



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.006/04

OSCILAÇÕES NÃO-LINEARES EM CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN

Marijana Brtko

Orientador

Prof. Dr. Roberto A. Kraenkel

Co-orientador

Prof. Dr. Arnaldo Gammal

Outubro de 2004

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos pela ajuda e amizade a todos professores, colegas e amigos do IFT, especialmente ao:

- Meu orientador Dr. Roberto André Kraenkel;
- Meu co-orientador Dr. Arnaldo Gammal;
- Meu colaborador Dr. Fatkhulla Abdullaev;
- Minha família, em especial aos meus pais, irmão e marido;
- Dáfni Z. Marchioro que teve paciência para ler todas as páginas da tese e corrigir os erros na língua portuguesa.

Agradeço à FAPESP, pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho seria impossível de se realizar.

Resumo

Estudamos as oscilações não-lineares de um condensado de Bose-Einstein em três dimensões numa armadilha com simetria esférica e com comprimento de espalhamento periódico no tempo. Usamos o método variacional dependente do tempo e deduzimos a equação para a largura do condensado. A partir desta equação, analisaremos as características das ressonâncias não-lineares e o efeito de bi-estabilidade em oscilações da largura do condensado. Previsões teóricas são confirmadas pelas simulações numéricas da equação de Gross-Pitaevskii.

Palavras Chave: Condensação de Bose-Einstein; Equação de Gross-Pitaevskii; Dinâmica Não-Linear; Oscilações Não-Lineares.

Áreas do conhecimento: Dinâmica Não-Linear; Ondas de Matéria.

Abstract

Nonlinear oscillations of a 3D radial symmetric Bose-Einstein condensate (BEC) under periodic variation in time of the atomic scattering length have been studied. The time-dependent variational approach is used for analysis of the characteristics of nonlinear resonances in the oscillations of the condensate. The bistability in oscillations of the BEC width is investigated. Predictions of the theory are confirmed by numerical simulations of the full Gross-Pitaevskii equation.

Key words: Bose-Einstein condensation; Gross-Pitaevskii equation; Nonlinear dynamics; Nonlinear oscillations.

Research Fields: Nonlinear dynamics; Matter waves.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Histórico	1
1.2	Motivação	2
2	Condensação de Bose-Einstein em átomos aprisionados	6
2.1	As técnicas modernas de confinamento e resfriamento atômico	6
2.2	Aspectos básicos da CBE para um gás ideal numa armadilha harmônica	8
2.3	Efeitos de interações no condensado de Bose-Einstein	13
2.3.1	A equação de Gross-Pitaevskii (EGP)	14
2.3.2	Efeito da interação no estado fundamental	16
3	Comprimento de espalhamento e ressonância de Feshbach	21
3.1	Conceitos básicos da teoria de espalhamento	22
3.1.1	Espalhamento a energias muito baixas	22
3.2	Pseudo-potencial	23
3.2.1	O sinal do comprimento de espalhamento e interação efetiva	24
3.3	A ressonância de Feshbach	27
4	O método variacional e a equação para a largura da função de onda do condensado	31
4.1	A derivação de equações para parâmetros variacionais	31
4.2	Comprimento de espalhamento independente do tempo	35
4.2.1	As interações efetivamente repulsivas	35
4.2.2	As interações efetivamente atrativas	36
5	As oscilações não-lineares da largura do condensado com comprimento de espalhamento dependente do tempo	38
5.1	O caso de comprimento de espalhamento periódico no tempo	38
5.2	Simulações numéricas e discussões	41
5.2.1	O condensado atrativo ($\Sigma = +1$)	42

5.2.2	O condensado repulsivo ($\Sigma = -1$)	43
6	Conclusões e Perspectivas	52
6.1	Conclusões	52
6.2	Perspectivas	52
A	A distribuição de Bose-Einstein	54
A.1	Distribuição de fótons	54
A.2	Distribuição dos átomos bosônicos	56
B	Dinâmica de uma partícula sujeita a um potencial central	58
B.1	Partícula livre	59
B.2	Poço de potencial	60
B.3	Amplitude de espalhamento e seção de choque	61
C	Algumas propriedades das oscilações não-harmônicas	63
C.1	Relação frequência-amplitude e as frequências combinadoras	63
C.2	O fenômeno da ressonância	65
C.2.1	Ressonância nas oscilações lineares e forçadas	65
C.2.2	Ressonância nas oscilações não-lineares	66
C.3	Ressonância paramétrica	68
C.3.1	A equação de Hill	68
C.3.2	A equação de Mathieu	71
D	Método assintótico na teoria de ressonâncias não-lineares	73
	Referências	78

Capítulo 1

Introdução

1.1 Histórico

A condensação de Bose-Einstein é a ocorrência de uma ocupação macroscópica das partículas bosônicas em um mesmo estado quântico. Quando um gás de bósons diluído é resfriado abaixo de uma temperatura crítica T_c o comprimento de onda térmico do sistema, $\lambda_T \propto T^{-1/2}$, aumenta e se torna da ordem das distâncias entre os átomos. Esse é o limite em que a indistinguibilidade quântica das partículas torna-se importante, pois começa a haver uma superposição entre as funções de onda dos átomos, e devemos tratar o sistema segundo sua estatística quântica correspondente.

Podemos dizer que a pesquisa sobre a condensação iniciou-se com o artigo de S. N. Bose em 1925 [1], em que o físico indiano apresentou uma derivação original para a estatística de *fótons* e a distribuição de Planck. Logo a seguir, Einstein aplicou o método de Bose para os *átomos não interagentes de um gás* [2], mostrando que em temperaturas suficientemente baixas ocorre o empilhamento de uma fração finita das partículas (a qual tende a 1 quando a temperatura tende a zero) no estado de menor energia *. Esse empilhamento hoje em dia denominamos de Condensação de Bose-Einstein (CBE). Einstein também destacou que a CBE é a única transição de fase que ocorre na ausência de interações entre as partículas.

No período entre 1925 e 1965, as idéias sobre CBE desenvolveram-se inicialmente com objetivo específico de compreender o fenômeno de superfluidez, observado no ^4He . Abaixo de uma temperatura crítica, da ordem $T_c \sim 2.17\text{K}$, o hélio líquido apresentava duas fases diferentes, uma delas identificada com propriedades distintas de um fluido normal por viscosidade nula e aparecimento de vórtices quantizados. Até nossos dias, as propriedades associadas com a fase superfluida do ^4He ainda não encontraram uma explicação teórica convincente e completa, apesar de serem

*Os trabalhos de Bose e de Einstein precederam a divisão das partículas em duas classes, férmions e bósons, dependendo do spin que essas possuam.

inúmeras as evidências de que superfluidez está associada com a CBE.

No período de 1947-1965 houve muitos e importantes estudos teóricos atacando o problema do gás de Bose. Destacam-se, por exemplo, trabalhos de London, Landau, Tisza, Bogoliubov, Penrose, Onsager, Feynman, Lee, Yang, Huang, Beliaev e Pitaevskii [3]. Uma abordagem que simplifica a análise de sistemas condensados é a aproximação de campo médio, que resulta na equação de Gross-Pitaevskii [29], que descrevemos mais adiante.

Após esse período de grande desenvolvimento teórico, iniciou-se intensa pesquisa experimental para a obtenção de uma forma pura de condensado. A possível realização experimental da CBE num *gás* era extremamente atraente pois cria um sistema livre das complicações apresentadas pelo hélio *líquido*. Na década de 80, vários cientistas passaram a investir no desenvolvimento de técnicas que permitam o resfriamento de um gás confinado a temperaturas que chegaram a ser de ordem de nano-Kelvins. Finalmente, durante o ano de 1995, três grupos de pesquisa, utilizando técnicas que conjugam resfriamento a laser, aprisionamento magnético de átomos e resfriamento evaporativo, conseguiram reunir as condições necessárias para observação da CBE em gases [4]-[6]. Os pesquisadores do laboratório do JILA em Boulder (Colorado), conseguiram obter o estado condensado a partir de uma nuvem térmica de átomos de ^{87}Rb [4]. Ainda no mesmo ano, foi realizada também a condensação de vapores de ^7Li (Rice University-Houston) [5] e ^{23}Na (MIT-Boston) [6].

Até o presente, foram também condensados os vapores de átomos de ^1H [7], ^{85}Rb [8], $^4\text{He}^*$ (metaestável) [9], ^{41}K [10], ^{133}Cs [11] e ^{174}Yb [12] e as moléculas de $^{40}\text{K}_2$ [13] e $^6\text{Li}_2$ [14].

Acompanhando os recentes sucessos experimentais em condensados atômicos e moleculares, as pesquisas teóricas foram reativadas, dessa vez no sentido de simular as condições experimentais.

1.2 Motivação

Em estudos teóricos o condensado é descrito através de aproximação de campo médio, na qual se considera que as partículas estão tão separadas umas das outras que acabam sentindo apenas uma interação média de dois corpos em sua dinâmica. Como veremos, a evolução temporal destas partículas é bem determinada por meio das soluções de um tipo de equação de Schrödinger *não-linear* denominada equação de Gross-Pitaevskii [24, 29].

As equações não-lineares do tipo Schrödinger ocupam nas áreas de física uma posição de destaque porque descrevem uma série de fenômenos físicos interessantes, desde a física de plasma até a física dos condensados. Este tipo de equações

encontram-se, também, em outros domínios científicos como, por exemplo, em Engenharias e Biociências.

Convém lembrar que a maioria dos sistemas não-lineares não tem solução analítica exata. Tais sistemas são muito mais difíceis de analisar do que os sistemas lineares. Isso ocorre porque sistemas lineares podem ser divididos em partes. Cada parte pode ser resolvida separadamente e finalmente recombinadas para se obter a resposta do sistema inteiro (superposição). Isso permite uma simplificação notável. Mas muitos fenômenos na natureza não ocorrem desta forma. Sempre quando as partes do sistema interferem ou cooperam, há interações não-lineares acontecendo, e o princípio de superposição não se aplica mais.

Os sistemas lineares exibem movimentos simples como crescimento, decaimento, equilíbrio ou oscilações lineares. Em contraste, nos sistemas não-lineares encontram-se novos fenômenos: bifurcações, atratores estranhos, caos, sólitons... O caos só pode ocorrer para sistemas com três ou mais graus de liberdade, enquanto os sólitons foram descobertos na dinâmica de equações unidimensionais [15].

Durante as últimas décadas, houve grandes avanços computacionais que tornaram possível a implementação de técnicas de cálculo numérico para resolver esses problemas não-lineares complexos e checá-los com os dados experimentais.

No caso de condensados de Bose-Einstein, o termo não-linear na equação de Gross-Pitaevskii aparece por causa das interações entre as partículas. A natureza da interação efetiva átomo-átomo nestes sistemas tem grande influência na estabilidade e dinâmica dos condensados. O potencial efetivo repulsivo de dois corpos corresponde ao *comprimento de espalhamento de dois corpos na onda s* positivo, e o condensado será estável independente do número de átomos. Por outro lado, as interações atrativas de dois corpos correspondem ao comprimento de espalhamento negativo, e o condensado não é estável para um número grande de átomos aprisionados, levando o sistema a sofrer um efeito chamado de colapso da função de onda do condensado. Neste efeito, o condensado tende a ter seu volume ou raio quadrático médio contraído até aproximadamente um ponto. Na realidade, isso não ocorre devido à existência de outros efeitos físicos que se tornam relevantes nesta escala e causam uma nova expansão do estado condensado.

A dinâmica do condensado sujeito a uma perturbação do potencial externo foi assunto de vários artigos. As oscilações não-lineares e ocorrência da ressonância, ordinária ou paramétrica, foram estudadas nos artigos [65, 66, 69, 74]. A possibilidade de movimento caótico e existência das soluções solitônicas foram mostradas em [16] e [55], respectivamente. Experimentalmente, a resposta do condensado à perturbação do potencial harmônico é investigada em [17, 18].

Outro problema de interesse é a resposta do condensado sujeito à perturbação

do comprimento de espalhamento de dois corpos. Na equação de Gross Pitaevskii, a dependência no tempo do comprimento de espalhamento resulta em potencial *não-linear* dependente do tempo. Isto conduz ao aparecimento dos efeitos novos, por exemplo, o fenômeno de Bosenova [8], o fenômeno de “formação de padrões” [58], estabilização de condensado homogêneo em duas dimensões [60]... No artigo [67] foram estudadas oscilações não-lineares nos condensados em duas dimensões e com comprimento de espalhamento variado no tempo, utilizando o método variacional e técnicas numéricas. Enquanto que no caso de condensado em três dimensões, cálculos numéricos foram realizados em [64], e considerações analíticas do problema são realizadas neste trabalho [78].

O objetivo deste trabalho é analisar as oscilações não-lineares em condensado de Bose-Einstein em três dimensões num potencial externo com simetria *esférica*, e com comprimento de espalhamento *periódico* no tempo. Para tal, empregamos o método variacional dependente do tempo e deduzimos a equação diferencial ordinária que governa a evolução da largura do condensado. Resultados obtidos vão ser comparados com resultados das simulações numéricas.

A seguir, resumimos em detalhes o conteúdo de cada capítulo dessa tese.

- No capítulo 2, analisaremos o fenômeno de condensação de Bose-Einstein em gases diluídos aprisionados. Descrevemos o tratamento de um gás ideal aprisionado por uma armadilha de potencial harmônico. Destacamos as modificações na dinâmica de tais sistemas na presença das interações. Para descrever o gás não-ideal, aplicamos a aproximação de campo médio. Usando a hipótese de que somente colisões binárias são relevantes para dinâmica do condensado em temperaturas extremamente baixas, deduzimos a equação de Gross-Pitaevskii para a evolução da função de onda do estado condensado. Com ajuda do método variacional gaussiano, estimamos o número crítico que leva ao colapso em caso do condensado com interações atrativas entre dois corpos.
- O capítulo 3 iniciamos com uma breve revisão dos conceitos fundamentais da teoria de espalhamento. Destacamos o caso de espalhamento a energias muito baixas e definimos o comprimento de espalhamento de dois corpos na onda s . A seguir, discutimos a relação entre o sinal do comprimento de espalhamento e o caráter repulsivo ou atrativo do potencial de interações entre partículas. Na seção 3.3, apresentamos um esquema simplificado da ocorrência de ressonância de Feshbach, usada frequentemente para obter variações no tempo do comprimento de espalhamento.
- No capítulo 4, aplicamos o método variacional dependente do tempo à equação

de Gross-Pitaevskii numa armadilha esférica, e obtemos a equação ordinária diferencial para evolução da largura do condensado. Analisaremos dois casos: o caso do condensado com interações entre dois corpos repulsivos, e o caso do condensado com interações entre dois corpos atrativos. Determinamos os pontos de equilíbrio da largura do condensado, e as frequências das pequenas oscilações nas suas proximidades.

- No capítulo 5, estudamos o caso do comprimento de espalhamento periódico no tempo. Obtemos as equações necessárias para estudos das ressonâncias não-lineares, principais e paramétricas. Comparamos resultados com resultados obtidos aplicando o método de Crank-Nicolson à equação de Gross-Pitaevskii original. Dessa forma, verificamos os resultados obtidos a partir do método variacional.
- Finalmente, no capítulo 6, destacamos as principais conclusões obtidas e perspectivas teóricas para outros trabalhos que visualizamos em sistemas não-lineares e condensados.

Capítulo 2

Condensação de Bose-Einstein em átomos aprisionados

2.1 As técnicas modernas de confinamento e resfriamento atômico

A ocorrência da CBE é uma manifestação macroscópica da chamada natureza quântica da matéria. Outras manifestações desta natureza são a super-condutividade e a superfluidez do hélio ^4He liquefeito. Como já foi mencionado, até dez anos atrás, ^4He superfluido era um exemplo único da ocorrência da CBE *. Porém, como se trata de um *líquido*, o ^4He apresenta uma forte interação entre seus constituintes, o que torna seu estudo teórico um problema de muitos corpos ainda em aberto. Por outro lado, sabia-se que a confirmação experimental de CBE seria muito mais fácil de verificar se pudesse ser realizada em *gases*, já que a teoria é muito mais simples. Porém, com gases, os pesquisadores encontraram outros problemas: como resfriar os *gases* em temperaturas muito baixas, sem a mudança de fase gás-líquido (ou sólido) presentes em quase todos os sistemas físicos conhecidos?

Na década de 80, o sucesso da produção e estabilização do hidrogênio atômico criou novas perspectivas para estudos de gases quânticos. Os átomos de hidrogênio eram inicialmente resfriados, depois aprisionados por um campo magnético e, por fim, resfriados por evaporação. Essa técnica se aproximou bastante de uma observação de CBE, não obtendo sucesso devido ao efeito de recombinação de átomos individuais que formavam moléculas. Posteriormente, aplicando procedimentos semelhantes em hidrogênio polarizado em spin, foram obtidas as primeiras observações de CBE em ^1H [7].

Assim, devido a problemas técnicos no caso do hidrogênio, os sistemas mais promissores eram os gases de metais alcalinos. O espectro de níveis de energia

*Em 1938 Kapitza, Allen e Misener demonstraram a superfluidez do HeII.

desses átomos pode ser excitado de modo mais eficiente na fase de resfriamento a laser e de confinamento óptico. Para esses casos, é inibido o processo de formação de moléculas, como acontece no caso do hidrogênio.

Hoje em dia, existem algumas técnicas de resfriamento atômico e não pretendemos aqui esgotar o assunto analisando em detalhes todo o processo de resfriamento. Esperamos aqui traçar apenas as linhas gerais desse processo e remetemos a [19] e [20] para uma revisão dessas técnicas [†].

Na primeira etapa do resfriamento os átomos alcalinos em temperatura ambiente são bombardeados por laser para serem freados. Nesse processo, a temperatura cai para aproximadamente $10\mu K$. Após essa etapa, ao mesmo tempo em que se desliga o feixe de laser, liga-se a armadilha magnética e os átomos ficam aprisionados em armadilhas magnéticas harmônicas, de forma que os átomos sintam a presença de um mínimo desse potencial, para onde eles irão quando formarem um CBE.

Para obter as temperaturas ainda mais baixas necessárias para observação da CBE introduziu-se uma poderosa técnica de resfriamento atômico: *o resfriamento evaporativo*. Essa técnica baseia-se no fato que se removermos as partículas mais energéticas de um sistema em equilíbrio, o restabelecimento do equilíbrio resfria o sistema inteiro. O processo de resfriamento evaporativo permite atingir temperaturas da ordem de $100nK$ (ordem de grandeza da temperatura do condensado), claro que às custas da perda de uma certa fração das partículas.

Para verificar se o gás está na fase condensada, é necessário olhar para a distribuição espacial dos átomos ou analisar a distribuição de momentos. Esta observação é feita iluminando-se a amostra com um feixe ressonante e observando sua absorção com uma câmara. Na região onde a amostra é mais densa há maior absorção e vice-versa. Normalmente a amostra atômica aprisionada tem dimensões tão pequenas ($0.1mm - 1mm$) que é possível a ocorrência de efeitos de difração durante sua interação com a luz [21]. Para evitar estes efeitos, desliga-se a armadilha confinante deixando a amostra atômica livre para se expandir num movimento balístico. Depois desta expansão livre a amostra ganha um tamanho suficiente para evitar efeitos de difração mas ainda reproduz a distribuição original.

Abaixo de uma certa temperatura crítica, as medidas da distribuição de momentos mostram um pico estreito sobreposto à distribuição térmica dos átomos. Isso é uma clara assinatura experimental de um condensado de Bose-Einstein. No espaço de configuração, ao atingirmos a temperatura crítica, a distribuição apresenta a menor largura da nuvem e um salto na densidade central. O valor da densidade no

[†]O desenvolvimento de técnicas de resfriamento a laser e explicações como os átomos eram resfriados deu o prêmio Nobel aos pesquisadores S. Chu, Bill Phillips e Cohen-Tanoudji em 1997.

centro de CBE é tipicamente da ordem de 10^{13} - 10^{15} átomos por centímetro cúbico. Comparando estas densidades com a densidade do ar em temperatura ambiente, 10^{19} átomos por centímetro cúbico, podemos claramente ver que se trata de um gás frio e diluído. Assim, colisões de três corpos são eventos raros e o tempo de vida de um condensado (de alguns segundos até um minuto) é suficientemente longo para realizar os experimentos.

2.2 Aspectos básicos da CBE para um gás ideal numa armadilha harmônica

Oitenta anos atrás, Einstein cumpriu a promessa feita por ocasião da publicação do trabalho de Bose e aplicou o resultados de Bose aos átomos de um gás livre. Ele usou as energias de partículas livres de massa m , $\epsilon_i = p_i^2/2m$ e calculou uma distribuição da ocupação dos níveis de energia tomando o “limite termodinâmico” que consiste em pensar em um número de átomos infinito em um volume também infinito, de modo que a densidade tenha um valor finito (ver o apêndice A). Setenta anos depois, a condensação de Bose-Einstein em um gás rarefeito de rubídio foi pela primeira vez produzida e observada num laboratório [4], contendo os átomos do gás confinados em uma armadilha magnética. Isso reorientou o interesse de estudos para uma situação física diferente: de um conjunto de partículas bosônicas confinadas dentro de *uma caixa de paredes rígidas*, para um conjunto *finito* de N átomos *presos em uma armadilha*.

Na maioria dos casos o potencial que confina os átomos pode ser aproximado por um oscilador harmônico de modo que, para entendermos o sistema, é primeiro preciso um tratamento de um conjunto de bósons em um potencial externo harmônico. Consideramos então um gás confinado por um potencial dado por

$$V_{ext} = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (2.1)$$

As suas superfícies equipotenciais são em geral elipsóides cuja simetria depende dos valores das freqüências. Para determinar a simetria do potencial, é conveniente definir um parâmetro $\lambda = \omega_z/\omega_\perp$, onde $\omega_\perp = \omega_x = \omega_y$, que fixa a simetria do problema: para $\lambda = 1$ o potencial é esfericamente simétrico, para $\lambda > 1$ o potencial tem simetria de “panqueca” ou “disco”, enquanto que para $\lambda < 1$ a simetria é de “charuto”.

Os níveis quânticos de energia de uma partícula neste potencial harmônico são dados pela expressão:

$$\epsilon_{n_x n_y n_z} = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega_x + (n_y + \frac{1}{2})\hbar\omega_y + (n_z + \frac{1}{2})\hbar\omega_z \quad (2.2)$$

onde n_x , n_y e n_z são três números quânticos inteiros não-negativos. A energia do estado fundamental ($n_x = n_y = n_z = 0$) é dada por $\epsilon_{000} = \frac{3}{2}\hbar\bar{\omega}$ onde $\bar{\omega}$ é a média aritmética das frequências de aprisionamento:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_x + \omega_y + \omega_z}{3}. \quad (2.3)$$

Vamos agora admitir que haja uma ocupação enorme no estado fundamental e calcular em que temperatura isto deve ocorrer.

