



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/12

Quantização Funcional e Renormalizabilidade
da Eletrodinâmica Generalizada

Rodrigo Santos Bufalo

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Fevereiro de 2012

Agradecimentos

- Primeiro, e mais importante, agradeço aos meus pais, José Carlos e Valdeniz, pelo apoio e presença em todos os momentos. Sem eles, eu não teria chegado até aqui.
- Aos amigos com quem convivi durante esses 4 anos no IFT: Tilles, Caco, Fezão, Genilson, Leandro, David, Bonin, Vai-Vai, John e German. Obrigado pela amizade e histórias, e que venham mais.
- E, também, àqueles que contribuíram de qualquer maneira para o desenvolvimento e conclusão desta tese. Em especial, agradeço a Cyntia, pela sua boa vontade e paciência na leitura, sugestões e comentários frutíferos sobre a redação.
- Por fim, não menos importante, agradeço ao meu Prof. B.M. Pimentel pela orientação, liberdade e presença nas mais diversas situações. Que tenhamos ainda mais trabalhos em conjunto.
- Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Apresentamos nesta tese a quantização completa da Eletrodinâmica Generalizada através da abordagem de integração funcional. Para este objetivo, primeiro estudamos a estrutura Hamiltoniana da teoria seguindo a metodologia de Dirac e, então, através do procedimento de Faddeev-Senjanovic obtemos a amplitude de transição. A partir deste objeto obtemos as equações de Schwinger-Dyson-Fradkin na escolha correta da condição de gauge e bem como as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi. Ainda na parte estrutural, também aplicamos o programa de renormalização para a teoria. Em seguida, apresentamos o cálculo explícito de todas as funções de Green na aproximação de 1-loop e uma discussão sobre os resultados obtidos. Por fim, apresentamos a análise das correções da $GQED_4$: o cálculo explícito dos contra-termos, o espalhamento de Coulomb e a constante de acoplamento efetiva; e a contribuição ao momento magnético do elétron foi igualmente analisada. Ademais, através do resultado do último ponto, utilizamos um dado experimental, a fim de limitar os possíveis valores do parâmetro livre de Podolsky m_P .

Palavras Chaves: Quantização; teorias de campos de ordem-superior; sistemas vinculados; renormalizabilidade.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos.

Abstract

It is presented in this thesis a complete quantization of the Generalized Electrodynamics through the path-integral approach. To this goal, we first study the Hamiltonian structure of the system following Dirac's methodology and, then, through the Faddeev-Senjanovic procedure we therefore obtain the transition amplitude. The Schwinger-Dyson-Fradkin equations in the correct gauge-fixing and also the Ward-Fradkin-Takahashi identities are both obtained by functional methods. Next, an explicit calculation of all Green's functions at 1-loop approximation and a proper discussion about the results are presented. Afterwards, it is also presented an analysis of the corrections of renormalized $GQED_4$: the explicit evaluation of counter-terms; the Coulomb scattering and the running coupling constant; and also the contribution to the electron's anomalous magnetic moment. Furthermore, into the last point result, we use experimental data to set boundaries over the Podolsky's parameter m_P .

Keywords: Quantization; higher-order field theories; constrained systems; renormalizability.

Knowledge Field: Field theory.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Gerais de Métodos Funcionais em TQC	5
2.1	Introdução	5
2.2	Quantização Funcional via Schwinger-Fradkin	6
2.2.1	Solução das equações de movimento	10
2.2.2	Programa de renormalização	16
2.2.3	Transformações de Landau-Khalatnikov-Fradkin	18
3	Quantização da Eletrodinâmica Generalizada	22
3.1	Análise Canônica e Amplitude de Transição	22
3.2	Equações de Schwinger-Dyson-Fradkin	29
3.2.1	A equação de Schwinger-Dyson-Fradkin para o Propagador do Fóton	30
3.2.2	A equação de Schwinger-Dyson-Fradkin para o Propagador do Elétron	34
3.2.3	A equação de Schwinger-Dyson-Fradkin para a Função de Vértice	36
3.3	Identidades de Ward-Fradkin-Takahashi	41
3.4	Programa de Renormalização	43
4	Correções Radiativas	48
4.1	Correções Radiativas de Segunda ordem	48
4.1.1	Auto-energia do Elétron Σ	49
4.1.2	Parte do Vértice Λ^μ	55
5	Renormalização da Eletrodinâmica de Podolsky	66
5.1	Constantes de Renormalização e comportamento IR	66
5.1.1	Constante de renormalização Z_3	68
5.1.2	Constante de renormalização Z_2	69
5.1.3	Constante de renormalização Z_0	72
5.1.4	Constante de renormalização Z_1	74
5.2	Acoplamento Efetivo da $GQED_4$	76
5.3	Momento Magnético do Elétron e o Parâmetro de Podolsky	79

6 Conclusão	81
6.1 Comentários Finais	81
6.2 Perspectivas Futuras	83
Referências Bibliográficas	84
A Identidades d-dimensionais	90
A.1 Integração em d -dimensões	90
A.2 A função Gama	90
A.3 As matrizes- γ de Dirac	91
A.4 Transformada de Fourier	91
B Teoria Clássica de Campos com Lagrangianas de Segunda-ordem	92
C Auto-Energia do Elétron Σ no gauge de Lorenz	99
D Parte do Vértice Λ^μ no gauge de Lorenz	102
E Parte do Vértice na camada de massa	105

Capítulo 1

Introdução

A Mecânica Quântica é uma teoria consistente que descreve bem uma grande parte da física, em particular: a física atômica e a molecular. No entanto, ela despreza os efeitos da relatividade especial e ignora a natureza quântica dos campos de força, especialmente a do campo eletromagnético. Ainda, o número de partículas possui um papel distinto na Mecânica Quântica, de forma que processos de multi-partículas e também processos com criação e aniquilação de partículas não são facilmente descritos. Cada um desses pontos de vista (e outros mais) levaram a uma extensão do quadro da mecânica quântica que é conhecida como Teoria Quântica de Campos. O conceito de Teoria Quântica de Campos foi desenvolvido imediatamente após a invenção da Mecânica Quântica durante os anos de 1925-29 por Heisenberg, Jordan, Pauli e Dirac. Ademais, através da teoria de perturbação em primeira-ordem eles foram capazes de explicar a emissão espontânea de radiação eletromagnética e o efeito Compton. Porém, a definição de uma série perturbativa foi dada apenas em 1947-49 por Tomonaga, Schwinger, Feynman e Dyson através do processo de renormalização. No caso da Eletrodinâmica Quântica (QED_4), as correções calculadas concordam, em notável precisão com os valores medidos experimentalmente. Um exemplo impressionante desses feitos é o momento magnético do elétron.

Entretanto, apesar de seu grande sucesso, a Teoria Quântica de Campos ainda não possui o status de uma teoria consistente. A sua comparação com experimentos baseia-se tipicamente em considerações heurísticas cuja confiabilidade é difícil de julgar. Porém, existem exceções, como os importantes resultados estruturais da conexão spin-estatística e do teorema CPT , que são derivados somente a partir de propriedades fundamentais da teoria.

Embora a Teoria Quântica de Campos apresente tais problemas formais, acredita-se que nenhum dos modelos conhecidos seja fundamental, i.e., sejam válidos em todas as escalas de energia *. Seguindo essa linha de pensamento, foi desenvolvido ao longo dos anos a ideia de

*Normalmente, um problema físico envolve uma grande gama de escalas de energia; o que nos permite estudar a dinâmica à baixas-energias, independentemente dos detalhes das interações à altas-energias. A ideia principal é a de identificar aqueles parâmetros que são grandes (pequenos) quando comparados com a escala de energia relevante do sistema físico e, então, tomá-los a infinito (zero). Isso fornece uma aproximação sensível ao problema, que sempre pode ser melhorada ao levar em conta as correções induzidas pelas escalas de energias negligenciadas

que as teorias efetivas [1] são as ferramentas teóricas apropriadas para descrever a física de baixas-energias; essa ideia foi fortalecida pelo sucesso de modelos de Teoria de Campos como a QED_4 , o Modelo Padrão e a QCD_4 . Dentro desse conjunto de teorias efetivas, existe um importante ramo que é o de Lagrangianas com derivadas de ordem-superior [†][2]. Tais teorias mostram-se interessantes por preservarem as simetrias originais do problema e também, por serem um método consistente e poderoso de regular divergências ultravioleta [3], além de melhorarem a convergência de diagramas de Feynman [4]. Alguns outros exemplos de sistemas tratados com Lagrangianas de ordem-superior que podemos citar são os seguintes artigos clássicos: o estudo do confinamento da cor no setor infravermelho da QCD_4 [5], tentativas de resolver o problema de renormalização do campo gravitacional [6], e a generalização da teoria de Utiyama para teorias de segunda-ordem [7]. Ainda, há alguns outros artigos atuais nos temas de: gravitação de ordem-superior [8], teorias supersimétricas [9], quebra da simetria de Lorentz [10], e, também, em formalismo Hamiltoniano geral [11].

Uma das mais importantes propostas de uma Lagrangiana de segunda-ordem foi feita por Bopp [12] e Podolsky e Schwed [13], em que se propôs uma generalização do campo eletromagnético de Maxwell, que hoje é conhecida como a Eletrodinâmica de Podolsky, ou ainda como Eletrodinâmica Generalizada. O ponto essencial dessa generalização baseia-se em eliminar as patologias da teoria de Maxwell: por exemplo a singularidade r^{-1} de uma carga pontual e a corrente de polarização do vácuo. Em um belo trabalho [14], Frenkel mostrou que a teoria de Podolsky fornece a expressão correta para a auto-força de partículas carregadas (o famoso problema de $4/3$ da Eletrodinâmica Clássica). Ademais, foi provado em [7], que a Lagrangiana de Podolsky é a única generalização de segunda-ordem linear possível da eletrodinâmica de Maxwell, que preserva a invariância de gauge sob a simetria interna $U(1)$, bem como a simetria de Lorentz. Ainda, foi indicado em [15], com diversas propostas experimentais, que a teoria de Podolsky pode ser fenomenologicamente testada. Com esses pontos, fica claro que, apesar de todos os resultados experimentais, a teoria de Maxwell não é a única a descrever o Eletromagnetismo. Além disso, ainda podemos dizer que a teoria de Maxwell nada mais é do que um limite, um caso especial, da teoria de Podolsky.

No contexto teórico e experimental, acreditamos que uma das maneiras de impor limites sobre o parâmetro livre de Podolsky a pode ser através do estudo de fótons de Podolsky em interação com partículas do modelo padrão e da comparação os resultados obtidos com experimentos de altas-energias. Essa ideia, bem como outros propósitos, levou Podolsky e alguns de seus estudantes a estudarem a interação de elétrons com fótons de Podolsky (mais especificamente, a auto-energia do elétron na aproximação de 1-loop), teoria essa, que eles chamaram de Eletrodinâmica Quântica Generalizada ($GQED_4$) [16]. Uma das premissas dos trabalhos era que a contribuição dos fótons massivos forneceria um resultado ultravioleta finito. Entretanto, ao final, eles encontraram, como na QED_4 , uma expressão divergente. Porém, analisando esses resultados encontramos um erro no tratamento da teoria que foi utilizada er-

como pequenas perturbações.

[†]Para uma discussão sobre teorias com derivadas de ordem-superior, consulte o apêndice B.

roneamente, como a escolha de gauge, a condição de Lorenz usual.

Um importante e esclarecedor estudo clássico sobre a teoria de Podolsky foi realizado em [17], através do formalismo Hamiltoniano de Dirac. Nesse trabalho, foi discutida a questão sobre qual condição de gauge era a correta para a teoria de Podolsky (da mesma forma que a condição de Lorenz é para a teoria de Maxwell); estabeleceu-se, assim, que a condição de Lorenz generalizada: $\Omega[A] = (1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu$ é a apropriada. E, baseados em tais informações, desenvolvemos recentemente um estudo da teoria de Podolsky livre, agora no equilíbrio termodinâmico, em que calculamos uma correção à lei de Stefan-Boltzmann. Em seguida, utilizando dados da radiação cósmica de fundo foi possível encontrar um limite termodinâmico para o parâmetro de Podolsky: $m_P = a^{-1}$ [18].

Enfim, com todas essas novas informações, voltamo-nos para o assunto que será tratado nesta tese: a quantização completa da Eletrodinâmica Generalizada, agora no gauge de Lorenz generalizada, via métodos funcionais (para revisão, veja: [19]). Grande parte dos resultados apresentados aqui nos capítulos 3 e 4, são baseados no artigo [20]. Apresentamos, em tais capítulos, de forma completa e detalhada, a questão da quantização da teoria. Como dito, a quantização da teoria será dada através de métodos funcionais, obtendo as equações de Schwinger- Dyson-Fradkin (SDFE) para as funções de Green, e as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi. Para encerrar o capítulo 3, também discutimos a questão da renormalização da teoria. Já no capítulo 4, apresentamos o cálculo das funções de correção radiativa das funções de Green em nível de 1-loop, mostrando que, diferentemente das expressões na condição de Lorenz usual [16][‡], aqui, elas são ultravioleta finitas. Em uma linha de pesquisa semelhante, esforços estão sendo feitos para analisar a $GQED_4$ à temperatura finita [21] e, até o momento, a análise está nos aspectos formais da teoria. Ademais, uma vez que as motivações sobre a teoria de Podolsky já foram apresentadas em diversos trabalhos anteriores, não o faremos novamente aqui.

Um ponto que merece ênfase, é a questão da condição de renormalização do fóton. Vejamos a expressão geral do propagador livre:

$$iD_{\mu\nu}(k) = \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2} - \left(\eta_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - m_P^2} \right) \frac{1}{k^2 - m_P^2} + (1 - 2\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (k^2 - m_P^2)} + \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m_P^2)^2}. \quad (1.1)$$

Podemos interpretar, ingenuamente, a expressão acima como a soma de dois setores distintos: um não-massivo e um massivo. De fato, essa afirmação é verdadeira na teoria livre. Porém, como discutiremos na seção 3.4, não podemos considerar os termos dependentes da massa da equação acima como verdadeiros graus de liberdade da teoria. Na realidade, como condição de renormalização do setor do fóton, exigimos que o propagador do fóton se comporte como um fóton de Maxwell, o que induz a conclusão de que o termo de Podolsky é, de fato, um termo regulador, que se comporta como um termo do tipo Raisy-Pauli-Villars [22] (o que é verdade, uma vez que o limite $m_P^2 \rightarrow \infty$ existe na teoria e faz o mapeamento com a teoria de Maxwell).

[‡]Para uma discussão sobre o comportamento da $GQED_4$ no gauge de Lorenz, vide os apêndices C e D.

Dando sequência ao desenvolvimento da teoria, bem como encerrando a tese, apresentamos no capítulo 5 o cálculo das expressões dos contra-termos e a discussão do comportamento infravermelho da teoria. Ainda, analisamos a questão do acoplamento efetivo da teoria, via o espalhamento de Coulomb. Por último, calculamos, a nível de 1-loop, a contribuição de Podolsky para o momento magnético anômalo do elétron e , através de um dado experimental, impomos um valor para o parâmetro de Podolsky. Nossas conclusões são apresentadas no último capítulo. Adotaremos, ao longo do trabalho, a convenção da métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(+, -, -, -)$; os índices gregos e latinos correm de 0 a 3 e 1 a 3, respectivamente, e os índices espinoriais serão representados por letras latinas.

Capítulo 2

Conceitos Gerais de Métodos Funcionais em TQC

2.1 Introdução

Há tempos, o desenvolvimento de métodos precisos (perturbativos ou não-perturbativos) para a solução de equações de movimento quânticas em teoria de campos mostra-se um grande desafio à física teórica. Atualmente, são conhecidos diversos métodos, cada qual com suas vantagens e desvantagens. O programa de construção da *matriz-S* foi inicialmente proposto por Stückelberg e colaboradores [23] e, de fato, o programa ficou esquecido por algum tempo, até que Bogoliubov e colaboradores [24] o levassem adiante, com uma formulação mais clara da condição de causalidade. Entretanto, foi apenas com a proposta, de Epstein e Glaser [25], do método de construção indutiva do operador *matriz-S* – através de requisitos físicos em que a causalidade desempenha um papel fundamental, além da invariância translacional – que tal programa teve suas bases consolidadas na Teoria Quântica de Campos. Essa abordagem ficou conhecida como Teoria de Perturbação Causal [26].

Um outro trabalho célebre no programa da *matriz-S* foi feito por Lehman-Simanzyk-Zimmerman e ficou conhecido como formalismo-*LSZ* [27]. Ele nos mostra, de uma forma rigorosa, o papel desempenhado pelas funções de Green de n -pontos na teoria. Ainda, existem diversos outros programas de quantização de sistemas quânticos em teoria de campos. Podemos citar aqui, o programa de quantização conhecido por formalismo covariante de operadores [28], em que as simetrias da teoria são tratadas, exclusivamente, em nível quântico. Contudo, devido a sua complexidade em alguns pontos, principalmente alguns relacionados às teorias não-abelianas, não é comumente utilizado. Por fim, acreditando ser de maior sucesso o programa de quantização, o formalismo de integração funcional é o mais utilizado nas mais diversas áreas da física teórica. Partindo da proposta inicial de Dirac, Feynman, Schwinger e outros, esse formalismo foi aplicado desde a mecânica estatística até as mais diversas áreas da teoria quântica [19, 29]. Apesar de as ideias iniciais remontarem à Dirac e Feynman, foi apenas com Schwinger, Simanzyk e Fradkin, que os métodos funcionais de quantização de teoria de campos ganharam mais

destaque e, assim, foram desenvolvidos estruturalmente, incluindo teorias de gauge gerais e gravitação [30, 31]. Portanto, a proposta deste capítulo é a de providir uma breve introdução aos métodos funcionais em teoria de campos. Para isso, seguiremos o programa proposto inicialmente por Fradkin [32].

2.2 Quantização Funcional via Schwinger-Fradkin

Consideraremos aqui, por questão de simplicidade, a Lagrangiana da eletrodinâmica quântica em $(3+1)$ -dimensões (QED_4). Contudo, não explicitaremos nenhum dos cálculos desta seção, pois o nosso interesse, aqui, é o de introduzir um roteiro (desenvolver de uma maneira geral) sobre o formalismo de quantização funcional para a QED_4 . A densidade Lagrangiana inicial têm a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (2.1)$$

com

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \hat{\partial} \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{\hat{\partial}} \psi \right) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_I = \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J_\mu A^\mu. \quad (2.3)$$

Em que definimos: $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\hat{O} = \gamma^\mu O_\mu$ e $\bar{\eta}, \eta, J_\mu$ são as fontes externas (anti-comutantes no caso de férmions) relacionadas aos campos $\psi, \bar{\psi}, A_\mu$, respectivamente. Em toda a tese, utilizaremos a seguinte definição de derivada grassmanniana:

$$\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \{ \psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \} = -\delta_{\alpha\alpha_1} \psi_{\alpha_2} + \psi_{\alpha_1} \delta_{\alpha\alpha_2}. \quad (2.4)$$

A Hamiltoniana responsável pela evolução temporal do sistema pode ser escrita na forma:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = H_0 + H_I, \quad (2.5)$$

em que H_I possui a forma:

$$H_I = - \int d^3x [\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J_\mu A^\mu]. \quad (2.6)$$

Ainda, podemos escrever H_I , na seguinte estrutura:

$$H_I = - \sum_n \int d^3x \varphi_{f_n}(x) f_n(x). \quad (2.7)$$

Sendo f_n a fonte $(\eta, \bar{\eta}, J_\mu)$ de um n -ésimo tipo de campo:

$$\varphi_\eta^B = \bar{\psi}^B; \quad \varphi_{\bar{\eta}}^B = -\psi^B; \quad \varphi_J^\mu = A^\mu. \quad (2.8)$$

Em algumas partes desta seção, abusaremos um pouco de certos pontos teóricos por acreditarmos que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos da teoria quântica padrão.

Neste ponto, caso seguissemos o programa de Dirac para sistemas vinculados [33] (que se faz necessário, já que estamos lidando com uma teoria de gauge), deveríamos iniciar a análise Hamiltoniana com o cálculo dos momentos canonicamente conjugados aos campos dinâmicos, seguidos da verificação da existência, ou não, de vínculos na teoria; para somente assim dar seqüência ao processo de quantização. Contudo, estamos interessados, nesta seção, em aspectos gerais da teoria e, por isso, seguiremos a proposta funcional de Fradkin, na qual não se faz necessário o estudo de sistema singulares. Apresentaremos uma abordagem baseada na análise de sistemas singulares para o modelo de eletrodinâmica quântica generalizada ($GQED_4$), que analisaremos nos demais capítulos da tese.

As equações de campo da QED_4 na representação de Heisenberg são *:

$$\left(i\hat{\partial} + e\hat{A} - m\right)\psi = \eta, \quad \square A^\alpha = J^\alpha + j^\alpha, \quad \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.9)$$

com $j_\alpha = \frac{1}{2}e [\bar{\psi}, \gamma_\alpha \psi]$.

Passamos agora a uma nova representação, em que os operadores de campo não dependam das fontes externas (análoga à representação de interação de Dirac) e sejam denotados pelo sufixo (I) . Temos, assim, as seguintes equações de campo:

$$\left(i\hat{\partial} + e\hat{A}^{(I)} - m\right)\psi^{(I)} = 0, \quad \square A_\alpha^{(I)} = j^{\alpha(I)}, \quad \partial^\mu A_\mu^{(I)} = 0. \quad (2.10)$$

Um estado qualquer na nova representação evolui no tempo e pode ser escrito como †:

$$\Phi(t) = S(t, t_0 = -\infty)\Psi(t_0 = -\infty), \quad (2.11)$$

em que S é o operador de evolução temporal e satisfaz a equação de Heisenberg:

$$i\frac{\partial}{\partial t}S(t, -\infty) = H_I^{(I)}S(t, -\infty). \quad (2.12)$$

Neste ponto, definimos o seguinte objeto:

$$S(t, t_0) \equiv S(t, -\infty)S^{-1}(t_0, -\infty). \quad (2.13)$$

É possível encontrar uma solução formal (tipo Dyson) da Eq.(2.12), sujeita a condição de contorno $S(t_0, t_0) = \mathbf{1}$. Tal solução de S possui a seguinte forma integral:

$$S(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I^{(I)}(t_1) S(t_1, t_0) = 1 + i \sum_n \int_{t_0}^t \int d^4x_1 \pi_{f_n}^{(I)}(x_1) f_n(x_1) S(t_1, t_0). \quad (2.14)$$

Fizemos o uso da equação (2.7) para $H_I^{(I)}$, e a quantidade: $\pi_{f_n}^{(I)}$ representa os campos φ_{f_n} na nova representação. Agora, determinaremos a equação de campo que a quantidade $S(t, t_0)$,

*Um ponto que deve ser comentado, é que a condição de Lorenz, no formalismo de Fradkin, não é tratada como uma condição de *gauge-fixing* e, sim, como um vínculo que tanto o operador de campo A_μ , quanto as quantidades $S(\infty)$ e Z , devem satisfazer; vide Eqs.(2.9), (2.29) e (2.36).

†A fim de evitar excessos na notação, achamos conveniente denotar, apenas nesta seção, o parâmetro temporal por t ; nas demais seções, volta a ser x_0 .

Eq.(2.14), satisfaz. Para isso, tomamos a derivada funcional da Eq.(2.14) com respeito a uma fonte externa $f_n(\xi)$ no ponto ξ :

$$\frac{\delta S(t, t_0)}{\delta f_n(\xi)} = \begin{cases} i\pi_{f_n}^{(I)}(\xi) S(\xi_0, t_0) - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I^{(I)}(t_1) \frac{\delta S(t_1, t_0)}{\delta f_n(\xi)}, & \text{para } t > \xi_0, \\ \frac{\delta}{\delta f_n(\xi)} \left[-i \int_{t_0}^t dt_1 H_I^{(I)}(t_1) S(t_1, t_0) \right] = 0, & \text{para } t < \xi_0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Em que fizemos uso da definição de derivada funcional:

$$\frac{\delta f_k(x_1)}{\delta f_n(\xi)} = \delta_{nk} \delta^{(4)}(x_1 - \xi). \quad (2.16)$$

Ao tomarmos o limite $t_0 = -\infty$, obtemos, para a Eq.(2.15), a seguinte relação:

$$\frac{\delta S(t, -\infty)}{\delta f_n(\xi)} = \begin{cases} i\pi_{f_n}^{(I)}(\xi) S(\xi_0, -\infty) - i \int_{\xi_0}^t dt_1 H_I^{(I)}(t_1) \frac{\delta S(t_1, -\infty)}{\delta f_n(\xi)}, & \text{para } t > \xi_0, \\ 0, & \text{para } t < \xi_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Agora, multiplicando a Eq.(2.14) por $i\pi_{f_n}^{(I)}(\xi) S(\xi_0, -\infty)$ pela direita, e tomando $t_0 = \xi_0$, encontramos:

$$\begin{aligned} S(t, \xi_0) i\pi_{f_n}^{(I)}(\xi) S(\xi_0, -\infty) &= i\pi_{f_n}^{(I)}(\xi) S(\xi_0, -\infty) \\ &\quad - i \int_{\xi_0}^t dt_1 H_I^{(I)}(t_1) S(t_1, \xi_0) i\pi_{f_n}^{(I)}(\xi) S(\xi_0, -\infty). \end{aligned} \quad (2.18)$$

E, desta forma, ao compararmos a expressão (2.18) com a (2.17), determinamos:

$$\frac{\delta S(t, -\infty)}{\delta f_n(\xi)} = \begin{cases} iS(t, \xi_0) \pi_{f_n}^{(I)}(\xi) S(\xi_0, -\infty), & \text{para } t > \xi_0, \\ 0, & \text{para } t < \xi_0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Como é bem conhecido, uma operação arbitrária $\pi^{(I)}$ (nova representação) é relacionada com o operador correspondente na representação de Heisenberg através da relação:

$$S^{-1}(t, -\infty) \pi^{(I)} S(t, -\infty) = \varphi(t). \quad (2.20)$$

Portanto, pela relação acima, é possível escrever a equação (2.19) como:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S(t, -\infty)}{\delta f_n(\xi)} &= \begin{cases} iS(t, \xi_0) [S(\xi_0, -\infty) S^{-1}(\xi_0, -\infty) = \mathbf{1}] \pi_{f_n}^{(I)}(\xi) S(\xi_0, -\infty), & \text{para } t > \xi_0, \\ 0, & \text{para } t < \xi_0; \end{cases} \\ &= \begin{cases} iS(t, \xi_0) S(\xi_0, -\infty) \varphi_{f_n}(\xi), & \text{para } t > \xi_0, \\ 0, & \text{para } t < \xi_0. \end{cases} \end{aligned}$$

O que nos permite obter, finalmente, a expressão geral:

$$\frac{\delta S(t, -\infty)}{\delta f_n(\xi)} = \begin{cases} iS(t, -\infty) \varphi_{f_n}(\xi), & \text{para } t > \xi_0, \\ 0, & \text{para } t < \xi_0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Não é difícil mostrar que, para dois campos genéricos $F(x)$ e $G^{(I)}(x)$, relacionados por uma equação similar a (2.20), a seguinte fórmula é válida:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta [S(t, -\infty) F(x)]}{\delta f_n(\xi)} &= \frac{\delta [S(t, -\infty) S^{-1}(x_0, -\infty) G^{(I)}(x) S(x_0, -\infty)]}{\delta f_n(\xi)} \\
&= \frac{\delta S(t, -\infty)}{\delta f_n(\xi)} \cdot S^{-1}(x_0, -\infty) G^{(I)}(x) S(x_0, -\infty) \\
&\quad \pm S(t, -\infty) S^{-1}(x_0, -\infty) G^{(I)}(x) \cdot \frac{\delta S(x_0, -\infty)}{\delta f_n(\xi)} \\
&= \pm i S(t, -\infty) \varphi_{f_n}(\xi) S^{-1}(x_0, -\infty) G^{(I)}(x) S(x_0, -\infty) \\
&\quad + i S(t, -\infty) S^{-1}(x_0, -\infty) G^{(I)}(x) S(x_0, -\infty) \varphi_{f_n}(\xi) \\
&= \pm i S(t, -\infty) \varphi_{f_n}(\xi) F(x) + i S(t, -\infty) F(x) \varphi_{f_n}(\xi);
\end{aligned}$$

onde usamos o resultado (2.21). A última igualdade acima, ainda pode ser escrita, convenientemente, como:

$$\frac{\delta [S(+\infty, -\infty) F(x)]}{\delta f_n(\xi)} = i S(+\infty, -\infty) P_{x_0 \xi_0} [F(x) \varphi_{f_n}(\xi)], \quad (2.22)$$

com a seguinte definição:

$$P_{x_0 \xi_0} [F^{(I)}(x) \varphi_{f_n}(\xi)] = \begin{cases} F(x) \varphi_{f_n}(\xi), & \text{para } x_0 > \xi_0, \\ \pm \varphi_{f_n}(\xi) F(x), & \text{para } x_0 < \xi_0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Os sinais (\pm) na Eq.(2.23), são referentes às situações em que a fonte f e o campo $F(x)$ comutam ou anti-comutam, respectivamente. Na realidade, dependendo da convenção utilizada da derivada grassmanniana, os sinais \pm podem aparecer tanto em um, quanto no outro termo de (2.23).

Em particular, obtemos, das Eqs.(2.21) e (2.22), as seguintes relações:

$$\frac{\delta S(\infty)}{\delta \eta(x)} = -i S(\infty) \bar{\psi}(x), \quad \frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta \eta(x) \delta J(y)} = S(\infty) P [\bar{\psi}(x) A(y)], \quad (2.24)$$

$$\frac{\delta S(\infty)}{\delta \bar{\eta}(x)} = i S(\infty) \psi(x), \quad \frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta \bar{\eta}(x) \delta J(y)} = -S(\infty) P [\psi(x) A(y)], \quad (2.25)$$

$$\frac{\delta S(\infty)}{\delta J^\mu(x)} = i S(\infty) A_\mu(x), \quad \frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}(y)} = -S(\infty) P [\bar{\psi}(x) \psi(y)]. \quad (2.26)$$

Em que definimos a notação $S(\infty) \equiv S(+\infty, -\infty)$. Agora, multiplicando as equações operatoriais (2.9) pela esquerda por $i S(\infty)$ e, com o auxílio do conjunto de Eqs.(2.24)–(2.26), obtemos um novo sistema de equações de campo, agora satisfeitas pelo operador $S(\infty)$:

$$\left(\gamma^\mu \left(i \partial_\mu - i e \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) - m \right) \frac{\delta S(\infty)}{\delta \bar{\eta}(x)} = i \eta(x) S(\infty), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
\Box \eta^{\alpha\mu} \frac{\delta S(\infty)}{\delta J^\mu(x)} &= i J^\alpha(x) S(\infty) \\
&\quad - \frac{ie}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Tr \left(\gamma^\alpha \left[\frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}(x-\varepsilon)} + \frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta \eta(x-\varepsilon) \delta \bar{\eta}(x)} \right] \right), \quad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta S(\infty)}{\delta J^\mu(x)} = 0. \quad (2.29)$$

O sistema de equações (2.27), (2.28) e (2.29), deve ser resolvido sob as seguintes condições de contorno:

$$\left\{ \frac{\delta S(\infty)}{\delta \bar{\eta}_\beta(x)}, \frac{\delta S(\infty)}{\delta \eta_\alpha(y)} \right\} \Big|_{f=0} = -\gamma_0 \delta_{\beta\alpha} \delta^{(3)}(x-y), \quad (2.30)$$

$$\left\{ \frac{\delta S(\infty)}{\delta \bar{\eta}(x)}, \frac{\delta S(\infty)}{\delta \eta(y)} \right\} \Big|_{f=0} = \left\{ \frac{\delta S(\infty)}{\delta \eta(x)}, \frac{\delta S(\infty)}{\delta \eta(y)} \right\} \Big|_{f=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\delta S(\infty)}{\delta J_\sigma(x)}, \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\delta S(\infty)}{\delta J_\rho(y)} \right] \Big|_{f=0} = -\eta^{\sigma\rho} \delta^{(3)}(x-y), \quad (2.31)$$

$$\left[\frac{\delta S(\infty)}{\delta J_\sigma(x)}, \frac{\delta S(\infty)}{\delta \eta(y)} \right] \Big|_{f=0} = \left[\frac{\delta S(\infty)}{\delta J_\sigma(x)}, \frac{\delta S(\infty)}{\delta \bar{\eta}(y)} \right] \Big|_{f=0} = 0,$$

em que o sufixo $_0$ representa que os comutadores, ou anti-comutadores,[‡] são calculados em tempos iguais; $f = 0$ indica o limite das fontes externas $J = \eta = \bar{\eta} = 0$, ao final dos cálculos.

2.2.1 Solução das equações de movimento

Se o elemento de matriz $S(\infty)$ se encontra no estado de vácuo para $t = -\infty$ e para $t = +\infty$, então, a partir das Eqs.(2.24)–(2.26) é possível encontrar, através de sucessivas diferenciações funcionais em relação às fontes externas f_n , os elementos de matriz referentes às transições do sistema. Portanto, ao invés de resolvermos as equações operatoriais em termos de $S(\infty)$, (2.27) e (2.28), é suficiente que resolvamos um sistema de equações para os elementos de matriz da transição vácuo-vácuo, definidos através de:

$$(\Phi_0^*(+\infty), \Phi_0(-\infty)) = (\Psi_0^*(-\infty), S(\infty) \Psi_0(-\infty)) \equiv Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = Z. \quad (2.32)$$

Em que utilizamos a definição dos estados de vácuo Φ_0 e Ψ_0 , dada pela Eq.(2.11) e a notação $S(\infty) = S(+\infty, -\infty)$. A relação de normalização para os estados Ψ é dada por:

$$\Psi^* S^*(\infty) S(\infty) \Psi = 1. \quad (2.33)$$

Portanto, a partir das Eqs.(2.27)–(2.29) e da definição (2.32), encontramos o seguinte conjunto de equações:

$$\left(\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - ie \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) - m \right) \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} = i\eta(x) Z, \quad (2.34)$$

$$[\square \eta^{\alpha\mu} - \partial^\alpha \partial^\mu] \frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} = iJ^\alpha(x) Z \quad (2.35)$$

$$- \frac{ie}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Tr \left(\gamma^\alpha \left[\frac{\delta^2 Z}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}(x-\varepsilon)} + \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta(x-\varepsilon) \delta \bar{\eta}(x)} \right] \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} = 0 \quad (2.36)$$

[‡] $[A, B] = AB - BA$ e $\{A, B\} = AB + BA$.

Ainda, através da definição do elemento de matriz de um campo arbitrário $F(x)$ (notação de Schwinger [34]) [§]:

$$\langle F(x) \rangle \equiv \frac{(\Psi_0^*(-\infty) S(\infty) F(x) \Psi_0(-\infty))}{(\Psi_0^*(-\infty) S(\infty) \Psi_0(-\infty))}, \quad (2.37)$$

encontramos para as Eqs.(2.34) -(2.36), as seguintes expressões:

$$\gamma^\mu \left(i\partial_\mu + e \langle A(x) \rangle - ie \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \left\langle \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} \right\rangle - m \left\langle \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} \right\rangle = i\eta(x), \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} (\square \eta^{\alpha\mu} - \partial^\alpha \partial^\mu) \left\langle \frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} \right\rangle &= iJ^\alpha(x) \\ &- \frac{ie}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Tr \left(\gamma^\alpha \left\langle \left[\frac{\delta^2 Z}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}(x-\varepsilon)} + \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta(x-\varepsilon) \delta \bar{\eta}(x)} \right] \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\langle \frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} \right\rangle = 0. \quad (2.40)$$

Tais equações obedecem as condições de contorno:

$$\left\langle \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} \right\rangle \Big|_{f=0} = \left\langle \frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} \right\rangle \Big|_{f=0} = \left\langle \frac{\delta Z}{\delta \eta(x)} \right\rangle \Big|_{f=0} = 0. \quad (2.41)$$

O próximo passo do desenvolvimento é introduzir os seguintes funcionais [¶]:

$$S_{AB}(x, y) = \frac{\delta}{i\delta \eta_B(y)} \left\langle \frac{\delta Z}{i\delta \bar{\eta}_A(x)} \right\rangle \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0},$$

$$D_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\delta}{\delta J^\nu(y)} \left\langle \frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} \right\rangle \Big|_{f=0};$$

em que os funcionais S e D são as funções de Green dos campos do elétron e do fóton, respectivamente.

Assim, tomando a derivada funcional em respeito às fontes $\eta(y)$ e $J(y)$, das Eqs.(2.38) e (2.39), respectivamente, obtemos o seguinte sistema de equações para os propagadores:

$$\gamma^\mu \left(i\partial_\mu + e \langle A_\mu(x) \rangle - ie \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) S(x, y) - mS(x, y) = \delta(x - y), \quad (2.42)$$

$$-\square \eta^{\alpha\mu} D_{\mu\lambda}(x, y) = i\delta_\lambda^\alpha \delta(x - y) + \frac{ie}{2} \lim_{z \rightarrow x} \frac{\delta}{\delta J^\lambda(y)} Tr(\gamma^\alpha [S(x, z) + S(z, x)]), \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} D_{\mu\nu}(x, y) = 0. \quad (2.44)$$

Ainda, podemos escrever as equações acima no espaço de Fourier (Apêndice A.4):

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m) S(p, p_1) - e \int d^4 k \gamma^\mu \langle A_\mu(p - k) \rangle S(k, p_1) + ie\gamma^\mu \int d^4 k \frac{\delta S(p + k, p_1)}{\delta J^\mu(k)} &= \\ &= \delta(p - p_1), \end{aligned} \quad (2.45)$$

[§]A relação da definição $\langle F(x) \rangle$ com as demais seções é feita através da identificação dessas quantidades com o funcional gerador das funções de Green conexas \mathbf{W} ; i.e., $\left\langle \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} \right\rangle = \frac{\delta \mathbf{W}}{i\delta \bar{\eta}(x)} = \langle \psi(x) \rangle$.

[¶]Outras definições semelhantes dos mesmos funcionais, serão feitas no próximo capítulo.

$$k^2 \eta^{\alpha\mu} D_{\mu\lambda}(k, k_1) = i\delta_\lambda^\alpha \delta(k - k_1) + ie \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left(\gamma^\alpha \frac{\delta S(p+k, p)}{\delta J^\lambda(k_1)} \right). \quad (2.46)$$

O que nos permite obter uma visão mais clara da estrutura geral de cada uma das equações funcionais.

No que segue, é interessante reescrevermos as Eqs.(2.45) e (2.46), em termos de novas quantidades, como:

$$(\hat{p} - m) S(p, p_1) - e \int d^4 k \gamma^\mu \langle A_\mu(p-k) \rangle S(k, p_1) + \int d^4 k \Sigma(p, k) S(k, p_1) = -\delta(p - p_1), \quad (2.47)$$

e

$$k^2 \eta^{\alpha\mu} D_{\mu\lambda}(k, k_1) = i\delta_\lambda^\alpha \delta(k - k_1) - \int d^4 p P^{\alpha\sigma}(k, p) D_{\sigma\lambda}(p, k_1); \quad (2.48)$$

em que as quantidades Σ e P são conhecidas como as funções de auto-energia, as definimos por auto-energia do elétron^{||}:

$$\begin{aligned} \Sigma(p, k) &= ie^2 \int \frac{d^4 p_1 d^4 k_1}{(2\pi)^4} \gamma^\lambda \frac{\delta S(p+k_1, k)}{\delta J^\lambda(k_1)} S^{-1}(p_1, k) \\ &= ie^2 \int \frac{d^4 p_1 d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4} \gamma^\lambda S(p+k_1, p_1) \Gamma_\nu(p_1, k; k_2) D_{\nu\mu}(k_2, k_1), \end{aligned} \quad (2.49)$$

e função de auto-energia do fóton:

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(p, k) &= -ie^2 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} Tr \left(\gamma_\mu \frac{\delta S(p+p_1, p_1)}{e\delta \langle A^\nu(k) \rangle} \right) \\ &= -ie^2 \int \frac{d^4 p_1 d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4} Tr [\gamma_\mu S(p+p_1, k_1) \Gamma_\nu(k_1, k_2; k) S(k_2, p_1)] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Aqui, também introduzimos a função de vértice Γ , através da definição:

$$\Gamma_\mu(p, k; k_1) = -\frac{\delta S^{-1}(p, k)}{e\delta \langle A^\nu(k_1) \rangle} = \gamma_\mu \delta(p - k - k_1) - \frac{\delta \Sigma(p, k)}{e\delta \langle A^\nu(k_1) \rangle}. \quad (2.51)$$

Do conjunto de equações acima, podemos, em particular, obter um sistema infinito de equações acopladas através de diferenciações sucessivas das Eqs.(2.47)–(2.51), com respeito ao campo $\langle A_\mu(k) \rangle$.

Devido a invariância de gauge da teoria, segue que as funções de Green satisfazem algumas identidades, conhecidas como as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi **. A primeira identidade mostra o caráter transversal de $P_{\mu\nu}$:

$$k^\mu P_{\mu\nu}(p, k) = 0; \quad (2.52)$$

e a segunda relaciona a função de vértice com o propagador fermiônico:

$$ik_\mu \Gamma^\mu(p, q; k = p - q) = S^{-1}(p - q) - S^{-1}(p). \quad (2.53)$$

Tais identidades serão importantes na discussão sobre a renormalização da teoria.

^{||}Cálculos com maiores detalhes são encontrados nas seções 3.2.1 e 3.2.2.

