

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.001/05

**Relação entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores
puros para a supercorda**

Dáfni Fernanda Zenedin Marchioro

Orientador

Prof. Dr. Nathan J. Berkovits

Março de 2005

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Daniel Luiz Nedel, não apenas por completar minha vida sendo meu marido, mas por também ser meu melhor amigo e meu companheiro científico. Gostaria de agradecê-lo pela compreensão, carinho, paciência e pelas discussões que ajudaram a completar minha formação como física e como pessoa. Por tudo isto, posso dizer que nunca vou esquecê-lo.

Tão importante quanto o Daniel é a minha família, Valéria, Maurício, Cárile e Helena. Sou eternamente grata aos meus pais, Maurício e Valéria, que souberam respeitar as diferenças de suas três filhas e prepará-las para o mundo, com muito amor, apoio e democracia. Também devo gratidão às minhas irmãs, Cárile e Helena, duas pessoas maravilhosas que me fizeram perceber que é possível amar indivíduos tão diferentes de nós mesmos.

Aos meus avós, Erna e Alide, que ajudaram a formar a pessoa que sou hoje; aos meus padrinhos, Angela e Aldecir, pela torcida e pelo apoio; a todos meus tios e primos das duas famílias (Zenedin e Marchioro), que sempre foram a minha grande família.

À família Nedel, Aidée, Claudia, Lucio, Felipe, Beatriz e Isabela, por terem me acolhido tão bem nesta minha nova família.

Ao Nathan, pela orientação, discussões e oportunidades.

Ao Doff, amigo sempre presente e companheiro da padaria.

Aos amigos da Federal, Ana Amélia, Sandro e Benvenho, que continuaram a manter contato e que permanecem grandes amigos.

Aos amigos da Maláquia, pelas portas sempre abertas, pelas conversas e baladas.

Aos amigos Gadelha, Ricardo, Di, Márcia e Babi, pela amizade, preocupação, carinho e por serem legais como vocês são!

Ao Maurizio, pela cuidadosa leitura da tese e pela amizade.

Aos amigos da sala 10, Marijana e Teófilo, pelo intercâmbio de culturas e pela convivência agradável.

À Arlene Cristina, amiga verdadeira e pessoa de quem sinto falta. Pelo companheirismo, pela torcida e por toda ajuda nestes 4 anos.

À Érica, pessoa doce e única, pela amizade e apoio.

Aos amigos da república da Arruda Alvim, Cris, Marcel, Baretta, pela convivência, amizade e apoio.

À Olivera Mišković, por estar longe e ainda assim ser uma excelente amiga! Valeu por todos os conselhos, discussões e apoio!

Aos membros do grupo de cordas do IFT, Carlos Mafra, Vladimir Pershin, Oscar Bedoya, Brenno Vallilo, Luciano Barosi, pela amizade e discussões de física.

À comunidade IFT (alunos, professores e funcionários), por ter me acolhido.

À Fapesp, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese, mostramos a equivalência dos formalismos de Green-Schwarz e de espinores puros para a supercorda. Partindo da ação de Green-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz e adicionando graus de liberdade fermiônicos, relacionamos os operadores BRST do formalismo de espinores puros e de Green-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz através de transformações de similaridade, indicando a equivalência das respectivas cohomologias. Esta prova de equivalência é uma generalização do procedimento usado para relacionar a superpartícula de Brink-Schwarz e a superpartícula do formalismo de espinores puros.

Palavras Chaves:

Supercorda; formalismo de Green-Schwarz; BRST; espinores puros.

Áreas do conhecimento:

Física de Partículas Elementares e Teoria de Campos

Abstract

In this thesis, we have shown the equivalence of the Green-Schwarz and pure spinor formalisms for the superstring. Starting from the Green-Schwarz action in the semi-light-cone gauge with additional fermionic degrees of freedom, we have related the BRST operator of pure spinor formalism to the semi-light-cone Green-Schwarz operator through similarity transformations, indicating the equivalence of the cohomologies. This equivalence proof is a generalization of the procedure used to relate the Brink-Schwarz and pure spinor's superparticle.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Quantização BRST	5
2.1	Quantização de Dirac	6
2.2	Quantização BRST	8
2.2.1	Simetria BRST	8
2.2.2	Quantização BRST	10
2.3	Quantização BRST da corda bosônica	11
2.3.1	Álgebra de Virasoro	12
2.3.2	Operadores de vértice	15
2.3.3	Quantização BRST	17
3	Partícula	24
3.1	Partícula relativística de <i>spin</i> 1/2	25
3.2	Superpartícula de Brink-Schwarz	27
3.3	Superpartícula de Brink-Schwarz no semi-gauge de cone de luz	31
3.4	Quantização covariante da superpartícula	33
3.4.1	Descrição no super-espaço de super Maxwell em $D = 10$	33
3.4.2	Quantização covariante da superpartícula	35
4	Supercorda	39
4.1	Supercorda RNS	40
4.2	Supercorda de Green-Schwarz	45

4.2.1	Supercorda de Green-Schwarz no semi- <i>gauge</i> de cone de luz	51
4.3	Quantização covariante da supercorda	52
4.3.1	Supercorda no formalismo de espinores puros	53
4.3.2	Parametrização do espinor puro e construção dos geradores de Lorentz	54
4.3.3	Operadores de vértice em espinores puros	57
4.3.4	Comparação entre os métodos BRST usual e de espinores puros . . .	59
5	Equivalência	61
5.1	Equivalência entre a ação de Brink-Schwarz e de espinores puros para a superpartícula	62
5.2	Equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda	69
6	Conclusões e Perspectivas	81
A	Matrizes gama em dez dimensões	84
B	Resolução do vínculo de espinor puro	87

Capítulo 1

Introdução

Uma das teorias mais promissoras de gravitação quântica é a teoria de cordas [1, 2]. Seus ingredientes básicos são objetos extensos unidimensionais (cordas) que podem estar definidos em 26 (corda bosônica) ou em dez dimensões espaço-temporais (supercordas). A corda bosônica descreve apenas graus de liberdade bosônicos, e apresenta em seu espectro uma partícula vetorial não-massiva identificada com o fóton (corda aberta) e um tensor simétrico de dois índices identificado como sendo o gráviton (corda fechada), entre outras. No entanto, também apresenta uma partícula de massa negativa em seu espectro, ou seja, um táquion. Por esta razão, é uma teoria inconsistente, a menos que seja possível eliminar este grau de liberdade problemático.

Isto é possível quando construímos uma teoria de cordas que possui supersimetria. Esta teoria é chamada de teoria de supercorda. Como supersimetria é uma simetria que relaciona graus de liberdade bosônicos e fermiônicos, no espectro da supercorda também aparecerão, além das partículas citadas acima, partículas com mesma massa mas com *spin* semi-inteiro. Por exemplo, no espectro da supercorda teremos uma partícula fermiônica sem massa que chamamos de fotino (o parceiro supersimétrico do fóton) e partículas não-massivas representadas por um campo de Rarita-Schwinger, que são conhecidas como gravitinos (parceiros supersimétricos do gráviton). Por descrever matéria, além das partículas de interação, a teoria de supercorda se mostrou uma teoria muito mais

interessante que a teoria da corda bosônica. Além disto, os graus de liberdade taquiônicos não aparecem nestas teorias, ou podem ser eliminados consistentemente.

Existem cinco teorias de supercordas consistentes, todas relacionadas por uma rede de dualidades [3]: tipo I, tipo IIA, tipo IIB, heterótica $E_8 \times E_8$ e heterótica $SO(32)$. Estas cinco teorias são descritas por dois formalismos padrão [1]: o formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) e o formalismo de Green-Schwarz (GS). A formulação RNS possui supersimetria manifesta na folha de mundo, mas não no espaço-tempo. A supersimetria no espaço-tempo só é possível ser verificada depois de efetuarmos a projeção GSO (Gliozzi-Scherk-Olive) [4] que, a princípio, serviria para eliminar o táquion de um dos setores da teoria mas que, por conseqüência, torna o espectro supersimétrico no espaço-tempo. O fato deste formalismo não apresentar supersimetria manifesta no espaço-tempo traz dificuldades nos cálculos de amplitudes de espalhamento envolvendo férmions. Os operadores de vértice fermiônicos são muito complicados, tornando cálculos explícitos uma tarefa árdua. Por sua vez, cálculos envolvendo bósons não apresentam tais dificuldades.

Uma formulação com supersimetria manifesta no espaço-tempo seria desejável para contornar esse problema. Esta formulação já existe - o formalismo de Green-Schwarz. A ação neste formalismo é invariante por uma simetria fermiônica conhecida por simetria kappa, necessária para garantir unitariedade da teoria. Outro exemplo de modelo que apresenta tal simetria é a superpartícula de Brink-Schwarz [5], que é o modo zero da supercorda aberta. Tal simetria é gerada pelas oito componentes de primeira classe do vínculo fermiônico d_α ; as outras oito componentes são de segunda classe.

De modo a fazer a quantização covariante da teoria, é necessário que exista um procedimento que separe esses dois tipos de vínculos covariantemente. No entanto, tentativas de fixar covariantemente a simetria kappa não obtiveram sucesso. Também foi proposto por Siegel um modelo com ação quadrática nos férmions e um novo conjunto de vínculos de primeira classe, de modo a resolver o problema da simetria kappa [6]. Tal procedimento obteve sucesso no caso da superpartícula [7], mas um conjunto de vínculos de primeira

classe que fechasse a álgebra no nível quântico e que reproduzisse o espectro correto não pôde ser encontrado. Outra forma de quantizar a supercorda é trabalhar no semi-*gauge* de cone de luz [8], que consiste em fixar apenas a simetria kappa. No entanto, também esta abordagem se mostrou inconsistente.

Por outro lado, quantizar a ação GS no *gauge* de cone de luz é uma via possível. No entanto, pela falta de covariância manifesta, amplitudes de espalhamento são difíceis de calcular; de fato, apenas amplitudes de quatro pontos no nível de árvore e em um *loop* foram calculadas explicitamente [9]. Além disto, estes cálculos só podem ser feitos em *backgrounds* que permitam o *gauge* de cone de luz.

Em 2000, um novo formalismo para a supercorda foi proposto: o formalismo de espinores puros [10]. Neste formalismo, a ação para os férmions é quadrática e a supersimetria é manifesta no espaço-tempo. Quantização covariante é possível usando um operador BRST $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$, sendo λ^α um espinor puro, ou seja, que satisfaz a relação $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$. Graças a esta relação, o operador BRST é nilpotente. O cálculo de amplitudes de espalhamento se beneficia da supersimetria manifesta no espaço-tempo e da covariância de Lorentz, sendo mais simples que nos outros dois formalismos [10, 11]. No entanto, a origem do operador BRST e da condição de espinor puro é um tópico não compreendido dentro do formalismo pelo fato de, no método BRST usual [12], não existirem fantasmas (*ghosts*) restritos a vínculos.

Nesta tese, mostraremos que é possível derivar o operador BRST e a condição de espinor puro partindo da ação de Green-Schwarz. A abordagem usada (em analogia ao que foi feito para a superpartícula [13]) consiste em partir da ação de GS no semi-*gauge* de cone de luz com variáveis fermiônicas adicionais e, por equivalência das cohomologias das cargas BRST, chegar à ação do formalismo de espinores puros junto com Q e $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$ [14]. Este procedimento, na verdade, mostra a equivalência dos dois formalismos, fato já mostrado no caso de RNS e de espinores puros [15].

A tese está dividida da seguinte forma: no capítulo 2 apresentaremos uma breve

descrição da quantização BRST e sua aplicação no caso da corda bosônica. No capítulo 3, revisaremos a partícula relativística de *spin* 1/2 [16], modelo que apresenta analogia com RNS por apresentar supersimetria apenas na linha de mundo. Além disto, falaremos da superpartícula de Brink-Schwarz que, por apresentar simetria kappa e supersimetria no espaço-tempo, é modelo análogo à supercorda de Green-Schwarz. Falaremos também de sua quantização no *gauge* de cone de luz, no *semi-gauge* de cone de luz e no formalismo de espinores puros [17]. No capítulo 4 apresentaremos uma revisão do formalismo RNS e de GS no *gauge* de cone de luz. Além disto, quantização de GS no *semi-gauge* de cone de luz e quantização covariante da supercorda também serão discutidas. A equivalência entre a superpartícula de Brink-Schwarz e a superpartícula de espinores puros é tópico do capítulo 5, bem como a equivalência entre os formalismos de GS e espinores puros para a supercorda [14]. Finalmente, o capítulo 6 apresenta conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Quantização BRST

Existem vários métodos para quantizar teorias de *gauge*, que são por excelência sistemas vinculados. Neste capítulo, iremos mencionar dois deles: a quantização de Dirac e a quantização BRST.

A quantização de Dirac, em poucas palavras, consiste em manter todos os graus de liberdade do sistema clássico, inclusive os que são puro *gauge*, e promovê-los a operadores [18]. De forma a remover os estados que não são físicos, impõe-se que os estados físicos devem ser aniquilados por operadores que são os análogos quânticos dos vínculos de primeira classe. No entanto, este procedimento não é mais válido quando a invariância de *gauge* do sistema é quebrada, ou seja, na presença de anomalias. Neste caso, condições extras devem ser impostas.

O método BRST (Becchi, Rouet, Stora, Tyutin) [12] pode ser aplicado tanto a teorias simples, como a partícula relativística, quanto a sistemas mais complicados, como as teorias de supercordas. Assim como a quantização de Dirac, o método preserva a covariância de Lorentz das teorias ao qual é aplicado. Os estados físicos são determinados como sendo aqueles que são aniquilados por um operador nilpotente construído a partir dos vínculos de primeira classe. Esta condição também garante que os estados físicos são invariantes de *gauge*. O método BRST pode ainda ser consistente quando aplicado a teorias com anomalias e, por este motivo, já apresenta uma vantagem sobre a quantização de Dirac.

Com o intuito de justificar a eficiência do método BRST, apresentaremos uma breve explicação da quantização de Dirac na seção 2.1. As outras seções serão dedicadas à quantização BRST e à aplicação do método à corda bosônica.

2.1 Quantização de Dirac

Como mencionado na introdução, na quantização de Dirac mantém-se todas as variáveis do sistema inclusive os vínculos de primeira classe, ou seja, não será feita fixação de *gauge*. Por este motivo, o espaço de representação do método de Dirac carrega informações que não são físicas. É necessário impor uma condição para selecionar os graus de liberdade físicos. Esta condição deve ser tal que enfatize a invariância de *gauge* da teoria no nível quântico. Isto leva à imposição

$$\hat{G}_a |\psi\rangle = 0, \quad (2.1)$$

sendo \hat{G}_a os equivalentes quânticos dos vínculos de primeira classe. No entanto, quando a invariância de *gauge* não é preservada no nível quântico a teoria apresenta anomalias e a aplicação do método de Dirac neste caso não é tão imediata. Os vínculos de primeira classe G_a satisfazem classicamente a seguinte álgebra:

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}^c G_c, \quad (2.2)$$

sendo C_{ab}^c as funções de estrutura. Se a relação acima é preservada quanticamente, ou seja,

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_b] = i\hbar \hat{C}_{ab}^c \hat{G}_c, \quad (2.3)$$

então a equação (2.1) é automaticamente satisfeita:

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_b] |\psi\rangle = 0. \quad (2.4)$$

Contudo, esta álgebra pode ser modificada no nível quântico, ou seja, as funções de estrutura podem adquirir correções em \hbar :

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_b] = i\hbar\hat{C}_{ab}^c\hat{G}_c + \hbar^2\hat{D}_{ab}. \quad (2.5)$$

Se isto acontece, vemos que, para satisfazer o requerimento que os estados físicos sejam invariantes de *gauge*, devemos impor uma condição extra:

$$\hat{D}_{ab}|\psi\rangle = 0. \quad (2.6)$$

Esta condição não tem análogo clássico e restringe ainda mais o sub-espço físico. Quando $\hat{D}_{ab} \neq 0$, os operadores quânticos \hat{G}_a deixam de ser vínculos de primeira classe e, portanto, não são mais geradores das simetrias de *gauge*. Por este motivo, a invariância de *gauge* é quebrada e o operador \hat{D}_{ab} é chamado de anomalia. Se a invariância de *gauge* é quebrada no nível quântico, não faz sentido procurar por estados invariantes de *gauge*. Há a necessidade de um tratamento mais cuidadoso do que simplesmente postular a equação (2.1).

Outra inconsistência que pode surgir quando a teoria apresenta anomalias vem da evolução dinâmica do sistema. Classicamente,

$$\{H_0, G_a\} = V_a^b G_b, \quad (2.7)$$

sendo H_0 a hamiltoniana canônica do sistema, que também é uma função de primeira classe, e a quantidade V_a^b pode ser interpretada como funções de estrutura. No caso de uma teoria anômala, a álgebra acima seria modificada da seguinte forma:

$$[H_0, G_a] = i\hbar\hat{V}_a^b\hat{G}_b + \hbar^2\hat{A}_a, \quad (2.8)$$

sendo \hat{A}_a a chamada anomalia. A consequência da equação acima é que um estado físico seria mapeado em outro estado que não é invariante de *gauge*.

No caso da quantização BRST, mesmo quando \hat{D}_{ab} ou \hat{A}_a não são nulos, a quantização pode ser consistente. Isto quer dizer que pode não ser correto levar em conta os graus de liberdade espúrios sem introduzir os fantasmas, seus parceiros na quantização BRST [18].

2.2 Quantização BRST

Nesta seção vamos apresentar como se constrói o operador BRST e a quantização propriamente dita.

2.2.1 Simetria BRST

O primeiro passo para a construção do operador BRST é tornar a teoria invariante pela simetria BRST. Isto se faz da seguinte forma:

1. Primeiro, devemos estender o espaço de fase da teoria considerando os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos de primeira classe e seus momentos canônicos conjugados como variáveis canônicas:

$$\{\lambda^a, \pi_b\} = \delta_b^a. \quad (2.9)$$

Os momentos conjugados também serão considerados como vínculos de primeira classe de modo a não modificar a teoria original. Portanto, o conjunto de vínculos de primeira classe é

$$C_A = (G_a, \pi_a). \quad (2.10)$$

2. Depois disso, introduzimos um par canônico de fantasmas para cada vínculo de primeira classe C_a . Os conjugados canônicos aos fantasmas serão os antifantasmas:

$$\{\eta^A, \mathcal{P}_B\} = \{\mathcal{P}_B, \eta^A\} = \delta_B^A, \quad (2.11)$$

sendo \mathcal{P}_B os antifantasma e η^A os fantasmas. Impomos que os fantasmas e antifantasma comutem com o resto das variáveis.

Vamos também definir o operador número de fantasma como

$$U = \sum_A \eta^A \mathcal{P}_A, \quad (2.12)$$

sendo que os autovalores de U são inteiros entre 0 e n , com n sendo a dimensão da álgebra de Lie definida pelos vínculos de primeira classe.

Constrói-se o operador BRST impondo que ele gere as transformações de *gauge* associadas aos vínculos de primeira classe em ordem mais baixa numa expansão em série de fantasmas. Além disso, ele deve ter número de fantasma igual a um, ser real e nilpotente. Com estes requerimentos, temos que o operador BRST é, em primeira instância,

$$Q = \eta^A C_A + \text{termos de ordem superior}. \quad (2.13)$$

Os termos de ordem superior são encontrados fazendo uso da propriedade de nilpotência do operador BRST:

$$Q = \eta^A C_A + \eta^B \eta^C U_{BC}^{(1)A} \mathcal{P}_A + \dots \quad (2.14)$$

sendo

$$U_{BC}^{(1)A} = -\frac{1}{2} f_{BC}^A, \quad (2.15)$$

e f_{BC}^A são as funções de estrutura da álgebra que os vínculos de primeira classe satisfazem.

Sabendo que os vínculos satisfazem a seguinte álgebra

$$\{C_A, C_B\} = f_{AB}^D C_D, \quad (2.16)$$

e usando a identidade de Jacobi para as funções de estrutura,

$$f_{BC}^A f_{AE}^D + f_{CE}^A f_{AB}^D + f_{EB}^A f_{AC}^D = 0, \quad (2.17)$$

calculamos Q^2 a partir de (2.14), e o resultado é que o operador BRST é nilpotente, ou seja, $Q^2 = 0$. Agora que temos a forma geral para o operador BRST, podemos proceder à quantização.

2.2.2 Quantização BRST

Começamos o processo de quantização identificando quem são os estados invariantes pela simetria BRST. Seja C^k o espaço de Hilbert dos estados de número de fantasma $U = k$. Um estado $|\chi\rangle$ é invariante por BRST se

$$\hat{Q}|\chi\rangle = 0. \quad (2.18)$$

Podemos construir estados invariantes pela simetria BRST que tenham a seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \hat{Q}|\chi\rangle + |\psi'\rangle, \quad (2.19)$$

com o estado $|\psi'\rangle$ satisfazendo a condição (2.18). No entanto, os estados $\hat{Q}|\chi\rangle$ são ortogonais a todos os outros estados. Estes estados são chamados de estados nulos ou exatos. Dois estados que diferem por um estado nulo terão os mesmos produtos internos com todos os estados invariantes por BRST, e portanto são indistinguíveis. As classes de equivalência das soluções de (2.18) de número de fantasma k , com duas soluções consideradas equivalentes como em (2.19), formam o k -ésimo grupo de cohomologia da álgebra de Lie \mathcal{G} , $H^k(\mathcal{G})$, e estas classes de equivalência são chamadas de classes de cohomologia. Em outras palavras, o grupo de cohomologia $H^k(\mathcal{G})$ é igual ao espaço de estados invariantes pela álgebra de Lie \mathcal{G} com número de fantasma k .

Os estados BRST-invariantes com número de fantasma zero têm uma propriedade interessante; aplicando \hat{Q} a estes estados, temos que

$$\hat{Q} |\chi\rangle = \hat{\eta}^A \hat{C}_A |\chi\rangle, \quad (2.20)$$

pois, pela forma do operador BRST, podemos ver que apenas o primeiro termo sobrevive, pois o antifantasma aniquila o estado de número de fantasma zero. Se este estado é invariante pela simetria BRST, então

$$\hat{C}_A |\chi\rangle = 0, \quad (2.21)$$

pois $\hat{\eta}^A$ não aniquila o estado $|\chi\rangle$. Ou seja, estes estados são invariantes por BRST se, e somente se, eles forem invariantes por transformações de *gauge*. Por outro lado, os estados com número de fantasma zero não podem ser escritos como $|\chi\rangle = Q |\lambda\rangle$, pois não há estados com número de fantasma -1. Desta forma, estes estados formam classes de cohomologia de número de fantasma zero, ao mesmo tempo em que são invariantes de *gauge*. Vamos tomá-los como sendo os estados físicos da teoria.