A uma determinada temperatura T o número de partículas que em média ocupam o estado de energia ϵ é dado por [23]

$$N_\epsilon = \frac{p_\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \quad (2.4)$$

onde p_ϵ é a degenerescência do estado de energia ϵ , μ é o potencial químico e $\beta = (k_B T)^{-1}$. O potencial químico é um importante parâmetro termodinâmico que em geral depende do número de partículas e da temperatura. Se ele apresenta o mesmo valor em todos os pontos do sistema, este é dito estar em equilíbrio termodinâmico. A expressão (2.4) revela uma limitação importante para o potencial químico: como N_ϵ não pode ser negativo, é preciso que $\epsilon_{n_x n_y n_z} > \mu$ para todas energias $\epsilon_{n_x n_y n_z}$. Em outras palavras, o potencial químico μ deve ser menor que o menor dos $\epsilon_{n_x n_y n_z}$ ou $\mu \leq \epsilon_{000}$. Quando o potencial químico se aproxima da energia do estado menos energético:

$$\mu \rightarrow \epsilon_{000} = \frac{3}{2}\hbar\bar{\omega}, \quad (2.5)$$

o número de partículas no estado fundamental N_0

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{000}-\mu)} - 1} \quad (2.6)$$

torna-se macroscópico. Este é o mecanismo numérico por trás do fenômeno de CBE. Assim, quando μ se aproxima do limite superior (2.5), o número total de partículas é dado por

$$N = N_0 + \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{1}{e^{\beta\hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1}. \quad (2.7)$$

Para calcular a soma acima, geralmente usa-se a aproximação semiclássica para os estados excitados [24] e assume-se que o espaçamento dos níveis de energia torna-se muito pequeno quando $N \rightarrow \infty$, de modo que se pode substituir (2.7) por

$$N = N_0 + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dn_x dn_y dn_z}{e^{\beta\hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1}. \quad (2.8)$$

A precisão da aproximação semiclássica (2.8) é boa quando $k_B T \gg \hbar \omega_{ho}$, onde ω_{ho} é a média geométrica

$$\omega_{ho} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}. \quad (2.9)$$

Resolvendo-se (2.8), encontra-se

$$N - N_0 = \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_{ho}} \right)^3 \quad (2.10)$$

onde $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1.202$, chamada função de Zeta de Riemann. Da última expressão pode-se extrair a temperatura crítica de transição T_c assumindo que $N_0 = 0$ para $T = T_c$:

$$k_B T_c = \hbar \omega_{ho} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} = 0.94 \hbar \omega_{ho} N^{1/3}. \quad (2.11)$$

Esta expressão permite calcular a que temperatura é esperada a ocorrência da CBE quando são conhecidas as características da armadilha e o número de partículas. Para um valor “típico” de frequência da armadilha de $200 Hz$, a temperatura crítica T_c é da ordem de $200 nK$ para $N = 10000$, e $400 nK$ para $N = 100000$ partículas. Os valores de T_c medidos são muito próximos ao do gás ideal (2.11). Assim, o modelo de oscilador harmônico sem interação guiou os experimentais ao valor adequado. †

Uma vez conhecida a temperatura crítica podemos determinar a fração de partículas no estado fundamental (N_0/N) como função da temperatura [25]:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3, \quad T < T_c. \quad (2.12)$$

Este tipo de curva (Figura 2.1), característica de uma *transição de fase*, é uma “assinatura” marcante da ocorrência da CBE. Ela mostra a dependência com a temperatura da fração condensada para uma temperatura $T < T_c$, ou seja, para uma temperatura *finita* teremos parte do gás condensado e ainda uma parte termicamente distribuída. É fácil ver que, à temperatura zero, todas as partículas estarão na fase condensada. Para $T > T_c$, o potencial químico é menor que ϵ_{000} e depende de N , enquanto que a população do estado mais baixo é da ordem de 1 ao invés de N .

Cálculos exatos executados para soma (2.7) mostram que a fração de condensado N_0/N é menor que a previsão (2.12), e a transição é arredondada. Porém, os efeitos

† Nas armadilhas disponíveis, com N variando de alguns milhares a vários milhões, a temperatura crítica $k_B T_c$ é de 20 a 200 vezes maior do que $\hbar \omega_{ho}$, o que significa que a aproximação semiclássica usada em (2.8) deve funcionar bem.

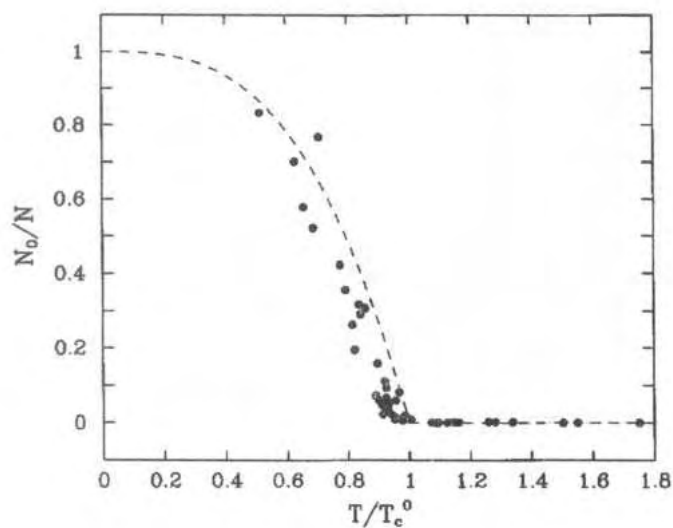


Figura 2.1: Fração condensada de átomos de ^{87}Rb como função de T/T_c . Os pontos correspondem a dados experimentais [26] e a curva ao modelo do gás ideal não-uniforme, dado pela equação (2.12).

de tamanho finito são significativos somente para valores de N menores que aproximadamente 10^4 . Já para $N = 100000$ obtém-se praticamente os mesmos resultados (ver por exemplo [27]).

O limite termodinâmico para sistemas em observação é definido por $N \rightarrow \infty$, $\omega_{ho} \rightarrow 0$, e o produto $N\omega_{ho}^3$ constante e finito [24, 49]. Com esta definição, a temperatura de transição (2.11) é bem definida no limite termodinâmico. Porém, o número de átomos nas armadilhas experimentais não é infinito. Em consequência, o limite termodinâmico nunca é exatamente atingido e um dos efeitos é a ausência de descontinuidades nas funções termodinâmicas. Então, estritamente falando, a CBE nesses gases aprisionados não é uma transição de fase [24]. Na prática, a ocupação macroscópica do estado de mais baixa energia ocorre de uma maneira muito abrupta quando a temperatura é diminuída, e pode ser facilmente observada.

A observação de qualquer transição de fase em um sistema físico exige o acompanhamento de suas propriedades termodinâmicas e a constatação de mudanças de comportamento ao cruzamos a temperatura crítica. Como no caso do oscilador harmônico, o resfriamento é seguido de um acúmulo de átomos no centro do potencial, a observação da distribuição espacial da amostra como função da temperatura pode revelar a ocorrência da CBE.

A densidade de átomos no estado fundamental é dada através da expressão:

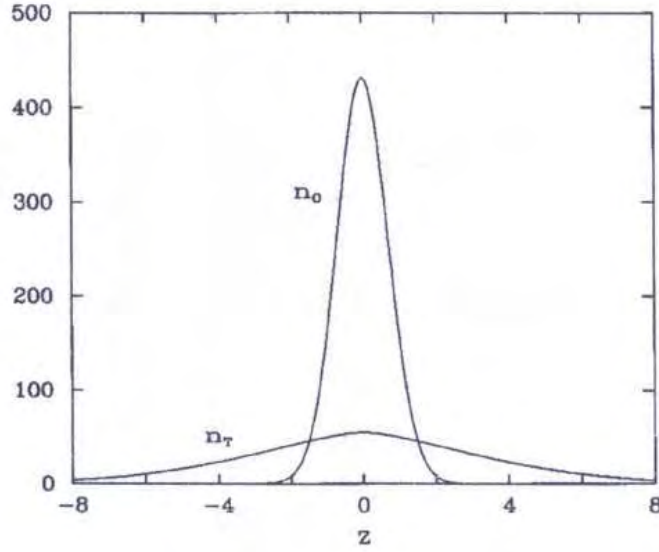


Figura 2.2: Previsões para a densidade de coluna de 5000 bósons sem interação em uma armadilha esférica à temperatura $T = 0.9T_c$. A curva mais estreita corresponde à densidade do condensado e a curva mais larga corresponde à densidade da nuvem térmica. O eixo x tem unidades de l_0 e o eixo y unidades de l_0^{-2} . As mesmas curvas podem ser identificadas com as distribuições de momento das partículas condensadas e não condensadas, substituindo-se a abscissa e a ordenada por p_z (em unidades de l_0^{-1}) e pela distribuição de momento (em unidades de l_0^2), respectivamente [24].

$$n_0(\vec{r}) = N_0 |\phi_0(\vec{r})|^2 \quad (2.13)$$

onde $\phi_0(\vec{r})$ representa a função de onda de uma partícula no potencial harmônico:

$$\phi_0(\vec{r}) = \left(\frac{m\omega_{ho}}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right]. \quad (2.14)$$

A função de onda $\phi_0(\vec{r})$ é uma gaussiana com largura média dada por

$$l_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{ho}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Este parâmetro pode ser interpretado como a largura da nuvem condensada para o caso em que os átomos não interagem. Assim, o tamanho da nuvem é independente de N e fixado pelo comprimento do oscilador harmônico. As armadilhas usadas nos experimentos possuem l_0 tipicamente iguais a $1\mu m$.

A temperaturas não nulas, somente parte dos átomos ocupam o estado fundamental, os demais são distribuídos nos estados excitados. O raio da nuvem térmica

pode ser estimada grosseiramente assumindo $k_B T \gg \hbar \omega_{ho}$. As partículas nos estados excitados comportam-se como partículas clássicas e a distribuição estatística de Boltzmann pode ser aplicada:

$$n_t \cong \exp[-V_{ext}/k_B T].$$

Para o caso do potencial harmônico $V_{ext} = \frac{1}{2} m \omega_{ho}^2 r^2$, a largura da nuvem térmica é maior que l_0 :

$$R_t = l_0 \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_{ho}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

O uso de uma função de Bose não muda significativamente esta estimativa. Como a grandeza l_0 está associada ao tamanho da nuvem do condensado, podemos ver que a nuvem térmica apresenta uma largura maior que a largura do condensado.

A CBE em armadilhas harmônicas é verificada com o aparecimento de um pico estreito sobre uma distribuição mais larga, tanto no espaço das coordenadas quanto no espaço dos momentos. Isso é uma característica peculiar de gases de Bose *apri- sionados*. No caso de um gás uniforme, onde as partículas condensam em um estado de momento nulo, a CBE não pode revelar-se no espaço das coordenadas.

Vamos agora analisar as mudanças nas propriedades de um condensado de Bose-Einstein quando as interações entre as partículas são levadas em conta.

2.3 Efeitos de interações no condensado de Bose-Einstein

A hamiltoniana de muitos corpos descrevendo N bósons interagindo, confinados por um potencial externo V_{ext} , é dada por [24]

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \quad (2.17)$$

onde $\hat{\Psi}(\vec{r})$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$ são os operadores de campo bosônicos que aniquilam e criam uma partícula na posição \vec{r} e $V(\vec{r} - \vec{r}')$ é o potencial interatômico de dois corpos. A existência do último termo na hamiltoniana (2.17), o termo de interações entre os bósons, faz que o sistema se torne intratável tanto quanto qualquer outro sistema de muitos corpos. A dinâmica de cada um dos bósons depende da dinâmica de outros, ao contrário do que acontece no caso de gás livre.

Uma abordagem que simplifica a análise de tais sistemas é a *aproximação de campo médio* (ACM). Essa aproximação consiste em tratar a dinâmica de uma partícula levando em conta apenas o efeito “médio” de sua interação com as outras.

Este efeito médio é descrito simplesmente por um potencial adicional, ao qual cada uma das partículas está sujeita, que depende, no entanto, do estado das demais. Como o estado de cada uma das partículas que contribui para esse potencial adicional depende dele (do potencial), o que se perde nesse tipo de tratamento é a linearidade característica das equações da mecânica quântica. Assim, a aproximação de campo médio resulta em uma equação *não-linear*.

2.3.1 A equação de Gross-Pitaevskii (EGP)

A idéia básica para a descrição de campo médio de um gás diluído foi formulada por Bogoliubov em 1947 [28]. O ponto chave consiste em separar a contribuição do condensado para o operador de campo bosônico:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) \approx \sqrt{n_0} + \hat{\theta}(\vec{r}),$$

onde $\sqrt{n_0}$ = c-número = *const*, e $\hat{\theta} \ll \sqrt{n_0}$ ($n_0 = N_0/V$ com N_0 número de bósons no condensado). Tratando o operador $\hat{\theta}$ como uma pequena perturbação, Bogoliubov desenvolveu a teoria de “primeira ordem” para o gás uniforme de bósons. A mesma idéia pode ser aplicada para o caso não-uniforme expandindo a teoria para as ordens mais baixas em $\hat{\theta}$. A principal diferença é que, no caso não-uniforme, obtém-se uma teoria de “ordem zero” não trivial.

A generalização da teoria de Bogoliubov para o caso de configurações dependentes de tempo e não-uniformes é dada por

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) \approx \Psi(\vec{r}, t) + \hat{\theta}(\vec{r}, t). \quad (2.18)$$

Aqui, $\Psi(\vec{r}, t)$ é a função complexa definida como $\Psi(\vec{r}, t) \equiv \langle \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rangle$, cujo módulo fixa a densidade do condensado $n_0(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$. A decomposição (2.18) é útil se $\hat{\theta}(\vec{r}, t)$ é pequeno, isto é, quando a redução do condensado é pequena. Entretanto, em um gás frio e diluído, a redução do condensado devido às interações é pequena, menor que 1%, e pode ser desprezada.

A função $\Psi(\vec{r}, t)$ é um campo clássico com o significado de um *parâmetro de ordem*, que é freqüentemente chamado de *função de onda do condensado*. Para deduzir a equação para esta função, usamos a equação de Heisenberg:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}) + \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}', t) d^3 r' \right] \hat{\Psi}(\vec{r}, t). \quad (2.19)$$

Substituímos o operador $\hat{\Psi}$ pelo campo clássico Ψ e usamos o fato que para um gás diluído e frio, as colisões entre dois átomos são caracterizadas por um parâmetro

único: o comprimento de espalhamento de onda s (ver o capítulo 3). Isto permite que se substitua $V(\vec{r}' - \vec{r})$ na equação (2.19) por uma interação efetiva

$$V(\vec{r}' - \vec{r}) = g\delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad (2.20)$$

onde o g está relacionado ao comprimento de espalhamento de dois corpos a_s :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (2.21)$$

Este procedimento resulta em equação para o parâmetro de ordem:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}) + g|\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right) \Psi(\vec{r}, t). \quad (2.22)$$

Esta equação foi deduzida independentemente por E. P. Gross e L. P. Pitaevskii no ano de 1961 [29]. Ela descreve a dinâmica de um gás não-ideal e não-uniforme em $T = 0$. Sua validade é baseada na condição de que o comprimento de espalhamento de onda s é muito menor que a distância média entre os átomos: $n|a_s|^3 \ll 1$ (n é a densidade média do gás). A equação (2.22) é uma equação clássica no sentido que Ψ não é um operador, mas ainda contém a constante \hbar explicitamente.

A equação de Gross-Pitaevskii (2.22) pode também ser obtida usando o procedimento variacional [30]. A energia do sistema é dada por

$$E(\Psi) = \int d\vec{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi(\vec{r})|^2 + V(\vec{r}) |\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} g |\Psi(\vec{r})|^4 \right]. \quad (2.23)$$

O primeiro termo na integral é a energia cinética do condensado E_{cin} , o segundo é a energia do oscilador harmônico E_{ho} , enquanto que o último é a energia de interação de campo médio.

Para obter a forma de Ψ adequada, minimizamos a energia (2.23) com respeito a Ψ e Ψ^* , onde $*$ significa o complexo conjugado. A condição de conservação do número de átomos no condensado pode ser levada em conta através de um multiplicador de Lagrange μ (o potencial químico). Em outras palavras, minimizamos a grandeza $E - \mu N$ para μ fixo. O resultado da conta é de novo a equação do tipo Schrödinger não-linear, conhecida como *equação de Gross-Pitaevskii* independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \Psi(\vec{r}) + V_{ext}(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) + g|\Psi(\vec{r})|^2 \Psi(\vec{r}) = \mu \Psi(\vec{r}). \quad (2.24)$$

2.3.2 Efeito da interação no estado fundamental

Como já foi mencionado, a aproximação usada na seção anterior é válida quando o comprimento de espalhamento é muito menor que a distância entre as partículas: $n|a_s|^3 \ll 1$ [§]. Isto vale quando o sistema é diluído ou fracamente interagente. Entretanto, isso não implica necessariamente que os efeitos de interações são pequenos. Primeiro, vamos estimar estes efeitos somente qualitativamente.

Consideramos um condensado numa armadilha harmônica e esfericamente simétrica: $V_{ext} = m\omega_{ho}^2 r^2/2$. A largura da nuvem do condensado é $\sim R$ e a energia potencial de uma partícula dentro do potencial é simplesmente $\sim m\omega_{ho}^2 R^2/2$. A partir do princípio de incerteza de Heisenberg o momento do átomo é da ordem de \hbar/R , e a energia cinética é da ordem de $\hbar^2/2mR^2$ por partícula. Assim, em sistema sem interações, a energia total varia com $1/R^2$ para valores pequenos de R , com R^2 para R grande e tem um mínimo quando energia potencial e energia cinética são iguais. O valor correspondente para largura do condensado é

$$l_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{ho}} \right)^{1/2}.$$

Consideramos agora os efeitos de interações. A densidade das partículas é $n \sim N/R^3$ e energia de interação é da ordem de $ng \sim gN/R^3$, onde g é o parâmetro dado por (2.21). Este parâmetro pode ser tanto positivo quanto negativo e o efeito das interações será qualitativamente diferente conforme o caso. Para interações repulsivas, $g > 0$, o termo adicional de energia, variando com R^{-3} , empurra o mínimo da energia para maiores valores de R . Conseqüentemente, a largura da nuvem aumenta e a densidade no centro do condensado diminui (figura 2.3).

Em caso de interações atrativas, $g < 0$, a energia diverge para $-\infty$ com $-1/R^3$ quando $R \rightarrow 0$. Para número de partículas suficientemente pequeno, existe mais um mínimo da energia, um mínimo local para o valor da largura da nuvem menor do que para o caso sem interações. Quando o número de partículas aumenta, o poço de energia se torna menos profundo, e a partir do *número de partículas crítico*, este mínimo desaparece. Ultrapassado esse número crítico de partículas, o sistema colapsa.

A existência de um limite para o número de átomos no caso atrativo foi demonstrada experimentalmente por Sackett *et al.* [31] com átomos de ^7Li armadilhados. Atingido esse número máximo o sistema implodia e a seguir explode. Este fenômeno foi também observado experimentalmente com átomos de ^{85}Rb condensados [32] e é denominado de Bosenova em analogia ao fenômeno de supernova que ocorre em

[§]No experimentos realizados $n|a_s|^3 < 10^{-3}$.

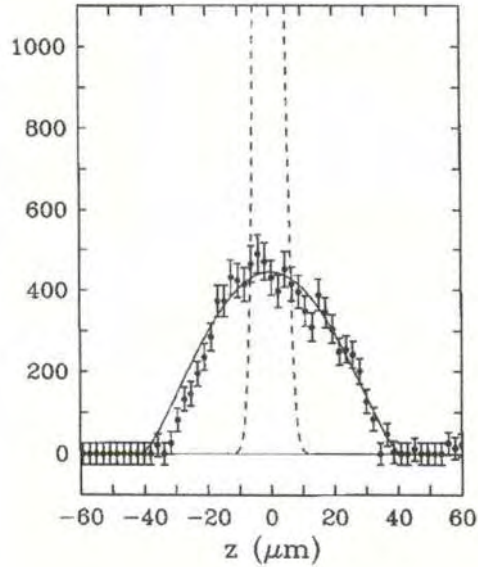


Figura 2.3: Densidade de distribuição de átomos de ^{23}Na em uma armadilha, como função da coordenada axial. A linha sólida corresponde à previsão da teoria de campo médio para interações repulsivas de dois corpos. A linha tracejada mostra a previsão para um gás ideal. Pontos correspondem a dados experimentais [24].

estrelas para uma determinada massa crítica. Na verdade, o número crítico depende não só do número de átomos. De forma mais geral, podemos definir uma constante de criticalidade

$$k_c = N \frac{|a_s|}{l_0}. \quad (2.25)$$

A determinação desse número pode ser feita por um cálculo aproximado através de um método variacional usando uma gaussiana como “ansatz” (veja [30] ou [24]).

Dentro do espírito da aproximação de campo médio, podemos supor que o estado de N bósons condensados é descrito por uma função de onda macroscópica $\Psi(\vec{r})$. Já concluímos que, em temperatura zero e em sistemas ideais, a função de onda do condensado corresponde ao estado fundamental do oscilador harmônico que serve como armadilha:

$$\Psi_0(\vec{r}) = \frac{N^{1/2}}{\pi^{3/4}(a_1 a_2 a_3)^{1/2}} e^{-x^2/2a_1^2} e^{-y^2/2a_2^2} e^{-z^2/2a_3^2}, \quad (2.26)$$

onde a_i , ($i = 1, 2, 3$) são dados por $a_i^2 = \hbar/m\omega_i$.

No caso quando levamos em conta interações entre átomos, a presença do potencial de campo médio modifica a função de onda. Vamos impor que neste caso a função de onda seja também uma gaussiana com larguras b_i a serem determinadas:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{N^{1/2}}{\pi^{3/4}(b_1 b_2 b_3)^{1/2}} e^{-x^2/2b_1^2} e^{-y^2/2b_2^2} e^{-z^2/2b_3^2}. \quad (2.27)$$

O passo seguinte será então determinar os valores de b_i que minimizam a energia (2.23). Isto é o que se chama de *aproximação gaussiana* ao problema variacional.

Substituindo o “ansatz” (2.27) em (2.23) obtemos a seguinte expressão:

$$E(b_1, b_2, b_3) = N \sum_i \hbar \omega_i \left(\frac{a_i^2}{4b_i^2} + \frac{b_i^2}{4a_i^2} \right) + \frac{N^2 g}{2(2\pi)^{3/2} b_1 b_2 b_3}. \quad (2.28)$$

O mínimo da energia corresponde ao mínimo da energia por partícula, quando os b_i são variados, com todos os outros parâmetros constantes. Para identificar esse mínimo é conveniente usar as variáveis adimensionais:

$$x_i \equiv \frac{b_i}{a_i}. \quad (2.29)$$

Analisamos os zeros das derivadas $dE(x_1, x_2, x_3)/dx_i$ ($i = 1, 2, 3$), e obtemos as seguintes equações:

$$\frac{1}{2} \hbar \omega_i \left(x_i^2 - \frac{1}{x_i^2} \right) - \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{Ng}{l_0^3} \frac{1}{x_1 x_2 x_3} = 0. \quad (2.30)$$

No caso geral, resolvendo este sistema de três equações acopladas, obtemos os parâmetros variacionais b_i . Quando a interação entre os bósons é efetivamente repulsiva, o valor do comprimento de espalhamento a_s é positivo. Um caso de particular interesse é o chamado “limite de Thomas-Fermi”. Neste caso, o termo da energia cinética se torna pequeno em comparação com a energia de interação, e pode ser desprezado.

A figura (2.4) mostra dependência da energia por partícula E/N do condensado numa armadilha simétrica, com relação ao parâmetro variacional b ($= b_1 = b_2 = b_3$) para valores diferentes de Na_s/l_0 . O caso de interações atrativas corresponde ao valores de comprimento de espalhamento a_s negativo. Como a figura revela, para valores de $N|a_s|/l_0$ menores do que um valor crítico, existe um mínimo local. Esse mínimo é separado da região de colapso por uma “barreira” o que garante uma situação de *metaestabilidade* para o sistema de bósons. À medida que $N|a_s|/l_0$ aumenta, o efeito protetor da barreira diminui levando finalmente ao colapso do sistema. Todas essas propriedades foram observadas no caso de condensados atômicos de ${}^7\text{Li}$, para o qual $a_s \sim -1.5\text{nm}$. Nas condições experimentalmente utilizadas, o número máximo

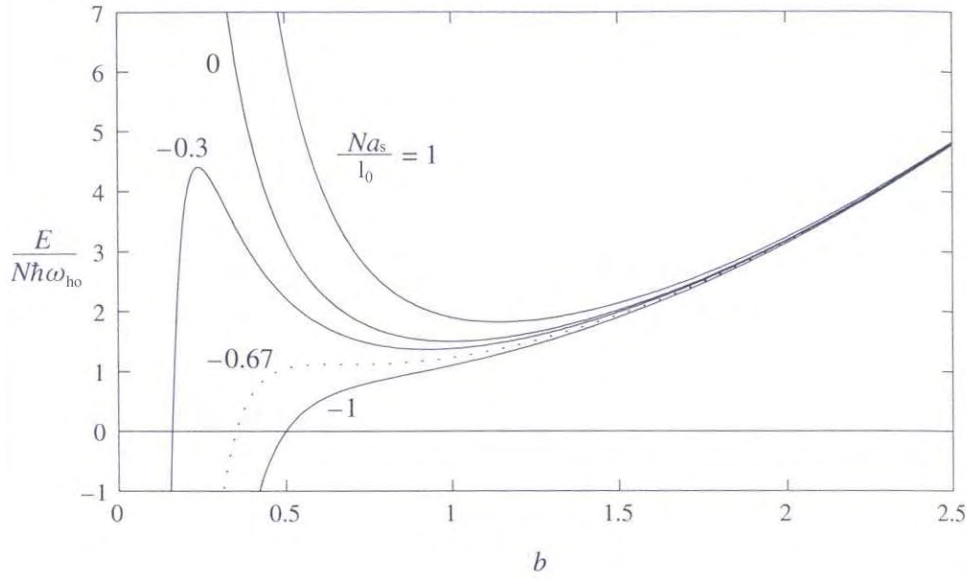


Figura 2.4: Expressão variacional para energia por partícula para uma armadilha isotrópica e harmônica como função do parâmetro variacional b , e diferentes valores de parâmetro Na_s/l_0 . A curva pontilhada corresponde ao valor crítico de aproximadamente -0.67 , quando o condensado torna-se instável [30].

de átomos que pode ser acumulado sem o que sistema colapse é de alguns milhares [33].

