



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.005/01

FÉRMIONS EM REFERENCIAIS ACELERADOS:
DESINTEGRAÇÃO DE PRÓTONS E OUTRAS
APLICAÇÕES

Daniel Augusto Turolla Vanzella

Orientador:

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas

São Paulo

— Agosto 2001 —

Ao meu avô Horácio

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. George E. A. Matsas pelo voto de *confiança* dado a um ainda aluno de colegial, orientando-me sempre de maneira incrivelmente *paciente, dedicada e profunda* ao longo de todos esses oito anos. Obrigado pelo *altruísmo e preocupação* quase paternais, sempre visando minha formação e minha futura carreira acadêmica. O mérito é seu por eu ter chegado até aqui e exclusivamente de minhas limitações se não fui além; espero não ter ficado muito aquém de suas expectativas.

Ao *amigo* George Matsas por permitir que nosso relacionamento rompesse o âmbito puramente acadêmico; pelo companheirismo e compreensão característicos e por ser uma pessoa na qual muitas de minhas visões de mundo encontram eco.

Aos meus pais Carlos e Sonia pelo *amor e dedicação* irrestritos, ingredientes fundamentais para que eu tivesse a força e a tranqüilidade necessárias para obter todas as conquistas, inclusive esta; pela *compreensão* frente a esse meu modo muitas vezes (aparentemente) “ausente”, que na verdade atesta o *carinho e conforto* que me proporcionam, sem os quais a dedicação ao meu “mundo interior”, muitas vezes necessária à minha carreira, não seria possível. Amo vocês.

Ao meu irmão Fabio pela *generosidade, espontaneidade e sinceridade* que sempre me serviram como exemplo.

A todos os meus avós, tios e primos pelo carinho sempre demonstrado, mesmo às vezes o convívio não sendo tão próximo quanto gostaríamos.

Ao meu falecido avô Horácio pelo modelo de honestidade, equilíbrio e racionalidade que me inspirou. De certa forma, parte de seu espírito vive neste trabalho.

Ao meu tio José Gabriel pelas inúmeras conversas agradáveis sobre os mais variados assuntos científicos e por ter me chamado a atenção para o IFT.

Aos meus primos José Gabriel, Guilherme e Eduardo pela amizade e cumplicidade ao longo desses últimos dez anos de convivência mais próxima e pela hospitalidade nas várias vezes em que tive que sair do IFT de madrugada.

Ao Ethienni por ser o amigo das inúmeras noites de boemia, rabiscando, entre uma cerveja e outra e ao som do bom *rock 'n roll*, planos e fórmulas em guardanapos.

À Erika por ter sido durante onze anos e meio a pessoa com quem dividi meus sonhos, objetivos e frustrações, estando ao meu lado tanto nas vitórias quanto nas adversidades. Obrigado pelo amor, carinho e companheirismo e por tudo que me ensinou nesse tempo. Mesmo se distantes, nunca nos perderemos.

Aos pais da Erika, tio Jorge e tia Suzana, que sempre me trataram como um filho, proporcionando-me um segundo lar em sua casa.

À Aline pelo amor e carinho que tem me oferecido nesses últimos meses; obrigado por reacender em mim uma chama cujo ardor não mais me recordava.

Ao Clisthenis por ter me recebido pela primeira vez no IFT com especial atenção e ter me apresentado ao Professor Matsas.

Aos colegas de orientação Crispino e Castiñeiras pelas entusiasmadas discussões que tanto me ajudaram na compreensão de muitos conceitos. Sentirei muita falta de vocês.

Ao Dr. Atsushi Higuchi por discussões, mesmo que indiretas, no desenrolar de alguns dos trabalhos inclusos nesta tese.

Aos Professores Juan C. Montero, Adriano A. Natale e Vicente Pleitez pelas inúmeras discussões, diretas ou indiretas, ao longo de todo o período em que fui aluno do IFT e pelos sempre bem-humorados “cafés” que desfrutei em suas presenças.

A todos os professores, funcionários e alunos do IFT pelo ambiente familiar com o qual convivemos, fazendo-nos sentir em casa no IFT.

Aos membros da banca pela disponibilidade e paciência em ler e analisar com cuidado este trabalho

À FAPESP pelo total suporte financeiro desde meu primeiro ano de graduação.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram para a concretização de mais esta meta.

Resumo

Ao longo desta tese, modelamos alguns processos de Física de Partículas governados pela *interação fraca* introduzindo, para isso, o conceito de *correntes semi-clássicas* e acoplando-as a campos quânticos fermiônicos. Dessa maneira, analisamos a influência que a *aceleração* exerce sobre as *desintegrações de prótons e nêutrons* segundo os processos $p \rightarrow n e^+ \nu_e$ e $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, respectivamente, assim como descritas por observadores inerciais. Entre outros resultados, obtemos o *tempo próprio de vida média* de prótons e nêutrons uniformemente acelerados. Embora possa ser desprezada sob condições terrestres, mostramos que a desintegração de prótons acelerados é potencialmente importante em algumas situações astrofísicas. Utilizando técnicas de *Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos*, analisamos a desintegração de prótons e nêutrons uniformemente acelerados também sob a ótica de *observadores co-acelerados*. Uma vez assumida a validade do *efeito Fulling-Davies-Unruh*, conseguimos reconciliar as descrições inercial e co-acelerada para as transições $p \rightarrow n$ e $n \rightarrow p$, embora as interpretações em termos de partículas elementares sejam drasticamente distintas. Como veremos, um ingrediente crucial para se obter tal consistência é a existência de partículas massivas livres que *violam* a equação de energia de Einstein, i.e., partículas livres com massa de repouso m e energia total $E < mc^2$, que é um aspecto geral da quantização em espaços curvos e referenciais acelerados. Abordamos, então,

a questão da *detecção* de tais partículas, utilizando, para isso, uma corrente escalar semi-clássica como detector. Por fim, consideramos, utilizando um modelo simplificado, a influência que o *campo gravitacional de estrelas de nêutrons* pode exercer sobre o processo de *neutronização* $p e^- \rightarrow n \nu_e$ que é um importante mecanismo de arrefecimento para temperaturas abaixo de 10^9 K.

Palavras chave: Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos, referenciais uniformemente acelerados (*Rindler wedge*), campos de *spin-1/2*, correntes semi-clássicas, desintegração de prótons e nêutrons, efeito Fulling-Davies-Unruh, partículas massivas de baixa energia, neutronização.

Abstract

In the present thesis, we model some *weak interaction* processes of Particle Physics by defining the concept of *semiclassical currents* and coupling them to fermionic quantum fields. In this context, we analyze the influence of *acceleration* on *proton and neutron decays* due to processes $p \rightarrow n e^+ \nu_e$ and $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, respectively, as described by inertial observers. Among other results, we obtain the *mean proper lifetime* of uniformly accelerated protons and neutrons. Although it can be neglected under Earth conditions, we show that the decay of accelerated protons is potentially important in some astrophysical situations. By using *Quantum-Field-Theory-in-Curved-Spacetimes* technics, we analyze also the decay of uniformly accelerated protons and neutrons according to *coaccelerated observers*. Assuming the validity of the *Fulling-Davies-Unruh effect*, we are able to reconcile inertial and coaccelerated descriptions of $p \rightarrow n$ and $n \rightarrow p$ transitions, even though their elementary particle interpretations are pretty distinct. As we shall see, a crucial ingredient to obtain such consistency is the existence of free massive particles which *violate* the Einstein energy equation, i.e., free particles with mass m and total energy $E < mc^2$, which is a general feature of quantization in curved spacetimes and accelerated frames. Thus, we analyze the *detectability* of such particles using a semiclassical scalar current as detector device. Finally, we consider, using a “toy model”, the influence of the *gravitational*

field of neutron stars on the *neutronization* process $p e^- \rightarrow n \nu_e$ which is an important cooling mechanism for temperatures below 10^9 K.

Keywords: Quantum Field Theory in Curved Spacetimes, uniformly accelerated frames (*Rindler wedge*), spin-1/2 fields, semiclassical currents, proton and neutron decay, Fulling-Davies-Unruh effect, low-energy massive particles, neutronization.

Índice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 12 |
| 2 | Desintegração de prótons acelerados e processos análogos | 18 |
| 2.1 | Correntes clássicas e semi-clássicas | 20 |
| 2.2 | Emissão de pares férmion–anti-férmion por correntes semi-clássicas aceleradas | 23 |
| 2.2.1 | Corrente uniformemente acelerada | 28 |
| 2.3 | Desintegração de prótons e nêutrons uniformemente acelerados | 36 |
| 2.4 | Emissão de pares neutrino–anti-neutrino por elétrons uniformemente acelerados | 43 |
| 2.5 | Discussão | 48 |
| 3 | Desintegração de prótons acelerados e efeito Fulling-Davies-Unruh | 50 |
| 3.1 | Resultados inerciais em $1 + 1$ dimensões | 52 |
| 3.2 | Desintegração de prótons e nêutrons no referencial co-acelerado | 55 |
| 3.3 | Discussão | 66 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Partículas massivas com energia total $E < mc^2$ | 68 |
| 4.1 | Análise quântica | 70 |
| 4.2 | Discussão | 76 |
| 5 | Reação de neutronização em estrelas de nêutrons | 78 |
| 5.1 | Um modelo simplificado | 79 |
| 5.2 | Discussão | 83 |
| 6 | Conclusão e perspectivas | 87 |
| A | Solução das integrais das Eqs. (2.2.42) e (2.2.43) | 89 |
| B | Solução da equação de Dirac no <i>Rindler wedge</i> bi-dimensional | 91 |
| | Referências | 95 |

Capítulo 1

Introdução

Formulada no início do século passado, a presente teoria da gravitação, denominada *Relatividade Geral* (RG), resiste como sendo a última teoria *clássica* ainda utilizada para descrever uma interação fundamental. Sua precisão experimental, no momento, ultrapassa a de qualquer outra teoria física conhecida. Apesar disso, considerações teóricas levam-nos a acreditar que a RG, como toda teoria clássica, é apenas uma teoria *efetiva* válida em escalas “macroscópicas”. Por “macroscópicas” em gravitação entende-se escalas de espaço e tempo muito maiores que $l_P := (G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 10^{-33}$ cm (*comprimento de Planck*) e $t_P := l_P/c \approx 10^{-43}$ s (*tempo de Planck*), respectivamente, onde G é a constante da gravitação universal de Newton, c é a velocidade da luz no vácuo e $\hbar := h/2\pi$, com h sendo a constante de Planck. Na escala de Planck, acredita-se que a descrição da Natureza fornecida pela RG seja inadequada, havendo a necessidade de uma teoria *quântica* da gravidade. As tentativas de se quantizar a mais cotidiana das interações fundamentais têm consumido as mais brilhantes mentes nos últimos quase oitenta anos, sendo

os resultados, na melhor das hipóteses, inconclusivos.

Como um passo intermediário na busca da teoria quântica da gravitação, a *Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos* (TQCEC), também conhecida como *gravitação semi-clássica*, pode ser considerada como a “fusão” mínima entre Teoria Quântica de Campos (TQC) e RG, onde os campos de matéria (ou de outras interações) são quantizados sobre a geometria clássica do espaço-tempo subjacente. Sua origem remonta o final da década de 60, quando Zel’dovich e, principalmente, Parker [1] deram início à extensão do formalismo usual de TQC a fim de viabilizar sua aplicação em espaços-tempos curvos, i.e., na presença de campos gravitacionais (clássicos). A motivação original era tentar explicar a matéria existente em nosso Universo como tendo sido criada pela própria expansão cosmológica.

Podemos classificar as contribuições que TQCEC proporcionou ao conhecimento científico atual em basicamente três categorias. A primeira delas reúne as *correções*, devido à presença de campos gravitacionais, a fenômenos calculados usualmente assumindo-se o espaço-tempo de Minkowski, procedimento padrão em todas as demais áreas da Física. Nesse espírito, cálculos de TQCEC mostram, por exemplo, que fontes escalares orbitando buracos negros estáticos têm sua potência de emissão de radiação suprimida em até 30% em relação ao mesmo cálculo efetuado assumindo-se a fonte em movimento circular no espaço-tempo plano [2]. Outra categoria que podemos discernir envolve a previsão de *novos efeitos*, i.e., fenômenos que seriam inexistentes dentro do contexto de TQC ou RG exclusivamente. Aqui se encaixa o mais conhecido efeito de gravitação semi-clássica já descoberto: o *efeito Hawking* [3], que prevê que buracos negros provenientes de colapso estelar devem

irradiar partículas de acordo com um espectro térmico (“evaporar”). A temperatura característica de emissão de um buraco negro com massa M é dada pela *temperatura de Hawking*, $T_H = \hbar c^3 / 8\pi k_B G M \approx 6 \times 10^{-8} (M_\odot / M)$ K, onde k_B é a constante de Boltzmann e $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg é a massa do Sol. Finalmente, podemos mencionar uma terceira classe de contribuições de TQCEC, não necessariamente disjunta das duas anteriores, onde encaixam-se os *esclarecimentos conceituais* que o desenvolvimento e a aplicação do formalismo de TQCEC proporcionaram. Provavelmente, o melhor exemplo inserido nesta categoria é a elucidação do caráter “relativo” do conceito de “partícula elementar”, explicitado de maneira inequívoca no chamado *efeito Fulling-Davies-Unruh* (FDU) [4]-[6]. Este efeito, que, num sentido vago, pode ser encarado como “análogo” ao efeito Hawking para o espaço-tempo de Minkowski [7], afirma que observadores com aceleração própria constante a no vácuo de Minkowski (estado caracterizado pela ausência de partículas segundo observadores inerciais) “sentem-se” imersos num banho térmico de partículas com temperatura característica $T_{FDU} = \hbar a / 2\pi c k_B \approx \frac{a}{2,5 \times 10^{22} \text{ cm/s}^2}$ K. Discriminadas estas três classes de contribuições, podemos, agora, contextualizar melhor a presente tese de doutorado, colocando-a em perspectiva frente à área de TQCEC.

No Cap. 2 analisamos em detalhe, dentro do contexto do Modelo Padrão, a influência de uma aceleração própria constante em alguns processos de Física de Partículas, a saber: *desintegração de prótons e nêutrons* e *emissão de neutrinos por elétrons* [8]. Provavelmente, o resultado mais relevante desse capítulo é a obtenção do *tempo próprio de vida média*, $\tau_p(a)$, de prótons com aceleração própria a . Uma justificativa para essa opinião talvez seja

a constatação, por nós, da resistência que alguns físicos de partículas, em comunicações particulares, impõem inicialmente à idéia de prótons acelerados desintegrarem-se. Devemos ressaltar que todos os cálculos realizados no Cap. 2 são de TQC usual, i.e., em referenciais inerciais no espaço de Minkowski. No entanto, a conexão entre esse capítulo e TQCEC ficará clara quando descrevermos a desintegração de prótons uniformemente acelerados do ponto de vista de observadores co-acelerados [9], o que será realizado no Cap. 3. Lembremos que $\tau_p(a)$ é um *escalar* e, portanto, tem que ser reobtido efetuando-se os cálculos no referencial co-acelerado com o próton. Mostraremos que, de fato, *tal compatibilidade é obtida uma vez assumida a existência do efeito FDU*. Por esse motivo, consideramos que os resultados apresentados nos Caps. 2 e 3 encaixam-se principalmente na categoria de “esclarecimentos conceituais” mencionada acima, uma vez que o formalismo de TQCEC aplicado ao referencial uniformemente acelerado no espaço de Minkowski permite esclarecer e até mesmo antecipar, de maneira bastante natural, a desintegração de prótons acelerados. Por outro lado, a originalidade dos resultados obtidos, motivados pelo formalismo de TQCEC, talvez justifique atribuir-lhes, num grau modesto, o *status* de “novo efeito”.

O Cap. 4 é dedicado à análise da *detecção de partículas massivas que violam a equação de energia de Einstein*, i.e., partículas livres, com massa de repouso m , possuindo energia total $E < mc^2$. Em TQC usual, a relação de dispersão $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ vincula o valor da energia E de uma partícula livre com massa m e tri-momento \mathbf{p} de maneira que $E \geq mc^2$. (Mesmo no caso de a partícula não possuir tri-momento com valor bem definido, o *valor esperado* de sua energia deve satisfazer $\langle E \rangle \geq mc^2$.) A validade de tal relação

de dispersão, entretanto, está intimamente relacionada com o fato muito particular de o espaço-tempo de Minkowski possuir isometrias de translação temporal e espaciais, todas comutando entre si. Espaços-tempos mais gerais evidentemente não apresentam tal característica, o que altera o intervalo de possíveis valores para a energia de partículas livres na geometria de fundo em questão. No espaço-tempo exterior a um buraco negro, por exemplo, uma partícula massiva pode possuir energia *arbitrariamente baixa*. (O mesmo ocorre no referencial uniformemente acelerado em Minkowski.) Isso suscita algumas questões interessantes: Uma vez que nosso espaço-tempo não é (rigorosamente) plano, *por que não observamos partículas livres com energia total menor que a energia de repouso (mc^2)? Qual seria a probabilidade de um observador nas imediações de um buraco negro detectar tais partículas?* Para responder essas perguntas (pelo menos em um nível *conceitual*), analisamos, no Cap. 4, questões análogas com relação a observadores estáticos no *referencial uniformemente acelerado* em Minkowski. Desse modo, é natural enquadrarmos a aplicação de TQCEC apresentada no capítulo em questão também na categoria “esclarecimentos conceituais” (embora possa igualmente ser inserida na classe de “correções” por abordar possíveis desvios à relação de dispersão válida em Minkowski).

Finalmente, no Cap. 5 exemplificamos a influência que a gravidade pode exercer sobre o processo de *neutronização* $p e^- \rightarrow n \nu_e$ que ocorre no interior de estrelas de nêutrons [10]. Tal processo é responsável, em alguns regimes, pelo resfriamento da estrela através da emissão de neutrinos (efeito Urca). Devido à dificuldade técnica em se quantizar, no espaço-tempo de Schwarzschild, os campos fermiônicos envolvidos no processo, novamente

faremos uso do referencial uniformemente acelerado em Minkowski para “simular” a gravidade da estrela. Apesar de utilizarmos esse *modelo simplificado* para lidar com o campo gravitacional, é bastante natural encararmos o Cap. 5 como uma aplicação de TQCEC pertencente à classe de “correções”.

O Cap. 6 conclui a tese mencionando as possíveis perspectivas de extensão dos trabalhos apresentados nos capítulos precedentes. Cálculos necessários ao andamento da tese são apresentados nos apêndices. Assumiremos certa familiaridade com os métodos empregados em TQCEC, recomendando as Refs. [11]-[14] para uma análise matemática e operacional abrangente. A notação tensorial adotada é baseada na da Ref. [11], onde índices latinos a, b, \dots, h apenas denotam o posto do tensor em questão e índices gregos assumem os valores $0, 1, \dots, n$ para discriminar suas componentes numa dada base. No restante da presente tese será adotado o *sistema natural de unidades*, caracterizado por tornar $\hbar = c = k_B = G = 1$.

Capítulo 2

Desintegração de prótons acelerados e processos análogos

É bem sabido que, de acordo com o Modelo Padrão, prótons são partículas *estáveis*, fato fortemente corroborado pelos dados experimentais disponíveis ($\tau_p > 1,6 \times 10^{25}$ anos) [15]. Entretanto, isso apenas é verdade para prótons *inerciais*. Em um grande número de fenômenos de Física de partículas, *acelerações* desempenham um papel fundamental (veja Refs. [16] e [17, 18] para uma discussão abrangente sobre a depolarização de elétrons em aceleradores de partículas e *bremsstrahlung*, respectivamente). Até onde sabemos, Ginzburg e Syrovatskii [19] foram os primeiros a chamar a atenção para a possibilidade de prótons não-inerciais desintegrarem-se, mas apenas recentemente Muller [20] obteve a primeira estimativa para a taxa de desintegração associada ao processo

$$(i) \quad p \rightarrow n e^+ \nu_e ,$$

modelando todas as partículas envolvidas como escalares. Aqui, analisaremos em mais detalhe o processo (i) e o relacionado

$$(ii) \quad n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e ,$$

tratando elétrons, neutrinos e as correspondentes anti-partículas como campos fermiônicos quantizados, enquanto que prótons e nêutrons serão descritos por uma *corrente semi-clássica*. Essa aproximação é adequada para descrever situações em que uma trajetória bem definida possa ser atribuída aos nucleons, como acontece em muitas situações de interesse. O processo (i) é provavelmente o mais interessante de ser analisado uma vez que o próton *deve* estar acelerado para que sua taxa de desintegração não seja nula.

