



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.003/12

Informação Quântica e Relatividade

Adriano Contini Torres

Orientador

Prof. Dr. *George Emanuel Avraam Matsas*

Março de 2012

A Maria de Fátima, minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao Prof. George Matsas pela orientação e pela amizade.

Ao meu colega e colaborador André Landulfo pela parceria científica.

À minha família, cujo apoio possibilitou a realização deste trabalho.

Aos meus amigos Guilherme Nascimben, Claudia Correa e Daniel Tausk.

Aos funcionários do Instituto de Física Teórica, principalmente à equipe da seção de pós-graduação.

A todo o grupo de gravitação semiclássica do IFT.

Ao CNPq e à CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Efeitos notáveis são obtidos na transmissão e no processamento de informação quando se utilizam canais quânticos. Exemplos desses efeitos são algoritmos quânticos ultrarrápidos, teletransporte quântico, criptografia quântica, codificação superdensa e correção quântica de erros. Embora a teoria da informação quântica comumente lide apenas com sistemas não-relativísticos, um tratamento relativístico é de grande interesse não apenas para a completeza lógica da teoria, como também para o desvendamento de novas limitações e efeitos físicos que surgem quando há movimento relativo entre as partes que trocam informação. Além disso, um entendimento mais profundo da extensão relativística da teoria da informação quântica pode ajudar a esclarecer problemas conceituais importantes, como o paradoxo da perda de informação em buracos negros. Do ponto de vista prático, foi proposto, recentemente, um experimento para o qual essa formulação estendida pode ser significativa. Ele consiste na transmissão de fótons emaranhados pelo espaço livre, entre estações terrestres e satélites em órbita, com o objetivo de testar a mecânica quântica para grandes distâncias e, sobretudo, dar os primeiros passos rumo à implementação de protocolos de informação quântica em escala global. Nesta tese, apresentamos alguns dos resultados seminais da incipiente teoria relativística da informação quântica e acrescentamos duas contribuições originais: estudamos como a relatividade afeta as correlações entre as polarizações de um par de fótons emaranhados, analisando, para isso, as desigualdades de Bell quando um detector move-se em relação ao outro (como será o caso nos experimentos envolvendo satélites em órbita), e analisamos o limite de Holevo para investigar sistemas de comunicação quando há movimento relativo entre o emissor e o receptor de uma mensagem clássica enviada por um canal quântico.

Palavras-chaves: informação quântica relativística; detectores em movimento; emaranhamento; desigualdades de Bell; canais quânticos.

Área do conhecimento: Mecânica Quântica; Teoria da Informação Quântica; Relatividade e Gravitação.

Abstract

Remarkable effects are found in information transmission and processing when communication channels are allowed to be quantum mechanical. Examples of these are fast quantum algorithms, quantum teleportation, quantum cryptography, dense coding, and quantum error correction. Although quantum information theory commonly deals only with nonrelativistic systems, a relativistic treatment is relevant not only to the logical completeness of the theory but also to unveil new physical effects and bounds that arise in information transfer and processing when there is relative motion between the parts that trade information. Moreover, a better understanding of the relativistic extension of quantum information theory may shed light on several important conceptual issues, for instance, the black hole information paradox. Recently, an experimental set-up in which this formulation may be important was proposed. It consists in using free-space transmission of entangled photons between ground stations and Earth-orbiting satellites in order to test quantum mechanics for large space distances and, eventually, to implement quantum information protocols in global scales. In this thesis, we present some of the keystones of relativistic quantum information theory and add two original results: we study how special relativity affects the polarization correlations between an entangled pair of photons by examining the Clauser-Horne-Shimony-Holt Bell inequality when the detectors are moving (as it will be the case in experiments with satellites), and we analyse the Holevo bound in order to investigate quantum communication channels when the parts that trade information are in relative motion.

Sumário

1	Introdução	1
2	Fundamentos da teoria relativística da informação quântica	5
2.1	Fundamentos	5
2.1.1	Operador densidade	5
2.1.2	Entropia de von Neumann	11
2.1.3	Emaranhamento	14
2.1.4	Medições generalizadas: POVMs	22
2.2	Transformação relativística de estados quânticos	27
2.3	Entropia de von Neumann de spin e relatividade especial	29
2.4	As consequências de se focar nos graus de liberdade de polarização e o efeito Doppler relativístico em comunicação quântica	39
2.4.1	Operador densidade reduzido efetivo de polarização	44
2.4.2	O efeito Doppler relativístico em comunicação quântica	53
3	Influência do movimento dos detectores em medições de desigualdades de Bell com fótons emaranhados	57
3.1	Preparação do sistema e transformação relativística do estado de dois fótons emaranhados	58
3.2	Medição das correlações de polarização	64
3.3	Análise numérica e conclusões	70
4	Informação clássica em canais quânticos relativísticos	75
4.1	Limite de Holevo	76
4.2	Cenário não-relativístico de comunicação quântica	79
4.3	Cenário relativístico de comunicação quântica	82
4.4	Aumento da capacidade do canal por meio de movimento relativístico	91
4.5	Relatividade e mapeamentos quânticos	93
5	Conclusões e considerações finais	97
A	Cálculo do valor esperado $\langle \sigma_{\varphi}^A \otimes \sigma_{\varpi}^B \rangle_{\psi'}$, equação (3.56)	101

Capítulo 1

Introdução

A teoria da relatividade especial [1] foi formulada por Albert Einstein em 1905 [2, 3], num contexto em que se procurava compatibilizar a eletrodinâmica de Maxwell [4] e a mecânica newtoniana [5], duas teorias que apresentam grupos de simetria distintos. Devido a essa dissemelhança, transformações de coordenadas que deixam invariantes as equações de Maxwell alteram a forma das equações de Newton, tornando-as dependentes de referencial, e vice-versa. Esse era um problema de grande importância no início do século XX, quando se acreditava que essas duas teorias descreviam corretamente os fenômenos eletromagnéticos e o movimento dos corpos. Einstein formulou uma teoria em que é estabelecido o princípio de relatividade, segundo o qual as equações que descrevem as leis da física devem tomar a mesma forma em todos os referenciais inerciais, e na qual a velocidade da luz no vácuo, representada por c , assume caráter invariante. A relatividade especial não só deu uma nova formulação à mecânica clássica, como também revolucionou o nosso entendimento sobre as noções essenciais de espaço e de tempo, o cenário onde se passam todos os fenômenos físicos, unificando-as numa única entidade quadridimensional chamada de espaço-tempo. Suas previsões têm sido experimentalmente verificadas com grande sucesso [6] ao longo do último século, e ela se mostrou fundamental para o desenvolvimento da teoria quântica de campos [7] e, em particular, da física de partículas [8, 9], cujo sucesso [10] corrobora a sua importância. Ela foi também, é claro, o primeiro passo para o estabelecimento da relatividade geral [11, 12], a teoria geométrica da gravitação.

A relatividade especial, sendo a teoria que descreve o espaço-tempo na ausência de gravitação, exerce influência sobre todos os fenômenos físicos nessas condições, independentemente da sua natureza. Isso quer dizer que todas as teorias físicas, na ausência de gravidade, devem se adaptar às condições impostas pela relatividade especial para fornecerem uma descrição correta da natureza. A constante c é a escala de velocidade que indica quando efeitos relativísticos tornam-se dominantes. Quando há propagação de objetos físicos a altas velocidades, de modo que $v/c \sim 1$, a relatividade torna-se um ingrediente fundamental para uma descrição precisa dos fenômenos. No limite de

baixas velocidades, os resultados não-relativísticos devem ser recuperados como uma aproximação. Enquanto a eletrodinâmica clássica é intrinsecamente relativística, outras teorias tiveram de ser adaptadas para atender ao requerimento de invariância de Poincaré [13], de modo a serem compatíveis com a relatividade especial, como ocorreu com a mecânica clássica e com a mecânica quântica. No caso da última, o advento da mecânica quântica relativística [14] permitiu a descoberta das antipartículas e foi um passo fundamental para o desenvolvimento da teoria quântica de campos. A relação entre a termodinâmica e relatividade [15, 16, 17] é um problema que tem sido explorado desde o início do século XX e que continua a produzir resultados até hoje.

A experiência acumulada nesses campos indica que a formulação relativística de uma teoria é importante não apenas para a sua completeza lógica ou para corrigir resultados conhecidos no limite de altas velocidades, mas também para revelar novos efeitos físicos. Além da já mencionada previsão da existência de antipartículas, podemos citar também a precessão de Thomas [18], necessária para o cálculo correto da estrutura fina do espectro atômico [19]. Essa é uma forte motivação para o estabelecimento de uma teoria relativística da informação quântica [20, 21].

A teoria da informação quântica [22, 23, 24, 25] revolucionou o nosso entendimento sobre o armazenamento, a transmissão e o processamento de informação. Nela, os canais de comunicação operam de acordo com as leis da mecânica quântica. Podemos identificar três objetivos fundamentais que perpassam a teoria da informação quântica: identificar as classes elementares de recursos estáticos em mecânica quântica (isto é, os tipos possíveis de informação), identificar as classes elementares de processos dinâmicos permitidos pela mecânica quântica (ou seja, as formas possíveis de processamento de informação), e quantificar os compromissos, perdas e ganhos de informação sofridos com a realização desses processos dinâmicos elementares. A teoria de informação quântica é essencialmente mais rica do que a clássica, pois a mecânica quântica inclui muito mais classes elementares de recursos estáticos e dinâmicos. Ela não apenas inclui todos os recursos clássicos, como acrescenta classes completamente novas de recursos, destacando-se entre eles o recurso estático do emaranhamento [26, 27]. Exemplos de efeitos notáveis obtidos em informação quântica são os algoritmos quânticos ultrarápidos [28], a correção quântica de erros [29], a criptografia quântica [30, 31, 32, 33, 34], o teletransporte quântico [35, 36] e codificação superdensa [37, 38], além de todas as perspectivas em computação quântica [39, 40, 41, 42]. Embora a teoria da informação quântica comumente trate apenas de sistemas não-relativísticos, uma extensão relativística, como comentávamos, é interessante tanto pela completeza lógica da teoria quanto pela possibilidade de se descobrirem novos efeitos e limitações na transferência e no processamento de informação quando há movimento relativo entre as partes que se comunicam.

Além disso, um entendimento mais profundo de aspectos relativísticos da infor-

mação quântica pode auxiliar a compreensão de problemas conceituais importantes de gravitação quântica [43, 44], como o paradoxo da perda de informação em buracos negros [43, 45, 46, 47, 48, 49], a origem da entropia desses sistemas [49, 50] e o fenômeno de decoerência gravitacional [61]. O esclarecimento dessas questões passa necessariamente por uma melhor compreensão da entropia, do emaranhamento e do processamento de informação em contextos relativísticos. A teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos [43, 51, 52] faz a previsão de efeitos de gravitação quântica em baixas energias. Esse regime pode ser explorado aumentando-se a complexidade dos sistemas investigados, por meio do aumento do número de parâmetros. Assim, o estudo de problemas de informação quântica no contexto de gravitação semiclássica é especialmente interessante por poder apresentar complexidade suficiente para a descoberta de novos efeitos de gravitação quântica a baixas energias.

Recentemente, foi proposto um experimento para o qual a formulação relativística da teoria da informação quântica pode ser significativa. Ele consiste na transmissão de fótons emaranhados pelo espaço livre, entre estações terrestres e satélites em órbita, com o objetivo de testar a mecânica quântica para grandes distâncias e de iniciar o projeto de implementação de protocolos de informação quântica em escala global [53, 54, 55, 56]. Temos, assim, ao lado das ponderações expostas acima, uma motivação bastante prática e palpável para o estudo da extensão relativística da teoria da informação quântica.

A partir do trabalho pioneiro de A. Peres, P. F. Scudo e D. R. Terno [57], em que os autores mostraram que a entropia de von Neumann de spin não é um escalar de Lorentz e não tem nenhum conteúdo invariante, e que, em geral, não existe nenhuma lei de transformação relativística para operadores densidades reduzidos de spin, houve um crescente interesse pelo estudo da interface entre a relatividade e a informação quântica, gerando uma vasta e rica bibliografia (veja, por exemplo, as referências [58]-[77] e os artigos de revisão [20, 21] e suas referências). Neste trabalho, apresentamos alguns dos resultados seminais da incipiente teoria relativística da informação quântica e acrescentamos algumas contribuições originais.

No Capítulo 2, resumimos sucintamente alguns conceitos de informação quântica fundamentais para os nossos estudos e, em seguida, fazemos uma revisão de alguns dos principais resultados já obtidos em informação quântica relativística. Em particular, apresentamos as consequências da relatividade especial sobre a entropia de von Neumann e os operadores densidades reduzidos de spin para férmions, e expomos como a relatividade especial afeta estados de polarização de fótons e quais as consequências disso para a informação quântica – entre elas, por exemplo, o fato de que a distinguibilidade de estados quânticos depende do estado de movimento do observador. No Capítulo 3, iniciamos a apresentação dos resultados originais desta tese, estudando como a relatividade afeta as correlações entre as polarizações de um par de fótons emaran-

nhados, analisando, para isso, as desigualdades de Bell quando um detector move-se em relação ao outro (como será o caso nos experimentos envolvendo satélites em órbita) [78]. No Capítulo 4, analisamos o limite de Holevo para investigar sistemas de comunicação quando há movimento relativo entre o emissor e o receptor de uma mensagem clássica enviada por um canal quântico [79]. No Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões, fazemos algumas considerações finais e apontamos algumas perspectivas para estudos em informação quântica relativística.

Usamos, ao longo do texto, o sistema de unidades naturais em que $c = \hbar = 1$, a não ser quando mencionado o contrário, e adotamos $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ como a métrica do espaço-tempo de Minkowski expressa em coordenadas cartesianas globais $\{t, x, y, z\}$.

Capítulo 2

Fundamentos da teoria relativística da informação quântica

Neste capítulo, vamos revisar alguns dos resultados fundamentais da teoria da informação quântica relativística, focando naqueles que serviram de base e inspiração para o trabalho original de pesquisa que desenvolvemos, o qual será apresentado nos capítulos subsequentes. Assumimos alguma familiaridade com as ideias e métodos básicos de relatividade [1, 11], mecânica quântica [80, 82, 81] e teorias das informações clássica e quântica [22, 23, 26]. Procuramos, por outro lado, expor concisamente alguns conceitos e resultados centrais de mecânica quântica e teoria de informação quântica na Seção 2.1, enquanto na Seção 2.2 resumimos as leis de transformação relativísticas de estados quânticos, tema que aprofundaremos posteriormente ao longo do texto. Na Seção 2.3 apresentamos as consequências da relatividade especial sobre a entropia de von Neumann e os operadores densidades reduzidos de spin para férmions. Na Seção 2.4 expomos como a relatividade especial afeta estados de polarização de fótons e quais as consequências disso para a informação quântica – entre elas, por exemplo, o fato de que a distinguibilidade de estados quânticos depende do estado de movimento do observador.

2.1 Fundamentos

2.1.1 Operador densidade

A forma mais geral de representar matematicamente um estado quântico é por meio de um operador densidade. Um *estado puro* é descrito por vetores normalizados $|\psi\rangle$ em um Espaço de Hilbert \mathcal{H} . Consideremos, porém, a seguinte situação experimental: dispomos de um número finito arbitrário de procedimentos de preparação, indexados por $i = 1, \dots, N$, correspondendo a estados puros $|\psi_i\rangle$ de um sistema quântico isolado, e há uma probabilidade (clássica) p_i de cada um desses procedimentos ser executado,

com

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (2.1)$$

Assim, um dos estados $|\psi_i\rangle$ é efetivamente preparado com probabilidade p_i , mas, em princípio, não sabemos qual deles. Dizemos então que se forma uma mistura de estados puros, representada pelo ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$. Conhecendo-se os estados $|\psi_i\rangle$ e as correspondentes probabilidades p_i , é possível prever a probabilidade de ocorrência de todos resultados de medições sobre o sistema preparado e, portanto, esse procedimento define um estado quântico. Em vez de um estado puro, temos uma *mistura estatística*. Um estado puro é claramente um caso particular, quando um dos estados tem probabilidade um de ser preparado e os demais, por conseguinte, probabilidade zero.

Um estado como o descrito acima não pode ser representado por um vetor num espaço de Hilbert \mathcal{H} do sistema. Pode, contudo, ser descrito como um operador linear sobre \mathcal{H} da forma

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| = \sum_{i=1}^N p_i \rho_i, \quad (2.2)$$

onde definimos $\rho_i \equiv |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$, que é o operador densidade correspondente ao estado puro $|\psi_i\rangle$. Notemos que $\text{tr}(\rho) = 1$, o que corresponde à normalização do estado. Se medimos o observável A , a probabilidade de obtermos como resultado o seu autovalor a_n é dada por

$$p(a_n) = \sum_{i=1}^N p(a_n|i)p_i,$$

onde $p(a_n|i) = \langle\psi_i|P_n|\psi_i\rangle$ representa a probabilidade condicional de se medir a_n dado que o estado preparado é $|\psi_i\rangle$. Aqui, P_n é o projetor associado ao subespaço de estados gerado pelos autovetores de A de autovalor a_n . É fácil, então, verificar que

$$p(a_n) = \text{tr}(P_n\rho). \quad (2.3)$$

Considerando agora que os valores esperados do observável A nos estados puros $|\psi_i\rangle$ contribuem com probabilidade p_i para o valor esperado de A no caso da mistura, temos

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^N p_i \langle\psi_i| A |\psi_i\rangle = \text{tr}(A\rho). \quad (2.4)$$

Vamos agora analisar qual é o estado do sistema após uma medição. Se o sistema tiver sido preparado no estado $|\psi_i\rangle$ e o resultado da medição do observável A for o autovalor a_n , então imediatamente depois o sistema estará no estado puro (não-normalizado) $P_n |\psi_i\rangle$. Como o estado $|\psi_i\rangle$ é preparado com probabilidade p_i , podemos pensar que a medição simplesmente prepara o ensemble $\{p_i, P_n |\psi_i\rangle\}$. Assim, de acordo com a equação (2.2), o operador densidade (não-normalizado) correspondente

é $\sum_{i=1}^N p_i P_n |\psi_i\rangle\langle\psi_i| P_n = P_n \rho P_n$. Normalizando, temos

$$\rho_n = \frac{P_n \rho P_n}{p(a_n)}. \quad (2.5)$$

Esse é, pois, o operador densidade que descreve o estado do sistema após a medição do autovalor a_n para o observável A . Quando o estado preparado é misto, descrito pela equação (2.2), o resultado da medição é, em geral, um outro estado misto, mas, em particular, quando o autovalor medido é não-degenerado, a medição prepara um estado puro. De fato, se $|a_n\rangle$ é o autovetor associado ao autovalor não-degenerado a_n , então o projetor é simplesmente $P_n = |a_n\rangle\langle a_n|$, e assim a equação (2.5) implica que o estado do sistema após a medição é

$$\rho_n = \frac{\langle a_n | \rho | a_n \rangle |a_n\rangle\langle a_n|}{p(a_n)} = |a_n\rangle\langle a_n| \frac{\sum_{i=1}^N p_i |\langle a_n | \psi_i \rangle|^2}{p(a_n)},$$

onde usamos a equação (2.2) para expressar ρ em termos das probabilidades p_i e dos estados puros $|\psi_i\rangle$ da mistura. Mas $|\langle a_n | \psi_i \rangle|^2 = p(a_n|i)$ e $\sum_{i=1}^N p_i p(a_n|i) = p(a_n)$, de modo que, nesse caso, temos

$$\rho_n = |a_n\rangle\langle a_n|,$$

que é o operador densidade correspondente ao estado puro $|a_n\rangle$.

Também é possível efetuarmos uma *medição não-seletiva*. Nesse caso, preparamos um grande número de sistemas quânticos idênticos no mesmo estado ρ (que pode ser, em particular, um estado puro) e efetuamos a medição de um mesmo observável A sobre todos eles sem separar os estados $\rho_n = P_n \rho P_n / p(a_n)$ correspondentes a cada resultado a_n obtido. Como cada um desses resultados ocorre com probabilidade $p(a_n)$, o processo de medição prepara o ensemble $\{p(a_n), P_n \rho P_n / p(a_n)\}$, o que caracteriza a mistura estatística expressa, segundo a equação (2.2), pelo operador densidade

$$\rho_{n.s.} = \sum_n P_n \rho P_n. \quad (2.6)$$

Esse é, pois, o operador densidade do sistema após uma medição não-seletiva.

Falta obter a equação de evolução temporal unitária de um estado quântico conforme descrito por um operador densidade. A evolução unitária tem a forma

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0), \quad (2.7)$$

onde o operador $U(t, t_0)$ que atua sobre $\rho(t_0)$ é o mesmo operador de evolução unitária que age sobre estados puros (isto é, sobre vetores normalizados do espaço de Hilbert \mathcal{H}) e, portanto, satisfaz

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0). \quad (2.8)$$

Aqui, H é o operador hamiltoniano do sistema. Multiplicando a equação (2.7) por $i\hbar$, derivando-a em relação ao tempo e usando a equação (2.8) e a sua hermitiana conjugada, assim como o fato de que H é auto-adjunto, obtemos facilmente

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt}(t) = [H(t), \rho(t)]. \quad (2.9)$$

Essa é a equação de movimento do operador densidade $\rho(t)$.

Até agora, consideramos apenas os casos de estados puros e de misturas estatísticas preparadas a partir de certos procedimentos experimentais. No entanto, é possível generalizar a noção de estado quântico para um operador densidade arbitrário. De maneira geral, um operador densidade $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ satisfaz (i) $\rho \geq 0$ (ou seja, é um operador positivo¹ e, por conseguinte, auto-adjunto, $\rho^\dagger = \rho$) e (ii) $\text{tr}(\rho) = 1$, e define um estado quântico generalizado. De acordo com o teorema de Gleason [26, 83], a descrição de um estado quântico por meio de operadores positivos de traço um é a formulação mais geral da mecânica quântica². Em síntese, nessa formulação generalizada, a probabilidade de se obter o autovalor a_n na medição de um observável A é dada pela equação (2.3), e o estado do sistema após a medição é dado pela equação (2.5) se ela for seletiva, e pela equação (2.6) se ela for não-seletiva; a evolução unitária do estado é dada, por sua vez, pela equação (2.9).

Notemos ainda que, de acordo com o teorema espectral [84], podemos escrever um operador densidade arbitrário ρ na forma

$$\rho = \sum_{i=1}^d \lambda_i |i\rangle\langle i|, \quad (2.10)$$

onde d é a dimensão do espaço de Hilbert \mathcal{H} , $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ são os autovalores de ρ e $\{|i\rangle \in \mathcal{H}, i = 1, \dots, d\}$ é uma base ortonormal de autovetores de ρ . Como consequência da propriedade (i), temos $\lambda_i \geq 0$, e de (ii) temos $\sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$. Logo, os autovalores de ρ satisfazem

$$0 \leq \lambda_i \leq 1. \quad (2.11)$$

Daí segue imediatamente que

$$\text{tr}(\rho^2) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 \leq 1.$$

¹Dizemos que um operador linear A é positivo se, e somente se, para qualquer vetor $|\varphi\rangle$, temos $\langle \varphi | A | \varphi \rangle \geq 0$. Denotamos $A \geq 0$. Segue-se que um operador positivo é auto-adjunto e que seus autovalores são todos não-negativos [26]. Reciprocamente, se A é um operador auto-adjunto cujos autovalores são todos não-negativos, então $A \geq 0$. De fato, como A é auto-adjunto, admite uma decomposição espectral $A = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle \psi_i|$. Então, para qualquer vetor $|\varphi\rangle$, temos $\langle \varphi | A | \varphi \rangle = \sum_i \lambda_i \langle \varphi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \varphi \rangle = \sum_i \lambda_i |\langle \psi_i | \varphi \rangle|^2 \geq 0$, pois $\lambda_i \geq 0$ por hipótese.

²Isso continua válido quando as medições são descritas por POVMs.

Dado o vínculo $\sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$, o menor valor que $\text{tr}(\rho^2) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2$ pode assumir é $1/d$ [26]. Assim, temos

$$\frac{1}{d} \leq \text{tr}(\rho^2) \leq 1. \quad (2.12)$$

O limite inferior é atingido quando ρ representa um estado puro, em cujo caso

$$\rho^2 = \rho, \quad (2.13)$$

de modo que $\text{tr}(\rho^2) = 1$ se segue imediatamente. Além disso, $\text{tr}(\rho^2) = 1/d$ se, e somente se,

$$\rho = \frac{1}{d} I. \quad (2.14)$$

No caso de o estado do sistema ser descrito por esse operador densidade completamente sem estrutura, dizemos tratar-se de um *estado maximalmente misto*. A quantidade $\text{tr}(\rho^2)$ é chamada de *pureza* do estado quântico ρ .

É importante ainda observar que o mesmo operador densidade pode ser interpretado em termos de um número arbitrário de diferentes ensembles $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, variando as probabilidades p_i e os estados $|\psi_i\rangle$. Cada um desses conjuntos $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ é chamado de uma *decomposição em ensemble* de ρ . Dessa maneira, um dado ensemble caracteriza univocamente um operador densidade, mas o contrário não é verdadeiro e, então, como o operador densidade determina completamente as probabilidades de resultados de medições, pela equação (2.3), é impossível distinguir experimentalmente entre esses diferentes ensembles.

Uma noção que nos será particularmente útil é a de *operador densidade reduzido*, que surge para descrever os estados de subsistemas quando tratamos de sistemas quânticos compostos. Um sistema quântico é dito composto quando exibe estrutura interna, de modo que se possa distinguir nele duas ou mais partes que possam ser separadamente acessadas por meio de operações locais. Os subsistemas não precisam ser espacialmente separados; um sistema composto pode ser formado, por exemplo, de um grau de liberdade externo (como a órbita de uma partícula) e um grau de liberdade interno (como o seu spin). Os estados de um sistema quântico composto isolado $S^{AB\dots}$, formado pelos subsistemas S^A, S^B, \dots , são representados por operadores densidades $\rho^{AB\dots}$ no espaço de Hilbert produto

$$\mathcal{H}^{AB\dots} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \dots \quad (2.15)$$

Assim, por exemplo, no caso de um sistema composto S^{AB} , se $\{|n^A\rangle\}$ e $\{|i^B\rangle\}$ são bases ortonormais dos espaços de Hilbert \mathcal{H}^A e \mathcal{H}^B , respectivamente, podemos escrever o operador densidade ρ^{AB} como

$$\rho^{AB} = \sum_{n,m} \sum_{i,j} \langle n^A, i^B | \rho^{AB} | m^A, j^B \rangle |n^A\rangle \langle m^A| \otimes |i^B\rangle \langle j^B|. \quad (2.16)$$

Por simplicidade, vamos considerar doravante apenas sistemas compostos de duas partes. A extensão para um número maior de subsistemas é imediata. Tomemos, dessa forma, um sistema S^{AB} preparado num estado ρ^{AB} . Os estados dos subsistemas S^A e S^B são determinados por ρ^{AB} , e podem ser representados, respectivamente, pelos operadores densidades reduzidos ρ^A e ρ^B , obtidos tomando-se o traço parcial sobre os outros subsistemas:

$$\rho^A = \text{tr}_B (\rho^{AB}), \quad \rho^B = \text{tr}_A (\rho^{AB}), \quad (2.17)$$

onde os traços parciais são dados por

$$\text{tr}_A (\rho^{AB}) = \sum_n \langle n^A | \rho^{AB} | n^A \rangle, \quad \text{tr}_B (\rho^{AB}) = \sum_i \langle i^B | \rho^{AB} | i^B \rangle. \quad (2.18)$$

Segue-se diretamente do fato de ρ^{AB} ser um operador densidade sobre \mathcal{H}^{AB} que ρ^A e ρ^B também são operadores densidades, isto é, operadores positivos de traço unitário sobre \mathcal{H}^A e \mathcal{H}^B , respectivamente, como é fácil verificar. Todas as previsões estatísticas sobre medições em S^A e S^B podem ser extraídas de seus respectivos operadores densidades reduzidos. Suponhamos, por exemplo, que façamos a medição local do observável C^A sobre S^A , com

$$C^A |c_n^{(r)A}\rangle = c_n |c_n^{(r)A}\rangle, \quad r = 1, \dots, g_n, \quad (2.19)$$

onde g_n é a degenerescência do autovalor c_n . A probabilidade de que o resultado da medição seja c_n é então dada em termos do operador local de projeção $P_n^A \otimes I^B$, onde

$$P_n^A = \sum_{r=1}^{g_n} |c_n^{(r)A}\rangle \langle c_n^{(r)A}|, \quad (2.20)$$

e I^B é o operador identidade sobre \mathcal{H}^B . De acordo com a equação (2.3), temos

$$p(c_n) = \text{tr}_{AB} [(P_n^A \otimes I^B) \rho^{AB}], \quad (2.21)$$

onde o traço completo é dado por

$$\text{tr}_{AB}(D^{AB}) = \sum_{n,i} \langle n^A, i^B | D^{AB} | n^A, i^B \rangle. \quad (2.22)$$

É fácil ver que ele pode ser escrito como uma sequência de traços parciais,

$$\text{tr}_{AB}(D^{AB}) = \text{tr}_B [\text{tr}_A(D^{AB})] = \text{tr}_A [\text{tr}_B(D^{AB})]. \quad (2.23)$$

Mediante esse resultado, podemos reescrever a equação (2.21) como

$$p(c_n) = \text{tr}_A \{ \text{tr}_B [(P_n^A \otimes I^B) \rho^{AB}] \},$$

e daí obtemos

$$p(c_n) = \text{tr}_A (P_n^A \rho^A). \quad (2.24)$$

Concluimos que, de fato, podemos escrever $p(c_n)$ exclusivamente em termos de ρ^A e de P_n^A , variáveis associadas ao sistema S^A . Dizemos que $P_n^A \otimes I^B$ é um operador local porque ele age de maneira não-trivial apenas sobre um dos subsistemas. De maneira similar, partindo da equação (2.4), para o valor esperado do observável C^A obtemos

$$\langle C^A \rangle = \text{tr}_{AB} [(C^A \otimes I^B) \rho^{AB}] = \text{tr}_A (C^A \rho^A). \quad (2.25)$$

2.1.2 Entropia de von Neumann

A entropia de Shannon [85] desempenha um papel fundamental na teoria da informação clássica, quantificando, em unidades de bits, a incerteza associada a uma variável aleatória antes da sua medição ou, equivalentemente, a informação ganha, em média, quando seu valor é descoberto [22, 86]. Seja X uma variável aleatória que pode assumir valores x_1, \dots, x_n de acordo com a distribuição de probabilidades p_1, \dots, p_n . A *entropia de Shannon* associada à variável aleatória X é definida como

$$H(X) \equiv H(p_1, \dots, p_n) \equiv - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i. \quad (2.26)$$

A entropia de Shannon quantifica o mínimo de recursos físicos necessários para armazenar a informação produzida por uma fonte de modo que essa informação possa ser recuperada mais tarde – esse é, grosso modo, o conteúdo do teorema de codificação sem ruído de Shannon [22]. Consideremos um exemplo concreto simples. Suponhamos que uma fonte produz um de quatro símbolos, A , B , C ou D , com probabilidades $1/2$, $1/4$, $1/8$ e $1/8$, respectivamente. Sem o uso de nenhum esquema de compressão, para cada uso da fonte são utilizados dois bits para armazenar a informação produzida, cada par de bits correspondendo a um dos possíveis símbolos gerados. Podemos, contudo, utilizar as diferentes tendências de ocorrência de cada *output* da fonte para comprimir a informação produzida, usando menos bits para armazenar os símbolos que ocorrem com maior frequência, como A , e mais bits para armazenar símbolos mais raros, como C ou D . Um possível esquema de compressão consiste em codificar o símbolo A como o bit 0, B como a cadeia de bits 10, C como 110, e D como 111. Assim, o tamanho médio de uma cadeia de bits usada para armazenar a informação produzida é $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{8} \times 3 = 7/4$ bits por uso da fonte. Obviamente, isso é menos do que o necessário na abordagem ingênua em que se usam dois bits para codificar cada símbolo. Acontece que essa quantidade, $7/4$ bits, é justamente a entropia de Shannon da fonte: $H(X) = -\frac{1}{2} \log_2(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} \log_2(\frac{1}{4}) - \frac{1}{8} \log_2(\frac{1}{8}) - \frac{1}{8} \log_2(\frac{1}{8}) = 7/4$ bits. Além disso, acontece que qualquer tentativa de comprimir mais os dados produzidos pela

fonte resulta na perda irreversível de informação; a entropia de Shannon quantifica a melhor compressão que pode ser realizada sem que ocorram perdas.

Enquanto a entropia de Shannon mede a incerteza associada a uma distribuição de probabilidades clássica, a entropia de von Neumann, que é seu análogo quântico, dá uma medida da incerteza associada a um estado quântico, que, em essência, tem natureza informacional probabilística. Consideremos um estado quântico caracterizado pelo operador densidade $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Como já comentamos, embora existam infinitas misturas que geram o mesmo operador densidade e elas sejam, pois, fisicamente equivalentes, dado um operador densidade ρ , ele admite uma única decomposição espectral $\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, onde N é a dimensão do espaço de Hilbert \mathcal{H} , $\{|\phi_i\rangle \in \mathcal{H} \mid i = 1, \dots, N\}$ é uma base ortonormal de autovetores de ρ , e λ_i são os correspondentes autovalores para $i = 1, \dots, N$. Como os estados $|\phi_i\rangle$ são ortogonais, podem ser distinguidos por uma medição apropriada [22], e então a única incerteza restante associada ao estado ρ é aquela inerente à distribuição de probabilidades $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – ou seja, é a entropia de Shannon $H(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = -\sum_{i=1}^N \lambda_i \log_2 \lambda_i$. Isso nos motiva a definir a *entropia de von Neumann* associada ao estado quântico ρ como

$$S(\rho) \equiv H(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = -\sum_{i=1}^N \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (2.27)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ são os autovalores de ρ . Podemos ainda escrever $S(\rho)$ como

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho). \quad (2.28)$$

A unidade da entropia de von Neumann é o qubit. Notemos que, enquanto a entropia de Shannon pode ser interpretada como a quantidade de informação ganha ao se descobrir o valor da variável aleatória X , a entropia de von Neumann não admite uma interpretação análoga. Suponhamos, por exemplo, que é preparada uma mistura estatística $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, de modo que o estado do sistema é $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Como vimos, a incerteza total associada ao estado ρ é $S(\rho)$, que se associa à distribuição de probabilidades dada pelos autovalores de ρ e, assim, à sua decomposição espectral. No entanto, em geral não é possível identificar qual dos estados $|\psi_i\rangle$ da mistura preparada foi medido, a não ser no caso particular de esses estados serem todos ortogonais. Apesar disso, como comentaremos mais detalhadamente adiante, o limite de Holevo associado ao operador densidade ρ garante que a *entropia de von Neumann* $S(\rho)$ é um limite superior para a quantidade de informação que podemos extrair de ρ [22, 23, 87, 88].

Vamos enumerar algumas propriedades da entropia de von Neumann de que faremos uso ao longo do texto [22, 89, 90]:

1. A entropia de von Neumann é não-negativa e, num espaço de Hilbert de dimensão

N , assume valor máximo $\log_2 N$:

$$0 \leq S(\rho) \leq \log_2 N. \quad (2.29)$$

Daqui se segue que um sistema de dois níveis ($N = 2$) tem no máximo um qubit de informação quântica.

2. A entropia de von Neumann de um estado é nula se, e somente se, ele é puro:

$$S(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (2.30)$$

3. A entropia de von Neumann de um estado é igual a $\log_2 N$ se, e somente se, ele é completamente misto:

$$S(\rho) = \log_2 N \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{N} \mathbf{I}. \quad (2.31)$$

4. Para um sistema composto AB num estado puro, $S(A) = S(B)$:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \Rightarrow S(\rho_A) = S(\rho_B), \quad (2.32)$$

onde $\rho_A = \text{tr}_B(\rho)$ e $\rho_B = \text{tr}_A(\rho)$.

5. Seja AB um sistema composto e ρ um operador densidade em $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$. Então

$$S(\rho) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B), \quad (2.33)$$

onde $\rho_A = \text{tr}_B(\rho)$ e $\rho_B = \text{tr}_A(\rho)$. A igualdade vale se, e somente se, $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$, ou seja,

$$S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma). \quad (2.34)$$

6. A entropia de von Neumann é uma função côncava:

$$S\left(\sum_i p_i \rho^i\right) \geq \sum_i p_i S(\rho^i). \quad (2.35)$$

7. Se p_1, \dots, p_n é uma distribuição de probabilidades e ρ_1, \dots, ρ_n são operadores densidades, então

$$S\left(\sum_i p_i \rho^i\right) \leq \sum_i p_i S(\rho^i) + H(p_1, \dots, p_n). \quad (2.36)$$

Por fim, mencionamos que, segundo o teorema de codificação sem ruído de Schumacher [22, 91, 92], é possível comprimir informação quântica e, assim, usar menos

qubits para transmiti-la, e a entropia de von Neumann é o limite inferior para a taxa de compressão por caractere da mensagem. Esse resultado é o análogo quântico do teorema de codificação sem ruído de Shannon.

2.1.3 Emaranhamento

Nem todos os estados de um sistema composto têm a forma de um produto tensorial dos estados dos seus subsistemas [93, 27]. Nesse caso, dizemos que os subsistemas estão emaranhados, e os resultados de medições entre eles estão correlacionados de uma maneira que não pode ser reproduzida classicamente [26]. Einstein, Podolsky e Rosen estiveram entre os primeiros a explorar as consequências desse tipo de estado, lançando o paradoxo EPR [94], um experimento mental por meio do qual tentavam revelar inadequações da mecânica quântica. Mais tarde, Bell capturou e tornou precisa a ideia por trás do paradoxo EPR e provou o famoso teorema de Bell [95, 96], segundo o qual em teorias realistas e locais as correlações entre medições de observáveis em regiões causalmente desconectadas devem satisfazer certas desigualdades, as quais são violadas, graças aos estados emaranhados, pela mecânica quântica. Desde o advento da informação quântica [22, 23], os estados emaranhados tornaram-se importantes não apenas para um entendimento conceitual mais amplo da mecânica quântica, como também se mostraram um recurso físico de valor inestimável para a realização de tarefas classicamente impossíveis. Nesse particular, podemos citar a criptografia quântica [30, 31, 32, 33, 34], o teletransporte quântico [35, 36], a codificação superdensa [37, 38] e a computação quântica [39, 40, 41, 42] como exemplos de tarefas para cuja execução o emaranhamento desempenha um papel de grande relevância.