O número crítico pode ser calculado a partir das condições que a primeira e segunda derivada de E/N com respeito a b são iguais a zero. Dessa maneira, o método variacional gaussiano mostra o seguinte valor crítico:

$$k_c = N \frac{|a_s|}{l_0} = \frac{2(2\pi)^{1/2}}{5^{5/4}} \approx 0.67. \quad (2.31)$$

A constante de criticalidade pode ser calculada a partir da equação de Gross-Pitaevskii, sem uso da aproximação variacional gaussiana. O número crítico foi calculado por grupos das ref.[34] e [35] usando as técnicas numéricas de propagação no tempo imaginário e de chute, respectivamente. O valor obtido para o caso de simetria esférica é $k_c = 0.575$.

Para simetria cilíndrica, o valor previsto pelo cálculo numérico é de 0.550 [36]. Experimentalmente, os pesquisadores do grupo de JILA [37] mediram valor de $0.547(58)$. Esses resultados mostram que o campo médio é uma boa descrição, pelo menos para a determinação do número crítico.

A EGP prevê que ultrapassando o limite crítico k_c o condensado irá colapsar indefinidamente para uma singularidade, i.e., o raio quadrático médio irá a zero ¶. Entretanto, à medida que o sistema vai se contraindo sua densidade aumenta. Ficam então favorecidos processos de colisão inelástica de três corpos com perdas, o que remove a singularidade e impede que o condensado colapse para um ponto. Estudos nessa direção foram realizados por pesquisadores nas ref. [39].

¶Estudos de colapso na equação de Schrödinger não-linear foram originalmente realizados nas áreas de plasma e óptica [38]

Capítulo 3

Comprimento de espalhamento e ressonância de Feshbach

Os condensados atômicos de Bose-Einstein produzidos em laboratório são sistemas frios e, também, sistemas rarefeitos: as densidades típicas são de 10^{13} - 10^{15} átomos por centímetro cúbico. A natureza diluída do gás faz que a distância média entre os átomos seja tipicamente mais que dez vezes o alcance das forças interatômicas. Isto significa que, quando dois átomos interagem, a probabilidade de que um terceiro átomo esteja por perto (podendo participar da interação dos dois) é bastante pequena. Como os átomos do condensado são muito frios, os processos de colisão são essencialmente elásticos. O fato de ser necessária a conservação de momento e energia é que impede a formação de moléculas a partir da colisão de dois corpos [40]. Interações entre três corpos limitam a vida do condensado, causando a formação das moléculas diatômicas, liberando energia da ordem de alguns Kelvins. Quando dois átomos não ligados passam para um dos estados ligados, é preciso que eles se livrem de parte da energia que possuem. Assim, a participação de um terceiro átomo no processo é necessário, pois ele carrega consigo a energia sobressalente. Esse mecanismo, chamado *recombinação de três corpos*, é inibido pela baixa densidade do condensado. Desta maneira, a vida dos condensados chega até vários segundos.

Em geral, o processo de colisão em energias muito baixas é independente dos detalhes do potencial de dois corpos, e pode ser muito bem caracterizado através de um único parâmetro diretamente relacionado com a seção de choque para espalhamento dos dois corpos. Portanto, uma breve revisão da teoria de espalhamento vai ser apresentada na seguinte seção.

3.1 Conceitos básicos da teoria de espalhamento

Vamos primeiro introduzir alguns conceitos básicos necessários para descrição de colisão de duas partículas distinguíveis e pontuais no estado fundamental [41]. Partículas interagem entre si através de um potencial central $V(r)$ dependendo somente da distância r entre as partículas. A energia de colisão é dada por $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ onde \vec{k} representa o vetor do momento relativo e μ a massa reduzida das duas partículas. No caso quando as partículas não interagem, $V(r) = 0$, a função de onda que descreve o movimento relativo é dada por onda plana: $\Psi(\vec{r}) \propto e^{i\vec{k}\vec{r}}$. Quando $V(r) \neq 0$, na região assintótica ($r \rightarrow \infty$) a função de onda tem a forma da superposição de uma onda plana com uma onda esférica, modulada pela *amplitude de espalhamento* $f_k(\theta)$ (ver o apêndice B):

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \rightarrow \left[e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f_k(\theta) \right]. \quad (3.1)$$

A amplitude de espalhamento se relaciona com a seção de choque diferencial simplesmente como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2. \quad (3.2)$$

Um dos métodos usados freqüentemente na teoria de espalhamento é o método de *ondas parciais*. A função de onda plana e também a função (3.1) podem ser expandidas em ondas parciais (as autofunções simultâneas do espectro contínuo do hamiltoniano e do momento angular do sistema). Comparando as duas expansões pode se concluir que, na região assintótica, as duas soluções diferem apenas por defasagens δ_l , onde o índice l corresponde ao autovalor do momento angular. Amplitude de espalhamento e seção de choque total podem ser expressas em termos dessas defasagens:

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta), \quad (3.3)$$

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (3.4)$$

3.1.1 Espalhamento a energias muito baixas

No limite de energias muito baixas, para um potencial de curto alcance cuja extensão espacial é caracterizada pelo comprimento R , $kR \ll 1$. Nesse limite, as

defasagens se aproximam de zero como $\delta_l \propto k^{2l+1}$. Portanto, apenas o termo de espalhamento $l = 0$ contribui apreciavelmente para a expansão em ondas planas da amplitude de espalhamento:

$$f_k(\theta) \rightarrow \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0 \quad kR \ll 1. \quad (3.5)$$

Como $P_{l=0}(\theta) = 1$, a seção de choque diferencial se torna isotrópica (independente de θ):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0.$$

No limite $k \rightarrow 0$, a seção de choque permanece finita e portanto a defasagem δ_0 deve se anular linearmente com k . A quantidade introduzida para caracterizar a seção de choque em energias muito próximas de zero é

$$a_s \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0(k)}{k} \quad (3.6)$$

que tem dimensões de comprimento e é chamada **comprimento de espalhamento**. Assim, no limite de energias muito baixas, a seção de choque é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a_s^2.$$

Integração sobre o ângulo sólido $d\Omega$ resulta em $\sigma = 4\pi a_s^2$. Porém, não levamos em conta a indistinguibilidade das partículas em temperaturas muito baixas. Para bósons, a função de onda é simétrica pela troca das duas partículas, e para férmions, função de onda deve ser antisimétrica. Troca de partículas corresponde às transformações das coordenadas $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, ou $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ e $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, onde φ é ângulo azimutal. Portanto, a seção de choque é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2 \quad (3.7)$$

onde o sinal $+$ corresponde aos bósons, e o sinal $-$ aos férmions. Isso leva ao seguinte resultado

$$\sigma = 8\pi a_s^2 \quad (3.8)$$

para bósons, enquanto para férmions a seção de choque total se anula.

3.2 Pseudo-potencial

Voltamos agora para estudos dos condensados bosônicos com interações de dois corpos. Nestes estudos, poderíamos usar um potencial de interação realístico. Entretanto, mostramos que, em baixas temperaturas, a seção de choque é independente

do ângulo de espalhamento e é dada simplesmente por $\sigma = 8\pi a_s^2$. Nestas condições qualquer modificação do potencial de interação que *preserva o valor de a_s* se torna irrelevante. Em outras palavras, o parâmetro que determina as propriedades do condensado real é apenas o comprimento de espalhamento. *Qualquer* interação que corresponda ao mesmo comprimento de espalhamento será igualmente boa. Isso abre caminho para a substituição do potencial real entre as partículas por qualquer outro que leve ao mesmo valor de a_s .

Um potencial que satisfaz esses requisitos e é mais conveniente para o uso, é o chamado “potencial de contato” ou potencial de alcance zero (“zero range”) [23]. Nesse caso, os bósons interagem apenas quando estão no mesmo ponto:

$$V(\vec{r}' - \vec{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad (3.9)$$

onde $\delta(\vec{r})$ é a função delta de Dirac. Este pseudo-potencial foi deduzido para duas partículas *livres* que interagem através de um potencial de “esferas duras” [45]. Entretanto, em condensados de Bose-Einstein os átomos não são livres. Eles sentem um potencial externo, geralmente harmônico. Estudos da influência do potencial externo no pseudo-potencial foram realizados em [46]. Resultados mostram que o potencial (3.9) representa uma boa aproximação mesmo na presença do potencial externo harmônico. Isto justifica o uso deste potencial para dedução da equação de Gross-Pitaevskii. Por outro lado, o pseudo-potencial (3.9) foi deduzido assumindo simetria esférica das interações. Recentemente, esta derivação foi generalizada para o caso de interações anisotrópicas [47].

Dependendo do sinal do comprimento de espalhamento, o potencial de contato pode ser repulsivo ou atrativo. Na realidade, o caráter da interação não é completamente determinado pelo sinal do comprimento de espalhamento. A fim de esclarecer um pouco esta relação, vamos usar uma imagem esquemática do que acontece em um problema quântico de espalhamento.

3.2.1 O sinal do comprimento de espalhamento e interação efetiva

Uma interpretação “geométrica” do comprimento de espalhamento pode ser obtida da seguinte forma [42]. Seja $u_0(r)/r$ uma onda radial *livre* construída de forma a coincidir, na região assintótica, com a solução que inclui o potencial. Assim, u_0 tem a seguinte forma:

$$u_0 = c \sin(kr + \delta_0).$$

Quando $\delta_0 \neq 0$, a função u_0 não se anula na origem. Nesse caso é possível fixar a seguinte normalização: $c = 1/\sin \delta_0$, que leva ao resultado

$$u_0(r) = \frac{1}{\sin \delta_0} \sin(kr + \delta_0) = \cos(kr) + \sin(kr) \cot \delta_0.$$

Tomando agora o limite $k \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow 0} u_0(r) = 1 + \lim_{k \rightarrow 0} kr \cot \delta_0 = 1 + \left(\lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0 \right) r \equiv 1 - \frac{r}{a_s},$$

onde

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0 = \lim_{k \rightarrow 0} k \frac{1}{\sin \delta_0} = -\frac{1}{a_s}. \quad (3.10)$$

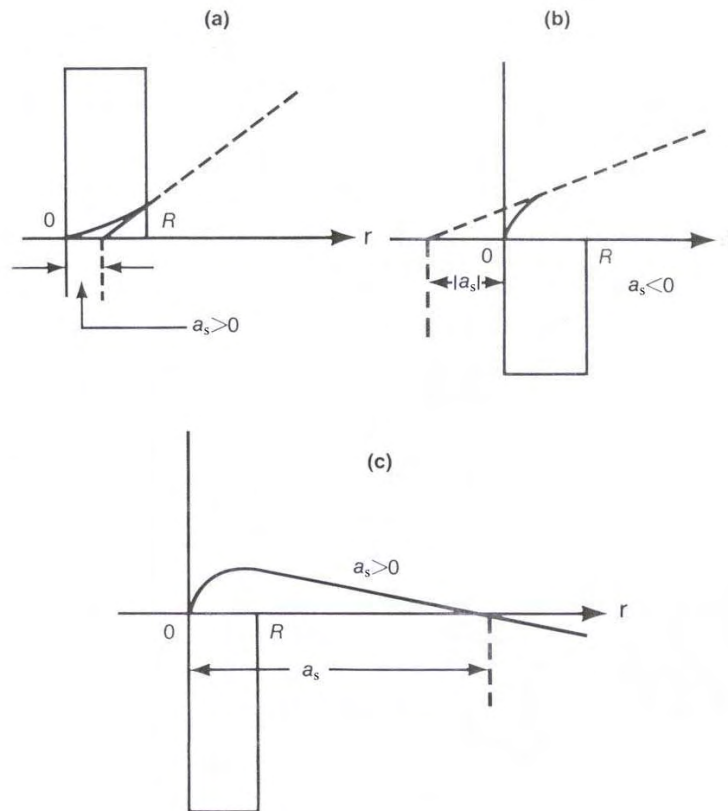


Figura 3.1: Função $u_0(r)$ (linha tracejada) para potencial a) repulsivo, b) e c) atrativo [43]. Ver o texto para explicações.

No limite $k \rightarrow 0$ a função $u_0(r)$ se reduz a uma reta que tem o valor um para $r = 0$ e que corta o eixo da abscissa no ponto $r = a_s$. A figura (3.1) ilustra essa construção geométrica para comprimento de espalhamento no caso de potencial a)

repulsivo, b) e c) atrativo. As figuras revelam que existe uma relação entre o sinal do comprimento de espalhamento a_s e o caráter repulsivo ou atrativo do potencial [48]. Para potenciais repulsivos $a_s > 0$, e $a_s < 0$ para potenciais atrativos *quando não há nenhum estado ligado com $l=0$* . A figura (3.1c) mostra o caso quando o potencial atrativo admite estado ligado com $l = 0$ e $a_s > 0$.

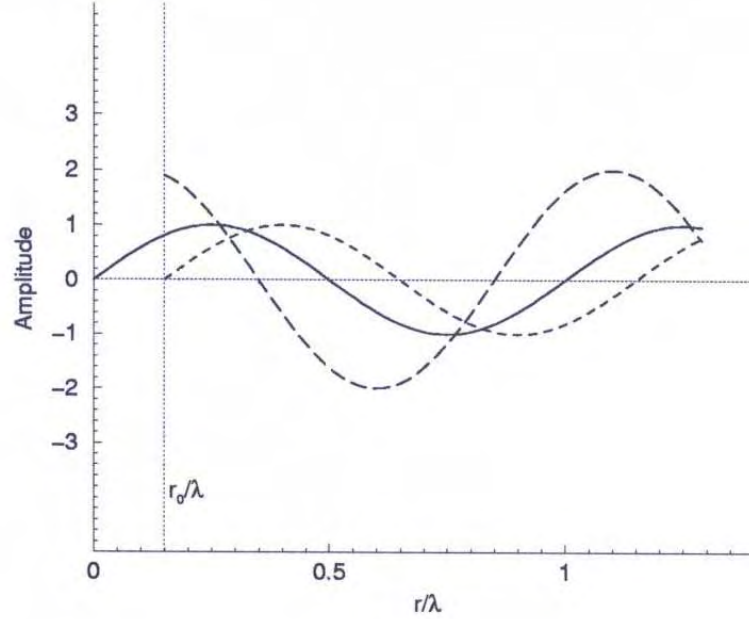


Figura 3.2: Ondas radiais no espalhamento de duas partículas [40]. A distância relativa entre as partículas é medida em termos do comprimento de onda de de Broglie λ . A linha cheia corresponde à ausência de interação, que ocorre dentro da região delimitada por r_0/λ . A linha pontilhada é empurrada para fora. A linha tracejada é puxada para dentro dessa região e está representada com amplitude 2 para tornar a figura mais clara.

Para esclarecer porque existe este relacionamento entre o sinal do comprimento de espalhamento a_s e o caráter atrativo ou repulsivo da interação, vamos dar uma imagem esquemática do que acontece em um processo de espalhamento [40]. A figura (3.2) mostra o movimento relativo de duas partículas livres cuja função de onda é representada como uma linha cheia $\sin(kr)$. Quando existe uma interação *repulsiva* entre as partículas, o comprimento de espalhamento é positivo enquanto que, em energias baixas, a defasagem $\delta_0 \approx -ka_s \equiv -\delta_{rep}$ é negativa. Portanto, o zero, que está na origem para a onda que representa o caso sem interação, está empurrado para “frente”: $\sin(kr - \delta_{rep})$. Para uma interação *atrativa*, o comprimento de espalhamento é negativo, e a defasagem positiva. A função de onda, neste caso,

é puxada para outro lado: $\sin(kr + \delta_{atr})$.

Mais, a periodicidade da onda complica o problema. Uma interação suficientemente *atrativa* pode provocar um deslocamento $\delta_{atr} = 2\pi - \delta_{rep}$ com $\delta_{rep} < \pi$. A função de onda, neste caso, é dada por

$$\sin(kr + \delta_{atr}) = \sin(kr + 2\pi - \delta_{rep}) = \sin(kr - \delta_{rep}).$$

Portanto, os bósons do condensado se comportam como se a interação entre eles fosse repulsiva. Por outro lado, o comprimento de espalhamento é também positivo, embora a interação real seja atrativa. Deste modo, é conveniente introduzir uma **interação efetiva** que determina as propriedades do condensado real e depende apenas do comprimento de espalhamento. Quando o comprimento de espalhamento é positivo, a interação efetiva é repulsiva, enquanto que para o comprimento de espalhamento negativo, a interação efetiva é atrativa.

3.3 A ressonância de Feshbach

O comprimento de espalhamento pode ser variado no tempo utilizando ressonância de Feshbach [49]. Este fenômeno ocorre quando a energia do estado ligado do potencial interatômico é igual à energia cinética dos dois átomos em colisão. Uma degenerescência deste tipo pode ocorrer quando existe estado ligado em potencial com maior limiar do que o limiar do potencial dos dois átomos em colisão (ver a figura 3.3). Esta condição pode ser satisfeita em gases frios alcalinos, graças as estruturas hiperfinas dos átomos.

A figura (3.3) mostra dois potenciais diferentes como função da distância entre os átomos r . Os potenciais correspondem aos diferentes estados hiperfinos dos átomos em colisão, caracterizados com números quânticos (F, m_F) do spin total e sua projeção. Os limiares dos potenciais são chamados de *canais da colisão*. Os dois átomos começam a colisão elástica em canal baixo, denominado de *canal aberto*, com energia menor que ΔE_{HF} definida na figura. Portanto, os átomos não podem “entrar” no canal acima, denominado de *canal fechado*. Quando um estado ligado do canal fechado está logo abaixo do limiar do canal aberto, o comprimento de espalhamento é grande e positivo. Quando um estado ligado do canal fechado está logo acima do limiar do canal aberto, o comprimento de espalhamento é grande e negativo.

Geralmente, diferentes estados hiperfinos possuem diferentes configurações de spin e momentos magnéticos. Portanto, variando o campo magnético externo, é possível continuamente variar a energia do estado ligado da posição logo abaixo do limiar até a posição logo acima do limiar do canal aberto. Conseqüentemente, o

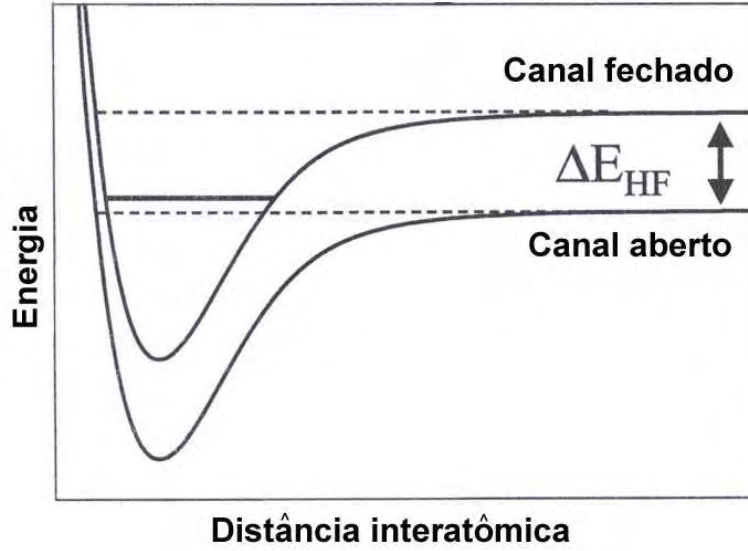


Figura 3.3: Esquema simplificado mostrando o “mecanismo” da ocorrência de ressonância de Feshbach. As linhas sólidas representam os potenciais de interações como função da distância entre os átomos. O estado ligado do canal fechado, representado por linha horizontal, é quase-degenerado com o limiar do canal aberto.

comprimento de espalhamento muda seu valor e seu sinal. A transição entre dois regimes ocorre para o valor de campo magnético externo B_0 . Para este valor do campo magnético, o comprimento de espalhamento tende ao infinito (Figura 3.4). Por outro lado, quando o estado ligado está longe da ressonância, o comprimento de espalhamento possui o valor constante a_b (o valor de “background”). Assim, a variação do campo magnético $B(t)$ determina a variação do comprimento de espalhamento $a_s(t)$ [50]:

$$a_s(t) = a_b \left(1 + \frac{\Delta}{B_0 - B(t)} \right). \quad (3.11)$$

Aqui, Δ é chamada largura de ressonância.

Os valores de B_0 , Δ e a_b são determinados em experimentos. Por exemplo, a ressonância de Feshbach foi observada em ^{23}Na para $B_0 = 853G$ e $907G$ ($\Delta = 1G$) [51], em ^7Li para $B_0 = 725G$ [52] e em ^{85}Rb para $164G$ ($\Delta = 8.2G$) [53].

Na equação de GP, a dependência do tempo do comprimento de espalhamento resulta em potencial *não-linear* dependente do tempo. Por outro lado, as variações do potencial harmônico resultam na EGP em potencial *linear* dependente do tempo (ver por exemplo [54, 55, 69]). Neste caso, os efeitos das variações sobre o

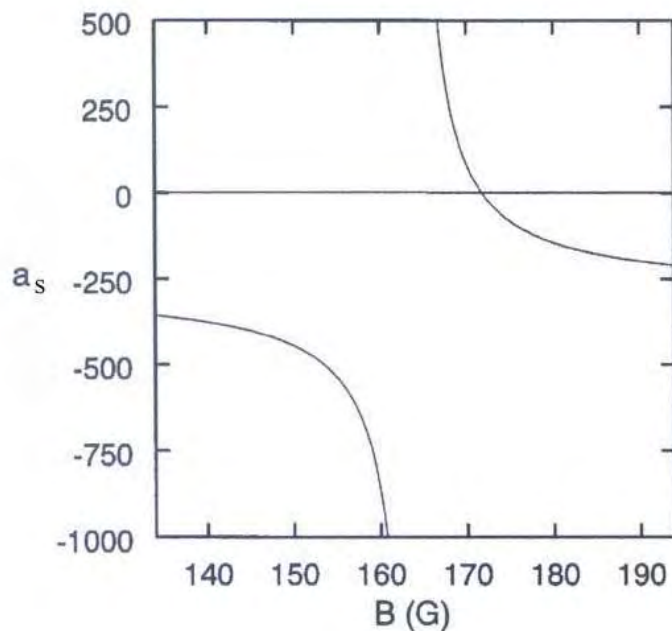


Figura 3.4: Observação de ressonância de Feshbach em ^{85}Rb [53]. O comprimento de espalhamento é dado em unidades de raio de Bohr.

condensado e sobre a nuvem térmica são semelhantes [56]. Caso contrário ocorre quando o comprimento de espalhamento varia no tempo: a perturbação da nuvem térmica é pequena comparada com a perturbação do condensado [57]. Isso ocorre porque a forma do condensado depende das interações interatômicas enquanto a forma da nuvem térmica está determinada principalmente pelo potencial harmônico e pela temperatura.

A dependência do tempo do comprimento de espalhamento causa o aparecimento dos efeitos novos. Um deles é a “formação de padrões” em condensados em duas dimensões (2D) [58]. Este efeito é análogo ao aparecimento de instabilidade de Faraday de um fluido sob efeito de forças externas variando rapidamente *. Outro fenômeno interessante, é a existência das ressonâncias em tunelamento quântico macroscópico entre dois condensados acoplados [59].

Cabe aqui notar que a equação de Gross-Pitaevskii em uma dimensão espacial e sem potencial torna-se integrável e representa soluções solitônicas. Saito e Ueda mostraram a possibilidade de estabilizar o sóliton em duas dimensões em conden-

*A instabilidade de Faraday é uma instabilidade ondulatória que aparece quando uma camada de fluido é sujeita a uma força externa vertical, especialmente uniforme e variando periodicamente no tempo [58].

sado com comprimento de espalhamento rapidamente variado no tempo [60]. Este fenômeno de estabilização dinâmica do condensado em 2D e 3D sem potencial foi também estudado em [61] e [62].

Capítulo 4

O método variacional e a equação para a largura da função de onda do condensado

Nos capítulos anteriores foi mostrado que, dentro da abordagem de campo médio, o condensado é descrito pela EGP que é uma equação do tipo Schrödinger não-linear. Tal equação não é solúvel, ou integrável, de forma geral. Relaciona-se, porém, com a teoria das equações integráveis, visto que em uma dimensão espacial e sem potencial torna-se integrável, apresentando soluções solitônicas. Outra conexão desta equação é com a óptica não-linear, onde variantes dela aparecem comumente. Estudá-la envolve em geral o uso de métodos de aproximação e métodos numéricos. Numericamente, a EGP foi estudada por vários grupos de pesquisadores (por exemplo [34, 35, 63, 64]). Teoricamente, ela foi estudada no limite de Thomas-Fermi [65] ou usando métodos variacionais [66, 67] e métodos multi-escalas [59].