Portanto, as condições para encontrar os estados físicos do sistema são:

1. ter número de fantasma zero;
2. e ser aniquilado por \hat{Q} :

$$\hat{Q} |\chi\rangle = 0. \quad (2.22)$$

A discussão que foi feita até aqui vale para álgebras de Lie finitas. Esta discussão também vale para álgebras com dimensão infinita com algumas modificações. Isto será visto na próxima seção, onde vamos tratar da quantização BRST da corda bosônica.

2.3 Quantização BRST da corda bosônica

No caso da corda bosônica, a álgebra de Lie é a álgebra de Virasoro, que tem dimensão infinita. O método BRST como foi apresentado anteriormente pode ser usado neste

caso, no entanto com algumas diferenças. A condição de nilpotência do operador BRST pode não ser válida por causa da presença de anomalias; portanto, devemos ser mais cuidadosos. Além disto, o operador número de fantasma U recebe uma correção devido ao ordenamento normal. Por este motivo, é leviano afirmar que os estados físicos são classes de cohomologia de número de fantasma zero, pois o número de fantasma dos estados físicos dependerá da constante de ordenamento normal e, portanto, dependerá do sistema físico que estamos considerando [1].

Nesta seção, primeiro vamos apresentar uma revisão da álgebra conforme e de operadores de vértice no caso da corda para, em seguida, apresentarmos a quantização BRST da teoria.

2.3.1 Álgebra de Virasoro

No caso da corda bosônica, o tensor de energia momento é dado por,

$$T^X(z) = -\frac{1}{2} : \partial X^m \partial X_m : , \quad (2.23)$$

sendo m o índice do espaço-tempo, $z = \exp(-i\sigma^1 + \sigma^2)$ (σ^1, σ^2 : coordenadas da folha de mundo) e $:$: significa ordenamento normal. Podemos escrever $T^X(z)$ em termos de uma expansão de Laurent:

$$T^X(z) = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{L_a}{z^{a+2}} . \quad (2.24)$$

Os coeficientes de Laurent são os geradores da álgebra de Virasoro; eles podem ser escritos em termos de integrais de contorno:

$$L_a = \oint \frac{dz}{2\pi i z} z^{a+2} T^X(z) . \quad (2.25)$$

No caso da corda fechada, temos também a contribuição anti-holomórfica do tensor de energia-momento. A álgebra de Virasoro é dada por

$$[L_a, L_b] = (a - b)L_{a+b} + \frac{c}{12}(a^3 - a)\delta_{a,-b}, \quad (2.26)$$

sendo c a carga central da álgebra. Para calcular a álgebra, é necessário usar o OPE (*Operator Product Expansion*) dos campos X^m :

$$X^m(y)X^n(z) \longrightarrow -\eta^{mn} \log |y - z|^2, \quad (2.27)$$

e a expressão dos L_a 's em termos de integrais de contorno. A derivada de X^m , ∂X^m , é holomórfica (só depende de z), e também pode ser escrita em termos de expansões de Laurent:

$$\partial X^m(z) = -i \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_a^m}{z^{a+1}}, \quad (2.28)$$

e equivalentemente, podemos escrever os α_a^m em termos de ∂X^m :

$$\alpha_a^m = \oint \frac{dz}{2\pi} z^a \partial X^m(z). \quad (2.29)$$

Usando o OPE de X^m com X^n , temos as relações de comutação dos α_a^m :

$$[\alpha_a^m, \alpha_b^n] = a\delta_{a,-b}\eta^{mn}. \quad (2.30)$$

Finalmente, podemos expressar os L_a em termos dos α_a^m :

$$L_a = \frac{1}{2} \sum_{a=-\infty}^{\infty} : \alpha_{a-b}^m \alpha_{mb} : . \quad (2.31)$$

Uma definição importante é a de campos primários. Para uma transformação conforme $z \longrightarrow f(z)$, campos primários são tensores que se transformam como

$$\mathcal{O}(z) \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^p \mathcal{O}(f(z)). \quad (2.32)$$

sendo p o peso conforme do campo primário \mathcal{O} . Também podemos escrever a definição de um campo primário em termos de seu OPE com o tensor de energia momento:

$$T(y)\mathcal{O}(z) \longrightarrow \frac{p}{(y-z)^2}\mathcal{O}(z) + \frac{1}{y-z}\partial\mathcal{O}(z). \quad (2.33)$$

Os estados físicos da corda serão estados de peso mais alto na álgebra de Virasoro. Para definir o que é um estado de peso mais alto na álgebra de Virasoro, consideremos um estado $|p\rangle$, criado por um campo primário $\phi(z)$ de peso p :

$$|p\rangle = \phi(0)|0\rangle. \quad (2.34)$$

Ele é um estado de peso mais alto da álgebra se [19]

$$L_0|p\rangle = p|p\rangle, \quad L_a|p\rangle = 0, \quad a > 0. \quad (2.35)$$

Para o caso da corda veremos mais adiante que invariância por transformações BRST implica que os estados físicos têm peso conforme $p = 1$ e que a segunda condição é válida para $a \geq 1$.

Na construção do operador BRST, vamos introduzir um par canônico de fantasmas (b, c) , que também podemos escrever em termos de expansões de Laurent,

$$\begin{aligned} b(z) &= \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{b_a}{z^{a+2}}, & c(z) &= \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{c_a}{z^{a-1}}, \\ \{b_a, c_d\} &= \delta_{a,-d}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Para encontrar as relações de anticomutação acima, utilizamos o OPE

$$b(y)c(z) \longrightarrow \frac{1}{y-z}. \quad (2.37)$$

O tensor de energia-momento para os fantasmas é escrito como

$$T^g =: (\partial b)_c : -2\partial(: bc :) , \quad (2.38)$$

que tem carga central $c = -26$.

2.3.2 Operadores de vértice

Nesta subseção, vamos introduzir o conceito de operador de vértice. Em teoria de campos conforme em duas dimensões, há um mapeamento entre o espaço dos estados da teoria e o conjunto dos operadores locais. Isto é possível quando quantizamos a teoria de campos conforme num círculo. Considere um cilindro semi-infinito na coordenada w , sendo

$$\begin{aligned} w &= \sigma^1 + i\sigma^2, \quad 0 \leq \text{Re } w \leq 2\pi, \\ w &\sim w + 2\pi, \quad \text{Im } w \leq 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

Este semicilindro pode ser mapeado num disco unitário quando usamos a coordenada $z = \exp(-iw)$, como mostra a figura a seguir:

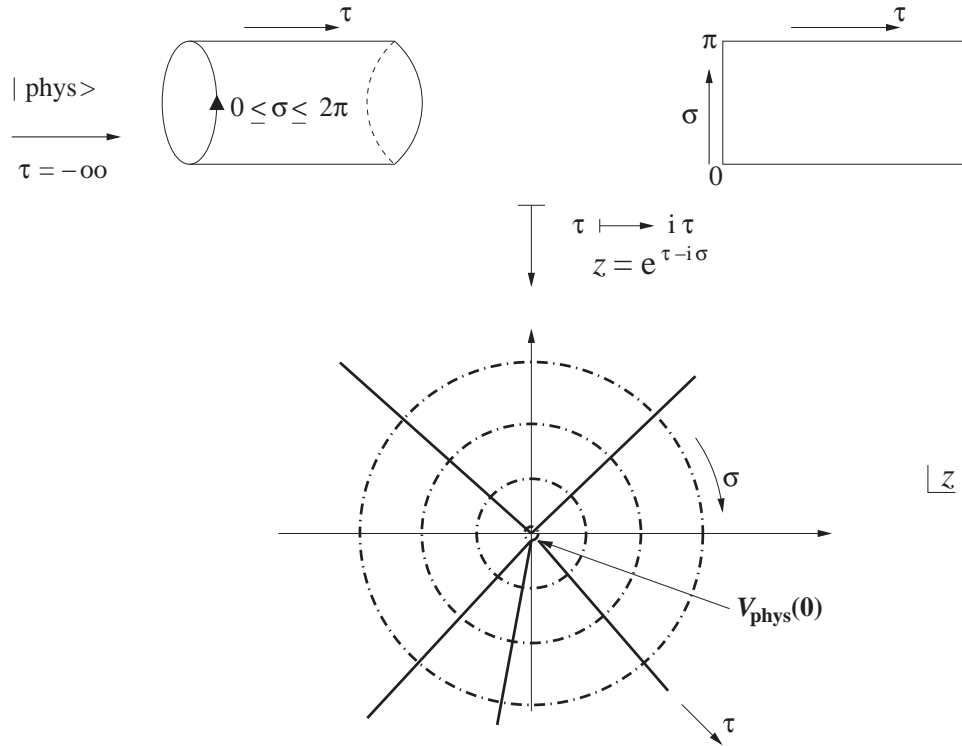


Figura 2.1: O mapeamento do cilindro no plano complexo. As linhas de τ constante formam círculos concêntricos ao redor da origem no plano z complexo enquanto que linhas de σ constante correspondem às linhas emergindo das direções radiais a partir da origem. O estado físico de chegada $|\text{phys}\rangle$ no passado infinito da folha de mundo ($\tau = -\infty$) corresponde à inserção de um operador de vértice $V_{\text{phys}}(z)$ na origem $z = 0$.

Na coordenada z , o ponto $\text{Im } w \rightarrow -\infty$ é mapeado na origem. No cilindro, este ponto especifica um estado inicial $|\mathcal{A}\rangle$, que no disco unitário é mapeado na origem como o operador local \mathcal{A} , conhecido como *operador de vértice*.

No caso da corda bosônica, a correspondência operador local \Leftrightarrow estado é vista da seguinte forma: queremos identificar qual o estado que corresponde ao operador unitário $\mathbf{1}$. Dentro de um contorno Q , e sem nenhum operador na origem, as integrais de contorno que definem α_a^m e $\tilde{\alpha}_a^m$ para $a \geq 0$ não têm nenhum pólo e portanto se anulam. Disto concluímos que estes modos aniquilam o operador $\mathbf{1}$, que pode ser identificado com o estado de vácuo

$$\mathbf{1} = |0; 0\rangle . \quad (2.40)$$

Agora, fazendo o mesmo para $Q = \alpha_{-a}^m$ contornando o operador unitário podemos calcular, para $a \geq 1$,

$$\alpha_{-a}^m = \oint \frac{dz}{2\pi} z^{-a} \partial X^m(z) \rightarrow \frac{i}{(a-1)!} \partial^a X^m(0) , \quad (2.41)$$

e, portanto,

$$\alpha_{-a}^m |1\rangle \cong \frac{i}{(a-1)!} \partial^a X^m(0) . \quad (2.42)$$

Logo, qualquer estado pode ser obtido a partir de $\mathbf{1}$ atuando com os operadores da expressão acima.

Outra característica do estado de vácuo $|0; 0\rangle$ é que ele é aniquilado pelos modos L_0 , L_1 e L_{-1} . Estes três geradores formam uma representação da álgebra $SL(2, \mathbf{R})$, e portanto, o estado de vácuo é $SL(2, \mathbf{R})$ -invariante. Além disto, o estado $\langle 0; 0|$, que é identificado com o operador unitário em $z = \infty$, também é $SL(2, \mathbf{R})$ -invariante. Desta forma, os elementos de matriz da teoria conforme são invariantes por transformações geradas por $SL(2, \mathbf{R})$.

2.3.3 Quantização BRST

O procedimento que vamos usar para construir o operador BRST é um pouco diferente do apresentado na subseção (2.2.1). O primeiro passo da seção (2.2.1) não será apresentado aqui pelo seguinte motivo: seguindo o formalismo de integrais de trajetória, temos a ação original, uma ação para os campos fantasmas e uma ação com o termo de fixação de *gauge*. Na ação com o termo de fixação de *gauge* da métrica da folha de mundo $g_{\alpha\beta}$, temos um multiplicador de Lagrange B , que aqui será integrado. Assim, a transformação para b , que deveria ser $\delta b = \epsilon B$ é substituída pela transformação $\delta b = i\epsilon(T^X + T^g)$, onde foi usada a equação de movimento de $g_{\alpha\beta}$ para substituir B [2]. Portanto, o vínculo de

primeira classe, no nosso caso, é apenas o gerador da álgebra de Virasoro. No segundo passo, devemos introduzir um par canônico de fantasmas para cada vínculo de primeira classe, ou seja, o par de fantasmas (b, c) associado ao tensor de energia-momento.

Partiremos das transformações BRST para a corda, visto que basta saber as transformações de *gauge* dos campos e fantasmas para então escrevê-las:

$$\begin{aligned}\delta X^m &= i\epsilon(c\partial + \tilde{c}\bar{\partial})X^m, \\ \delta b &= i\epsilon(T^X + T^g), \quad \delta \tilde{b} = i\epsilon(\tilde{T}^X + \tilde{T}^g), \\ \delta c &= i\epsilon(c\partial + \tilde{c}\bar{\partial})c, \quad \delta \tilde{c} = i\epsilon(c\partial + \tilde{c}\bar{\partial})\tilde{c},\end{aligned}\tag{2.43}$$

sendo ϵ o parâmetro da transformação, c o fantasma holomórfico, b o antifantasma holomórfico e as quantidades com til são os análogos anti-holomórficos. Usando o teorema de Noether, calculamos a corrente BRST,

$$j_B = cT^X + \frac{1}{2} : cT^g : + \frac{3}{2} \partial^2 c = cT^X + : bc\partial c : + \frac{3}{2} \partial^2 c,\tag{2.44}$$

e análogo para \tilde{j}_B . Esta corrente tem a forma do operador BRST (2.14), notando que o segundo termo da equação acima está associado com o segundo termo que aparece em (2.14), e o último termo é uma derivada total e só foi somado para garantir que j_B seja um tensor por transformações conformes. O operador BRST propriamente dito é

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz j_B - d\bar{z} \tilde{j}_B),\tag{2.45}$$

e em termos dos modos dos fantasmas,

$$\begin{aligned}Q &= \sum_{a=-\infty}^{\infty} (c_a L_{-a} + \tilde{c}_a \tilde{L}_{-a}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a,d=-\infty}^{\infty} (a-d) : (c_a c_d b_{-a-d} + \tilde{c}_a \tilde{c}_d \tilde{b}_{-a-d}) : + A(c_0 + \tilde{c}_0),\end{aligned}\tag{2.46}$$

Na equação (2.46), A é uma constante de ordenamento normal, que pode ser calculada da seguinte forma: sabendo que

$$\{Q, b_a\} = L_a + L_a^g, \quad (2.47)$$

sendo

$$L_a^g = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (a + d) : b_{a-d} c_d :, \quad (2.48)$$

então

$$\{Q, b_0\} = L_0 + L_0^g, \quad (2.49)$$

e, portanto, $A = -1$.

Existe uma anomalia na simetria de *gauge* quando a carga central do setor de matéria, c^X , tem valor diferente de 26^* . Neste caso, o operador BRST não é mais nilpotente. Para verificar isto, calculamos o OPE da corrente j_B com ela mesma:

$$j_B(y)j_B(z) \longrightarrow -\frac{c^X - 18}{2(y-z)^3} c \partial c(z) - \frac{c^X - 18}{4(y-z)^2} c \partial^2 c(z) - \frac{c^X - 26}{12(y-z)} c \partial^3 c(z). \quad (2.50)$$

Da integral de contorno, vemos que o pólo simples se anula apenas quando $c^X = 26$ e, neste caso, $\{Q, Q\} = 0$.

Será útil também introduzirmos o operador número de fantasma. A corrente de número de fantasma é dada por

$$U = - : bc :, \quad (2.51)$$

e o operador número de fantasma é escrito no sistema de coordenadas do cilindro da seguinte forma

*A carga do setor de matéria está relacionada com a dimensão do espaço-tempo: $c^X = D$.

$$N^g = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dw U_w = \sum_{a=1}^{\infty} (c_{-a} b_a - b_{-a} c_a) + c_0 b_0 - \frac{1}{2}. \quad (2.52)$$

Na passagem para o sistema de coordenadas do plano complexo ($z = e^{-iw}$), temos

$$(\partial_z w) U_w(w) = j_z(z) - \frac{q_0}{z}, \quad (2.53)$$

mostrando que a corrente de número de fantasma não é um tensor por transformações conformes. Neste caso, q_0 tem valor $3/2$. O operador número de fantasma no sistema de coordenadas do plano complexo é escrito como

$$Q^g \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint dz U_z = N^g + q_0. \quad (2.54)$$

O número de fantasma dos estados é convencionalmente definido por N^g (sistema de coordenadas do cilindro), e Q^g está relacionado com o número de fantasma dos operadores de vértice [2].

Agora, vamos fazer uma discussão sobre o espectro da corda. Começando pelos fantasmas, a escolha natural para o estado de vácuo é o estado $SL(2, \mathbf{R})$ -invariante, $|0\rangle_g$. No entanto, temos que

$$\begin{aligned} c_n |0\rangle_g &= 0, \quad n \geq 2, \\ b_n |0\rangle_g &= 0, \quad n \geq -1, \end{aligned} \quad (2.55)$$

ou seja, os modos c_0 , c_1 e c_{-1} não aniquilam $|0\rangle_g$. Portanto, temos quatro escolhas diferentes para o vácuo dos fantasmas: $|0\rangle_g$, $c_1 |0\rangle_g$, $c_1 c_0 |0\rangle_g$ e $c_1 c_0 c_{-1} |0\rangle_g$. Em termos de operadores, estes estados são escritos como

$$\begin{aligned}
|0\rangle_g &\longrightarrow \mathbf{1}, \\
c_1 |0\rangle_g &\longrightarrow c, \\
c_1 c_0 |0\rangle_g &\longrightarrow c \partial c, \\
c_1 c_0 c_{-1} |0\rangle_g &\longrightarrow c \partial c \partial^2 c.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

No entanto, $c_1 |0\rangle_g$ (ou equivalentemente, seu parceiro degenerado $c_1 c_0 |0\rangle_g$) é o estado de energia mínima ou estado de peso mais alto para o sistema (b, c) . Portanto, os estados físicos terão a forma geral

$$|\{n\}; k\rangle_X \otimes c_1 |0\rangle_g \longrightarrow cV, \tag{2.57}$$

sendo que $\{n\}$ denota o nível do estado, k é o momento e V é o operador de vértice construído a partir de X^m e suas derivadas. Note que os estados físicos têm número de fantasma igual a 1. Voltando ao vácuo do fantasma, o adjunto do estado $c_1 |0\rangle_g$ é

$$(c_1 |0\rangle_g)^\dagger = \langle 0|_g c_{-1} c_0, \tag{2.58}$$

pois

$$\langle 0 | 0\rangle_g = 0, \quad \text{mas} \quad \langle 0|_g c_{-1} c_0 c_1 |0\rangle_g = 1. \tag{2.59}$$

Esta normalização é uma consequência dos modos zero do fantasma c , devido à não conservação da corrente de número de fantasma no nível quântico [20]. Escrita em termos de operadores, esta normalização é $\langle c \partial c \partial^2 c \rangle = 1$.

Aplicando a condição de que o estado físico deve ser aniquilado pelo operador BRST num estado geral do tipo

$$|\psi\rangle = A_{mn\dots} \alpha_{-1}^m \alpha_{-1}^n \dots |0; k\rangle \otimes c_1 |0\rangle_g, \tag{2.60}$$

temos

$$Q|\psi\rangle = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[cT^X + \frac{1}{2} :cT^g: + \frac{3}{2} \partial^2 c \right] |\psi\rangle = \left[\sum_{a=-\infty}^{\infty} c_a(L_{-a} - \delta_{a,0}) \right] |\psi\rangle = 0. \quad (2.61)$$

Para $a > 0$, $c_a c_1 |0\rangle_g = 0$, e metade das condições para invariância BRST já estão garantidas. Agora, para termos um estado BRST-invariante é necessário que

$$\begin{aligned} (L_0 - 1)|\psi\rangle &= 0, \\ L_a|\psi\rangle &= 0, \quad \text{para } a \geq 1. \end{aligned} \quad (2.62)$$

A primeira equação é a condição de camada de massa; além disto, esta equação nos diz que o operador de vértice que cria o estado $|\psi\rangle$ a partir do estado $c_1 |0\rangle_g \otimes |0; 0\rangle_X$ deve ter peso conforme igual a 1. As duas equações juntas nos dizem que os estados físicos são campos primários de peso conforme um.

Vamos agora analisar os dois primeiros níveis do espectro. No nível $n = 0$, o operador de vértice é dado por

$$V = e^{ik \cdot X} \longrightarrow |0; k\rangle. \quad (2.63)$$

Das condições que vimos acima, V deve ter peso conforme igual a 1. Do OPE do tensor energia-momento com V , o peso conforme deste operador de vértice é $h = \frac{k^2}{2}$. Como $k^m k_m = -M^2$, então a massa deste estado é dada por

$$\frac{k^2}{2} = 1 = -\frac{M^2}{2} \longrightarrow M^2 = -1/2, \quad (2.64)$$

e este estado representa um táquion. Para comparação posterior, notamos que os estados construídos com os outros possíveis vácuos para os fantasmas, ou seja,

$$\begin{aligned}
|0; k\rangle \otimes |0\rangle_g &\longrightarrow \mathbf{1}, \\
|0; k\rangle \otimes c_1 c_0 |0\rangle_g &\longrightarrow c \partial c e^{ik \cdot X}, \\
|0; k\rangle \otimes c_1 c_0 c_{-1} |0\rangle_g &\longrightarrow c \partial c \partial^2 c,
\end{aligned} \tag{2.65}$$

representam, respectivamente, o fantasma, o parceiro degenerado do táquion (o qual vamos chamar de modo geral de anticampo) e o antifantasma. Estes estados aparecem na quantização via formalismo de anticampo [21]. Para uma boa revisão sobre o assunto, ver [22].

No próximo nível, $n = 1$, o operador de vértice é

$$V = \zeta^m \partial X_m e^{ik \cdot X}. \tag{2.66}$$

Pela imposição que o operador de vértice tem peso conforme igual a 1, temos

$$h = 1 + \frac{k^2}{2} = 1 \longrightarrow k^2 = 0, \tag{2.67}$$

indicando que o estado tem massa zero. E pela imposição de que V seja um campo primário (ou seja, que seu OPE com o tensor de energia-momento seja da forma (2.33)) temos a condição de transversalidade $\zeta \cdot k = 0$. Este é o estado que representa o fóton em $D = 26$.

Capítulo 3

Partícula

Neste capítulo, apresentaremos três extensões da partícula relativística, todas apresentando supersimetria: partícula de *spin* 1/2, superpartícula de Brink-Schwarz e superpartícula do formalismo de espinores puros.