Na Sec. 2.1, introduzimos os conceitos de *correntes clássica e semi-clássica*, com as quais permitiremos que os campos quânticos interajam. Na Sec. 2.2 calculamos a taxa e potência de emissão de pares férmion–anti-férmion a partir de uma corrente semi-clássica, particularizando os resultados para o caso de uma trajetória *uniformemente acelerada*. Na Sec. 2.3 aplicamos as expressões obtidas para analisar a desintegração de prótons e nêutrons uniformemente acelerados, comentando uma possível situação astrofísica onde a desintegração de prótons poderia ser de alguma importância. A emissão de pares neutrino–anti-neutrino por elétrons uniformemente acelerados, descrita pelo processo

$$(iii) \quad e^- \rightarrow e^- \nu_e \bar{\nu}_e ,$$

será abordada na Sec. 2.4. Nesse caso, uma corrente clássica é utilizada para descrever o elétron acelerado, enquanto que os neutrinos e anti-neutrinos são

tratados como campos fermiônicos quantizados. Finalmente, na Sec. 2.5 apresentaremos uma breve discussão acerca dos resultados obtidos no capítulo.

2.1 Correntes clássicas e semi-clássicas

O conceito de *corrente* está intimamente relacionado com a idéia de *carga*, que, por sua vez, pode ser encarada como fornecendo uma medida efetiva da “intensidade” da interação entre um dado campo e a matéria portadora daquela carga. Em particular, a ausência de interação entre um elemento de matéria e um determinado campo implica que a carga associada àquele elemento é nula.

Num contexto clássico, todas as informações referentes a uma carga localizada nas vizinhanças de um ponto $x \in \mathcal{M}$ do espaço-tempo ($n + 1$ -dimensional) podem ser codificadas num tensor *densidade de corrente* $j^{ab\dots}(x)$. O posto de tal tensor dependerá da natureza da interação à qual a referida carga está associada. Usualmente, assume-se que o posto de $j^{ab\dots}(x)$ é igual ao do campo $\hat{\phi}^{ab\dots}$ que intermedia a interação considerada, sendo a *ação de interação* entre corrente e campo dada pelo *acoplamento mínimo*

$$\hat{S}_I = \int d^{m+1}x \sqrt{-g} \left\{ j^{ab\dots}(x) \hat{\phi}_{ab\dots}(x) + \text{H.c.} \right\} , \quad (2.1.1)$$

onde $g := \det(g_{\mu\nu})$. Sendo assim, num “limite clássico” poderíamos descrever um elemento de matéria interagindo *fortemente* através de uma corrente escalar (uma vez que em “baixas” energias a interação forte pode ser tratada efetivamente como intermediada por píons, que são partículas escalares), interagindo *fracamente e eletromagneticamente* através de uma corrente veto-

rial e, finalmente, interagindo *gravitacionalmente* através de uma corrente tensorial de posto dois (*tensor energia-momento*).

No caso simples de uma partícula descrevendo uma linha-de-mundo $x^\mu(\tau)$ (em um sistema de coordenadas qualquer), onde $\tau \in \mathbb{R}$ é o tempo próprio da partícula, com carga total q assim como medida por um observador em repouso com a mesma, tem-se:

$$j^{\mu\nu\dots}(x) = q \frac{\delta^n[\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)]}{u^0(\tau)\sqrt{-g}} u^\mu(\tau)u^\nu(\tau)\dots, \quad (2.1.2)$$

onde $u^a(\tau)$ é a quadri-velocidade da partícula no ponto $x^\mu(\tau)$.

A *corrente clássica* definida em (2.1.2) é adequada para descrever partículas sem graus de liberdade internos (ou em situações em que esses graus de liberdade podem ser desconsiderados) e que possuem trajetórias bem definidas. Um exemplo bem conhecido pode ser dado por um elétron num acelerador de partículas como o LEP (Large Electron-Positron Collider), desde que não centremos a atenção no acoplamento de seu *spin* com o campo magnético de fundo. No entanto, estaremos interessados, entre outras coisas, em descrever processos de desintegração,

$$p_1 \rightarrow p_2 f_1 f_2 \dots,$$

onde a partícula inicial, p_1 , deixa de existir, produzindo outras partículas, p_2, f_1, f_2, \dots . No caso em que pelo menos uma das partículas provenientes da desintegração, digamos p_2 , também possui uma trajetória bem definida, podemos descrever tais processos fazendo apenas uma pequena modificação na corrente apresentada anteriormente: a carga real q é substituída pela

família de operadores (veja, e.g., Ref. [14])

$$\hat{q}(\tau) = e^{i\hat{H}_0\tau} \hat{q}_0 e^{-i\hat{H}_0\tau} , \quad (2.1.3)$$

onde $\hat{q}_0 : \mathcal{H}_{p_1 p_2} \rightarrow \mathcal{H}_{p_1 p_2}$ é um operador auto-adjunto atuando no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{p_1 p_2}$ gerado pelos auto-estados da Hamiltoniana *própria* \hat{H}_0 associada ao sistema (p_1, p_2) , ou seja, gerado pelos vetores $|p_1\rangle$ e $|p_2\rangle$ que satisfazem

$$\hat{H}_0 |p_j\rangle = M_j |p_j\rangle , \quad j = 1, 2 , \quad (2.1.4)$$

onde M_1 e M_2 são as *massas de repouso* das partículas p_1 e p_2 , respectivamente. Tal modificação pode ser reconhecida como o procedimento usual de *primeira quantização*, onde um observável clássico, q , é substituído por um operador auto-adjunto, \hat{q}_0 , evoluído pelo grupo a um parâmetro real de operadores unitários $\hat{U}(\tau) = e^{-i\hat{H}_0\tau}$. Como resultado, a corrente original é substituída pela corrente *semi-clássica*

$$\hat{j}^{\mu\nu\dots}(x) = \hat{q}(\tau) \frac{\delta^n[\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)]}{u^0(\tau)\sqrt{-g}} u^\mu(\tau) u^\nu(\tau) \dots . \quad (2.1.5)$$

Calculando os elementos de matriz $j_{(p_j \rightarrow p_k)}^\mu := \langle p_k | \hat{j}^\mu | p_j \rangle$, temos

$$j_{(p_j \rightarrow p_k)}^\mu = G_{\text{ef}} e^{i(M_k - M_j)\tau} \frac{\delta^n[\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)]}{u^0(\tau)\sqrt{-g}} u^\mu(\tau) u^\nu(\tau) \dots , \quad (2.1.6)$$

onde $G_{\text{ef}} := |\langle p_k | \hat{q}_0 | p_j \rangle|$ é a *constante de acoplamento efetiva* do processo. [Na verdade, a Eq. (2.1.6) se verifica a menos de uma fase irrelevante.] Notemos que podemos recuperar a corrente clássica (2.1.2) a partir da Eq. (2.1.6) fazendo $M_2 = M_1$ e $G_{\text{ef}} = q$.

Nas situações em que empregaremos correntes clássicas ou semi-clássicas para descrever desintegração de partículas, sempre assumiremos que a emissão das partículas f_m não altera significativamente a quadri-velocidade da partícula p_2 em relação à da partícula p_1 . Denominaremos tal hipótese, de agora em diante, de *condição de não-recuo*. Para um número “não muito grande” de partículas f_m produzidas em cada desintegração, tal condição verifica-se sempre que o momento $\tilde{\mathbf{k}}$ das partículas emitidas (no referencial inercial instantaneamente em repouso com a partícula p_1 no momento da desintegração) satisfaça $|\tilde{\mathbf{k}}| \ll M_1, M_2$. Sendo conservadores, imporemos $|\tilde{\mathbf{k}}| < \tilde{\omega} \ll M_1, M_2$ afim de que nossa aproximação por correntes seja confiável. Como ficará claro nas Secs. 2.3 e 2.4, a energia típica das partículas f_m emitidas, $\tilde{\omega}$, é da ordem de grandeza da aceleração própria da corrente, a . Portanto, nossa condição de não-recuo pode ser reescrita na forma $a \ll M_1, M_2$. Nossos resultados serão satisfatórios desde que essa condição seja respeitada.

2.2 Emissão de pares férmion–anti-férmion por correntes semi-clássicas aceleradas

Investigaremos, nesta seção, a emissão de férmions de spin $1/2$ por correntes clássicas e semi-clássicas, introduzidas na Sec. 2.1. Nossos resultados podem ser utilizados para investigar uma grande variedade de processos envolvendo partículas aceleradas desde que estas possuam trajetórias bem definidas, como de fato é verificado em muitas situações de interesse.

No caso em que a partícula é acelerada por um campo eletromagnético de fundo, tais processos podem ser analisados com uma abordagem completamente quântica. Como consequência, qualquer efeito de *reco* sobre a partícula acelerada seria automaticamente levado em consideração [21, 22]. Embora não seja fácil levar em conta efeitos de reco da corrente em nossa abordagem semi-clássica, as relações aqui obtidas, que *concordam* com o tratamento quântico completo no limite apropriado ($\chi := a/M_1 \ll 1$, veja, e.g., Sec. 2.4), são facilmente aplicáveis quando o processo envolve *desintegração* de partículas, descritas genericamente pelo processo

$$(iv) \quad p_1 \rightarrow p_2 f_1 \bar{f}_2 ,$$

e quando a própria *trajetória* da partícula em estudo (ao invés do processo dinâmico que a gera) é inferida através dos dados observacionais.

Iremos descrever os férmions emitidos por campos espinoriais

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{\sigma=\pm} \int d^3\mathbf{k} \left[\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma} \psi_{\mathbf{k}\sigma}^{(+\omega)}(x) + \hat{d}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \psi_{-\mathbf{k}-\sigma}^{(-\omega)}(x) \right] , \quad (2.2.1)$$

onde $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$ e $\hat{d}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ são operadores de aniquilação e criação de férmions e anti-férmions, respectivamente, com momento $\mathbf{k} = (k^x, k^y, k^z)$ e polarização σ . Energia ω , momento \mathbf{k} e massa m são relacionados pela relação de dispersão usual $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$. $\psi_{\mathbf{k}\sigma}^{(+\omega)}$ e $\psi_{\mathbf{k}\sigma}^{(-\omega)}$ são soluções de frequência positiva e negativa da equação de Dirac $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\mathbf{k}\sigma}^{(\pm\omega)} - m\psi_{\mathbf{k}\sigma}^{(\pm\omega)} = 0$ com relação ao campo de Killing inercial ∂_t . Usando as matrizes γ^μ na representação de

Dirac (veja, e.g., Ref. [18]), tem-se

$$\psi_{\mathbf{k}^+}^{(\pm\omega)}(x) = \frac{e^{i(\mp\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}}{\sqrt{16\pi^3\omega(\omega \pm m)}} \begin{pmatrix} m \pm \omega \\ 0 \\ k^z \\ k^x + ik^y \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

e

$$\psi_{\mathbf{k}^-}^{(\pm\omega)}(x) = \frac{e^{i(\mp\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}}{\sqrt{16\pi^3\omega(\omega \pm m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ m \pm \omega \\ k^x - ik^y \\ -k^z \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Os modos (2.2.2)-(2.2.3) estão normalizados com relação ao produto interno [14]

$$\langle \psi_{\mathbf{k}\sigma}^{(\pm\omega)}, \psi_{\mathbf{k}'\sigma'}^{(\pm\omega')} \rangle := \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \bar{\psi}_{\mathbf{k}\sigma}^{(\pm\omega)} \gamma^{\mu} \psi_{\mathbf{k}'\sigma'}^{(\pm\omega')} = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\pm\omega \pm\omega'} , \quad (2.2.4)$$

onde $\bar{\psi} := \psi^{\dagger} \gamma^0$ e $d\Sigma_{\mu} := n_{\mu} d\Sigma$, com n^{μ} sendo um campo vetorial unitário ortogonal à hiper-superfície Σ e apontando para o futuro, onde Σ é uma hiper-superfície tipo espaço arbitrária. Escolhemos $t = \text{constante}$ para a hiper-superfície Σ . Como consequência, as relações canônicas de anti-comutação para os campos e momentos conjugados levam às seguintes relações de anti-comutação para os operadores de aniquilação e criação:

$$\{\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{b}_{\mathbf{k}'\sigma'}^{\dagger}\} = \{\hat{d}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{d}_{\mathbf{k}'\sigma'}^{\dagger}\} = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\sigma\sigma'} \quad (2.2.5)$$

e

$$\{\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{b}_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = \{\hat{d}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{d}_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = \{\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{d}_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = \{\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{d}_{\mathbf{k}'\sigma'}^{\dagger}\} = 0 . \quad (2.2.6)$$

Agora, acoplemos *minimalmente* os campos espinoriais $\hat{\Psi}_1$ e $\hat{\Psi}_2$, associados aos férmions f_1 e \bar{f}_2 emitidos, respectivamente, com nossa corrente semi-clássica \hat{j}^μ através da ação efetiva de *interação fraca*

$$\hat{S}_I = \int d^4x \hat{j}_\mu \{ \hat{\Psi}_1 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \hat{\Psi}_2 + \hat{\Psi}_2 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \hat{\Psi}_1 \}, \quad (2.2.7)$$

onde c_V e c_A são constantes reais que serão fixadas mais adiante.

A amplitude de transição de vácuo para o processo (iv), em nível de árvore, é dada por

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\sigma_1 \sigma_2} = \langle p_2 | \otimes \langle f_{1\mathbf{k}_1 \sigma_1}, \bar{f}_{2\mathbf{k}_2 \sigma_2} | \hat{S}_I | 0 \rangle \otimes | p_1 \rangle. \quad (2.2.8)$$

Notemos que a contribuição do segundo termo dentro das chaves do lado direito da Eq. (2.2.7) se anula nesse caso.

Usando a decomposição do campo dada em (2.2.1) na Eq. (2.2.7), e atuando \hat{S}_I na Eq. (2.2.8), obtemos

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\sigma_1 \sigma_2} = \int d^4x j_\mu^{(p_1 \rightarrow p_2)} \bar{\psi}_{\mathbf{k}_1 \sigma_1}^{(+\omega_1)} \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_{-\mathbf{k}_2 - \sigma_2}^{(-\omega_2)}, \quad (2.2.9)$$

onde $j_\mu^{(p_i \rightarrow p_j)}$ e $\psi_{\mathbf{k}_j \sigma_j}^{(\pm \omega_j)}$ são obtidos das Eqs. (2.1.6) e (2.2.2)-(2.2.3), respectivamente.

Substituindo a amplitude (2.2.9) na expressão para a probabilidade diferencial de transição

$$\frac{d\mathcal{P}^{p_1 \rightarrow p_2}}{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2} = \sum_{\sigma_1 = \pm} \sum_{\sigma_2 = \pm} |\mathcal{A}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\sigma_1 \sigma_2}|^2, \quad (2.2.10)$$

obtemos

$$\frac{d\mathcal{P}^{p_1 \rightarrow p_2}}{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2} = \int d^4x \int d^4x' J_{\mu\nu}^{(p_1 \rightarrow p_2)}(x, x') G_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mu\nu}(x, x'), \quad (2.2.11)$$

onde

$$J_{\mu\nu}^{(p_1 \rightarrow p_2)}(x, x') := j_{\mu}^{(p_1 \rightarrow p_2)}(x) j_{\nu}^{(p_2 \rightarrow p_1)}(x'), \quad (2.2.12)$$

e

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mu\nu}(x, x') &:= \sum_{\sigma_1=\pm} \sum_{\sigma_2=\pm} \left\{ \bar{\psi}_{\mathbf{k}_1 \sigma_1}^{(+\omega_1)}(x) \gamma^{\mu} (c_V - c_A \gamma^5) \psi_{-\mathbf{k}_2 - \sigma_2}^{(-\omega_2)}(x) \right. \\ &\quad \left. \times \bar{\psi}_{-\mathbf{k}_2 - \sigma_2}^{(-\omega_2)}(x') \gamma^{\nu} (c_V - c_A \gamma^5) \psi_{\mathbf{k}_1 \sigma_1}^{(+\omega_1)}(x') \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Usando nossa corrente (2.1.6), a Eq. (2.2.12) pode ser reescrita na forma

$$J_{\mu\nu}^{(p_1 \rightarrow p_2)}(x, x') = G_{\text{ef}}^2 \frac{u_{\mu}(\tau) u_{\nu}(\tau')}{u^0(\tau) u^0(\tau')} e^{i\Delta M(\tau - \tau')} \delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)] \delta^3[\mathbf{x}' - \mathbf{x}(\tau')], \quad (2.2.14)$$

onde $\Delta M := M_2 - M_1$, enquanto que a Eq. (2.2.13) é escrita como

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mu\nu}(x, x') &= \text{tr} \left\{ \gamma^{\mu} (c_V - c_A \gamma^5) \sum_{\sigma_2=\pm} \left[\psi_{-\mathbf{k}_2 - \sigma_2}^{(-\omega_2)}(x) \bar{\psi}_{-\mathbf{k}_2 - \sigma_2}^{(-\omega_2)}(x') \right] \right. \\ &\quad \left. \times \gamma^{\nu} (c_V - c_A \gamma^5) \sum_{\sigma_1=\pm} \left[\psi_{\mathbf{k}_1 \sigma_1}^{(+\omega_1)}(x') \bar{\psi}_{\mathbf{k}_1 \sigma_1}^{(+\omega_1)}(x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

As somatórias que aparecem na Eq. (2.2.15) podem ser calculadas usando-se os modos (2.2.2)-(2.2.3):

$$\sum_{\sigma=\pm} \psi_{\pm\mathbf{k}\sigma}^{(\pm\omega)}(x) \bar{\psi}_{\pm\mathbf{k}\sigma}^{(\pm\omega)}(x') = \frac{(\not{k} \pm m)}{2(2\pi)^3 \omega} e^{\pm i k^{\lambda} (x - x')_{\lambda}}, \quad (2.2.16)$$

onde $k^\lambda = (\omega, \mathbf{k})$ é o quadri-momento do férmions emitido e $\not{k} := \gamma^\lambda k_\lambda$. Aplicando a expressão acima na Eq. (2.2.15) e usando as identidades dos traços das matrizes γ , obtemos

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mu\nu}(x, x') &= \frac{e^{i(k_1+k_2)^\lambda(x-x')_\lambda}}{4(2\pi)^6\omega_1\omega_2} \left\{ (c_V^2 + c_A^2) \text{tr}[\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu \not{k}_1] \right. \\
&\quad \left. + 2c_V c_A \text{tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu \not{k}_1] - m_1 m_2 (c_V^2 - c_A^2) \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] \right\} \\
&= \frac{e^{i(k_1+k_2)^\lambda(x-x')_\lambda}}{(2\pi)^6\omega_1\omega_2} \left\{ (c_V^2 + c_A^2) [2k_1^{(\mu} k_2^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} k_1^\alpha k_{2\alpha}] \right. \\
&\quad \left. + 2ic_V c_A \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} - m_1 m_2 (c_V^2 - c_A^2) \eta^{\mu\nu} \right\}, \quad (2.2.17)
\end{aligned}$$

onde $\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico (com $\epsilon^{0123} = -1$) e $k_1^{(\mu} k_2^{\nu)} := (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu)/2$. Substituindo as Eqs. (2.2.14) e (2.2.17) em (2.2.11), obtemos a probabilidade diferencial de transição

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}^{p_1 \rightarrow p_2}}{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2}{(2\pi)^6\omega_1\omega_2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' e^{i\Delta M(\tau-\tau')} e^{i(k_1+k_2)^\lambda[x(\tau)-x(\tau')]_\lambda} \\
&\quad \times \left\{ 2 \left[(c_V^2 + c_A^2) k_1^{(\mu} k_2^{\nu)} + ic_V c_A \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \right] u_\mu(\tau) u_\nu(\tau') \right. \\
&\quad \left. - \left[(c_V^2 - c_A^2) m_1 m_2 + (c_V^2 + c_A^2) k_1^\alpha k_{2\alpha} \right] u^\mu(\tau) u_\mu(\tau') \right\}, \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

onde usamos que $d\tau = dt/u^0$

2.2.1 Corrente uniformemente acelerada

A linha-de-mundo de uma partícula uniformemente acelerada, com aceleração própria a , pode ser escrita, nas coordenadas usuais de Minkowski $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$, como

$$x^\mu(\tau) = (a^{-1} \sinh a\tau, 0, 0, a^{-1} \cosh a\tau). \quad (2.2.19)$$

A quadri-velocidade corespondente é dada por

$$u^\mu(\tau) = (\cosh a\tau, 0, 0, \sinh a\tau). \quad (2.2.20)$$

Definamos, agora, novas variáveis

$$\xi := (\tau - \tau')/2 \quad \text{e} \quad s := (\tau + \tau')/2, \quad (2.2.21)$$

que nos permitem re-escrever a Eq. (2.2.18) como

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}^{p_1 \rightarrow p_2}}{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2} &= \frac{2G_{\text{ef}}^2}{(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp\{2i[\Delta M \xi \\ &+ (k_1 + k_2)^\lambda u_\lambda(s) \sinh(a\xi)/a]\} \times \left\{ 2(c_V^2 + c_A^2) k_1^\mu k_2^\nu \right. \\ &\times \left[u_\mu(s) u_\nu(s) \cosh^2(a\xi) - a^2 x_\mu(s) x_\nu(s) \sinh^2(a\xi) \right] \\ &- \cosh(2a\xi) \left[(c_V^2 - c_A^2) m_1 m_2 + (c_V^2 + c_A^2) (k_1^\alpha k_{2\alpha}) \right] \\ &\left. + 2iac_V c_A \sinh(2a\xi) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} x^\mu(s) u^\nu(s) k_1^\alpha k_2^\beta \right\}, \quad (2.2.22) \end{aligned}$$

onde usamos que $[x(\tau) - x(\tau')]^\mu = 2a^{-1} \sinh(a\xi) u^\mu(s)$, $u^\mu(\tau) = \cosh(a\xi) u^\mu(s) + a \sinh(a\xi) x^\mu(s)$, $u^\mu(\tau') = \cosh(a\xi) u^\mu(s) - a \sinh(a\xi) x^\mu(s)$, e $u^\mu(\tau) u_\mu(\tau') = \cosh(2a\xi)$.