O método variacional (MV) em estudos de fenômenos não-lineares foi introduzido por D. Anderson [68]. A idéia básica desse método é tomar um conjunto de funções tentativas com forma fixa, mas com parâmetros livres, e obter as equações diferenciais ordinárias para os parâmetros. Desta maneira, o problema de resolver a equação diferencial parcial (EDP) com número de graus de liberdade infinito é reduzido para resolução das equações diferenciais ordinárias (EDO) de segunda ordem. Isto simplifica significativamente os cálculos e análise do problema. Trata-se evidentemente de uma aproximação, porém não é dada por uma série perturbativa bem controlada. Assim, seus resultados devem ser validados por cálculos numéricos.

4.1 A derivação de equações para parâmetros variacionais

Voltamos de novo para os estudos de um gás de bósons com número de partículas N fixo. Como já foi dito, o condensado é descrito pela seguinte EGP:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(r) + g(t)|\Psi|^2 \right) \Psi, \quad (4.1)$$

onde a função de onda Ψ satisfaz a condição de normalização:

$$N = \int |\Psi|^2 d^3r. \quad (4.2)$$

Vamos considerar um potencial externo $V_{ext}(r)$ dado por um potencial harmônico com simetria esférica: $V_{ext}(r) = m\omega_{ho}^2 r^2/2$. O parâmetro $g(t) = 4\pi\hbar^2 a_s(t)/m$ caracteriza as interações entre átomos e está determinado pelo comprimento de espalhamento $a_s(t)$. Utilizando o campo magnético variado no tempo, o comprimento de espalhamento pode também variar no tempo:

$$a_s(t) = a_b \left(1 + \frac{\Delta}{B_0 - B(t)}\right). \quad (4.3)$$

Um caso de particular interesse será aquele em que esta variação é periódica: $B(t) = B_1 \sin \Omega' t$, com $B_1 < B_0$. Introduzindo $a_0 = a_b(1 + \frac{\Delta}{B_0})$ e $h = \Delta B_1 / (B_0^2(1 + \frac{\Delta}{B_0}))$ obtemos:

$$a_s(t) = a_0(1 + h \sin \Omega' t). \quad (4.4)$$

Vamos agora supor que a solução Ψ , da equação (4.1), depende apenas da variável radial. Ademais, será conveniente reescrever a EGP na forma adimensional. Com este objetivo, introduzimos parâmetros novos: $\tau = t\omega_{ho}$, $\rho = r/l_0$, $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{ho}}}$, $U = \Psi\sqrt{4\pi|a_0|l_0^2}$. Usando estes parâmetros, reescrevemos a equação (4.1) na forma:

$$iU_\tau + \frac{1}{2}U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_\rho - \frac{\rho^2}{2}U + \Sigma(1 + h \sin(\Omega\tau))|U|^2U = 0, \quad (4.5)$$

onde $\Omega = \Omega'/\omega$, $\Sigma = 1$ corresponde às interações interatômicas atrativas e $\Sigma = -1$ corresponde às interações interatômicas repulsivas.

A seguir, reescrevemos o problema da resolução da equação (4.5) na forma de um problema variacional. Para isto, notamos que a solução da equação (4.5) é o ponto estacionário da ação $S = \int \mathcal{L} d^3\rho d\tau$. Aqui, a densidade de Lagrangeana \mathcal{L} é dada por:

$$\mathcal{L}(U, U^*) = \frac{i}{2}(U^*U_\tau - UU^*_\tau) - \frac{1}{2}|U_\rho|^2 - \frac{1}{2}\rho^2|U|^2 + \frac{\Sigma}{2}(1 + h \sin(\Omega\tau))|U|^4. \quad (4.6)$$

Porém, este problema é tão complicado quanto resolver a equação (4.5). Para proceder adiante, aplicamos a seguinte *aproximação*: procuramos o mínimo da ação S dentro de um *conjunto de funções tentativas*. Este conjunto de funções tentativas é escolhido de forma a ser conveniente computacionalmente, tanto quanto possível, e também de forma a preservar as características relevantes das soluções exatas. É claro que o significado desta última condição pressupõe um conhecimento pelo

menos qualitativo das propriedades “relevantes” da solução exata, no que reside certamente um ponto crítico para utilidade do método.

Para o caso em estudo, uma escolha razoável para funções tentativas é a gaussiana, tendo em vista a forma da solução da equação de Schrödinger *linear* com potencial harmônico. O “ansatz” gaussiano foi usado em vários estudos do condensado, como por exemplo [66, 67]. Nos artigos [66] foram deduzidas as equações para quatorze parâmetros da gaussiana. As equações para o movimento do centro do condensado correspondem às oscilações harmônicas com frequências iguais às frequências do potencial harmônico. Assim, os efeitos não-lineares não influem neste movimento. O condensado, em média, responde ao potencial externo como uma partícula clássica. Portanto, a dinâmica do condensado pode ser determinada por equações para as larguras da gaussiana. Estas equações foram usadas no artigo [69] para estudos de resposta do condensado à variação no tempo do potencial harmônico.

Para estudos de resposta do condensado quando o comprimento de espalhamento é variado no tempo, escolhemos o seguinte “ansatz”:

$$U(\rho, \tau) = A(\tau)R\left(\frac{\rho}{\alpha(\tau)}\right)\exp\left(i\frac{\beta(\tau)\rho^2}{2\alpha(\tau)} + i\phi(\tau)\right), \quad (4.7)$$

onde a função $R^2\left(\frac{\rho}{\alpha(0)}\right)$ descreve a distribuição inicial do condensado. Para escolha

$$R\left(\frac{\rho}{\alpha(\tau)}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\alpha(\tau)}\right)^2\right) \quad (4.8)$$

recuperamos a distribuição gaussiana.

Nosso objetivo é obter as equações para evolução dos parâmetros $A(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ e $\phi(\tau)$. Estes parâmetros correspondem, respectivamente, à amplitude, à largura, à distorção de fase * e a uma fase linear. A seguir, substituímos a equação (4.7) na equação (4.6) e calculamos a Lagrangeana efetiva:

$$L = \int \mathcal{L}(U, U^*)d^3\rho. \quad (4.9)$$

Um cálculo pouco extenso, mas sem maiores dificuldades, leva ao seguinte resultado:

$$L = -\frac{A^2\alpha^3}{2}\left((\beta_\tau\alpha - \alpha_\tau\beta + \alpha^2 + \beta^2)I_2 + 2\phi_\tau n + \frac{I_4}{\alpha^2} - \Sigma(1 + h\sin(\Omega\tau))A^2I_3\right)$$

Aqui, foram introduzidas abreviaturas para as constantes:

$$n = \int R(\rho)^2\rho^2 d\rho,$$

*A distorção de fase, conhesida como “chirp” em inglês, tem sido estudada em óptica não-linear para caracterizar ruídos em ondas; o termo “chirp”, significado chilro, tem sido usado por corresponder aos sons emitidos por pássaros quando no intervalo audível de frequências [70].

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int R(\rho)^2 \rho^4 d\rho, \\
I_3 &= \int R(\rho)^4 \rho^2 d\rho, \\
I_4 &= \int R_\rho(\rho)^2 \rho^2 d\rho
\end{aligned}$$

O passo seguinte é resolver as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (4.10)$$

onde usamos a notação $q_j \equiv \{A, \alpha, \beta, \phi\}$. Estas equações levam ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\alpha_\tau &= \beta, \\
\beta_\tau &= \frac{I_4}{I_2 \alpha^3} - \alpha - \frac{3\Sigma}{2\alpha^4 I_2} (1 + h \sin(\Omega\tau)) A^2 \alpha^3 I_3.
\end{aligned}$$

A partir deste sistema, deduzimos a equação para largura reescalada $v = \left(\frac{I_4}{I_2}\right)^{-\frac{1}{4}} \alpha$:

$$v_{\tau\tau} + v = \frac{1}{v^3} - \frac{\Sigma P(\tau)}{v^4}, \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned}
P(\tau) &= P_0 + P_1 \sin(\Omega\tau), \\
P_0 &= \frac{3}{2n} \frac{I_3 I_2^{\frac{1}{4}}}{I_4^{\frac{5}{4}}} N_1, \\
P_1 &= P_0 h.
\end{aligned} \quad (4.12)$$

A norma da função de onda U está determinada pela equação:

$$N_1 = \frac{1}{4\pi} \int d^3\rho |U|^2 = \frac{N|a_0|}{l_0}. \quad (4.13)$$

Notamos que no caso de interações atrativas entre dois corpos, o valor crítico k_c definido pela equação (2.25) corresponde ao valor crítico N_{1c} i. e. a P_{0c} .

A equação diferencial ordinária (4.11) descreve a dinâmica do condensado [†]. Ela apresenta o principal resultado dessa seção. O lado esquerdo da equação corresponde ao oscilador harmônico. No lado direito, o termo proporcional a v^{-3} tende a espalhar a onda, enquanto o último termo é resultado das interações não-lineares entre átomos. O sinal desse termo pode ser positivo ou negativo. Vale notar também que essa equação corresponde ao movimento de uma partícula com coordenada v em um potencial efetivo V_{eff} :

$$v_{\tau\tau} = -\frac{\partial}{\partial v} V_{eff}(v), \quad (4.14)$$

[†]Mesma equação foi deduzida para a largura da onda do condensado a partir do “ansatz” gaussiano [66].

onde

$$V_{eff}(v) = \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{2}v^2 - \frac{\Sigma P}{3v^3}. \quad (4.15)$$

4.2 Comprimento de espalhamento independente do tempo

O comportamento do condensado difere para os casos de comprimento de espalhamento positivo e negativo. Vamos estudar esses casos separadamente, primeiro para a situação quando o comprimento de espalhamento é uma constante no tempo, i.e. $P_1 = 0$. Analisaremos as oscilações do sistema nas proximidades dos pontos fixos [‡] da equação (4.11) definidos pela equação

$$v_0 = \frac{1}{v_0^3} - \Sigma \frac{P_0}{v_0^4}. \quad (4.16)$$

4.2.1 As interações efetivamente repulsivas

Quando $\Sigma = -1$, os pontos fixos satisfazem a equação de quinta ordem:

$$v_0^5 = v_0 + P_0. \quad (4.17)$$

Essa equação tem só uma solução real e positiva que corresponde à posição de equilíbrio estável. Vejamos agora como analisar as oscilações ao redor deste ponto.

Quando as interações são fortes ($P_0 \gg 1$), podemos desprezar v_0 no lado direito da equação (4.17) e obter $v_0^{(0)} \approx P_0^{1/5}$. Isto corresponde à região de Thomas Fermi [65] onde o termo de pressão quântica é pequeno comparado com o termo não-linear na EGP. Substituindo $v_0 = v_0^{(0)} + \delta$ na equação (4.17), obtemos:

$$\delta = \frac{P_0^{1/5}}{5P_0^{4/5} - 1}, \quad (4.18)$$

ou

$$v_0 = \frac{5P_0}{5P_0^{4/5} - 1}. \quad (4.19)$$

Para obter as frequências das oscilações nas proximidades deste ponto, definimos uma pequena perturbação $u(\tau) = v(\tau) - v_0$, $u \ll v_0$. A seguir, deduzimos a equação linear para $u(t)$:

$$\begin{aligned} u_{\tau\tau} + v_0 + u &= \frac{1}{v_0^3(1 + \frac{u}{v_0})^3} + \frac{P_0}{v_0^4(1 + \frac{u}{v_0})^4} \\ &\approx \frac{1}{v_0^3} \left(1 - \frac{3u}{v_0}\right) + \frac{P_0}{v_0^4} \left(1 - \frac{4u}{v_0}\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

[‡]Os pontos fixos correspondem a estados estacionários ou de equilíbrio do sistema.

Usando o fato que v_0 satisfaz a equação (4.16), deduzimos:

$$u_{\tau\tau} + u\left(1 + \frac{3}{v_0^4} + \frac{4P_0}{v_0^5}\right) = 0. \quad (4.21)$$

A expressão entre parênteses representa o quadrado da frequência ω_r das pequenas oscilações ao redor do ponto de equilíbrio. Para o região de Thomas-Fermi, esta frequência tem o seguinte valor:

$$\omega_r \approx \sqrt{5} \left(1 + \frac{3}{10P_0^{4/5}}\right). \quad (4.22)$$

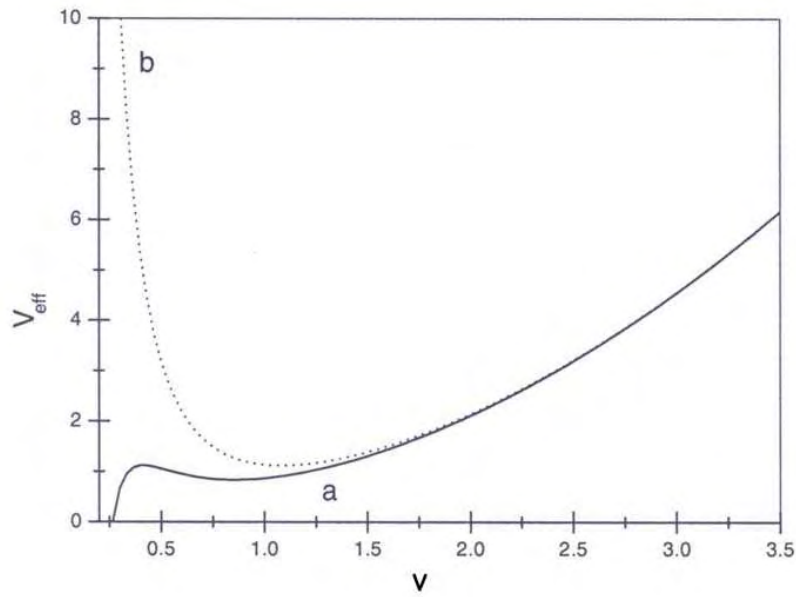


Figura 4.1: O potencial efetivo $V_{eff}(v)$ para $P_0 = 0.4$ e (a) interações efetivamente atrativas ($\Sigma = +1$), (b) interações efetivamente repulsivas ($\Sigma = -1$).

4.2.2 As interações efetivamente atrativas

O caso de interações efetivamente atrativas ($\Sigma = +1$) é mais complicado. A equação (4.16) ou não tem soluções reais positivas, ou tem duas. O valor crítico P_{0c} que separa estes dois casos é determinado pelo sistema de equações:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{v_0^3} - \frac{P_{0c}}{v_0^4}, \\ 1 &= -\frac{3}{v_0^4} + \frac{4P_{0c}}{v_0^5}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$P_{0c} = \frac{4}{5^{5/4}} = 0.5350. \quad (4.23)$$

Quando $P > P_{0c}$, as posições de equilíbrio não existem e a largura da gaussiana irá a zero, ou seja, há colapso do condensado. Para $P < P_{0c}$ existem duas posições de equilíbrio: uma instável- v_{01} (o máximo do potencial efetivo V_{eff}), outra estável- v_{02} (o mínimo do potencial efetivo V_{eff}). Portanto, para não haver colapso, duas condições precisam ser satisfeitas:

- a) $P_0 < P_{0c}$,
- b) a largura da gaussiana, v , precisa ser maior do que v_{01} mas menor do que v_{03} definido por: $V_{eff}(v_{03}) = V_{eff}(v_{01})$.

Assim, na região $v_{01} < v < v_{03}$, o sistema realiza o movimento periódico nas proximidades da posição de equilíbrio estável v_{02} . Para o caso $P_0 \ll 1$ este ponto é dado por:

$$v_{02} = 1 - \frac{P_0}{4}. \quad (4.24)$$

Para $0 < P_0 < 0.5$, cálculos numéricos mostram que o máximo do potencial V_{eff} é aproximadamente dado por $v_{01} \approx P_0$. Então, o ponto v_{03} satisfaz:

$$\frac{1}{2P_0^2} + \frac{1}{2}P_0^2 - \frac{1}{3P_0^2} = \frac{1}{2v_{03}^2} + \frac{1}{2}v_{03}^2 - \frac{P_0}{3v_{03}^3}. \quad (4.25)$$

Assumindo que o ponto v_{03} comporta-se como $v_{03} = \alpha/P_0$ e desprezando os termos proporcionais a P_0^2 comparado com $1/P_0^2$, obtemos a seguinte aproximação para v_{03} :

$$v_{03} \approx 1/(\sqrt{3}P_0).$$

A frequência das pequenas oscilações nas proximidades de v_{02} pode ser obtida da mesma maneira como para o caso de interações repulsivas. O pequeno desvio u da posição de equilíbrio v_{02} satisfaz:

$$u_{\tau\tau} + u\left(1 + \frac{3}{v_{02}^4} - \frac{4P_0}{v_{02}^5}\right) = 0. \quad (4.26)$$

Para v_{02} dado por (4.24), a frequência das oscilações é dada por:

$$\omega_a \approx 2\sqrt{1 - \frac{P_0}{4}}. \quad (4.27)$$

Capítulo 5

As oscilações não-lineares da largura do condensado com comprimento de espalhamento dependente do tempo

Neste capítulo investigamos a dinâmica dos condensados repulsivo e atrativo com comprimento de espalhamento periódico no tempo, ao redor das posições de equilíbrio estudadas no capítulo anterior. Partindo da equação (4.11) deduzimos as equações para a amplitude e a fase das oscilações da largura do condensado. Os resultados foram comparados com simulações numéricas da equação EDP (4.5).

5.1 O caso de comprimento de espalhamento periódico no tempo

Para o caso quando o parâmetro P é periódico no tempo $P(\tau) = P_0 + P_1 \sin(\Omega\tau)$ e $P_1 \ll P_0$, a equação (4.11) tem a seguinte forma:

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + v = \frac{1}{v^3} - \frac{\Sigma P_0}{v^4} - \frac{\Sigma P_1}{v^4} \sin(\Omega\tau). \quad (5.1)$$

Procuramos a solução v na forma:

$$v = v_0 + v_1, \quad (5.2)$$

onde $v_1 \ll v_0$ é um pequeno desvio da posição de equilíbrio estável v_0^* . Substituindo (5.2) na equação (5.1) e usando a expressão [71] †:

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad (5.3)$$

*nota $v_0 = v_{02}$ caso atrativo.

†Para $|x| < 1$ a série de potência (5.3) converge.

obtemos a equação para v_1 :

$$\ddot{v}_1 + \omega_0^2 v_1 + Av_1^2 + Bv_1^3 + \dots = (C + Dv_1 + Ev_1^2 + Fv_1^3 + \dots) \sin(\Omega\tau). \quad (5.4)$$

As constantes introduzidas têm os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= 1 + 3/v_0^4 - 4\frac{\Sigma P_0}{v_0^5}, & A &= -6/v_0^5 + 10\Sigma P_0/v_0^6, & B &= 10/v_0^6 - 20\Sigma P_0/v_0^7, \\ C &= -\Sigma P_1/v_0^4, & D &= 4\Sigma P_1/v_0^5, & E &= -10\Sigma P_1/v_0^6, & F &= 20\Sigma P_1/v_0^7. \end{aligned}$$

O caso não perturbado ($\Omega = 0$) é matematicamente bem conhecido (ver o apêndice C):

$$\ddot{v}_1 + \omega_0^2 v_1 + Av_1^2 + Bv_1^3 = 0 \quad (5.5)$$

Os termos não-lineares modificam a frequência das oscilações:

$$\omega = \omega_0 + \kappa a^2, \quad (5.6)$$

onde $\kappa = 5\frac{A^2}{12\omega_0^3} - 3\frac{B}{8\omega_0}$. Assim, a frequência das oscilações é proporcional ao quadrado da amplitude das oscilações a .

Agora, supomos que o desvio da posição de equilíbrio v_1 e P_1 têm a mesma ordem de grandeza ϵ . Conservamos na equação (5.4) os termos de terceira ordem com respeito a ϵ :

$$\ddot{v}_1 + \omega_0^2 v_1 + Av_1^2 + Bv_1^3 = (C + Dv_1 + Ev_1^2) \sin(\Omega\tau). \quad (5.7)$$

Temos agora um problema de oscilações não-lineares forçadas. Uma ressonância deve surgir para toda frequência $\omega_0 \approx \frac{p}{q}\Omega$, onde p e q são números inteiros. Nós vamos, aqui, estudar os dois casos principais, quais sejam: $p = 1, q = 1$, dita ressonância principal, e $p = 1, q = 2$, chamada de ressonância paramétrica.

Primeiro, consideramos o caso de ressonância principal ou ressonância ordinária ($p = 1, q = 1$). Usando o método apresentado em [75, capítulo 3], procuramos a solução de (5.7) na seguinte forma:

$$v_1 = a \cos(\Omega\tau + \theta) + \epsilon x^{(1)} + \epsilon^2 x^{(2)} + \dots, \quad (5.8)$$

e $a = a(\tau)$ e $\theta = \theta(\tau)$. A amplitude a e a fase θ satisfazem o seguinte sistema de equações (ver o apêndice D e as equações (D.27) onde $\nu = \Omega$):

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{1}{4\pi^2\Omega} \sum_{\gamma} e^{i\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-i\gamma(\psi-\vartheta)} \sin \psi d\vartheta d\psi, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \omega_0 - \Omega - \frac{1}{4\pi^2 a \Omega} \sum_{\gamma} e^{i\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-i\gamma(\psi-\vartheta)} \cos \psi d\vartheta d\psi, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde $\psi = \frac{p}{q}\Omega\tau + \theta$, $\vartheta = \Omega\tau$ e

$$\begin{aligned} f_0(a, \vartheta, \psi) &= C \sin \vartheta + Da \cos \psi \sin \vartheta + Ea^2 \cos^2 \psi \sin \vartheta - \\ &- Aa^2 \cos^2 \psi - Ba^3 \cos^3 \psi. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Estas equações resultam em:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \left(-\frac{C}{2\Omega} - \frac{E}{8\Omega}a^2 \right) \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \omega_0 - \Omega + \frac{C}{2a\Omega} \sin \theta + \left(\frac{3B}{8\Omega} - \frac{5A^2}{12\omega_0^2\Omega} \right) a^2 + \frac{3E}{8\Omega}a \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.11)$$

O termo proporcional a A^2 foi obtido usando as equações (D.28).

O fenômeno mais interessante ligado á esta ressonância é o da bi-estabilidade. No regime estacionário, $da/d\tau = d\theta/d\tau = 0$, vale a relação

$$\beta a^3 \pm 3Ea^2 \pm 4C + 8\Omega\gamma a = 0, \quad (5.12)$$

onde $\gamma = \omega_0 - \Omega$, $|\gamma| \ll 1$ e

$$\beta = 3B - \frac{10A^2}{3\omega_0^2}. \quad (5.12')$$

Na figura (5.1) fica clara a existência do região de bi-estabilidade.

Notamos também que o sistema (5.11) pode ser reescrito na forma hamiltoniana, usando variáveis novas: $a = \sqrt{Q}$ [77]. Então $dQ/d\tau = \partial H/\partial \theta$ e $d\theta/d\tau = -\partial H/\partial Q$, onde

$$H(Q, \theta) = -\frac{C}{\Omega}\sqrt{Q} \sin(\theta) - \frac{E}{4\Omega}Q^{3/2} \sin(\theta) + (\Omega - \omega_0)Q - \frac{\beta}{16\Omega}Q^2. \quad (5.13)$$

Consideramos agora o caso da ressonância paramétrica ($p = 1$, $q = 2$). Procuramos a solução na forma $v_1 = a \cos(\frac{1}{2}\Omega\tau + \theta)$. As equações para a e θ serão:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{1}{2\pi^2\Omega} \sum_{\gamma} e^{i2\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-i2\gamma(\psi - \frac{1}{2}\vartheta)} \sin \psi d\vartheta d\psi, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \omega - \frac{1}{2}\Omega - \frac{1}{2\pi^2a\Omega} \sum_{\gamma} e^{i2\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-i2\gamma(\psi - \frac{1}{2}\vartheta)} \cos \psi d\vartheta d\psi. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Resolvendo as integrais sobre ψ e ϑ obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{D}{2\Omega}a \cos(2\theta) \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \omega_0 - \frac{1}{2}\Omega + \frac{D}{2\Omega} \sin(2\theta) + \left(\frac{3B}{4\Omega} - \frac{5A^2}{6\omega_0^2\Omega} \right) a^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

O hamiltoniano correspondente tem a seguinte forma :

$$H_p(Q, \theta) = -\frac{D}{2\Omega}Q \sin(2\theta) + \left(\frac{1}{2}\Omega - \omega_0 \right) Q - \frac{\beta}{8\Omega}Q^2. \quad (5.16)$$

O fato de podermos escrever os sistemas (5.11) e (5.15) em forma hamiltoniana, facilita a obtenção de retratos de fase do sistema. Isso se faz gerando um gráfico paramétrico numericamente.