**Vide seção 3.3.

Soluções para o funcional Z

É possível encontrarmos, a partir das Eqs.(2.34)–(2.36), uma solução para o funcional $Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu]$. É natural, como primeira tentativa, definirmos a quantidade:

$$S_0 = \int d^4z \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \hat{\partial} \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{\hat{\partial}} \psi \right) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (2.54)$$

em termos da Lagrangiana inicial \mathcal{L}_0 , e utilizarmos a definição de derivada (2.4) para calcular:

$$-\frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}_A(x)} = i(\gamma^\mu)_{AB} \partial_\mu \psi_B(x) - m \psi_A(x) + e(\gamma^\mu)_{AC} A_\mu(x) \psi_C(x),$$

o que nos leva à relação:

$$i \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \Big| = i(\gamma^\mu)_{AB} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_B(x)} - m \frac{\delta}{\delta \eta_A(x)} - ie(\gamma^\mu)_{AC} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_B(x)}; \quad (2.55)$$

da expressão acima para S_0 , também segue que:

$$i \frac{\delta S_0}{\delta A_\mu(x)} \Big| = [\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] \frac{\delta}{\delta J^\nu(x)} + ie(\gamma^\mu)_{AC} \frac{\delta}{\delta \eta_A(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_C(x)}. \quad (2.56)$$

Nas duas últimas expressões, a notação $\frac{\delta S_0}{\delta \varphi_A(x)} \Big|$ representa a transformação de Fourier funcional para os campos:

$$\psi_A(x) \rightarrow -\frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_A(x)}, \quad \bar{\psi}_A(x) \rightarrow \frac{\delta}{i\delta \eta_A(x)}, \quad A_\mu(x) \rightarrow \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}.$$

Os resultados acima, Eqs.(2.55)–(2.56), permite-nos que reescrevamos as Eqs.(2.34)–(2.36) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \Big| Z + \eta_A(x) Z &= 0, \\ \frac{\delta S_0}{\delta A_\mu(x)} \Big| Z - J^\mu(x) Z &= 0, \\ \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} Z &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Porém, para resolvermos o conjunto de equações (2.57), é conveniente definirmos a seguinte quantidade:

$$Z = Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp \left[i \int d^4z (\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J_\mu A^\mu) \right] \tilde{Z}[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]. \quad (2.58)$$

Ao aplicarmos a definição de (2.58) nas Eqs.(2.57) encontramos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \Big| + \eta_A(x) \right] \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp \left[i \int d^4z (\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J_\mu A^\mu) \right] \tilde{Z}[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] &= 0 \\ \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \left[\frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \Big| + \eta_A(x) \right] \exp \left[i \int d^4z (\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J_\mu A^\mu) \right] \tilde{Z}[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] &= 0 \\ \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \left[\frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \Big| - \frac{\delta}{i\delta \bar{\psi}_A(x)} \right] \exp \left[i \int d^4z (\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J_\mu A^\mu) \right] \tilde{Z}[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] &= 0, \end{aligned}$$

e, integrando o segundo termo por partes, temos:

$$\int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \left[\frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + i \frac{\delta \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu]}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \right] \exp \left[i \int d^4z (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\mu A^\mu) \right] = 0,$$

por fim, obtemos:

$$i \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \frac{\delta \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu]}{\delta \bar{\psi}_A(x)}. \quad (2.59)$$

De maneira similar, também encontramos as seguintes expressões:

$$i \frac{\delta S_0}{\delta A_\mu(x)} \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \frac{\delta \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu]}{\delta A_\mu(x)}, \quad (2.60)$$

e

$$\partial^\mu A_\mu(x) \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = 0. \quad (2.61)$$

Contudo, a equação (2.61) não é satisfeita com o funcional S_0 . Portanto, diante dessa inconsistência, é necessário que encontremos um novo funcional que satisfaça as três equações acima, ao mesmo tempo. Uma possibilidade é definirmos, a partir de (2.54), uma nova quantidade como:

$$S_h = S_0 - \int d^4z [b (\partial^\mu A_\mu)^2], \quad (2.62)$$

sendo b uma constante. Dessa forma, as equações (2.59), (2.60) e (2.61), são escritas como:

$$i \frac{\delta S_h}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \frac{\delta \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu]}{\delta \bar{\psi}_A(x)}, \quad (2.63)$$

$$i \frac{\delta S_h}{\delta A_\mu(x)} \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \frac{\delta \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu]}{\delta A_\mu(x)}, \quad (2.64)$$

e

$$\partial^\mu A_\mu(x) \tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = 0. \quad (2.65)$$

E, uma possível solução, das equações acima, é dada por:

$$\tilde{Z} [\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \frac{1}{Z[0, 0, 0]} \exp [i S_h]. \quad (2.66)$$

Então, substituindo o resultado Eq.(2.66) na definição Eq.(2.58) e, com a escolha do caso geral $b = \frac{1}{2\xi}$, encontramos ^{††}:

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \frac{1}{Z[0, 0, 0]} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp \left[i \int d^4z (S_h + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\mu A^\mu) \right], \quad (2.67)$$

com:

$$S_h = \int d^4z \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \hat{\partial} \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{\hat{\partial}} \psi \right) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right].$$

^{††}É a mesma expressão integral do funcional gerador usada nos cálculos da tese; vide (3.37) para a $GQED_4$.

Os cálculos da seção 2.2.1 constituem um caso particular para $\xi = 1$.

Uma das maiores contribuições de E.S. Fradkin à TQC foi a sua proposta de como se construir uma solução de Z através de um roteiro diferente do apresentado anteriormente. Ele encontrou uma solução fechada, tanto na forma operatorial, quanto na forma funcional, para equações do tipo (2.34) e (2.35). Tal solução é representada através de uma expressão compacta de todo o conteúdo de um dado modelo de teoria de campos. Fradkin também resolveu um outro problema complicado, que consistia em determinar, a partir do conjunto de equações de Schwinger-Dyson, uma solução iterativa de tais equações que gerasse diretamente as funções de Green renormalizadas. Voltaremos a esse ponto de renormalização logo a seguir. Por enquanto, reproduziremos a solução de Z encontrada por Fradkin para a QED_4 . Das equações funcionais (2.34) e (2.35), podemos encontrar uma representação para a solução do tipo:

$$\begin{aligned} cZ &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \left[J_\mu^t(x) [D^t(x, y)]^{\mu\nu} J_\nu^t(y) + J_\mu^l(x) [D^l(x, y)]^{\mu\nu} J_\nu^l(y) \right] \right] \\ &\times \exp \left[-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S \left(x, y; \frac{\delta}{i\delta J_\mu} \right) \eta(y) \right. \\ &\left. -ie \int d^4x \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)} S \left(x, y; \frac{\delta}{i\delta J_\mu} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Em que D^t e D^l são as componentes transversal e longitudinal do propagador do campo de gauge, respectivamente, e $S(x, y; \delta/i\delta J_\mu)$ é a função de Green do elétron em que um campo clássico arbitrário $A_\mu(x)$ é substituído por

$$A_\mu \rightarrow \frac{\delta}{i\delta J_\mu} = \frac{\delta}{i\delta J_\mu^t} + \frac{\delta}{i\delta J_\mu^l},$$

e a constante de normalização c é escolhida igual ao lado direito de (2.68), para $J = \eta = \bar{\eta} = 0$. Ainda, podemos escrever a solução para Z , Eq.(2.68), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} cZ &= \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{L} \left[\frac{\delta}{i\delta \eta}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta J} \right] \right] \\ &\times \exp \left[-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S \left(x, y; \frac{\delta}{i\delta J_\mu} \right) \eta(y) \right. \\ &\left. -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \left[J_\mu^t(x) [D^t(x, y)]^{\mu\nu} J_\nu^t(y) + J_\mu^l(x) [D^l(x, y)]^{\mu\nu} J_\nu^l(y) \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Em que

$$\mathcal{L} \left[\frac{\delta}{i\delta \eta}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta J} \right] = -e \text{Tr} \left[\frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)} \frac{\delta}{i\delta \eta(x)} \gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}(x)} \right].$$

Temos aqui, que a função de Green fermiônica, satisfaz:

$$\left(i\hat{\partial} - m + e\hat{A}(x) \right) S(x, y; A) = \delta^{(4)}(x - y), \quad (2.70)$$

se

$$S \left(x, y; \frac{\delta}{i\delta J_\mu} \right) = S \left(x, y; \frac{\delta}{i\delta J_\mu^t} \right) \exp \left[e \left(\frac{\delta}{i\delta (\partial^\mu J_\mu(x))} + \frac{\delta}{i\delta (\partial^\mu J_\mu(y))} \right) \right]. \quad (2.71)$$

Fradkin [32] mostrou ainda que, a partir da equação (2.71), é possível isolar, na equação (2.68), a parte longitudinal do campo eletromagnético, deixando apenas as derivadas funcionais com respeito às componentes transversais; obtém-se, portanto, a dependência explícita de todas as funções de Green na parte longitudinal D^l do propagador do fóton. Voltaremos a discutir esse assunto em breve, no contexto das transformações de Landau-Khalatnikov-Fradkin [35].

Apesar de as soluções de Z , Eqs.(2.67), (2.68) e (2.69), diferirem em suas formas funcionais, todas elas se equivalem. Ainda, é possível mostrar que as equações (2.68) e (2.69), são deriváveis de (2.67), i.e., são expressões em que as integrais dos campos já foram resolvidas.

2.2.2 Programa de renormalização

O próximo passo do desenvolvimento formal da teoria é iniciar o processo de renormalização. Para isso, introduzimos um conjunto de novas variáveis, que são denotadas por: $S^{(r)}$, $D_{\mu\nu}^{(r)}$, $\Gamma_\mu^{(r)}$, $A_\mu^{(r)}$, $J_\mu^{(r)}$, $e^{(r)}$, $m^{(r)}$, $\psi^{(r)}$, $\bar{\eta}^{(r)}$, $\bar{\psi}^{(r)}$, $\eta^{(r)}$, e são relacionadas com as variáveis iniciais (presentes em \mathcal{L}), da seguinte maneira:

$$\langle A_\mu \rangle = Z_3^{1/2} \langle A_\mu^{(r)} \rangle, \quad \langle \psi \rangle = Z_2^{1/2} \langle \psi^{(r)} \rangle, \quad \langle \bar{\psi} \rangle = Z_2^{1/2} \langle \bar{\psi}^{(r)} \rangle, \quad (2.72)$$

$$J_\mu = Z_3^{-1/2} J_\mu^{(r)}, \quad \bar{\eta} = Z_2^{-1/2} \bar{\eta}^{(r)}, \quad \eta = Z_2^{-1/2} \eta^{(r)}; \quad (2.73)$$

e com as funções de Green por:

$$S = Z_2 S^{(r)}, \quad D_{\mu\nu} = Z_3 D_{\mu\nu}^{(r)}, \quad \Gamma_\mu = Z_1^{-1} \Gamma_\mu^{(r)}. \quad (2.74)$$

O processo de renormalização das quantidades físicas da teoria resume-se a uma escolha de valores para as constantes Z_1 , Z_2 , Z_3 , i.e., ao substituir as quantidades m e e por seus valores observados experimentalmente. Para isso, imporemos, através de condições físicas de renormalização, que os propagadores renormalizados, na ausência de fontes externas, comportem-se como:

1. A função de Green fermiônica deve ter um pólo de primeira ordem no momento $p = m^{(r)}$, em que $m^{(r)}$ é o valor experimental da massa do férmion. Portanto, escolhemos a constante Z_2 de forma que:

$$S^{(r)}(p) \rightarrow \frac{1}{\hat{p} - m^{(r)}}, \quad \text{quando } \hat{p} \rightarrow m^{(r)}. \quad (2.75)$$

2. A função de Green do fóton tem um pólo em $k^2 = 0$. Portanto, escolhemos a constante Z_3 , de forma que:

$$D_{\mu\nu}^{(r)}(k) \rightarrow -i \frac{1}{k^2} \left[\eta_{\mu\lambda} - \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2} \right], \quad \text{para } k^2 \rightarrow 0. \quad (2.76)$$

3. Segue da invariância relativística da teoria que $\Gamma_\mu(p^{(0)}, p^{(0)}; 0) = \gamma_\mu$ para $\hat{p} = \hat{p}^{(0)} = m^{(r)}$. Dessa forma, escolhemos a constante Z_1 tal que:

$$\Gamma_\mu^{(r)}(p^{(0)}, p^{(0)}; 0) = \gamma_\mu \quad (2.77)$$

A partir das condições de renormalização acima, e também da Eq.(2.47), não é difícil provar que a quantidade

$$e^{(r)} = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{-1/2} e \quad (2.78)$$

é igual ao valor experimental e_{exp} .

Para determinarmos as constantes de renormalização Z_1 , Z_2 , Z_3 , a partir das condições físicas (2.75)–(2.77), é desejável escrever explicitamente as funções de Green renormalizadas para o caso $J = 0$, $\eta = 0$, $\bar{\eta} = 0$. Assim, segue das equações (2.47)–(2.48) e das condições acima, o seguinte conjunto de equações:

$$[Z_2 (\hat{p} - m) + \Sigma^{(r)}(p)] S^{(r)}(p) = 1, \quad (2.79)$$

e

$$[Z_3 [k^2 \eta^{\alpha\mu} - k^\alpha k^\mu] + \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\mu\rho} P_{\sigma\rho}^{(r)}(k)] D_{\mu\lambda}^{(r)}(k) = -i\delta_\lambda^\alpha. \quad (2.80)$$

Em que:

$$\Sigma^{(r)}(p) = ie_{\text{exp}}^2 Z_1 \int \frac{d^4 p_1 d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4} \gamma^\lambda S^{(r)}(p + k_1, p_1) \Gamma_\nu^{(r)}(p_1, k; k_2) D_{\nu\mu}^{(r)}(k_2, k_1), \quad (2.81)$$

e

$$iP_{\mu\nu}^{(r)}(p, k) = e_{\text{exp}}^2 Z_1 \int \frac{d^4 p_1 d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma_\mu S^{(r)}(p + p_1, k_1) \Gamma_\nu^{(r)}(k_1, k_2; k) S^{(r)}(k_2, p_1)], \quad (2.82)$$

e também que:

$$\Gamma_\mu^{(r)}(p + k, p; k) = Z_1 \gamma_\mu - \sum_\mu^{(1)} (p + k, p; k), \quad (2.83)$$

onde

$$\sum_\mu^{(1)} = \frac{\delta \Sigma^{(r)}}{e_{\text{exp}} \delta \langle A_\mu^{(r)}(k_1) \rangle}. \quad (2.84)$$

Dessa forma, temos todas as quantidades da teoria renormalizadas. Agora, prosseguiremos com o cálculo para determinar as constantes de renormalização, através das condições (2.75)–(2.77).

Analisando o setor fermiônico, temos, da Eq.(2.79), que:

$$S^{(r)}(p) = \frac{1}{Z_2 (\hat{p} - m) + \Sigma^{(r)}(p)}. \quad (2.85)$$

E, expandindo $\Sigma^{(r)}(p)$ em série de potências de $(\hat{p} - m)$, quando $\hat{p} \rightarrow m^{(r)}$, encontramos:

$$S^{(r)}(p) \Big|_{\hat{p} \rightarrow m^{(r)}} = \frac{1}{Z_2 (\hat{p} - m) + \Sigma^{(r)}(p^{(o)}) + \frac{\partial \Sigma^{(r)}(p^{(o)})}{\partial p^{(o)}} (\hat{p} - m^{(r)})}. \quad (2.86)$$

Assim, da condição (2.75) e da expressão anterior, seguem os seguintes resultados:

$$m = m^{(r)} + Z_2^{-1} \Sigma^{(r)}(p^{(o)}); \quad Z_2 = 1 - \frac{\partial \Sigma^{(r)}(p^{(o)})}{\partial p^{(o)}}. \quad (2.87)$$

De maneira análoga, temos, das Eqs.(2.80) e (2.76), que o propagador do fóton comporta-se como:

$$D_{\mu\lambda}^{(r)}(k) = -i \frac{\eta_{\mu\lambda} - \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2}}{k^2 [1 + P^{(r)}(k^2) - P^{(r)}(0)]}, \quad (2.88)$$

em que $P_{\mu\nu}^{(r)}(k^2) = [k^2 \eta^{\alpha\mu} - k^\alpha k^\mu] P^{(r)}(k^2)$ e, para a escolha:

$$Z_3 = \frac{1}{1 + P^{(r)}(0)}, \quad (2.89)$$

vemos claramente que o propagador Eq.(2.88) obedece à condição (2.76), quando $k^2 \rightarrow 0$.

E, finalmente, da Eq.(2.83) e da condição (2.77), obtemos:

$$Z_1 \gamma_\mu = \gamma_\mu + \sum_\mu^{(1)} (p^{(0)}, p^{(0)}; 0). \quad (2.90)$$

Ademais, através da identidade de Ward-Fradkin-Takahashi (2.53) determinamos:

$$Z_1 = Z_2, \quad e^{(r)} = Z_3^{1/2} e;$$

o que implica que a renormalização da carga é determinada unicamente pelo fator de renormalização Z_3 .

2.2.3 Transformações de Landau-Khalatnikov-Fradkin

Ao obtermos as expressões formais dos propagadores renormalizados (das quantidades físicas $m^{(r)}$ e $e^{(r)}$), e também das constantes de renormalização, praticamente finalizamos este capítulo introdutório sobre o estudo da estrutura formal da QED_4 via métodos funcionais. Entretanto, antes de encerrá-lo, acreditamos ser necessário introduzir um conceito que praticamente não é discutido no estudo de modelos de teorias de campos, que são as transformações de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKF) [35]. Desenvolvidas inicialmente com o intuito de justificar o uso do gauge de Feynman no propagador do fóton no cálculo perturbativo da QED_4 , elas permitem analisar o comportamento dos propagadores em diversas escolhas de gauge, além das ambiguidades presentes, devido a essa liberdade de escolha.

Estamos aqui interessados em analisar o comportamento das funções de Green do fóton e do férmion:

$$S_{BC}(x, y) = \langle 0 | T [\bar{\psi}_B(x) \psi_C(y)] | 0 \rangle, \quad (2.91)$$

$$D_{\mu\nu}(x, y) = \langle 0 | T [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle, \quad (2.92)$$

sob as transformações de gauge:

$$\psi'(x) = \psi(x) e^{ie_0\chi(x)}, \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x). \quad (2.93)$$

As quais deixam a densidade Lagrangiana da QED_4 , Eq.(2.2), invariante. T denota o ordenamento temporal entre os operadores e $|0\rangle$ é o estado de vácuo. Porém, antes de iniciarmos a análise, é necessário destacar duas propriedades do campo de gauge $\chi(x)$:

(i) Como o campo de gauge χ não interage com os campos do elétron e do fóton, assumiremos, portanto, que seu valor esperado seja calculado independentemente dos demais campos;

(ii) O valor esperado no vácuo do campo de gauge $\chi(x)$ é nulo, i.e., $\langle 0 | \chi(x) | 0 \rangle = 0$.

Primeiro, analisaremos o propagador do campo do fóton, que, quando sujeito à transformação (2.93) fica:

$$\begin{aligned}
D'_{\mu\nu}(x, y) &= \langle 0 | T [(A_\nu(y) + \partial_\nu \chi(y)) (A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x))] | 0 \rangle \\
&= D_{\mu\nu}(x, y) + \langle 0 | T [\partial_\nu \chi(y) \partial_\mu \chi(x)] | 0 \rangle \\
&= D_{\mu\nu}(x, y) + \partial_\nu^y \partial_\mu^x \langle 0 | T [\chi(y) \chi(x)] | 0 \rangle \\
&= D_{\mu\nu}(x, y) + \partial_\nu^y \partial_\mu^x \Delta_F(x, y), \tag{2.94}
\end{aligned}$$

em que usamos a propriedade (i) e assumimos a não existência de singularidades ao retirarmos as derivadas de dentro do produto-T. Na expressão acima, o propagador de Feynman foi definido como:

$$\Delta_F(x, y) \equiv \langle 0 | T [\chi(y) \chi(x)] | 0 \rangle. \tag{2.95}$$

Agora, fazemos uma escolha de gauge ($\xi = 0$), tal que, a parte longitudinal do propagador do campo do fóton seja nula, isto é:

$$D_{\mu\nu}^0(x, y) = D_{\mu\nu}^T(x, y). \tag{2.96}$$

Aqui, o sufixo ⁰ denotará todas as funções calculadas nesse gauge. Dessa forma, ao realizarmos a transformação de gauge (2.93) na função de Green $D_{\mu\nu}^0(x, y)$, toda a contribuição do campo $\chi(x)$ se concentrará na parte longitudinal:

$$D_{\mu\nu}^0(x, y) \rightarrow D_{\mu\nu}^0(x, y) + D_{\mu\nu}^L(x, y); \tag{2.97}$$

pois, tanto o campo de gauge $\chi(x)$, quanto a parte longitudinal D^L , não contribuem no processo de interação. Assim, comparando as Eqs.(2.97) e (2.94), encontramos:

$$D_{\mu\nu}^L(x, y) = \partial_\nu^y \partial_\mu^x \Delta_F(x, y).$$

Tal expressão também pode ser escrita no espaço do momentos:

$$D_{\mu\nu}^L(k) = k_\nu k_\mu \Delta_F(k). \tag{2.98}$$

Ainda, trabalhando no espaço dos momentos, podemos escrever a expressão geral do propagador do fóton como:

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(k) &= D_{\mu\nu}^T(k) + D_{\mu\nu}^L(k) \\
&= \frac{1}{k^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) D^T(k) + \frac{1}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} D^L(k). \tag{2.99}
\end{aligned}$$

Por fim, comparando, então, as equações (2.99) e (2.98), encontramos:

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} D^L(k). \quad (2.100)$$

Cuja expressão relaciona, a partir da expressão do propagador no gauge na escolha $\xi = 0$ e, também, sob a transformação (2.93), o setor longitudinal $D^L(k)$ do propagador com a contribuição do campo de gauge $\chi(x)$.

Agora, a função de Green fermiônica Eq.(2.91), sob a transformação (2.93), comporta-se da seguinte maneira:

$$S(x, y) = S^0(x, y) \langle 0 | T [e^{ie_0\chi(y)} e^{-ie_0\chi(x)}] | 0 \rangle, \quad (2.101)$$

em que a função de Green $S^0(x, y)$ é calculada no gauge definido anteriormente. Para calcularmos a quantidade:

$$\langle 0 | T [e^{ie_0\chi(y)} e^{-ie_0\chi(x)}] | 0 \rangle, \quad (2.102)$$

consideraremos, inicialmente, transformações de gauge infinitesimais $\delta\chi$ e escreveremos o campo de gauge χ como uma expansão em pacotes de onda através de:

$$\chi(x) = \sum_k \chi_k(x) = \sum_k A(k^2) \left[a_k f_k(x) + a_k^\dagger f_k^*(x) \right]. \quad (2.103)$$

Essas novas quantidades nos permite escrever:

$$e^{ie_0\delta\chi(x)} = \prod_k e^{ie_0\delta\chi_k(x)}.$$

Logo, expandindo as exponenciais até a segunda ordem em $\delta\chi$, temos:

$$\begin{aligned} T [e^{ie_0\delta\chi(y)} e^{-ie_0\delta\chi(x)}] &= \prod_{k,l} T [e^{ie_0\delta\chi_k(y)} e^{-ie_0\delta\chi_l(x)}] \\ &= \prod_{k,l} \left[1 + ie_0 (\delta\chi_k(y) - \delta\chi_l(x)) - \frac{e_0^2}{2} ((\delta\chi_k(y))^2 + (\delta\chi_l(x))^2 - 2T [\delta\chi_k(y) \delta\chi_l(x)]) \right]. \end{aligned}$$

Cuja expressão, junto com as propriedades (ii) e $\langle 0 | \chi_k(x) \chi_l(y) | 0 \rangle \neq 0$ para $k = l$, permite-nos calcular o valor esperado Eq.(2.102). Logo, a partir dessas considerações, encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [e^{ie_0\delta\chi(y)} e^{-ie_0\delta\chi(x)}] | 0 \rangle &= \prod_k \left[1 - \frac{e_0^2}{2} \left(\langle 0 | (\delta\chi_k(y))^2 | 0 \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle 0 | (\delta\chi_k(x))^2 | 0 \rangle - 2 \langle 0 | T [\delta\chi_k(y) \delta\chi_k(x)] | 0 \rangle \right) \right]. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a expressão (2.102), para uma transformação de gauge finita, como:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [e^{ie_0\chi(y)} e^{-ie_0\chi(x)}] | 0 \rangle &= \exp \left[-\frac{e_0^2}{2} \sum_k \left(\langle 0 | (\delta\chi_k(y))^2 | 0 \rangle + \langle 0 | (\delta\chi_k(x))^2 | 0 \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \langle 0 | T [\delta\chi_k(y) \delta\chi_k(x)] | 0 \rangle \right) \right] \\ &= \exp [e_0^2 (\Delta_F(x, y) - \Delta_F(x, x))]. \quad (2.104) \end{aligned}$$

Portanto, para uma transformação de gauge geral Eq.(2.93), a função de Green completa do férmion transforma-se da seguinte forma:

$$S(x, y) = S^0(x, y) \exp \left[e_0^2 (\Delta_F(x, y) - \Delta_F(x, x)) \right]. \quad (2.105)$$

Para encerrar, seguem algumas considerações gerais sobre a transformação LKF para a função de vértice: Na realidade, essa transformação para o vértice é complicada, o que dificulta a extração de restrições sobre a sua estrutura funcional. Então, de maneira geral, obter qualquer informação sobre tal transformação não é muito vantajoso devido a complexidade da análise. Entretanto, em [36] Burden e Roberts realizaram uma análise numérica para comparar a auto-consistência de diversos ansätze para a função de vértice [37], por meio de sua transformação LKF. Ainda, em adição a esses vínculos numéricos, uma visão analítica indireta pode ser obtida a partir da estrutura não-perturbativa do vértice, ao exigir propriedades de gauge corretas para o propagador fermiônico.

O desenvolvimento e discussão desta seção seguem a proposta de Fradkin, que consideramos ser formalmente mais simples que as demais. Porém, essas transformações também foram derivadas por Johnson e Zumino através de métodos funcionais [38]. Ainda, em [39] Fukuda, Kubo e Yokoyama atentaram para um possível formalismo, em que as constantes de renormalização Z_i fossem invariantes de gauge.

Como dito anteriormente, tínhamos, como intenção deste capítulo, apresentar a estrutura geral da teoria até o nível de renormalização; uma teoria de campos da forma mais geral possível, não realizando nenhum cálculo. Limitando-nos apenas na obtenção das expressões formais das quantidades relevantes da teoria para, assim, deixar o leitor familiarizado com as discussões e considerações que virão no estudo da $GQED_4$.

Capítulo 3

Quantização da Eletrodinâmica Generalizada

Neste capítulo, atentaremos para o estudo funcional da eletrodinâmica quântica generalizada, a $GQED_4$. No entanto, procederemos de uma maneira diferente àquela apresentada no capítulo anterior, i.e., construiremos a amplitude de transição vácuo–vácuo do modelo através de métodos Hamiltonianos gerais de teorias de gauge. As expressões obtidas anteriormente para o funcional Z , Eqs.(2.67) e (2.68), são gerais, como veremos através da comparação destas com a equação (3.37). Em seguida, deduziremos, através de métodos funcionais, as equações de Schwinger-Dyson-Fradkin para os propagadores do elétron e do fóton, bem como para a função de vértice. As identidades de Ward-Fradkin-Takahashi também serão apresentadas. Como tópico final do capítulo, introduziremos e discutiremos o programa de renormalização para as quantidades físicas do modelo.

3.1 Análise Canônica e Amplitude de Transição

Antes de utilizarmos o procedimento de Faddeev-Senjanovic para a construção da amplitude de transição, apresentaremos um breve estudo clássico, mostrando os principais pontos da estrutura Hamiltoniana da $GQED_4$: o cálculo dos momentos canônicos, seguido pela determinação do conjunto de vínculos e posterior classificação entre vínculos de primeira e segunda classe e, por fim, a escolha de um conjunto apropriado de condições de gauge. Sendo necessário utilizar o método de Faddeev-Popov-DeWitt para obtermos uma expressão covariante para a amplitude de transição. Portanto, iniciamos o estudo com a proposta da densidade Lagrangiana da $GQED_4$:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \hat{\partial} \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{\hat{\partial}} \psi \right) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\mu F^{\alpha\mu} \partial^\beta F_{\alpha\beta}; \quad (3.1)$$

cuja expressão, em nível clássico, é invariante sob as seguintes transformações locais de gauge:

$$\psi'(x) = e^{i\lambda(x)} \psi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x). \quad (3.2)$$

Na proposta da Lagrangiana (3.1) foram utilizadas as seguintes definições: $F_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ e $\hat{O} \equiv \gamma_\mu O^\mu$. A densidade Lagrangiana \mathcal{L} preserva todas as simetrias da QED_4 usual. As equações de Euler-Lagrange, procedentes do princípio de Hamilton e com as condições de contorno apropriadas, Eq.(B.11), são dadas por*:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0,$$

$$\left(i\hat{D} + e\hat{A} - m \right) \psi = 0, \quad (3.3)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A_\alpha)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A_\alpha)} = \frac{a^2}{2} [\eta^{\mu\alpha} \partial_\lambda F^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\alpha} \partial_\lambda F^{\mu\lambda} - 2\eta^{\mu\nu} \partial_\lambda F^{\alpha\lambda}],$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A_\alpha)} = -a^2 \square \partial_\lambda F^{\alpha\lambda}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} = F^{\alpha\mu}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = e\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi;$$

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\alpha\mu} = e\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi. \quad (3.4)$$

As expressões dos momentos canônicos π^β e ϕ^β , variáveis conjugadas aos campos A_α e Γ_α , e definidos em (B.23) e (B.24), respectivamente, em que as variáveis $\Gamma_\alpha \equiv \partial_0 A_\alpha$ são graus de liberdade independentes, são dadas por:

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 A_\mu)} - 2\partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \partial_0 A_\mu)}$$

$$= F^{\mu 0} - a^2 [\eta^{\mu k} \partial_k \partial_\lambda F^{0\lambda} - \partial_0 \partial_\lambda F^{\mu\lambda}], \quad (3.5)$$

$$\phi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 A_\mu)} = a^2 [\eta^{\mu 0} \partial_\lambda F^{0\lambda} - \partial_\lambda F^{\mu\lambda}]; \quad (3.6)$$

já os momentos canônicos associados aos campos fermiônicos ψ e $\bar{\psi}$ são:

$$p_A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi}_A)} = \frac{i}{2} (\gamma^0 \psi)_A, \quad (3.7)$$

$$\bar{p}_A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_A)} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^0)_A. \quad (3.8)$$

Agora, a partir das expressões dos momentos acima, estudaremos a estrutura de vínculos da teoria, seguindo a abordagem de Dirac para sistemas singulares [33]. Portanto, através das expressões (3.7) e (3.8), e da componente temporal de (3.6), obtemos, imediatamente, três vínculos primários:

$$\chi_A \equiv p_A - \frac{i}{2} (\gamma^0 \psi)_A \approx 0, \quad \bar{\chi}_A \equiv \bar{p}_A - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^0)_A \approx 0, \quad \varphi_1 \equiv \phi_0 \approx 0. \quad (3.9)$$

*Vide Apêndice B para uma breve introdução e discussão geral de teorias de campo com derivadas de ordem superior, em nível clássico.

Encontramos também, da combinação entre a componente temporal da expressão (3.5) e da espacial da (3.6), um outro vínculo primário:

$$\varphi_2 \equiv \pi_0 - \partial^k \phi_k \approx 0. \quad (3.10)$$

Em que "≈" representa o fato das relações (3.9) e (3.10) serem, de fato, equações fracas de acordo com o procedimento de Dirac. Além dos vínculos primários, obtemos, também, das componentes espaciais das expressões dos momentos canônicos, duas relações dinâmicas. Primeiro, da Eq.(3.5), segue:

$$\partial_0 A^k = \partial^k A_0 - \pi^k + a^2 (\partial^k \partial^\mu F_{0\mu} - \partial_0 \partial_\mu F^{k\mu}), \quad (3.11)$$

e da Eq.(3.6), provém a segunda:

$$\partial_0 \Gamma^k = \partial^k \Gamma_0 + \partial_l F^{kl} + \frac{\phi^k}{a^2}. \quad (3.12)$$

O próximo passo do procedimento de Dirac é impor as condições de consistência sobre os vínculos primários, i.e., de modo que sua evolução temporal seja preservada. O que nos leva, primeiro, à definição da Hamiltoniana canônica \mathcal{H}_C :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \pi_\alpha \dot{A}^\alpha + \phi_\alpha \dot{\Gamma}^\alpha - \bar{p}^\alpha (\partial_0 \psi)_\alpha - (\partial_0 \bar{\psi})_\alpha p^\alpha - \mathcal{L} \\ \mathcal{H}_C &= \pi_0 \Gamma^0 + \pi_j \Gamma^j + \frac{\phi_l \phi^l}{2a^2} + \phi_l \partial^l \Gamma_0 + \phi_l \partial_k F^{lk} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^j \overleftrightarrow{\partial}_j \psi + m \bar{\psi} \psi - e \bar{\psi} \hat{A} \psi \\ &\quad + \frac{1}{4} F_{kj} F^{kj} + \frac{1}{2} (\Gamma_j - \partial_j A_0)^2 - \frac{a^2}{2} (\partial^j \Gamma_j - \partial_j \partial^j A_0)^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

e, também, da Hamiltoniana primária:

$$H_P = H_C + \int d^3z (\bar{C}_A \chi^A + \bar{\chi}^B C_B + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2). \quad (3.14)$$

Objeto que, no atual ponto da análise, é a quantidade responsável pela evolução temporal do sistema. Os parentêses de Berezin fundamentais da teoria são:

$$\{\psi_A(x), \bar{p}^E(y)\}_B = -\delta_A^E \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.15)$$

$$\{\bar{\psi}_C(x), p^F(y)\}_B = -\delta_C^F \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.16)$$

$$\{A_\lambda(x), \pi^\alpha(y)\}_B = \delta_\lambda^\alpha \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.17)$$

$$\{\Gamma_\lambda(x), \phi^\alpha(y)\}_B = \delta_\lambda^\alpha \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.18)$$

Todas as condições de consistência dos vínculos primários são satisfeitas. Para o vínculo φ_1 temos:

$$\partial_0 \varphi_1(x) = -(\pi^0(x) - \partial_l \phi^l(x)) = -\varphi_2 \approx 0. \quad (3.19)$$

A partir das condições fermiônicas, determinamos os seus multiplicadores de Lagrange. Da condição: $\partial_0 \chi_A(x) \approx 0$ temos:

$$C_A(x) = -(\gamma^0 \gamma^j)_{AB} \partial_j \psi^B(x) + ie (\gamma^0 \gamma^\mu)_{AC} \psi^C(x) A_\mu(x) - im (\gamma^0)_{AB} \psi^B(x), \quad (3.20)$$

e de: $\partial_0 \bar{\chi}_A(x) \approx 0$ segue:

$$\bar{C}_B(x) = \partial_j \bar{\psi}^C(x) (\gamma^j \gamma^0)_{CB} + iq \bar{\psi}^A(x) (\gamma^\mu \gamma^0)_{AB} A_\mu(x) - im \bar{\psi}^A(x) (\gamma^0)_{AB}. \quad (3.21)$$

Porém, a condição de consistência do vínculo φ_2 :

$$\partial_0 \varphi_2(x) = \{\varphi_2(x), H_P\}_B, \quad (3.22)$$

gera um vínculo secundário:

$$\partial_0 \varphi_2(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) + \partial^k \pi_k(x) \approx 0, \quad (3.23)$$

que denotaremos por $\tilde{\varphi}(x) \equiv e \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) + \partial^k \pi_k(x) \approx 0$. Logo, é necessário impor a condição de consistência ao novo vínculo, prontamente satisfeita em:

$$\partial_0 \tilde{\varphi}(x) = \{\tilde{\varphi}(x), H_P\}_B = 0. \quad (3.24)$$

Conseqüentemente, mostramos que temos o conjunto com todos os vínculos da teoria.

Agora, através da independência linear dos vínculos da teoria [33], classificaremos os vínculos da teoria entre vínculos de primeira ou segunda-classe. Não é difícil concluir que o conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é composto de vínculos de primeira-classe. Assim, os vínculos restantes, a princípio, são de segunda-classe. Entretanto, antes de qualquer conclusão, é necessário construirmos a matriz de vínculos de segunda-classe:

$$C(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & i(\gamma^0) & -e\gamma^0\psi \\ i(\gamma^0) & 0 & -e\bar{\psi}\gamma^0 \\ e\gamma^0\psi & e\bar{\psi}\gamma^0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

para, assim, verificarmos a independência linear de tais vínculos. Não é complicado mostrar que essa matriz não possui posto igual a 3 e, sim, posto 2. Portanto, temos que um dos três vínculos de segunda-classe é, na verdade, de primeira-classe.

A forma mais simples de determinar qual vínculo não pertence a esse conjunto, é a utilização da independência linear entre os vínculos e, então, a construção de uma combinação dos vínculos de segunda classe, o que resultará em um vínculo de primeira-classe. Para isso, consideremos: $\Delta(x) = \bar{K}_\alpha \chi^\alpha(x) + \bar{\chi}^\beta(x) K_\beta + K \tilde{\varphi}(x)$, em que os coeficientes K são determinados ao impormos que $\Delta(x)$ possua parentêses de Berezin nulos com todos os vínculos da teoria (condição para que seja um vínculo de primeira-classe). Então, após determinarmos os coeficientes de Δ (através das condições descritas acima), obtemos o seguinte conjunto de vínculos de primeira-classe:

$$\Omega_1 \equiv \phi_0 \approx 0, \quad \Omega_2 \equiv \pi_0 - \partial_k \phi^k \approx 0, \quad \Omega_3 \equiv \partial_k \pi^k + e \bar{\psi} \gamma^0 \psi \approx 0, \quad (3.25)$$

e o conjunto de vínculos de segunda classe,

$$\chi_A \equiv p_A - \frac{i}{2} (\gamma^0 \psi)_A \approx 0, \quad \bar{\chi}_A \equiv \bar{p}_A - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^0)_A \approx 0. \quad (3.26)$$

O processo de quantização de um sistema singular clássico pode ser dado de duas maneiras: via princípio de equivalência entre os parênteses de Dirac e (anti-)comutadores ou via amplitude de transição do formalismo de integração funcional. Aqui, seguiremos a quantização pelo segundo método. Porém, nas duas frentes, faz-se necessário introduzir condições subsidiárias a fim de que todos os multiplicadores de Lagrange (dos vínculos de primeira-classe) sejam determinados, i.e., que a dinâmica Hamiltoniana seja equivalente à Lagrangiana – se estamos interessados em quantizar o sistema via princípio de equivalência, além de introduzirmos os parênteses de Dirac, a dinâmica também é regida por um novo objeto, a Hamiltoniana estendida H_E [33].