Com o objetivo de desacoplar as integrais da Eq. (2.2.22), façamos a seguinte mudança de coordenadas no espaço dos momentos:

$$k^\mu \rightarrow \tilde{k}^\mu = (\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{k}}) := \left(k^\lambda u_\lambda(s), k^x, k^y, -ak^\lambda x_\lambda(s) \right). \quad (2.2.23)$$

Usando as Eqs. (2.2.19) e (2.2.20), podemos verificar explicitamente que a transformação (2.2.23) corresponde a um *boost* na direção z . De fato, \tilde{k}^μ são as componentes dos quadri-momentos dos férmions emitidos no referencial inercial instantaneamente em repouso com a corrente no instante próprio

s. Portanto, a probabilidade de transição por tempo próprio $\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2} := d\mathcal{P}^{p_1 \rightarrow p_2}/ds$ para o processo (iv) pode ser escrita, de (2.2.22), como

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2}}{d^3\tilde{\mathbf{k}}_1 d^3\tilde{\mathbf{k}}_2} &= \frac{2G_{\text{ef}}^2}{(2\pi)^6 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp\{2i[\Delta M \xi + a^{-1} \sinh(a\xi)(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)]\} \\ &\times \left\{ (c_V^2 + c_A^2)(\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + \tilde{k}_1^z \tilde{k}_2^z) - 2ic_V c_A \sinh(2a\xi)(\tilde{\mathbf{k}}_1 \times \tilde{\mathbf{k}}_2)^z \right. \\ &\left. + [(c_V^2 + c_A^2)(\tilde{\mathbf{k}}_1^\perp \cdot \tilde{\mathbf{k}}_2^\perp) - (c_V^2 - c_A^2)m_1 m_2] \cosh(2a\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

onde $\tilde{\mathbf{k}}_1 \times \tilde{\mathbf{k}}_2$ é o produto vetorial usual e $\tilde{\mathbf{k}}_1^\perp \cdot \tilde{\mathbf{k}}_2^\perp := \tilde{k}_1^x \tilde{k}_2^y - \tilde{k}_1^y \tilde{k}_2^x$. Com o objetivo de integrar a Eq. (2.2.24), é conveniente usar coordenadas esféricas no espaço dos momentos ($\tilde{k} \in +, \tilde{\theta} \in [0, \pi], \tilde{\phi} \in [0, 2\pi)$), onde $\tilde{k}^x = \tilde{k} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi}$, $\tilde{k}^y = \tilde{k} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi}$, $\tilde{k}^z = \tilde{k} \cos \tilde{\theta}$, e a seguinte mudança na variável de integração: $\xi \rightarrow \lambda := e^{a\xi}$. Usando-se a expressão (3.471.10) da Ref. [23], obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2}}{d^3\tilde{\mathbf{k}}_1 d^3\tilde{\mathbf{k}}_2} &= \frac{4G_{\text{ef}}^2 e^{-\pi\Delta M/a}}{(2\pi)^6 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 a} \left\{ (c_V^2 + c_A^2)(\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \cos \tilde{\theta}_1 \cos \tilde{\theta}_2) \right. \\ &\times K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \\ &+ 2c_V c_A \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \sin \tilde{\theta}_1 \sin \tilde{\theta}_2 \sin(\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2) \\ &\times \text{Im} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right\} + [(c_V^2 - c_A^2)m_1 m_2 \\ &- (c_V^2 + c_A^2)\tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \sin \tilde{\theta}_1 \sin \tilde{\theta}_2 \cos(\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2)] \\ &\left. \times \text{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

onde $\text{Re}\{z\}$ e $\text{Im}\{z\}$ são as partes real e imaginária do número complexo z , respectivamente, e $K_\nu(z)$ é a função de Bessel modificada.

Notemos que as emissões descorrelacionadas de f_1 e \bar{f}_2 são *esfericamente simétricas* no referencial inercial instantaneamente em repouso com a cor-

rente. Isso pode ser visto integrando-se uma das variáveis de momento na Eq. (2.2.25):

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2}}{d^3\tilde{\mathbf{k}}_j} &= \frac{8G_{\text{ef}}^2 e^{-\pi\Delta M/a}}{(2\pi)^5 \tilde{\omega}_j a} \int_0^\infty d\tilde{k}_l \frac{\tilde{k}_l^2}{\tilde{\omega}_l} \left\{ (c_V^2 + c_A^2) \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \right. \\ &\quad \times K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] + (c_V^2 - c_A^2) m_1 m_2 \\ &\quad \left. \times \text{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

e notando que a expressão obtida é independente de $(\tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_j)$, onde $\{j, l\} = \{1, 2\}$ são associados com as partículas f_1 e \bar{f}_2 . A distribuição em energia das partículas emitidas é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2}}{d\tilde{\omega}_j} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 e^{-\pi\Delta M/a}}{\pi^4 a} \sqrt{\tilde{\omega}_j^2 - m_j^2} \int_{m_1}^\infty d\tilde{\omega}_l \sqrt{\tilde{\omega}_l^2 - m_l^2} \\ &\quad \times \left\{ (c_V^2 + c_A^2) \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right. \\ &\quad \left. + (c_V^2 - c_A^2) m_1 m_2 \text{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

A taxa total de transição é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 e^{-\pi\Delta M/a}}{\pi^4 a} \int_{m_1}^\infty d\tilde{\omega}_1 \int_{m_2}^\infty d\tilde{\omega}_2 \sqrt{\tilde{\omega}_1^2 - m_1^2} \sqrt{\tilde{\omega}_2^2 - m_2^2} \\ &\quad \times \left\{ (c_V^2 + c_A^2) \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right. \\ &\quad \left. + (c_V^2 - c_A^2) m_1 m_2 \text{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

enquanto que a energia total emitida pode ser estimada por

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_j^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 e^{-\pi \Delta M/a}}{\pi^4 a} \int_{m_1}^{\infty} d\tilde{\omega}_1 \int_{m_2}^{\infty} d\tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_j \sqrt{\tilde{\omega}_1^2 - m_1^2} \sqrt{\tilde{\omega}_2^2 - m_2^2} \\ &\times \left\{ (c_V^2 + c_A^2) \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right. \\ &\left. + (c_V^2 - c_A^2) m_1 m_2 \operatorname{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right\} \right\} . \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Assumindo que f_1 ou \bar{f}_2 (mas não ambas) é uma partícula sem massa, podemos efetuar explicitamente as integrais que aparecem nas Eqs. (2.2.28) e (2.2.29). Para este fim, façamos a mudança de variáveis $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) \rightarrow (\rho, \zeta)$ dada por

$$\rho := \tilde{\omega}_l / \tilde{\omega}_i + 1 \quad \text{e} \quad \zeta := \tilde{\omega}_i^2 / m^2 , \quad (2.2.30)$$

onde rotulamos as partículas sem massa e massiva (com massa m) com os índices l e i , respectivamente. Aplicando (2.2.30) nas Eqs. (2.2.28) e (2.2.29) com $m_l = 0$, temos

$$\begin{aligned} \Gamma^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^6}{2\pi^4 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_1^{\infty} d\rho (\rho - 1)^2 \int_1^{\infty} d\zeta \zeta^{3/2} (\zeta - 1)^{1/2} \\ &\times K_{2i\Delta M/a} [2m\rho \zeta^{1/2}/a] , \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{massiva}}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^7}{2\pi^4 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_1^{\infty} d\rho (\rho - 1)^2 \int_1^{\infty} d\zeta \zeta^2 (\zeta - 1)^{1/2} \\ &\times K_{2i\Delta M/a} [2m\rho \zeta^{1/2}/a] \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{sem massa}}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^7}{2\pi^4 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_1^{\infty} d\rho (\rho - 1)^3 \int_1^{\infty} d\zeta \zeta^2 (\zeta - 1)^{1/2} \\ &\times K_{2i\Delta M/a} [2m\rho \zeta^{1/2}/a] . \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Usando-se a Eq. (6.592.4) da Ref. [23] para efetuar as integrais na variável ζ nas Eqs. (2.2.31)-(2.2.33), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^3 a^2}{8\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \int_1^\infty d\rho \left(\rho^{-1} - 2\rho^{-2} + \rho^{-3} \right) \\ &\times G_{1\ 3}^{3\ 0} \left(\frac{m^2 \rho^2}{a^2} \middle| \begin{array}{l} 0 \\ -3/2, 3/2 + i\Delta M/a, 3/2 - i\Delta M/a \end{array} \right), \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{massiva}}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^3 a^3}{8\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \int_1^\infty d\rho \left(\rho^{-2} - 2\rho^{-3} + \rho^{-4} \right) \\ &\times G_{1\ 3}^{3\ 0} \left(\frac{m^2 \rho^2}{a^2} \middle| \begin{array}{l} 0 \\ -3/2, 2 + i\Delta M/a, 2 - i\Delta M/a \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{sem massa}}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^3 a^3}{8\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \int_1^\infty d\rho \left(\rho^{-1} - 3\rho^{-2} + 3\rho^{-3} - \rho^{-4} \right) \\ &\times G_{1\ 3}^{3\ 0} \left(\frac{m^2 \rho^2}{a^2} \middle| \begin{array}{l} 0 \\ -3/2, 2 + i\Delta M/a, 2 - i\Delta M/a \end{array} \right), \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

onde $G_{p\ q}^{m\ n} \left(x \middle| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right)$ são as funções- G de Meijer (veja Ref. [23] para sua definição e propriedades). Definindo $v := \rho^2$ nas Eqs. (2.2.34)-(2.2.36) e usando a Eq. (7.811.3) da Ref. [23], podemos integrar estas expressões. As somas de funções- G de Meijer que resultam das integrações podem ser simplificadas

utilizando-se suas propriedades. Ao final, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^3 a^2}{32\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \\ &\times G_{24}^{40} \left(\frac{m^2}{a^2} \left| \begin{array}{l} 3/2, \quad 2 \\ 1/2, \quad -3/2, \quad 3/2 + i\Delta M/a, \quad 3/2 - i\Delta M/a \end{array} \right. \right), \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{massiva}}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^3 a^3}{32\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \\ &\times G_{35}^{50} \left(\frac{m^2}{a^2} \left| \begin{array}{l} 0, \quad 2, \quad 5/2 \\ 1/2, \quad 1, \quad -3/2, \quad 2 + i\Delta M/a, \quad 2 - i\Delta M/a \end{array} \right. \right) \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{sem massa}}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{3 G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) m^3 a^3}{64\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \\ &\times G_{24}^{40} \left(\frac{m^2}{a^2} \left| \begin{array}{l} 2, \quad 5/2 \\ 1/2, \quad -3/2, \quad 2 + i\Delta M/a, \quad 2 - i\Delta M/a \end{array} \right. \right). \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

No caso em que *ambas* f_1 e \bar{f}_2 são partículas sem massa, é mais conveniente obter a taxa total de transição primeiramente integrando-se nas variáveis de momento $\tilde{\mathbf{k}}_1$ e $\tilde{\mathbf{k}}_2$. Então, primeiramente escrevemos [veja Eq. (2.2.24)]

$$\begin{aligned} \Gamma^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2)}{2\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{2i\Delta M\xi} \\ &\times \left\{ \int_0^\infty d\tilde{\omega} \tilde{\omega}^2 \exp \left[\frac{2i\tilde{\omega}}{a} (\sinh a\xi + i\epsilon) \right] \right\}^2, \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

onde $\epsilon > 0$ é um regulador para garantir a convergência da integral em frequência acima. A energia total emitida correspondente é

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2)}{\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{2i\Delta M \xi} \\ &\times \int_0^\infty d\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_1^3 \exp \left[\frac{2i\tilde{\omega}_1}{a} (\sinh a\xi + i\epsilon) \right] \\ &\times \int_0^\infty d\tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_2^2 \exp \left[\frac{2i\tilde{\omega}_2}{a} (\sinh a\xi + i\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

Efetuada as integrais em frequência e definindo uma nova variável $w := e^{a\xi}$, as Eqs. (2.2.40)-(2.2.41) tornam-se

$$\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2} = - \frac{2G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) a^5}{\pi^4} \int_0^\infty dw \frac{w^{5+2i\Delta M/a}}{(w^2 - 1 + 2i\epsilon w)^6} \quad (2.2.42)$$

e

$$\mathcal{W}^{p_1 \rightarrow p_2} = - \frac{12iG_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2) a^6}{\pi^4} \int_0^\infty dw \frac{w^{6+2i\Delta M/a}}{(w^2 - 1 + 2i\epsilon w)^7}. \quad (2.2.43)$$

Resolvendo as integrais que aparecem nas Eqs. (2.2.42) e (2.2.43) (veja Apêndice A), obtemos

$$\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2} = \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2)}{60 \pi^3} \left(\frac{4 a^4 \Delta M + 5 a^2 \Delta M^3 + \Delta M^5}{e^{2\pi\Delta M/a} - 1} \right) \quad (2.2.44)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{\text{ef}}^2 (c_V^2 + c_A^2)}{3840 \pi^3} \\ &\times \left(\frac{225 a^6 + 1036 a^4 \Delta M^2 + 560 a^2 \Delta M^4 + 64 \Delta M^6}{e^{2\pi\Delta M/a} + 1} \right). \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

Nas seções seguintes aplicaremos estas fórmulas para analisar a desintegração de prótons e nêutrons uniformemente acelerados e a emissão de neutrinos e anti-neutrinos por elétrons uniformemente acelerados.

2.3 Desintegração de prótons e nêutrons uniformemente acelerados

Como uma aplicação particular de modelar partículas aceleradas por correntes semi-clássicas, efetuaremos, nesta seção, uma análise abrangente da *desintegração de prótons* uniformemente acelerados, assim como observadores inerciais descreveriam o processo. Mostraremos que, sob certas condições astrofísicas, prótons com “altas” energias em campos magnéticos intensos devem desintegrar-se rapidamente. A observação de nêutrons não-inerciais é menos trivial. Apesar disso, o cálculo da taxa de *desintegração de nêutrons* acelerados pode ser de alguma relevância em situações onde eles estejam sob a influência de campos gravitacionais “relativamente” fortes e, portanto, também será realizado.

Consideremos os processos

$$p \rightarrow n e^+ \nu_e \quad (2.3.1)$$

e

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \quad (2.3.2)$$

para prótons e nêutrons uniformemente acelerados. Assumiremos como nula a massa dos neutrinos (mesmo que esse não seja o caso, ela é desprezível em

comparação com as escalas de energia envolvidas no processo). A constante de acoplamento efetiva $G_{\text{eff}} = G_{pn}$ para os processos (2.3.1)-(2.3.2) é obtida impondo-se que o tempo próprio de meia vida de nêutrons inerciais seja de 887 s [15], i.e.,

$$\Gamma_{in}^{n \rightarrow p} := \Gamma^{n \rightarrow p}(a \rightarrow 0) = 1/887 \text{ s}^{-1}. \quad (2.3.3)$$

Por questões de conveniência, tomamos o limite $a \rightarrow 0$ na Eq. (2.2.24) ao invés de fazê-lo na Eq. (2.2.37), obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{in}^{n \rightarrow p}}{d^3\tilde{\mathbf{k}}_e d^3\tilde{\mathbf{k}}_\nu} &= \frac{4G_{pn}^2}{(2\pi)^6 \tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{2i\xi(\Delta M + \tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_\nu)} (\tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_\nu + \tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\mathbf{k}}_\nu) \\ &= \frac{2G_{pn}^2}{(2\pi)^5} \left(1 + \frac{\tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\mathbf{k}}_\nu}{\tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_\nu} \right) \delta(\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_\nu - \Delta M), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

onde usamos que $c_V = c_A = 1$ [24] uma vez que neutrinos de “mão direita” não são observados. Depois de integrar a Eq. (2.3.4) nas coordenadas angulares e em $\tilde{\omega}_e$, encontramos:

$$\Gamma_{in}^{n \rightarrow p} = \frac{G_{pn}^2}{\pi^3} \int_0^{\Delta M - m_e} d\tilde{\omega}_\nu \tilde{\omega}_\nu^2 (\Delta M - \tilde{\omega}_\nu) \sqrt{(\Delta M - \tilde{\omega}_\nu)^2 - m_e^2}. \quad (2.3.5)$$

Efetuando-se numericamente a integral da Eq. (2.3.5), com $m_e = 0,511$ MeV e $\Delta M = (m_n - m_p) = 1,29$ MeV, temos que $\Gamma_{in}^{n \rightarrow p} = 1,81 \times 10^{-3} G_{pn}^2 \text{ MeV}^5$. Portanto, impondo a condição (2.3.3), obtemos $G_{pn} = 1,74 G_F$, onde $G_F = 1,166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ é a constante de acoplamento fraco de Fermi [15]. Agora, estamos aptos a usar a Eq. (2.2.37) para traçar os tempos próprios de vida média de prótons e nêutrons uniformemente acelerados $\tau_p(a) = (\Gamma^{p \rightarrow n})^{-1}$ e $\tau_n(a) = (\Gamma^{n \rightarrow p})^{-1}$, respectivamente, o que é feito na Fig. 2.1. Notemos que

$$\tau_p(a) = e^{2\pi|\Delta M|/a} \tau_n(a). \quad (2.3.6)$$

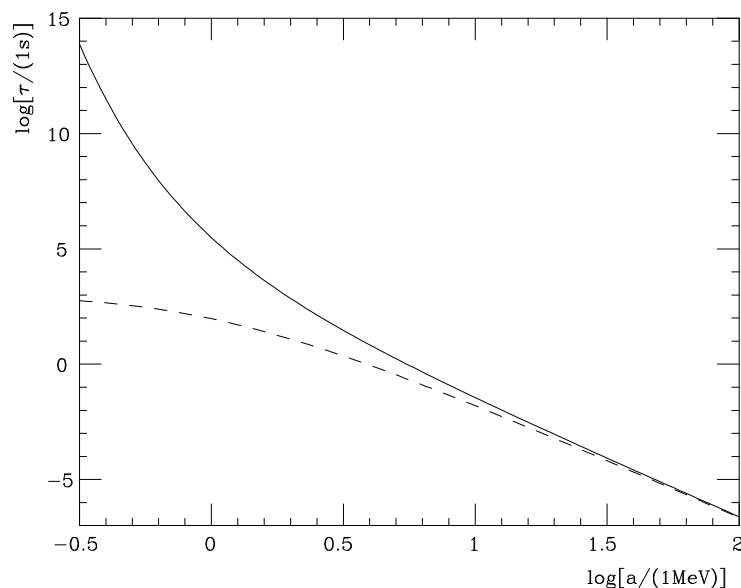


Figure 2.1: Os tempos próprios de meia vida de prótons, τ_p (linha cheia), e nêutrons, τ_n (linha tracejada), são traçados como funções da aceleração própria a dos nucleons. Notemos que $\tau_p \rightarrow +\infty$ e $\tau_n \rightarrow 887$ s quando $a \rightarrow 0$. Para acelerações $a \gg a_c := 2\pi|\Delta M| \approx 8$ MeV tem-se que $\tau_p \approx \tau_n$.

Consideramos apenas acelerações próprias $a \ll m_p = 938$ MeV para que nossa condição de não-recuo seja respeitada (veja Sec. 2.1). Chamamos a atenção para o fato de que para acelerações $a \gg a_c := 2\pi|\Delta M| \approx 8$ MeV tem-se que $\tau_p(a) \approx \tau_n(a)$. Esta particularidade será explicada no próximo capítulo, quando revisitarmos o assunto do ponto de vista de observadores co-acelerados com os nucleons.

