



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-D.004/12

Tópicos em Teoria Quântica de Campos

Esley Scatena Gonçalves

Orientador

Antônio José Accioly

Agosto de 2012

When I heard the learn'd astronomer,
When the proofs, the figures, were ranged in columns before me,
When I was shown the charts and diagrams, to add, divide, and measure them,
When I sitting heard the astronomer where he lectured with much applause in
the lecture-room,
How soon unaccountable I became tired and sick,
Till rising and gliding out I wander'd off by myself,
In the mystical moist night-air, and from time to time,
Look'd up in perfect silence at the stars.

When I Heard the Learn'd Astronomer, de Walt Whitman.

Agradecimentos

Quatro anos é muito tempo para que um projeto como esse se desenvolva sem que sofra imensas modificações, sejam elas por vontade própria, sejam por conta das equações que assim quiseram. E por mais que eu queira dizer que este trabalho terminou, sei que sempre que relê-lo vou querer alterar alguma coisa, um índice trocado ou uma discussão que poderia ter sido mais aprofundada. Por outro lado, essa incompletude se reflete também no próprio corpo da Ciência, que está sempre em desenvolvimento.

Agradeço, então, aos que me ajudaram a concluir parte dessa empreitada “inacabável” começando pela minha família, em especial meu irmão, David, que sempre apoiou as minhas decisões. Sou grato aos amigos que não participaram diretamente deste trabalho, mas certamente contribuíram para a minha sanidade mental durante o processo – Fabio, Henrique, Linneu, Marcelo, Italo, Leandro, Nara, Mór, Rone, Claudio, Carol e Max – aos que, de alguma forma, contribuíram diretamente – Rodrigo Turcati, Jefferson Moraes, Bruno Dias, Carlos Bonilla (pelas discussões “físicas”) e Tamara Prior (pela revisão do texto na primeira versão) – e, também, à Tamara West, que tem me inspirado, incentivado e motivado cada vez mais.

Durante o desenvolvimento deste trabalho tive o prazer de contar com o apoio dos pesquisadores do CBPF José Helayël-Neto, Sebastião Alves Dias e Sérgio Duarte, sempre dispostos a ajudar e abertos a discussões. Obrigado.

Sou imensamente grato ao professor Antonio Accioly que, além de excelente orientador, mostrou-se um grande amigo nesses mais de 6 anos em que trabalhamos juntos.

Por fim, agradeço ao IFT pela oportunidade de desenvolver este trabalho e à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Dois tópicos importantes e atuais em teoria quântica de campos, a saber, Teorias com Derivadas de Ordem mais Alta e Determinação de Limites para a Massa do Fóton, são considerados. Como protótipos para as teorias de ordem mais alta selecionamos a Eletrodinâmica de Lee e Wick e a Gravitação Massiva em 3D. Ambas as teorias são de relevância especial para a física contemporânea. A primeira por constituir o alicerce sobre o qual o Modelo Padrão de Lee e Wick se assenta, enquanto que a outra é a única teoria de gravitação com derivadas de ordem mais alta conhecida até o momento cuja versão linearizada é unitária em nível de árvore. Novas e interessantes propriedades relativas às mencionadas teorias são estudadas em detalhe. Finalmente, limites clássicos e quânticos para a massa do fóton são estimados.

Palavras-chave: Eletrodinâmica de Lee e Wick; Gravitação Massiva em 3D; Fóton Massivo.

Áreas de conhecimento: Teoria Quântica de Campos; Gravitação.

Abstract

Two important and current topics in quantum field theory, namely, Higher-Derivative Theories and Bounds on the Photon Mass, are considered. As prototypes for the higher-order theories we have singled out Lee-Wick Finite Electrodynamics and Massive Gravity in 3D. Both theories are of special relevance to contemporary physics. The former because it is the base on which the Lee-Wick Standard Model rests, while the other is the only higher-order gravity theory known up to now whose linearized version is tree-level unitary. Novel and interesting properties related to both theories are analyzed in detail. Finally, classical and quantum bounds on the photon mass are estimated.

Sumário

Sumário	vii
Introdução	1
Referências Bibliográficas	6
I Teorias com Derivadas de Ordem Mais Alta	8
Referências Bibliográficas	13
1 Explorando a Eletrodinâmica Finita de Lee e Wick	14
1.1 Motivação	14
1.2 Aspectos gerais do modelo de Lee e Wick	16
1.2.1 Análise de um <i>toy model</i> escalar	20
1.3 O tensor energia-momento de Lee e Wick	25
1.4 Propagação ondulatória na eletrodinâmica de Lee e Wick	28
1.5 Limites sobre a massa da partícula pesada de Lee e Wick	31
1.5.1 Um limite clássico sobre a massa da partícula pesada de LW	31
1.5.2 Um limite quântico sobre a massa da partícula pesada de LW	35
1.6 O potencial não-relativístico de LW	38

1.6.1	Mecânica quântica e o limite não-relativístico da TQC	38
1.6.2	Análise comparativa entre os potenciais de LW e Coulomb	44
1.7	Monopólos magnéticos	44
1.8	Discussão	48
	Referências Bibliográficas	50
2	Explorando a Gravitação Massiva em 3D	54
2.1	Motivação	54
2.2	O propagador da gravitação massiva em (2+1)D	56
2.2.1	Cálculo de \sqrt{g} , $\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}$, $R_{\lambda\mu\nu\rho}$, $R_{\mu\nu}$ e R em primeira ordem em κ	57
2.2.2	Forma gama-gama da lagrangiana de Einstein	60
2.2.3	A forma bilinear da lagrangiana da 3DHDG	61
2.3	Unitariedade em nível de árvore do modelo 3DHDG	65
2.4	Potencial inter-partículas	67
2.5	Desvio da Luz	72
2.6	Análise dos resultados obtidos no contexto dos modelos BHT e 3DHDG	78
2.6.1	O potencial não-relativístico para o modelo 3DHDG	78
2.6.2	Deflexão da luz no contexto da 3DHDG	80
2.6.3	Um estudo comparativo	81
2.7	Discussão	83
	Referências Bibliográficas	86
	Apêndice A Prescrição para o cálculo do propagador do gráviton	89
	Apêndice B Equações de campo e o gauge de Teyssandier	92
B.1	Equações de campo do modelo BHT	92
B.2	Equações de campo linearizadas no <i>gauge</i> de Teyssandier	95

B.3 Solução das equações de campo para uma partícula puntual	98
Apêndice C Um resultado útil para checar a unitariedade da 3DHDG	101
II Determinação de Limites para a Massa do Fóton	103
Referências Bibliográficas	106
3 A Massa do Fóton e a Interferometria de Linha de Base Extensa	107
3.1 Motivação	107
3.2 Combinando RG, QED Massiva e VLBI para limitar a massa do fóton .	111
3.2.1 Cálculo da lagrangiana de Interação	112
3.2.2 Cálculo da função de vértice	113
3.2.3 Cálculo da seção de choque diferencial não-polarizada	115
3.3 Relação entre massa, frequência e parâmetro de deflexão para o fóton .	118
3.4 Encontrando limites gravitacionais superiores para a massa do fóton . .	123
3.5 Discussão	128
Referências Bibliográficas	131
Epílogo	135
Referências Bibliográficas	138

Lista de Figuras

1.1	Partícula pesada de Lee e Wick decaindo em outras duas mais leves	23
1.2	Relações de dispersão para a eletrodinâmica de LW.	29
1.3	Geometria do experimento de Plimpton e Lawton.	33
1.4	Correção de vértice para um elétron espalhado por um campo externo.	35
1.5	Contribuição de menor ordem para o espalhamento elástico e^-e^+	39
1.6	Vértice relevante para a QED de LW.	40
1.7	O potencial U (em unidades de $\frac{e^2}{4\pi}$), como função da distância r	45
2.1	Vértice relevante para a interação gravitacional de bósons escalares	69
2.2	A força gravitacional de curto alcance relacionada ao modelo de BHT.	72
2.3	Geometria da deflexão da luz.	76
2.4	Possíveis regimes gravitacionais preditos pela 3DHDG.	79
2.5	Energia potencial gravitacional para os modelos 3DHDG e BHT	82
3.1	Interação entre um fóton massivo e um campo gravitacional externo.	113
3.2	$\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}}$ como função do ângulo de espalhamento θ	122

Lista de Tabelas

A.1	Tabela multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers	90
3.1	Seções de choque para o espalhamento de diferentes partículas.	120
3.2	Limites superiores para a massa do fóton.	124
3.3	Limites para massa do fóton obtidos via dispersão da velocidade da luz.	130

Introdução

Podemos dizer, em poucas palavras, que a teoria quântica de campos (QFT) nasceu da necessidade da fusão da relatividade especial com a mecânica quântica (QM); em contrapartida, a necessidade de conciliar a relatividade geral com a QM deu origem à teoria de cordas. Acredita-se que um tratamento correto do campo gravitacional sob o ponto de vista da QFT, tratamento este por hora ainda desconhecido, deverá reproduzir a teoria da relatividade geral de Einstein no limite de baixas energias ou, de modo mais geral, o Sistema Einstein-Yang-Mills-Dirac. Em outras palavras, é provável que a QFT nada mais seja que o limite de baixas energias relativo a uma teoria de campos efetiva de uma teoria mais fundamental, tal como a teoria de supercordas.

A QFT é na realidade um conjunto de ideias e ferramentas que combina harmoniosamente três dos maiores temas da física moderna: a teoria quântica, o conceito de campo e o princípio da relatividade. Assim sendo, ela não só fornece um sólido alicerce para a física das partículas elementares contemporânea, mas é também um repositório de ferramentas que são essenciais para a física nuclear e a física atômica, bem como para a física da matéria condensada e a astrofísica. Além disso, esta teoria tem permitido que se edifiquem novas pontes entre a física e a matemática. Primitivamente, a motivação para o estudo da QFT jazia na esperança de que ela viesse lançar

uma nova luz sobre nossa maneira de enxergar as partículas fundamentais da matéria e suas interações. De fato, uma estrutura que incorporava, por um lado, a QM (que tinha sido tão bem sucedida no que tange à resolução de um grande número de problemas da física atômica no início do século passado) e, por outro, a teoria de campos (a linguagem utilizada para descrever o surpreendente quadro da realidade desvelado por Faraday, Maxwell e Hertz), certamente deveria fornecer alguma indicação confiável sobre a natureza fundamental da matéria. Na realidade, os resultados superaram em muito as expectativas. Para não nos alongarmos muito analisaremos, de passagem, apenas a QED, o primeiro filho do bem sucedido casamento da relatividade especial com a QM. Esta teoria prediz, para citar apenas um dos seus sucessos, o momento magnético anômalo do elétron corretamente com onze casas decimais. Esta fantástica concordância entre os resultados previstos teoricamente e os obtidos experimentalmente levaram Ryder [1] a perguntar: “O que mais se poderia querer de uma teoria física?”.

A QFT tem também sido estudada sob o ponto de vista axiomático. É crença geral que a axiomatização é uma espécie de polimento, que é aplicado a uma área da ciência após ela ter sido, no que concerne a todos os propósitos práticos, completada. Obviamente, isto não é verdade nem mesmo no contexto da matemática pura. Em física teórica, desde o tempo de Newton, o método axiomático tem servido não somente para a sistematização dos resultados previamente obtidos, mas também para auxiliar na descoberta de novos resultados. O significado do termo “axiomatização” como empregado na física vem gradualmente evoluindo em direção a uma maior generalização e abstração. Como os resultados experimentalmente verificáveis provenientes da QFT axiomática não são muitos [2], o método axiomático ocupa um lugar comparativamente pequeno no contexto da teoria das partículas elementares de nossos dias. É digno de nota que resultados rigorosos em QFT têm a grande vantagem de possuírem um tempo

de vida um tanto quanto mais longo quando comparados com a maioria dos trabalhos “da moda” em física das partículas elementares.

Durante as duas últimas décadas a QFT passou a ser um tópico cada vez mais discutido no âmbito da filosofia da física. Esta teoria constitui um tópico muito atrativo para os filósofos sob o ponto de vista metodológico, semântico bem como ontológico. É de causar espécie, no entanto, que a discussão dos fundamentos conceituais do domínio quântico tenha sido sempre primazia da QM e não da QFT. De fato, a QFT é, num certo sentido, muito mais abrangente que a QM, sendo também, ao contrário desta última, relativisticamente invariante. Existem pelo menos duas razões para se favorecer, no que concerne às reflexões conceituais, a QM em detrimento da QFT. A primeira é que durante muito tempo acreditou-se que os problemas filosóficos de maior peso, em particular o problema da medida, já tinham aparecido na QM, de modo que uma análise conceitual da QFT parecia ser redundante. Acreditava-se também que um exame mais acurado da QFT só iria ajudar a obscurecer a visão de seus aspectos centrais, já que a QFT é muito mais complexa que a QM padrão, inclusive no que se refere às dificuldades matemáticas. Uma segunda razão para se negligenciar a QFT se baseava no argumento que ela não tinha ainda atingido o status de teoria completa e consistente. Além disso, a inexistência de uma teoria de gravitação constituía também um fator bastante agravante. Certamente, não se pode negar que a incorporação da quarta força fundamental (gravitação) deverá levar forçosamente a profundas modificações na QFT como um todo; a versão corrente da QFT nada mais que uma teoria preliminar. No entanto, se fossemos esperar por uma versão completa da QFT é bastante provável que uma análise filosófica da mesma não começasse nunca. Na verdade, reflexões interpretativas sobre os fundamentos da física e suas inconsistências não deveriam jamais ser evitadas, pois elas ajudam na busca da teoria final. Interessantes discussões sobre

a filosofia da QFT podem ser encontradas em [3–7].

Nosso objetivo neste trabalho é analisar no contexto da QFT dois tópicos bastante relevantes e atuais: Teorias com Derivadas de Ordem Mais Alta e Determinação de Limites para a Massa do Fóton.

Cabe aqui uma indagação simples e natural: Qual a razão que nos levou a selecionar entre os inúmeros e interessantes tópicos que compõem a QFT precisamente os acima mencionados? A resposta a esta questão é bastante simples: Pretendíamos, por um lado, entender melhor a ideia em voga de que teorias de ordem mais alta se são renormalizáveis não são unitárias e, se são unitárias são assombradas por fantasmas. Seria isto uma verdade incontestável ou uma simples conjectura? Se um mito, como desmitificá-lo?; por outro, queríamos encontrar limites para a massa do fóton que não fossem baseados apenas em cálculos de ordem grandeza, como são em geral os resultados encontrados na literatura, mas sim em resultados provenientes de cálculos rigorosos realizados no âmbito da QFT e onde utilizaríamos como dados de entrada as mais recentes medidas experimentais.

Por razões didáticas vamos desdobrar o trabalho em duas partes:

Parte I: Teorias com Derivadas de Ordem Mais Alta.

Parte II: Determinação de Limites para a Massa do Fóton.

Na Parte I nos ocupamos com as Teorias Eletromagnéticas de Ordem Superior e com as Teorias Gravitacionais com Derivadas de Ordem Mais Alta; enquanto que na Parte II nos devotamos à determinação de limites clássicos e quânticos para a massa do fóton.

Iniciamos a Parte I explorando a Eletrodinâmica Finita de Lee e Wick [8, 9] que,

em sua versão atual, é definida pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu},$$

onde m é um parâmetro com dimensão de massa. Limites clássicos e quânticos são determinados para o parâmetro m . A propagação ondulatória no contexto desta eletrodinâmica de ordem mais alta é então analisada. Discutimos também a interessante questão relacionada à possibilidade de coexistência de uma partícula massiva e uma carga magnética no âmbito da mencionada eletrodinâmica [10–12]. Em sequência nos voltamos para o estudo da Gravitação Massiva em 3D, que é definida pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{g}\left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2}\left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2\right)\right],$$

onde m_2 é um parâmetro com dimensão de massa. Propriedades interessantes deste modelo, tais como a presença de uma força gravitacional de curto alcance no limite não-relativístico e a existência de um ângulo de deflexão gravitacional que depende do parâmetro de impacto, são discutidas em detalhe [13, 14]. Limites para a massa do fóton são obtidos na Parte II por dois caminhos diferentes: via uma combinação da Relatividade Geral, QED Massiva e VLBI (Very Long Baseline Interferometry) e, posteriormente, utilizando o momento magnético anômalo do elétron calculado no contexto da QED Massiva [15–18]. Estes resultados foram incluídos no PDG [19].

Encerramos o trabalho analisando a importante e interessante questão, ainda em aberto, concernente a uma possível incompatibilidade entre renormalizabilidade e unitariedade em teorias com derivadas de ordem superior. Apresentamos também uma discussão sobre possíveis extensões dos resultados aqui elaborados.

Referências Bibliográficas

- [1] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1985).
- [2] N. Bogulubov, A. Logunov, and I. Todorov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*, Reading (1975).
- [3] H. Brown and R. Harré, eds, *Philosophical Foundations of Quantum Field Theory*, Clarendon Press (1988).
- [4] T. Cao, ed, *Conceptual Foundations of Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1999).
- [5] M. Redhead, Quantum Field Theory for Philosophers, in Asquith and Nickles, eds., 1983, *Proceedings of the Biennial meeting of the Philosophy of Science Association:PSA 1982*, East Lansing, MI: Philosophy of Science Association, vol. 2, pp. 57-99.
- [6] M. Redhead, A philosopher looks at quantum field theory, in Brown and Harré 1988, pp. 9-23.
- [7] M. Redhead, Some philosophical aspects of particle physics, *Studies in history and Philosophy of Science* **11** 279 (1980).

- [8] T. Lee and G. Wick, *Nucl. Phys. B* **9**, 209 (1969).
- [9] T. Lee and G. Wick, *Phys. Rev. D* **2**, 1033 (1970).
- [10] A. Accioly and E. Scatena, *Mod. Phys. Lett. A* **25**, 269 (2010).
- [11] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, *Mod. Phys. Lett. A* **26** 1985 (2011).
- [12] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, *arXiv:1012.1045v2 [hep-th]*.
- [13] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati, and B. Pereira-Dias, *Class. Quantum Grav.* **28** 225008 (2011).
- [14] A. Accioly, J. Helayël-Neto, J. Morais, E. Scatena, and R. Turcati, *Phys. Rev. D* **83** 104005 (2011).
- [15] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Rev. D* **82** 065026 (2010).
- [16] A. Accioly, J. Helayël-Neto, R. Turcati, J. Morais and E. Scatena, *Classical Quantum Gravity* **27** 205010 (2010).
- [17] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Lett. A* **374** 3806 (2010). *This essay was awarded an “honorable mention” in the 2010 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.*
- [18] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Int. J. Mod. Phys. D* **19** 2393 (2010).
- [19] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **86** 010001 (2012).

Parte I

Teorias com Derivadas de Ordem Mais Alta

Lagrangianas de ordem superior foram estudadas inicialmente como uma mera curiosidade matemática. No entanto, com o nascimento da Mecânica Quântica e a subsequente quantização dos campos, estes objetos passaram a serem utilizados como uma espécie de remédio que se acreditava ser eficaz para a cura dos males que afligiam as teorias físicas vigentes no final década de 40 do século passado. Podolsky [1], por exemplo, deixa isto bem claro, quando apresenta suas razões para a construção de uma eletrodinâmica de ordem superior:

Se supusermos que as equações da eletrodinâmica são deriváveis a partir de uma lagrangiana, L , e quisermos preservar o caráter linear das equações de campo (o princípio de superposição) a fim de tornarmos a quantização fácil, então, a não ser que estejamos preparados para introduzir novos campos, a única maneira de generalizar a teoria de Maxwell parece ser permitir que a lagrangiana do campo contenha termos envolvendo derivadas dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . Obtemos, então, como equações de campo, equações diferenciais parciais de ordem superior à usual segunda. Longe de ser um problema, isso parece ser o que era necessário. Pois, os vários métodos propostos de truncar efeitos de altas frequências parecem indicar que as derivadas superiores, que se tornam importantes para as altas frequências, não são tratadas de forma apropriada pelas equações usuais de segunda ordem.

A eletrodinâmica de Podolsky é definida pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{l^2}{2}\partial_\mu F^{\mu\alpha}\partial^\nu F_{\nu\alpha},$$

onde l é um parâmetro com dimensão de comprimento.

Graças a este trabalho de Podolsky, as teorias de ordem mais alta tornaram-se boas

candidatas a sanar problemas devidos aos efeitos de alta frequência. Estes efeitos nada mais são que as divergências geradas nos cálculos de quantidades físicas mensuráveis — tais como seções de choque, decaimentos, massas, constantes de acoplamento — devidas ao comportamento extremamente singular dos campos quânticos em distâncias muito pequenas.

No início da década de 50, no entanto, Pais e Uhlenbeck [2] demonstraram que as teorias de ordem superior eram assombradas por fantasmas. Apesar de tais teorias não terem sido descartadas por completo, o entusiasmo pelas mesmas arrefeceu.

No início dos anos setenta o interesse pelas teorias de ordem superior recrudescer graças aos trabalhos de Lee e Wick [3, 4] que procuraram contornar o problema da não-unitariedade da eletrodinâmica por eles proposta via uma série de procedimentos engenhosos. É importante notar que a eletrodinâmica de Lee e Wick foi construída anteriormente à QED, com o fito de entender a diferença de massas dos mésons. Se compararmos as lagrangianas que definem, respectivamente, as teorias de Podolsky e a de Lee e Wick em sua versão atual, vemos que elas são equivalentes. Por outro lado, tudo parece indicar que Lee e Wick não estavam a par do trabalho de Podolsky, pois a lagrangiana que eles usaram em seu trabalho não é exatamente a que hoje denominamos lagrangiana de Lee e Wick. A lagrangiana proposta originalmente por eles era aquela resultante da substituição, na lagrangiana de Maxwell, do campo usual do fóton sem massa A_μ pelo campo complexo

$$\phi_\mu = A_\mu + iB_\mu,$$

onde B_μ é um campo bosônico massivo associado a uma métrica negativa.

Com o advento da QED, a eletrodinâmica de Lee e Wick entrou numa fase de

ostracismo que durou cerca de quase quatro décadas. Em 2008 esta eletrodinâmica voltou a ser alvo de intensas investigações em razão do Modelo Padrão de Lee e Wick proposto por Grinstein, O'Connell e Wise [5] ter utilizado a mesma como paradigma. O interesse pela eletrodinâmica de Lee e Wick, no entanto, ainda não arrefeceu pois acredita-se que um melhor conhecimento deste modelo venha lançar novas luzes sobre o funcionamento do Modelo Padrão de Lee e Wick.

Por outro lado as teorias de gravitação com derivadas de ordem mais alta foram sugeridas por Weyl [6] e Eddington [7]. Estas teorias nada mais eram que simples generalizações da relatividade geral obtidas, grosso modo, acrescentando-se à lagrangiana de Einstein os escalares R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$. Uma interessante discussão sobre estas teorias pode ser encontrada em Havas [8]. Verificou-se mais tarde que, devido ao teorema da Gauss-Bonnet, somente era necessário considerar dois dos termos quadráticos acima mencionados. Assim sendo, as teorias de gravitação de ordem superior passaram, em geral, a serem definidas pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right),$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$, sendo G a constante de Newton, e α e β são parâmetros arbitrários.

Com a constatação de que a gravitação não era renormalizável dentro do esquema perturbativo padrão, as teorias de gravitação de ordem mais alta, consideradas até então como simples extensões da relatividade geral, passaram a ocupar um lugar de destaque na busca por uma teoria de gravitação quântica. Neste sentido é digno de nota o magistral trabalho de Stelle de 1977 [9], onde é demonstrado que as teorias de ordem superior são renormalizáveis juntamente com os seus acoplamentos com a matéria. Infelizmente estas teorias não são unitárias devido à presença de um fantasma massivo

de spin 2. Em 1986, Antoniadis e Tomboulis [10] argumentaram que a presença do fantasma massivo de spin 2 no propagador nu era inconclusiva, já que esta excitação é instável. De acordo com eles, a posição dos pólos complexos no propagador vestido é explicitamente dependente de *gauge*. Utilizando argumentos padrões de teoria quântica de campos eles concluíram que as teorias de gravitação de ordem superior são unitárias. No ano seguinte Johnston [11] provou que as conjecturas de Antoniadis e Tomboulis não são verdadeiras, uma vez que o par de pólos complexos que aparece no propagador re-somado são independentes de *gauge*, implicando na não-unitariedade das teorias de gravitação com derivadas de ordem mais alta.