A partícula de *spin* 1/2 é construída a partir da ação da partícula relativística adicionando uma variável anticomutante, que fará o papel do grau de liberdade de *spin*; é um exemplo de modelo que apresenta supersimetria, porém na linha de mundo.

A construção de um modelo com supersimetria manifesta no espaço-tempo leva à ação da superpartícula de Brink-Schwarz, que é uma generalização supersimétrica da partícula. Além de ser supersimétrica no espaço-tempo e ser invariante por reparametrização, esta ação possui uma simetria fermiônica, a simetria kappa, que é necessária por questões de unitariedade. No entanto, dos dezesseis vínculos da simetria kappa, oito são de primeira classe e oito são de segunda classe. Para quantizar a teoria, precisamos impor uma fixação de *gauge* de modo a separar estes dois tipos de vínculos. Uma fixação de *gauge* que preserve a invariância de Lorentz manifesta da teoria parece não ser possível, impedindo que a teoria seja quantizada covariantemente.

O problema da quantização covariante da superpartícula é solucionado quando se trabalha com a superpartícula no formalismo de espinores puros. A ação deste modelo é uma ação quadrática nas variáveis fermiônicas, e sua quantização através do método BRST

inclui dois novos ingredientes: uma carga BRST que inclui apenas o vínculo da simetria kappa, e um fantasma bosônico espinorial chamado de espinor puro, que é vinculado a satisfazer uma condição extra, chamada de condição de espinor puro.

3.1 Partícula relativística de *spin* 1/2

A ação que descreve uma partícula relativística de *spin* 1/2 é dada por

$$S = \int d\tau \frac{M}{2} (\dot{x}^m \dot{x}_m + i\dot{\psi}^m \psi_m), \quad (3.1)$$

sendo M a massa da partícula, x^m as coordenadas da partícula no espaço-tempo e ψ^m um vetor de Lorentz anticomutante, relacionado ao grau de liberdade de *spin*. Para ver que esta ação descreve uma partícula com *spin* 1/2, temos que construir os geradores de Lorentz desta ação. Das transformações de Lorentz das variáveis x^m e ψ^m ,

$$\delta_L x^m = \Lambda^{mn} x_n, \quad \delta_L \psi^m = \Lambda^{mn} \psi_n, \quad (3.2)$$

podemos construir os geradores de Lorentz M^{mn} , usando o teorema de Noether:

$$M^{mn} = M(\dot{x}_{[n} x_{m]}) + i\psi_n \dot{\psi}_m. \quad (3.3)$$

Acima, o primeiro termo corresponde à contribuição de momento angular, e o segundo termo à contribuição de *spin*. Por exemplo, se estamos trabalhando em quatro dimensões espaço-temporais, o vetor de *spin* é dado por

$$\vec{S} = \frac{i}{2} M \vec{\psi} \times \vec{\psi}, \quad (3.4)$$

isto é, $\vec{S} = iM(\psi^2\psi^3, \psi^3\psi^1, \psi^1\psi^2)$. Da quantização de (3.1),

$$[x^m, \dot{x}_n] = \frac{i\hbar}{M} \delta_n^m, \quad \{\psi^m, \dot{\psi}_n\} = -\frac{\hbar}{M} \delta_n^m, \quad (3.5)$$

temos que

$$[S_a, S_b] = i\epsilon_{abc}S_c, \quad |\vec{S}|^2 = \frac{3\hbar}{4}. \quad (3.6)$$

sendo que a, b, c variam de 1 a 3.

A ação (3.1) é um exemplo de ação supersimétrica na linha de mundo, o que pode ser visto usando as seguintes transformações (com α sendo um parâmetro anticomutante):

$$\delta x^m = i\alpha\psi^m, \quad \delta\psi^m = \alpha\dot{x}^m. \quad (3.7)$$

Variando a ação com relação a esta simetria, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d\tau \frac{M}{2} \delta(\dot{x}^2 + i\dot{\psi}^m\psi_m) \\ &= \int d\tau \frac{M}{2} \left[i\alpha \frac{d}{d\tau} (\dot{x}^m\psi_m) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

indicando que, de fato, a ação é supersimétrica. Fazendo o comutador de duas transformações de supersimetria consecutivas das variáveis x^m e ψ^m , encontramos

$$\begin{aligned} (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)x^m &= \delta_1(i\alpha_2\psi^m) - \delta_2(i\alpha_1\psi^m) = -2i\alpha_1\alpha_2\dot{x}^m = \delta_p x^m, \\ (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\psi^m &= \delta_1(\alpha_2\dot{x}^m) - \delta_2(\alpha_1\dot{x}^m) = -2i\alpha_1\alpha_2\dot{\psi}^m = \delta_p \psi^m, \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo

$$\delta_p x^m = -i\Lambda\dot{x}^m, \quad \delta_p \psi^m = -i\Lambda\dot{\psi}^m, \quad (3.10)$$

as invariâncias de translação das variáveis x^m e ψ^m , e $\Lambda = 2\alpha_1\alpha_2$ um parâmetro comutante. Esta é a álgebra de supersimetria em $D = 1$, ou seja, na linha de mundo. No entanto, não há supersimetria no espaço-tempo; a variável anticomutante ψ^m não é um espinor de Lorentz, e sim um vetor. Não há a interpretação de que, para cada grau de liberdade

bosônico no espaço-tempo, há um grau de liberdade fermiônico, que são seus parceiros supersimétricos. Tal fato tem analogia em supercordas, no formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz, que apresenta supersimetria manifesta na folha de mundo, mas não no espaço-tempo; a supersimetria no espaço-tempo é verificada indiretamente.

Para implementar supersimetria no espaço-tempo, é necessário construir uma ação que envolva espinores no espaço-tempo, e que a álgebra de supersimetria seja satisfeita. Tal modelo existe - a superpartícula de Brink-Schwarz - descrita na próxima seção.

3.2 Superpartícula de Brink-Schwarz

A ação para a superpartícula de Brink-Schwarz em dez dimensões espaço-temporais é descrita por*

$$S = \int d\tau \left(\dot{x}^m P_m - \frac{i}{2} (\dot{\theta} \gamma^m \theta) P_m + e P^m P_m \right), \quad (3.11)$$

sendo P_m o momento canônico conjugado a x^m , e o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo bosônico $P^m P_m = 0$ (condição de camada de massa) e θ^α são espinores de Majorana-Weyl. As matrizes gama $\gamma^{\alpha\beta}$ são matrizes simétricas 16×16 que satisfazem $\gamma_{\alpha\beta}^{(m} \gamma^{n)\beta\lambda} = 2\eta^{mn} \delta_\alpha^\lambda$, e a convenção de métrica é tal que $\eta^{mn} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots)$. A ação (3.11) é invariante de Lorentz e supersimétrica no espaço-tempo, como pode ser verificado usando as transformações dos campos

$$\delta\theta^\alpha = \epsilon^\alpha, \quad \delta x^m = \frac{i}{2} (\theta \gamma^m \epsilon), \quad \delta P_m = \delta e = 0. \quad (3.12)$$

Esta ação para a superpartícula não é a única ação que pode ser construída com as quantidades invariantes por supersimetria $\dot{\theta}^\alpha$ e $(\dot{x}^m - \frac{i}{2} (\dot{\theta} \gamma^m \theta))$; no entanto, é a mais simples que pode ser construída, e também a generalização mais direta para a ação da partícula relativística [1].

*Esta ação é válida para qualquer dimensão; no entanto, para fazer contato com a teoria de supercordas, escolhamos $D=10$.

Além de ser supersimétrica e invariante de Lorentz, a ação (3.11) apresenta uma simetria fermiônica local denominada simetria kappa, representada pelas transformações

$$\delta\theta^\alpha = P^m(\gamma_m\kappa)^\alpha, \quad \delta x^m = -\frac{i}{2}(\theta\gamma^m\delta\theta), \quad \delta P_m = 0, \quad \delta e = i\dot{\theta}^\alpha\kappa_\alpha. \quad (3.13)$$

Acima, κ_α é o parâmetro da transformação fermiônica e é um espinor com quiralidade[†] oposta a θ^α . Esta simetria tem um papel importante na teoria: ela é responsável por eliminar os estados de norma negativa; portanto, garante que a teoria seja unitária. No entanto, trabalhar com ela também impede que a teoria seja quantizada covariantemente. Podemos definir o vínculo associado à simetria kappa da seguinte maneira:

$$d_\alpha = p_\alpha + 2P^m(\gamma_m\theta)_\alpha. \quad (3.14)$$

Calculando a álgebra que os vínculos acima satisfazem através de parênteses de Poisson, temos (sendo $\{p_\alpha, \theta^\beta\} = \delta_\alpha^\beta$)

$$\{d_\alpha, d_\beta\} = 4P_m\gamma_{\alpha\beta}^m. \quad (3.15)$$

Do método de Dirac de sistemas vinculados [23], o cálculo da álgebra dos vínculos nos diz que papel estas quantidades representam na teoria: se os parênteses de Poisson de um vínculo com todos os outros vínculos resulta em zero ou em outro vínculo, dizemos que ele é uma quantidade de primeira classe e, portanto, está relacionado às simetrias de *gauge* da ação; caso contrário, ele é uma quantidade de segunda classe e está relacionado a graus de liberdade espúrios da teoria. No caso acima, sabendo que o vínculo bosônico é $P^m P_m = 0$, as relações (3.15) nos dizem que, dos 16 vínculos fermiônicos d_α , oito são de primeira classe e oito são de segunda classe. Portanto, apenas oito das quantidades d_α estão relacionadas ao gerador das simetrias kappa.

[†]Em dez dimensões, não há um tensor totalmente antissimétrico que possa levantar e abaixar índices espinoriais; portanto, não há uma relação entre espinores quirais e anti-quirais.

Para quantizar esta teoria covariantemente (por exemplo, usando quantização BRST), é necessário que exista uma forma de separar covariantemente os vínculos de primeira classe dos vínculos de segunda classe. No entanto, isto parece não ser possível; várias tentativas de atingir este objetivo não obtiveram sucesso. Não sendo possível separar os vínculos de primeira e segunda classe covariantemente, resta a alternativa de quantizar a teoria utilizando uma condição de *gauge* que quebre a invariância de Lorentz manifesta. A condição de gauge mais utilizada com este fim é o *gauge* de cone de luz:

$$x^+ = P^+ \tau, \quad (\gamma^+ \theta)_\alpha = 0. \quad (3.16)$$

sendo $\gamma^\pm = \gamma^0 \pm \gamma^9$. A primeira condição fixa as reparametrizações associadas ao vínculo $P^m P_m = 0$, e a segunda condição fixa a simetria kappa.

A escolha de gauge $(\gamma^+ \theta)_\alpha = 0$ vem do fato que, para qualquer θ^α , é possível fazer uma transformação kappa $\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \delta\theta^\alpha$ tal que $(\gamma^+ \theta')_\alpha = 0$. Isto pode ser visto primeiro lembrando que $P^m P_m = 0$, de forma que um referencial possível é $P^0 = P$, $P^9 = P$, $P^i = 0$. Usando a notação de cone de luz $P^\pm = P^0 \pm P^9$, temos que $P^- = P^i = 0$, e a transformação de θ^α é dada por

$$\delta\theta^\alpha = -\frac{1}{2} P^+ (\gamma^- \kappa)^\alpha. \quad (3.17)$$

O espinor θ^α pode ser escrito como

$$\theta^\alpha = -\frac{1}{4} (\gamma^+ \gamma^- \theta)^\alpha - \frac{1}{4} (\gamma^- \gamma^+ \theta)^\alpha, \quad (3.18)$$

e, se escolhermos o parâmetro da transformação $\kappa_\alpha = -\frac{1}{2P^+} (\gamma^+ \theta)_\alpha$, então

$$\theta'^\alpha = -\frac{1}{4} (\gamma^+ \gamma^- \theta)^\alpha, \quad (3.19)$$

e, portanto, $(\gamma^+ \theta')_\alpha = 0$.

Da imposição da condição $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$, oito componentes do espinor θ^α são eliminadas, e ficamos com um espinor de $SO(8)$, representado por $S_a = \sqrt{\frac{P^+}{2}}(\gamma^-\theta)_a$, com a variando de 1 a 8. Seguindo com o método de Dirac, ou seja, construindo os parênteses de Dirac para os campos S_a , temos que estes espinores satisfazem

$$\{S_a, S_b\} = \delta_{ab} , \quad (3.20)$$

e em analogia com o que sabemos de álgebras de Clifford, $\sqrt{2}S_a$ é uma versão espinorial das matrizes de Pauli $SO(8)$:

$$\sigma_{a\dot{a}}^j \sigma_{b\dot{b}}^j + \sigma_{b\dot{a}}^j \sigma_{a\dot{b}}^j = 2\delta_{ab}\delta_{\dot{a}\dot{b}} . \quad (3.21)$$

com i, \dot{a} variando de 1 a 8. Isto também pode ser visto da seguinte forma: se definirmos a atuação de S_a sobre estados bosônicos $|i\rangle$ e sobre estados espinoriais anti-quirais $|\dot{a}\rangle$ como

$$\begin{aligned} S_a |\dot{a}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{a\dot{a}}^i |i\rangle , \\ S_a |i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{a\dot{a}}^i |\dot{a}\rangle , \end{aligned} \quad (3.22)$$

então

$$\begin{aligned} (S_a S_b + S_b S_a) |i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S_a \sigma_{b\dot{a}}^i |\dot{a}\rangle + S_b \sigma_{a\dot{a}}^i |\dot{a}\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{b\dot{a}}^i \sigma_{a\dot{a}}^j |j\rangle + \sigma_{a\dot{a}}^i \sigma_{b\dot{a}}^j |j\rangle) \\ &= \delta_{ab} |i\rangle . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Assim sendo, os estados físicos da superpartícula são representados por um vetor de $SO(8)$ não-massivo $|i\rangle$ e um espinor anti-quiral de $SO(8)$ não massivo $|\dot{a}\rangle$, ou seja, o espectro de super Yang-Mills em dez dimensões.

3.3 Superpartícula de Brink-Schwarz no semi-gauge de cone de luz

Fixando apenas a simetria kappa local, ou seja, impondo apenas a condição $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$, que é chamado *semi-gauge de cone de luz* e assumindo que $P^+ \neq 0$, a ação toma a forma

$$S = \int d\tau \left(\dot{x}^m P_m + \frac{i}{2} \dot{S}_a S_a + e P^m P_m \right), \quad (3.24)$$

Novamente, a quantização canônica da ação acima implica que $\{S_a, S_b\} = \delta_{ab}$ e, portanto, $\sqrt{2}S_a$ é uma versão espinorial das matrizes de Pauli $SO(8)$. Agora só restou a simetria bosônica gerada pelo vínculo da camada de massa $P^m P_m = 0$, e seguindo o método BRST, podemos fixar esta simetria acrescentando um par de fantasmas (b, c) na ação e escolhendo o multiplicador de Lagrange $e = -1/2$. Desta maneira, a ação é escrita como

$$S = \int d\tau \left(\dot{x}^m P_m + \frac{i}{2} \dot{S}_a S_a - \frac{1}{2} P^m P_m + i\dot{c}b \right), \quad (3.25)$$

e a carga BRST tem a forma

$$Q = c P^m P_m, \quad (3.26)$$

que apresenta esta forma simples pois a simetria kappa local já foi fixada.

Geradores da simetria de Lorentz podem ser construídos para (3.25), apesar da ação não ser manifestamente invariante:

$$\begin{aligned} N^{+-} &= -ix^+ P^- + ix^- P^+, \\ N^{i+} &= -ix^i P^+ + ix^+ P^i, \\ N^{i-} &= -ix^i P^- + ix^- P^i - \frac{(S\sigma^i)_{\dot{a}}(S\sigma^j)_{\dot{a}}P^j}{2P^+}, \\ N^{ij} &= -ix^i P^j + ix^j P^i - \frac{1}{4}(S\sigma^{ij}S). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Estes geradores são construídos de forma usual: sabendo como os vetores e espinores se transformam por Lorentz, usamos o teorema de Noether para encontrar o gerador. Mas isto não funciona quando queremos construir N^{i-} . A transformação de Lorentz para o espinor θ^α gerada por $a_{\mu\nu}N^{\mu\nu}$ é proporcional a $a_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu}\theta)_\alpha$. Tal transformação preserva $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$ para todos os geradores, exceto N^{i-} .

Para contornar o problema exposto acima, devemos compensar as transformações kappa de tal forma que a condição $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$ seja restaurada, e é por este motivo que N^{i-} tem uma forma mais complicada. Este problema também ocorre quando trabalhamos com a ação de Green-Schwarz para a supercorda no *gauge* de cone de luz [1]: ao tentar construir os geradores de Lorentz, verificamos que N^{i-} não preserva a condição $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$. Levando em conta este fato, verificamos que o campo fermiônico S_a deve se transformar como

$$\delta S_a = -\frac{(a_{i-}P^i)S_a}{P^+} + \frac{a_{i-}\sigma_{a\dot{a}}^i(S\sigma^j)_{\dot{a}}P^j}{P^+}, \quad (3.28)$$

garantindo que a álgebra dos geradores seja a álgebra correta. Na verdade, no caso de N^{i-} com ele mesmo a álgebra só fecha a menos de uma transformação BRST, como pode ser verificado usando os comutadores $[P^m, x^n] = -i\eta^{mn}$ e $\{S_a, S_b\} = \delta_{ab}$:

$$[N^{i-}, N^{j-}] = \left[Q, -\frac{b(S\sigma^i)_{\dot{a}}(S\sigma^j)_{\dot{a}}}{(P^+)^2} \right]. \quad (3.29)$$

Esta seção será importante para a generalização do caso em que estamos interessados, que é a ação de Brink-Schwarz no semi-gauge de cone de luz com variáveis fermiônicas adicionais. A partir de tal ação, chegaremos à ação de espinores puros para a superpartícula, usando argumentos de equivalência entre as cohomologias das cargas BRST das duas teorias.

3.4 Quantização covariante da superpartícula

Usando o formalismo de espinores puros é possível quantizar a superpartícula covariantemente e obter o espectro de Super Yang-Mills em $D=10$. Os ingredientes principais do formalismo são a carga BRST $Q = \lambda^\alpha d_\alpha$, sendo d_α os vínculos da simetria kappa e λ^α o fantasma associado ao vínculo fermiônico. Este fantasma é um *espinor puro* bosônico, ou seja, $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$. É esta condição que garante que Q será nilpotente, como exigido pelo formalismo BRST.

Por simplicidade, mostraremos que a quantização covariante da superpartícula leva às equações de movimento e invariâncias de gauge da teoria de super Maxwell em 10 dimensões. Antes, é útil apresentar a descrição no super espaço para tal teoria.

3.4.1 Descrição no super-espaço de super Maxwell em $D = 10$

A teoria de super Maxwell em $D = 10$ é descrita, basicamente, por um campo vetorial de $SO(9,1)$ $a_m(x)$, que representa o fóton, e um campo espinorial de Lorentz $\chi^\alpha(x)$, representando o fotino, cujas equações de movimento seguem:

$$\partial^m \partial_{[m} a_{n]} = 0, \quad \partial^m (\gamma_m \chi)_\alpha = 0. \quad (3.30)$$

Estes campos têm as seguintes transformações de gauge:

$$\delta a_m = \partial_m s, \quad \delta \chi^\alpha = 0, \quad (3.31)$$

Também é possível descrever super Maxwell em dez dimensões espaço-temporais *on shell* utilizando o formalismo de supercampos. Esta descrição se dá através de um supercampo espinorial $A_\alpha(x, \theta)$, o qual contém os campos do fóton e do fotino [24]. Ele satisfaz as seguintes equações de movimento no super-espaço:

$$\gamma_{mnpqr}^{\alpha\beta} (D_\alpha A_\beta) = 0, \quad (3.32)$$

sendo $\gamma_{mnpqr}^{\alpha\beta}$ o produto de cinco matrizes gama (definidas anteriormente) e D_α a derivada supersimétrica definida por:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \frac{1}{2}(\gamma^m\theta)_\alpha\partial_m. \quad (3.33)$$

O supercampo $A_\alpha(x, \theta)$ se transforma da seguinte maneira por transformações de gauge:

$$\delta A_\alpha = D_\alpha\Lambda, \quad (3.34)$$

sendo $\Lambda(x, \theta)$ um supercampo escalar qualquer, cuja componente mais baixa é o parâmetro da transformação de gauge usual $s(x)$. O supercampo A_α pode ser escrito em componentes na forma geral abaixo:

$$A_\alpha(x, \theta) = f_\alpha(x) + f_{\alpha\beta}(x)\theta^\beta + f_{\alpha\beta\gamma}(x)\theta^\beta\theta^\gamma + \dots \quad (3.35)$$

Para mostrar que A_α descreve super Maxwell *on shell*, usa-se o fato que um bi-espinor simétrico em D=10 pode ser decomposto como

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^m g_m + \gamma_{\alpha\beta}^{mnpqr} g_{mnpqr}, \quad (3.36)$$

ou seja, este pode ser escrito em termos de um vetor g_m e uma cinco-forma g_{mnpqr} . Da mesma maneira, um bi-espinor antissimétrico pode ser escrito em termos de uma três-forma:

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^{mnp} g_{mnp}. \quad (3.37)$$

Portanto, a componente $f_{\alpha\beta}(x)$ de $A_\alpha(x, \theta)$ é escrita em termos de um vetor ($\gamma_{\alpha\beta}^m a_m(x)$), uma três-forma ($\gamma_{\alpha\beta}^{mnp} a_{mnp}(x)$) e uma cinco-forma ($\gamma_{\alpha\beta}^{mnpqr} a_{mnpqr}(x)$). Pode-se escolher uma forma para o supercampo escalar $\Lambda(x, \theta)$, relacionado ao parâmetro das transformações de gauge, de tal maneira que se possa descartar algumas componentes de A_α . Escolhendo

$$\Lambda(x, \theta) = s(x) + h_\alpha(x)\theta^\alpha + j_{\alpha\beta}(x)\theta^\alpha\theta^\beta, \quad (3.38)$$

usa-se a componente $h_\alpha(x)$ para descartar a componente mais baixa de A_α , ou seja, $f_\alpha(x) = 0$, e a componente $j_{\alpha\beta}(x)$ para eliminar a parte de três-forma de $D_\alpha A_\beta(x) |_{\theta=0}$, ou seja, $a_{mnp}(x)$. Usando a equação de movimento (3.32), vemos que a parte de cinco-forma de $D_\alpha A_\beta(x) |_{\theta=0}$, $a_{mnpqr}(x)$ deve ser zero. Escrevendo $f_{\alpha\beta\gamma}(x)$ como

$$f_{\alpha\beta\gamma}(x) \approx (\gamma_{mnp})_{\alpha\lambda}\chi^\lambda(x)(\gamma^{mnp})_{\beta\gamma}, \quad (3.39)$$

e escrevendo todas as componentes mais altas de $A_\alpha(x, \theta)$ em termos de $a_m(x)$ e $\chi^\alpha(x)$, temos

$$A_\alpha(x, \theta) = \frac{1}{2}(\gamma^m\theta)_\alpha a_m(x) + \frac{i}{12}(\theta\gamma^{mnp}\theta)(\gamma_{mnp})_{\alpha\beta}\chi^\beta(x) + \dots, \quad (3.40)$$

sendo $a_m(x)$ um vetor de $SO(9, 1)$ relacionado ao campo do fóton, $\chi^\beta(x)$ um espinor de $SO(9, 1)$ relacionado ao fotino e os termos remanescentes são funções das derivadas espaço-temporais de $a_m(x)$ e $\chi^\beta(x)$. Ainda existe uma simetria de gauge residual relacionada com a componente mais baixa de $\Lambda(x, \theta)$, $s(x)$, que é o parâmetro de gauge das transformações dos campos de super Maxwell (3.31). Também as equações de movimento (3.30) são reproduzidas a partir de (3.32) com a forma acima para $A_\alpha(x, \theta)$.