Para estimar quanta energia é emitida na forma de cada lépton, usemos

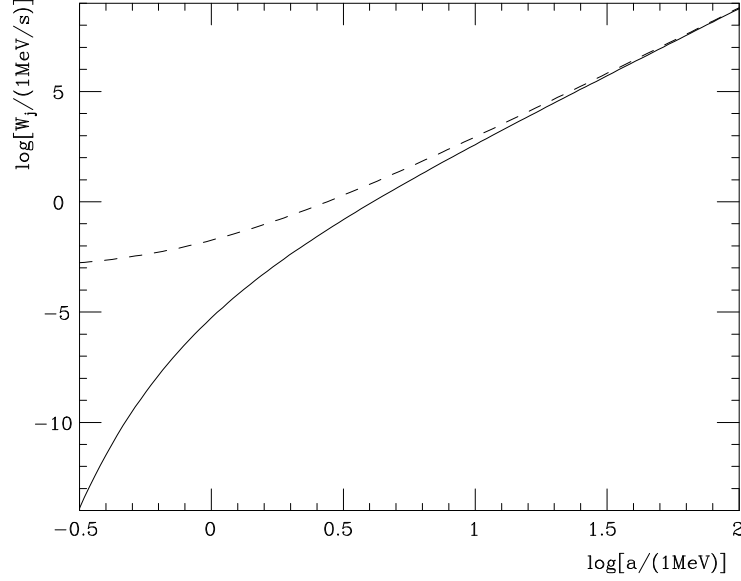


Figure 2.2: $\mathcal{W}_j^{p \rightarrow n}$ e $\mathcal{W}_j^{n \rightarrow p}$ são traçados em linhas cheia e tracejada, respectivamente, para $j = e, \nu$, como funções da aceleração própria do nucleon. Os resultados numéricos sugerem que $\mathcal{W}_e^{p \rightarrow n} = \mathcal{W}_\nu^{p \rightarrow n}$ e $\mathcal{W}_e^{n \rightarrow p} = \mathcal{W}_\nu^{n \rightarrow p}$.

as Eqs. (2.2.38) e (2.2.39) para obter $\mathcal{W}_j^{p \rightarrow n}$ e $\mathcal{W}_j^{n \rightarrow p} = e^{2\pi|\Delta M|/a} \mathcal{W}_j^{p \rightarrow n}$ para $j = e, \nu$. Embora $\mathcal{W}_e^{p \rightarrow n}$ e $\mathcal{W}_\nu^{p \rightarrow n}$ (assim como $\mathcal{W}_e^{n \rightarrow p}$ e $\mathcal{W}_\nu^{n \rightarrow p}$) não sejam obviamente idênticas, elas parecem ser de acordo com a Fig. 2.2.

Com o objetivo de investigar a distribuição em energia dos léptons emitidos, definamos a distribuição normalizada

$$\mathcal{N}_j^{p_1 \rightarrow p_2} := \frac{1}{\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2}} \frac{d\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2}}{d\tilde{\omega}_j}, \quad (2.3.7)$$

com $j = e, \nu$, onde $d\Gamma^{p_1 \rightarrow p_2}/d\tilde{\omega}_j$ é definido na Eq. (2.2.27). Notemos que

$\mathcal{N}_j^{p \rightarrow n} = \mathcal{N}_j^{n \rightarrow p}$. Na Fig. 2.3 traçamos as distribuições $\mathcal{N}_j^{p \rightarrow n}$ para dois valores de aceleração própria do nucleon: $a = 1,0$ MeV e $2,0$ MeV. Vemos que a energia típica dos léptons emitidos (no referencial inercial instantaneamente em repouso com o nucleon) á dada por $\tilde{\omega} \approx a$, o que justifica nossa condição de não-recuo.

Com o objetivo de estimar grosseiramente o quão grande é o tempo próprio de vida média de prótons em condições como as do LHC/CERN, usaremos diretamente a Eq. (2.3.6) com $a = a_{\text{LHC}} \approx 10^{-8}$ MeV, obtendo $\tau_p(a_{\text{LHC}}) \approx 10^{3 \times 10^8}$ anos(!), onde usamos que $\tau_n(a \ll m_e, |\Delta M|) \approx 10^3$ s. Embora a Eq. (2.3.6) tenha sido derivada assumindo-se movimento uniformemente acelerado, isso não deve ser visto como um grande problema: devido ao enorme valor obtido para o tempo próprio de vida média do próton, nossa estimativa acaba sendo insensível a uma imprecisão de centenas de milhares de ordens de magnitude.

Situações astrofísicas parecem fornecer condições muito mais adequadas para a observação da desintegração de prótons acelerados. Embora nossa taxa de desintegração (2.2.37) tenha sido obtida considerando-se movimento uniformemente acelerado, vamos assumir que ela é aproximadamente válida para prótons em movimento circular com aceleração própria $a \gg \Delta M, 1/R$, onde R é o raio de curvatura local de sua trajetória. De fato, podemos testar tal hipótese, por exemplo, para sistemas escalares de dois níveis, cujas taxas de excitação (em nível de árvore) são dadas por [25]:

$$\Gamma_{\text{lin}} = \frac{c_0^2}{2\pi} \frac{\Delta E}{e^{2\pi\Delta E/a} - 1} \quad (2.3.8)$$

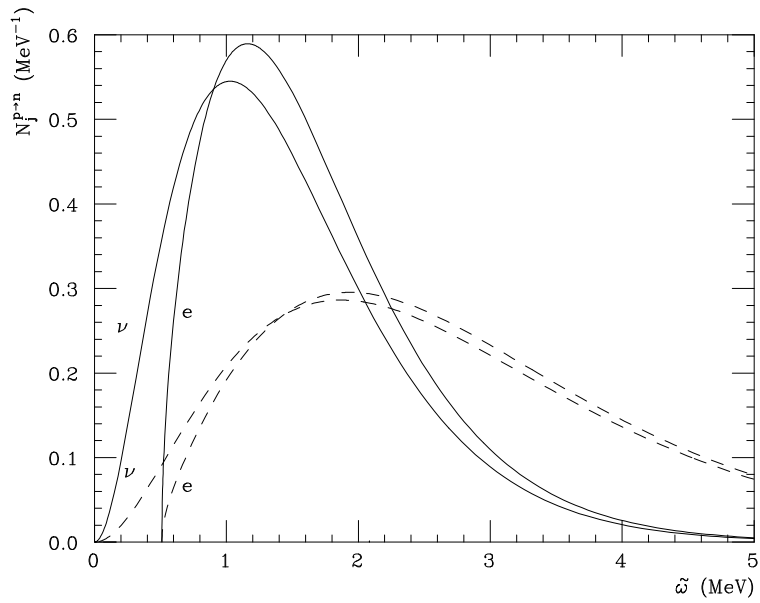


Figure 2.3: As distribuições em energia, normalizadas, de léptons emitidos, $\mathcal{N}_e^{p \rightarrow n}$ e $\mathcal{N}_\nu^{p \rightarrow n}$, são traçadas para dois valores da aceleração própria do próton: $a = 1,0$ MeV (linha cheia) e $2,0$ MeV (linha tracejada). Notemos que a energia típica das partículas emitidas (no referencial inercial instantaneamente em repouso com o próton) é dada por $\tilde{\omega} \approx a$.

e

$$\Gamma_{\text{cir}} = \frac{c_0^2 a e^{-\sqrt{12}\Delta E/a}}{2\pi \cdot 2\sqrt{12}} \quad (2.3.9)$$

para fontes relativísticas em movimento uniformemente acelerado e circular, respectivamente, onde c_0 é uma “pequena” constante de acoplamento e ΔE é a diferença de energia entre os dois níveis do sistema escalar. Notemos que no regime $a \gg \Delta E$, as Eqs. (2.3.8) e (2.3.9) nos fornecem que $\Gamma_{\text{lin}}/\Gamma_{\text{cir}} \approx 1, 103$.

Com o objetivo de ilustrar uma situação astrofísica onde o processo (2.3.1) poderia ser de alguma importância, consideremos prótons de raios cósmicos com energia $E_p = \gamma m_p \approx 1.6 \times 10^{14}$ eV sob a influência de um campo magnético $B \approx 10^{14}$ Gauss de um pulsar típico. Prótons sob estas condições têm aceleração própria $a_B = \gamma e B / m_p \approx 110$ MeV $\gg |\Delta M|$. Para propósitos práticos, a intensidade da aceleração própria dos prótons será assumida constante no decorrer do processo. Para os valores de E_p e B acima, o próton é confinado numa região cilíndrica com raio típico $R \approx \gamma^2 / a_B \approx 5 \cdot 10^{-3}$ cm $\ll l_B$, onde l_B é o tamanho típico da região de campo magnético. De acordo com a Eq. (2.2.37), obtemos que $\tau_p \approx 10^{-7}$ s. Em conseqüência, prótons teriam um tempo de “laboratório” de vida média de $t_p = \gamma \tau_p \approx 10^{-1}$ s. Para $l_B \approx 10^7$ cm, obtemos que até $|\Delta N_p / N_p| \approx (1 - e^{-l_B/t_p}) \approx l_B/t_p \approx 1\%$ dos prótons incidentes desintegrariam-se através de (2.3.1). Chamamos a atenção para o fato de que não levamos em consideração a influência do campo magnético no pósitron emitido no processo. Claramente, uma estimativa mais precisa deve levar em conta este efeito, assim como outros, como, por exemplo, a não uniformidade do campo magnético e perdas de energia pelo próton devido à radiação síncrotron de fótons. Este último efeito, em particular, pode

não ser um problema uma vez que o processo de aceleração de partículas por campos magnéticos de pulsares pode fornecer energia para a irradiação eletromagnética. Uma análise mais detalhada de tais processos astrofísicos claramente é bem-vinda, mas isso ultrapassaria o escopo de nossa presente análise teórica.

2.4 Emissão de pares neutrino–anti-neutrino por elétrons uniformemente acelerados

Nesta seção iremos considerar a emissão de neutrinos e anti-neutrinos por elétrons acelerados:

$$e^- \rightarrow e^- \nu_e \bar{\nu}_e . \quad (2.4.1)$$

A descrição da criação de pares neutrinos–anti-neutrinos por elétrons em um campo eletromagnético externo, no contexto do Modelo Padrão, está contida na Sec. 6.1 da Ref. [22]. Aqui, analisaremos este processo para elétrons uniformemente acelerados usando fórmulas obtidas na Sec. 2.2.

Das Eqs. (2.2.44) e (2.2.45), fazendo-se $\Delta M = 0$, obtemos, para a taxa de emissão de pares $\nu_e \bar{\nu}_e$ por elétrons uniformemente acelerados

$$\Gamma_{\nu\bar{\nu}} = \frac{G_{e\nu}^2 a^5}{15\pi^4} , \quad (2.4.2)$$

e para a potência *total* irradiada

$$\mathcal{W}_{\nu\bar{\nu}} = \frac{15 G_{e\nu}^2 a^6}{256\pi^3} , \quad (2.4.3)$$

onde usamos que $c_V = c_A = 1$ e $G_{e\nu}$ é a constante de acoplamento efetiva correspondente.

Com o objetivo de fixar o valor de $G_{e\nu}$, assumiremos que a Eq. (2.4.3) descreve a potência emitida instantaneamente por um elétron com linha-de-mundo *arbitrária* no ponto onde ele possui aceleração própria a . Isso de fato é verificado para emissão de fótons (veja a fórmula de Larmor na Ref. [17]) e de partículas escalares por fontes aceleradas [2]. [Enfatizamos que essa equivalência não é verificada exatamente (embora o seja aproximadamente) para a Eq. (2.4.2), que em geral depende da trajetória da fonte.] Então, iremos impor que a Eq. (2.4.3) fornece a potência irradiada em pares $\nu_e\bar{\nu}_e$ por elétrons relativísticos em movimento circular em um campo magnético B , desde que $a = \gamma eB/m_e \ll m_e$ (condição de não-recuo). Aqui, γ é o fator relativístico de Lorentz usual para o elétron e e é sua carga elétrica. A taxa diferencial de emissão de pares $\nu_e\bar{\nu}_e$ num campo magnético de fundo foi calculada em detalhes [22] (veja Ref. [26] para a forma utilizada abaixo):

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\nu\bar{\nu}}^{LP}}{ds} &= \frac{G_F^2 m_e^4}{16(2\pi)^3} \frac{m_e}{\gamma} \frac{\chi^5 s^{3+1/2}}{(1 + \chi s^{3/2})^4} \\ &\times \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \frac{\chi^2 s^3}{(1 + \chi s^{3/2})} \int_s^\infty \left[2 + \frac{1}{3}(2s + y)(y - s)^2 \right] \text{Ai}(y) dy \right. \\ &+ (C_V^2 + C_A^2) \left[\int_s^\infty \left[6 + (y - s)(s^2 + (s - y)^2) \right] \text{Ai}(y) dy \right. \\ &\left. \left. - s\text{Ai}(s) \right] + 8sC_A^2 \left[\frac{3}{4} \left(\int_s^\infty (s - y)^2 \text{Ai}(y) dy \right) + \text{Ai}(s) \right] \right\}, \quad (2.4.4) \end{aligned}$$

onde $\chi := a/m_e$, $\text{Ai}(z)$ é a função de Airy e $s \in [0, \gamma/\chi]$ é definido tal que

$$\omega_\nu + \omega_{\bar{\nu}} \equiv \frac{m_e \gamma \chi s^{3/2}}{(1 + \chi s^{3/2})}. \quad (2.4.5)$$

Os parâmetros C_V and C_A fornecem as contribuições vetorial e axial para a corrente elétrica, respectivamente. Usando as Eqs. (2.4.4) e (2.4.5), temos,

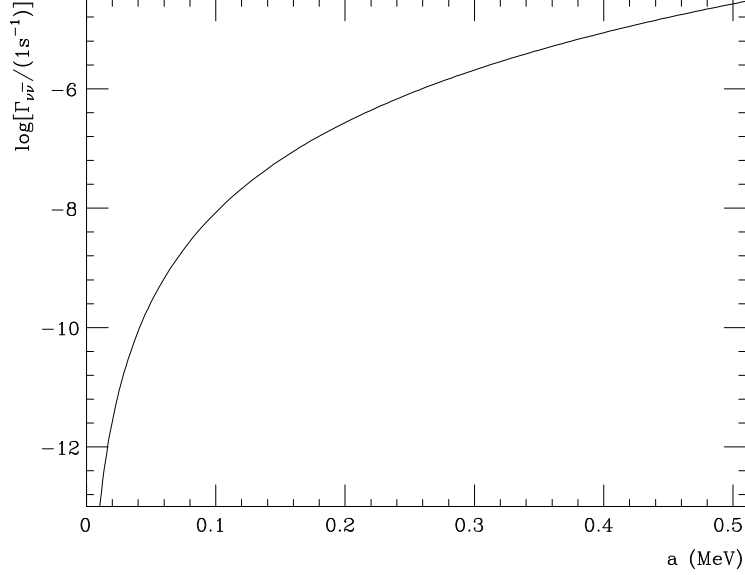


Figure 2.4: A probabilidade de emissão de pares $\nu_e\bar{\nu}_e$, por tempo próprio, é traçada para $a \leq m_e$.

no regime $\chi \ll 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\nu\bar{\nu}}^{LP} &= \int_0^{\gamma/x} ds (\omega_\nu + \omega_{\bar{\nu}}) \frac{d\Gamma_{\nu\bar{\nu}}^{LP}}{ds} \\ &\approx \frac{5(2C_V^2 + 23C_A^2)}{108\pi^3} G_F^2 m_e^6 \chi^6. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Fazendo $C_V^2 = 0,93$ e $C_A^2 = 0,25$ [27], temos $\mathcal{W}_{\nu\bar{\nu}}^{LP} \approx 1,14 \times 10^{-2} G_F^2 a^6$. Comparando esta expressão com nossa Eq. (2.4.3), obtemos $G_{e\nu} \approx 2,45 G_F$. Nas Figs. 2.4 e 2.5 traçamos as Eqs. (2.4.2) e (2.4.3), respectivamente, para elétrons uniformemente acelerados com $a \leq m_e$.

A distribuição em energia, normalizada, de pares neutrino–anti-neutrino

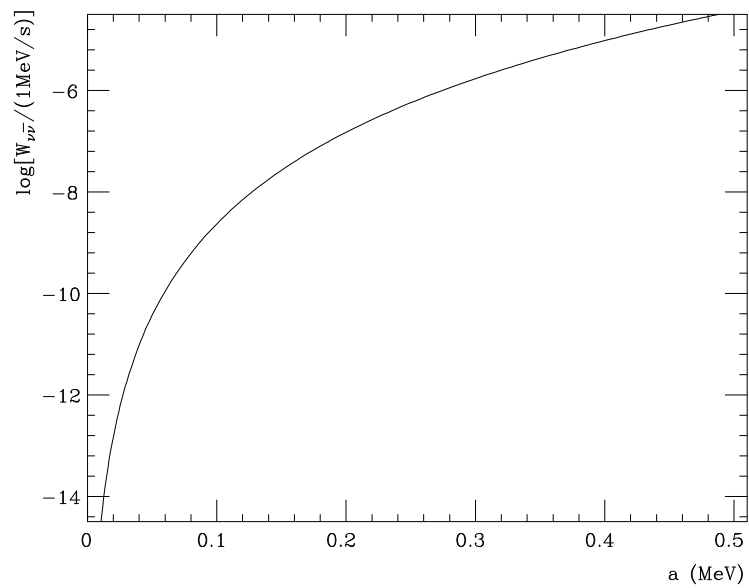


Figure 2.5: A potência total irradiada em forma de neutrinos e anti-neutrinos é traçada para $a \leq m_e$.

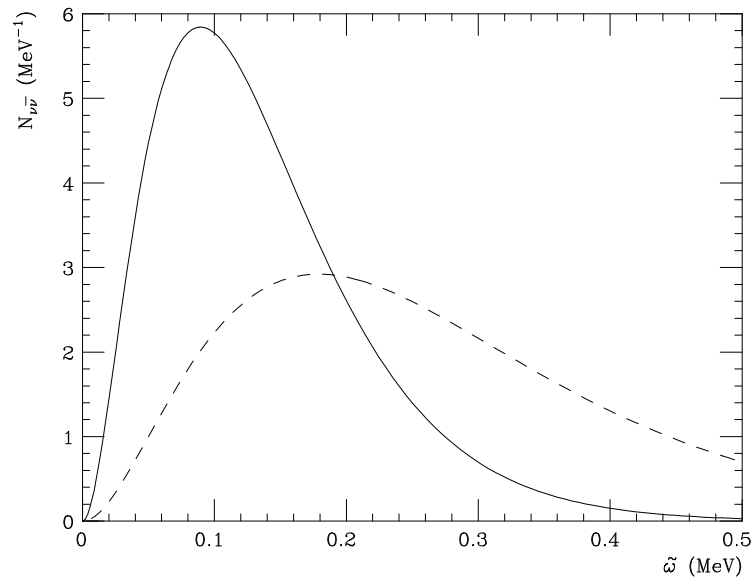


Figure 2.6: A distribuição em energia, normalizada, de pares neutrino–anti-neutrino emitidos é traçada para dois valores da aceleração própria do elétron: $a = 0,1$ MeV (linha cheia) e $0,2$ MeV (linha tracejada). Notemos que a energia típica das partículas emitidas (no referencial inercial instantaneamente em repouso com o próton) é dada por $\tilde{\omega} \approx a$.

emitidos,

$$\mathcal{N}_{\nu\bar{\nu}} := \frac{1}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}} \frac{d\Gamma_{\nu\bar{\nu}}}{d\tilde{\omega}_\nu}, \quad (2.4.7)$$

é traçada na Fig. 2.6 para elétrons com aceleração própria $a = 0,1$ MeV e $0,2$ MeV, onde [veja Eq. (2.2.27)]

$$\frac{d\Gamma_{\nu\bar{\nu}}}{d\tilde{\omega}_\nu} = \frac{2G_{e\nu}^2}{\pi^4 a} \tilde{\omega}_\nu^2 \int_0^\infty d\tilde{\omega}_{\bar{\nu}} \tilde{\omega}_{\bar{\nu}}^2 K_0 [2(\tilde{\omega}_\nu + \tilde{\omega}_{\bar{\nu}})/a]. \quad (2.4.8)$$

(Neutrinos e anti-neutrinos possuem distribuições em energia idênticas.) Notemos, novamente, que a define a energia típica das partículas emitidas.

2.5 Discussão

Investigamos, no presente capítulo, a emissão de férmions de spin-1/2 por correntes semi-clássicas. Como uma aplicação particular de modelar partículas aceleradas por correntes semi-clássicas, analisamos a desintegração de prótons uniformemente acelerados. Mostramos que, embora não seja esperado que prótons em aceleradores de partículas disponíveis desintegram-se, prótons com altas energias em algumas situações astrofísicas possuem um tempo de vida média consideravelmente pequeno. Além disso, analisamos a modificação no decaimento β usual, processo (2.3.2), para nêutrons uniformemente acelerados. Isso pode ser de alguma relevância quando nêutrons estão sob a influência de campos gravitacionais intensos. Embora um cálculo completo levando em conta a curvatura do espaço-tempo seja desejável para tratar essa situação, nossos cálculos devem ser uma boa aproximação quando o campo gravitacional é “moderado” [2]. Neste caso, nêutrons podem ser tratados como estando acelerados no espaço-tempo de Minkowski. Restringindo

nossa corrente semi-clássica para se comportar classicamente, fomos capazes de usar o presente formalismo para investigar a emissão de pares neutrino-anti-neutrino por elétrons uniformemente acelerados e comparar nossos resultados com os obtidos na literatura quantizando-se o campo do elétron na presença de um campo magnético de fundo. Nosso formalismo, resumido na Eq. (2.2.18), permite a análise de correntes com trajetórias mais gerais. Além disso, dependendo do grau de precisão desejado, as fórmulas derivadas para o movimento uniformemente acelerado, Eqs. (2.2.37-39), (2.2.44-45), podem ser diretamente aplicadas na situação de interesse.

