas do modelo são factíveis de serem verificadas em experiências de baixas energias, como por exemplo, no efeito Hall fracionário.
- Se o modelo é ou não aplicável a outras partículas fundamentais de spin $1/2$ é um problema em aberto, a ser explorado futuramente. É necessário a introdução de modificações que permitam que a massa possa assumir diferentes valores, sem alterar a estabilidade do modelo.

Com relação à segunda parte, na qual uma revisão do papel da torção na descrição da interação gravitacional é feita, as principais conclusões são:

- Usando uma versão não-holônoma do princípio da covariância geral, mostramos que a torção pode ser interpretada simplesmente como uma maneira alternativa de se descrever a gravitação, estando portanto relacionada aos mesmos graus de liberdade da curvatura [72, 73, 74, 75]. Isso significa que a interação gravitacional pode ser descrita só em termos da curvatura, como na relatividade geral, só em termos da torção, como no teleparalelismo, ou em termos de uma mistura de torção e curvatura, em cujo caso teremos uma teoria mais complexa em termos matemáticos, mas que resulta fisicamente equivalente tanto à relatividade geral como ao teleparalelismo.
- Pode-se afirmar que, devido à ausência de evidências experimentais de novos fenômenos associados à torção, nossa proposta está de acordo com os dados experimentais existentes, posto que ela é totalmente equivalente à relatividade geral.
- É possível incluir a invariância sob transformações locais de Lorentz numa teoria para gravitação [76]. Nossa proposta para esta nova teoria logra provar que as transformações gerais de coordenadas estão inclusas como um caso particular das transformações de Lorentz, as quais são geradas pela parte orbital dos geradores de Lorentz.
- A teoria para gravitação introduzida, além de ser equivalente à relatividade geral, troca a métrica pela conexão de spin como o campo fundamental da gravitação. Isto dá origem a um formalismo mais próximo das teorias de Yang e Mills, abrindo assim a possibilidade de se aplicar os métodos conhecidos destas teorias para o estudo da quantização da teoria gravitacional. Um primeiro passo nesta direção será o estudo do formalismo Hamiltoniano para a teoria.
- Uma nova explicação para a origem da constante cosmológica aparece naturalmente em nosso formalismo, a qual surge do termo cinético para as coordenadas do espaço tangente, interpretadas como um campo vetorial. O formalismo deixa livre a magnitude desta constante, fornecendo apenas a necessidade de sua introdução.

Referências

- [1] Friedman, J. L. e Sorkin, R. (1980). *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1100.
- [2] Punsly, B. (1987). *J. Math. Phys.* **28**, 859.
- [3] Møller, C. (1961). *Mat. Fys. Skr. Dan. Vidensk. Selsk.* **1**, No. 10.
- [4] Pellegrini, C. e Plebanski, J. (1962). *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **2**, No. 2.
- [5] Hayashi K. e Nakano, T. (1967). *Prog. Theor. Phys.* **38**, 491.
- [6] Hayashi, K. e Shirafuji, T. (1979). *Phys. Rev.* **D19**, 3524.
- [7] Hehl, F. W. (1980). *Cosmology and Gravitation*, ed. by P. G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York).
- [8] Kopczyński, W. (1982). *J. Phys.* **A15**, 493.
- [9] de Azeredo, R. e Oliveira, C. G. (1983). *Nuovo Cimento* **B74**, 83.
- [10] Müller-Hoissen, F. e Nitsch, J. (1985). *Gen. Rel. Grav.* **17**, 747.
- [11] Mielke, E. W. (1992). *Ann. Phys.(NY)* **219**, 78.
- [12] Maluf, J. W. (1995). *J. Math. Phys.* **36**, 4242.
- [13] Hehl, F. W. *et al* (1995). *Phys. Rep.* **258**, 1.
- [14] Kobayashi S. e Nomizu K. (1963). *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York).
- [15] Aldrovandi R. e Pereira J. G. (1995). *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore).
- [16] Kerr, R. P. (1963). *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237.