Com o conhecimento das equações de movimento e transformações de gauge dos campos de super Maxwell, procede-se à quantização da superpartícula via formalismo de espinores puros.

3.4.2 Quantização covariante da superpartícula

Nesta subseção, mostraremos como quantizar a superpartícula usando o formalismo de espinores puros [17]. Partimos da ação

$$S = \int d\tau \left(\dot{x}^m P_m - \frac{1}{2} P^m P_m + i\dot{\theta}^\alpha p_\alpha + i\dot{\lambda}^\alpha w_\alpha \right), \quad (3.41)$$

sendo w_α o momento conjugado a λ^α . Temos que a função de onda mais geral construída a partir de $(x^m, \theta^\alpha, \lambda^\alpha)$ e que seja invariante de Lorentz é dada por

$$\Psi(x, \theta, \lambda) = C(x, \theta) + \lambda^\alpha A_\alpha(x, \theta) + (\lambda\gamma^{mnpqr}\lambda) A_{mnpqr}^*(x, \theta) + \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma C_{\alpha\beta\gamma}^*(x, \theta) + \dots, \quad (3.42)$$

sendo que $C(x, \theta)$, $A_\alpha(x, \theta)$, $A_{mnpqr}^*(x, \theta)$, $C_{\alpha\beta\gamma}^*(x, \theta)$ são supercampos e \dots inclui supercampos com potências maiores do que três em λ^α . O supercampo $C(x, \theta)$ tem número de fantasma igual a zero e contém o fantasma espaço-temporal, o supercampo $A_\alpha(x, \theta)$ tem número de fantasma igual a um e contém os campos de super Yang-Mills, o supercampo $A_{mnpqr}^*(x, \theta)$ tem número de fantasma dois e contém o anticampo de super Yang-Mills e, finalmente, $C_{\alpha\beta\gamma}^*(x, \theta)$ tem número de fantasma três e contém o antifantasma espaço-temporal. É possível mostrar que supercampos com número de fantasma maior do que três terão cohomologia trivial.

Aplicando a carga BRST $Q = \lambda^\alpha d_\alpha$ nesta função de onda, temos

$$Q\Psi = -i\lambda^\alpha D_\alpha C - i\lambda^\alpha \lambda^\beta D_\alpha A_\beta + \dots, \quad (3.43)$$

e exigindo que $Q\Psi = 0$, ou seja, que os estados físicos sejam aniquilados por Q , temos que o supercampo $A_\alpha(x, \theta)$ satisfaz a equação de movimento

$$\lambda^\alpha \lambda^\beta D_\alpha A_\beta = 0. \quad (3.44)$$

No entanto, $\lambda^\alpha \lambda^\beta$ é proporcional a $(\lambda\gamma^{mnpqr}\lambda)\gamma_{mnpqr}^{\alpha\beta}$, e isto implica que

$$(D\gamma^{mnpqr}A) = 0, \quad (3.45)$$

que é a equação de movimento de super Maxwell (3.32).

As transformações de gauge dos campos podem ser obtidas sabendo que

$$\delta\Psi = Q\Omega, \quad (3.46)$$

sendo Ω o parâmetro de gauge. Se definimos Ω como sendo

$$\Omega = i\Lambda + \lambda^\alpha W_\alpha + \dots, \quad (3.47)$$

temos que $A_\alpha(x, \theta)$ se transforma como

$$\delta A_\alpha = D_\alpha \Lambda, \quad (3.48)$$

que são as transformações de gauge de super Maxwell (3.34). Portanto, $A_\alpha(x, \theta)$ contém os graus de liberdade *on shell* do fóton e do fotino que, como mostrado anteriormente, satisfazem as equações de movimento e invariâncias de gauge

$$\partial^m \partial_{[m} a_{n]} = \gamma_{\alpha\beta}^m \partial_m \chi^\beta = 0, \quad \delta a_m = \partial_m s. \quad (3.49)$$

No formalismo de anticampos, as equações de movimento dos campos correspondem às invariâncias de gauge dos anticampos. É fácil ver que os anticampos correspondentes estão na cohomologia de Q , e que satisfazem as seguintes equações de movimento e invariâncias de gauge:

$$\partial_m a^{*m} = 0, \quad \delta a^{*m} = \partial_n (\partial^n s^m - \partial^m s^n), \quad \delta \chi_\alpha^* = \gamma_{\alpha\beta}^m \partial_m \kappa^\beta, \quad (3.50)$$

sendo s^m e κ^β parâmetros de gauge. Os anticampos a^{*m} e χ_α^* aparecem como campos componentes no supercampo A_{mnpqr}^* . O procedimento para obter as equações de movimento e as invariâncias de gauge é o mesmo mostrado anteriormente: usando $Q\Psi = 0$ e $\delta\Psi = Q\Omega$, obtém-se as equações de movimento e as invariâncias de gauge linearizadas (3.50). Também é necessário escolher o supercampo W_α de tal maneira a obter a seguinte forma para A_{mnpqr}^* :

$$A_{mnpqr}^* = (\theta\gamma_{[mnp}\theta)(\theta\gamma_{qr]})^\alpha \chi_\alpha^*(x) + (\theta\gamma_{[mnp}\theta)(\theta\gamma_{qr]s}\theta)a^{*s}(x) + \dots, \quad (3.51)$$

sendo que (...) envolve termos com ordem maior em θ e que dependem de derivadas de a^{*m} e χ_α^* .

Além destes campos e anticampos, estão na cohomologia de Q o fantasma e antifantasma de super Maxwell. O fantasma $c(x)$ é a componente $\theta = 0$ do supercampo $C(x, \theta)$, e o antifantasma $c^*(x)$ é encontrado na componente $(\theta)^5$ do supercampo $C_{\alpha\beta\gamma}^*(x, \theta)$.

Como mencionado anteriormente, é possível mostrar que estes campos e anticampos são os únicos que aparecem na cohomologia de Q , pois na expansão de $\Psi(x, \theta, \lambda)$ os supercampos com número de fantasma maior do que três têm cohomologia trivial.

Portanto, foi mostrado que o formalismo de espinores puros fornece o espectro correto para a superpartícula, neste caso, a versão linearizada de super Yang-Mills, que é a teoria de super Maxwell.

Capítulo 4

Supercorda

Dentre os formalismos padrão mais utilizados para descrever a supercorda estão o formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) e o formalismo de Green-Schwarz (GS). No entanto, tanto um formalismo como o outro possui características indesejáveis para a quantização da supercorda.

O formalismo RNS possui supersimetria na folha de mundo, e a constatação de que é uma teoria supersimétrica no espaço-tempo se faz de maneira indireta, através da projeção GSO. Por causa desta falta de supersimetria manifesta no espaço-tempo, o cálculo de amplitudes de espalhamento envolvendo férmions é uma tarefa árdua, devido à forma dos operadores de vértice fermiônicos.

A supercorda de Green-Schwarz apresenta supersimetria manifesta no espaço-tempo, e seria o formalismo natural para cálculos em supercordas. No entanto, devido à simetria kappa, quantização covariante neste formalismo não tem se mostrado possível. A alternativa para este problema é trabalhar no *gauge* de cone de luz. Neste *gauge*, cálculos de amplitudes de espalhamento são difíceis devido à falta da covariância manifesta. De fato, apenas amplitudes de quatro pontos no nível de árvore e a um *loop* foram calculadas. Além disso, só é possível trabalhar com *backgrounds* em que esta escolha de *gauge* seja permitida.

A quantização covariante da supercorda é possível utilizando o formalismo de espinores

puros. Este formalismo consiste numa ação quadrática, e os estados físicos são definidos como sendo aqueles pertencentes à cohomologia do operador BRST $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$, sendo λ^α um espinor puro definido pela restrição $(\lambda \gamma^m \lambda) = 0$, com $m = 0$ até 9.

Neste capítulo será apresentada uma revisão da supercorda RNS, e suas características básicas. Também falaremos sobre a supercorda de Green-Schwarz, sua fixação no *gauge* de cone de luz e *semi-gauge* de cone de luz. Por fim, a supercorda no formalismo de espinores puros também será discutida.

4.1 Supercorda RNS

A supercorda RNS (Ramond-Neveu-Schwarz) é descrita pela ação

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial X^m \bar{\partial} X_m + \psi^m \bar{\partial} \psi_m + \tilde{\psi}^m \partial \tilde{\psi}_m \right), \quad (4.1)$$

sendo X^m as coordenadas do espaço-tempo e um escalar na folha de mundo, ψ^m e $\tilde{\psi}^m$ vetores de $SO(9,1)$ anticomutantes e m varia de 1 a 9. As variáveis z e \bar{z} são coordenadas complexas que parametrizam a folha de mundo, e a métrica é $\eta^{z\bar{z}} = 2$, $\eta^{zz} = \eta^{\bar{z}\bar{z}} = 0$. Aqui, temos uma analogia com a partícula relativística de *spin* 1/2: a ação (4.1) tem supersimetria manifesta na folha de mundo, mas não no espaço-tempo, pois os campos ψ^m e $\tilde{\psi}^m$ não são espinores no espaço-tempo. A supersimetria em dez dimensões só é verificada depois de se efetuar a projeção GSO (Gliozzi-Scherk-Olive), sobre a qual falaremos um pouco no decorrer da seção.

A formulação RNS é uma teoria superconforme na folha de mundo que possui os seguintes geradores:

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2} \partial X^m \partial X_m - \frac{1}{2} \psi^m \partial \psi_m, \\ G &= i\psi^m \partial X_m, \end{aligned} \quad (4.2)$$

e expressões análogas para o setor anti-holomórfico. É fácil verificar que satisfazem a álgebra superconforme com carga central $c = 15$ na folha de mundo (com D sendo a dimensão do espaço-tempo):

$$\begin{aligned}
T(y)T(z) &\longrightarrow \frac{3D}{4(y-z)^4} + \frac{2T(z)}{(y-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{y-z}, \\
T(y)G(z) &\longrightarrow \frac{3G(z)}{2(y-z)^2} + \frac{\partial G(z)}{y-z}, \\
G(y)G(z) &\longrightarrow \frac{D}{(y-z)^3} + \frac{2T(z)}{y-z}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Acima, usamos os OPE's dos campos X^m e ψ^m :

$$\begin{aligned}
X^m(y, \bar{y})X^n(z, \bar{z}) &\longrightarrow -\eta^{mn} \log |y-z|^2, \\
\psi^m(y)\psi^n(z) &\longrightarrow \frac{\eta^{mn}}{y-z}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Estamos interessados em estudar o espectro da supercorda, e para isto, começaremos pela corda fechada. Em coordenadas cilíndricas, a ação fermiônica

$$S_F = \frac{1}{4\pi} \int d^2w (\psi^m \partial_{\bar{w}} \psi_m + \tilde{\psi}^m \partial_w \tilde{\psi}_m), \tag{4.5}$$

deve ser invariante sob $w \longrightarrow w + 2\pi$ (periodicidade). Respeitando esta condição e a invariância de Lorentz, as duas possíveis condições de periodicidade para os férmions são:

$$\begin{aligned}
\text{Ramond} : \psi^m(w + 2\pi) &= +\psi^m(w), \\
\text{Neveu - Schwarz} : \psi^m(w + 2\pi) &= -\psi^m(w),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

e de forma análoga para $\tilde{\psi}_m$. Os campos X^m também devem ser periódicos. A supercorrente G deve ter a mesma condição de periodicidade escolhida para o campo ψ^m (setor holomórfico). Assim, dadas as condições de contorno, existem quatro diferentes tipos de

supercorda fechada que podemos construir, cada uma com um espaço de Hilbert diferente: NS-NS, NS-R, R-NS e R-R.

Vamos escrever os campos fermiônicos em termos de modos de Fourier:

$$\begin{aligned}\psi^m(w) &= i^{-1/2} \sum_{r \in \mathbf{Z} + \theta} \psi_r^m \exp(irw), \\ \tilde{\psi}^m(\bar{w}) &= i^{1/2} \sum_{r \in \mathbf{Z} + \bar{\theta}} \tilde{\psi}_r^m \exp(-ir\bar{w}).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Acima, θ e $\bar{\theta}$ são iguais a zero no setor R e iguais a $1/2$ no setor NS. Podemos substituir $\exp(-iw) \rightarrow z$ (e analogamente para \bar{w}), e portanto devemos transformar os campos da seguinte forma

$$\psi^m(z) = (\partial_z w)^{1/2} \psi^m(w) = i^{1/2} z^{-1/2} \psi^m(w). \quad (4.8)$$

Assim, podemos expressar os campos ψ^m e $\tilde{\psi}^m$ em termos de z e \bar{z} e escrever suas expansões de Laurent:

$$\begin{aligned}\psi^m(z) &= \sum_{r \in \mathbf{Z} + \theta} \frac{\psi_r^m}{z^{r+1/2}}, \\ \tilde{\psi}^m(\bar{z}) &= \sum_{r \in \mathbf{Z} + \bar{\theta}} \frac{\tilde{\psi}_r^m}{\bar{z}^{r+1/2}}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

No caso bosônico, temos

$$\begin{aligned}\partial X^m(z) &= -i \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_a^m}{z^{a+1}}, \\ \bar{\partial} X^m(\bar{z}) &= -i \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_a^m}{\bar{z}^{a+1}},\end{aligned}\quad (4.10)$$

sendo que $\alpha_0^m = \tilde{\alpha}_0^m = p^m$ na corda fechada e $\alpha_0^m = 2p^m$ no caso da corda aberta, e p^m é o momento do centro de massa da corda. A quantização canônica fornece as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
[\alpha_a^m, \alpha_b^n] &= [\tilde{\alpha}_a^m, \tilde{\alpha}_b^n] = a\eta^{mn}\delta_{a,-b}, \\
\{\psi_r^m, \psi_s^n\} &= \{\tilde{\psi}_r^m, \tilde{\psi}_s^n\} = \eta^{mn}\delta_{r,-s}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Para a corda aberta, as condições de contorno para os férmions (respeitando o requerimento que o termo de superfície se anule) são as seguintes:

$$\begin{aligned}
\psi^m(0, \sigma^2) &= \exp(2\pi i\theta)\tilde{\psi}^m(0, \sigma^2), \\
\psi^m(\pi, \sigma^2) &= \exp(2\pi i\theta')\tilde{\psi}^m(\pi, \sigma^2),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

sendo que θ e θ' assumem os valores de 0 e $1/2$, correspondendo aos setores R e NS.

Considerando apenas um conjunto de osciladores, o espectro do setor NS é obtido da seguinte forma: como não há o modo $r = 0$, o vácuo é definido como aquele que é aniquilado por todos os modos com $r > 0$,

$$\psi_r^m |0\rangle_{NS} = 0 \quad \text{para } r > 0, \tag{4.13}$$

e o espectro é construído através da ação dos operadores de criação ($r < 0$).

Já no caso do setor R, o vácuo é degenerado devido aos modos ψ_0^m que satisfazem a álgebra de matrizes gama de Dirac, com

$$\Gamma^m \cong \sqrt{2}\psi_0^m. \tag{4.14}$$

Como $\{\psi_r^m, \psi_0^n\} = 0$ para $r \neq 0$, os operadores ψ_0^m levam estados de vácuo em estados de vácuo. Eles formam uma representação das matrizes gama de Dirac, que no caso de $D = 10$, tem dimensão igual a **32**. Esta representação se reduz a duas representações de Weyl inequivalentes **16+16'**, que possuem autovalores diferentes com relação à matriz Γ^{11} , definida por

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9 . \quad (4.15)$$

Como Γ^{11} comuta com todos os Γ^m , ou seja, os ψ_0^m , seria interessante construir um operador com esta propriedade para todo o espectro da corda, ou seja, para os ψ_r^m com $r \neq 0$. Primeiro, vamos escrever os geradores de Lorentz:

$$\Sigma^{mn} = -\frac{i}{2} \sum_{r \in \mathbf{Z} + \theta} [\psi_r^m, \psi_{-r}^n], \quad (4.16)$$

e definir

$$S_\alpha = i^{\delta_{\alpha,0}} \Sigma^{2\alpha, 2\alpha+1}, \quad (4.17)$$

com α variando de 0 a 4. Finalmente, definimos a seguinte quantidade:

$$F = \sum_{\alpha=0}^4 S_\alpha, \quad (4.18)$$

que é chamado de número de férmion da folha de mundo. Com F construímos o operador que queremos, $\exp(\pi i F)$, que será usado como projetor na chamada projeção GSO.

Com relação ao espectro das diferentes cordas que podem ser construídas, comentaremos apenas o caso da corda aberta. Após a inclusão de fantasmas superconformes ($(b, c) \rightarrow$ anticomutantes, $(\beta, \gamma) \rightarrow$ comutantes), temos uma teoria com carga central igual a zero. Procedendo à quantização desta teoria, no caso da corda aberta, temos que no setor NS o estado de mais baixa energia é um táquion, que possui autovalor igual a -1 com relação ao operador $\exp(\pi i F)$. O primeiro estado excitado é uma representação vetorial não massiva do grupo $SO(8)$, com autovalor +1 com relação a $\exp(\pi i F)$. No setor R, o estado de mais baixa energia é a representação que vimos anteriormente, $\mathbf{32} = \mathbf{16} + \mathbf{16}'$, que, após usarmos a equação de Dirac, fica sendo apenas $\mathbf{8} + \mathbf{8}'$. A representação $\mathbf{8}$ tem autovalor +1 com relação a $\exp(\pi i F)$ e $\mathbf{8}'$ tem autovalor -1. Também são representações não massivas.

De forma a obter uma teoria de corda aberta consistente, escolhe-se como sendo estados físicos aqueles estados que possuem autovalor $+1$ perante o operador $\exp(\pi i F)$; esta é a chamada projeção GSO. Desta forma, eliminamos o táquion do setor NS. Fazendo este procedimento para todo o espectro, como consequência a supersimetria no espaço-tempo é verificada. Por exemplo, para os modos não massivos, temos oito estados bosônicos do setor NS e oito estados fermiônicos do setor R *.

O cálculo de amplitudes de espalhamento envolvendo férmions (que vem do setor R) neste formalismo é uma tarefa árdua justamente pela falta de supersimetria manifesta no espaço-tempo. Os operadores de vértice fermiônicos são muito complicados, tornando os cálculos explícitos muito difíceis de serem feitos. Já o setor NS é bem compreendido. Por estes motivos é que seria interessante trabalhar com uma teoria que tivesse supersimetria manifesta no espaço-tempo, o que acontece com a supercorda de Green-Schwarz. No entanto, esta formulação também apresenta dificuldades, como será visto na próxima seção.

4.2 Supercorda de Green-Schwarz

A ação de Green-Schwarz para a supercorda pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m - \frac{1}{2} \partial X^m (\theta \gamma_m \bar{\partial} \theta) - \frac{1}{4} (\theta \gamma_m \bar{\partial} \theta) (\theta \gamma_m \partial \theta) + \text{termos anti-holomórficos} \right]. \quad (4.19)$$

sendo X^m um vetor de $SO(9, 1)$ e escalar na folha de mundo, e θ^α um espinor de Lorentz no espaço-tempo e um escalar na folha de mundo. As convenções das matrizes $\gamma_{\alpha\beta}^m$ e da métrica no espaço-tempo são válidas aqui. Vamos trabalhar só com o setor holomórfico da ação pois o que acontece no setor anti-holomórfico é análogo. De modo a garantir a

*A projeção GSO, como apresentada, é um procedimento *ad hoc*. No entanto, verifica-se que a função partição só é invariante modular após se efetuar a projeção GSO [2]. Portanto, esta projeção é necessária para consistência da teoria.

unitariedade da teoria, a ação possui invariância kappa, que elimina os estados de norma negativa. Seus geradores estão relacionados aos vínculos

$$d_\alpha = p_\alpha + (\theta\gamma^m)_\alpha(2\partial X_m + (\theta\gamma_m\partial\theta)). \quad (4.20)$$

A álgebra que estes vínculos obedecem é representada pelos seguintes OPE's:

$$d_\alpha(y)d_\beta(z) \longrightarrow \frac{4\gamma_{\alpha\beta}^m\Pi_m}{y-z}, \quad (4.21)$$

sendo

$$\Pi^m = \partial X^m - (\theta\gamma^m\partial\theta), \quad (4.22)$$

e os OPE's fundamentais utilizados nestes cálculos são:

$$\theta^\alpha(y)p_\beta(z) \longrightarrow \frac{\delta_\beta^\alpha}{y-z}, \quad (4.23)$$

$$X^m(y, \bar{y})X^n(z, \bar{z}) \longrightarrow \frac{1}{2}\eta^{mn}\log|y-z|^2. \quad (4.24)$$

A ação (4.19) também é invariante por reparametrizações, e o vínculo de Virasoro é

$$T = \Pi^m\Pi_m = 0. \quad (4.25)$$

Com esta informação, podemos analisar a equação (4.21): ela nos diz que, como $\Pi^m\Pi_m = 0$, metade dos vínculos d_α são de primeira classe e a outra metade é de segunda classe. Comparando com o caso da superpartícula, também aqui não é possível separar estes vínculos de forma covariante, e os mesmos problemas que apareceram no caso da superpartícula aparecem aqui. A alternativa continua sendo fixar as simetrias de *gauge* utilizando condições de *gauge* que não preservam a invariância de Lorentz, como é o caso do *gauge* de cone de luz.