A figura (5.2) mostra o espaço de fase nas variáveis (Q, θ) para o caso da ressonância principal. No caso do condensado atrativo, os parâmetros usados são: $P_0 = 0.2$, e $P_1 = 0.008$. No caso do condensado repulsivo: $P_0 = 0.4$ e $P_1 = 0.06$.

A figura (5.3) mostra o espaço de fase para o caso da ressonância paramétrica. Os parâmetros usados são iguais aos parâmetros da figura (5.2).

Em ambos os casos podemos ver dois tipos de curvas, mostrando a existência de dois tipos de oscilações. Nota-se que esse tipo de diagrama de fase assemelha-se muito ao de um pêndulo. Neste último, trajetórias fechadas correspondem às oscilações ao redor de um ponto. As trajetórias ilimitadas correspondem ao movimento giratório. No nosso caso, não temos evidentemente a mesma “visualização” que temos num pêndulo. Teremos, simplesmente, dois tipos de oscilação, com dinâmicas diferentes.

5.2 Simulações numéricas e discussões

Depois da aplicação do método variacional dependente do tempo, fizemos uma série de simulações numéricas da dinâmica do condensado usando os códigos desenvolvidos por prof. Ravil M. Galimzyanov [78]. Empregamos o método de diferenças finitas de Crank-Nicolson à equação (4.5) e comparamos os resultados com método variacional descrito na seção anterior.

A aplicação do Método de Crank-Nicolson [79] para a equação não-linear (4.5) nos leva a

$$\begin{aligned} \frac{i(U_j^{k+1} - U_j^k)}{\Delta\tau} &= -\frac{1}{2\Delta r^2} [(U_{j-1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j+1}^{k+1}) + (U_{j-1}^k - 2U_j^k + U_{j+1}^k)] \\ &\quad - \frac{1}{2r_j\Delta r} [(U_{j+1}^{k+1} - U_{j-1}^{k+1}) + (U_{j+1}^k - U_{j-1}^k)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{r_j^2}{2} (1 + h \sin(\Omega\tau_k)) \Sigma |U_j^k|^2 \right] (U_j^k + U_j^{k+1}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde $\Delta\tau$ e Δr correspondem aos intervalos de discretização no tempo e na malha espacial da equação, respectivamente, e U_j^k aproxima $U(j\Delta r, k\Delta\tau)$.

Para resolver a EDP (4.5) para caso atrativo ($\Sigma = +1$) e repulsivo ($\Sigma = -1$), empregamos três “ansätze” [‡] diferentes como a função de onda inicial: “ansatz” 1 denominado “ansatz” gaussiano, onde a função $R\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)$ em (4.7) tem a seguinte

[‡]a palavra *ansätze* é plural para *ansatz*.

forma:

$$R\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2\right),$$

os “ansätze” 2 e 3 quando a função $R(\frac{\rho}{\alpha}) = R(\xi)$ satisfaz:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dR}{d\xi} - \frac{\xi^2}{2}R + R^3 - \lambda R = 0. \quad (5.18)$$

O “ansatz” 2 corresponde a $\lambda = -1$ e “ansatz” 3 a $\lambda = 1$. O “ansatz” 1 representa a solução exata para o caso linear $P_0 = 0$, o “ansatz” 2 é solução exata para $P_0 = 0.372$ e “ansatz” 3 corresponde à solução de colapso.

A figura (5.4) mostra o perfil inicial para a função de onda $|U(\rho, \tau = 0)|$ correspondente aos “ansätze” 1, 2 e 3. Os parâmetros da onda escolhidos correspondem a $P_0 = 0.2$.

Em simulações numéricas o valor $\alpha(\tau)$ é calculado da seguinte maneira:

$$\alpha(\tau) = \alpha(0) \sqrt{\frac{\int d\rho \rho^4 |U(\rho, \tau)|^2}{\int d\rho \rho^4 |U(\rho, 0)|^2}}. \quad (5.19)$$

5.2.1 O condensado atrativo ($\Sigma = +1$)

A figura (5.5) mostra a evolução temporal da largura α para condensado com interações de dois corpos efetivamente atrativas para o caso de ressonância principal. A figura (5.5a) corresponde a $P_0 = 0.2$, $P_1 = 0.014$ e a figura (5.5b) a $P_0 = 0.35$ e $P_1 = 0.00525$. A frequência Ω é igual à frequência própria do sistema ω_0 determinada na seção (4.2.2):

$$\omega_a \approx 2\sqrt{1 - \frac{P_0}{4}}. \quad (5.20)$$

Para onda inicial foi usada gaussiana (“ansatz” 1). No caso a) concordância entre simulações de EDP (4.5) e EDO (4.11) é muito boa para tempo menor que 100. No caso b) quando $P_0 = 0.35$, há uma discrepância em valor da amplitude das oscilações. Podemos explicar esta discrepância pela aproximação usada para o ponto de equilíbrio estável v_{02} .

No caso de ressonância principal, a relação amplitude-frequência é dada por (5.12). A figura (5.1) compara este resultado teórico com resultados dos cálculos numéricos baseados na equação (4.5). Como a onda inicial foi usado “ansatz” 2. Cada ponto na figura é o resultado da simulação de evolução da largura do condensado a partir do ponto de equilíbrio estável v_{02} onde a amplitude das oscilações é zero.

A figura (5.6) mostra a dinâmica do condensado no caso de ressonância paramétrica para $P_0 = 0.36$ e $P_1 = 0.051$. Como onda inicial foi usado “ansatz” 3.

5.2.2 O condensado repulsivo ($\Sigma = -1$)

A figura (5.7) mostra a evolução temporal da largura α para condensado com interações de dois corpos efetivamente repulsivas para o caso de ressonância principal ($\Omega = \omega_0$) e para $P_0 = 0.4$, $P_1 = 0.06$. A frequência ω_0 foi determinada na seção (4.2.1). Para onda inicial foi usada a gaussiana (“ansatz” 1). A concordância entre EDP e EDO é muito boa para tempo menor que 100.

A dinâmica de CBE repulsivo para caso de ressonância paramétrica ($\Omega = 2\omega_0$), obtida da EDP para $P_0 = 0.4$ e $P_1 = 0.12$ está mostrada na figura (5.8), utilizando o “ansatz” 1.

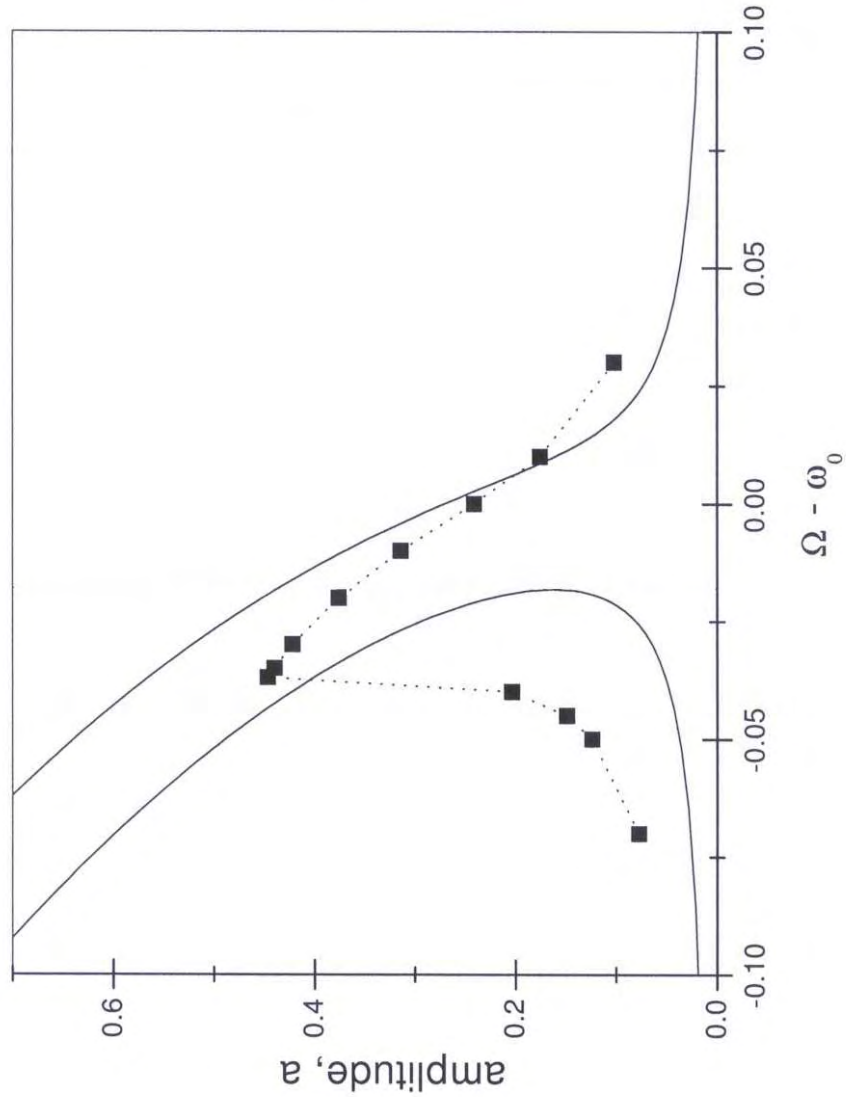


Figura 5.1: Fenômeno de bi-estabilidade para o caso da ressonância principal. Linha pontilhada corresponde à simulação da equação (4.5) (EDP) e linha sólida à equação (5.12). Os parâmetros usados são: $P_0 = 0.372$, $P_1 = 0.00372$ e $\Sigma = 1$ (condensado atrativo). Para onda inicial foi usado “ansatz” 2 (solução exata para $P_0 = 0.372$).

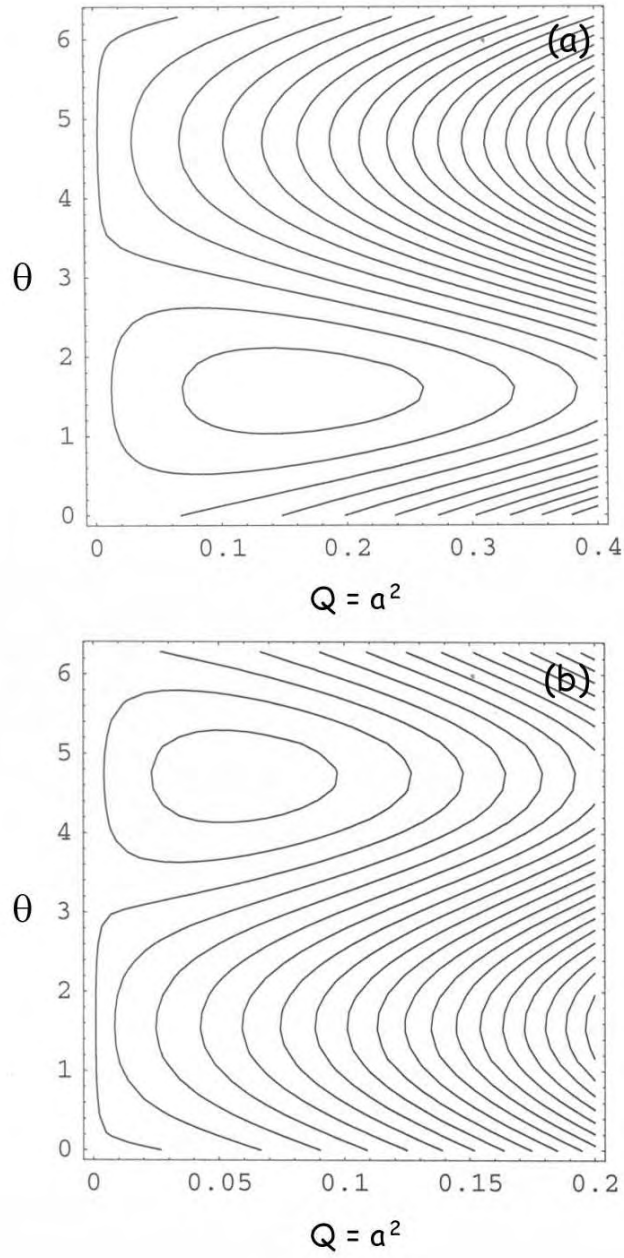


Figura 5.2: Espaço de fase para o sistema (5.11) (ressonância principal) para (a) condensado atrativo $\Sigma = +1$, $P_0 = 0.2$, $P_1 = 0.008$, $\Omega = 1.94936$ e (b) condensado repulsivo $\Sigma = -1$, $P_0 = 0.4$, $P_1 = 0.06$, $\Omega = 3.6323$.

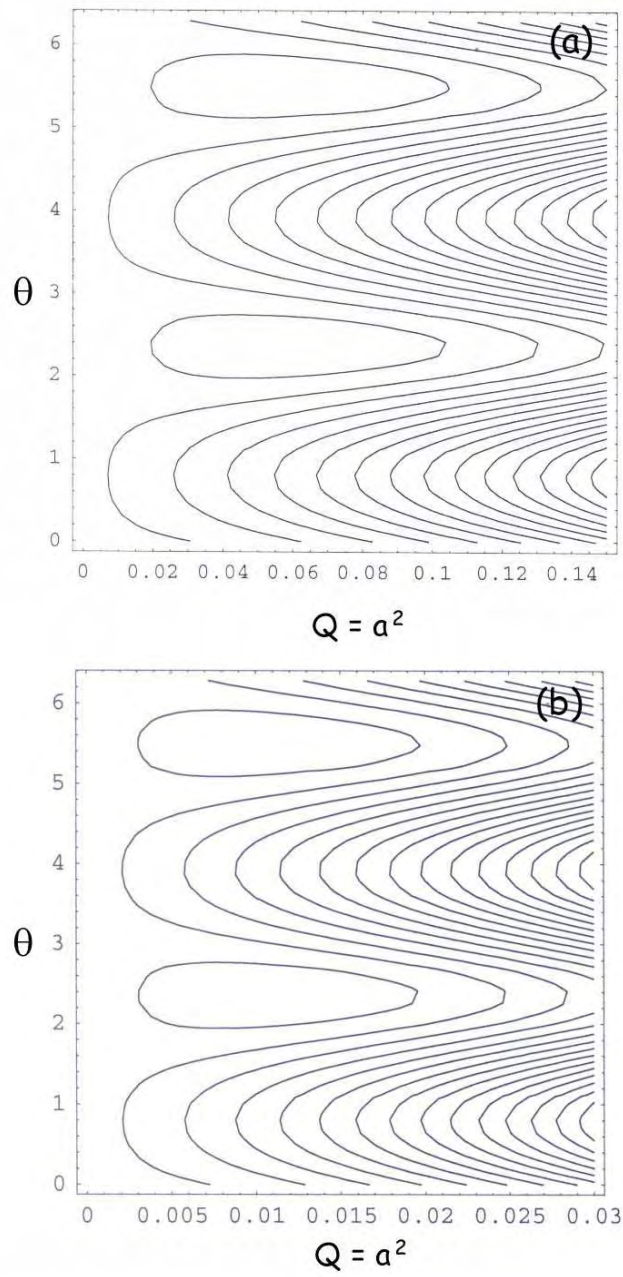


Figura 5.3: Espaço de fase para o sistema (5.15) (ressonância paramétrica) para (a) condensado atrativo $\Sigma = +1$, $P_0 = 0.2$, $P_1 = 0.008$, $\Omega = 1.94936$ e (b) condensado repulsivo $\Sigma = -1$, $P_0 = 0.4$, $P_1 = 0.06$, $\Omega = 3.6323$.

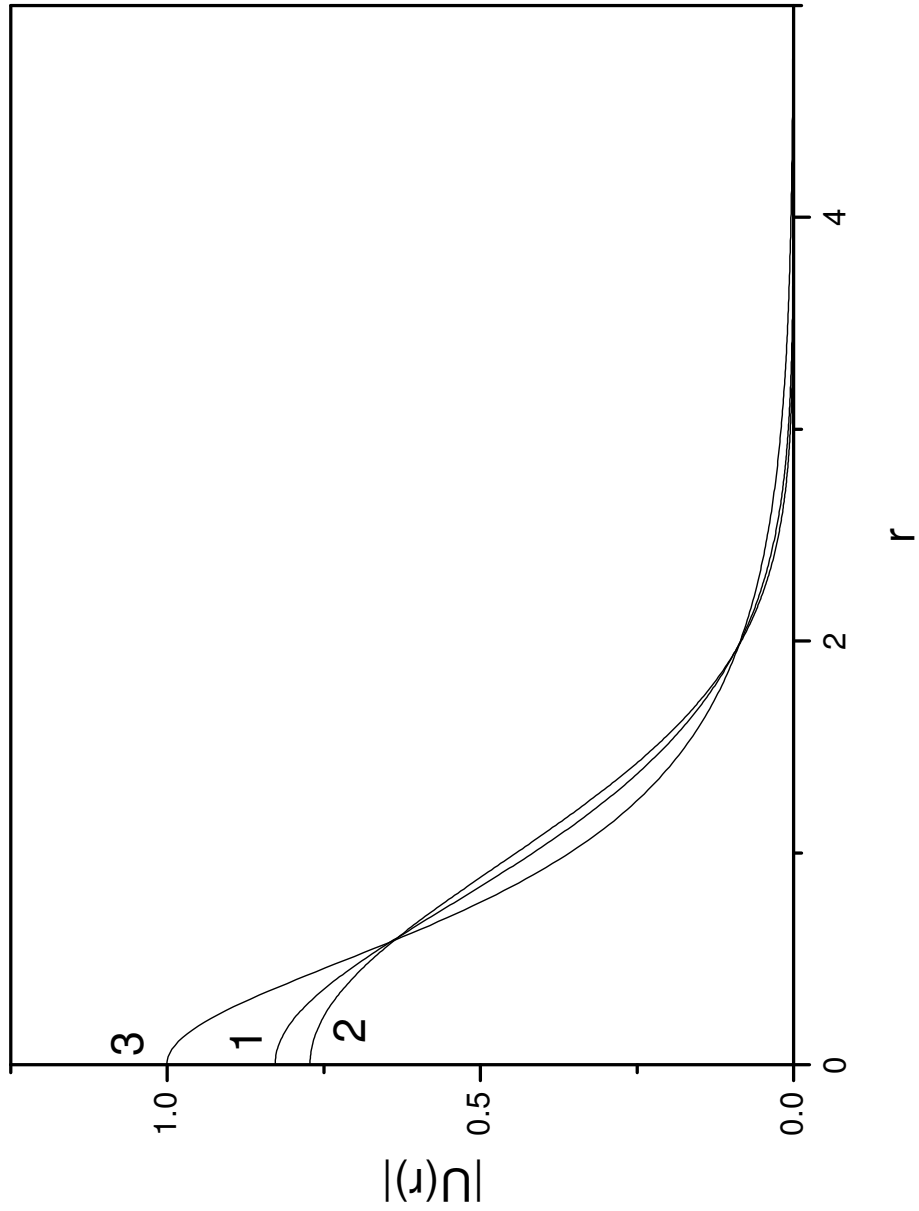


Figura 5.4: Perfil inicial para função de onda $|U(\rho, \tau = 0)|$ correspondente ao “ansätze” 1, 2 e 3. Os parâmetros da onda escolhidos correspondem a $P_0 = 0.2$.

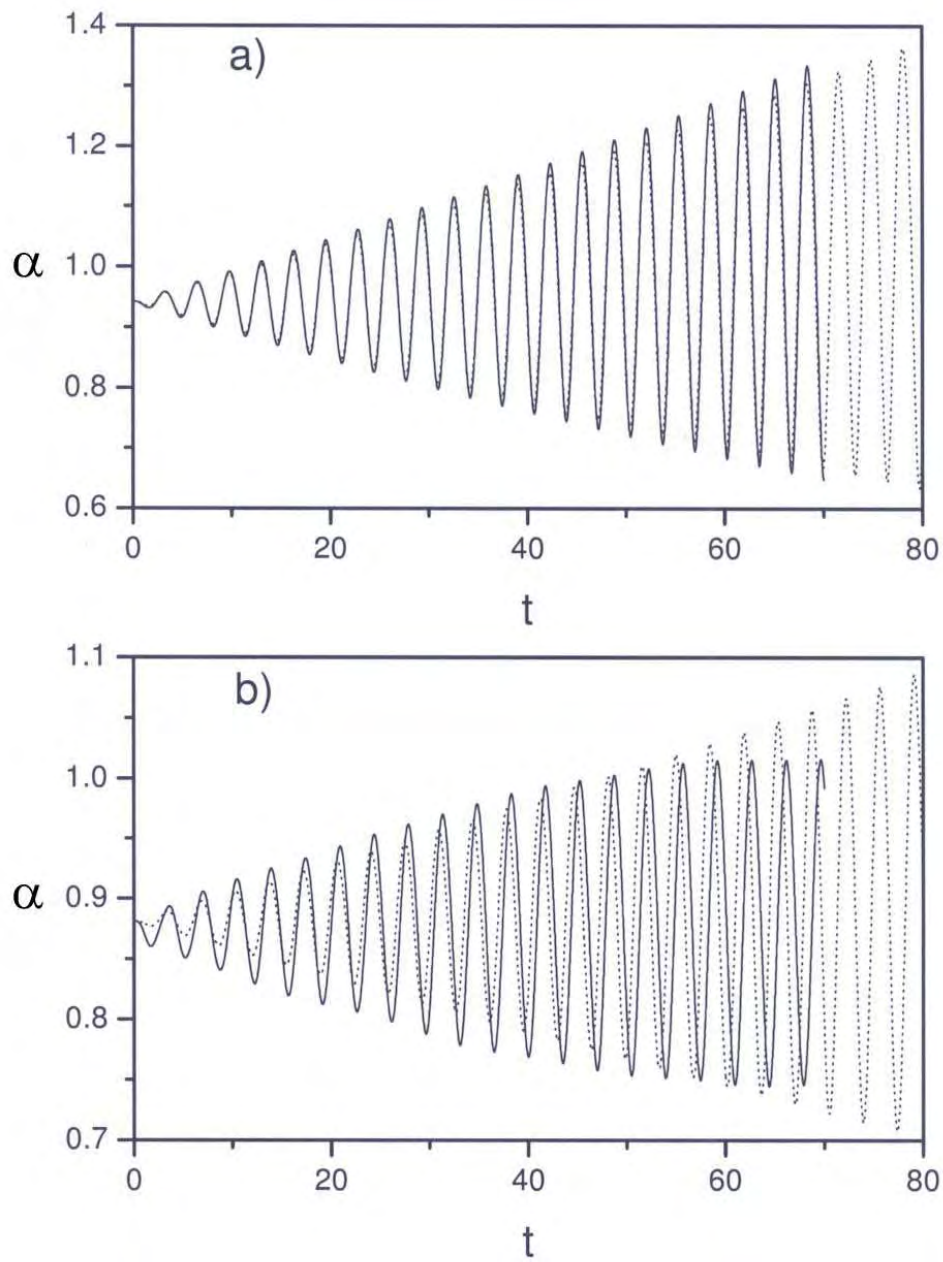


Figura 5.5: A evolução da largura α do condensado atrativo para ressonância principal. A linha sólida corresponde à EDP (4.5), linha pontilhada à EDO (4.11). Parâmetros usados são: a) $P_0=0.2$, $P_1 = 0.014$; b) $P_0 = 0.35$, $P_1 = 0.00525$. Para onda inicial foi usado “ansatz” 1 - gaussiana.