- [17] Newman, E. T. e Janis, A. I. (1965). *J. Math. Phys.* **6**, 915.
- [18] Newman, E. T. *et al* (1965). *J. Math. Phys.* **6**, 918.
- [19] Lopez, C. A. (1984). *Phys. Rev.* **D30**, 313; Lopez, C. A. (1992). *Gen. Rel. Grav.* **24**, 285.
- [20] Israelit, M. e Rosen, N. (1995). *Gen. Rel. Grav.* **27**, 153.
- [21] Israel, W. (1970). *Phys. Rev.* **D2**, 641.
- [22] Burinskii, A. (2003). *Phys. Rev.* **D68**, 105004.
- [23] Barut, A. O. e Bracken, A. J. (1981). *Phys. Rev.* **D23**, 2454.
- [24] Barut, A. O. e Thacker, W. (1985). *Phys. Rev.* **D31**, 1386.
- [25] Wheeler, J. A. (1962). *Geometrodynamics* (Academic Press, New York).
- [26] Hawking, S. W. e Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge) p. 161.
- [27] Wald, R. M. (1984). *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago) p. 289.
- [28] Komar, A. (1959). *Phys. Rev.* **113**, 934.
- [29] Ohanian, H. e Ruffini, R. (1994). *Gravitation and Spacetime* (Norton & Company, New York) p. 396.
- [30] Landau, L. D. e Lifshitz, E. M. (1975). *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Oxford).
- [31] Carter, B. (1968). *Phys. Rev.* **174**, 1559.
- [32] do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Prentice-Hall, New Jersey).
- [33] Hendriks, H. (1977). *Bull. Soc. Math. France Memoire* **53**, 81; ver §4.3.
- [34] Steenrod, N. (1974). *The Topology of Fibre Bundles* (Princeton University Press, New Jersey) p. 134.

- [35] Penrose, R. e Rindler, W. (1984). *Spinors and Spacetime*, Vol. 1 (Cambridge University Press, Cambridge) p. 43.
- [36] Gross, F. (1993). *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (Wiley, New York) p. 147.
- [37] Commins, E. D. *et al* (1994). *Phys. Rev.* **A50**, 2960.
- [38] Burinskii, A. e Magli, G. (2000). *Phys. Rev.* **D61**, 044017.
- [39] Luosto, C. O. e Sanchez, N. (1992). *Nucl. Phys.* **B383**, 377.
- [40] Petry, H. R. (1979). *J. Math. Phys.* **20**, 231.
- [41] Avis, S. J. e Isham, C. J. (1979). *Nucl. Phys.* **B156**, 441.
- [42] Verlinde, E. (1992). *Quantum Hall Effect*, ed. por M. Stone (World Scientific, Singapore).
- [43] Asselmeyer, T. e Keiper, R. (1995). *Ann. Phys. (Lpz)* **4**, 739; Asselmeyer, T. e Hess, G. (1995). *Fractional Quantum Hall Effect, Composite Fermions and Exotic Spinors* [cond-mat/9508053].
- [44] Ramond, P. (1989). *Field Theory: A Modern Primer*, 2nd edition (Addison-Wesley, Redwood).
- [45] Hayashi, K. e Shirafuji, T. (1979) *Phys. Rev. D* **19**, 3524; Obukhov Yu, N. e Pereira, J. G. (2003) *Phys. Rev. D* **67**, 044016 [gr-qc/0212080].
- [46] Gronwald, F. e Hehl, F. W. (1995) *Proc. School of Cosmology and Gravitation on Quantum Gravity (Erice)* ed. Bergmann P. G. *et al* (Singapore: World Scientific); Blagojević, M. (2002) *Gravitation and Gauge Symmetries* (Bristol: IOP Publishing).
- [47] Hehl, F. W. *et al* (1995) *Phys. Rep.* **258**, 1; Hammond, R. T. (2002) *Rep. Prog. Phys.* **65**, 599.
- [48] Gronwald, F. e Hehl, F. W. (1996) On the gauge aspects of gravity *Proc. 14th School of Cosmology and Gravitation (Erice, Italy)* ed. Bergmann, P. G. *et al* (Singapore: World Scientific).