Assim, iniciamos o processo de quantização através do procedimento de Faddeev–Senjanovic para obter a amplitude de transição [30], que em sua forma Hamiltoniana é definida por:

$$Z = N \int D\mu \exp \left(i \int d^4x \left[\pi^\mu (\partial_0 A_\mu) + \phi_\alpha (\partial_0 \Gamma^\alpha) - (\partial_0 \psi) \bar{p} - (\partial_0 \bar{\psi}) p - \mathcal{H}_C \right] \right), \quad (3.27)$$

com a Hamiltoniana canônica \mathcal{H}_C dada pela equação (3.13). Ainda, temos que a medida de integração é definida por:

$$D\mu = D\phi_\nu D\Gamma^\nu D\pi^\mu DA_\mu D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp \delta(\Theta_l) \det ||\{\Omega_a, \Sigma_b\}_B||^{1/2} \det ||\{\chi_A, \bar{\chi}_B\}_B||^{-1/2}. \quad (3.28)$$

Em que $\Theta = \{\Omega, \Sigma, \chi, \bar{\chi}\}$ é o conjunto de todos os vínculos e Σ são as condições subsidiárias que fixam os vínculos de primeira-classe. Trabalharemos, aqui, com a condição de gauge de radiação generalizada:

$$\Sigma_1 \equiv \Gamma_0 \approx 0, \quad \Sigma_2 \equiv A_0 \approx 0, \quad \Sigma_3 \equiv (1 + a^2 \square) \partial^k A_k \approx 0. \quad (3.29)$$

Como foi demonstrado em [17], tem-se um conjunto apropriado de condições de gauge não-covariantes para os vínculos de primeira classe (3.25). Antes de efetuarmos as integrações de (3.27), é necessário que calculemos os determinantes dos vínculos em (3.28). O determinante associado aos vínculos de segunda classe, Eq.(3.26), $\det ||\{\chi_A, \bar{\chi}_B\}_B||$, não contém variáveis de campo, pois $\{\chi_A, \bar{\chi}_B\} = i(\gamma^0)_{AB}$; logo, ele pode ser absorvido na constante de normalização. Já o determinante entre os vínculos de primeira-classe, Eq.(3.25), e as condições de gauge, Eq.(3.29), possui a seguinte forma:

$$\det ||\{\Omega_\alpha, \Sigma_\beta\}_B||^{1/2} = \det ||-(1 + a^2 \nabla^2) \nabla^2||. \quad (3.30)$$

Obtemos a expressão para o amplitude de transição através das seguintes manipulações: combinando as equações (3.28) e (3.30), substituindo o resultado em (3.27), e resolvendo as integrais dos momentos e variáveis de campo. Primeiro, devido a estrutura dos vínculos presentes nas

funções- δ , é imediato resolver as integrações nas variáveis A_0 , ϕ^0 , π^0 e Γ_0 :

$$\begin{aligned} Z &= N' \int D\phi_k D\Gamma^k D\pi^l DA_l D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp \det ||-(1+a^2\nabla^2)\nabla^2|| \\ &\times \delta(\partial_k\pi^k + e\bar{\psi}\gamma^0\psi) \delta[(1-a^2\Box)\partial^k A_k] \delta\left(p - \frac{i}{2}\gamma^0\psi\right) \delta\left(\bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^0\right) \\ &\times \exp\left(i \int d^4x \left[\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^k \overleftrightarrow{\partial}_k \psi + \bar{p}(\partial_0\psi) - (\partial_0\bar{\psi})p - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^l\psi A_l + \pi^j(\partial_0 A_j) \right. \right. \\ &\left. \left. + \phi_j(\partial_0\Gamma^j) - \pi_j\Gamma^j - \frac{\phi_l\phi^l}{2a^2} - \phi_l\partial_k F^{lk} + \frac{1}{2}(\Gamma_j)^2 - \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} + \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j)^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Também segue da estrutura das funções- δ , da expressão anterior, que podemos realizar, sem maiores dificuldades, a integração nos momentos fermiônicos p e \bar{p} :

$$\begin{aligned} Z &= N \int D\phi_k D\Gamma^k D\pi^l DA_l D\bar{\psi} D\psi \det ||-(1+a^2\nabla^2)\nabla^2|| \delta[(1-a^2\Box)\partial^k A_k] \\ &\times \delta(\partial_k\pi^k + e\bar{\psi}\gamma^0\psi) \exp\left(i \int d^4x \left[\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^l\psi A_l + \pi^j(\partial_0 A_j) \right. \right. \\ &\left. \left. + \phi_j(\partial_0\Gamma^j) - \pi_j\Gamma^j - \frac{\phi_l\phi^l}{2a^2} - \phi_l\partial_k F^{lk} + \frac{1}{2}(\Gamma_j)^2 - \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} + \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j)^2 \right] \right). \end{aligned}$$

A função $\delta(\partial_k\pi^k + e\bar{\psi}\gamma^0\psi)$ ainda pode ser escrita em sua forma integral como:

$$\delta(\partial_k\pi^k + e\bar{\psi}\gamma^0\psi) = \int d\alpha \exp\left[i \int d^4x \alpha (\partial_k\pi^k + e\bar{\psi}\gamma^0\psi)\right],$$

o que permite a integração da variável π_k :

$$I_\pi = \int D\pi_k \exp\left[i \int d^4x (\pi^j(\partial_0 A_j) - \pi_j\Gamma^j - \pi^k\partial_k\alpha)\right] = \delta[\Gamma_k + \partial_k\alpha - \partial_0 A_k]. \quad (3.31)$$

E, a partir do argumento da função- δ , descrita acima, vemos, claramente, que Γ_k e $\partial_0 A_k$ são variáveis independentes, como realmente deveria ser no formalismo de ordem-superior. Assim, encontramos:

$$\begin{aligned} Z &= N \int D\phi_k D\Gamma^k D\alpha DA_l D\bar{\psi} D\psi \det ||-(1+a^2\nabla^2)\nabla^2|| \delta[(1-a^2\Box)\partial^k A_k] \\ &\times \delta[\Gamma_k + \partial_k\alpha - \partial_0 A_k] \exp\left(i \int d^4x \left[\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^l\psi A_l + e\alpha\bar{\psi}\gamma^0\psi \right. \right. \\ &\left. \left. + \phi_j(\partial_0\Gamma^j) - \frac{\phi_l\phi^l}{2a^2} - \phi_l\partial_k F^{lk} + \frac{1}{2}(\Gamma_j)^2 - \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} + \frac{a^2}{2}(\partial^j\Gamma_j)^2 \right] \right). \end{aligned}$$

A integração da variável Γ_k , na última expressão, é direta e identificando $\alpha \rightarrow A_0$, obtemos:

$$\begin{aligned} Z &= N \int D\phi_k DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det ||-(1+a^2\nabla^2)\nabla^2|| \delta[(1-a^2\Box)\partial^k A_k] \\ &\times \exp\left(i \int d^4x \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \phi_k\partial_\mu F^{\mu k} - \frac{\phi_l\phi^l}{2a^2} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2}F_{0k}F^{0k} - \frac{1}{4}F_{kj}F^{kj} - \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{0\mu}\partial^\alpha F_{0\alpha} \right] \right). \end{aligned}$$

Por fim, podemos integrar na variável ϕ_k :

$$\begin{aligned} I_\phi &= \int D\phi_k \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{\phi_l \phi^l}{2a^2} + \phi_k \partial_\mu F^{\mu k} \right) \right] \\ &= \exp \left[-i \int d^4x \frac{a^2}{2} (\partial_\mu F^{\mu k})^2 \right] \int D\phi'_k \exp \left[i \int d^4x \frac{\phi_k'^2}{2a^2} \right]. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que a expressão para a amplitude de transição vácuo-vácuo tem a seguinte forma:

$$Z = \mathcal{N}' \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det ||-(1 + a^2 \nabla^2) \nabla^2|| \delta [(1 + a^2 \square) \partial^k A_k] \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L} \right). \quad (3.32)$$

Embora a expressão (3.32) seja correta, a sua forma não-covariante não é conveniente para efeito de cálculos. Entretanto, podemos usar o ansatz de Faddeev-Popov-DeWitt [40], para determinar a forma covariante da amplitude de transição vácuo-vácuo. Desse ansatz, temos a seguinte identidade:

$$1 = \det M \int Dg \delta [\Omega [A^g]], \quad (3.33)$$

com: $M_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\delta \Omega_\alpha [A^g(x)]}{\delta \lambda^\beta(y)} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$, onde $A^g(x)$ representa o campo de gauge sob uma transformação de gauge g . Então, ao escolhermos a condição de gauge de Lorenz generalizada [17]:

$$\Omega [A] = (1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu - f = 0, \quad (3.34)$$

como condição de *gauge-fixing*, temos que a matriz de Faddeev-Popov-DeWitt é escrita como:

$$M_L(x, y) = \frac{1}{e} (1 + a^2 \square) \square \delta^{(4)}(x - y).$$

Logo, introduzindo a unidade acima na expressão (3.32), obtemos:

$$Z = \mathcal{N}' \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \int Dg \det M_C \delta [(1 + a^2 \square) \partial^k A_k] \det M_L \delta [\Omega [A^g]] \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right], \quad (3.35)$$

com $M_C(x, y) = -(1 + a^2 \nabla^2) \nabla^2 \delta^{(3)}(x - y)$. Agora, fazendo uma transformação de gauge: $g \rightarrow g' = g^{-1}$, e devido ao fato de as medidas DA e Dg , bem como o funcional $\exp [i \int d^4x \mathcal{L}]$, serem invariantes sob tal transformação, segue:

$$\begin{aligned} &= \mathcal{N}' \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \left[\int Dg' \det M_C \delta [(1 + a^2 \square) \partial^k A_k^{g'}] \right] \det M_L \delta [\Omega [A]] \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right], \\ &= \mathcal{N}' \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det |(1 + a^2 \square) \square| \delta [(1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu - f] \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]. \end{aligned}$$

A menos de um fator numérico na constante de normalização, podemos integrar a expressão acima no funcional $f(x)$ com o peso $\exp \left[-i \int d^4x \frac{1}{2\xi} [f(x)]^2 \right]$. Dessa forma, finalmente, obtemos a desejada expressão covariante para a amplitude de transição vácuo-vácuo:

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{N} \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det ||(1 + a^2 \square) \square|| \exp \left(i \int d^4x \left[\bar{\psi} \left(i\hat{\partial} - m + e\hat{A} \right) \psi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi} \left((1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu \right)^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Note que, no limite $\xi \rightarrow 0$ o termo de *gauge-fixing* tende a uma função- δ . Nessa escolha de gauge covariante, temos que o determinante de Faddeev-Popov-DeWitt não contém variáveis de campo, i.e., o determinante pode ser reescrito como $-\partial_\mu \bar{c} (1 + a^2 \square) \partial^\mu c$. Assim, vemos claramente que não há interação com o campo do fóton, de forma que essa contribuição pode ser absorvida na constante de normalização.

Embora os campos fantasmas não estejam em interação com os campos físicos, eles são importantes no estudo do modelo $GQED_4$ à temperatura finita [21]. Como foi mostrado em [41], via formalismo de Batalin-Fradkin-Vilkovisky [31], o número de campos fantasmas necessários para a teoria de Podolsky livre é de, apenas, um par; esse número se preserva em interação, pois o determinante permanece inalterado nessa situação; resultado que está em concordância com o que obtivemos em (3.36).

3.2 Equações de Schwinger-Dyson-Fradkin

Embora existam diversas maneiras de se extrair o conteúdo físico de modelos de sistemas quânticos, acreditamos que a mais elegante e, também, prática, seja a feita através de funções de Green por derivadas funcionais. O método de derivadas funcionais em teoria quântica de campos, que foi usado extensivamente por Schwinger e outros [34, 42, 43, 44, 32], utiliza uma quantidade conhecida por *funcional gerador*, que gera todas as funções de Green através de diferenciações funcionais. As equações obtidas através dessas diferenciações são conhecidas como as equações de Schwinger-Dyson-Fradkin (SDFE). Se estamos interessados em outras características do sistema, além dos métodos de obtenção das equações quânticas, são as SDFE que nos permitem uma melhor análise, sobretudo de informações não-perturbativas [43]. Porém, se essas equações são utilizadas apenas como uma fonte de gerar expansões formais em potências da constante de acoplamento, não há de encontrar-se nada de novo em comparação à teoria de perturbação usual. O problema de encontrar um método efetivo de resolver tais equações, que não seja baseado em teoria de perturbação está, até agora, longe de qualquer solução satisfatória [45]. Porém, existem sistemas quânticos que, em dimensões mais baixas, $(1 + 1)$ - e $(2 + 1)$ -dimensões, são exatamente solúveis e permitem extrair informações de caráter não-perturbativo [46].

Nesta seção, derivaremos tais relações para os propagadores do fóton e do elétron e, também, para a função de vértice. O primeiro passo do desenvolvimento é definir o funcional gerador da teoria:

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \int D\mu(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) \exp[i\mathcal{S}_{eff}], \quad (3.37)$$

com a ação efetiva dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff} = \int d^4x & \left[\bar{\psi} \left(i\hat{\partial} - m + e\hat{A} \right) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\xi} \left((1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu \right)^2 + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + A^\mu J_\mu \right], \end{aligned}$$

em que $\bar{\eta}$, η e J_μ são as fontes (ferramenta matemática auxiliar) para os campos fermiônico ψ , anti-fermiônico $\bar{\psi}$ e de gauge A_μ , respectivamente. Enfatizamos aqui, que as componentes dos campos ($\bar{\psi}$, ψ) (e de suas fontes (η , $\bar{\eta}$)), são elementos da álgebra de Grassmann e que o campo A_μ bem como sua fonte J_μ , são *c-numbers*. Pretendemos, sempre que possível, discutir o significado das expressões da $GQED_4$, para assim elucidar os pontos de equivalência ou inequivalência com os resultados conhecidos da QED_4 .

3.2.1 A equação de Schwinger-Dyson-Fradkin para o Propagador do Fóton

Derivaremos e discutiremos agora, as propriedades da expressão completa do propagador do campo do fóton, em interação com elétrons. Primeiro, para obtermos a correspondente $SDFE$ para o fóton, precisamos resolver a seguinte equação funcional:

$$0 = \left[\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta A_\mu(x)} \Big|_{\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, -\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta J_\mu}} + J^\mu(x) \right] \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J_\mu], \quad (3.38)$$

sendo que \mathcal{S} e \mathcal{S}_{eff} diferem apenas pelos termos de fonte e os limites tomados após o cálculo da derivada serão compreendidos logo abaixo [†]. Então, após o cálculo do primeiro termo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu(x)} &= \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \left(e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi A_\alpha - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi}((1+a^2\Box)\partial_\mu A^\mu)^2 \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \left(e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi A_\alpha + \frac{1}{2}A_\alpha(z) \left[\eta^{\alpha\beta}\Box - \partial^\alpha\partial^\beta + a^2\Box \left[\eta^{\alpha\beta}\Box - \partial^\alpha\partial^\beta \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\xi}(1+a^2\Box)^2\partial^\alpha\partial^\beta \right] A_\beta(z) \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \left(e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi A_\alpha + \frac{1}{2}A_\alpha(z) \left[\Box\eta^{\alpha\beta} - \left[1 - \frac{1}{\xi}(1+a^2\Box) \right] \partial^\alpha\partial^\beta \right] (1+a^2\Box) A_\beta(z) \right), \\ \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta A_\mu(x)} &= e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) + \left[(1+a^2\Box)\Box T^{\mu\beta} + \frac{1}{\xi}(1+a^2\Box)^2\Box L^{\mu\beta} \right] A_\beta(x). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Em que usamos o seguinte conjunto de projetores:

$$T^{\alpha\beta} + L^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}, \quad L^{\alpha\beta} = \frac{\partial^\alpha\partial^\beta}{\Box}. \quad (3.40)$$

Assim, encontramos, para a Eq.(3.38), a seguinte expressão:

$$0 = \left[\left[T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi}(1+a^2\Box)L^{\mu\nu} \right] (1+a^2\Box)\Box \frac{\delta}{i\delta J^\nu(x)} - e \frac{\delta}{i\delta\eta(x)} \gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x)} \right] \mathcal{Z} + J^\mu(x) \mathcal{Z}. \quad (3.41)$$

Lembrando que, a solução da equação (3.41), também está sujeita à condições de contorno do tipo Eq.(2.41). Agora, introduzimos o funcional W , i.e., o funcional gerador das funções de Green conexas $W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu]$, que é definido através da relação: $W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = -i \ln \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J_\mu]$.

[†]Esse limite faz menção a transformação de Fourier funcional, como em (2.2.1).

Portanto, podemos reescrever a equação (3.41), como:

$$-J^\mu(x) = \left[T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} (1 + a^2 \square) L^{\mu\nu} \right] (1 + a^2 \square) \square \frac{\delta W}{\delta J^\nu(x)} - e \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} \gamma^\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}_A(x)} + ie \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \left(\gamma^\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} \right)_A. \quad (3.42)$$

A equação acima pode ser interpretada como se representasse a forma compacta da equação do campo de Podolsky não-perturbativa, sujeita a uma fonte externa J_μ . Por fim, introduzimos o funcional gerador das funções de Green irredutíveis de uma partícula (1PI) $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$ através da seguinte transformação de Legendre:

$$\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int d^4x (\langle \bar{\psi} \rangle \eta + \bar{\eta} \langle \psi \rangle + \langle A^\mu \rangle J_\mu). \quad (3.43)$$

Seguem, das definições acima expressões dos campos $(\bar{\psi}, \psi, A_\mu)$ em termos das fontes $(\eta, \bar{\eta}, J_\mu)$ e vice-versa, sendo escritas como:

$$\langle A_\mu \rangle = \frac{\delta W}{\delta J^\mu}, \quad \langle \psi \rangle = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}}, \quad \langle \bar{\psi} \rangle = -\frac{\delta W}{\delta \eta}, \quad (3.44)$$

$$J_\mu = -\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu}, \quad \eta = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}}, \quad \bar{\eta} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi}. \quad (3.45)$$

Portanto, através das identidades acima e na situação em que as fontes fermiônicas são nulas, é possível escrevermos a equação (3.42) em termos do funcional Γ :

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = \left[T^{\mu\beta} + \frac{1}{\xi} (1 + a^2 \square) L^{\mu\beta} \right] (1 + a^2 \square) \square \langle A_\beta(x) \rangle + ie \frac{\delta}{\delta \eta_A(x)} \left(\gamma^\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} \right)_A. \quad (3.46)$$

Conseqüentemente, ao identificarmos o funcional:

$$\mathcal{S}(x, y; A) \equiv i \left. \frac{\delta^2 W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu]}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=0}, \quad (3.47)$$

como o propagador completo do elétron sujeito a um campo externo A_μ , que satisfaz a seguinte identidade funcional:

$$i \int d^4z \mathcal{S}_{BC}(x, z; A) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_C(y) \delta \bar{\psi}_D(z)} = \delta_{BD} \delta^{(4)}(x - y), \quad (3.48)$$

é possível, enfim, expressarmos a Eq.(3.46) como:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = \left[T^{\mu\beta} + \frac{1}{\xi} (1 + a^2 \square) L^{\mu\beta} \right] (1 + a^2 \square) \square \langle A_\beta(x) \rangle + e \text{Tr}(\gamma^\mu \mathcal{S}(x, x; A)). \quad (3.49)$$

Agora, diferenciando a equação (3.49), com respeito ao campo $A_\nu(y)$ (no cálculo da derivada $\frac{\delta \langle A_\mu(x) \rangle}{\delta A_\nu(y)}$, usamos a identidade (3.53)), e indo à situação em que $J_\mu(x) = 0$, segue o seguinte resultado:

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\nu(y) \delta A_\mu(x)} = \left[T^{\mu\beta} + \frac{1}{\xi} (1 + a^2 \square) L^{\mu\beta} \right] \square (1 + a^2 \square) \delta^{(4)}(x - y) + e \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \mathcal{S}(x, x; A) \right). \quad (3.50)$$

O último termo do lado direito da Eq.(3.50) pode ser calculado imediatamente, ao utilizarmos a identidade funcional Eq.(3.48). Assim, escrevemos:

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \mathcal{S}(x, x; A) = -i \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1}.$$

Ainda, com o auxílio da identidade:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = -f^{-1}(x) \frac{df(x)}{dx} f^{-1}(x),$$

encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} &= - \int d^4 u d^4 w \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x) \delta \bar{\psi}(u)} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(w)} \\ &\quad \times \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(w) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1}, \\ \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} &= e \int d^4 u d^4 w \mathcal{S}(u, x) \Gamma^\nu(w, u; y) \mathcal{S}(x, w). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Em que levamos em conta a definição (3.47) e introduzimos uma nova quantidade, a função de vértice $1PI$ da interação elétron-fóton:

$$e\Gamma_\mu(x, y; z) \equiv \left. \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A^\mu(z) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right|_{A=\psi=\bar{\psi}=0}. \quad (3.52)$$

Similar à equação (3.48), a segunda derivada de $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$, com respeito ao campo $A_\mu(x)$, gera o funcional $1PI$: $\Gamma_{\mu\nu}$ (a inversa do propagador fóton $\mathcal{D}_{\mu\nu}$), sendo que ela satisfaz a seguinte identidade funcional:

$$\int d^4 z \mathcal{D}^{\sigma\nu}(x, z) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\rho(y) \delta A^\nu(z)} = i\eta^{\sigma\rho} \delta^{(4)}(x - y); \quad (3.53)$$

com a seguinte definição:

$$\mathcal{D}_{\mu\rho}(x, s) \equiv -i \frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s) \delta J^\mu(x)}. \quad (3.54)$$

Portanto, substituindo o resultado Eq.(3.51), em (3.50), e em decorrência da discussão acima, segue a $SDFE$ para a função $1PI$ completa do fóton:

$$\Gamma_{\mu\nu}(x - y) = \Pi_{\mu\nu}(x, y) + \left[T_{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} (1 + a^2 \square) L_{\mu\nu} \right] (1 + a^2 \square) \square \delta^{(4)}(x - y). \quad (3.55)$$

A quantidade $\Pi_{\mu\nu}$ é conhecida como a função de auto-energia do fóton e a definimos por:

$$\Pi_{\mu\nu}(x, y) = -e^2 \int d^4 u d^4 w Tr \left[\mathcal{S}(u, x; A) \gamma_\mu \mathcal{S}(x, w; A) \Gamma_\nu(w, u; x) \right]. \quad (3.56)$$

O fator (-1) provém, de maneira usual, do loop fermiônico. O tensor $\Pi_{\mu\nu}$ descreve a interação de um fóton com o campo do elétron-pósitron e, essa interação, consiste na criação e aniquilação

de pares virtuais. Ainda, podemos reescrever a equação (3.56) na representação dos momentos, da seguinte forma:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{Tr} \left[\mathcal{S}(p; A) \gamma_\mu \mathcal{S}(p-k; A) \Gamma_\nu(p, k; p-k) \right]. \quad (3.57)$$

A partir da expressão (3.55), podemos calcular o propagador do campo do fóton de modo perturbativo, ordem a ordem, na constante de acoplamento e . O cálculo explícito, análise e discussão, na ordem mais baixa de correção radiativa das funções de Green, serão apresentadas na seção 4.1. Através da identidade (3.53) no espaço dos momentos: $\Gamma_{\mu\sigma}(k) \mathcal{D}^{\sigma\nu}(k) = i\eta_\mu^\nu$, é possível encontrarmos a seguinte expressão para o propagador completo do fóton:

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 [\Pi(k) + (1 - a^2 k^2)]} + \frac{\xi}{k^2 (1 - a^2 k^2)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (3.58)$$

Em que a quantidade Π é chamada de escalar de polarização. Ela é introduzida devido a invariância de Lorentz de $\Pi_{\mu\nu}$ e pela identidade, Eq.(3.96); possui a seguinte estrutura:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) \equiv (-\eta_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu) \Pi(k). \quad (3.59)$$

É necessário enfatizar que a expressão (3.58) mostra, explicitamente, que a função $\Pi(k)$ é relacionada apenas com o pólo do setor transversal do propagador do fóton; logo, este é o único setor que recebe contribuições das correções radiativas. A representação diagramática da *SDFE* do propagador completo do fóton, Eq.(3.58), é apresentado na Fig.3.1.

Ainda mais, o propagador do fóton, na ordem mais baixa em teoria de perturbação (tomando $\Pi(k) = 0$ na equação (3.58)), pode ser escrito, convenientemente, como:

$$iD_{\mu\nu}(k) = \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2} - \left[\eta_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \frac{1}{a^2}} \right] \frac{1}{k^2 - \frac{1}{a^2}} + (1 - 2\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (k^2 - \frac{1}{a^2})} + \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \frac{1}{a^2})^2}. \quad (3.60)$$

Como pode ser visto claramente através da equação (3.60), o nosso interesse em separarmos os pólos não-massivo e massivo (no máximo possível, pois o terceiro termo mostra a mistura entre os pólos) está na possibilidade de escrevermos a expressão de tal forma que obtenhamos o segundo termo no lado direito – que é um dos pontos mais interessantes e belos da teoria (oriundo, exclusivamente, do termo de Podolsky e da condição de Lorenz generalizada). Note ainda que esse termo possui pólo massivo $m_P^2 = a^{-2}$, que pode levar à conclusão, ingênua, de que as divergências infravermelha, presentes no termo de Maxwell, são, de fato, canceladas. Contudo, como mostraremos na seção 5.1, isso não acontece. Além disso, a separação dos modos não-massivo (*QED*₄ usual) e massivo, na expressão do propagador livre (3.60) no gauge geral ξ , ocorre devido a linearidade dos campos de gauge nos termos da Lagrangiana (3.1). Ainda, segue que, em decorrência da relação entre o parâmetro de Podolsky no pólo do propagador, é possível que imponhamos um valor limite para o parâmetro livre a , através de experimentos [18, 15]. Voltaremos a essa última discussão na seção 5.3.

Figura 3.1: Representação diagramática da SDFE 1PI para o propagador do fóton.

3.2.2 A equação de Schwinger-Dyson-Fradkin para o Propagador do Elétron

Dando sequência ao desenvolvimento formal da teoria no que se segue nesta subsecção, apresentaremos a derivação de uma expressão integral para o propagador completo do elétron \mathcal{S} . Durante o processo, também introduziremos o operador de massa \mathcal{M} , que é a quantidade que contém todas as correções radiativas ao movimento do elétron (no mesmo sentido que o operador de polarização Π para os fótons). A derivação da SDFE para \mathcal{S} segue da mesma forma àquela apresentada na última subsecção para o propagador do fóton. Assim, partimos da seguinte equação funcional:

$$0 = \left[\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \bar{\psi}_A(x)} \Big|_{\frac{\delta}{\delta i\eta}, -\frac{\delta}{\delta i\bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta iJ_\mu}} - \eta_A(x) \right] \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J_\mu],$$

para encontrarmos a equação para o propagador do elétron. Logo, podemos calcular o primeiro termo através da definição de derivada de variáveis de grassmann Eq.(2.4):

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}_B(x)} &= \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_B(x)} (i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu), \\ &= -\delta^{(4)}(x-z) (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi + e\gamma^\mu \psi A_\mu)_B. \end{aligned}$$

E, desse resultado, segue a seguinte expressão:

$$0 = \eta_B(x) \mathcal{Z} + i \left(i\hat{\partial} - m - ie\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right)_{BC} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}_C(x)}. \quad (3.61)$$

A equação acima é equivalente à equação de Dirac na presença de fontes externas. E, também, definirá a relação entre as quantidades \mathcal{S} e \mathcal{M} . Agora, escrevendo a equação acima em termos de W , ao invés de \mathcal{Z} , e, em seguida, diferenciando a equação (3.61), com respeito à $\eta(y)$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = \delta^{(4)}(x-y) + i\eta(x) \frac{\delta W}{\delta \eta(y)} + i \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + ie\gamma^\mu \langle A_\mu(x) \rangle - ie\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \\ \times \left[i \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} - \frac{\delta W}{\delta \eta(y)} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} \right]. \quad (3.62) \end{aligned}$$

Lembramos, novamente, que a solução da equação (3.62) está sujeita às condições de contorno do tipo Eq.(2.41). Logo, usando as identidades (3.45) e tomando o limite das fontes fermiônicas indo a zero, obtemos:

$$i\delta^{(4)}(x-y) = \left(i\hat{\partial} - m + ie\gamma^\mu \langle A_\mu(x) \rangle - ie\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \mathcal{S}(x, y; A). \quad (3.63)$$

Em que a quantidade \mathcal{S} é definida em (3.47). A equação (3.63) define a função de Green fermiônica de 2-pontos não-perturbativa na presença de um campo externo.

Contudo, ainda falta calcularmos o último termo de (3.63), que pode ser expresso como:

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \mathcal{S}(x, y; A) = -i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1},$$

o que nos permite escrever, então, através da regra da cadeia da derivada funcional, a seguinte expressão:

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} = \int d^4 u \frac{\delta A^\alpha(u)}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta A^\alpha(u)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1}.$$

Logo, segue, da definição Eq.(3.45) a relação:

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \mathcal{S}(x, y; A) = -i \int d^4 u \frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x) \delta J_\alpha(u)} \frac{\delta}{\delta A^\alpha(u)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1}.$$

Por fim, no limite da fonte J_μ indo a zero, podemos usar a definição Eq.(3.54) para o propagador $\mathcal{D}_{\mu\alpha}$ e, também, o resultado Eq.(3.51), encontrando, assim, o seguinte resultado:

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \mathcal{S}(x, y; A) = e \int d^4 u d^4 z d^4 w \mathcal{D}_{\mu\alpha}(x-u) \mathcal{S}(x, w; A) \Gamma^\alpha(w, z; u) \mathcal{S}(z, y; A). \quad (3.64)$$

É importante frizarmos aqui que o potencial eletromagnético $\langle A \rangle$, presente na Eq.(3.63), anula-se na ausência de fontes externas, i.e., $\langle A_\mu(x; J_\mu = 0) \rangle = 0$. Porém, isso não é verdade na situação de $T \neq 0$ [19]. Ao utilizarmos o resultado Eq.(3.64) e o fato de $\langle A_\mu(x; J_\mu = 0) \rangle = 0$, segue da equação (3.63), a seguinte expressão:

$$i\delta^{(4)}(x-y) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \mathcal{S}(x, y; A) - \int d^4 z \Sigma(x, z) \mathcal{S}(z, y; A). \quad (3.65)$$

Em que definimos o operador de auto-energia do elétron Σ através da seguinte relação:

$$\Sigma(x-y) = -e^2 \gamma^\mu \int d^4 u d^4 w \mathcal{S}(x, w; A) \mathcal{D}_{\mu\alpha}(u-x) \Gamma^\alpha(w, y; u). \quad (3.66)$$

Cuja expressão na representação dos momentos possui a forma:

$$\Sigma(p) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \int d^4 k \mathcal{S}(p-k; A) \mathcal{D}_{\mu\alpha}(k) \Gamma^\alpha(p, k; p-k). \quad (3.67)$$

Ainda, é possível reescrever a expressão (3.65) ao denotamos convenientemente a quantidade: $\Sigma \mathcal{S}(x, y; A) = \int d^4 z \Sigma(x, z) \mathcal{S}(z, y; A)$, da seguinte forma:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \Sigma) \mathcal{S}(x, y; A) = i\delta^{(4)}(x-y). \quad (3.68)$$

Além disso, ao introduzirmos em (3.68), o operador de massa \mathcal{M} , através de:

$$\mathcal{M}(x, y) = m\delta(x-y) + \Sigma(x, y), \quad (3.69)$$



Figura 3.2: Representação diagramática da SDFE 1PI para o propagador do elétron.

a expressão do propagador completo do elétron, na representação dos momentos, assume a forma:

$$\mathcal{S}(p; A) = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{M}(p)} = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m - \Sigma(p)}. \quad (3.70)$$

A expressão (3.70) para o propagador mostra, explicitamente, a relação entre o propagador do elétron e o operador de massa (as correções radiativas). A SDFE correspondente ao propagador do elétron é apresentada diagramaticamente na Fig.3.2.2. As equações (3.68) e (3.70) mostram que o propagador completo do elétron é a função de Green para uma equação similar a uma equação de Dirac $(\hat{p} - m - \Sigma)\psi = 0$, mas, diferindo da última, pela adição à massa *nua* m^\ddagger , a quantidade Σ . Logo, por essa razão, denotamos a quantidade \mathcal{M} como *operador de massa*.

De maneira similar à descrição do operador Π , também podemos dizer que o operador Σ descreve a interação do elétron com o seu próprio campo eletromagnético. Essa interação consiste na emissão e absorção de fótons virtuais.

3.2.3 A equação de Schwinger-Dyson-Fradkin para a Função de Vértice

Sabemos que, para a QED_4 , é impossível construir uma equação integral fechada, que expresse a função de vértice Γ_μ , em termos apenas das quantidades \mathcal{S} e \mathcal{D} e que, junto com o conjunto de equações (3.58) e (3.70), é fornecido um sistema completo de equações, determinando, assim, todas as funções de Green da teoria [47, 24, 48]. Apesar disso, é possível encontrar uma relação fechada que relacione a função de vértice Γ_μ com \mathcal{S} , \mathcal{D} e com ela mesma e, ainda, uma quantidade não determinada *a priori*, o vértice de 4-pontos $\Phi^{\sigma\rho}$ Eq.(3.84) [44]. A expressão (3.63):

$$i\delta^{(4)}(x-y) = i\eta(x) \frac{\delta W}{\delta\eta(y)} + i \left(i\hat{\partial} - m + ie \langle A_\mu(x) \rangle \gamma^\mu - ie\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y) \delta\bar{\eta}(x)}, \quad (3.71)$$

é o ponto de partida para determinarmos a equação funcional para a função de vértice Γ_μ . É necessário ressaltar aqui que, nesse ponto, ainda não tomamos o limite de fontes nulas. Assim,

[‡] m é a massa presente na Lagrangiana original (3.1).

segue, ao tomarmos a derivada funcional da equação acima em relação ao campo $A_\sigma(z)$, que [§]:

$$0 = \left(i\hat{\partial} - m + e \langle A_\mu(x) \rangle \gamma^\mu \right) \left[\frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right] + ie\gamma^\sigma \delta^{(4)}(x-z) \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} - ie\gamma^\mu \left[\frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left[\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right] \right]. \quad (3.72)$$

Em que fizemos uso da identidade (3.53). Em decorrência da identidade (3.48), podemos escrever:

$$ie\gamma^\sigma \delta^{(4)}(x-z) \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} = \left(i\hat{\partial} - m + e \langle A_\mu(x) \rangle \gamma^\mu \right) \left[\frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} \right] - ie\gamma^\mu \left[\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} \right] \right], \quad (3.73)$$

E, assim, calculamos tais termos de derivada através da identidade (3.51). Logo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1} &= - \int d^4 u d^4 w \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(u)} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(w)} \\ &\quad \times \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(w) \delta \bar{\psi}(x)} \right)^{-1}, \\ &= - \int d^4 u d^4 w \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(w)} \\ &\quad \times \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(x)} \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Dessa forma, encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} &\int d^4 u d^4 w \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(w)} \\ &\quad \times \left(i\hat{\partial} - m + e \langle A_\mu(x) \rangle \gamma^\mu \right)_x \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \\ &\quad - ie\gamma^\mu \int d^4 u d^4 w \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(w)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right] \\ &\quad + ie\gamma^\sigma \delta^{(4)}(x-z) \frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ao tomarmos o limite das fontes fermiônicas nulas, podemos escrever a quantidade entre colchetes no primeiro termo como:

$$\left(i\hat{\partial} - m + e \langle A_\mu(x) \rangle \gamma^\mu \right) \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(x)} \right) = -i \left(i\hat{\partial} - m + e \langle A_\mu(x) \rangle \gamma^\mu \right) \mathcal{S}(x, w; A),$$

e, através da definição Eq.(3.68), obtemos:

$$\left(i\hat{\partial} - m + e \langle A_\mu(x) \rangle \gamma^\mu \right) \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(x)} \right) = (-i)(i) \delta^{(4)}(x-w) = \delta^{(4)}(x-w). \quad (3.76)$$

[§]Contudo, como o termo proporcional à fonte η se anulará ao final dos cálculos, i.e., quando tomarmos as fontes indo a zero, já o descartaremos nesta expressão.

Conseqüentemente, após as discussões e resultados acima, encontramos, para a Eq.(3.75), a seguinte expressão funcional:

$$0 = \int d^4u \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(x)} + ie\gamma^\sigma \delta^{(4)}(x-z) \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} - ie\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\int d^4u d^4w \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(w)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(x)} \right) \right].$$

Porém, ainda segue que, a multiplicando pela esquerda, pela quantidade $\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)}$ e integrando-a em d^4y , podemos reescrevê-la, de uma forma mais interessante:

$$0 = \int d^4u \left[\int d^4y \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \right] \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(x)} + ie\gamma^\sigma \delta^{(4)}(x-z) \left[\int d^4y \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} \right] - ie\gamma^\mu \int d^4y \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi(w)\delta\bar{\psi}(y)} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\int d^4u d^4t \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \times \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)} \right) \right].$$

Agora, utilizando a identidade (3.48) nos dois primeiros termos, e efetuando a mudança de variáveis $w \leftrightarrow y$ em toda a expressão toda, logo encontramos:

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)} = -ie\gamma^\sigma \delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-x) - ie\gamma^\mu \int d^4w \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(w)} \left[\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} I_\mu^\sigma \right]. \quad (3.77)$$

Em que a forma funcional explícita da quantidade I_μ^σ é:

$$\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} I_\mu^\sigma = \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \left[\int d^4u d^4t \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)} \right) \right].$$

Definimos a quantidade I_μ^σ apenas por questão de notação dos cálculos que seguem, através da regra da cadeia:

$$= \int d^4s \frac{\delta A_\rho(s)}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta A_\rho(s)} \left[\int d^4u d^4t \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)} \right) \right],$$

bem como das identidades (3.44):

$$= \int d^4u d^4t d^4s \frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s)\delta J^\mu(x)\delta A_\rho(s)} \left[\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)} \right) \right].$$

Agora, explicitando como a derivada atua em cada um dos termos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} I_\mu^\sigma &= \int d^4u d^4t d^4s \frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s)\delta J^\mu(x)} \\ &\times \left[\frac{\delta}{\delta A_\rho(s)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \cdot \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)} \right) \right. \\ &+ \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \left(\frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_\rho(s)\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \right) \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)} \right) \\ &\left. + \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(w)\delta\bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z)\delta\psi(u)\delta\bar{\psi}(t)} \frac{\delta}{\delta A_\rho(s)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(t)\delta\bar{\eta}(x)} \right) \right]. \quad (3.78) \end{aligned}$$

Enfim, através dos resultados anteriores (3.48) e (3.51), é direto calcular as quantidades que aparecem no primeiro e terceiro termos:

$$\frac{\delta}{\delta A_\rho(s)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(u)} \right) = - \int d^4 v d^4 r \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(v)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta \psi(v) \delta \bar{\psi}(r)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(r) \delta \bar{\eta}(u)} \right), \quad (3.79)$$

e

$$\frac{\delta}{\delta A_\rho(s)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(x)} \right) = - \int d^4 v d^4 r \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(v)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta \psi(v) \delta \bar{\psi}(r)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(r) \delta \bar{\eta}(x)} \right). \quad (3.80)$$

Portanto, ao substituírmos os resultados das Eqs.(3.79) e (3.80) na expressão (3.78), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} I_\mu^\sigma &= \int d^4 u d^4 t d^4 s \frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s) \delta J^\mu(x)} \\ &\times \left[\left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right. \\ &- \int d^4 v d^4 r \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(v)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta \psi(v) \delta \bar{\psi}(r)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(r) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \\ &\times \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \\ &- \int d^4 v d^4 r \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(w) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(v)} \right) \\ &\left. \times \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta \psi(v) \delta \bar{\psi}(r)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(r) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right]. \quad (3.81) \end{aligned}$$

Apesar de já termos encontrado a expressão para a quantidade $\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} I_\mu^\sigma$, ainda temos que calcular:

$$\int d^4 w \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(w)} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} I_\mu^\sigma.$$

Novamente, com o auxílio da identidade (3.48), temos:

$$\begin{aligned} &\int d^4 w \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(w)} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} I_\mu^\sigma = \\ &= \int d^4 s d^4 t \frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s) \delta J^\mu(x)} \left[- \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta A_\sigma(z) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right. \\ &+ \int d^4 u d^4 r \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(r)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(r) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \\ &\left. + \int d^4 v d^4 r \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(v)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta \psi(v) \delta \bar{\psi}(r)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(r) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \right]. \quad (3.82) \end{aligned}$$

Contudo, devido ao fato de estarmos calculando uma equação funcional $1PI$ para a função de vértice, Eq.(3.77), o último termo não contribui por não pertencer a classe $1PI$. Enfim, segue o resultado:

$$\begin{aligned} \int d^4 w \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(w)} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} I_\mu^\sigma &= - \int d^4 s d^4 t \frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s) \delta J^\mu(x)} \left[\frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta A_\sigma(z) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(t)} \right. \\ &\left. - \int d^4 u d^4 r \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(r)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(r) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(t)} \right] \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(x)} \right). \quad (3.83) \end{aligned}$$

Em decorrência dos resultados acima, obtemos, para a equação (3.77), a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} &= -ie\gamma^\sigma \delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-x) \\ &+ ie\gamma^\mu \int d^4 s d^4 t \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s) \delta J^\mu(x)} \right) \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta A_\sigma(z) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(x)} \right) \\ &- ie\gamma^\mu \int d^4 u d^4 r d^4 s d^4 t \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^\rho(s) \delta J^\mu(x)} \right) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(r)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(r) \delta \bar{\eta}(u)} \right) \\ &\times \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\sigma(z) \delta \psi(u) \delta \bar{\psi}(t)} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(t) \delta \bar{\eta}(x)} \right). \end{aligned}$$

Agora, com as definições de $\mathcal{S}(x, t; A)$, $\Gamma^\sigma(x, y; z)$, $\mathcal{D}_{\mu\rho}(x, s)$, Eqs.(3.47), (3.52), (3.54), respectivamente, e do vértice de 4-pontos $\mathbb{1}$:

$$e^2 \Phi^{\sigma\rho}(t, y; z; s) \equiv \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_\rho(s) \delta A_\sigma(z) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(t)}, \quad (3.84)$$

encontramos, finalmente, a expressão 1PI para a função de vértice:

$$\begin{aligned} i\Gamma^\sigma(x, y; z) &= \gamma^\sigma \delta^{(4)}(x-z) \delta^{(4)}(y-x) - e^2 \gamma^\mu \int d^4 s d^4 t \mathcal{D}_{\mu\rho}(x, s) \Phi^{\sigma\rho}(t, y; z; s) \mathcal{S}(x, t; A) \\ &- ie^2 \gamma^\mu \int d^4 u d^4 r d^4 s d^4 t \mathcal{D}_{\mu\rho}(x, s) \Gamma^\rho(r, y; s) \mathcal{S}(u, r; A) \Gamma^\sigma(t, u; z) \mathcal{S}(x, t; A). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Expressão essa, que no espaço dos momentos ainda pode ser escrita na seguinte forma:

$$i\Gamma^\sigma(k, p; q) = \gamma^\sigma \delta^{(4)}(k-p-q) - i\Lambda^\sigma(k, p; q). \quad (3.86)$$

Em que denotamos a quantidade Λ como a parte do vértice e a definimos através de:

$$\begin{aligned} i\Lambda^\sigma(k, p; q) &= \gamma^\mu \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p_1 \mathcal{D}_{\mu\rho}(p_1) \Phi^{\sigma\rho}(k-p_1, p; q; p_1) \mathcal{S}(k-p_1; A) \\ &+ \gamma^\mu \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p_1 d^4 p_2 \mathcal{D}_{\mu\rho}(p_1) \Gamma^\rho(p_2, p; p_1) \mathcal{S}(-p_2; A) \Gamma^\sigma(k-p_1, p_2; q) \mathcal{S}(k-p_1; A). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Note que, as expressões para a função de vértice nas Eqs.(3.85) e (3.86), além de conterem o próprio vértice, também contém o vértice de 4-pontos $\Phi^{\sigma\rho}$. Isso significa que as três equações de Schwinger-Dyson-Fradkin não formam um sistema fechado de equações acopladas. Apesar de a função de vértice de 4-pontos $\Phi^{\sigma\rho}$ satisfazer a sua própria equação funcional, ela envolve ainda mais vértices não presentes nas equações anteriores. Dessa forma, a solução completa da teoria só pode ser determinada ao resolvermos um conjunto infinito de equações acopladas. Todavia, na teoria de perturbação, a situação é menos complexa, pelo fato de existirem apenas três funções de Green fundamentais: os propagadores livres do elétron, do fóton e o vértice livre. Todos os vértices superiores podem ser definidos em termos dessas funções via diagramas de Feynman [47]. A Fig.3.2.3 representa diagramaticamente a função de vértice de 3-pontos.

[¶]Lembrando que nesse momento tomamos as fontes e campos (1PI) indo à zero.