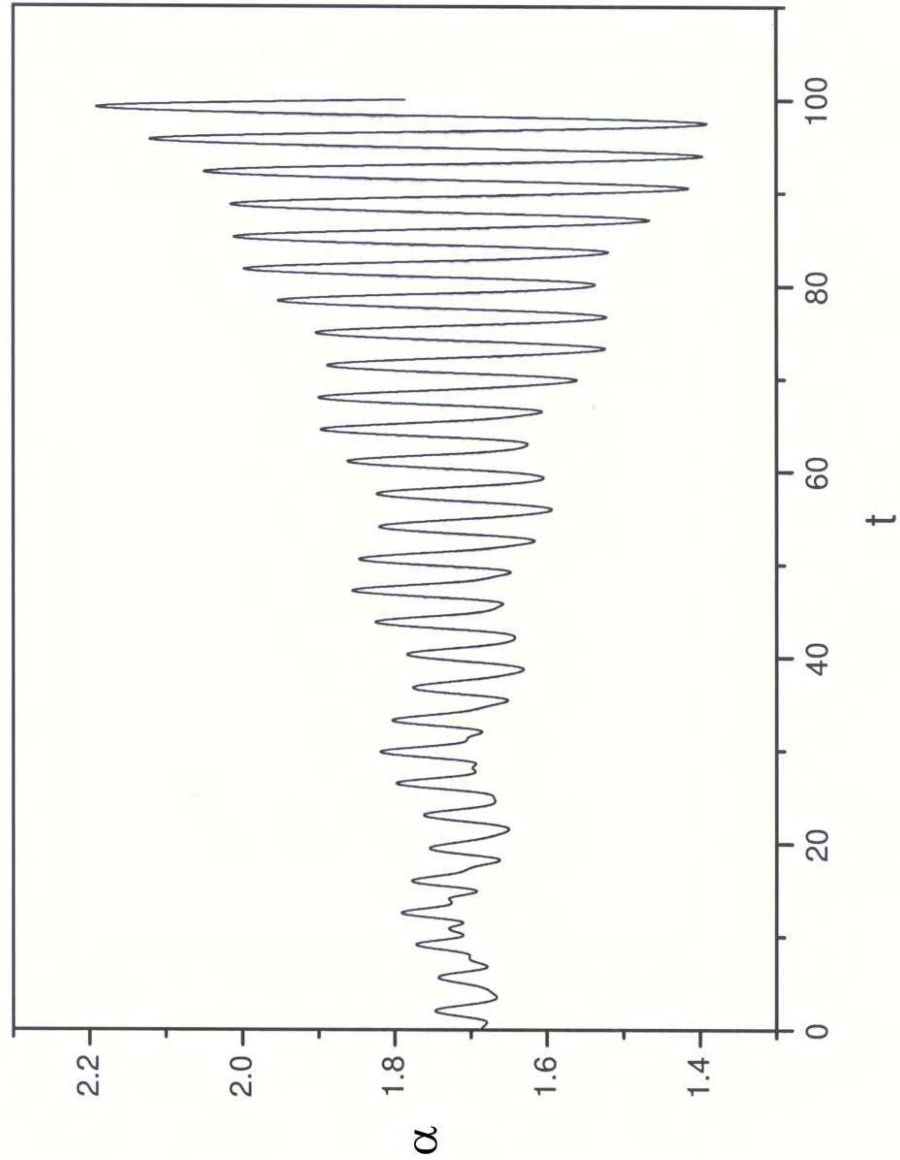


Figura 5.6: Evolução da largura do condensado atrativo α obtida de EDP para $P_0 = 0.36$, $P_1 = 0.051$ e $\Omega = 2\omega_o$ (ressonância paramétrica). Para onda inicial foi usado “ansatz” 3, solução de colapso.

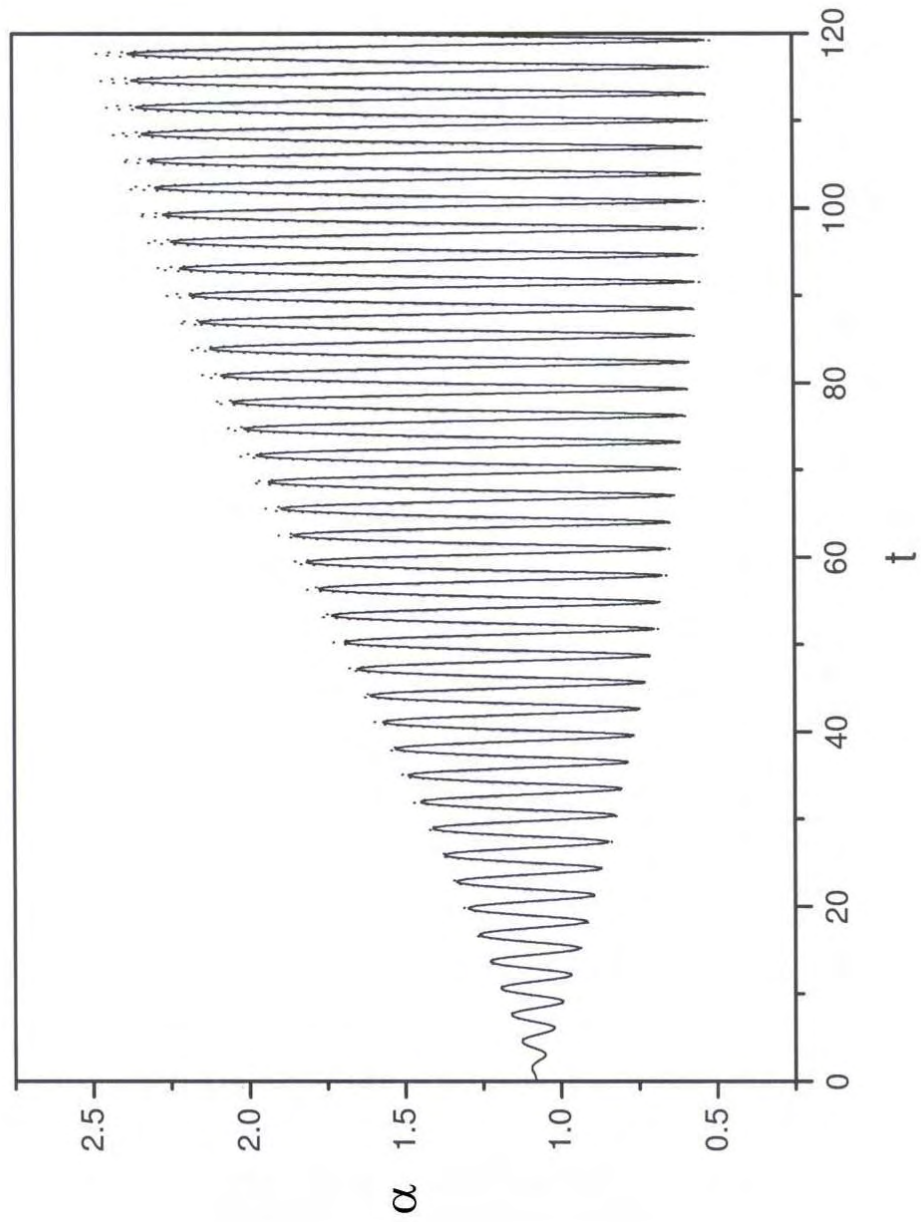


Figura 5.7: A evolução da largura α para CBE repulsivo no caso da ressonância principal $\Omega = \omega_0$ e $P_0 = 0.4$, $P_1 = 0.06$. A linha sólida corresponde à EDP, linha pontilhada à EDO. Para onda inicial foi escolhida gaussiana.

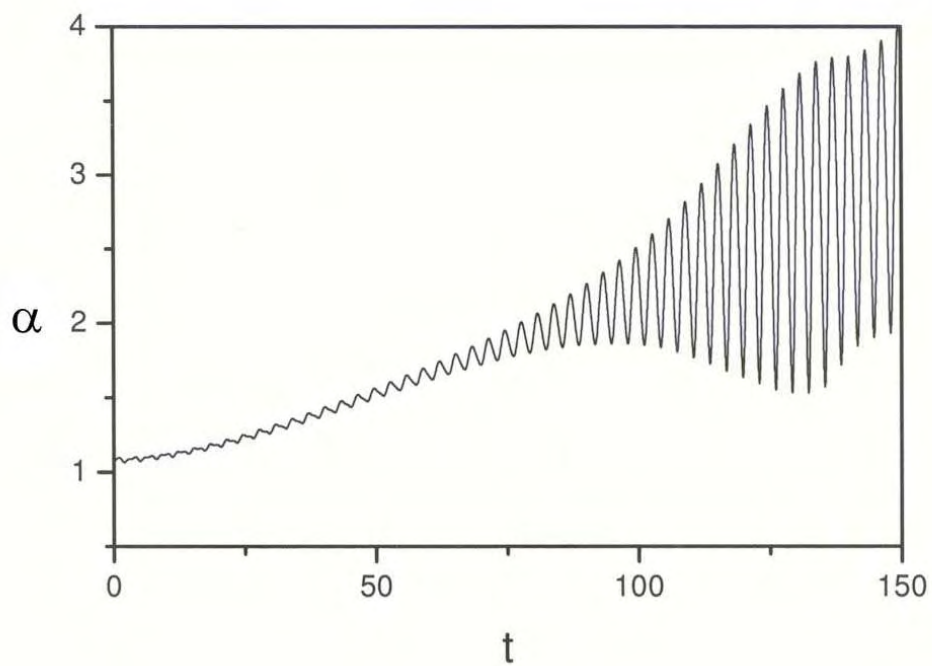


Figura 5.8: A dinâmica do condensado repulsivo para caso de ressonância paramétrica $\Omega = 2\omega_0$ e $P_0 = 0.4$ e $P_1 = 0.12$. Para onda inicial foi escolhida gaussiana.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

6.1 Conclusões

Nesta tese estudamos alguns aspectos das oscilações não-lineares de um condensado de Bose-Einstein. Em particular, a nossa atenção se voltou para o caso em que o comprimento de espalhamento é uma função periódica no tempo, possibilidade esta existente pelo fato de podermos controlar o valor deste comprimento pela técnica das ressonâncias de Feshbach.

Para abordar o problema de forma analítica - porém aproximada - fazemos uso de métodos variacionais para equação de Gross-Pitaevskii, e estudamos um caso específico, com simetria esférica. Deduzimos então uma equação para a largura do condensado. Esta resulta ter a forma de um oscilador anarmônico forçado. Recorremos pois à teoria das oscilações não-lineares forçadas para estabelecer as principais características das oscilações do condensado. Em particular, mostramos a existência de ressonâncias e o aparecimento do fenômeno de bi-estabilidade.

Dada a própria natureza do método variacional, comparamos os seus resultados com a integração numérica da equação de Gross-Pitaevskii e obtivemos boas concordâncias.

6.2 Perspectivas

Os condensados de Bose-Einstein oferecem aos pesquisadores em dinâmica não-linear uma “plethora” de possibilidades. Trata-se de um sistema muito manipulável. É possível controlá-lo não somente com o uso da ressonância de Feshbach, mas - até de forma mais simples - também com o uso de potenciais externos, que podem ser de diversos tipos, como um poço duplo ou periódicos e eventualmente depender também do tempo. Por fim, podemos ter misturas de condensados de diversos tipos.

Uma lista, incompleta, de algumas perspectivas que merecem destaque seria:

- Os estudos da dinâmica complexa descrita pela equação de Gross-Pitaevskii generalizada para incluir termos não-conservativos, tomando como base trabalhos já desenvolvidos na literatura (ver, por exemplo, as referências [80]);
- Os estudos de interação e acoplamento de condensados de duas componentes [81] e de tunelamento em condensados acoplados [82];
- Os estudos de condensados com espécies atômico-moleculares diferentes [83];
- Os estudos dos condensados num potencial periódico, descritos pela equação de Schrödinger não-linear discreta (DNLS) [84];
- Os estudos de estabilidade em sistemas com interação dipolar [47];
- Os estudos teóricos e experimentais de condensação de sistemas fermiônicos [85, 86];
- A aplicação das técnicas de cálculo aqui desenvolvidas a inúmeros sistemas físicos que podem ser descritos por diferentes formas de equações não-lineares.

Cada um destes problemas remete a uma equação diferencial parcial, geralmente do tipo Schrödinger não-linear, e seu estudo passará por métodos de diversos tipos: perturbativos, variacionais, múltiplas escalas, numéricas e faz em geral contato com equações semelhantes obtidas em outros contextos, como a óptica, a física de plasmas e a hidrodinâmica.

Apêndice A

A distribuição de Bose-Einstein

Historicamente, por volta de 1920 Satyendra Nath Bose estava estudando uma nova idéia que a luz de frequência ν é formada de “quanta”-s (hoje em dia chamados fótons) cuja energia é $h\nu$. Ele percebeu que os fótons deveriam ser contados como *indistinguíveis* para reproduzir o espectro da radiação de corpo negro já determinado por Planck em 1901. Neste apêndice, vamos reproduzir uma variante do cálculo feito por Bose, seguindo o que se encontra na ref. [22].

A.1 Distribuição de fótons

Vamos assumir que ϵ_k é a energia de p_k estados degenerados. Chamando n_k o número de fótons com energia ϵ_k , a energia total do sistema E pode ser representada pela soma:

$$E = \sum_k n_k \epsilon_k = \text{const.} \quad (\text{A.1})$$

A primeira questão é determinar quantas distribuições microscópicas correspondem a uma distribuição macroscópica dada por energia E e um conjunto de números $\{n_k\}$. Em outras palavras, o problema consiste em determinar o número de maneiras P de redistribuir n_1 fótons do primeiro grupo com energia ϵ_1 entre p_1 estados degenerados; n_2 fótons do segundo grupo com energia ϵ_2 entre p_2 estados degenerados; ... n_k fótons do k -ésimo grupo com energia ϵ_k entre seus p_k estados degenerados. Isso é um problema combinatório bastante típico.

Para ver qual é a solução, é conveniente representar os fótons por um símbolo \bullet (bola) e imaginar que $p_k - 1$ varetas separem fótons em p_k estados. Por exemplo, podemos representar a p_k estados do k -ésimo grupo por uma seqüência do tipo

$$\bullet \bullet \bullet \mid \bullet \bullet \mid \bullet \bullet \bullet \bullet \mid \dots \mid \bullet \bullet \bullet$$

significando que no estado 1 há três fótons, no estado 2 dois fótons, ... , no estado p_k três fótons. Tudo junto, há n_k bolas e $p_k - 1$ varetas. É fácil ver que o número

de arranjos possíveis é $(n_k + p_k - 1)!$. Como as bolas e as varetas são indistinguíveis entre si, devemos dividir este número pelo número de arranjos de bolas e varetas:

$$O_k = \frac{(n_k + p_k - 1)!}{n_k!(p_k - 1)!} \quad (\text{A.2})$$

Aqui, O_k é o número de formas de distribuir n_k fótons entre p_k estados do k -ésimo grupo. Esse procedimento pode ser usado para todos os grupos independentemente, de modo que o número total de distribuições diferentes será

$$P = O_1 O_2 \dots O_k \dots = \prod_k O_k.$$

O problema seguinte é determinar qual é a distribuição de n_k 's com uma energia E total dada, para a qual P é máximo. Em vez do máximo de P , é mais conveniente buscar o máximo do logaritmo de P . O cálculo é ainda simplificado pelo fato de que os p_k 's e n_k 's são números suficientemente grandes para usar a fórmula de Stirling:

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

de modo que

$$\begin{aligned} \ln P &\approx \sum_k [(n_k + p_k) \ln(n_k + p_k) - (n_k + p_k) - n_k \ln n_k + n_k - p_k \ln p_k + p_k] \\ &= \sum_k \left[n_k \ln\left(1 + \frac{p_k}{n_k}\right) + p_k \ln\left(1 + \frac{n_k}{p_k}\right) \right]. \end{aligned}$$

O máximo de $\ln P$ deve ser calculado variando os números n_k com a condição de que a energia total tenha o valor E prescrito. Essa condição pode ser levada em conta através de um multiplicador de Lagrange β , calculando o extremo de $\ln P - \beta E$:

$$\delta [\ln P - \beta E] = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde E é dada por (A.1). Lembrando que p_k 's são números constantes, obtemos:

$$\sum_k \left[\ln\left(1 + \frac{p_k}{n_k}\right) \delta n_k - \beta \epsilon_k \delta n_k \right] = 0. \quad (\text{A.4})$$

Essa igualdade será satisfeita para qualquer variação δn_k se

$$\ln\left(\frac{p_k}{n_k} + 1\right) - \beta \epsilon_k = 0, \quad (\text{A.5})$$

ou

$$\frac{n_k}{p_k} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1}. \quad (\text{A.6})$$

Podemos definir o número de ocupação médio do k -ésimo grupo como $\bar{n}_k = n_k/p_k$ e obtemos:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1}, \quad (\text{A.7})$$

onde $\beta = 1/k_B T$ * (k_B é a constante de Boltzmann). A relação (A.7) se chama *distribuição de Bose*. Ela conduz diretamente à fórmula de Planck, que foi mostrado por Bose.

De fato, para fótons, o número de estados p_k tendo frequências entre ν e $\nu + d\nu$ por unidade de volume é dado por:

$$4\pi \frac{p^2}{h^3} dp = 4\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu.$$

Aqui, já levamos em conta o fato de que o módulo do momento dos fótons é $p = h\nu/c$, onde c é velocidade da luz. O número obtido deve ser multiplicado por dois para acomodar os dois estados possíveis de polarização dos fótons. Assim, o número de estados com frequência no intervalo $(\nu, \nu + d\nu)$ por unidade de volume é $8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$. Usando esse resultado na relação (A.7) obtemos:

$$n_k = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}. \quad (\text{A.8})$$

A contribuição dE dos fótons com frequência no intervalo $(\nu, \nu + d\nu)$ será:

$$dE = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}, \quad (\text{A.9})$$

que é a fórmula de Planck.

Bose tentou publicar seu trabalho, mas foi rejeitado. No entanto, ele enviou uma carta a Einstein pedindo sua influência para que seus resultados fossem publicados. Einstein traduziu o trabalho para o alemão e mandou publicar no “Zeitschrift für Physik” [1]. Na sua nota de tradutor, ele escreveu que se trata de “um importante avanço que fornece um método que se aplica também à teoria quântica dos gases ideais”. O que Einstein fez em seguida foi estender o tratamento de Bose a um sistema de átomos livres. Para altas temperaturas ele obtinha os resultados conhecidos porém em baixas temperaturas as formulas mostraram o empilhamento dos átomos no estado de menor energia. Hoje em dia, sabemos que os resultados obtidos por Einstein aplicam-se somente para os átomos bosônicos que possuem spin inteiro.

A.2 Distribuição dos átomos bosônicos

Einstein percebeu que o tratamento de Bose pode ser aplicado para os átomos em um gás homogêneo. Existe, no entanto, uma diferença importante: ao interagir com a matéria, fótons podem ser absorvidos ou emitidos pela matéria. Isso significa que o número total de fótons presentes no sistema não precisa ser conservado. No

*O β pode ser obtido usando a relação entre energia e entropia S : $\partial S/\partial E = 1/T$

caso de átomos, porém, esse número total é conservado, o mesmo com a energia do sistema (A.1). Isso implica que o cálculo do extremo de $\ln P$ feito na seção anterior deve ser modificado de modo a levar em conta esta prescrição adicional:

$$N = \sum_k n_k. \quad (\text{A.10})$$

Esta condição pode ser levada em conta por meio de um segundo multiplicador de Lagrange α . Assim, devemos considerar a seguinte condição de extremo:

$$\delta [\ln P - \beta E - \alpha N] = 0. \quad (\text{A.11})$$

O cálculo leva ao seguinte resultado:

$$\frac{n_k}{p_k} = \bar{n}_k = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k + \alpha} - 1}, \quad (\text{A.12})$$

ou

$$\frac{n_k}{p_k} = \bar{n}_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (\text{A.13})$$

onde $\mu \equiv -\frac{\alpha}{\beta}$ é chamado de potencial químico: $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$.

Para um gás livre e homogêneo, os níveis de energia são dados por $\epsilon_k = \frac{p^2}{2m}$ e o nível fundamental terá $\epsilon_0 = 0$ e $\vec{p} = 0$ (ver [23]).

Apêndice B

Dinâmica de uma partícula sujeita a um potencial central

O problema de dois corpos que interagem através de um potencial que depende apenas da sua posição relativa pode ser reduzido, através de uma mudança de variáveis para coordenadas relativas e coordenadas de centro de massa, ao caso de uma partícula sujeita à ação de um potencial central de curto alcance $V(r)$. Isso é uma boa motivação para estudos da equação de Schrödinger de uma partícula em um potencial central [42]:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_E(\vec{r}) + V(r)\Psi_E(\vec{r}) = E\Psi_E(\vec{r}). \quad (\text{B.1})$$

Aqui $\Psi_E(\vec{r})$ são autofunções associadas a autovalores E , e M é a massa da partícula. As autofunções $\Psi_E(\vec{r})$ podem ser escolhidas de forma a serem também autofunções das variáveis \hat{L}^2 e \hat{L}_3 , onde \hat{L} representa o operador de momento angular do sistema, \hat{L}_3 é uma de suas componentes cartesianas. Assim, introduzimos novos índices das autofunções l e m que se referem aos autovalores de \hat{L}^2 e \hat{L}_3 .

$$\begin{aligned} \hat{L}^2\Psi_{Elm}(\vec{r}) &= \hbar^2l(l+1)\Psi_{Elm}(\vec{r}) \\ \hat{L}_3\Psi_{Elm}(\vec{r}) &= \hbar m\Psi_{Elm}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Como a parte angular do laplaciano pode ser expressa em coordenadas esféricas através de \hat{L}^2 :

$$\nabla^2 \equiv \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right], \quad (\text{B.3})$$

a Eq. (B.1) depende das coordenadas angulares apenas através de \hat{L}^2 . Portanto, as autofunções $\Psi_{Elm}(\vec{r})$ podem ser escritas na forma de produto:

$$\Psi_{Elm}(\vec{r}) = R_{El}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (\text{B.4})$$

onde $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ são autofunções de \hat{L}^2 chamadas harmônicos esféricos. A função radial $R_{El}(r)$ satisfaz a seguinte equação:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{El}(r) + V(r)R_{El}(r) = ER_{El}(r) \quad (\text{B.5})$$

Toda a dependência do potencial $V(r)$ está contida nessa equação, de modo que as autofunções angulares são as mesmas para qualquer potencial central. Portanto, basta analisar a Eq.(B.5) para diferentes potenciais centrais. Aqui, consideramos somente os casos da partícula livre e da partícula em poço “esférico”.

B.1 Partícula livre

Para o caso quando $V(r) = 0$ a Eq.(B.5) se reduz a

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2ME}{\hbar^2} \right] R_{El}(r) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Reescrevemos $R_{El}(r)$ sob a forma:

$$R_{El}(r) = \frac{u_{El}(r)}{r} \quad (\text{B.7})$$

onde a nova função radial satisfaz a condição $u_{El}(r \rightarrow 0) \rightarrow 0$ para evitar a singularidade na origem. Daqui para frente, por simplicidade, o índice E vai ser omitido. A equação para u_l é:

$$\frac{d^2 u_l(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_l = 0, \quad (\text{B.8})$$

na qual foi introduzida a notação $k^2 = 2ME/\hbar^2$. A solução geral para u_l pode ser escrita como uma combinação linear de

$$\begin{aligned} u_l^1(kr) &= kr j_l(kr) \\ u_l^2(kr) &= kr n_l(kr), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde as funções $j_l(kr)$ e $n_l(kr)$ são funções de Bessel e de Neumann esféricas de ordem l [43]. O comportamento dessas funções para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ é dado por [44]:

$$j_l(r \rightarrow 0) \rightarrow \frac{r^l}{(2l+1)!!}, \quad (\text{B.10})$$

$$n_l(r \rightarrow 0) \rightarrow \frac{(2l-1)!!}{r^{l+1}};$$

$$\begin{aligned}
j_l(r \rightarrow \infty) &\rightarrow \frac{1}{r} \sin\left(r - \frac{l\pi}{2}\right), \\
n_l(r \rightarrow \infty) &\rightarrow \frac{1}{r} \cos\left(r - \frac{l\pi}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{B.11}$$

Para qualquer valor de l , as funções de Neumann devem ser excluídas no caso da partícula livre, por causa de singularidades dessas funções na origem. Assim, as soluções de (B.1) para o caso da partícula livre são:

$$\Psi_{Elm}(\vec{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{B.12}$$

com $k^2 = 2ME/\hbar^2$.

Uma questão importante é a relação entre essas autofunções e as ondas planas, que são autofunções simultâneas de (B.1) e do momento linear \hat{p} . Como operadores de \hat{L} e \hat{p} não comutam, as ondas planas não tem momento angular definido, mas podem ser expandidas nas autofunções $\Psi_{Elm}(\vec{r})$:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = 4\pi \sum_{lm} i^l Y_{lm}^*(\theta_k, \varphi_k) j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{B.13}$$

onde $\vec{k} \equiv \{k, \theta_k, \varphi_k\}$. A expressão (B.13) é conhecida como *expansão em ondas parciais* da onda plana.