Impondo as condições do *gauge* de cone de luz:

$$X^+(z, \bar{z}) = x^+ + p^+ \tau, \quad (\gamma^+ \theta)_\alpha = 0, \quad (4.26)$$

sendo x^+ e p^+ coordenada e momento do centro de massa da corda, a ação se reduz a

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{2} \partial X^i \bar{\partial} X^i + \frac{1}{4} \partial X^+ (\theta \gamma^- \bar{\partial} \theta) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{2} \partial X^i \bar{\partial} X^i + \frac{1}{2} S_a \bar{\partial} S_a \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo $S_a = \sqrt{\frac{\partial X^+}{2}} (\gamma^- \theta)_a$ um espinor de $SO(8)$. A quantização covariante da ação implica

$$S_a(y) S_b(z) \longrightarrow \frac{\delta_{ab}}{y - z}. \quad (4.28)$$

As equações de movimento que vem da ação (4.27) são as seguintes:

$$\begin{aligned} \partial \bar{\partial} X^i(z, \bar{z}) &= 0, \\ \bar{\partial} S_a(z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Como vamos trabalhar com a supercorda aberta, as condições de contorno para os campos, neste caso, serão:

$$\begin{aligned} \partial X^i &= \bar{\partial} X^i \quad \text{em } z = \bar{z}, \\ S^a(z) &= \bar{S}^a(\bar{z}) \quad \text{em } z = \bar{z}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

sendo \bar{S}^a o campo fermiônico anti-holomórfico. A condição de igualar na fronteira os campos fermiônicos holomórfico e anti-holomórfico reduz a supersimetria da teoria de $N = 2$ para $N = 1$ de modo a preservar sua consistência. Podemos expressar os campos ∂X^i e S_a em termos de suas expansões em séries de Laurent:

$$\begin{aligned}\partial X^i(z) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m^i}{z^{m+1}}, \\ S_a(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{S_{a,m}}{z^{m+1/2}},\end{aligned}\tag{4.31}$$

Usando (4.28), vemos que os modos $S_{a,m}$ obedecem à álgebra:

$$\{S_{a,m}, S_{b,n}\} = \delta_{ab} \delta_{m,-n}.\tag{4.32}$$

Em particular, os modos zero $S_{a,0}$ são uma versão espinorial das matrizes de Pauli de $SO(8)$ $\sigma_{\dot{a}\dot{a}}^i$, introduzidas no capítulo 3. Portanto, a álgebra dos modos zero $S_{a,0}$ pode ser representada num espaço vetorial $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_c$ da mesma forma como foi feito para a superpartícula, ou seja,

$$\begin{aligned}S_{a,0} |i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{\dot{a}\dot{a}}^i |\dot{a}\rangle, \\ S_{a,0} |\dot{a}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{\dot{a}\dot{a}}^i |i\rangle,\end{aligned}\tag{4.33}$$

Este é o multiplete completo obtido nas duas construções separadas do formalismo RNS: temos oito estados fermiônicos e oito estados bosônicos, que correspondem precisamente ao espectro da superpartícula, ou seja, teoria de super Yang-Mills em D=10. Para obter os estados excitados da supercorda aberta, atua-se com os operadores de criação α_{-m}^i e $S_{a,-m}$ sobre os estados de vácuo $|i\rangle$ e $|\dot{a}\rangle$.

Há uma maneira de relacionar as ações no cone de luz dos formalismos de Green-Schwarz e RNS, mostrando sua equivalência quando se trabalha nesta escolha de *gauge* [1]. Escrevendo a ação de RNS no cone de luz como

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z (\partial X^i \bar{\partial} X^i + \Psi^i \sigma^\alpha \partial_\alpha \Psi^i),\tag{4.34}$$

sendo que o índice α está relacionado às variáveis z e \bar{z} , e as matrizes σ^α são definidas como

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

e Ψ^i é escrito em termos de ψ^i e $\tilde{\psi}^i$ como

$$\Psi^i = \begin{pmatrix} \psi^i \\ \tilde{\psi}^i \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Vamos relacionar a ação RNS no *gauge* de cone de luz com a ação de Green-Schwarz no *gauge* de cone de luz, escrita na seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (\partial X^i \bar{\partial} X^i + \mathbf{S}_a \sigma^\alpha \partial_\alpha \mathbf{S}_a), \quad (4.37)$$

sendo

$$\mathbf{S}_a = \begin{pmatrix} S_a \\ \bar{S}_a \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Note que, no caso de Green-Schwarz, S_a pertence à representação $\mathbf{8}_s$ de $SO(8)$ e no caso RNS, ψ^i pertence à representação $\mathbf{8}_v$.

As duas descrições no *gauge* de cone de luz serão relacionadas bosonizando os férmions Ψ^i e, depois, fermionizando-os. Primeiro, introduzimos quatro escalares reais:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi_1 &= \Psi^1 \sigma^\alpha \Psi^2, \\ \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi_2 &= \Psi^3 \sigma^\alpha \Psi^4, \\ \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi_3 &= \Psi^5 \sigma^\alpha \Psi^6, \\ \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi_4 &= \Psi^7 \sigma^\alpha \Psi^8, \end{aligned} \quad (4.39)$$

e depois recombinaos os escalares em novos campos:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) , \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4) , \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4) , \\
\tau_4 &= \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4) .
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Por fim, vamos fermionizar estes campos introduzindo férmions de Majorana \mathbf{S}_a como abaixo:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \tau_1 &= \mathbf{S}_1 \sigma^\alpha \mathbf{S}_2 , \\
\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \tau_2 &= \mathbf{S}_3 \sigma^\alpha \mathbf{S}_4 , \\
\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \tau_3 &= \mathbf{S}_5 \sigma^\alpha \mathbf{S}_6 , \\
\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \tau_4 &= \mathbf{S}_7 \sigma^\alpha \mathbf{S}_8 .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Estas manipulações são possíveis devido a uma característica do grupo $SO(8)$, chamada trialidade. Esta simetria extra do grupo $SO(8)$ permite relacionar as representações espinoriais $\mathbf{8}_s$ e $\mathbf{8}_c$ com as representações vetoriais $\mathbf{8}_v$.

O cálculo de amplitudes de espalhamento neste formalismo no *gauge* de cone de luz também enfrenta problemas, devido à falta de covariância manifesta (Lorentz), visto que esta escolha de *gauge* não é covariante. Apenas amplitudes de quatro pontos em nível de árvore e a um *loop* foram calculadas. Além disto, este cálculo só é possível em *backgrounds* em que o *gauge* de cone de luz é permitido. Por este motivo, este formalismo não é muito utilizado para estes fins, em favor do formalismo RNS, que também tem dificuldades, mas é mais tratável.

4.2.1 Supercorda de Green-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz

A supercorda de Green-Schwarz também pode ser quantizada no semi-*gauge* de cone de luz, que significa fixar apenas a simetria fermiônica local kappa impondo $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$. Neste *gauge*, a ação de Green-Schwarz para a supercorda é escrita como

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + \frac{1}{2} S_a \bar{\partial} S_a + \text{termos anti-holomórficos} \right], \quad (4.42)$$

e, novamente, $S_a = \sqrt{\frac{\partial X^+}{2}} (\gamma^- \theta)_a$ é um espinor quiral de $SO(8)$. Há ainda uma simetria local bosônica gerada pelo tensor de energia momento

$$T_m = -\partial X^- \partial X^+ + \partial X^i \partial X^i - \frac{1}{2} S_a \partial S_a + \frac{1}{2} \partial^2 (\log \partial X^+). \quad (4.43)$$

Acima, o termo $\frac{1}{2} \partial^2 (\log \partial X^+)$ vem da fixação de *gauge* não covariante, e é necessário tanto para invariância conforme quanto para invariância de Lorentz quântica. Usando os OPE's de X^m e S_a , verifica-se que T_m tem carga central $c = 26$, que é compensada com a inclusão dos fantasmas, totalizando uma carga central igual a zero. O operador BRST é construído de forma usual:

$$Q = \int dz (cT_m + bc\partial c), \quad (4.44)$$

sendo (b, c) o par de fantasmas fermiônicos. A ação, incluindo os fantasmas, toma a forma

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + \frac{1}{2} S_a \bar{\partial} S_a + b \bar{\partial} c + \text{termos anti-holomórficos} \right]. \quad (4.45)$$

A construção de geradores de Lorentz para a ação (4.45) também terá as mesmas complicações observadas no caso da superpartícula no semi-*gauge* de cone de luz: o gerador N^{i-} não preserva a condição de *gauge* $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$ e, portanto, sua construção implica em compensar as transformações kappa para restaurar a condição de *gauge*. Por este motivo,

a forma de N^{i-} é mais complicada do que seria no caso em que se tem simetria de Lorentz manifesta. Os outros geradores, por preservarem $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$, têm a forma usual:

$$\begin{aligned} N^{ij} &= -X^i \partial X^j + X^j \partial X^i - \frac{1}{4} (S \sigma^{ij} S), \\ N^{+-} &= -\frac{1}{2} X^+ \partial X^- + \frac{1}{2} X^- \partial X^+, \\ N^{i+} &= -X^i \partial X^+ + X^+ \partial X^i, \\ N^{i-} &= -X^i \partial X^- + X^- \partial X^i - \frac{(S \sigma^i)_{\dot{a}} (S \sigma^j)_{\dot{a}} \partial X^j}{2 \partial X^+}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

Como no caso da superpartícula, a álgebra dos geradores é a álgebra de Lorentz, exceto pelo comutador de N^{i-} com ele mesmo:

$$\left[\int dy N^{i-}(y), \int dz N^{j-}(z) \right] = \left[Q, \int dz \left[-\frac{b(S \sigma^i)_{\dot{a}} (S \sigma^j)_{\dot{a}}}{(\partial X^+)^2} \right] (z) \right], \quad (4.47)$$

indicando que a álgebra fecha a menos de uma transformação BRST.

4.3 Quantização covariante da supercorda

Desde que foi constatado o problema da quantização covariante da supercorda de Green-Schwarz, várias tentativas de resolver o problema foram feitas. Uma tentativa que vale a pena mencionar é o trabalho de Siegel [6], que em 1986 sugeriu a seguinte ação para a supercorda:

$$S = \int d^2 z \left(\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha \right), \quad (4.48)$$

sendo que o índice espinorial α vai de 1 a 16, e o momento conjugado a θ^α , p_α , é tratado como um campo independente. Ele também substituiu os vínculos da simetria kappa d_α por um conjunto de vínculos de primeira classe e segunda classe construídos a partir dos objetos supersimétricos Π^m , d_α e $\partial \theta^\alpha$. Além disto, não é exigido que d_α se anule, como é o caso quando a teoria apresenta vínculos. Este conjunto de vínculos inclui

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2}\Pi^m\Pi_m - d_\alpha\partial\theta^\alpha, \\
B^\alpha &= \Pi^m(\gamma_m d)^\alpha, \\
C^{mnp} &= d_\alpha(\gamma^{mnp})^{\alpha\beta}d_\beta.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Acima, A é o vínculo de Virasoro, B^α é o gerador da simetria kappa e C^{mnp} seria a parte dos vínculos de segunda classe que aparece em Green-Schwarz. Este procedimento também foi aplicado à superpartícula, com um certo sucesso [7]; no entanto, para a supercorda um conjunto de vínculos de primeira classe que fechasse a álgebra no nível quântico e que reproduzisse o espectro correto não pôde ser encontrado.

Outra tentativa de se quantizar a supercorda covariantemente foi feito por Carlip e Kallosh *et al* [8]. Nesta tentativa, a supercorda de Green-Schwarz foi quantizada usando-se o semi-*gauge* de cone de luz. Esta tentativa também se mostrou infrutífera devido a problemas com o propagador dos férmions.

Em 2000, um novo formalismo com supersimetria manifesta para a supercorda surgiu, chamado de formalismo de espinores puros [10]. Este formalismo apresenta uma ação quadrática e novos ingredientes que permitem quantizar a ação covariantemente e obter o espectro correto para a supercorda. Este é o assunto da próxima subseção.

4.3.1 Supercorda no formalismo de espinores puros

A quantização covariante da supercorda com supersimetria e simetria de Lorentz manifestas pode ser feita a partir da seguinte ação

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + f^\alpha d_\alpha + \text{termos anti-holomórficos} \right], \tag{4.50}$$

sendo p_α o momento conjugado do espinor de Lorentz θ^α e f^α um multiplicador de Lagrange que impõe o vínculo fermiônico (4.20). Usando o método BRST, a ação pode ser

fixada introduzindo-se um par de fantasmas espinoriais bosônicos $(\lambda^\alpha, w_\alpha)$ e escolhendo $f^\alpha = 0$:

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + \bar{\partial} \lambda^\alpha w_\alpha + \text{termos anti-holomórficos} \right]. \quad (4.51)$$

O fantasma λ^α é um espinor puro, ou seja, $\lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^m \lambda^\beta = 0$, e w_α é seu momento conjugado. O operador BRST, neste formalismo, é

$$Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha, \quad (4.52)$$

que é nilpotente graças a $(\lambda \gamma^m \lambda) = 0$. O fato do fantasma λ^α obedecer a um vínculo é algo que não aparece no método BRST usual; no entanto, é possível derivar esta condição e o operador BRST (4.52) a partir da ação de Green-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz com variáveis fermiônicas adicionais. Isto será mostrado no capítulo 5.

4.3.2 Parametrização do espinor puro e construção dos geradores de Lorentz

De forma a construir a parte dos fantasmas N^{mn} dos geradores de Lorentz, primeiro temos que resolver o vínculo do espinor puro $\lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^m \lambda^\beta = 0$. Para isto, vamos parametrizar λ^α em termos de representações do subgrupo $U(5)$ de $SO(10)$:

$$\lambda^+ = e^s, \quad \lambda_{ab} = u_{ab}, \quad \lambda^a = -\frac{1}{8} e^{-s} \epsilon^{abcde} u_{bc} u_{de}, \quad (4.53)$$

sendo que a, b, c, d, e variam de 1 a 5, $u_{ab} = -u_{ba}$ são dez variáveis independentes. O espinor λ^α está escrito em termos das representações $1_{5/2}$, $\overline{10}_{1/2}$ e $5_{-3/2}$ de $SU(5)_{U(1)}$. A maneira de se obter estas representações é escrever um espinor $SO(10)$ usando a notação $[\pm \pm \pm \pm \pm]$, sendo que espinores de Weyl e anti-Weyl tem número ímpar e par, respectivamente, de sinais $+$. No caso de λ^α , que é um espinor de Weyl, λ^+ é a representação com cinco sinais $+$, λ^{ab} a representação com três sinais $+$ e λ^a a representação com um

sinal +. Como λ^a depende de u_{ab} e s , temos então 11 componentes independentes, que é o número de componentes independentes de um espinor puro.

A ação para os fantasmas, escrita em termos dos campos que parametrizam λ^α , é dada por

$$S_\lambda = \int d^2z \left[\bar{\partial}t \partial s - \frac{1}{2} v^{ab} \bar{\partial} u_{ab} \right], \quad (4.54)$$

sendo t e v^{ab} os momentos conjugados a s e u_{ab} , respectivamente; eles são os campos que parametrizam w_α na notação $U(5)$. A álgebra destes campos, em termos de OPE's, é a seguinte:

$$\begin{aligned} t(y)s(z) &\longrightarrow \log(y-z), \\ v^{ab}(y)u_{cd}(z) &\longrightarrow \frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]}}{y-z}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

A parte de fantasmas dos geradores de Lorentz N^{mn} também pode ser colocada na notação $U(5)$. Eles são construídos a partir dos campos (s, t) e (u_{ab}, v^{ab}) :

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} u_{ab} v^{ab} + \frac{5}{2} \partial t - \frac{5}{2} \partial s \right), \\ N_a^b &= u_{ac} v^{bc} - \frac{1}{5} \delta_a^b u_{cd} v^{cd}, \\ N^{ab} &= e^s v^{ab}, \\ N_{ab} &= e^{-s} \left(2\partial u_{ab} - u_{ab} \partial t - 2u_{ab} \partial s + u_{ac} u_{bd} v^{cd} - \frac{1}{2} u_{ab} u_{cd} v^{cd} \right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

As componentes $U(5)$ de N^{mn} (N, N_a^b, N^{ab}, N_{ab}) se transformam de acordo com as representações $(1_0, 24_0, 10_2, \bar{10}_{-2})$ de $SU(5)_{U(1)}$, respectivamente. Os geradores (4.56) devem satisfazer os seguintes OPE's:

$$\begin{aligned}
N^{mn}(y)\lambda^\alpha(z) &\longrightarrow \frac{(\gamma^{mn})_\beta^\alpha \lambda^\beta(z)}{2(y-z)}, \\
N^{kl}(y)N^{mn}(z) &\longrightarrow \frac{\eta^{m[l}N^{k]n} - \eta^{n[l}N^{k]m}(z)}{y-z} - \frac{3(\eta^{kn}\eta^{lm} - \eta^{km}\eta^{ln})}{(y-z)^2},
\end{aligned} \tag{4.57}$$

o que de fato acontece. Portanto, não é necessário trabalhar com a notação $U(5)$, visto que os OPE's que envolvem λ^α e N^{mn} são $SO(10)$ covariantes.

O tensor de energia-momento para as variáveis fantasma é dado por

$$T_\lambda = \frac{1}{2}v^{ab}\partial u_{ab} + \partial t\partial s + \partial^2 s, \tag{4.58}$$

sendo que o termo $\partial^2 s$ é incluído para que os geradores de Lorentz N^{mn} sejam tensores na álgebra conforme. Este tensor tem carga central +22 (que é cancelada pela carga central -22 do setor de matéria da teoria) e pode ser escrito de forma covariante como

$$T_\lambda = \frac{1}{10}N_{mn}N^{mn} - \frac{1}{8}J^2 - \partial J, \tag{4.59}$$

sendo que J é escrito em termos dos campos $U(5)$:

$$J = \frac{1}{2}u_{ab}v^{ab} + \partial t + 3\partial s. \tag{4.60}$$

J não tem pólos com N^{mn} , e satisfaz os seguintes OPE's:

$$\begin{aligned}
J(y)J(z) &\longrightarrow \frac{-4}{(y-z)^2}, \\
J(y)\lambda^\alpha(z) &\longrightarrow \frac{\lambda^\alpha}{y-z}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

O operador $\oint J$ pode ser identificado como o operador de número de fantasma, e então λ^α tem número de fantasma um.

4.3.3 Operadores de vértice em espinores puros

No formalismo de espinores puros, os estados físicos da supercorda são identificados como estados de número de fantasma um na cohomologia do operador BRST

$$Q = \int dz \lambda^\alpha(z) d_\alpha(z), \quad (4.62)$$

sendo que λ^α deve satisfazer $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$, ou seja, ele é um espinor puro. Esta condição também implica que w_α , o momento conjugado a λ^α , só pode aparecer em combinações que são invariantes pela transformação de *gauge* abaixo:

$$\delta w_\alpha = (\gamma^m\lambda)_\alpha \Lambda_m. \quad (4.63)$$

sendo Λ_m um parâmetro de *gauge* arbitrário. Então w_α só aparece nas seguintes combinações:

$$\begin{aligned} N_{mn} &= \frac{1}{2} : (w\gamma_{mn}\lambda) : , \\ J &=: w_\alpha\lambda^\alpha : , \end{aligned} \quad (4.64)$$

sendo N_{mn} e J definidos explicitamente em termos dos campos $U(5)$ como na seção anterior. Os operadores de vértice da supercorda aberta são construídos como uma combinação arbitrária de $[x^m, \theta^\alpha, d_\alpha, \lambda^\alpha, N^{mn}, J]$, que têm número de fantasma um e peso conforme n a momento zero. No caso, n está relacionado com o número do estado, ou seja, $(\text{massa})^2 = n/2$.

No caso do estado que tem $(\text{massa})^2 = 0$, ou seja, $n = 0$, o operador de vértice mais geral que pode ser construído é

$$U = \lambda^\alpha A_\alpha(x, \theta), \quad (4.65)$$

sendo A_α um supercampo espinorial. Em analogia com a superpartícula, se fazemos $QU = 0$ e $\delta U = Q\Omega$ obtemos as equações de movimento de super Maxwell $\gamma_{mnpqr}^{\alpha\beta} D_\alpha A_\beta = 0$

e suas invariâncias de *gauge* $\delta A_\alpha = D_\alpha \Omega$. O operador de vértice para o próximo estado, ou seja, $n = 1$ e $(\text{massa})^2 = 1/2$, foi construído em [25], e segue as idéias básicas da construção do operador de vértice para o estado fundamental.

Para calcular amplitudes de espalhamento, também é necessário ter operadores de vértice na forma integrada $\int dz V$, sendo que V é geralmente obtido a partir do operador de vértice não integrado U , por anticomutação de U com o fantasma b . Há também uma forma alternativa de se obter V a partir da relação [26]

$$[Q, V] = \partial U . \quad (4.66)$$

Usando a relação acima, o operador de vértice para o nível não massivo da supercorda é encontrado [10]:

$$V = \partial \theta^\alpha A_\alpha(x, \theta) + \Pi^m B_m(x, \theta) + d_\alpha W^\alpha(x, \theta) + \frac{1}{2} N_{mn} F^{mn}(x, \theta) , \quad (4.67)$$

sendo

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{1}{8} \gamma_m^{\alpha\beta} D_\alpha A_\beta , \\ W^\alpha &= \frac{1}{10} \gamma_m^{\alpha\beta} (D_\beta B^m - \partial^m A_\beta) , \\ F_{mn} &= \partial_{[m} B_{n]} = \frac{1}{8} (\gamma_{mn})_\alpha^\beta D_\beta W^\alpha , \end{aligned} \quad (4.68)$$

as intensidades de campo (*field strenghts*) que podem ser construídas a partir de A_α . O cálculo de $QV = \partial U$ fornece

$$\begin{aligned} QV &= \partial(\lambda^\alpha A_\alpha) + \lambda^\alpha \partial \theta^\beta (-D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha + \gamma_{\alpha\beta}^m B_m) + \lambda^\alpha \Pi^m (D_\alpha B_m - \partial_m A_\alpha - \gamma_{m\alpha\beta} W^\beta) \\ &+ \lambda^\alpha d_\beta \left(-D_\alpha W^\beta + \frac{1}{4} (\gamma^{mn})_\alpha^\beta F_{mn} \right) + \frac{1}{2} \lambda^\alpha N_{mn} D_\alpha F^{mn} , \end{aligned} \quad (4.69)$$

e para que $QV = \partial U = \partial(\lambda^\alpha A_\alpha)$, as seguintes equações devem ser satisfeitas pelos campos:

$$\begin{aligned}
-D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha + \gamma_{\alpha\beta}^m B_m &= 0, \\
D_\alpha B_m - \partial_m A_\alpha - \gamma_{m\alpha\beta} W^\beta &= 0, \\
-D_\alpha W^\beta + \frac{1}{4}(\gamma^{mn})_\alpha^\beta F_{mn} &= 0, \\
\lambda^\alpha \lambda^\beta (\gamma_{mn})_\beta^\gamma D_\alpha F^{mn} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

que são as equações de movimento de super Maxwell da subseção (1.3.1). A última equação de (4.70) vem da imposição da equação anterior, visto que

$$\lambda^\alpha \lambda^\beta D_\alpha D_\beta W^\gamma = \frac{1}{2}(\lambda\gamma^m\lambda)\partial_m W^\gamma = 0. \tag{4.71}$$

Amplitudes de espalhamento no nível de árvore podem ser calculadas neste formalismo definindo uma medida apropriada [10]. A generalização destes cálculos para vários *loops* pode ser encontrada em [11].