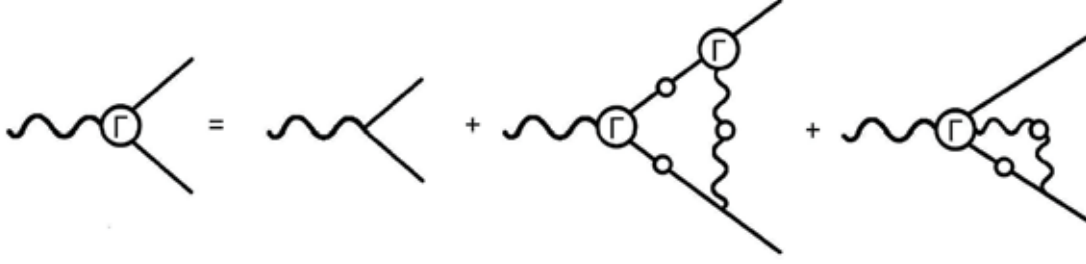


Figura 3.3: Representação diagramática da SDFE para a função de vértice.

3.3 Identidades de Ward-Fradkin-Takahashi

Todas as quantidades físicas, em particular os elementos da matriz-S, são independentes da escolha da condição de gauge. Esse fato, que é determinante para a consistência de uma teoria, deve ser verificado em cada caso. As funções de Green não são, todavia, objetos físicos e são dependentes da condição de gauge. Entretanto, como é bem conhecido, a existência de simetria de gauge em uma teoria gera certos vínculos nas funções de Green: existem relações entre elas conhecidas como as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi (WFT). Em termos das funções de Green, são, essas identidades, as condições que protegem a equivalência entre diferentes escolhas de condições de gauge.

O propósito desta seção é derivar tais identidades de gauge para a $GQED_4$. Primeiro, mostraremos que a identidade de WFT, satisfeita pela função de gauge $1PI$, explicita a transversalidade do operador $\Pi_{\mu\nu}$; em seguida, derivaremos a relação entre a função de vértice e a inversa do propagador completo fermiônico. Por último, reproduziremos a identidade de WFT no limite $k \rightarrow 0$ (momento transferido nulo). A derivação destas identidades é formalmente dada ao realizarmos as seguintes transformações infinitesimais:

$$\psi'(x) = \psi(x) + i\lambda(x)\psi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\lambda(x), \quad (3.88)$$

no funcional gerador Eq.(3.37). A medida de integração do funcional gerador é invariante sob essas transformações e, ainda, temos que essa mudança de variáveis não pode mudar o valor da integral da Eq.(3.37). Logo, concluímos que:

$$\left. \frac{\delta\mathcal{Z}}{\delta\lambda(z)} \right|_{\lambda \rightarrow 0} = 0. \quad (3.89)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J_\mu, \lambda] &= i \int d^4x \int D\mu(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) \exp[i\mathcal{S}_{eff}] \\ &\times \left[-\frac{1}{e\xi} (1 + a^2\Box)^2 \partial_\mu A^\mu \Box \lambda + i\lambda \bar{\eta}\psi - i\bar{\psi}\eta\lambda + \frac{1}{e} J^\mu \partial_\mu \lambda \right]. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Conseqüentemente, encontramos que o funcional gerador $\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J^\mu]$ satisfaz a seguinte equação funcional:

$$\left[i \frac{\Box}{e\xi} (1 + a^2\Box)^2 \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} + \eta \frac{\delta}{\delta \eta(x)} - \frac{1}{e} \partial_\mu J^\mu \right] \mathcal{Z} = 0. \quad (3.91)$$

Ainda podemos expressar a Eq.(3.91) em termos do funcional gerador das funções de Green conexas $W[\eta, \bar{\eta}, J^\mu]$ como:

$$-\frac{\square}{e\xi} (1 + a^2\square)^2 \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} - i\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} + i\eta \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} - \frac{1}{e} \partial_\mu J^\mu = 0; \quad (3.92)$$

para assim, finalmente, obtermos a principal equação de movimento quântica da teoria ao escrevermos a Eq.(3.92) em termos do funcional gerador das funções de Green $1PI \Gamma(\bar{\psi}, \psi, A_\mu)$, através das identidades (3.43). Dessa forma, obtemos a identidade desejada:

$$-\frac{\square}{e\xi} (1 + a^2\square)^2 \partial_\mu A^\mu(x) - i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} \psi(x) + i \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{\psi}(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = 0. \quad (3.93)$$

A partir da equação funcional (3.93), é possível derivarmos todas as identidades de WFT. Obtemos a primeira identidade ao atuarmos com a derivada funcional de $A_\nu(y)$, na equação (3.93), a $A_\mu = \psi = \bar{\psi} = 0$:

$$\partial_\mu \Gamma^{\mu\nu}(x, y) - \frac{\square}{\xi} (1 + a^2\square)^2 \partial^\nu \delta(x - y) = 0, \quad (3.94)$$

e, escrita, no espaço dos momentos, fica:

$$k_\mu \Gamma^{\mu\nu}(k) = -\frac{k^2}{\xi} (1 - a^2 k^2)^2 k^\nu. \quad (3.95)$$

Ao combinarmos o resultado acima com a equação (3.55), segue que:

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0. \quad (3.96)$$

Logo, o operador $\Pi^{\mu\nu}$ é transversal. A identidade (3.95) nos mostra que o setor longitudinal do propagador não é alterado pelas interações, o que quer dizer que, dentre outras coisas, o programa de renormalização não exige contra-termos para o termo de *gauge-fixing* na Lagrangiana. Esse fato será importante na discussão do programa de renormalização na seção 3.4. Agora, calcularemos a outra identidade de WFT ao tomarmos as derivadas da expressão (3.93), com respeito a $\psi(y)$ e $\bar{\psi}(z)$, obtendo assim:

$$-i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x) \delta \bar{\psi}(z)} \delta(x - y) + i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \delta(x - z) + \frac{1}{e} \partial_\mu \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\mu(x) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(z)} = 0,$$

e, no limite $A_\mu = \psi = \bar{\psi} = 0$, temos:

$$i \partial_\mu \Gamma^\mu(z, y; x) = \Gamma(z, x) \delta(x - y) - \Gamma(x, y) \delta(x - z),$$

com $\Gamma(z, x) = -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x) \delta \bar{\psi}(z)}$. Reescrevendo-a no espaço dos momentos, encontramos:

$$i k_\mu \Gamma^\mu(p, p'; k = p - p') = \mathcal{S}^{-1}(p - p') - \mathcal{S}^{-1}(p). \quad (3.97)$$

Com \mathcal{S}^{-1} sendo a inversa do propagador completo do elétron Eq.(3.70). Uma das consequências diretas da identidade (3.97) é que ela é fundamental para a discussão que vem a seguir, sobre o processo de renormalização.

Embora a invariância de gauge local da teoria em nível clássico tenha sido perdida na teoria quântica através do processo de *gauge-fixing* e tenha havido a adição dos termos de fonte, a identidade de WFT (3.97) assegura, de fato, a existência da simetria local. A renormalizabilidade da teoria não poderia ser garantida sem a identidade de WFT (3.97).

Ainda, temos que, no limite de momento transferido nulo, i.e., $k \rightarrow 0$, a equação (3.97) fornece a seguinte relação:

$$i\Gamma^\mu(p, p; 0) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \mathcal{S}^{-1}(p; A). \quad (3.98)$$

Nesse limite, também segue que:

$$\Lambda^\mu(p, p; 0) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p). \quad (3.99)$$

Ambas relações, Eqs.(3.98) e (3.99), possuem a mesma estrutura funcional que as da QED_4 .

3.4 Programa de Renormalização

O programa de renormalização na camada de massa é o mais utilizado nos cálculos em modelos de teoria de campos que possuem uma escala natural (um comprimento de onda de de Broglie característico) [24]. Iniciamos o processo de renormalização ao considerarmos a densidade Lagrangiana, que gera as funções de Green nuas e regularizadas, da $GQED_4$. Ainda, é importante que elas sejam regularizadas por um método que preserve a simetria de gauge da teoria.

Podemos, agora, escrever a densidade Lagrangiana nua, deixando de lado as considerações formais, em termos das quantidades renormalizadas, assumindo, assim, a sua forma mais geral consistente com a invariância de gauge (renormalização multiplicativa). Logo, a forma invariante de gauge mais geral da Lagrangiana, escrita em termos das quantidades renormalizadas, é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & Z_2 \bar{\psi}^{(r)} \left(i\hat{\partial} + \frac{Z_1}{Z_2} e \hat{A}^{(r)} \right) \psi^{(r)} - Z_0 m \bar{\psi}^{(r)} \psi^{(r)} - \frac{1}{4} Z_3 \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} F_{\mu\nu}^{(r)} F_{\sigma\rho}^{(r)} \\ & + \frac{a^2}{2} \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\rho} \partial^\mu F_{\mu\beta}^{(r)} \partial_\alpha F_{\sigma\rho}^{(r)}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

As relações entre as quantidades renormalizadas e nuas (denotadas por $_0$) são as seguintes:

$$A_0 = Z_3^{1/2} A^{(r)}, \quad \psi_0 = Z_2^{1/2} \psi^{(r)}, \quad \bar{\psi}_0 = Z_2^{1/2} \bar{\psi}^{(r)}, \quad (3.101)$$

e^{||}

$$m_0 = \frac{Z_0}{Z_2} m, \quad e_0 = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e, \quad a_0 = Z_3^{-1/2} a. \quad (3.102)$$

^{||}Ainda, poderíamos introduzir: $m_0 = Z_m m$, com $Z_m = \frac{Z_0}{Z_2}$. Sendo Z_m a verdadeira constante de renormalização da massa, quantidade independente de ξ (como é assegurado pela independência das quantidades físicas da teoria sob o parâmetro de gauge ξ).

A Lagrangiana (3.100) é invariante sob as transformações de gauge:

$$\psi^{(r)} \rightarrow e^{i\lambda(x)}\psi^{(r)}, \quad A_\mu^{(r)} \rightarrow A_\mu^{(r)} + \frac{1}{e} \frac{Z_2}{Z_1} \partial_\mu \lambda(x). \quad (3.103)$$

Aqui, o parâmetro de Podolsky a_0 não possui uma constante associada à sua renormalização; a mudança acima é apenas por questão de notação.

As quatro constantes de renormalização Z_i são fixadas através da imposição de certas condições de renormalização, que também devem ser quatro. Além das condições de renormalização determinarem as constantes de renormalização Z_i , elas também asseguram a interpretação da constante de acoplamento e , do parâmetro de massa m e dos campos renormalizados que aparecem na Lagrangiana (3.100), como a carga elétrica medida, a massa física do férmion e os campos "físicos", respectivamente, em todas as ordens da teoria de perturbação. De uma forma geral, isso pode ser alcançado ao exigir que, no limite da camada de massa, quando todos os quadri-momentos vão aos seus valores na camada de massa, em qualquer ordem da teoria de perturbação, os propagadores do elétron e fóton, bem como a função de vértice $\bar{\psi}A\psi$, tendam às suas formas livres.

Ainda, sob as transformações (3.102), também obtemos as seguintes relações entre as funções de Green renormalizadas e as iniciais:

$$\mathcal{S} = Z_2 \mathcal{S}^{(r)}, \quad \mathcal{D}_{\mu\nu} = Z_3 \mathcal{D}_{\mu\nu}^{(r)}, \quad \Gamma_\mu = Z_1^{-1} \Gamma_\mu^{(r)}. \quad (3.104)$$

Porém, antes de iniciarmos com a discussão do problema em si, voltemos por um instante para a identidade de WFT (3.97):

$$ik_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(p, p'; k = p - p') = \mathcal{S}^{-1}(p - p') - \mathcal{S}^{-1}(p). \quad (3.105)$$

De modo que a identidade continue sendo satisfeita após as transformações (3.104), i.e., que:

$$ik^\mu \tilde{\Gamma}_\mu^{(r)}(p, p'; k = p - p') = (\mathcal{S}^{(r)})^{-1}(p - p') - (\mathcal{S}^{(r)})^{-1}(p) \quad (3.106)$$

seja válida, é necessário que as constantes de renormalização Z_1 e Z_2 satisfaçam a seguinte igualdade, $Z_1 = Z_2$. Esse fato é uma consequência importante da identidade (3.97). Consequentemente, temos que a constante de acoplamento, é determinada apenas por Z_3 :

$$e_0 = Z_3^{-1/2} e. \quad (3.107)$$

Além disso, também segue, a partir da igualdade: $Z_1 = Z_2$, que o fator $\frac{Z_2}{Z_1}$, nas Eqs. (3.100) e (3.102), desaparece. Desses resultados, concluímos que a identidade (3.97) é a quantidade responsável em preservar a invariância de gauge local, mesmo após o processo de renormalização.

A primeira parte da análise conta com a determinação formal das constantes Z_i , sob as devidas condições de renormalização e, consequentemente, das constantes físicas da teoria: e e m . Agora, voltemos à Lagrangiana (3.100) e adicionemos o termo de *gauge-fixing*, condição

de Lorenz generalizada $\Omega [A] = (1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu$ **. Introduzimos os contra-termos da seguinte forma ††:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} \left(i\hat{\partial} - m + e\hat{A} \right) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi} \left((1 + a^2 \square) \partial^\mu A_\mu \right)^2 \\ & + \delta_{Z_2} \bar{\psi} i\hat{\partial} \psi - \delta_{Z_0} \bar{\psi} m \psi + \delta_{Z_1} e \bar{\psi} \hat{A} \psi - \delta_{Z_3} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (3.108)$$

com a seguinte definição: $\delta_{Z_i} = Z_i - 1$.

A partir da Lagrangiana (3.108), obtemos novas equações de Schwinger-Dyson-Fradkin para a teoria. Especificamente, as funções de auto-energia são alteradas pela adição dos contra-termos δ_i , quantidades que denotaremos pelo sufixo $^{(R)}$. Primeiro, analisaremos o setor do campo do fóton que, agora, possui a seguinte função de auto-energia renormalizada:

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(R)}(k) = i\Pi_{\mu\nu}(k) + i\delta_{Z_3} (k_\mu k_\nu - \eta_{\mu\nu} k^2); \quad (3.109)$$

em que a quantidade $\Pi_{\mu\nu}(k)$ é definida pela expressão (3.57), em termos dos parâmetros já renormalizados. Ainda, temos que, devido ao caráter transversal do tensor $\Pi_{\mu\nu}(k)$, é possível escrevermos a expressão anterior em termos da função escalar $\Pi(k)$, Eq.(3.59), o que nos fornece:

$$\Pi^{(R)}(k) = \Pi(k) + \delta_{Z_3}. \quad (3.110)$$

A primeira renormalização é imposta da seguinte forma: exigimos que o propagador do fóton Eq.(3.58), no gauge $\xi = 1$ (pois estamos interessados apenas na contribuição das correções radiativas), tenha o comportamento de um fóton de Maxwell na camada de massa:

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \eta_{\mu\nu}, \quad \text{para } k^2 \rightarrow 0, \quad (3.111)$$

esse caso implica na seguinte condição de renormalização:

$$\Pi^{(R)}(k^2) \Big|_{k^2 \rightarrow 0} = 0, \quad (3.112)$$

e, conseqüentemente, na seguinte expressão do contra-termo δ_{Z_3} :

$$\delta_{Z_3} = Z_3 - 1 = - \Pi(k^2) \Big|_{k^2 \rightarrow 0}; \quad (3.113)$$

portanto, a Eq.(3.111) elucida a interpretação do verdadeiro comportamento dos termos de Podolsky em Eq.(3.60) como termos reguladores do tipo Raisy-Pauli-Villars (RPV) [22]. Vamos agora para o setor fermiônico; temos que a função de auto-energia renormalizada é escrita como:

$$i\Sigma^{(R)}(p, m) = i\Sigma(p, m) - im\delta_{Z_0} + i\delta_{Z_2} \hat{p}; \quad (3.114)$$

**Seguimos aqui, os "passos" anteriores do processo de quantização da teoria.

††A partir deste ponto, trabalharemos apenas com as quantidades renormalizadas; assim, não usaremos mais o sufixo $^{(r)}$ para denotar tais quantidades.

em que a função de auto-energia $\Sigma(p)$ é a correção radiativa para a função fermiônica $1PI$: $\Gamma(x, y) = -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)}$ (em que: $\Gamma(p) = \hat{p} - m - \Sigma^{(R)}(p, m)$), definida em (3.67). Além disso, ainda podemos escrever a função de auto-energia de uma forma geral:

$$\Sigma(p, m) = \Sigma_1(p^2) \hat{p} + \Sigma_2(p^2) I.$$

A identidade acima permite-nos encontrar as seguintes relações:

$$\Sigma_1^{(R)}(p^2) = \Sigma_1(p^2) + \delta_{Z_2}, \quad (3.115)$$

$$\Sigma_2^{(R)}(p^2) = \Sigma_2(p^2) - \delta_{Z_0} m. \quad (3.116)$$

Agora, para fixarmos os contra-termos fermiônicos, necessitamos impor duas condições de renormalização. Na primeira, exigimos que \ddagger :

$$\left. \frac{\partial \Gamma(p)}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p} \rightarrow m_F} = 1; \quad (3.117)$$

fato que implica em:

$$\left. \frac{\partial \Sigma^{(R)}(p, m)}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p} \rightarrow m_F} = 0. \quad (3.118)$$

Tal condição nos fornece a seguinte relação:

$$\left. \frac{\partial \Sigma^{(R)}(p, m)}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p} \rightarrow m_F} = \Sigma_1^{(R)}(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + 2m_F^2 \left. \frac{\partial \Sigma_1^{(R)}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + 2m_F \left. \frac{\partial \Sigma_2^{(R)}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 \rightarrow m_F^2}. \quad (3.119)$$

E, assim, combinando as Eqs.(3.115) e (3.116) e, então, substituindo o resultado em (3.119), encontramos:

$$-\delta_{Z_2} = 1 - Z_2 = \Sigma_1(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + 2m_F^2 \left. \frac{\partial \Sigma_1(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + 2m_F \left. \frac{\partial \Sigma_2(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 \rightarrow m_F^2}. \quad (3.120)$$

Para a segunda condição de renormalização fermiônica, exigimos que:

$$\Gamma(p) = \hat{p} - m_F, \quad \text{quando } \hat{p} \rightarrow m_F; \quad (3.121)$$

fato que implica em:

$$\Sigma^{(R)}(p, m) \Big|_{\hat{p} \rightarrow m_F} = 0. \quad (3.122)$$

E determinamos δ_{Z_0} através da seguintes manipulação:

$$m_F \Sigma_1^{(R)}(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + \Sigma_2^{(R)}(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} = 0,$$

\ddagger A massa m_F é definida como o zero da função fermiônica $1PI$, $m_F = \frac{\left[m + \Sigma_2^{(R)}(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} \right]}{\left[1 - \Sigma_1^{(R)}(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} \right]}$, a uma dada ordem em teoria de perturbação.

também, substituindo as Eqs.(3.115) e (3.116):

$$m\delta_{Z_0} = \Sigma_2(p^2)|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + m_F \left(\delta_{Z_2} + \Sigma_1(p^2)|_{p^2 \rightarrow m_F^2} \right).$$

Por fim, com o auxílio da Eq.(3.120), encontramos:

$$m\delta_{Z_0} = m(Z_0 - 1) = \Sigma_2(p^2)|_{p^2 \rightarrow m_F^2} - 2m_F^2 \left[m_F \frac{\partial \Sigma_1(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + \frac{\partial \Sigma_2(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} \right]; \quad (3.123)$$

A condição de renormalização (3.117) permite-nos determinar o contra-termo δ_{Z_2} , Eq.(3.120), e a condição (3.122), o contra-termo δ_{Z_0} , Eq.(3.123).

A quarta condição de renormalização vem para determinarmos o contra-termo δ_{Z_1} . Portanto, usando a decomposição de Gordon, podemos escrever a parte do vértice Λ^μ , Eq.(3.87), em termos dos fatores de forma de Dirac e Pauli (veja Eq.(E.32)), como:

$$\Lambda^\rho(p, p') = \gamma^\rho F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma^{\rho\nu} q_\nu F_2(q^2), \quad \sigma^{\rho\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\rho, \gamma^\nu], \quad (3.124)$$

em que $q = p' - p$, é o momento transferido. Portanto, a condição de renormalização na camada de massa da parte do vértice segue como: para elétrons externos na camada de massa, $p'^2 = p^2 = m^2$ e, para $q^2 \rightarrow 0$, temos:

$$F_1(q^2)|_{q^2 \rightarrow 0} = 0. \quad (3.125)$$

Desta forma, determinamos o contra-termo δ_{Z_1} . Também, podemos mostrar que a igualdade $Z_1 = Z_2$ continua sendo satisfeita.

Assim, com as expressões formais e a decorrente discussão das constantes Z_i , encerramos este capítulo, que tinha como objetivo alojar todas as deduções e discussões formais da teoria, i.e., obtenção das funções de Green, além de introduzir o programa de renormalização. Com isso, será possível que analisemos, nos capítulos subsequentes, a teoria em nível de 1-loop, ordem- α . As correções radiativas referentes às funções de Green serão calculadas no capítulo 4. Posteriormente, no capítulo 5, calcularemos as constantes de renormalização Z_i , bem como a constante de acoplamento efetiva; por fim, será calculada a contribuição do setor de Podolsky, proveniente do cálculo de Λ_μ , à razão giromagnética do elétron (devido ao seu valor experimental muito preciso, o utilizaremos para impor um valor para o parâmetro $a^{-2} = m_P^2$).

Capítulo 4

Correções Radiativas

No capítulo anterior, derivamos equações integrais para as funções de Green da $GQED_4$: os propagadores do elétron e fóton e a função de vértice. Agora, neste e no próximo capítulo, iniciaremos uma discussão do efeito das correções radiativas a 1-loop nas funções de Green e nas quantidades físicas da teoria, parâmetro de massa m e constante de acoplamento e . Para finalizar a tese, apresentaremos, no Capítulo 5, os cálculos e discussões sobre as quantidades relevantes em nível de renormalização.

4.1 Correções Radiativas de Segunda ordem

Investigaremos aqui, as correções das funções de Green na primeira ordem não-nula da teoria de perturbação, ordem- α . A expressão para o operador $\Pi_{\mu\nu}$, Eqs.(3.57) e (3.59), nessa ordem, não difere da obtida na QED_4 [48, 49]*:

$$\Pi^{(1)}(k) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} - \frac{1+2\gamma}{2} + 6 \int_0^1 dy y (1-y) \ln \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - y(1-y)k^2} \right] \right]. \quad (4.1)$$

Em que $\epsilon = 4 - d \rightarrow 0^+$ é o parâmetro da regularização dimensional e $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, a constante de estrutura fina. Assim, esse resultado implica, da mesma forma que em QED_4 [48], de uma necessidade da renormalização infinita, no setor ultravioleta, da carga eletrônica e , na $GQED_4$. Embora a função de auto-energia do elétron Σ e a parte do vértice Λ , possuam expressões diferentes das correções da QED_4 na ordem- α (devido à presença dos termos de Podolsky no propagador livre $D_{\mu\nu}$ Eq.(3.60)), a estrutura das divergências, por contagem de potência, permanece a mesma da QED_4 , i.e., divergências lineares e logarítmicas. Portanto, à primeira vista, esse fato também parece indicar resultados divergentes na $GQED_4$ para essas duas funções de auto-energia na ordem- α . Logo, o cálculo explícito das expressões de Σ e Λ torna-se necessário para verificarmos se realmente, os termos do propagador $D_{\mu\nu}$ atuam como reguladores tipo RPV. Além disso, esse cálculo também é necessário para verificarmos se a identidade de WFT, Eq.(3.97), também permanece válida a essa ordem.

*Esse cálculo segue da Lagrangiana Eq.(4.2).

Procederemos agora, através do método de regularização dimensional, com o cálculo das funções Σ e Λ . Como é necessário que a Lagrangiana possua a dimensão correta (tornar a constante de acoplamento e adimensional), para isso introduzimos a *massa de t'Hooft* μ . Ao também considerarmos o caso $\xi = 1$, temos a seguinte Lagrangiana [†]:

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\psi} \left[i\widehat{\partial} - m - e\mu^{4-d}\widehat{A} \right] \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_P^2}\partial_\mu F^{\mu\alpha}\partial_\nu F^\nu_\alpha - \frac{1}{2} \left[(1 + m_P^{-2}\square) \partial_\mu A^\mu \right]^2, \quad (4.2)$$

e, será através dela que calcularemos as funções Σ e Λ . Nas próximas duas subseções, calcularemos as funções Σ e Λ e mostraremos que ambas funções podem ser decompostas em duas contribuições distintas: a contribuição bem-conhecida da QED_4 e uma nova, que chamaremos de "contribuição de Podolsky". Poderemos observar, ainda, que, em tais funções o setor de Podolsky compartilha das mesmas divergências ultravioleta do setor de QED_4 . Assim, esperamos que as divergências das duas contribuições possam, de alguma forma, se cancelar. Seguiremos o método padrão no cálculo das integrais, que pode ser encontrado em qualquer livro texto de teoria quântica de campos [48, 49].

4.1.1 Auto-energia do Elétron Σ

Calcularemos a amplitude correspondente ao diagrama da Fig.4.1.1, que representa a correção, a 1-loop, ao propagador fermiônico livre.

De acordo com a equação (3.67), podemos decompor a função de auto-energia Σ e escrevê-la em duas partes:

$$\Sigma^{(1)}(p) \equiv \Sigma_{QED}(p) + \Sigma_{Pod}(p), \quad (4.3)$$

em que,

$$\Sigma_{QED}(p) = ie^2\mu^{4-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \gamma^\nu \frac{(\widehat{p} - \widehat{k} + m)}{[(p-k)^2 - m^2]} \gamma_\nu, \quad (4.4)$$

e

$$\Sigma_{Pod}(p) = -ie^2\mu^{4-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\lambda (\widehat{p} - \widehat{k} + m)}{[(p-k)^2 - m^2]} \frac{\gamma^\nu}{(k^2 - m_P^2)} \left[\eta_{\lambda\nu} + \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right] k_\lambda k_\nu \right]. \quad (4.5)$$

A separação de $\Sigma^{(1)}$ em duas contribuições, bem como para o parte do vértice Λ , é somente possível devido a estrutura linear do propagador do fóton Eq.(3.60). A expressão da primeira contribuição, referente ao setor da QED_4 à auto-energia do elétron, Eq.(4.4), em sua forma regularizada, é dada por [48, 49]:

$$\Sigma_{QED}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (\widehat{p} - 4m) + \Sigma_{QED\ Finite}(p), \quad (4.6)$$

[†]Por conveniência, trabalharemos aqui com a seguinte notação: $m_P^2 = a^{-2}$.

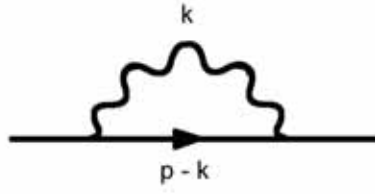


Figura 4.1: Diagrama da auto-energia do elétron.

com

$$\begin{aligned} \Sigma_{QED \text{ Finite}}(p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} [\widehat{p}(\gamma + 1) - 2m(2\gamma + 1)] \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [\widehat{p}(1 - z) - 2m] \ln \left| \frac{4\pi\mu^2}{m^2 z - (1 - z)zp^2} \right|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Com: $\epsilon = 4 - d$ o parâmetro de regularização dimensional.

Agora, iniciamos o cálculo das integrais da contribuição de Podolsky Σ_{Pod} (4.5). Para isso, podemos escrevê-las, convenientemente, como:

$$\Sigma_{Pod}(p) = \sum_{k=1}^3 \Sigma_{Pod}^{(k)}(p). \quad (4.8)$$

As quantidades $\Sigma_{Pod}^{(k)}$ foram definidas pelas seguintes relações:

$$\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) \equiv -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\lambda (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \gamma_\lambda}{[(p - k)^2 - m^2]} \frac{1}{(k^2 - m_P^2)}, \quad (4.9)$$

$$\Sigma_{Pod}^{(2)}(p) \equiv -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\widehat{k} (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \widehat{k}}{[(p - k)^2 - m^2]} \frac{1}{k^2 (k^2 - m_P^2)}, \quad (4.10)$$

$$\Sigma_{Pod}^{(3)}(p) \equiv ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\widehat{k} (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \widehat{k}}{[(p - k)^2 - m^2]} \frac{1}{(k^2 - m_P^2)^2}. \quad (4.11)$$

Calcularemos, agora, explicitamente, as três integrais das expressões $\Sigma_{Pod}^{(i)}$, (4.9)-(4.11). A fim de resolvermos a integração nos momentos de maneira conveniente, usaremos a parametrização de Feynman para, então, escrevermos o denominador da equação (4.9), e por conseguinte, a

expressão completa, como:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) &= ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\lambda (\widehat{k} - \widehat{p} - m) \gamma_\lambda}{\left[\left[(p-k)^2 - m^2 \right] z + (k^2 - m_P^2) (1-z) \right]^2} \\
&= ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\lambda (\widehat{k} - \widehat{p} - m) \gamma_\lambda}{\left[[p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2] z + (k^2 - m_P^2) (1-z) \right]^2} \\
&= ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\lambda (\widehat{k} - \widehat{p} - m) \gamma_\lambda}{\left[[p^2 - 2p \cdot k - m^2] z + k^2 - m_P^2 (1-z) \right]^2} \\
&= ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\lambda (\widehat{k} - \widehat{p} - m) \gamma_\lambda}{\left[(k - pz)^2 + b^2 \right]^2}.
\end{aligned}$$

Em que introduzimos a notação $b^2 = (1-z)(zp^2 - m_P^2) - m^2 z$, por questão de simplicidade. Ainda, ao realizarmos a mudança de variáveis: $k \rightarrow k - pz$, temos:

$$\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dz \gamma^\lambda [(1-z)\widehat{p} + m] \gamma_\lambda \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + b^2]^2}. \quad (4.12)$$

Em seguida, após a mudança de variáveis, descartamos o termo linear em k no numerador, pois sua integral é nula. A integração no momento k é realizada sem dificuldade ao utilizarmos a identidade (A.1). Logo, escrevemos a expressão resultante de (4.12) como:

$$\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) = (-1)^{\frac{d}{2}} \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dz \gamma^\lambda [(1-z)\widehat{p} + m] \gamma_\lambda [b^2]^{\frac{d}{2}-2}. \quad (4.13)$$

Por fim, utilizando as identidades (A.8) para calcularmos o produto de matrizes- γ e expandindo a Eq.(4.13) em torno de $\epsilon = 4 - d \rightarrow 0^+$, encontramos:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) &= \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dz [(2-d)(1-z)\widehat{p} + dm] [-b^2]^{\frac{d}{2}-2} \\
&= \frac{e^2 \mu^\epsilon}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dz [(2-d)(1-z)\widehat{p} + dm] [-b^2]^{-\frac{\epsilon}{2}} \\
&= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [(\epsilon-2)(1-z)\widehat{p} + (4-\epsilon)m] \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(-\frac{4\pi\mu^2}{b^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \\
&= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [(\epsilon-2)(1-z)\widehat{p} + (4-\epsilon)m] \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \exp\left[\ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{b^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Agora, usando as identidades (A.4) e (A.6), escrevemos:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [(\epsilon-2)(1-z)\widehat{p} + (4-\epsilon)m] \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{b^2}\right)\right] \\
&= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [(\epsilon-2)(1-z)\widehat{p} + (4-\epsilon)m] \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{b^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Multiplicando os termos que envolvem ϵ , e desprezando os termos $O(\epsilon)$, temos:

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [(\epsilon - 2)(1 - z)\hat{p} + (4 - \epsilon)m] \left[\frac{2}{\epsilon} \right] \\ &\quad + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [(\epsilon - 2)(1 - z)\hat{p} + (4 - \epsilon)m] \left[-\gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{b^2} \right) \right], \\ \Sigma_{Pod}^{(1)}(p) &= \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 dz [-2(1 - z)\hat{p} + 4m] + \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [(1 - z)\hat{p} - m] \\ &\quad + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [-2(1 - z)\hat{p} + 4m] \left[-\gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{b^2} \right) \right].\end{aligned}$$

Enfim, ao resolvermos algumas integrais simples e rearranjarmos convenientemente os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{e^2}{8\pi^2} [\hat{p} - 4m] + \frac{e^2}{16\pi^2} [\hat{p} - 2m] + \frac{e^2}{16\pi^2} [\hat{p} - 4m] \gamma \\ &\quad + \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz [(1 - z)\hat{p} - 2m] \ln \left(-\frac{b^2}{4\pi\mu^2} \right).\end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos a expressão final:

$$\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (\hat{p} - 4m) + \Sigma_{Pod}^{(1) Finite}(p), \quad (4.14)$$

em que:

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod}^{(1) Finite}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} [\hat{p}(1 + \gamma) - 2m(1 + 2\gamma)] \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [\hat{p}(1 - z) - 2m] \ln \left| \frac{m^2 z - (1 - z)(zp^2 - m_p^2)}{4\pi\mu^2} \right|. \quad (4.15)\end{aligned}$$

Os dois outros termos, $\Sigma_{Pod}^{(2)}(p)$ e $\Sigma_{Pod}^{(3)}(p)$, também são calculados da mesma maneira descrita anteriormente. Contudo, não apresentaremos os cálculos com os mesmos detalhes como o realizado para o termo $\Sigma_{Pod}^{(1)}(p)$. Assim, seguindo os mesmos passos anteriores: a parametrização de Feynman e a mudança de variáveis $k \rightarrow k - py$, é possível escrevermos a expressão (4.10) de $\Sigma_{Pod}^{(2)}(p)$ da seguinte forma:

$$\Sigma_{Pod}^{(2)}(p) = -2ie^2\mu^{4-d} \int d\zeta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\hat{k} + \hat{p}y) [(1 - y)\hat{p} - \hat{k} + m] (\hat{k} + \hat{p}y)}{[k^2 + b_x^2]^3}. \quad (4.16)$$

Em que introduzimos a quantidade: $b_x^2 = (1 - y)yp^2 - ym^2 - xm_p^2$ e a medida $d\zeta$, definida por:

$$\int d\zeta \equiv \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy. \quad (4.17)$$

Como as integrais de potências ímpares de k no numerador da Eq.(4.16) são nulas, é necessário que calculemos apenas as contribuições de potências nula ou par. Assim, calculamos a integração

em k com o auxílio das identidades (A.1) e (A.2). Logo, encontramos, para a equação (4.16), o resultado:

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod}^{(2)}(p) &= \frac{(-1)^{\frac{d}{2}} e^2 \mu^{4-d}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int d\zeta [[2(1-y) - (1+y)d] \hat{p} + md] [b_x^2]^{\frac{d}{2}-2} \\ &+ (-1)^{\frac{d}{2}} \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int d\zeta [(1-y)\hat{p} + m] p^2 y^2 [b_x^2]^{\frac{d}{2}-3}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Por fim, expandindo os termos da equação (4.18) em torno do ponto $d \rightarrow 4^+$, temos a seguinte expressão para $\Sigma_{Pod}^{(2)}$:

$$\Sigma_{Pod}^{(2)}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (m - \hat{p}) + \Sigma_{Pod\ Finite}^{(2)}(p), \quad (4.19)$$

em que:

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod\ Finite}^{(2)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[\left(\gamma + \frac{2}{3} \right) \hat{p} - \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) m \right] \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta \left[- \frac{[(1-y)\hat{p} + m] p^2 y^2}{b_x^2} + [2m - (1+3y)\hat{p}] \ln \left| - \frac{4\pi\mu^2}{b_x^2} \right| \right].\end{aligned}\quad (4.20)$$

Calculamos o terceiro termo $\Sigma_{Pod}^{(3)}$, Eq.(4.11), da mesma maneira que nas contribuições anteriores. Portanto, através da parametrização de Feynman e, também, pela substituição $k \rightarrow k - pz$, encontramos:

$$\Sigma_{Pod}^{(3)}(p) = 2ie^2 \mu^{4-d} \int d\zeta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\hat{k} + \hat{p}y) [(1-y)\hat{p} - \hat{k} + m] (\hat{k} + \hat{p}y)}{[k^2 + b^2]^3}.\quad (4.21)$$

Em seguida, realizando a integração no momento (através das identidades (A.1) e (A.2)), encontramos, para a Eq.(4.21), a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod}^{(3)}(p) &= (-1)^{\frac{d}{2}-1} \frac{e^2 \mu^{4-d}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int d\zeta [[2(1-y) - (1+y)d] \hat{p} + md] [b^2]^{\frac{d}{2}-2} \\ &- (-1)^{\frac{d}{2}} \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int d\zeta [(1-y)\hat{p} + m] p^2 y^2 [b^2]^{\frac{d}{2}-3}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Expressão que, no limite $d \rightarrow 4^+$, possui a seguinte forma:

$$\Sigma_{Pod}^{(3)}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (m - \hat{p}) + \Sigma_{Pod\ Finite}^{(3)} \quad (4.23)$$

com

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod\ Finite}^{(3)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \right) m - \left(\gamma + \frac{2}{3} \right) \hat{p} \right] \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta \left[\frac{[(1-y)\hat{p} + m] p^2 y^2}{b^2} + [2m - (1+3y)\hat{p}] \ln \left| - \frac{b^2}{4\pi\mu^2} \right| \right].\end{aligned}\quad (4.24)$$

Finalmente, ao combinarmos os resultados Eqs.(4.14), (4.19) e (4.23), na equação (4.8), obtemos a contribuição regularizada do setor de Podolsky. Através desta manipulação, segue que a contribuição de Podolsky à função de auto-energia do elétron é dada por:

$$\Sigma_{Pod}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (\hat{p} - 4m) + \Sigma_{Pod\ Finite}(p). \quad (4.25)$$

Em que o termo $\Sigma_{Pod\ Finite}$ é dado pela soma das equações (4.15), (4.20) e (4.24), e possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Sigma_{Pod\ Finite} &= \frac{\alpha}{4\pi} [(\gamma + 1)\hat{p} - 2m(2\gamma + 1)] \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta [2m - (1 + 3y)\hat{p}] \mathbf{A}_1(p, x, y) + \hat{p}[(1 - y)\hat{p} + m] \hat{p}y^2 \mathbf{A}_2(p, x, y) \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [(1 - z)\hat{p} - 2m] \ln \left| \frac{zm^2 - (1 - z)zp^2 + (1 - z)m_P^2}{4\pi\mu^2} \right|. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Com as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(p, x, y) &\equiv \ln \left| \frac{m^2y + m_P^2(1 - y) - (1 - y)yp^2}{m^2y + xm_P^2 - (1 - y)yp^2} \right|, \\ \mathbf{A}_2(p, x, y) &\equiv \frac{1}{m^2y + m_P(1 - y) - (1 - y)yp^2} - \frac{1}{m^2y + xm_P^2 - (1 - y)yp^2}. \end{aligned}$$

Enfim, segue do rearranjo das expressões das Eqs.(4.6) e (4.25), que a função de auto-energia do elétron (4.3), na ordem- α , possui a seguinte forma finita ultravioleta:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(p) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [(1 - z)\hat{p} - 2m] \ln \left| \frac{zm^2 - (1 - z)zp^2 + (1 - z)m_P^2}{zm^2 - (1 - z)zp^2} \right| \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [2m - (1 + 3y)\hat{p}] \mathbf{A}_1(p, x, y) \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(1 - y)\hat{p} + m] p^2 y^2 \mathbf{A}_2(p, x, y); \end{aligned} \quad (4.27)$$

com as quantidades \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 definidas acima.

A equação (4.27) mostra-nos que a função de auto-energia do elétron $\Sigma^{(1)}$, na ordem- α , independe do parâmetro μ e que, ainda, ela é livre de divergências ultravioleta (o que não ocorre na QED_4 , como podemos observar na equação (4.6)). Essa última característica é uma das propriedades mais interessantes da teoria. Aparentemente, o termo de Podolsky na Lagrangiana (4.2), devido ao caráter massivo de alguns termos, atua como um regulador natural da teoria. Todavia, uma análise mais cuidadosa mostra que o termo de Podolsky não é o único responsável pela finitude da auto-energia do elétron à ordem- α , pois a escolha da condição de gauge de Lorenz generalizada Eq.(3.34), também é intimamente relacionada com o resultado finito (4.27). Esse resultado também corrobora com a interpretação de que os termos "extras" do propagador do fóton atuam, de certa forma, como reguladores do tipo RPV. Assim, podemos concluir que a escolha da condição de Lorenz usual para a $GQED_4$ conduz ao resultado divergente para a auto-energia do elétron encontrado na tese orientada por Podolsky [16] ‡.

‡Para maiores detalhes relacionados a esse assunto, vide a discussão no apêndice C.

4.1.2 Parte do Vértice Λ^μ

Seguimos adiante com o cálculo das correções radiativas, voltando-nos, neste momento, para o cálculo da parte do vértice $\Lambda^\mu(p', p; q)$, Eq.(3.87). Como padrão, p' e p são, respectivamente, os momentos dos elétrons emergente e incidente, enquanto $q = p' - p$ é o momento transferido ao fóton. A amplitude que calcularemos aqui, corresponde ao diagrama da Fig.4.1.2.