B.2 Poço de potencial

Consideramos o potencial dado por

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a_0 \\ 0, & r > a_0. \end{cases} \tag{B.14}$$

A equação radial tem a forma:

$$\begin{aligned}
r < a_0 : & \quad \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left(K^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u_l = 0, \quad K^2 = \frac{2M}{\hbar^2}(E + V_0); \\
r > a_0 : & \quad \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u_l = 0, \quad k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}.
\end{aligned}$$

A função radial $u_l(r)$, correspondente ao valor l do momento angular, satisfaz :

$$\begin{aligned}
r < a_0 : & \quad u_l(r < a_0) = C_l K r j_l(Kr); \\
r > a_0 : & \quad u_l(r > a_0) = kr[A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)].
\end{aligned}$$

Na região $r < a_0$ a condição de regularidade na origem exclui as funções de Neumann. Para espectro contínuo $E > 0$, é conveniente reescrever as constantes A_l e B_l sob

a forma $A_l = c_l \cos \delta_l$ e $B_l = c_l \sin \delta_l$. Usando as expressões assintóticas (B.11), obtemos:

$$u_l(r \rightarrow \infty) \rightarrow c_l \left[\cos \delta_l \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) + \sin \delta_l \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right] = \\ = c_l \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right). \quad (\text{B.15})$$

O ângulo δ_l é chamado de *defasagem* da onda parcial l . O resultado obtido mostra que o efeito do potencial na região assintótica $r \rightarrow \infty$ é introduzir defasagens δ_l relativamente à solução livre nas funções radiais correspondentes a cada uma das ondas planas *. Como c_l depende da normalização, toda informação relativa aos efeitos do potencial está contida nas defasagens δ_l .

B.3 Amplitude de espalhamento e seção de choque

Para uma partícula livre, tomando o eixo z do sistema de coordenadas paralelo ao momento $\hbar \vec{k}$, vale a decomposição em ondas parciais †

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) j_l(kr),$$

onde $z = r \cos \theta$ e $P_l(\cos \theta)$ é um polinômio de Legendre. Para valores suficientemente grandes de r :

$$e^{ikz} \rightarrow \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right).$$

Como já vimos, na presença de um potencial de curto alcance $V(r)$, o comportamento assintótico da onda parcial l é dado por:

$$u_l \rightarrow c_l \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right).$$

Uma solução de interesse é dada pela escolha da amplitude $c_l = e^{i\delta_l}$. A autofunção correspondente ao hamiltoniano tem então o comportamento assintótico:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) u_l(r) \\ \rightarrow \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) e^{i\delta_l} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (\text{B.16})$$

Depois de um cálculo sem maiores dificuldades obtém-se:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \rightarrow e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(e^{2i\delta_l} - 1 \right) P_l(\cos \theta) \equiv e^{ikz} + f_k(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (\text{B.17})$$

*Isto vale para potenciais de curto alcance definidos por $\lim_{r \rightarrow \infty} rV(r) = 0$.

†Esta equação é obtida a partir de (B.13) utilizando o teorema da adição para os harmônicos esféricos.

Introduzida função de θ

$$f_k(\theta) \equiv \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (\text{B.18})$$

é denominada de *amplitude de espalhamento*. Ela é completamente definida pelas defasagens δ_l para as diferentes ondas parciais. De (B.17) podemos ver que a autofunção $\Psi_{\vec{k}}$ se comporta assintoticamente como a superposição de uma onda plana com uma onda esférica emergente do centro espalhador, modulado angularmente pela amplitude $f_k(\theta)$.

A forma assintótica das autofunções com ondas emergentes está diretamente relacionada com a seção de choque diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2.$$

A seção de choque total é obtida integrando essa expressão sobre o ângulo sólido $d\Omega$

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (\text{B.19})$$

Apêndice C

Algumas propriedades das oscilações não-harmônicas

É bem conhecido que no caso das oscilações *lineares*, a frequência não depende da amplitude das oscilações e está determinada completamente pelas propriedades do sistema mecânico. Porém, no caso das oscilações *não-lineares* notamos comportamento diferente: a frequência do oscilador não-harmônico depende da amplitude das oscilações. Isso conduz à aparição do fenômeno de bi-estabilidade ou histerese, e encontra-se no caso das ressonâncias ordinárias ou paramétricas.

Neste apêndice vamos apresentar uma breve revisão dessas propriedades baseada principalmente no livro [72]. Depois disso, descrevemos o fenômeno da ressonância paramétrica, usando [73].

C.1 Relação frequência-amplitude e as frequências combinadoras

Consideramos a equação de movimento da seguinte forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -Ax^2 - Bx^3. \quad (\text{C.1})$$

Procuramos a sua solução em forma de uma série de aproximações sucessivas

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}, \quad (\text{C.2})$$

onde $x^{(1)}$ é de ordem ϵ , $x^{(2)}$ de ordem ϵ^2 , $x^{(3)}$ de ordem ϵ^3 ... Assumimos que a frequência ω das oscilações tem também a forma de uma série $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots$, onde ω_1 é de ordem ϵ , ω_2 de ordem ϵ^2 e assim por diante. Na primeira aproximação a função $x^{(1)}$ satisfaz a equação “não perturbada”:

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = 0, \quad (\text{C.3})$$

i.é. tem a forma de oscilações harmônicas ordinárias:

$$x^{(1)} = a \cos \omega t, \quad (\text{C.4})$$

com $\omega = \omega_0$.

Na aproximação seguinte obtemos a equação para $x^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -Aa^2 \cos^2 \omega t - 2\omega_0 \omega_1 a \cos \omega t = \\ &= -A(a^2/2) - A(a^2/2) \cos 2\omega t - 2\omega_0 \omega_1 a \cos \omega t. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

A condição de inexistência de termo de ressonância no lado direito da igualdade é dada simplesmente por $\omega_1 = 0$ *. Depois disto, resolvendo esta equação linear não homogênea obtemos:

$$x^{(2)} = -\frac{Aa^2}{2\omega_0^2} + \frac{Aa^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \quad (\text{C.6})$$

A seguir, obtemos a equação para $x^{(3)}$:

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2Ax^{(1)}x^{(2)} - Bx^{(1)3} - 2\omega_0 \omega_2 x^{(1)}. \quad (\text{C.7})$$

Colocando as expressões (C.4) e (C.6), depois de uma transformação simples:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} &= -a^3 \left[\frac{B}{4} + \frac{A^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t + \\ &+ a \left[-2\omega_0 \omega_2 + \frac{5a^2 A^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4} a^2 B \right] \cos \omega t. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Igualando a zero o coeficiente do fator de ressonância, encontramos a correção para a frequência fundamental, proporcional ao quadrado da amplitude da oscilação:

$$\omega_2 = \left(\frac{5A^2}{12\omega_0^3} - \frac{3B}{8\omega_0} \right) a^2 = \kappa a^2. \quad (\text{C.9})$$

A oscilação combinadora de terceira ordem é

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left(\frac{a^2}{3\omega_0^2} + \frac{B}{2} \right) \cos 3\omega t. \quad (\text{C.10})$$

Assim, a frequência do sistema $\omega = \omega_0 + \kappa a^2$ depende da amplitude das oscilações a . Além disso, mostramos que não-linearidade gera harmônicos: o sistema oscila com frequências $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$ Estas frequências denominam-se frequências *combinadoras*.

*Os termos de ressonância causam o crescimento da amplitude das oscilações com o tempo. É claro fisicamente que um sistema sem fonte externa de energia não pode produzir um aumento espontâneo da intensidade das oscilações. Por isso, usamos a condição de ausência dos termos de ressonância.

C.2 O fenômeno da ressonância

A ressonância é um fenômeno físico que aparece freqüentemente nas várias áreas diferentes da física teórica e física experimental. Geralmente, descrevemos este fenômeno como crescimento da intensidade da resposta do sistema físico sujeito a perturbação externa (possivelmente pequena). Um exemplo comum é o oscilador harmônico forçado. O caso mais complicado representa o oscilador cujo ponto de suspensão oscila na direção vertical. Neste caso, a ação externa se reduz a uma variação no tempo do parâmetro do sistema. Isso conduz o fenômeno de *instabilidade*, denominado **ressonância paramétrica**.

O fenômeno da ressonância não é característica somente dos sistemas lineares. Ele aparece nos sistemas não-lineares [74]. Juntamente com a variação do caráter dos fenômenos de ressonância para a freqüência principal, a não-linearidade das oscilações conduz também à aparição de novas ressonâncias.

C.2.1 Ressonância nas oscilações lineares e forçadas

A equação de movimento para um oscilador forçado tem a seguinte forma:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f e^{i\Omega t}, \quad (\text{C.11})$$

onde f é a amplitude e Ω a freqüência da força externa. O termo da força de atrito, proporcional à velocidade do oscilador, também está incluído. A grandeza λ denomina-se *coeficiente de amortecimento*.

Como sabemos, a solução geral de uma equação diferencial linear, não homogênea, com coeficientes constantes é obtida em forma de uma soma de duas expressões: a solução geral da equação homogênea e solução particular da equação não homogênea. A solução da equação homogênea representa as oscilações amortecidas que decrescem exponencialmente com o tempo. Portanto, depois de um intervalo de tempo bastante grande permanece somente a solução particular na forma $x = \alpha e^{i\Omega t}$, onde

$$\alpha = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega}. \quad (\text{C.12})$$

Separando a parte real dessa expressão obtemos:

$$x = a \cos(\Omega t + \delta), \quad (\text{C.13})$$

onde

$$a = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\lambda\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{C.14})$$

A amplitude a de uma oscilação forçada, apesar de crescer quando a frequência Ω se aproxima de ω_0 , não tende ao infinito como no caso de ressonância na ausência do atrito.

Na região próxima à ressonância $\Omega = \omega_0 + \epsilon$, onde ϵ é uma grandeza pequena, podemos reescrever (C.14) usando:

$$\Omega^2 - \omega_0^2 = (\Omega + \omega_0)(\Omega - \omega_0) \approx 2\omega_0\epsilon \quad (\text{C.15})$$

de modo que

$$a = \frac{f}{2\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \tan \delta = \frac{\lambda}{\epsilon}. \quad (\text{C.16})$$

C.2.2 Ressonância nas oscilações não-lineares

Consideramos a equação de movimento com termos não-lineares:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = f \cos \Omega t - Ax^2 - Bx^3, \quad (\text{C.17})$$

onde o coeficiente de amortecimento λ é pequeno. Assumimos que:

$$\Omega = \omega_0 + \epsilon \quad (\text{C.18})$$

com ϵ pequeno. Reescrevemos a relação entre a amplitude a das oscilações forçadas, e a amplitude f e a frequência Ω da força externa (C.16) na forma:

$$a^2(\epsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4\omega_0^2}. \quad (\text{C.19})$$

O caráter não-linear das oscilações conduz a uma relação entre a sua frequência própria e a amplitude (ver a equação (C.9)):

$$\omega_0 + \kappa a^2. \quad (\text{C.20})$$

Correspondentemente a isto, substituímos na fórmula (C.19) ω_0 por $\omega_0 + \kappa a^2$. Como $\Omega = \omega_0 + \epsilon$, obtemos finalmente:

$$a^2 [(\epsilon - \kappa a^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4\omega_0^2}. \quad (\text{C.21})$$

Esta equação é *cúbica* em relação a a^2 .

Para valores suficientemente pequenos de f a amplitude a é também pequena. Das três raízes da equação (C.21), só uma é real. Podemos desprezar a^4 na equação (C.21) e voltamos à função (C.19) que representa uma curva simétrica com máximo no ponto $\epsilon = 0$ (figura C.1a).

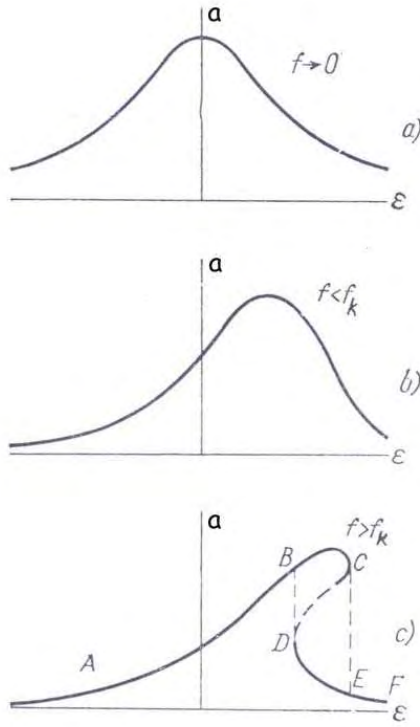


Figura C.1: O fenômeno de bi-estabilidade [72]

Quando f aumenta, a curva começa a deformar. No caso $\kappa > 0$, o único máximo da curva desloca-se para ϵ positivo .

A partir de um valor $f = f_k$ o caráter da curva varia. Nesse caso, existe uma região de frequências, na qual a equação (C.21) tem três raízes reais. Os limites desta região determinam-se pela condição $da/d\epsilon = \infty$. Diferenciado a equação (C.21) com respeito a ϵ , obtemos:

$$\frac{da}{d\epsilon} = \frac{-\epsilon a + \kappa a^3}{\epsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\epsilon a^2 + 3\kappa^2 a^4}. \quad (\text{C.22})$$

Por isso, as posições dos pontos D e C são determinadas pela resolução simultânea da equação

$$\epsilon^2 - 4\kappa a^2 \epsilon + 3\kappa^2 a^4 + \lambda^2 = 0 \quad (\text{C.23})$$

e da equação (C.21). A amplitude atinge seu valor máximo no ponto onde $da/d\epsilon = 0$. Neste caso $\epsilon = \kappa a^2$ e de (C.21) temos que:

$$a_{max} = \frac{f}{2\omega_0 \lambda}. \quad (\text{C.24})$$

Das três raízes reais, a raiz média corresponde às oscilações instáveis[†] do sistema (o setor CD da curva, mostrada na figura (C.1), linha pontilhada). Isto significa que às oscilações reais do sistema correspondem somente os setores ABC e DEF . Destacamos que existe uma região de frequências que permite duas amplitudes de oscilações diferentes. Assim, com o aumento gradual da frequência da força externa, a amplitude das oscilações aumenta segundo a curva ABC . No ponto C produz-se uma “ruptura” da amplitude, a qual diminui até o valor correspondente ao ponto E . Com o aumento da frequência a curva varia ao longo da curva EF . Se novamente diminuirmos a frequência, a amplitude das oscilações forçadas varia ao longo da curva FD , no ponto D por meio de um salto, aumenta até B e depois diminui ao longo de BA .

Para calcular o valor de f_k observamos que este é o valor de f para o qual ambas as raízes da equação (C.23) coincidem. Para $f = f_k$ todo o setor CD reduz-se a um ponto. Igualando a zero o discriminante da equação (C.23), obtemos $\epsilon^2 = 3\lambda^2$. A raiz correspondente à equação satisfaz: $\kappa a^2 = 2\epsilon/3$. Substituindo estes valores de a e ϵ em (C.21), obtemos:

$$f_k^2 = \frac{32\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}\kappa}. \quad (\text{C.25})$$

Pode-se verificar que para as frequências $\Omega \approx \omega_0/2$ e $\Omega \approx 2\omega_0$ surge também uma ressonância do mesmo caráter que a ressonância $\Omega \approx \omega_0$ mas de intensidade diferente. Mais exatamente, a ressonância deve surgir para toda frequência $\Omega = p\omega_0/q$, onde p e q são números inteiros. Entretanto, a intensidade dos fenômenos de ressonância diminui com o aumento dos números p e q tão rapidamente que, na realidade, podemos observar somente as ressonâncias para as frequências $\Omega \approx p\omega_0/q$, onde p e q têm valores pequenos.

C.3 Ressonância paramétrica

C.3.1 A equação de Hill

Consideramos a equação de movimento do tipo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0. \quad (\text{C.26})$$

Uma equação deste tipo denomina-se na física-matemática de **equação de Hill** [74]. Como (C.26) é uma equação diferencial de segunda ordem, há duas soluções fundamentais linearmente independentes: $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Assim, a solução geral pode

[†]A demonstração pode ser encontrada no livro [75].

ser escrita na seguinte soma:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Vamos considerar aqui um caso de particular interesse quando a função $p(t)$ é periódica no tempo, com período T : $p(t) = p(t + T)$. A seguir, pode-se facilmente mostrar que, quando $x(t)$ é uma solução da equação (C.26), $x(t + T)$ é também solução da mesma equação:

$$\ddot{x}(t + T) = -p(t + T)x(t + T) = -p(t)x(t + T).$$

Essa propriedade vale também para soluções fundamentais $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Em outras palavras, pela substituição de t por $t + T$, elas se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_1(t + T) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ x_2(t + T) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Como as soluções fundamentais não são únicas, pode-se escolher $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de tal modo que a sua variação pela substituição de t por $t + T$ conduz, simplesmente, a uma multiplicação por um fator constante [73]:

$$\begin{aligned} y_1(t + T) &= \lambda_1 y_1(t), \\ y_2(t + T) &= \lambda_2 y_2(t). \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Esse conjunto de soluções fundamentais denomina-se *soluções normais* ou *soluções de Floquet*. De (C.28) segue:

$$y_i(t + nT) = \lambda_i^n y_i(t), \quad (\text{C.29})$$

onde $i = 1, 2$ e n é número inteiro. Para $t \rightarrow \infty$ (i.e. $n \rightarrow \infty$):

$$y_i(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & |\lambda_i| < 1, \\ \infty, & |\lambda_i| > 1. \end{cases} \quad (\text{C.30})$$

Quando $\lambda_i = 1$, y_i é função periódica com período T , e quando $\lambda_i = -1$, y_i é periódica com período $2T$.

Multiplicando (C.28) por $e^{-\gamma_i(t+T)}$ obtemos:

$$e^{-\gamma_i(t+T)} y_i(t + T) = \lambda_i e^{-\gamma_i T} e^{-\gamma_i t} y_i(t).$$

Podemos escolher γ_i tal que $\lambda_i = e^{\gamma_i T}$. Então, $\phi_i(t) = e^{-\gamma_i t} y_i$ é a função periódica com período T :

$$\phi_i(t) = e^{-\gamma_i t} y_i(t) = e^{-\gamma_i(t+T)} y_i(t+T) = \phi_i(t+T). \quad (\text{C.31})$$

Portanto, as soluções normais podem ser representadas na forma *normal*:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\gamma_1 t} \phi_1(t), \\ y_2(t) &= e^{\gamma_2 t} \phi_2(t), \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

onde $\phi_i(t+T) = \phi_i(t)$.

As constantes λ_1 e λ_2 deverão estar ligadas entre si por uma relação determinada. Realmente, multiplicando as equações

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) + p(t)y_1(t) &= 0 \\ \ddot{y}_2(t) + p(t)y_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

respectivamente por $y_2(t)$ e $y_1(t)$ e subtraindo uma da outra, obteremos:

$$\ddot{y}_1(t)y_2(t) - \ddot{y}_2(t)y_1(t) = \frac{d}{dt}(\dot{y}_1(t)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t)) = 0, \quad (\text{C.34})$$

ou

$$\dot{y}_1(t)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t) = \text{const.} \quad (\text{C.35})$$

Mas, para funções do tipo (C.28), a expressão desta igualdade é multiplicada por $\lambda_1 \lambda_2$ quando o argumento passa de t a $t+T$. Por isso, está claro, que a igualdade (C.35) será satisfeita em todo caso quando:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (\text{C.36})$$

No caso quando λ_i é *real*, as duas integrais independentes da equação (C.26) têm a forma:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\gamma t} \phi_1(t) \\ y_2(t) &= e^{-\gamma t} \phi_2(t), \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

onde γ é um número real positivo ou negativo. Uma destas funções cresce exponencialmente com o tempo. Isto significa que o estado de repouso do sistema (na posição de equilíbrio $y = 0$) será instável: é suficiente um desvio infinitamente pequeno deste estado, a fim de que o deslocamento provocado comece a crescer muito rapidamente com o tempo. Este fenômeno denomina-se de **ressonância paramétrica**.

Quando os valores iniciais de y e \dot{y} são rigorosamente iguais a zero, eles permanecem iguais a zero posteriormente, ao contrário do caso da ressonância ordinária. A ressonância paramétrica é um fenômeno de instabilidade.

C.3.2 A equação de Mathieu

Uma versão particular da equação de Hill com $p(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \Omega t)$ denomina-se na física-matemática de *equação de Mathieu*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2(1 + h \cos \Omega t)x = 0, \quad (\text{C.38})$$

onde a constante $h \ll 1$. Como veremos mais abaixo, a ressonância paramétrica surge com intensidade máxima se a frequência Ω é próxima ao dobro da frequência ω_0 . Por isso, colocamos:

$$\Omega = 2\omega_0 + \epsilon$$

onde $\epsilon \ll \omega_0$. Procuramos a solução na seguinte forma [72]:

$$x = a(t) \cos(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t + b(t) \sin(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t, \quad (\text{C.39})$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções que variam lentamente com o tempo. Supomos que $\dot{a} \sim \epsilon a$ e $\dot{b} \sim \epsilon b$. Nos cálculos, conservamos somente os termos de primeira ordem com respeito a ϵ . Também, desenvolveremos os produtos de fatores trigonométricos na forma de somas e omitiremos os termos de frequência $3(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})$. Obtemos finalmente:

$$-(2\dot{a} + b\epsilon + \frac{h\omega_0}{2}b)\omega_0 \sin(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t + (2\dot{b} - a\epsilon + \frac{h\omega_0}{2}a)\omega_0 \cos(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t = 0. \quad (\text{C.40})$$

Os coeficientes de cada um dos fatores sen e cos se anulam. Colocando $a(t) \sim e^{st}$ e $b(t) \sim e^{st}$ deduzimos:

$$\begin{aligned} sa + \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{h\omega_0}{2})b &= 0 \\ \frac{1}{2}(\epsilon - \frac{h\omega_0}{2})a - sb &= 0 \end{aligned}$$

A condição de compatibilidade destas duas equações nos dá:

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \epsilon^2 \right]. \quad (\text{C.41})$$

Como s precisa ser real:

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \epsilon < \frac{h\omega_0}{2}. \quad (\text{C.42})$$

Então, a ressonância paramétrica é verificada neste intervalo.

A ressonância paramétrica verifica-se também para as frequências Ω próximas aos valores do tipo $2\omega_0/n$ onde n é um número inteiro qualquer. Entretanto, a largura dos intervalos de ressonância (intervalos de instabilidade) com o aumento de n , diminui rapidamente.

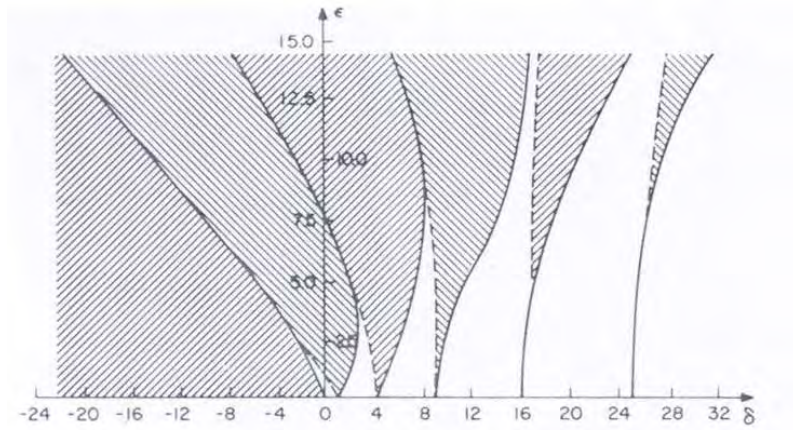


Figura C.2: Um exemplo das regiões de estabilidade (em branco) e instabilidade (sombreadas). A figura corresponde à equação de Mathieu $\ddot{x} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t)x = 0$.

O fenômeno da ressonância paramétrica tem lugar também na presença de um atrito débil no sistema. Neste caso, o intervalo de instabilidade torna-se mais estreito. A ressonância torna-se possível não para qualquer amplitude h infinitamente pequena, mas somente para amplitudes superiores de um valor determinado h_k . Para ressonâncias nas proximidades das frequências $2\omega_0/n$, o valor crítico h_k cresce com o aumento de n .

Uma aplicação do teorema de Floquet encontra-se na física do estado sólido como o teorema de Bloch [76]. Nesta área, a equação de Mathieu representa a equação de Schrödinger para um elétron em um potencial periódico. As regiões de estabilidade aqui são representadas por “faixas” de níveis possíveis de energia do elétron, separadas por “regiões proibidas” (regiões de instabilidade).

Apêndice D

Método assintótico na teoria de ressonâncias não-lineares

Neste apêndice deduzimos as equações utilizadas para a obtenção das equações (5.11) [75].