Consideremos um sistema isolado constituído de n subsistemas. Vamos denotar por \mathcal{H}^i , $i = 1, \dots, n$, o espaço de Hilbert correspondente a cada um desses subsistemas, e por N_i a respectiva dimensão. Como já comentamos, o espaço de Hilbert \mathcal{H} do sistema composto é dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^n. \quad (2.37)$$

Dizemos que um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ é *separável* se, e somente se, pode ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle, \quad (2.38)$$

onde $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^i$ para $i = 1, \dots, n$, e, caso contrário, dizemos que ele é *emaranhado*. Como exemplo, tomemos $\mathcal{H} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ com $N_A = N_B = 2$. Seja $\{|0^i\rangle, |1^i\rangle\}$ uma base ortonormal de \mathcal{H}^i , para $i = A, B$. Um estado puro geral para o sistema composto tem então a forma

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{ij} |i^A\rangle \otimes |j^B\rangle \quad (2.39)$$

com $\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 |c_{ij}|^2 = 1$. A forma mais geral de um estado puro separável é

$$|\psi_s\rangle = (a_0|0^A\rangle + a_1|1^A\rangle) \otimes (b_0|0^B\rangle + b_1|1^B\rangle) \quad (2.40)$$

com $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$ e $|b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$. Já os estados

$$|\psi^\pm\rangle \equiv \frac{|0^A\rangle \otimes |1^B\rangle \pm |1^A\rangle \otimes |0^B\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.41)$$

$$|\phi^\pm\rangle \equiv \frac{|0^A\rangle \otimes |0^B\rangle \pm |1^A\rangle \otimes |1^B\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.42)$$

claramente são emaranhados. Além disso, é possível verificar que eles formam uma base de \mathcal{H} chamada de base de Bell [82, 26].

Como já comentamos, a forma mais geral de descrever um estado em mecânica quântica é por meio de operadores densidades. Vamos, então, generalizar as noções de estados separáveis e emaranhados para incluir estados mistos. Um operador densidade ρ em $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^n$ corresponde a um *estado separável* se, e somente se, pode ser escrito na forma

$$\rho = \sum_{i=1}^K p_i \rho_1^i \otimes \cdots \otimes \rho_n^i, \quad (2.43)$$

onde $K \in \mathbb{N}$, $p_i \in [0, 1]$ com $\sum_{i=1}^K p_i = 1$, e ρ_j^i é um operador densidade em \mathcal{H}^j , para $j = 1, \dots, n$. Isso quer dizer que um estado separável é uma mistura estatística de estados produtos da forma $\rho_1^i \otimes \cdots \otimes \rho_n^i$. Estados separáveis sempre podem ser criados usando operações locais e informação clássica e, como veremos mais detalhadamente adiante, sempre satisfazem as desigualdades de Bell. Como antes, um estado que não é separável é dito *emaranhado*.

Desigualdades de Bell

A mecânica quântica não fornece resultados determinísticos para a medição de observáveis físicos. Como vimos, ela dá apenas a distribuição de probabilidades dos possíveis resultados de um experimento. Além disso, ela estabelece correlações que contrariam a nossa intuição clássica sobre a natureza. Consideremos, por exemplo, um sistema de dois qubits preparado no estado singlete

$$|\psi^-\rangle = \frac{|0^A\rangle \otimes |1^B\rangle - |1^A\rangle \otimes |0^B\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.44)$$

Esse estado pode ser implementado com partículas de spin $1/2$, tomando $|0^i\rangle$ e $|1^i\rangle$ como os autovetores da componente de spin ao longo do eixo z , S_z^i , correspondentes a autovalores $1/2$ e $-1/2$, respectivamente, para $i = A, B$. Suponhamos que Alice tenha posse do subsistema A , enquanto Bob tenha de B , e que Alice obtenha $1/2$ como

resultado da sua medida de S_z^A . Então, o estado do sistema composto logo após a intervenção de Alice é dado por [80, 81, 26]

$$|\psi'\rangle = \frac{(|0^A\rangle\langle 0^A| \otimes I^B) |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| (|0^A\rangle\langle 0^A| \otimes I^B) |\psi\rangle}} = |0^A\rangle \otimes |1^B\rangle. \quad (2.45)$$

Assim, após obter o seu resultado, Alice tem certeza de que Bob medirá o valor $-1/2$ caso ele meça o observável S_z^B . Similarmente, se Alice medir $-1/2$ para S_z^A , saberá que Bob obterá $1/2$ para S_z^B . Isso vale mesmo que a distância entre Alice e Bob seja grande o suficiente para que os eventos de medição sejam causalmente desconectados. Como, em mecânica quântica, não faz sentido perguntar qual o valor de um observável antes da sua medição, a presença desse tipo de correlação poderia sugerir a presença de interações não-locais entre os subsistemas de Alice e Bob.

Nesse contexto de estranhamento, uma questão fundamental surge: poderá existir uma teoria que reproduza todas as previsões da mecânica quântica, mas que corresponda à nossa intuição clássica sobre a natureza? Nesse caso, a mecânica quântica seria apenas uma teoria efetiva, e forneceria uma ontologia tão singular por ser incompleta. Para capturar de forma mais precisa a nossa intuição clássica sobre a natureza, vamos definir dois conceitos que estão na base desse paradigma:

- *Realismo*: é a hipótese de que os observáveis físicos possuem valores bem definidos em todos os instantes, e uma medição apenas os revela;
- *Localidade*: é a hipótese de que intervenções (por exemplo, medições) realizadas numa dada região do espaço-tempo não influenciam intervenções realizadas em regiões causalmente desconectadas dela.

Suponhamos então que a natureza seja descrita por uma teoria realista e local, e consideremos a seguinte situação: duas partículas, A e B , são preparadas e enviadas, respectivamente, a dois observadores, Alice e Bob. Alice realiza sobre a sua partícula a medição de um de dois observáveis, A_1 ou A_2 , e, similarmente, Bob mede ou B_1 ou B_2 . Assumimos aqui que, para $i = 1, 2$, A_i e B_i podem assumir os valores $+1$ e -1 , e que Alice e Bob realizam as suas medições em regiões do espaço-tempo causalmente desconectadas. Consideremos que esse procedimento experimental é repetido um número arbitrariamente grande de vezes e que, em cada uma delas, Alice e Bob escolhem aleatoriamente se medem os observáveis A_1 ou A_2 e B_1 ou B_2 , respectivamente. Pela hipótese de realismo, um estado do sistema tem valores de A_1 , A_2 , B_1 e B_2 bem definidos independentemente de quais desses observáveis são medidos. Seja, então, $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ a probabilidade de que o sistema composto esteja num estado tal que $A_i = a_i$ e $B_i = b_i$ para $i = 1, 2$. Essa probabilidade depende dos detalhes do procedimento de preparação

do estado. Para um número de repetições suficientemente grande, temos simplesmente

$$p(a_1, a_2, b_1, b_2) \approx \frac{N(a_1, a_2, b_1, b_2)}{N}, \quad (2.46)$$

onde $N(a_1, a_2, b_1, b_2)$ é o número de vezes em que foi preparado um estado tal que $A_i = a_i$ e $B_i = b_i$ para $i = 1, 2$, e N é o número total de repetições realizadas. Seja $E(X) \equiv \sum_x p(x)x$ o valor esperado do observável X . Consideremos o observável

$$A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2 = A_1(B_1 - B_2) + A_2(B_1 + B_2), \quad (2.47)$$

que assume valores $+2$ e -2 , como é fácil verificar por inspeção. Pela linearidade do valor esperado, temos

$$E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2) = E(A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2).$$

Agora pela definição de valor esperado, podemos reescrever o membro direito dessa equação de modo que

$$E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2) = \sum_{a_1, a_2} \sum_{b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) (a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_2).$$

Tomando o valor absoluto membro a membro, a desigualdade triangular nos dá

$$|E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2)| \leq \sum_{a_1, a_2} \sum_{b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) |a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_2|.$$

Mas $|a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_2| = 2$ e $\sum_{a_1, a_2} \sum_{b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) = 1$. Assim, obtemos a desigualdade de Bell de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [97]

$$|E(A_1B_1) + E(A_2B_1) + E(A_2B_2) - E(A_1B_2)| \leq 2. \quad (2.48)$$

Em toda teoria realista e local, essa desigualdade deve ser satisfeita³.

Vamos verificar, agora, se a mecânica quântica satisfaz a desigualdade de Bell CHSH, equação (2.48). Suponhamos que é preparada uma partícula de spin 0 que decai em duas partículas de spin 1/2, cada uma delas sendo enviada para Alice e Bob, que realizam sobre elas medições de spin ao longo de direções \hat{a}_1 ou \hat{a}_2 e \hat{b}_1 ou \hat{b}_2 ,

³Talvez nessa dedução seja mais evidente o uso da hipótese de realismo (já que ela claramente assume que faz sentido falar sobre os valores da projeção de spin ao longo de qualquer direção) do que a de localidade. Notemos que há localidade nesse raciocínio no sentido de que o valor de qualquer quantidade física relativa a uma das partículas não é alterado por uma mudança no aparato de medição correspondente à outra partícula. Mais especificamente, o valor obtido por Alice na medição do observável A_i , para $i = 1, 2$, não depende da escolha de Bob de medir o observável B_1 ou o observável B_2 , e vice-versa [81].

respectivamente. Vamos supor que as medições de spin sejam normalizadas para dar valores $+1$ e -1 , de modo que os observáveis medidos por Alice e Bob são

$$A_i = \hat{a}_i \cdot \vec{\sigma}^A, \quad i = 1, 2, \quad (2.49)$$

e

$$B_i = \hat{b}_i \cdot \vec{\sigma}^B, \quad i = 1, 2, \quad (2.50)$$

respectivamente, onde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ é o vetor de Pauli. Considerando a equação (2.47), definimos o observável

$$C \equiv A_1 \otimes (B_1 - B_2) + A_2 \otimes (B_1 + B_2). \quad (2.51)$$

Então é possível verificar facilmente que o membro esquerdo da desigualdade (2.48) assume a forma

$$|E(A_1 B_1) + E(A_2 B_1) + E(A_2 B_2) - E(A_1 B_2)| = |\text{tr}(C\rho)|, \quad (2.52)$$

onde ρ é o operador densidade que descreve o estado do sistema composto. De fato, usando a equação (2.51) e a linearidade do traço, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(C\rho) &= \text{tr}[A_1 \otimes (B_1 - B_2)\rho + A_2 \otimes (B_1 + B_2)\rho] \\ &= \text{tr}(A_1 \otimes B_1 \rho) - \text{tr}(A_1 \otimes B_2 \rho) + \text{tr}(A_2 \otimes B_1 \rho) + \text{tr}(A_2 \otimes B_2 \rho). \end{aligned}$$

De acordo com a equação (2.4), as quantidades da forma $\text{tr}(A_i \otimes B_j \rho)$ correspondem simplesmente aos valores esperados $E(A_i B_j)$. Logo,

$$\text{tr}(C\rho) = E(A_1 B_1) - E(A_1 B_2) + E(A_2 B_1) + E(A_2 B_2).$$

Tomando o valor absoluto, obtemos a equação (2.52). É possível provar [98], por outro lado, que $|\text{tr}(C\rho)|$ satisfaz a desigualdade de Cirel'son,

$$|\text{tr}(C\rho)| \leq 2\sqrt{2}. \quad (2.53)$$

Obtemos, dessa maneira, um limite superior para o membro esquerdo da desigualdade de Bell CHSH calculada de acordo com a mecânica quântica. Evidentemente, esse limite superior, $2\sqrt{2}$, é maior do que o membro direito da desigualdade de Bell CHSH, 2. O fato de haver um limite superior para uma quantidade, em princípio, não implica que ela possa de fato atingi-lo. No entanto, é fácil verificar que, neste caso, esse valor

é de fato atingido. Para isso, vamos considerar o estado singlete da equação (2.44),

$$|\psi^-\rangle = \frac{|0^A\rangle \otimes |1^B\rangle - |1^A\rangle \otimes |0^B\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.54)$$

onde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é uma base ortonormal de autovetores de σ_z com $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ e $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$. Então é possível verificar por cálculo direto que

$$E(A_i B_j) = \langle \psi^- | (\hat{a}_i \cdot \vec{\sigma}^A) \otimes (\hat{b}_j \cdot \vec{\sigma}^B) | \psi^- \rangle = -\hat{a}_i \cdot \hat{b}_j. \quad (2.55)$$

Escolhendo as direções em que Alice e Bob medem o spin como

$$\hat{a}_1 = (0, 0, 1), \quad \hat{a}_2 = (0, 1, 0), \quad (2.56)$$

e

$$\hat{b}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad \hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1), \quad (2.57)$$

e usando a equação (2.55), obtemos

$$\begin{aligned} |E(A_1 B_1) + E(A_2 B_1) + E(A_2 B_2) - E(A_1 B_2)| &= |\hat{a}_1 \cdot \hat{b}_1 + \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_1 + \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_2 - \hat{a}_1 \cdot \hat{b}_2| \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Isso mostra que *a mecânica quântica viola as desigualdades de Bell*, e que a violação máxima é dada pelo valor $|\text{tr}(C\rho)| = 2\sqrt{2}$. Consequentemente, *nenhuma teoria realista e local pode reproduzir todos os resultados da mecânica quântica*. Diversos experimentos já foram realizados [99, 100, 101, 102], e eles mostram não apenas que as desigualdades de Bell são de fato violadas, mas também que essa violação ocorre conforme a previsão da mecânica quântica. Consideremos uma configuração típica usada em testes experimentais da desigualdade de Bell CHSH: os spins são medidos no plano $x \perp y$, com os vetores unitários \hat{a}_2 e \hat{b}_1 apontando ao longo do eixo x , e \hat{a}_1 e \hat{b}_2 rodados em relação ao eixo x de um ângulo θ nos sentidos anti-horário e horário, respectivamente. Nesse caso, o único parâmetro livre é o ângulo θ , e é fácil verificar, pela equação (2.55), que o membro esquerdo da desigualdade de Bell CHSH assume então a forma

$$G(\theta) \equiv |E(\hat{a}_1, \hat{b}_1) + E(\hat{a}_2, \hat{b}_1) + E(\hat{a}_2, \hat{b}_2) - E(\hat{a}_1, \hat{b}_2)| = |1 + 2 \cos \theta - \cos(2\theta)|. \quad (2.59)$$

A Figura 2.1 exhibe o gráfico $G(\theta)$. Podemos verificar que a desigualdade de Bell CHSH é violada para uma ampla faixa de valores de θ . O valor máximo atingido por $G(\theta)$ é 2,5.

Vamos provar, agora, que estados separáveis de mecânica quântica sempre satis-

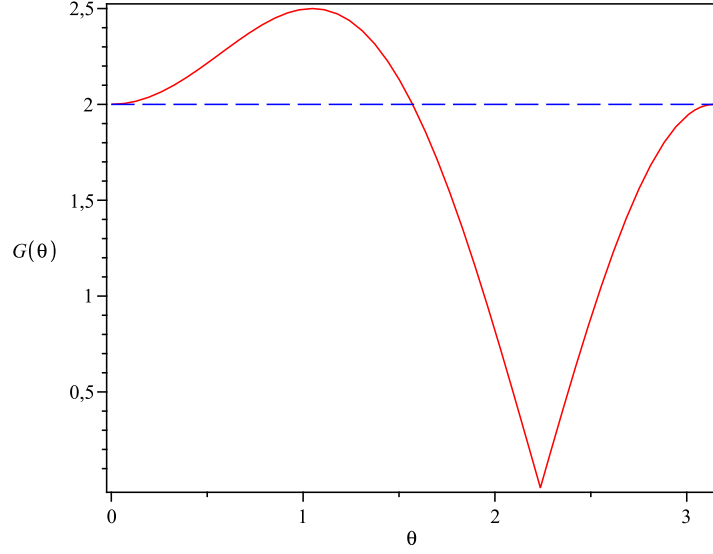


Figura 2.1: $G(\theta)$ como função de θ . O valor máximo atingido é 2,5. Vemos que a desigualdade de Bell CHSH é violada para uma ampla faixa de valores de θ .

fazem a desigualdade (2.48). Vamos tomar um estado separável geral de dois qubits,

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i. \quad (2.60)$$

Usando as equações (2.51) e (2.60), temos então

$$C\rho = \sum_i p_i [A_1 \rho_A^i \otimes (B_1 - B_2) \rho_B^i + A_2 \rho_A^i \otimes (B_1 + B_2) \rho_B^i].$$

Tomando o traço dessa equação, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(C\rho) = \sum_i p_i \left[\text{tr}(A_1 \rho_A^i) \text{tr}(B_1 \rho_B^i) - \text{tr}(A_1 \rho_A^i) \text{tr}(B_2 \rho_B^i) \right. \\ \left. + \text{tr}(A_2 \rho_A^i) \text{tr}(B_1 \rho_B^i) + \text{tr}(A_2 \rho_A^i) \text{tr}(B_2 \rho_B^i) \right]. \end{aligned}$$

Tomando o valor absoluto membro a membro e usando a desigualdade triangular, chegamos a

$$\begin{aligned} |\text{tr}(C\rho)| \leq \sum_i p_i \left| \text{tr}(A_1 \rho_A^i) \text{tr}(B_1 \rho_B^i) - \text{tr}(A_1 \rho_A^i) \text{tr}(B_2 \rho_B^i) \right. \\ \left. + \text{tr}(A_2 \rho_A^i) \text{tr}(B_1 \rho_B^i) + \text{tr}(A_2 \rho_A^i) \text{tr}(B_2 \rho_B^i) \right|. \end{aligned}$$

Podemos agora trabalhar o módulo no membro direito dessa equação:

$$\begin{aligned} & \left| \operatorname{tr}(A_1\rho_A^i) \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) - \operatorname{tr}(A_1\rho_A^i) \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) + \operatorname{tr}(A_2\rho_A^i) \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) + \operatorname{tr}(A_2\rho_A^i) \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right| \\ &= \left| \operatorname{tr}(A_1\rho_A^i) [\operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) - \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i)] + \operatorname{tr}(A_2\rho_A^i) [\operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) + \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i)] \right| \\ &\leq \left| \operatorname{tr}(A_1\rho_A^i) \right| \left| \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) - \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right| + \left| \operatorname{tr}(A_2\rho_A^i) \right| \left| \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) + \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right|, \end{aligned}$$

onde usamos novamente a desigualdade triangular. Logo, temos

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(C\rho)| \leq \sum_i p_i \left[\left| \operatorname{tr}(A_1\rho_A^i) \right| \left| \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) - \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right| \right. \\ \left. + \left| \operatorname{tr}(A_2\rho_A^i) \right| \left| \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) + \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right| \right]. \end{aligned}$$

Agora notemos que, usando a equação (2.4), temos

$$\operatorname{tr}(A_k\rho_A^i) = \langle A_k \rangle \equiv \sum_{x=-1,1} p(x)x,$$

onde usamos o fato de que o observável A_k assume apenas valores -1 e 1 . Tomando o valor absoluto dessa equação e usando novamente a desigualdade triangular, obtemos

$$\left| \operatorname{tr}(A_k\rho_A^i) \right| = \left| \sum_{x=-1,1} p(x)x \right| \leq \sum_{x=-1,1} p(x) |x|.$$

Como $|x| = 1$ e $\sum_{x=-1,1} p(x) = 1$, concluímos que

$$\left| \operatorname{tr}(A_k\rho_A^i) \right| \leq 1, \quad k = 1, 2, \quad (2.61)$$

e, analogamente, temos

$$\left| \operatorname{tr}(B_k\rho_B^i) \right| \leq 1, \quad k = 1, 2. \quad (2.62)$$

Assim, $|\operatorname{tr}(A_k\rho_A^i)| |a| \leq |a|$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $k = 1, 2$, de modo que

$$|\operatorname{tr}(C\rho)| \leq \sum_i p_i \left[\left| \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) - \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right| + \left| \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) + \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right| \right].$$

Mas, devido à equação (2.62), vale

$$\left| \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) - \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right| + \left| \operatorname{tr}(B_1\rho_B^i) + \operatorname{tr}(B_2\rho_B^i) \right| \leq 2,$$

como se pode verificar por inspeção. Consequentemente, $|\operatorname{tr}(C\rho)| \leq 2 \sum_i p_i = 2$. Portanto, para estados separáveis vale

$$|\operatorname{tr}(C\rho)| \leq 2, \quad (2.63)$$

ou seja, *estados separáveis nunca violam as desigualdades de Bell*. Concluímos que *o emaranhamento é uma condição necessária para a violação das desigualdades de Bell*. Notemos que, embora seja uma condição necessária, o emaranhamento não é uma condição suficiente para a violação das desigualdades de Bell. De fato, existem estados mistos emaranhados que não as violam [26, 96].

2.1.4 Medições generalizadas: POVMs

Uma medição pode ser entendida como uma intervenção realizada sobre um sistema físico por meio da qual se obtém informação sobre ele na forma de um número real [103]. Em mecânica quântica, as previsões sobre o resultado de um experimento são estritamente probabilísticas. Até agora, caracterizamos medições por meio de *projetores ortogonais* diretamente associados a *observáveis físicos*. Como já comentamos, no caso da medição de um observável A sobre um sistema num estado descrito por um operador densidade ρ , a probabilidade de se obter o valor a_n , que é um autovalor de A , é dada por

$$p(a_n) = \text{tr}(P_n \rho),$$

onde $P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i|$ é o projetor ortogonal associado ao subespaço gerado pelos autovetores $\{|u_n^i\rangle \in \mathcal{H} \mid i = 1, \dots, g_n\}$ correspondentes ao autovalor a_n . Além disso, o estado do sistema imediatamente após a medição é dado pelo operador densidade

$$\rho_n = \frac{P_n \rho P_n}{p(a_n)}.$$

No caso de uma medição não-seletiva, o estado do sistema após a medição é

$$\rho_{n.s.} = \sum_n P_n \rho P_n.$$

A necessidade de generalizar essa formulação surge do fato de que medições projetivas sobre um sistema maior atuam sobre um subsistema de um modo que, em geral, não pode ser descrito como uma medição projetiva sobre o subsistema isoladamente [26]. Assim surge o conceito de *medição generalizada*, que será descrita, como explicaremos em seguida, por um POVM (do inglês *positive operator valued measure*). POVMs representam a formulação mais geral para medições em mecânica quântica [22]. De certa forma, uma POVM está para uma medição projetiva como um operador densidade está para um estado puro: operadores densidades podem descrever um subsistema de um sistema maior que está num estado puro, e medições generalizadas podem descrever o efeito sobre um subsistema de uma medição projetiva realizada sobre um sistema fechado maior.

Uma medição generalizada é descrita por um conjunto $\{M_1, \dots, M_N\}$ de operadores

lineares sobre \mathcal{H} que satisfazem a relação de completiza

$$\sum_{m=1}^N M_m^\dagger M_m = \mathbf{I}. \quad (2.64)$$

Cada operador M_m associa-se a um resultado $m \in \{1, \dots, N\}$. Se o estado do sistema imediatamente antes da medição é descrito pelo operador densidade ρ , a probabilidade de se obter o resultado m é

$$p(m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger), \quad (2.65)$$

e o estado do sistema imediatamente após a medição é

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{p(m)}. \quad (2.66)$$

No caso de uma medição não-seletiva, o estado do sistema após a medição é

$$\rho_{n.s.} = \sum_{m=1}^N p(m) \rho_m = \sum_{m=1}^N M_m \rho M_m^\dagger \quad (2.67)$$

É fácil ver que medições projetivas surgem como um caso particular. Para isso, basta notar que um conjunto $\{P_m\}$ completo de operadores de projeção ortogonal satisfaz a relação de completiza $\sum_m P_m = \mathbf{I}$, que cada um desses operadores é auto-adjunto, $P_n^\dagger = P_n$, e que eles satisfazem $P_m P_n = \delta_{mn} P_n$.

Agora notemos que, de acordo com a equação (2.65), a distribuição de probabilidades dos possíveis resultados de uma medição generalizada depende apenas dos operadores E_m definidos como

$$E_m \equiv M_m^\dagger M_m, \quad m = 1, \dots, N. \quad (2.68)$$

Segue-se imediatamente dessa definição que os operadores E_m são positivos,

$$E_m \geq 0. \quad (2.69)$$

De fato, para qualquer estado $|\psi\rangle$, temos $\langle \psi | E_m | \psi \rangle = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle = \|M_m |\psi\rangle\|^2 \geq 0$. Além disso, em virtude da equação (2.64), eles satisfazem a relação de completiza

$$\sum_{m=1}^N E_m = \mathbf{I}. \quad (2.70)$$

Reciprocamente, se $\{E_m | m = 1, \dots, N\}$ é um conjunto de operadores positivos que satisfazem a relação de completiza (2.70), então os operadores $M_m \equiv \sqrt{E_m}$ satisfazem $E_m = M_m^\dagger M_m$ e $\sum_{m=1}^N M_m^\dagger M_m = \mathbf{I}$, e, conseqüentemente, definem uma medição gene-

realizada. Um POVM é justamente um conjunto $\{E_m | m = 1, \dots, N\}$ de operadores positivos que satisfazem a equação (2.70). Assim, se estamos interessados apenas na distribuição de probabilidades dos resultados de um experimento, e não no estado do sistema posterior à medição, podemos descrever a medição por meio de um POVM, com

$$p(m) = \text{tr}(E_m \rho), \quad (2.71)$$

onde usamos as equações (2.65), (2.68) e a propriedade cíclica do traço.

Por fim, notemos que existem infinitos procedimentos de medição que geram a mesma distribuição de probabilidades $p(m) = \text{tr}(E_m \rho)$, mas que produzem estados finais diferentes. De fato, se $\{U_m | m = 1, \dots, N\}$ é um conjunto de operadores unitários, então $\tilde{M}_m = U_m \sqrt{E_m}$ gera o mesmo POVM que $M_m = \sqrt{E_m}$,

$$E_m = \tilde{M}_m^\dagger \tilde{M}_m = M_m^\dagger M_m.$$

Comentamos que a noção de medição generalizada é motivada pelo fato de que medições projetivas sobre um sistema isolado atuam sobre um subsistema de uma maneira que não pode, em geral, ser descrita como uma medição projetiva sobre o subsistema isoladamente. Vamos ilustrar esse fato com um exemplo concreto [26]. Consideremos um sistema composto S^{AB} formado pelos subsistemas S^A e S^B , que assumimos, por simplicidade, serem sistemas de dois níveis. Vamos denotar a base computacional de estados em \mathcal{H}^A por $\{|0^A\rangle, |1^A\rangle\}$ e, analogamente, a base computacional de estados em \mathcal{H}^B por $\{|0^B\rangle, |1^B\rangle\}$, onde $\sigma_z^X |0^X\rangle = |0^X\rangle$ e $\sigma_z^X |1^X\rangle = -|1^X\rangle$ para $X = A, B$. Interações e emaranhamento entre os dois subsistemas podem ocorrer, de modo que os subsistemas S^A e S^B são abertos, embora o sistema composto S^{AB} seja fechado. Assim, S^{AB} pode sofrer tanto uma evolução unitária quanto receber medições projetivas. Vamos assumir que o estado inicial do sistema composto em $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ é separável e descrito pelo operador densidade

$$\rho^{AB} = \rho^A \otimes |0^B\rangle\langle 0^B|, \quad (2.72)$$

e que ele evolui segundo a transformação unitária sobre $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$

$$U^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x^A \otimes I^B + \sigma_y^A \otimes \sigma_x^B) \quad (2.73)$$

para o estado emaranhado

$$\begin{aligned}\rho'^{AB} &= U^{AB} \rho^{AB} U^{AB\dagger} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A \otimes |0^B\rangle\langle 0^B| + \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A \otimes |1^B\rangle\langle 1^B| \right. \\ &\quad \left. + \sigma_x^A \rho^A \sigma_y^A \otimes |0^B\rangle\langle 1^B| + \sigma_y^A \rho^A \sigma_x^A \otimes |1^B\rangle\langle 0^B| \right),\end{aligned}\tag{2.74}$$

onde usamos os fatos de que as matrizes de Pauli são auto-adjuntas, $\sigma_x|0\rangle = |1\rangle$ e $\sigma_x|1\rangle = |0\rangle$. Em particular, o sistema aberto S^A é então transformado no estado descrito pelo operador densidade reduzido

$$\rho^A \rightarrow \rho'^A = \text{tr}_B(\rho'^{AB}) = \frac{1}{2} (\sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A + \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A),\tag{2.75}$$

de acordo com a equação (2.17). Agora, suponhamos que é realizada uma medição projetiva sobre o segundo subsistema, S^B , e que ela é descrita pelos projetores ortogonais associados à base computacional de \mathcal{H}^B ,

$$P_+^B = |0^B\rangle\langle 0^B|, \quad P_-^B = |1^B\rangle\langle 1^B|.\tag{2.76}$$

As probabilidades de ocorrência dos resultados $+$ e $-$ são, de acordo com a equação (2.24),

$$p_+ = \text{tr}_B(P_+^B \rho'^B), \quad p_- = \text{tr}_B(P_-^B \rho'^B),\tag{2.77}$$

respectivamente, onde $\rho'^B = \text{tr}_A(\rho'^{AB})$ é operador densidade reduzido do subsistema S^B após a evolução unitária U^{AB} que provoca o seu emaranhamento com S^A . Seguindo-se à medição, o observador B comunica-se com o observador A e lhe informa qual resultado obteve. De posse dessa informação, o observador A sabe em qual estado o subsistema S^A foi preparado devido à intervenção sobre S^B . Desse modo, p_+ e p_- são também as probabilidades de que o sistema S^A seja preparado nos estados

$$\rho'^A \rightarrow \rho''_+^A = \text{tr}_B \left\{ \frac{(\mathbb{I}^A \otimes P_+^B) \rho'^{AB} (\mathbb{I}^A \otimes P_+^B)}{\text{tr}[(\mathbb{I}^A \otimes P_+^B) \rho'^{AB}]} \right\} = \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A\tag{2.78}$$

ou

$$\rho'^A \rightarrow \rho''_-^A = \text{tr}_B \left\{ \frac{(\mathbb{I}^A \otimes P_-^B) \rho'^{AB} (\mathbb{I}^A \otimes P_-^B)}{\text{tr}[(\mathbb{I}^A \otimes P_-^B) \rho'^{AB}]} \right\} = \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A\tag{2.79}$$

respectivamente, onde usamos as equações (2.3) e (2.5) para obter o estado completo do sistema após cada medição sobre o subsistema S^B , e a equação (2.17) para nos restringirmos aos graus de liberdade relativos ao sistema S^A . Vemos que os estados ρ''_{\pm}^A do subsistema S^A depois da medição sobre S^B não foram obtidos por meio de projeções sobre o estado inicial ρ^A . Vamos, porém, reescrever a equação (2.78) usando

as equações (2.72), (2.74) e (2.76):

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_+''^A &= \text{tr}_B [(\mathbf{I}^A \otimes |0^B\rangle\langle 0^B|) U^{AB} (\rho^A \otimes |0^B\rangle\langle 0^B|) U^{AB\dagger} (\mathbf{I}^A \otimes |0^B\rangle\langle 0^B|)] \\
&= \text{tr}_B [\langle 0^B | U^{AB} | 0^B \rangle \rho^A \langle 0^B | U^{AB\dagger} | 0^B \rangle \otimes |0^B\rangle\langle 0^B|], \\
&= \langle 0^B | U^{AB} | 0^B \rangle \rho^A \langle 0^B | U^{AB\dagger} | 0^B \rangle,
\end{aligned} \tag{2.80}$$

onde ignoramos temporariamente o fator de normalização do estado (o denominador da equação (2.78)). Assim, se introduzimos o operador

$$M_+^A \equiv \langle 0^B | U^{AB} | 0^B \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x^A, \tag{2.81}$$

que satisfaz

$$M_+^{A\dagger} M_+^A = \frac{1}{2} \mathbf{I}^A, \tag{2.82}$$

podemos escrever $\tilde{\rho}_+''^A$ diretamente a partir do estado inicial ρ^A como

$$\tilde{\rho}_+''^A = M_+^A \rho^A M_+^{A\dagger}. \tag{2.83}$$

Analogamente, podemos reescrever a equação (2.79), a menos de normalização, como

$$\tilde{\rho}_-''^A = M_-^A \rho^A M_-^{A\dagger}, \tag{2.84}$$

onde definimos o operador

$$M_-^A \equiv \langle 1^B | U^{AB} | 0^B \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_y^A, \tag{2.85}$$

que, por sua vez, também satisfaz

$$M_-^{A\dagger} M_-^A = \frac{1}{2} \mathbf{I}^A. \tag{2.86}$$

De maneira similar, e usando o fato de que $(P_+^B)^2 = P_+^B$, a propriedade cíclica do traço e $\rho'^B = \text{tr}_A(\rho'^{AB})$, podemos reescrever a probabilidade p_+ dada pela equação (2.77) como

$$\begin{aligned}
p_+ &= \text{tr}_B(P_+^B \rho'^B) = \text{tr}_B(P_+^B \rho'^B P_+^B) \\
&= \text{tr}_B \{ |0^B\rangle\langle 0^B| \text{tr}_A [U^{AB} (\rho^A \otimes |0^B\rangle\langle 0^B|) U^{AB\dagger}] |0^B\rangle\langle 0^B| \}.
\end{aligned}$$

Como os traços sobre S^A e S^B comutam, obtemos

$$\begin{aligned}
p_+ &= \text{tr}_A \{ \text{tr}_B [\langle 0^B | U^{AB} | 0^B \rangle \rho^A \langle 0^B | U^{AB\dagger} | 0^B \rangle |0^B\rangle\langle 0^B|] \} \\
&= \text{tr}_A [\langle 0^B | U^{AB} | 0^B \rangle \rho^A \langle 0^B | U^{AB\dagger} | 0^B \rangle].
\end{aligned}$$

Logo, usando a equação (2.81), podemos escrever p_+ exclusivamente em termos das variáveis do subsistema S^A :

$$p_+ = \text{tr}_A(M_+^A \rho^A M_+^{A\dagger}). \quad (2.87)$$

Analogamente obtemos

$$p_- = \text{tr}_A(M_-^A \rho^A M_-^{A\dagger}). \quad (2.88)$$

Finalmente, partindo das equações (2.83) e (2.84), e usando as equações (2.87) e (2.88), podemos escrever os estados normalizados $\rho_+^{\prime\prime A}$ e $\rho_-^{\prime\prime A}$ como

$$\rho_+^{\prime\prime A} = \frac{M_+^A \rho^A M_+^{A\dagger}}{p_+} \quad (2.89)$$

e

$$\rho_-^{\prime\prime A} = \frac{M_-^A \rho^A M_-^{A\dagger}}{p_-}. \quad (2.90)$$

Podemos notar que as equações (2.87) e (2.88) para as probabilidades p_+ e p_- têm exatamente a forma da equação (2.65), e as equações (2.89) e (2.90) para os estados após a medição têm a forma exata da equação (2.66). Além disso, os operadores M_+^A e M_-^A , em virtude das equações (2.82) e (2.86), satisfazem a relação de completeza

$$M_+^{A\dagger} M_+^A + M_-^{A\dagger} M_-^A = \mathbb{I}^A, \quad (2.91)$$

conforme requerido para medições generalizadas, equação (2.64). Vemos assim, nesse exemplo concreto, como uma medição projetiva sobre um sistema emaranhado atua num dos subsistemas como uma medição generalizada, se focamos a descrição nesse subsistema isoladamente.

2.2 Transformação relativística de estados quânticos

Uma das questões fundamentais quando se estuda a formulação relativística da teoria de informação quântica é como transformar estados quânticos entre diferentes referenciais de Lorentz. Em outras palavras, supondo que num dado referencial inercial seja preparado um estado quântico $|\psi\rangle$, qual é a forma que esse estado assume quando observado em outro referencial de Lorentz, em movimento em relação ao primeiro? Estamos interessados, aqui, em estados de partículas livres. Tratamentos detalhados desse problema podem ser encontrados nos livros de Weinberg [7] e de Bogolubov, Logunov e Todorov [104] (veja também a Seção 4.1 e o Apêndice C da referência [103]).

Consideremos, pois, uma partícula livre, cujo estado pode ser genericamente escrito,

na representação de momentum, na forma

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \int d\mu(p) \psi_{\sigma}(p) |\sigma, p\rangle, \quad (2.92)$$

onde σ representa seus graus de liberdade internos (spin ou polarização), $d\mu(p)$ é a medida invariante de Lorentz,

$$d\mu(p) = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2p^0)} \quad (2.93)$$

com $p^0 = E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, e $|\sigma, p\rangle$ representa os vetores da base do espaço de estados, os quais satisfazem

$$\langle\sigma, p|\xi, q\rangle = (2\pi)^3(2p^0) \delta_{\sigma\xi} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (2.94)$$

O estado $|\psi\rangle$ satisfaz

$$\langle\sigma, p|\psi\rangle = \psi_{\sigma}(p), \quad (2.95)$$

onde $\psi_{\sigma}(p)$ é o que chamamos propriamente de função de onda (na representação de momentum), e definimos o produto interno

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{\sigma} \int d\mu(p) \psi_{\sigma}^*(p) \phi_{\sigma}(p), \quad (2.96)$$

onde $|\phi\rangle$ representa um segundo estado quântico. A condição de normalização do estado $|\psi\rangle$, dado pela equação (2.92), pode então ser escrita como

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \int d\mu(p) \psi_{\sigma}^*(p) \psi_{\sigma}(p) = 1. \quad (2.97)$$

Sob uma transformação de Lorentz Λ , que transforma linearmente o momentum conforme $p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$, a transformação linear unitária dos vetores $|\sigma, p\rangle$ da base é dada por

$$U(\Lambda) |\sigma, p\rangle = \sum_{\xi} D_{\xi\sigma}[W(\Lambda, p)] |\xi, \Lambda p\rangle, \quad (2.98)$$

onde $D_{\xi\sigma}$ são os elementos de matriz do operador unitário D que corresponde à rotação de Wigner [105, 106] $W(\Lambda, p)$, dada por

$$W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p), \quad (2.99)$$

onde $L(p)$ é uma matriz de boost padrão que transforma um 4-momentum padrão k_P em p . Para partículas massivas, $k_P = (m, 0, 0, 0)$; para partículas sem massa, $k_P = (1, 0, 0, 1)$. Como a transformação U é linear, sua ação sobre a base $|\sigma, p\rangle$,

dada pela equação (2.98), é suficiente para determinar completamente sua ação sobre qualquer estado.