Assim, acreditava-se até 2009 que as teorias gravitacionais de ordem superior em sua versão linearizada não eram unitárias. Isto explica, em parte, o grande interesse que a teoria de gravitação massiva em 3D [12] provocou e, de certo modo continua provocando, na comunidade científica já que a sua versão linearizada é unitária.

Nos dois capítulos que se seguem vamos discutir novas e interessantes propriedades destas duas intrigantes teorias, a eletrodinâmica de Lee e Wick e gravitação massiva em 3D, reservando o epílogo para a discussão sobre a possibilidade da unitariedade e renormalizabilidade poderem coexistir pacificamente no contexto de uma mesma teoria de ordem mais alta.

Referências Bibliográficas

- [1] B. Podolsky, *Phys. Rev.* **62** 66 (1942).
- [2] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **79** 145 (1950).
- [3] T. Lee and G. Wick, *Nucl. Phys. B* **9** 209 (1969).
- [4] T. Lee and G. Wick, *Phys. Rev. D* **2** 1033 (1970).
- [5] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, *Phys. Rev. D* **77** 025012 (2008).
- [6] H. Weyl, *Space-Time- Matter* Dover, New York (1952), Chap. IV.
- [7] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed, Cambridge University Press (1924), Chap. IV.
- [8] P. Havas, *General Relativity and Gravitation* **8** 631 (1977).
- [9] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977).
- [10] I. Antoniadis and E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33** 2756 (1986).
- [11] D.A. Johnston, *Nuclear Physics B* **297** 721 (1988).
- [12] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102** 201301 (2009).

Explorando a Eletrodinâmica Finita de Lee e Wick

Estudamos a eletrodinâmica de Lee e Wick (LW), i.e., a teoria (invariante) de *gauge* $U(1)$ na qual um operador de dimensão 6 contendo derivadas de ordem mais alta é adicionado à lagrangiana livre do setor $U(1)$. Um limite quântico sobre a partícula massiva de LW é estimado por meio do cômputo do momento magnético anômalo do elétron no contexto do já citado modelo. Apresentamos também, um estudo comparativo entre os potenciais de LW e Coulomb.

1.1 Motivação

Lee e Wick (LW) propuseram uma teoria quântica para a eletrodinâmica com o intuito de entender a diferença de massas dos mésons antes que a QCD se estabelecesse [1, 2]. Cerca de três anos atrás, as teorias do tipo LW foram redescobertas num outro contexto quando Grinstein, O’Connel e Wise introduziram teorias de *gauge* não-Abelianas de LW [3]. O modelo desenvolvido por eles, conhecido normalmente por Modelo Padrão LW (MPLW), é naturalmente livre de divergências quadráticas, fornecendo uma alternativa para a solução do problema da hierarquia. Mesmo sendo relativamente recente, já existe

um extenso corpo de literatura relacionada ao MPLW [4–16], o que claramente mostra o interesse considerável que este modelo tem despertado. Estudos fenomenológicos sobre o MPLW também podem ser encontrados em abundância [17–22]. Portanto, é bastante justificável explorarmos algo mais simples, como setor eletromagnético da teoria de LW, como uma espécie de *toy model* para entendermos a dinâmica mais complexa do MPLW. De certo modo, este tipo de pesquisa é, *mutatis mutandis*, similar às aquelas conduzidas em teorias com dimensões menores com o intuito de se ganhar um maior conhecimento sobre questões conceituais mais complicadas, as quais são mais opacas no mundo físico quadridimensional.

Nosso objetivo neste capítulo é justamente examinar duas características básicas da QED de LW: (i) a ordem de magnitude da massa da partícula pesada de LW e, (ii) o desvio do comportamento do potencial de LW não-relativístico em comparação ao potencial usual de Coulomb. Espera-se que um melhor entendimento destes tópicos nos auxilie a, ao menos em princípio, melhorar nosso conhecimento do MPLW.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: alguns aspectos básicos do modelo de LW serão analisados na Seção 1.2, incluindo uma discussão sobre o seu propagador e renormalizabilidade. Na Seção 1.3 mostramos como é possível obter o tensor de energia-momento do modelo através de uma simples prescrição. Na Seção 1.4 faremos uma análise do comportamento ondulatório do modelo de LW enquanto, na Seção 1.5, calcularemos um limite clássico para o *cutoff* da teoria e, posteriormente, um limite quântico para a massa da partícula pesada de LW será estimado por meio do cálculo do momento magnético anômalo do elétron, no contexto do citado modelo. O potencial não-relativístico para a interação de dois férmions no contexto da QED de LW será calculado na Seção 1.6 por meio de uma poderosa abordagem baseada na fusão da mecânica quântica com o limite não-relativístico da teoria quântica de campos. Uma

análise comparativa entre os potenciais de LW e Coulomb é feita logo após. Em seguida, na Seção 1.7, fazemos uma breve discussão sobre a possibilidade da existência de monopólos magnéticos no citado modelo e, finalmente, uma discussão sobre os resultados obtidos encerra a Seção 1.8.

Ao longo de todo o capítulo, temos $\hbar = c = 1$ e a assinatura da métrica dada por $(+1, -1, -1, -1)$.

1.2 Aspectos gerais do modelo de Lee e Wick

O modelo abeliano de LW é definido pela seguinte lagrangiana invariante de *gauge*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Vamos mostrar que esta lagrangiana descreve (*on-shell*) dois campos de spin-1 independentes: um sem massa e outro massivo com normas positiva e negativa, respectivamente. Para se alcançar este objetivo, é conveniente adotarmos uma nova formulação onde se introduz um campo auxiliar e o termo com derivadas de ordem mais alta não comparece. A teoria de campos com os campos vetoriais reais A_μ e Z_μ e com lagrangiana [23]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu\square Z^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu Z^\nu - \frac{m^2}{8}A^\mu A_\mu + \frac{m^2}{4}A_\mu Z^\mu - \frac{m^2}{8}Z_\mu Z^\mu, \quad (1.2)$$

é equivalente à teoria de campos definida por (1.1). De fato, variando Z_μ , obtemos

$$Z_\mu = A_\mu + \frac{2}{m^2}\square A_\mu - \frac{2}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu A^\nu, \quad (1.3)$$

e o par de equações acopladas de segunda ordem oriundas de (1.2) é totalmente equivalente às equações de quarta ordem geradas a partir de (1.1). O sistema (1.2) separa-se

agora em duas lagrangianas, cada uma associada a um campo diferente, quando realizamos a mudança de variáveis

$$A_\mu = B_\mu + C_\mu, \quad (1.4)$$

$$Z_\mu = B_\mu - C_\mu. \quad (1.5)$$

Em termos de $B_\mu, C_\mu, B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ e $C_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$, a lagrangiana toma agora a seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{4}C_{\mu\nu}C^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}C_\mu C^\mu, \quad (1.6)$$

que nada mais é que a diferença entre a lagrangiana de Maxwell para B_μ e a lagrangiana de Proca para C_μ .

Pode-se mostrar que a lagrangiana de LW pode também ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial^\lambda F_{\lambda\nu}, \quad (1.7)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4m^2}\partial_\alpha F^{\mu\nu}\partial^\alpha F_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

O conteúdo de partículas da teoria pode também ser obtido diretamente de (1.1). Para tal, vamos computar os resíduos nos pólos simples do propagador saturado (contração do propagador com correntes conservadas). Adicionando à (1.1) o termo de fixação de *gauge* $\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2$, onde, como é usual, λ desempenha o papel de parâmetro fixador de *gauge* (e notando que devido à estrutura da teoria e à escolha de um funcional fixador de *gauge* linear, não são exigidos neste caso fantasmas de Faddeev-Popov), podemos escrever a equação (1.1) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\nu \left[\eta^{\mu\nu} \left(\square + \frac{\square^2}{m^2} \right) + \partial^\mu \partial^\nu \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} - \frac{\square}{m^2} \right) \right] A_\mu. \quad (1.9)$$

No espaço dos momenta a equação anterior toma a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu, \quad (1.10)$$

onde

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \left(\frac{k^4}{m^2} - k^2 \right) - k^\mu k^\nu \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} + \frac{k^2}{m^2} \right). \quad (1.11)$$

Expandindo o operador $\mathcal{O}^{\mu\nu}$ em termos dos operadores $\Theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$ e $\omega^{\mu\nu} = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$, ficamos com

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \left(\frac{k^4}{m^2} - k^2 \right) \Theta^{\mu\nu} - \frac{k^2}{\lambda} \omega^{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Com isso, a tarefa de encontrar o inverso do operador $\mathcal{O}(= A\Theta + B\omega)$ se torna simples, pois $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I} = \Theta + \omega$. Se $\mathcal{O}^{-1} = C\Theta + D\omega$,

$$(A\Theta + B\omega)(C\Theta + D\omega) = AC\Theta + BD\omega = \Theta + \omega, \quad (1.13)$$

ou seja, $\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{A}\Theta + \frac{1}{B}\omega$.

Utilizando a relação acima, onde $\mathcal{O}^{-1} = D_{\mu\nu}(k)$, obtemos prontamente o propagador no espaço dos momenta

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)} \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left[1 + \lambda \left(\frac{k^2}{m^2} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (1.14)$$

Contraindo (1.14) com correntes conservadas $J^\mu(k)$, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv J^\mu D_{\mu\nu} J^\nu \\ &= -\frac{J^2}{k^2} + \frac{J^2}{k^2 - m^2}, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir, levando em conta que $J^2 < 0$ [24–26], que os sinais dos resíduos de \mathcal{M} nos pólos $k^2 = 0$ e $k^2 = m^2$ são, respectivamente,

$$\text{Res}\mathcal{M}(k^2 = 0) > 0, \quad \text{Res}\mathcal{M}(k^2 = m^2) < 0.$$

Vale a pena notar que o sinal errado da partícula pesada indica uma instabilidade da teoria a nível clássico. Do ponto de vista quântico isto significa que a teoria é não-unitária. Felizmente estas dificuldades podem ser contornadas. Realmente, a instabilidade clássica pode ser evitada impondo-se uma condição de contorno no futuro de modo a prevenir o crescimento exponencial de certos modos. No entanto, este procedimento leva à violação de causalidade no modelo [27]; esta acausalidade é suprimida, por sua vez, em escalas inferiores às aquelas associadas às partículas de LW. Por outro lado, Lee e Wick argumentaram que apesar da presença dos citados graus de liberdade relacionados com uma norma não positiva-definida no espaço de Hilbert, a teoria poderia ser unitária desde que as novas partículas obtivessem comprimentos de decaimento. Não existe uma prova geral da unitariedade em ordem de loop arbitrário para a eletrodinâmica de LW; a despeito disto, não existe até agora nenhum exemplo conhecido de violação de unitariedade. Consequentemente, até ordem em contrário, podemos considerar a eletrodinâmica de LW como finita e não precisamos temer o fantasma massivo de spin-1 [28].

Em resumo, podemos dizer que o trabalho de LW consiste na introdução de campos de Pauli-Villars, com propagador com sinal errado, como graus de liberdade, o que leva a amplitudes que têm melhor comportamento ultravioleta e tornam finita a QED logicamente divergente.

Uma questão importante concernente à eletrodinâmica de LW é se ela é ou não re-

normalizável. Em princípio, teorias vetoriais massivas não são renormalizáveis devido a seu propagador livre não se aproximar de zero assintoticamente como no caso sem massa. Existem, contudo, duas importantes exceções a esta regra: (i) teorias de *gauge* com quebra espontânea de simetria e, (ii) teorias com bósons vetoriais massivos neutros acoplados a correntes conservadas. Apesar do modelo de LW não poder ser considerado um sistema puramente massivo, seu propagador livre aproxima-se de zero para grandes valores de momentum, tornando assim a teoria renormalizável por contagem de potências.

1.2.1 Análise de um *toy model* escalar

A fim de ganharmos um pouco mais de conhecimento sobre como se comporta a partícula pesada de Lee e Wick, é interessante fazer a análise de um modelo mais simples. Para tanto, utilizaremos um campo escalar $\hat{\phi}$ e admitiremos que a lagrangiana para o modelo associado a este campo é a seguinte:

$$\mathcal{L}_{\text{escalar}} = \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} - \frac{1}{2M^2} \left(\partial^2 \hat{\phi} \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 - \frac{1}{3!} g \hat{\phi}^3, \quad (1.15)$$

onde $\hat{\phi}$ é um campo escalar. O correspondente propagador pode ser escrito como

$$D_{\hat{\phi}}(p) = \frac{i}{p^2 - \frac{p^4}{M^2} - m^2}. \quad (1.16)$$

Notemos que para $M \gg m$, o propagador acima possui pólos em $p^2 \approx m^2$ e $p^2 \approx M^2$. O resíduo no pólo $p^2 = M^2$ possui o sinal errado, o que, a princípio, sinaliza uma instabilidade ou um estado de norma negativa que poderia comprometer a unitariedade do modelo. Contudo, assim como fizemos anteriormente, podemos escrever uma lagrangiana equivalente à anterior utilizando dois campos reais e escalares $\hat{\phi}$ e $\tilde{\phi}$ tais

que

$$\mathcal{L}_{\text{equiv.}} = \frac{1}{2}\partial^\mu \hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi} - \frac{1}{2}m^2 \hat{\phi}^2 - \tilde{\phi} \partial^2 \hat{\phi} + \frac{1}{2}M^2 \tilde{\phi}^2 - \frac{1}{3!}g \hat{\phi}^3. \quad (1.17)$$

É imediato verificar que a equação de campo para $\tilde{\phi}$ ($= \frac{1}{M^2} \partial^2 \hat{\phi}$), quando substituída em (1.17), recupera a lagrangiana em (1.15). Podemos interpretar melhor os campos $\hat{\phi}$ e $\tilde{\phi}$ se diagonalizarmos os termos cinéticos. Para tanto, se definirmos $\hat{\phi} = \phi - \tilde{\phi}$, a equação (1.17) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} + \frac{1}{2}M^2 \tilde{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2(\phi - \tilde{\phi})^2 - \frac{1}{3!}g(\phi - \tilde{\phi})^3. \quad (1.18)$$

Notemos agora que o propagador do campo $\tilde{\phi}$ (se desconsiderarmos a massa m , por simplicidade) é dado por

$$D_{\tilde{\phi}}(p) = -\frac{i}{p^2 - M^2}. \quad (1.19)$$

Contudo, como observado por Lee e Wick, o sinal errado no propagador violaria a unitariedade da matriz S se estes estados fossem estáveis. Assim, a unitariedade pode ser preservada se $\tilde{\phi}$ decair em outras partículas mais leves. Vejamos como isso pode ser obtido reescrevendo a lagrangiana em (1.18).

É possível diagonalizar os termos massivos através de uma transformação simplética, já que a matriz de massa é simétrica*[5]. Deste modo, podemos escrever a parte massiva da lagrangiana (1.18) na forma $\mathcal{L}_M = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}$, com

*Se V é uma matriz $n \times n$ simétrica e de módulo positivo, então $D = S^T V S$ é diagonal, onde S é uma matriz simplética.

$$\Phi^T = \begin{pmatrix} \phi & \tilde{\phi} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\square + m^2) & \frac{1}{2}m^2 \\ \frac{1}{2}m^2 & \frac{1}{2}(\square - m^2 + M^2) \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Utilizando a transformação

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \tilde{\phi}_0 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

ficamos com

$$\mathcal{L}_M = \begin{pmatrix} \phi_0 & \tilde{\phi}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}m^2(\cosh \theta - \sinh \theta)^2 & \frac{1}{2}m^2(\cosh \theta - \sinh \theta)^2 \\ +\frac{1}{2}M^2 \sinh^2 \theta & +\frac{1}{2}M^2 \sinh \theta \cosh \theta \\ \frac{1}{2}m^2(\cosh \theta - \sinh \theta)^2 & -\frac{1}{2}m^2(\cosh \theta - \sinh \theta)^2 \\ +\frac{1}{2}M^2 \sinh \theta \cosh \theta & +\frac{1}{2}M^2 \cosh^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \tilde{\phi}_0 \end{pmatrix}.$$

Se a matriz quadrada acima é diagonal, então $m^2(\cosh \theta - \sinh \theta)^2 = -M^2 \sinh \theta \cosh \theta$.

Isso implica em

$$\tanh 2\theta = \frac{2m^2}{2m^2 - M^2}. \quad (1.22)$$

Notamos que existe uma solução para θ se garantirmos que $M > 2m$, de modo que a partícula descrita por $\tilde{\phi}_0$ decai em duas partículas do campo ϕ_0 . A lagrangiana em termos dos campos redefinidos se torna

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2}m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{\phi}_0 \partial^\mu \tilde{\phi}_0 + \frac{1}{2}M_0^2 \tilde{\phi}_0^2 - \frac{1}{3!}(\cosh \theta - \sinh \theta)^3 g(\phi_0 - \tilde{\phi}_0)^3, \quad (1.23)$$

onde m_0 e M_0 são as massas dos campos diagonalizados e a constante de acoplamento pode ser redefinida como $g' = \frac{g}{3!}(\cosh \theta - \sinh \theta)^3$.

A taxa de decaimento para o processo descrito na Figura (1.1) pode ser calculada

a partir de [29]

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - \sum_i p_i) \frac{1}{2E_p} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 (2E_i)}, \quad (1.24)$$

onde E_p e p são, respectivamente, a energia e momentum da partícula inicial, e E_i e p_i , a energia e momenta das partículas finais. Além disso, a amplitude de Feynman, \mathcal{M}_{fi} , em nível de árvore, será dada pelo vértice $-ig'$.

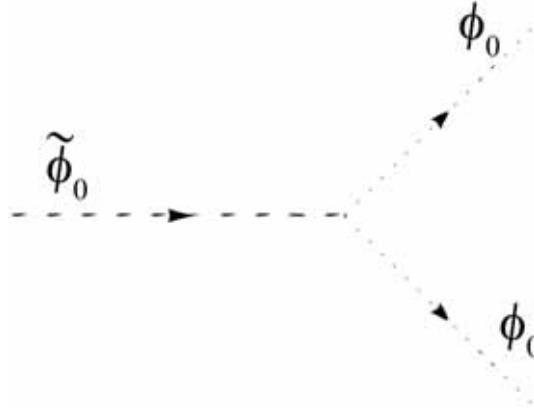


Figura 1.1: Partícula pesada de Lee e Wick decaindo em outras duas mais leves

No referencial de repouso da partícula $\tilde{\phi}_0$, a equação (1.24) fica

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{(2\pi)^4}{2E_p} |-ig'|^2 \int \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 (2E_1)} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 (2E_2)} \delta(M - E_1 - E_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{g'^2}{2E_p} \int \frac{d^3 p_1}{4E_1 E_2} \delta(M - E_1 - E_2). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Como as partículas resultantes possuem a mesma massa e momenta opostos, passando

para coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{2} \frac{g'^2}{8\pi E_p} \int \frac{p^2 dp}{E^2} \delta(M - 2E) \\ &= \frac{g'^2}{16\pi M} \frac{p}{E} \Big|_{E=\frac{M}{2}},\end{aligned}\tag{1.26}$$

onde fizemos uso de $E dE = p dp$ e $E_1 = E_2 = E$, com $|\mathbf{p}_1| = p$. Agora, lembrando que $p = \sqrt{E^2 - m^2}$, obtemos prontamente

$$\Gamma = \frac{g'^2}{32\pi M} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}.\tag{1.27}$$

Como foi demonstrado por Cutkosky [30], uma modificação apropriada do tratamento perturbativo que nos permite escrever o propagador total para a partícula descrita por $\tilde{\phi}$, utilizando a auto-energia em um loop, próximo a $p^2 = M^2$, nos dá

$$\begin{aligned}D_{\tilde{\phi}} &= \frac{-i}{p^2 - M^2} + \frac{-i}{p^2 - M^2} (-i\Sigma(p^2)) \frac{-i}{p^2 - M^2} + \dots \\ &= \frac{-i}{p^2 - M^2 + \Sigma(p^2)}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Notemos que, ao contrário do que acontece com escalares normais, o sinal de Σ no denominador é positivo, ou seja,

$$D_{\tilde{\phi}} = \frac{-i}{p^2 - M^2 - iM\Gamma},\tag{1.29}$$

com Γ dado por (1.27). Este sinal contrário faz com que a ressonância pareça decair antes que ela seja propriamente produzida, *i.e.*, possui uma probabilidade Γdt de decair no intervalo negativo de tempo $-dt$, o que faz com que a teoria viole a microcausalidade. Pode-se pensar que tal comportamento acausal leve a paradoxos, mas se a matriz S for unitária, não haverá problemas: estados iniciais com partículas estáveis são pre-

parados em $-\infty$ e, como resultado, estados finais são encontrados em $+\infty$. A soma das probabilidades para os estados finais é igual a um e, portanto, não há paradoxos.

Macroscopicamente, a causalidade é preservada e a teoria se torna unitária pois a parte imaginária da amplitude de espalhamento ainda é uma quantidade positiva. Próximo a $p^2 = M^2$ o espalhamento é dominado pelo pólo em $\tilde{\phi}$ e parte imaginária da amplitude de espalhamento \mathcal{M} é, para $\text{Im } p^2 > 0$, dada por

$$\text{Im}\mathcal{M} = -g^2 \frac{M\Gamma}{(p^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2}. \quad (1.30)$$

Assim, o sinal errado do propagador é compensado pelo sinal contrário do comprimento de decaimento [3].

1.3 O tensor energia-momento de Lee e Wick

Vamos construir o tensor momento-energia simétrico do modelo de Lee e Wick utilizando um algoritmo bastante simples baseado nas equações de campo da teoria [31]. Esta prescrição consiste basicamente em multiplicar a equação de campo em questão por uma derivada apropriada deste campo de modo que a expressão resultante contenha somente um índice de espaço-tempo livre e, então, reescrevê-la como uma quadridivergência.

Na ausência de fontes, a equação de campo para a eletrodinâmica de Lee e Wick se torna

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.31)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $F_{\nu\alpha}$, resulta

$$F_{\nu\alpha}\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}F_{\nu\alpha}\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.32)$$

Podemos reescrever o primeiro termo da equação anterior como se segue

$$\begin{aligned} F_{\nu\alpha}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) - (\partial_\mu F_{\nu\alpha})F^{\mu\nu} = \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\mu\alpha})F^{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu})F^{\mu\nu} = \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\delta_\alpha^\mu F_{\rho\theta}F^{\rho\theta}), \end{aligned}$$

onde fizemos uso das identidades de Bianchi ($\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0$). Já o segundo termo da equação (1.32) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} F_{\nu\alpha}\square\partial_\mu F_{\mu\nu} &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) - \partial_\mu F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu})\square F^{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial_\alpha F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \partial_\alpha\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\square\partial_\alpha F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\square\partial_\alpha F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\square(\partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha}) = F^{\mu\nu}\square\partial_\nu F_{\alpha\mu} \\ &= \partial_\nu(F^{\mu\nu}\square F_{\alpha\nu}) - \partial_\nu F^{\mu\nu}\square F_{\alpha\nu} = \partial_\nu(F^{\mu\nu}\square F_{\alpha\nu}) + \partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta(\partial_\mu F_{\beta\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\beta}) \\ &= \partial_\mu(\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\alpha}) + \partial_\alpha\left(\frac{1}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta}\right). \end{aligned}$$

Com isso, o segundo termo em (1.32) se torna

$$\frac{1}{m^2} F_{\nu\alpha} \square \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{m^2} \partial_\mu \left[F_{\nu\alpha} \square F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \delta^{\mu\alpha} (F_{\rho\theta} \square F^{\rho\theta} + \partial_\theta F^{\rho\theta} \partial^\beta F_{\rho\beta}) + F^{\nu\mu} \square F_{\alpha\nu} + \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\beta F_{\beta\alpha} \right].$$

Assim, o tensor de energia-momento pode ser expresso, finalmente, como

$$\begin{aligned} T^{\alpha\mu} &= F^\alpha_\nu F^{\nu\mu} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\nu} F_{\rho\theta} F^{\rho\theta} + \frac{1}{2m^2} (F_{\rho\theta} \square F^{\rho\theta} + \partial_\theta F^{\rho\theta} \partial^\beta F_{\rho\beta}) \\ &\quad - \frac{1}{m^2} (F^{\alpha\nu} \square F^\mu_\nu + F^{\mu\nu} \square F^\alpha_\nu + \partial_\beta F^{\alpha\beta} \partial_\nu F^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Podemos escrever o momento total do campo eletromagnético $P^\alpha = (\mathcal{E}, \mathbf{p})$, onde \mathcal{E} e \mathbf{p} são, respectivamente, a energia e o tri-momento totais do campo, como

$$P^\alpha = \int d^3\mathbf{x} T^{0\alpha}. \quad (1.34)$$

No caso eletrostático, as equações (1.33) e (1.34) nos dão a seguinte expressão para a energia[†]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \left\{ \mathbf{E} - \frac{1}{m^2} [(\nabla \cdot \mathbf{E})^2 + 2\mathbf{E} \cdot \nabla^2 \mathbf{E}] \right\} d^3\mathbf{x}. \quad (1.35)$$

Da identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, encontramos $\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$, uma vez que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Além disso, $\nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}] = \mathbf{E} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + (\nabla \cdot \mathbf{E})^2$ e, então, se supormos que $\mathbf{E}\nabla \cdot \mathbf{E}$ se anule no infinito mais rapidamente que $\frac{1}{r^2}$, encontramos

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{E}^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \mathbf{E})^2] d^3\mathbf{x}. \quad (1.36)$$

Conforme a equação (1.49), o potencial eletrostático para uma carga puntual pode ser escrito como $V(r) = \frac{e}{4\pi r} [1 - e^{-mr}]$, o qual tende ao valor finito $\frac{em}{4\pi}$ quando r se aproxima de zero. Lembrando agora que $\mathbf{E} = -\nabla V$, obtemos a expressão para o

[†]Em nossas convenções, $F^{0i} = -E^i$ e $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$.

campo eletrostático devido a carga puntual em questão

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi r} \left[\frac{1}{r} - e^{-mr} \left(\frac{1}{r} - m \right) \right] \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.37)$$

Substituindo a equação (1.37) em (1.36), após o cálculo da integral, encontramos que a energia para o campo de uma carga puntual é dada por $\frac{me^2}{2}$, o que nos mostra que, ao contrário da eletrodinâmica de Maxwell, a eletrodinâmica de LW exhibe um valor finito para a energia em todo o espaço.