Consideramos a seguinte equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \epsilon f(\nu t, x, \frac{dx}{dt}), \quad (\text{D.1})$$

onde ϵ é uma grandeza pequena e positiva, $f(\nu t, x, \frac{dx}{dt})$ é a função periódica em νt com período 2π . Para o caso não perturbado $\epsilon = 0$, a solução representa as oscilações harmônicas:

$$x = a \cos \psi.$$

A amplitude a e a fase ψ satisfazem o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

O caso que nos interessa é o caso perturbado $\epsilon \neq 0$ quando $\omega \approx p\nu/q$ (caso de ressonância):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 x = \epsilon f(\nu t, x, \frac{dx}{dt}), \quad (\text{D.3})$$

onde p e q são números inteiros. Neste caso, é conveniente introduzir a grandeza $\theta = \psi - \frac{p}{q}\nu t$ e procurar a solução da equação (D.3) na seguinte forma:

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \theta\right) + \epsilon u_1\left(a, \theta, \frac{\nu}{q}t\right) + \epsilon^2 u_2\left(a, \theta, \frac{\nu}{q}t\right) + \dots \quad (\text{D.4})$$

As funções $u_1(a, \theta, \frac{\nu}{q}t)$ e $u_2(a, \theta, \frac{\nu}{q}t)$ precisam ser determinadas. Assumimos que a amplitude a e a fase θ satisfazem:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(a, \theta) + \epsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots \\ \frac{d\theta}{dt} &= \epsilon B_1(a, \theta) + \epsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots\end{aligned}\quad (\text{D.5})$$

Assim, o problema é determinar as funções $A_1(a, \theta)$, $A_2(a, \theta)$, ..., $B_1(a, \theta)$, $B_2(a, \theta)$, ..., $u_1(a, \theta, \frac{\nu}{q}t)$, $u_2(a, \theta, \frac{\nu}{q}t)$, ..., tal que (D.4) seja solução da equação (D.3).

Diferenciando a equação (D.4) obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left\{ \cos \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ &+ \left\{ -a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \dots \right\} \frac{d\theta}{dt} + \\ &+ \left\{ -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \dots \right\},\end{aligned}\quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \left\{ \cos \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{d^2a}{dt^2} + \left\{ \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right\} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \\ &+ 2 \left\{ -\sin \psi + \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \theta} + \dots \right\} \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \\ &+ 2 \left\{ -\frac{p}{q} \nu \sin \psi + \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ &+ \left\{ -a \sin \psi + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \dots \right\} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \\ &+ \left\{ -a \cos \psi + \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} + \dots \right\} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \\ &+ 2 \left\{ -a \frac{p}{q} \nu \cos \psi + \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial t} + \dots \right\} \frac{d\theta}{dt} + \\ &+ \left\{ -a \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 \cos \psi + \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dots \right\}.\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

Em continuidade, da equação (D.5):

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dt^2} &= \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 \right\} + \epsilon^3 \dots, \\ \left(\frac{da}{dt} \right)^2 &= \epsilon^2 A_1^2 + \epsilon^3 \dots, \quad \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \epsilon^2 B_1^2 + \epsilon^3 \dots, \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 \right\} + \epsilon^3 \dots, \\ \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= \epsilon^2 A_1 B_1 + \epsilon^3 \dots\end{aligned}\quad (\text{D.8})$$

Substituímos (D.4) e (D.7) no lado esquerdo da equação (D.3), usando também (D.5) e (D.8), e obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 x &= \epsilon \left\{ -2\frac{p\nu}{q}A_1 \sin \psi - 2a\frac{p\nu}{q}B_1 \cos \psi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 u_1 \right\} + \\
&+ \epsilon^2 \cos \psi \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta}B_1 - aB_1^2 - 2a\frac{p\nu}{q}B_2 \right\} + \\
&+ \epsilon^2 \sin \psi \left\{ -2A_1B_1 - 2\frac{p\nu}{q}A_2 - a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 - a\frac{\partial B_1}{\partial \theta}B_1 \right\} \\
&+ \epsilon^2 \left\{ 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t}A_1 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t}B_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 u_2 \right\} + \epsilon^3 \dots \quad (D.9)
\end{aligned}$$

O lado direito da equação (D.3) expandimos em potência do parâmetro ϵ pequeno:

$$\begin{aligned}
\epsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) &= \epsilon \left\{ f(\nu t, a \cos \psi, -a\frac{p\nu}{q} \sin \psi) \right\} + \\
&\quad \epsilon^2 \left\{ f'_x(\nu t, a \cos \psi, -a\frac{p\nu}{q} \sin \psi)u_1 \right\} + \\
&+ \epsilon^2 \left\{ f'_x(\nu t, a \cos \psi, -a\frac{p\nu}{q} \sin \psi)(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}) \right\} + \epsilon^3 \dots \quad (D.10)
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de (D.9) e (D.10) de mesma ordem com respeito a ϵ , obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 u_1 = f_0(a, \nu t, \psi) + 2\frac{p\nu}{q}A_1 \sin \psi + 2a\frac{p\nu}{q}B_1 \cos \psi, \quad (D.11)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 u_2 &= f_1(a, \nu t, \psi) + \left[2\frac{p\nu}{q}A_2 + a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial \theta}B_1 + 2A_1B_1 \right] \sin \psi + \\
&+ \left[2a\frac{p\nu}{q}B_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \theta}B_1 + aB_1^2 \right] \cos \psi. \quad (D.12)
\end{aligned}$$

Aqui, as seguintes grandezas foram introduzidas:

$$f_0(a, \nu t, \psi) = f(\nu t, a \cos \psi, -a\frac{p\nu}{q} \sin \psi), \quad (D.13)$$

$$\begin{aligned}
f_1(a, \nu t, \psi) &= f'_x(\nu t, a \cos \psi, -a\frac{p\nu}{q} \sin \psi)u_1 + \\
&+ f'_x(\nu t, a \cos \psi, -a\frac{p\nu}{q} \sin \psi)(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}) - \\
&- 2A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} - 2B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t}. \quad (D.14)
\end{aligned}$$

O passo seguinte é escrever as funções $u_1(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \theta)$ e $f_0(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \theta)$ como soma de Fourier:

$$u_1(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \theta) = \sum_n \sum_m u_{nm}^{(1)}(a) e^{i\{n\nu t + m(\frac{p}{q}\nu t + \theta)\}}, \quad (\text{D.15})$$

$$f_0(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \theta) = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{n\nu t + m(\frac{p}{q}\nu t + \theta)\}}, \quad (\text{D.16})$$

onde

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-i\{n\vartheta + m\psi\}} d\vartheta d\psi. \quad (\text{D.17})$$

Substituindo o lado direito das equações (D.15) e (D.16) na equação (D.11) obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_n \sum_m \left\{ \left(\frac{p}{q}\nu \right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu \right)^2 \right\} e^{i\{n\nu t + m(\frac{p}{q}\nu t + \theta)\}} u_{nm}^{(1)}(a) = \\ & = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{n\nu t + m(\frac{p}{q}\nu t + \theta)\}} + 2\frac{p}{q}\nu A_1 \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \theta\right) + \\ & + 2a\frac{p}{q}\nu B_1 \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \theta\right). \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Igualando os coeficientes correspondentes aos mesmos harmônicos:

$$u_{nm}^{(1)}(a) = \frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2} \quad (\text{D.19})$$

para valores de n e m que satisfazem a condição

$$\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2 \neq 0 \quad (\text{D.20})$$

ou

$$nq + (m \pm 1)p \neq 0. \quad (\text{D.21})$$

A equação que determina a relação entre as funções $A_1(a, \theta)$ e $B_1(a, \theta)$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & 2\frac{p}{q}\nu A_1 \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \theta\right) + (2a\frac{p}{q}\nu B_1) \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \theta\right) + \\ & + \sum_n \sum_m e^{i\{n\nu t + m(\frac{p}{q}\nu t + \theta)\}} f_{nm}^{(0)}(a) = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Substituindo o valor $u_{nm}^{(1)}(a)$ (D.19) no lado direito da fórmula (D.15), obtemos:

$$u_1(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \theta) = \sum_n \sum_m \frac{f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{n\nu t + m(\frac{p}{q}\nu t + \theta)\}}}{nq + (m \pm 1)p \neq 0 \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2}. \quad (\text{D.23})$$

Voltamos agora para a equação (D.22). Nessa equação somamos sobre valores inteiros de n e m que satisfazem

$$nq + (m \pm 1)p = 0. \quad (\text{D.24})$$

Assim, podemos reescrever o termo exponencial na seguinte forma:

$$\begin{aligned} e^{i\{(n+m\frac{p}{q})\nu t+m\theta\}} &= e^{i\{(nq+mp)\frac{\nu}{q}t+m\theta\}} = \\ &= e^{i\{\mp\frac{p}{q}\nu t+m\theta\}} = e^{i\{\mp(\frac{p}{q}\nu t+\theta)+(m\pm 1)\theta\}} = \\ &\left\{ \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \theta\right) \mp i \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \theta\right) \right\} e^{i(m\pm 1)\theta}. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

A seguir, notamos de (D.24) que $m \pm 1$ é divisível com respeito a q . Então, podemos reescrever este fator como $q\gamma$ ($-\infty < \gamma < \infty$). Igualando os coeficientes de $\cos(\frac{p}{q}\nu t + \theta)$ e $\sin(\frac{p}{q}\nu t + \theta)$ em (D.22), temos:

$$\begin{aligned} A_1(a, \theta) &= -\frac{q}{4\pi^2\nu p} \sum_{\gamma} e^{iq\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-iq\gamma\theta'} \sin \psi d\vartheta d\psi, \\ B_1(a, \theta) &= -\frac{q}{4\pi^2ap\nu} \sum_{\gamma} e^{iq\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-iq\gamma\theta'} \cos \psi d\vartheta d\psi, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

onde $\theta' = \psi - \frac{p}{q}\vartheta$. Nas fórmulas (D.26) γ pode ter valores positivos e negativos tais que as integrais são diferentes de zero. Quando $f_0(a, \vartheta, \psi)$ é um polinômio das suas variáveis ou de $\sin \vartheta$ e $\cos \vartheta$, γ tem valores inteiros [75].

Assim, a primeira aproximação para solução da equação (D.3) é:

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \theta\right),$$

onde a e θ satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon q}{4\pi^2\nu p} \sum_{\gamma} e^{iq\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-iq\gamma\theta'} \sin \psi d\vartheta d\psi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q}\nu - \frac{\epsilon q}{4\pi^2ap\nu} \sum_{\gamma} e^{iq\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \vartheta, \psi) e^{-iq\gamma\theta'} \cos \psi d\vartheta d\psi. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Sabendo as expressões para $u_1(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \theta)$, $A_1(a, \theta)$ e $B_1(a, \theta)$, usamos (D.14) para obter a expressão explícita para $f_1(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \theta)$. As expressões para $A_2(a, \theta)$ e $B_2(a, \theta)$, necessárias para a aproximação seguinte, obtemos da equação (D.12):

$$\begin{aligned} A_2(a, \theta) &= -\frac{q}{2\nu p} \left[a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi^2\nu p} \sum_{\gamma} e^{iq\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \vartheta, \psi) e^{-iq\gamma\theta'} \sin \psi d\vartheta d\psi, \\ B_2(a, \theta) &= \frac{q}{2a\nu p} \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - aB_1^2 \right] - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi^2a\nu p} \sum_{\gamma} e^{iq\gamma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \vartheta, \psi) e^{-iq\gamma\theta'} \cos \psi d\vartheta d\psi. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Referências

- [1] S. N. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Z. Phys. **26**, 178 (1924).
- [2] A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 261 (1924); A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 3 (1925), Op. cit. [30].
- [3] A. Griffin, *A brief history of our understanding of BEC: from Bose to Beliaev*, arXiv: cond-mat/9901123 (1999).
- [4] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995).
- [5] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett e R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein condensation in an Atomic Gas with Attractive Interaction*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995); C. C. Bradley, C. A. Sackett e R. G. Hulet, *Bose-Einstein condensation of Lithium: Observation of Limited Condensate Number*, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997).
- [6] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn e W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [7] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner e T. J. Greytak, *Bose-Einstein Condensation of atomic Hydrogen*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998).
- [8] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell e C. E. Wieman, *Stable ^{85}Rb Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000).
- [9] A. Robert, O. Sirjean, A. Brwaeyns, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, e A. Aspect, *A Bose-Einstein Condensate of Metastable Atoms*, Science **292**, 461 (2001); F. P. D. Santos, J. Léonard, J. Wang, C. J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. S. Unnikrishnan, M. Leduc e C. Cohen-Tannoudji,

- Bose-Einstein Condensation of Metastable Helium*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3459 (2001).
- [10] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni, M. Inguscio, *Bose-Einstein Condensation of Potassium Atoms by Sympathetic Cooling*, Science **294**, 1320 (2001).
- [11] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H-C Nägerl e R. Grimm, *Bose-Einstein Condensation of Cesium*, Science **299**, 232 (2003).
- [12] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, Y. Takahashi, *Spin-Singlet Bose-Einstein Condensation of Two-Electron Atoms*, Phys. Rev. Lett. **91**, 040404 (2003).
- [13] Markus Greiner, Cindy A. Regal e Deborah S. Jin, *Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas*, Nature (London) **426**, 537 (2003).
- [14] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *Bose-Einstein Condensation of Molecules*, Science **302**, 2101 (2003); M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic e W. Ketterle, *Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules*, Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).
- [15] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [16] Y. Castin, R. Dum, *Instability and Depletion of an Excited Bose-Einstein Condensate in a Trap*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3553, (1997).
- [17] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend e W. Ketterle, *Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Trap*, Phys. Rev. Lett. **77**, 988 (1996).
- [18] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman e E. A. Cornell, *Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Dilute Gas*, Phys. Rev. Lett. **77**, 420, (1996).
- [19] C. N. Cohen-Tannoudji, *Nobel Lecture: Manipulating atoms with photons*, Rev. Mod. Phys. **70**, 707 (1998).
- [20] W. D. Phillips, *Nobel Lectures: Laser cooling and trapping*, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).

- [21] Vanderlei Salvador Bagnato, *A Condensação De Bose-Einstein*, não publicado.
- [22] J. G. Aston e J. J. Fritz, *Thermodynamics and Statistical Thermodynamics*, John Wiley and Sons, Inc. (1959).
- [23] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [24] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii e S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [25] V. S. Bagnato, D. Pritchard e D. Kleppner, *Bose-Einstein condensation in an external potential*, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987).
- [26] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman e E. A. Cornell, *Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas: Measurement of Energy and Ground-State Occupation*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4984 (1996).
- [27] W. Ketterle e N. J. van Druten, *Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions*, Phys. Rev. A **54**, 656 (1996).
- [28] N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947), Op. cit. [24].
- [29] E. P. Gross, Nouvo Cimento **20**, 454 (1961), Op. cit. [24]; L. P. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect bose gas*, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).
- [30] C. J. Pethick, H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, 2002.
- [31] C. A. Sackett, H. T. C. Stoof e R. G. Hulet, *Growth and Collapse of a Bose-Einstein Condensate with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2031 (1998).
- [32] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, E. A. Cornell, C. E. Wieman, *Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates*, Nature (London) **412**, 295 (2001).
- [33] J. M. Gerton, D. Strekalov, I. Prodan e R. G. Hulet, *Direct observation of growth and collapse of a Bose-Einstein condensate with attractive interactions*, Nature **408**, 692 (2000).

- [34] P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett e M. Edwards, *Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms*, Phys. Rev. A **51**, 4704 (1995).
- [35] A. Gammal, T. Frederico e L. Tomio, *Improved numerical approach for the time-independent Gross-Pitaevskii nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Rev. E **60**, 2421 (1999).
- [36] A. Gammal, T. Frederico e L. Tomio, *Critical number of atoms for attractive Bose-Einstein condensates with cylindrically symmetric traps*, Phys. Rev. A **64**, 055602 (2001).
- [37] N. R. Claussen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, S. T. Thompson, E. A. Donley, E. Hoddbby, C. E. Wieman, *Very-high-precision bound-state spectroscopy near a ^{85}Rb Feshbach resonance*, Phys. Rev. A **67**, 060701(R) (2003).
- [38] V. E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves*, Sov. Phys.-JETP **35**, 908 (1972); V. E. Zakharov, V. S. Synakh, *The nature of the self-focusing singularity*, Sov. Phys.-JETP **41**, 465 (1975).
- [39] H. Saito e M. Ueda, *Intermittent Implosion and Pattern Formation of Trapped Bose-Einstein Condensates with an Attractive Interaction*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1406 (2001); H. Saito e M. Ueda, *Mean-field analysis of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **65**, 033624 (2002); S. K. Adhikari, *Mean-field description off collapsing and exploding Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **66**, 013611 (2002).
- [40] A. F. R. de Toledo Piza, *Condensados atômicos de Bose-Einstein*, Curso de verão, IFUSP-28-30 de janeiro de 2002.
- [41] J. Weiner, V. S. Bagnato, S. Zilio, P. Julienne, *Experiments and theory in cold and ultracold collisions*, Rev. Mod. Phys. **71**, 1(1999).
- [42] A. F. R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica*, EDUSP, São Paulo, 2003.
- [43] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [44] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1965.
- [45] K. Huang e C. N. Yang, *Quantum-Mechanical Many-Body problem with Hard-Sphere Interaction*, Phys. Rev. **105**, 767 (1957).

- [46] M. Block e M. Holthaus, *Pseudopotential approximation in a harmonic trap*, Phys. Rev. A **65**, 052102 (2002), J. Pade, M. Block e M. Holthaus, *s-wave pseudopotential for anisotropic traps*, Phys. Rev. A **68**, 063402 (2003).
- [47] A. Derevianko, *Anisotropic pseudopotential for polarized dilute quantum gases*, Phys. Rev. A **67**, 033607 (2003).
- [48] K. Huang, *Cold Trapped Atoms: A Mesoscopic System*, arXiv: cond-mat/0012418 (2000).
- [49] L. Pitaevskii, S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [50] J. Stenger, S. Inouye, M. R. Andrews, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn e W. Ketterle, *Strongly Enhanced Inelastic Collisions in a Bose-Einstein Condensate near Feshbach Resonances*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2422 (1999).
- [51] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn e W. Ketterle, *Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate*, Nature **392**, 151 (1998).
- [52] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, R. G. Hulet, *Formation and propagation of matter-wave soliton trains*, Nature **417**, 150 (2002).
- [53] Ph. Courteille, R. S. Freeland e D. J. Heinzen, *Observation of a Feshbach Resonance in a Cold Atom Scattering*, Phys. Rev. Lett. **81**, 69 (1998).
- [54] Juan J. García-Ripoll, V. M. Pérez-García, *Extended Parametric Resonances in Nonlinear Schrödinger Systems*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1715 (1999).
- [55] F. Kh. Abdullaev, R. Galimzyanov, *The dynamics of bright matter wave solitons in a quasi one-dimensional Bose-Einstein condensate with a rapidly varying trap*, Journal of Physics B **36**, 1099 (2003).
- [56] Yu. Kagan, E. L. Surkov e G. V. Shlyapnikov, *Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential*, Phys. Rev. A **54**, R1753 (1996); Yu. Kagan, E. L. Surkov e G. V. Shlyapnikov, *Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps*, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).
- [57] Yu. Kagan, E. L. Surkov e G. V. Shlyapnikov, *Evolution and Global Collapse of Trapped Bose Condensates under Variations of the Scattering Length*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2604 (1997).

- [58] K. Staliunas, S. Longhi e G. J. de Valcárcel, *Faraday Patterns in Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **89**, 210406 (2002).
- [59] F. Kh. Abdullaev e R. A. Kraenkel, *Macroscopic quantum tunneling and resonances in coupled Bose-Einstein condensates with oscillating atomic scattering length*, Phys. Lett. A **272**, 395 (2000).
- [60] H. Saito, M. Ueda, *Dynamically Stabilized Bright Solitons in a Two-Dimensional Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **90**, 040403 (2003).
- [61] F. Kh. Abdullaev, J. G. Caputo, R. A. Kraenkel e B. A. Malomed, *Controlling collapse in a Bose-Einstein condensates by temporal modulation of the scattering length*, Phys. Rev. A **67**, 013605 (2003).
- [62] S. Adhikari, *Stabilization of a bright solitons and vortex solitons in a trap-less three-dimensional Bose-Einstein condensate by temporal modulation of the scattering length*, Phys. Rev. A **69**, 063613 (2004).
- [63] M. Edwards, K. Burnett, *Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms*, Phys. Rev. A **51**, 1382, (1995); M. Holland e J. Cooper, *Expansion of a Bose-Einstein condensate in a harmonic potential*, Phys. Rev. A **53**, R1950 (1996).
- [64] S. Adhikari, *Resonance in a Bose-Einstein condensate oscillation from a periodic variation in scattering length*, J. Phys. B **36**, 1109 (2003).
- [65] S. Stringari, *Colective Excitations of a Trapped Bose-Condensed Gas*, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360 (1996); G. Bayam e C. J. Pethick, *Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas*, Phys. Rev. Lett. **76**, 6 (1996).
- [66] V. M. Pérez-García, H. Michinel, J. I. Cirac, M. Lewenstein e P. Zoller, *Low Energy Exitacions of a Bose-Einstein Condensate: A Time-Dependent Variational Analysis*, Phys. Rev. Lett. **77**, 5320 (1996); V. M. Pérez-García, H. Michinel, J. I. Cirac, M. Lewenstein, P. Zoller , *Dynamics of Bose-Einstein condensates: Variational solutions of the Gross-Pitaevskii equations*, Phys. Rev. A **56**, 1424 (1997).
- [67] F. Kh. Abdullaev, J. C. Bronski e R. M. Galimzyanov, *Dynamics of a trapped 2D Bose-Einstein condensate with periodically and randomly varying atomic scattering length*, Physica D **184**, 319 (2003).

- [68] D. Anderson, *Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers*, Phys. Rev. A **27**, 3135 (1983).
- [69] J. J. G. Ripoll e V. M. Pérez-García, *Barrier resonance in Bose-Einstein condensation*, Phys. Rev. A **59**, 2220 (1999).
- [70] Victo dos Santos Filho, *Dinâmica não-linear em sistemas bosônicos com ineteração atrativa de dois corpos*, Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica, abril de 2001.
- [71] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, Inc. 1965.
- [72] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Mechanics*, Pergamon, Oxford, 1976.
- [73] A. H. Nayfeh e D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- [74] J. J. García-Ripoll e V. M. Pérez-García, *Extended Parametric Resonances in Nonlinear Schrödinger Systems*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1715 (1999).
- [75] N. N. Bogoliubov e Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, Hindustan Publishing Corpn., Delhi, 1961.
- [76] J. M. Ziman, *Principles of the theory of solids*, Cambridge University Press, 1971.
- [77] F.Kh. Abdullaev, B. B. Baziakov, B. A. Umarov, *Resonance phenomena in interaction of a spatial soliton with the modulated interface of two nonlinear media*, Optics Communications **156**, 341 (1998).
- [78] F. Kh. Abdullaev, Ravil M. Galimzyanov, Marijana Brtko e Roberto A. Kraenkel, *Resonances in a trapped 3D Bose-Einstein condensate under periodically varying scattering length*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, 3535-3550 (2004).
- [79] W. F. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, 3rd. ed., New York, 1992.
- [80] Victo S. Filho, F. Kh. Abdullaev, A. Gammal, L. Tomio, *Autosolitons in trapped Bose-Einstein condensate with two- and three- body inelastic processes*, Phys. Rev. A **63**, 053603 (2001); Victo S. Filho, L. Tomio, A. Gammal e T. Frederico, *Dynamical mean-field study of strongly interacting Bose-Einstein condensate*, Phys. Lett. A **325**, 420 (2004).

- [81] C. K. Law, H. Pu, N. P. Bigelow, J. H. Eberly, “*Stability Signature*” in *Two-Species Dilute Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3105 (1997); M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Observation of Interference Between Two Bose Condensates*, Science **275**, 637 (1997).
- [82] F. Kh. Abdullaev e R. A. Kraenkel, *Coherent atomic oscillations and resonances between coupled Bose-Einstein condensates with time-dependent trapping potential*, Phys. Rev. A **62**, 023613 (2000).
- [83] E. Timmermans, P. Tommasini, R. Côté, M. Hussein e A. Kerman, *Rarified Liquid Properties of Hybrid Atomic-Molecular Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2691 (1999); G. D. Telles, L. G. Marcassa, S. R. Muniz, S. G. Miranda, A. Antunes, *Inelastic cold collisions of a Na/Rb mixture in a magneto-optical trap*, Phys. Rev. A **59**, R23 (1999).
- [84] B. Malomed, M. I. Weinstein, *Soliton dynamics in the discrete nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Lett. A **220**, 91 (1996); A. Trombettoni e A. Smerzi, *Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2353 (2001).
- [85] C. A. Regal, M. Greiner, D. S. Jin, *Observation of Resonance Condensate of Fermionic Atom Pairs*, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
- [86] J. N. Milstein, S. J. J. M. F. Kokkelmans e M. J. Holland, *Resonance theory of the crossover from Barden-Cooper-Schrieffer superfluidity to Bose-Einstein condensation in a dilute Fermi gas*, Phys. Rev. A **66**, 043604 (2002).