Capítulo 3

Desintegração de prótons acelerados e efeito

Fulling-Davies-Unruh

Apesar da surpresa inicial com que muitos físicos de partículas encaram o fenômeno de desintegração de prótons acelerados, vimos, no capítulo anterior, que a “instabilidade” de partículas não-inerciais é uma predição bastante natural de TQC em sua forma mais básica (nível de árvore, regime de interação efetiva, acoplamento com correntes semi-clássicas). De fato, o processo (2.3.1) não é *conceitualmente* muito distinto da emissão de radiação por cargas aceleradas, e.g., $e^- \rightarrow e^- \gamma$, tão exaustivamente analisada tanto no contexto semi-clássico (interação do campo de fótons com uma corrente elétrica clássica [17]) quanto no contexto quântico (interação do campo de fótons com o campo de elétrons [21]): da mesma maneira que o pro-

cesso (2.3.1), a emissão de radiação é proibida, por motivos *energéticos*, para partículas inerciais.

Uma vez que já obtivemos o tempo próprio de vida média de prótons (nêutrons) uniformemente acelerados (vide Fig. 2.1), analisaremos, agora, o fenômeno de transição $p \rightarrow n$ ($n \rightarrow p$) assim como *observadores co-acelerados* com o nucleon o descreveriam. Para entendermos o interesse em se abordar tal questão, devemos notar que observadores co-acelerados com o próton *não podem* atribuir sua “desintegração” (na verdade, a transição $p \rightarrow n$) ao processo (2.3.1) (pelo mesmo motivo que tal processo é proibido para prótons inerciais, assim como descrito por observadores inerciais). Por outro lado, o tempo *próprio* de vida média de prótons obtido no capítulo anterior é uma grandeza *escalar e invariante*, o que obriga ser possível reobtê-lo também no referencial co-acelerado com o próton. Esse é exatamente o objetivo do presente capítulo. Uma vez que nossa preocupação aqui será principalmente conceitual, efetuaremos os cálculos em 1 + 1 dimensões. Por isso, na Sec. 3.1 transformamos os resultados obtidos na Sec. 2.3 para duas dimensões espaço-temporais. Na Sec. 3.2 reobtemos os tempos próprios de vida média de prótons e nêutrons uniformemente acelerados do ponto de vista co-acelerado. Veremos que, embora esse valor seja igual ao obtido na Sec. 3.1, as interpretações em termos de partículas para as transições $p \rightarrow n$ e $n \rightarrow p$ são completamente distintas das respectivas descrições inerciais. De fato, veremos que o *efeito Fulling-Davies-Unruh* (FDU) é fundamental para que os resultados inerciais sejam precisamente reobtidos. Uma discussão atentando para os pontos principais encerra o capítulo (Sec. 3.3).

3.1 Resultados inerciais em 1 + 1 dimensões

Para transformarmos os resultados obtidos na Sec. 2.3 do capítulo anterior para um espaço-tempo bi-dimensional, basta fazermos, na Eq. (2.2.25), $\cos \tilde{\theta}_j = \text{sign}(\tilde{k}_j^z)$ (i.e., $\tilde{k}_1^x = \tilde{k}_1^y = \tilde{k}_2^x = \tilde{k}_2^y = 0$), $c_V = 1$ e $c_A = 0$ (por simplicidade) e multiplicar toda a expressão resultante por $(2\pi)^4$ (por questões de normalização). Além disso, tomando já a massa do neutrino como sendo nula e integrando nas variáveis momento dos léptons emitidos, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2d}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{4G_{2d}^2 e^{-\pi\Delta M/a}}{\pi^2 a} \int_0^\infty d\tilde{k}_e^z \int_0^\infty d\tilde{k}_\nu^z K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_\nu)/a] \\ &= \frac{4G_{2d}^2 e^{-\pi\Delta M/a}}{\pi^2 a} \int_{m_e}^\infty \frac{d\tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_e}{\sqrt{\tilde{\omega}_e^2 - m_e^2}} \int_0^\infty d\tilde{\omega}_\nu K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_\nu)/a]. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Efetuando os mesmo passos que nos permitiram obter a Eq. (2.2.37) a partir da Eq. (2.2.28), temos, ao final:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2d}^{p_1 \rightarrow p_2} &= \frac{G_{2d}^2 m_e}{2\pi^{3/2} e^{\pi\Delta M/a}} \\ &\quad \times G_{13}^{30} \left(\frac{m_e^2}{a^2} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ -1/2, 1/2 + i\Delta M/a, 1/2 - i\Delta M/a \end{array} \right). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Analogamente ao efetado no capítulo anterior, fixaremos a constante de acoplamento bi-dimensional G_{2d} impondo que $\tau_n(a) = 1/\Gamma_{2d}^{n \rightarrow p}$ seja 887 s para nêutrons inerciais ($a = 0$). Novamente, ao invés de tomarmos o limite $a \rightarrow 0$ na Eq. (3.1.2), o faremos a partir da Eq. (2.2.24), obtendo, em 1 + 1

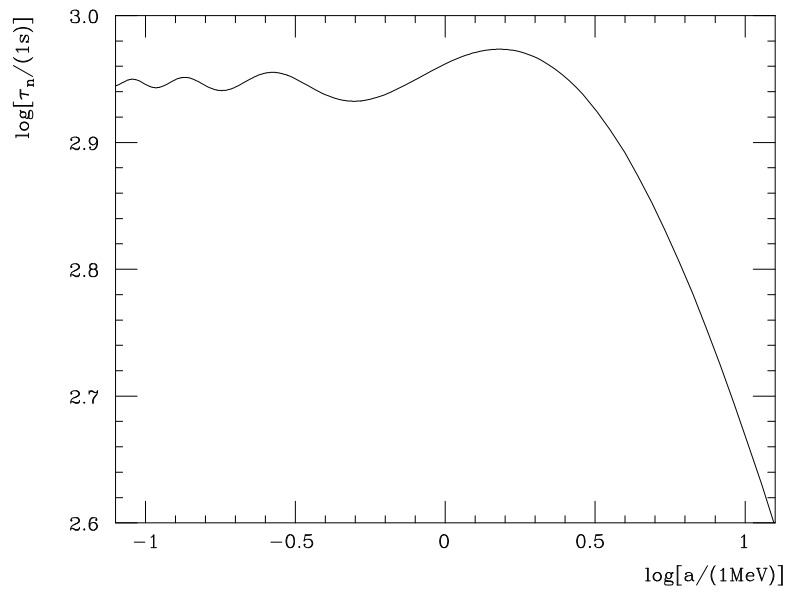


Figure 3.1: O tempo próprio de vida média de nêutrons, $\tau_n(a)$, é traçado como função de sua aceleração própria a . Notemos que $\tau_n \rightarrow 887s$ quando $a \rightarrow 0$.

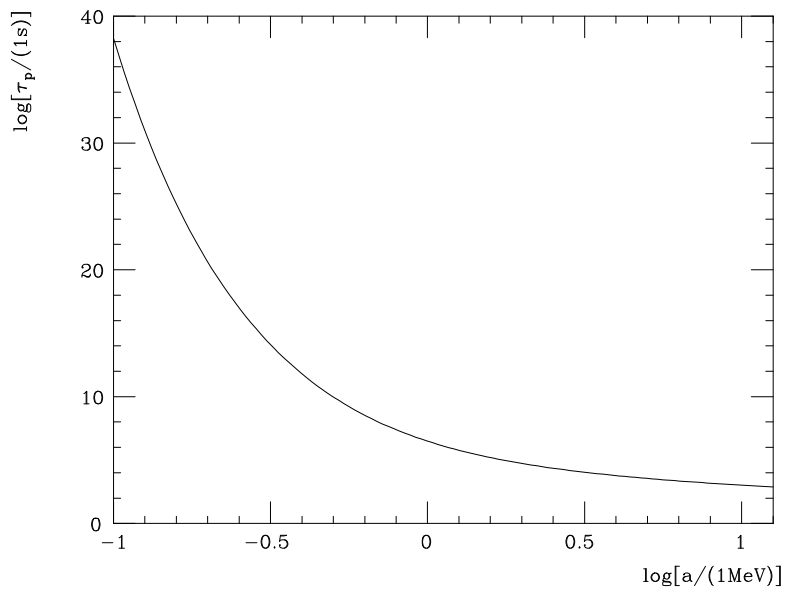


Figure 3.2: O tempo próprio de vida média de prótons, $\tau_p(a)$, é traçado como função de sua aceleração própria a . $\tau_p \rightarrow +\infty$ para prótons inerciais ($a \rightarrow 0$). Para acelerações $a \gg a_c := 2\pi|\Delta M| \approx 8$ MeV tem-se que $\tau_p \approx \tau_n$.

dimensões:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{2d}^{n \rightarrow p}|_{a \rightarrow 0} &= \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \int_0^\infty d\tilde{k}_e^z \int_0^\infty d\tilde{k}_\nu^z \delta(\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_\nu - \Delta M) \\
&= \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \int_{m_e}^{\Delta M} d\tilde{\omega}_e \frac{\tilde{\omega}_e}{\sqrt{\tilde{\omega}_e^2 - m_e^2}} \\
&= \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \sqrt{\Delta M^2 - m_e^2}. \tag{3.1.3}
\end{aligned}$$

Impondo, então, $\Delta M = 1,29$ MeV, $m_e = 0,511$ MeV e $\Gamma_{2d}^{n \rightarrow p}|_{a \rightarrow 0} = 1/887$ s⁻¹, temos que $G_{2d} = 9,918 \times 10^{-13}$. Nas Figs. 3.1 e 3.2 traçamos os gráficos de $\tau_n(a) = 1/\Gamma_{2d}^{n \rightarrow p}$ e $\tau_p(a) = 1/\Gamma_{2d}^{p \rightarrow n}$, respectivamente. Notemos que, à semelhança dos resultados quadri-dimensionais, temos que $\tau_n \approx \tau_p$ para $a \gg a_c := 2\pi|\Delta M| \approx 8$ MeV, uma vez que da Eq. (3.1.2) vê-se facilmente que aqui também se verifica a igualdade

$$\tau_p(a) = e^{2\pi|\Delta M|/a} \tau_n(a). \tag{3.1.4}$$

3.2 Desintegração de prótons e nêutrons no referencial co-acelerado

Analisaremos, agora, as desintegrações de nucleons uniformemente acelerados assim como descritos por observadores co-acelerados com os mesmos. Para isso, é conveniente introduzir o *Rindler wedge*, que é a porção do espaço-tempo de Minkowski definida por $z > |t|$, onde (t, z) são as coordenadas usuais de Minkowski (vide Fig. 3.3). É conveniente cobrir o *Rindler wedge* com as coordenadas (τ, v) , que são relacionadas com (t, z) por:

$$t = v \sinh(a\tau), \quad z = v \cosh(a\tau), \tag{3.2.1}$$

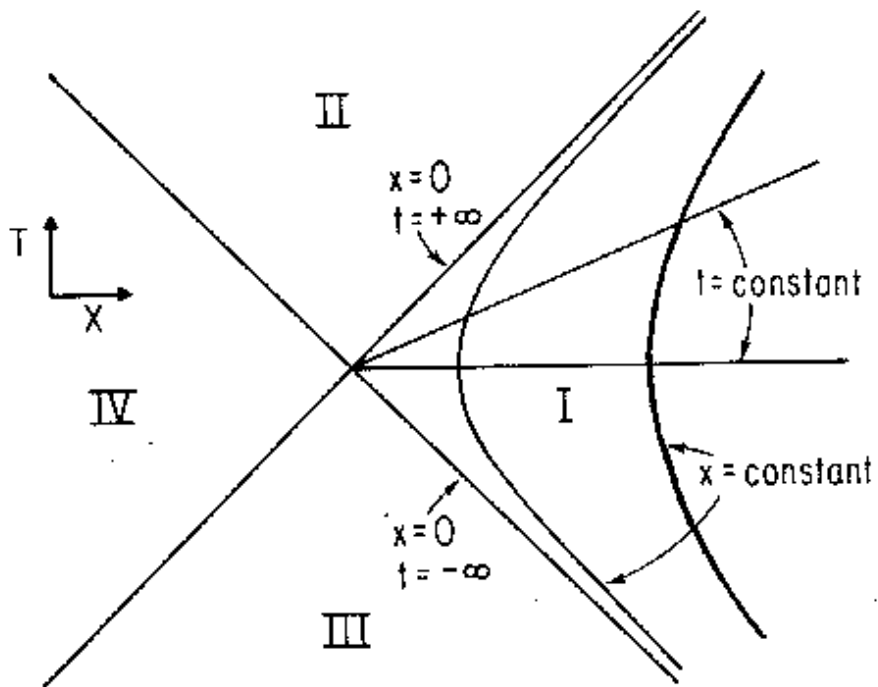


Figure 3.3: *Rindler wedge.*

onde $0 < v < +\infty$, $-\infty < \tau < +\infty$ e $a := \sqrt{-a^\mu a_\mu}$ é a intensidade da aceleração própria (constante) do nucleon que, por construção, segue a linha-de-mundo $v(\tau) = a^{-1}$. O elemento de linha do *Rindler wedge* é escrito como

$$ds^2 = (av)^2 d\tau^2 - dv^2, \quad (3.2.2)$$

de onde vemos que τ pode ser encarado como o *tempo próprio* do nucleon. Nesse sistema de coordenadas, observadores co-acelerados com o nucleon em $v = a^{-1}$ são *estáticos*.

Como mencionamos no início deste capítulo, uma vez que o próton uniformemente acelerado é estático em relação aos observadores co-acelerados, a transição $p \rightarrow n$ através do processo (2.3.1) é proibida. Entretanto, o tempo próprio de vida média de prótons acelerados, obtido na Sec. 3.1, tem que poder ser obtido também do ponto de vista co-acelerados. Para conciliar esses fatos aparentemente contraditórios, *devemos* fazer uso do efeito Fulling-Davies-Unruh (FDU) [4]-[6], segundo o qual os observadores co-acelerados com o próton observam um *banho térmico* de partículas. Desse modo, apesar do processo (2.3.1) ser proibido para esses observadores, as reações

$$(v) \ p e^- \rightarrow n \nu_e, \quad (vi) \ p \bar{\nu}_e \rightarrow n e^+, \quad (vii) \ p e^- \bar{\nu}_e \rightarrow n$$

passam a ser permitidas, onde os léptons que surgem nesses processos são *partículas de Rindler* presentes no banho térmico de FDU.

Da mesma maneira que na análise inercial, descreveremos os léptons envolvidos por campos espinoriais

$$\hat{\Psi}(\tau, v) = \sum_{\sigma=\pm} \int_0^{+\infty} d\omega \left[\hat{b}_{\omega\sigma} \psi_{\omega\sigma}(\tau, v) + \hat{d}_{\omega\sigma}^\dagger \psi_{-\omega-\sigma}(\tau, v) \right], \quad (3.2.3)$$

onde $\hat{b}_{\omega\sigma}$ e $\hat{d}_{\omega\sigma}^\dagger$ são operadores de aniquilação e criação de férmions e anti-férmions, respectivamente, com energia ω e polarização σ . $\psi_{\omega\sigma}$ são soluções da equação de Dirac com frequência positiva ($\omega > 0$) e negativa ($\omega < 0$) com respeito ao campo de Killing de *boosts* ∂_τ com polarização $\sigma = \pm$, dadas por (vide Apêndice B):

$$\psi_{\omega+} = \left[\frac{m \cosh(\pi\omega/a)}{2\pi^2 a} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} K_{i\omega/a+1/2}(m\nu) + iK_{i\omega/a-1/2}(m\nu) \\ 0 \\ -K_{i\omega/a+1/2}(m\nu) + iK_{i\omega/a-1/2}(m\nu) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega\tau}, \quad (3.2.4)$$

$$\psi_{\omega-} = \left[\frac{m \cosh(\pi\omega/a)}{2\pi^2 a} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ K_{i\omega/a+1/2}(m\nu) + iK_{i\omega/a-1/2}(m\nu) \\ 0 \\ K_{i\omega/a+1/2}(m\nu) - iK_{i\omega/a-1/2}(m\nu) \end{pmatrix} e^{-i\omega\tau}. \quad (3.2.5)$$

Os modos (3.2.4) e (3.2.5) estão normalizados segundo o produto interno

$$\langle \psi_{\omega\sigma}, \psi_{\omega'\sigma'} \rangle := \int_\Sigma d\Sigma_\mu \bar{\psi}_{\omega\sigma} \gamma_R^\mu \psi_{\omega'\sigma'} = \delta(\omega - \omega') \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (3.2.6)$$

onde $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$ e Σ é escolhida como sendo $\tau = \text{const}$. Como consequência, as relações canônicas de anti-comutação para o campo e momento conjugado levam os operadores de criação e aniquilação a satisfazerem as seguintes relações de anti-comutação:

$$\{\hat{b}_{\omega\sigma}, \hat{b}_{\omega'\sigma'}^\dagger\} = \{\hat{d}_{\omega\sigma}, \hat{d}_{\omega'\sigma'}^\dagger\} = \delta(\omega - \omega') \delta_{\sigma\sigma'} \quad (3.2.7)$$

e

$$\{\hat{b}_{\omega\sigma}, \hat{b}_{\omega'\sigma'}\} = \{\hat{d}_{\omega\sigma}, \hat{d}_{\omega'\sigma'}\} = \{\hat{b}_{\omega\sigma}, \hat{d}_{\omega'\sigma'}\} = \{\hat{b}_{\omega\sigma}, \hat{d}_{\omega'\sigma'}^\dagger\} = 0 . \quad (3.2.8)$$

Acoplando os campos leptônicos à corrente

$$\hat{j}^\mu = \hat{q}(\tau) \frac{u^\mu}{u^0} \delta(v - a^{-1}) , \quad (3.2.9)$$

através da ação efetiva (2.2.7) adaptada ao *Rindler wedge* bi-dimensional,

$$\hat{S}_I = \int d^2x \sqrt{-g} \hat{j}_\mu \{ \hat{\Psi}_\nu \gamma_R^\mu \hat{\Psi}_e + \hat{\Psi}_e \gamma_R^\mu \hat{\Psi}_\nu \} , \quad (3.2.10)$$

com $\gamma_R^\mu := (e_\alpha)^\mu \gamma^\alpha$, $(e_0)^\mu = (av)^{-1} \delta_0^\mu$, $(e_1)^\mu = \delta_1^\mu$ e $u^\mu = \delta_0^\mu$ nas coordenadas de Rindler (τ, v) , calculemos a amplitude de transição para o processo (v):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n} &= \langle n | \otimes \langle \nu_{\omega\nu\sigma\nu} | \hat{S}_I | e_{\omega_{e^-}\sigma_{e^-}}^- \rangle \otimes | p \rangle \\ &= G_{2d} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\Delta M \tau} \langle \nu_{\omega\nu\sigma\nu} | \hat{\Psi}_\nu^\dagger(\tau, a^{-1}) \hat{\Psi}_e(\tau, a^{-1}) | e_{\omega_{e^-}\sigma_{e^-}}^- \rangle , \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

onde notemos que o segundo termo entre chaves na Eq. (3.2.10) não contribui.