1.4 Propagação ondulatória na eletrodinâmica de Lee e Wick

Na eletrodinâmica de LW, o potencial A_μ obedece às equações

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2} \right) (\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu) = 0, \quad (1.38)$$

que no *gauge* de Lorentz reduzem-se a

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2} \right) \square A^\nu = 0, \quad (1.39)$$

A fim de encontrarmos as relações de dispersão, passamos para o espaço dos momentos via o ansatz $A^\nu(x) = \tilde{A}^\nu(k)e^{-ikx}$. Levando este resultado em (1.39), obtemos prontamente que

$$\left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) k^2 = 0. \quad (1.40)$$

Como $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, podemos reescrever esta equação como

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left[\frac{\omega^2 - \mathbf{k}^2}{m^2} - 1 \right] = 0. \quad (1.41)$$

A equação (1.41) admite duas classes de solução. A primeira família é a das soluções usuais da eletrodinâmica para as quais vale a relação de dispersão $\omega = |\mathbf{k}|$. A outra família satisfaz a relação $\mathbf{k}^2 = \omega^2 - m^2$, que pode ser colocada na forma mais familiar

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}, \quad (1.42)$$

com $\omega_P = m$. Esta equação descreve ondas eletromagnéticas propagando-se através de um plasma sem colisões com um comprimento de atenuação $\delta \equiv \frac{1}{\omega_P} = \frac{1}{m}$ muito pequeno[‡] [32–34].

Examinando a equação (1.42) vemos que $|\mathbf{k}|$ é real somente se $\omega > \omega_P$. Se $\omega < \omega_P$, $|\mathbf{k}|$ é um número imaginário puro, tais modos não se propagam e são chamados de modos evanescentes (vide Fig. 1.2).

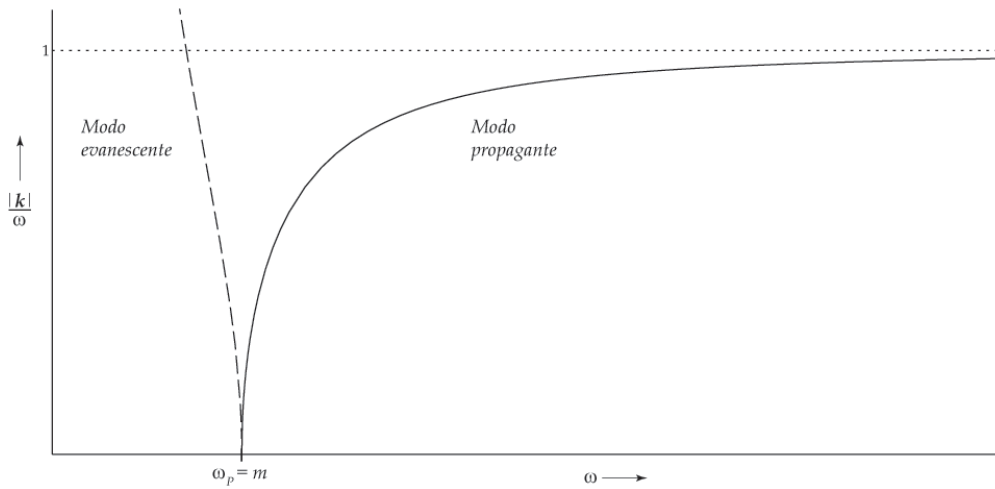


Figura 1.2: Relações de dispersão para a eletrodinâmica de LW. A linha contínua denota o modo propagante e a linha tracejada representa a parte imaginária do modo evanescente.

[‡]Vamos estimar na próxima seção um valor para m , o que nos permitirá constatar que $\delta \ll 1$.

Podemos agora determinar as velocidades de grupo e fase para os modos dispersivos propagantes. A velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial|\mathbf{k}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega}, \quad (1.43)$$

ao passo que a velocidade de fase é determinada pela relação

$$v_p = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}. \quad (1.44)$$

Analisando (1.43) e (1.44) concluímos que $v_g < 1$ e $v_p > 1$, o que concorda com a ideia que estamos perseguindo de ser esta propagação eletromagnética análoga à propagação de ondas eletromagnéticas num vácuo tipo-plasma.

Das considerações anteriores conclui-se que m é um *cutoff* para o modelo de LW. Seria fundamental, portanto, estimar um limite para este parâmetro. Examinemos, com este intuito, o potencial dado pela equação (1.49). O fato deste potencial ser finito quando $r \rightarrow 0$ é uma indicação de que a auto-energia e a massa eletromagnética de uma partícula carregada puntiforme na teoria de LW são finitas. Na realidade, como argumentaremos abaixo, no âmbito desta teoria não só a massa eletromagnética é finita, como o célebre problema dos 4/3 da eletrodinâmica de Maxwell encontra uma resolução natural.

A equação de movimento de Newton relativa a uma carga estendida no contexto do modelo de Abraham-Lorentz é dada por [33]

$$\frac{4}{3}m_e\dot{\mathbf{v}} - \frac{2}{3}e^2\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (1.45)$$

onde \mathbf{v} , m_e e e são, respectivamente, a velocidade, a massa eletromagnética e a carga da partícula, e \mathbf{F}_{ext} é a força externa aplicada ao elétron. Supomos aqui que, no referencial

de repouso instantâneo da partícula, a distribuição de carga é rígida e esfericamente simétrica. Além disso, supomos também a ausência de massa mecânica. Evidentemente a massa eletromagnética entra com coeficiente errado em (1.45). Por esta razão o fator $4/3$ tem sido fonte de acirrados debates. Uma possível saída para esta dificuldade, entre outras, é calcular a auto-força que atua numa partícula puntiforme carregada no contexto da eletrodinâmica de LW em pequenas distâncias. Neste caso a massa eletromagnética entra na equação de movimento em uma forma consistente com a relatividade especial; e mais, a equação de movimento correta não exhibe nem *runaway solutions* nem comportamento acausal, quando o *cutoff* $l(\equiv \frac{1}{m})$ é maior que o raio clássico do elétron [35, 36]. Consequentemente $l < 1.4 \times 10^{-15}m$, o que nos permite concluir que $m > 141MeV$.

1.5 Limites sobre a massa da partícula pesada de Lee e Wick

Nesta seção apresentaremos dois métodos para se determinar um limite sobre a massa da partícula de Lee e Wick. O primeiro segue uma abordagem clássica e se baseia em um experimento bem conhecido, enquanto o segundo faz uso das últimas medidas mais recentes relativas ao momento magnético anômalo do elétron.

1.5.1 Um limite clássico sobre a massa da partícula pesada de Lee e Wick

Vale a pena notar que o parâmetro l introduz uma escala natural de comprimento para a eletrostática de LW. Na presença de uma fonte, $\mathcal{L}_{\text{fonte}} = -A^\mu J_\mu$, as equações de campo concernentes ao modelo de LW são

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (1.46)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.47)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ ($\varepsilon^{0123} = +1$). No limite de cargas estáticas, as equações anteriores se reduzem à

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 \phi = -\rho, \quad (1.48)$$

com $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

No experimento de Plimpton e Lawton [37], por sua vez, foi medida uma diferença de potencial ΔV entre uma esfera condutora de raio R_2 carregada até um potencial V_0 e uma segunda esfera concêntrica descarregada de raio R_1 contida na primeira. Da equação (1.48) obtemos o potencial eletrostático

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (1.49)$$

onde $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{l}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, e $\rho(\mathbf{r}')$ é a densidade de carga. Em coordenadas esféricas, a equação anterior se torna

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{8\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - e^{-\frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}{l}}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} d(\cos \theta). \quad (1.50)$$

Fazendo $u = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}$, obtemos

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{8\pi r r'} \int_{r'-r}^{r'+r} (1 - e^{-\frac{u}{l}}) du, \quad (1.51)$$

e, realizando a integração, encontramos que o potencial para uma distribuição esférica

de cargas é

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{8\pi r r'} \left[2r + l \left(e^{-\frac{r'+r}{l}} - e^{-\frac{r'-r}{l}} \right) \right]. \quad (1.52)$$

Agora, de acordo com a Figura (1.3), supondo que a casca esférica externa seja mantida a um potencial V_0 e fazendo $r = r' = R_2$ na equação (1.52), obtemos prontamente

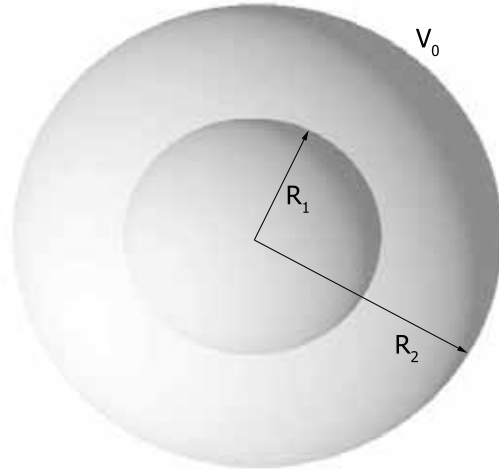


Figura 1.3: Geometria do experimento de Plimpton e Lawton.

$$Q = \frac{8\pi R_2^2 V_0}{2R_2 + l \left(e^{-\frac{2R_2}{l}} - 1 \right)}, \quad (1.53)$$

o que nos dá

$$\phi(r) = \frac{V_0 R_2 \left[2r + l \left(e^{-\frac{R_2+r}{l}} - e^{-\frac{R_2-r}{l}} \right) \right]}{\left[2R_2 + l \left(e^{-\frac{2R_2}{l}} - 1 \right) \right] r}. \quad (1.54)$$

Calculando a diferença de potencial entre as esferas, encontramos

$$\frac{\Delta V}{V} \equiv \frac{\phi(R_2) - \phi(R_1)}{\phi(R_2)} = 1 - \frac{R_2 \left[2R_1 + l \left(e^{-\frac{R_2+R_1}{l}} - e^{-\frac{R_2-R_1}{l}} \right) \right]}{\left[2R_2 + l \left(e^{-\frac{2R_2}{l}} - 1 \right) \right] R_1}. \quad (1.55)$$

Agora, levando em conta que tanto $\frac{R_1}{l}$ quanto $\frac{R_2}{l}$ são $\gg 1$, obtemos imediatamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{l}{2R_2}. \quad (1.56)$$

No experimento originalmente conduzido por Plimpton e Lawton, um potencial de 3000 volts harmonicamente alternado foi aplicado à esfera exterior. Testes foram feitos a fim de detectar uma mudança no potencial da esfera interna em relação a externa. Os resultados mostraram que nenhuma mudança no galvanômetro foi detectada durante o experimento, com uma sensibilidade de $1\mu V$. Os raios das duas esferas eram de $0.76m$ e $0.61m$, respectivamente. Substituindo os parâmetros experimentais na equação (1.56), encontramos um limite sobre o *cutoff* $l < 5.1 \times 10^{-10}m$ [38].

Muitas melhorias ao experimento de Plimpton e Lawton foram realizadas ao longo dos anos 60 – 80 [39]. Em todas as novas experiências, contudo, a distância entre os pontos medidos eram, grosso modo, maiores do que aquela utilizada no experimento original. Agora, já que o *cutoff* l introduz uma escala de comprimento natural para a eletrostática, como já comentamos, obviamente para uma dada precisão das medidas, quanto maior for a distância entre os pontos medidos, pior será o limite obtido para o *cutoff*. Portanto, chegamos à conclusão de que o experimento original de Plimpton e Lawton é justamente o que fornece o melhor limite superior sobre l .

Em termos da massa, esse *cutoff* nos dá um limite inferior igual a $m > 0.387 \times 10^{-3}MeV$.

1.5.2 Um limite quântico sobre a massa da partícula pesada de Lee e Wick

Levando em conta que a QED prediz o momento magnético anômalo do elétron corretamente até a décima casa decimal, um limite quântico para a massa m da partícula pesada de LW pode ser encontrado calculando-se o momento magnético anômalo do elétron no contexto da eletrodinâmica de LW e comparando o resultado obtido com aquele da QED [40]. Para tanto, relembramos que o momento magnético anômalo vem da correção de vértice devido ao espalhamento de um elétron por um campo externo, como mostra a Figura 1.4.

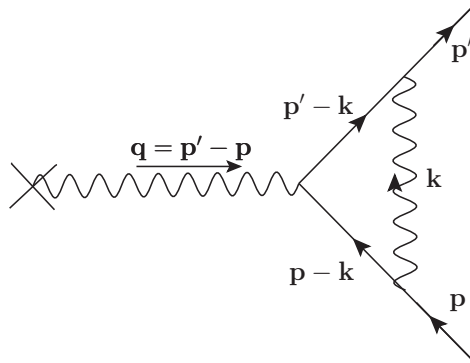


Figura 1.4: Correção de vértice para um elétron espalhado por um campo externo.

Para um elétron espalhado por um campo magnético estático externo e, no limite $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$, a razão giromagnética é dada por [41]

$$g = 2[1 + 2F_2(0)].$$

O fator de forma do elétron, $F_2(0)$, corresponde a um deslocamento no fator-g, geralmente escrito como $F_2(0) \equiv \frac{g-2}{2}$, e garante o momento magnético anômalo do elétron. Utilizando (1.14) no cálculo do diagrama apresentado na Fig. 1.4, pode ser mostrado

que

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \Sigma\alpha_i) \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3} - \frac{\alpha_1^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}} \right], \quad (1.57)$$

onde $\varepsilon \equiv \frac{M^2}{m^2}$, sendo M a massa do elétron. Chamamos atenção ao fato de que o termo $-\frac{m^2 k^\mu k^\nu}{k^4(k^2 - m^2)} \left[1 + \lambda \left(\frac{k^2}{m^2} - 1 \right) \right]$ que aparece na Eq. (1.14) não contribui para o fator de forma $F_2(0)$ porque o propagador sempre aparece acoplado a correntes conservadas.

Integrando a expressão acima, primeiro em relação à α_3 e, em seguida, em relação à α_2 , temos

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{1-\alpha_1} d\alpha_2 \left[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} - \frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)^2 + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}} \right] \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + \varepsilon(1-\alpha_1)^2}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int dx \frac{x^2}{\varepsilon x^2 + x(1-2\varepsilon) + \varepsilon} &= \frac{x}{\varepsilon} - \frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon} \ln |\varepsilon x^2 + x(1-2\varepsilon) + \varepsilon| \\ &\quad + \frac{1+2\varepsilon^2-4\varepsilon}{2\varepsilon^2\sqrt{1-4\varepsilon}} \ln \left| \frac{A-B}{A+B} \right|, \end{aligned}$$

onde $A \equiv 2\varepsilon x + 1 - 2\varepsilon$, e $B \equiv \sqrt{1-4\varepsilon}$; então

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2} \ln \varepsilon + \frac{1+2\varepsilon^2-4\varepsilon}{2\varepsilon^2\sqrt{1-4\varepsilon}} \ln \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{1-\sqrt{1-4\varepsilon}} \right]. \quad (1.58)$$

Lembrando que $\varepsilon \ll 1$, o que implica

$$\frac{1 + 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon}{2\varepsilon^2\sqrt{1 - 4\varepsilon}} \approx \frac{1 - 2\varepsilon + 5\varepsilon^4}{2\varepsilon^2},$$

$$\ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}} \approx - \left[2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \frac{20\varepsilon^3}{3} + \frac{35\varepsilon^4}{2} + \ln \varepsilon \right], \quad (1.59)$$

chegamos à conclusão de que

$$F_2(0) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{M}{m} \right)^2 - 2 \left(\frac{25}{12} + \ln \left(\frac{M}{m} \right) \right) \left(\frac{M}{m} \right)^4 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{M}{m} \right)^6 \right) \right]. \quad (1.60)$$

O primeiro termo da equação anterior é igual àquele calculado por Schwinger em 1948 [42]. Desde então, $F_2(0)$ tem sido calculado até a ordem de α^8 para a QED. O segundo termo da equação Eq. (1.60) é a correção mais importante relacionada ao parâmetro m da eletrodinâmica de LW. Cálculos recentes concernentes à $F_2(0)$ no contexto da QED dão, para o elétron [43],

$$F_2(0) = 1\,159\,652\,181.13(.84) \times 10^{-12},$$

onde a incerteza vem, em sua maior parte, dos melhores valores para a constante de estrutura fina α não advindos da QED. O atual valor experimental para o momento magnético anômalo é, por sua vez [44],

$$F_2(0) = 1\,159\,652\,180.73(0.28) \times 10^{-12}.$$

Comparando o valor teórico predito pela QED com o valor experimental, vemos que estes resultados concordam em 1 parte em 10^{11} . Consequentemente,

$$\frac{2}{3} \left(\frac{M}{m} \right)^2 < 10^{-11}.$$

Assim, um limite inferior para a partícula pesada hipotetizada por Lee e Wick é $m \approx 132$ GeV.

O limite quântico que estimamos é extremamente confiável já que foi obtido utilizando um dos grandes triunfos da QED, a saber, a surpreendente concordância entre teoria e experimento até dez casas decimais para o momento magnético anômalo do elétron. Além disso, este limite é baseado em verdadeiros efeitos quânticos (de loop).

1.6 O potencial não-relativístico de LW

Vamos agora calcular o potencial não-relativístico para o espalhamento de dois férmions no contexto da QED de LW por meio de um método baseado na combinação da mecânica quântica com o limite não-relativístico da teoria quântica de campos. Utilizando este resultado juntamente com o limite quântico que acabamos de estimar, fazemos em seguida um estudo comparativo entre os potenciais de LW e Coulomb.

1.6.1 Combinando a mecânica quântica com o limite não-relativístico da teoria quântica de campos

Consideremos o espalhamento de dois férmions de massas idênticas no contexto do modelo de Lee e Wick; especificamente, um elétron (e^-) e um pósitron (e^+), como mostrado na Fig. 1.5. Agora, de acordo com a aproximação de Born na teoria de Schrödinger, a seção de choque diferencial para o espalhamento de duas partículas de mesma massa, M , é $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{C.M.}} = \left| \frac{M}{4\pi} \int e^{-\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} U(r) d^3\mathbf{r} \right|^2$. (A energia potencial $U(r)$ causa a troca de momentum $\mathbf{Q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$, onde \mathbf{p} e \mathbf{p}' são os momenta inicial e final de uma das

partículas). Por outro lado, no limite não-relativístico, a seção de choque diferencial para a interação entre estes férmions pode ser expressa como $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{C.M.}} = |\frac{\mathcal{M}_{\text{N.R.}}}{16\pi M}|^2$, onde $\mathcal{M}_{\text{N.R.}}$ é o limite não-relativístico da amplitude de Feynman para o processo em questão. Como resultado, em termos do momentum trocado $\mathbf{k} = -\mathbf{Q}$, o potencial não-relativístico assume a forma

$$U(r) = \frac{1}{4M^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{M}_{\text{N.R.}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.61)$$

Esta fórmula nos permite construir um potencial tridimensional efetivo (para ser utilizado em conexão com a equação de Schrödinger bem como na mecânica clássica) uma vez que conhecemos o limite não-relativístico do elemento de matriz covariante.

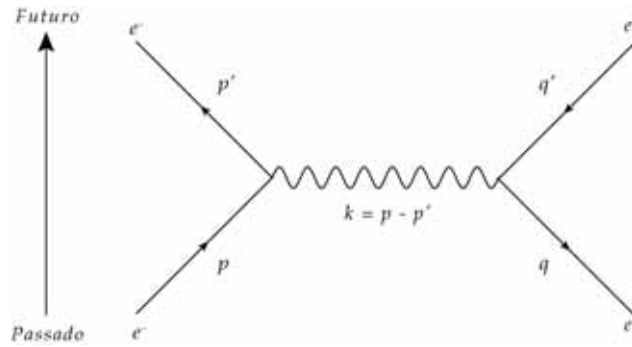


Figura 1.5: Contribuição de menor ordem para o espalhamento elástico e^-e^+ no contexto da eletrodinâmica de LW.

A lagrangiana do sistema fermiônico em questão pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\alpha F_{\mu\alpha} - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\nu A^\nu)^2 + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (1.62)$$

Neste caso, o vértice fundamental descrito pelo termo de interação na lagrangiana será

dado por

$$\Gamma^\mu = -e\gamma^\mu. \quad (1.63)$$

Considerando o caso de partículas com o mesmo spin nos estados iniciais e finais, podemos escrever $\psi(x)$ como uma expansão em ondas planas e espinores como $\psi(x) = u(p)e^{-ipx}$, tais que $\bar{u}_r(p)\gamma^\mu u_s(p) = 2p^\mu\delta_{rs}$. Partindo da lagrangiana para a interação das partículas mencionadas, i.e., $\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$, obtemos prontamente as regras de Feynman para o vértice elementar (veja a Fig. 1.6)

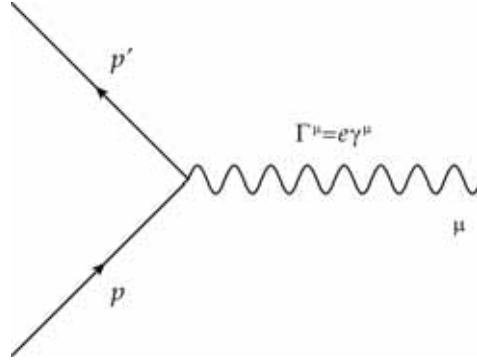


Figura 1.6: Vértice relevante para a QED de LW.