Da mesma forma que a função de auto-energia do elétron Σ , Eq.(4.3), a expressão da parte do vértice Eq.(3.87), também divide-se em duas contribuições distintas:

$$\Lambda^{\mu(1)}(p', p) = \Lambda_{QED}^\mu(p', p) + \Lambda_{Pod}^\mu(p', p), \quad (4.28)$$

sendo uma contribuição proveniente da QED_4 :

$$\Lambda_{QED}^\mu(p', p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\alpha \frac{1}{k^2}, \quad (4.29)$$

e, outra, do setor de Podolsky:

$$\begin{aligned} \Lambda_{Pod}^\mu(p', p) &= ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\beta \frac{1}{k^2 - m_P^2} \\ &\times \left[\eta_{\alpha\beta} + \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right] k_\alpha k_\beta \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A contribuição regularizada do setor da QED_4 , equação integral (4.29), para a parte do vértice é [48, 49]:

$$\Lambda_{QED}^\mu(p', p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \Lambda_{QED \text{ Finite}}^\mu(p', p), \quad (4.31)$$

com a parte finita $\Lambda_{QED \text{ Finite}}^\mu(p', p)$ dada por:

$$\begin{aligned} \Lambda_{QED \text{ Finite}}^\mu(p', p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\Xi^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p})}{\Delta^2} \\ &- \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \left[\frac{2 + \gamma}{2} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{\Delta^2}{4\pi\mu^2} \right| \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

A fim de simplificarmos a notação das expressões, introduzimos à equação acima, as seguintes notações:

$$\Xi^\mu(p', p, x, y) = 2\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y) - \mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y), \quad (4.33)$$

e

$$\Delta^2 = m^2(x + y) + 2xyp.p' - xp^2(1 - x) - yp'^2(1 - y), \quad (4.34)$$

com as definições:

$$\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y) = [(1 - y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] \gamma^\mu [(1 - x)\hat{p} - y\hat{p}' - m], \quad (4.35)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y) &= 4[(1 - y)p'^\sigma - xp^\sigma] [(1 - x)p_\sigma - yp'_\sigma] \gamma^\mu \\ &- 2[(1 - y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] [(1 - x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu \\ &- 2\gamma^\mu [(1 - y)\hat{p}' - x\hat{p}] [(1 - x)\hat{p} - y\hat{p}' - m]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

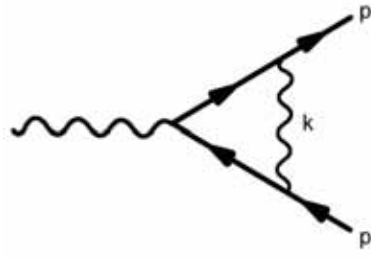


Figura 4.2: Diagrama da parte do vértice.

Exatamente como a função Σ_{Pod} , também podemos escrever a contribuição de Podolsky para a parte do vértice Λ_{Pod}^μ , Eq.(4.30), como a soma de três termos:

$$\Lambda_{Pod}^\mu(p', p) = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{Pod}^{\mu(\alpha)}(p', p). \quad (4.37)$$

Em que definimos cada um deles da seguinte maneira:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) \equiv ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \gamma_\alpha \frac{1}{k^2 - m_P^2}, \quad (4.38)$$

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p) \equiv ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \hat{k} \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \hat{k} \frac{1}{k^2 (k^2 - m_P^2)}, \quad (4.39)$$

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p', p) \equiv -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \hat{k} \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \hat{k} \frac{1}{(k^2 - m_P^2)^2}. \quad (4.40)$$

Calcularemos as integrais acima seguindo o mesmo roteiro apresentado na seção 4.1.1 (no cálculo da função de auto-energia do elétron Σ_{Pod}). Ainda, devido a semelhança dos cálculos de todas as integrais, apresentaremos apenas o cálculo do termo $\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p)$ com todos os detalhes; para os demais termos, $\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p)$ e $\Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p', p)$, apresentaremos apenas os principais passos. Assim, usando a parametrização de Feynman, podemos escrever a equação (4.38), como:

$$\begin{aligned} \Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) &= 2ie^2 \mu^{4-d} \int dx dy dz \delta(1 - x - y - z) \\ &\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\alpha (\hat{p}' - \hat{k} + m) \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\alpha}{\left[\left((p' - k)^2 - m^2 \right) y + \left((p - k)^2 - m^2 \right) x + (k^2 - m_P^2) z \right]^3} \\ &= 2ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\ &\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\alpha (\hat{p}' - \hat{k} + m) \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\alpha}{\left[\left((p' - k)^2 - m^2 \right) y + \left((p - k)^2 - m^2 \right) x + (k^2 - m_P^2) (1 - x - y) \right]^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \\
&\quad \frac{\gamma^\alpha (\widehat{p}' - \widehat{k} + m) \gamma^\mu (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \gamma_\alpha}{\left[\left((p')^2 - 2p'.k + k^2 - m^2 \right) y + (p^2 - 2p.k + k^2 - m^2) x + (k^2 - m_P^2) (1 - x - y) \right]^3} \\
&= 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\alpha (\widehat{p}' - \widehat{k} + m) \gamma^\mu (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \gamma_\alpha}{\left[k^2 + \left((p')^2 - 2p'.k - m^2 \right) y + (p^2 - 2p.k - m^2) x - m_P^2 (1 - x - y) \right]^3}.
\end{aligned}$$

Podemos rearranjar os termos do denominador, convenientemente, de forma a escrevê-lo na seguinte forma:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) = 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\alpha (\widehat{p}' - \widehat{k} + m) \gamma^\mu (\widehat{p} - \widehat{k} + m) \gamma_\alpha}{\left[(k - xp - yp')^2 - \Delta^2 - m_P^2 (1 - x - y) \right]^3}.$$

Ainda, segue, da mudança de variáveis $k \rightarrow k + xp + yp'$, a seguinte expressão:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) = 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\mathbf{N}^\mu(k, p', p, x, y)}{\left[k^2 - \Delta^2 - m_P^2 (1 - x - y) \right]^3}. \quad (4.41)$$

Por conveniência, também introduzimos, à equação acima, a notação:

$$\mathbf{N}^\mu(k, p', p, x, y) \equiv \gamma^\sigma \left[(1 - y) \widehat{p}' - \widehat{k} - x\widehat{p} + m \right] \gamma^\mu \left[(1 - x) \widehat{p} - \widehat{k} - y\widehat{p}' + m \right] \gamma_\sigma.$$

Para resolvermos a integração em k na expressão (4.41), devemos separar, primeiro, os termos de diferentes ordens em k no numerador:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) &= 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [\gamma^\sigma \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\sigma] \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\alpha k^\beta}{\left[k^2 - \Delta^2 - m_P^2 (1 - x - y) \right]^3} \\
&\quad + 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [\gamma^\sigma \left[(1 - y) \widehat{p}' - x\widehat{p} + m \right] \gamma^\mu \left[(1 - x) \widehat{p} - y\widehat{p}' + m \right] \gamma_\sigma] \\
&\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[k^2 - \Delta^2 - m_P^2 (1 - x - y) \right]^3}.
\end{aligned}$$

Com essa separação e com a ajuda das identidades (A.2) e (A.1), podemos efetuar a integração nos momentos, encontrando, enfim, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) &= 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2})}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(3) \left[-\Delta^2 - m_P^2 (1 - x - y) \right]^{2 - \frac{d}{2}}} \eta^{\alpha\beta} [\gamma^\sigma \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\sigma] \\
&\quad + 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [\gamma^\sigma \left[(1 - y) \widehat{p}' - x\widehat{p} + m \right] \gamma^\mu \left[(1 - x) \widehat{p} - y\widehat{p}' + m \right] \gamma_\sigma] \\
&\quad \times \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}} \Gamma(3 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(3) \left[-\Delta^2 - m_P^2 (1 - x - y) \right]^{3 - \frac{d}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(-1)^{\frac{d}{2}} e^2 \mu^{4-d}}{2 (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{[\gamma^\sigma \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\sigma]}{[-\Delta^2 - m_P^2 (1-x-y)]^{2-\frac{d}{2}}} \\
&\quad - \frac{(-1)^{\frac{d}{2}} e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\gamma^\sigma [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m] \gamma_\sigma}{[-\Delta^2 - m_P^2 (1-x-y)]^{3-\frac{d}{2}}}.
\end{aligned}$$

Porém, antes de analisarmos o comportamento divergente da expressão acima, é necessário manipular, a fim de contrair, as matrizes- γ no numerador do segundo termo. Portanto:

$$\begin{aligned}
F^\mu &= \gamma^\sigma [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m] \gamma_\sigma \\
&= 2\gamma^\sigma [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] \\
&\quad - \gamma^\sigma [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \gamma^\mu \gamma_\sigma [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m] \\
&= 4[(1-y)p'_\sigma - xp_\sigma] \gamma^\mu [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] \\
&\quad - 2[(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] \gamma^\sigma \gamma^\mu [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] \\
&\quad - 2[(1-y)p'_\sigma - xp_\sigma] \gamma^\mu \gamma_\sigma [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m] \\
&\quad + [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\sigma [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m],
\end{aligned}$$

Agora, com o auxílio das identidades (A.8) das matrizes- γ de Dirac, obtemos:

$$\begin{aligned}
F^\mu &= 4[(1-y)p'_\sigma - xp_\sigma] \gamma^\mu [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] \\
&\quad - 2[(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu \\
&\quad - 2\gamma^\mu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m] \\
&\quad + (2-d) [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] \gamma^\mu [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m].
\end{aligned}$$

Logo, temos:

$$\gamma^\sigma [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m] \gamma_\sigma = \mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y) + (2-d) \mathbf{M}^\mu(p', p, x, y).$$

Também, temos que:

$$\gamma^\sigma \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\sigma = (2-d)^2 \gamma^\mu.$$

Dessa forma, com os resultados acima, encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) &= -\frac{(-1)^{\frac{d}{2}} e^2 \mu^{4-d}}{2 (4\pi)^{\frac{d}{2}}} (2-d)^2 \gamma^\mu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int d\zeta \frac{1}{[-\Delta^2 - m_P^2 (1-x-y)]^{2-\frac{d}{2}}} \\
&\quad - (-1)^{\frac{d}{2}} \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} (2-d) \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int d\zeta \frac{\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y)}{[-\Delta^2 - m_P^2 (1-x-y)]^{3-\frac{d}{2}}} \\
&\quad - (-1)^{\frac{d}{2}} \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int d\zeta \frac{\mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y)}{[-\Delta^2 - m_P^2 (1-x-y)]^{3-\frac{d}{2}}}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Em que a medida $d\zeta$ foi definida em (4.17). Desse modo, tendo determinado a dependência de cada

termo em relação ao parâmetro d , podemos, então, expandir a equação (4.42) em torno de $d \rightarrow 4^+$,

$$\begin{aligned}\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) &= -\frac{1}{2} \frac{e^2 \mu^\epsilon}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} (\epsilon - 2)^2 \gamma^\mu \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int d\zeta \frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]^{\frac{\epsilon}{2}}} \\ &+ \frac{e^2 \mu^\epsilon}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} (\epsilon - 2) \Gamma\left(\frac{\epsilon+2}{2}\right) \int d\zeta \frac{\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y)}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]^{\frac{2+\epsilon}{2}}} \\ &+ \frac{e^2 \mu^\epsilon}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \Gamma\left(\frac{\epsilon+2}{2}\right) \int d\zeta \frac{\mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y)}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]^{\frac{2+\epsilon}{2}}}.\end{aligned}$$

Ainda, as identidades (A.4) e (A.6), permitem-nos escrever:

$$\begin{aligned}&= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\gamma^\mu}{2} \int d\zeta (4-4\epsilon) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}\right)\right] \\ &+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int d\zeta \frac{\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y)}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]} (\epsilon-2) \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}\right)\right] \\ &+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int d\zeta \frac{\mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y)}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]} \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}\right)\right], \\ &= -2 \frac{e^2}{(4\pi)^2} \gamma^\mu \int d\zeta (1-\epsilon) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}\right)\right] \\ &+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int d\zeta \frac{\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y)}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]} (-\epsilon) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}\right)\right] \\ &+ \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int d\zeta \frac{\mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y)}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]} \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}\right)\right].\end{aligned}$$

Por fim, multiplicando os termos que envolvem ϵ e mantendo apenas os termos até $O(\epsilon)$, encontramos a seguinte expressão:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(1)}(p', p), \quad (4.43)$$

com a parte finita:

$$\begin{aligned}\Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(1)}(p', p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta \frac{\mathbf{\Xi}^\mu(p', p, x, y)}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]} \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \left[\frac{2+\gamma}{2} + \int d\zeta \ln\left|\frac{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}{4\pi\mu^2}\right|\right].\end{aligned} \quad (4.44)$$

Seguindo o mesmo roteiro do cálculo da função $\Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(1)}(p', p)$, procedemos, agora, com o cálculo dos dois outros termos: $\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}$ e $\Lambda_{Pod}^{\mu(3)}$. Contudo, como dito no início da seção, não apresentaremos todos os detalhes do cálculo que se segue, pois são eles os mesmos do cálculo anterior. Todavia, é necessário certo cuidado na manipulação das matrizes- γ presentes no numerador das expressões. Portanto, usando a parametrização de Feynman, escrevemos a equação (4.39) na seguinte forma:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p) = 6ie^2 \mu^{4-d} \int d\xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\mathbf{O}^\mu(k, p', p, x, y)}{[k^2 - \Delta^2 - m_P^2 z]^4}, \quad (4.45)$$

sendo que, também, já efetuamos a mudança de variáveis: $k \rightarrow k + xp + yp'$ e definimos a quantidade:

$$\begin{aligned}\mathbf{O}^\mu(k, p', p, x, y) &= (\hat{k} + x\hat{p} + y\hat{p}') \left[(1-y)\hat{p}' - \hat{k} - x\hat{p} + m\right] \gamma^\mu \\ &\times \left[(1-x)\hat{p} - \hat{k} - y\hat{p}' + m\right] (\hat{k} + x\hat{p} + y\hat{p}').\end{aligned} \quad (4.46)$$

Alguns termos da expressão acima cancelam-se, de forma a obtermos:

$$\begin{aligned}
&= 2\widehat{k} [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] \\
&\quad - \widehat{k} [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] - \widehat{k}\widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') \\
&\quad - (x\widehat{p} + y\widehat{p}') \widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] \widehat{k} \\
&\quad - (x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu \widehat{k}\widehat{k} + (x\widehat{p} + y\widehat{p}') \widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k} (x\widehat{p} + y\widehat{p}').
\end{aligned}$$

Manipulando, agora, o primeiro e quarto termos:

$$\begin{aligned}
&= 4 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] \\
&\quad - 2 [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} - m] \widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] \\
&\quad - 2 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] + [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} - m] \widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] \\
&\quad - \widehat{k}\widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') - (x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu \widehat{k}\widehat{k} \\
&\quad - 2 (x\widehat{p} + y\widehat{p}') \widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] + (x\widehat{p} + y\widehat{p}') \widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k} [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' - m] \\
&\quad + (x\widehat{p} + y\widehat{p}') \widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k} (x\widehat{p} + y\widehat{p}'),
\end{aligned}$$

novamente, cancelando alguns termos:

$$\begin{aligned}
&= 4 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] \\
&\quad - 2 [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} - m] \widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] \\
&\quad - 2 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] + [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} - m] \widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] \\
&\quad - \widehat{k}\widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') - (x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu \widehat{k}\widehat{k} \\
&\quad - 2 (x\widehat{p} + y\widehat{p}') \widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] + (x\widehat{p} + y\widehat{p}') \widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m].
\end{aligned}$$

Após todas essas manipulações, encontramos:

$$\begin{aligned}
I^\mu &= 4 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] + [\widehat{p}' - m] \widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] \\
&\quad - 2 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] - 2 [\widehat{p}' - m] \widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] \quad (4.48) \\
&\quad - \widehat{k}\widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') - (x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu \widehat{k}\widehat{k}.
\end{aligned}$$

Enfim, obtemos:

$$\begin{aligned}
O^\mu &= (x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') + \widehat{k}\widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k}\widehat{k} \\
&\quad + 4 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] + [\widehat{p}' - m] \widehat{k}\gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] \\
&\quad - 2 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu \widehat{k} [\widehat{p} - m] - 2 [\widehat{p}' - m] \widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] \quad (4.49) \\
&\quad - \widehat{k}\widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') - (x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu \widehat{k}\widehat{k},
\end{aligned}$$

Dessa forma, finalmente podemos escrever a equação (4.45) de forma a efetuarmos as integrações em k . Portanto, substituindo o resultado acima e levando em conta as diferentes contribuições em k , temos,

para $\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p)$:

$$\begin{aligned}
&= 6ie^2\mu^{4-d} \int d\xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\widehat{k}\widehat{k}\gamma^\mu\widehat{k}\widehat{k}}{[k^2 - \Delta^2 - m_{Pz}^2]^4} \\
&+ 6ie^2\mu^{4-d} \int d\xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \\
&\times \frac{(x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}')}{[k^2 - \Delta^2 - m_{Pz}^2]^4} \\
&+ 6ie^2\mu^{4-d} \int d\xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - \Delta^2 - m_{Pz}^2]^4} \\
&\times \left[4 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] + [\widehat{p}' - m] \widehat{k}\gamma^\mu\widehat{k} [\widehat{p} - m] \right. \\
&- 2 [(1-y)p'.k - xp.k] \gamma^\mu\widehat{k} [\widehat{p} - m] - 2 [\widehat{p}' - m] \widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)p.k - yp'.k] \\
&\left. - \widehat{k}\widehat{k}\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') - (x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu\widehat{k}\widehat{k} \right];
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Agora, utilizando as identidades (A.1)-(A.3), encontramos:

$$\begin{aligned}
&= 6i^2e^2\mu^{4-d}\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int d\xi \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{4(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{[\gamma^\sigma\gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\alpha + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\sigma\gamma_\rho]}{\Gamma(4) [-\Delta^2 - m_{Pz}^2]^{2-\frac{d}{2}}} \\
&+ 6i^2e^2\mu^{4-d} \int d\xi \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \\
&\times \frac{(x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}')}{\Gamma(4) [-\Delta^2 - m_{Pz}^2]^{4-\frac{d}{2}}} \\
&+ 6i^2e^2\mu^{4-d}\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d\xi \frac{1}{\Gamma(4) [-\Delta^2 - m_{Pz}^2]^{3-\frac{d}{2}}} \\
&\times \left[4 [(1-y)p'^\sigma - xp^\sigma] \gamma^\mu [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] + [\widehat{p}' - m] \gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma^\sigma [\widehat{p} - m] \right. \\
&- 2 [(1-y)p'^\sigma - xp^\sigma] \gamma^\mu\gamma_\sigma [\widehat{p} - m] - 2 [\widehat{p}' - m] \gamma_\sigma\gamma^\mu [(1-x)p^\sigma - yp'^\sigma] \\
&\left. - \gamma^\sigma\gamma_\sigma\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') - (x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma_\sigma \right].
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Ainda, com o auxílio das propriedades (A.8), encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
&= e^2\mu^{4-d}\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int d\xi \frac{(-1)^{\frac{d}{2}+1}}{4(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{[d^2 + 2d]}{[-\Delta^2 - m_{Pz}^2]^{2-\frac{d}{2}}} \\
&+ e^2\mu^{4-d} \int d\xi \frac{(-1)^{\frac{d}{2}+1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \\
&\times \frac{(x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}')}{[-\Delta^2 - m_{Pz}^2]^{4-\frac{d}{2}}} \\
&+ e^2\mu^{4-d}\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \frac{(-1)^{\frac{d}{2}+1}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int d\xi \frac{1}{[-\Delta^2 - m_{Pz}^2]^{3-\frac{d}{2}}} \\
&\times \left[4 [(1-y)p'^\sigma - xp^\sigma] \gamma^\mu [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] + (2-d) [\widehat{p}' - m] \gamma^\mu [\widehat{p} - m] \right. \\
&- 2\gamma^\mu [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p}] [\widehat{p} - m] - 2 [\widehat{p}' - m] [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}'] \gamma^\mu \\
&\left. - d\gamma^\mu [(1-x)\widehat{p} - y\widehat{p}' + m] (x\widehat{p} + y\widehat{p}') - d(x\widehat{p} + y\widehat{p}') [(1-y)\widehat{p}' - x\widehat{p} + m] \gamma^\mu \right];
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Por questão de conveniência, ainda podemos introduzir novas quantidades na expressão acima, de forma a obter:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p) &= -\frac{(-1)^{\frac{d}{2}} e^2 \mu^{4-d}}{4 (4\pi)^{\frac{d}{2}}} (d^2 + 2d) \gamma^\mu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int d\xi \frac{1}{[-\Delta^2 - m_P^2 z]^{2-\frac{d}{2}}} \\
&- (-1)^{\frac{d}{2}} \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \int d\xi \frac{\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p})}{[-\Delta^2 - m_P^2 z]^{4-\frac{d}{2}}} \\
&+ \frac{(-1)^{\frac{d}{2}} e^2 \mu^{4-d}}{2 (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int d\xi \frac{1}{[-\Delta^2 - m_P^2 z]^{3-\frac{d}{2}}} \left[d \Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu \right. \\
&\left. + d \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) - \Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) - (2-d) (\hat{p}' - m) \gamma^\mu (\hat{p} - m) \right]. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Com as funções Σ_1, Σ_2 e Σ_3^μ definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) &= (x\hat{p} + y\hat{p}') [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m], \\
\Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) &= [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m] (x\hat{p} + y\hat{p}'), \\
\Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) &= -2\gamma^\mu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] (\hat{p} - m) - 2(\hat{p}' - m) [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu \\
&+ 4 [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu; \tag{4.54}
\end{aligned}$$

bem como a medida:

$$\int d\xi \equiv \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz. \tag{4.55}$$

Dessa forma, temos que a equação (4.53), no limite $d \rightarrow 4^+$, assume a forma:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \Lambda_{Pod \text{ Finite}}^{\mu(2)}(p', p), \tag{4.56}$$

com:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{Pod \text{ Finite}}^{\mu(2)}(p', p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \left[\frac{5}{6} + \gamma + 6 \int d\xi \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2 z}{4\pi\mu^2} \right| \right] - \frac{\alpha}{4\pi} \int d\xi \frac{\Sigma_1 \gamma^\mu \Sigma_2}{[\Delta^2 + m_P^2 z]^2} \\
&- \frac{\alpha}{2\pi} \int d\xi \frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2 z]} \left[\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu + \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \right. \\
&\left. - \frac{1}{4} \Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) + \frac{1}{2} (\hat{p}' - m) \gamma^\mu (\hat{p} - m) \right]. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos anteriores, encontramos, para $\Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p', p)$, Eq.(4.40), a seguinte expressão:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p', p) = -6ie^2 \mu^{4-d} \int d\xi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\mathbf{O}^\mu(k, p', p, x, y)}{[k^2 - \Delta^2 - m_P^2(1-x-y)]^4}; \tag{4.58}$$

a única diferença desta expressão em relação à $\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}$, está no denominador. Portanto, ao usarmos o resultado (4.49) e, assim, calcularmos as integrações no momento da Eq.(4.58) (da mesma forma que

fizemos em $\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p', p) &= \frac{(-1)^{\frac{d}{2}} e^2 \mu^{4-d}}{4 (4\pi)^{-\frac{d}{2}}} (d^2 + 2d) \gamma^\mu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int d\xi \frac{1}{[-\Delta^2 - m_P^2 (1-x-y)]^{2-\frac{d}{2}}} \\
&+ (-1)^{\frac{d}{2}} \frac{e^2 \mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \int d\xi \frac{\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p})}{[-\Delta^2 - m_P^2 (1-x-y)]^{4-\frac{d}{2}}} \\
&- \frac{(-1)^{\frac{d}{2}} e^2 \mu^{4-d}}{2 (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int d\xi \frac{1}{[-\Delta^2 - m_P^2 (1-x-y)]^{3-\frac{d}{2}}} \\
&\times \left[d\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu + d\gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) - \Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \right. \\
&\left. - (2-d) (\hat{p}' - m) \gamma^\mu (\hat{p} - m) \right]. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

E, expandindo (4.59) em torno de $\epsilon = 4 - d \rightarrow 0^+$, encontramos:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p', p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \Lambda_{Pod \text{ Finite}}^{\mu(3)}(p', p), \tag{4.60}$$

com a parte finita:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{Pod \text{ Finite}}^{\mu(3)}(p', p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \left[\frac{5}{6} + \gamma + 6 \int d\xi \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}{4\pi\mu^2} \right| \right] \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\xi \frac{\Sigma_1 \gamma^\mu \Sigma_2}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]^2} \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} \int d\xi \frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]} \left[\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu + \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) - \right. \\
&\left. \frac{1}{4} \Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) + \frac{1}{2} (\hat{p}' - m) \gamma^\mu (\hat{p} - m) \right] \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Enfim, ao combinarmos os resultados Eqs.(4.43), (4.56) e (4.60), determinamos a expressão regularizada para a contribuição de Podolsky para a parte de vértice Λ_{Pod}^μ Eq.(4.37):

$$\Lambda_{Pod}^\mu(p', p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \Lambda_{Pod \text{ Finite}}^\mu(p', p), \tag{4.62}$$

em que a expressão de $\Lambda_{Pod \text{ Finite}}^\mu$ é dada pela soma das equações (4.44), (4.57) e (4.61), que escrevemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{Pod \text{ Finite}}^\mu(p', p) &= \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \left[1 + \frac{\gamma}{2} + \int d\zeta \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)}{4\pi\mu^2} \right| \right] \\
&- \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta \frac{\Xi^\mu(p', p, x, y)}{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)} + \frac{3\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int d\xi \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2 z}{\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)} \right| \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\xi \Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \left[\frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2 (1-x-y)]^2} - \frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2 z]^2} \right] \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} \int d\xi \left[\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu + \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) - \frac{1}{4} \Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) + \frac{1}{2} (\hat{p}' - m) \gamma^\mu (\hat{p} - m) \right] \\
&\times \left[\frac{1}{\Delta^2 + \frac{1}{a^2} (1-x-y)} - \frac{1}{\Delta^2 + m_P^2 z} \right]. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Finalmente, ao substituir os resultados das equações (4.31) e (4.62) na definição (4.28), encontramos que a parte de vértice Λ^μ da $GQED_4$, na ordem- α , possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu(1)}(p', p) &= \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int d\zeta \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)}{\Delta^2} \right| + \frac{3\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int d\xi \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2 z}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} \right| \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta \Xi^\mu(p', p, x, y) \left[\frac{1}{\Delta^2} - \frac{1}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} \right] \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\xi \Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \left[\frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)]^2} - \frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2 z]^2} \right] \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} \int d\xi \left[\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu + \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) - \frac{1}{4} \Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} (\hat{p}' - m) \gamma^\mu (\hat{p} - m) \right] \left[\frac{1}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} - \frac{1}{\Delta^2 + m_P^2 z} \right].
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Em que as funções Ξ^μ , Σ_1, Σ_2 e Σ_3^μ e a medida $d\xi$ foram definidas em (4.33), (4.54) e (4.55), respectivamente.

Com a expressão final para Λ^μ concluímos este capítulo técnico, em que calculamos e discutimos as correções das funções de Green a 1-loop. A equação (4.64) mostra a independência da parte do vértice com a massa de *t'Hooft* μ , bem como a sua finitude – esta, também, deve-se ao termo de Podolsky mais a escolha da condição de gauge de Lorenz generalizada (como já havia acontecido com a função de auto-energia do elétron). Ademais, também mostramos que ambas as correções radiativas da auto-energia do elétron e da parte do vértice são finitas em ordem- α ; um resultado interessante e muito importante, porém já esperado, devido à contribuição de Podolsky para o propagador do fóton. Outro ponto a ser ressaltado aqui, é que a finitude das expressões da auto-energia do elétron Σ e da parte de vértice Λ^μ , implicam que a identidade de WFT Eq.(3.97) continua sendo satisfeita em ordem- α .

Capítulo 5

Renormalização da Eletrodinâmica de Podolsky

Após o cálculo das expressões formais das SDFE e de suas formas explícitas na aproximação de 1-loop nos capítulos 3 e 4, respectivamente, seguimos adiante com o programa de renormalização desenvolvido na seção 3.4. Apresentaremos, inicialmente, as expressões das correções radiativas a 1-loop em um gauge geral ξ ; em seguida, calcularemos as expressões explícitas para todos os contra-termos, e discutiremos o comportamento infravermelho da teoria. Em seguida, calcularemos e analisaremos o acoplamento efetivo da teoria no cenário do espalhamento de Coulomb. Por fim, calcularemos a contribuição do termo dependente do parâmetro de Podolsky à correção do momento magnético anômalo do elétron e usaremos um dado experimental para limitar os possíveis valores desse parâmetro livre.

5.1 Constantes de Renormalização e comportamento IR

Nos cálculos realizados anteriormente, calculamos as funções Σ e Λ em um valor particular de ξ ($\xi = 1$), i.e., utilizamos a seguinte expressão para propagador do fóton*:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{(-i)}{k^2} \eta_{\mu\nu} - \frac{(-i)}{k^2 - m_P^2} \eta_{\mu\nu} - \frac{(-i)}{k^2 (k^2 - m_P^2)} k_\mu k_\nu + \frac{(-i)}{(k^2 - m_P^2)^2} k_\mu k_\nu, \quad (5.1)$$

o que gerou, em ordem- α , os resultados:

$$\Sigma^{(1)}(p) = \Sigma_{QED}(p) + \Sigma_{Pod}^{(1)}(p) + \Sigma_{Pod}^{(2)}(p) + \Sigma_{Pod}^{(3)}(p),$$

e

$$\Lambda^{\mu(1)}(p', p) = \Lambda_{QED}^\mu(p', p) + \Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) + \Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p) + \Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p', p).$$

Em que as expressões das quantidades acima são dadas pelas Eqs.(4.3) e (4.28), respectivamente.

Como o escalar de polarização é independente da escolha de gauge, ele continuará com a mesma forma no caso de um ξ geral. Sua expressão é dada por [48, 49]:

$$\Pi^{(1)}(k) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{2}{\epsilon_{UV}} - \frac{1+2\gamma}{2} + 6 \int_0^1 dy y (1-y) \ln \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - y(1-y)k^2} \right] \right]. \quad (5.2)$$

*Por conveniência, trabalharemos, aqui, com a seguinte notação: $m_P^2 = a^{-2}$.

Em que: $\epsilon_{UV} = 4 - d$, $\epsilon_{UV} \rightarrow 0^+$ é o parâmetro de regularização dimensional e $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, a constante de estrutura fina. O setor do fóton ainda será investigado na seção 5.2, na discussão da constante de acoplamento efetiva da $GQED_4$.

Diferentemente de Π , a auto-energia do elétron e a parte do vértice são dependentes de gauge. Portanto, se queremos passar para um resultado mais geral, i.e., um ξ geral, devemos utilizar a expressão (3.60) para o propagador do fóton:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{(-i)}{k^2} \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] - \frac{(-i)}{k^2 - m_P^2} \left[\eta_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - m_P^2} \right] \quad (5.3)$$

$$+ (1 - 2\xi) \frac{(-i)}{(k^2 - m_P^2) k^2} k_\mu k_\nu + \frac{(-i)}{(k^2 - m_P^2)^2} k_\mu k_\nu.$$

Nesta situação, escrevemos a função de auto-energia do elétron em termos das integrais anteriores através de:

$$\Sigma^{(1,\xi)}(p) = \Sigma_{QED}(p) - (1 - \xi) \Sigma_{Pod}^{(3)}(p) \Big|_{m_P^2 \rightarrow 0} + \Sigma_{Pod}^{(1)}(p) + \xi \Sigma_{Pod}^{(3)}(p) - (1 - 2\xi) \Sigma_{Pod}^{(2)}(p). \quad (5.4)$$

Cuja expressão explícita é escrita como:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1,\xi)}(p) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [\widehat{p}(1-z) - 2m] \ln \left| \frac{m^2 z - (1-z) z p^2 + (1-z) m_P^2}{m^2 z - (1-z) z p^2} \right| \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(1-y) \widehat{p} + m] p^2 y^2 \\ &\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2} - \frac{1}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right] \right. \\ &+ \xi \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right] \left. \right] \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [2m - (1+3y) \widehat{p}] \\ &\times \left[(\xi - 1) \ln \left| \frac{m^2 y - (1-y) y p^2}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right| + \xi \ln \left| \frac{m^2 y - (1-y) y p^2 + (1-y) m_P^2}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right| \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Vemos claramente que a expressão acima pode ser escrita na forma geral: $\Sigma(p, m) = \Sigma_1(p^2) \widehat{p} + \Sigma_2(p^2) I$. Para a parte do vértice também encontramos uma expressão com forma similar exposta a acima:

$$\Lambda^{\mu(1,\xi)}(p', p) = \Lambda_{QED}^\mu(p', p) - (1 - \xi) \Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p) \Big|_{m_P^2 \rightarrow 0} + \Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p) + \xi \Lambda_{Pod}^{\mu(3)}(p) - (1 - 2\xi) \Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p), \quad (5.6)$$

que, também pode ser escrita, convenientemente, de uma forma geral em termos dos fatores de forma † :

$$\Lambda^{\mu(1,\xi)} = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i q_\nu}{2m} \sigma^{\mu\nu} F_2(q^2),$$

em que a forma explícita dos fatores de forma é:

$$F_2(q^2) = \frac{2\alpha}{\pi} m^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (xy + y^2 - x) \times \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} \right] \quad (5.7)$$

† Veja o Apêndice E, Eq.(E.32), para maiores detalhes sobre a expressão.

e

$$\begin{aligned}
F_1(q^2) &= (Z_1 - 1)^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} \right| \\
&+ (\xi - 1) \frac{3\alpha}{2\pi} \int d\xi \ln \left| \frac{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} \right| \\
&+ \xi \frac{3\alpha}{2\pi} \int d\xi \ln \left| \frac{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} \right| \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (2m^2((x+y)(x+5y) - 2(1-x-y)^2 - 4x) + 2q^2[1-x-y+xy]) \\
&\times \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} \right] \\
&+ \frac{\alpha m^2}{2\pi} \int d\xi \left(2(x+y)(2-x-y) - (1-x-y)^2 + \frac{1}{2m^2} q^2(1-3x-3y+6xy) \right) \\
&\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z} \right] \right. \\
&\left. + \xi \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z} \right] \right] \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\xi \left(m^4 [4(x-xy+y)((x+y)(1-y) - x^2) + (x^2 + y^2)^2] \right. \\
&\left. - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] (1 - (1-x-y)^2) + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \right) \\
&\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{[-q^2 xy + m^2(x+y)^2]^2} - \frac{1}{[-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z]^2} \right] \right. \\
&\left. + \xi \left[\frac{1}{[-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)]^2} - \frac{1}{[-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z]^2} \right] \right]. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Portanto, com as expressões de Π , Σ e Λ na aproximação de 1-loop e, também, escritas em um gauge geral ξ , podemos agora proceder com o cálculo das expressões dos contra-termos δZ_i . O cálculo de tais quantidades é relativamente direto, exigindo apenas que as devidas condições de renormalização sejam satisfeitas. Nós também estamos interessados em analisar o setor infravermelho da teoria, tendo em vista que existem contribuições não-massivas no propagador Eq.(5.3).

5.1.1 Constante de renormalização Z_3

Iniciamos os cálculos a partir do contra-termo mais simples, que é o do setor do fóton. Assim, da condição Eq.(3.113) e da expressão (5.2), encontramos o resultado:

$$\delta Z_3 = (Z_3 - 1)^{(1)} = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} - \frac{1+2\gamma}{2} + \ln \left[\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right] \right]. \quad (5.9)$$

A função de auto-energia do fóton renormalizada possui a seguinte forma:

$$\Pi_{CM}^{(1)}(k) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dy y(1-y) \ln \left[1 - \frac{k^2}{m^2} y(1-y) \right]. \quad (5.10)$$

Na verdade, como discutiremos adiante, o contra-termo δZ_3 é o único a absorver um termo divergente ultravioleta e é livre de divergências infravermelha.

5.1.2 Constante de renormalização Z_2

No setor fermiônico, calcularemos primeiro o contra-termo relacionado com o termo cinético. Temos da equação (3.120) :

$$-\delta_{Z_2} = 1 - Z_2 = \Sigma_1(p^2)|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + 2m_F^2 \frac{\partial \Sigma_1(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + 2m_F \frac{\partial \Sigma_2(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2}, \quad (5.11)$$

e, como a Eq.(5.5) pode ser facilmente escrita na forma geral $\Sigma(p, m) = \Sigma_1(p^2) \hat{p} + \Sigma_2(p^2) I$, podemos calcular cada um dos termos acima individualmente [‡]. Primeiro, calculamos:

$$\begin{aligned} \Sigma_1(p^2)|_{p^2 \rightarrow m^2} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z) \ln \left| \frac{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}}{z^2} \right| \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1+3y) \left[(\xi-1) \ln \left| \frac{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}}{y^2} \right| + \xi \ln \left| \frac{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}}{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}} \right| \right] \\ &+ (\xi-1) \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-y) y^2 \left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right] \\ &+ \xi \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-y) y^2 \left[\frac{1}{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right]; \end{aligned} \quad (5.12)$$

Agora o termo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_1(p)}{\partial p^2} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z) \left[\frac{1}{m^2 z - (1-z) z p^2 + (1-z) m_P^2} - \frac{1}{m^2 z - (1-z) z p^2} \right] (-1-z) z \\ &+ \xi \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta (1-y) y^2 \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right] \\ &+ \xi \frac{\alpha}{4\pi} p^2 \int d\zeta (1-y) y^2 \left[\frac{(-1)(-(1-y)y)}{(m^2 y - (1-y) y p^2 + (1-y) m_P^2)^2} - \frac{(-1)(-(1-y)y)}{(y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2)^2} \right] \\ &+ (\xi-1) \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta (1-y) y^2 \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2} - \frac{1}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right] \\ &+ (\xi-1) \frac{\alpha}{4\pi} p^2 \int d\zeta (1-y) y^2 \left[\frac{(-1)}{(m^2 y - (1-y) y p^2)^2} - \frac{(-1)}{(y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2)^2} \right] (-1-y) y \\ &- (\xi-1) \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta (1+3y) \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2} - \frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2 + x m_P^2} \right] (-1-y) y \\ &- \xi \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta (1+3y) \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2 + x m_P^2} \right] (-1-y) y, \end{aligned}$$

[‡]Embora os contra-termos sejam calculados no pólo $p^2 \rightarrow m_F^2$, em que $m_F = \frac{m + \Sigma_2(p^2)|_{p^2 \rightarrow m_F^2}}{1 - \Sigma_1(p^2)|_{p^2 \rightarrow m_F^2}}$, podemos calculá-los no ponto $p^2 \rightarrow m^2$, pois estamos trabalhando na primeira ordem em α .

que, no respectivo limite na camada de massa, é escrito como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma_1(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 \rightarrow m^2} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z)^2 z \left[\frac{1}{m^2 z^2 + (1-z) m_P^2} - \frac{1}{m^2 z^2} \right] \\
&+ \xi \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta (1-y) y^2 \left[\frac{1}{m^2 y^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right] \\
&+ \xi \frac{\alpha}{4\pi} m^2 \int d\zeta (1-y)^2 y^3 \left[\frac{1}{(m^2 y^2 + (1-y) m_P^2)^2} - \frac{1}{(y^2 m^2 + x m_P^2)^2} \right] \\
&+ (\xi - 1) \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta (1-y) y^2 \left[\frac{1}{m^2 y^2} - \frac{1}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right] \\
&+ (\xi - 1) \frac{\alpha}{4\pi} m^2 \int d\zeta (1-y)^2 y^3 \left[\frac{1}{(m^2 y^2)^2} - \frac{1}{(y^2 m^2 + x m_P^2)^2} \right] \\
&+ (\xi - 1) \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta (1+3y) (1-y) y \left[\frac{1}{m^2 y^2} - \frac{1}{m^2 y^2 + x m_P^2} \right] \\
&+ \xi \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta (1+3y) (1-y) y \left[\frac{1}{m^2 y^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{m^2 y^2 + x m_P^2} \right]. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

O terceiro e último termo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma_2(p^2)}{\partial p^2} &= -m \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \left[\frac{1}{m^2 z - (1-z) z p^2 + (1-z) m_P^2} - \frac{1}{m^2 z - (1-z) z p^2} \right] (- (1-z) z) \\
&+ \xi m \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta y^2 \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right] \\
&+ \xi m \frac{\alpha}{4\pi} p^2 \int d\zeta y^2 \left[\frac{(-1)}{(m^2 y - (1-y) y p^2 + (1-y) m_P^2)^2} - \frac{(-1)}{(y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2)^2} \right] (- (1-y) y) \\
&+ (\xi - 1) m \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta y^2 \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2} - \frac{1}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right] \\
&+ (\xi - 1) m \frac{\alpha}{4\pi} p^2 \int d\zeta y^2 \left[\frac{(-1)}{(m^2 y - (1-y) y p^2)^2} - \frac{(-1)}{(y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2)^2} \right] (- (1-y) y) \\
&+ (\xi - 1) m \frac{\alpha}{2\pi} \int d\zeta \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2} - \frac{1}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right] (- (1-y) y) \\
&+ \xi m \frac{\alpha}{2\pi} \int d\zeta \left[\frac{1}{m^2 y - (1-y) y p^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{y m^2 + x m_P^2 - (1-y) y p^2} \right] (- (1-y) y),
\end{aligned}$$

possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Sigma_2(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 \rightarrow m^2} &= m \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz (1-z) z \left[\frac{1}{m^2 z^2 + (1-z) m_P^2} - \frac{1}{m^2 z^2} \right] \\
&+ \xi m \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta y^2 \left[\frac{1}{m^2 y^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right] \\
&+ \xi m \frac{\alpha}{4\pi} m^2 \int d\zeta (1-y) y^3 \left[\frac{1}{(m^2 y^2 + (1-y) m_P^2)^2} - \frac{1}{(y^2 m^2 + x m_P^2)^2} \right] \\
&+ (\xi - 1) m \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta y^2 \left[\frac{1}{m^2 y^2} - \frac{1}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right] \\
&+ (\xi - 1) m \frac{\alpha}{4\pi} m^2 \int d\zeta (1-y) y^3 \left[\frac{1}{(m^2 y^2)^2} - \frac{1}{(y^2 m^2 + x m_P^2)^2} \right] \\
&- (\xi - 1) m \frac{\alpha}{2\pi} \int d\zeta (1-y) y \left[\frac{1}{m^2 y^2} - \frac{1}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right] \\
&- \xi m \frac{\alpha}{2\pi} \int d\zeta (1-y) y \left[\frac{1}{m^2 y^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right]. \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Então, ao combinarmos os resultados (5.12), (5.13), (5.14) e substituí-los na equação (5.11), bem como rearranjando-os termos de uma maneira conveniente, obtemos:

$$\begin{aligned}
-\delta Z_2 &= (1 - Z_2)^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z) \ln \left| \frac{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}}{z^2} \right| \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1+3y) \left[(\xi - 1) \ln \left| \frac{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}}{y^2} \right| + \xi \ln \left| \frac{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}}{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}} \right| \right] \\
&+ \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \left[-(1-z)^2 z + 2(1-z)z \right] \left[\frac{1}{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{z^2} \right] \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[(1-y)y^2 + 2(1-y)y^2 + 2(1+3y)(1-y)y + 2y^2 - 4(1-y)y \right] \\
&\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right] + \xi \left[\frac{1}{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right] \right] \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[(1-y)^2 y^3 + (1-y)y^3 \right] \\
&\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{(y^2)^2} - \frac{1}{(y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2})^2} \right] + \xi \left[\frac{1}{(y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2})^2} - \frac{1}{(y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2})^2} \right] \right],
\end{aligned}$$

e, através da manipulação:

$$\begin{aligned}
I &= (1-y)y + 2(1-y)y + 2(1+3y)(1-y) + 2y - 4(1-y), \\
&= 3(1-y)y + 2(1+3y)(1-y) + 2y - 4(1-y), \\
&= (3y-4)(1-y) + 2(1+3y)(1-y) + 2y = (3y-4+2+6y)(1-y) + 2y, \\
&= (9y-2)(1-y) + 2y = 9y-2-9y^2+2y+2y = 13y-2-9y^2,
\end{aligned}$$

encontramos, sem maiores problemas, a seguinte expressão para o contra-termo δ_{Z_2} :

$$\begin{aligned}
\delta_{Z_2} = (Z_2 - 1)^{(1)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1 + 3y) \left[(\xi - 1) \ln \left| \frac{y^2}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right| + \xi \ln \left| \frac{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right| \right] \\
&- \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z) \ln \left| \frac{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}}{z^2} \right| + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz (1+z) (1-z) z \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}} \right] \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [-2 + 13y - 9y^2] y \\
&\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{y^2} \right] + \xi \left[\frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}} \right] \right] \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (2-y) (1-y) y^3 \\
&\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{\left(y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}\right)^2} - \frac{1}{(y^2)^2} \right] + \xi \left[\frac{1}{\left(y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}\right)^2} - \frac{1}{\left(y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}\right)^2} \right] \right]. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Obtivemos aqui, um contra-termo ultravioleta finito, o que indica uma constante de renormalização finita. Contudo, como mencionado anteriormente, as correções radiativas fermiônicas e do vértice são ambas ultravioleta finitas; todavia, nada foi dito sobre os seus comportamentos no infravermelho, que pode aparecer a partir da integração sobre os parâmetros de Feynman. Apresentaremos uma discussão sobre esse assunto logo a seguir.