Agora, usando a Eq. (3.2.3), obtemos

$$\mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n} = G_{2d} \delta_{\sigma_{e^-}, \sigma_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\Delta M \tau} \psi_{\omega\nu\sigma\nu}^\dagger(\tau, a^{-1}) \psi_{\omega_{e^-}\sigma_{e^-}}(\tau, a^{-1}) . \quad (3.2.12)$$

Usando, agora, as Eqs. (3.2.4) e (3.2.5) e efetuando a integral, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}}{\pi a} \sqrt{m_e m_\nu \cosh(\pi\omega_{e^-}/a) \cosh(\pi\omega_\nu/a)} \\ &\quad \times \text{Re} \left[K_{i\omega_\nu/a-1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) \right] \\ &\quad \times \delta_{\sigma_{e^-}, \sigma_\nu} \delta(\omega_{e^-} - \omega_\nu - \Delta M) . \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Cálculos análogos levam às seguintes amplitudes para os processos (vi) e (vii):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(vi)}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}}{\pi a} \sqrt{m_e m_\nu \cosh(\pi\omega_{e^+}/a) \cosh(\pi\omega_{\bar{\nu}}/a)} \\
&\times \text{Re} \left[K_{i\omega_{e^+}/a-1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{\bar{\nu}}/a+1/2}(m_\nu/a) \right] \\
&\times \delta_{\sigma_{e^+}, \sigma_{\bar{\nu}}} \delta(\omega_{\bar{\nu}} - \omega_{e^+} - \Delta M) , \tag{3.2.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(vii)}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}}{\pi a} \sqrt{m_e m_\nu \cosh(\pi\omega_{e^-}/a) \cosh(\pi\omega_{\bar{\nu}}/a)} \\
&\times \text{Re} \left[K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{\bar{\nu}}/a+1/2}(m_\nu/a) \right] \\
&\times \delta_{\sigma_{e^-}, -\sigma_{\bar{\nu}}} \delta(\omega_{\bar{\nu}} + \omega_{e^-} - \Delta M) . \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

As taxas de transição diferenciais, por energia das partículas emitidas e absorvidas, associadas aos processos (v)-(vii) são dadas por:

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(v)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^-} d\omega_\nu} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{\sigma_{e^-} = \pm} \sum_{\sigma_\nu = \pm} |\mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n}|^2 n_F(\omega_{e^-}) [1 - n_F(\omega_\nu)] , \tag{3.2.16}$$

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(vi)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^+} d\omega_{\bar{\nu}}} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{\sigma_{e^+} = \pm} \sum_{\sigma_{\bar{\nu}} = \pm} |\mathcal{A}_{(vi)}^{p \rightarrow n}|^2 n_F(\omega_{\bar{\nu}}) [1 - n_F(\omega_{e^+})] , \tag{3.2.17}$$

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(vii)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^-} d\omega_{\bar{\nu}}} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{\sigma_{e^-} = \pm} \sum_{\sigma_{\bar{\nu}} = \pm} |\mathcal{A}_{(vii)}^{p \rightarrow n}|^2 n_F(\omega_{e^-}) n_F(\omega_{\bar{\nu}}) , \tag{3.2.18}$$

onde

$$n_F(\omega) := \frac{1}{1 + e^{2\pi\omega/a}} \tag{3.2.19}$$

é o fator térmico fermiônico associado ao banho térmico de FDU e $\mathcal{T} = 2\pi\delta(0)$ é (formalmente) o tempo próprio total do nucleon. Usando-se as

Eqs. (3.2.13)-(3.2.15) nas Eqs. (3.2.16)-(3.2.18), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(v)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^-} d\omega_\nu} &= \frac{4G_{2d}^2}{\pi^3} \left(\frac{m_e m_\nu}{a^2} \right) e^{-\pi \Delta M/a} \delta(\omega_{e^-} - \omega_\nu - \Delta M) \\ &\times \left\{ \text{Re} \left[K_{i\omega_\nu/a-1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) \right] \right\}^2, \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(vi)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^+} d\omega_{\bar{\nu}}} &= \frac{4G_{2d}^2}{\pi^3} \left(\frac{m_e m_\nu}{a^2} \right) e^{-\pi \Delta M/a} \delta(\omega_{\bar{\nu}} - \omega_{e^+} - \Delta M) \\ &\times \left\{ \text{Re} \left[K_{i\omega_{\bar{\nu}}/a+1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega_{e^+}/a-1/2}(m_e/a) \right] \right\}^2, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(vii)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^-} d\omega_{\bar{\nu}}} &= \frac{4G_{2d}^2}{\pi^3} \left(\frac{m_e m_\nu}{a^2} \right) e^{-\pi \Delta M/a} \delta(\omega_{e^-} + \omega_{\bar{\nu}} - \Delta M) \\ &\times \left\{ \text{Re} \left[K_{i\omega_{\bar{\nu}}/a+1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Integrando-se as Eqs. (3.2.20)-(3.2.22) nas frequências ω_ν e $\omega_{\bar{\nu}}$ (onde for apropriado), obtemos as seguintes taxas de transição associadas a cada processo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(v)}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}^2 m_e m_\nu}{\pi^3 a^2 e^{\pi \Delta M/a}} \\ &\times \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \left\{ \text{Re} \left[K_{i(\omega_{e^-} - \Delta M)/a-1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) \right] \right\}^2, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{(vi)}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}^2 m_e m_\nu}{\pi^3 a^2 e^{\pi \Delta M/a}} \\ &\times \int_0^{+\infty} d\omega_{e^+} \left\{ \text{Re} \left[K_{i(\omega_{e^+} + \Delta M)/a+1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega_{e^+}/a-1/2}(m_e/a) \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{(vii)}}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}^2 m_e m_\nu}{\pi^3 a^2 e^{\pi \Delta M/a}} \\ &\times \int_0^{\Delta M} d\omega_{e^-} \left\{ \text{Re} \left[K_{i(\omega_{e^-} - \Delta M)/a - 1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega_{e^-}/a + 1/2}(m_e/a) \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Relembremos que as frequências de Rindler podem assumir qualquer valor real positivo.

A taxa de desintegração de prótons é obtida somando-se todas as contribuições: $\Gamma_{\text{tot}}^{p \rightarrow n} = \Gamma_{\text{(v)}}^{p \rightarrow n} + \Gamma_{\text{(vi)}}^{p \rightarrow n} + \Gamma_{\text{(vii)}}^{p \rightarrow n}$. Esse resultado pode ser escrito numa forma compacta como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{tot}}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}^2 m_e m_\nu}{\pi^3 a^2 e^{\pi \Delta M/a}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ \text{Re} \left[K_{i(\omega - \Delta M)/a - 1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega/a + 1/2}(m_e/a) \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Nesse ponto, tomemos o limite $m_\nu \rightarrow 0$. Para esse propósito, é útil notar que (veja (8.407.1), (8.405.1) e (8.403.1) na Ref. [23])

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \left[J_{-\nu}(iz) e^{i\nu\pi/2} - J_\nu(iz) e^{-i\nu\pi/2} \right], \quad (3.2.27)$$

onde ν é não-inteiro e $|\arg iz| < \pi$. Usando essa expressão em conjunto com (8.402) da Ref. [23], temos, para um pequeno $|z|$, que

$$K_\nu(z) \approx \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \left[(iz/2)^{-\nu} \Gamma^{-1}(-\nu + 1) e^{i\nu\pi/2} - (iz/2)^\nu \Gamma^{-1}(\nu + 1) e^{-i\nu\pi/2} \right]. \quad (3.2.28)$$

Usando a Eq. (3.2.28), podemos mostrar que

$$\frac{m}{a} K_{i\omega/a+1/2}(m/a) K_{i\omega/a-1/2}(m/a) \xrightarrow{m/a \rightarrow 0} \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\omega/a)}. \quad (3.2.29)$$

Agora é possível obter as seguintes taxas de transição parciais e total:

$$\Gamma_{(v)}^{p \rightarrow n} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{\pi \Delta M/a}} \times \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \frac{K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^-} - \Delta M)/a]}, \quad (3.2.30)$$

$$\Gamma_{(vi)}^{p \rightarrow n} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{\pi \Delta M/a}} \times \int_0^{+\infty} d\omega_{e^+} \frac{K_{i\omega_{e^+}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^+}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^+} + \Delta M)/a]}, \quad (3.2.31)$$

$$\Gamma_{(vii)}^{p \rightarrow n} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{\pi \Delta M/a}} \times \int_0^{\Delta M} d\omega_{e^-} \frac{K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^-} - \Delta M)/a]} \quad (3.2.32)$$

e

$$\Gamma_{\text{tot}}^{p \rightarrow n} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{K_{i\omega/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega - \Delta M)/a]}, \quad (3.2.33)$$

respectivamente. É interessante notar que, embora as taxas de transição tenham interpretações completamente diferentes nos referenciais inercial e co-acelerado, os tempos próprios de vida média são escalares e devem ser os mesmos em ambos os referenciais. De fato, traçando $\tau_p(a) = 1/\Gamma_{\text{tot}}^{p \rightarrow n}$ como função da aceleração a do próton, reproduz-se exatamente a Fig. 3.2. Na Fig. 3.4 traçamos as *taxas relativas* (*branching ratios*) dos processos (v), (vi) e (vii):

$$BR_{(v)} := \Gamma_{(v)}^{p \rightarrow n} / \Gamma_{\text{tot}}^{p \rightarrow n}, \quad BR_{(vi)} := \Gamma_{(vi)}^{p \rightarrow n} / \Gamma_{\text{tot}}^{p \rightarrow n}, \quad BR_{(vii)} := \Gamma_{(vii)}^{p \rightarrow n} / \Gamma_{\text{tot}}^{p \rightarrow n}.$$

Notemos que para pequenas acelerações, onde “poucas” partículas suficientemente energéticas estão disponíveis no banho térmico de FDU, o processo (vii) domina sobre os processos (v) e (vi), enquanto que para grandes acelerações os processos (v) e (vi) dominam sobre o processo (vii).

Uma análise similar pode ser feita para nêutrons uniformemente acelerados. De acordo com observadores co-acelerados com o nêutron, sua desintegração é descrita pela combinação dos seguintes processos:

$$\text{(viii) } n \nu_e \rightarrow p e^- , \text{ (ix) } n e^+ \rightarrow p \bar{\nu}_e , \text{ (x) } n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e .$$

As correspondentes taxas de transição parciais e total são dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{(viii)}}^{n \rightarrow p} &= \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{-\pi \Delta M/a}} \\ &\times \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \frac{K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^-} - \Delta M)/a]} , \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{(ix)}}^{n \rightarrow p} &= \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{-\pi \Delta M/a}} \\ &\times \int_0^{+\infty} d\omega_{e^+} \frac{K_{i\omega_{e^+}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^+}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^+} + \Delta M)/a]} , \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{(x)}}^{n \rightarrow p} &= \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{-\pi \Delta M/a}} \\ &\times \int_0^{\Delta M} d\omega_{e^-} \frac{K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^-} - \Delta M)/a]} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

e

$$\Gamma_{\text{tot}}^{n \rightarrow p} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{-\pi \Delta M/a}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{K_{i\omega/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega - \Delta M)/a]} , \quad (3.2.37)$$

respectivamente. A Fig. 3.1 mostra o tempo próprio de vida média de nêutrons, $\tau_n(a) = 1/\Gamma_{\text{tot}}^{n \rightarrow p}$, que coincide com o calculado no referencial iner-

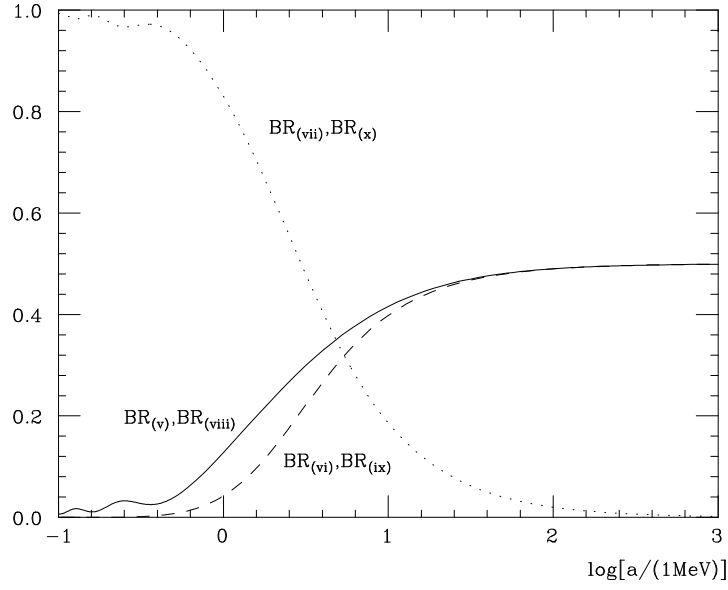


Figure 3.4: As taxas relativas (*branching ratios*) $BR_{(v)}$, $BR_{(vi)}$, $BR_{(vii)}$, $BR_{(viii)}$, $BR_{(ix)}$, $BR_{(x)}$ são traçadas. Para prótons, o processo (vii) domina sobre os processos (v) e (vi) para pequenas acelerações, enquanto que os processos (v) e (vi) dominam sobre o processo (vii) para grandes acelerações. Para nêutrons, o processo (x) domina sobre os processos (viii) e (ix) para pequenas acelerações, enquanto que os processos (viii) e (ix) dominam sobre o processo (x) para grandes acelerações.

cial. Na Fig. 3.4 traçamos as taxas relativas

$$BR_{(viii)} := \Gamma_{(viii)}^{n \rightarrow p} / \Gamma_{\text{tot}}^{n \rightarrow p}, \quad BR_{(ix)} := \Gamma_{(ix)}^{n \rightarrow p} / \Gamma_{\text{tot}}^{n \rightarrow p}, \quad BR_{(x)} := \Gamma_{(x)}^{n \rightarrow p} / \Gamma_{\text{tot}}^{n \rightarrow p}.$$

É fácil ver que $BR_{(viii)} = BR_{(v)}$, $BR_{(ix)} = BR_{(vi)}$ e $BR_{(x)} = BR_{(vii)}$.

3.3 Discussão

Analisamos a desintegração de prótons e nêutrons acelerados. Comparamos as interpretações em termos de partículas desses processos nos referenciais inercial [veja os processos (iii) e (iv)] e co-acelerado [veja os processos (v)-(vii) e (viii)-(x)]. Das Eqs. (3.2.16)-(3.2.18) vê-se que o banho térmico de Fulling-Davies-Unruh é *essencial* para que os tempos próprios de vida média de prótons e nêutrons (que são observáveis escalares e, portanto, independentes do sistema de coordenadas), obtidos na Sec. 3.1 utilizando-se TQC usual em referenciais inerciais, sejam reobtidos no referencial uniformemente acelerado. Esse fato ilustra a necessidade do efeito Fulling-Davies-Unruh para a própria auto-consistência de TQC.

As taxas relativas (*branching ratios*) de cada processo (v)-(x) também foram calculadas. Para prótons com pequenas acelerações, o processo (vii) domina sobre os processos (v) e (vi), enquanto que para prótons com grandes acelerações os a situação se inverte. Para nêutrons com pequenas acelerações, o processo (x) domina sobre os processos (viii) e (ix), enquanto que para nêutrons com grandes acelerações, à semelhança do caso do próton, a situação também se inverte. Os tempos próprios de vida média dos nucleons como função de sua aceleração própria foram traçados nas Figs. 3.1 e 3.2. Para

acelerações $a \gg a_c := 2\pi|\Delta M|$, temos que $\tau_p \approx \tau_n$. Embora tais acelerações estejam muito além de nossa tecnologia atual, a desintegração de nucleons acelerados pode ser de alguma importância em situações astrofísicas e/ou cosmológicas.

Capítulo 4

Partículas massivas com energia total $E < mc^2$

No capítulo anterior vimos que o efeito FDU é essencial para conciliar as descrições inercial e uniformemente acelerada das transições $p \rightarrow n$ e $n \rightarrow p$. Mostramos que enquanto observadores inerciais atribuem, digamos, a transição $p \rightarrow n$ como devida ao processo (i) (vide Cap. 2), observadores uniformemente acelerados atribuem *o mesmo evento* a um dos canais (v), (vi) ou (vii) (vide Sec. 3.2). Um fato curioso de se notar é que os pósitrons e elétrons envolvidos nos canais (vi) e (vii), respectivamente, podem ter energia *arbitrariamente* pequena, embora os mesmos sejam partículas massivas [vide Eqs. (3.2.31) e (3.2.32)]. Portanto, o vínculo existente na quantização inercial usual, $\omega = \omega(\mathbf{k}, m) := \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \geq m$, onde \mathbf{k} é o tri-momento da partícula, não aparece na quantização uniformemente acelerada (mesmo porque a componente do momento da partícula na direção da aceleração do

referencial *não* é um número quântico). Longe de serem exceções, situações onde *inexiste* vínculo entre energia, massa e demais números quânticos de uma partícula livre constituem, na verdade, a regra geral em TQCEC. Isso porque a relação de dispersão $\omega = \omega(\mathbf{k}, m)$ é consequência direta da estrutura do *grupo de simetrias* do espaço-tempo de Minkowski [em particular, da relação entre os geradores das translações temporal, ∂_t , e espaciais, ∂_x , ∂_y e ∂_z , onde (t, x, y, z) é um sistema de coordenadas ortogonal e globalmente inercial].

Embora possamos *aproximar* a geometria em que vivemos como sendo plana, o vínculo $\omega = \omega(\mathbf{k}, m)$ *a rigor* não existe. De fato, o espaço-tempo de Schwarzschild, onde tal relação não é válida, é uma aproximação ainda melhor para o campo gravitacional gerado pela Terra. Então, como conciliar isso com o fato que a igualdade $\omega = \omega(\mathbf{k}, m)$ é cotidianamente verificada nas inúmeras experiências de Física de Partículas? Por que partículas com energia $\omega < m$ não são detectadas? O presente capítulo tem por objetivo justamente analisar a questão da detecção de partículas *livres* com massa de *repouso* m e energia *total* $\omega < m$. Na Sec. 4.1 trataremos esta questão utilizando um detector idealizado (de Unruh-DeWitt [6, 28]) acoplado a um campo escalar massivo e na Sec. 4.2 discutiremos os resultados obtidos, interpretando classicamente algumas de suas facetas. Por simplicidade, efetuaremos a análise num espaço-tempo bi-dimensional relacionado com observadores próximos a um buraco negro estático, onde, como veremos, a existência de partículas com energia $\omega < m$ faz-se mais evidente.

4.1 Análise quântica

Começemos considerando o elemento de linha do espaço-tempo de Schwarzschild bi-dimensional:

$$ds^2 = (1 - 2M/r) dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 . \quad (4.1.1)$$

A Eq. (4.1.1) pode ser encarada como descrevendo um buraco negro bi-dimensional com massa M . Próximo ao horizonte de eventos, $r \approx 2M$, a Eq. (4.1.1) pode ser escrita como

$$ds^2 = (\rho/4M)^2 dt^2 - d\rho^2 , \quad (4.1.2)$$

onde $\rho(r) := \sqrt{8M(r - 2M)}$. (Notemos que nessas coordenadas o horizonte está em $\rho = 0$.) O elemento de linha (4.1.2) é associado com o do *Rindler wedge* desde que $0 < \rho < \infty$ e $-\infty < t < +\infty$, que é um espaço-tempo globalmente hiperbólico por si mesmo [basta fazermos $a = (4M)^{-1}$ na Eq. (3.2.2)]. A vantagem de se considerar a Eq. (4.1.2) ao invés da Eq. (4.1.1) é dupla: por um lado, isso permite uma discussão completamente analítica e, por outro lado, mantém as características relevantes (para os nossos propósitos) do espaço-tempo de Schwarzschild (bi-dimensional). (O fato de que eles diferem assintoticamente não será importante para a nossa discussão.)

Vamos considerar, agora, um campo escalar (real) livre $\hat{\Phi}(x)$ com massa m nesse espaço-tempo. O campo escalar pode ser facilmente quantizado no *Rindler wedge* e expandido em termos dos modos normais $u_\omega(x)$, satisfazendo $(\square + m^2)u_\omega(x) = 0$ e $\partial_t u_\omega = -i\omega u_\omega$, como a seguir:

$$\hat{\Phi}(x) = \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_\omega u_\omega(x) + H.c.] , \quad (4.1.3)$$

onde

$$u_\omega(x) = \sqrt{(4M/\pi^2) \sinh(4\pi M\omega)} K_{4iM\omega}(m\rho) e^{-i\omega t} . \quad (4.1.4)$$

Os modos $u_\omega(x)$ foram ortonormalizados de acordo com o produto interno de Klein-Gordon

$$\langle u_\omega, u_{\omega'} \rangle := 4Mi \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} (u_\omega^* \partial_t u_{\omega'} - u_{\omega'} \partial_t u_\omega^*) = \delta(\omega - \omega') , \quad (4.1.5)$$

o que leva às simples relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação: $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$. Notemos que o observador fiducial, em relação ao qual a quantização é efetuada, é o localizado em $\rho = 4M$, uma vez que t é seu tempo próprio [veja Eq. (4.1.2)].