A função de onda expressa na equação (2.95), então, transforma-se como

$$\begin{aligned}
\psi'_\xi(q) &= \langle \xi, q | U(\Lambda) \sum_\sigma \int d\mu(p) \psi_\sigma(p) | \sigma, p \rangle \\
&= \sum_{\sigma, \chi} \int d\mu(p) \psi_\sigma(p) D_{\chi\sigma}[W(\Lambda, p)] \langle \xi, q | \chi, \Lambda p \rangle \\
&= \sum_\sigma D_{\xi\sigma}[W(\Lambda, \Lambda^{-1}q)] \psi_\sigma(\Lambda^{-1}q).
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Desse modo, o estado no referencial do boost é

$$|\psi'\rangle = \sum_{\sigma, \xi} \int d\mu(p) D_{\sigma\xi}[W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)] \psi_\xi(\Lambda^{-1}p) | \sigma, p \rangle. \tag{2.101}$$

Neste trabalho, estamos interessados em dois casos particulares: o de partículas massivas de spin 1/2, como o elétron, e o de fótons, partículas sem massa de spin 1. Para uma partícula de spin 1/2 e massa m , considerando-se um boost Λ , $D[W(\Lambda, \Lambda^{-1}p)]$ é dado por

$$D[W(\Lambda, q)] = \frac{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (q^0 + m) \mathbf{I}}{\sqrt{(q^0 + m)(p^0 + m)}} + \frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) [\mathbf{q} \cdot \hat{e} + i(\hat{e} \times \mathbf{q}) \cdot \vec{\sigma}]}{\sqrt{(q^0 + m)(p^0 + m)}}, \tag{2.102}$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade 2×2 , $\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ é o vetor de Pauli, $\alpha = \tanh^{-1} v$ é a rapidez do boost, \hat{e} é o vetor unitário que dá a direção do boost, e denotamos $q = \Lambda^{-1}p$. No caso de um fóton e um boost Λ , temos

$$D_{\lambda\lambda'}[W(\Lambda, q)] = e^{-i\lambda\Theta(\Lambda, \hat{q})} \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{2.103}$$

onde $\Theta(\Lambda, \hat{q})$ é um fator de fase cuja forma é dada em [107], e novamente escrevemos $q = \Lambda^{-1}p$. Para o nosso caso de interesse, que é o de um boost $\Lambda_{\mathcal{Z}}$ ao longo da direção z , temos simplesmente

$$D_{\lambda\lambda'}[W(\Lambda_{\mathcal{Z}}, q)] = \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{2.104}$$

ou seja, o fator de fase é nulo.

2.3 Entropia de von Neumann de spin e relatividade especial

Em 2002, Peres, Scudo e Terno, num trabalho seminal [57] para a teoria relativística da informação quântica, mostraram que o operador densidade reduzido de spin não é

covariante sob transformações de Lorentz e que a entropia de von Neumann de spin não é um escalar relativístico, não tendo significado invariante.

Uma das consequências da relatividade sobre a mecânica quântica é que ela implica a existência de uma hierarquia das variáveis dinâmicas que descrevem um sistema. *Variáveis primárias* são aquelas cuja lei de transformação relativística depende apenas da matriz Λ da transformação de Lorentz, que satisfaz

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\lambda\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\lambda\sigma}. \quad (2.105)$$

Exemplos de variáveis primárias são as componentes do momentum de uma partícula, cuja lei de transformação é $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$. Já *variáveis secundárias* têm leis de transformação relativística que dependem, além de Λ , do momentum da partícula. É o caso, por exemplo, do spin e da polarização. Decorre disso que o operador densidade reduzido de uma variável secundária, embora possa ser bem definido em qualquer sistema de coordenadas, não admite nenhuma lei de transformação que relacione seus valores em diferentes referenciais de Lorentz.

Especificamente, o spin, sob uma transformação de Lorentz, sofre uma rotação de Wigner [105, 106] cuja direção e magnitude dependem do momentum da partícula. Como consequência, mesmo que o estado inicial seja um produto direto de uma função do momentum e de uma função do spin (ou seja, um estado separável), o estado transformado não é um produto direto, isto é, os graus de liberdade de spin e de momentum ficam emaranhados ⁴.

Consideremos uma partícula de spin 1/2 e massa m , como um elétron. A forma mais geral de um estado puro para uma tal partícula é

$$|\psi\rangle = \int d^3p \sum_{s=\uparrow,\downarrow} a_s(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, s\rangle, \quad (2.106)$$

onde $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ são autovetores de σ_z com autovalores 1/2 e $-1/2$, respectivamente, e $|\mathbf{p}\rangle$ representa um auto-estado de momentum. Estados mistos são formados por combinações convexas de estados dessa forma. Notamos que, na equação (2.106), não estamos usando a medida invariante de Lorentz $d\mu(p)$ dada pela equação (2.93); em vez disso, incluímos o fator $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ na lei de transformação relativística para estados quânticos, seguindo a convenção de Halpern [106] e Peres [57]. O estado representado pela equação (2.106) também pode ser escrito, na representação de momentum, em

⁴Esse tipo de emaranhamento não pode ser usado como recurso de comunicação quântica, pois os dois graus de liberdade emaranhados pertencem à mesma partícula, e não a dois subsistemas espacialmente separados.

notação bi-espinorial [104, 108], como

$$\psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{p}) \\ a_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (2.107)$$

onde as amplitudes $a_1(\mathbf{p})$ e $a_2(\mathbf{p})$ satisfazem a condição de normalização

$$\int d^3p \sum_{s=1,2} |a_s(\mathbf{p})|^2 = 1. \quad (2.108)$$

O operador densidade correspondente à equação (2.107) é

$$\rho(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \psi(\mathbf{p}')\psi^\dagger(\mathbf{p}'') = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{p}')a_1(\mathbf{p}'')^* & a_1(\mathbf{p}')a_2(\mathbf{p}'')^* \\ a_2(\mathbf{p}')a_1(\mathbf{p}'')^* & a_2(\mathbf{p}')a_2(\mathbf{p}'')^* \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

Se estamos interessados apenas em medições de spin, podemos tomar o traço sobre os graus de liberdade de momentum, obtendo o operador densidade reduzido de spin τ , dado por

$$\tau = \int d^3p \rho(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \int d^3p \psi(\mathbf{p})\psi^\dagger(\mathbf{p}). \quad (2.110)$$

Esse operador é suficiente para determinar as predições estatísticas para os resultados de todas as medições de spin sobre a partícula, desde que elas sejam realizadas por um aparato ideal que não é afetado pelo momentum. Tomado o traço sobre os momenta, ficamos simplesmente com um sistema de qubits. Assim, τ pode ser escrito em termos do vetor de Bloch [26], $\mathbf{n} = \text{tr}(\vec{\sigma}\tau)$, como

$$\tau = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & 1 - n_z \end{pmatrix}, \quad (2.111)$$

onde

$$n_z = \int d^3p [|a_1(\mathbf{p})|^2 - |a_2(\mathbf{p})|^2], \quad (2.112)$$

e

$$n_x - in_y = 2 \int d^3p a_1(\mathbf{p})a_2(\mathbf{p})^*. \quad (2.113)$$

A entropia de von Neumann de spin $S(\tau)$ é então dada por

$$S(\tau) = -\text{tr}(\tau \log \tau) = - \sum_{j=1,2} \lambda_j \log_2 \lambda_j, \quad (2.114)$$

onde λ_j , $j = 1, 2$, são os autovalores de τ , que podem ser expressos em termos do vetor de Bloch \mathbf{n} como

$$\lambda_j = \frac{1 \pm |\mathbf{n}|}{2}. \quad (2.115)$$

É um resultado consagrado [82, 22, 26] que ignorar alguns graus de liberdade podem deixar os outros num estado misto. É surpreendente e notável, contudo, que o grau de mistura dependa do referencial de Lorentz do observador. De fato, consideremos outro observador que se move com velocidade constante em relação àquele que preparou o estado dado pela equação (2.107). Como vimos na Seção 2.2, nesse referencial o estado da mesma partícula toma a forma

$$\psi'(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} b_1(\mathbf{p}) \\ b_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (2.116)$$

dada pela lei de transformação [7, 106, 109]

$$b_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}p)^0}{p^0}} \sum_{s=1,2} D_{rs}(\Lambda, \Lambda^{-1}p) a_s(\Lambda^{-1}\mathbf{p}), \quad (2.117)$$

para $r = 1, 2$, onde $\Lambda^{-1}\mathbf{p}$ representa a parte espacial do 4-vetor $\Lambda^{-1}p$ e D_{rs} é a matriz de rotação de Wigner [105] para uma transformação de Lorentz Λ , explicitamente dada por

$$D(\Lambda, q) = \frac{[\cosh(\frac{\alpha}{2})(q^0 + m)I + \sinh(\frac{\alpha}{2})\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}I - i \sinh(\frac{\alpha}{2})\vec{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{e})]}{\sqrt{(q^0 + m)(p^0 + m)}}. \quad (2.118)$$

Aqui, $q = \Lambda^{-1}p = (q^0, \mathbf{q})$ representa o 4-momentum no referencial de preparação do estado, com $q^0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$, I é a matriz identidade 2×2 , $\vec{\sigma}$ é o vetor de Pauli, $\alpha = \tanh^{-1} v$ é a rapidez do boost e \mathbf{e} é o vetor unitário que dá a direção do boost.

Em particular, consideremos que a partícula é preparada com spin \uparrow ao longo direção z , de modo que

$$\psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.119)$$

Nesse caso, segue-se das equações (2.112) e (2.113) que a única componente não-nula do vetor de Bloch é

$$n_z = 1. \quad (2.120)$$

Logo, o operador densidade reduzido de spin assume a forma simples

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.121)$$

cujos autovalores são 1 e 0. Por conseguinte, a entropia de spin no referencial de preparação é nula,

$$S(\tau) = 0. \quad (2.122)$$

Esse resultado é natural, considerando que a equação (2.119) representa um estado puro separável. Quando se ignoram os graus de liberdade de momentum no estado completo dado pela equação (2.119), ficamos simplesmente com estado de spin $|\uparrow\rangle$. Em resumo, no referencial de preparação do estado (2.119), spin e momentum não estão emaranhados, e a entropia de spin é nula.

Vamos agora analisar o mesmo estado no referencial de um observador que se move com velocidade v na direção x , ou seja, com 3-velocidade $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, de modo que $\mathbf{e} = \hat{x}$. Nesse caso, a transformação de Lorentz é

$$\Lambda_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha & 0 & 0 \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.123)$$

e a matriz de rotação de Wigner toma a forma

$$D(\Lambda_{\mathcal{X}}, q) = \frac{[\cosh(\frac{\alpha}{2})(q^0 + m)I + \sinh(\frac{\alpha}{2})q^x I - i \sinh(\frac{\alpha}{2})(q^z \sigma^y - q^y \sigma^z)]}{\sqrt{(q^0 + m)(p^0 + m)}}. \quad (2.124)$$

Para simplificar a notação, vamos introduzir as seguintes quantidades:

$$K \equiv \sqrt{\frac{q^0}{p^0}} \frac{1}{\sqrt{(q^0 + m)(p^0 + m)}}, \quad (2.125)$$

$$C \equiv \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.126)$$

$$S \equiv \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.127)$$

Assim, podemos reescrever D explicitamente como

$$D(\Lambda_{\mathcal{X}}, q) = \sqrt{\frac{p^0}{q^0}} K(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} C(q^0 + m) + S(q^x + iq^y) & -Sq^z \\ Sq^z & C(q^0 + m) + S(q^x - iq^y) \end{pmatrix}. \quad (2.128)$$

Com o auxílio das equações (2.117) e (2.128), obtemos as componentes de $\psi'(\mathbf{p})$, que são

$$b_1(\mathbf{p}) = K [C(q^0 + m) + S(q^x + iq^y)] a_1(\mathbf{q}) \quad (2.129)$$

e

$$b_2(\mathbf{p}) = KS q^z a_1(\mathbf{q}). \quad (2.130)$$

Notemos que o estado completo (isto é, incluindo graus de liberdade de momentum e de spin) do sistema, descrito no referencial em movimento, $\psi'(\mathbf{p})$, é puro, como no referencial de preparação. Contudo, enquanto no referencial de repouso tínhamos um estado separável, no referencial em movimento momentum e spin aparecem emaran-

nhados. Explicitamente, o estado para o observador em movimento é

$$\psi'(\mathbf{p}) = K \begin{pmatrix} C(q^0 + m) + S(q^x + iq^y) \\ Sq^z \end{pmatrix} a_1(\mathbf{q}). \quad (2.131)$$

O operador densidade correspondente é

$$\rho'(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}) = \psi'(\bar{\mathbf{p}})\psi'^{\dagger}(\tilde{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} b_1(\bar{\mathbf{p}})b_1(\tilde{\mathbf{p}})^* & b_1(\bar{\mathbf{p}})b_2(\tilde{\mathbf{p}})^* \\ b_2(\bar{\mathbf{p}})b_1(\tilde{\mathbf{p}})^* & b_2(\bar{\mathbf{p}})b_2(\tilde{\mathbf{p}})^* \end{pmatrix}. \quad (2.132)$$

O operador densidade reduzido de spin τ' no referencial em movimento é obtido, como anteriormente, tomando o traço sobre os graus de liberdade de momentum no operador densidade completo,

$$\tau' = \int d^3p \rho'(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n'_z & n'_x - in'_y \\ n'_x + in'_y & 1 - n'_z \end{pmatrix}, \quad (2.133)$$

onde agora

$$n'_z = \int d^3p [|b_1(\mathbf{p})|^2 - |b_2(\mathbf{p})|^2], \quad (2.134)$$

e

$$n'_x - in'_y = 2 \int d^3p b_1(\mathbf{p})b_2(\mathbf{p})^* \quad (2.135)$$

com $b_1(\mathbf{p})$ e $b_2(\mathbf{p})$ dados pelas equações (2.129) e (2.130), respectivamente.

É fundamental para o que o efeito relativístico se manifeste, conforme veremos adiante, que consideremos estados normalizáveis⁵, correspondentes a uma partícula espacialmente localizada, e não auto-estados de momentum, como é usual em livros-textos de física de partículas. Nesse último caso, o interesse está em estudar propriedades assintóticas de partículas, como elementos de matriz $\langle \text{in} | \text{out} \rangle$ necessários para o cálculo de seções de choque. Aqui, contudo, o foco não está em propriedades assintóticas, mas em como o emaranhamento, que é um recurso para comunicação, é definido para diferentes observadores. Além disso, estados normalizáveis são mais realistas, descrevendo melhor a física da maioria das partículas medidas em laboratórios ou utilizadas em aplicações. Em geral, uma partícula não tem momentum bem definido: o seu estado é uma superposição que envolve momenta em todas as direções. Mesmo nesse caso, contudo, ainda é possível perguntar qual é a componente de spin da partícula numa dada direção, visto que esse é um observável formalmente legítimo.

Consideremos, em particular, o caso em que o pacote de momentum, dado por $a_1(\mathbf{p})$, é gaussiano,

$$a_1(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{4}} w^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2w^2}\right), \quad (2.136)$$

⁵Mais precisamente, estados de norma finita.

ou seja, um estado de mínima incerteza em posição e momentum. O parâmetro $w > 0$ dá uma medida da dispersão do momentum no referencial de preparação.

Em primeiro lugar, é fácil verificar que as componentes não-diagonais de τ' anulam-se. De fato, usando as equações (2.133) e (2.135) com $b_1(\mathbf{p})$ e $b_2(\mathbf{p})$ dados pelas equações (2.129) e (2.130), respectivamente, K dado pela equação (2.125), e $a(\mathbf{p})$ dado pela equação (2.136), temos

$$\begin{aligned}\tau'_{12} &= \tau'_{21}{}^* = \int d^3p b_1(\mathbf{p})b_2(\mathbf{p})^* \\ &= \int d^3p \frac{q^0}{p^0} \frac{[C(q^0 + m) + S(q^x + iq^y)] Sq^z}{(q^0 + m)(p^0 + m)} a(\mathbf{q})^2.\end{aligned}$$

Agora notemos que d^3p/p^0 é um invariante relativístico, ou seja,

$$\frac{d^3p}{p^0} = \frac{d^3q}{q^0}. \quad (2.137)$$

Além disso, usando a transformação de Lorentz $p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu$ com a matriz Λ dada pela equação (2.123), temos

$$p^0 = \cosh \alpha q^0 - \sinh \alpha q^x = \cosh \alpha \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - \sinh \alpha q^x. \quad (2.138)$$

Com isso, podemos reescrever as componentes não-diagonais de τ' como

$$\tau'_{12} = \int d^3q \frac{[C(\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + m) + S(q^x + iq^y)] Sq^z}{(\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + m)(\cosh \alpha \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - \sinh \alpha q^x + m)} a(\mathbf{q})^2. \quad (2.139)$$

Sendo $a(\mathbf{q})$ uma função par de q^z , o integrando todo é ímpar em relação a essa variável, de modo que, como os limites de integração são simétricos em relação a $q^z = 0$, a integral se anula. Portanto,

$$\tau'_{12} = \tau'_{21} = 0, \quad (2.140)$$

ou, equivalentemente,

$$n'_x = n'_y = 0. \quad (2.141)$$

Quanto às componentes diagonais de τ' , usando o fato de que $\text{tr}(\tau') = 1$, concluimos que

$$\tau'_{11} + \tau'_{22} = 1. \quad (2.142)$$

Desse modo, precisamos calcular apenas uma dessas quantidades, a outra sendo automaticamente determinada pela equação (2.142). Vamos, então, calcular τ'_{22} . Nas

equações (2.132) e (2.133) lemos

$$\tau'_{22} = \int d^3p |b_2(\mathbf{p})|^2 = S^2 \int d^3p \frac{q^0}{p^0} \frac{(q^z)^2 a_1(\mathbf{q})^2}{(q^0 + m)(p^0 + m)},$$

onde usamos também as equações (2.125) e (2.130). Utilizando agora as equações (2.136), (2.137) e (2.138), chegamos a

$$\tau'_{22} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} w^{-3} S^2 \int d^3q \frac{(q^z)^2 \exp(-\mathbf{q}^2/w^2)}{\left(\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + m\right) \left(\cosh \alpha \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - \sinh \alpha q^x + m\right)}. \quad (2.143)$$

Essa é a integral que precisamos resolver. Vamos definir os parâmetros adimensionais

$$W = \frac{w}{m} \quad (2.144)$$

e

$$Q^\mu = \frac{q^\mu}{m}, \quad (2.145)$$

de modo que a equação (2.143) assume a forma

$$\tau'_{22} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} W^{-3} S^2 \int d^3Q \frac{(Q^z)^2 \exp(-\mathbf{Q}^2/W^2)}{\left(\sqrt{\mathbf{Q}^2 + 1} + 1\right) \left(\cosh \alpha \sqrt{\mathbf{Q}^2 + 1} - \sinh \alpha Q^x + 1\right)}. \quad (2.146)$$

O cálculo da integral pode ser feito analiticamente se os pacotes de momentum forem estreitos, isto é, se

$$W = \frac{w}{m} \ll 1. \quad (2.147)$$

Nesse caso, o integrando só assume valores significativos para valores pequenos de $|Q^\mu|$, devido ao produto com a gaussiana estreita centrada na origem. Vamos, assim, aproximar o integrando, mantendo apenas até termos quadráticos nas variáveis Q^μ . Como já há um fator $(Q^z)^2$ no numerador, tomamos no denominador apenas

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{Q}^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\mathbf{Q}^2)$$

e

$$\frac{1}{\cosh \alpha \sqrt{\mathbf{Q}^2 + 1} - \sinh \alpha Q^x + 1} = \frac{1}{1 + \cosh \alpha} + \mathcal{O}(\mathbf{Q}^2).$$

Assim, obtemos

$$\tau'_{22} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} W^{-3} \frac{\sinh^2(\alpha/2)}{1 + \cosh \alpha} \int d^3Q (Q^z)^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{Q}^2}{W^2}\right).$$

Chegamos, pois, a uma integral simples:

$$\begin{aligned} \int d^3Q (Q^z)^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{Q}^2}{W^2}\right) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{W^2}\right) \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \zeta^2 \exp\left(-\frac{\zeta^2}{W^2}\right) \\ &= (W\sqrt{\pi})^2 \times \frac{1}{2} W^3 \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} W^5 \pi^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Observando que $\sinh^2(\alpha/2) = (1/2)(\cosh\alpha - 1)$, concluímos que

$$\tau'_{22} \approx \frac{1}{8} W^2 \frac{\cosh\alpha - 1}{\cosh\alpha + 1}.$$

Mas $(\cosh\alpha - 1)/(\cosh\alpha + 1) = \tanh^2(\alpha/2)$ e, portanto, em primeira ordem de w/m , vale

$$\tau'_{22} = \frac{1}{8} \frac{w^2}{m^2} \tanh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.148)$$

Lembrando que $\tau'_{22} = (1 - n'_z)/2$, podemos ainda escrever

$$n'_z = 1 - \frac{1}{4} \frac{w^2}{m^2} \tanh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.149)$$

Portanto, resumizando, o operador densidade reduzido de spin no referencial em movimento é

$$\tau' = \begin{pmatrix} 1 - t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad (2.150)$$

onde, para abreviar a notação, definimos

$$t = \frac{1}{8} \frac{w^2}{m^2} \tanh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.151)$$

Esse operador já está diagonalizado, de modo que podemos ler diretamente os seus autovalores, t e $1 - t$. Logo, a entropia de spin no referencial em movimento é

$$S(\tau') = -t \log_2 t - (1 - t) \log_2(1 - t). \quad (2.152)$$

Vemos que, quando o detector está em movimento, a entropia de von Neumann de spin é positiva, em contraste com o caso em que o detector está em repouso em relação ao aparato de preparação do estado, quando ela é sempre nula, conforme mostra a equação (2.122). Segue-se também da equação (2.152) que, quando o momentum tem um valor bem definido, correspondendo à preparação de um estado que é autovetor de momentum, $S(\tau')$ se anula. De fato, nesse caso, $W \rightarrow 0$ e, por conseguinte, $t \rightarrow 0$; consequentemente, $S(\tau') \rightarrow 0$. Portanto, como afirmáramos, a utilização de um estado normalizável (especialmente localizado) é fundamental para que esse efeito relativístico se manifeste.

Concluimos, assim, que a entropia de von Neumann de spin não é um invariante relativístico, não possuindo nenhum significado invariante. Um estado puro num dado referencial será misto se analisado por um observador em movimento em relação a ele. Mais do que isso, o grau de mistura depende da velocidade do observador, conforme mostra a equação (2.152), onde $S(\tau')$ depende da rapidez α do boost por meio da quantidade t definida pela equação (2.151).

A não-invariância da entropia de von Neumann de spin é uma consequência do fato de que o operador densidade reduzido de spin τ não admite nenhuma lei de transformação covariante, exceto no caso em que o estado possui momentum bem definido; em geral, apenas o operador densidade completo ρ admite. A saber, se definimos

$$U(\Lambda, \Lambda^{-1}p) = \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}p)^0}{p^0}} D(\Lambda, \Lambda^{-1}p), \quad (2.153)$$

onde $D(\Lambda, \Lambda^{-1}p)$ é dada pela equação (2.118), o operador densidade completo transforma-se conforme

$$\rho'(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}) = \psi'(\bar{\mathbf{p}}) \psi^\dagger(\tilde{\mathbf{p}}) = U(\Lambda, \Lambda^{-1}\bar{p}) \psi(\Lambda^{-1}\bar{\mathbf{p}}) \psi^\dagger(\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}) U^\dagger(\Lambda, \Lambda^{-1}\tilde{p}),$$

ou seja,

$$\rho'(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}) = U(\Lambda, \bar{q}) \rho(\bar{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) U^\dagger(\Lambda, \tilde{q}), \quad (2.154)$$

onde escrevemos $\bar{q} = \Lambda^{-1}\bar{p}$, $\tilde{q} = \Lambda^{-1}\tilde{p}$ e usamos a equação (2.117). Embora o momentum \mathbf{p} transforme-se linearmente, a lei de transformação das componentes de spin dependem explicitamente de \mathbf{p} . Assim, quando calculamos τ , tomando o traço sobre os momenta em ρ , toda a informação sobre os graus de liberdade de momentum é perdida e se torna impossível obter τ' diretamente a partir de τ .

Uma consequência contundente desse resultado é que a noção de estado de spin de uma partícula não tem significado preciso se não especificamos o estado completo do sistema, incluindo os graus de liberdade de momentum. Podemos, naturalmente, definir formalmente o spin em qualquer referencial de Lorentz, mas não existe relação entre as predições estatísticas para a medição de observáveis em referenciais de Lorentz diferentes. Há completa ausência de uma lei de transformação que leve diretamente de τ a τ' . Em suma, para tratar relativisticamente o problema de uma partícula de spin 1/2 do ponto de vista informacional, onde a entropia de von Neumann desempenha um papel crucial, somos obrigados a considerar o estado completo do sistema, incluindo ao spin o momentum da partícula; para uma mudança de referencial (por exemplo, se um detector está em movimento em relação ao aparato de preparação), precisamos transformar o estado completo, aplicando uma rotação de Wigner, e só então tomar o traço sobre os momenta para obter o operador densidade reduzido de spin no referencial em movimento. Portanto, um operador densidade reduzido de spin é bem definido para

tudo referencial de Lorentz, mas não existe uma relação entre eles para referenciais diferentes. Esse efeito repercute na entropia de spin, que sofre da mesma limitação.

No problema que estudamos, a entropia calculada no referencial em movimento é maior do que a do referencial original, que é nula. Isso não significa, todavia, que uma transformação de Lorentz sempre aumente a entropia. Com efeito, suponhamos que preparamos uma partícula no estado $\psi'(\mathbf{p})$ dado pela equação (2.131), com entropia de spin positiva, conforme mostra a equação (2.152). Para um observador em movimento ao longo do eixo x , com velocidade $-v$ em relação a nós, o estado da partícula é $\psi(\mathbf{p})$, dado pela equação (2.119), e, portanto, para ele a entropia de spin da partícula é zero. Logo, a situação que estudamos pode ser perfeitamente invertida e, nesse caso, a entropia, em vez de aumentar, diminui. O dado relevante é que ela não assume o mesmo valor para diferentes observadores de Lorentz, independente de aumentar ou diminuir dependendo do referencial considerado.

2.4 As consequências de se focar nos graus de liberdade de polarização e o efeito Doppler relativístico em comunicação quântica

Em outra série de trabalhos fundadores [64, 65] (veja também as referências [63, 69]), Peres, Terno e Lindner, estudando agora partículas sem massa, mostraram que a definição usual de operador densidade reduzido falha para a polarização de fótons. Essas partículas, apesar de terem spin 1, possuem apenas dois estados de polarização linearmente independentes, devido à condição de transversalidade, que atua como uma regra de superseleção. Assim, esperar-se-ia uma matriz densidade reduzida de polarização 2×2 . Acontece que, sob uma rotação do sistema de coordenadas, uma tal matriz não se transforma de acordo com uma representação do grupo de rotações $O(3)$ e, como consequência, as probabilidades previstas por ela não são invariantes sob rotações [20, 63, 65, 69]. Apesar disso, os autores mostraram que é possível definir um operador densidade reduzido efetivo de polarização 3×3 , o qual depende não apenas do processo de preparação do estado, mas também do método de detecção utilizado pelo observador. Mais precisamente, esse operador densidade reduzido efetivo corresponde a uma classe restrita de POVMs, em termos da qual ele é calculado. Como consequência, não existem qubits puros de fótons nem estados de polarização exatamente ortogonais⁶ [64, 20, 21]. Assim, os efeitos relativísticos para fótons são essencialmente diferentes

⁶Esses resultados não-triviais valem quando os estados do fóton são normalizáveis, que é justamente o caso fisicamente realista. Se consideramos auto-estados de momentum, podemos descrever os estados de polarização do fóton como qubits (isto é, sistemas de dois níveis), e eles podem ser exatamente ortogonais. Essa última descrição é, contudo, idealista, uma vez que, na prática, o fóton é sempre espacialmente localizado.

daqueles para partículas massivas. Estudaremos esses aspectos em detalhes a partir da Seção 2.4.1.

Fótons são sistemas fundamentais para a teoria e a prática de informação quântica, por exemplo, em aplicações de criptografia quântica [110]. Idealmente, são transmitidos fótons isolados, estados de Fock de uma partícula; realisticamente, a transmissão é feita por meio de pulsos coerentes fracos que contêm, em média, menos de um fóton cada um. Dessa forma, recentemente, manipulações de um único fóton tornaram-se uma parte fundamental não apenas da ótica quântica, mas também de processamentos experimentais em informação quântica [111]. Uma base do espaço de estados de um fóton é formada por estados de momentum

$$|\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^i\rangle = |\mathbf{k}\rangle \otimes |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^i\rangle, \quad (2.155)$$

onde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ e rotulamos os dois auto-estados de helicidade ortogonais com $i = +, -$. Notemos que os estados de helicidade dependem do momentum \mathbf{k} , e que é satisfeita a condição de transversalidade,

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} = 0. \quad (2.156)$$

Vamos adotar a normalização para a base de momentum como

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 (2k^0) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}), \quad (2.157)$$

onde $k^0 = |\mathbf{k}|$ para o fóton. É bem sabido que a polarização é uma variável secundária: estados de polarização correspondentes a diferentes momenta pertencem a espaços de Hilbert distintos e não podem ser superpostos. Por exemplo, expressões como $c_1 |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + c_2 |\hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^-\rangle$ não fazem sentido se $\mathbf{k} \neq \mathbf{q}$. A base completa $\{|\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle, |\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\}$, porém, não viola essa regra de superseleção, dada a ortogonalidade dos estados de momentum⁷. Dessa forma, um estado geral de um fóton é dado por um pacote de onda na forma [112]

$$|\psi\rangle = \int d\mu(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \vec{\alpha}(\mathbf{k})\rangle, \quad (2.158)$$

onde o estado de polarização $|\vec{\alpha}(\mathbf{k})\rangle$ corresponde ao 3-vetor complexo

$$\vec{\alpha}(\mathbf{k}) = \alpha_+(\mathbf{k}) \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+ + \alpha_-(\mathbf{k}) \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^- \quad (2.159)$$

⁷Se os auto-estados de momentum não são ortogonais, a regra de superseleção não permite a base $\{|\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle, |\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\}$. Vamos exemplificar o tipo de dificuldade que surge nesse caso. Suponhamos que os estados de momentum sejam não-ortogonais e consideremos os auto-estados de um fóton $|\psi\rangle = |\mathbf{k}_1\rangle \otimes |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_1}^+\rangle$ e $|\phi\rangle = |\mathbf{k}_2\rangle \otimes |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_2}^+\rangle$. Então, o produto interno $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_1 \rangle \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_2}^+ | \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_1}^+ \rangle$ não está bem definido devido à quantidade $\langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_2}^+ | \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_1}^+ \rangle$, já que não faz sentido tomar o produto interno entre estados de polarização definidos em espaços de Hilbert distintos. Por outro lado, sendo os auto-estados de momentum ortogonais, temos $\langle \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_1 \rangle \propto \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$, e então $\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_2}^+ | \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_1}^+ \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_1}^+ | \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_1}^+ \rangle$, de modo que o problema desaparece. (Aqui, usamos a propriedade $f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$ da delta de Dirac.)

com normalização

$$|\alpha_+(\mathbf{k})|^2 + |\alpha_-(\mathbf{k})|^2 = 1, \quad (2.160)$$

e a medida invariante de Lorentz é

$$d\mu(\mathbf{k}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2k^0)}. \quad (2.161)$$

Desse modo, podemos reescrever o estado (2.158) na forma

$$|\psi\rangle = \int d\mu(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle \otimes [\alpha_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + \alpha_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle]. \quad (2.162)$$

Para o estado $|\psi\rangle$ ser normalizado, dada a equação (2.160), devemos ter

$$\int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (2.163)$$

De maneira mais geral, estados de um fóton podem ser descritos como misturas de termos com a forma da equação (2.158). Notemos que, em geral, esse estado apresenta emaranhamento dos graus de liberdade de momentum e de polarização; a exceção ocorre quando consideramos o caso pouco físico em que o fóton é descrito por auto-estados de momentum, quando o emaranhamento desaparece. Com efeito, suponhamos que os coeficientes α_+ e α_- são independentes do momentum \mathbf{k} e que $f(\mathbf{k}) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} (2k^0)^{\frac{1}{2}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})$. Nesse caso, é fácil verificar que o estado do fóton, segundo a equação (2.162), se torna

$$|\bar{\psi}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2q^0)^{\frac{1}{2}}} |\mathbf{q}\rangle \otimes (\alpha_+ |\hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^+\rangle + \alpha_- |\hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^-\rangle),$$

que é separável (corresponde, a menos de normalização, ao produto direto de um auto-estado de momentum, $|\mathbf{q}\rangle$, e de um estado de polarização, $\alpha_+ |\hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^+\rangle + \alpha_- |\hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^-\rangle$). Observemos que o estado $|\bar{\psi}\rangle$ não possui norma finita.

Para construir explicitamente os 3-vetores $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+$ e $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-$ que constituem a base de polarizações, vamos tomar um momentum padrão como referência, o qual, para fótons, é o 4-momentum tipo-luz

$$p^\mu = (1, 0, 0, 1). \quad (2.164)$$

Notemos que o 3-vetor correspondente é unitário e aponta ao longo do eixo z . Os 3-vetores complexos de polarização circular à direita e à esquerda correspondentes têm a forma

$$\hat{\epsilon}_p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i, 0) \quad (2.165)$$

e

$$\hat{\epsilon}_p^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i, 0) \quad (2.166)$$

respectivamente. Para o caso de polarização linear, basta tomarmos $\alpha_+ = (\alpha_-)^*$ na equação (2.159), de modo que $\vec{\alpha}(\mathbf{k})$ é real. Em geral, $\vec{\alpha}(\mathbf{k})$ complexo correspondente a polarização elíptica. Para um 3-momentum \mathbf{k} , os 3-vetores $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm}$ da base de helicidade são obtidos a partir de $\hat{\epsilon}_p^{\pm}$ a partir de uma rotação $R(\hat{k})$ apropriada,

$$\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} = R(\hat{k}) \hat{\epsilon}_p^{\pm}, \quad (2.167)$$

onde $\hat{k} = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$. A base do espaço de estados correspondente é, então, $\{|\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle, |\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\}$. Se usamos coordenadas esféricas para parametrizar \hat{k} na forma

$$\hat{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (2.168)$$

a matriz de rotação $R(\hat{k})$ que leva da direção espacial padrão $\hat{z} = (0, 0, 1)$ até \hat{k} é

$$R(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.169)$$

como se pode facilmente verificar por inspeção direta. Usando as equações (2.165), (2.166) e (2.167), obtemos

$$\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta \cos \phi - i \sin \phi, \cos \theta \sin \phi + i \cos \phi, -\sin \theta) \quad (2.170)$$

e

$$\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta \cos \phi + i \sin \phi, \cos \theta \sin \phi - i \cos \phi, -\sin \theta) \quad (2.171)$$

para os vetores complexos de polarização circular à direita e à esquerda, respectivamente, para um fóton de momentum \mathbf{k} .

Sob uma transformação de Lorentz Λ , o momentum $k^\mu = (\|\mathbf{k}\|, \mathbf{k})$ transforma-se linearmente,

$$k^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu. \quad (2.172)$$

Vamos denotar $k_\Lambda = \Lambda k$ e, em particular, escrever a parte espacial desse 4-vetor como

$$\mathbf{k}_\Lambda = (\Lambda^1{}_\nu k^\nu, \Lambda^2{}_\nu k^\nu, \Lambda^3{}_\nu k^\nu). \quad (2.173)$$

Os novos vetores da base de polarização podem ser obtidos, como antes, a partir de $\hat{\epsilon}_p$ por meio da rotação $R(\hat{k}_\Lambda)$ que leva de $\hat{z} = (0, 0, 1)$ até \mathbf{k}_Λ ,

$$\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^{\pm} = R(\hat{k}_\Lambda) \hat{\epsilon}_p^{\pm}. \quad (2.174)$$

Alternativamente, podemos obter $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^\pm$ diretamente de $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^\pm$,

$$\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^\pm = R(\hat{k}_\Lambda) R(\hat{k})^{-1} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^\pm. \quad (2.175)$$

Portanto, sob uma transformação de Lorentz geral, seja um boost ou uma rotação, a helicidade é preservada; muda apenas o momentum à qual ela se associa. Por outro lado, os estados quânticos e correspondentes vetores geométricos adquirem fases dependentes de helicidade,

$$\vec{\alpha}(\mathbf{k}) = \alpha_+(\mathbf{k}) \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+ + \alpha_-(\mathbf{k}) \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^- \rightarrow \vec{\alpha}(\mathbf{k}_\Lambda), \quad (2.176)$$

onde

$$\vec{\alpha}(\mathbf{k}_\Lambda) = \alpha_+(\mathbf{k}) e^{i\xi(\Lambda, \hat{k})} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^+ + \alpha_-(\mathbf{k}) e^{-i\xi(\Lambda, \hat{k})} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^-. \quad (2.177)$$

A forma explícita de $\xi(\Lambda, \hat{k})$ é dada em [65], onde também é deduzida em detalhes a forma dessa lei de transformação, e também em [107]. Assim, sob uma transformação de Lorentz Λ , os vetores da base do espaço de estados transformam-se como

$$|\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^\pm\rangle \rightarrow e^{\pm i\xi(\Lambda, \hat{k})} |\mathbf{k}_\Lambda, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^\pm\rangle, \quad (2.178)$$

e o estado geral $|\psi\rangle$ de um fóton, dado pela equação (2.158), transforma-se como

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \int d\mu(\mathbf{k}_\Lambda) f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}_\Lambda, \vec{\alpha}(\mathbf{k}_\Lambda)\rangle, \quad (2.179)$$

onde usamos o fato de que a medida de integração é invariante de Lorentz, $d\mu(\mathbf{k}) = d\mu(\mathbf{k}_\Lambda)$. Levando em conta a equação (2.177), temos

$$|\vec{\alpha}(\mathbf{k}_\Lambda)\rangle = \alpha_+(\mathbf{k}) e^{i\xi(\Lambda, \hat{k})} |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^+\rangle + \alpha_-(\mathbf{k}) e^{-i\xi(\Lambda, \hat{k})} |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^-\rangle, \quad (2.180)$$

e então podemos reescrever a equação (2.179) de forma mais explícita como

$$|\psi'\rangle = \int d\mu(\mathbf{k}_\Lambda) f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}_\Lambda\rangle \otimes \left[\alpha_+(\mathbf{k}) e^{i\xi(\Lambda, \hat{k})} |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^+\rangle + \alpha_-(\mathbf{k}) e^{-i\xi(\Lambda, \hat{k})} |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^-\rangle \right]. \quad (2.181)$$

Notemos que as funções f , α_+ e α_- são computadas com o momentum do fóton no referencial original⁸, \mathbf{k} . Observemos também que esse estado tem seus graus de liberdade de momentum e de polarização emaranhados.