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\Delta_{\mu\nu}\bar{v}(q')\gamma^\nu v(q) \quad (1.64)$$

$$= \frac{-e^2 m^2}{k^2(k^2 - m^2)} \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{1 - \lambda \left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right)}{k^2} k_\mu k_\nu \right] \bar{v}(q')\gamma^\nu v(q). \quad (1.65)$$

Notemos que segundo termo do propagador não contribuirá para a amplitude, pois encontra-se entre correntes conservadas e é identicamente nulo. Atentemos ao fato de que, nas nossas convenções, a carga do elétron é igual a $-e$. Assim, a amplitude invariante para o processo mostrado na Figura 1.5 é

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2 m^2}{k^2(k^2 - m^2)} \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{v}(q) \gamma_\mu v(q'). \quad (1.66)$$

Como estamos interessados no limite não-relativístico da amplitude, no qual $M^2 \gg \mathbf{p}^2$, temos

$$\begin{aligned} p^2 &= E^2 - \mathbf{p}^2 = M^2 \\ \Rightarrow E &= (M^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} = M \left[1 + \frac{\mathbf{p}^2}{M^2} \right]^{1/2}, \text{ mas } M^2 \gg \mathbf{p}^2, \text{ então} \\ E &\approx M \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2}{M^2} \right) \approx M. \end{aligned}$$

Assim, nesta aproximação,

$$\begin{aligned} p \cdot q &= p^0 q^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ &= M^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \approx M^2. \end{aligned}$$

Além disso, pela conservação de momento, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} p - k &= p' \Rightarrow (p - k)^2 = M^2 \\ q + k &= q' \Rightarrow (q + k)^2 = M^2 \\ (p - k)^2 &= (q + k)^2, \end{aligned}$$

que se reduz à

$$\begin{aligned}
q \cdot k &= -p \cdot k \\
\Rightarrow (q + p) \cdot k &= 0 \\
\Rightarrow (q_0 + p_0)k_0 &= (\mathbf{q} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{k} \\
\Rightarrow k^0 &= \frac{(\mathbf{q} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{k}}{(q^0 + p^0)}.
\end{aligned}$$

Ainda considerando o limite não-relativístico, $(q^0 + p^0) = (E_{q_0} + E_{p_0}) \equiv E_T \gg (\mathbf{q} + \mathbf{p})$ (onde E_T é a energia total do sistema) e, portanto

$$k^0 = \frac{(\mathbf{q} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{k}}{E_T} \approx 0. \quad (1.67)$$

Assim, o termo em $1/k^2$ na amplitude pode ser escrito como

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k_0 - \mathbf{k}^2} = -\frac{1}{\mathbf{k}^2 \left(1 - \frac{k_0^2}{\mathbf{k}^2}\right)} \approx -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \left(1 + \frac{k_0^2}{\mathbf{k}^2}\right). \quad (1.68)$$

Contudo, o termo mais importante na aproximação não-relativística pode ser obtido utilizando-se soluções de momentum nulo para os espinores, ou seja,

$$\bar{u}_r(p') \gamma^\mu u_s(p) \xrightarrow{\text{N.R.}} \bar{u}_r(0) \gamma^\mu u_s(0), \quad (1.69)$$

$$\bar{v}_r(p') \gamma^\mu v_s(p) \xrightarrow{\text{N.R.}} \bar{v}_r(0) \gamma^\mu v_s(0), \quad (1.70)$$

com a normalização $u_r^\dagger(p) u_s(p) = v_r^\dagger(p) v_s(p) = 2E_p \delta_{rs}$ [45]. Consequentemente,

$$\bar{u}_r(0) \gamma^0 u_s(0) = \bar{v}_r(0) \gamma^0 v_s(0) = 2M \delta_{rs}, \quad (1.71)$$

$$\bar{u}_r(0) \gamma^i u_s(0) = \bar{v}_r(0) \gamma^i v_s(0) = 0. \quad (1.72)$$

Como resultado,

$$\mathcal{M}_{\text{N.R.}} = -\frac{4e^2 m^2 M^2}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + m^2)}. \quad (1.73)$$

Inserindo (1.73) em (1.61) e calculando a integral resultante, temos

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4M^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V \mathcal{M}_{\text{N.R.}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \\ &= -\frac{m^2 e^2}{(2\pi)^3} \int_V \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + m^2)} d^3\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Reescrevendo a integral acima em coordenadas esféricas, com $r = |\mathbf{r}|$ e $k = |\mathbf{k}|$, ficamos com

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{m^2 e^2}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} k^2 dk \int_{-1}^1 \frac{e^{-ikr \cos \theta}}{k^2(k^2 + m^2)} d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (1.75)$$

As integrais em $d\phi$ e $d(\cos \theta)$ são triviais, o que nos dá

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{m^2 e^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k^2 + m^2},$$

que pode ser reescrita como

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{(2\pi)^2 r} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + m^2 r^2} dx \right] \quad (\text{onde fizemos } x = kr).$$

Resolvendo cada um dos termos como a parte real de uma integral no plano complexo, obtemos

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^2 r} (\pi - \pi e^{-mr}) e, \\ \therefore U(\mathbf{r}) &= -\frac{e^2}{4\pi r} (1 - e^{-mr}). \end{aligned} \quad (1.76)$$

1.6.2 Análise comparativa entre os potenciais de LW e Coulomb

Podemos agora discutir as propriedades do potencial não-relativístico $U(r)$. Por conveniência, vamos reescrevê-lo como

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi r} (1 - e^{-\frac{r}{l}}), \quad (1.77)$$

onde $l \equiv \frac{1}{m}$, como vimos anteriormente.

- Diferentemente do potencial de Coulomb, o qual é singular na origem, U é finito ($U(0) = -\frac{e^2}{4\pi l}$), o que claramente nos mostra que em pequenas distâncias l se comporta como um *cutoff* efetivo.
- Quando $\frac{r}{l} \gg 1$, U se reduz ao potencial de Coulomb, como era de se esperar.
- Apenas para pequenas distâncias ($\frac{r}{l} \ll 1$), U difere significativamente do potencial coulombiano (veja a Fig. 1.7). Observando a Figura 1.7, notamos que esta distância é $\approx 10^{-17}m$, uma ordem de magnitude maior do que o valor de l .

1.7 Monopólos magnéticos

Uma questão importante que diz respeito à QED finita de LW é se a coexistência de uma partícula massiva e uma carga magnética é possível neste contexto. Para responder esta questão, introduzimos a corrente magnética $k^\mu = (\sigma, \mathbf{k})$ no lado direito da equação (1.47). É fácil mostrar que o sistema de equações de ordem superior modificadas resultante, a saber,

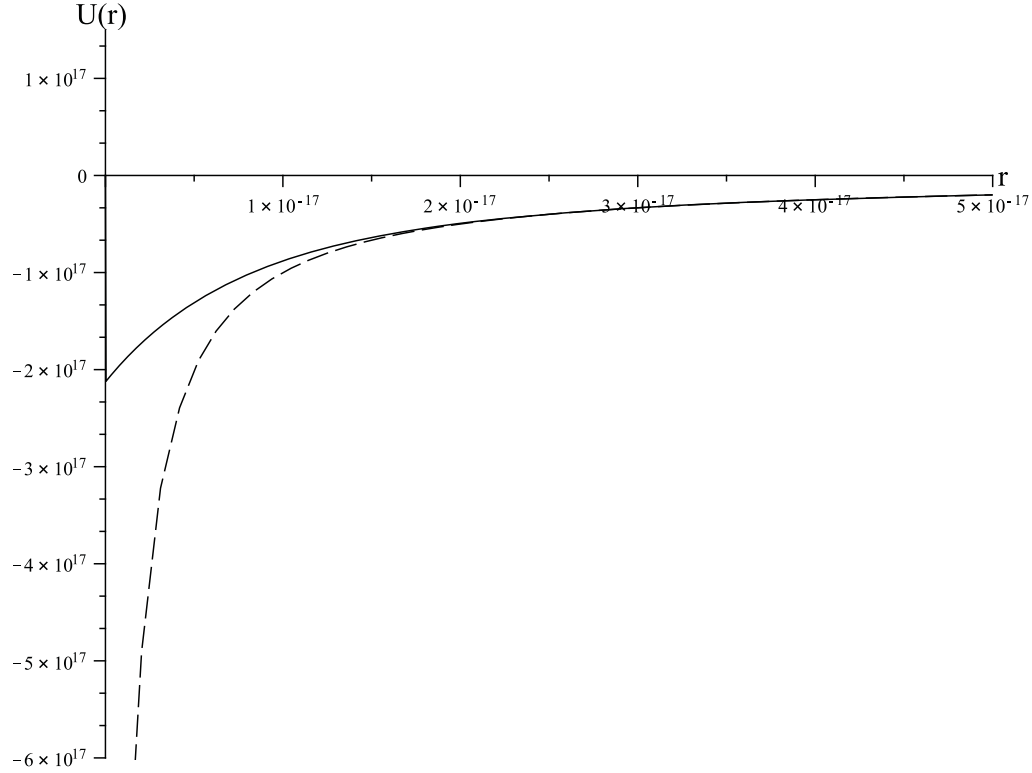


Figura 1.7: O potencial U (em unidades de $\frac{e^2}{4\pi}$), como função da distância r . A linha pontilhada representa o potencial de Coulomb nas mesmas unidades.

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.78)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu, \quad (1.79)$$

descreve a existência de uma carga magnética. De fato, supondo a ausência de campos elétricos, cargas e correntes (bem como as correntes magnéticas), ficamos essencialmente com duas equações para o campo magnético, as quais possuem a familiar solução de monopólos de Dirac $\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$, onde g é a carga magnética. Utilizando os métodos usuais, recuperamos prontamente a condição de quantização de Dirac $\frac{qg}{4\pi} = \frac{n}{2}$, onde q

é a carga elétrica e n é um inteiro.

Conseguimos, deste modo, encontrar um sistema consistente de equações do tipo Maxwell + bósons vetoriais massivos + cargas magnéticas. Chamamos atenção ao fato de que o monopólo de Dirac e bósons vetoriais massivos não podem coexistir no contexto da eletrodinâmica massiva de Proca, pois esta, ao contrário da QED de LW, não é invariante de *gauge* [46]. A própria existência de um monopólo de Dirac está, sem dúvidas, ligada à existência de uma invariância de *gauge* da teoria correspondente.

Curiosamente, o sistema formado pelas equações (1.78) e (1.79) não é simétrico sob a transformação de dualidade $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$, $\tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}$, aumentada por $j^\mu \rightarrow k^\mu$, $k^\mu \rightarrow -j^\mu$. Este fato levanta uma questão interessante: Seria possível acomodar – *simultaneamente*– cargas magnéticas e transformações de dualidade no contexto de um modelo eletromagnético com derivadas mais altas? Uma boa tentativa nesta direção pode ser, por exemplo, o modelo definido pelas equações

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.80)$$

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu, \quad (1.81)$$

já que ele é simétrico sob transformações de dualidade. Vale a pena notar que $(1 + l^2 \square) \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$ é identicamente nulo na ausência de correntes magnéticas. Vejamos se este modelo admite soluções do tipo monopólo. Para uma carga magnética estática de intensidade g fixa na origem, a solução das equações anteriores é $\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-r/l}}{r^2} - \frac{e^{-r/l}}{lr} \right] \hat{\mathbf{r}}$, a qual, para largas distâncias, se reduz ao resultado de Dirac, como era de se esperar. Nosso argumento, no entanto, é verificar se esta solução descreve ou não um monopólo magnético em pequenas distâncias.

Para tanto, calculamos o fluxo do campo magnético radial através de uma superfície esférica S de raio r com um monopólo de intensidade g em seu centro. Realizando os cálculos, encontramos $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = g \left[1 - \left(1 + \frac{r}{l} \right) e^{-\frac{r}{l}} \right]$, o que implica que para $r/l \ll 1$, $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx 0$. Agora, levando em conta que se $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ é nula, chegamos à conclusão de que \mathbf{A} pode existir em toda região sob consideração. Portanto, esta é uma solução do tipo de Dirac; não obstante, a carga magnética correspondente não obedece à condição de quantização de Dirac. De fato, para $r/l \ll 1$, $\mathbf{B} \approx \frac{g}{4\pi l^2} \frac{1}{r} \mathbf{r}$, o que implica que o campo magnético decresce como $1/r$ em vez de $1/r^3$. Este comportamento bizarro do campo magnético certamente nos impede de recuperar a condição de quantização de Dirac.

Um modo heurístico de ver isto é considerar o movimento de uma partícula de massa m e carga q no campo de um monopólo magnético. Da equação de movimento da partícula, $m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$, encontramos que a variação do seu momento angular é $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \frac{qgr^2}{4\pi l^2} \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{r}})$, um resultado que nos impede de definir um momento angular total conservado, como no caso dos monopólos de Dirac. Agora, se as distâncias não são nem tão grandes nem tão pequenas, o potencial vetor não pode existir em qualquer lugar do domínio encerrado por S porque $\tilde{F}^{\mu\nu}$ satisfaz a equação (1.81) invés de (1.79). Infelizmente não podemos superar esta dificuldade por meio da introdução do conceito de uma corda assim como fez Dirac, já que neste caso $\nabla \cdot \mathbf{B} (= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-r/l}}{r l^2})$ não se anula em qualquer lugar do domínio em questão.

Esta análise nos leva à conjectura de que monopólos do tipo de Dirac e transformações de dualidade não podem ser acomodadas no contexto do mesmo modelo eletromagnético com derivadas de ordem mais alta [47].

1.8 Discussão

Como sabemos, cada campo no Modelo Padrão possui um parceiro de LW com uma massa de LW associada. Estas massas são os únicos parâmetros novos no MPLW mínimo. Contudo, como observado por Álvarez, Schat, Da Rold e Szyrkman, o MPLW não fornece nenhuma informação sobre a origem destas massas, as quais, para resolver o problema da hierarquia, não devem ser mais pesadas do que alguns TeV. De fato, numa análise dos dados eletrofracos (assumindo que todas as massas de LW são da mesma ordem) encontramos que a escala de LW deve ser da ordem de 5 TeV [17]. Por outro lado, o limite para a partícula pesada de LW que estimamos está na escala de GeV, o que implica que ela poderia, em princípio, ser determinada no LEP. Contudo, temos que admitir que o cenário analisado, o qual permite esta estimativa na escala de GeV, é tal que o termo de derivadas mais altas é adicionado ao fóton depois que uma quebra espontânea de simetria já aconteceu, de modo que derivadas de ordem mais alta de Z^0 não estão presentes e a matriz de massa no setor de *gauge* de bósons neutros já foi diagonalizada. Não obstante, a origem usual das interações eletromagnéticas e eletrofracas, como mostra a Teoria Eletrofraca com $SU(2) \times U(1)$, nos diz que o termo com dimensão 6, uma vez introduzido na lagrangiana antes da quebra espontânea da simetria $SU(2) \times U(1)$, deve ser governado por um parâmetro com dimensão de massa⁻², o qual deve estar conectado a um parâmetro originado em uma física BSM[§]. Tal parâmetro pode ser resultado de uma dimensão extra maior e, assim, acomodaria de modo mais natural o resultado de um fóton massivo na escala de TeV, levando em conta modelos BSM. Neste contexto, seria oportuno reavaliar a física do Z^0 no modelo Eletrofraco de LW. Estamos aqui interessados nos possíveis efeitos advindos da

[§]*Beyond Standard-Model* – Além do Modelo Padrão.

associação dos bósons Z^0 – e $Z^{0'}$ – com o limite sobre o bóson de *gauge* pesado de LW.

Para concluir, além de reconsiderarmos a já mencionada física envolvendo $Z^{0'}$ no contexto do modelo de LW, seria razoável reavaliar também a questão da produção de grávitons massivos no LHC no contexto de uma versão gravitacional do modelo de LW. Possíveis sinais gravitacionais na escala de TeV no LHC, associados a efeitos de dimensões extras maiores ou torção dinâmica num cenário BSM, poderiam ser reproduzidos numa contrapartida gravitacional do modelo de LW. Isto nos permitiria relacionar diretamente o parâmetro de massa⁻² típico do modelo de LW a alguma dimensão extra maior e, neste contexto, também poderia se tornar mais claro a presença de escalas de massa da ordem de GeV e TeV para duas gerações de grávitons pesados do tipo LW.

Referências Bibliográficas

- [1] T. Lee and G. Wick, *Nucl. Phys. B* **9** 209 (1969).
- [2] T. Lee and G. Wick, *Phys. Rev. D* **2** 1033 (1970).
- [3] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, *Phys. Rev. D* **77** 025012 (2008).
- [4] C. Carone, *Phys. Lett. B* **677** 306 (2009).
- [5] C. Carone and R. Lebed, *J. Higher Energy Phys.* **01** 043 (2009).
- [6] C. Carone and R. Lebed, *Phys. Lett. B* **668** 221 (2008).
- [7] E. Gabrielli, *Phys. Rev. D* **77** 055020 (2008).
- [8] F. Wu and M. Zhong, *Phys. Lett. B* **659** 694 (2008).
- [9] F. Wu and M. Zhong, *Phys. Rev. D* **78** 085010 (2008).
- [10] A. Rodigast and T. Schuster, *Phys. Rev. D* **79** 125017 (2009)
- [11] A. van Tonder, arXiv:0810.1928v1.
- [12] A. Shalaby, arXiv:0812.3419v2.

- [13] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, *Phys. Rev. D* **77** 065010 (2008).
- [14] I. Cho and O-Kab Kwon, arXiv: 1003.2716v1 .
- [15] B. Fornal, B. Grinstein, and M. Wise, *Phys. Lett. B* **674** 330 (2009).
- [16] Yi-Fu Cai, T. Qiu, R. Brandenberger, and X. Zhang, *Phys. Rev. D* **80** 023511 (2009).
- [17] E. Álvarez, C. Schat, L. Da Rold, and A. Szykman, *J. Higher Energy Phys.* **04** 026 (2008).
- [18] T. Underwood and R. Zwicky, *Phys. Rev. D* **79** 035016 (2009).
- [19] T. Rizzo, arXiv:0712.1791v2 .
- [20] C. Carone and R. Primulando, *Phys. Rev. D* **80** 055020 (2009).
- [21] J. Espinosa, B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, arXiv:0705.1188v1 .
- [22] T. Rizzo, arXiv:0704.3458v3 .
- [23] A. Accioly, Investigations in the Electromagnetic Sector of the Lee-Wick Standard Model (submetido ao J. High Energy Phys.).
- [24] A. Accioly, *Phys. Rev. D* **67** 127502 (2003).
- [25] A. Accioly, *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **127** 100 (2004).
- [26] A. Accioly and M. Dias, *Int. J. Theor. Phys.* **44** 1123 (2005).
- [27] S. Coleman, in *Proceedings of Erice 1969, Ettore Majorana School on Subnuclear Phenomena* (Academic Press, New York, 1970), pp. 282-327.

- [28] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, *Phys. Rev. D* **79** 105019 (2009)
- [29] M. Maggiore, *A modern introduction to quantum field theory*, Oxford University Press (2005).
- [30] R. E. Cutkosky, P. V. Landshoff, D. I. Olive and J. C. Polkinghorne, *Nucl. Phys. B* **12**, 281 (1969).
- [31] A. Accioly, *Am. J. Phys.* **65**, 882 (1997).
- [32] M. Lieberman and A. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing* (Wiley, 1994).
- [33] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition (Wiley, 1998).
- [34] R. Santos, *Mod Phys. Lett. A* **26**, 1909 (2011).
- [35] J. Frenkel, *Phys. Rev. E* **54** 5859 (1996).
- [36] J. Frenkel and R. Santos, *Int. J. Mod. Phys. B* **13** 315 (1999).
- [37] S. Plimpton and W. Lawton, *Phys. Rev.* **50**, 1066 (1936).
- [38] A. Accioly and E. Scatena, *Mod. Phys. Lett. A* **25**, 269 (2010).
- [39] Para uma revisão geral, veja, por exemplo, L.-C. Tu, J. Luo and G. Gilles, *Rep. Prog. Phys.* **68**, 77 (2005).
- [40] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, *Mod. Phys. Lett. A* **26** 1985 (2011).
- [41] P. Frampton, *Gauge Field Theories* (Benjamin/Cummings, California, 1987).

- [42] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73** 416 (1948).
- [43] R. Bouchendira *et al* *Phys. Rev. Lett.* **106** 080801 (2011).
- [44] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **100** 120801 (2008).
- [45] Para uma interessante discussão sobre manipulações de matrizes de Dirac e espinores independentes da representação, veja P. Pal, arXiv:physics/0703214v2 .
- [46] A. Ignatiev and G. Joshi, *Phys. Rev. D* **53** 984 (1996).
- [47] A. Accioly, P. Gaete, J. Helayël-Neto, E. Scatena, and R. Turcati, *arXiv:1012.1045v2 [hep-th]*.

Explorando a Gravitação Massiva em 3D

Neste capítulo, algumas propriedades interessantes do modelo de gravitação massiva de Bergshoeff-Hohm-Townsend (BHT), tais como a presença de uma força gravitacional de curto alcance no limite não-relativístico e a existência de um ângulo de deflexão dependente do parâmetro de impacto serão estudadas. Curiosamente, estes fenômenos não possuem contrapartida na gravitação usual de Einstein em 3D. A fim de compreender melhor as duas propriedades gravitacionais citadas, elas também serão analisadas no contexto da gravitação de Einstein-Hilbert com derivadas de ordem mais alta e com o “sinal errado”.

2.1 Motivação

De acordo com uma lenda física, teorias de campos baseadas em ações com derivadas de quarta ordem (ou maiores) implicam em estados de *ghosts* não-físicos de norma negativa. Os argumentos apresentados na literatura para justificar esta situação indesejada têm, na verdade, evoluído somente para uma classe particular de tais teorias, a saber, as teorias híbridas nas quais existem tanto derivadas de segunda quanto quarta ordem [1]; e mais, tal discussão só tem sido formulada dentro do contexto da quantização canô-

nica [2]. Não obstante, é notável que dentre estas teorias híbridas exista uma classe de modelos livres de *ghosts* em nível de árvore. À primeira vista, parece que modelos de curvatura pura, i.e., sistemas de gravitação de quarta ordem com lagrangianas do tipo $R + \alpha R^2$, pertencem a esta elite privilegiada. Na verdade, estes sistemas são conformemente equivalentes à gravitação de Einstein com um campo escalar massivo [3]. Em outras palavras, apesar de possuir derivadas de quarta ordem na métrica, estes modelos são, em última instância, de segunda ordem nas suas versões tensoriais-escalares. Há apenas dois anos, contudo, Bergshoeff, Hohm e Townsend (BHT) [4–12] propuseram uma extensão particular da ação de Einstein-Hilbert (EH) com derivadas de ordem mais alta em três dimensões espaço-temporais, a qual é livre de *ghosts* em nível de árvore [4]. A prova da unitariedade dada em [4] se baseia na existência de uma forma alternativa da ação de BHT envolvendo um campo auxiliar, cuja versão linearizada é equivalente à ação tradicional de Fierz-Pauli, a qual sabe-se que não possui *ghosts*; aliás, esta prova foi revista em [13]. Podemos também nos convencer da ausência de *ghosts* no modelo linearizado de BHT por meio de uma análise canônica [14]. O modelo de BHT, é claro, viola tal folclore já que é um exemplo de um sistema de quarta ordem que não possui *ghosts*.

Nossos objetivos neste capítulo são

1. Explorar algumas propriedades interessantes deste notável modelo que não possui equivalente na gravitação de Einstein usual em espaço-tempo tridimensional.
2. Esclarecer estas propriedades comparando-as com as análogas obtidas no contexto da 3DHDG*.

Um cálculo detalhado de como é possível obter o propagador concernente à gra-

* *3-Dimensional Higher Derivative Gravity*

vitação com derivadas de ordem superior é apresentado na Seção. 2.2, enquanto na Seção. 2.3 demonstramos como a condição de preservação da unitariedade do modelo recupera a lagrangiana concernente ao modelo BHT. Na Seção 2.4 é mostrado que, no contexto do modelo de BHT, forças gravitacionais de curto alcance agem sobre partículas-teste se movimentando lentamente. Estas forças atrativas são uma característica distinta da gravitação massiva em 3D. A expressão analítica para o ângulo de deflexão de um raio de luz no contexto do sistema mencionado é obtida na Seção 2.5. Este ângulo, ao contrário daquele na gravitação de Einstein em 3D, depende do parâmetro de impacto. Na Seção 2.6 será feito um estudo comparativo entre os resultados encontrados nas duas seções anteriores e os correspondentes encontrados via 3DHDG. Esta análise é de grande ajuda para compreendermos melhor os resultados das Seções 2.4 e 2.5. Finalmente, na Seção 2.7, apresentamos alguns comentários e observações.

Utilizamos unidades naturais, $c = \hbar = 1$, e a métrica de Minkowski é $\text{diag}(+1, -1, -1)$. O tensor de Ricci é definido por $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \dots$

2.2 O propagador da gravitação massiva em (2+1)D

A gravitação massiva em 3D, a qual é também conhecida como “nova gravitação massiva” é, na verdade, um caso particular da teoria tridimensional mais geral obtida aumentando-se a gravidade planar com o termo de EH com o “sinal errado” por meio de termos quadráticos da curvatura (3DHDG). Levando em conta que em três dimensões tanto o tensor de curvatura quanto o tensor de Ricci possuem o mesmo número de componentes [15], a lagrangiana para esta teoria genérica pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left(-\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right), \quad (2.1)$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$, com G sendo o análogo 3D da constante de Newton, e α e β são coeficientes livres. Note que as constantes κ , α , e β , possuem dimensão de massa $[\kappa] = -\frac{1}{2}$ e $[\alpha] = [\beta] = -1$, em unidades naturais.