- [49] Kobayashi, S. e Nomizu, K. (1963) *Foundations of Differential Geometry* Vol. 1 (New York: Wiley).
- [50] Aldrovandi, R., Barros, P. B. e Pereira, J. G. (2003) *Gen. Rel. Grav.* **35**, 991 [gr-qc/0301077].
- [51] de Andrade, V. C. e Pereira, J. G. (1997) *Phys. Rev. D* **56**, 4689.
- [52] Wong, S. K. (1970). *N. Cimento A* **65**, 689; Drechsler, W. (1980). *Phys. Lett. B* **90**, 258.
- [53] de Andrade, V. C. e Pereira, J. G. (1997). *Phys. Rev. D* **56**, 4689.
- [54] Yee, K. e Bander, M. (1993). *Phys. Rev. D* **48**, 2797.
- [55] Papapetrou, A. (1951). *Proc. R. Soc. London A* **209**, 248.
- [56] de Andrade, V. C., Guillen L. C. T. e Pereira J. G. (2001). *Phys. Rev. D* **64**, 027502.
- [57] Dirac, P. A. M. (1958). *The Electron Wave Equation in Riemann Space*, em *Planck Festschrift*, (ed. W. Frank, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin).
- [58] Hayashi, K. e Shirafuji, T. (1979). *Phys. Rev. D* **19**, 3524.
- [59] Mosna, R. A. e Pereira, J. G. (2004). *Gen. Rel. Grav.* **36**, 2525 [gr-qc/0312093].
- [60] Ashtekar, A. e Lewandowski, J. (2004). *Class. Quant. Grav.* **21**, R5 [gr-qc/0404018].
- [61] Ashtekar, A. (1986). *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244; Ashtekar, A. (1987). *Phys. Rev. D* **36**, 1587.
- [62] Fock, V. A. e Ivanenko, D. (1929). *Z. Phys.* **54**, 798; Fock, V. A. (1929). *Z. Phys.* **57**, 261.
- [63] Calçada, M. e Pereira, J. G. (2002). *Int. J. Theor. Phys.* **41**, 729 [gr-qc/0201059].
- [64] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York).
- [65] Konopleva, N. P. e Popov, V. N. (1980). *Gauge Fields* (Harwood, New York).

- [66] Calçada, M. e Pereira, J. G. (2002). *Phys. Rev.* **D66**, 044001 [gr-qc/0201076].
- [67] Hayashi, K. (1972). *Lett. Nuovo Cimento* **5**, 529.
- [68] Carroll, S. M. (2003). *Why is the Universe Accelerating?*, em *Measuring and Modeling the Universe*, ed. por W. L. Freedman (Cambridge University Press, Cambridge) [astro-ph/0310342]; Padmanabhan, T. (2003). *Phys. Rep.* **380**, 235 [hep-th/0212290]; Sahni, V. (2000). *Int. J. Mod. Phys.* **D9**, 373 [astro-ph/9904398].
- [69] Singer, I. M. (1978). *Comm. Math. Phys.* **60**, 7.
- [70] Aldrovandi R. e Barbosa, A. L. (2004). *Wu-Yang ambiguity in connection space*. [math-ph/0410034].
- [71] Arcos, H. I. e Pereira, J. G. (2004). *Gen. Rel. Grav.* **36**, 2441 [hep-th/0210103].
- [72] Arcos, H. I., de Andrade, V. C. e Pereira, J. G. (2004). *Int. J. Mod. Phys.* **D13**, 807 [gr-qc/0403074].
- [73] Arcos, H. I. e Pereira, J. G. (2004). *Class. Quant. Grav.* **21**, 5193 [gr-qc/0408096].
- [74] Arcos, H. I. e Pereira, J. G. (2004). *Int. J. Mod. Phys.* **D13**, em impressão [gr-qc/0501017].
- [75] de Andrade, V. C., Arcos, H. I. e Pereira, J. G. (2004). *Torsion as Alternative to Curvature in the Description of Gravitation*, Proceedings of the “Fourth International Winter Conference on Mathematical Methods in Physics”, 09-13 August 2004, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF/MCT), Rio de Janeiro, Brazil [gr-qc/0412034].
- [76] Aldrovandi, R., Arcos, H. I. e Pereira, J. G. (2004). *General relativity as a genuine connection theory*, Proceedings of the colloquium “Theory and Experiment in Cosmology and Gravitation”, in honor of José Plínio Baptista, on the occasion of his 70th birthday (September 22-24, 2004, Vitória, Brazil) [gr-qc/0412032].