⁸ Isso decorre do fato de que a transformação relativística do estado quântico pode ser representada por um operador unitário (e, portanto, linear), que atua somente sobre os auto-estados $|\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^\pm\rangle$ e não sobre os seus coeficientes. Na Seção 2.2, apresentamos a transformação do estado de um fóton explicitamente em termos desse operador unitário, equações (2.101) e (2.103), o que voltaremos a fazer na Seção 3.1 para um estado de dois fótons.

2.4.1 Operador densidade reduzido efetivo de polarização

Como vimos na seção anterior, no caso massivo o operador densidade reduzido de spin é bem definido em qualquer referencial de Lorentz, mas não existe nenhuma lei de transformação ligando esses operadores em referenciais diferentes; como consequência, a entropia de von Neumann de spin não tem nenhum significado invariante. Para o caso de fótons, a situação é ainda mais dramática. Tipicamente, a dispersão de momentum do fóton é muito pequena e a sua polarização é aproximadamente constante. Por conta disso, quando o interesse está apenas nos graus de liberdade de polarização, é comum simplesmente desprezar-se o momentum e descrever a polarização por meio de uma matriz densidade reduzida 2×2 , ou seja, tratar um sistema formalmente como um qubit, a unidade fundamental de informação quântica. Uma análise mais cuidadosa, contudo, mostra que a definição usual de um operador densidade reduzido falha para a polarização do fóton [64], sendo possível apenas definir uma matriz densidade reduzida efetiva 3×3 que corresponde a uma classe restrita de POVMs.

Como já comentamos, o estado de um fóton é descrito pela equação (2.158). Se estamos interessados apenas em medições de polarização, é natural definir o operador densidade reduzido correspondente como

$$\tilde{\rho} = \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 |\vec{\alpha}(\mathbf{k})\rangle\langle\vec{\alpha}(\mathbf{k})|, \quad (2.182)$$

conforme a maneira usual de definir um operador densidade reduzido. De forma mais explícita, usando os vetores da base de helicidade, teríamos

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 & \left[|\alpha_+(\mathbf{k})|^2 |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + \alpha_+(\mathbf{k}) \alpha_-^*(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-| \right. \\ & \left. + \alpha_-(\mathbf{k}) \alpha_+^*(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\alpha_-(\mathbf{k})|^2 |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-| \right], \end{aligned} \quad (2.183)$$

ou ainda, em forma explícita de matriz 2×2 ,

$$\tilde{\rho} = \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 \begin{pmatrix} |\alpha_+(\mathbf{k})|^2 & \alpha_+(\mathbf{k})\alpha_-^*(\mathbf{k}) \\ \alpha_-(\mathbf{k})\alpha_+^*(\mathbf{k}) & |\alpha_-(\mathbf{k})|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.184)$$

A regra de superseleção mencionada acima não proíbe essa definição [20, 69], uma vez que são somados apenas termos com mesmo momentum \mathbf{k} . Notemos que, como a polarização é uma variável secundária, explicitamente dependente do momentum, esse objeto não pode ter uma lei de transformação definida sob boosts, assim como ocorre com o operador densidade reduzido de spin para partículas massivas. Aqui, no caso do fóton, no entanto, a situação é ainda pior, pois o operador densidade reduzido de polarização definido acima falha mesmo para rotações [20, 69]. É um fato básico que POVMs representam aparatos de medida e devem transformar-se, sob rotações

do sistema de coordenadas, de acordo com uma representação do grupo de rotações $O(3)$; contudo, é possível provar [65, 63] que, para estados descritos pelo operador densidade dado pela equação (2.184), rotações do sistema de referência correspondem a elementos do grupo euclidiano $E(2)$, associados a translações e rotações num plano. Como consequência, se adotássemos o operador densidade reduzido de polarização acima definido, as probabilidades não seriam invariantes sob rotações. Esse problema inviabiliza completamente essa definição, mostrando que ela não é fisicamente aceitável. Consequentemente, *não existem qubits puros para fótons*⁹. É possível, apesar disso, definir um operador densidade reduzido *efetivo* para a polarização do fóton [64].

A rotulação dos estados de polarização por vetores euclidianos $\hat{\mathbf{k}}$ e o fato de que fótons são partículas de spin 1 sugerem o uso de matrizes 3×3 com entradas rotuladas pelas direções espaciais x , y e z . Classicamente, elas correspondem às diferentes direções do campo elétrico. Assim, por exemplo, quando o fóton propaga-se ao longo da direção z , de modo que o momentum é $\mathbf{k} = k\hat{z}$, os únicos elementos de matriz não-nulos do operador densidade reduzido efetivo ρ devem ser ρ_{xx} , ρ_{xy} , ρ_{yx} e ρ_{yy} .

Vamos começar construindo o elemento de matriz ρ_{xx} que dá, para um estado geral $|\psi\rangle$ do fóton, o valor esperado da polarização ao longo da direção x , independentemente do momentum \mathbf{k} . Como a polarização tem um vínculo com o momentum, assumir uma polarização independente do momentum significa implicitamente admitir fótons longitudinais. Logo, em termos de fótons transversais reais de momentum \mathbf{k} , esse problema sugere encontrar a direção mais próxima de \hat{x} que é perpendicular a \mathbf{k} . Isto é, procuramos um vetor complexo $\mathbf{e}_x(\mathbf{k})$ tal que

$$\mathbf{e}_x(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_x(\mathbf{k}) \cdot \hat{x} = \max. \quad (2.185)$$

Desse modo, estados de polarização independentes de momentum devem ter, além de uma parte transversal física, uma parte longitudinal não-física correspondente a um vetor de polarização $\hat{\epsilon}^L$ ao longo da direção de propagação,

$$\hat{\epsilon}^L = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}. \quad (2.186)$$

Em particular, um estado de polarização ao longo da direção x é dado por

$$|\hat{x}\rangle = x_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + x_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle + x_L(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^L\rangle, \quad (2.187)$$

onde as componentes são dadas por

$$x_{\pm}(\mathbf{k}) = \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} \cdot \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta \cos \phi \pm i \sin \phi) \quad (2.188)$$

⁹A não ser, como já comentamos, quando consideramos que o fóton é descrito por auto-estados de momentum, o que é, de qualquer forma, pouco realista.

e

$$x_L(\mathbf{k}) = \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^L \cdot \hat{x} = \hat{k} \cdot \hat{x} = \sin \theta \cos \phi. \quad (2.189)$$

Para calcular $x_{\pm}(\mathbf{k})$, usamos as equações (2.170) e (2.171), enquanto o cálculo de $x_L(\mathbf{k})$ é imediato, correspondendo simplesmente à projeção do versor \hat{k} ao longo do eixo x em coordenadas esféricas. É importante ressaltar que os estados da base de polarização são ortogonais,

$$\langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm} | \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^L \rangle = \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+ | \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^- \rangle = 0. \quad (2.190)$$

O estado dado pela equação (2.187) é normalizado,

$$|x_+(\mathbf{k})|^2 + |x_-(\mathbf{k})|^2 + |x_L(\mathbf{k})|^2 = 1, \quad (2.191)$$

como se pode verificar por cálculo direto. Assim, definimos o vetor de polarização física associado com a direção x como

$$\hat{e}_x(\mathbf{k}) = \frac{x_+(\mathbf{k}) \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+ + x_-(\mathbf{k}) \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-}{\sqrt{|x_+(\mathbf{k})|^2 + |x_-(\mathbf{k})|^2}}. \quad (2.192)$$

Notemos que esse vetor euclidiano é complexo e inclui apenas a parte física da polarização ao longo da direção x . Analogamente se definem $|\hat{y}\rangle$, $|\hat{z}\rangle$, $\hat{e}_y(\mathbf{k})$ e $\hat{e}_z(\mathbf{k})$. Observemos que

$$\langle \hat{x} | \hat{y} \rangle = \hat{x} \cdot \hat{y} = 0, \quad \langle \hat{x} | \hat{z} \rangle = \hat{x} \cdot \hat{z} = 0, \quad \langle \hat{y} | \hat{z} \rangle = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0. \quad (2.193)$$

Como o espaço de estados de polarizações é tridimensional, essas relações de ortogonalidade entre $|\hat{x}\rangle$, $|\hat{y}\rangle$ e $|\hat{z}\rangle$ garante que esses estados formam uma base desse espaço. Por conseguinte, eles satisfazem a relação de completeza

$$|\hat{x}\rangle\langle\hat{x}| + |\hat{y}\rangle\langle\hat{y}| + |\hat{z}\rangle\langle\hat{z}| = \mathbf{I}, \quad (2.194)$$

onde \mathbf{I} é o operador identidade no espaço tridimensional de estados de polarização, isto é, incluindo polarizações longitudinais.

Agora podemos definir o seguinte projetor correspondente à direção x ,

$$P_x = |\hat{x}\rangle\langle\hat{x}| \otimes \mathbf{I}_p = |\hat{x}\rangle\langle\hat{x}| \otimes \int d\mu(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}|, \quad (2.195)$$

onde \mathbf{I}_p é o operador identidade no espaço dos momenta. A ação de P_x sobre o estado genérico do fóton $|\psi\rangle$, dado pela equação (2.158), pode ser obtida a partir das equações

(2.187) e (2.190), resultando em

$$\begin{aligned}
P_x |\psi\rangle &= \left[|\hat{x}\rangle \langle \hat{x}| \otimes \int d\mu(\mathbf{q}) |\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}| \right] \left\{ \int d\mu(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle \otimes \left[\alpha_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + \alpha_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle \right] \right\} \\
&= \int d\mu(\mathbf{q}) \int d\mu(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \langle \mathbf{q}|\mathbf{k}\rangle \left[\alpha_+(\mathbf{k}) \langle \hat{x}|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + \alpha_-(\mathbf{k}) \langle \hat{x}|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle \right] |\mathbf{q}\rangle \otimes |\hat{x}\rangle \\
&= \int d^3q \int d\mu(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \left[\alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) + \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) \right] |\mathbf{q}\rangle \otimes |\hat{x}\rangle \\
&= \int d\mu(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \left[\alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) + \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) \right] |\mathbf{k}\rangle \otimes |\hat{x}\rangle. \tag{2.196}
\end{aligned}$$

Para calcular essa quantidade, também utilizamos a relação de ortogonalidade dos auto-estados de momentum, expressa na equação (2.157). De posse desse resultado, é fácil calcular o valor esperado do projetor P_x no estado $|\psi\rangle$. Usando o bra correspondente ao vetor (2.158) e a equação (2.196), temos

$$\begin{aligned}
\langle \psi | P_x | \psi \rangle &= \left\{ \int d\mu(\mathbf{q}) f^*(\mathbf{q}) \langle \mathbf{q}| \otimes \left[\alpha_+(\mathbf{q}) \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^+| + \alpha_-(\mathbf{q}) \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^-| \right] \right\} \\
&\quad \times \left\{ \int d\mu(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \left[\alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) + \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) \right] |\mathbf{k}\rangle \otimes |\hat{x}\rangle \right\} \\
&= \int d\mu(\mathbf{q}) \int d\mu(\mathbf{k}) f^*(\mathbf{q}) f(\mathbf{k}) \langle \mathbf{q}|\mathbf{k}\rangle \left[\alpha_+(\mathbf{q}) \alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^+|\hat{x}\rangle \right. \\
&\quad + \alpha_+(\mathbf{q}) \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^+|\hat{x}\rangle + \alpha_-(\mathbf{q}) \alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^-|\hat{x}\rangle \\
&\quad \left. + \alpha_-(\mathbf{q}) \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) \langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{q}}^-|\hat{x}\rangle \right] \\
&= \int d^3q \int d\mu(\mathbf{k}) f^*(\mathbf{q}) f(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \left[\alpha_+(\mathbf{q}) \alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{q}) \right. \\
&\quad + \alpha_+(\mathbf{q}) \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) + \alpha_-(\mathbf{q}) \alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{q}) \\
&\quad \left. + \alpha_-(\mathbf{q}) \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{q}) \right] \\
&= \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 \left[|\alpha_+(\mathbf{k})|^2 |x_+(\mathbf{k})|^2 + |\alpha_-(\mathbf{k})|^2 |x_-(\mathbf{k})|^2 \right. \\
&\quad \left. + \alpha_+(\mathbf{k}) \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) + \alpha_-(\mathbf{k}) \alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) \right].
\end{aligned}$$

É fácil ver que esse resultado pode ser reescrito como

$$\langle \psi | P_x | \psi \rangle = \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 |x_+(\mathbf{k}) \alpha_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{k}) \alpha_-(\mathbf{k})|^2. \tag{2.197}$$

Vemos, assim, que apenas a parte transversal (fisicamente aceitável) de $|\hat{x}\rangle$ aparece no valor esperado do projetor associado à direção x no estado genérico $|\psi\rangle$ de um fóton – ou seja, aparecem apenas as componentes $x_+(\mathbf{k})$ e $x_-(\mathbf{k})$, mas não $x_L(\mathbf{k})$. Observemos que $\langle \psi | P_x | \psi \rangle \geq 0$. É conveniente, como mais tarde ficará claro, definir o estado

correspondente à parte transversal de $|\hat{x}\rangle$ como

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_x(\mathbf{k})\rangle &= \left(|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-| \right) |\hat{x}\rangle \\ &= x_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + x_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle. \end{aligned} \quad (2.198)$$

O operador $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-|$, naturalmente, é o projetor transversal dos estados de polarização generalizados. De forma inteiramente análoga, definimos os estados generalizados (com uma componente longitudinal) de polarização $|\hat{y}\rangle$ e $|\hat{z}\rangle$, e também os operadores de projeção P_y e P_z correspondentes às direções y e z , respectivamente. Como antes, os valores esperados associados, $\langle\psi|P_y|\psi\rangle$ e $\langle\psi|P_z|\psi\rangle$, dependerão apenas da parte transversal de $|\hat{y}\rangle$ e de $|\hat{z}\rangle$. Além disso, também definimos de forma análoga as partes transversais de $|\hat{y}\rangle$ e $|\hat{z}\rangle$, que denotamos por $|\mathbf{b}_y(\mathbf{k})\rangle$ e por $|\mathbf{b}_z(\mathbf{k})\rangle$, respectivamente:

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_y(\mathbf{k})\rangle &= \left(|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-| \right) |\hat{y}\rangle \\ &= y_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + y_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle, \end{aligned} \quad (2.199)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_z(\mathbf{k})\rangle &= \left(|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-| \right) |\hat{z}\rangle \\ &= z_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + z_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle. \end{aligned} \quad (2.200)$$

É importante notar que esses três estados, $|\mathbf{b}_x(\mathbf{k})\rangle$, $|\mathbf{b}_y(\mathbf{k})\rangle$ e $|\mathbf{b}_z(\mathbf{k})\rangle$, não são nem normalizados nem mutuamente ortogonais. Se usamos coordenadas polares para escrever o momentum do fóton como $\hat{k} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, como na equação (2.168), então temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_x(\mathbf{k})\rangle &= \frac{\cos\theta \cos\phi + i \sin\phi}{\sqrt{2}} |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + \frac{\cos\theta \cos\phi - i \sin\phi}{\sqrt{2}} |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle \\ &= \sqrt{|x_+(\mathbf{k})|^2 + |x_-(\mathbf{k})|^2} |\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_x(\mathbf{k})\rangle. \end{aligned} \quad (2.201)$$

onde usamos as equações (2.188) e (2.192).

Agora, podemos definir um operador E_x que corresponde à parte física do projetor P_x , ou seja, que é equivalente a P_x para estados físicos (sem fótons longitudinais):

$$\begin{aligned} E_x &= \int d\mu(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \mathbf{b}_x(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{k}, \mathbf{b}_x(\mathbf{k})| \\ &= \int d\mu(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}| \otimes |\mathbf{b}_x(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_x(\mathbf{k})|. \end{aligned} \quad (2.202)$$

Analogamente definimos E_y e E_z . Os operadores E_x , E_y e E_z não são projetores, mas formam uma POVM no espaço de estados físicos. Primeiramente, notemos que eles

são todos positivos,

$$E_m \geq 0, \quad m = x, y, z. \quad (2.203)$$

Isso se segue da equação (2.197), que dá o valor esperado $\langle \psi | P_x | \psi \rangle$ do projetor P_x num estado físico $|\psi\rangle$ arbitrário. Como comentamos, para esse valor esperado contribuem apenas as componentes transversais do fóton. Assim, $\langle \psi | P_x | \psi \rangle = \langle \psi | E_x | \psi \rangle \geq 0$, pela própria construção de E_x . Esse fato também pode ser verificado diretamente, de maneira similar àquela empregada no cálculo da equação (2.197), e usando a equação (2.198). O mesmo argumento se aplica para E_y e E_z . Além disso, esses operadores satisfazem a relação de completeza

$$E_x + E_y + E_z = I_p \otimes I_{\perp \mathbf{k}}, \quad (2.204)$$

onde I_p é o operador identidade no espaço de momentum e $I_{\perp \mathbf{k}}$ é o operador identidade no espaço de polarizações transversais para um fóton de momentum \mathbf{k} . Para verificar esse fato, em primeiro lugar notemos que

$$E_x + E_y + E_z = \int d\mu(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}| \otimes \left[|\mathbf{b}_x(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_x(\mathbf{k})| + |\mathbf{b}_y(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_y(\mathbf{k})| + |\mathbf{b}_z(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_z(\mathbf{k})| \right].$$

Agora vamos tomar a equação (2.194),

$$|\hat{x}\rangle\langle\hat{x}| + |\hat{y}\rangle\langle\hat{y}| + |\hat{z}\rangle\langle\hat{z}| = I,$$

e aplicar simultaneamente pela direita e pela esquerda o projetor $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-|$, que é o projetor de estados de polarização generalizados sobre a sua parte física, transversal, o mesmo que usamos na definição de $|\mathbf{b}_x\rangle$ a partir de $|\hat{x}\rangle$ e equivalentemente para as outras direções. Como resultado, obtemos

$$|\mathbf{b}_x(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_x(\mathbf{k})| + |\mathbf{b}_y(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_y(\mathbf{k})| + |\mathbf{b}_z(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_z(\mathbf{k})| = |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-|.$$

Mas $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-|$ é justamente o operador identidade no espaço de polarizações físicas, que denotamos por $I_{\perp \mathbf{k}}$, de vez que $\{|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle, |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\}$ forma uma base desse espaço. Logo, podemos reescrever a equação anterior como a relação de completeza

$$|\mathbf{b}_x(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_x(\mathbf{k})| + |\mathbf{b}_y(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_y(\mathbf{k})| + |\mathbf{b}_z(\mathbf{k})\rangle\langle\mathbf{b}_z(\mathbf{k})| = I_{\perp \mathbf{k}}. \quad (2.205)$$

Segue-se imediatamente que

$$E_x + E_y + E_z = \int d\mu(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}| \otimes \left(|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+| + |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle\langle\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-| \right) = I_p \otimes I_{\perp \mathbf{k}},$$

conforme quisemos demonstrar. As equações (2.203) e (2.204) garantem que E_x , E_y e

E_z formam um POVM. Esses três elementos de POVM correspondem a medições de polarização independentes do momentum do fóton ao longo das direções correspondentes, x , y e z .

A construção da matriz densidade reduzida efetiva é realizada usando uma técnica padrão, desenvolvida por Chuang e Nielsen [113] para a reconstrução de matrizes de canais quânticos. Em primeiro lugar, vamos mudar a notação dos operadores E_x , E_y e E_z para incluir dois índices iguais, em vez de apenas um,

$$E_{xx} \equiv E_x, \quad E_{yy} \equiv E_y, \quad E_{zz} \equiv E_z, \quad (2.206)$$

onde E_x é dado pela equação (2.202) e E_y e E_z são definidos analogamente. Com esses operadores, construiremos os elementos diagonais da matriz densidade efetiva de polarização. Para construir os elementos não-diagonais, generalizamos a equação (2.206) definindo os operadores

$$\begin{aligned} E_{mn} &= \int d\mu(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \mathbf{b}_m(\mathbf{k})\rangle \langle \mathbf{k}, \mathbf{b}_n(\mathbf{k})| \\ &= \int d\mu(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| \otimes |\mathbf{b}_m(\mathbf{k})\rangle \langle \mathbf{b}_n(\mathbf{k})|, \quad m = x, y, z. \end{aligned} \quad (2.207)$$

Notemos que, apesar da notação, os operadores E_{mn} com $m \neq n$ não formam um POVM. A matriz densidade efetiva de polarização pode então ser definida como o valor esperado

$$\rho_{mn} = \langle \psi | E_{mn} | \psi \rangle, \quad m = x, y, z. \quad (2.208)$$

Cálculos inteiramente similares àqueles que utilizamos para a computação das equações (2.196) e (2.197) permitem reescrever o elemento de matriz ρ_{mn} como

$$\rho_{mn} = \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 \langle \vec{\alpha}(\mathbf{k}) | \mathbf{b}_m(\mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{b}_n(\mathbf{k}) | \vec{\alpha}(\mathbf{k}) \rangle, \quad m = x, y, z. \quad (2.209)$$

Essa é a expressão para o elemento de matriz do operador densidade efetivo correspondente a um estado de polarização $|\vec{\alpha}(\mathbf{k})\rangle$. Como já havíamos comentado, ρ depende não apenas do procedimento de preparação, por meio de $|\vec{\alpha}(\mathbf{k})\rangle$, mas também do método de detecção usado pelo observador – a saber, que ele meça a polarização ao longo de uma dada direção de forma independente do momentum do fóton, o que, classicamente, corresponde a medir o campo elétrico ao longo dessa direção específica. Isso porque ρ_{mn} depende dos operadores E_{mn} . É possível mostrar [20, 69] que a matriz densidade efetiva de polarização definida pela equação (2.209) obedece a lei de transformação usual sob uma rotação R , a saber, $\rho \rightarrow R\rho R^T$, de modo que as probabilidades dadas por ela são invariantes sob rotações, conformemente com a exigência física e ao contrário do que acontecia com o operador densidade reduzido de polarização ingênuo, dado pela equação (2.182), definido da maneira usual.

Vamos demonstrar que ρ dada pela equação (2.209) é de fato uma matriz densidade. Primeiramente, vamos calcular o seu traço usando a equação (2.208):

$$\begin{aligned}\text{tr}(\rho) &= \sum_n \rho_{nn} = \sum_n \langle \psi | E_{nn} | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_n E_{nn} | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{I}_p \otimes \mathbb{I}_{\perp \mathbf{k}} | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \psi \rangle = 1,\end{aligned}\tag{2.210}$$

onde usamos também as equações (2.206) e (2.204), e o fato de que o estado $|\psi\rangle$ é normalizado. Vamos mostrar, finalmente, que a matriz ρ é positiva. Notemos que ρ é um operador linear num espaço vetorial complexo de dimensão três. Seja, pois, u um vetor qualquer num tal espaço. Usando a equação (2.209), temos

$$\begin{aligned}\langle u | \rho | u \rangle &= u^T \rho u = \sum_m \sum_n u_m^* \rho_{mn} u_n \\ &= \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 \sum_{m,n} u_m^* \langle \vec{\alpha}(\mathbf{k}) | \mathbf{b}_m(\mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{b}_n(\mathbf{k}) | \vec{\alpha}(\mathbf{k}) \rangle u_n \\ &= \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 \sum_{m,n} u_m^* \langle \mathbf{b}_m(\mathbf{k}) | \vec{\alpha}(\mathbf{k}) \rangle^* \langle \mathbf{b}_n(\mathbf{k}) | \vec{\alpha}(\mathbf{k}) \rangle u_n \\ &= \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 \left\langle \sum_m u_m^* \mathbf{b}_m(\mathbf{k}) | \vec{\alpha}(\mathbf{k}) \right\rangle^* \left\langle \sum_n u_n \mathbf{b}_n(\mathbf{k}) | \vec{\alpha}(\mathbf{k}) \right\rangle \\ &= \int d\mu(\mathbf{k}) |f(\mathbf{k})|^2 \left| \left\langle \sum_n u_n \mathbf{b}_n(\mathbf{k}) | \vec{\alpha}(\mathbf{k}) \right\rangle \right|^2 \geq 0,\end{aligned}\tag{2.211}$$

onde também usamos o fato de que o produto interno é antilinear na primeira entrada, $\langle \sum_i a_i \psi | \phi \rangle = \sum_i a_i^* \langle \psi | \phi \rangle$, onde a_i são escalares complexos, e linear na segunda. Assim, concluímos que ρ tem traço um e é positiva, e portanto de fato é uma matriz densidade.

Os estados $|\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle$ que formam a base de estados de um fóton são produtos diretos de momentum e polarização. É fácil ver, usando a equação (2.178), que eles continuam sendo produtos diretos dessa forma sob transformações de Lorentz,

$$|\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle \rightarrow e^{\pm i \xi(\Lambda, \hat{k})} |\mathbf{k}_{\Lambda}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_{\Lambda}}^{\pm}\rangle = |e^{\pm i \xi(\Lambda, \hat{k})} \mathbf{k}_{\Lambda}\rangle \otimes |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_{\Lambda}}^{\pm}\rangle.\tag{2.212}$$

Todos os outros estados têm seus graus de liberdade de momentum e de polarização emaranhados, como mostra a equação (2.181). Como resultado, se nos restringimos a medições de polarização independentes de momentum, conforme descritas pelo POVM E_x, E_y, E_z e pela matriz densidade efetiva de polarização dada pela equação (2.209), não existem dois estados de polarização ortogonais. Isso pode ser visto como se segue [64]. Sejam $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ dois estados com a forma da equação (2.158); suas matrizes densidades de polarização efetivas, ρ_{Ψ} e ρ_{Φ} , respectivamente, são calculadas usando a equação (2.209). Como os estados completos $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ são emaranhados, ignorando os graus de liberdade de momentum para obter os estados de polarização ρ_{Ψ} e ρ_{Φ} , obtemos estados

mistos. Como consequência, ambas as matrizes são no mínimo de posto dois¹⁰. Como a dimensão total é três, segue-se que $\text{tr}(\rho_\Psi \rho_\Phi) > 0$. De fato, como ρ_Φ é um operador densidade, é positivo e, por conseguinte, auto-adjunto, podendo então ser diagonalizado. Isso significa que existe uma base ortonormal $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$ de autovetores de ρ_Φ , correspondentes a autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Assim, ρ_Φ admite a decomposição espectral

$$\rho_\Phi = \lambda_1 |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \lambda_2 |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| + \lambda_3 |\varphi_3\rangle\langle\varphi_3|.$$

Temos então

$$\rho_\Psi \rho_\Phi = \lambda_1 \rho_\Psi |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \lambda_2 \rho_\Psi |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| + \lambda_3 \rho_\Psi |\varphi_3\rangle\langle\varphi_3|,$$

e daí se segue que

$$\text{tr}(\rho_\Psi \rho_\Phi) = \lambda_1 \langle\varphi_1|\rho_\Psi|\varphi_1\rangle + \lambda_2 \langle\varphi_2|\rho_\Psi|\varphi_2\rangle + \lambda_3 \langle\varphi_3|\rho_\Psi|\varphi_3\rangle.$$

Como $\lambda_i \geq 0$ e $\langle\varphi_i|\rho_\Psi|\varphi_i\rangle \geq 0$, para $i = 1, 2, 3$, dada a positividade dos operadores densidades, concluímos imediatamente que $\text{tr}(\rho_\Psi \rho_\Phi) \geq 0$. Agora, como ρ_Φ tem posto no mínimo dois, no máximo um dos seus autovalores é nulo. Suponhamos que $\lambda_3 = 0$, de modo que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Assim, $\text{tr}(\rho_\Psi \rho_\Phi) = 0$ se, e somente se,

$$\lambda_1 \langle\varphi_1|\rho_\Psi|\varphi_1\rangle + \lambda_2 \langle\varphi_2|\rho_\Psi|\varphi_2\rangle = 0.$$

Como $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\langle\varphi_1|\rho_\Psi|\varphi_1\rangle, \langle\varphi_2|\rho_\Psi|\varphi_2\rangle \geq 0$, essa equação é satisfeita se e, somente se,

$$\langle\varphi_1|\rho_\Psi|\varphi_1\rangle = \langle\varphi_2|\rho_\Psi|\varphi_2\rangle = 0.$$

Mas, como ρ_Ψ é um operador positivo, para qualquer estado $|\phi\rangle$, $\langle\phi|\rho_\Psi|\phi\rangle = 0$ implica $\rho_\Psi|\phi\rangle = 0$. Dessa maneira, para que $\text{tr}(\rho_\Psi \rho_\Phi) = 0$ precisamos ter $\rho_\Psi|\varphi_1\rangle = \rho_\Psi|\varphi_2\rangle = 0$, o que contraria o fato de que ρ_Ψ tem posto no mínimo dois. Concluímos, assim, que $\text{tr}(\rho_\Psi \rho_\Phi) > 0$. Portanto, esses estados não são ortogonais¹¹, conforme quisemos demonstrar. Em síntese, *não existem estados de polarização exatamente ortogonais*. Como estados não-ortogonais não podem ser completamente distinguidos [22], uma consequência importante é que dois estados de polarização de um fóton não são perfeitamente distinguíveis.

¹⁰O posto (ou a característica) de uma matriz é igual ao seu número de linhas ou de colunas linearmente independentes. Um resultado fundamental de álgebra linear garante que o número de linhas e o número de colunas linearmente independentes de uma matriz são sempre iguais [114]. Se um operador densidade reduzido representa um estado puro, seu posto é sempre igual a um; se representa um estado misto, seu posto é sempre maior do que um, ou seja, no mínimo dois. [82, 26]

¹¹Se A e B são operadores lineares sobre \mathcal{H} , podemos definir um produto interno entre eles por meio do traço, $(A, B) \equiv \text{tr}(A^\dagger B)$. Como, em particular, operadores densidades são auto-adjuntos, $(\rho_\Psi, \rho_\Phi) = \text{tr}(\rho_\Psi \rho_\Phi) > 0$ implica que ρ_Ψ e ρ_Φ não são ortogonais [26].

2.4.2 O efeito Doppler relativístico em comunicação quântica

Para quantificar a distinguibilidade de um par de estados quânticos [64], podemos usar o critério mais simples, que é a probabilidade de erro P_E . Suponhamos que um observador recebe uma cópia de um de dois possíveis estados conhecidos, ρ_1 e ρ_2 , e realiza qualquer operação permitida pela mecânica quântica a fim de determinar qual estado foi fornecido. Para uma medição ótima, a probabilidade P_E de o observador dar uma resposta errada é [115]

$$P_E(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{tr}|\rho_1 - \rho_2|, \quad (2.213)$$

onde, para um operador A , o operador $|A|$ é definido como

$$|A| \equiv \sqrt{A^\dagger A}. \quad (2.214)$$

Peres e Terno mostraram [64] que a distinguibilidade de matrizes densidades de polarização depende do estado de movimento do observador. Consideremos dois estados que, se a dispersão de momentum pudesse ser ignorada, seriam $|k_A \hat{z}, \hat{\epsilon}_{k_A \hat{z}}^+\rangle$ e $|k_A \hat{z}, \hat{\epsilon}_{k_A \hat{z}}^-\rangle$, ou seja, estados de um fóton com momentum médio $k_A \hat{z}$, um com polarização circular à direita $\hat{\epsilon}_{k_A \hat{z}}^+$, e outro com polarização circular à esquerda $\hat{\epsilon}_{k_A \hat{z}}^-$. Vamos assumir que o momentum tem uma distribuição gaussiana,

$$f(\mathbf{k}) = N \exp\left[-\frac{(k_z - k_A)^2}{2\Delta_z^2}\right] \exp\left(-\frac{k_r^2}{2\Delta_r^2}\right), \quad (2.215)$$

onde N é um fator de normalização e assumimos que a dispersão radial é muito maior do que a dispersão ao longo do eixo z , mas muito menor do que o momentum médio k_A ,

$$\Delta_z \ll \Delta_r \ll k_A. \quad (2.216)$$

Assim, temos de analisar os estados

$$|\psi_\pm\rangle = \int d\mu(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^\pm\rangle \quad (2.217)$$

com $f(\mathbf{k})$ dada pela equação (2.215). É possível mostrar [64] que, em ordem dominante de

$$\Omega \equiv \frac{\Delta_r}{k_A}, \quad (2.218)$$

as matrizes densidades efetivas de polarização, conforme a equação (2.209), associadas aos estados $|\psi_+\rangle$ e $|\psi_-\rangle$ são

$$\rho_+ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \Omega^2 \right) \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \Omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.219)$$

$$\rho_- = \rho_+^*. \quad (2.220)$$

Então, com a mesma ordem de precisão, temos

$$P_E(\rho_+, \rho_-) = \frac{\Delta_r^2}{4k_A^2}. \quad (2.221)$$

Essa é a probabilidade de erro de identificação no referencial de preparação dos estados $|\Psi_+\rangle$ e $|\Psi_-\rangle$. Note que ela vai a zero se a dispersão de momentum dos estados é nula. Isso porque temos então um fóton com momentum bem definido $k_A \hat{z}$, e os estados de polarização $|\hat{\epsilon}_{k_A \hat{z}}^+\rangle$ e $|\hat{\epsilon}_{k_A \hat{z}}^-\rangle$ são ortogonais. A probabilidade de o observador errar na identificação dos estados, nesse caso, deve-se então exclusivamente ao fato de eles não terem momenta bem definidos. Para uma razão Δ_r/k_A da ordem de 10^{-3} , como é típico obter em laboratório [128], a probabilidade de erro de identificação é da ordem de apenas 10^{-7} .

Vamos considerar, agora, o caso em que o observador que recebe um dos dois possíveis estados e tenta identificá-lo está em movimento. Assumimos que ele se move com velocidade v ao longo do eixo z . Como mostramos na Seção 2.3, operadores densidades reduzidos não têm nenhuma lei de transformação sob boosts [57], exceto no caso particular de auto-estados de momentum; apenas o operador densidade completo tem. Assim, o único modo de calcular o operador densidade de polarização no referencial do boost é transformando o estado completo e só então tomando o traço sobre os graus de liberdade de momentum. De acordo com as equações (2.181) e (2.217), no referencial em movimento os estados $|\psi_+\rangle$ e $|\psi_-\rangle$ tornam-se

$$|\psi'_\pm\rangle = \int d\mu(\mathbf{k}_\Lambda) f(\mathbf{k}) e^{\pm i\xi(\Lambda, \hat{k})} |\mathbf{k}_\Lambda, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_\Lambda}^\pm\rangle, \quad (2.222)$$

Lembremos que $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^\pm = R(\hat{k}) \hat{\epsilon}_p^\pm$, onde os vetores unitários $\hat{\epsilon}_p^\pm$ são dados pelas equações (2.165) e (2.166), e, para \hat{k} parametrizado por coordenadas esféricas, a matriz de rotação $R(\hat{k})$ que leva $\hat{z} = (0, 0, 1)$ a $\hat{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ é dada pela equação (2.169). Assim, usando a equação (2.209), podemos escrever os operadores densidades efetivos de polarização correspondentes aos estados $|\psi'_\pm\rangle$ como

$$(\rho'_\pm)_{mn} = \int d\mu(\mathbf{k}_\Lambda) |f(\mathbf{k})|^2 \langle R(\hat{k}_\Lambda) \hat{\epsilon}_p^\pm | \mathbf{b}_m(\mathbf{k}) \rangle \langle \mathbf{b}_n(\mathbf{k}) | R(\hat{k}_\Lambda) \hat{\epsilon}_p^\pm \rangle. \quad (2.223)$$

Notemos que boosts puros preservam a orientação dos eixos coordenados e, conseqüentemente, não afetam os índices m e n de $(\rho'_{\pm})_{mn}$. Além disso, os fatores de fase $e^{\pm i\xi}$ claramente se cancelam para os auto-estados de helicidade.