2.2.1 Cálculo de \sqrt{g} , $\Gamma_{\lambda\mu}^\rho$, $R_{\lambda\mu\nu\rho}$, $R_{\mu\nu}$ e R em primeira ordem em κ

- a densidade escalar \sqrt{g}

Utilizando a aproximação de campo fraco, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde fazemos $\kappa \ll 1$ e $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1)$, obtemos também

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu + \dots. \quad (2.3)$$

Definindo $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ e utilizando a relação $\det A = e^{\text{tr} \ln A}$ podemos calcular \sqrt{g} da seguinte forma

$$\sqrt{g} = (\det g_{\mu\nu})^{1/2} = \left[-\exp \text{tr} \ln g_{\mu\nu} \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

$$= \left\{ \exp \text{tr} \ln [\eta_{\mu\alpha} (\delta_\alpha^\nu + \kappa h^\alpha_\nu)] \right\}^{1/2} \quad (2.5)$$

$$= \left\{ (\det \eta_{\mu\alpha}) \exp \text{tr} \ln (\delta_\alpha^\nu + \kappa h^\alpha_\nu) \right\}^{1/2}. \quad (2.6)$$

Como $\kappa \ll 1$, podemos expandir $\ln(\delta_\alpha^\nu + \kappa h_\nu^\alpha)$, obtendo

$$\sqrt{g} = \left\{ \exp \operatorname{tr} \left(\kappa h_\nu^\alpha - \frac{\kappa^2}{2} h^{\alpha\beta} h_{\beta\nu} + \dots \right) \right\}^{1/2} \quad (2.7)$$

$$= \exp \frac{1}{2} \left(\kappa h - \frac{\kappa^2}{2} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \dots \right) \quad (2.8)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} \kappa h - \frac{\kappa^2}{4} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{2} h - \frac{\kappa^2}{4} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \dots \right)^2 + \dots \quad (2.9)$$

Deste modo, encontramos

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{\kappa}{2} h + \frac{\kappa^2}{8} h^2 - \frac{\kappa^2}{4} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \dots \quad (2.10)$$

- *Símbolos de Christoffel*

Os símbolos de Christoffel são definidos como:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (g_{\nu\mu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}). \quad (2.11)$$

Substituindo a métrica da aproximação de campo fraco (2.2), obtemos, em primeira ordem em κ ,

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\rho = \frac{\kappa}{2} [h_{\mu,\lambda}^\rho + h_{\lambda,\mu}^\rho - h_{\lambda\mu}^{\prime\rho}]. \quad (2.12)$$

- *Tensor de Riemann*

O tensor de Riemann é definido como:

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\mu,\alpha\nu} + g_{\alpha\nu,\lambda\mu} - g_{\alpha\mu,\lambda\nu} - g_{\lambda\nu,\alpha\mu}). \quad (2.13)$$

Novamente, utilizando (2.2), ficamos com:

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}(h_{\lambda\mu,\alpha\nu} + h_{\alpha\nu,\lambda\mu} - h_{\alpha\mu,\lambda\nu} - h_{\lambda\nu,\alpha\mu}). \quad (2.14)$$

- *Tensor de Ricci*

O tensor de Ricci é encontrado pela contração do tensor de Riemann com a métrica, ou seja:

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\mu\nu\lambda} \quad (2.15)$$

$$= \eta^{\alpha\lambda} \frac{\kappa}{2} (h_{\mu\nu,\alpha\lambda} + h_{\alpha\lambda,\mu\nu} - h_{\alpha\nu,\mu\lambda} - h_{\mu\lambda,\alpha\nu}) \quad (2.16)$$

$$= \frac{\kappa}{2} \left[\square h_{\mu\nu} - \eta^{\alpha\lambda} (\gamma_{\alpha\mu,\nu\lambda} + \gamma_{\alpha\nu,\mu\lambda}) \right], \quad (2.17)$$

onde fizemos

$$\gamma_{\alpha\mu} = h_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} h, \quad h \equiv \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}. \quad (2.18)$$

- *Escalar de Curvatura*

A contração do tensor de Ricci nos dá o escalar de curvatura R , ou seja

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

$$= \eta^{\mu\nu} \frac{\kappa}{2} \left[\square h_{\mu\nu} - \eta^{\alpha\lambda} (\gamma_{\alpha\mu,\nu\lambda} + \gamma_{\alpha\nu,\mu\lambda}) \right] \quad (2.20)$$

$$= \kappa \left[\frac{1}{2} \square h - \eta^{\alpha\lambda} \eta^{\mu\nu} \gamma_{\alpha\mu,\nu\lambda} \right], \quad (2.21)$$

com as mesmas definições (2.18).

Com isso, agora estamos aptos a calcular a reescrever a lagrangiana em (2.1).

2.2.2 Forma gama-gama da lagrangiana de Einstein

Uma forma simples de reescrever o termo livre da lagrangiana é colocá-lo na forma “gama-gama”, ou seja, reescrevê-lo como produtos simples de símbolos de Christoffel.

Sendo assim, consideremos a seguinte ação:

$$\mathcal{S}_1 = \int d^3x \sqrt{g} \left(-\frac{2R}{\kappa^2} \right) = \int d^3x \sqrt{g} \left(-\frac{2}{\kappa^2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right), \quad (2.22)$$

onde $\kappa = 32\pi G$. O tensor $R_{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha. \quad (2.23)$$

Vamos agora definir a seguinte densidade tensorial:

$$H^{\mu\nu} \equiv \sqrt{g} g^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

de modo que o produto $H^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ se torna

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = & - [H^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha]_{,\alpha} + H^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + [H^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha]_{,\nu} - H^{\mu\nu}{}_{,\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \\ & - H^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Contudo, temos que a derivada covariante de qualquer densidade tensorial é identicamente nula, de modo que

$$H^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = H^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu H^{\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu H^{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\beta H^{\mu\nu} = 0, \quad (2.26)$$

e encontramos

$$H^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = H^{\mu\nu} \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - H^{\mu\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\nu - H^{\beta\nu} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu. \quad (2.27)$$

Com isso, podemos reescrever a ação (2.22) como

$$\mathcal{S}_1 = -\frac{2}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \left[-\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \right], \quad (2.28)$$

a qual só possui produtos de Γ 's.

2.2.3 A forma bilinear da lagrangiana da 3DHDG

Para encontrarmos o propagador da teoria em questão, podemos reescrever a lagrangiana em sua forma bilinear (adicionada de uma lagrangiana fixadora de *gauge*), da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta} h^{\alpha\beta}. \quad (2.29)$$

Assim, invertendo o operador \mathcal{O} , encontramos o propagador. De modo a facilitar o trabalho, vamos separar a lagrangiana em quatro termos distintos, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_{gf}$, com

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{2}{\kappa^2} \sqrt{g} R \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\alpha}{2} \sqrt{g} R^2 \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\beta}{2} \sqrt{g} R_{\mu\nu}^2 \quad (2.32)$$

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\lambda} \left(h_{\mu\nu}{}^{,\nu} - \frac{1}{2} h_{,\mu} \right)^2. \quad (2.33)$$

Vamos agora reescrever cada uma das lagrangianas como funções explícitas de $h_{\mu\nu}$.

- *Cálculo de \mathcal{L}_1*

Como vimos na seção anterior, podemos escrever \mathcal{L}_1 na forma gama-gama, ou seja

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= -\frac{2}{\kappa^2}\sqrt{g}R = \frac{2}{\kappa^2}\left[(\sqrt{g})g^{\mu\nu}(-\Gamma_{\mu\alpha}^\beta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha\Gamma_{\mu\nu}^\beta)\right] \\ &= -\frac{2}{\kappa^2}\left\{(\sqrt{g})g^{\mu\nu}\frac{1}{4}\left[-g^{\beta\gamma}(g_{\mu\gamma,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\mu} - g_{\mu\alpha,\gamma})g^{\alpha\lambda}(g_{\beta\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\beta} - g_{\beta\nu,\lambda})\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ g^{\alpha\epsilon}(g_{\beta\epsilon,\alpha} + g_{\alpha\epsilon,\beta} - g_{\beta\alpha,\epsilon})g^{\beta\delta}(g_{\mu\delta,\nu} + g_{\nu\delta,\mu} - g_{\mu\nu,\delta})\right]\right\}.\end{aligned}$$

Utilizando (2.2), encontramos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2}\left\{(\sqrt{g})g^{\mu\nu}\left[-(h_{\mu,\alpha}^\beta + h_{\alpha,\mu}^\beta - h_{\mu\alpha}^{\prime\beta})(h_{\beta,\nu}^\alpha + h_{\nu,\beta}^\alpha - h_{\beta\nu}^{\prime\alpha})\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ (h_{\beta,\alpha}^\alpha + h_{\alpha,\beta}^\alpha - h_{\beta\alpha}^{\prime\alpha})(h_{\mu,\nu}^\beta + h_{\nu,\mu}^\beta - h_{\mu\nu}^{\prime\beta})\right]\right\},\end{aligned}$$

e, rearranjando os termos de maneira conveniente, utilizando (2.3) e (2.10) obtemos

$$\mathcal{L}_1 = h_{\mu\nu}\left[-\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta + \eta^{\mu\nu}\partial^\beta\partial^\alpha - \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\square)\right]h_{\alpha\beta}. \quad (2.34)$$

Como o operador $\mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ em (2.29) é simétrico na troca de μ por ν , α por β e $\mu\nu$ por $\alpha\beta$, vamos simetrizar o termo entre colchetes de (2.34):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}(\partial^\nu\partial^\beta\eta^{\mu\alpha} + \partial^\mu\partial^\beta\eta^{\nu\alpha} + \partial^\nu\partial^\alpha\eta^{\mu\beta} + \partial^\mu\partial^\alpha\eta^{\nu\beta}) + (\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta + \eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\square + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}\square) - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square\right]h_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Finalmente, passando para o espaço dos momenta através de uma transformação de

Fourier do tipo $\mathcal{L}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}d^3x$, encontramos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}(k^\nu k^\beta\eta^{\mu\alpha} + k^\mu k^\beta\eta^{\nu\alpha} + k^\nu k^\alpha\eta^{\mu\beta} + k^\mu k^\alpha\eta^{\nu\beta}) - (\eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta + \eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu)\right. \\ &\quad \left.- \frac{k^2}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}) + k^2\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right]h_{\alpha\beta}.\end{aligned} \quad (2.35)$$

•Cálculo de \mathcal{L}_2

Utilizando (2.21) e (2.10), podemos reescrever \mathcal{L}_2 como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \frac{\alpha}{2}\sqrt{g}R^2 = \frac{\alpha}{2}\sqrt{g}\kappa^2\left[\frac{1}{2}\square h - \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\rho(h_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\mu}h)\right]^2 \\ &= \frac{\alpha}{2}\kappa^2h_{\mu\nu}\left[\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta - 2\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\square + \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square\square\right]h_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Novamente, simetrizando o termo entre colchetes,

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\alpha\kappa^2\left[\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta - (\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta + \eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu)\square + \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square\square\right]h_{\alpha\beta}, \quad (2.36)$$

que no espaço dos momenta, pode ser escrito como

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\alpha\kappa^2\left[k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta - k^2(\eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta + \eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu) + k^4\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right]h_{\alpha\beta}. \quad (2.37)$$

•Cálculo de \mathcal{L}_3

Utilizando o tensor de Ricci (2.17), \mathcal{L}_3 se torna

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\beta}{2}\sqrt{g}R_{\mu\nu}^2 = \frac{\beta}{8}\kappa^2\left\{\square h_{\mu\nu} - \eta^{\lambda\rho}\left[\partial_\nu\partial_\rho(h_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\mu}h) + \partial_\mu\partial_\rho(h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\nu}h)\right]\right\}^2,$$

rearranjando os termos, ficamos com

$$\mathcal{L}_3 = h_{\mu\nu}\frac{\beta\kappa^2}{8}\left(2\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta - 2\eta^{\alpha\nu}\partial^\mu\partial^\beta\square + \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\square\square + \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square\square - \eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\square - \eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\square\right)h_{\alpha\beta},$$

que de modo simetrizado, se torna

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 &= h_{\mu\nu}\frac{\beta\kappa^2}{8}\left[2\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta - \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta + \eta^{\nu\beta}\partial^\mu\partial^\alpha + \eta^{\nu\alpha}\partial^\mu\partial^\beta + \eta^{\mu\beta}\partial^\nu\partial^\alpha)\square\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta})\square\square + \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square\square - (\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta + \eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu)\square\right]h_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Assim, reescrevendo no espaço dos momenta, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 &= \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\frac{\beta\kappa^2}{4}\left[2k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta - \frac{k^2}{2}(\eta^{\mu\alpha}k^\nu k^\beta + \eta^{\nu\beta}k^\mu k^\alpha + \eta^{\nu\alpha}k^\mu k^\beta + \eta^{\mu\beta}k^\nu k^\alpha)\right. \\ &\quad \left. + \frac{k^4}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}) + k^4\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - k^2(\eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta + \eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu)\right]h_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (2.38)$$

•Cálculo de \mathcal{L}_{gf}

Como vimos, no *gauge* de De Donder, a lagrangiana fixadora de *gauge* é escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gf} &= \frac{1}{2\lambda}\left(h_{\mu\nu}{}^{,\nu} - \frac{1}{2}h_{,\mu}\right)^2 \\ &= h_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2\lambda}\left(-\partial^\nu\partial^\alpha\eta^{\mu\beta} + \partial^\nu\partial^\mu\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square\right)\right]h_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

cuja versão simetrizada é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gf} &= \frac{1}{2\lambda}h_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{4}(\partial^\nu\partial^\beta\eta^{\mu\alpha} + \partial^\mu\partial^\beta\eta^{\nu\alpha} + \partial^\nu\partial^\alpha\eta^{\mu\beta} + \partial^\mu\partial^\alpha\eta^{\nu\beta}) + \frac{1}{2}(\partial^\mu\partial^\nu\eta^{\alpha\beta} + \partial^\alpha\partial^\beta\eta^{\mu\nu})\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square\right]h_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Assim, no espaço dos momenta, \mathcal{L}_{gf} se torna

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gf} &= \frac{1}{2\lambda}h_{\mu\nu}\left[\frac{1}{4}(k^\nu k^\beta\eta^{\mu\alpha} + k^\mu k^\beta\eta^{\nu\alpha} + k^\nu k^\alpha\eta^{\mu\beta} + k^\mu k^\alpha\eta^{\nu\beta})\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{2}(k^\mu k^\nu\eta^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta\eta^{\mu\nu}) + \frac{k^2}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right]h_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Em termos dos operadores de Barnes-Rivers [16, 17] (veja o Apêndice A), o operador

O na equação (2.29) se torna

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta} &= k^2 \left[P^{(0-s)} - P^2 \right]_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{k^2}{2\Lambda} \left\{ P^{(1)} + P^{(0-s)} + \frac{1}{2} P^{(0-w)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{2}}{2} [P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}] \right\}_{\mu\nu,\alpha\beta} + 2\alpha\kappa^2 k^4 P^{(0-s)} \\
&\quad + \frac{\beta\kappa^2 k^4}{4} [P^{(2)} + 3P^{(0-s)}]_{\mu\nu,\alpha\beta}. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Agora podemos utilizar o método descrito no Apêndice A para encontrar o inverso do operador de onda \mathcal{O} , que nos dará o propagador que estamos procurando. Ele será escrito como

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \frac{M_2^2}{k^2(k^2 - M_2^2)} P^{(2)} + \frac{2\Lambda}{k^2} P^{(1)} - \frac{M_0^2}{k^2(k^2 - M_0^2)} P^{(0-s)} + \\
&\quad - \frac{M_0^2 \sqrt{2}}{k^2(k^2 - M_0^2)} [P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}] + \frac{2[2\Lambda k^2 - M_0^2(2\Lambda + 1)]}{k^2(k^2 - M_0^2)} P^{(0-w)}, \tag{2.41}
\end{aligned}$$

onde $M_2^2 = \frac{4}{\beta\kappa^2} (> 0)$, $M_0^2 = -\frac{4}{\kappa^2(8\alpha+3\beta)} (> 0)$, e Λ é um parâmetro de *gauge*. Notamos claramente que o sistema 3DHDG é não-unitário, mesmo em nível de árvore. Chamamos atenção ao fato de que o propagador acima é um caso especial daquele concernente à supergravidade com $N = 1$ e $N = 2$ em três dimensões, aumentada por termos do tipo (curvatura)² e que foi calculado por Nishino e Rajpoot [18]; ele pode também ser obtido por meio do propagador relacionado à gravitação 3D com o sinal errado aumentado por um termo de Chern-Simons [19–21].

2.3 Unitariedade em nível de árvore do modelo 3DHDG

Nosso próximo passo será determinar condições sobre os parâmetros α e β na lagrangiana (2.1) de modo que a mesma fique unitária e, deste modo, recuperando o modelo

BHT. Para tanto, faremos uso dum procedimento padrão que transforma a tarefa de checar a unitariedade em nível de árvore de um dado modelo, o que geralmente é um trabalho exaustivo, num simples exercício algébrico [22]. A prescrição consiste basicamente em saturar o propagador com correntes externas conservadas, compatíveis com as simetrias do sistema, e examinar posteriormente os resíduos do propagador saturado (PS) em cada pólo simples. Contraindo o propagador em (2.41) com correntes conservadas $T^{\mu\nu}(k)$, ($k_\mu T^{\mu\nu} = k_\nu T^{\mu\nu} = 0$), obtemos

$$\text{PS} = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_2^2} \right] \left[T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} T^2 \right] + \frac{1}{\sigma} \left[-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 - m_0^2} \right] \frac{1}{2} T^2, \quad (2.42)$$

Supondo que não existam táquions no modelo, encontramos imediatamente as seguintes condições

$$\beta > 0, \quad \frac{1}{8\alpha + 3\beta} < 0. \quad (2.43)$$

Por outro lado, os resíduos do PS nos pólos $k^2 = m_2^2$, $k^2 = 0$, and $k^2 = m_0^2$ são, respectivamente

$$\text{Res}(\text{PS})|_{k^2=m_2^2} = \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} T^2 \right) |_{k^2=m_2^2}, \quad (2.44)$$

$$\text{Res}(\text{PS})|_{k^2=0} = \left(T^2 - T_{\mu\nu}^2 \right) |_{k^2=0}, \quad (2.45)$$

$$\text{Res}(\text{PS})|_{k^2=m_0^2} = -\frac{1}{2} T^2 |_{k^2=m_0^2}. \quad (2.46)$$

Agora, como sabemos, a unitariedade em nível de árvore de um modelo genérico é garantida se o resíduo em cada pólo simples de PS é ≥ 0 . Mantendo em mente que $\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} T^2 \right) |_{k^2=m_2^2} > 0$ e $\left(T_{\mu\nu}^2 - T^2 \right) |_{k^2=0} = 0$ (veja o Apêndice C), chegamos à conclu-

são de que: (i) $Res(PS) |_{k^2=m_0^2} > 0$ implica em $\beta > 0$ e $\alpha < 0$ e, (ii) $Res(PS) |_{k^2=0} = 0$. Conseqüentemente, não precisamos nos preocupar com estes pólos; o problema aparece em $k^2 = m_0^2$ já que $Res(PS) |_{k^2=m_0^2} < 0$. Um modo de contornar esta situação é considerar o limite $m_0 \rightarrow \infty$ do modelo em discussão, o que nos leva à conclusão de que $\alpha = -\frac{3}{8}\beta$. Portanto, a classe de modelos definidos pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\beta}{2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right], \quad (2.47)$$

é livre de *ghosts* em nível de árvore. Por conveniência, substituindo β por $\frac{4}{\kappa^2 m_2^2}$, onde m_2 é um parâmetro de massa, encontramos

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8}R^2 \right) \right], \quad (2.48)$$

que é exatamente a densidade de lagrangiana do modelo BHT.

Este sistema, como já comentamos, é unitário em nível de árvore. Não obstante, não está claro se esta razão entre α e β sobreviverá à renormalização em loops arbitrários, ou mesmo em um loop; em outras palavras, unitariedade além do nível de árvore deve ser checada [11]. Na verdade, é mais provável que o modelo de BHT seja não-renormalizável já que ele melhora somente o comportamento das projeções do spin-2 do propagador, mas não as projeções do spin-0 [23].

2.4 Potencial inter-partículas

Na mecânica quântica, a noção de potencial é introduzida para ser utilizada com a equação de Schrödinger. Já na teoria quântica de campos, as interações são visualizadas como advindas da troca de quanta. É notável que estes dois conceitos possam ser mesclados para partículas que se movam lentamente, se nos restringirmos a processos

de ordem mais baixa. De fato, de acordo com a aproximação de Born, a seção de choque diferencial que concerne, por exemplo, o espalhamento de dois bósons escalares de mesma massa m é dada por $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{CM}} = \left| \frac{m}{4\pi} \int e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \right|^2$, onde \mathbf{p} e \mathbf{p}' são, respectivamente, os momenta de entrada e saída das partículas. Por outro lado, a seção de choque para a interação dos dois citados bósons via troca de grávitons pode ser expressa como $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{CM}} = \left| \frac{\mathcal{M}_{\text{NR}}}{16m} \right|^2$, onde \mathcal{M}_{NR} é o limite não-relativístico da amplitude de Feynman para o processo que estamos discutindo. Como resultado, o potencial inter-partículas assume a forma

$$U(r) = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \mathcal{M}_{\text{NR}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.49)$$

onde \mathbf{k} é o momentum do gráviton trocado.

Utilizando a equação acima, iremos calcular em seguida a expressão para a energia potencial gravitacional no contexto do modelo de BHT [24]. Consideremos então a seguinte lagrangiana descrevendo a interação gravitacional entre bósons escalares neutros

$$\mathcal{L}_{\text{esc.}} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] \sqrt{g} \quad (2.50)$$

Novamente, na aproximação de campo fraco, a lagrangiana acima se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{esc.}} &= \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] \left(1 + \frac{\kappa h}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2] \left(1 + \frac{\kappa h}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \kappa h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2] \left(1 + \frac{\kappa h}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

A lagrangiana de interação conterá somente os termos em $\kappa h^{\mu\nu}$. Da equação acima,

encontramos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int.}} &= \frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] \\ \mathcal{L}_{\text{int.}} &= \frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - m^2 \phi^2) \right].\end{aligned}\quad (2.52)$$

Escrevendo o termo entre colchetes no espaço dos momenta e simetrizando os índices, encontramos o vértice elementar para o processo que acabamos de descrever

$$\Gamma_{\mu\nu}(p, p') = \frac{1}{2} \kappa [p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - \eta_{\mu\nu} (p \cdot p' + m^2)], \quad (2.53)$$

onde supomos que os momenta estão entrando, e multiplicamos por um fator 2, já que estamos lidando com bósons.