5.1.3 Constante de renormalização Z_0

O contra-termo relacionado com o setor massivo fermiônico é determinado ao calcularmos os termos da Eq.(3.123):

$$-m\delta_{Z_0} = -m(Z_0 - 1) = 2m_F^2 \left[m_F \frac{\partial \Sigma_1(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} + \frac{\partial \Sigma_2(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2} \right] - \Sigma_2(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2}. \tag{5.16}$$

Na verdade, é necessário calcularmos apenas o último termo de (5.16), pois os demais já foram calculados anteriormente, nas Eqs.(5.13), (5.14). É direto calcularmos $\Sigma_2(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m_F^2}$:

$$\begin{aligned}
\Sigma_2(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow m^2} &= -m \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \ln \left| \frac{m^2 z^2 + (1-z) m_P^2}{m^2 z^2} \right| \\
&+ \xi m^3 \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy y^2 \left[\frac{1}{m^2 y^2 + (1-y) m_P^2} - \frac{1}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right] \\
&+ (\xi - 1) m^3 \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy y^2 \left[\frac{1}{m^2 y^2} - \frac{1}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right] \\
&+ m \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[(\xi - 1) \ln \left| \frac{m^2 y^2}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right| + \xi \ln \left| \frac{m^2 y^2 + (1-y) m_P^2}{y^2 m^2 + x m_P^2} \right| \right]. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Portanto, combinando os resultados (5.13), (5.14) e (5.17) e, com convenientes manipulações, obtemos:

$$\begin{aligned}
-\delta_{Z_0} = & -(Z_0 - 1)^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[(\xi - 1) \ln \left| \frac{y^2}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right| + \xi \ln \left| \frac{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right| \right] \\
& + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \ln \left| \frac{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}}{z^2} \right| + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \left(2(1-z)z - (1-z)^2 z \right) \left[\frac{1}{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{z^2} \right] \\
& + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(-y^2 + 2(1-y)y^2 + 2y^2 + 2(1+3y)(1-y)y - 4(1-y)y \right) \\
& \times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right] + \xi \left[\frac{1}{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right] \right] \\
& + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left((1-y)^2 y^3 + (1-y)y^3 \right) \\
& \times \left[\xi \left[\frac{1}{\left(y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2} \right)^2} - \frac{1}{\left(y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2} \right)^2} \right] + (\xi - 1) \left[\frac{1}{(y^2)^2} - \frac{1}{\left(y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2} \right)^2} \right] \right],
\end{aligned}$$

e, também, com:

$$\begin{aligned}
I &= -y^2 + 2(1-y)y^2 + 2y^2 + 2(1+3y)(1-y)y - 4(1-y)y, \\
&= 2(1-y)y^2 + y^2 + 2(1+3y)(1-y)y - 4(1-y)y, \\
&= (2(1-y) + 1)y^2 + (2(1+3y) - 4)(1-y)y = (3-2y)y^2 + (-2+6y)(1-y)y, \\
&= ((3-2y)y + (-2+6y)(1-y))y = (3y - 2y^2 - 2 + 2y + 6y - 6y^2)y \\
&= (-2 + 11y - 8y^2)y,
\end{aligned}$$

segue a seguinte expressão para o contra-termo δ_{Z_0} :

$$\begin{aligned}
\delta_{Z_0} = & (Z_0 - 1)^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[(\xi - 1) \ln \left| \frac{y^2}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right| + \xi \ln \left| \frac{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} \right| \right] \\
& - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \ln \left| \frac{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}}{z^2} \right| + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz (1+z)(1-z)z \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2 + (1-z) \frac{m_P^2}{m^2}} \right] \\
& + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (11y - 8y^2 - 2)y \\
& \times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{y^2} \right] + \xi \left[\frac{1}{y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2}} - \frac{1}{y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2}} \right] \right] \\
& + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (2-y)(1-y)y^3 \\
& \times \left[\xi \left[\frac{1}{\left(y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2} \right)^2} - \frac{1}{\left(y^2 + (1-y) \frac{m_P^2}{m^2} \right)^2} \right] + (\xi - 1) \left[\frac{1}{\left(y^2 + x \frac{m_P^2}{m^2} \right)^2} - \frac{1}{(y^2)^2} \right] \right]. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Tal expressão, bem como a do contra-termo δ_{Z_2} , também é uma quantidade ultravioleta finita em ordem α .

5.1.4 Constante de renormalização Z_1

Por fim, falta-nos determinar apenas o contra-termo relacionado com o vértice da teoria. A partir da condição de renormalização Eq.(3.125), $F_1(q^2 \rightarrow 0) = 0$, e da expressão (5.8), encontramos:

$$\begin{aligned}
0 = & (Z_1 - 1)^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-x-y)}{(x+y)^2} \right| \\
& + \frac{3\alpha}{2\pi} \int d\xi \left[(\xi - 1) \ln \left| \frac{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z}{(x+y)^2} \right| + \xi \ln \left| \frac{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-x-y)} \right| \right] \\
& + \frac{\alpha}{2\pi} \int d\zeta ((x+y)(x+5y) - 2(1-x-y)^2 - 4x) \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-x-y)} \right] \\
& + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz (2(x+y)(2-x-y) - (1-x-y)^2) \\
& \times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z} \right] \right. \\
& \left. + \xi \left[\frac{1}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-x-y)} - \frac{1}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z} \right] \right] \\
& + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz [4(x-xy+y)((x+y)(1-y) - x^2) + (x^2 + y^2)^2] \\
& \times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{[(x+y)^2]^2} - \frac{1}{[(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z]^2} \right] \right. \\
& \left. + \xi \left[\frac{1}{[(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-x-y)]^2} - \frac{1}{[(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z]^2} \right] \right]. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Porém, através de mudanças de variável, podemos escrever tal expressão em uma forma mais conveniente. Para isso, lidaremos com cada termo separadamente. Dessa forma:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-x-y)}{(x+y)^2} \right| \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dw [w] \ln \left| \frac{w^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-w)}{w^2} \right|; \tag{5.20}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{3\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \ln \left| \frac{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-x-y)} \right| \\
&= \frac{3\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (y) \ln \left| \frac{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z}{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-y)} \right|; \tag{5.21}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(x+y)(x+5y) - 2(1-x-y)^2 - 4x] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2}(1-x-y)} \right] \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dw (w^2 + 2w - 2) w \left[\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2 + \frac{m_P^2}{m^2}(1-w)} \right]; \tag{5.22}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz [2(x+y)(2-x-y) - (1-x-y)^2] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2}z} - \frac{1}{(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2}(1-x-y)} \right] \\
&= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy [1 - 6y + 3y^2] y \left[\frac{1}{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2}z} - \frac{1}{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2}(1-y)} \right]; \tag{5.23}
\end{aligned}$$

e, por fim:

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz [4(x-xy+y)((x+y)(1-y) - x^2) + (x^2 + y^2)^2] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{\left[(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2}(1-x-y) \right]^2} - \frac{1}{\left[(x+y)^2 + \frac{m_P^2}{m^2}z \right]^2} \right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I &= 4(x+y-xy)((x+y)(1-y) - x^2) + (x^2 + y^2)^2 \\
&= 4 \left[(x+y)^2(1-y) - x^2(x+y) - xy(x+y)(1-y) + x^3y \right] + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \\
&= 4 \left[(x^2 + 2xy + y^2)(1-y) - x^3 - x^2y - xy(x+y-xy-y^2) + x^3y \right] + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \\
&= 4 \left[x^2 + 2xy + y^2 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 - x^3 + x^2y^2 + xy^3 + x^3y \right] + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \\
&= 4 \left[(x+y)^2 - (x+y)^3 + xy(xy + y^2 + x^2) \right] + (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \\
&= 4 \left[(x+y)^2 - (x+y)^3 + xy \left((x+y)^2 - xy \right) \right] + (x-y)^2(x+y)^2 + 4x^2y^2 \\
&= 4 \left[(x+y)^2 - (x+y)^3 + xy(x+y)^2 \right] + (x-y)^2(x+y)^2 \\
&= 4(x+y)^2 - 4(x+y)^3 + 4xy(x+y)^2 + (x-y)^2(x+y)^2 \\
&= 4(x+y)^2 - 4(x+y)^3 + [4xy + (x-y)^2](x+y)^2 = 4(x+y)^2 - 4(x+y)^3 + (x+y)^4 \\
&= (x+y)^2 \left(4 - 4(x+y) + (x+y)^2 \right) = (x+y)^2 (2 - (x+y))^2; \tag{5.24}
\end{aligned}$$

o que resulta em:

$$I_5 = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy [y-2]^2 y^3 \left[\frac{1}{\left[y^2 + \frac{m_P^2}{m^2}(1-y) \right]^2} - \frac{1}{\left[y^2 + \frac{m_P^2}{m^2}z \right]^2} \right]. \tag{5.25}$$

Portanto, com os resultados acima, finalmente podemos escrever a seguinte expressão para o contra-termo δ_{Z_1} :

$$\begin{aligned}
\delta_{Z_1} = (Z_1 - 1)^{(1)} = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (3y) \left[(\xi - 1) \ln \left| \frac{y^2}{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z} \right| + \xi \ln \left| \frac{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-y)}{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z} \right| \right] \\
& - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dw [w] \ln \left| \frac{w^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-w)}{w^2} \right| + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dw (2 - 2w - w^2) w \left[\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-w)} \right] \\
& + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (1 - 6y + 3y^2) y \\
& \times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z} \right] + \xi \left[\frac{1}{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-y)} - \frac{1}{y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z} \right] \right] \\
& - \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (y - 2)^2 y^3 \\
& \times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{[y^2]^2} - \frac{1}{[y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z]^2} \right] + \xi \left[\frac{1}{[y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} (1-y)]^2} - \frac{1}{[y^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z]^2} \right] \right]. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Todas as expressões para os contra-termos: δ_{Z_2} Eq.(5.15), δ_{Z_0} Eq.(5.18) e δ_{Z_1} Eq.(5.26), possuem um termo divergente no infravermelho, introduzido pela integração sobre os parâmetros de Feynman. Embora a teoria possua um parâmetro de massa regulador m_P^2 no propagador do fóton, o termo de divergência infravermelha provém da contribuição do setor de QED_4 . Contudo, a estrutura do termo divergente é a mesma para todas as expressões acima e é escrita como:

$$I_{IR} = (3 - \xi) \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dy \frac{1}{y}. \tag{5.27}$$

É precisamente nesse termo que reside o principal motivo de termos escrito as expressões das correções radiativas para um gauge geral ξ . Tal termo divergente também poderia ser obtido ao introduzirmos um parâmetro como: $\epsilon_{IR} = d - 4$, $\epsilon_{IR} \rightarrow 0^-$ no cálculo das integrais via regularização dimensional. Através de análises via o grupo de renormalização em QED_4 (no regime $p^2 \ll m^2$), é conhecida a existência de uma escolha de gauge, única, em que o propagador do elétron comporta-se assintoticamente livre e também é livre de divergência infravermelha. Essa escolha de gauge é conhecida como o "gauge de Fried-Yennie"[50, 51], representada pela escolha: $\xi = 3$. A mesma afirmação continua verdadeira na $GQED_4$ (veja a Eq.(5.27)). Dessa forma, podemos dizer que as quantidades ultravioleta finitas, Σ e Λ (ambas quantidades dependentes do gauge), também são infravermelha finitas no gauge de Fried-Yennie. Podemos concluir, portanto, que a $GQED_4$, exceto a expressão de Π , é ultravioleta e infravermelha finita na escolha $\xi = 3$, na aproximação de 1-loop.

5.2 Acoplamento Efetivo da $GQED_4$

É esperado que modificações às contribuições de primeira-ordem à amplitudes de transição sejam, em geral, dependentes das variáveis cinemáticas. Uma maneira conveniente de representar uma importante classe dessas modificações é introduzir algumas quantidades invariantes, como a constante de carga

efetiva (*running coupling constant*). Na QED_4 , em que o vácuo se comporta como um meio polarizado, a carga efetiva possui uma dependência com a escala de comprimento.

Embora a constante de renormalização Z_3 , Eq.(5.9), não dependa do parâmetro de Podolsky m_P , existem outras quantidades que podem ser sensíveis a seus efeitos em ordem- α . Um desses cenários é o espalhamento de Coulomb [48]. De fato, o potencial de Coulomb de uma carga pontual, é escrito na eletrodinâmica de Podolsky como $\phi(r) = \frac{e}{r} (1 - e^{-m_P r})$. Assim, analisaremos aqui os efeitos da eletrodinâmica de Podolsky na usual constante de carga efetiva no espalhamento de Coulomb, em que acontece a manifestação de ordem mais baixa do fenômeno de polarização do vácuo. Tal investigação também poderia ser realizada via métodos do grupo de renormalização.

Para analisar tal problema, consideraremos o espalhamento de Born, i.e., o espalhamento de um elétron por um próton massivo ($M \rightarrow \infty$) [52]. A amplitude invariante possui a seguinte forma no limite $M \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{M} = -ie^2 \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) [i\mathcal{D}^{\mu\nu}(k)] [2M\delta_{\nu 0}] \quad (5.28)$$

no caso da QED_4 , temos:

$$\mathcal{M} = -\frac{ie^2}{k^2} \bar{u}(p') \gamma_0 u(p) 2M. \quad (5.29)$$

A expressão é precisamente a forma de uma interação Coulombiana, uma interação de uma corrente leptônica com um potencial puramente tipo-tempo. É possível ver, ainda, através da relação Eq.(5.28), que a amplitude de transição de Coulomb também é renormalizada pelo fator Z_3 (devido a sua dependência com o propagador do fóton) e que é a mesma constante responsável pela renormalização da carga do elétron.

Devido ao fato do escalar de polarização Π , Eq.(5.2), ser independente do parâmetro de gauge, a análise que segue também é independente. Assim, iniciamos por considerar o propagador livre do fóton, Eq.(5.3), no gauge de Landau $\xi = 0$:

$$iD_{\mu\nu}(k^2) = T_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right).$$

Dessa forma, podemos escrever o propagador completo do fóton no espalhamento de Coulomb como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(k^2) &= (-i)T_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right) \\ &\quad + (-i)T_{\mu\sigma} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right) (i)\Pi^{\sigma\rho}(k) (-i)T_{\rho\nu} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right), \\ i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k^2) &= T_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{k^2}{k^2 - m_P^2} \right) (\Pi(k)) \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

A última expressão acima ainda pode ser escrita, ao substituirmos a forma explícita do escalar Π , como:

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k^2) &= T_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{k^2}{k^2 - m_P^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[Z_3 - 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz (1-z) z \ln \left[1 - \frac{z(1-z)k^2}{m^2} \right] \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Estamos interessados, aqui, em analisar modificações da amplitude de transição de Coulomb no regime $k^2/m^2 \gg 1$. Nessa aproximação, obtemos da equação (5.31) o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k^2) &= T_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{k^2}{k^2 - m_P^2} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left[Z_3 - 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz (1-z) z \ln \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right] \right], \\ &= T_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_P^2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{k^2}{k^2 - m_P^2} \right) \left[Z_3 - 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right] \right]; \end{aligned}$$

expressão que nos leva a definir a constante de carga efetiva por:

$$\begin{aligned} \alpha_R(k^2) &= \alpha \left[1 + \left(1 - \frac{k^2}{k^2 - m_P^2} \right) \left[Z_3 - 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right] \right] \\ &= \alpha_R(m^2) \left[1 - \frac{k^2}{k^2 - m_P^2} \left(1 - \frac{1}{Z_3} \right) + \frac{\alpha_R(m^2)}{3\pi} \frac{1}{(Z_3)^2} \left(1 - \frac{k^2}{k^2 - m_P^2} \right) \ln \left(\frac{k^2}{m^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Com $\alpha_R(m^2) = Z_3\alpha$, e Z_3 dado por Eq.(5.9). Na ordem α_R^2 e regime $k^2/m^2 \gg 1$, encontramos a seguinte expressão para a carga efetiva:

$$\alpha_R(k^2) = \alpha_R(m^2) \left[1 + \frac{\alpha_R(m^2)}{3\pi} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_P^2}} \ln \left[\frac{k^2}{m^2} \right] + O(\alpha_R^2) \right]. \quad (5.32)$$

Ainda, é possível continuarmos estudando modificações ao espalhamento de Coulomb (no regime $k^2/m^2 \gg 1$), em ordens subsequentes em teoria de perturbação. Para esse propósito, podemos somar uma importante classe de diagramas bolhas de 1-loop, o que corresponde somar o maior conjunto de divergências logarítmicas (essa aproximação é conhecida por *leading logarithmic approximation*). Assim, sob tais circunstâncias, podemos escrever a seguinte expressão para a constante de carga efetiva:

$$\alpha_R(k^2) = \frac{\alpha_R(m^2)}{1 - \frac{\alpha_R(m^2)}{3\pi} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_P^2}} \ln \left[\frac{k^2}{m^2} \right]}. \quad (5.33)$$

É conveniente escrevermos a expressão acima na seguinte forma:

$$\frac{1}{\alpha_R(k^2)} = \frac{1}{\alpha_R(m^2)} - \frac{1}{3\pi} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_P^2}} \ln \left[\frac{k^2}{m^2} \right]. \quad (5.34)$$

Em que vemos diretamente que, no limite $m_P^2 \rightarrow \infty$, recuperamos o resultado usual da QED_4 [48], conforme o desejado.

Também, temos de (5.33), que $\alpha_R(k^2)$ é singular no seguinte ponto:

$$\frac{\alpha_R}{3\pi} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_P^2}} \ln \left[\frac{k^2}{m^2} \right] = 1,$$

o que nos leva a um novo pólo de Landau:

$$\exp \left(\frac{3\pi}{\alpha_R} \right) = \exp \left[\frac{1}{1 - \frac{k^2}{m_P^2}} \right] \left[\frac{k^2}{m^2} \right]. \quad (5.35)$$

Ainda, para $m_P^2 \rightarrow \infty$, ($\alpha_R \sim \frac{1}{137}$) temos o usual pólo de Landau:

$$\frac{k^2}{m^2} \sim 10^{560}. \quad (5.36)$$

5.3 Momento Magnético do Elétron e o Parâmetro de Podolsky

Atualmente, o valor do momento magnético anômalo do elétron é o teste mais preciso na física de partículas. Ele foi calculado, primeiramente, em nível de um 1-loop por Schwinger [53] e refinado a 2-loops em diversos trabalhos [54]. Os cálculos de ordens subsequentes foram reunidos por Kinoshita em [55]. Também, foi realizado um interessante cálculo a 2-loops no gauge de Fried-Yennie [51], mostrando concordância com os cálculos anteriores, o que é garantido pela independência da escolha de gauge das quantidades físicas da teoria.

Pretendemos utilizar, aqui, esse dado experimental preciso para limitar os valores do parâmetro livre de Podolsky m_P em física de alta-energia. Para isso, calcularemos a contribuição para o fator de forma $F_2(q^2)$ Eq.(5.7):

$$F_2(q^2) = \frac{2\alpha}{\pi} m^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (xy + y^2 - x) \times \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} \right]; \quad (5.37)$$

que, ainda, pode ser escrito como a soma de duas contribuições distintas:

$$F_2(q^2) = F_{QED}(q^2) + F_{POD}(q^2).$$

O termo $F_{QED}(q^2)$, é a contribuição calculada inicialmente por Schwinger. Através de uma simples mudança de variáveis, ela pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} F_{QED}(0) &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \frac{1}{(1-z)^2} \int_0^{1-z} dx ((1-z) - x - (x+z)(1-z)), \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{(1-z)}{2} - z \right) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \frac{z}{2}, \end{aligned}$$

o que resulta em:

$$F_{QED}(0) = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (5.38)$$

Agora, o outro termo $F_{POD}(q^2)$ fornece uma contribuição interessante. Para calcularmos esse termo (como o nosso interesse reside no momento magnético anômalo), já tomamos o limite $q^2 \rightarrow 0$. Através da mesma mudança de variáveis anterior, também encontramos:

$$\begin{aligned} F_{POD}(0) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \frac{1}{(1-z)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z} \int_0^{1-z} dx ((1-z) - x - (x+z)(1-z)), \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \frac{1}{(1-z)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z} \left((1-z)^2 - \frac{(1-z)^2}{2} - \frac{(1-z)^3}{2} - z(1-z)^2 \right), \\ &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)^2}{(1-z)^2 + \frac{m_P^2}{m^2} z}; \end{aligned}$$

por fim, fazendo a seguinte mudança de variável $u = 1 - z$, obtemos:

$$F_{POD}(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 du \frac{u^3 - u^2}{u^2 + \frac{m_P^2}{m^2}(1-u)}; \quad (5.39)$$

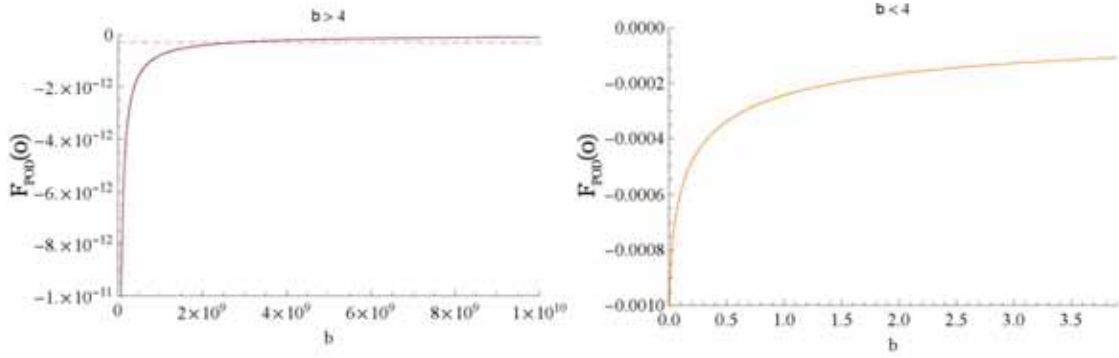


Figura 5.1: Curvas de $F_{POD}(0)$ e o valor do erro experimental para $b > 4$ e $b < 4$.

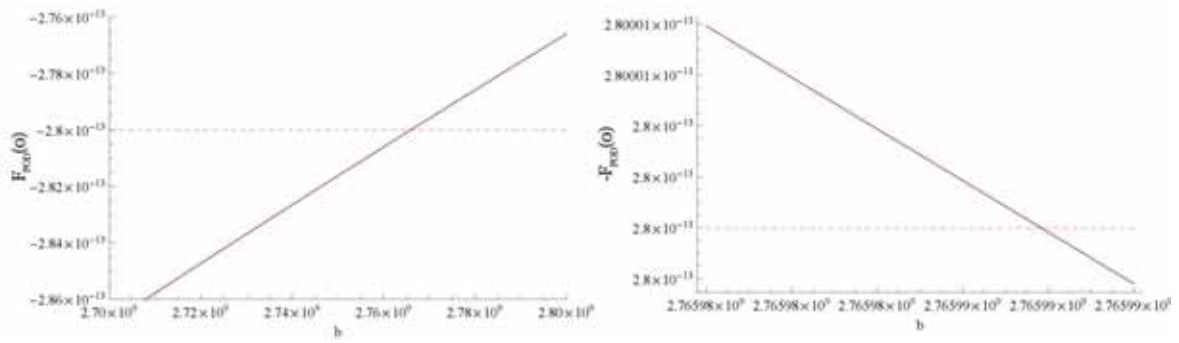


Figura 5.2: Ponto de intersecção das curvas para $b > 4$.

Considerando a condição $b(b-4) > 0$, com $b = \frac{m_P^2}{m^2}$, encontramos o resultado:

$$F_{POD}(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{b(b-4)}} \left[\sqrt{b(b-4)} (-1 + 2b + (2-b)b \ln b) - b(2+b(b-4)) \left\{ \ln \left[\frac{\sqrt{b(b-4)} + 2-b}{\sqrt{b(b-4)} - 2+b} \right] + \ln \left[\frac{\sqrt{b(b-4)} + b}{\sqrt{b(b-4)} - b} \right] \right\} \right]. \quad (5.40)$$

Nos outros casos, a função logaritmo deve ser substituída pela função arctan.

Dizemos aqui que, tendo em vista a perfeita concordância entre os resultados teóricos da QED_4 com os experimentos, a contribuição de Podolsky, Eq.(5.40), deve ser, no máximo, igual ao erro experimental do valor do momento magnético anômalo do elétron. O valor experimental do momento magnético anômalo do elétron é $a_{\text{exp}} = 1,15965218073 \times 10^{-3} \pm 2,8 \times 10^{-13}$ [56]. Através dos gráficos acima, observamos que a única região em que encontra-se um valor concordante para determinar o parâmetro m_P é em $b(b-4) > 0$. Portanto, através da comparação da expressão (5.40) com o valor do erro acima, encontramos que o valor $m_P = 3,7595 \times 10^{10} \text{ eV}$ é compatível com o dado experimental.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Comentários Finais

No projeto inicial de trabalho estávamos interessados em estudar teorias gerais de ordem-superior, mas, no momento em que quisemos particularizar a análise à apenas um modelo, tivemos que nos ater a certos interesses e, dentre os motivos que nos levaram à escolha particular da teoria de Podolsky como assunto desta tese estão: o fato de a teoria de Podolsky ser uma alternativa a de Maxwell, e por ela também possuir uma estrutura canônica mais rica e interessante. Dessa forma, esta tese tratou da completa quantização da Eletrodinâmica de Podolsky. Embora tenhamos sido rigorosos da forma que o formalismo de integração funcional nos permite, esta tese não é matematicamente rigorosa, tendo em vista que as distribuições operatoriais são tratadas simplesmente como funções.

Escolhemos utilizar, aqui, métodos funcionais como o método de quantização desse modelo, pois ele constitui um elegante formalismo para Teorias Quânticas de Campos. Outra característica marcante dos métodos funcionais é que eles são, a princípio, não-perturbativos. Isso é de suma importância para desenvolvimentos e estudos na região infravermelha da QCD_4 e, também, de modelos em baixas dimensões. A quantidade mais importante desse formalismo é conhecido como funcional gerador, objeto que gera todas as informações de uma dada teoria através de derivadas funcionais (no caso particular de Teoria Quântica de Campos, geram as funções de Green). Porém, antes de determinarmos a expressão do funcional gerador da Eletrodinâmica de Podolsky, foi necessário que realizássemos uma análise Hamiltoniana para sistemas singulares no início do capítulo 3, para, somente assim, obtermos a expressão para a amplitude de transição; entretanto, tal expressão não era explicitamente covariante, mas, com o auxílio do ansatz de Faddeev-Popov-DeWitt, na condição de Lorenz generalizada Eq.(3.34), foi possível que obtivéssemos uma expressão covariante para a amplitude de transição. Ainda, a escolha dessa condição de gauge foi de grande importância para os resultados obtidos nesta tese.

Procedemos, em seguida, em derivar as equações de Schwinger-Dyson-Fradkin (SDFE) da teoria através de métodos funcionais e, assim, três funções de Green foram encontradas: os propagadores do fóton \mathcal{D} e do elétron \mathcal{S} , e a função de vértice Γ , Eqs.(3.58), (3.70), e (3.86), respectivamente. Temos, ainda, que a forma funcional de todas as expressões completas das correções radiativas da $GQED_4$ são equivalentes às da QED_4 , porém, a semelhança reside apenas nesse ponto, pois, já em nível de árvore, a expressão para o propagador do fóton, Eq.(3.60), apresenta mudanças em relação à expressão da QED_4 . É esse fato que nos leva à conclusão de que em ordem- α , apenas as expressões da auto-energia do elétron

e da parte do vértice possuem contribuições do termo de Podolsky.

Seguindo com o desenvolvimento formal da teoria, derivamos todas as identidades de Ward-Fradkin-Takahashi. A primeira identidade, Eq.(3.95), mostra-nos o caráter transversal da função $1PI$ do fóton; conseqüentemente, mostra também o caráter transversal do tensor de polarização $\Pi_{\mu\nu}$, Eq.(3.96). Em seguida, encontramos a outra identidade WFT, Eq.(3.97), que relaciona a função de vértice $1PI$ com o propagador completo do elétron; tal identidade também é responsável por assegurar a essência da simetria de gauge em nível quântico, sem a qual a renormalizabilidade da teoria não poderia ser garantida. Por fim, para encerrarmos o Capítulo 3, estudamos o processo e as conseqüências diretas da renormalização da $GQED_4$. Estruturalmente falando, como a $GQED_4$ possui as mesmas características da QED_4 , a nossa discussão formal do esquema de renormalização na camada de massa seguiu as diretrizes já conhecidas do programa. O ponto mais importante dessa discussão foi a escolha das condições de renormalização, em particular, da condição de renormalização do propagador do fóton. Para tal funcional, exigimos que ele, no limite $k^2 \rightarrow 0$, deveria comportar-se como um verdadeiro fóton de Maxwell, i.e., uma partícula não-massiva. Essa condição permitiu-nos interpretar, corretamente, o termo de Podolsky, bem como a contribuição, como um regulador natural da teoria, assim como um termo de Raisyk-Pauli-Villars [22].

Na parte da tese situada no Capítulo 4, lidamos com o cálculo e a análise das correções radiativas da teoria em ordem- α , e com o que a contribuição de Podolsky traz para essa teoria. Nessa ordem de aproximação, verificamos que a função de auto-energia do fóton ainda é divergente ultravioleta, Eq.(4.1), e que a mesma constante de renormalização também é responsável pela renormalização da carga eletrônica e . Já nos resultados das outras duas funções, apareceram alguns fatos interessantes. Vimos que o propagador livre do fóton possui um papel importante, pois é ele que dá origem a separação das funções em duas contribuições distintas: uma da QED_4 usual, e uma outra, que denotamos como "setor de Podolsky". Essa separação possibilitou que estudássemos cada contribuição independentemente. Desde que a contribuição da QED_4 é bem conhecida na literatura, nossa tarefa aqui era a de calcularmos a contribuição de Podolsky para a função de auto-energia do elétron e , também, para a parte do vértice. Portanto, através de métodos conhecidos, calculamos as duas contribuições dos termos de Podolsky, Eqs.(4.25) e (4.62), respectivamente. Para nossa surpresa, encontramos que as expressões de ambas contribuições possuíam os mesmos termos divergentes dos da QED_4 , mas com sinal oposto: forneceram, assim, expressões finais finitas para a $GQED_4$, em ordem- α , Eqs.(4.27) e (4.64). Embora tenhamos nos restringido no cálculo ao caso de $\xi = 1$, esses resultados são válidos para qualquer ξ (como discutido na seção 5.1). Ademais, como uma conseqüência direta da finitude de Σ e Λ , verificamos que a identidade de WFT, Eq.(3.97), permanece sendo satisfeita nessa ordem de aproximação.

Para finalizar a tese, analisamos, no Capítulo 5, algumas quantidades relacionadas com a renormalização da teoria. Primeiro, apresentamos as expressões explícitas das funções radiativas a 1-loop em um gauge geral ξ , para, somente assim, iniciarmos o cálculo de todos os quatro contra-termos da teoria. Por as expressões dos contra-termos fermiônicos e também a do vértice: δ_{Z_0} , δ_{Z_2} , δ_{Z_1} , serem todas ultravioleta finitas, levaram-nos a uma conclusão ingênua de que a teoria era inteiramente finita. Porém, uma análise detalhada de cada uma das expressões desses contra-termos mostrou-nos que todas elas possuíam o mesmo termo com divergência infravermelha, introduzida pela integração sobre os parâmetros de Feynman, Eq.(5.27). O termo divergente tem uma dependência com o parâmetro de gauge ξ do tipo $(3 - \xi)$, que é similar ao gauge de Fried-Yennie na QED_4 [50, 51], $\xi = 3$; essa escolha de gauge é

conhecida como sendo livre de divergências infravermelha na QED_4 . Essa mesma afirmação também é válida na $GQED_4$.

Embora o campo do fóton não sinta efeitos da contribuição de Podolsky em ordem- α , estudamos o cenário do espalhamento de Coulomb, que efetivamente é sensível a esses termos. Então, definindo uma nova quantidade, conhecida como a constante de carga efetiva, fomos capazes de estudar o acoplamento efetivo da teoria. Ainda, no regime $k^2/m^2 \gg 1$ e na aproximação *leading logarithmic*, obtivemos uma expressão explícita para o acoplamento efetivo que, no limite $m_P^2 \rightarrow \infty$, reproduz o resultado usual da QED_4 .

Encerramos a tese ao calcularmos e também analisarmos a contribuição de Podolsky para o momento magnético anômalo do elétron na aproximação de 1-loop. Primeiro, obtivemos o resultado conhecido, a contribuição da QED_4 : $F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} e$, em seguida, a partir da expressão da contribuição de Podolsky, discutimos a possibilidade de utilizarmos o dado experimental do momento magnético anômalo (que é o dado experimental de maior precisão da física de altas-energias), para impormos um limite ao parâmetro de Podolsky m_P^2 . Enfim, encontramos um valor compatível, como sendo: $m_P = 3,7595 \times 10^{10} eV$. Um comentário importante a ser feito aqui, é que temos na teoria uma escala natural de energia, que é a massa do elétron m , o que permite, então, um resultado significativo para o parâmetro de Podolsky.

6.2 Perspectivas Futuras

Embora a renormalizabilidade da teoria já tenha sido estudada e quantidades subsequentes foram calculadas, ainda existem alguns problemas a serem analisados na $GQED_4$. Seria interessante uma análise das propriedades de gauge das funções de Green da $GQED_4$, que são baseadas nas transformações de Landau-Khalatnikov-Fradkin [35, 39, 38], para a teoria fosse traçada. Um outro tópico importante, seria a análise do comportamento assintótico dos propagadores através da equação do grupo de renormalização. Entretanto, acreditamos que o maior problema envolvendo a $GQED_4$, seja a sua formulação através da teoria de perturbação causal [26], o que, por si só, fornece uma teoria bem estabelecida e também ultravioleta finita. Um outro projeto futuro, poderia seguir a linha de pesquisa de modelos de teoria de campos de ordem-superior, à temperatura finita, aplicando o formalismo de Matsubara-Fradkin [21] para teorias como campos escalares, vetoriais e fermiônicos em interação e, também, para teorias de gauge não-abelianas, principalmente problemas relacionados a informações não-perturbativas e transições de fase.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg, **Phenomenological Lagrangians**, *Physica* **96A**, 327 (1979).
A. Pich, *A Course of Effective Field Theory*, 1998, hep-ph/9806303v1.
C. Marat Reyes, **Testing symmetries in effective models of higher derivative field theories**, *Phys. Rev.* **80D**, 105008 (2009).
- [2] M. Ostrogradskii, *Mem. St. Petersburg* **14V**, 385 (1950).
P. Weiss, **On the Hamilton-Jacobi Theory and Quantization of a Dynamical Continuum**, *Proc. Royal Soc. London* **169A**, 102 (1938); **On the Hamilton-Jacobi Theory and Quantization of Generalized Electrodynamics**, *Proc. Royal Soc. London* **169A**, 119 (1938).
J. S. Chang, **Field theories with high derivatives**, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **44**, 76 (1948).
- [3] A.A Slavnov, **Invariant regularization of gauge theories**, *Theor. Math. Phys.* **13**, 1064 (1972); **Pauli-Villars regularization for non-Abelian gauge theories**, *Theor. Math. Phys.* **33**, 977 (1977).
- [4] V.V. Nesterenko, **The Singular Lagrangians With Higher Derivatives**, *J. Phys.* **22A**, 1673 (1989).
L. Alvares-Gaume, L. Labastida e J.M.F. Ramalho, **A note on perturbative Chern-Simons theory**, *Nucl. Phys.* **334B**, 103 (1990).
- [5] M. Baker, L. Carson, J.S. Ball e F. Zachariasen, **Color confinement and long-distance color fields in QCD**, *Nucl. Phys.* **229B**, 456 (1983).
A.I. Alekseev, B.A. Arbuzov, e V.A. Baikov, **Infrared asymptotic behavior of gluon Green's functions in quantum chromodynamics**, *Theor. Math. Phys.* **52**, 739 (1982).
A.I. Alekseev e B.A. Arbuzov, **Classical Yang-Mills field theory with nonstandard Lagrangians**, *Theor. Math. Phys.* **59**, 372 (1984).
- [6] K.S. Stelle, **Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity**, *Phys. Rev.* **16D**, 953 (1977); **Classical Gravity with Higher Derivatives**, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 353 (1978).
- [7] R.R. Cuzinatto, C.A.M. de Melo e P.J. Pompeia, **Second order gauge theory**, *Ann. Phys.* **322**, 1211 (2007).
- [8] D.M. Hofman, **Higher derivative gravity, causality and positivity of energy in a UV complete QFT**, *Nucl. Phys.* **823B**, 174 (2009).

- T. P. Soritiou e V. Faraoni, *$f(R)$ theories of gravity*, Rev. Mod. Phys. 82, 451 (2010).
- S. Dengiz e B. Tekin, **Higgs mechanism for new massive gravity and Weyl-invariant extensions of higher-derivative theories**, Phys. Rev. 84D, 024033 (2011).
- [9] F.S. Gama, M. Gomes, J.R. Nascimento, A.Yu. Petrov e A. J. da Silva, **Higher-derivative supersymmetric gauge theory**, Phys. Rev. 84D, 045001 (2011).
- M. Faizal e M. Khan, **A superspace formulation of the BV action for higher derivative theories**, Eur. Phys. J. 71C, 1603 (2011).
- [10] J. Polonyi e A. Siwek, **Spontaneous breakdown of Lorentz symmetry in scalar QED with higher order derivatives**, Phys. Rev 84D, 085014 (2011).
- B. Pereira-Dias, C.A. Hernaski, e J.A. Helayël-Neto, **Probing the effects of Lorentz-symmetry violating Chern-Simons and Ricci-Cotton terms in higher derivative gravity**, Phys. Rev. 83D, 084011 (2011).
- [11] K. Andrzejewski, J. Gonera, P. Machalski, e P. Maslanka, **Modified Hamiltonian formalism for higher-derivative theories**, Phys. Rev. 82D, 045008 (2010).
- P. Mukherjee, **Poincaré gauge theory from higher derivative matter Lagrangians**, Class. Quantum Grav. 27, 215008 (2010).
- [12] F. Bopp, Ann. der Physik **38**, 345 (1940).
- [13] B. Podolsky, **Generalized Electrodynamics Part I - Non-Quantum**, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
- B. Podolsky e C. Kikuchy, **Generalized Electrodynamics Part II - Quantum**, Phys. Rev. **65**, 228 (1944).
- B. Podolsky e P. Schwed, **Review of a Generalized Electrodynamics**, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).
- [14] J. Frenkel, **4/3 problem in classical electrodynamics**, Phys. Rev. **54E** 5859 (1996).
- [15] R.R. Cuzinatto, C.A.M. de Melo, L.G. Medeiros e P.J. Pompeia, **How can one probe Podolsky Electrodynamics?**, Int. J. of Mod. Phys. **26A** 3641 (2011).
- [16] A.E.S. Green, Self Energy and Interaction Energy in Podolsky's Generalized Electrodynamics, Ph.D., University of Cincinnati, 1948; AAT 0151695.
- R.E. Martin, Electron Self Energy in Generalized Quantum Electrodynamics, Ph.D, University of Cincinnati, 1960.
- [17] C. A. P. Galvão e B. M. Pimentel, **The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics**, Can. J. Phys. **66**, 460 (1988).
- [18] C.A. Bonin, R. Bufalo, B.M. Pimentel e G.E.R. Zambrano, **Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the Stefan-Boltzmann law**, Phys. Rev. **81D**, 025003 (2010).
- [19] E.S. Fradkin, U. Esposito e S. Termini, **Functional Techniques in Physics**, Rivista del Nuovo Cimento Vol. II **4**, 498 (1970).