Vamos usar coordenadas cilíndricas para parametrizar \mathbf{k} e $\mathbf{k}' \equiv \mathbf{k}_\Lambda$. Um boost ao longo do eixo z claramente preserva k_r e ϕ . Por outro lado, usando unidades tais que, além de $c = 1$, tenhamos $k_0 = 1$, obtemos das transformações de Lorentz:

$$k'_0 = \gamma(1 - vk_z), \quad k'_z = \gamma(k_z - v), \quad (2.224)$$

onde $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$. Seja θ o ângulo formado entre o eixo z e o 3-vetor \mathbf{k} . Então $k_z = |\mathbf{k}| \cos \theta$ e podemos reescrever k'_z na equação (2.224) como

$$k'_z = \gamma(|\mathbf{k}| \cos \theta - v),$$

ou ainda, já que $k_0 = 1$ implica $|\mathbf{k}| = 1$, como

$$k'_z = \gamma(\cos \theta - v). \quad (2.225)$$

Agora notemos que

$$\tan \theta = \frac{k_r}{k_z}. \quad (2.226)$$

Se, analogamente, definimos θ' como o ângulo formado entre o eixo z (que não é alterado pelo boost) e o 3-vetor \mathbf{k}' , temos também

$$\tan \theta' = \frac{k'_r}{k'_z}. \quad (2.227)$$

Logo, temos a relação

$$\tan \theta' = \frac{k_z}{k'_z} \tan \theta. \quad (2.228)$$

Usando $k_z = \cos \theta$ e a equação (2.225), essa relação assume a forma

$$\tan \theta' = \frac{\cos \theta}{\gamma(\cos \theta - v)} \tan \theta. \quad (2.229)$$

Como $\langle k_z \rangle = k_A$ e $\Delta_z \ll \Delta_r \ll k_A$, com $\langle k_r \rangle = 0$, concluímos da equação (2.226) que θ é muito pequeno. Assim, em ordem dominante dessa variável, a equação (2.229) torna-se

$$\tan \theta' \approx \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \theta.$$

Supondo que $v < 0$ (ou seja, que o observador se move no sentido decrescente do eixo z), o fator $\sqrt{(1+v)/(1-v)}$ é menor do que 1 e, assim, θ' também é pequeno. Logo,

a equação anterior pode ser aproximada por

$$\theta' \approx \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \theta. \quad (2.230)$$

A raiz quadrada nessa equação é o fator relativístico de Doppler usual. Como θ' é o ângulo entre o eixo z e o 3-vetor \mathbf{k}' , a matriz de rotação $R(\hat{k}_\Lambda)$ na equação (2.223) pode ser obtida usando-se θ' dado pela equação (2.230) na equação (2.169). Então, por cálculo direto, podemos mostrar [64] que as matrizes densidades efetivas de polarização ρ'_+ e ρ'_- têm a mesma forma, respectivamente, de ρ_+ e ρ_- dadas pelas equações (2.219) e (2.220), mas com a substituição

$$\Omega \rightarrow \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \Omega. \quad (2.231)$$

Segue-se que as probabilidades de erro de identificação no referencial do boost, P'_E , e no referencial de preparação, P_E , relacionam-se por

$$P'_E \approx \frac{1+v}{1-v} P_E, \quad (2.232)$$

para $\Delta_z \ll \Delta_r \ll k_A$ e $-1 < v < 0$. Portanto, *a distinguibilidade de matrizes densidades de polarização depende do estado de movimento do observador*. Encontramos para estados de um fóton o mesmo efeito Doppler obtido classicamente [64]. Notemos que, segundo a equação (2.232), P'_E tem de ser necessariamente menor do que P_E , nesse caso em que $v < 0$. Ou seja, o movimento do observador faz com que ele tenha menor chance de errar na identificação do estado recebido. Note ainda que, se o fóton está num auto-estado de momentum (sem dispersão), P'_E , como P_E , vai a zero, e o movimento não tem nenhum efeito.

Capítulo 3

Influência do movimento dos detectores em medições de desigualdades de Bell com fótons emaranhados

O emaranhamento desempenha um papel fundamental na mecânica quântica, sendo um dos seus aspectos mais distintivos e notáveis [27, 93]. Ele permite, através do teorema de Bell [95, 96], mostrar que nenhuma teoria de variáveis ocultas locais [116, 117] é capaz de reproduzir todas as previsões da mecânica quântica. Como já comentamos, o emaranhamento de estados quânticos é uma condição necessária para que a mecânica quântica viole as desigualdades de Bell, que são satisfeitas por todas as teorias realistas¹ e locais². Resultados experimentais contemporâneos confirmam a violação das desigualdades de Bell por mais de trinta desvios padrões [102]. Quanto a aplicações, o emaranhamento é um recurso essencial para a criptografia quântica [30, 31, 32, 33, 34], para o teletransporte quântico [35, 36], e para a codificação superdensa [37, 38], além de ser de grande importância para a concepção de computadores quânticos [39, 40, 41, 42]. Assim, é justo afirmar que o emaranhamento é o recurso-chave de toda a informação quântica. Conforme mencionamos anteriormente, o problema de medições de emaranhamento é complicado, tanto teórica quanto experimentalmente. Por isso, sendo o emaranhamento uma condição necessária para a violação das desigualdades de Bell, estas costumam ser usadas, na prática, para verificar a presença de emaranhamento num sistema quântico composto.

¹Denominamos teorias realistas aquelas que assumem que os sistemas microscópicos possuem propriedades físicas reais que determinam os resultados das medições quanto-mecânicas.

²Existem diversas noções de localidade em física. Neste contexto, teorias locais são aquelas que assumem que experimentos realizados simultaneamente a longas distâncias (mais precisamente, se os eventos de medição forem causalmente desconectados) não podem ter nenhuma influência um sobre o outro.

Devido a efeitos de perda e de descoerência [118, 119], em muitos contextos é difícil manter um sistema emaranhado por tanto tempo quanto seria desejado, problema que afeta, em particular, os computadores quânticos [120, 121]. Atualmente há um grande interesse em testar a mecânica quântica em grandes escalas de distância e de tempo e em implementar protocolos de informação quântica em escalas globais [122, 123, 124, 125, 126]. Fótons parecem ser os objetos físicos ideais para esses propósitos, mas, como a tecnologia atual limita o uso de fibras óticas nesse contexto a uma distância eficiente da ordem de até 100 km [127], a alternativa mais viável para alcançar maiores distâncias é a transmissão de fótons no espaço livre entre estações terrestres e satélites [53, 54, 55, 56]. Além de o fóton ser uma partícula intrinsecamente relativística, o que já gera efeitos não-triviais sobre a sua polarização, como estudamos na Seção 2.4, o fato de os satélites estarem em órbita, ou seja, em movimento relativo às estações terrestres, motiva um estudo relativístico desse tipo de projeto.

Dessa forma, aqui, em vez de discutir os enormes desafios tecnológicos relacionados a esses experimentos, focamos num efeito físico *intrínseco* colocado pelo uso de fótons e pelo movimento dos satélites quando a relatividade especial é levada em conta [78]. Vamos tratar esse problema estudando a desigualdade de Bell de Clauser-Horne-Shimony-Holt (desigualdade de Bell CHSH) [97] para dois fótons emaranhados quando um dos detectores move-se com certa velocidade em relação ao outro. Essa escolha é natural, uma vez que esse é o tipo de medição a ser realizada em futuros experimentos envolvendo satélites (veja, por exemplo, a referência [123] para o teste experimental da desigualdade de Bell no caso de transmissão de um par emaranhado de fótons no espaço livre entre estações terrestres). Analisar como a relatividade especial influencia as desigualdades de Bell para fótons emaranhados significa, tacitamente, estudar como ela influi sobre as correlações de polarização de um tal sistema.

3.1 Preparação do sistema e transformação relativística do estado de dois fótons emaranhados

Consideremos um sistema composto de dois fótons emaranhados, que rotularemos por A e B , conforme emitidos em sentidos opostos ao longo do eixo z por uma cascata atômica SPS [82]. As polarizações dessas duas partículas são medidas ao longo de direções arbitrárias definidas pelos vetores unitários \hat{a}_i e \hat{b}_j , respectivamente, que são ortogonais ao eixo z . Aqui, $i, j = 1, 2$, ou seja, para cada um dos fótons escolhemos, em princípio, duas direções diferentes para medir a sua polarização. Supomos que a distância entre os dois detectores é grande o suficiente para que as duas medições sejam causalmente desconectadas, isto é, os eventos de medição de polarização de fótons diferentes são separados por um intervalo espaço-temporal tipo-espaço.

Como já comentamos, qualquer teoria de variáveis ocultas locais satisfaz a desigual-

dade de Bell CHSH,

$$\left| E(\hat{a}_2, \hat{b}_1) + E(\hat{a}_2, \hat{b}_2) + E(\hat{a}_1, \hat{b}_1) - E(\hat{a}_1, \hat{b}_2) \right| \leq 2, \quad (3.1)$$

onde

$$E(\hat{a}_i, \hat{b}_j) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_n^A(\hat{a}_i) P_n^B(\hat{b}_j) \quad (3.2)$$

é a função de correlação de polarizações obtida após a repetição de um número N arbitrariamente grande de medições, e $P_n^A(\hat{a}_i)$ assume valor $+1$ ou -1 dependendo de a polarização do fóton A ser medida ao longo da direção definida por \hat{a}_i ou ortogonalmente a ela, respectivamente, e analogamente para $P_n^B(\hat{b}_j)$ em relação a \hat{b}_j . Conforme explanamos na Seção 2.1.3, a mecânica quântica pode violar essa desigualdade para estados emaranhados, e os testes experimentais confirmam os resultados previstos por essa teoria. Nosso interesse está em estudar a desigualdade (3.1) no contexto da mecânica quântica em conjunção com a relatividade especial, analisando como esta altera as correlações previstas por aquela.

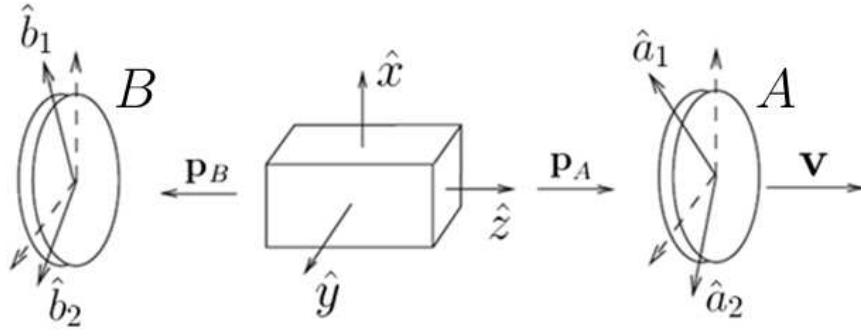


Figura 3.1: Consideramos que os fótons emaranhados propagam-se ao longo do eixo z . As medições de polarização são feitas no plano $x \perp y$, e o detector que faz medições sobre o fóton A move-se ao longo do eixo z em relação ao aparato de preparação.

Vamos, então, estudar a desigualdade de Bell CHSH conforme prevista pela mecânica quântica, porém colocando um dos detectores em movimento ao longo do eixo z , com velocidade $\mathbf{v} = (0, 0, v)$, como se carregado por um satélite, enquanto o outro permanece em repouso numa estação terrestre (veja a Figura 3.1 para uma ilustração do *setup* que estamos considerando). Usando a notação de Dirac, podemos escrever genericamente o estado normalizado de um sistema de dois fótons na forma [64, 69]

$$|\psi\rangle = \sum_{s_A, s_B} \int d^3k_A \int d^3k_B \psi_{s_A s_B}(\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B) |\mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_A}^{s_A}\rangle \otimes |\mathbf{k}_B, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_B}^{s_B}\rangle, \quad (3.3)$$

onde tomamos os auto-estados de momentum normalizados como

$$\langle \mathbf{k}'_X | \mathbf{k}_X \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}'_X - \mathbf{k}_X) \quad (3.4)$$

e os auto-estados de helicidade relativos a um mesmo momentum \mathbf{k}_X satisfazem

$$\langle \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^{s_X} | \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^{s'_X} \rangle = \delta_{s_X, s'_X}. \quad (3.5)$$

A função de onda $\psi_{s_A s_B}(\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B)$ satisfaz a condição de normalização

$$\sum_{s_A, s_B} \int d^3 k_A \int d^3 k_B |\psi_{s_A s_B}(\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B)|^2 = 1. \quad (3.6)$$

Aqui, $X = A, B$ distingue entre os dois fótons, $k_X = (\|\mathbf{k}_X\|, \mathbf{k}_X)$ é o 4-momentum da partícula X e $s_X = \pm$ rotula os dois auto-estados de helicidade ortogonais $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_X}^{s_X}\rangle$ para um 3-momentum \mathbf{k}_X fixado. Notamos que, de acordo com o que estudamos em detalhes na Seção 2.4, o estado $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^s\rangle$ está associado ao 3-vetor complexo

$$\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^s = R(\hat{k}) \hat{\epsilon}_z^s, \quad (3.7)$$

onde

$$\hat{\epsilon}_z^\pm \equiv (1/\sqrt{2})(1, \pm i, 0) \quad (3.8)$$

são 3-vetores complexos ortonormais do plano $x \perp y$ que correspondem a polarizações circulares à direita e à esquerda, para $s = +$ e $s = -$, respectivamente, e

$$R(\hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

é a matriz de rotação que leva a direção padrão $\hat{z} = (0, 0, 1)$ a

$$\hat{k} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} \equiv (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (3.10)$$

com θ, ϕ sendo os ângulos de coordenadas esféricas usuais.

Agora, usando $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^s\rangle$, definimos um novo par de estados normalizados [64]

$$|\hat{e}_x(\mathbf{k})\rangle = \frac{x_+(\mathbf{k})|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + x_-(\mathbf{k})|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle}{\sqrt{|x_+(\mathbf{k})|^2 + |x_-(\mathbf{k})|^2}}, \quad (3.11)$$

e

$$|\hat{e}_y(\mathbf{k})\rangle = \frac{y_+(\mathbf{k})|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + y_-(\mathbf{k})|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle}{\sqrt{|y_+(\mathbf{k})|^2 + |y_-(\mathbf{k})|^2}}, \quad (3.12)$$

associados como os 3-vetores unitários $\hat{e}_x(\mathbf{k})$ e $\hat{e}_y(\mathbf{k})$, que (i) estão contidos no plano ortogonal a \mathbf{k} e (ii) são os mais próximos a $\hat{x} = (1, 0, 0)$ e $\hat{y} = (0, 1, 0)$, respectivamente. Esses 3-vetores complexos correspondem, fisicamente, à polarização ao longo das direções x e y , respectivamente. Nas equações (3.11) e (3.12),

$$x_{\pm}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta \cos \phi \pm i \sin \phi), \quad (3.13)$$

$$y_{\pm}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta \sin \phi \mp i \cos \phi), \quad (3.14)$$

como mostramos na Seção 2.4, e ressaltamos que, em princípio, $\hat{e}_x(\mathbf{k})$ e $\hat{e}_y(\mathbf{k})$ não são mutuamente ortogonais. É fácil verificar que, para $\theta = \phi = 0$, recuperamos o resultado usual para os estados de polarização linear: $|\hat{e}_x(\hat{z})\rangle = (|\hat{e}_z^+\rangle + |\hat{e}_z^-\rangle)/\sqrt{2}$ e $|\hat{e}_y(\hat{z})\rangle = (|\hat{e}_z^+\rangle - |\hat{e}_z^-\rangle)/i\sqrt{2}$. Usando as equações (3.11) e (3.12), os estados de polarização horizontal $|H_X\rangle$ e vertical $|V_X\rangle$ podem ser definidos como

$$|H_X\rangle = \int d^3k f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{e}_x(\mathbf{k})\rangle \quad (3.15)$$

e

$$|V_X\rangle = \int d^3k f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{e}_y(\mathbf{k})\rangle, \quad (3.16)$$

onde a função $f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k})$ dá a dispersão de momentum do fóton³. Estamos, pois, adotando estado de polarização horizontal e vertical realistas, em que o momentum do fóton não é bem definido. Impondo que a dispersão se restrinja ao plano $x \perp y$ e seja descrita por uma função gaussiana, escrevemos

$$|f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k})|^2 = \pi^{-1} w^{-2} \delta(k^z - p_X^z) e^{-(k^r/w)^2}, \quad (3.17)$$

onde $w > 0$ é uma medida da dispersão transversal do momentum, $k^r \equiv \sqrt{(k^x)^2 + (k^y)^2}$ e assumimos que $\mathbf{p}_A = -\mathbf{p}_B = (0, 0, |p|)$, uma vez que os fótons A e B movem-se em sentidos opostos ao longo do eixo z .

Vamos assumir que o sistema de dois fótons foi preparado, no referencial da estação terrestre, no estado emaranhado⁴

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H_A\rangle \otimes |H_B\rangle + |V_A\rangle \otimes |V_B\rangle) \quad (3.18)$$

³Observamos que, nas equações (3.15) e (3.16), estamos adotando a mesma função de dispersão de momentum $f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k}_X)$ para os estados de polarização horizontal $|H_X\rangle$ e vertical $|V_X\rangle$. Em geral, essa coincidência não precisa ocorrer, mas aqui fazemos essa escolha por simplicidade. Ela significa que os estados $|H_X\rangle$ e $|V_X\rangle$ diferem apenas quanto aos seus graus de liberdade de polarização, tendo a mesma dependência dos graus de liberdade de momentum.

⁴Esse é o único estado de dois fótons invariante sob rotações em torno do eixo z e par sob reflexões. Ele é produzido numa cascata atômica SPS se os feixes são colimados ao longo do eixo z [82].

e investigar as correlações entre as suas polarizações no caso em que o detector que mede, por exemplo, o fóton A é carregado por um satélite que se move ao longo do eixo z com 3-velocidade $\mathbf{v} = (0, 0, v)$, enquanto o outro detector, que mede o fóton B , permanece em repouso na estação terrestre. Dessa forma, conforme estudamos na Seção 2.2, cada detector vai observar o estado $|\psi\rangle$, em seu referencial próprio, unitariamente transformado como [7, 106]

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = [U_A(\Lambda) \otimes I_B] |\psi\rangle, \quad (3.19)$$

onde I_B é o operador identidade no espaço de Hilbert da partícula B e o operador unitário $U_A(\Lambda)$ satisfaz

$$U_A(\Lambda) |\mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}_A}^{s_A}\rangle = \sqrt{\frac{(\Lambda k_A)^0}{k_A^0}} \sum_{s'_A=\pm} D_{s'_A s_A}(\Lambda, \mathbf{k}_A) |\Lambda \mathbf{k}_A, \hat{\epsilon}_{\Lambda \mathbf{k}_A}^{s'_A}\rangle. \quad (3.20)$$

Aqui, $D_{s'_A s_A}(\Lambda, \mathbf{k}_A)$ é a rotação de Wigner, que para fótons, como comentamos na Seção 2.4, apenas acrescenta uma fase dependente do boost Λ e de \hat{k}_A (confira as equações (2.178)-(2.181)). Ela pode ser escrita na forma

$$D_{s'_A s_A}(\Lambda, \mathbf{k}_A) = \exp[-i s'_A \Theta(\Lambda, \hat{k}_A)] \delta_{s'_A s_A}, \quad (3.21)$$

onde $\Theta(\Lambda, \hat{k}_A)$ é um fator de fase dado explicitamente em [63, 65, 107]. Observamos que $\Lambda \mathbf{k}_A$ denota a parte espacial do 4-vetor Λk_A ,

$$\Lambda \mathbf{k}_A = (\Lambda^1{}_\nu k_A^\nu, \Lambda^2{}_\nu k_A^\nu, \Lambda^3{}_\nu k_A^\nu), \quad (3.22)$$

e lembramos que, para o fóton

$$k^0 = \|\mathbf{k}\|. \quad (3.23)$$

Para a nossa escolha particular em que o satélite se move ao longo da direção z com velocidade v , a matriz de boost Λ é dada explicitamente por

$$\Lambda_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & 0 & \sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

onde definimos a rapidez da transformação de Lorentz como

$$\alpha \equiv -\tanh^{-1}v. \quad (3.25)$$

Nesse caso específico, o fator de fase é nulo [63, 65, 107],

$$\Theta(\Lambda_{\mathcal{Z}}, \mathbf{k}_A) = 0 \quad (3.26)$$

Usando as equações (3.18) e (3.19), obtemos prontamente

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H'_A\rangle \otimes |H_B\rangle + |V'_A\rangle \otimes |V_B\rangle), \quad (3.27)$$

onde

$$|H'_A\rangle = U_A(\Lambda_{\mathcal{Z}}) |H_A\rangle, \quad |V'_A\rangle = U_A(\Lambda_{\mathcal{Z}}) |V_A\rangle. \quad (3.28)$$

Para calcular a forma explícita de $|H'_A\rangle$, usamos as equações (3.15) e (3.11). Temos então

$$\begin{aligned} |H'_A\rangle &= \int d^3k f_{\mathbf{p}_A}(\mathbf{k}) U_A(\Lambda_{\mathcal{Z}}) |\mathbf{k}, \hat{e}_x(\mathbf{k})\rangle \\ &= \int d^3k f_{\mathbf{p}_A}(\mathbf{k}) \frac{x_+(\mathbf{k}) U_A(\Lambda_{\mathcal{Z}}) |\mathbf{k}, \hat{e}_{\mathbf{k}}^+\rangle + x_-(\mathbf{k}) U_A(\Lambda_{\mathcal{Z}}) |\mathbf{k}, \hat{e}_{\mathbf{k}}^-\rangle}{\sqrt{|x_+(\mathbf{k})|^2 + |x_-(\mathbf{k})|^2}}. \end{aligned}$$

Usando agora as equações (3.20), (3.21) e (3.26), obtemos

$$|H'_A\rangle = \int d^3k \sqrt{\frac{(\Lambda_{\mathcal{Z}}k)^0}{k^0}} f_{\mathbf{p}_A}(\mathbf{k}) \frac{x_+(\mathbf{k}) |\Lambda_{\mathcal{Z}}\mathbf{k}, \hat{e}_{\Lambda_{\mathcal{Z}}\mathbf{k}}^+\rangle + x_-(\mathbf{k}) |\Lambda_{\mathcal{Z}}\mathbf{k}, \hat{e}_{\Lambda_{\mathcal{Z}}\mathbf{k}}^-\rangle}{\sqrt{|x_+(\mathbf{k})|^2 + |x_-(\mathbf{k})|^2}}.$$

Realizando a mudança de variáveis $k \rightarrow \Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k$ (ou, equivalentemente, $\Lambda_{\mathcal{Z}}k \rightarrow k$), podemos reescrever a equação acima como

$$|H'_A\rangle = \int d^3(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k) \sqrt{\frac{k^0}{(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k)^0}} f_{\mathbf{p}_A}(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k}) \frac{x_+(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{e}_{\mathbf{k}}^+\rangle + x_-(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{e}_{\mathbf{k}}^-\rangle}{\sqrt{|x_+(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k})|^2 + |x_-(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k})|^2}}.$$

Agora notemos que, como já apontamos, a medida d^3k/k^0 é um invariante relativístico, de modo que

$$\frac{d^3(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k)}{(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k)^0} = \frac{d^3k}{k^0},$$

e então

$$d^3(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k) \sqrt{\frac{k^0}{(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k)^0}} = d^3k \sqrt{\frac{(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k)^0}{k^0}}.$$

Assim, concluimos que

$$|H'_A\rangle = \int d^3k \sqrt{\frac{(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}k)^0}{k^0}} f_{\mathbf{p}_A}(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k}) \frac{x_+(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{e}_{\mathbf{k}}^+\rangle + x_-(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{e}_{\mathbf{k}}^-\rangle}{\sqrt{|x_+(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k})|^2 + |x_-(\Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1}\mathbf{k})|^2}}. \quad (3.29)$$

Do mesmo modo podemos calcular $|V'_A\rangle$:

$$|V'_A\rangle = \int d^3k \sqrt{\frac{(\Lambda_{\mathbf{z}}^{-1}k)^0}{k^0}} f_{\mathbf{p}_A}(\Lambda_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{k}) \frac{y_+(\Lambda_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + y_-(\Lambda_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle}{\sqrt{|y_+(\Lambda_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{k})|^2 + |y_-(\Lambda_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{k})|^2}}. \quad (3.30)$$

Assim, sabemos exatamente qual é o estado sobre os quais serão realizadas as medições: é o estado $|\psi'\rangle$ dado pela equação (3.27), com $|H_B\rangle$ e $|V_B\rangle$ dados pelas equações (3.15) e (3.16), respectivamente, e $|H'_A\rangle$ e $|V'_A\rangle$ dados pelas equações (3.29) e (3.30), respectivamente⁵.

3.2 Medição das correlações de polarização

Vamos restringir as medições de polarização dos dois fótons ao plano $x \perp y$, de modo que é conveniente definir os operadores

$$P_{xx}^X = |\hat{x}_X\rangle\langle\hat{x}_X| \otimes I_{\mathbf{k}}^X, \quad P_{xy}^X = |\hat{x}_X\rangle\langle\hat{y}_X| \otimes I_{\mathbf{k}}^X, \quad (3.31)$$

$$P_{yy}^X = |\hat{y}_X\rangle\langle\hat{y}_X| \otimes I_{\mathbf{k}}^X, \quad P_{yx}^X = |\hat{y}_X\rangle\langle\hat{x}_X| \otimes I_{\mathbf{k}}^X, \quad (3.32)$$

onde $I_{\mathbf{k}}^X$ é o operador identidade do espaço de momenta da partícula X e

$$|\hat{x}\rangle \equiv x_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + x_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle + x_L(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^L\rangle \quad (3.33)$$

e

$$|\hat{y}\rangle \equiv y_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + y_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle + y_L(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^L\rangle \quad (3.34)$$

são estados de polarização associados aos vetores euclidianos unitários $\hat{x} = (1, 0, 0)$ e $\hat{y} = (0, 1, 0)$, respectivamente. Recordamos que $x_{\pm}(\mathbf{k})$ e $y_{\pm}(\mathbf{k})$ são dados pelas equações (3.13) e (3.14), respectivamente. Além disso, introduzimos

$$x_L(\mathbf{k}) \equiv \hat{x} \cdot \hat{k} = \sin \theta \cos \phi \quad (3.35)$$

e

$$y_L(\mathbf{k}) \equiv \hat{y} \cdot \hat{k} = \sin \theta \sin \phi. \quad (3.36)$$

Esse procedimento é estritamente similar àquele que adotamos na Seção 2.4, quando construímos uma matriz densidade efetiva de polarização para o fóton [64]. Introduzimos um estado de polarização longitudinal não-física $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^L\rangle$, associado ao 3-vetor $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^L \equiv \hat{k}$, para podermos expandir os estados $|\hat{x}\rangle$ e $|\hat{y}\rangle$ em termos dos vetores da base de helicidade, $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle$ e $|\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle$. É válido lembrar que $\langle\hat{x}^i|\hat{x}^j\rangle = \delta_{ij}$, que $\sum_i |\hat{x}^i\rangle\langle\hat{x}^i| = I$, e que $P_{x^i x^i}$

⁵Notemos que $|H_B\rangle$ e $|V_B\rangle$ podem ser obtidos de $|H'_A\rangle$ e $|V'_A\rangle$, respectivamente, fazendo as substituições $\Lambda_{\mathbf{z}}^{-1} \rightarrow I$ e $\mathbf{p}_A \rightarrow \mathbf{p}_B$.

é o operador de projeção associado à direção x^i , para $i = 1, 2, 3$ correspondendo a x , y e z , respectivamente. Apesar de a expressão desses operadores conter modos de polarização longitudinais, seus valores esperados, para estados físicos, dependem apenas das polarizações transversais. Como mostramos na Seção 2.4, para um estado genérico de um fóton na forma

$$|\Psi\rangle = \int d^3k f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle \otimes [\alpha_+(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^+\rangle + \alpha_-(\mathbf{k}) |\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^-\rangle], \quad (3.37)$$

o valor esperado do projetor $P_{xx} = |\hat{x}\rangle\langle\hat{x}| \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{k}}$ tem a forma

$$\langle\Psi|P_{xx}|\Psi\rangle = \int d^3k |f(\mathbf{k})|^2 |x_+(\mathbf{k}) \alpha_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{k}) \alpha_-(\mathbf{k})|^2, \quad (3.38)$$

(confira a equação (2.197)) onde podemos observar que só constam as componentes físicas $x_+(\mathbf{k})$ e $x_-(\mathbf{k})$. Analogamente, para o projetor $P_{yy} = |\hat{y}\rangle\langle\hat{y}| \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{k}}$ temos

$$\langle\Psi|P_{yy}|\Psi\rangle = \int d^3k |f(\mathbf{k})|^2 |y_+(\mathbf{k}) \alpha_+(\mathbf{k}) + y_-(\mathbf{k}) \alpha_-(\mathbf{k})|^2. \quad (3.39)$$

De modo completamente similar, é possível mostrar que, para o operador $P_{xy} = |\hat{x}\rangle\langle\hat{y}| \otimes \mathbf{I}_{\mathbf{k}}$, vale

$$\begin{aligned} \langle\Psi|P_{xy}|\Psi\rangle = \int d^3k |f(\mathbf{k})|^2 & \left[|\alpha_+(\mathbf{k})|^2 y_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) + |\alpha_-(\mathbf{k})|^2 y_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) \right. \\ & \left. + \alpha_+(\mathbf{k}) \alpha_-(\mathbf{k}) y_-(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) + \alpha_-(\mathbf{k}) \alpha_+(\mathbf{k}) y_+(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) \right], \quad (3.40) \end{aligned}$$

onde novamente só encontramos componentes transversais. Fazendo a substituição $x \leftrightarrow y$ na equação (3.40) obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \langle\Psi|P_{yx}|\Psi\rangle = \int d^3k |f(\mathbf{k})|^2 & \left[|\alpha_+(\mathbf{k})|^2 x_+(\mathbf{k}) y_+(\mathbf{k}) + |\alpha_-(\mathbf{k})|^2 x_-(\mathbf{k}) y_-(\mathbf{k}) \right. \\ & \left. + \alpha_+(\mathbf{k}) \alpha_-(\mathbf{k}) x_-(\mathbf{k}) y_+(\mathbf{k}) + \alpha_-(\mathbf{k}) \alpha_+(\mathbf{k}) x_+(\mathbf{k}) y_-(\mathbf{k}) \right]. \quad (3.41) \end{aligned}$$

Agora, usando as equações (3.31) e (3.32), podemos definir o operador

$$\sigma_\varphi^X = (P_{xx}^X - P_{yy}^X) \cos 2\varphi + (P_{xy}^X + P_{yx}^X) \sin 2\varphi, \quad (3.42)$$

que será usado para o cálculo do membro esquerdo da desigualdade de Bell CHSH, equação (3.1). Primeiramente, notemos que esse operador é auto-adjunto, o que se segue de que os projetores P_{xx} e P_{yy} são auto-adjuntos e de que $P_{xy}^\dagger = P_{yx}$. Agora, podemos verificar que σ_φ tem autovalores 1, -1 e 0. Usando as equações (3.31) e (3.32) e o fato de que $\langle\hat{x}^i|\hat{x}^j\rangle = \delta_{ij}$, é fácil calcular os elementos de matriz do operador σ_φ na

base de polarizações $\{|\hat{x}\rangle, |\hat{y}\rangle, |\hat{z}\rangle\}$ (que inclui polarizações longitudinais):

$$\begin{aligned}\langle \hat{x} | \sigma_\varphi | \hat{x} \rangle &= \cos 2\varphi, \\ \langle \hat{x} | \sigma_\varphi | \hat{y} \rangle &= \langle \hat{y} | \sigma_\varphi | \hat{x} \rangle^* = \sin 2\varphi, \\ \langle \hat{x} | \sigma_\varphi | \hat{z} \rangle &= \langle \hat{z} | \sigma_\varphi | \hat{x} \rangle^* = 0, \\ \langle \hat{y} | \sigma_\varphi | \hat{y} \rangle &= -\cos 2\varphi, \\ \langle \hat{y} | \sigma_\varphi | \hat{z} \rangle &= \langle \hat{z} | \sigma_\varphi | \hat{y} \rangle^* = 0, \\ \langle \hat{z} | \sigma_\varphi | \hat{z} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Assim, σ_φ pode ser escrito nessa base como a matriz

$$\sigma_\varphi = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Os autovalores ξ são então obtidos resolvendo a equação característica $\det(\sigma_\varphi - \xi\mathbf{I}) = 0$, que nesse caso é $\xi^3 - \xi = 0$, como se pode facilmente verificar. Daí segue imediatamente que os autovalores de σ_φ são 1, -1 e 0, como afirmáramos. Calculando os autovetores correspondentes, temos

$$\xi = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\xi = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

$$\xi = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Observemos na equação (3.43) que σ_φ é uma matriz bloco diagonal na base de polarizações $\{|\hat{x}\rangle, |\hat{y}\rangle, |\hat{z}\rangle\}$, sem nenhuma componente ao longo da direção z . Isso quer dizer que o operador σ_φ não mede polarizações ao longo dessa direção, restringindo-se ao plano $x \perp y$. As equações (3.44) e (3.45) significam que os autovalores $+1$ e -1 do operador σ_φ correspondem a auto-estados de polarização associados a direções que formam com o eixo x ângulos φ e $\varphi + \pi/2$, respectivamente⁶. Dessa forma, o significado físico do observável σ_φ fica claro. Segue-se que o operador produto $\sigma_\varphi^A \otimes \sigma_\varphi^B$ também tem autovalores 1 e -1 , correspondendo a resultados idênticos e opostos, respectivamente,

⁶Porque, para um vetor unitário \hat{n} que forma um ângulo β com o eixo x , temos $\hat{x} \cdot \hat{n} = \cos \beta$ e $\hat{y} \cdot \hat{n} = \sin \beta$.

nas medições de polarização sobre os fótons A e B .

Assim, a correlação entre as medições de polarização sobre as partículas A e B em direções definidas pelos ângulos φ e ϖ , respectivamente, é dada por [82]

$$\langle \sigma_\varphi^A \otimes \sigma_\varpi^B \rangle_\chi = \langle \chi | \sigma_\varphi^A \otimes \sigma_\varpi^B | \chi \rangle, \quad (3.47)$$

onde $|\chi\rangle$ é o estado do sistema de dois fótons. Em particular, para o estado $|\psi'\rangle$ dado pela equação (3.27), temos

$$\begin{aligned} \langle \sigma_\varphi^A \otimes \sigma_\varpi^B \rangle_{\psi'} = \frac{1}{2} [& \langle H'_A | \sigma_\varphi | H'_A \rangle \langle H_B | \sigma_\varpi | H_B \rangle + \langle H'_A | \sigma_\varphi | V'_A \rangle \langle H_B | \sigma_\varpi | V_B \rangle \\ & + \langle V'_A | \sigma_\varphi | H'_A \rangle \langle V_B | \sigma_\varpi | H_B \rangle + \langle V'_A | \sigma_\varphi | V'_A \rangle \langle V_B | \sigma_\varpi | V_B \rangle]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

É fácil verificar que, para $w \rightarrow 0$, ou seja, para fótons em auto-estados de momentum, $\langle \sigma_0^A \otimes \sigma_\varpi^B \rangle_{\psi'} \rightarrow \cos 2\varpi$, o que corresponde à lei de Malus (para $\varpi = 0$, temos resultados perfeitamente correlacionados e, para $\varpi = \pi/2$, perfeitamente anticorrelacionados). Notemos que, na equação acima, o segundo e o terceiro termos no membro direito diferem apenas por um complexo conjugado, uma vez que σ_φ e σ_ϖ são auto-adjuntos. Pela equação (3.42), podemos escrever $\langle H'_A | \sigma_\varphi | H'_A \rangle$ como

$$\begin{aligned} \langle H'_A | \sigma_\varphi | H'_A \rangle = & (\langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle - \langle H'_A | P_{yy} | H'_A \rangle) \cos 2\varphi \\ & + (\langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle + \langle H'_A | P_{yx} | H'_A \rangle) \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde, usando as equações (3.29), (3.31) e (3.32), e introduzindo a notação $q = \Lambda_{\mathcal{Z}}^{-1} k$, temos

$$\langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle = \int d^3k \frac{q^0}{k^0} |f_{p_A}(\mathbf{q})|^2 \frac{|x_+(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) x_-(\mathbf{k})|^2}{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2}, \quad (3.50)$$

$$\langle H'_A | P_{yy} | H'_A \rangle = \int d^3k \frac{q^0}{k^0} |f_{p_A}(\mathbf{q})|^2 \frac{|x_+(\mathbf{q}) y_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) y_-(\mathbf{k})|^2}{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2}, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle = \int d^3k \frac{q^0}{k^0} |f_{p_A}(\mathbf{q})|^2 & \frac{[x_+(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) x_-(\mathbf{k})]}{\sqrt{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2}} \\ & \times \frac{[x_+(\mathbf{q}) y_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) y_-(\mathbf{k})]}{\sqrt{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Enfatizemos que, aqui, as variáveis $\{q^0, \mathbf{q}\}$ referem-se ao momentum do fóton no referencial de preparação, ao passo que $\{k^0, \mathbf{k}\}$ referem-se ao momentum no referencial do boost. Essas equações são obtidas de modo inteiramente similar àquele que usamos

para calcular a equação (2.197) na Seção 2.4. Notemos ainda que

$$\langle H'_A | P_{yx} | H'_A \rangle = \langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle^*, \quad (3.53)$$

como é fácil ver nas equações (3.31) e (3.32). Cada um dos valores esperados da equação (3.48) tem uma forma similar à de $\langle H'_A | \sigma_\varphi | H'_A \rangle$. Para calcular as integrais acima, lembremos que os coeficientes x_\pm e y_\pm são dados pelas equações (3.13) e (3.14), ou seja, são escritos em termos das funções trigonométricas $\cos \theta$, $\cos \phi$ e $\sin \phi$. É fácil verificar que, para $\hat{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, valem as relações

$$\cos \theta = \frac{k^z}{\sqrt{(k^z)^2 + (k^r)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{k^r}{\sqrt{(k^z)^2 + (k^r)^2}}, \quad (3.54)$$

donde segue imediatamente que

$$\tan \theta = \frac{k^r}{k^z}. \quad (3.55)$$

Essas relações são úteis porque facilitam o cálculo das integrais em coordenadas cilíndricas.

Observemos que não precisamos repetir os cálculos para os dois fótons – por exemplo, calcular $\langle H_A | \sigma_\varphi | H_A \rangle$ e $\langle H_B | \sigma_\varphi | H_B \rangle$ – uma vez que as únicas diferenças entre os estados $|H_A\rangle$ e $|H_B\rangle$, e entre $|V_A\rangle$ e $|V_B\rangle$, estão na função de dispersão de momentum $f_{\mathbf{p}_X}(\mathbf{k}_X)$, com $\mathbf{p}_A = -\mathbf{p}_B = (0, 0, |p|)$, e no fato de que, para a partícula B , que está em repouso na estação terrestre, $v = 0$. Basta, pois, trocar o sinal de \mathbf{p}_X na forma integral explícita dos valores esperados para os dois fótons e tomar v nulo para $X = B$. Como consequência, precisamos calcular apenas os valores esperados para o fóton A , com os estados $|H'_A\rangle$ e $|V'_A\rangle$; os valores esperados para o fóton B são obtidos trocando o sinal de \mathbf{p}_A e fazendo a velocidade do detector ir a zero.