4.3.4 Comparação entre os métodos BRST usual e de espinores puros

Nesta subseção, vamos discutir as diferenças e semelhanças entre o método BRST usual e o método BRST em espinores puros no contexto da supercorda.

De início, podemos constatar que a construção do operador BRST no formalismo de espinores puros não segue os procedimentos apresentados na seção (2.2). Este operador é apenas $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$, ou seja, não aparecem os fantasmas (b, c) relacionados ao tensor de energia-momento, como esperaríamos se estivéssemos trabalhando com o método BRST usual. A construção leva em conta todas as componentes de d_α , não apenas a parte de primeira classe; além disto, não requeremos que d_α se anule, como acontece no método de Dirac.

Uma das características mais importantes do formalismo é que o fantasma λ^α deve obedecer a condição de espinor puro, $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$, de forma que o operador BRST seja

nilpotente. Este fato não tem análogo no método BRST usual. Esta condição também restringe em que combinações o momento conjugado a λ^α pode aparecer, como vimos na seção anterior.

Em espinores puros, definimos os estados físicos como estados de número de fantasma um na cohomologia do operador $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$, assim como no método BRST usual para a corda bosônica os estados físicos são aqueles que tem número de fantasma um na cohomologia do operador BRST. A partir da imposição que o operador de vértice deve ser invariante por BRST, encontramos as equações de movimento. Este fato é análogo ao que encontramos no caso da corda bosônica, no capítulo 2.

No cálculo de amplitudes de espalhamento, é necessário usar a seguinte prescrição para calcular as funções de correlação, de forma a obter um resultado não nulo [10][11]:

$$\langle (\lambda \gamma^m \theta) (\lambda \gamma^n \theta) (\lambda \gamma^p \theta) (\theta \gamma_{mnp} \theta) \rangle = 1. \quad (4.72)$$

Esta prescrição está relacionada com os modos zero dos campos λ^α e θ^α . Da mesma forma, uma prescrição para os modos zero do fantasma c aparece no cálculo de amplitudes para a corda bosônica:

$$\langle c \partial c \partial^2 c \rangle = 1. \quad (4.73)$$

Obviamente, existem diferenças e semelhanças entre os dois métodos, mas o mais importante é que ambos descrevem corretamente os estados físicos da supercorda. No entanto, como já foi mencionado anteriormente, o formalismo de espinores puros tem uma vantagem em relação aos formalismos de supercorda existentes: o cálculo de amplitudes de espalhamento pode ser feito covariantemente, sem as complicações que aparecem em RNS e GS [11].

Capítulo 5

Equivalência

Como mencionado nos capítulos anteriores, o formalismo que permite quantizar covariante a supercorda com supersimetria manifesta é o formalismo de espinores puros. Seus ingredientes básicos são uma ação quadrática para os férmions, o operador BRST $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$ e o fantasma espinorial bosônico λ^α que é vinculado a obedecer a condição de espinor puro $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$. No entanto, no método BRST padrão os fantasmas não obedecem a condições de vínculo como no caso do formalismo de espinores puros. Esta peculiaridade do formalismo de espinores puros ainda não é completamente bem entendida, mas é possível derivar a condição de espinores puros e o operador BRST partindo da ação de Green-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz com variáveis fermiônicas adicionais através da equivalência das cohomologias dos operadores BRST desta ação e a de espinores puros [14].

Neste capítulo, serão apresentados os procedimentos usados para mostrar a equivalência do formalismo de espinores puros e de Green-Schwarz para a supercorda. Mas antes é instrutivo mostrar esta equivalência no caso da superpartícula [13], partindo da ação de Brink-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz.

5.1 Equivalência entre a ação de Brink-Schwarz e de espinores puros para a superpartícula

Para mostrar a equivalência entre as ações de Brink-Schwarz e espinores puros, começamos com a ação de Brink-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz, e adicionamos um par de variáveis fermiônicas $(p_\alpha, \theta^\alpha)$ que não estão relacionadas ao espinor S_a , e definimos

$$d_\alpha = p_\alpha + 2P^m(\gamma_m\theta)_\alpha, \quad (5.1)$$

que satisfazem os parênteses de Poisson

$$\{d_\alpha, d_\beta\} = 4P_m\gamma_{\alpha\beta}^m. \quad (5.2)$$

Agora, construímos a quantidade \hat{d}_α :

$$\hat{d}_\alpha = d_\alpha + \frac{(\gamma_m\gamma^+S)_\alpha P^m}{\sqrt{P^+}}, \quad (5.3)$$

que são vínculos de primeira classe, como é possível ver pela álgebra que obedecem:

$$\{\hat{d}_\alpha, \hat{d}_\beta\} = \frac{2P^m P_m \gamma_{\alpha\beta}^+}{P^+}. \quad (5.4)$$

A ação da superpartícula no semi-*gauge* de cone de luz com as novas variáveis e vínculos é escrita como

$$S = \int d\tau \left(\dot{x}^m P_m + e P^m P_m + i\dot{\theta}^\alpha p_\alpha + \frac{i}{2} \dot{S}_a S_a + f^\alpha \hat{d}_\alpha \right), \quad (5.5)$$

sendo f^α multiplicadores de Lagrange fermiônicos que estão relacionados ao vínculo (5.3).

Para retornar à ação original no semi-*gauge* de cone de luz, usa-se \hat{d}_α para escolher $\theta^\alpha = 0$.

Tendo apenas vínculos de primeira classe na teoria, a construção do operador BRST se faz da maneira usual. A ação, depois de fixada pelos fantasmas, toma a forma

$$S = \int d\tau \left(\dot{x}^m P_m - \frac{1}{2} P^m P_m + i\dot{\theta}^\alpha p_\alpha + \frac{i}{2} \dot{S}_a S_a + i\dot{\hat{\lambda}}^\alpha \hat{w}_\alpha + i\dot{c}b \right), \quad (5.6)$$

sendo que foi escolhido $e = -1/2$ e $f^\alpha = 0$; o operador BRST, na notação $SO(8)$, é escrito como

$$\hat{Q} = \hat{\lambda}_a d_a + 2\hat{\lambda}_a S_a \sqrt{P^+} + \hat{\lambda}_{\dot{a}} d_{\dot{a}} - \frac{2P^i (S\sigma^i \hat{\lambda})}{\sqrt{P^+}} + c \left(-4P^- + \frac{4P^i P^i}{P^+} \right) - \frac{1}{2} \hat{\lambda}_{\dot{a}} \hat{\lambda}_{\dot{a}} b. \quad (5.7)$$

Note que é possível reescalonar os fantasmas (b, c) por fatores de P^+ ,

$$b \longrightarrow \frac{b}{P^+}, \quad c \longrightarrow cP^+, \quad (5.8)$$

de tal forma que o fantasma c apareceria multiplicando $P^m P_m$ no operador BRST \hat{Q} . No entanto, para a generalização para a supercorda do procedimento apresentado nesta seção, é conveniente trabalhar com o operador BRST da equação (5.7).

Os geradores de Lorentz, como nos casos anteriores, são construídos sabendo como os campos se transformam por transformações de Lorentz. Por exemplo, um vetor e um espinor de Lorentz têm as seguintes transformações

$$\delta X^m = a^{mn} X_n, \quad \delta \theta^\alpha = \frac{1}{2} a^{mn} (\gamma_{mn} \theta)^\alpha. \quad (5.9)$$

sendo a^{mn} os parâmetros da transformação. Então, a construção dos geradores se faz usando o teorema de Noether. Isto funciona para as componentes N^{+-} , N^{i+} e N^{ij} de N^{mn} , porque a transformação $\delta \theta^\alpha = \frac{1}{2} a^{mn} (\gamma^{mn} \theta)^\alpha$ preserva $(\gamma^+ \theta)_\alpha = 0$. Como no caso de N^{i-} isto não acontece, alguns campos devem se transformar de forma diferente da usual para que preservem a condição do semi-*gauge* de cone de luz. Os campos S_a , b e c se transformam da seguinte forma por rotações de N^{i-} :

$$\begin{aligned}
\delta S_a &= -\frac{(a_{i-}P^i)S_a}{P^+} + \frac{a_{i-}\sigma_{\dot{a}\dot{a}}^i(S\sigma^j)_{\dot{a}}P^j}{P^+} + \frac{a_{i-}b(\sigma^i\hat{\lambda})_a}{2\sqrt{P^+}}, \\
\delta b &= -\frac{2a_{i-}bP^i}{P^+}, \\
\delta c &= -\frac{a_{i-}(S\sigma^i\hat{\lambda})}{2\sqrt{P^+}} + \frac{2a_{i-}cP^i}{P^+}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Sabendo estas transformações, o procedimento para construir N^{i-} é o mesmo usado para construir as outras componentes. Os geradores de Lorentz são

$$\begin{aligned}
N^{+-} &= -ix^+P^- + ix^-P^+ + \theta_a p_a - \theta_{\dot{a}} p_{\dot{a}} + \hat{\lambda}_a \hat{w}_a - \hat{\lambda}_{\dot{a}} \hat{w}_{\dot{a}} - 2bc, \\
N^{i+} &= -ix^iP^+ + ix^+P^i - (p\sigma^i\theta) + (\hat{w}\sigma^i\hat{\lambda}), \\
N^{ij} &= -ix^iP^j + ix^jP^i + \frac{1}{2}(\theta\sigma^{ij}p) + \frac{1}{2}(\theta\bar{\sigma}^{ij}p) + \frac{1}{2}(\hat{\lambda}\sigma^{ij}\hat{w}) + \frac{1}{2}(\hat{\lambda}\bar{\sigma}^{ij}\hat{w}) - \frac{1}{4}(S\sigma^{ij}S), \\
N^{i-} &= -ix^iP^- + ix^-P^i + \frac{b(S\sigma^i\hat{\lambda})}{2\sqrt{P^+}} - \frac{(S\sigma^i)_{\dot{a}}(S\sigma^j)_{\dot{a}}P^j}{2P^+} \\
&\quad + (\theta\sigma^i p) + (\hat{\lambda}\sigma^i\hat{w}) - \frac{2bcP^i}{P^+}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Eles obedecem à álgebra de Lorentz, exceto pelo comutador de N^{i-} com ele mesmo, que fecha a álgebra a menos de uma transformação BRST em estados na camada de massa:

$$[N^{i-}, N^{j-}] = \left[\hat{Q}, -\frac{b(S\sigma^i)_{\dot{a}}(S\sigma^j)_{\dot{a}}}{P^+} \right]. \tag{5.12}$$

A construção dos geradores de Lorentz mostra que, apesar da condição $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$ quebrar a invariância de Lorentz manifesta da teoria, esta ainda continua sendo invariante.

Agora vamos mostrar que a cohomologia do operador BRST \hat{Q} é equivalente à cohomologia do operador BRST de espinores puros com a condição $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$. Para mostrar a equivalência das cohomologias de \hat{Q} e $Q = \lambda^\alpha d_\alpha$ com λ^α sendo um espinor puro, primeiro vamos mostrar que a cohomologia de \hat{Q} é equivalente à cohomologia do operador BRST

$$Q' = \hat{\lambda}_a \hat{d}_a + \lambda_{\dot{a}} \hat{d}_{\dot{a}}, \tag{5.13}$$

num espaço de Hilbert independente dos fantasmas (b, c) , e λ_a deve obedecer $\lambda_a \lambda_a = 0$. Para isto, vamos supor que um estado V está na cohomologia de Q' ; então V é aniquilado pelo operador

$$Q'' = \widehat{\lambda}_a \widehat{d}_a + \widehat{\lambda}_a \widehat{d}_a, \quad (5.14)$$

a menos de termos proporcionais a $\widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a$, ou seja,

$$Q'' V = \widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a W, \quad (5.15)$$

para algum estado W . O operador Q'' é nilpotente a menos de termos proporcionais a $\widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a$:

$$(Q'')^2 = \frac{2\widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a P^m P_m}{P^+}. \quad (5.16)$$

A equação acima e (5.15) implicam que

$$Q'' W = \frac{2P^m P_m V}{P^+}, \quad (5.17)$$

que por sua vez implica que o estado $\widehat{V} = V + 2cW$ é aniquilado por \widehat{Q} :

$$\begin{aligned} \widehat{Q}\widehat{V} &= Q'' V - 2cQ'' W + \left(\frac{4cP^m P_m}{P^+}\right) V - \left(\frac{\widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a b}{2}\right) 2cW \\ &= \widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a W - 4c \left(\frac{P^m P_m V}{P^+}\right) + \left(\frac{4cP^m P_m}{P^+}\right) V - \widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a W = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Além disto, se o estado V é BRST-trivial a menos de termos proporcionais a $\widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a$:

$$V = Q'' \Omega + \widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a Y, \quad (5.19)$$

para quaisquer estados Y e Ω , então o estado $\widehat{V} = V + 2cW = \widehat{Q}(\Omega - 2cY)$ também é BRST-trivial. Portanto, qualquer estado na cohomologia de Q' está na cohomologia de \widehat{Q} , num espaço de Hilbert independente de (b, c) .

Para mostrar que qualquer estado na cohomologia de \widehat{Q} está na cohomologia de Q' , vamos supor um estado \widehat{V} que está na cohomologia de \widehat{Q} ; além disto, o fantasma b é escolhido para aniquilar o vácuo. Portanto, um estado geral que está na cohomologia de \widehat{Q} pode ser escrito como

$$\widehat{V} = V + cW, \quad (5.20)$$

para quaisquer estados V e W . Então

$$\widehat{Q}V = \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_a\widehat{\lambda}_a W, \quad (5.21)$$

implica que $Q'V = 0$ no espaço de Hilbert reduzido (ou seja, independente de (b, c) e onde $\lambda_a\lambda_a = 0$). E se \widehat{V} é um estado BRST-trivial com relação a \widehat{Q} , ou seja,

$$\widehat{V} = \widehat{Q}\Lambda, \quad (5.22)$$

para $\Lambda = \Omega + cY$, então

$$V = \widehat{Q}\Omega - \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_a\widehat{\lambda}_a Y, \quad (5.23)$$

ou seja, $V = Q'\Omega$ no espaço de Hilbert reduzido. Portanto, as cohomologias de \widehat{Q} e Q' são equivalentes.

Agora, será mostrado que a cohomologia da carga Q' é equivalente à cohomologia do operador BRST de espinores puros $Q = \lambda^\alpha d_\alpha$ num espaço de Hilbert independente de S_a , e onde λ^α é um espinor puro. Para isto, vamos definir um espinor antiquiral r_a que satisfaz $r_a\lambda_a = 1$ e $r_a r_a = 0$. Usando este espinor, podemos separar os campos S_a e $\widehat{\lambda}_a$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_a &= S_a^1 + S_a^2, \\ \widehat{\lambda}_a &= \widehat{\lambda}_a^1 + \widehat{\lambda}_a^2, \end{aligned} \quad (5.24)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 S_a^1 &= \frac{1}{2}(\sigma^j \lambda)_a (S \sigma^j r), \\
 S_a^2 &= \frac{1}{2}(\sigma^j r)_a (S \sigma^j \lambda), \\
 \widehat{\lambda}_a^1 &= \frac{1}{2}(\sigma^j \lambda)_a (\widehat{\lambda} \sigma^j r), \\
 \widehat{\lambda}_a^2 &= \frac{1}{2}(\sigma^j r)_a (\widehat{\lambda} \sigma^j \lambda),
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Também precisamos exigir que os estados físicos só dependam de $r_{\dot{a}}$ na combinação $(\sigma^i r)_a (\sigma^i \lambda)_b$. Isto é necessário porque se os estados pudessem depender arbitrariamente de $r_{\dot{a}}$, a cohomologia se tornaria trivial após sua inclusão; por exemplo, $QV = 0$ implica que $Q(\theta^{\dot{a}} r_{\dot{a}} V) = V$.

Os campos definidos em (5.25) obedecem às seguintes relações de anticomutação:

$$\begin{aligned}
 \{S_a^1, S_b^2\} &= \frac{1}{2}(\sigma^i \lambda)_a (\sigma^i r)_b, \\
 \{S_a^1, S_b^1\} &= \{S_a^2, S_b^2\} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

O operador BRST Q' , em termos destes novos campos, é escrito como

$$Q' = \widehat{\lambda}_a^1 d_a + \widehat{\lambda}_a^2 d_a + 2\widehat{\lambda}_a^1 S_a^2 \sqrt{P^+} + 2\widehat{\lambda}_a^2 S_a^1 \sqrt{P^+} + \lambda_{\dot{a}} d_{\dot{a}} - \frac{2(S^2 \sigma^i \lambda) P^i}{\sqrt{P^+}}. \tag{5.27}$$

Vamos fazer uma transformação de similaridade em Q' :

$$\begin{aligned}
 Q' &\longrightarrow e^{-\frac{d_a S_a^2}{2\sqrt{P^+}}} Q' e^{+\frac{d_a S_a^2}{2\sqrt{P^+}}} \\
 &= \lambda_{\dot{a}} d_{\dot{a}} + \widehat{\lambda}_a^1 d_a + 2\widehat{\lambda}_a^2 S_a^1 \sqrt{P^+},
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

onde usamos

$$e^{-A}Qe^A = Q + [Q, A] + \frac{1}{2!}[Q, [Q, A]] + \frac{1}{3!}[Q, [Q, [Q, A]]] + \dots \quad (5.29)$$

E pode-se ver que $Q' = \lambda^\alpha d_\alpha + 2\widehat{\lambda}_a^2 S_a^1 \sqrt{P^+}$, sendo λ^α um espinor puro definido como

$$[\lambda_{\dot{a}}, \lambda_a] = [\lambda_{\dot{a}}, \widehat{\lambda}_a^1]. \quad (5.30)$$

Pelo argumento quarteto para $\widehat{\lambda}_a^2$, \widehat{w}_a^1 , S_a^1 e S_a^2 , temos que estados do tipo

$$F = f\widehat{\lambda}_a^2 \sqrt{P^+}, \quad G = gS_a^1 \sqrt{P^+}, \quad (5.31)$$

são BRST-triviais com relação a Q' pois

$$F = Q' \left(\frac{f}{2} S_a^2 \right), \quad G = Q' \left(\frac{g}{2} \widehat{w}_a^1 \right). \quad (5.32)$$

Já estados do tipo

$$H = hw_a^1, \quad J = jS_a^2, \quad (5.33)$$

não estão na cohomologia de Q' pois

$$Q'H = 2hS_a^1 \sqrt{P^+} \neq 0, \quad Q'J = 2j\widehat{\lambda}_a^2 \sqrt{P^+} \neq 0. \quad (5.34)$$

Portanto, as cohomologias de Q' e $Q = \lambda^\alpha d_\alpha$ são equivalentes num espaço de Hilbert independente de $\widehat{\lambda}_a^2$, \widehat{w}_a^1 , S_a^1 e S_a^2 , sendo λ^α um espinor puro.

Finalmente, a ação de Brink-Schwarz para a superpartícula é equivalente à ação

$$S = \int d\tau \left(\dot{x}^m P_m - \frac{1}{2} P^m P_m + i\dot{\theta}^\alpha p_\alpha + i\dot{\lambda}^\alpha w_\alpha \right), \quad (5.35)$$

junto com o operador BRST $Q = \lambda^\alpha d_\alpha$ e $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$, a condição de espinor puro. Apesar desta derivação da equivalência entre a superpartícula de Brink-Schwarz e a superpartícula do formalismo de espinores puros não ser invariante de Lorentz manifesta, o resultado final

é manifestamente covariante. Usando procedimento análogo, mostraremos, na próxima seção, que a ação de Green-Schwarz para a supercorda é equivalente à ação de espinores puros para a supercorda.