- [20] R. Bufalo, B.M. Pimentel e G.E.R. Zambrano, **Path integral quantization of generalized quantum electrodynamics**, Phys. Rev. **83D**, 045007 (2011).
- [21] C.A. Bonin e B.M. Pimentel, **The Matsubara-Fradkin Thermodynamical Quantization of Podolsky Electrodynamics**, Phys. Rev. **84D**, 065023 (2011).
- [22] J. Rayski, **Polarization of the Vacuum**, Phys. Rev. **75**, 1961 (1949).
W. Pauli e F. Villars, **On the Invariant regularization in relativistic quantum theory**, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
- [23] E.C.G Stückelberg e D. Rivier, **Causalité et structure de la Matrice S**, Helv. Phys. Acta **22**, 215 (1950).
E.C.G Stückelberg e J. Green, **Elimination des constantes arbitraires dans la théorie relativiste des quanta**, Helv. Phys. Acta **24**, 153 (1949).
- [24] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, John Wiley and Sons Inc, 3a ed., 1980.
S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, 2a ed., 2000.
- [25] H. Epstein e V. Glaser, **The role of locality in perturbation theory**, Ann. Inst. Poincaré **19A**, 211 (1973).
- [26] G. Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag, 2a ed., 1995; *Quantum Gauge Theories - A True Ghost Story*, John Wiley and Sons Inc, 1a ed., 2001.
- [27] H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, **On the formulation of quantized field theories**, Nuovo Cimento **1**, 205 (1955); **On the formulation of quantized field theories II**, Nuovo Cimento **6**, 319 (1957).
- [28] N. Nakanishi e I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, *World Scientific Lecture Notes in Physics Vol.27*, World Scientific, Singapura, 1991.
- [29] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 3a ed., Oxford Science Publishers, 1996.
- [30] L.D. Faddeev, **The Feynman Integral for Singular Lagrangians**, Teoret. i Mat. Fiz. **1**, 3 (1969) [Trans.Theor. Math. Phys. **1**, 1 (1970)].
P. Senjanovic, **Path Integral Quantization of Fiefl Theories with Second-Class Constraints**, Ann. Phys. **100**, 227 (1976), Erratum by Y.-G. Miao, Annals of Physics **209**, 248 (1991).
- [31] E.S. Fradkin e G.A. Vilkovisky, **Quantization of Relativistic Systems with Constraints: Equivalence of Canonical and Covariant Formalisms in Quantum Theory of Gravitational Field**, CERN-TH-2332, 1977.
I.A. Batalin e G.A. Vilkovisky, **Relativistic S-Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints**, Phys.Lett. **69B**, 309 (1977).
E.S. Fradkin e T.E. Fradkina, **Quantization of Relativistic Systems with Bosons and Fermion first- and second-class Constraints**, Phys.Lett. **72B**, 343 (1978).

- [32] E.S. Fradkin, **The Quantum Theory of Fields I**, Zhur. Eksptl. i Teor. Fiz. **29**, 121 (1955) (Trad: Soviet. Phys. JETP **2**, 148 (1956)).
V. Ya. Fainberg, *Quantum Field Theory and Quantum Statistics, Essays in Honor of the Sixtieth Birthday of E.S. Fradkin*, **1**, 1 (1987), IOP Publishing Ltd. 1987, Adam Hilger, Bristol.
- [33] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.
A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian systems*. Rome: Academic Nazionale dei Lincei, 1976.
K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol. 169*, Springer, New York, 1982.
- [34] J. Schwinger, **On the Green's functions of quantized fields I**, Proc. Nat. Acad. Sc. **37**, 452 (1951); **On the Green's functions of quantized fields II**, Proc. Nat. Acad. Sc. **37**, 455 (1951).
K. Symanzik, Z. Naturforsch **9A**, 809 (1954).
- [35] L.D. Landau e I.M. Khalatnikov, **The gauge transformation of the Green function for charged particles**, Zhur. Eksptl. i Teor. Fiz. **29**, 89 (1955) (Trad: Soviet. Phys. JETP **2**, 69 (1956)).
E.S. Fradkin, **Concerning some general relations of quantum electrodynamics**, Sov. Phys. JETP **2**, 361 (1956).
- [36] C.J. Burden e C.D. Roberts, **Light-cone regular vertex in three-dimensional quenched QED**, Phys. Rev. **44D**, 540 (1991).
- [37] D.C. Curtis e M.R. Pennington, **Truncating the Schwinger-Dyson equations: How multiplicative renormalizability and the Ward identity restrict the three-point vertex in QED**, Phys. Rev. **42D**, 4165 (1990).
B. Haeri, **Gauge invariance of the phase diagram in quenched QED**, Phys. Rev. **43D** 2701 (1991).
- [38] J. Johnson e B. Zumino, **Gauge dependence of the wave-function renormalization constant in QED**, Phys. Rev. Lett. **3**, 351 (1959).
B. Zumino, **Gauge properties of propagators in QED**, J. Math. Phys. **1**, 1 (1960).
- [39] T. Fukuda, R. Kubo e K. Yokoyama, **Possible Situation For Gauge Independence of Wave Function Renormalization Constants in Gauge Field Theories**, Prog. Theor. Phys. **63**, 1384 (1980).
- [40] L.D. Faddeev e V.N. Popov, **Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field**, Phys. Lett. **25B**, 29 (1967).
B.S. Dewitt, **Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory**, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
- [41] J.Barcelos-Neto, C.A.P. Galvão e C.P. Natividade, **Quantization of Podolsky theory in the BFV formalism**, Z. Phys. **52B**, 559 (1991).

- [42] F. J. Dyson, **The S-matrix in quantum electrodynamics**, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [43] C.D. Roberts e A.G. Williams, **Dyson-Schwinger Equations and their Application to Hadronic Physics**, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994).
- [44] C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press Inc, London, 1978.
- [45] A.P. Bakulev e D.V. Shirkov, **Inevitability and Importance of Non-Perturbative Elements in Quantum Field Theory**, arXiv:1102.2380v1 [hep-ph].
- [46] R. Bufalo, R. Casana e B.M. Pimentel, **Strong coupling limits and quantum isomorphisms of the gauged Thirring model**, Int. J. Mod. Phys. **26A**, 1545 (2011).
- [47] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- [48] A.I. Akhiezer and V.B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, Interscience Publishers, New York, 2a ed., 1965.
- [49] P. H. Frampton, *Gauge Field Theories*, Wiley-VCA (Verlag), 3a ed, 2008.
- [50] H.M. Fried e D.R. Yennie, **New Techniques in the Lamb Shift Calculation**, Phys. Rev. **112**, 1391 (1958).
G.S. Adkins, **Fried-Yennie gauge in dimensionally regularized QED**, Phys. Rev. **47D**, 3647 (1993).
- [51] G.S. Adkins, **Calculation of the electron magnetic moment in Fried-Yennie gauge QED**, Phys. Rev. **39D**, 3798 (1989).
- [52] C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Westview Press, 2a ed., 1997.
- [53] J. Schwinger, **On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron**, Phys. Rev. **73**, 416 (1948); **Quantum Electrodynamics. III. The Electromagnetic Properties of the Electron-Radiative Corrections to Scattering**, Phys. Rev. **76**, 790 (1949).
- [54] R. Karplus e N.M. Kroll, **Fourth-Order Corrections in Quantum Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron**, Phys. Rev. **77**, 536 (1950).
C.M. Sommerfield, **Magnetic Dipole Moment of the Electron**, Phys. Rev. **107**, 328 (1957); **The magnetic moment of the electron**, Ann. Phys. (N.Y.) **5**, 26 (1958).
A. Petermann, **Magnetic moment of the electron**, Nucl. Phys. **3**, 689 (1957); **Fourth-order magnetic moment of the electron**, Helv. Phys. Acta **30**, 407 (1957).
- [55] *Quantum Electrodynamics*, Ed. K. Kinoshita, World Scientific Publisher, 1a ed., 1990.
T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita e M. Nio, **Tenth-Order QED contribution to Lepton Anomalous Magnetic Moment - Fourth-Order Vertices Containing Sixth-Order Vacuum-Polarization Subdiagrams**, Phys.Rev. **83D**, 053002 (2011).

- T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita e M. Nio, **Tenth-Order Lepton Anomalous Magnetic Moment – Sixth-Order Vertices Containing Vacuum-Polarization Subdiagrams**, arXiv:1105.5200v1 [hep-ph].
- T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita e M. Nio, **Tenth-Order QED Lepton Anomalous Magnetic Moment – Eighth-Order Vertices Containing a Second-Order Vacuum Polarization**, arXiv:1110.2826v1 [hep-ph].
- T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita e M. Nio, **Tenth-Order QED Contribution to the Lepton Anomalous Magnetic Moment – Sixth-Order Vertices Containing an Internal Light-by-Light-Scattering Subdiagram**, arXiv:1201.2461v1 [hep-ph].
- [56] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *Journal of Physics* **37G**, 075021 (2010).
- [57] A.O. Barut, *Electrodynamics and the Classical Theory of Fields and Particles*, MacMillian, New York, 1965.
- [58] L.M.C. De Souza e P.R. Rodrigues, **Field theory with higher derivatives - Hamiltonian structure**, *J. Phys. A: Gen. Phys.* **2**, 304 (1969).
- [59] V.V. Nesterenko, *The Singular Lagrangians with Higher Derivatives*, Joint Institute for Nuclear Research Pre-print, 1987.

Apêndice A

Identidades d -dimensionais

Como faremos uso de regularização dimensional no cálculo das expressões das correções radioativas, apresentamos aqui algumas identidades (d -dimensionais), úteis aos cálculos, associadas às integrais, às propriedades da função Γ às e matrizes- γ de Dirac.

A.1 Integração em d -dimensões

Alguns resultados de integrais, que aparecem no decorrer da tese:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha) [-m^2]^{\alpha - \frac{d}{2}}}, \quad (\text{A.1})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}} \eta_{\mu\nu}}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha) [-m^2]^{\alpha - 1 - \frac{d}{2}}}, \quad (\text{A.2})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^{\frac{d}{2}}}{4(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\alpha - 2 - \frac{d}{2}\right) \frac{[\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma} + \eta_{\rho\mu}\eta_{\nu\sigma}]}{\Gamma(\alpha) [-m^2]^{\alpha - 2 - \frac{d}{2}}}. \quad (\text{A.3})$$

A.2 A função Gama

Uma propriedade importante da função Gama (com $\epsilon \ll 1$) é dada pela seguinte relação:

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right]; \quad (\text{A.4})$$

em que

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma. \quad (\text{A.5})$$

γ é a constante de Euler-Mascheroni. As fórmulas

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad \mathcal{X}^{-\frac{\epsilon}{2}} \simeq 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \mathcal{X}, \quad (\text{A.6})$$

também são úteis nos cálculos.

A.3 As matrizes- γ de Dirac

A álgebra das matrizes- γ de Dirac em d -dimensões é:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Em que $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico no espaço de Minkowsky d -dimensional (com assinatura $+ - - \dots$), tal que $\delta_\mu^\mu = d$. Desta forma:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= d, \\ \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\sigma &= (2-d) \gamma^\mu, \\ \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma_\sigma &= 2(\gamma^\mu \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \gamma^\mu) + d\gamma^\lambda \gamma^\mu, \\ \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\alpha &= (2-d)^2 \gamma^\mu, \\ \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\sigma &= [2d - (2-d)^2] \gamma^\mu, \\ \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\eta \gamma_\sigma &= 2(\gamma^\eta \gamma^\lambda \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\eta + \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\eta) - d\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\eta. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Em complemento:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\# \text{ ímpar de matrizes-}\gamma) &= 0, \\ \text{Tr} I &= f(d), \quad \text{Tr} \gamma_\sigma \gamma_\alpha = f(d) \eta_{\sigma\alpha}, \\ \text{Tr} \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\eta &= f(d) [\eta^{\sigma\lambda} \eta^{\mu\eta} - \eta^{\sigma\mu} \eta^{\lambda\eta} + \eta^{\sigma\eta} \eta^{\lambda\mu}]. \end{aligned}$$

Em que $f(d)$ é uma função arbitrária bem-comportada, com $f(4) = 4$.

A.4 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier dos funcionais seguirão a definição:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{2(n-1)}} \int d^4 k_1 d^4 k_2 \dots d^4 k_n \exp[-i(x_1 k_1 - x_2 p_2 - \dots - x_n p_n)] F(k_1, k_2, \dots, k_n);$$

Apêndice B

Teoria Clássica de Campos com Lagrangianas de Segunda-ordem

Devido ao fato de o principal tópico abordado nesta tese ser o de teorias com derivadas de ordem superior, acreditamos que seja importante, como forma de apêndice, introduzir e a exposição de alguns conceitos importantes da teoria geral, necessários no desenvolvimento da teoria aqui estudada *.

Portanto, consideremos aqui, uma teoria de campos geral, a qual possui uma função Lagrangiana que dependa do conjunto de campos $\varphi(x) \equiv \{\varphi^A(x)\}$, $A = 1, \dots, N$, e de suas primeira e segunda derivadas com respeito a coordenadas espaço-temporais, $\partial\varphi(x) \equiv \{\partial_\mu\varphi^A(x)\}$, $\partial^2\varphi(x) \equiv \{\partial_\mu\partial_\nu\varphi^A(x)\}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ [2].

Seja $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi)$ a densidade Lagrangiana, que assumimos aqui, não depender explicitamente das coordenadas espaço-temporais. A correspondente ação funcional é definida por:

$$S[\varphi] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi) \equiv \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}. \quad (\text{B.1})$$

Aqui, Ω é uma região no espaço-tempo, em que os campos são definidos. Supõe-se que as funções $\varphi^A(x)$ (em toda região Ω) são contínuas e com derivadas parciais contínuas até a quarta ordem.

Consideremos agora as transformações infinitesimais das coordenadas:

$$\tilde{x}_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad (\text{B.2})$$

e também dos campos:

$$\delta\varphi^A(x) = \tilde{\varphi}^A(\tilde{x}) - \varphi^A(x), \quad (\text{B.3})$$

geradas por um grupo contínuo de transformações G , com parâmetros constantes ω^k , $k = 1, \dots, r$. A transformação $\delta\varphi^A(x)$ em (B.3) é uma variação total, i.e., na forma funcional e também no ponto; e pode ser expressa em termos da variação da forma funcional dos campos como:

$$\bar{\delta}\varphi^A(x) = \tilde{\varphi}^A(x) - \varphi^A(x), \quad (\text{B.4})$$

ao calcularmos:

$$\tilde{\varphi}^A(\tilde{x}) = \tilde{\varphi}^A(x + \delta x) \simeq \tilde{\varphi}^A(x) + \partial_\mu \tilde{\varphi}^A(x) \delta x^\mu = \tilde{\varphi}^A(x) + \partial_\mu [\varphi^A(x) + \bar{\delta}\varphi^A(x)] \delta x^\mu$$

*A teoria aqui apresentada para teorias de segunda-ordem pode ser generalizada para ordens subsequentes sem maiores dificuldades. Mais detalhes sobre o teorias de ordem-superior podem ser encontrados em [17] e referências.

$$\tilde{\varphi}^A(\tilde{x}) - \tilde{\varphi}^A(x) = \partial_\mu \varphi^A(x) \cdot \delta x^\mu + O(\delta^2), \quad (\text{B.5})$$

e, assim, escrevemos:

$$\delta \varphi^A(x) = \bar{\delta} \varphi^A(x) + \partial_\mu \varphi^A(x) \cdot \delta x^\mu. \quad (\text{B.6})$$

Agora, a variação da ação funcional Eq.(B.1) [57], devida às transformações (B.2) e (B.3), é escrita como

$$\delta S[\varphi] = \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} = \int_{\Omega} [\delta(d^4x) \cdot \mathcal{L} + d^4x (\delta \mathcal{L})]. \quad (\text{B.7})$$

Temos que:

$$d^4\tilde{x} = \left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| d^4x = (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)) d^4x,$$

logo:

$$\delta(d^4x) = d^4\tilde{x} - d^4x = \partial_\mu(\delta x^\mu) d^4x. \quad (\text{B.8})$$

também temos que:

$$\delta \mathcal{L} = \bar{\delta} \mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{L} \cdot \delta x^\mu$$

Da mesma forma a variação funcional $\bar{\delta} \mathcal{L}$ possui a seguinte expressão:

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \bar{\delta} \varphi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \bar{\delta} (\partial_\alpha \varphi^A) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \bar{\delta} (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A).$$

Através das seguintes propriedades: $[\partial_\mu, \delta] \varphi(x) = [\partial_\mu(\delta x^\alpha)] \partial_\alpha \varphi(x)$ e $[\partial_\mu, \bar{\delta}] \varphi(x) = 0$, é possível escrever:

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \bar{\delta} \varphi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \partial_\alpha (\bar{\delta} \varphi^A) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \partial_\alpha \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^A).$$

Então, integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \bar{\delta} \varphi^A - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \cdot \bar{\delta} \varphi^A + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \bar{\delta} \varphi^A \right) \\ &\quad - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \cdot \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^A) + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^A) \right), \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \bar{\delta} \varphi^A - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \cdot \bar{\delta} \varphi^A + \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \cdot \bar{\delta} \varphi^A \\ &\quad + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \bar{\delta} \varphi^A \right) - \partial_\beta \left(\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \cdot \bar{\delta} \varphi^A \right) + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^A) \right). \end{aligned}$$

Encontrando, assim, a seguinte expressão para a variação $\delta \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \bar{\delta} \varphi^A - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \cdot \bar{\delta} \varphi^A + \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \cdot \bar{\delta} \varphi^A + \partial_\mu \mathcal{L} \cdot \delta x^\mu \\ &\quad + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \bar{\delta} \varphi^A \right) - \partial_\beta \left(\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \cdot \bar{\delta} \varphi^A \right) + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^A) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Por fim, substituindo os resultados das Eqs.(B.8) e (B.9) em (B.7), obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S[\varphi] &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} + \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \right] \bar{\delta} \varphi^A \\ &\quad + \int_{\Omega} d^4x \left[\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^A)} \bar{\delta} \varphi^A \right) - \partial_\beta \left(\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \cdot \bar{\delta} \varphi^A \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^A)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^A) \right) + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

As equações de movimento de Euler-Lagrange seguem do princípio de Hamilton: $\delta S = 0$, sob as condições: $\delta x^\mu = 0$ e $\delta\varphi^A|_{\partial\Omega} = 0$, e $\bar{\delta}\varphi^A|_{\partial\Omega} = 0$, em que $\partial\Omega$ é um contorno de Ω . Dessa forma, encontramos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A} - \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^A)} + \partial_\alpha\partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi^A)} = 0. \quad (\text{B.11})$$

O primeiro teorema de Noether segue de (B.10) sob a hipótese de que G seja um grupo de simetria da ação $\delta S[\varphi] = 0$, i.e., quando o campo φ^A é solução da equação de Euler-Lagrange (B.11) [57]. Definindo, então, a quantidade:

$$G = \int_\Omega d^4x \left[\partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^A)} \bar{\delta}\varphi^A \right) - 2\partial_\alpha \left(\partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi^A)} \bar{\delta}\varphi^A \right) + \partial_\alpha \left(\partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi^A)} \bar{\delta}\varphi^A \right) \right) + \partial_\mu (\mathcal{L}\delta x^\mu) \right], \quad (\text{B.12})$$

e aplicando o teorema de Gauss:

$$G = - \int_\sigma d\sigma_\mu J^\mu, \quad (\text{B.13})$$

em que σ é uma superfície tipo-tempo e a quantidade J^μ :

$$J^\mu = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)} \bar{\delta}\varphi^A + 2\partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} \bar{\delta}\varphi^A - \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} \bar{\delta}\varphi^A \right) - \mathcal{L}\delta x^\mu.$$

Ainda, com a identidade (B.6): $\delta\varphi^A(x) = \bar{\delta}\varphi^A(x) + \partial_\mu\varphi^A(x) \cdot \delta x^\mu$, podemos escrever a corrente J^μ na seguinte forma:

$$J^\mu = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)} \delta\varphi^A + 2\partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} \delta\varphi^A - \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} \delta\varphi^A \right) + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)} (\partial^\nu\varphi^A) - 2\partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} (\partial^\nu\varphi^A) + \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} (\partial^\nu\varphi^A) \right) - \mathcal{L}\eta^{\mu\nu} \right] \delta x_\nu.$$

Enfim, definindo a quantidade: $\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)} (\partial^\nu\varphi^A) - 2\partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} (\partial^\nu\varphi^A) + \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} (\partial^\nu\varphi^A) \right) - \mathcal{L}\eta^{\mu\nu}$, escrevemos a corrente J^μ convenientemente como:

$$J^\mu = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)} \delta\varphi^A + 2\partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} \delta\varphi^A - \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\beta\varphi^A)} \delta\varphi^A \right) + \Theta^{\mu\nu} \delta x_\nu. \quad (\text{B.14})$$

Agora, particularizaremos a análise da quantidade conservada G para o caso do grupo de Poincaré:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \omega_\nu^\mu x^\nu + a^\mu, \\ \delta\varphi^A &= \frac{1}{2} \left(K^{\alpha\beta} \right)_B^A \omega_{\alpha\beta} \varphi^B. \end{aligned}$$

Em que as constantes $\left(K^{\alpha\beta} \right)_B^A$ e $\omega_{\alpha\beta}$ são anti-simétricas nos índices α, β . Desta forma, encontramos para a Eq.(B.14), a seguinte expressão:

$$J^\mu = -S^{\mu\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} + \Theta^{\mu\nu} \delta x_\nu. \quad (\text{B.15})$$

Em que definimos a quantidade S por:

$$\begin{aligned} S^{\mu\alpha\beta} &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)} - 2\partial_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\sigma\varphi^A)} \right] \frac{1}{2} \left(K^{\alpha\beta} \right)_B^A \varphi^B + \partial_\sigma \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\sigma\varphi^A)} \frac{1}{2} \left(K^{\alpha\beta} \right)_B^A \varphi^B \right) \\ &\equiv \left(I^\mu \right)_B^A \left(K^{\alpha\beta} \right)_A^B. \end{aligned}$$

A partir da última definição ainda segue:

$$S^{\mu\alpha\beta} = (I^\mu)_B^A (K^{\alpha\beta})_A^B + (I^\alpha)_B^A (K^{\beta\mu})_A^B - (I^\beta)_B^A (K^{\mu\alpha})_A^B;$$

isto é, se multiplicarmos $S^{\mu\alpha\beta}$ por $\omega_{\alpha\beta}$:

$$S^{\mu\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} = (I^\mu)_B^A (K^{\alpha\beta})_A^B \omega_{\alpha\beta} + (I^\alpha)_B^A (K^{\beta\mu})_A^B \omega_{\alpha\beta} - (I^\beta)_B^A (K^{\mu\alpha})_A^B \omega_{\alpha\beta},$$

e alterarmos $\alpha \leftrightarrow \beta$ no último termo:

$$S^{\mu\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} = (I^\mu)_B^A (K^{\alpha\beta})_A^B \omega_{\alpha\beta} + (I^\alpha)_B^A (K^{\beta\mu})_A^B \omega_{\alpha\beta} - (I^\alpha)_B^A (K^{\mu\beta})_A^B \omega_{\beta\alpha},$$

Também, utilizamos o fato de as constantes $(K^{\alpha\beta})_B^A$ e $\omega_{\alpha\beta}$ serem anti-simétricas, ou seja, os dois últimos termos se cancelam e, assim, obtemos a definição inicial. Portanto, da expressão:

$$S^{\mu\alpha\beta} = (I^\mu)_B^A (K^{\alpha\beta})_A^B + (I^\alpha)_B^A (K^{\beta\mu})_A^B - (I^\beta)_B^A (K^{\mu\alpha})_A^B;$$

e da anti-simetria de $(K^{\alpha\beta})_A^B$, determinamos que $S^{\mu\alpha\beta}$ é anti-simétrico nos índices μ, α :

$$S^{\mu\alpha\beta} = -S^{\alpha\mu\beta}. \quad (\text{B.16})$$

Agora, voltando para a expressão:

$$J^\mu = -S^{\mu\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} + \Theta^{\mu\nu}\delta x_\nu,$$

e utilizando o resultado: $\omega_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha(\delta x_\beta) = \partial_\beta(\delta x_\alpha)$, encontramos:

$$\begin{aligned} J^\mu &= S^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha(\delta x_\beta) + \Theta^{\mu\nu}\delta x_\nu = (\Theta^{\mu\nu} - \partial_\alpha S^{\mu\alpha\nu})\delta x_\nu + \partial_\alpha(S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta) \\ &= T^{\mu\nu}\delta x_\nu + \partial_\alpha(S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta); \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Então, substituindo a Eq.(B.17) em (B.13), temos:

$$G = - \int_\sigma d\sigma_\mu T^{\mu\nu}\delta x_\nu - \int_\sigma d\sigma_\mu \partial_\alpha(S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta). \quad (\text{B.18})$$

Porém, o último termo é:

$$\begin{aligned} \int_\sigma d\sigma_\mu \partial_\alpha(S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta) &= \int_\sigma d\sigma_\mu (S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \int_\sigma d\sigma_\mu \left[(S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\alpha} + (S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_\sigma d\sigma_\mu (S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\alpha} + \int_\sigma d\sigma_\alpha (S^{\alpha\mu\beta}\delta x_\beta)_{,\mu} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_\sigma d\sigma_\mu (S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\alpha} - \int_\sigma d\sigma_\alpha (S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\mu} \right], \end{aligned}$$

se calculado entre duas superfícies tipo-tempo; com o auxílio do teorema de Gauss, pode ser escrito como:

$$\left[\int_{\sigma_1} - \int_{\sigma_2} \right] \left[(S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\alpha} - (S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\mu} \right] = \int_\Omega d^4x \left[(S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\alpha\mu} - (S^{\mu\alpha\beta}\delta x_\beta)_{,\mu\alpha} \right] = 0;$$

Concluimos, portanto, que a contribuição do termo: $\int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \partial_{\alpha} (S^{\mu\alpha\beta} \delta x_{\beta})$ ao gerador G , é uma constante que pode ser omitida [57]. Enfim, encontramos:

$$G = - \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} T^{\mu\nu} \delta x_{\nu}.$$

Ainda mais, com: $\delta x^{\mu} = \omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}$, podemos escrevê-la como:

$$\begin{aligned} G &= - \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} T^{\mu\nu} a_{\nu} - \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} T^{\mu\nu} \omega_{\nu\alpha} x^{\alpha} \\ &= - \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} T^{\mu\nu} a_{\nu} - \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} [T^{\mu\nu} x^{\alpha} - T^{\mu\alpha} x^{\nu}] \omega_{\nu\alpha} \\ &\equiv -a_{\mu} P^{\mu} - \frac{1}{2} \omega_{\nu\alpha} J^{\nu\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Nas expressões acima, a quantidade $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = (\partial^{\nu} \varphi^A) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi^A)} - 2 (\partial^{\nu} \varphi^A) \partial_{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\beta} \varphi^A)} + \partial_{\beta} \left[(\partial^{\nu} \varphi^A) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\beta} \varphi^A)} \right] - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu} - \partial_{\alpha} S^{\mu\alpha\nu}. \quad (\text{B.20})$$

Que é simétrico: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ e, também, possui divergência nula: $\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$.

Agora, tomando σ como uma superfície $x^0 = t = \text{constante}$, obtemos, da Eq.(B.19), as seguintes expressões para a função Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H_C &\equiv P^0 = \int d^3 x T^{00} \\ &= \int d^3 x \left[(\partial^0 \varphi^A) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi^A)} - 2 (\partial^0 \varphi^A) \partial_{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_{\beta} \varphi^A)} + \partial_{\beta} \left[(\partial^0 \varphi^A) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_{\beta} \varphi^A)} \right] - \mathcal{L} \right] \\ &= \int d^3 x \left[\dot{\varphi}^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A} - 2 \dot{\varphi}^A \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_k \varphi^A)} + \ddot{\varphi}^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 \varphi^A)} - \dot{\varphi}^A \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 \varphi^A)} \right) - \mathcal{L} \right], \\ H_C &= \int d^3 x \left[\dot{\varphi}^A \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A} - 2 \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_k \varphi^A)} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 \varphi^A)} \right) \right] + \ddot{\varphi}^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 \varphi^A)} - \mathcal{L} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

E para o momento total:

$$P_k = \int d^3 x \left[\partial_k \varphi^A \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A} - 2 \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_k \varphi^A)} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 \varphi^A)} \right) \right] + \partial_k \dot{\varphi}^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 \varphi^A)} \right]. \quad (\text{B.22})$$

Em ambas as expressões, o ponto indica a derivada parcial em relação a variável t .

As expressões acima sugerem a seguinte definição para os momentos canônicos generalizados:

$$\pi_A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A} - 2 \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_k \varphi^A)} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 \varphi^A)} \right), \quad (\text{B.23})$$

$$\phi_A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 \varphi^A)}. \quad (\text{B.24})$$

Destas definições, segue que H_C e P_k podem ser escritas como:

$$H_C = \int d^3 x \left[\pi_A \dot{\varphi}^A + \phi_A \ddot{\varphi}^A - \mathcal{L} \right], \quad (\text{B.25})$$

$$P_k = \int d^3 x \left[\pi_A \partial_k \varphi^A + \phi_A \partial_k \dot{\varphi}^A \right]. \quad (\text{B.26})$$

E são, nas definições das Eqs.(B.23) e (B.25) que reside o principal conceito do estudo Hamiltoniano de uma teoria de segunda-ordem. Na forma que surge, naturalmente, as definições dos momentos leva-nos à interpretação de que, realmente, temos um espaço de fase expandido, com variáveis independentes.

Em (B.19), também podemos definir o tensor de momento angular $J_{\alpha\beta}$ como:

$$J_{\alpha\beta} = \int d^3x [T_{0\alpha}x_\beta - T_{0\beta}x_\alpha].$$

Cuja expressão pode ser separada em duas componentes, $J_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}$, em que:

$$L_{\alpha\beta} = \int d^3x [\pi_A (x_\alpha \partial_\beta \varphi^A - x_\beta \partial_\alpha \varphi^A) + \phi_A (x_\alpha \partial_\beta \dot{\varphi}^A - x_\beta \partial_\alpha \dot{\varphi}^A)], \quad (\text{B.27})$$

$$S_{\alpha\beta} = \int d^3x [\pi_A (K_{\alpha\beta})_B^A \varphi^B + \phi_A (K_{\alpha\beta})_B^A \dot{\varphi}^B]. \quad (\text{B.28})$$

Em que $L_{\alpha\beta}$ é o momento angular orbital generalizado, enquanto $S_{\alpha\beta}$ é interpretado como o momento angular de spin.

Utilizando as definições dos momentos generalizados das Eqs.(B.23) e (B.24), também pode-se construir um formalismo Hamiltoniano em um espaço de fase generalizado, estendido por variáveis canonicamente independentes (φ^A, π_A) , $(\dot{\varphi}^A \equiv \Gamma^A, \phi_A)$. O colchete de Poisson generalizado é definido por [58]:

$$\{F, G\} = \int d^3x \left\{ \left[\frac{\delta F}{\delta \varphi^A} \frac{\delta G}{\delta \pi_A} - \frac{\delta G}{\delta \varphi^A} \frac{\delta F}{\delta \pi_A} \right] + \left[\frac{\delta F}{\delta \Gamma^A} \frac{\delta G}{\delta \phi_A} - \frac{\delta G}{\delta \Gamma^A} \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \right] \right\}. \quad (\text{B.29})$$

Os colchetes de Poisson generalizados para as variáveis canônicas são:

$$\begin{aligned} \{\varphi_A(x), \pi^B(y)\} &= \delta_A^B \delta^{(3)}(x-y) \\ \{\Gamma_A(x), \phi^B(y)\} &= \delta_A^B \delta^{(3)}(x-y) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Também, pode-se mostrar, usando as relações Eq.(B.30), que os geradores P_α e $J_{\mu\nu}$ obedecem à álgebra do grupo de Poincaré, sob a operação dos colchetes de Poisson generalizados.

As equações de Euler-Lagrange (B.11) são equações diferenciais parciais de quarta-ordem e podem ser escritas de uma forma geral:

$$H_{AB} \overset{\dots B}{\varphi} = F_A [\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \partial^3\varphi].$$

Na equação acima, os objetos:

$$H_{AB} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^{\dots A} \partial \varphi^{\dots B}}, \quad (\text{B.31})$$

são os elementos da matriz Hessiana generalizada. Podemos, ainda, dizer que a Lagrangiana é singular, se:

$$\det [H_{AB}] = 0, \quad (\text{B.32})$$

e regular nos demais casos.

Para sistemas singulares, também pode-se desenvolver um formalismo de Dirac generalizado, essencialmente no mesmo padrão que para Lagrangianas de primeira-ordem. Isto é, se a condição (B.32) é satisfeita, temos a existência de vínculos que podem ser expressos como:

$$\Phi_a(\varphi, \pi; \Gamma, \phi) \approx 0. \quad (\text{B.33})$$

Em que \approx é o símbolo de igualdade fraca, no sentido de Dirac.

A dinâmica do sistema no espaço de fase estendido pelas variáveis canônicas (φ^A, π_A) e (Γ^A, ϕ_A) , sujeita aos vínculos (B.33), pode ser analisada por uma teoria de Dirac generalizada para sistemas vinculados. [†]

[†]Sugerimos, para maiores detalhes, as referências [33, 59].

Apêndice C

Auto-Energia do Elétron Σ no gauge de Lorenz

Procuramos deixar claro no decorrer de toda esta tese, que a condição de gauge de Lorenz generalizada, $(1 + a^2\Box) \partial_\mu A^\mu = 0$, é a correta para a Eletrodinâmica de Podolsky, bem como a condição de Lorenz usual, $\partial_\mu A^\mu = 0$, é para a teoria de Maxwell [17]. Contudo, embora a veracidade de tal condição já tenha sido mostrada, ainda existem dúvidas em relação a esse ponto. A fim de elucidar ainda mais essa característica da Eletrodinâmica de Podolsky, calcularemos aqui, portanto, a função de auto-energia do elétron no gauge de Lorenz usual; devemos, antes, calcular o propagador livre do fóton, seguindo os mesmos passos da subseção 3.2.1. Desta vez, trabalhando com a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$, encontramos:

$$iD_{\mu\nu}(k) = \left[\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2} - \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 - \frac{1}{a^2}}. \quad (\text{C.1})$$

Agora, a função Σ Eq.(3.67), no caso $\xi = 1$, é escrita apenas como:

$$\Sigma^{(1)}(p) = ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\sigma \left[\frac{\eta_{\sigma\nu}}{k^2} - \left[\eta_{\sigma\nu} - \frac{k_\sigma k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 - \frac{1}{a^2}} \right] \frac{(\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\nu}{[(p - k)^2 - m^2]};$$

e, podemos, novamente, decompor a expressão completa de $\Sigma(p)$ da seguinte forma:

$$\Sigma^{(1)}(p) = \Sigma_{QED}(p) + \Sigma_{Pod}(p).$$

Em que:

$$\Sigma_{QED}(p) = ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \frac{\gamma^\sigma (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\nu}{[(p - k)^2 - m^2]}, \quad (\text{C.2})$$

$$\Sigma_{Pod}(p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\eta_{\sigma\nu} - \frac{k_\sigma k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 - \frac{1}{a^2}} \frac{\gamma^\sigma (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\nu}{[(p - k)^2 - m^2]}. \quad (\text{C.3})$$

A contribuição $\Sigma_{QED}(p)$ já foi calculada e é dada pela Eq.(4.6):

$$\Sigma_{QED}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (\hat{p} - 4m) + \Sigma_{QED \text{ Finite}}(p), \quad (\text{C.4})$$

com:

$$\begin{aligned}\Sigma_{QED\ Finite}(p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} [\hat{p}(\gamma + 1) - 2m(2\gamma + 1)] \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [\hat{p}(1 - z) - 2m] \ln \left| \frac{4\pi\mu^2}{m^2z - (1 - z)zp^2} \right|.\end{aligned}\quad (C.5)$$

Em que $\epsilon = 4 - d$ é o parâmetro da regularização dimensional. A contribuição de Podolsky ainda pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Sigma_{Pod}(p) = \Sigma_{Pod}^{(1)}(p) + \Sigma_{Pod}^{(2)}(p). \quad (C.6)$$

Com:

$$\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) \equiv -ie^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\mu}{[(p - k)^2 - m^2]} \frac{1}{(k^2 - \frac{1}{a^2})}, \quad (C.7)$$

$$\Sigma_{Pod}^{(2)}(p) \equiv ie^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\hat{k} (\hat{p} - \hat{k} + m) \hat{k}}{[(p - k)^2 - m^2]} \frac{1}{k^2 (k^2 - \frac{1}{a^2})}. \quad (C.8)$$

Ainda, as equações (C.7) e (C.8) possuem as mesmas expressões de (4.9) e (4.10), respectivamente, exceto por um sinal de menos em (C.8). Dessa forma, então, temos os seguintes resultados:

$$\Sigma_{Pod}^{(1)}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (\hat{p} - 4m) + \Sigma_{Pod\ Finite}^{(1)}(p), \quad (C.9)$$

em que:

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod\ Finite}^{(1)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} [\hat{p}(1 + \gamma) - 2m(1 + 2\gamma)] \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [\hat{p}(1 - z) - 2m] \ln \left| \frac{m^2z - (1 - z)(zp^2 - \frac{1}{a^2})}{4\pi\mu^2} \right|;\end{aligned}\quad (C.10)$$

e

$$\Sigma_{Pod}^{(2)}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (m - \hat{p}) + \Sigma_{Pod\ Finite}^{(2)}(p), \quad (C.11)$$

em que,:

$$\begin{aligned}\Sigma_{Pod\ Finite}^{(2)}(p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\left(\gamma + \frac{2}{3} \right) \hat{p} - \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) m \right] \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta \left[\frac{[(1 - y)\hat{p} + m]p^2y^2}{(1 - y)yp^2 - ym^2 - x\frac{1}{a^2}} \right. \\ &\left. - [2m - (1 + 3y)\hat{p}] \ln \left| \frac{4\pi\mu^2}{ym^2 + x\frac{1}{a^2} - (1 - y)yp^2} \right| \right].\end{aligned}\quad (C.12)$$

E, assim, determinamos a contribuição de Podolsky para a auto-energia do elétron, como sendo:

$$\Sigma_{Pod}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (\hat{p} - 4m) - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} (m - \hat{p}) + \Sigma_{Pod\ Finite}^{(1)}(p) + \Sigma_{Pod\ Finite}^{(2)}(p). \quad (C.13)$$

Das relações (C.4) e (C.13), encontramos, enfim, a expressão final da auto-energia do elétron na condição de gauge de Lorenz na ordem- α , assim:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)}(p) = & \frac{1}{\epsilon} \frac{\alpha}{2\pi} (\hat{p} - m) - \frac{\alpha}{4\pi} \left[\left(\gamma + \frac{2}{3} \right) \hat{p} - \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) m \right] \\
& \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [(1-z)\hat{p} - 2m] \ln \left| \frac{zm^2 - (1-z)zp^2 + (1-z)\frac{1}{a^2}}{zm^2 - (1-z)zp^2} \right| \\
& + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{[(1-y)\hat{p} + m]p^2 y^2}{(1-y)yp^2 - m^2 - x\frac{1}{a^2}} \right. \\
& \left. + [2m - (1+3y)\hat{p}] \ln \left| \frac{ym^2 + x\frac{1}{a^2} - (1-y)yp^2}{4\pi\mu^2} \right| \right]. \tag{C.14}
\end{aligned}$$

O que nos mostra que o uso (errôneo) da condição de Lorenz na quantização da Eletrodinâmica de Podolsky resulta em uma expressão divergente.