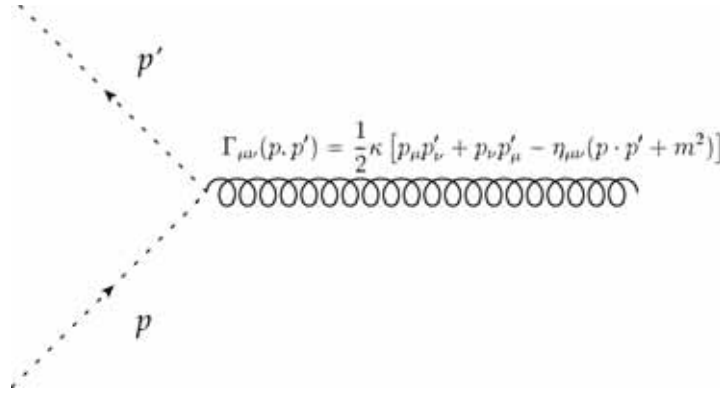


Figura 2.1: Vértice relevante para a interação gravitacional de bósons escalares

A amplitude de Feynman é, então

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \Gamma_{\mu\nu}(p, -p') \mathcal{P}^{\mu\nu, \alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(q, -q') \\ &= \frac{m_2^2}{k^2(k^2 - m_2^2)} A + \frac{1}{k^2} B,\end{aligned}\quad (2.54)$$

onde o propagador é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{2\Lambda}{k^2} P^{(1)} + \frac{m_2^2}{k^2(k^2 - m_2^2)} P^{(2)} + \frac{1}{k^2} P^{(0-s)} + \frac{\sqrt{2}}{k^2} (P^{(0-sw)} + P^{0-ws}) \\ & + \left(\frac{4\Lambda}{k^2} + \frac{2}{k^2} \right) P^{(0-w)}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

e

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{2} \kappa^2 \left\{ (p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) - \frac{1}{k^2} (q \cdot q')(m^2 - p \cdot p')^2 - \frac{1}{k^2} (p \cdot p')(m^2 - q \cdot q')^2 \right. \\ & + \frac{1}{k^2} [(p \cdot q) - (p \cdot q') - (p' \cdot q) + (p' \cdot q')] (m^2 - p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') - (p \cdot p')(q \cdot q') \\ & \left. + \frac{1}{k^4} (m^2 - p \cdot p')^2 (m^2 - q \cdot q')^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{2} \kappa^2 \left[(p \cdot p')(q \cdot q') + (q \cdot q')(m^2 - p \cdot p') + (p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') + \frac{1}{k^2} (q \cdot q')(m^2 - p \cdot p')^2 \right. \\ & + \frac{1}{k^2} (p \cdot p')(m^2 - q \cdot q')^2 + (m^2 - q \cdot q')(m^2 - p \cdot p') + \frac{1}{k^2} (m^2 - q \cdot q')(m^2 - p \cdot p')^2 \\ & \left. + \frac{1}{k^2} (m^2 - q \cdot q')^2 (m^2 - p \cdot p') + \frac{1}{k^4} (m^2 - p \cdot p')^2 (m^2 - q \cdot q')^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

No limite não-relativístico, Eq. (2.54) se reduz à

$$\mathcal{M}_{\text{NR}} = -\frac{1}{2} \kappa^2 \frac{m^4}{\mathbf{k}^2 + m_2^2}. \quad (2.58)$$

Realizando a integração apropriada utilizando as Eqs. (2.49) e (2.58), chegamos à conclusão de que a energia potencial é dada por

$$U(r) = -2m^2GK_0(m_2r), \quad (2.59)$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero. Note que $K_0(x)$ se comporta como $-\ln x$ na origem e como $x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$ assintoticamente. O potencial não-relativístico, por sua vez, tem a forma

$$V(r) = -2mGK_0(m_2r). \quad (2.60)$$

Neste ponto, alguns comentários são pertinentes:

- Assim como o potencial newtoniano, $V_{\text{Newt}}(r) = 2mG \ln \frac{r}{r_0}$ (onde r_0 é um regulador infravermelho), o potencial concernente ao modelo BHT possui uma singularidade logarítmica na origem.
- $V(r) \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$.
- No limite em que $m_2 \rightarrow \infty$, $V(r) \rightarrow 0$, reproduzindo, deste modo, o potencial usual da gravitação tridimensional.

Por outro lado, no limite não-relativístico, uma partícula teste de massa m_{test} se movendo num campo gravitacional fraco experiencia uma força $\mathbf{F}(r) = -m_{\text{test}}\nabla V(r)$. Agora, levando a Eq. (2.60) em conta, encontramos que $\mathbf{F}(r) = F(r)\hat{\mathbf{r}}$, com

$$F(r) \equiv -2Gm_{\text{test}}mm_2K_1(m_2r), \quad (2.61)$$

onde K_1 é a função de Bessel modificada de ordem 1. Relembrando que $-xK_1(x)$ é uma função negativa monotonicamente crescente no intervalo $0 \leq x < \infty$ – já que

$\frac{d}{dx}[-xK_1(x)] = xK_0(x)$ – chegamos à conclusão de que $\mathbf{F}(r)$ é sempre atrativa (veja a Fig. 2.2). Esta força gravitacional de curto alcance não existe no contexto da relatividade geral tridimensional, sendo peculiar apenas ao modelo de BHT.

A energia potencial dada pela Eq. (2.59) é, como esperado, no nível linearizado, equivalente àquela obtida através do modelo (unitário) de Pauli-Fierz para um campo massivo de spin-2.

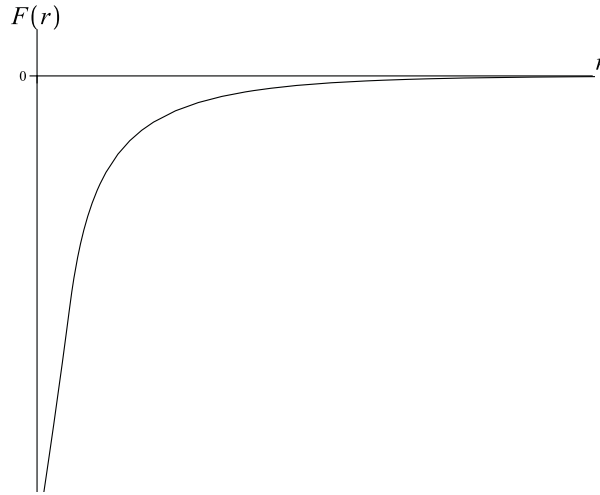


Figura 2.2: A força gravitacional de curto alcance relacionada ao modelo de BHT.

2.5 Desvio da Luz

A gravitação 3D de Einstein é trivial fora das fontes; conseqüentemente, não deveríamos esperar, ao menos em princípio, nenhuma deflexão da luz neste contexto. Mas não é bem assim na prática. Na verdade, um raio de luz sofre uma deflexão que é proporcional à fonte de massa; além disso, o encurvamento é independente do parâmetro de impacto. Isto pode ser mostrado facilmente no caso de uma partícula puntual massiva m localizada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. A métrica linearizada correspondente, no *gauge* de De Donder,

é dada por

$$ds^2 = dt^2 - (1 - \lambda)(dr^2 + r^2 d\theta^2),$$

onde $\lambda = 8Gm \ln \frac{r}{r_0}$, com r_0 sendo um regulador infravermelho, e r e θ são as coordenadas polares usuais.

Introduzindo agora uma nova coordenada radial (r') e angular (θ') através da mudança de coordenadas

$$(1 - \lambda)r^2 = (1 - 8Gm)r'^2, \quad \theta' = (1 - 4Gm)\theta,$$

obtemos, em ordem linear em Gm ,

$$ds^2 = dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2. \tag{2.62}$$

Curiosamente, a geometria em torno da partícula puntual é localmente idêntica àquela de um espaço-tempo plano; contudo, ela não é globalmente minkowskiniana já que o ângulo θ' varia no interalo $0 \leq \theta' < 2\pi(1 - 4Gm)$. Portanto, a métrica tridimensional (2.62) descreve um espaço cônico com uma cunha de tamanho angular igual a $8\pi Gm$ removida e com as duas faces da cunha identificadas. O ângulo de deflexão da luz é, portanto, igual a $4\pi Gm$ e é independente do parâmetro de impacto. Este fenômeno é muito similar ao efeito Aharonov-Bohm na eletrodinâmica. De fato, lá o padrão de interferência entre dois feixes coerentes de elétrons se movendo em lados diferentes de um fino solenóide é afetado pelo fluxo magnético dentro do mesmo, apesar do campo magnético ser nulo ao longo dos feixes; no nosso caso, por outro lado,

o raio de luz se propagando na região plana do espaço-tempo em torno da partícula puntual sente a curvatura do espaço-tempo, a qual é restrita à partícula puntual massiva [25, 26]. Como veremos em seguida, estes estranhos efeitos geométricos não acontecem na gravitação da 3DHG. Neste sentido, vamos calcular a deflexão gravitacional de um raio de luz no âmbito do modelo de BHT. Para tanto, temos que calcular antes as equações de campos linearizadas relacionadas ao sistema de BHT.

As equações de campos concernentes à densidade de lagrangiana [†]

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) - \mathcal{L}_M \right], \quad (2.63)$$

onde \mathcal{L}_M é a densidade de lagrangiana para a matéria, são

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \frac{1}{m_2^2} \left[\frac{1}{2} R_{\rho\sigma}^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \nabla_\mu \nabla_\nu R - 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \square R + \square R_{\mu\nu} - \frac{3}{16} R^2 g_{\mu\nu} + \frac{3}{4} R R_{\mu\nu} \right] \\ = \frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, e $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein.

As equações de campo linearizadas são dadas por

$$\left(1 + \frac{\square}{m_2^2} \right) \left[-\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\kappa} R^{(\text{lin})} \right] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Gamma_\nu + \partial_\nu \Gamma_\mu) = \frac{\kappa}{4} \left(\frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \right), \quad (2.65)$$

onde $R^{(\text{lin})} = \kappa \left[\frac{1}{2} \square h - \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} \right]$, $\Gamma_\mu \equiv \left(1 + \frac{\square}{m_2^2} \right) \partial_\rho \gamma_\mu{}^\rho + \frac{\partial_\mu R^{(\text{lin})}}{4\kappa m_2^2}$, $\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}$. Note que aqui os índices são levantados (abaixados) utilizando $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$).

[†]Uma exposição detalhada dos cálculos concernentes às equações de campo, sua linearização e os resultados no *gauge* de Teyssandier é apresentada no Apêndice B, assim como a solução das equações para o caso de uma partícula puntual.

Analogamente ao trabalho de Teysandier em gravitação com derivadas mais alta em 4D [27], pode ser demonstrado que é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas no qual as condições de *gauge*, $\Gamma_\mu = 0$, na métrica linearizada, são válidas. Considerando que essas condições são satisfeitas, é imediato mostrar que a solução geral da Eq. (2.65) é dada por

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}^{(E)}, \quad (2.66)$$

onde $h_{\mu\nu}^{(E)}$ é a solução da equação de Einstein linearizada no *gauge* de De Donder, i.e.,

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2}(Tn_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}), \quad \partial^\nu \gamma_{\mu\nu}^{(E)} = 0, \quad (2.67)$$

onde $\gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(E)}$, enquanto $\psi_{\mu\nu}$ satisfaz a equação

$$(\square + m_2^2)\psi_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T). \quad (2.68)$$

É importante notar que, precisamente neste *gauge*, as equações para $\psi_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}^{(E)}$ são totalmente desacopladas. Como resultado, a solução geral da equação (2.65) se reduz a uma combinação linear das soluções anteriores.

Resolvendo as Eqs. (2.67) e (2.68) para uma partícula puntual de massa m localizada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, encontramos

$$h_{00} = -\frac{\kappa m}{8\pi}K_0(m_2 r) \quad (2.69)$$

$$h_{11} = h_{22} = -\frac{\kappa m}{8\pi}\left[K_0(m_2 r) + 2 \ln \frac{r}{r_0}\right]. \quad (2.70)$$

Note que para $m_2 \rightarrow \infty$, a solução acima reproduz a solução da equação de Einstein em três dimensões no *gauge* de De Donder com o sinal errado, como era de se esperar.

Agora estamos prontos para discutir a deflexão de um fóton devido ao campo gravitacional gerado por uma massa m . Suponhamos um fóton com momentum p_μ vindo do infinito com um parâmetro de impacto b (veja a Fig. 2.3).

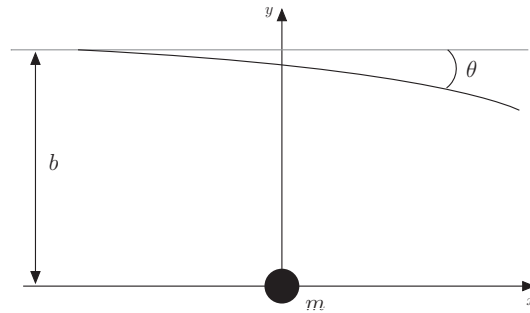


Figura 2.3: Geometria da deflexão da luz.

A variação de momentum em p_μ quando o fóton passa pelo campo gravitacional é dada por

$$\Delta p_\mu = \frac{\kappa}{2} p^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \partial_\mu h_{\alpha\beta} dx^\beta, \quad (2.71)$$

onde a integral é realizada ao longo da linha reta aproximada da trajetória do fóton. Como consequência, o deslocamento ao longo da linha reta aproximada e o momentum são, respectivamente,

$$dx^\mu \approx (dx^1, dx^1, 0), \quad p^\mu \approx (p^1, p^1, 0).$$

Inserindo essas quantidades na Eq. (2.71), obtemos

$$\Delta p_2 = \frac{\kappa}{2} p^1 \int_{-\infty}^{\infty} \partial_y [h_{00} + h_{11}] dx^1, \quad (2.72)$$

a qual pode ser escrita como

$$\Delta p_2 = \frac{\kappa}{2} p^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{d}{dr} (h_{00} + h_{11}) \right] \frac{\partial r}{\partial y} \right\}_{y=b} dx. \quad (2.73)$$

Com os resultados de (2.69) e (2.70), podemos escrever a Eq. (2.73) simplesmente como

$$\Delta p_2 = \frac{bm\kappa^2}{4\pi} p^1 \int_0^{\infty} \left[\frac{m_2 K_1(m_2 \sqrt{x^2 + b^2})}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{1}{x^2 + b^2} \right] dx.$$

Agora, levando em conta que [28]

$$\begin{aligned} & \int K_\nu(\alpha \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x^{2\mu+1}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\nu}} dx \\ &= \frac{2^\mu \Gamma(\mu + 1)}{\alpha^{\mu+1} y^{\nu-\mu-1}} K_{\nu-\mu-1}(\alpha y), \quad \alpha > 0, \quad \text{Re}(\mu) > -1, \end{aligned}$$

e

$$K_{+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

encontramos prontamente

$$\Delta p_2 = \frac{\kappa^2 m p^1}{8} (-1 + e^{-m_2 b}). \quad (2.74)$$

Chamando de θ ($= \left| \frac{\Delta p_y}{p_x} \right|$) o valor absoluto do ângulo de deflexão, chegamos à conclusão de que

$$\theta = 4\pi Gm (1 - e^{-m_2 b}). \quad (2.75)$$

Chamamos atenção ao fato de que para $m_2 \rightarrow \infty$, o módulo do ângulo de deflexão se reduz a $4\pi Gm$, o qual, como já havíamos comentado, é a previsão geométrica da gravitação 3D de Einstein [24].

2.6 Análise dos resultados anteriormente obtidos no contexto dos modelos BHT e 3DHDG

Já que, como havíamos discutido, o modelo de BHT é um caso especial do sistema 3DHDG, uma análise comparativa entre as previsões destes modelos para o potencial não-relativístico certamente nos esclarecerá os resultados encontrados nas Seções 2.4 e 2.5. Para tanto, iremos analisar brevemente estes fenômenos no contexto da 3DHDG e, em seguida, realizar um estudo comparativo entre os fenômenos correspondentes obtidos para o modelo de BHT. Vale notar que o estudo da energia potencial no contexto do modelo 3DHDG tem sua importância já que existe uma incrível semelhança entre este potencial e aquele concernente à interação de dois vórtices supercondutores.

2.6.1 O potencial não-relativístico para o modelo 3DHDG

Um cálculo similar àquele da Seção 2.4 leva à seguinte expressão para a energia potencial

$$U(r) = 2GM^2 \left[K_0(M_0 r) - K_0(M_2 r) \right]. \quad (2.76)$$

Ao contrário do potencial newtoniano, $U_{\text{Newt}}(r) = 2GM^2 \ln \frac{r}{r_0}$, o qual possui uma singularidade logarítmica na origem e não é limitado no infinito, este potencial é extremamente bem comportado: ele é finito na origem ($U(0) = 2GM^2 \ln \frac{M_2}{M_0}$) e zero no infinito. Curiosamente, ele descreve três possíveis regimes gravitacionais. Assim, dependendo da escolha dos parâmetros na ação, podemos obter regimes de *gravitação* ($M_2 < M_0$), *anti-gravitação* ($M_0 < M_2$) ou *blindagem gravitacional* ($M_0 = M_2$).

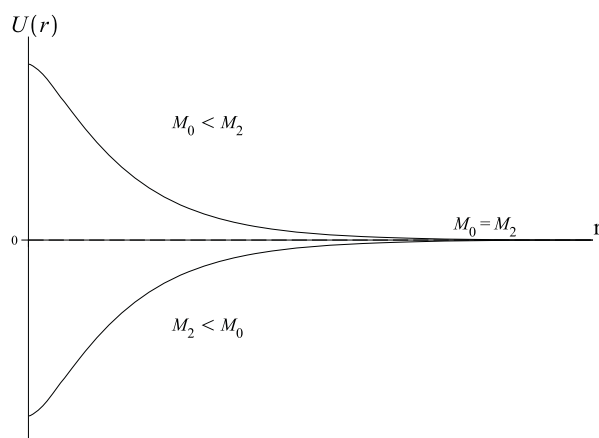


Figura 2.4: Possíveis regimes gravitacionais previstos pela 3DHDG.

Na Fig. 2.4 é mostrado um esboço esquemático do potencial gravitacional para as três situações que acabamos de descrever. É bastante notável que este esboço quantitativo seja muito similar, *mutatis mutandis*, àquele encontrado por Jacobs e Rebbi por meio de um estudo computacional aproximado do potencial de dois vórtices [29]. De fato, calculando a energia de interação entre dois vórtices, na teoria de Ginzburg-Landau ou, equivalentemente, no modelo abeliano de Higgs, como função da separação entre os dois vórtices e o parâmetro λ , o qual mede a intensidade relativa do auto-

acoplamento da matéria e o acoplamento eletromagnético, eles mostraram que o potencial entre os vórtices é atrativo para $\lambda < 1$ e repulsivo para $\lambda > 1$. Eles também encontraram que, para $\lambda = 1$, um limite inferior é atingido para todas separações e, portanto, os vórtices não interagem.

2.6.2 Deflexão da luz no contexto da 3DHDG

Um procedimento análogo àquele empregado na Seção 2.5 fornece a solução geral para as equações de campo linearizadas, relacionadas ao modelo 3DHDG, geradas por uma partícula de massa m localizada em $\mathbf{r}=\mathbf{0}$, i.e.,

$$h_{00} = \frac{m\kappa}{8\pi} \left[K_0(M_0 r) - K_0(M_2 r) \right], \quad (2.77)$$

$$h_{ii} = \frac{m\kappa}{8\pi} \left[K_0(M_0 r) - K_0(M_2 r) - 2 \ln \frac{r}{r_0} \right]. \quad (2.78)$$

Utilizando estes resultados, podemos mostrar que o valor do ângulo de deflexão, θ , de um fóton devido ao campo gravitacional da massa m , é dado por

$$\theta = 4\pi G m (1 - e^{-M_2 b}). \quad (2.79)$$

Notem que a excitação escalar de massa M_0 não contribui em nada para o desvio da luz. Isso se deve ao fato de que a métrica que diz respeito à gravitação $R + R^2$ linearizada com o termo de EH com o sinal errado – a teoria obtida através da linearização das equações de campos relacionadas à ação $\int d^3x \sqrt{g} \left[-\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 - \mathcal{L}_M \right]$ — é conformemente relacionada àquela versão 3D linearizada da relatividade geral com o sinal errado. Aliás, chamando a solução da gravitação $R + R^2$ linearizada com o sinal

errado de $g_{\mu\nu}^{(R+R^2)}$, obtemos prontamente

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{(R+R^2)} &\equiv \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}^{(R+R^2)} = (1 - \kappa\phi) [\eta_{\mu\nu} - \kappa h_{\mu\nu}^{(E)}] \\ &= (1 - \kappa\phi) g_{\mu\nu}^{(E)}, \end{aligned}$$

onde, é claro, termos de ordem κ^2 foram descartados. Aqui, $h_{\mu\nu}^{(E)}$ e ϕ possuem o mesmo sentido que na Seção 2.5, enquanto $g_{\mu\nu}^{(E)}$ é a solução para a gravitação 3D de Einstein linearizada com o sinal errado. Esta é a razão pela qual as expressões (2.75) e (2.79), com as devidas mudanças, são tão similares.

2.6.3 Um estudo comparativo

Agora estamos prontos para realizar uma análise comparativa entre estes dois resultados obtidos para o sistema 3DHDG e os correspondentes previstos pelo modelo BHT, de modo a ganharmos um melhor entendimento sobre este último.

Das considerações anteriores, chegamos à conclusão de que o nascimento do potencial de BHT vem do potencial da 3DHDG com $M_2 < M_0$ (veja a Fig. 2.5). Examinando o diagrama mostrado na Fig. 2.5, podemos ver claramente que conforme M_0 se torna cada vez maior, o potencial da 3DHDG rapidamente se aproxima do potencial de BHT até que, eventualmente, eles se fundem. Portanto, para chegar ao potencial de BHT partindo da 3DHDG, este último deve necessariamente se tornar singular na origem, o que ocorre no limite de $M_0 \rightarrow \infty$. É interessante notar que esta é justamente a condição necessária para evitar, em nível de árvore, o *ghost* massivo de spin-0 que assombra a 3DHDG. Portanto, a presença da singularidade no potencial de BHT é, de certo modo, relacionada à ausência do *ghost* em nível de árvore; em outras palavras, a unitariedade

em nível de árvore e a existência de uma singularidade no potencial estão, de algum modo, relacionadas.

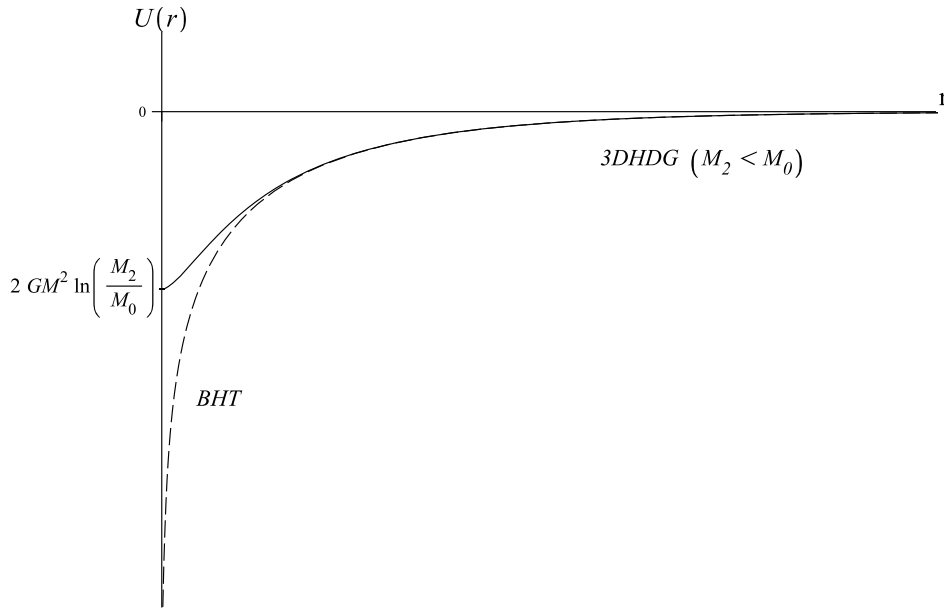


Figura 2.5: Energia potencial gravitacional para os modelos 3DHDG com $M_2 < M_0$ (linha contínua) e BHT (linha pontilhada).

Vamos agora melhorar a nossa discussão sobre o desvio da luz no contexto do modelo BHT. Na Seção 2.5, chegamos à conclusão de que o ângulo de deflexão gravitacional previsto para este modelo é independente do parâmetro de impacto, como era de se esperar; contudo, este ângulo é pequeno? Antes de responder esta questão, lembremos que uma das razões para realizar uma pesquisa em gravitação tridimensional é que a gravitação 3D possui uma relevância física direta para modelar fenômenos que estão, na verdade, dinamicamente confinados a uma dimensionalidade menor. De fato, a física gravitacional na presença de uma corda cósmica retilínea (infinitamente longa, perpendicular a um plano) é adequadamente descrita pela gravitação 3D [26]. Isto significa que a resposta para a nossa questão inicial pode ser encontrada analisando a

deflexão gravitacional em um modelo 4D análogo, de certa maneira, ao modelo BHT, ou seja, a gravitação com derivadas de ordem mais alta em 4D com o sinal errado, definida pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{\beta}{2}R_{\mu\nu}^2 \right].$$

Pode-se mostrar que o módulo do ângulo de deflexão, θ , é dado por

$$\theta = 4\pi G\mu \left(1 - e^{-\overline{M}_2 b} \right),$$

onde μ é a densidade de energia da corda, e $\overline{M}_2^2 \equiv -\frac{4}{\kappa^2\beta} (> 0)$. Se levarmos em conta que $|\beta| = 10^{60}$ encontramos imediatamente $M_2 \approx 10^3 \text{ cm}^{-1}$ [30, 31]. Como consequência, para distâncias longe da corda, o ângulo de deflexão ($\theta \approx G\mu$) é pequeno, como era de se esperar. De fato, observações limitam $G\mu \approx 10^{-5}$, enquanto o cenário de cordas para a formação de galáxias requer $G\mu \approx 10^{-6}$, correspondendo a uma escala de grande unificação de $\approx 10^{16} \text{ GeV}$ [26]. Como resultado, apenas para fótons passando muito próximos à corda cósmica a deflexão da luz irá diferir significativamente do valor usual previsto pela gravitação com derivadas de ordem mais alta em 4D com o sinal errado. A mesma conclusão, com as mudanças apropriadas, se aplicam ao modelo BHT.