5.2 Equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda

A demonstração da equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda segue procedimento análogo ao apresentado na seção anterior. Primeiro, partimos da ação de Green-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz, e incluímos um par de variáveis fermiônicas $(p_\alpha, \theta^\alpha)$, sendo p_α o momento conjugado ao espinor de $SO(9,1)$ θ^α . Este par de variáveis fermiônicas não está relacionado a S_a . A ação, com as novas variáveis, é

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + \frac{1}{2} S_a \bar{\partial} S_a + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha \right]. \quad (5.36)$$

Feito isto, definimos

$$d_\alpha = p_\alpha + (\theta \gamma^m)_\alpha (2\partial X_m + (\theta \gamma_m \partial \theta)), \quad (5.37)$$

que satisfazem a álgebra

$$d_\alpha(y) d_\beta(z) \longrightarrow \frac{4\gamma_{\alpha\beta}^m \Pi_m}{y-z}. \quad (5.38)$$

A partir de d_α , construímos as quantidades \widehat{d}_α , que são os geradores da nova invariância de *gauge* decorrente da inclusão das variáveis $(\theta^\alpha, p_\alpha)$. Escrevendo \widehat{d}_α em notação $SO(8)$, temos

5.2. Equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda

70

$$\begin{aligned}\widehat{d}_a &= d_a + 2S_a\sqrt{\Pi^+}, \\ \widehat{d}_{\dot{a}} &= d_{\dot{a}} - \frac{2\Pi^i(S\sigma^i)_{\dot{a}}}{\sqrt{\Pi^+}} + \frac{(S\sigma^{jk}S)(\bar{\sigma}^{jk}\partial\theta)_{\dot{a}}}{4\Pi^+} - \frac{4\partial^2\theta_{\dot{a}}}{\Pi^+} + \frac{2\partial\Pi^+\partial\theta_{\dot{a}}}{(\Pi^+)^2},\end{aligned}\quad (5.39)$$

sendo que a, \dot{a} variam de 1 a 8, Π^i , Π^+ e Π^- são componentes de Π^m e

$$\begin{aligned}\sigma_{a\dot{a}}^i\sigma_{b\dot{a}}^j + \sigma_{a\dot{a}}^j\sigma_{b\dot{a}}^i &= 2\delta^{ij}\delta_{ab}, \\ \sigma_{ab}^{jk} &= \frac{1}{2}(\sigma_{a\dot{a}}^j\sigma_{b\dot{a}}^k - \sigma_{a\dot{a}}^k\sigma_{b\dot{a}}^j), \\ \bar{\sigma}_{\dot{a}\dot{b}}^{jk} &= \frac{1}{2}(\sigma_{a\dot{a}}^j\sigma_{ab}^k - \sigma_{a\dot{a}}^k\sigma_{ab}^j),\end{aligned}\quad (5.40)$$

são matrizes de Dirac 8×8 que aparecem em $\gamma_{\alpha\beta}^i$ quando escrita na forma de bloco:

$$\gamma_{\alpha\beta}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{a\dot{a}}^i \\ \sigma_{b\dot{b}}^i & 0 \end{pmatrix}.\quad (5.41)$$

A construção do vínculo \widehat{d}_α só pôde ser feita na notação $SO(8)$; no entanto, como ficará claro no fim da demonstração, o resultado final será invariante de Lorentz. A álgebra de primeira classe é dada por

$$\begin{aligned}\widehat{d}_{\dot{a}}(y)\widehat{d}_{\dot{b}}(z) &\longrightarrow \frac{\widetilde{T}(z)\delta_{\dot{a}\dot{b}}}{y-z}, \\ \widehat{d}_{\dot{a}}(y)\widehat{d}_b(z) &\longrightarrow \text{regular}, \\ \widehat{d}_a(y)\widehat{d}_{\dot{b}}(z) &\longrightarrow \text{regular},\end{aligned}\quad (5.42)$$

sendo

$$\begin{aligned}\widetilde{T} &= -4\Pi^- + \frac{8S_a\partial\theta_a}{\sqrt{\Pi^+}} - \frac{8\Pi^i(S\sigma^i\partial\theta)}{(\Pi^+)^{3/2}} - \frac{2S_a\partial S_a}{\Pi^+} + \frac{4\Pi^i\Pi^i}{\Pi^+} \\ &\quad + \frac{4(S\sigma^i\partial\theta)(S\sigma^i\partial\theta)}{(\Pi^+)^2} - \frac{16\partial^2\theta_{\dot{c}}\partial\theta_{\dot{c}}}{(\Pi^+)^2} - \frac{2\partial^2(\log\Pi^+)}{\Pi^+},\end{aligned}\quad (5.43)$$

que também é uma quantidade de primeira classe:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}(y)\tilde{T}(z) &\longrightarrow \text{regular} , \\
 \tilde{T}(y)\hat{d}_{\dot{a}}(z) &\longrightarrow \text{regular} , \\
 \tilde{T}(y)\hat{d}_a(z) &\longrightarrow \text{regular} .
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Os seguintes OPE's foram usados nestes cálculos:

$$\begin{aligned}
 d_a(y)d_b(z) &\longrightarrow -\frac{4\delta_{ab}\Pi^+}{y-z} , \\
 d_a(y)d_{\dot{a}}(z) &\longrightarrow \frac{4\sigma_{a\dot{a}}^i\Pi^i}{y-z} , \\
 d_{\dot{a}}(y)d_{\dot{b}}(z) &\longrightarrow -\frac{4\delta_{\dot{a}\dot{b}}\Pi^-}{y-z} , \\
 d_a(y)\Pi^+(z) &\longrightarrow \text{regular} , \\
 d_a(y)\Pi^-(z) &\longrightarrow \frac{4\partial\theta_a}{y-z} , \\
 d_a(y)\Pi^i(z) &\longrightarrow \frac{2(\sigma^i\partial\theta)_a}{y-z} , \\
 d_{\dot{a}}(y)\Pi^+(z) &\longrightarrow \frac{4\partial\theta_{\dot{a}}}{y-z} , \\
 d_{\dot{a}}(y)\Pi^-(z) &\longrightarrow \text{regular} , \\
 d_{\dot{a}}(y)\Pi^i(z) &\longrightarrow \frac{2(\sigma^i\partial\theta)_{\dot{a}}}{y-z} .
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Como o sistema só apresenta vínculos de primeira classe, podemos proceder com o método BRST padrão. A ação deve incluir fantasmas anticomutantes para o vínculo \tilde{T} e fantasmas comutantes para \hat{d}_a e $\hat{d}_{\dot{a}}$:

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + \frac{1}{2} S_a \bar{\partial} S_a + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + \bar{\partial} \hat{\lambda}^\alpha \hat{w}_\alpha + b \bar{\partial} c \right] , \tag{5.46}$$

sendo (b, c) o par de fantasmas anticomutantes para o vínculo bosônico \tilde{T} , e $(\hat{\lambda}^\alpha, \hat{w}_\alpha)$ o par de fantasmas espinoriais comutantes para os vínculos fermiônicos \hat{d}_a e $\hat{d}_{\dot{a}}$. Note que não há restrições sobre o fantasma $\hat{\lambda}^\alpha$. O operador BRST, escrito em notação $SO(8)$, é

5.2. Equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda

72

$$\widehat{Q} = \int dz \left(c\widetilde{T} + \widehat{\lambda}_a \widehat{d}_a + \widehat{\lambda}_a \widehat{d}_a - \frac{1}{2} \widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a b \right). \quad (5.47)$$

Como no caso da superpartícula, podemos reescalonar os fantasmas b e c da seguinte forma:

$$b \longrightarrow \frac{b}{\Pi^+}, \quad c \longrightarrow c\Pi^+. \quad (5.48)$$

Fazendo esta redefinição, c multiplicaria o tensor de energia momento usual no operador BRST. Este procedimento pode ser feito, no nível quântico, da seguinte forma:

$$\widehat{Q} \longrightarrow e^{-\int dz bc \log \Pi^+} \widehat{Q} e^{+\int dz bc \log \Pi^+} = 4 \int dz (cT_m + bc\partial c + \dots), \quad (5.49)$$

sendo $\int dz (cT_m + bc\partial c)$ o operador BRST que aparece no capítulo 4 para a ação de Green-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz, e (...) são termos que envolvem as variáveis $(\theta^\alpha, p_\alpha)$ e $(\widehat{\lambda}^\alpha, \widehat{w}_\alpha)$. No entanto, para mostrar a equivalência entre \widehat{Q} e o operador BRST de espinores puros, é mais conveniente não reescalonar b e c , deixando \widehat{Q} na forma da equação (5.47).

O tensor de energia-momento usual pode ser obtido fazendo

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \widehat{Q}, \left(\frac{1}{4} b\Pi^+ - \widehat{w}_\alpha \partial \theta^\alpha \right) \right\} \\ &= \Pi^m \Pi_m - \frac{1}{2} S_a \partial S_a - d_\alpha \partial \theta_\alpha - \widehat{w}_\alpha \partial \widehat{\lambda}^\alpha - b\partial c - \frac{1}{2} \partial^2 (\log \Pi^+). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Portanto, a quantidade $\frac{1}{4} b\Pi^+ - \widehat{w}_\alpha \partial \theta^\alpha$ faz o papel do fantasma b usual. Novamente, o termo $-\frac{1}{2} \partial^2 (\log \Pi^+)$ que aparece acima é necessário para manter as invariâncias conforme e de Lorentz no nível quântico *. Usando os OPE's de X^m , S_a e (5.45), é fácil verificar que T tem carga central igual a zero.

*Muitos artigos discutem anomalias da supercorda de GS no semi-*gauge* de cone de luz [27]. No entanto, não encontramos artigos que discutam este assunto usando o método BRST.

5.2. Equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda 73

Apesar da quebra da invariância de Lorentz manifesta pela imposição da condição de *gauge* $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$, a ação (5.46) ainda tem simetria de Lorentz. Como nos casos anteriores, os geradores de Lorentz N^{ij} , N^{+-} e N^{i+} são construídos de maneira canônica, exceto por N^{i-} que, se considerarmos as transformações usuais de S_a , b e c , não preservará a condição do semi-*gauge* de cone de luz. Portanto, estes campos devem transformar-se por N^{i-} como

$$\begin{aligned}
\delta S_a &= \frac{a_{i-}\sigma_{a\hat{a}}^i(S\sigma^j)_{\hat{a}}\Pi^j}{\Pi^+} - \frac{a_{i-}S_a\Pi^i}{\Pi^+} - \frac{a_{i-}\sigma_{a\hat{a}}^i(S\sigma^j)_{\hat{a}}(S\sigma^j\partial\theta)}{(\Pi^+)^{3/2}} + \frac{2a_{i-}S_a(S\sigma^i\partial\theta)}{(\Pi^+)^{3/2}} \\
&+ \frac{2a_{i-}(\sigma^i\partial^2\theta)_a}{(\Pi^+)^{3/2}} - \frac{a_{i-}(\sigma^i\partial\theta)_a\partial\Pi^+}{(\Pi^+)^{5/2}} + \frac{a_{i-}b(\sigma^i\hat{\lambda})_a}{2\sqrt{\Pi^+}} - \frac{2a_{i-}bc(\sigma^i\partial\theta)_a}{(\Pi^+)^{3/2}}, \\
\delta b &= \frac{2a_{i-}b(S\sigma^i\partial\theta)}{(\Pi^+)^{3/2}} - \frac{2a_{i-}b\Pi^i}{\Pi^+}, \\
\delta c &= -\frac{a_{i-}(S\sigma^i\hat{\lambda})}{2\sqrt{\Pi^+}} - \frac{2a_{i-}c(S\sigma^i\partial\theta)}{(\Pi^+)^{3/2}} + \frac{2a_{i-}c\Pi^i}{\Pi^+}, \tag{5.51}
\end{aligned}$$

e a parte holomórfica dos geradores de Lorentz é dada por

$$\begin{aligned}
N^{ij} &= -X^i\partial X^j + X^j\partial X^i + \frac{1}{2}(\hat{\lambda}\sigma^{ij}\hat{w}) + \frac{1}{2}(\hat{\lambda}\bar{\sigma}^{ij}\hat{w}) + \frac{1}{2}(\theta\sigma^{ij}p) + \frac{1}{2}(\theta\bar{\sigma}^{ij}p) - \frac{1}{4}(S\sigma^{ij}S), \\
N^{+-} &= -\frac{1}{2}X^+\partial X^- + \frac{1}{2}X^-\partial X^+ + \frac{1}{2}\hat{\lambda}_a\hat{w}_a - \frac{1}{2}\hat{\lambda}_{\hat{a}}\hat{w}^{\hat{a}} + \frac{1}{2}\theta_a p_a - \frac{1}{2}\theta_{\hat{a}} p^{\hat{a}} - bc, \\
N^{i+} &= -X^i\partial X^+ + X^+\partial X^i + (\hat{w}\sigma^i\hat{\lambda}) - (p\sigma^i\theta), \\
N^{i-} &= -X^i\partial X^- + X^-\partial X^i - \frac{(S\sigma^i)_{\hat{a}}(S\sigma^j)_{\hat{a}}\Pi^j}{2\Pi^+} + \frac{(S\sigma^i)_{\hat{a}}(S\sigma^j)_{\hat{a}}(S\sigma^j\partial\theta)}{3(\Pi^+)^{3/2}} + \frac{2(\partial S\sigma^i\partial\theta)}{(\Pi^+)^{3/2}} \\
&- \frac{2(S\sigma^i\partial\theta)\partial\Pi^+}{(\Pi^+)^{5/2}} + \frac{b(S\sigma^i\hat{\lambda})}{2\sqrt{\Pi^+}} + \frac{2bc(S\sigma^i\partial\theta)}{(\Pi^+)^{3/2}} - \frac{2bc\Pi^i}{\Pi^+} \\
&+ (\hat{\lambda}\sigma^i\hat{w}) + (\theta\sigma^i p). \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Novamente, eles obedecem à álgebra de Lorentz exceto pelo comutador de N^{i-} com ele mesmo, que fecha a álgebra a menos de uma transformação de *gauge* em estados na camada de massa:

$$\left[\int dy N^{i-}(y), \int dz N^{j-}(z) \right] = \left[\widehat{Q}, \int dz \left[-\frac{b(S\sigma^i)_{\dot{a}}(S\sigma^j)_{\dot{a}}}{4\Pi^+} \right] (z) \right]. \quad (5.53)$$

Para começar a mostrar que o espectro físico determinado pelos estados na cohomologia de \widehat{Q} é o mesmo que o espectro determinado pelo operador BRST de espinores puros, primeiro vamos mostrar que a cohomologia do operador \widehat{Q} é equivalente à cohomologia do operador

$$Q' = \int dz (\widehat{\lambda}_a \widehat{d}_a + \lambda_{\dot{a}} \widehat{d}_{\dot{a}}), \quad (5.54)$$

sendo que $\lambda_{\dot{a}}$ satisfaz a condição $\lambda_{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}} = 0$. Esta equivalência é mostrada num espaço de Hilbert independente dos fantasmas (b, c) . Para isto, vamos supor um estado V que está na cohomologia de Q' . Este estado é aniquilado pelo operador

$$Q'' = \int dz (\widehat{\lambda}_a \widehat{d}_a + \widehat{\lambda}_{\dot{a}} \widehat{d}_{\dot{a}}), \quad (5.55)$$

a menos de termos proporcionais a $\widehat{\lambda}_{\dot{a}} \widehat{\lambda}_{\dot{a}}$ ou suas derivadas, isto é,

$$Q'' V = \sum_{n=0}^{\infty} \partial^n (\widehat{\lambda}_{\dot{a}} \widehat{\lambda}_{\dot{a}}) W_{(n)}, \quad (5.56)$$

para algum $W_{(n)}$ com n variando de 0 a ∞ . Também é necessário supor que V não tem pólos com o vínculo $\lambda_{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}$, ou seja, este estado só depende de $w_{\dot{a}}$ em combinações que comutem com o vínculo imposto a $\lambda_{\dot{a}}$. Novamente, em analogia com a superpartícula, Q'' será nilpotente a menos de um termo proporcional a $\widehat{\lambda}_{\dot{a}} \widehat{\lambda}_{\dot{a}}$,

$$(Q'')^2 = \int dy \frac{\widetilde{T}(\widehat{\lambda}_{\dot{a}} \widehat{\lambda}_{\dot{a}})}{2}, \quad (5.57)$$

Daí segue que podemos saber como Q'' atua em $W_{(n)}$:

$$Q'' W_{(n)} = \int dy \frac{1}{2} \widetilde{T}(y) V(z) \frac{(y-z)^n}{n!}. \quad (5.58)$$

Usando as informações acima, verifica-se que o estado

$$\widehat{V} = V + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\partial^n c) W_{(n)} \quad (5.59)$$

é aniquilado por \widehat{Q} , ou seja, está na cohomologia de \widehat{Q} . Da mesma forma, se um estado V é BRST-trivial a menos de termos do tipo $\partial^n (\widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a)$,

$$V = Q'' \Omega + \sum_{n=0}^{\infty} \partial^n (\widehat{\lambda}_a \widehat{\lambda}_a) Y_{(n)}, \quad (5.60)$$

para algum $Y_{(n)}$, então \widehat{V} também é BRST-trivial com relação a \widehat{Q} :

$$\widehat{V} = V + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\partial^n c) W_{(n)} = \widehat{Q} \left(\Omega - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\partial^n c) Y_{(n)} \right). \quad (5.61)$$

Desta forma mostrou-se que qualquer estado na cohomologia de Q' está na cohomologia de \widehat{Q} num espaço de Hilbert independente dos fantasmas (b, c) e onde $\lambda_a \lambda_a = 0$.

Para mostrar que qualquer estado que está na cohomologia de \widehat{Q} está na cohomologia de Q' , primeiro é necessário notar que qualquer estado \widehat{V} com número de fantasma um e que está na cohomologia de \widehat{Q} com P^+ não nulo pode ser escrito como

$$\widehat{V} = V + cW, \quad (5.62)$$

para quaisquer V e W independentes de (b, c) . Pode-se mostrar isto lembrando que, no *gauge* de cone luz, a invariância gerada pelos vínculos \widetilde{T} e \widehat{d}_α é usada para eliminar variáveis da teoria, exceto X^j , S_a e o modo zero de X^+ . Assim, o operador de vértice integrado no *gauge* cone de luz depende apenas destas variáveis, ou seja,

$$\int dz V_{LC} = \int dz V_{LC}(X^j, S_a, X_0^+). \quad (5.63)$$

Usando a construção DDF (Del Giudice, Di Vecchia e Fubini)[†], podemos definir um operador de vértice que seja invariante BRST

[†]A construção DDF [28] consiste, em poucas palavras, na construção de operadores que comutam com os operadores de Virasoro e que, quando aplicados sucessivamente no estado de vácuo, fornecem todos os possíveis estados físicos. Estão em correspondência um a um com os modos transversos dos campos.

$$\int dz V_{DDF}(X^j, S_a, X^+, \theta^\alpha),$$

tal que V_{DDF} coincida com V_{LC} quando $\partial X^+ = \theta^\alpha = 0$. Como $\int dz V_{DDF}$ é invariante BRST, então

$$\widehat{Q}V_{DDF} = \partial\widehat{V}, \quad (5.64)$$

para algum \widehat{V} . Da forma do operador BRST \widehat{Q} , concluímos que

$$\widehat{V} = \widehat{\lambda}^\alpha V_\alpha + cW, \quad (5.65)$$

sendo V_α e W os pólos duplos provenientes do OPE de \widehat{d}_α e \widetilde{T} com V_{DDF} , respectivamente. E como

$$\partial(\widehat{Q}\widehat{V}) = \widehat{Q}\widehat{Q}V_{DDF} = 0, \quad (5.66)$$

e não há campos da folha de mundo constantes, isto implica que $\widehat{Q}\widehat{V} = 0$. Portanto, $\widehat{V} = \widehat{\lambda}^\alpha V_\alpha + cW$ é um operador de vértice de número de fantasma um que está na cohomologia BRST, e que representa o estado no cone de luz $\int dz V_{LC}$.

Se $\widehat{Q}(V + cW) = 0$, isto implica que $Q''V = \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_a\widehat{\lambda}_a W$, e portanto $Q'V = 0$ no espaço de Hilbert reduzido. Por outro lado, se $\widehat{V} = \widehat{Q}\Lambda$, sendo

$$\Lambda = \Omega + cY,$$

então isto implica que $V = Q''\Omega - \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_a\widehat{\lambda}_a Y$, e $V = Q'\Omega$ no espaço de Hilbert reduzido. Portanto, as cohomologias de \widehat{Q} e Q' são equivalentes para estados com momento não nulo P^+ . †

†A prova da equivalência não vale para estados com momento nulo pois estes estados não podem ser descritos por operadores de vértice no cone de luz.

5.2. Equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda 77

Para completar a demonstração, é necessário mostrar a equivalência entre as cohomologias de Q' e do operador BRST do formalismo de espinores puros $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$ com a condição $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$. Para isto, é conveniente definir um espinor antiquiral $r_{\dot{a}}$ que satisfaz $r_{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 1$ e $r_{\dot{a}}r_{\dot{a}} = 0$. Novamente, como na superpartícula, os estados físicos só poderão depender de $r_{\dot{a}}$ na combinação $(\sigma^i r)_{\dot{a}}(\sigma^i \lambda)_{\dot{b}}$, de forma que a cohomologia não se torne trivial.

Podemos separar os campos S_a e $\widehat{\lambda}_a$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_a &= S_a^1 + S_a^2, \\ \widehat{\lambda}_a &= \widehat{\lambda}_a^1 + \widehat{\lambda}_a^2, \end{aligned} \tag{5.67}$$

sendo

$$\begin{aligned} S_a^1 &= \frac{1}{2}(\sigma^j \lambda)_a (S \sigma^j r), \\ S_a^2 &= \frac{1}{2}(\sigma^j r)_a (S \sigma^j \lambda), \\ \widehat{\lambda}_a^1 &= \frac{1}{2}(\sigma^j \lambda)_a (\widehat{\lambda} \sigma^j r), \\ \widehat{\lambda}_a^2 &= \frac{1}{2}(\sigma^j r)_a (\widehat{\lambda} \sigma^j \lambda). \end{aligned} \tag{5.68}$$

Estes campos têm os seguintes OPE's não nulos:

$$\begin{aligned} S_a^1(y) S_b^2(z) &\longrightarrow \frac{(\sigma^i \lambda)_a (\sigma^i r)_b}{2(y-z)}, \\ S_a^1(y) S_b^1(z) &= S_a^2(y) S_b^2(z) \longrightarrow \text{regular}. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Escrevendo Q' explicitamente em termos dos novos campos, temos

5.2. Equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda

78

$$\begin{aligned}
Q' &= \int dz(\lambda_{\dot{a}}\widehat{d}_{\dot{a}} + \widehat{\lambda}_a d_a) \\
&= \int dz(\lambda_{\dot{a}}d_{\dot{a}} - \frac{2\Pi^i(S^2\sigma^i\lambda)}{\sqrt{\Pi^+}} - \frac{2 : S_a^1 S_a^2 : \lambda_{\dot{a}}\partial\theta_{\dot{a}}}{\Pi^+} + \frac{(S^2\sigma^i\lambda)(S^2\sigma^i\partial\theta)}{\Pi^+} \\
&\quad - \frac{4\partial^2\theta_{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}}{\Pi^+} + \frac{2\partial\Pi^+\partial\theta_{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}}{(\Pi^+)^2} + \widehat{\lambda}_a^1 d_a + \widehat{\lambda}_a^2 d_a \\
&\quad + 2\widehat{\lambda}_a^1 S_a^2 \sqrt{\Pi^+} + 2\widehat{\lambda}_a^2 S_a^1 \sqrt{\Pi^+}), \tag{5.70}
\end{aligned}$$

sendo que $::$ denota ordenamento normal, isto é,

$$: S_a^1 S_b^2(z) : \equiv \int dy \frac{S_a^1(y) S_b^2(z)}{y-z}. \tag{5.71}$$

Vamos fazer uma série de transformações de similaridade em Q' para deixá-lo numa forma adequada para mostrar a equivalência. A primeira transformação é

$$\begin{aligned}
Q' &\rightarrow e^{-A} Q' e^A = Q'', \\
A &= \int dz \frac{d_a S_a^2}{2\sqrt{\Pi^+}}, \tag{5.72}
\end{aligned}$$

onde usamos novamente

$$e^{-A} B e^A = B + [B, A] + \frac{1}{2!} [B, [B, A]] + \frac{1}{3!} [B, [B, [B, A]]] + \dots \tag{5.73}$$

O operador BRST resultante Q'' é

$$\begin{aligned}
Q'' &= \int dz(\lambda_{\dot{a}}d_{\dot{a}} - \frac{2 : S_a^1 S_a^2 : \lambda_{\dot{a}}\partial\theta_{\dot{a}}}{\Pi^+} + \frac{4(\partial\theta_{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}})(\partial\lambda_{\dot{b}}r_{\dot{b}})}{\Pi^+} - \frac{2\partial\Pi^+\partial\theta_{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}}{(\Pi^+)^2} \\
&\quad + \widehat{\lambda}_a^1 d_a + 2\widehat{\lambda}_a^2 S_a^1 \sqrt{\Pi^+}). \tag{5.74}
\end{aligned}$$