Apêndice D

Parte do Vértice Λ^μ no gauge de Lorenz

Como no Apêndice C, a fim de elucidar a questão da escolha da condição de gauge, calcularemos, aqui, a parte do vértice Λ^μ , no gauge de Lorenz usual. Assim, substituindo a expressão (C.1) do propagador livre do fóton na Eq.(3.87) e trabalhando no caso $\xi = 1$, encontramos:

$$\Lambda^{\mu(1)}(p', p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\sigma \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \left[\frac{\eta_{\sigma\nu}}{k^2} - \left[\eta_{\sigma\nu} - \frac{k_\sigma k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 - \frac{1}{a^2}} \right] \gamma^\mu \times \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\nu. \quad (D.1)$$

Podemos decompor a expressão de Λ^μ da mesma maneira que acontece com a equação (3.87). Assim, a Eq.(D.1) divide-se em duas contribuições distintas:

$$\Lambda^{\mu(1)}(p', p) = \Lambda_{QED}^\mu(p', p) + \Lambda_{Pod}^\mu(p', p). \quad (D.2)$$

Uma contribuição é proveniente da QED_4 :

$$\Lambda_{QED}^\mu(p', p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\alpha \frac{1}{k^2}, \quad (D.3)$$

e, a outra, do setor de Podolsky:

$$\Lambda_{Pod}^\mu(p', p) = ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\beta \frac{1}{k^2 - \frac{1}{a^2}} \times \left[\eta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right]. \quad (D.4)$$

Na contribuição, já regularizada, do setor da QED_4 (D.3), à parte do vértice é a mesma que (4.31) e é escrita como:

$$\Lambda_{QED}^\mu(p', p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \Lambda_{QED\ Finite}^\mu(p', p), \quad (D.5)$$

com $\Lambda_{QED\ Finite}^\mu(p', p)$ dado por:

$$\Lambda_{QED\ Finite}^\mu(p', p) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\Xi^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p})}{\Delta^2} - \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \left[\frac{2+\gamma}{2} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{\Delta^2}{4\pi\mu^2} \right| \right]. \quad (D.6)$$

Em que Ξ^μ é definido por (4.33) e $\Delta^2 = m^2(x+y) - xp^2(1-x) - yp'^2(1-y) + 2xyp.p'$. Agora, podemos escrever a contribuição de Podolsky como:

$$\Lambda_{Pod}^\mu(p', p) = \Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) + \Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p), \quad (D.7)$$

com:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) = ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha \frac{\widehat{p}' - \widehat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\widehat{p} - \widehat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\alpha \frac{1}{k^2 - \frac{1}{a^2}}, \quad (D.8)$$

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha \frac{\widehat{p}' - \widehat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\widehat{p} - \widehat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\beta \frac{1}{k^2 - \frac{1}{a^2}} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (D.9)$$

As equações (D.8) e (D.9) possuem as mesmas expressões de (4.38) e (4.39), respectivamente, exceto por um sinal de menos em (C.8). Dessa forma, obtemos os seguintes resultados:

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(1)}(p', p) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(1)}(p', p), \quad (D.10)$$

com:

$$\begin{aligned} \Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(1)}(p', p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \int d\zeta \frac{\Xi^\mu(p', p, x, y)}{\left[\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)\right]} \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \left[\frac{2+\gamma}{2} + \int d\zeta \ln \left| \frac{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)}{4\pi\mu^2} \right| \right]. \end{aligned} \quad (D.11)$$

e

$$\Lambda_{Pod}^{\mu(2)}(p', p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(2)}(p', p), \quad (D.12)$$

com:

$$\begin{aligned} \Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(2)}(p', p) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \left[\frac{2+\gamma}{2} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)}{4\pi\mu^2} \right| \right. \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{\Sigma_1(x, y, \widehat{p}', \widehat{p}) \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \widehat{p}', \widehat{p})}{\left[\Delta^2 + \frac{1}{a^2}z\right]^2} \\ &\quad + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{\left[\Delta^2 + \frac{1}{a^2}z\right]} \\ &\quad \times \left[\Sigma_1(x, y, \widehat{p}', \widehat{p}) \gamma^\mu + \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \widehat{p}', \widehat{p}) + \frac{1}{4} \Sigma_3^\mu(x, y, \widehat{p}', \widehat{p}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\widehat{p}' - m) \gamma^\mu (\widehat{p} - m) \right]. \end{aligned} \quad (D.13)$$

Em que as funções Σ_1, Σ_2 e Σ_3^μ foram definidas em (4.54). Portanto, determinamos a contribuição de Podolsky à parte do vértice como:

$$\Lambda_{Pod}^\mu(p', p) = \Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(1)}(p', p) + \Lambda_{Pod\ Finite}^{\mu(2)}(p', p), \quad (D.14)$$

Enfim, das relações (D.5) e (D.14), encontramos a expressão final da parte do vértice na condição de gauge de Lorenz na ordem- α :

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu(1)}(p', p) = & \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \gamma^\mu + \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)}{\Delta^2} \right| \\
& + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Xi^\mu(p', p, x, y) \left[\frac{1}{\Delta^2} - \frac{1}{[\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)]} \right] \\
& - \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \left[\frac{2+\gamma}{2} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)}{4\pi\mu^2} \right| \right] \\
& + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p})}{[\Delta^2 + \frac{1}{a^2}z]^2} \\
& + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{[\Delta^2 + \frac{1}{a^2}z]} \\
& \times \left[\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu + \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) + \frac{1}{4} \Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (\hat{p}' - m) \gamma^\mu (\hat{p} - m) \right]. \tag{D.15}
\end{aligned}$$

O que nos mostra, como no caso da auto-energia do elétron, que o uso da condição de Lorenz na quantização da eletrodinâmica de Podolsky leva a uma expressão divergente.

Apêndice E

Parte do Vértice na camada de massa

Apresentaremos, neste apêndice, o cálculo explícito de um passo importante do desenvolvimento do Capítulo 5, que foi o cálculo da parte do vértice Λ^μ na camada de massa e, também, contraído com os espinores de Dirac, para posterior separação dos termos em seus respectivos fatores de forma. Procederemos, agora, com o cálculo necessário.

Temos que a expressão calculada anteriormente, na seção 4.1.2, na ordem- α , a parte do vértice Λ^μ (4.64) é:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu(1)}(p', p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Xi^\mu(p', p, x, y) \left[\frac{1}{\Delta^2} - \frac{1}{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)} \right] \\
&+ \frac{3\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int d\xi \ln \left| \frac{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}z}{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)} \right| + \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)}{\Delta^2} \right| \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} \int d\xi \left[\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu + \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) - \frac{1}{4} \Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) + \frac{1}{2} (\hat{p}' - m) \gamma^\mu (\hat{p} - m) \right] \\
&\times \left[\frac{1}{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)} - \frac{1}{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}z} \right] \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\xi \Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu \Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \left[\frac{1}{[\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)]^2} - \frac{1}{[\Delta^2 + \frac{1}{a^2}z]^2} \right]. \quad (\text{E.1})
\end{aligned}$$

Em que as funções $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3^\mu, \Xi^\mu$ e Δ foram definidas da seguinte maneira:

$$\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \equiv (x\hat{p} + y\hat{p}') [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \quad (\text{E.2})$$

$$\Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \equiv [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m] (x\hat{p} + y\hat{p}') \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) &\equiv 4 [(1-y)p'^\sigma - xp^\sigma] [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] \gamma^\mu \quad (\text{E.4}) \\
&- 2\gamma^\mu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] (\hat{p} - m) - 2(\hat{p}' - m) [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu.
\end{aligned}$$

Com a função Ξ definida por:

$$\Xi = 2\mathbf{M} - \mathbf{\Pi}, \quad (\text{E.5})$$

e essas outras duas funções são dadas por:

$$\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y) \equiv [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] \gamma^\mu [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m] \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p}) &\equiv 4[(1-y)p'^\sigma - xp^\sigma] [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] \gamma^\mu \\ &\quad - 2[(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu \\ &\quad - 2\gamma^\mu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m] \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

e

$$\Delta^2 \equiv 2xyp.p' + m^2(x+y) - xp^2(1-x) - yp'^2(1-y). \quad (\text{E.8})$$

Assim, a partir da equação (E.1) calcularemos o elemento de matriz $\bar{u}(p')\Lambda(p, p')u(p)$ na camada de massa $p^2 = (p')^2 = m^2$. Uma consequência direta do fato anterior é que podemos reescrever a expressão (E.8) de Δ como:

$$\Delta^2 \equiv 2xyp.p' + m^2(x^2 + y^2). \quad (\text{E.9})$$

Para o cálculo de cada uma das quantidades definidas acima (as quais dependem dos momentos \hat{p} e \hat{p}'), utilizaremos os seguintes resultados:

$$\bar{u}(p')\hat{p}' = m\bar{u}(p'), \quad \hat{p}u(p) = mu(p) \quad (\text{E.10})$$

e

$$2p.p' = p^2 + (p')^2 + 2p.p' - p^2 - (p')^2 = 2m^2 - (p' - p)^2 = 2m^2 - q^2, \quad (\text{E.11})$$

com: $q = p' - p$. Logo, obtemos:

$$\Delta^2 \equiv -xyq^2 + m^2(x^2 + y^2 + 2xy) = -xyq^2 + m^2(x+y)^2. \quad (\text{E.12})$$

Outra importante propriedade é a identidade de Gordon [24]:

$$2(p + p')^\mu = 4m\gamma^\mu - q_\nu[\gamma^\nu, \gamma^\mu]. \quad (\text{E.13})$$

Durante os cálculos que seguirão, duas propriedades das matrizes- γ serão muito utilizadas; as definiremos aqui:

$$\hat{p}^2\gamma^\mu = 2\hat{p}p^\mu - \hat{p}\gamma^\mu\hat{p} = 2\hat{p}p^\mu - 2p^\mu\hat{p} + \gamma^\mu\hat{p}^2 = \gamma^\mu\hat{p}^2, \quad (\text{E.14})$$

e também:

$$\gamma^\mu(\hat{p}')^2 = (\hat{p}')^2\gamma^\mu. \quad (\text{E.15})$$

Procedendo, agora, com os cálculos explícitos dos termos da Eq.(E.1). Primeiro:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\mathbf{\Xi}^\mu(p', p, x, y)u(p) &\equiv \bar{u}(p') [2\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y) - \mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y)] u(p) \\ &= 2\bar{u}(p')\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y)u(p) - \bar{u}(p')\mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y)u(p). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Calcularemos cada um dos termos acima separadamente:

$$\bar{u}(p')\mathbf{M}^\mu(p', p, x, y)u(p) = \bar{u}(p') [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] \gamma^\mu [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m] u(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p') [(1-y)m - x\hat{p} - m] \gamma^\mu [(1-x)m - y\hat{p}' - m] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [-ym - x\hat{p}] \gamma^\mu [-xm - y\hat{p}'] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [m^2 xy \gamma^\mu + my^2 \gamma^\mu \hat{p}' + mx^2 \hat{p} \gamma^\mu + xy \hat{p} \gamma^\mu \hat{p}'] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [m^2 xy \gamma^\mu + 2my^2 (\hat{p}')^\mu - my^2 \hat{p}' \gamma^\mu + 2mx^2 p^\mu - mx^2 \gamma^\mu \hat{p} + 2xy \hat{p}' p^\mu - xy \gamma^\mu \hat{p} \hat{p}'] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[m^2 xy \gamma^\mu + 2my^2 (\hat{p}')^\mu - m^2 y^2 \gamma^\mu + 2mx^2 p^\mu - m^2 x^2 \gamma^\mu + 2mxy p^\mu \right. \\
&\quad \left. - 2xyp.p' \gamma^\mu + xy \gamma^\mu \hat{p}' \hat{p} \right] u(p), \\
&= \bar{u}(p') \left[m^2 \gamma^\mu (xy - y^2 - x^2) + 2my^2 (\hat{p}')^\mu + 2mx^2 p^\mu + 2mxy p^\mu - xy(2m^2 - q^2) \gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + 2mxy (\hat{p}')^\mu - mxy \hat{p}' \gamma^\mu \right] u(p).
\end{aligned}$$

Em que usamos os resultados Eqs.(E.10) e (E.11). Ainda, segue:

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p') \left[m^2 \gamma^\mu (xy - y^2 - x^2 - 2xy) + 2my^2 (\hat{p}')^\mu + 2mx^2 p^\mu + 2mxy p^\mu + xyq^2 \gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + 2mxy (\hat{p}')^\mu - m^2 xy \gamma^\mu \right] u(p), \\
&= \bar{u}(p') \left[-m^2 \gamma^\mu (y^2 + x^2 + 2xy) + 2my^2 (\hat{p}')^\mu + 2mx^2 p^\mu + 2mxy p^\mu + xyq^2 \gamma^\mu + 2mxy (\hat{p}')^\mu \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[-m^2 \gamma^\mu (y^2 + x^2 + 2xy) + 2my(x+y) (\hat{p}')^\mu + xyq^2 \gamma^\mu + 2mx(x+y)p^\mu \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[-m^2 \gamma^\mu (y^2 + x^2 + 2xy) + my(x+y)(4m\gamma^\mu - 2p^\mu - q_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu]) \right. \\
&\quad \left. + xyq^2 \gamma^\mu + 2mx(x+y)p^\mu \right] u(p).
\end{aligned}$$

Usamos a identidade (E.13) nos cálculos acima. Disso, obtemos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \mathbf{M}^\mu(p', p, x, y) u(p) &= \bar{u}(p') \left[-m^2 \gamma^\mu ((x+y)^2 - 4y(x+y)) \right. \\
&\quad \left. + my(x+y)q_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu] + xyq^2 \gamma^\mu + 2m(x-y)(x+y)p^\mu \right] u(p). \tag{E.17}
\end{aligned}$$

Agora:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y) u(p) &= 4\bar{u}(p') [(1-y)p'^\sigma - xp^\sigma] [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p') [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} - m] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p') \gamma^\mu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' - m] u(p), \\
&= 4\bar{u}(p') [(1-x)(1-y)p.p' + xyp.p' - x(1-x)p^2 - y(1-y)(p')^2] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p') [(1-y)m - x\hat{p} - m] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p') \gamma^\mu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] [(1-x)m - y\hat{p}' - m] u(p), \\
&= 4\bar{u}(p') [(1-x-y+2xy)p.p' - m^2(x-x^2+y-y^2)] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p') [-ym - x\hat{p}] [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu u(p) - 2\bar{u}(p') \gamma^\mu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] [-xm - y\hat{p}'] u(p), \\
&= 4\bar{u}(p') \left[m^2(1-x-y+2xy) - (1-x-y+2xy)\frac{q^2}{2} + m^2(-x+x^2-y+y^2) \right] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') [my(1-x)\hat{p} - my^2 \hat{p}' + x(1-x)\hat{p}^2 - xy\hat{p}\hat{p}'] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \gamma^\mu [mx(1-y)\hat{p}' + y(1-y)(\hat{p}')^2 - mx^2 \hat{p} - xy\hat{p}\hat{p}'] u(p).
\end{aligned}$$

Em que usamos, novamente, os resultados Eqs.(E.10) e (E.11). Logo, segue:

$$\begin{aligned}
&= 4\bar{u}(p') \left[m^2(1-x-y+2xy-x+x^2-y+y^2) - (1-x-y+2xy)\frac{q^2}{2} \right] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2my(1-x)p^\mu - my(1-x)\gamma^\mu \hat{p} - m^2y^2\gamma^\mu + x(1-x)\gamma^\mu \hat{p}^2 \right. \\
&\quad \left. - 2xyp \cdot p' \gamma^\mu + xy\hat{p}'\hat{p}\gamma^\mu \right] u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2mx(1-y)(p')^\mu - mx(1-y)\hat{p}'\gamma^\mu + y(1-y)(\hat{p}')^2\gamma^\mu - m^2x^2\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. - 2xyp \cdot p' \gamma^\mu + xy\gamma^\mu \hat{p}'\hat{p} \right] u(p), \\
&= 4\bar{u}(p') \left[m^2(1-x-y)^2 - (1-x-y+2xy)\frac{q^2}{2} \right] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2my(1-x)p^\mu - m^2y(1-x)\gamma^\mu - m^2y^2\gamma^\mu + m^2x(1-x)\gamma^\mu - 2m^2xy\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + xyq^2\gamma^\mu + 2mxy p^\mu - mxy\gamma^\mu \hat{p} \right] u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2mx(1-y)(p')^\mu - m^2x(1-y)\gamma^\mu + m^2y(1-y)\gamma^\mu - m^2x^2\gamma^\mu - 2m^2xy\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + xyq^2\gamma^\mu + 2mxy(p')^\mu - mxy\hat{p}'\gamma^\mu \right] u(p), \\
&= 2\bar{u}(p') \left[2m^2(1-x-y)^2 - (1-x-y+2xy)q^2 \right] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2my(1-x)p^\mu - m^2y(1-x)\gamma^\mu - m^2y^2\gamma^\mu + m^2x(1-x)\gamma^\mu - 2m^2xy\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + xyq^2\gamma^\mu + 2mxy p^\mu - m^2xy\gamma^\mu \right] u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2mx(1-y)(p')^\mu - m^2x(1-y)\gamma^\mu + m^2y(1-y)\gamma^\mu - m^2x^2\gamma^\mu - 2m^2xy\gamma^\mu + xyq^2\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + 2mxy(p')^\mu - m^2xy\gamma^\mu \right] u(p), \\
&= 2\bar{u}(p') \left[2m^2(1-x-y)^2 - (1-x-y+2xy)q^2 \right] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2myp^\mu - m^2y\gamma^\mu - m^2y^2\gamma^\mu + m^2x(1-x)\gamma^\mu + xyq^2\gamma^\mu - 2m^2xy\gamma^\mu \right] u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2mx(p')^\mu - m^2x\gamma^\mu + m^2y(1-y)\gamma^\mu + xyq^2\gamma^\mu - m^2x^2\gamma^\mu - 2m^2xy\gamma^\mu \right] u(p), \\
&= 2\bar{u}(p') \left[2m^2(1-x-y)^2 - (1-x-y+2xy)q^2 \right] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2myp^\mu - 2m^2y^2\gamma^\mu - 2m^2x^2\gamma^\mu + 2xyq^2\gamma^\mu - 4m^2xy\gamma^\mu \right] u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[mx(4m\gamma^\mu - 2p^\mu - q_\nu[\gamma^\nu, \gamma^\mu]) \right] u(p).
\end{aligned}$$

Aqui, usamos a identidade (E.13) para, assim, obtermos:

$$\begin{aligned}
&= 4\bar{u}(p') \left[m^2(1-x-y)^2 \right] \gamma^\mu u(p) + 2\bar{u}(p') \left[4m^2x\gamma^\mu - mxq_\nu[\gamma^\nu, \gamma^\mu] \right] u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2m(y-x)p^\mu - 2m^2(y^2+x^2+2xy)\gamma^\mu + 2xyq^2\gamma^\mu - (1-x-y+2xy)q^2\gamma^\mu \right] u(p) \\
\bar{u}(p')\mathbf{\Pi}^\mu(p', p, x, y) u(p) &= 4\bar{u}(p') \left[m^2(1-x-y)^2 - m^2(x+y)^2 + 2x \right] \gamma^\mu u(p) \quad (\text{E.18}) \\
&\quad + 2\bar{u}(p') \left[2m(y-x)p^\mu - mxq_\nu[\gamma^\nu, \gamma^\mu] - (1-x-y)q^2\gamma^\mu \right] u(p).
\end{aligned}$$

Logo, a partir dos resultados (E.17) e (E.18), escrevemos a equação (E.16) como:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Xi^\mu(p', p, x, y) u(p) &= q^2 [2(1-x-y) + 2xy] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \\ &+ 2m^2 \bar{u}(p') [-(x+y)^2 + 4y(x+y) - 2(1-x-y)^2 + 2(x+y)^2 - 4x] \gamma^\mu u(p) \\ &+ 4m \bar{u}(p') [(x-y)(x+y) - (y-x)] p^\mu u(p) - 2m \bar{u}(p') [y(x+y) - x] q_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu] u(p), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Xi^\mu(p', p, x, y) u(p) &= 2q^2 [1-x-y+xy] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \\ &+ 4m \bar{u}(p') [(x-y)(1+x+y)p^\mu] u(p) - 2m \bar{u}(p') [xy+y^2-x] q_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu] u(p) \quad (\text{E.19}) \\ &+ 2m^2 \bar{u}(p') [4y(x+y) - 2(1-x-y)^2 + (x+y)^2 - 4x] \gamma^\mu u(p). \end{aligned}$$

Todavia, ainda, é possível mostrar que o segundo termo da expressão (E.19) (proporcional a p_μ) é nulo. Para isso, efetuaremos as integrais dos parâmetros de Feynman. Tomando a expressão completa, a partir de (E.1), temos:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \Xi^\mu(p', p, x, y) \left[\frac{1}{\Delta^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)} - \frac{1}{\Delta^2} \right];$$

com: $\Delta^2 = m^2(x+y)^2 - xyq^2$. Dessa forma, reescrevendo a expressão acima, mas considerando apenas o termo de nosso interesse:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x-y) p^\mu \left[\frac{1}{m^2(x+y)^2 - xyq^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)} - \frac{1}{m^2(x+y)^2 - xyq^2} \right];$$

podemos, ainda, reescrever as integrais na seguinte forma:

$$\int dx dy dz \delta(1-x-y-z) (x-y) p^\mu \left[\frac{1}{m^2(x+y)^2 - xyq^2 + \frac{1}{a^2}(1-x-y)} - \frac{1}{m^2(x+y)^2 - xyq^2} \right].$$

Devido ao fato de o numerador ser anti-simétrico nas variáveis de integração x e y , e de o denominador ser simétrico, o termo em questão é nulo. Portanto, é suficiente considerarmos, na Eq.(E.19), apenas o primeiro e o terceiro termos. Consequentemente, reescrevemos tal expressão como:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Xi^\mu(p', p, x, y) u(p) &= 2m^2 \bar{u}(p') [(x+y)(x+5y) - 2(1-x-y)^2 - 4x] \gamma^\mu u(p) \\ &- 2m \bar{u}(p') [xy+y^2-x] q_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu] u(p) \quad (\text{E.20}) \\ &+ \bar{u}(p') 2 [1-x-y+xy] q^2 \gamma^\mu u(p). \end{aligned}$$

Agora, calculando o próximo termo de (E.1):

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p}) \gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left[(x\hat{p} + y\hat{p}') [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \right] \gamma^\mu u(p) \quad (\text{E.21}) \\ &= \bar{u}(p') \left[(x\hat{p} + my) [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \right] \gamma^\mu u(p), \\ &= \bar{u}(p') \left[x(1-y)\hat{p}\hat{p}' - x^2(\hat{p})^2 + mx\hat{p} + my(1-y)\hat{p}' - mxy\hat{p} + m^2y \right] \gamma^\mu u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[2x(1-y)p \cdot p' \gamma^\mu - x(1-y)\hat{p}'\hat{p}\gamma^\mu - x^2\gamma^\mu\hat{p}^2 + 2mxy\hat{p}^\mu - mx\gamma^\mu\hat{p} \right. \\ &\quad \left. + m^2y(1-y)\gamma^\mu - 2mxy\hat{p}^\mu + mxy\gamma^\mu\hat{p} + m^2y\gamma^\mu \right] u(p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p') \left[2m^2x(1-y)\gamma^\mu - x(1-y)q^2\gamma^\mu - 2mx(1-y)p^\mu + mx(1-y)\gamma^\mu\hat{p} - m^2x^2\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + 2mxy\gamma^\mu - m^2x\gamma^\mu + m^2y(1-y)\gamma^\mu - 2mxy\gamma^\mu + m^2xy\gamma^\mu + m^2y\gamma^\mu \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[m^2\gamma^\mu (2x - 2xy + x - xy - x^2 - x + y - y^2 + xy + y) - x(1-y)q^2\gamma^\mu \right] u(p).
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\Sigma_1(x, y, \hat{p}', \hat{p})\gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left[m^2\gamma^\mu (2x - x^2 + 2y - 2xy - y^2) - x(1-y)q^2\gamma^\mu \right] u(p) \\
&= (m^2(x+y)(2-x-y) - x(1-y)q^2) \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p). \quad (E.22)
\end{aligned}$$

Calculando agora:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\gamma^\mu\Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p})u(p) &= \bar{u}(p')\gamma^\mu \left[[(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m](x\hat{p} + y\hat{p}') \right] u(p) \quad (E.23) \\
&= \bar{u}(p')\gamma^\mu \left[[(1-x)\hat{p} - y\hat{p}' + m](xm + y\hat{p}') \right] u(p).
\end{aligned}$$

Fazendo uso da álgebra das matrizes- γ , obtemos:

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p')\gamma^\mu \left[m^2x(1-x) - mxy\hat{p}' + m^2x + y(1-x)\hat{p}\hat{p}' - y^2(\hat{p}')^2 + my\hat{p}' \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[m^2x(1-x)\gamma^\mu - 2mxy(p')^\mu + mxy\hat{p}'\gamma^\mu + m^2x\gamma^\mu + 2y(1-x)\gamma^\mu p \cdot p' \right. \\
&\quad \left. - y(1-x)\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p} - y^2(\hat{p}')^2\gamma^\mu + 2my(p')^\mu - my\hat{p}'\gamma^\mu \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[m^2x(1-x)\gamma^\mu - 2mxy(p')^\mu + m^2xy\gamma^\mu + m^2x\gamma^\mu + 2m^2y(1-x)\gamma^\mu - y(1-x)q^2\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. - 2my(1-x)(p')^\mu + my(1-x)\hat{p}'\gamma^\mu - m^2y^2\gamma^\mu + 2my(p')^\mu - m^2y\gamma^\mu \right] u(p).
\end{aligned}$$

E, após cancelamentos entre alguns termos, encontramos:

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p') \left[m^2\gamma^\mu (x - x^2 + x + 2y - 2xy + xy + y - xy - y^2 - y) - y(1-x)q^2\gamma^\mu \right] u(p), \\
&= \bar{u}(p') \left[m^2\gamma^\mu (2x - x^2 + 2y - 2xy - y^2) - y(1-x)q^2\gamma^\mu \right] u(p).
\end{aligned}$$

Por fim, obtemos:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu\Sigma_2(x, y, \hat{p}', \hat{p})u(p) = [m^2(x+y)(2-x-y) - y(1-x)q^2] \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p). \quad (E.24)$$

Calculamos, agora, o termo:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\Sigma_3^\mu(x, y, \hat{p}', \hat{p})u(p) &= \bar{u}(p') \left[4[(1-y)p'^\sigma - xp^\sigma] [(1-x)p_\sigma - yp'_\sigma] \gamma^\mu \right] u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p')\gamma^\mu [(1-y)\hat{p}' - x\hat{p}] (\hat{p} - m) u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p') (\hat{p}' - m) [(1-x)\hat{p} - y\hat{p}'] \gamma^\mu u(p),
\end{aligned}$$

os dois últimos termos são nulos, basta que utilizemos as equações (E.10). Dessa forma, ficamos somente com:

$$\begin{aligned}
&= 4\bar{u}(p') \left[p \cdot p' [(1-x)(1-y) + xy] - x(1-x)p^2 - y(1-y)(p')^2 \right] \gamma^\mu u(p) \\
&= 2\bar{u}(p') \left[2m^2[1 + xy - x - y + xy - x + x^2 - y + y^2] - q^2(1 + 2xy - x - y) \right] \gamma^\mu u(p),
\end{aligned}$$

e

$$= 4\bar{u}(p') \left[m^2[1 + 2xy - 2x - 2y + x^2 + y^2] \right] \gamma^\mu u(p) - 2\bar{u}(p') \left[q^2(1 + 2xy - x - y) \right] \gamma^\mu u(p).$$

Que, ainda, pode ser escrita como:

$$\bar{u}(p') \Sigma_3^\mu (x, y, \hat{p}', \hat{p}) u(p) = (4m^2(1 - x - y)^2 - 2q^2(1 + 2xy - x - y)) \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p). \quad (\text{E.25})$$

Com:

$$(1 - x - y)^2 = 1 + 2xy - 2x - 2y + x^2 + y^2. \quad (\text{E.26})$$

Calculamos, por último:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Sigma_1 \gamma^\mu \Sigma_2 u(p) &= \bar{u}(p') (x\hat{p} + y\hat{p}') [(1 - y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \gamma^\mu [(1 - x)\hat{p} - y\hat{p}' + m] (x\hat{p} + y\hat{p}') u(p) \\ &= \bar{u}(p') (x\hat{p} + my) [(1 - y)\hat{p}' - x\hat{p} + m] \gamma^\mu [(1 - x)\hat{p} - y\hat{p}' + m] (mx + y\hat{p}') u(p). \end{aligned}$$

Multiplicando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} &= \bar{u}(p') [x(1 - y)\hat{p}\hat{p}' - x^2\hat{p}^2 + mx\hat{p} + my(1 - y)\hat{p}' - mxy\hat{p} + m^2y] \gamma^\mu \\ &\quad \times [mx(1 - x)\hat{p} + y(1 - x)\hat{p}\hat{p}' - mxy\hat{p}' - y^2(\hat{p}')^2 + m^2x + my\hat{p}'] u(p), \\ &= \bar{u}(p') \left[2x(1 - y)p \cdot p' \gamma^\mu - x(1 - y)\hat{p}'\hat{p}\gamma^\mu - x^2\gamma^\mu\hat{p}^2 + 2mxy\hat{p} - mxy\gamma^\mu\hat{p} + m^2y(1 - y)\gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. - 2mxy\hat{p} + mxy\gamma^\mu\hat{p} + m^2y\gamma^\mu \right] \\ &\quad \times [m^2x(1 - x) + 2y(1 - x)p \cdot p' - y(1 - x)\hat{p}'\hat{p} + my(1 - x)\hat{p}' - y^2(\hat{p}')^2 + m^2x] u(p). \end{aligned}$$

Agora, fazendo uso do resultado (E.11), encontramos:

$$\begin{aligned} &= \bar{u}(p') \left[2m^2x(1 - y)\gamma^\mu - q^2x(1 - y)\gamma^\mu - mx(1 - y)\hat{p}\gamma^\mu - x^2\gamma^\mu\hat{p}^2 + 2mx(1 - y)p^\mu \right. \\ &\quad \left. - mx(1 - y)\gamma^\mu\hat{p} + m^2y(2 - y)\gamma^\mu \right] \\ &\quad \times [m^2x(2 - x) + 2m^2y(1 - x) - q^2y(1 - x) - y(1 - x)\hat{p}'(\hat{p} - m) - y^2(\hat{p}')^2] u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[2m^2x(1 - y)\gamma^\mu - q^2x(1 - y)\gamma^\mu + m^2y(2 - y)\gamma^\mu - x^2\gamma^\mu\hat{p}^2 \right. \\ &\quad \left. - mx(1 - y)p_\alpha \{ \gamma^\alpha, \gamma^\mu \} + 2mx(1 - y)p^\mu \right] \\ &\quad \times [m^2x(2 - x) + 2m^2y(1 - x) - q^2y(1 - x) - y^2(\hat{p}')^2] u(p), \\ &= \bar{u}(p') \left[2m^2x(1 - y)\gamma^\mu - q^2x(1 - y)\gamma^\mu + m^2y(2 - y)\gamma^\mu - x^2\gamma^\mu\hat{p}^2 \right. \\ &\quad \left. - 2mx(1 - y)p^\mu + 2mx(1 - y)p^\mu \right] \\ &\quad \times [m^2x(2 - x) + 2m^2y(1 - x) - q^2y(1 - x) - y^2(\hat{p}')^2] u(p) \\ &= \bar{u}(p') [m^2(2x - 2xy + 2y - y^2)\gamma^\mu - x^2\gamma^\mu\hat{p}^2 - q^2x(1 - y)\gamma^\mu] \\ &\quad \times [m^2(2x - x^2 + 2y - 2xy) - q^2y(1 - x) - y^2(\hat{p}')^2] u(p). \end{aligned}$$

Multiplicando os termos:

$$\begin{aligned} &= \bar{u}(p') \left[m^4(2x - 2xy + 2y - y^2)(2x - x^2 + 2y - 2xy)\gamma^\mu - m^2y^2(2x - 2xy + 2y - y^2)\gamma^\mu(\hat{p}')^2 \right. \\ &\quad \left. - m^2x^2(2x - x^2 + 2y - 2xy)\gamma^\mu\hat{p}^2 + x^2y^2\gamma^\mu\hat{p}^2(\hat{p}')^2 \right] u(p) \\ &\quad - q^2x(1 - y)\bar{u}(p')\gamma^\mu [m^2(2x - x^2 + 2y - 2xy) - q^2y(1 - x) - y^2(\hat{p}')^2] u(p) \\ &\quad - q^2y(1 - x)\bar{u}(p') [m^2(2x - 2xy + 2y - y^2)\gamma^\mu - x^2\gamma^\mu\hat{p}^2 - q^2x(1 - y)\gamma^\mu] u(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p') \left[m^4(2x - 2xy + 2y - y^2)(2x - x^2 + 2y - 2xy)\gamma^\mu - m^2y^2(2x - 2xy + 2y - y^2)(\hat{p}')^2\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. - m^4x^2(2x - x^2 + 2y - 2xy)\gamma^\mu + x^2y^2\gamma^\mu\hat{p}'^2(\hat{p}')^2 \right] u(p) \\
&\quad - q^2x(1 - y) \left[m^2(2x - x^2 + 2y - 2xy - y^2) - q^2y(1 - x) \right] \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \\
&\quad - q^2y(1 - x) \left[m^2(2x - 2xy + 2y - y^2 - x^2) - q^2x(1 - y) \right] \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p), \\
&= \bar{u}(p') \left[m^4(2x - 2xy + 2y - y^2)(2x - x^2 + 2y - 2xy)\gamma^\mu - m^4y^2(2x - 2xy + 2y - y^2)\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. - m^4x^2(2x - x^2 + 2y - 2xy)\gamma^\mu + x^2y^2\gamma^\mu\hat{p}'^2(\hat{p}')^2 \right] u(p) \\
&\quad - q^2m^2[x(1 - y) + y(1 - x)](2x - 2xy + 2y - y^2 - x^2)\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2q^4xy(1 - x)(1 - y)\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p). \tag{E.27}
\end{aligned}$$

E, do resultado anterior: $2x - 2xy + 2y - y^2 - x^2 = 1 - (1 - x - y)^2$. Resta-nos, assim, calcularmos apenas o quarto termo da expressão acima:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'^2(\hat{p}')^2u(p) &= \bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'(2p.p' - \hat{p}'\hat{p})\hat{p}'u(p) = 2p.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'u(p) - \bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'\hat{p}'u(p) \\
&= 2p.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu(2p.p' - \hat{p}'\hat{p})u(p) - \bar{u}(p')\gamma^\mu(2p.p' - \hat{p}'\hat{p})(2p.p' - \hat{p}'\hat{p})u(p) \\
&= (2p.p')^2\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) - 2p.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'u(p) - (2p.p')^2\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2p.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'u(p) + 2p.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'u(p) - \bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'\hat{p}'\hat{p}'u(p) \\
&= 2p.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'u(p) - m\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'\hat{p}'u(p) \\
&= 2mp.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'u(p) - m\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'(2p.p' - \hat{p}'\hat{p})u(p) \\
&= 2mp.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'u(p) - 2mp.p'\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'u(p) + m\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'\hat{p}'u(p) \\
&= m^2\bar{u}(p')\gamma^\mu\hat{p}'\hat{p}'u(p) = m^2\bar{u}(p')\hat{p}'\hat{p}'\gamma^\mu u(p) = m^4\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p). \tag{E.28}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo o resultado (E.28) na equação (E.27), obtemos:

$$\begin{aligned}
&= m^4\bar{u}(p') \left[(2x - 2xy + 2y - y^2)(2x - x^2 + 2y - 2xy) - y^2(2x - 2xy + 2y - y^2) \right. \\
&\quad \left. - x^2(2x - x^2 + 2y - 2xy) + x^2y^2\gamma^\mu \right] u(p) \\
&\quad - q^2m^2[x(1 - y) + y(1 - x)] \left(1 - (1 - x - y)^2 \right) \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + 2q^4[xy(1 - x)(1 - y)]\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p), \\
&= m^4\bar{u}(p') \left[(2x - 2xy + 2y)(2x - x^2 + 2y - 2xy) - y^2(2x - x^2 + 2y - 2xy) - y^2(2x - 2xy + 2y) \right. \\
&\quad \left. + y^4 - x^2(2x + 2y - 2xy) + x^4 + x^2y^2 \right] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - q^2m^2[x(1 - y) + y(1 - x)] \left(1 - (1 - x - y)^2 \right) \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + 2q^4[xy(1 - x)(1 - y)]\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p), \\
&= m^4\bar{u}(p') \left[(2x - 2xy + 2y)(2x - x^2 + 2y - 2xy - y^2 - x^2) - y^2(2x + 2y - 2xy) \right. \\
&\quad \left. + x^2y^2 + y^4 + x^4 + x^2y^2 \right] \gamma^\mu u(p) - q^2m^2[x(1 - y) + y(1 - x)] \left(1 - (1 - x - y)^2 \right) \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2q^4[xy(1 - x)(1 - y)]\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m^4 \bar{u}(p') [(2x - 2xy + 2y)(2x - x^2 + 2y - 2xy - y^2 - y^2 - x^2) + 2x^2y^2 + y^4 + x^4] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] \left(1 - (1-x-y)^2\right) \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p), \\
&= m^4 \bar{u}(p') [(2x - 2xy + 2y)(2x - 2x^2 + 2y - 2xy - 2y^2) + 2x^2y^2 + y^4 + x^4] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] \left(1 - (1-x-y)^2\right) \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p), \\
&= m^4 \bar{u}(p') [4(x - xy + y)(x(1-y) - x^2 + y(1-y)) + 2x^2y^2 + y^4 + x^4] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] \left(1 - (1-x-y)^2\right) \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p), \\
&= m^4 \bar{u}(p') [4(x - xy + y)((x+y)(1-y) - x^2) + 2x^2y^2 + y^4 + x^4] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] \left(1 - (1-x-y)^2\right) \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p).
\end{aligned}$$

Dessa forma, determinamos a expressão do último termo:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \Sigma_1 \gamma^\mu \Sigma_2 u(p) &= m^4 \bar{u}(p') [4(x - xy + y)((x+y)(1-y) - x^2) + (x^2 + y^2)^2] \gamma^\mu u(p) \\
&\quad - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] \left(1 - (1-x-y)^2\right) \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \\
&\quad + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p). \tag{E.29}
\end{aligned}$$

Como já calculamos todos os termos de $\bar{u}(p') \Lambda^{\mu(1)}(p', p) u(p)$, o que nos resta fazer, agora, é calcularmos as integrais. Contudo, para evitar carregar a notação omitiremos os espinores \bar{u} e u (ficando eles subentendidos nos cálculos seguintes). Escrevemos, portanto, $\Lambda^{\mu(1)}(q^2)$ Eq.(E.1) ($m_P^2 = a^{-2}$), como:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)}{\Delta^2} \right| + \frac{3\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int d\xi \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2 z}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} \right| \\
&\quad + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[2m^2 \gamma^\mu ((x+y)(x+5y) - 2(1-x-y)^2 - 4x) \right. \\
&\quad \left. - 2mq_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu] (xy + y^2 - x) + 2q^2 [1-x-y+xy] \right] \left[\frac{1}{\Delta^2} - \frac{1}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int d\xi \left[m^2(x+y)(2-x-y) - x(1-y)q^2 + m^2(x+y)(2-x-y) - y(1-x)q^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} 4m^2(1-x-y)^2 + \frac{1}{4} 2q^2(1+2xy-x-y) \right] \left[\frac{1}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} - \frac{1}{\Delta^2 + m_P^2 z} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \int d\xi \left[m^4 [4(x - xy + y)((x+y)(1-y) - x^2) + (x^2 + y^2)^2] \right. \\
&\quad \left. - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] \left(1 - (1-x-y)^2\right) + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \right] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)]^2} - \frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2 z]^2} \right]; \tag{E.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu(1)}(q^2) = & \frac{\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)}{\Delta^2} \right| \\
& + \frac{3\alpha}{2\pi} \gamma^\mu \int d\xi \ln \left| \frac{\Delta^2 + m_P^2 z}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} \right| \\
& + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[2m^2 \gamma^\mu ((x+y)(x+5y) - 2(1-x-y)^2 - 4x) \right. \\
& \left. - 2mq_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu] (xy + y^2 - x) + 2q^2 [1-x-y+xy] \gamma^\mu \right] \left[\frac{1}{\Delta^2} - \frac{1}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} \right] \\
& + \frac{\alpha m^2}{2\pi} \gamma^\mu \int d\xi \left[2(x+y)(2-x-y) - (1-x-y)^2 + \frac{1}{2m^2} q^2 (1-3x-3y+6xy) \right] \\
& \times \left[\frac{1}{\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)} - \frac{1}{\Delta^2 + m_P^2 z} \right] \\
& + \frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \int d\xi \left[m^4 [4(x-xy+y)((x+y)(1-y) - x^2) + (x^2 + y^2)^2] \right. \\
& \left. - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] (1 - (1-x-y)^2) + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \right] \\
& \times \left[\frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2(1-x-y)]^2} - \frac{1}{[\Delta^2 + m_P^2 z]^2} \right]; \tag{E.31}
\end{aligned}$$

E, com o auxílio de: $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ e algumas simples mudanças de variáveis, podemos escrever $\Lambda^{\mu(1)}(q^2)$, como:

$$\Lambda^{\mu(1,\xi)}(q^2) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{iq_\nu}{2m} \sigma^{\mu\nu} F_2(q^2), \tag{E.32}$$

em que a expressão explícita dos fatores de forma é:

$$\begin{aligned}
F_2(q^2) = & \frac{2\alpha}{\pi} m^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (xy + y^2 - x) \\
& \times \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} \right] \tag{E.33}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_1(q^2) &= (Z_1 - 1)^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} \right| \\
&+ (\xi - 1) \frac{3\alpha}{2\pi} \int d\xi \ln \left| \frac{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} \right| \\
&+ \xi \frac{3\alpha}{2\pi} \int d\xi \ln \left| \frac{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} \right| \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (2m^2((x+y)(x+5y) - 2(1-x-y)^2 - 4x) + 2q^2[1-x-y+xy]) \\
&\times \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} \right] \\
&+ \frac{\alpha m^2}{2\pi} \int d\xi \left(2(x+y)(2-x-y) - (1-x-y)^2 + \frac{1}{2m^2} q^2(1-3x-3y+6xy) \right) \\
&\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z} \right] \right. \\
&\left. + \xi \left[\frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)} - \frac{1}{-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z} \right] \right] \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi} \int d\xi \left(m^4 [4(x-xy+y)((x+y)(1-y) - x^2) + (x^2+y^2)^2] \right. \\
&\left. - q^2 m^2 [x(1-y) + y(1-x)] (1 - (1-x-y)^2) + 2q^4 [xy(1-x)(1-y)] \right) \\
&\times \left[(\xi - 1) \left[\frac{1}{[-q^2 xy + m^2(x+y)^2]^2} - \frac{1}{[-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z]^2} \right] \right. \\
&\left. + \xi \left[\frac{1}{[-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2(1-x-y)]^2} - \frac{1}{[-q^2 xy + m^2(x+y)^2 + m_P^2 z]^2} \right] \right]. \quad (\text{E.34})
\end{aligned}$$