O cálculo detalhado da equação (3.48) é exposto no Apêndice A. Temos como resultado

$$\langle \sigma_\varphi^A \otimes \sigma_\varpi^B \rangle_{\psi'} = \Gamma(\alpha, W) \cos 2\varphi \cos 2\varpi + \Delta(\alpha, W) \sin 2\varphi \sin 2\varpi, \quad (3.56)$$

onde

$$\Gamma(\alpha, W) \equiv \frac{1}{2} \left\{ [A(\alpha, W) - B(\alpha, W)][A(0, W) - B(0, W)] \right. \\ \left. + [C(\alpha, W) - D(\alpha, W)][C(0, W) - D(0, W)] \right\} \quad (3.57)$$

e

$$\Delta(\alpha, W) \equiv [E(\alpha, W) + F(\alpha, W)][E(0, W) + F(0, W)]. \quad (3.58)$$

Aqui, as quantidades $A(\alpha, W), \dots, F(\alpha, W)$ são as integrais

$$A(\alpha, W) \equiv \langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle = \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r Q^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \frac{1 + (Q^r)^2}{1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi} \quad (3.59)$$

$$\times \left[\frac{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1}) \cos^2 \phi}{\sqrt{(Q^r)^2 + 1} (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})} + \sin^2 \phi \right]^2,$$

$$B(\alpha, W) \equiv \langle H'_A | P_{yy} | H'_A \rangle = \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \quad (3.60)$$

$$\times \frac{(Q^r)^5 \cosh^2 \alpha \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{(1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi) (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})^2},$$

$$C(\alpha, W) \equiv \langle V'_A | P_{xx} | V'_A \rangle = \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \quad (3.61)$$

$$\times \frac{(Q^r)^5 \cosh^2 \alpha \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{(1 + (Q^r)^2 \cos^2 \phi) (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})^2},$$

$$D(\alpha, W) \equiv \langle V'_A | P_{yy} | V'_A \rangle = \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r Q^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \frac{1 + (Q^r)^2}{1 + (Q^r)^2 \cos^2 \phi} \quad (3.62)$$

$$\times \left[\frac{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1}) \sin^2 \phi}{\sqrt{(Q^r)^2 + 1} (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})} + \cos^2 \phi \right]^2,$$

$$E(\alpha, W) \equiv \langle H'_A | P_{xy} | V'_A \rangle = \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r \frac{\exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) Q^r [(1 + (Q^r)^2)]}{\sqrt{[1 + (Q^r)^2 \cos^2 \phi][1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi]}} \quad (3.63)$$

$$\times \left[\frac{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1}) \cos^2 \phi}{\sqrt{(Q^r)^2 + 1} (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})} + \sin^2 \phi \right]$$

$$\times \left[\frac{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1}) \sin^2 \phi}{\sqrt{(Q^r)^2 + 1} (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})} + \cos^2 \phi \right]$$

e

$$\begin{aligned}
F(\alpha, W) \equiv \langle H'_A | P_{yx} | V'_A \rangle &= \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r \frac{\exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) (1 + (Q^r)^2)}{\sqrt{[1 + (Q^r)^2 \cos^2 \phi][1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi]}} \\
&\times \frac{(Q^r)^5 \cosh^2 \alpha \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{(1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi) (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})^2}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Essas integrais dependem da rapidez α do boost, dado pela equação (3.25), e da largura efetiva W do pacote de momentum dos fótons, definida como

$$W \equiv \frac{w}{|p|}. \tag{3.65}$$

Vemos que W é o desvio padrão de momentum w normalizado pela energia média $|p|$.

Para os nossos propósitos, é suficiente considerar o caso em que $\hat{a}_2 = \hat{b}_1 = \hat{x}$, e em que os vetores unitários \hat{a}_1 e \hat{b}_2 são rodados nos sentidos anti-horário e horário, respectivamente, de um ângulo ϑ em relação ao eixo x (veja a Figura 3.2). O membro esquerdo da equação (3.1),

$$\mathcal{F}(\vartheta) \equiv |E(\hat{a}_2, \hat{b}_1) + E(\hat{a}_2, \hat{b}_2) + E(\hat{a}_1, \hat{b}_1) - E(\hat{a}_1, \hat{b}_2)|, \tag{3.66}$$

assume a forma

$$\mathcal{F}(\vartheta) = |\langle \sigma_0^A \otimes \sigma_0^B + \sigma_0^A \otimes \sigma_{-\vartheta}^B + \sigma_{\vartheta}^A \otimes \sigma_0^B - \sigma_{\vartheta}^A \otimes \sigma_{-\vartheta}^B \rangle_{\psi'}|, \tag{3.67}$$

onde o estado $|\psi'\rangle$ do sistema de dois fótons é dado pela equação (3.27). Usando a equação (3.56), podemos escrever a equação (3.67) como

$$\mathcal{F}(\vartheta) = |\Gamma(\alpha, W) (1 + 2 \cos 2\vartheta) - \Gamma(\alpha, W) \cos^2 2\vartheta + \Delta(\alpha, W) \sin^2 2\vartheta|. \tag{3.68}$$

Essa é a forma explícita do membro esquerdo da desigualdade de Bell CHSH no problema em exame.

3.3 Análise numérica e conclusões

Agora, vamos fazer uma análise numérica da equação (3.68). Como teste de consistência, primeiramente verificamos que a desigualdade de Bell CHSH usual, para a qual $\mathcal{F}(\vartheta)|_{\max} = 2,5$, é recuperada a partir dos nossos resultados tomando $\alpha = 0$ e $w = 0$. Lembramos que, de acordo com a nossa convenção, $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$ correspondem aos casos em que o fóton A e o detector correspondente movem-se no mesmo sentido e no

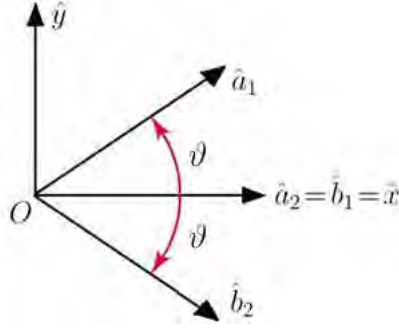


Figura 3.2: Direções no plano $x \perp y$ em que são feitas as medições de polarização sobre os fótons A e B no nosso caso de interesse.

sentido oposto, respectivamente.

Na Figura 3.3, mostramos como $\mathcal{F}(\vartheta)$ varia com a largura do pacote de onda dos fótons devidamente normalizada, $W \equiv w/|p|$. O gráfico assume $\alpha \rightarrow \infty$, mas o mesmo padrão é encontrado para qualquer outro valor de α , incluindo $\alpha = 0$. Podemos notar que, quanto mais largo o pacote de onda de momentum, menores ficam as correlações entre medições de polarização sobre os dois fótons. Isso se deve ao fato de que, quanto maior a dispersão, mais misto em polarização fica o estado do sistema uma vez que os graus de liberdade de momentum sejam ignorados [57]. Mesmo que os dois detectores estejam em repouso, a dispersão de momentum leva a uma perda de correlações. O fato de que o momentum dos fótons não tem uma direção bem definida implica que os estados $|H_X\rangle$ e $|V_X\rangle$ têm polarizações que não correspondem a uma direção espacial bem definida (de fato, sua polarização corresponde a uma superposição sobre infinitos planos distintos, cada um ortogonal a um valor de momentum \mathbf{k}).

Na Figura 3.4, plotamos $\mathcal{F}(\vartheta)$ para diferentes velocidades do detector acoplado ao satélite, fixando $W = 0,6$. Para $|\alpha|$ suficientemente grande, com $\alpha < 0$, verificamos que $\mathcal{F}(\vartheta)$ é arbitrariamente pequena em todo o domínio. Isso mostra quão importante pode ser o movimento do detector para medições de polarização quando a velocidade é alta o suficiente [57, 73]. Vemos que, para $W = 0,6$, mesmo se $\alpha = 0$ já temos perda de correlações suficiente para as desigualdades de Bell CHSH serem satisfeitas. Para entendermos o padrão observado na Figura 3.4, notamos que, conforme α decresce, o fóton A tem um maior desvio para o vermelho de acordo com o detector em movimento. Como consequência, W , que quantifica a dispersão w de momentum do fóton normalizada por sua energia $|p|$, “parece” maior no referencial de detecção. Portanto, de acordo com a Figura 3.3, $\mathcal{F}(\vartheta)$ deve realmente decrescer à medida que α diminui. Por outro lado, notamos que, à medida que α fica maior, as correlações aumentam, ficando maiores no referencial de movimento do que no de preparação. Esse efeito pode ser entendido da mesma maneira: quando o detector e fóton movem-se em sentidos opostos, a energia observada sofre um *blueshift*, o que diminui a dispersão efetiva

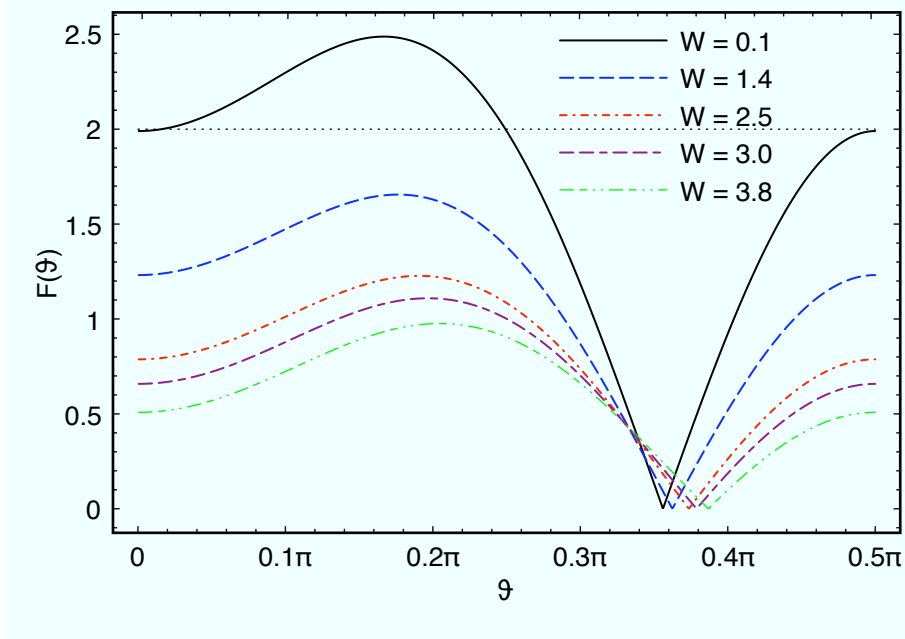


Figura 3.3: O membro esquerdo $\mathcal{F}(\vartheta)$ da desigualdade de Bell CHSH é plotado como função de ϑ assumindo $\alpha \rightarrow \infty$ para diferentes valores da largura normalizada do pacote de momentum, $W = w/|p|$. Quanto mais largo o pacote de onda, menores são as correlações das medições de polarização para os dois fótons emaranhados. O mesmo padrão é obtido para qualquer valor de α , inclusive para $\alpha = 0$.

$W = w/|p|$ no referencial próprio do detector, de modo que as correlações naturalmente aumentam em relação ao referencial de preparação. Concluímos, assim, que o movimento do detector não apenas pode levar a uma perda de correlações, mas também ao seu aumento, favorecendo, assim, a manutenção do emaranhamento entre os fótons.

Na Figura 3.5, plotamos $\Delta\mathcal{F}(\vartheta) = \mathcal{F}(\vartheta) - \mathcal{F}_0(\vartheta)$, onde $\mathcal{F}_0(\vartheta)$ é obtida impondo-se que os dois detectores estejam em repouso, enquanto valores realísticos são usados para a computação de $\mathcal{F}(\vartheta)$: tomamos a velocidade média da Estação Espacial Internacional (EEI), $v \approx 7,7 \times 10^3$ m/s, para fixar $\alpha = 2,6 \times 10^{-5}$, e consideramos a tecnologia atual de produção de fótons emaranhados [128] para fixar $W = 10^{-3}$. (Notamos que a velocidade média da Lua é cerca de sete vezes menor do que a da EES.) Esse gráfico permite estimar qual a real influência do movimento de um dos detectores para um futuro experimento usando tecnologia atual.

Estudos teóricos sobre a influência da velocidade do detector em medições de estados emaranhados são exigidos pelas novas perspectivas do uso de satélites em experimentos de informação quântica. É razoável afirmar, pelos resultados apresentados (em particular, pelas Figuras 3.4 e 3.5), que qualquer influência da velocidade do detector só se tornará óbvia para sistemas muito relativísticos. Além disso, a Figura 3.3 mostra que o efeito do movimento do detector pode ser bastante atenuado pelo uso de pacotes de onda suficientemente estreitos, $W \ll 1$. Em particular, para $w = 0$ a velocidade do aparato de medição não exerce nenhuma influência sobre $\mathcal{F}(\vartheta)$. Essa informação pode

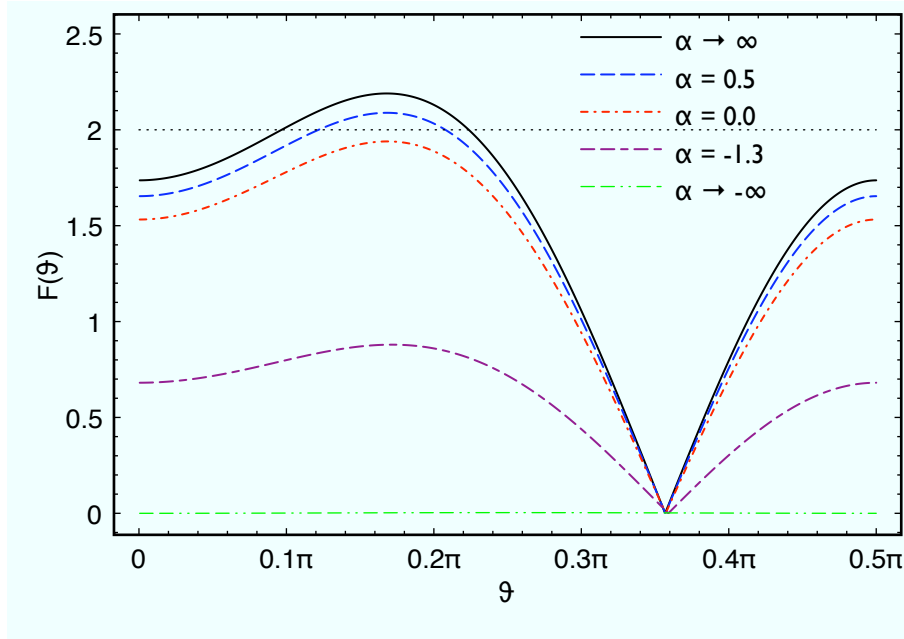


Figura 3.4: $\mathcal{F}(\vartheta)$ é plotada como função de ϑ com $W = 0,6$ para diferentes valores da velocidade do aparato de medição que detecta a partícula A . Verifica-se que $F(\vartheta)$ diminui conforme α decresce.

vir a ser importante para futuras aplicações de protocolos de informação quântica em escala global.

Embora para a tecnologia atual o movimento dos detectores não deva desempenhar um papel proeminente, como mostrado na Figura 3.5, esse provavelmente não será o caso no futuro, quando maior precisão será atingida. Vale recordar que o Sistema de Posicionamento Global não funcionaria se a minúscula dessincronização entre os satélites e as antenas na Terra não fosse corrigida pelas fórmulas da relatividade geral [49] derivadas 80 anos antes.

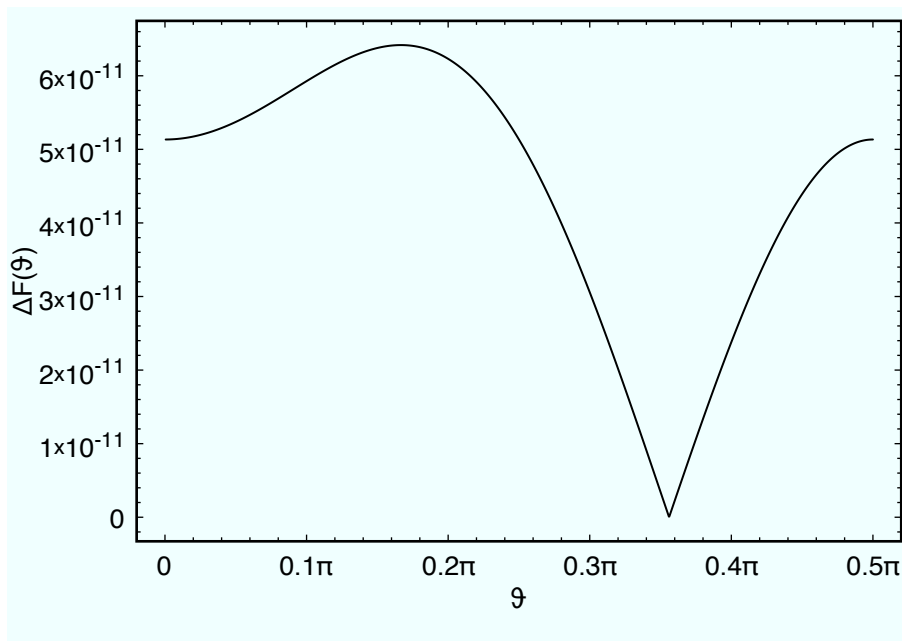


Figura 3.5: O gráfico exhibe $\Delta\mathcal{F}(\vartheta) = \mathcal{F}(\vartheta) - \mathcal{F}_0(\vartheta)$. $\mathcal{F}_0(\vartheta)$ é obtida impondo-se que ambos os detectores estejam em repouso, enquanto $\mathcal{F}(\vartheta)$ é computada usando-se valores realísticos. Em especial, tomamos a velocidade média da Estação Espacial Internacional (EEI), $v \approx 7,7 \times 10^3$ m/s, para fixar $\alpha = 2,6 \times 10^{-5}$, e consideramos a tecnologia atual de produção de fótons emaranhados para fixar $W = 10^{-3}$.

Capítulo 4

Informação clássica em canais quânticos relativísticos

Efeitos notáveis são obtidos no processamento de informação quando os canais de comunicação são quânticos. Exemplos são os algoritmos quânticos ultra-rápidos [28], a correção quântica de erros [29], além dos já mencionados criptografia quântica [30, 31, 32, 33, 34], teletransporte quântico [35, 36] e codificação superdensa [37, 38]. Como comentamos anteriormente, embora a teoria da informação quântica [22] comumente trate apenas de sistemas não-relativísticos, uma extensão relativística é interessante tanto por completeza lógica quanto pela possibilidade de se descobrirem novos efeitos e limitações que surgem na transferência e no processamento de informação quando há movimento relativo entre as partes que trocam informação [20, 21]. Além disso, um entendimento mais profundo de aspectos relativísticos da informação quântica pode auxiliar na compreensão de problemas conceituais importantes, como o paradoxo da perda de informação em buracos negros [48, 49, 43]. Como descrevemos no capítulo anterior, recentemente foi proposto um experimento no qual essa formulação pode ser importante. Ele consiste na transmissão de fótons emaranhados pelo espaço livre, entre estações terrestres e satélites, com o objetivo de testar a mecânica quântica para grandes distâncias e de iniciar o projeto de implementação de protocolos de informação quântica em escala global [53, 54, 55, 56]. No capítulo anterior, estudamos como a relatividade especial afeta as correlações de medições de polarização para um par de fótons emaranhados [78], examinado a desigualdade de Bell CHSH [97] quando um dos detectores está em movimento. Neste capítulo, adotamos uma abordagem mais informacional e analisamos a capacidade clássica de um canal quântico relativístico em comparação à de um não-relativístico, estudando o limite de Holevo quando o receptor de uma mensagem enviada por um canal quântico está em movimento.

4.1 Limite de Holevo

Uma das características mais marcantes da mecânica quântica é a indistinguibilidade de estados arbitrários: dados dois estados quânticos não-ortogonais, não é possível distinguir entre eles com total confiabilidade por meio de nenhuma medição¹ [22]. Mais precisamente, seja $X = 1, \dots, n$ um índice que identifica cada um dos estados de um conjunto $\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$, e suponhamos que esses estados são preparados de acordo com a distribuição de probabilidades p_1, \dots, p_n . Assim, temos um ensemble $\{(p_i, \rho_i), i = 1, \dots, n\}$ e podemos descrever o estado preparado como a mistura estatística

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i \rho_i. \quad (4.1)$$

De posse de um sistema preparado dessa maneira, um experimentalista realiza uma medição descrita pelo POVM $\{E_1, \dots, E_m\}$, que satisfaz $E_k \geq 0$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$ e $\sum_{k=1}^m E_k = I$, e deve tentar inferir tão bem quanto possível o estado ρ_X que foi preparado a partir do resultado $Y = 1, \dots, m$ da sua medição. Cada resultado ocorre com probabilidade

$$p(k) = \text{tr}(E_k \rho), \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.2)$$

Podemos recolocar esse cenário de maneira mais usual supondo que Alice possui uma fonte clássica² e envia a mensagem codificada por um canal quântico³, e que Bob recebe a mensagem e deseja recuperá-la da melhor forma possível.

Uma boa medida de quanta informação Bob pode obter sobre a identidade do estado recebido a partir desse procedimento é a informação mútua $I(X : Y)$, que pode ser definida como

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (4.3)$$

onde $H(X)$ e $H(Y)$ são as entropias de Shannon associadas, respectivamente, às distribuições de probabilidades $\{p_1, \dots, p_n\}$ e $\{p(1), \dots, p(m)\}$,

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i, \quad H(Y) = - \sum_{k=1}^m p(k) \log_2 p(k), \quad (4.4)$$

e $H(X, Y)$ é a entropia conjunta de X e Y ,

$$H(X, Y) = - \sum_{X, Y} p(X, Y) \log_2 p(X, Y). \quad (4.5)$$

¹É fácil provar que esse resultado é equivalente ao teorema de não-clonagem [129, 130, 22].

²Mais precisamente, uma fonte que gera variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

³Isto é, a mensagem gerada pela fonte é codificada em um sistema físico que obedece as leis da física quântica. É esse sistema que é enviado para o receptor.

Aqui, $p(X, Y)$ é a probabilidade de o estado indexado por X ser preparado e de o experimentalista obter o resultado Y em sua medição,

$$p(X, Y) = p(X)p(Y|X) = p_i p(k|i) = p_i \text{tr}(E_k \rho_i), \quad (4.6)$$

onde $p(Y|X)$ é a probabilidade condicional de se obter um dado valor de Y dado que X foi preparado. A entropia de Shannon $H(Z)$ é uma medida de incerteza relacionada à variável aleatória Z , quantificando quanta informação se ganha, em média, quando se descobre o valor de Z . Por sua vez, a entropia conjunta $H(X, Y)$ mede a incerteza total sobre o par de variáveis aleatórias X e Y . Um conceito importante é o de entropia condicional de uma variável aleatória X dada a variável aleatória Y . Essa quantidade é definida como

$$H(X|Y) = - \sum_{X,Y} p(X, Y) \log_2 p(X|Y), \quad (4.7)$$

e pode ser escrita na forma

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y). \quad (4.8)$$

Essa equação indica que $H(X|Y)$ mede quanta incerteza resta sobre X uma vez que o valor de Y é conhecido. A informação mútua $I(X : Y)$ entre X e Y pode ser escrita em termos da entropia condicional $H(X|Y)$ como

$$I(X : Y) = H(X) - H(X|Y). \quad (4.9)$$

Portanto, $I(X : Y)$ é a diferença entre a incerteza original sobre X e a incerteza que resta sobre X quando Y é conhecida. Assim, podemos entender $I(X : Y)$ como uma medida da informação ganha sobre X medindo-se Y . Dado que $H(X, Y) = H(Y, X)$, vale também a simetria da informação mútua,

$$I(X : Y) = I(Y : X). \quad (4.10)$$

A informação mútua pode, pois, ser interpretada como uma medida das correlações entre as variáveis aleatórias X e Y . Outra propriedade importante da informação mútua é

$$I(X : Y) \geq 0 \quad (4.11)$$

com igualdade válida se, e somente se, X e Y são variáveis aleatórias independentes. Isso quer dizer que a informação mútua entre duas variáveis aleatórias é sempre positiva, a não ser no caso de duas variáveis aleatórias independentes, que não têm correlação.

A informação mútua satisfaz a importante desigualdade

$$I(X : Y) \leq H(X) \quad (4.12)$$

com igualdade válida se, e somente se, X é uma função de Y . Isso significa que a informação mútua é sempre menor do que a incerteza total sobre X , a não ser quando X é completamente determinada pelo conhecimento de Y . Portanto, é possível inferir o valor de X , e assim qual estado foi preparado, a partir do valor Y obtido na medição se, e somente se, $I(X : Y) = H(X)$. Quanto mais $I(X : Y)$ se aproxima de $H(X)$, mais acuradamente se pode inferir X de Y . Acontece que a indistinguibilidade de estados quânticos garante que não é possível distinguir perfeitamente os estados ρ_1, \dots, ρ_n por meio de nenhuma medição, a não ser no caso particular em que eles são todos mutuamente ortogonais. Como consequência, a medição de Y , em geral, não pode determinar X , e a equação (4.12) implica que, diferentemente do que ocorre no caso clássico sem ruído, quanticamente a correlação $I(X : Y)$ entre a informação preparada e a informação obtida pela medição é, em geral, menor do que $H(X)$.

É claro que a informação mútua depende de qual medição o experimentalista decide realizar, isto é, dos elementos escolhidos para formar um POVM. Para evitar essa indeterminação, definimos a *informação acessível* como o máximo da informação mútua sobre todos os possíveis esquemas de medição. A informação acessível é, pois, uma medida de quão bem se pode, por meio de uma medição, inferir qual estado foi preparado. O aspecto obscuro da mecânica quântica, concretizado pela indistinguibilidade de estados, é central para o poder da informação e da computação quânticas, e a informação acessível captura essa natureza de forma quantitativa. Embora não seja conhecido nenhum método geral para se calcular a informação acessível, é possível obter um limite superior para ela, conhecido como *limite de Holevo* [87, 88]. Ele garante que, para qualquer medição que o experimentalista possa realizar, vale a desigualdade

$$I(X : Y) \leq \chi(\rho) \equiv S(\rho) - \sum_{i=1}^n p_i S(\rho_i), \quad (4.13)$$

onde $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho)$ é a entropia de von Neumann associada ao estado quântico representado pelo operador densidade ρ . A entropia de von Neumann mede a incerteza associada ao estado misto ρ , sendo o análogo quântico da entropia de Shannon. É possível provar [22] que, para uma mistura de estados quânticos ρ com a forma da equação (4.1), vale a desigualdade

$$\sum_i p_i S(\rho_i) \leq S(\rho) \leq \sum_i p_i S(\rho_i) + H(X), \quad (4.14)$$

donde se segue que

$$I(X : Y) \leq \chi(\rho) \leq H(X), \quad (4.15)$$

ou seja, o limite de Holevo é limitado superiormente pela entropia de Shannon da variável aleatória X . A igualdade ocorre se, e somente se, os estados ρ_i que compõem a

mistura são ortogonais. Assim, se os estados ρ_i não são ortogonais⁴, o limite de Holevo implica que $I(X : Y)$ é estritamente menor do que $H(X)$, e portanto é impossível determinar X com perfeita confiabilidade com base no resultado Y de qualquer medição sobre o sistema. Vemos, dessa maneira, que o limite de Holevo quantifica a noção de indistinguibilidade de estados quânticos. Outra consequência do limite de Holevo que se segue da desigualdade (4.15) é que um qubit pode conter, no máximo, um bit de informação clássica.

Embora $\chi(\rho)$ seja um limite superior para a informação acessível, é possível que ela nunca atinja esse valor máximo, como de fato ocorre em muitos casos [131]. Por outro lado, sempre é possível empregar uma codificação em bloco conveniente tal que a informação seja transmitida a uma taxa que se aproxima arbitrariamente de $\chi(\rho)$ com probabilidade de erro arbitrariamente baixa [132, 133, 134]. O limite de Holevo permite expressar a capacidade $C^{(1)}(\mathcal{E})$ de um canal quântico ruidoso \mathcal{E} para *estados produtos*, isto é, no caso em que os estados preparados por Alice e enviados a Bob através do canal têm a forma $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots$. Isso quer dizer que os estados enviados não podem estar emaranhados através de dois ou mais usos do canal. O teorema de Holevo-Schumacher-Westmoreland garante que a capacidade para estados produtos (*product state capacity*) de um canal quântico ruidoso \mathcal{E} é dada por

$$C^{(1)}(\mathcal{E}) = \max_{\{p_j, \rho_j\}} \chi(\mathcal{E}) = \max_{\{p_j, \rho_j\}} \left[S(\mathcal{E}(\rho)) - \sum_j p_j S(\mathcal{E}(\rho_j)) \right], \quad (4.16)$$

onde o máximo é tomado sobre todos os possíveis ensembles $\{p_j, \rho_j\}$ de estados ρ_j usados como *input* para o canal [22].

Assim, para estudar a transmissão de informação clássica por canais quânticos *relativísticos*, é interessante analisar o limite de Holevo numa situação de comunicação quântica tipicamente relativística. Aqui, essa proposta é implementada permitindo-se que Bob esteja em movimento relativamente a Alice [79].

4.2 Cenário não-relativístico de comunicação quântica

Suponhamos que Alice possui uma fonte de informação clássica que produz os símbolos $X = 0, 1$ de acordo com a distribuição de probabilidades $p_0 = \lambda$, $p_1 = 1 - \lambda$, com $0 \leq \lambda \leq 1$. Dependendo do valor que obtém, ela prepara um estado puro ψ_X , escolhido

⁴Mais precisamente, se os operadores densidades ρ_i não têm suporte ortogonal. O suporte de um operador linear é definido como o espaço vetorial ortogonal ao seu núcleo (ou *kernel*). O núcleo de um operador linear L é o conjunto de todos os vetores $|v\rangle$ para os quais $L|v\rangle = 0$. Em particular, para um operador auto-adjunto (como é o caso de um operador densidade), o suporte é o espaço gerado pelos seus autovetores com autovalores não-nulos [84].

de um conjunto fixado $\{\psi_1, \psi_2\}$, de uma partícula de spin $1/2$ e massa m , e então a envia para Bob, que conhece a convenção de codificação adotada por Alice. Ele faz uma medição de spin de sua escolha sobre esse sistema e tenta identificar X com base no resultado Y obtido. Usando notação bi-espinorial, assumimos que os estados ψ_1 e ψ_2 são dados por

$$\psi_1(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\psi_2(\mathbf{p}) = \cos \theta \begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

onde $\phi_\uparrow \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\phi_\downarrow \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ são os autovetores de S_z com autovalores $1/2$ e $-1/2$, respectivamente, e

$$f_{\mathbf{k}}^w(\mathbf{p}) = \pi^{-\frac{3}{4}} w^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2}{2w^2}\right] \quad (4.19)$$

é um pacote de momentum gaussiano. O parâmetro $w \in \mathbb{R}_+$ dá uma medida da dispersão de momentum e \mathbf{k} dá o momentum médio. Em particular, assumimos que a partícula move-se ao longo do eixo x , de modo que

$$\mathbf{k}_X = (k_X, 0, 0), \quad X = 1, 2. \quad (4.20)$$

Primeiramente, vamos sumarizar o que acontece quando Bob está em repouso relativamente a Alice, que é o cenário típico em informação quântica. Toda a estatística para medições de spin pode ser obtida por meio do operador densidade reduzido de spin, derivado tomando-se o traço sobre os graus de liberdade de momentum,

$$\tau = \int d^3p \rho(\mathbf{p}, \mathbf{p}), \quad (4.21)$$

onde

$$\rho(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = \lambda \psi_1(\mathbf{p}) \psi_1(\tilde{\mathbf{p}})^\dagger + (1 - \lambda) \psi_2(\mathbf{p}) \psi_2(\tilde{\mathbf{p}})^\dagger \quad (4.22)$$

é o operador densidade completo do sistema. Assim obtemos

$$\tau = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Notemos que, devido à linearidade do traço, podemos reescrever a equação (4.23) como

$$\tau = \lambda \tau_1 + (1 - \lambda) \tau_2, \quad (4.24)$$

onde

$$\tau_i = \int d^3p \psi_i(\mathbf{p}) \psi_i(\mathbf{p})^\dagger, \quad i = 1, 2. \quad (4.25)$$

Claramente, aqui τ é simplesmente uma mistura estatística dos estados puros de spin ϕ_\uparrow e

$$\phi_\theta \equiv \cos \theta \phi_\uparrow + \sin \theta \phi_\downarrow, \quad (4.26)$$

e então podemos afirmar que os graus de liberdade de momentum não desempenham nenhum papel expressivo neste caso: tudo se passa como se Alice preparasse desde o início o ensemble $\{(\lambda, \phi_\uparrow), (1 - \lambda, \phi_\theta)\}$, que não envolve nenhum grau de liberdade de momentum.

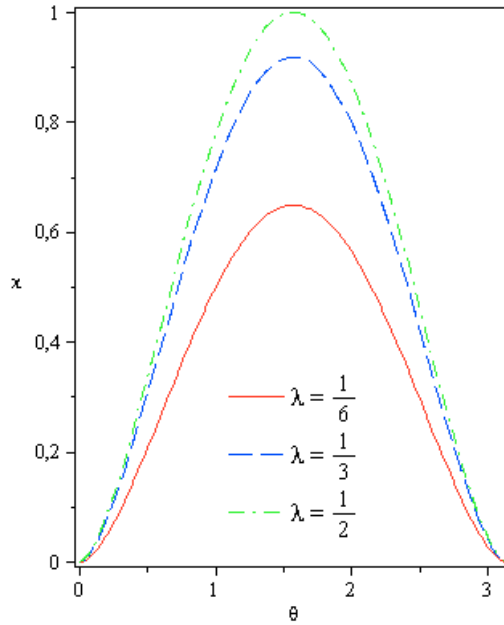


Figura 4.1: $\chi(\tau)$ como função de θ para diferentes valores de λ . Vemos que o limite de Holevo sempre atinge valor máximo em $\pi/2$ e vai a zero em $\theta = 0$. Os gráficos têm periodicidade π .

Vamos agora calcular o limite de Holevo $\chi(\tau)$ para o estado (4.23). Como τ_1 e τ_2 correspondem a estados puros, temos

$$S(\tau_1) = S(\tau_2) = 0, \quad (4.27)$$

de modo que

$$\chi(\tau) = S(\tau) = - \sum_{i=\pm} \beta_i \log_2 \beta_i, \quad (4.28)$$

onde β_\pm são os autovalores de τ , dados por

$$\beta_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \sin^2 \theta (\lambda^2 - \lambda)}. \quad (4.29)$$

Notemos que $\chi(\tau)$ tem periodicidade π em relação à variável θ . É fácil verificar que o limite de Holevo atinge seu valor máximo quando $\theta = \pi/2$, correspondendo a estados de spin ortogonais. Nesse ponto, e apenas nele, $\chi(\tau) = H(X)$ e então é possível para Bob determinar com certeza qual estado Alice preparou, o que ele pode fazer simplesmente medindo o observável S_z . Como já comentamos, essa é uma propriedade geral de estados ortogonais, que sempre podem ser completamente distinguidos por medições apropriadas. Em contraste, $\chi(\tau)$ atinge seu valor mínimo em $\theta = 0$, quando os estados ψ_1 e ψ_2 são idênticos em seus graus de liberdade de spin e, portanto, não podem ser distinguidos por medições dessa variável. A Figura 4.1 exibe os gráficos do limite de Holevo $\chi(\tau)$ como função de θ no caso não-relativístico para diversos valores de λ .

4.3 Cenário relativístico de comunicação quântica

Agora voltamos nossa atenção ao caso relativístico, no qual Bob está em movimento em relação a Alice. Vamos assumir que ele se move ao longo do eixo x , ou seja, com 3-velocidade

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0). \quad (4.30)$$

Então ele vê o estado ρ dado pela equação (4.22), em seu referencial próprio, unitariamente transformado como

$$\rho'(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = \lambda \psi'_1(\mathbf{p}) \psi'_1(\tilde{\mathbf{p}})^\dagger + (1 - \lambda) \psi'_2(\mathbf{p}) \psi'_2(\tilde{\mathbf{p}})^\dagger \quad (4.31)$$

com [7, 106]

$$\psi'_i(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{(\Lambda^{-1}p)^0}{p^0}} D(\Lambda, \Lambda^{-1}p) \psi_i(\Lambda^{-1}\mathbf{p}), \quad i = 1, 2. \quad (4.32)$$

Aqui, Λ é a matriz de boost, $p = (\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{p})$ é o 4-momentum e $D(\Lambda, \Lambda^{-1}p)$ é uma rotação de Wigner dada por

$$D(\Lambda, q) = \frac{\cosh \frac{\alpha}{2} (q^0 + m) \sigma^0 + \sinh \frac{\alpha}{2} [\mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \sigma^0 + i (\mathbf{e} \times \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\sigma}]}{\sqrt{(p^0 + m)(q^0 + m)}}, \quad (4.33)$$

onde α é rapidez do boost, dada por

$$\alpha = \tanh^{-1} v, \quad (4.34)$$

$q \equiv \Lambda^{-1}p$, $\sigma^0 = I$ é a matriz identidade 2×2 , $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ é o vetor de Pauli, e \mathbf{e} é um vetor unitário que dá a direção do boost, que escolhemos como \hat{x} , de modo que

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Observemos ainda que, na equação (4.32), $\Lambda^{-1}\mathbf{p}$ denota a parte espacial do 4-vetor $\Lambda^{-1}p$. Para simplificar a notação, vamos introduzir

$$K \equiv \sqrt{\frac{q^0}{p^0}} \frac{1}{\sqrt{(q^0 + m)(p^0 + m)}}, \quad (4.36)$$

$$C \equiv \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (4.37)$$

$$S \equiv \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (4.38)$$

Dessa forma, a rotação de Wigner toma a forma

$$D(\Lambda_x, q) = \sqrt{\frac{p^0}{q^0}} K(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} C(q^0 + m) + S(q^x + iq^y) & -Sq^z \\ Sq^z & C(q^0 + m) + S(q^x - iq^y) \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Substituindo a equação (4.39) na equação (4.32), com ψ_1 e ψ_2 dados pelas equações (4.17) e (4.18), respectivamente, obtemos

$$\psi'_1(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p}) \\ b_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

e

$$\psi'_2(\mathbf{p}) = \cos \theta \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \\ b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} -b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \\ a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^* \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

onde os pacotes de momentum são dados por

$$a_{\mathbf{k}}^w(\mathbf{p}) = K f_{\mathbf{k}}^w(\mathbf{q}) [C(q^0 + m) + S(q^x + iq^y)], \quad (4.42)$$

$$b_{\mathbf{k}}^w(\mathbf{p}) = K f_{\mathbf{k}}^w(\mathbf{q}) S q^z. \quad (4.43)$$

É importante notar que os estados $\psi'_1(\mathbf{p})$ e $\psi'_2(\mathbf{p})$ dados acima têm seus *graus de liberdade de spin e de momentum emaranhados*, embora os estados originais (isto é, conforme observados no referencial de preparação) $\psi_1(\mathbf{p})$ e $\psi_2(\mathbf{p})$ fossem separáveis. Esse é o principal efeito que a rotação de Wigner tem sobre os estados quânticos [57].