Introduzamos, agora, o detector de Unruh-DeWitt *estático* em $\rho = \rho_d$, descrito pela corrente escalar semi-clássica (vide Sec. 2.1)

$$\hat{j}(x) = \frac{\hat{q}(s)}{u^0(s)\sqrt{-g}} \delta(\rho - \rho_d) , \quad (4.1.6)$$

com $\hat{q}(s) = e^{i\hat{H}s} \hat{q}_0 e^{-i\hat{H}s}$, tempo próprio s e Hamiltoniana própria \hat{H} com dois níveis de energia,

$$\hat{H}|E_0\rangle = E_0|E_0\rangle , \quad \hat{H}|E\rangle = E|E\rangle ,$$

acoplado ao nosso campo escalar massivo $\hat{\Phi}(x)$ assim como dado pela ação de interação

$$\begin{aligned} \hat{S}_I &= \int d^2x \sqrt{-g} \hat{j}(x) \hat{\Phi}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} ds \hat{q}(s) \hat{\Phi}[x(s)] . \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Agora, perguntemos ao nosso observador fiducial qual é a probabilidade $P_\omega(\rho_d)$ de um “pacote de onda” (que descreve uma partícula com energia típica ω)

$$|\phi_\omega\rangle = \int_0^{+\infty} d\omega' f_\omega(\omega') a_{\omega'}^\dagger |0\rangle \quad (4.1.8)$$

ser detectado em algum ponto ρ_d , onde $f_\omega(\omega')$ é uma função “picada” em $\omega' = \omega$ e

$$\int_0^{+\infty} d\omega' |f_\omega(\omega')|^2 = 1 . \quad (4.1.9)$$

Para esse fim, ajustamos cuidadosamente a diferença de energia (própria) dos níveis do detector, $\Delta E = E - E_0$, para maximizar a probabilidade de detecção em cada ponto ρ_d . Isso é conseguido fazendo-se $\Delta E = 4M\omega/\rho_d$. (Notemos que, dessa maneira, ΔE e ω são relacionados por um fator de *red-shift* entre a posição do detector, ρ_d , e do observador fiducial, $\rho_o = 4M$, que atribui energia ω ao “pacote”.) Um cálculo direto, em nível de árvore, nos leva a:

$$\begin{aligned} P_\omega(\rho_d) &= \left| \langle 0| \otimes \langle E|\hat{S}_I|E_0\rangle \otimes |\phi_\omega\rangle \right|^2 \\ &= (c_0^2/M) |f_\omega(\omega)|^2 \sinh(4\pi M\omega) \rho_d^2 K_{4iM\omega}^2(m\rho_d) , \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

onde $c_0 := |\langle E|\hat{q}_0|E_0\rangle|$. Na Fig. (4.1) traçamos

$$d\mathcal{P}_\omega/d\rho_d := P_\omega(\rho_d) / \int_0^{+\infty} P_\omega(\rho'_d) d\rho'_d . \quad (4.1.11)$$

Notemos que $d\mathcal{P}_\omega(\rho_d)$ pode ser naturalmente interpretado como a probabilidade de que a partícula seja encontrada entre ρ_d and $\rho_d + d\rho_d$. Vemos da Fig. (4.1) que detectores distantes do horizonte apenas serão capazes de

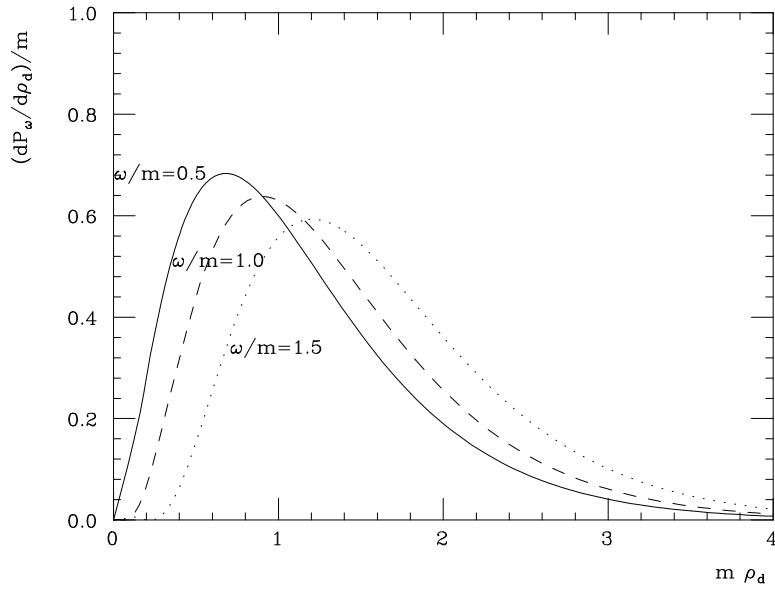


Figure 4.1: Traçamos a densidade de probabilidade $d\mathcal{P}_\omega/d\rho_d$ para diferentes razões ω/m , onde assumimos que $M = (4m)^{-1}$. Notemos que quanto menor for a razão ω/m , mais próximo do horizonte (em média) a partícula será detectada, em acordo com as Eqs. (4.2.1) e (4.2.2).

interagir com o “rabo” da “função de onda” associada a partículas com um baixo valor de ω/m .

Analisemos, agora, outro aspecto da detecção de partículas com energia $\omega < m$. Consideremos um *ensemble* de partículas com distribuição, em energia, $n(\omega) = n_0 = \text{constante}$ (espectro “plano”). *Qual a probabilidade de um observador em um ponto arbitrário $\rho = \rho_o$ detectar partículas com as diferentes energias possíveis?* Essa questão está mais diretamente relacionada com a motivação que citamos originalmente, uma vez que corriqueiramente detectamos partículas com $\omega \geq m$ mas não com $\omega < m$, apesar de qualquer valor positivo de energia ser possível. Para responder a pergunta colocada, munimos o referido observador com um detector cuja diferença entre seus níveis de energia própria é $\Delta E = \omega_o$. Então, a excitação do detector está univocamente associada à detecção de uma partícula com energia ω_o , assim como medida pelo observador em ρ_o (nenhuma menção ao observador fiducial será necessária daqui em diante). A taxa de excitação do detector, por tempo próprio do observador, como função da energia ω_o da partícula detectada é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\omega_o} &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^\infty d\omega \left| \langle 0 | \otimes \langle E | \hat{S}_I | E_0 \rangle \otimes |\omega \rangle \right|^2 n(\omega) \\ &= (2/\pi) c_0^2 n_0 \rho_o \sinh(\pi \omega_o \rho_o) K_{i\omega_o \rho_o}^2(m \rho_o), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

onde \mathcal{T} é o tempo próprio total do observador. Na Fig. (4.2) traçamos \mathcal{R}_{ω_o} como função da razão ω_o/m para observadores em diferentes pontos. Podemos notar claramente uma forte supressão na detecção de partículas com $\omega_o < m$.

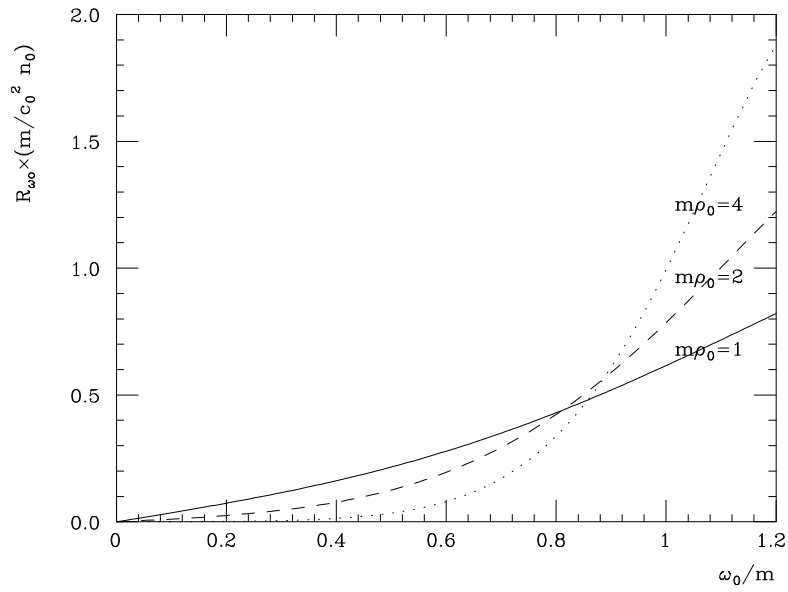


Figure 4.2: Traçamos a taxa de detecção \mathcal{R}_{ω_o} como função da razão ω_o/m para observadores em diferentes pontos ρ_o . Para observadores distantes do horizonte, há uma forte supressão na detecção de partículas com $\omega_o < m$.

4.2 Discussão

Com o objetivo de interpretar a Eq. (4.1.10) classicamente, consideremos um arranjo de detectores, cada um situado em pontos diferentes ρ_d e calculemos a “posição média de detecção”, i.e.,

$$\begin{aligned} \langle \rho_d \rangle &:= \frac{\int_0^\infty d\rho_d \rho_d P_\omega(\rho_d)}{\int_0^\infty d\rho_d P_\omega(\rho_d)} \\ &\approx 3.4 M\omega/m \quad (\omega \gg a), \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

onde $a = 1/4M$ é a aceleração própria do observador fiducial. Para interpretar este resultado, notemos que, *classicamente*, uma partícula em repouso em algum ponto ρ_p com massa m tem, de acordo com nosso observador fiducial em $\rho = 4M$, energia total $\omega = mu^a \xi_a = m\rho_p/4M$, onde u^a é a quadri-velocidade da partícula e ξ^a é o campo de Killing ∂_t . Se considerarmos que, ao invés de parada, a partícula pode ter uma energia cinética adicional, então $\omega \geq m\rho_p/4M$. Invertendo esta equação, obtemos

$$\rho_p \leq 4M\omega/m, \quad (4.2.2)$$

que deve ser comparada com a Eq. (4.2.1). Quanto menor a razão ω/m , mais provável que a partícula seja detectada próxima do horizonte, onde o “potencial gravitacional” diminui sua energia total.

Além disso, a Eq. (4.1.12) e a Fig. 4.2 nos sugerem o porquê de partículas com energia abaixo de sua massa de repouso não serem observadas em campos gravitacionais fracos (simulados por grandes ρ_o), como os da Terra. Nesse sentido, embora possível, a detecção de partículas que violam a relação de dispersão $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ pode, para todos os propósitos práticos, ser considerada como “ruído” nas experiências terrestres. O mesmo, entretanto,

não é válido em campos gravitacionais intensos como os das proximidades de buracos negros (ou referenciais com acelerações muito altas), onde tais partícula podem desempenhar um importante papel. De qualquer maneira, a existência de partículas com energia arbitrariamente pequena, como já citamos, é *fundamental* no entendimento de fenômenos ocorrendo em espaços curvos e referenciais acelerados, como, por exemplo, a radiação emitida por cargas não-inerciais [29], além da já analisada desintegração de prótons.

Capítulo 5

Reação de neutronização em estrelas de nêutrons

A estrutura interna de *estrelas de nêutrons* tem atraído muito a atenção de relativistas e físicos de partículas e nucleares uma vez que muitos aspectos de seu comportamento ainda não são bem entendidos. (veja, por exemplo, Ref. [30] e referências inclusas). Nesse sentido, seria interessante investigar como a *gravidade* poderia influenciar processos quânticos que ocorrem no interior de tais objetos estelares relativísticos. O campo gravitacional pode ser de alguma relevância sempre que sejam envolvidas partículas cujo comprimento de onda associado seja da ordem do raio de curvatura espacial. Desse modo, processos envolvendo partículas com baixa energia podem ser promissores. Centraremos atenção, aqui, ao processo de *neutronização*

$$p e^- \rightarrow n \nu_e ,$$

que é um importante mecanismo de resfriamento de estrelas de nêutrons com temperaturas até 10^9 K. Nossa abordagem é semi-clássica na medida em que os campos leptônicos serão quantizados no espaço-tempo (clássico) de fundo, enquanto que prótons e nêutrons serão modelados pelos estados desexcitado e excitado, respectivamente, de uma corrente semi-clássica (como nos Caps. 2 e 3).

5.1 Um modelo simplificado

A quantização de campos no espaço-tempo de Schwarzschild não é uma tarefa simples de se realizar [31]. Portanto, utilizaremos a mesma aproximação realizada no capítulo anterior, modelando o espaço de Schwarzschild pelo referencial uniformemente acelerado descrito pelo *Rindler wedge* bi-dimensional, cujo elemento de linha, como já vimos, é dado por

$$ds^2 = (av)^2 d\tau^2 - dv^2, \quad (5.1.1)$$

com $0 < v < +\infty$ e $-\infty < \tau < +\infty$ [vide Eq. (3.2.2)].

Iremos considerar que os nucleons se encontram aproximadamente estáticos em algum ponto do interior da estrela durante a ocorrência do processo $p e^- \rightarrow n \nu_e$. Em princípio, isso não oferece problema uma vez que o processo tem lugar na presença de um meio e não no vácuo. A localização do nucleon envolvido na reação é especificada pela sua aceleração própria. Então, em nosso modelo simplificado, os nucleons reagente serão descritos por uma corrente semi-clássica uniformemente acelerada no *Rindler wedge*,

com aceleração própria a :

$$\hat{j}^\mu = \hat{q}(\tau) \frac{u^\mu}{u^0} \delta(v - a^{-1}) , \quad (5.1.2)$$

exatamente como na Sec. 3.2. Então, a amplitude de probabilidade (de vácuo) para o processo de neutronização é dada exatamente pela amplitude de transição (de vácuo) do processo (v) da Sec. 3.2 [vide Eqs. (3.2.11) e (3.2.13)]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) &= \langle n | \otimes \langle \nu_{\omega\nu\sigma\nu} | \hat{S}_I | e_{\omega_{e^-}\sigma_{e^-}}^- \rangle \otimes | p \rangle \\ &= \frac{4G_{2d}}{\pi a} \sqrt{m_e m_\nu \cosh(\pi\omega_{e^-}/a) \cosh(\pi\omega_\nu/a)} \\ &\quad \times \text{Re} \left[K_{i\omega_\nu/a-1/2}(m_\nu/a) K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) \right] \\ &\quad \times \delta_{\sigma_{e^-}, \sigma_\nu} \delta(\omega_{e^-} - \omega_\nu - \Delta M) , \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

onde utilizamos a mesma ação de interação dada pela Eq. (3.2.10). ($G_{2d} = 9,918 \times 10^{-13}$ foi obtido na Sec. 3.1.) Este resultado será usado para calcular a taxa total de reação

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{\sigma_{e^-}=\pm} \sum_{\sigma_\nu=\pm} \int_0^{+\infty} d\omega_{e^-} \int_0^{+\infty} d\omega_\nu |\mathcal{A}(a)|^2 \\ &\quad \times n_F(\omega_{e^-}, T_{e^-}) [1 - n_F(\omega_\nu, T_\nu)] , \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

onde \mathcal{T} é o tempo próprio total do nucleon e $n_F(\omega, T) = 1/(1 + e^{\omega/T})$ é o fator térmico usual para férmions. Notemos que a Eq. (5.1.4) difere da Eq. (3.2.16) pelo fato que as temperaturas características de elétrons, T_{e^-} , e neutrinos, T_ν , não são associadas à aceleração própria do nucleon como ocorre no efeito FDU; T_{e^-} e T_ν são parâmetros livres que devem ser inferidos a partir da temperatura da estrela de nêutrons, T_{EN} . Em geral, assume-se que os

elétrons estão em equilíbrio térmico à temperatura da estrela, $T_{e^-} = T_{EN}$. Já os neutrinos estarão em equilíbrio térmico com a estrela se $T_{EN} > 10^9$ K, caso em que $T_\nu = T_{EN}$; caso contrário, a estrela de nêutrons é praticamente “transparente” aos neutrinos, o que justifica assumir-se $T_\nu = 0$ nesses casos. (Esse é o motivo pelo qual a reação de neutronização é um importante mecanismo de resfriamento de estrelas de nêutrons se $T_{EN} \leq 10^9$ K; os neutrinos produzidos no processo e emitidos pela estrela extraem grande parte de sua energia, fenômeno conhecido como *efeito Urca*.)

Substituindo as expressões para $\mathcal{A}(a)$ e $n_F(\omega, T)$ na Eq. (5.1.4) e já tomando o limite $m_\nu \rightarrow 0$ [vide expressão (3.2.29)], obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \frac{4G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a} \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \frac{\cosh(\pi\omega_{e^-}/a)}{\left[1 + e^{(\omega_{e^-}/T_{e^-})}\right] \left[1 + e^{(\Delta M - \omega_{e^-})/T_\nu}\right]} \\ &\quad \times K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a) . \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Com o objetivo de comparar a taxa de reação acima com a taxa usual obtida para nucleons inerciais, calculemos a taxa de neutronização para $a = 0$ usando TQC usual no espaço de Minkowski. Isso também servirá para uma verificação de consistência, uma vez que iremos compará-la com o limite $a \rightarrow 0$ obtido da Eq. (5.1.5). A amplitude de neutronização para nucleons inerciais no espaço de Minkowski (bi-dimensional) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{in} &= \langle n | \otimes \langle \nu_{\omega_\nu, \sigma_\nu} | \hat{S}_I | e_{\omega_{e^-}, \sigma_{e^-}}^- \rangle \otimes | p \rangle \\ &= G_{2d} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\Delta M t} \psi_{k_\nu, \sigma_\nu}^{(+\omega_\nu)\dagger}(t, 0) \psi_{k_{e^-}, \sigma_{e^-}}^{(+\omega_{e^-})}(t, 0) , \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

onde foi usada a ação de interação (3.2.10), com as matrizes γ_R^μ substituídas pelas matrizes de Dirac usuais γ^μ , e a corrente $\hat{j}^\mu = \hat{q}(t)\delta_0^\mu\delta(z)$. Os modos

normais $\psi_{k\sigma}^{(\pm\omega)}$ são obtidos a partir dos modos (2.2.2)-(2.2.3) adaptando-os a duas dimensões:

$$\psi_{k+}^{(\pm\omega)}(t, z) = \frac{e^{i(\mp\omega t + kz)}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{(\omega \pm m)/2\omega} \\ 0 \\ k/\sqrt{2\omega(\omega \pm m)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1.7)$$

$$\psi_{k-}^{(\pm\omega)}(t, z) = \frac{e^{i(\mp\omega t + kz)}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{(\omega \pm m)/2\omega} \\ 0 \\ -k/\sqrt{2\omega(\omega \pm m)} \end{pmatrix}. \quad (5.1.8)$$

Isso nos leva diretamente à seguinte taxa de neutronização para nucleons inerciais:

$$\Gamma_{in} = \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \int_L^{+\infty} dk_{e-} \frac{1}{(1 + e^{\omega_{e-}/T_{e-}})[1 + e^{(\Delta M - \omega_{e-})/T_\nu}]}, \quad (5.1.9)$$

onde $m_\nu = 0$, $L := \sqrt{\Delta M^2 - m_e^2}$, e relembremos que $\omega_{e-} = \sqrt{k_{e-}^2 + m_e^2}$.

Com o objetivo de analisar mais claramente a influência do referencial acelerado no processo de neutronização, usemos as Eqs. (5.1.5) e (5.1.9) para definir a seguinte *taxa de reação relativa*:

$$\mathcal{R}(a) := \frac{\Gamma(a) - \Gamma_{in}}{\Gamma_{in}}. \quad (5.1.10)$$

Consideraremos, agora, dois casos: (I) $T_{e-} = 10^9$ K e $T_\nu = 0$ K, i.e., a estrela de nêutrons está fria o suficiente para ser “transparente” aos neutrinos,

e (II) $T_{e^-} = T_\nu = 10^{10}$ K, i.e., elétrons e neutrinos estão em equilíbrio térmico. Nas Figs. 5.1 e 5.2 traçamos $\mathcal{R}(a)$ para os casos (I) e (II), respectivamente. Primeiramente, notemos das figuras que $\Gamma(a \rightarrow 0)$ está em acordo com a expressão obtida para Γ_{in} uma vez que $\mathcal{R}(a \rightarrow 0) \rightarrow 0$. As Figs. 5.1 e 5.2 exibem um comportamento oscilatório complicado até $a \approx 1$ MeV. De fato, a aceleração do referencial influi de maneira mais importante nessa escala: $|\mathcal{R}(a)|$ alcança cerca de 30% e 10% para os casos (I) e (II), respectivamente. Para acelerações grandes o suficiente, $a \gg \Delta M, T_{e^-}$, obtemos, utilizando a expressão (3.2.29) na Eq. (5.1.5), uma fórmula assintótica para $\Gamma(a)$, a saber:

$$\Gamma(a \gg \Delta M, T_{e^-}) \approx \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \frac{1}{(1 + e^{\omega_{e^-}/T_{e^-}})[1 + e^{(\Delta M - \omega_{e^-})/T_\nu}]} . \quad (5.1.11)$$

Usando-se a Eq. (5.1.11) na Eq. (5.1.10), podemos computar a taxa de reação relativa assintótica, $\mathcal{R}(a \gg \Delta M, T_{e^-})$. Encontramos que $\mathcal{R}(a \gg \Delta M, T_{e^-}) \approx -7.2\%$ e $\mathcal{R}(a \gg \Delta M, T_{e^-}) \approx -3.5\%$ para os casos (I) e (II), respectivamente, i.e., de acordo com nosso modelo simplificado, acelerações muito altas suprimem a taxa de neutronização por até alguns pontos percentuais.

5.2 Discussão

Em resumo, procuramos por efeitos devido à gravidade no processo de neutronização que ocorre com frequência no interior de estrelas de nêutrons. A taxa de reação obtida por meio de nosso modelo simplificado exhibe um comportamento oscilatório complicado até $a \approx 1$ MeV. Depois disso, ela tende a

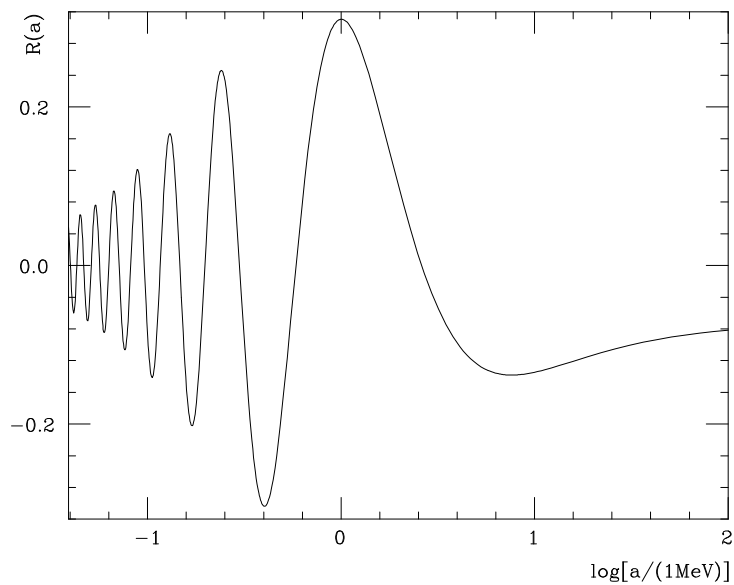


Figure 5.1: A taxa de reação relativa $\mathcal{R}(a)$ é traçada como função da aceleração do nucleon a para as temperaturas $T_{e^-} = 10^9$ K e $T_\nu = 0$ K. Notemos que $\mathcal{R}(a \rightarrow 0) \rightarrow 0$, como esperado. Depois de um regime oscilatório, a taxa de reação relativa tende ao valor assintótico $\mathcal{R}(a \gg \Delta M, T_{e^-}) \approx -7,2\%$. O valor máximo alcançado por $|\mathcal{R}(a)|$ é de cerca de 30%.