Uma segunda transformação de similaridade é feita, agora em Q'' :

$$Q'' \rightarrow e^{-A} Q'' e^A = Q'''$$

$$A = \int dz \left(-\frac{\partial \Pi^+}{2\Pi^+} + \frac{1}{2} : S_a^1 S_a^2 : \log \Pi^+ + \frac{4(\partial \theta_{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}})(\partial \theta_{\dot{b}} r_{\dot{b}})}{\Pi^+} \right). \quad (5.75)$$

E por fim obtemos a forma desejada, o operador transformado Q''' :

$$Q''' = \int dz (\lambda_{\dot{a}} d_{\dot{a}} + \widehat{\lambda}_{\dot{a}}^1 d_{\dot{a}} + 2\widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2 S_a^1). \quad (5.76)$$

Em Q''' , o último termo vem de uma série de potências em Π^+ :

$$\begin{aligned} 2\widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2 S_a^1 &= 2\widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2 S_a^1 \sqrt{\Pi^+} \left[1 - \frac{\log \Pi^+}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\log \Pi^+}{2} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\log \Pi^+}{2} \right)^3 + \dots \right] \\ &= 2\widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2 S_a^1 \sqrt{\Pi^+} \exp \left(-\frac{\log \Pi^+}{2} \right) \\ &= 2\widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2 S_a^1 \sqrt{\Pi^+} \exp(\log(\Pi^+)^{-1/2}) = 2\widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2 S_a^1. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Podemos escrever Q''' como

$$Q''' = \int dz (\lambda^\alpha d_\alpha + 2\widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2 S_a^1), \quad (5.78)$$

sendo λ^α um espinor puro definido por

$$[\lambda_{\dot{a}}, \lambda_a] = [\lambda_{\dot{a}}, \widehat{\lambda}_{\dot{a}}^1]. \quad (5.79)$$

Pelo argumento quarteto para S_a^1 , $\widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2$ e seus momentos conjugados S_a^2 e $\widehat{w}_{\dot{a}}^1$, temos que estados do tipo

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{(n)} \partial^n \widehat{\lambda}_{\dot{a}}^2}{n!}, \quad G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{(n)} \partial^n S_a^1}{n!}, \quad (5.80)$$

são BRST-triviais com relação a Q''' pois

5.2. Equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda

80

$$\begin{aligned} Q''' \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{(n)} \partial^n S_a^2}{2} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{(n)} \partial^n \widehat{\lambda}_a^2}{n!}, \\ Q''' \left(- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{(n)} \partial^n \widehat{w}_a^1}{2} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{(n)} \partial^n S_a^1}{n!}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

sendo $f_{(n)}$ e $g_{(n)}$ constantes. Já estados do tipo

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} h_{(n)} \partial^n \widehat{w}_a^1, \quad J = \sum_{n=0}^{\infty} j_{(n)} \partial^n S_a^2, \quad (5.82)$$

não estão na cohomologia de Q''' , pois não são aniquilados pelo operador BRST:

$$\begin{aligned} Q''' \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_{(n)} \partial^n \widehat{w}_a^1 \right) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{(n)} \partial^n S_a^1}{n!} \neq 0, \\ Q''' \left(\sum_{n=0}^{\infty} j_{(n)} \partial^n S_a^2 \right) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_{(n)} \partial^n \widehat{\lambda}_a^2}{n!} \neq 0, \end{aligned} \quad (5.83)$$

com $h_{(n)}$ e $j_{(n)}$ sendo constantes. Portanto, a cohomologia de $Q''' = Q + 2 \int dz \lambda_a^2 S_a^1$ é equivalente à cohomologia de $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$ num espaço de Hilbert independente de S_a^1 , $\widehat{\lambda}_a^2$ e seus momentos conjugados S_a^2 e \widehat{w}_a^1 . Para concluir, foi mostrado que a ação de Green-Schwarz para a supercorda é equivalente à ação do formalismo de espinores puros

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + \bar{\partial} \lambda^\alpha w_\alpha + \text{anti-holomorphic terms} \right], \quad (5.84)$$

junto com o operador BRST $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$, e λ^α é um espinor puro. Como no caso da superpartícula, a derivação do operador BRST e da condição de espinor puro a partir da supercorda de Green-Schwarz não é um procedimento em que a invariância de Lorentz é manifesta, mas o resultado final (5.84) é covariante manifesto.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese, mostramos a equivalência entre os formalismos de Green-Schwarz e espinores puros para a supercorda. Derivamos o operador BRST $Q = \int dz \lambda^\alpha d_\alpha$ e o vínculo de espinor puro $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$ a partir da ação de Green-Schwarz no semi-*gauge* de cone de luz com variáveis fermiônicas adicionais, usando argumentos de equivalência de cohomologia dos operadores BRST. Os resultados foram publicados em [14].

No entanto, ainda não temos uma explicação de como funciona, a partir de primeiros princípios, a quantização BRST no formalismo de espinores puros. A relação de equivalência citada no parágrafo anterior não explica a quantização em si, mas apenas mostra como podemos derivar o operador BRST e a condição de espinor puro.

Podemos especular o que seriam explicações possíveis para a quantização neste formalismo. Por exemplo, duas características deste formalismo que não estão presentes no método BRST usual são:

- o fato dos vínculos não se anularem por imposição;
- o vínculo $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$ sobre o fantasma bosônico λ^α .

Em sistemas vinculados, sabemos que os vínculos aparecem no cálculo dos momentos canônicos (vínculos primários) ou na imposição de consistência temporal dos vínculos primários (vínculos secundários). Por exemplo, no primeiro caso temos que o momento

canônico de um sistema vinculado p depende das variáveis do espaço de fase; as equações que relacionam p e as outras variáveis é que são chamadas de vínculos:

$$\phi = p - f(p, q) = 0, \quad (6.1)$$

e a relação acima mostra que eles são vinculados a se anular. Os vínculos definem uma superfície no espaço de fase, a chamada superfície vincular. Esta superfície é importante na determinação dos estados físicos: estes são funções nesta superfície que são invariantes de *gauge*, ou seja, comutam com os vínculos de primeira classe.

Voltando à primeira característica do formalismo de espinores puros, podemos nos perguntar como os estados físicos são definidos neste caso, pois não existe mais uma superfície vincular; além disto, d_α contém não apenas quantidades de primeira classe, mas também de segunda classe. Lembramos que na construção do operador BRST, apenas vínculos de primeira classe são permitidos; por este motivo, há uma equivalência clara entre a quantização de Dirac e a quantização BRST. Com base neste fato, outra pergunta pode ser levantada: que tipo de condição no formalismo de espinores puros faria o papel dos análogos quânticos dos vínculos de primeira classe na quantização de Dirac?

Pelo que foi apresentado nos capítulos 3 e 4, sabemos que este formalismo realmente descreve os estados físicos da superpartícula e da supercorda; portanto, existe uma forma de separar estados físicos de não físicos. Este mecanismo pode ser uma união das duas características acima: apesar de d_α não definir uma superfície vincular, a condição de espinor puro $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$ pode ser o candidato natural a desempenhar este papel. Neste caso, a diferença entre vínculos de primeira e segunda classe pode não ser relevante. Por este motivo, seria importante estudar as propriedades geométricas dos espinores puros e como a condição de espinor puro deve ser interpretada no espaço de fase da teoria. Uma compreensão mais profunda destes aspectos já seria um passo adiante dentro do formalismo.

Outro problema a ser atacado fazendo uso das ferramentas apresentadas nesta tese

é o de mostrar a equivalência entre a formulação padrão da supermembrana em onze dimensões e a formulação construída em termos de espinores puros [29]. A supermembrana é um objeto de interesse para teorias de grande unificação pois acredita-se que ela tenha propriedades relacionadas à teoria M [30], que é uma teoria em onze dimensões espaço-temporais cuja existência se faria sentir no setor não-perturbativo das teorias de supercordas em dez dimensões através de dualidades [3][31].

Apêndice A

Matrizes gama em dez dimensões

Em $D = (9, 1)$, temos dez matrizes reais 32×32 Γ^m , que forma a representação das matrizes gama de Dirac nesta dimensão espaço-temporal. Estas matrizes podem ser expressas como

$$\Gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^m)^{\alpha\dot{\beta}} \\ (\tilde{\sigma}^m)_{\dot{\beta}\gamma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

sendo $\sigma^m = (I, \sigma^\mu, \chi)$ e $\tilde{\sigma}^m = (-I, \sigma^\mu, \chi)$, I é a identidade 16×16 , σ^μ são 8 matrizes simétricas de Dirac 16×16 com elementos fora da diagonal para $D = (8, 0)$, e $\chi = \sigma_1 \dots \sigma_8$, ou seja, a matriz de quiralidade para $D = (8, 0)$. Também devemos definir a matriz de conjugação de carga C :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_\alpha^{\dot{\beta}} \\ c_{\dot{\beta}}^\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

sendo que as matrizes $c_\alpha^{\dot{\beta}}$ e $c_{\dot{\beta}}^\gamma$ são numericamente iguais a $I_{16 \times 16}$ e $-I_{16 \times 16}$, respectivamente e, portanto, um espinor da forma λ^α é quiral e um espinor da forma $\epsilon_{\dot{\beta}}$ é antiquiral.

Nas ações escritas em termos de matrizes gama 32×32 , o termo que aparece é $C\Gamma^m$ que, por cálculo direto, fornece

$$C\Gamma^m = \begin{pmatrix} (\tilde{\sigma}^m)_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -(\sigma^m)^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta}^m & 0 \\ 0 & (\gamma^m)^{\beta\alpha} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde foi usado

$$(\Gamma^m)^T = \begin{pmatrix} 0 & (\tilde{\sigma}^{m,T})_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\sigma^{m,T})^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Nesta tese, usamos apenas as matrizes 16×16 simétricas $\gamma_{\alpha\beta}^m = \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^m$ e $\gamma_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^m = -\sigma_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^m$, e omitimos os pontos porque em dez dimensões não é possível abaixar e levantar índices espinoriais, pois a matriz de conjugação de carga só tem componentes não nulas fora da diagonal.

As matrizes $\gamma_{\alpha\beta}^m$ e $\gamma^{m\alpha\beta}$ obedecem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^{(m} \gamma^{n)\beta\gamma} &= 2\eta^{mn} \delta_{\alpha}^{\gamma}, \\ \gamma_{m(\alpha\beta} \gamma_{\gamma)\delta}^m &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A forma explícita das matrizes gama utilizadas aqui é

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \gamma^{0\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{\alpha\beta}^9 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^{9\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{\alpha\beta}^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\dot{a}a}^i \\ \sigma_{a\dot{a}}^i & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^{i\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\dot{a}a}^i \\ \sigma_{a\dot{a}}^i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Definindo

$$\gamma^{\pm} = \gamma^0 \pm \gamma^9, \quad (\text{A.7})$$

temos também as matrizes na notação de cone de luz:

$$\begin{aligned}\gamma^{+\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{-\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{\alpha\beta}^+ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\alpha\beta}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{+\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{-\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_+^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_-^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Apêndice B

Resolução do vínculo de espinor puro

Para resolver o vínculo de espinor puro $\lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^m \lambda^\beta = 0$ ou equivalentemente $\lambda^T (C\Gamma^m) \lambda = 0$ [10], primeiro vamos combinar as dez matrizes de Dirac Γ^m em termos de cinco operadores de aniquilação a_i e cinco operadores de criação $a^i = a_i^\dagger$, com $i = 1$ até 5 [32]:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(\Gamma^1 + i\Gamma^2), & a_2 &= \frac{1}{2}(\Gamma^3 + i\Gamma^4), & \dots & a_5 = \frac{1}{2}(\Gamma^9 - \Gamma^0), \\ a^1 &= \frac{1}{2}(\Gamma^1 - i\Gamma^2), & a^2 &= \frac{1}{2}(\Gamma^3 - i\Gamma^4), & \dots & a^5 = \frac{1}{2}(\Gamma^9 + \Gamma^0). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Estes operadores satisfazem $\{a_i, a^j\} = \delta_i^j$. Então, definimos o vácuo $|0\rangle$ como sendo aniquilado pelos a_i : $a_i |0\rangle = 0$. Atuando com os operadores a^i obtemos 32 estados $|A\rangle$ com $A = 1$ até 32. Também introduzimos o estado $\langle 0|$ com $\langle 0| a^i = 0$, e atuando com os operadores a_i temos os 32 estados $\langle B|$. Escolhemos os estados $\langle B| = |A\rangle^\dagger$, logo $\langle B|A\rangle = \delta_A^B$. A matriz de conjugação de carga, definida no apêndice A, é dada por

$$C = -\Gamma^2 \Gamma^4 \Gamma^6 \Gamma^8 \Gamma^0 = (a_1 - a^1)(a_2 - a^2) \dots (a_5 - a^5). \quad (\text{B.2})$$

O espinor quiral λ pode ser expandido como

$$|\lambda\rangle = \lambda_+ |0\rangle + \frac{1}{2!} \lambda_{ij} a^j a^i |0\rangle + \frac{1}{4!} \lambda^i \epsilon_{ijklm} a^m a^l a^k a^j |0\rangle, \quad (\text{B.3})$$

e suas dezesseis componentes não nulas são dadas por

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= \langle 0|\lambda\rangle, \quad \lambda_{ij} = \frac{1}{2!} \langle 0|a_i a_j|\lambda\rangle, \\ \lambda^i &= \frac{1}{4!} \epsilon^{ijklm} \langle 0|a_j a_k a_l a_m|\lambda\rangle.\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

Agora estamos prontos para resolver o vínculo de espinor puro, que consiste nas 10 condições abaixo:

$$\begin{aligned}\langle \lambda|Ca^j|\lambda\rangle &= 0, \\ \langle \lambda|Ca_j|\lambda\rangle &= 0.\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Antes, notemos que $\langle A|C|B\rangle \neq 0$ se $A^\dagger B$ é proporcional a $a^1 a^2 a^3 a^4 a^5$ pois $\langle 0|C = \langle 0|a^5 a^4 a^3 a^2 a^1$. Se colocarmos todos os a_j em $\langle A|$ à direita de C , obtemos $\langle 0|CA^\dagger B|0\rangle$, e isto só não se anula uma vez que todos os a^k combinem com os a_k de $\langle 0|C$. Segue então que $\langle 0|Ca^1 a^2 a^3 a^4 a^5|0\rangle = 1$.

Para o primeiro conjunto de vínculos, temos

$$\langle \lambda|Ca^n|\lambda\rangle = \lambda_+ \langle 0|Ca^n|\lambda\rangle + \frac{1}{2} \lambda_{ij} \langle 0|a_i a_j Ca^n|\lambda\rangle + \frac{1}{4!} \lambda^i \epsilon_{ijklm} \langle 0|a_j a_k a_l a_m Ca^n|\lambda\rangle. \quad (\text{B.6})$$

Do primeiro termo, temos

$$\begin{aligned}\lambda_+ \langle 0|Ca^n|\lambda\rangle &= \frac{1}{4!} \lambda_+ \lambda^i \epsilon_{ijklm} \langle 0|Ca^n a^m a^l a^k a^j|0\rangle \\ &= \frac{1}{4!} \lambda_+ \lambda^i \epsilon_{ijklm} \epsilon^{nmklj} = \lambda_+ \lambda^n.\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Como $a_j C = -C a^j$ e $a^j C = -C a_j$, o segundo e terceiro termos fornecem

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \lambda_{ij} \langle 0|a_i a_j Ca^n|\lambda\rangle &= \frac{1}{4} \epsilon^{nijkl} \lambda_{ij} \lambda_{kl}, \\ \frac{1}{4!} \lambda^i \epsilon_{ijklm} \langle 0|a_j a_k a_l a_m Ca^n|\lambda\rangle &= \lambda_+ \lambda^n.\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

Como (B.6) deve ser zero, temos que

$$2\lambda_+\lambda^a + \frac{1}{4}\epsilon^{abcde}\lambda_{bc}\lambda_{de} = 0, \quad (\text{B.9})$$

que é resolvido se

$$\lambda^a = -\frac{1}{8}e^{-s}\epsilon^{abcde}u_{bc}u_{de}, \quad (\text{B.10})$$

com $\lambda_+ = e^s$ e $\lambda_{ab} = u_{ab}$. O segundo conjunto de vínculos também é satisfeito pela solução acima. Esta é a parametrização de λ^α que se encontra na seção (2.3).

Bibliografia

- [1] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, 1987.
- [2] J. Polchinski, *String theory*, Cambridge University Press, 1998.
- [3] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85, hep-th/9503124.
- [4] F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, *Supersymmetry, supergravity theories, and the dual spinor model*, *Nucl. Phys.* **B122** (1977) 253.
- [5] L. Brink, J. H. Schwarz, *Quantum superspace*, *Phys. Lett.* **B100** (1981) 310.
- [6] W. Siegel, *Classical superstring mechanics*, *Nucl. Phys.* **B263** (1986) 93.
- [7] F. Essler, M. Hatsuda, E. Laenen, W. Siegel, J. Yamron, *Covariant quantization of the first ilk superparticle*, *Nucl. Phys.* **B364** (1991) 67.
- [8] S. Carlip, *Heterotic string path integrals with the Green-Schwarz covariant action*, *Nucl. Phys.* **B284** (1987) 365;
R. Kallosh, A. Morozov, *Green-Schwarz action and loop calculations for superstring*, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 1943.
- [9] M. B. Green, J. H. Schwarz, *Supersymmetrical dual string theory*, *Nucl. Phys.* **B181** (1981) 502.

- [10] N. Berkovits, *Super-Poincaré covariant quantization of the superstring*, *J. High Energy Phys.* **04** (2000) 018, hep-th/0001035.
- [11] N. Berkovits, *Multiloop amplitudes and vanishing theorems using the pure spinor formalism for the superstring*, *J. High Energy Phys.* **09** (2004) 047, hep-th/0406055.
- [12] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Renormalization of the abelian Higgs-Kibble model*, *Commun. Math. Phys.* **42** (1975) 127;
C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Renormalization of gauge theories*, *Ann. Phys.* **98** (1976) 287;
I. V. Tyutin, *Gauge invariance in field theory and statistical mechanics*, Lebedev preprint FIAN (1975) n° 39.
- [13] N. Berkovits, *ICTP lectures on covariant quantization of the superstring*, hep-th/0209059.
- [14] N. Berkovits, D. Z. Marchioro, *Relating the Green-Schwarz and pure spinor formalisms for the superstring*, *J. High Energy Phys.* **01** (2005) 018, hep-th/0412198.
- [15] N. Berkovits, *Relating the RNS and pure spinor formalism for the superstring*, *J. High Energy Phys.* **08** (2001) 026, hep-th/0104247.
- [16] L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vecchia, P. S. Howe, *Local supersymmetry for spinning particles*, *Phys. Lett.* **B64** (1976) 435.
- [17] N. Berkovits, *Covariant quantization of the superparticle using pure spinors*, *J. High Energy Phys.* **09** (2001) 016, hep-th/0105050.
- [18] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press, 1992.
- [19] P. H. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, Les Houches Summer School 1988, hep-th/9108028.

- [20] D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, *Conformal invariance, supersymmetry and string theory*, *Nucl. Phys.* **B271** (1986) 93.
- [21] J. Zinn-Justin, *Trends in elementary particle theory*, eds. H. Rollnik e K. Dietz, Springer-Verlag, Berlin, 1975;
- I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Gauge algebra and quantization*, *Phys. Lett.* **B102** (1981) 27;
- I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Feynman rules for reducible gauge theories*, *Phys. Lett.* **B120** (1983) 166;
- I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Quantization of gauge theories with linearly dependent generators*, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2567;
- I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Closure of the gauge algebra, generalized Lie equations and Feynman rules*, *Nucl. Phys.* **B234** (1984) 106;
- I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Existence theorem for gauge algebra*, *J. Math. Phys.* **26** (1985) 172.
- [22] S. Vandoren, *Covariant quantisation in the antifield formalism*, tese de doutorado, Leuven (1995), hep-th/9601013.
- [23] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.
- [24] W. Siegel, *Superfields in higher dimensional spacetime*, *Phys. Lett.* **B80** (1979) 220;
- E. Witten, *Twistor-like transform in ten dimensions*, *Nucl. Phys.* **B266** (1986) 245.
- [25] N. Berkovits, O. Chandia, *Massive superstring vertex operator in $D = 10$ superspace*, *J. High Energy Phys.* **08** (2002) 040, hep-th/0204121.
- [26] N. Berkovits, M. Hatsuda, W. Siegel, *The big picture*, *Nucl. Phys.* **B371** (1992) 434, hep-th/9108021.
- [27] U. Kraemmer, A. Rebhan, *Anomalous anomalies in the Carlip-Kallosh quantization of the Green-Schwarz superstring*, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 255;

- F. Bastianelli, P. van Nieuwenhuizen, A. Proeyen, *Superstring anomalies in the semi-light cone gauge*, *Phys. Lett.* **B253** (1991) 67;
- M. Porrati, P. van Nieuwenhuizen, *Absence of world-sheet and space-time anomalies in the semi-covariantly quantized heterotic string*, *Phys. Lett.* **B273** (1991) 47.
- [28] E. Del Giudice, P. Di Vecchia, S. Fubini, *General properties of the dual resonance model*, *Ann. Phys.* **70** (1972) 378.
- [29] N. Berkovits, *Towards covariant quantization of the supermembrane*, *J. High Energy Phys.* **09** (2002) 051, hep-th/0201151.
- [30] J. Hughes, J. Liu, J. Polchinski, *Supermembranes*, *Phys. Lett.* **B180** (1986) 370;
- E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. K. Townsend, *Supermembranes and eleven-dimensional supergravity*, *Phys. Lett.* **B189** (1987) 75;
- M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami, K. S. Stelle, *Superstrings in $D=10$ from supermembranes in $D=11$* , *Phys. Lett.* **B191** (1987) 70;
- M. J. Duff, J. X. Lu, *Duality rotations in membrane theory*, *Nucl. Phys.* **B347** (1990) 394.
- [31] C. M. Hull, P. K. Townsend, *Unity of superstring dualities*, *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 109, hep-th/9410167;
- P. K. Townsend, *The eleven-dimensional supermembrane revisited*, *Phys. Lett.* **B350** (1995) 184, hep-th/9501068.
- [32] P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, *An introduction to the covariant quantization of superstrings*, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) S395, hep-th/0302147.