Como Bob só faz medições de spin, podemos novamente tomar o traço sobre os

graus de liberdade de momentum, o que nos dá o operador densidade reduzido

$$\tau' = \lambda \tau'_1 + (1 - \lambda) \tau'_2, \quad (4.44)$$

onde

$$\tau'_i = \int d^3p \psi'_i(\mathbf{p}) \psi'_i(\mathbf{p})^\dagger, \quad i = 1, 2. \quad (4.45)$$

Para $i = 1$, o integrando da equação (4.45) é

$$\psi'_1(\mathbf{p}) \psi'_1(\mathbf{p})^\dagger = \begin{pmatrix} |a_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p})|^2 & a_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p}) b_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p})^* \\ a_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p})^* b_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p}) & |b_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p})|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Vamos calcular separadamente a integral de cada elemento de matriz. Começamos notando que os termos não-diagonais de τ'_1 anulam-se. De fato, lembrando a medida relativisticamente invariante,

$$\frac{d^3p}{p^0} = \frac{d^3q}{q^0}, \quad (4.47)$$

e usando as equações (4.42) e (4.43), temos

$$(\tau'_1)_{12} = \int d^3q \frac{CS(q^0 + m)q^z + S^2(q^x + iq^y)q^z}{(q^0 + m)(p^0 + m)} f_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{q})^2,$$

onde f é dada pela equação (4.19) e, usando a transformação de Lorentz $p^\mu = \Lambda^\mu_\nu q^\nu$ com a matriz de boost dada pela equação (4.35),

$$p^0 = \cosh \alpha q^0 - \sinh \alpha q^x = \cosh \alpha \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - \sinh \alpha q^x. \quad (4.48)$$

É fácil ver, então, que o integrando é ímpar em relação à variável q^z , enquanto os limites de integração são simétricos em relação à origem, de modo que a integral se anula,

$$(\tau'_1)_{12} = (\tau'_1)_{21}^* = 0.$$

Quanto aos termos não-diagonais, vamos definir

$$V(\alpha) \equiv S^2 \int d^3q \frac{(q^z)^2 f_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{q})^2}{(q^0 + m)(\cosh \alpha q^0 - \sinh \alpha q^x + m)}, \quad (4.49)$$

de modo que

$$(\tau'_1)_{22} = \int d^3p |b_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p})|^2 = V(\alpha).$$

Além disso, como o traço de τ'_1 deve ser unitário, temos

$$(\tau'_1)_{11} = \int d^3p |a_{\mathbf{k}_1}^{w_1}(\mathbf{p})|^2 = 1 - V(\alpha).$$

Assim, concluimos que

$$\tau'_1 = \begin{pmatrix} 1 - V(\alpha) & 0 \\ 0 & V(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Vamos agora calcular τ'_2 . Para $i = 2$, o integrando da equação (4.45) é

$$\begin{aligned} \psi'_2(\mathbf{p})\psi'_2(\mathbf{p})^\dagger = & \cos^2\theta \begin{pmatrix} |a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 & a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^* \\ a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^*b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) & |b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 \end{pmatrix} \\ & + \cos\theta\sin\theta \begin{pmatrix} -a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^* & a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^2 \\ |b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 & a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\ & + \cos\theta\sin\theta \begin{pmatrix} -a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^*b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) & -|b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 \\ (a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^*)^2 & a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^*b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^* \end{pmatrix} \\ & + \sin^2\theta \begin{pmatrix} -|b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 & -a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) \\ -a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^*b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^* & |a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Similarmente ao que verificamos quando calculamos τ'_1 , todas integrais cujos integrandos são proporcionais a q^z anulam-se. Assim, usando as equações (4.42) e (4.43), temos

$$\int d^3p a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^* = \int d^3p a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p}) = 0.$$

Vamos então definir

$$U(\alpha) \equiv S^2 \int d^3q \frac{(q^z)^2 f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{q})^2}{(q^0 + m)(\cosh \alpha q^0 - \sinh \alpha q^x + m)}, \quad (4.52)$$

de modo que, analogamente ao caso anterior, obtemos

$$\int d^3p |b_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 = U(\alpha)$$

e

$$\int d^3p |a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 = 1 - U(\alpha).$$

Falta apenas calcular $\int d^3p a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^2$ e $\int d^3p (a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^*)^2$. Os integrandos dessas duas integrais diferem apenas nos termos proporcionais a q^y , que se anulam por paridade, assim como ocorre com termos proporcionais a q^z . Sendo assim, usando as equações (4.42) e (4.43), podemos escrever

$$\begin{aligned} \int d^3p a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^2 &= \int d^3p (a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^*)^2 \\ &= \int d^3q \frac{C^2(q^0 + m)^2 + S^2[(q^x)^2 - (q^y)^2] + 2CS(q^0 + m)q^x}{(q^0 + m)(p^0 + m)} f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{q})^2. \end{aligned}$$

Agora notemos que podemos escrever $\int d^3p |a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 = 1 - U(\alpha)$ explicitamente como

$$\begin{aligned} \int d^3p |a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})|^2 &= \int d^3q \frac{C^2(q^0 + m)^2 + S^2[(q^x)^2 + (q^y)^2] + 2CS(q^0 + m)q^x}{(q^0 + m)(p^0 + m)} f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{q})^2 \\ &= 1 - U(\alpha) = 1 - S^2 \int d^3q \frac{(q^z)^2 f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{q})^2}{(q^0 + m)(p^0 + m)}, \end{aligned}$$

onde usamos a equação (4.52). Como

$$\int d^3q \frac{(q^y)^2 f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{q})^2}{(q^0 + m)(p^0 + m)} = \int d^3q \frac{(q^z)^2 f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{q})^2}{(q^0 + m)(p^0 + m)},$$

constatamos então que

$$\int d^3q \frac{C^2(q^0 + m)^2 + S^2(q^x)^2 + 2CS(q^0 + m)q^x}{(q^0 + m)(p^0 + m)} f_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{q})^2 = 1 - 2U(\alpha).$$

Dessa maneira, concluímos que

$$\int d^3p a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^2 = \int d^3p (a_{\mathbf{k}_2}^{w_2}(\mathbf{p})^*)^2 = 1 - 3U(\alpha).$$

Portanto, τ'_2 assume a forma

$$\begin{aligned} \tau'_2 &= \cos^2\theta \begin{pmatrix} 1 - U(\alpha) & 0 \\ 0 & U(\alpha) \end{pmatrix} + \cos\theta \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 - 3U(\alpha) \\ -U(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \cos\theta \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -U(\alpha) \\ 1 - 3U(\alpha) & 0 \end{pmatrix} + \sin^2\theta \begin{pmatrix} U(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 - U(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vamos reescrever essa equação como

$$\tau'_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & 1 - A \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

onde definimos

$$A = \cos^2\theta [1 - U(\alpha)] + \sin^2\theta U(\alpha), \quad (4.54)$$

$$B = \cos\theta \sin\theta [1 - 4U(\alpha)]. \quad (4.55)$$

Finalmente, usando as equações (4.44), (4.50) e (4.53), concluímos que o operador densidade reduzido τ' é dado por

$$\tau' = \begin{pmatrix} \lambda [1 - V(\alpha)] + (1 - \lambda)A & (1 - \lambda)B \\ (1 - \lambda)B & \lambda V(\alpha) + (1 - \lambda)(1 - A) \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Agora podemos calcular o limite de Holevo para o caso em que Bob está se movendo em relação a Alice. Notemos que, diferentemente de τ_1 e τ_2 , τ'_1 e τ'_2 representam estados mistos, de modo que $S(\tau'_1)$ e $S(\tau'_2)$ são ambos não-nulos. Isso ocorre porque, como já comentamos, no referencial do boost os graus de liberdade de momentum e de spin da partícula estão emaranhados; quando desprezamos os momenta, chegamos então a estados de spin mistos. O limite de Holevo $\chi(\tau')$ é dado por

$$\chi(\tau') = S(\tau') - \lambda S(\tau'_1) - (1 - \lambda) S(\tau'_2). \quad (4.57)$$

Usando as equações (4.50), (4.53) e (4.56), podemos reescrever a equação (4.57) como

$$\chi(\tau') = - \sum_{i=1}^2 \gamma_i \log_2 \gamma_i + \lambda \sum_{i=1}^2 \delta_i \log_2 \delta_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^2 \epsilon_i \log_2 \epsilon_i, \quad (4.58)$$

onde, para $i = 1, 2$, γ_i , δ_i e ϵ_i são os autovalores de τ' , τ'_1 e τ'_2 , respectivamente. Eles podem ser facilmente calculados em termos das integrais $V(\alpha)$ e $U(\alpha)$.

Vamos realizar uma análise numérica da equação (4.58) para estudar aspectos variados da transmissão de informação clássica em canais quânticos relativísticos. Antes disso, porém, para simplificar a nossa análise, vamos reescrever as equações (4.49) e (4.52) como

$$V(\alpha) = \frac{\sinh^2(\alpha/2)}{\sqrt{\pi} W_1^3} \int_{-\infty}^{\infty} dQ^x \int_0^{\infty} dQ^r G_1(Q^x, Q^r), \quad (4.59)$$

e

$$U(\alpha) = \frac{\sinh^2(\alpha/2)}{\sqrt{\pi} W_2^3} \int_{-\infty}^{\infty} dQ^x \int_0^{\infty} dQ^r G_2(Q^x, Q^r), \quad (4.60)$$

respectivamente. Para isso, usamos a equação (4.19), adotamos coordenadas cilíndricas com q^x como eixo de simetria, e introduzimos

$$G_X(Q^x, Q^r) = \frac{(Q^r)^3 \exp\{-[(Q^x - K_X)^2 + (Q^r)^2]/W_X^2\}}{(Q^0 + 1)(Q^0 \cosh \alpha - Q^x \sinh \alpha + 1)}, \quad X = 1, 2. \quad (4.61)$$

Além disso, introduzimos as variáveis adimensionais normalizadas pela massa

$$Q^r \equiv \frac{q^r}{m}, \quad (4.62)$$

$$Q^x \equiv \frac{q^x}{m}, \quad (4.63)$$

$$Q^0 \equiv \sqrt{(Q^x)^2 + (Q^r)^2 + 1}, \quad (4.64)$$

$$W_X \equiv \frac{w_X}{m}, \quad X = 1, 2, \quad (4.65)$$

$$K_X \equiv \frac{k_X}{m}, \quad X = 1, 2. \quad (4.66)$$

As integrais V e U são funções da rapidez α do boost, das dispersões de momentum W_X e dos momenta médios K_X , estes dois últimos normalizados pela massa m da partícula.

No limite em que W_1 e W_2 tendem simultaneamente a zero, o que corresponde a considerarmos auto-estados de momentum, recuperamos completamente o caso não-relativístico. Se não há dispersão de momentum, o movimento de Bob não causa nenhuma alteração no processo de comunicação [20, 21].

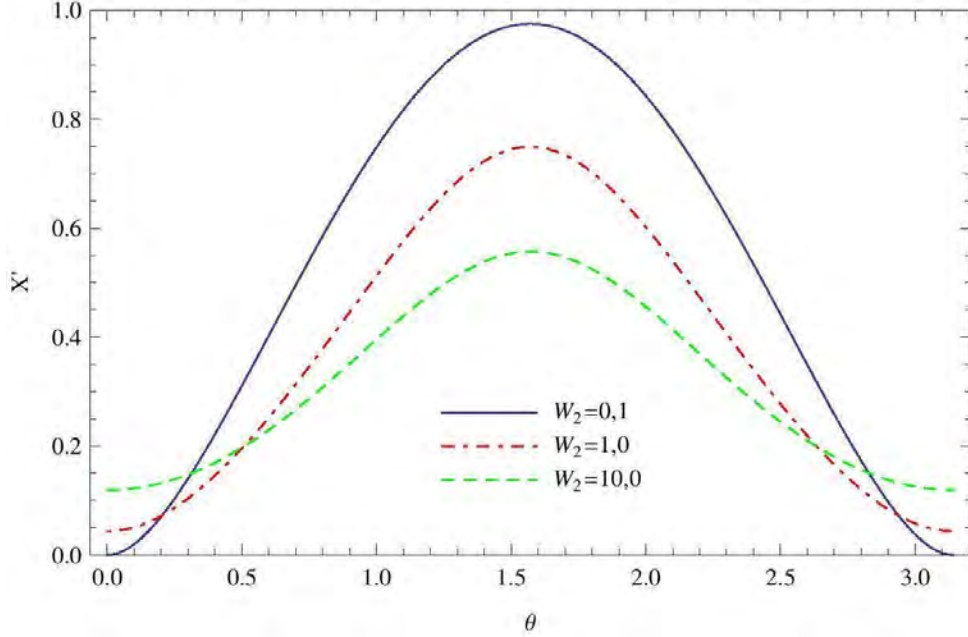


Figura 4.2: O limite de Holevo $\chi(\tau')$ conforme observado no referencial em movimento como função de θ . Tomamos $\alpha \rightarrow \infty$ e fixamos $\lambda = 0,5$, $K_1 = K_2 = 1,0$ e $W_1 = 0,1$, e tomamos plots para diferentes valores de W_2 .

A Figura 4.2 exhibe o limite de Holevo $\chi(\tau')$ no referencial em movimento como função de θ . Assumimos $\alpha \rightarrow \infty$ e fixamos $\lambda = 0,5$, $K_1 = K_2 = 1,0$ e $W_1 = 0,1$, e tomamos plots para diferentes valores de W_2 . Em primeiro lugar, notemos que o valor máximo do limite de Holevo ocorre em $\theta = \pi/2$, como no caso em que Bob está em repouso em relação a Alice. Ao contrário do que ocorre no caso não-relativístico, no entanto, relativisticamente $\chi(\tau') < H(X)$, e assim Bob nunca é capaz de distinguir perfeitamente entre os dois estados usados na codificação da mensagem, mesmo que $\theta = \pi/2$, a não ser quando $W_1 \rightarrow 0$ e $W_2 \rightarrow 0$, quando, como já mencionamos, o movimento do detector não causa nenhum efeito e os resultados são idênticos aos do caso não-relativístico. Essa perda de distinguibilidade se deve ao fato de que, se há dispersão finita de momentum, a rotação de Wigner emaranha os graus de liberdade de momentum e de spin da partícula, de modo que, quando tomamos o traço sobre os momenta, obtemos estados mistos de spin. Dessa forma, mesmo quando $\theta = \pi/2$, Bob observa estados mistos de spin, que não são totalmente distinguíveis, ao passo que, se estivesse em repouso em relação a Alice, nesse caso observaria dois estados de spin

exatamente ortogonais e, portanto, completamente distinguíveis. Assim, concluimos que, se Alice prepara estados de spin ortogonais, o movimento do detector diminui, em geral, a capacidade de Bob distingui-los. Vemos que, quanto maior o valor de W_2 , menor o limite de Holevo para $\theta = \pi/2$ e em torno desse ponto. Isso ocorre porque, quanto maior a dispersão de momentum, mais mistos ficam os estados de spin no referencial do boost [57] e, por conseguinte, “menos ortogonais”.

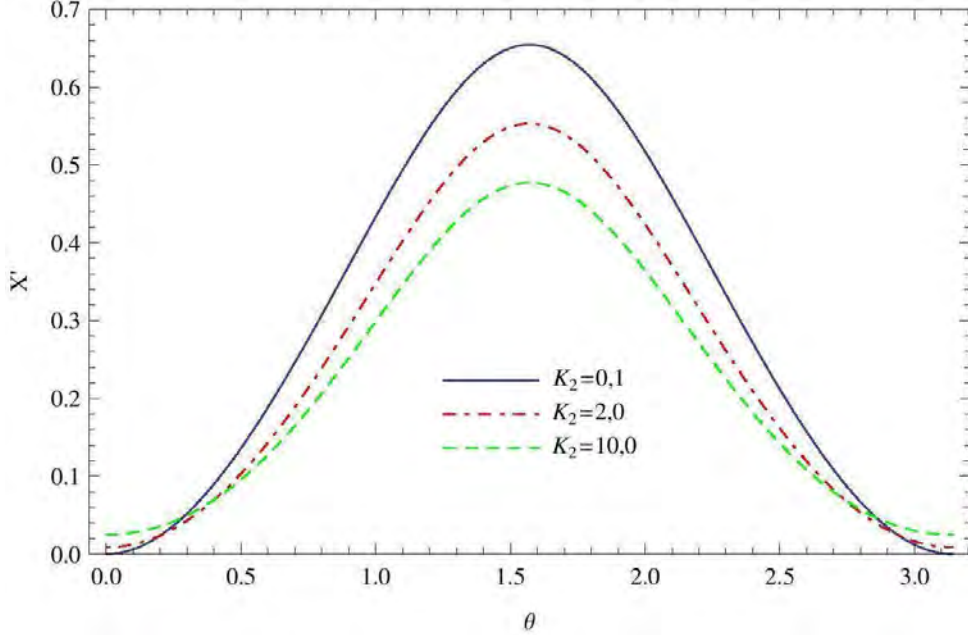


Figura 4.3: O limite de Holevo $\chi(\tau')$ no referencial em movimento como função de θ . Fixamos $\lambda = 0,5$, $W_1 = W_2 = 1,0$ e $K_1 = 0,01$, e tomamos plots para diferentes valores de K_2 . Aqui assumimos, mais uma vez, $\alpha \rightarrow \infty$. O mesmo padrão da Figura 4.2 é observado.

Podemos também observar na Figura 4.2 que, quando $W_1 = W_2 = 0,1$, o limite de Holevo vai a zero quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, como no caso não-relativístico. Isso ocorre sempre que $W_1 = W_2$ e $K_1 = K_2$, independentemente dos valores específicos que esses parâmetros assumam. Por outro lado, notamos na Figura 4.2 que, quando $W_2 \neq W_1$, o limite de Holevo não vai a zero nesses pontos. Mais do que isso, quanto maior W_2 (em relação a W_1), maiores os valores de $\chi(\tau')$ para θ próximo de 0 ou de π . Se Bob está parado relativamente a Alice, os graus de liberdade de momentum não desempenham nenhum papel na comunicação e, para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, os estados de spin que Bob efetivamente tem de identificar são idênticos e, por conseguinte, $\chi(\tau) = 0$. Quando ele está em movimento em relação a Alice, por outro lado, os estados de spin observados são mistos, e o grau de mistura depende das variáveis de momentum (parametrizadas pela dispersão W_X e pelo momentum médio K_X). Desse modo, quando se move em relação a Alice, Bob ganha informação adicional, relativa aos graus de liberdade de momentum, quando faz medições de spin, o que o auxilia na distinção dos dois estados. Podemos entender que Bob está usando os diferentes graus de mistura dos estados para

distingui-los. Por isso, para essa faixa de valores de θ , quanto mais W_2 se afasta de W_1 , maior a distinguibilidade, uma vez que as purezas dos dois estados tornam-se, então, menos semelhantes. O movimento de Bob provoca, pois, uma *transferência de informação dos graus de liberdade de momentum para os de spin*. Esse é um efeito puramente relativístico, que não se manifesta quando $\alpha = 0$.

Mais uma vez fica claro que os graus de liberdade de momentum de uma partícula não podem ser desprezados *ab initio* em aplicações de informação quântica quando há movimento relativo entre observadores [20, 21, 78].

O mesmo padrão observado na Figura 4.2 é obtido se fixamos $W_1 = W_2$, K_1 e variamos K_2 . Na Figura 4.3, mais uma vez fazendo $\alpha \rightarrow \infty$, tomamos $\lambda = 0,5$, $W_1 = W_2 = 1,0$ e $K_1 = 0,01$, e traçamos gráficos para diferentes valores de K_2 . As mesmas conclusões se aplicam nesse caso, com a diferença de que agora são os momenta médios distintos dos dois estados que originam os diferentes graus de mistura de spin no referencial do boost.

Na Figura 4.4, plotamos o limite de Holevo $\chi(\tau')$ no referencial do boost como função da dispersão de momentum W_2 , com $\theta = 0,01$, $\lambda = 0,5$, $K_1 = K_2 = 0$ e $W_1 = 0,05$ fixados. Podemos verificar $\chi(\tau')$ assume valor mínimo para $W_2 = W_1 = 0,05$. Nesse caso, além de os momenta médios K_1 e K_2 serem iguais, as dispersões W_1 e W_2 também o são, de modo que os dois estados de spin têm a mesma pureza e, dessa forma, Bob não tem nenhuma informação adicional oriunda dos graus de liberdade de momentum para distinguir entre eles.

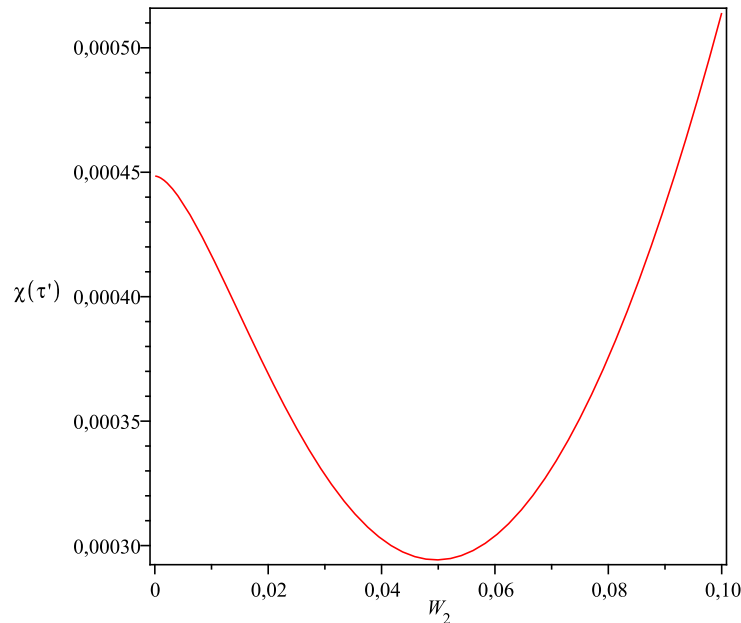


Figura 4.4: O limite de Holevo $\chi(\tau')$ no referencial em movimento como função da dispersão de momentum W_2 . Tomamos $\alpha \rightarrow \infty$ e fixamos $\theta = 0,01$, $\lambda = 0,5$, $K_1 = K_2 = 0$ e $W_1 = 0,05$. Note que o limite de Holevo tome os seus menores valores em torno de $W_2 = W_1 = 0,05$.

4.4 Aumento da capacidade do canal por meio de movimento relativístico

Na Seção 4.3, vimos que o movimento de Bob faz com que haja uma transferência de informação dos graus de liberdade de momentum dos estados para os de spin. Para $\theta \approx \pi/2$, notamos que o efeito do movimento sempre diminui o limite de Holevo, de modo que, mesmo que Alice prepare estados de spin ortogonais (no seu referencial próprio), Bob não é capaz de distingui-los perfeitamente (a não ser, como comentamos, que os estados sejam auto-estados de momentum, ou seja, que $W_1 \rightarrow 0$ e $W_2 \rightarrow 0$). Para $\theta \approx 0$ ou $\theta \approx \pi$, contudo, vimos que transferência de informação é mais eficiente e que, quanto mais diferem os parâmetros W_X e K_X ($X = 1, 2$), que caracterizam os pacotes de momentum dos estados, maior se torna o limite de Holevo. Podemos nos perguntar, diante disso, se existe algum esquema de condificação (isto é, alguma escolha dos estados ψ_1 e ψ_2) para o qual o simples fato de Bob estar em movimento relativamente a Alice pode melhorar, em relação ao caso em que está parado com ela, a sua capacidade de identificar os estados que recebe.

Vamos mostrar, então, que, para certos valores de θ (que, na nossa formulação, é o parâmetro que se associa a diferentes condificações dos caracteres gerados pela fonte clássica), o limite de Holevo pode ser maior quando o detector de Bob está em movimento do quando ele está parado. Esse é, portanto, um caso em que a relatividade pode melhorar um protocolo de informação quântica. Para esse fim, vamos estudar a diferença

$$\Delta\chi(\theta) \equiv \chi(\tau') - \chi(\tau), \quad (4.67)$$

onde τ representa o estado de spin como função de θ quando Bob está em repouso e τ' representa o estado de spin como função de θ quando Bob está em movimento. O resultado desejado é obtido, dessa maneira, sempre que $\Delta\chi > 0$. Mais uma vez, tomamos o limite ultrarrelativístico, $\alpha \rightarrow \infty$.

Na Figura 4.5, fixamos $W_1 = 0, 1$, $W_2 = 10, 0$, e $K_1 = K_2 = 1, 0$, e fazemos gráficos para diferentes valores de λ . Vemos que, para todo λ não-trivial (isto é, diferente de 0 e de 1), existe uma faixa de valores de θ para os quais $\Delta\chi > 0$. Colocando de outra forma, podemos afirmar que, para todo $0 < \lambda < 1$, é possível tomar um ângulo θ tal que $\Delta\chi > 0$. Mais precisamente, isso ocorre para θ suficientemente próximo de 0 ou de π . Portanto, a transferência de informação dos graus de liberdade de momentum para os de spin, promovida pelo boost, pode ser grande o suficiente para que a distinguibilidade seja maior no referencial em movimento do que no de preparação.

A fim de estudar em mais detalhes como esse efeito varia com os graus de liberdade de momentum, na Figura 4.6 fixamos $\lambda = 0, 3$, $W_1 = 0, 1$, e $K_1 = K_2 = 1, 0$, e plotamos gráficos para diferentes valores de W_2 . Mais uma vez, o resultado é obtido, contanto apenas que W_2 seja suficientemente grande em comparação a W_1 . Notemos que, quanto

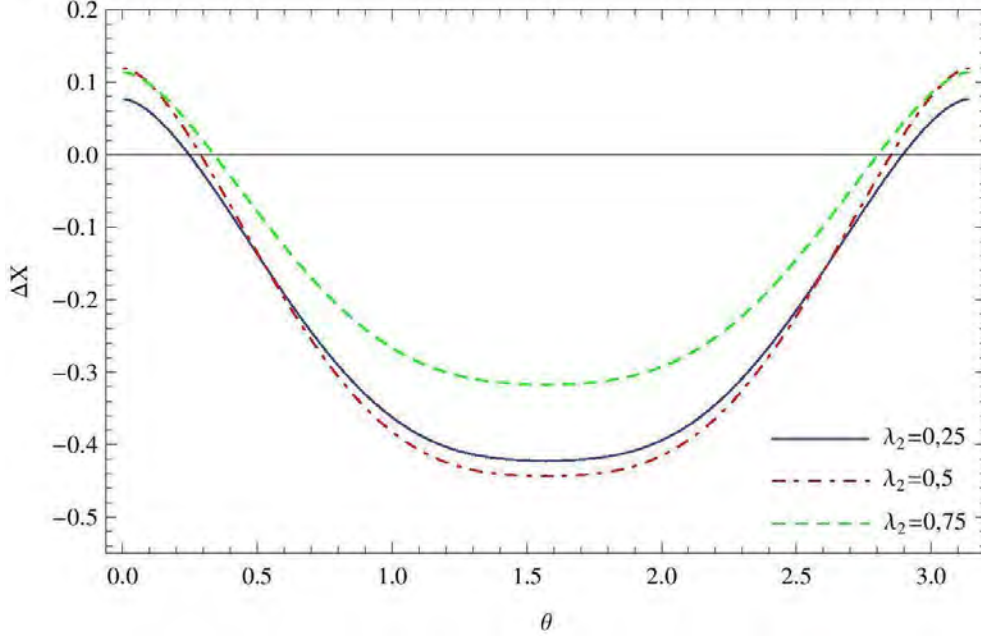


Figura 4.5: $\Delta\chi$ como função de θ para diferentes valores de λ e $W_1 = 0,1$, $W_2 = 10,0$, e $K_1 = K_2 = 1,0$ fixados. O plot assume $\alpha \rightarrow \infty$. Notemos que, para todo $\lambda \in]0,1[$, o boost aumenta a distinguibilidade para θ suficientemente pequeno ou suficientemente próximo de π .

mais o valor W_2 se afasta do de W_1 , maior o aumento da distinguibilidade dos estados e maior a faixa de valores de θ para os quais o efeito se manifesta.

Esse resultado pode ser assim interpretado: quando Bob está em repouso relativamente a Alice e θ é muito pequeno (ou muito próximo de π , equivalentemente), os estados de spin ϕ_\uparrow e ϕ_θ são quase indistinguíveis,

$$\phi_\theta = \cos \theta \phi_\uparrow + \sin \theta \phi_\downarrow \approx \phi_\uparrow + \mathcal{O}(\theta), \quad (4.68)$$

e, como consequência, o limite de Holevo $\chi(\tau_\theta)$ é muito pequeno. Por outro lado, como explicamos na Seção 4.3, se Bob está em movimento, as informações de spin e de momentum do estado original ρ preparado por Alice são “misturadas” pela rotação de Wigner e, por conseguinte, Bob obtém alguma informação extra para distinguir entre ψ'_1 e ψ'_2 , já que esses estados, para θ muito pequeno (ou muito próximo de π , equivalentemente), podem ser mais claramente distinguíveis por seus graus de liberdade de momentum do que pelos de spin⁵. Desse modo, no referencial do boost, o limite de Holevo $\chi(\tau')$ se torna, nesses casos, maior do que no referencial de preparação.

Na Figura 4.7, fixamos $\lambda = 0,5$, $W_1 = W_2 = 1,0$ e $K_1 = 0,01$, e tomamos plots

⁵Suponhamos, por exemplo, que Bob esteja parado em relação a Alice e que $\theta \approx 0$. Consideremos, além disso, que $K_1 = K_2 = K$ e que $W_1 \approx 0$, ao passo que $W_2 \gg W_1$. Nesse caso, como já mencionamos, os estados ψ_1 e ψ_2 são praticamente indistinguíveis por medições de spin. Se, todavia, Bob mede o momentum da partícula, em vez de o seu spin, ele pode conseguir distinguir melhor entre ψ_1 e ψ_2 . Em suma, se ele obtém um valor de momentum muito distante de K , é mais provável que ele tenha recebido o estado ψ_2 do que o estado ψ_1 , já que este tem valor de momentum muito bem definido, enquanto aquele tem uma dispersão apreciável.

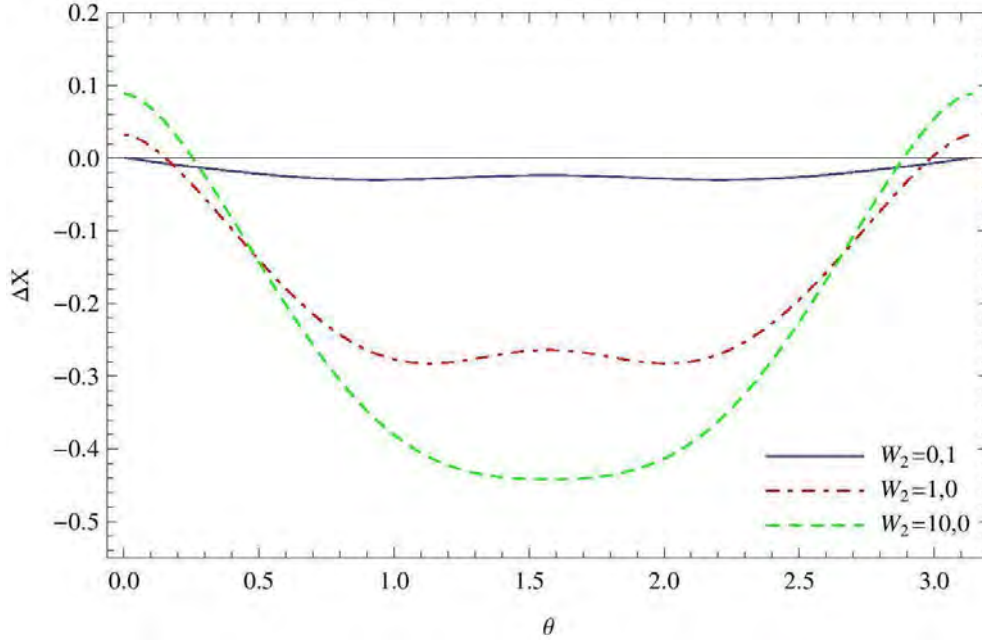


Figura 4.6: $\Delta\chi$ como função de θ para diferentes valores de W_2 e $\lambda = 0,3$, $W_1 = 0,1$, e $K_1 = K_2 = 1,0$ fixados, com $\alpha \rightarrow \infty$. Note que o boost aumenta a distinguibilidade para θ suficientemente pequeno ou suficientemente próximo de π .

para diferentes valores de K_2 . O mesmo padrão da Figura 4.6 é obtido.

4.5 Relatividade e mapeamentos quânticos

O conceito de *mapeamento quântico* é importante para a descrição de sistemas quânticos *abertos*, isto é, sujeitos a influências externas do ambiente em que evolui. É possível mostrar [22] que, se o sistema é preparado no estado ρ e interage com o ambiente, com cuja inclusão forma um sistema fechado que evolui unitariamente, o estado final ρ' do sistema, obtido tomando-se o traço sobre os graus de liberdade do ambiente, tem a forma

$$\rho' = \sum_k V_k \rho V_k^\dagger, \quad (4.69)$$

onde $\{V_k\}$ é um conjunto de operadores que satisfaz

$$\sum_k V_k^\dagger V_k = I. \quad (4.70)$$

Também é possível mostrar [22], reciprocamente, que todo mapeamento da forma $\rho \mapsto \rho' = \sum_k V_k \rho V_k^\dagger$, com $\sum_k V_k^\dagger V_k = I$, pode ser obtido por meio da interação do sistema com o ambiente e descartando-se os graus de liberdade deste último após a evolução unitária. Isso motiva a definição de um mapeamento quântico como um operador linear

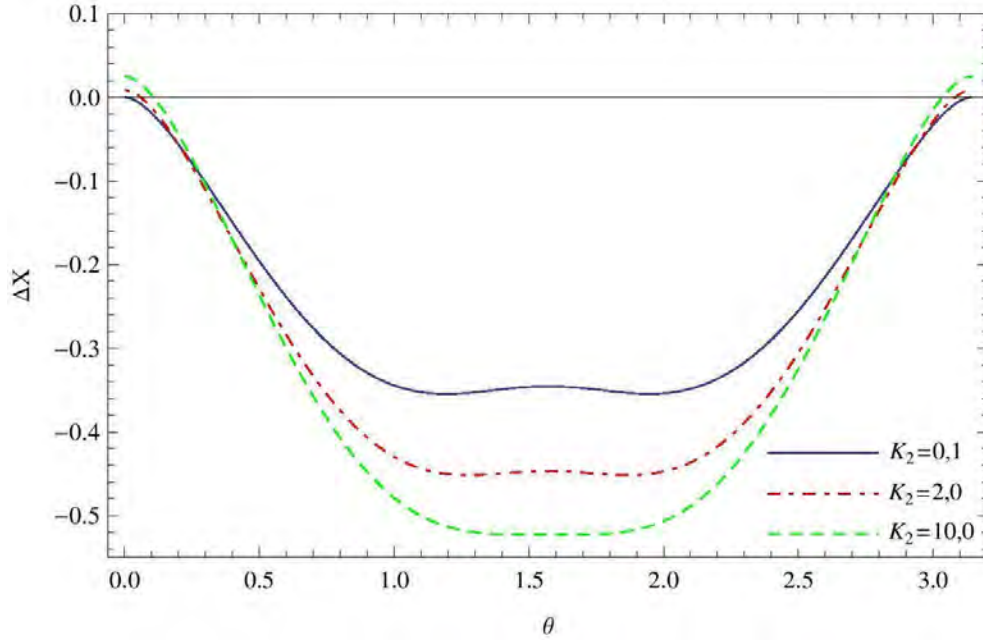


Figura 4.7: $\Delta\chi$ como função de θ para diferentes valores de K_2 . Fixamos $\lambda = 0,5$, $W_1 = W_2 = 1,0$ e $K_1 = 0,01$, e tomamos $\alpha \rightarrow \infty$. Note que o boost aumenta a distinguibilidade para θ suficientemente pequeno ou suficientemente próximo de π .

\mathcal{E} com a forma

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k V_k \rho V_k^\dagger, \quad \sum_k V_k^\dagger V_k = I. \quad (4.71)$$

É possível verificar que um tal mapeamento, além de ser linear, preserva o traço e é completamente positivo [22, 135]. Um mapeamento linear $T(\rho)$ é dito *positivo* se transforma qualquer operador positivo ρ (a saber, um cujos autovalores são todos não-negativos) em outro operador positivo; por outro lado, é dito *completamente positivo* se, além de ser positivo, $(T \otimes I^m)$, ao atuar num sistema composto, produz outro sistema composto válido para todo $m \in \mathbb{Z}_+$. Por exemplo, a conjugação complexa de ρ , cujo significado físico é uma inversão temporal⁶, é um mapeamento positivo. Contudo, não é completamente positivo, uma vez que, se dispomos de dois sistemas, é fisicamente sem sentido inverter a direção temporal para apenas um deles. Embora seja possível escrever uma expressão formal para esse processo, o “operador densidade” resultante não é fisicamente aceitável, já que pode ter autovalores negativos, ou seja, não é um operador positivo [21, 137].

Assume-se, em informação quântica, que a evolução de sistemas abertos se dá por meio de mapeamentos quânticos e, dessa forma, representa-se um canal quântico (o operador que leva o estado enviado pelo emissor àquele que o receptor de fato recebe) como um mapeamento quântico. Um resultado importante [22] garante que um

⁶Se $\psi(\mathbf{x}, t)$ é uma solução da equação de Schrödinger, então $\psi^*(\mathbf{x}, -t)$ também o é. Essa simetria, representada por uma transformação antiunitária, é comumente chamada na literatura de *inversão temporal*, embora seja mais preciso chamá-la de *inversão do movimento* [136].

mapeamento quântico $\mathcal{E}(\rho)$ nunca aumenta o limite de Holevo $\chi(\rho)$,

$$\chi(\mathcal{E}(\rho)) \leq \chi(\rho), \quad (4.72)$$

ou seja, nunca aumenta a distinguibilidade de estados quânticos.