2.7 Discussão

Como se sabe, a gravitação tridimensional de Einstein sem fontes é fisicamente trivial já que os tensores de Einstein e Riemann são equivalentes em $D = 3$. Além disso, a quantização do campo gravitacional não dá origem a grávitons propagantes já que a

métrica do espaço tempo é localmente determinada pelas fontes. Conseqüentemente, a descrição de fenômenos gravitacionais via gravitação $3D$ nos leva a alguns resultados bizarros, tais quais

- Ausência de força gravitacional no limite não-relativístico.
- Deflexão gravitacional independente do parâmetro de impacto.

Não obstante, como já discutimos, estes estranhos fenômenos não existem no contexto do modelo BHT. Aliás, neste contexto, forças gravitacionais de curto alcance são exercidas sobre partículas se movendo lentamente; além disso, o desvio da luz depende do parâmetro de impacto, como deveria. Em outras palavras, as idiosincrasias da relatividade geral em $3D$ não aparecem no sistema BHT.

O grande incentivo para o estudo de modelos gravitacionais em $3D$ é, na verdade, tentar encontrar um sistema gravitacional com divergências ultravioletas menos severas na teoria de perturbação. Como a relatividade geral em $3D$ é dinamicamente trivial, o modelo BHT, o qual é unitário em nível de árvore, é um passo importante nesta direção. Este tipo de pesquisa conduzida em dimensões menores certamente nos ajuda a compreender melhor algumas difíceis questões conceituais, as quais estão presentes e mais opacas no mundo físico quadridimensional.

Vale a pena mencionar que a trivialidade da relatividade geral em $3D$ pode também ser resolvida adicionando à ação de EH em $3D$ um termo de Chern-Simons, que viola a paridade. O modelo resultante é conhecido como *topological massive gravity* (TMG) [32]. Recentemente, Ahmedov e Aliev [12] mostraram que as equações de campo do modelo BHT consistem de uma equação massiva (tensorial) do tipo Klein-Gordon com uma fonte de curvatura quadrática e uma equação de vínculo; e mais, para espaço-tempo algébricos do tipo D e N , as equações de campos da TMG podem ser pensadas

como as “raízes” da equação massiva do tipo Klein-Gordon, as quais permitiriam mapear todas as soluções do tipo D e N da TMG naquelas do modelo BHT. Chamamos atenção ao fato de que, contudo, em contraste à TMG, a gravitação massiva 3D possui a grande vantagem de ser uma teoria que preserva a paridade.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977); *Gen. Relativ. Gravit.* **9** 353 (1978).
- [2] P. Mannheim, *Found. Phys.* **37** 532 (2007).
- [3] B. Whitt, *Phys. Lett. B* **145** 176 (1984).
- [4] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102** 201301 (2009).
- [5] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Phys. Rev. D* **79** 124042 (2009).
- [6] R. Andringa *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **27** 025010 (2010).
- [7] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Annals Phys.* **325** 1118 (2010).
- [8] E. Bergshoeff *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **28** 015002 (2011).
- [9] E. Bergshoeff *et. al*, *Class. Quant. Grav.* **27** 235012 (2010).
- [10] M. Nakasone and I. Oda, *Prog. Theor. Phys.* **121** 1389 (2009).
- [11] İ. Güllü and B. Tekin, *Phys. Rev. D* **80** 064033 (2009).
- [12] H. Ahmedov and A. Aliev, *Phys. Rev. Lett.* **106** 021301 (2011).

- [13] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Journal of Physics: Conference Series* **229** 012005 (2010).
- [14] S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **103** 101302 (2009).
- [15] A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Pol.* **24** 734 (1963).
- [16] P. Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B* **60** 478 (1973).
- [17] I. Antoniadis and E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33** 2756 (1986).
- [18] H. Nishino and S. Rajpoot, *Phys. Lett. B* **639** 110 (2006).
- [19] A. Accioly, *Phys. Rev. D* **67** 127502 (2003).
- [20] A. Accioly, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **127** 100 (2004).
- [21] A. Accioly and M. Dias, *Int. J. Theor. Phys.* **44** 1123 (2005).
- [22] A. Accioly, J. Helayël-Neto, E. Scatena, J. Morais, R. Turcati, and B. Pereira-Dias, *Class. Quantum Grav.* **28** 225008 (2011).
- [23] E. Bergshoeff, O. Hohm, and P. Townsend, *Cosmology, The Quantum Vacuum and Zeta Functions: A Workshop with a Celebration of Emilio Elizalde's Sixtieth Birthday 8-10 Mar 2010, Bellaterra, Barcelona, Spain.*
- [24] A. Accioly, J. Helayël-Neto, J. Morais, E. Scatena, and R. Turcati, *Phys. Rev. D* **83** 104005 (2011).
- [25] A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **23** 852 (1981).
- [26] A. Vilenkin and E. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).

- [27] P. Teyssandier, *Class. Quantum Grav.* **6** 219 (1989).
- [28] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, and Products* (Academic Press, San Diego, 1994).
- [29] L. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev. B* **19** 4486 (1979).
- [30] A. Accioly and H. Blas, *Phys. Rev. D* **64** 067701 (2001).
- [31] A. Accioly and H. Blas, *Int. J. Theor. Phys.* **43** 47 (2004).
- [32] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** 975 (1982); *Ann. Phys. (N. Y.)* **140** 372 (1982); **185** 406 (E) (1988).
- [33] A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukay, and E. R. Neto, *Prog. Theor. Phys.* **104** 103 (2000).

Apêndice **A**

Uma prescrição para o cálculo do propagador do gráviton, e uma lista de algumas identidades que facilitam enormemente esta tarefa

Para encontrarmos o propagador relacionado à densidade lagrangiana na Eq. (2.1), é muito conveniente trabalhar em termos dos operadores de Barnes-Rivers no espaço dos tensores simétricos de posto dois. O conjunto completo de operadores tridimensionais no espaço dos momenta é [16, 17]

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa} - \theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}), \quad (\text{A.1})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda}), \quad (\text{A.2})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.3})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.4})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.5})$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (\text{A.6})$$

onde $\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ and $\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ são, respectivamente, os projetores transversais e longitudinais usuais. A tabela multiplicativa para estes operadores é mostrada na Tabela I.

Tabela A.1: Tabela multiplicativa para os operadores de Barnes-Rivers

	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

Para calcular o propagador do gráviton nós precisamos da parte bilinear da densidade de lagrangiana (2.1). Com o fixador de *gauge* $\frac{1}{2\Lambda}(\partial_\mu\gamma^{\mu\nu})^2$ (*gauge* de De Donder), e indo para o espaço dos momenta, reproduzimos a Eq. (2.40). A tarefa de calcular o operador \mathcal{O} é imensamente facilitada se utilizarmos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
[P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}), \\
[2P^{(0-s)} + P^{(0-w)} + \sqrt{2}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda}, \\
[2P^{(1)} + 4P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\kappa}k_\nu k_\lambda + \eta_{\mu\lambda}k_\nu k_\kappa + \eta_{\nu\lambda}k_\mu k_\kappa + \eta_{\nu\kappa}k_\mu k_\lambda), \\
[2P^{(0-w)} + \sqrt{2}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})]_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\nu}k_\kappa k_\lambda + \eta_{\kappa\lambda}k_\mu k_\nu), \\
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} &= \frac{1}{k^4}(k_\mu k_\nu k_\kappa k_\lambda).
\end{aligned}$$

Agora, se escrevermos o operador \mathcal{O} na forma genérica

$$\mathcal{O} = x_1 P^{(1)} + x_2 P^{(2)} + x_s P^{(0-s)} + x_w P^{(0-w)} + x_{sw} P^{(0-sw)} + x_{ws} P^{(0-ws)},$$

e levarmos em conta que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$, onde \mathcal{O}^{-1} é o propagador, obtemos prontamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{-1} &= \frac{1}{x_1} P^{(1)} + \frac{1}{x_2} P^{(2)} + \frac{1}{x_s x_w - x_{sw} x_{ws}} \left[x_w P^{(0-s)} + x_s P^{(0-w)} \right. \\
&\quad \left. - x_{sw} P^{(0-sw)} - x_{ws} P^{(0-ws)} \right].
\end{aligned} \tag{A.7}$$

De (A.7) e (2.40) obtemos (2.41).

Equações de campo do modelo BHT e o gauge de Teyssandier

B.1 Equações de campo do modelo BHT

As equações de campos concernentes à ação

$$\mathcal{S} = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2 m_2^2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{3}{8} R^2 \right) - \mathcal{L}_M \right], \quad (\text{B.1})$$

onde \mathcal{L}_M é a densidade de lagrangiana para a matéria, podem ser encontradas por meio da variação da lagrangiana em relação à métrica $g_{\mu\nu}$. Calculemos a variação então de cada um dos termos de (B.1), $\int d^3x \sqrt{g} R$, $\int d^3x \sqrt{g} R^2$ e $\int d^3x \sqrt{g} R_{\mu\nu}^2$.

(i) *Variação de $R_{\mu\nu}^2$*

Num sistema geodésico, $R_{\mu\nu}^2 = -\Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\rho$, onde a quantidade $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, i.e., o símbolo de Christoffel, é definido como $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}]$. Portanto, temos

$$\delta R_{\mu\nu}^2 = -\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho, \quad \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} [\nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} + \nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}].$$

Como consequência, obtemos

$$\begin{aligned}\delta R^\rho_{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{2} \left[g^{\rho\sigma} (\nabla_\nu \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\nu) \delta g_{\mu\sigma} + g^{\rho\sigma} (\nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\lambda\sigma} - \nabla_\lambda \nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma}) \right. \\ &\quad \left. + \nabla_\lambda \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla^\rho \delta g_{\mu\lambda} \right].\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

(ii) *Variação de $R_{\mu\nu}$*

Claramente,

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \delta R^\rho_{\mu\nu\rho} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\nabla^\lambda \nabla_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \nabla^\lambda \nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} + g^{\rho\sigma} \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} \delta g_{\rho\sigma} + \square \delta g_{\mu\nu} \right],\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

onde $\nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} \equiv \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu)$.

(iii) *Variação de R*

Como $\delta R = \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$, obtemos imediatamente

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu}.$$

Agora, levando em conta que $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}$, chegamos à conclusão de que

$$\delta R = [-R^{\mu\nu} - \nabla^\mu \nabla^\nu + g^{\mu\nu} \square] \delta g_{\mu\nu}.\quad (\text{B.4})$$

(iv) *Variação de $\int d^3x \sqrt{g} R$*

Notando que $\delta \sqrt{g} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$, obtemos

$$\begin{aligned}\delta \int d^3x R \sqrt{g} &= \int d^3x \sqrt{g} \left[\frac{g^{\mu\nu} R}{2} - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} + \int d^3x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad - \int d^3x \sqrt{g} \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Contudo,

$$\int d^3x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} = \int d\tau_\rho \sqrt{g} g^{\mu\nu} \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu}, \quad \text{e} \quad \int d^3x \sqrt{g} \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} = \int d\tau_\rho \sqrt{g} g^{\rho\mu} \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu}.$$

Vamos supor que tanto $\delta g_{\mu\nu}$ quanto $\nabla^\rho \delta g_{\mu\nu}$ se anulem no entorno da região de integração. Assim, obtemos

$$\int d^3x \sqrt{g} R = \int d^3x \sqrt{g} \left[\frac{g^{\mu\nu} R}{2} - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.6})$$

(v) *Variação de $\int d^3x \sqrt{g} R^2$*

Utilizando (B.4) e (B.5), encontramos

$$\begin{aligned} \delta \int d^3x \sqrt{g} R^2 &= \int d^3x \sqrt{g} \left[\frac{g^{\mu\nu} R^2}{2} - 2R R^{\mu\nu} - 2\nabla^\mu \nabla^\nu R \right. \\ &\quad \left. + 2g^{\mu\nu} \square R \right] \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

(vi) *Variação de $\int d^3x \sqrt{g} R_{\mu\nu}^2$*

Temos

$$\begin{aligned} \delta \int d^3x \sqrt{g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= \int d^3x \sqrt{g} R_{\rho\sigma}^2 \frac{g^{\mu\nu} 2}{\delta} g_{\mu\nu} + \int d^3x \sqrt{g} 2R^{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} \\ &\quad - \int d^3x \sqrt{g} 2R^{\mu\rho} R_\rho{}^\nu \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int d^3x \sqrt{g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^3x \sqrt{g} \left[-2\nabla_\lambda \nabla^\nu R^{\mu\lambda} + g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu}$$

Contudo, no sistema geodésico no qual estamos trabalhando [33],

$$\nabla_\lambda \nabla^\nu R^{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} - R^{\mu\rho} R_\rho{}^\nu, \quad \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \nabla^\rho R$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int d^3x \sqrt{g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int d^3x \sqrt{g} \left[-\nabla^\mu \nabla^\nu R - 2R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} \right. \\ &\quad \left. + 2R^{\mu\rho} R_{\rho}{}^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \square R + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Com isso, finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \int d^3x \sqrt{g} R_{\mu\nu}^2 &= \int d^3x \sqrt{g} \left[R_{\rho\sigma}^2 \frac{g^{\mu\nu}}{2} - \nabla^\mu \nabla^\nu R - 2R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \square R + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo em (B.1) os valores acima calculados, levando em conta que

$$\mathcal{L}_M \equiv \int d^3x \sqrt{g} \frac{T^{\mu\nu}}{2} \delta g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.10})$$

encontramos as equações de campo para o modelo BHT como sendo

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \frac{1}{m_2^2} \left[\frac{1}{2} R_{\rho\sigma}^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \nabla_\mu \nabla_\nu R - 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \square R + \square R_{\mu\nu} - \frac{3}{16} R^2 g_{\mu\nu} + \frac{3}{4} R R_{\mu\nu} \right] \\ = \frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, e $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein.

B.2 Equações de campo linearizadas no *gauge* de Teyssandier

Agora, de posse das equações de campo para o modelo BHT, podemos encontrar as equações linearizadas. Desprezando os termos quadráticos em R e $R_{\mu\nu}$, além dos produtos $RR_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda}$, a equação (B.11) se torna

$$\left(\frac{2}{\kappa^2} + \frac{2\Box}{\kappa^2 m_2^2}\right) R_{\mu\nu}^{\text{lin}} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\kappa^2} + \frac{\Box}{\kappa^2 m_2^2}\right) \eta_{\mu\nu} R^{\text{lin}} - \frac{1}{2\kappa^2 m_2^2} \partial_\mu \partial_\nu R^{\text{lin}} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (\text{B.12})$$

onde utilizamos as seguintes quantidades linearizadas (em primeira ordem em κ)

$$R_{\mu\nu}^{\text{lin}} = \frac{\kappa}{2} \Box h_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} (\gamma_{\mu\rho, \nu}^\rho + \gamma_{\nu\rho, \mu}^\rho) \quad (\text{B.13})$$

$$R^{\text{lin}} = \frac{\kappa}{2} \Box h - \kappa \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} \quad \text{e} \quad (\text{B.14})$$

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h. \quad (\text{B.15})$$

Ainda podemos reescrever (B.12) como

$$\left(\frac{2}{\kappa^2} + \frac{2\Box}{\kappa^2 m_2^2}\right) \left[R_{\mu\nu}^{\text{lin}} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{\text{lin}} \right] + \frac{1}{2\kappa^2 m_2^2} (\eta_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu) R^{\text{lin}} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \quad (\text{B.16})$$

e, tirando o traço,

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{2}{\kappa^2} + \frac{2\Box}{\kappa^2 m_2^2} \right] R^{\text{lin}} + \frac{1}{\kappa^2 m_2^2} \Box R^{\text{lin}} = \frac{T}{2},$$

podemos reescrever (B.16), com o auxílio de (B.13), como

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\Box}{m_2^2}\right) \left(-\frac{1}{2} \Box h^{\mu\nu} + \frac{1}{4\kappa} \eta^{\mu\nu} R^{\text{lin}}\right) + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\Box}{m_2^2}\right) \partial^\mu \partial_\rho \gamma^{\nu\rho} + \frac{1}{4\kappa m_2^2} \partial^\mu \partial^\nu R^{\text{lin}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\Box}{m_2^2}\right) \partial^\nu \partial_\rho \gamma^{\mu\rho} + \frac{1}{4\kappa m_2^2} \partial^\nu \partial^\mu R^{\text{lin}} \right] = -\frac{\kappa}{4} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} T \right). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Se fizermos

$$\Gamma_\mu \equiv \left(1 + \frac{\Box}{m_2^2}\right) \partial_\rho \gamma^{\mu\rho} + \frac{1}{4\kappa m_2^2} \partial^\mu R^{\text{lin}}, \quad (\text{B.18})$$

a equação (B.17) fica numa forma mais compacta

$$\left(1 + \frac{\square}{m_2^2}\right) \left(-\frac{1}{2}\square h^{\mu\nu} + \frac{1}{4\kappa}\eta^{\mu\nu}R^{\text{lin}}\right) + \frac{1}{2}(\partial^\nu\Gamma^\mu + \partial^\mu\Gamma^\nu) = -\frac{\kappa}{4}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}T\right). \quad (\text{B.19})$$

A grande vantagem de se reescrever a equação (B.17) na forma apresentada em (B.19) é justamente o fato de que é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas no qual Γ_μ se anule, na métrica linearizada [27]. Assim, a equação de campo linearizada pode ser reescrita como

$$(\square + m_2^2)\psi_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right), \quad (\text{B.20})$$

com

$$\psi_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{m_2^2}\left(-\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa}\eta_{\mu\nu}R^{\text{lin}}\right). \quad (\text{B.21})$$

Ou ainda, utilizando a definição acima,

$$(\square + m_2^2)\psi_{\mu\nu} = \square\psi_{\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa}\eta_{\mu\nu}R^{\text{lin}} = -\frac{\kappa}{2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right). \quad (\text{B.22})$$

Note que é possível eliminar o termo em R^{lin} em (B.22) se tomarmos o traço de (B.19) e o somarmos à derivada de (B.18). Rearranjando os termos e utilizando a definição (B.14), encontramos $-\frac{1}{4\kappa}R^{\text{lin}} = \frac{\kappa}{8}T$. Substituindo em (B.22), ficamos com

$$\square\psi_{\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{4}\eta_{\mu\nu}T = -\frac{\kappa}{2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right),$$

ou ainda

$$\square(h_{\mu\nu} - \psi_{\mu\nu}) = \frac{\kappa}{2}(T_{\mu\nu} - T\eta_{\mu\nu}). \quad (\text{B.23})$$

Contudo, a solução das equações de Einstein no *gauge* de De Donder é dada por

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = -\frac{\kappa}{2} (T_{\mu\nu} - T\eta_{\mu\nu}), \text{ com } \partial^\nu \gamma_{\mu\nu}^{(E)} = 0, \quad (\text{B.24})$$

onde $\gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}$ e, portanto, a solução geral das equações de campo, será dada pela combinação dos dois campos

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}^{(E)}. \quad (\text{B.25})$$

B.3 Solução das equações de campo para uma partícula puntual

De posse das equações de campo (B.21) e (B.24), podemos encontrar uma solução geral para $h_{\mu\nu}$, dado por (B.25). Para tanto, consideremos uma partícula puntual de massa M em $\mathbf{r} = 0$, descrita por

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}M\delta^2(\mathbf{0})e \quad (\text{B.26})$$

$$T = T_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}M\delta^2(\mathbf{0}) = M\delta^2(\mathbf{r}). \quad (\text{B.27})$$

No caso estático, temos que (B.21) será

$$\begin{aligned} (-\nabla^2 + m_2^2)\psi_{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2}\eta_{00}T - T_{00} \right) \\ &= (-\nabla^2 + m_2^2)\psi_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa}{4}M\delta^2(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

que, no espaço dos momenta, se torna

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} (\mathbf{k}^2 + m_2^2) \tilde{\psi}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{4}M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{B.29})$$

nos dando

$$\tilde{\psi}_{ij}(\mathbf{k}) = \tilde{\psi}_{00}(\mathbf{k}) = -\frac{\kappa}{4} \frac{M}{(\mathbf{k}^2 + m_2^2)}. \quad (\text{B.30})$$

Resolvendo para $\psi_{00}(\mathbf{r})$, por exemplo,

$$\begin{aligned} \psi_{00}(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\psi}_{00}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[-\frac{\kappa}{4} \frac{M}{(\mathbf{k}^2 + m_2^2)} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\kappa}{4} \int_0^{+\infty} dk k \frac{M}{k^2 + m_2^2} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ikr \cos \theta} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)} \frac{\kappa}{4} \int_0^{+\infty} dk k \frac{M}{k^2 + m_2^2} J_0(kr) = -\frac{\kappa M}{8\pi} K_0(rm_2). \end{aligned}$$

Assim, obtemos finalmente

$$\psi_{00}(\mathbf{r}) = \psi_{ii}(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa M}{8\pi} K_0(rm_2). \quad (\text{B.31})$$

Resolvendo a equação (B.24) também no caso estático,

$$\begin{aligned} -\nabla h_{\mu\nu}^{(\text{E})} &= -\frac{\kappa}{2} (T\eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}) \\ -\nabla h_{\mu\nu}^{(\text{E})} &= \frac{\kappa M}{2} \delta^2 (\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} - \eta_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Notamos que a componente $h_{00}^{(\text{E})}$ é nula, enquanto que, para $h_{ii}^{(\text{E})}$, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{k} k^2 \tilde{h}_{ii}^{(\text{E})} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{\kappa M}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{B.33})$$

e então

$$\tilde{h}_{ii}^{(\text{E})}(\mathbf{k}) = \frac{\kappa M}{2\mathbf{k}^2}. \quad (\text{B.34})$$

Resolvendo a integral acima do mesmo modo que a anterior, encontramos

$$h_{ii}^{(\text{E})} = -\frac{\kappa M}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_0(\epsilon r), \quad (\text{B.35})$$

que, nos dá, para $\epsilon \equiv \frac{1}{r_0}$,

$$h_{ii}^{(\text{E})} = -\frac{\kappa M}{4\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (\text{B.36})$$

onde r_0 é um regulador.

Podemos escrever, finalmente, a solução geral de uma partícula puntual de massa M localizada em $\mathbf{r} = 0$ para $h_{\mu\nu}$ como sendo

$$h_{00} = -\frac{\kappa M}{8\pi} K_0(rm_2) \quad (\text{B.37})$$

$$h_{ii} = -\frac{\kappa M}{8\pi} \left[2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + K_0(rm_2) \right]. \quad (\text{B.38})$$

Um resultado útil para checar a unitariedade de um modelo genérico de gravitação em 3D

Teorema 1. *Se m é a massa de uma partícula física genérica de spin 2 relacionada a um dado modelo gravitacional e k é a troca de momentum correspondente, então*

$$(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2)|_{k^2=m^2} > 0 \quad \text{and} \quad (T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0} = 0.$$

Aqui $T^{\mu\nu}(= T^{\nu\mu})$ é a corrente externa conservada.

Notemos que o conjunto de vetores independentes no espaço dos momenta, $k^\mu \equiv (k^0, \mathbf{k})$, $\tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -\mathbf{k})$, $\epsilon^\mu \equiv (0, \hat{\epsilon})$, onde $\hat{\epsilon}$ é um vetor unitário ortogonal à \mathbf{k} , é uma base adequada para expandirmos quaisquer vetores tridimensionais $V^\mu(k)$. Utilizando esta base, podemos escrever o tensor de corrente simétrico da seguinte maneira

$$T^{\mu\nu} = Ak^\mu k^\nu + B\tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu + C\epsilon^\mu \epsilon^\nu + Dk^{(\mu} \tilde{k}^{\nu)} + Ek^{(\mu} \epsilon^{\nu)} + F\tilde{k}^{(\mu} \epsilon^{\nu)},$$

onde $a^{(\mu} b^{\nu)} \equiv \frac{1}{2}(a^\mu b^\nu + b^\mu a^\nu)$.