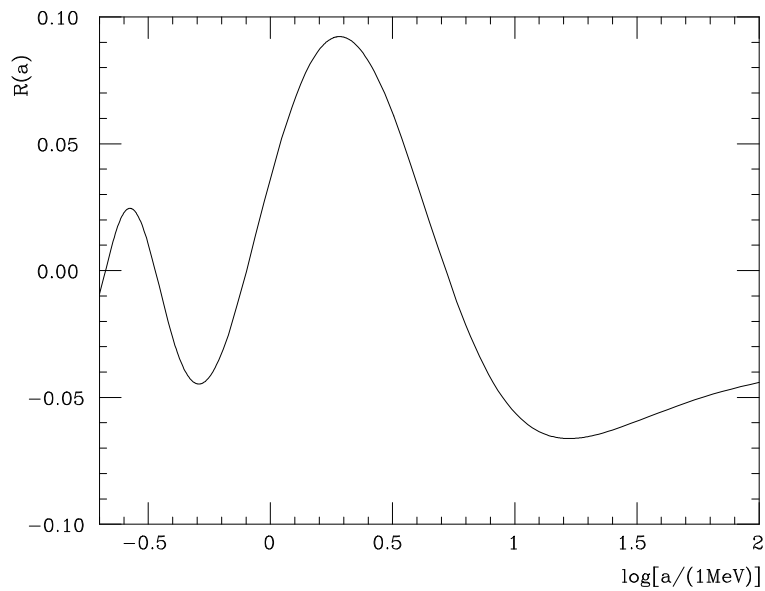


Figure 5.2: A taxa de reação relativa $\mathcal{R}(a)$ é traçada como função da aceleração do nucleon a para as temperaturas $T_{e^-} = T_\nu = 10^{10}$ K. Depois de um regime oscilatório, a taxa de reação relativa tende ao valor assintótico $\mathcal{R}(a \gg \Delta M, T_{e^-}) \approx -3,5\%$. O valor máximo alcançado por $|\mathcal{R}(a)|$ é de cerca de 10%.

um valor assintótico que indica que a taxa de reação é, de alguma maneira, suprimida. Notemos que acelerações próprias da ordem de $a \approx 1$ MeV estão muito além do que seria esperado se encontrar no interior de estrelas relativísticas. De fato, um próton na superfície de uma estrela de nêutrons típica com raio $R \approx 10^4$ m e massa $M \approx 2M_\odot$ experimentaria uma aceleração própria de aproximadamente $a = M(1 - 2M/R)^{-1/2}/R^2 \approx 10^{-17}$ MeV. Então, no que concerne nosso modelo simplificado, o campo gravitacional de uma estrela de nêutrons teria uma importância desprezível no processo de neutronização. Devemos enfatizar, entretanto, que apenas um cálculo no espaço-tempo quadri-dimensional de Schwarzschild seria realístico o suficiente para determinar precisamente a influência completa da gravidade na reação de neutronização e em processos similares. Em um cálculo mais realístico, por exemplo, efeitos devido à própria curvatura do espaço, que está ausente em nosso modelo, poderiam mostrar-se relevantes sempre que os neutrinos emitidos fossem de energia baixa o suficiente para “sentir” a geometria curva de fundo. Nesse caso, mesmo reações ocorridas próximas ao centro da estrela, onde $a \approx 0$, seriam influenciadas pela gravidade. Investigações mais detalhadas sobre a influência da gravidade em processos de partículas em estrelas relativísticas seriam bem-vindas.

Capítulo 6

Conclusão e perspectivas

Concluindo a presente tese de doutorado, mencionaremos algumas extensões possíveis dos trabalhos apresentados nos capítulos precedentes, sendo que, no momento, já iniciamos a análise de algumas delas.

Vimos no Cap. 2 que a desintegração de prótons acelerados é potencialmente importante em algumas situações astrofísicas. Para isso, assumimos que o tempo próprio de vida média calculado para prótons uniformemente acelerados pode ser usado como aproximação para trajetórias circulares na presença de campos magnéticos de fundo. Para obtermos uma melhor aproximação aos casos realistas, já iniciamos os cálculos da desintegração de prótons e nêutrons em movimento circular uniforme. Outra perspectiva é analisar a desintegração de prótons segundo o processo de *interação forte*

$$p \rightarrow n \pi^+ . \quad (6.1)$$

A taxa de desintegração de prótons, $\Gamma^{p \rightarrow n \pi^+}$, e a potência de emissão de píons, $\mathcal{W}^{p \rightarrow n \pi^+}$, segundo o processo (6.1) são obtidos modelando-se o sistema

próton/neutron por uma corrente *escalar* semi-clássica. Para trajetórias uniformemente aceleradas obtemos

$$\Gamma^{p \rightarrow n \pi^+} = \frac{g^2 m_\pi^3}{8\pi^{3/2} a^2} e^{-\pi \Delta M/a} \times G_{13}^{30} \left(\frac{m_\pi^2}{a^2} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ -3/2, i\Delta M/a - 1/2, -i\Delta M/a - 1/2 \end{array} \right) \quad (6.2)$$

e

$$\mathcal{W}^{p \rightarrow n \pi^+} = \frac{g^2 m_\pi^3}{8\pi^{3/2} a} e^{-\pi \Delta M/a} \times G_{13}^{30} \left(\frac{m_\pi^2}{a^2} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ -3/2, i\Delta M/a, -i\Delta M/a \end{array} \right), \quad (6.3)$$

onde g é a constante de acoplamento efetiva (que deve ser da ordem de grandeza da constante de acoplamento forte).

As perspectivas relacionadas com os Caps. 4 e 5, por outro lado, envolvem a quantização dos campos escalar e fermiônico, respectivamente, na geometria do espaço-tempo de Schwarzschild. Na impossibilidade, até o momento, de encontrarmos uma solução ou mesmo uma aproximação analítica para o problema, está em curso a análise *numérica* da detecção de partículas escalares massivas com energia $E < mc^2$ fora de buracos negros estáticos. A análise mais realista do processo de neutronização, apesar de muito interessante, será deixada para um futuro mais distante.

Apêndice A

Solução das integrais das Eqs. (2.2.42) e (2.2.43)

Com o objetivo de resolver as Eqs. (2.2.42) e (2.2.43), consideremos a integral

$$\mathcal{I}_n^+ := \int_0^\infty dw \frac{w^{n+2i\Delta M/a}}{(w^2 - 1 + 2i\epsilon w)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.1})$$

Notemos que a extensão analítica do integrando acima possui polos de ordem $n + 1$ em $w^\pm = \pm 1 - i\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Isso implica que podemos fazer $\epsilon = 0$ na Eq. (A.1) desde que contornemos o polo em $w^+ = 1$ pelo semi-plano complexo superior, i.e.:

$$\mathcal{I}_n^+ = \int_{\gamma_+} dw \frac{w^{n+2i\Delta M/a}}{(w^2 - 1)^{n+1}}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\gamma_\pm := [0, 1 - \epsilon'] \cup \{1 \pm \epsilon' e^{i\theta} ; \theta \in [0, \pi]\} \cup [1 + \epsilon', \infty)$ com $\epsilon' \rightarrow 0_+$ e orientação no sentido crescente de $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Usando o Teorema dos Resíduos, vemos que

$$\mathcal{I}_n^- - \mathcal{I}_n^+ = 2\pi i \text{Res}(f_n)_{w=1}, \quad (\text{A.3})$$

onde \mathcal{I}_n^- é obtido substituindo γ_+ por γ_- na Eq. (A.2), e denotamos o valor do resíduo da função

$$f_n(w) := \frac{w^{n+2i\Delta M/a}}{(w^2 - 1)^{n+1}} \quad (\text{A.4})$$

no ponto $w = w^\pm$ por $\text{Res}(f_n)_{w=w^\pm}$. Agora, definamos

$$\mathcal{I}_n := \int_{-\infty}^{+\infty} dw \frac{w^{n+2i\Delta M/a}}{(w^2 - 1 + 2i\epsilon w)^{n+1}}, \quad (\text{A.5})$$

que pode ser escrito, quando $\epsilon \rightarrow 0$, como:

$$\mathcal{I}_n = (-1)^n e^{-2\pi\Delta M/a} \mathcal{I}_n^- + \mathcal{I}_n^+. \quad (\text{A.6})$$

Uma vez que o integrando de \mathcal{I}_n é analítico no semi-plano complexo superior (fechado) e vai a zero como $|w|^{-(n+2)}$ para $|w| \rightarrow \infty$, temos que $\mathcal{I}_n = 0$. Como conseqüência, as Eqs. (A.3) e (A.6) implicam que

$$\mathcal{I}_n^+ = \frac{-2\pi i \text{Res}(f_n)_{w=1}}{1 + (-1)^n e^{2\pi\Delta M/a}}, \quad (\text{A.7})$$

com

$$\text{Res}(f_n)_{w=w^\pm} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dw^n} \left\{ (w - w^\pm)^{n+1} f_n(w) \right\} \Big|_{w \rightarrow w^\pm}. \quad (\text{A.8})$$

Usando a função (A.4) para efetuar explicitamente a Eq. (A.8) para $n = 5, 6$, obtemos:

$$\mathcal{I}_5^+ = \frac{-\pi}{120 a^5} \left(\frac{4a^4 \Delta M + 5a^2 \Delta M^3 + \Delta M^5}{e^{2\pi\Delta M/a} - 1} \right) \quad (\text{A.9})$$

e

$$\mathcal{I}_6^+ = \frac{i \pi}{46080 a^6} \left(\frac{225 a^6 + 1036 a^4 \Delta M^2 + 560 a^2 \Delta M^4 + 64 \Delta M^6}{e^{2\pi\Delta M/a} + 1} \right). \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Solução da equação de Dirac no *Rindler wedge* bi-dimensional

Consideremos o *Rindler wedge* bi-dimensional descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = (av)^2 d\tau^2 - dv^2 . \quad (\text{B.1})$$

A equação de Dirac em espaços-tempos genéricos é dada por $(i\gamma_R^\mu \tilde{\nabla}_\mu - m)\Psi = 0$, onde $\gamma_R^\mu := (e_\alpha)^\mu \gamma^\alpha$ são as matrizes de Dirac no espaço em questão, $\tilde{\nabla}_\mu := \partial_\mu + \Gamma_\mu$ e $\Gamma_\mu = \frac{1}{8}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta](e_\alpha)^\lambda \tilde{\nabla}_\mu (e_\beta)_\lambda$ são as conexões de Fock-Kondratenko. (γ^μ são as matrizes de Dirac usuais.) As tetradas relevantes no *Rindler wedge* são dadas por $(e_0)^\mu = (av)^{-1} \delta_0^\mu$, $(e_j)^\mu = \delta_j^\mu$. Como consequência, a equação de Dirac toma a forma

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = a \left(\gamma^0 m v - \frac{i \alpha_3}{2} - i v \alpha_3 \frac{\partial}{\partial v} \right) \Psi , \quad (\text{B.2})$$

onde $\alpha_j := \gamma^0 \gamma^j$.

Decompondo a solução geral $\Psi(\tau, v)$ em termos dos modos $\psi_{\omega\sigma}(\tau, v) = f_{\omega\sigma}(v)e^{-i\omega\tau}$ de frequência positiva ($\omega > 0$) e negativa ($\omega < 0$) com relação ao campo de Killing ∂_τ ,

$$\Psi(\tau, v) = \sum_{\sigma=\pm} \int_0^\infty d\omega [b_\sigma(\omega)\psi_{\omega\sigma}(\tau, v) + d_\sigma^*(\omega)\psi_{-\omega-\sigma}(\tau, v)] , \quad (\text{B.3})$$

com $b_\sigma(\omega)$ e $d_\sigma(\omega)$ sendo funções de módulo quadrado integráveis (para cada $\sigma = \pm$), obtemos, a partir da Eq. (B.2),

$$\hat{H}_v f_{\omega\sigma} = \omega f_{\omega\sigma} , \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\hat{H}_v := a \left[mv\gamma^0 - \frac{i\alpha_3}{2} - iv\alpha_3 \frac{\partial}{\partial v} \right] . \quad (\text{B.5})$$

“Elevando ao quadrado” a Eq. (B.4) e definindo os espinores de duas componentes χ_j ($j = 1, 2$) através de

$$f_{\omega\sigma}(v) := \begin{pmatrix} \chi_1(v) \\ \chi_2(v) \end{pmatrix} , \quad (\text{B.6})$$

obtemos

$$\left(v \frac{d}{dv} v \frac{d}{dv} \right) \chi_1 = \left[m^2 v^2 + \frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{a^2} \right] \chi_1 - \frac{i\omega}{a} \sigma_3 \chi_2 , \quad (\text{B.7})$$

$$\left(v \frac{d}{dv} v \frac{d}{dv} \right) \chi_2 = \left[m^2 v^2 + \frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{a^2} \right] \chi_2 - \frac{i\omega}{a} \sigma_3 \chi_1 . \quad (\text{B.8})$$

Agora, introduzindo $\phi^\pm := \chi_1 \mp \chi_2$, podemos definir ξ^\pm and ζ^\pm através de

$$\begin{pmatrix} \xi^\pm(v) \\ \zeta^\pm(v) \end{pmatrix} := \phi^\pm . \quad (\text{B.9})$$

Em termos dessas variáveis, as Eqs. (B.7)-(B.8) tornam-se

$$\left(v \frac{d}{dv} v \frac{d}{dv}\right) \xi^\pm = [m^2 v^2 + (i\omega/a \pm 1/2)^2] \xi^\pm, \quad (\text{B.10})$$

$$\left(v \frac{d}{dv} v \frac{d}{dv}\right) \zeta^\pm = [m^2 v^2 + (i\omega/a \mp 1/2)^2] \zeta^\pm. \quad (\text{B.11})$$

As soluções dessas equações diferenciais podem ser escritas em termos de funções de Hankel $H_{i\omega/a \pm 1/2}^{(j)}(imv)$, ($j = 1, 2$), (veja (8.491.6) da Ref. [23]) ou funções de Bessel modificadas $K_{i\omega/a \pm 1/2}(mv)$, $I_{i\omega/a \pm 1/2}(mv)$ (veja (8.494.1) da Ref. [23]). Então, usando as Eqs. (B.6) e (B.9) e impondo que as soluções satisfaçam a equação de primeira ordem (B.4), obtemos:

$$f_{\omega+}(v) = A_+ \begin{pmatrix} K_{i\omega/a+1/2}(mv) + iK_{i\omega/a-1/2}(mv) \\ 0 \\ -K_{i\omega/a+1/2}(mv) + iK_{i\omega/a-1/2}(mv) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$f_{\omega-}(v) = A_- \begin{pmatrix} 0 \\ K_{i\omega/a+1/2}(mv) + iK_{i\omega/a-1/2}(mv) \\ 0 \\ K_{i\omega/a+1/2}(mv) - iK_{i\omega/a-1/2}(mv) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Notemos que as soluções envolvendo $I_{i\omega/a \pm 1/2}$ não são normalizáveis e, portanto, serão desconsideradas. Com o objetivo de encontrar as constantes de normalização

$$A_+ = A_- = \left[\frac{m \cosh(\pi\omega/a)}{2\pi^2 a} \right]^{1/2}, \quad (\text{B.14})$$

utilizamos [14]:

$$\langle \psi_{\omega\sigma}, \psi_{\omega'\sigma'} \rangle := \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \bar{\psi}_{\omega\sigma} \gamma_R^{\mu} \psi_{\omega'\sigma'} = \delta(\omega - \omega') \delta_{\sigma\sigma'} \quad , \quad (\text{B.15})$$

onde $\bar{\psi} := \psi^{\dagger} \gamma^0$ e Σ foi escolhida como $\tau = \text{const.}$ Então, os modos normais do campo fermiônico (B.3) no *Rindler wedge* bi-dimensional são:

$$\psi_{\omega+} = \left[\frac{m \cosh(\pi\omega/a)}{2\pi^2 a} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} K_{i\omega/a+1/2}(m\nu) + iK_{i\omega/a-1/2}(m\nu) \\ 0 \\ -K_{i\omega/a+1/2}(m\nu) + iK_{i\omega/a-1/2}(m\nu) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega\tau} \quad , \quad (\text{B.16})$$

$$\psi_{\omega-} = \left[\frac{m \cosh(\pi\omega/a)}{2\pi^2 a} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ K_{i\omega/a+1/2}(m\nu) + iK_{i\omega/a-1/2}(m\nu) \\ 0 \\ K_{i\omega/a+1/2}(m\nu) - iK_{i\omega/a-1/2}(m\nu) \end{pmatrix} e^{-i\omega\tau} \quad . \quad (\text{B.17})$$

Referências Bibliográficas

- [1] L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).
- [2] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas, Class. Quant. Grav. **17**, 19 (2000).
- [3] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974); Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [4] S. A. Fulling, Phys. Rev. D **7**, 2850 (1973).
- [5] P. C. W. Davies, J. Phys. A **8**, 609 (1975).
- [6] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [7] B. S. Kay e R. M. Wald, Phys. Rep. **207**, 49 (1991).
- [8] D. A. T. Vanzella e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. D **63**, 014010 (2001).
- [9] G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella, Phys. Rev. D **59**, 094004 (1999).
- [10] D. A. T. Vanzella e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. D **61**, 127303 (2000).
- [11] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).

- [12] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (University of Chicago Press, Chicago, 1994).
- [13] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [14] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Field Theory in Curved Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).
- [15] Particle Data Group, C. Caso *et al.*, Eur. Phys. J. C **3**, 1 (1998).
- [16] V. N. Baier, Usp. Fiz. Nauk. **105**, 441 (1971) [Sov. Phys. Usp **14**, 695 (1972)]; D. Potaux, *Proceedings of the 8th Int. Conf. on High Energy Accelerators*, editado por M. H. Blewett (CERN, Geneve, 1971). J. G. Learned, L. K. Resvanis e C. M. Spencer, Phys. Rev. Lett. **35**, 1688 (1975). J. R. Johnson *et al.*, Nucl. Inst. Meth. **204**, 261 (1983). L. Knudsen *et al.*, Phys. Lett. **B270**, 97 (1991). R. Assmann *et al.*, *High Energy Spin Physics: Proceedings*, editado por K. J. Heller e S. L. Smith (AIP, 1995). D. P. Barber *et al.*, Phys. Lett. **B 343**, 436 (1995). A. A. Sokolov e I. M. Ternov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **153**, 1052 (1963) [Sov. Phys. - Dokl. **8**, 1203 (1964)]. Ya. S. Derbenev e A. M. Kondratenko, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **64**, 1918 (1973) [Sov. Phys. JETP **37**, 968 (1973)]. J. D. Jackson, Rev. Mod. Phys. **48**, 417 (1976).
- [17] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1975)
- [18] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).

- [19] V. L. Ginzburg e S. I. Syrovatskii, *Usp. Fiz. Nauk.* **87**, 65 (1965).
- [20] R. Muller, *Phys. Rev. D* **56**, 953 (1997).
- [21] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz e L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1982).
- [22] V. N. Baier, V. M. Katkov e V. M. Strakhovenko, *Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [23] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic, New York, 1980).
- [24] C. Quigg, *Gauge Theory of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions* (The Benjamin-Cummings Publishing Company, Inc. , Massachusetts, 1983).
- [25] S. Takagi, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 1 (1986).
- [26] L. B. Leinson e A. Pérez, *Phys. Rev. D* **59**, 043002 (1999).
- [27] A. D. Kaminker, K. P. Levenfish, D. G. Yakovlev, P. Amsterdamski e P. Haensel, *Phys. Rev. D* **46**, 3256 (1992).
- [28] B. S. DeWitt, *General Relativity* , eds. S. W. Hawking e W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [29] A. Higuchi, G. E. A. Matsas e D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **45**, R3308 (1992); *ibid.* **56**, R6071 (1997).

- [30] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon e J. Marck, Phys. Rev. Lett. **82**, 892 (1999); P. B. Jones, Phys. Rev. Lett. **81**, 4560 (1998); J. Madsen, Phys. Rev. Lett. **81**, 3311 (1998); P. M. Pizzochero, L. Viverit e R. A. Broglia, Phys. Rev. Lett. **79**, 3347 (1997); N. K. Glendenning, S. Pei e F. Weber, Phys. Rev. Lett. **79**, 1603 (1997); A. G. Wiseman, Phys. Rev. Lett. **79**, 1189 (1997); P. R. Brady e S. A. Hughes, Phys. Rev. Lett. **79**, 1186 (1997); P. B. Jones, Phys. Rev. Lett. **79**, 792 (1997).
- [31] B. P. Jensen e P. Candelas, Phys. Rev. D **33**, 1590 (1986); Erratum *ibid.* D **35**, 4041 (1987).