Retomemos, agora, a situação relativística de comunicação quântica em estudo neste capítulo. Alice prepara a mistura estatística ρ dada pela equação (4.1). Todavia, como Bob só faz medições de spin, tudo se passa como se Alice efetivamente tivesse preparado o estado de spin τ dado pela equação (4.21),

$$\tau = \int d^3p \rho(\mathbf{p}, \mathbf{p}).$$

Estando Bob em movimento relativamente a Alice, o estado de spin que ele recebe (sem que haja qualquer influência externa sobre o sistema) é descrito, como vimos, por τ' dado por

$$\tau' = \mathcal{N}(\tau) = \int d^3p \rho'(\mathbf{p}, \mathbf{p}), \quad (4.73)$$

onde ρ' é dado pela equação (4.31),

$$\rho'(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = \frac{q^0}{p^0} D(\Lambda, q) \rho(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) D^\dagger(\Lambda, \tilde{q}). \quad (4.74)$$

Aqui, D é a rotação de Wigner dada pela equação (4.33). Queremos estudar as propriedades do mapeamento \mathcal{N} que leva o estado de spin τ preparado por Alice ao estado de spin τ' efetivamente recebido por Bob⁷. Como tanto a rotação de Wigner quanto o traço são lineares e preservam o traço, o mapeamento $\mathcal{N} : \tau \mapsto \tau'$ é linear e preserva o traço. Todavia, como vimos na Seção 4.4, e como ilustram as Figuras 4.5, 4.6 e 4.7, existem configurações do sistema em que o limite de Holevo pode aumentar devido ao movimento de Bob. Ou seja, podemos ter

$$\chi(\mathcal{N}(\rho)) > \chi(\rho), \quad (4.75)$$

o que contraria a desigualdade (4.72), satisfeita por mapeamentos quânticos. Portanto, o mapeamento \mathcal{N} que leva o estado de spin no referencial de preparação ao estado de spin no referencial do boost não é completamente positivo e não se trata de um mapeamento quântico.

A razão para isso é que a rotação de Wigner não depende apenas das variáveis discretas de interesse, mas também das variáveis de momentum sobre as quais tomamos

⁷Embora um operador densidade reduzido não tenha nenhuma lei de transformação geral definida sob transformações de Lorentz, como mostramos na Seção 2.3, podemos estabelecer leis efetivas $\tau' = \mathcal{N}(\tau)$ para classes particulares de procedimentos experimentais, e podemos nos perguntar quais as suas propriedades [21].

o traço, ignorando-as. Desse modo, a transformação relativística dos graus de liberdade de interesse dependem de graus de liberdade desprezados. O estado completo, com todas as variáveis, transforma-se unitariamente, e o grau de distinguibilidade é preservado.

Por fim, podemos concluir que, quando há movimento relativo entre as partes que trocam informação, não apenas *o vácuo se comporta como um canal quântico ruidoso*⁸ [21], como também *a própria representação do canal por um mapeamento completamente positivo falha*.

⁸Porque Bob não recebe o mesmo estado preparado por Alice. Isso se deve exclusivamente ao movimento entre Alice e Bob, e não a qualquer interação entre o sistema e o ambiente.

Capítulo 5

Conclusões e considerações finais

A formulação de uma teoria relativística da informação quântica é importante não apenas por uma questão de completeza lógica, como também pela possibilidade de se desvendarem novos efeitos físicos e limitações no armazenamento, na transmissão e no processamento de informação quântica quando há movimento relativo entre as partes que se comunicam. Na última década, esse projeto tem recebido bastante atenção da comunidade científica, com uma miríade de trabalhos apresentando resultados novos [20, 21]. Entre eles, estão resultados altamente não-triviais, como o fato de que a entropia de von Neumann não é um escalar de Lorentz e não possui nenhum significado invariante, e operadores densidades reduzidos de spin não possuem nenhuma lei de transformação relativística [57]. Uma extensão relativística da teoria da informação quântica também é interessante pelas possibilidades que abre de esclarecer problemas de gravitação quântica que têm natureza essencialmente informacional, como o paradoxo da perda de informação em buracos negros, a natureza microscópica da entropia desses objetos e a decoerência induzida por campos gravitacionais [43].

Nesta tese, apresentamos uma síntese de alguns dos principais resultados da incipiente teoria da informação quântica relativística e, além disso, expusemos alguns resultados originais. No capítulo 3, estudamos como a relatividade especial afeta as correlações entre as polarizações de um par de fótons emaranhados, analisando as desigualdades de Bell CHSH quando um dos detectores move-se em relação ao referencial de preparação do estado [78]. Essa análise é de especial interesse devido à perspectiva de realização de experimentos com a transmissão de fótons emaranhados, pelo espaço livre, entre estações terrestres e satélites em órbita, com o objetivo de testar a mecânica quântica para grandes distâncias e de iniciar o projeto de implementação de protocolos de informação quântica em escala global [53, 54, 55, 56]. Nossa análise revela que as correlações dependem tanto da dispersão de momentum do estado quanto da velocidade do detector [57]. Mostramos que, quanto maior a dispersão de momentum do estado de dois fótons, maior a perda de correlações, mesmo no caso em que ambos os detectores estão parados em relação ao aparato de preparação. Isso ocorre porque o

fato de o estado não ter um momentum bem definido faz com que ele também não tenha uma polarização bem definida, como consequência da condição de transversalidade entre essas duas variáveis. Assim, quando ignoramos os momenta, obtemos um estado de polarização misto, que, em geral, apresenta menos correlações do que um estado puro. O efeito relativístico — isto é, a dependência das correlações com a velocidade do detector — pode ser entendido em termos desse primeiro efeito. Mostramos que o parâmetro de medida de dispersão de momentum que efetivamente importa para o fenômeno é $W = w/|p|$, onde w é o desvio padrão da energia do fóton e $|p|$ é a sua energia média. Quando o detector e o fóton movem-se no mesmo sentido, a energia observada sofre um *redshift*, de modo que a dispersão efetiva aumenta e, por conseguinte, há uma perda de correlações. Por outro lado, quando o detector e o fóton movem-se em sentidos opostos, a energia observada sofre um *blueshift* e W então diminui; como consequência, as correlações aumentam. O boost pode, pois, causar tanto uma perda quanto um aumento das correlações. Em particular, para satélites movendo-se com velocidades ultra-relativísticas, o efeito pode ser grande a ponto de as correlações aproximarem-se arbitrariamente de zero. Também mostramos que, considerando uma situação realista — por exemplo, tomando a velocidade da Estação Espacial Internacional e usando a tecnologia atual de produção de fótons emaranhados para fixar W — o efeito relativístico deve ser muito pequeno em comparação às perdas por ruído para ser verificado. Lembramos, contudo, que esse é um efeito físico intrínseco, consequência da relatividade especial, e não uma limitação tecnológica. Desse modo, é possível que, com a redução das perdas por ruído e o consequente aumento da precisão das medições, o efeito relativístico apresentado se torne experimentalmente apreciável. Lembramos que o Sistema de Posicionamento Global não funcionaria se a minúscula dessincronização entre os satélites e as antenas terrestres não fosse corrigida pela teoria da relatividade geral [49]. Outra informação que derivamos que pode vir a ser útil futuramente é que o efeito relativístico sobre as correlações pode ser atenuado pela preparação de estados com dispersões de momentum suficientemente pequenas — em particular, nenhum desvio do caso usual é observado se $w \rightarrow 0$, ou seja, se os fótons estão em auto-estados de momentum. Se, ao contrário, o objetivo de um experimento é justamente testar o efeito relativístico, é mais favorável utilizar fótons com grandes dispersões de momentum.

No Capítulo 4, analisamos o limite de Holevo para investigar sistemas de comunicação quando há movimento relativo entre o emissor e o receptor de uma mensagem clássica enviada por um canal quântico [79]. O limite de Holevo é uma quantidade de grande interesse em informação quântica porque é um limite superior para a informação acessível, a qual, por sua vez, dá uma medida de quão bem um receptor pode identificar uma mensagem clássica transmitida para ele por um canal quântico [22]. Além disso, sempre é possível utilizar uma codificação apropriada tal que a informação

seja transmitida a uma taxa que se aproxima arbitrariamente do limite de Holevo, com probabilidade de erro arbitrariamente baixa [132, 133, 134]. Em nossa análise, supusemos que Bob está em movimento em relação a Alice, que envia para ele uma mensagem através de um canal quântico. Concluímos que, no caso de Alice preparar estados de spin ortogonais, que é a melhor estratégia para a identificação dos estados por Bob, o movimento sempre diminui a distinguibilidade dos estados e, conseqüentemente, a eficiência da comunicação. Isso é uma consequência do fato de que os graus de liberdade de spin são variáveis secundárias [20, 21], cuja lei de transformação relativística depende dos graus de liberdade de momentum. A transformação do estado completo, dada por uma rotação de Wigner [7, 105, 106], provoca o emaranhamento dos graus de liberdade de momentum e de spin, de modo que, quando ignoramos aqueles, obtemos um estado misto nestes. Estados mistos são, naturalmente, menos distinguíveis do que estados puros ortogonais. Dessa forma, concluímos que, ao passo que no caso não-relativístico os graus de liberdade de momentum do estado preparado — parametrizados pela dispersão e pelo momentum médio — não afetam em nada o limite de Holevo, no caso relativístico essa propriedade não é mais verificada. De maneira geral, quanto maiores a dispersão e o momentum médio, maiores os desvios em relação ao caso não-relativístico. Outro resultado que obtivemos é que, se θ é um parâmetro que mede o quão ortogonais são os estados de spin preparados no referencial de Alice, sempre existem valores de θ para os quais o movimento de Bob torna o processo de comunicação mais eficiente do que no caso em que ele está parado em relação a Alice. Isso ocorre quando, no referencial de repouso de Alice, os estados de spin preparados são aproximadamente iguais, ou seja, praticamente indistinguíveis. Nesse caso, no referencial do boost, como o grau de mistura (ou, equivalentemente, a pureza) dos estados de spin depende das variáveis de momentum, Bob obtém informação adicional, proveniente do momentum médio e da dispersão de momentum, para distinguir os dois estados. Ocorre, efetivamente, uma transferência de informação dos graus de liberdade de momentum para os de spin. Confirmando essa análise, mostramos que, se os dois estados usados na codificação são iguais em seus graus de liberdade de momentum, o movimento não dá a Bob nenhuma informação suplementar para a identificação. Por fim, notamos que o fato de que é possível aumentar a distinguibilidade de estados quânticos de spin por meio de um boost mostra que o mapeamento que leva o operador densidade reduzido de spin τ no referencial de Alice ao operador densidade reduzido de spin τ' no referencial do boost não pode ser completamente positivo, uma vez que um mapeamento desse tipo nunca aumenta a distinguibilidade de estados quânticos. Assim, quando há movimento relativo entre as partes que trocam informação, não apenas o vácuo se comporta como um canal quântico ruidoso [21], como também a própria representação do canal por um mapeamento completamente positivo falha. Nossa análise revela, pois, que um canal quântico relativístico apresenta propriedades singulares em

comparação a um não-relativístico.

Perspectivas para o estudo de informação quântica relativística envolvem a análise de variados protocolos de informação quântica modificados pelo movimento relativo entre observadores. Exemplos notáveis são o teletransporte quântico, a criptografia quântica, os algoritmos quânticos ultrarrápidos e a correção quântica de erros [22]. Efeitos de decoerência [61] parecem ser particularmente promissores, dada importância desse efeito tanto para questões conceituais quanto práticas [138, 139]. Estudos sobre problemas de informação quântica em campos gravitacionais são especialmente interessantes por poderem dar *insights* valiosos para a formulação de uma teoria completa da gravitação quântica. A experiência nesse campo tem mostrado, de qualquer forma, que mesmo na ausência de gravitação esse tipo de estudo já revela resultados não-triviais [20, 21].

Apêndice A

Cálculo do valor esperado $\langle \sigma_{\varphi}^A \otimes \sigma_{\varpi}^B \rangle_{\psi'}$, equação (3.56)

Vamos obter a equação (3.56), isto é, a expressão explícita do valor esperado $\langle \sigma_{\varphi}^A \otimes \sigma_{\varpi}^B \rangle_{\psi'}$. Para isso, vamos trabalhar as integrais (3.50), (3.51) e (3.52) do Capítulo 3, dadas por

$$\langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle = \int d^3k \frac{q^0}{k^0} |f_{p_A}(\mathbf{q})|^2 \frac{|x_+(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) x_-(\mathbf{k})|^2}{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$\langle H'_A | P_{yy} | H'_A \rangle = \int d^3k \frac{q^0}{k^0} |f_{p_A}(\mathbf{q})|^2 \frac{|x_+(\mathbf{q}) y_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) y_-(\mathbf{k})|^2}{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle &= \int d^3k \frac{q^0}{k^0} |f_{p_A}(\mathbf{q})|^2 \frac{[x_+(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) x_-(\mathbf{k})]}{\sqrt{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2}} \\ &\quad \times \frac{[x_+(\mathbf{q}) y_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) y_-(\mathbf{k})]}{\sqrt{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

começando pela primeira. Lembrando a forma da medida relativisticamente invariante,

$$\frac{d^3k}{k^0} = \frac{d^3q}{q^0}, \quad (\text{A.4})$$

usando a equação (3.17) para obter a forma explícita da função de dispersão de momentum e adotando coordenadas cilíndricas com q^z como eixo de simetria, temos

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle &= \frac{1}{\pi w^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dq^z \int_0^{\infty} dq^r q^r \delta(q^z - p^z) \exp\left(-\frac{(q^r)^2}{w^2}\right) \\ &\quad \times \frac{|x_+(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) x_-(\mathbf{k})|^2}{|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2}. \end{aligned}$$

Recordemos que as variáveis de momentum (q^0, \mathbf{q}) referem-se ao referencial de preparação (ou seja, da estação terrestre), enquanto (k^0, \mathbf{k}) referem-se ao referencial do boost (do satélite). Elas se relacionam pela transformação de Lorentz

$$\begin{cases} k^0 = \cosh \alpha (q^0 + \tanh \alpha q^z), \\ k^x = q^x, \\ k^y = q^y, \\ k^z = \cosh \alpha (q^z + \tanh \alpha q^0), \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

onde $\alpha = -\tanh^{-1} v$. Daí se segue que

$$k^r = q^r = \sqrt{(q^x)^2 + (q^y)^2} \quad (\text{A.6})$$

e

$$\phi^k = \phi^q = \tanh^{-1} \left(\frac{q^y}{q^x} \right). \quad (\text{A.7})$$

Agora usando a forma explícita de x_+ e x_- , equação (3.13), e as relações (3.54), podemos calcular $x_+(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) x_-(\mathbf{k})$. Primeiramente notemos que

$$\begin{aligned} x_+(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) &= \frac{\cos \theta^q \cos \phi^q + i \sin \phi^q}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta^k \cos \phi^k - i \sin \phi^k}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{q^z}{\sqrt{(q^z)^2 + (q^r)^2}} \cos \phi + i \sin \phi \right) \left(\frac{k^z}{\sqrt{(k^z)^2 + (q^r)^2}} \cos \phi - i \sin \phi \right), \end{aligned}$$

onde usamos também as equações (A.6) e (A.7). Similarmente, temos

$$\begin{aligned} x_-(\mathbf{q}) x_-(\mathbf{k}) &= \frac{\cos \theta^q \cos \phi^q - i \sin \phi^q}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta^k \cos \phi^k + i \sin \phi^k}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{q^z}{\sqrt{(q^z)^2 + (q^r)^2}} \cos \phi - i \sin \phi \right) \left(\frac{k^z}{\sqrt{(k^z)^2 + (q^r)^2}} \cos \phi + i \sin \phi \right). \end{aligned}$$

Então é fácil obter

$$x_+(\mathbf{q}) x_+(\mathbf{k}) + x_-(\mathbf{q}) x_-(\mathbf{k}) = \frac{q^z k^z \cos^2 \phi}{\sqrt{[(q^z)^2 + (q^r)^2][(k^z)^2 + (q^r)^2]} + \sin^2 \phi. \quad (\text{A.8})$$

Da mesma maneira podemos calcular

$$|x_+(\mathbf{q})|^2 + |x_-(\mathbf{q})|^2 = \frac{(q^z)^2}{(q^z)^2 + (q^r)^2} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi. \quad (\text{A.9})$$

De posse das equações (A.8) e (A.9), podemos reescrever $\langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle$ como

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle &= \frac{1}{\pi w^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dq^z \int_0^{\infty} dq^r q^r \delta(q^z - p^z) \exp\left(-\frac{(q^r)^2}{w^2}\right) \frac{(q^z)^2 + (q^r)^2}{(q^z)^2 + (q^r)^2 \sin^2 \phi} \\ &\quad \times \left[\frac{q^z k^z \cos^2 \phi}{\sqrt{[(q^z)^2 + (q^r)^2][(k^z)^2 + (q^r)^2]}} + \sin^2 \phi \right]^2. \end{aligned}$$

Usando as transformações (A.5) e o fato de que em coordenadas cilíndricas podemos escrever

$$q^0 = \|\mathbf{q}\| = \sqrt{(q^r)^2 + (q^z)^2}, \quad (\text{A.10})$$

esse valor esperado toma a forma

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle &= \frac{1}{\pi w^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dq^z \int_0^{\infty} dq^r q^r \delta(q^z - p^z) \exp\left(-\frac{(q^r)^2}{w^2}\right) \frac{(q^z)^2 + (q^r)^2}{(q^z)^2 + (q^r)^2 \sin^2 \phi} \\ &\quad \times \left[\frac{q^z (\sinh \alpha \sqrt{(q^r)^2 + (q^z)^2} + \cosh \alpha q^z) \cos^2 \phi}{\sqrt{[(q^z)^2 + (q^r)^2][(\sinh \alpha \sqrt{(q^r)^2 + (q^z)^2} + \cosh \alpha q^z)^2 + (q^r)^2]}} + \sin^2 \phi \right]^2. \end{aligned}$$

A integração em q^z pode ser feita prontamente, o que nos dá

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle &= \frac{1}{\pi w^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dq^r q^r \exp\left(-\frac{(q^r)^2}{w^2}\right) \frac{(p^z)^2 + (q^r)^2}{(p^z)^2 + (q^r)^2 \sin^2 \phi} \\ &\quad \times \left[\frac{p^z (\sinh \alpha \sqrt{(q^r)^2 + (p^z)^2} + \cosh \alpha p^z) \cos^2 \phi}{\sqrt{[(p^z)^2 + (q^r)^2][(\sinh \alpha \sqrt{(q^r)^2 + (p^z)^2} + \cosh \alpha p^z)^2 + (q^r)^2]}} + \sin^2 \phi \right]^2. \end{aligned}$$

Vamos, então, definir as variáveis adimensionais Q^μ e W normalizando q^μ e w pelo momentum médio ao longo da direção z , isto é, por p^z :

$$Q^\mu = \frac{q^\mu}{p^z}, \quad W = \frac{w}{p^z}. \quad (\text{A.11})$$

Dessa maneira, a integral toma a forma

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle &= \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dQ^r Q^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \frac{1 + (Q^r)^2}{1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi} \\ &\quad \times \left[\frac{(\sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1} + \cosh \alpha) \cos^2 \phi}{\sqrt{[1 + (Q^r)^2][(\sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1} + \cosh \alpha)^2 + (Q^r)^2]}} + \sin^2 \phi \right]^2. \end{aligned}$$

Finalmente, notemos que

$$(\sinh \alpha \sqrt{1 + (Q^r)^2} + \cosh \alpha)^2 + (Q^r)^2 = (\cosh \alpha \sqrt{1 + (Q^r)^2} + \sinh \alpha)^2.$$

Logo, podemos escrever o valor esperado $\langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle$ como

$$\begin{aligned} A(\alpha, W) \equiv \langle H'_A | P_{xx} | H'_A \rangle &= \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r Q^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \frac{1 + (Q^r)^2}{1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi} \\ &\times \left[\frac{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1}) \cos^2 \phi}{\sqrt{(Q^r)^2 + 1} (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})} + \sin^2 \phi \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

De maneira similar, podemos calcular os outros valores esperados. Para $\langle H'_A | P_{yy} | H'_A \rangle$ obtemos

$$\begin{aligned} B(\alpha, W) \equiv \langle H'_A | P_{yy} | H'_A \rangle &= \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \\ &\times \frac{(Q^r)^5 \cosh^2 \alpha \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{(1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi) (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Além disso, podemos ver que $\langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle = \langle H'_A | P_{yx} | H'_A \rangle^*$ se anula. Partindo da equações (3.52) e adotando um procedimento análogo àquele que empregamos para obter $A(\alpha, W)$, temos

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dq^z \int_0^\infty dq^r |f_{\mathbf{p}_A}(\mathbf{q})|^2 \frac{(q^z)^2 + (q^r)^2}{(q^z)^2 + (q^r)^2 \sin^2 \phi} \sin \phi \cos \phi \\ &\times \left[\frac{q^z k^z \cos^2 \phi}{\sqrt{[(q^z)^2 + (q^r)^2][(k^z)^2 + (q^r)^2]}} + \sin^2 \phi \right] \left[\frac{q^z k^z}{\sqrt{[(q^z)^2 + (q^r)^2][(k^z)^2 + (q^r)^2]}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Agora fazendo a mudança de variáveis $\phi \mapsto \phi' = \phi - \pi$, reescrevemos essa equação como

$$\begin{aligned} \langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle &= \int_{-\pi}^\pi d\phi' \int_{-\infty}^\infty dq^z \int_0^\infty dq^r |f_{\mathbf{p}_A}(\mathbf{q})|^2 \frac{(q^z)^2 + (q^r)^2}{(q^z)^2 + (q^r)^2 \sin^2 \phi'} \sin \phi' \cos \phi' \\ &\times \left[\frac{q^z k^z \cos^2 \phi'}{\sqrt{[(q^z)^2 + (q^r)^2][(k^z)^2 + (q^r)^2]}} + \sin^2 \phi' \right] \left[\frac{q^z k^z}{\sqrt{[(q^z)^2 + (q^r)^2][(k^z)^2 + (q^r)^2]}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

É fácil ver que a integral em ϕ' se anula, já que o integrando é ímpar nessa variável e os limites de integração são simétricos em relação a zero. Assim, concluímos que

$$\langle H'_A | P_{xy} | H'_A \rangle = \langle H'_A | P_{yx} | H'_A \rangle = 0. \quad (\text{A.14})$$

Usando as equações (A.12), (A.13) e (A.18), podemos reescrever a equação (3.49) como

$$\langle H'_A | \sigma_\varphi | H'_A \rangle = [A(\alpha, W) - B(\alpha, W)] \cos 2\varphi. \quad (\text{A.15})$$

Realizando de maneira similar o cálculo dos outros valores esperados da equação (3.48), obtemos

$$\langle V'_A | \sigma_\varphi | V'_A \rangle = [C(\alpha, W) - D(\alpha, W)] \cos 2\varphi \quad (\text{A.16})$$

e

$$\langle H'_A | \sigma_\varphi | V'_A \rangle = \langle V'_A | \sigma_\varphi | H'_A \rangle = [E(\alpha, W) + F(\alpha, W)] \sin 2\varphi, \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\begin{aligned} C(\alpha, W) \equiv \langle V'_A | P_{xx} | V'_A \rangle &= \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \\ &\times \frac{(Q^r)^5 \cosh^2 \alpha \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{(1 + (Q^r)^2 \cos^2 \phi) (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} D(\alpha, W) \equiv \langle V'_A | P_{yy} | V'_A \rangle &= \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r Q^r \exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) \frac{1 + (Q^r)^2}{1 + (Q^r)^2 \cos^2 \phi} \\ &\times \left[\frac{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1}) \sin^2 \phi}{\sqrt{(Q^r)^2 + 1} (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})} + \cos^2 \phi \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} E(\alpha, W) \equiv \langle H'_A | P_{xy} | V'_A \rangle &= \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r \frac{\exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) Q^r [(1 + (Q^r)^2)]}{\sqrt{[1 + (Q^r)^2 \cos^2 \phi][1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi]}} \\ &\times \left[\frac{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1}) \cos^2 \phi}{\sqrt{(Q^r)^2 + 1} (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})} + \sin^2 \phi \right] \\ &\times \left[\frac{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1}) \sin^2 \phi}{\sqrt{(Q^r)^2 + 1} (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})} + \cos^2 \phi \right], \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} F(\alpha, W) \equiv \langle H'_A | P_{yx} | V'_A \rangle &= \frac{1}{\pi W^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dQ^r \frac{\exp\left(-\frac{(Q^r)^2}{W^2}\right) (1 + (Q^r)^2)}{\sqrt{[1 + (Q^r)^2 \cos^2 \phi][1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi]}} \\ &\times \frac{(Q^r)^5 \cosh^2 \alpha \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{(1 + (Q^r)^2 \sin^2 \phi) (\sinh \alpha + \cosh \alpha \sqrt{(Q^r)^2 + 1})^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Como já comentamos, as únicas diferenças entre esses resultados e aqueles válidos para a partícula B são (i) o fato de que os momenta médios ao longo da direção z são opostos para as duas partículas, $\mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_A = (0, 0, -|p|)$, e (ii) o fato de que o detector que mede a polarização do fóton B está em repouso, de modo que, nesse caso, $\alpha = 0$. Notemos que, nas integrais $A(\alpha, W), \dots, F(\alpha, W)$, o momentum médio p_X^z ao longo da direção z de cada partícula só aparece por meio de $W = w/p^z$ e $Q^r = q^r/p^z$, e que essas quantidades estão presentes sempre um número par de vezes, de modo que o sinal que diferencia p_A^z de $p_B^z = -p_A^z$ se torna irrelevante. Assim, os resultados para o fóton B são idênticos a menos do fato de que, nesse caso, $\alpha = 0$. Logo, as equações (A.15), (A.16) e (A.17) implicam que

$$\langle H_B | \sigma_\varpi | H_B \rangle = [A(0, W) - B(0, W)] \cos 2\varpi, \quad (\text{A.22})$$

$$\langle V_B | \sigma_\varpi | V_B \rangle = [C(0, W) - D(0, W)] \cos 2\varpi \quad (\text{A.23})$$

e

$$\langle H_B | \sigma_\varpi | V_B \rangle = \langle V_B | \sigma_\varpi | H_B \rangle = [E(0, W) + F(0, W)] \sin 2\varpi. \quad (\text{A.24})$$

Usando as equações (A.15)-(A.17) e (A.22)-(A.24), podemos então escrever a equação (3.48) como

$$\langle \sigma_\varphi^A \otimes \sigma_\varpi^B \rangle_{\psi'} = \Gamma(\alpha, W) \cos 2\varphi \cos 2\varpi + \Delta(\alpha, W) \sin 2\varphi \sin 2\varpi, \quad (\text{A.25})$$

onde

$$\Gamma(\alpha, W) \equiv \frac{1}{2} \left\{ [A(\alpha, W) - B(\alpha, W)][A(0, W) - B(0, W)] \right. \\ \left. + [C(\alpha, W) - D(\alpha, W)][C(0, W) - D(0, W)] \right\} \quad (\text{A.26})$$

e

$$\Delta(\alpha, W) \equiv [E(\alpha, W) + F(\alpha, W)][E(0, W) + F(0, W)]. \quad (\text{A.27})$$

Referências Bibliográficas

- [1] W. Rindler, *Introduction to Special Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1982).
- [2] A. Einstein, *Annalen Phys.* **17**, 891 (1905).
- [3] A. Einstein, *Annalen Phys.* **18**, 639 (1905).
- [4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, 1999).
- [5] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, Berlin, 1978).
- [6] Y. Z. Zhang, *Special Relativity and its Experimental Foundations* (World Scientific, Singapore, 1997).
- [7] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996), Vol. I.
- [8] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley & Sons, New York, 1987).
- [9] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and Leptons* (John Wiley & Sons, New York, 1984).
- [10] M. K. Gaillard, P. D. Grannis, and F. J. Sciulli, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S96 (1999).
- [11] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [12] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [13] P. Ramong, *Group Theory: A Physicist's Survey* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [14] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).

- [15] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology* (Oxford University Press, Oxford, 1934).
- [16] Editorials, *Nature* **214**, 1069 (1967); *Nature* **221**, 1100 (1969); *Nature* **224**, 219 (1969).
- [17] P. T. Landberg and G. E. A. Matsas, *Phys. Lett. A* **223**, 401 (1996).
- [18] L. H. Thomas, *Nature* **117**, 514 (1926).
- [19] C. J. Foot, *Atomic Physics* (Oxford University Press, Oxford, 2005).
- [20] A. Peres and D. R. Terno, *Int. J. Quant. Info.* **1**, 225 (2003).
- [21] A. Peres and D. R. Terno, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 93 (2004).
- [22] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [23] V. Vedral, *Introduction to Quantum Information Science* (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [24] C. H. Bennett and P. W. Shor, *IEEE Trans. Inf. Theory* **44**, 2724 (1998).
- [25] C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo, *Nature* **404**, 247 (2000).
- [26] J. Audretsch, *Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics* (Wiley-VCH, Weinheim, 2007).
- [27] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
- [28] P. W. Shor, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **26**, 1484 (1997).
- [29] P. W. Shor, *Phys. Rev. A* **52**, R2493 (1995).
- [30] S. Wiesner, *SIGACT News* **15**, 78 (1983).
- [31] C. H. Bennett and G. Brassard, in *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore, 1984* (IEEE, New York, 1984), p. 175.
- [32] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
- [33] C. H. Bennett, G. Brassard, and N. D. Mermin, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 557 (1992).
- [34] G. Rigolin and A. A. Rieznik, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **27**, 517 (2005).

- [35] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [36] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997).
- [37] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).
- [38] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4656 (1996).
- [39] D. Deutsch, *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97 (1985).
- [40] P. W. Shor, in *Proc. of the 35th Annual Symp. on the Foundations of Computer Science, Santa Fe, New Mexico, 1994* (IEEE Computer Science Society Press, Los Alamitos, California, 1994), p. 124.
- [41] M. Hirsensvalo, *Quantum computing* (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [42] G. Berenti, G. Casati, and G. Strini, *Principles of Quantum Computation, Vol. I: Basic Concepts* (World Scientific, Singapore, 2004).
- [43] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetimes and Black Hole Thermodynamics* (The University of Chicago Press, Chicago, 1994).
- [44] L. E. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
- [45] S. W. Hawking, *Nature* 248, **30** (1974).
- [46] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [47] R. M. Wald, *Comm. Math. Phys.* **45**, 9 (1975).
- [48] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **14**, 2460 (1976).
- [49] R. M. Wald, *Living Rev. Rel.* **4**, 6 (2001).
- [50] W. G. Unruh and R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **25**, 942 (1982).
- [51] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Field Theory in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [52] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [53] M. Aspelmeyer, T. Jennewein, M. Pfennigbauer, W. Leeb, and A. Zeilinger, *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of* **9**, 1541 (2003).

- [54] P. Villoresi *et al.*, *New J. Phys.* **10**, 033038 (2008).
- [55] R. Ursin *et al.*, *Space-QUEST: Experiments with quantum entanglement in space*. IAC Proc. A2.1.3 (2008). arXiv: quant-ph/0806.0945v1.
- [56] C. Bonato, A. Tomaello, V. Da Deppo, G. Naletto, and P. Villoresi, *New J. Phys.* **11**, 045017 (2009).
- [57] A. Peres, P. F. Scudo, and D. R. Terno, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 230402 (2002).
- [58] R. M. Gingrich and C. Adami, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270402 (2002).
- [59] P. M. Alsing and G. J. Milburn, *Quantum Inf. Comput.* **2**, 487 (2002).
- [60] P. M. Alsing and G. J. Milburn, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 180404 (2003).
- [61] P. Kok and U. Yurtsever, *Phys. Rev. D* **68**, 085006 (2003).
- [62] D. Ahn, H. J. Lee, Y. H. Moon, and S. W. Hwang, *Phys. Rev. A* **67**, 012103 (2003).
- [63] P. Caban and J. Rembieliński, *Phys. Rev. A* **68**, 042107 (2003).
- [64] A. Peres and D. R. Terno, *J. Mod. Opt.* **50**, 1165 (2003).
- [65] N. H. Lindner, A. Peres, and D. R. Terno, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, L449 (2003).
- [66] J. Pachos and E. Solano, *Quantum Inf. Comput.* **3**, 115 (2003).
- [67] C. Gonera, P. Kongsinski, and P. Maslanka, *Phys. Rev. A* **70**, 034102 (2004).
- [68] S. D. Bartlett and D. R. Terno, *Phys. Rev. A* **71**, 012302 (2005).
- [69] N. H. Lindner and D. R. Terno, *J. Mod. Opt.* **52**, 1177 (2005).
- [70] D. R. Terno, *Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 2307 (2005).
- [71] T. F. Jordan, A. Shaji, and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. A* **73**, 032104 (2006).
- [72] J. M. Cai, Z. W. Zhou, Y. F. Yuan, and G. C. Guo, *Phys. Rev. A* **76**, 042101 (2007).
- [73] A. G. S. Landulfo and G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. A* **79**, 044103 (2009).
- [74] A. G. S. Landulfo and G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. A* **80**, 032315 (2009).
- [75] L. C. Céleri, A. G. S. Landulfo, R. M. Serra, and G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. A* **81**, 062130 (2010).

- [76] N. Friis, R. A. Bertlmann, M. Huber, and B. C. Guo, *Phys. Rev. A* **81**, 042114 (2010).
- [77] T. Choi, J. Hur, and J. Kim, *Phys. Rev. A* **84**, 012334 (2011).
- [78] A. G. S. Landulfo, G. E. A. Matsas, and A. C. Torres, *Phys. Rev. A* **81**, 044103 (2010).
- [79] A. G. S. Landulfo and A. C. Torres, *Classical Information on Relativistic Quantum Channels* (em preparação).
- [80] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics* (World Scientific, New York, 1998).
- [81] C. Isham, *Lectures on Quantum theory: Mathematical and Structural Foundations* (Imperial College Press, London, 1995).
- [82] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995).
- [83] A. M. Gleason, *J. Math. Mech.* **6**, 885 (1957).
- [84] K. Hoffman and R. A. Kunze, *Linear Algebra* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971).
- [85] C. E. Shannon, *Bell System Tech. J.* **27**, 379, 623 (1948).
- [86] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* (John Wiley and Sons, New York, 1991).
- [87] A. S. Holevo, in *Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory*, edited by G. Maruyama and J. V. Prokhorov (Springer-Verlag, Berlin, 1973), p. 104.
- [88] B. Schumacher, M. Westmoreland, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3452 (1996).
- [89] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 221 (1978).
- [90] M. Ohya and D. Petz, *Quantum Entropy and Its Use* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [91] B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995).
- [92] R. Jozsa and B. Schumacher, *J. Mod. Optics* **41**, 2343 (1994).
- [93] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [94] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

- [95] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [96] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [97] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
- [98] B. S. Cirel'son, *Lett. Math. Phys.* **4**, 93 (1980).
- [99] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).
- [100] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [101] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3563 (1998).
- [102] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5039 (1998).
- [103] A. G. S. Landulfo, *Aspectos Relativísticos da Teoria da Informação Quântica*, Tese de Doutorado, IFT/UNESP (2011).
- [104] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, and I. T. Todorov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory* (W. A. Benjamin, Massachusetts, 1975).
- [105] E. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 149 (1939).
- [106] F. R. Halpern, *Special Relativity and Quantum Mechanics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968).
- [107] R. M. Gingrich, A. J. Bergou, and C. Adami, *Phys. Rev. A* **68**, 042102 (2003).
- [108] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1977), Vol. II.
- [109] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak, and I. T. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory* (Kluwer, Dordrecht, 1990).
- [110] N. G. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 145 (2002).
- [111] D. Bouwmeester, A. K. Ekert, and A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation* (Springer-Verlag, London, 2000).
- [112] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

- [113] I. L. Chuang and M. A. Nielsen, *J. Mod. Opt.* **44**, 2455 (1997).
- [114] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [115] A. Fuchs and J. van de Graaf, *IEEE Trans. Inf. Theory* **45**, 1216 (1999).
- [116] S. Kochen and E. P. Specker, *J. Math. Mech.* **17**, 59 (1967).
- [117] M. Genovese, *Physics Reports* **413**, 319 (2005).
- [118] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.O. Stamatescu, and H.D. Zeh, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, New York, 1996).
- [119] M. Schlosshauer, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1267 (2004).
- [120] S. Haroche and J. M. Raimond, *Physics Today* **49**, 51 (1996).
- [121] W. G. Unruh, *Phys. Rev. A* **51**, 992 (1995).
- [122] M. Aspelmeyer *et al.*, *Science* **301**, 621 (2003).
- [123] C.-Z. Peng *et al.*, *Phys. Rev. Lett* **94**, 150501 (2005).
- [124] K. J. Resch *et al.*, *Optics Express* **13**, 202 (2005).
- [125] R. Ursin *et al.*, *Nature Physics* **3**, 481 (2007).
- [126] A. Fedrizzi, R. Ursin, T. Herbst, M. Nespoli, R. Prevedel, T. Scheidl, F. Tiefenbacher, T. Jennewein, and A. Zeilinger, *Nature Physics* **5**, 389 (2009).
- [127] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, *Rev. Mod. Phys* **74**, 145 (2002).
- [128] A. Fedrizzi, T. Herbst, A. Poppe, T. Jennewein, and A. Zeilinger, *Optics Express* **15**, 15377 (2007).
- [129] W. K. Wootters and W. H. Zurek, *Nature* **299**, 802 (1982).
- [130] V. Scarani, S. Iblisdir, and N. Gisin, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1225 (2005).
- [131] A. Peres and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1119 (1991).
- [132] P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher, M. Westmoreland, and W. Wootters, *Phys. Rev. A* **54**, 1869 (1996).
- [133] B. Schumacher and M. Westmoreland, *Phys. Rev. A* **56**, 131 (1997).
- [134] A. S. Holevo, *IEEE Trans. Inf. Theory* **44**, 269 (1998).

- [135] K. Kraus, *States, Effects, and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory* (Springer, Berlin, 1983).
- [136] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, New York, 1994).
- [137] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [138] W. H. Zurek, Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003).
- [139] M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. **76**, 1267 (2005).