A conservação das correntes impõe as seguintes restrições sobre os coeficientes A ,

B , D , E e F :

$$Ak^2 + \frac{D}{2}(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$B(k_0^2 + \mathbf{k}^2) + \frac{D}{2}k^2 = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$Ek^2 + F(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0 \quad (\text{C.3})$$

Das Eqs. (B1) e (B2), obtemos $Ak^4 + B(k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2$, enquanto a Eq. (B3) implica que $E^2 > F^2$. Por outro lado, saturando os índices de $T^{\mu\nu}$ com momenta k_μ , chegamos a uma relação de consistência para os coeficientes A , B e D :

$$Ak^4 + B(k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2 + Dk^2(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Após algumas manipulações algébricas utilizando as equações anteriores, encontramos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2 &= \left[\frac{k^2(A-B)}{\sqrt{2}} - \frac{C}{\sqrt{2}} \right]^2 + \frac{k^2}{2}(E^2 - F^2), \\ T_{\mu\nu}^2 - T^2 &= k^2 \left[\frac{1}{2}(E^2 - F^2) - 2C(A-B) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Portanto,

$$(T_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}T^2)|_{k^2=m^2} > 0 \quad \text{e} \quad (T_{\mu\nu}^2 - T^2)|_{k^2=0} = 0.$$

Parte II

Determinação de Limites para a Massa do Fóton

As únicas partículas livres conhecidas no momento cujas massas de repouso podem ser consideradas exatamente iguais a zero são os fótons e os grávitons; os glúons, ou seja, as partículas de *gauge* da QCD, que se supõe terem massa nula, não são observáveis (fenômeno do confinamento). Apesar de que a atual expansão acelerada do universo poderia ser parcialmente atribuída a um efeito tipo massa do gráviton, existem debates acalorados na literatura sobre a possível existência de uma massa para esta partícula. Este não é caso, porém, no que tange a massa do fóton. De fato, a procura por um valor não nulo para a massa de repouso do fóton tem crescido consideravelmente ao longo do tempo.

Por outro lado, como é bem conhecido, um fóton massivo pode ser acomodado de modo natural dentro do contexto da QED massiva, que nada mais é que uma simples modificação da QED padrão. Além disso, a QED massiva é invariante sob as transformações da relatividade especial. Como a QED massiva pertence à classe dos assim chamados modelos que conservam a corrente [1], ela é renormalizável [2]. Na realidade a eletrodinâmica massiva é, num certo sentido, mais simples teoricamente que a QED padrão. Consequentemente, ela é uma ferramenta bastante adequada no trato da questão concernente a uma possível existência de uma massa de repouso não nula para o fóton.

A possível existência na natureza de um fóton massivo (que suporemos ser descrito pela QED massiva) acarretaria alterações nos valores de resultados físicos bem conhecidos tais como velocidade da luz, campos eletromagnéticos estáticos, e assim por diante. Muitas estimativas — tipo ordem de grandeza — para a massa do fóton baseadas nestas possíveis modificações dos valores de alguns resultados físicos padrões foram feitas nas últimas décadas [3–5]. É importante notar que estas estimativas foram obtidas empregando-se tanto métodos terrestres quanto extraterrestres.

No capítulo que se segue, iremos determinar limites superiores para a massa do fóton por meio de novos enfoques conceituais. Para tanto utilizaremos duas notáveis predições provenientes, respectivamente, da relatividade geral e da QED, a saber, deflexão gravitacional da luz e momento magnético anômalo do elétron, os quais foram confirmados com grande precisão pelos experimentais. Os valores experimentais mais recentes concernentes a estas quantidades serão tomados como entrada de modo a nos fornecer os limites que estamos procurando.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Ignatiev and G. Joshi, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 984.
- [2] D. Boulware, *Ann. Phys.* **56** (1970) 140.
- [3] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43** (1971) 277.
- [4] Liang-Cheng Tu, J. Luo, and G. Gilles, *Rep. Prog. Phys.* **68** (2005) 77.
- [5] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 939.

A Massa do Fóton e a Interferometria de Linha de Base Extensa*

É encontrada uma relação entre a massa do fóton, sua frequência (ν) e o parâmetro de deflexão (γ), determinado pelos experimentais (o qual caracteriza a contribuição da curvatura do espaço para a deflexão gravitacional). Este surpreendente resultado nos permite concluir que o conhecimento dos parâmetros ν e γ é tudo que precisamos para estabelecer limites gravitacionais sobre a massa do fóton. Utilizando como dados de entrada as mais recentes medidas de deflexão de ondas de rádio pelo Sol (obtidas via VLBI), são estimados limites superiores para a massa do fóton.

3.1 Motivação

Com o avanço das técnicas de interferometria que ocorreu nas últimas décadas, uma nova luz foi lançada sobre os fenômenos físicos nos quais efeitos quânticos e gravitacionais estão interligados. Consideremos, por exemplo, o efeito quântico da mudança de fase de nêutrons causado pela sua interação com o campo gravitacional da Terra, o qual foi observado nos experimentos de Colella-Overhauser-Werner (COW) [1] e Bonse-

*VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*)

Wroblewski [2], realizados com interferometria de nêutrons. Estes testes pioneiros têm ajudado a nos convencer de que existem certos experimentos cujos resultados dependem tanto da constante gravitacional quanto da constante de Planck. O fato de que a mecânica quântica e a gravidade não desempenham *simultaneamente* um papel importante na maioria dos experimentos terrestres certamente é responsável pela ideia errada de que ambas não podem estar intimamente ligadas em certas circunstâncias especiais.

Nas últimas quatro décadas os experimentos tipo COW se tornaram mais sofisticados. O último experimento com interferometria de nêutrons [3] relata uma discrepância estatisticamente significativa entre os valores teóricos preditos e os valores experimentalmente medidos para a mudança de fase do nêutron devido à gravidade. Supondo a igualdade da massa inercial e gravitacional para o nêutron, os experimentos mostraram que o fator de fase do nêutron é 1% menor do que o previsto [3], o que indica claramente uma possível violação do princípio de equivalência clássico. À primeira vista, parece que estes últimos experimentos de interferometria estão em conflito com os mais precisos testes do princípio de equivalência clássico, tanto os realizados por meio de interferometria atômica quanto os baseados em pêndulos de torção. Adunas, Rodriguez-Milla e Ahluwalia [4, 5] mostraram, contudo, que cada um dos experimentos anteriormente citados exploram diferentes aspectos da gravidade; e as técnicas experimentais atuais, quando associadas aos dados de neutrinos solares, podem ser capazes de explorar violações do princípio de equivalência clássico devidas à mecânica quântica. Eles também predizem uma violação quântica do princípio de equivalência clássico para a próxima geração de experimentos de interferometria atômica. Na verdade, do ponto de vista operacional, não se pode dizer que, em princípio, para certos sistemas quânticos, exista uma igualdade das massas inercial e gravitacional. Portanto, chegamos à conclusão

de que a mecânica quântica e o princípio de equivalência clássico não podem coexistir pacificamente [6, 7].

Recentemente foi realizado um experimento interessante, não diretamente relacionado às técnicas de interferometria, mas que diz respeito ao fato de que nêutrons podem existir em estados quânticos estacionários formados no campo gravitacional terrestre. Neste experimento, o estado quântico fundamental de nêutrons no campo gravitacional terrestre foi identificado na transmissão vertical de nêutrons entre um espelho horizontal (embaixo) e um detector/espalhador (em cima) [8, 9]. Este resultado motivou Ernest a fazer uma pesquisa cuidadosa sobre auto-estados gravitacionais em campos gravitacionais fracos [10, 11]. Na verdade, apesar de todos os estudos da teoria quântica relacionados a estados atômicos e moleculares, muito pouco tem sido feito para investigar as propriedades dos hipotéticos estados estacionários que deveriam existir em poços de potenciais gravitacionais centrais similares, em particular, àqueles com grandes números quânticos.

Os experimentos anteriores nos mostram claramente que fenômenos físicos nos quais a gravidade (o campo gravitacional terrestre, especificamente) e efeitos quânticos estão mesclados não estão mais além do nosso alcance. Enfatizamos que em todas estas investigações o campo gravitacional da Terra é descrito pela gravitação newtoniana.

Por outro lado, desde sua publicação original em 1915, a teoria da relatividade geral de Einstein continua sendo uma área ativa de pesquisas tanto teóricas quanto experimentais. Atualmente a teoria tem obtido sucesso em interpretar todos os dados reunidos até então [12]. Além disso, entre os chamados *testes clássicos da Relatividade Geral* existe um, a deflexão gravitacional da luz, que tem sido confirmado com uma exatidão cada vez maior. Na verdade, espera-se que uma série de experimentos melhorados utilizando a VLBI aumentará a precisão atual do parâmetro de deflexão γ

em, pelo menos, um fator de 4 [13]. Aliás, o valor atual para γ é de 0.9998 ± 0.0003 (68% de nível de confiança) [13], em acordo com a relatividade geral. Além disso, é de conhecimento geral que a deflexão gravitacional da luz pelo Sol pode ser medida de modo mais preciso utilizando-se comprimentos de onda na faixa de rádio (por meio de técnicas de interferometria) em vez de ondas na frequência do espectro visível (com as técnicas ópticas disponíveis) [14–17].

De fato, atualmente a VLBI é a técnica mais precisa que temos à nossa disposição para medidas de deflexão gravitacional de ondas de rádio [13]. Agora, levando em conta que a busca por limites superiores para a massa do fóton [†] têm aumentado ao longo das últimas décadas [20–22], seria interessante estimar limites gravitacionais para a massa do fóton considerando as medidas mais recentes da deflexão gravitacional de ondas de rádio obtidas por meio da VLBI. Este é, precisamente, o objetivo deste capítulo.

O capítulo é organizado como se segue. Na Seção 3.2 encontramos o ângulo de deflexão sofrido por um fóton massivo no presente contexto enquanto, na Seção 3.3, mostramos que existe um vínculo entre a massa do fóton, sua frequência e o parâmetro de deflexão determinado pelos experimentais (o qual caracteriza a contribuição da curvatura do espaço para a deflexão gravitacional). Partindo deste interessante resultado, limites superiores para a massa do fóton são encontrados na Seção 3.4, considerando como dados as medidas mais recentes da deflexão gravitacional solar de ondas de rádio obtidas via VLBI [13]. Para concluir, discutimos na Seção 3.5 se os limites que

[†]Em todas estas pesquisas, o fóton é descrito pela QED massiva, a qual nada mais é do que a extensão mais simples da QED padrão. Sua lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m^2A_\mu^2 - J^\mu A_\mu, \quad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu}(= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ é o tensor de intensidade do campo, J^μ é a corrente (elétrica) conservada e m é a massa do fóton. Aqui, índices são levantados e abaixados com $\eta^{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$, respectivamente. Na verdade, a QED massiva é teoricamente mais simples do que a teoria padrão [18], além de ser renormalizável [19].

estimamos podem ou não ser melhorados.

Nas nossas convenções $\hbar = c = 1$, e a assinatura da métrica é (+ - - -).

3.2 Combinando Relatividade Geral, QED Massiva e VLBI para limitar gravitacionalmente a massa do fóton

Iniciamos lembrando que a lagrangiana para o campo do fóton massivo acoplado minimamente à gravitação é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{2} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right]. \quad (3.2)$$

Por outro lado, para pequenas flutuações em torno da métrica de Minkowski η , a métrica completa pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$. Aqui G é a constante de Newton. De modo análogo ao que fizemos no Capítulo 2, temos também

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu + \dots. \quad (3.4)$$

e

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{\kappa}{2} h + \frac{\kappa^2}{8} h^2 - \frac{\kappa^2}{4} h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \dots. \quad (3.5)$$

3.2.1 Cálculo da lagrangiana de Interação

A lagrangiana de interação é encontrada substituindo-se (3.3), (3.4) e (3.5) em (3.2). Calculando separadamente cada termo de (3.2) via as mencionadas substituições, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \bullet -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
 -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\eta^{\mu\alpha} - \kappa h^{\mu\alpha})(\eta^{\nu\beta} - \kappa h^{\nu\beta})F_{\alpha\beta} \\
 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\eta^{\mu\alpha}\nu^\beta - \kappa h^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \kappa\eta^{\mu\alpha}h^{\nu\beta})F_{\alpha\beta} \\
 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}(F_\mu^\beta h^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta} + F_\nu^\alpha h^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}(2F_\mu^\beta F_{\alpha\beta})h^{\mu\alpha} \\
 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}h^{\mu\alpha}F_\mu^\beta F_{\alpha\beta}. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu &= \frac{m^2}{2}A_\alpha g^{\mu\alpha} A_\mu = \frac{m^2}{2}A_\alpha(\eta^{\mu\alpha} - \kappa h^{\mu\alpha})A_\mu \\
 &= \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu - \frac{m^2}{2}\kappa A_\alpha A_\mu h^{\mu\alpha}. \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}h^{\mu\alpha}F_\mu^\beta F_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu - \frac{m^2}{2}\kappa h^{\mu\alpha}A_\alpha A_\mu \right] \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right). \tag{3.8}$$

Supondo então que o fóton massivo é espalhado por um campo gravitacional externo fraco (veja a Figura 3.1), chegamos à lagrangiana para a interação em questão, em primeira ordem em κ ,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \left[\eta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\alpha A_\alpha \eta_{\mu\nu} - m^2 A_\mu A_\nu \right]. \quad (3.9)$$

Note que agora os índices são levantados (abaixados) com $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$).

3.2.2 Cálculo da função de vértice

Partindo da lagrangiana (3.9) e expressando os campos A^μ como $A^\mu \propto e^{-ip^\nu x_\nu} \epsilon^\mu$, podemos calcular a função de vértice da interação descrita pela Figura 3.1. Calculando separadamente os termos massivos e os não-massivos, resulta

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2 \times \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \left[\frac{m^2}{2} A^\alpha A_\alpha \eta_{\mu\nu} - m^2 A_\mu A_\nu \right] &= 2 \times \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \left[\frac{m^2}{2} \eta_{\mu\nu} A_\lambda \eta^{\lambda\rho} A_\rho - m^2 A_\mu A_\nu \right] \\ &\Rightarrow m^2 \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [\eta_{\mu\nu} \epsilon_\lambda \eta^{\lambda\rho} \epsilon_\rho - 2\epsilon_\mu \epsilon_\nu] \\ &= m^2 \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} - 2\eta_{\lambda\mu} \eta_{\rho\nu}] \epsilon^\lambda \epsilon^\rho; \end{aligned}$$

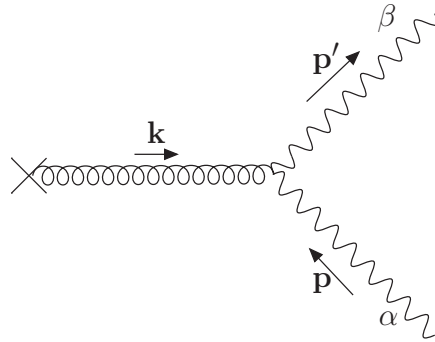


Figura 3.1: Gráfico de Feynman para a interação entre um fóton massivo e um campo gravitacional externo.

- $2 \times \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [\eta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu}] = \kappa h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [\eta^{\alpha\beta} (\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu) (\partial_\nu A_\beta - \partial_\beta A_\nu)]$
 $\Rightarrow -\kappa h_{\text{ext}}^{\mu\nu} [p_\mu p'_\nu \eta_{\alpha\beta} - p_\mu p'_\beta \eta_{\nu\alpha} - p_\alpha p'_\nu \eta_{\mu\beta} + p \cdot p' \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}] \epsilon^\alpha \epsilon^\beta;$

- $2 \times \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right] = -\frac{1}{4} \kappa h_{\text{ext}}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} [(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)] \eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta}$
 $\Rightarrow -\frac{1}{4} \kappa h_{\text{ext}} [p \cdot p' \eta_{\alpha\beta} - p_\alpha p'_\beta - p_\beta p'_\alpha + p \cdot p' \eta_{\alpha\beta}] \epsilon^\alpha \epsilon^\beta$
 $= -\frac{1}{2} \kappa h_{\text{ext}} [p \cdot p' \eta_{\alpha\beta} - p_\alpha p'_\beta] \epsilon^\alpha \epsilon^\beta.$

Juntando os termos acima, encontramos a função de vértice desejada no espaço dos momenta,

$$V_{\alpha\beta}(p, p') = \frac{\kappa}{2} h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \left[(m^2 - p \cdot p') (\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}) + p'_\alpha p_\beta \eta_{\mu\nu} + 2(-p'_\alpha p_\nu \eta_{\mu\beta} - p'_\mu p_\beta \eta_{\nu\alpha} + p'_\mu p_\nu \eta_{\alpha\beta}) \right]. \quad (3.10)$$

Ainda nos resta determinar a forma de $h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k})$. Supondo que o campo gravitacional externo fraco é gerado por uma massa puntual M em $\mathbf{r}=\mathbf{0}$, encontramos imediatamente a expressão para o campo gravitacional externo resolvendo as equações de Einstein linearizadas no *gauge* de De Donder [23]. A expressão resultante é

$$h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa M}{16\pi r} (\eta^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0}). \quad (3.11)$$

Portanto, o campo gravitacional no espaço dos momenta, $h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k})$, é dado por

$$\begin{aligned}
h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{k}) &= \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h_{\text{ext}}^{\mu\nu}(\mathbf{r}) \\
&= \frac{\kappa M}{2\mathbf{k}^2} \left(\frac{\eta^{\mu\nu}}{2} - \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0} \right).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.3 Cálculo da seção de choque diferencial não-polarizada

Agora estamos prontos para calcular a seção de choque diferencial não-polarizada para o processo exibido na Fig. 3.1. Para tanto, relembremos que a expressão para a citada seção de choque é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \sum_{r=1}^3 \sum_{r'=1}^3 \mathcal{M}_{rr'}^2, \tag{3.13}$$

com

$$\mathcal{M}_{rr'} = \epsilon_r^\alpha(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\beta(\mathbf{p}') V_{\alpha\beta}(p, p'), \tag{3.14}$$

onde $\epsilon_r^\alpha(\mathbf{p})$ e $\epsilon_{r'}^\beta(\mathbf{p}')$ são os vetores de polarização para os bósons vetoriais incidentes e espalhados, respectivamente. Estes vetores, por sua vez, satisfazem a relação

$$\sum_{r=1}^3 \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{p}) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}. \tag{3.15}$$

A equação (3.13) para a seção de choque se torna então

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \sum_{r=1}^3 \sum_{r'=1}^3 \epsilon_r^\alpha(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\beta(\mathbf{p}') \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}') V_{\mu\nu}(p, p') V_{\alpha\beta}(p, p') \\
&\quad \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[V_{\alpha\beta}^2 - \frac{p^\nu p'^\beta}{m^2} V_\nu^\alpha V_{\alpha\beta} - \frac{p^\mu p^\alpha}{m^2} V_\mu^\beta V_{\alpha\beta} + \frac{p^\mu p^\alpha p'^\nu p'^\beta}{m^4} V_{\mu\nu} V_{\alpha\beta} \right].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

A conservação do momentum é dada por $\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{p}'$ e como não existe troca de energia com o campo gravitacional externo, $p_0 = p'_0 = E$, o que nos dá também $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$. Novamente, vamos trabalhar cada termo da expressão acima individualmente a fim de encontrar uma relação em termos dos momenta envolvidos.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{p^\mu p^\alpha p'^\nu p'^\beta}{m^4} V_{\mu\nu} V_{\alpha\beta} &= \frac{1}{m^4} [(m^2 - p \cdot p')(2\eta_{0\alpha}\eta_{0\beta} - \eta_{\alpha\beta}) - p'_\alpha p_\beta + m^2 \eta_{\alpha\beta} \\ &\quad + 2(E\eta_{0\alpha}p_\beta + E\eta_{0\beta}p'_\alpha - E^2\eta_{\alpha\beta})] p^\alpha p'^\beta \\ &= 4E^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{p'^\nu p'^\beta}{m^2} V_\nu^\alpha V_{\alpha\beta} &= \frac{p'^\mu p'^\alpha}{m^2} V_\mu^\beta V_{\alpha\beta} \\ &= \left(\frac{V_{\alpha\beta} p'^\beta}{m} \right)^2 \\ &= \left(\frac{2m^2 E \eta_{0\alpha}}{m} \right)^2 = 4m^2 E^2; \end{aligned}$$

$$\bullet \quad V^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} = 2p \cdot p' [(p \cdot p') - 4E^2 - 2m^2] + 5m^4 + 4E^2 m^2 + 8E^4.$$

Substituindo as quantidades anteriores na equação (3.16), obtemos a seção de choque diferencial não-polarizada

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa^2 M}{4\mathbf{k}^2} \right)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \left[3\mathbf{p}^4 + \frac{3}{2}m^4 + 2\mathbf{p}^2 m^2 + 2\mathbf{p}^2 (\mathbf{p}^2 + 2m^2) \cos \theta + \mathbf{p}^4 \cos^2 \theta \right], \quad (3.17)$$

onde θ é o ângulo de espalhamento. Como $\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{p}'$ e $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^2 &= (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 \\ &= \mathbf{p}'^2 + \mathbf{p}^2 - 2|\mathbf{p}'||\mathbf{p}| \cos \theta \\ &= 2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Utilizando a relação acima e lembrando que $\kappa^2 = 32\pi G$, (3.17) se torna

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{MG}{\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta)} \right)^2 \frac{2}{3} \left[3\mathbf{p}^4 + \frac{3}{2}m^4 + 2\mathbf{p}^2m^2 + 2\mathbf{p}^2(\mathbf{p}^2 + 2m^2) \cos \theta + \mathbf{p}^4 \cos^2 \theta \right].$$

Como $\mathbf{p}^2 = E^2 - m^2$, para ângulos pequenos ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{M^2G^2}{(2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} \right) \frac{1}{(E^2 - m^2)^2} [4E^4 - 4m^2E^2 + m^4] \\ &= \left(\frac{M^2G^2}{4 \frac{\theta^4}{16}} \right) \frac{4E^4 \left(1 - \frac{m^2}{2E^2}\right)^2}{E^4 \left(1 - \frac{m^2}{E^2}\right)^2} \\ &= \frac{16M^2G^2}{\theta^4} \left[\frac{1 - \frac{m^2}{2E^2}}{1 - \frac{m^2}{E^2}} \right]^2, \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde E é a energia do fóton espalhado.

A seção de choque diferencial acima pode ser relacionada a uma trajetória clássica com um parâmetro de impacto b através da relação

$$bdb = -\frac{d\sigma}{d\Omega} \theta d\theta. \tag{3.19}$$

Das Eqs. (3.18) e (3.19), chegamos à conclusão de que

$$\theta = \frac{4MG}{b} \left(\frac{1 - \frac{m^2}{2E^2}}{1 - \frac{m^2}{E^2}} \right), \quad (3.20)$$

a qual, no limite ultrarelativístico, i.e., $E \gg m$, leva a

$$\theta = \frac{4MG}{b} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} \right),$$

ou seja,

$$\theta = \theta_E \left(1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) \quad (3.21)$$

$$= \theta_E \left(1 + \frac{m^2}{8\pi^2\nu^2} \right), \quad (3.22)$$

onde ν é a frequência do fóton massivo e $\theta_E \equiv \frac{4MG}{b}$.

3.3 Encontrando uma relação entre massa, frequência e parâmetro de deflexão para o fóton massivo

Antes de continuarmos, seguem alguns comentários pertinentes.

- Recentemente foi mostrado que as seções de choque diferenciais não-polarizadas para o espalhamento de diferentes partículas quânticas são dependentes do spin, o que está em desacordo com o princípio da equivalência clássico [7] (veja a Tabela 1). Este resultado levanta uma importante questão: Por que o campo gravitacional percebe o spin? Porque temos a presença de uma troca de momentum (\mathbf{k}) não nula no espalhamento, que é sensível à estrutura interna (spin) da partícula.

Não obstante, se escolhermos duas expressões quaisquer daquelas listadas na Tabela 1, notamos que a diferença entre elas é sempre extremamente pequena para ângulos de deflexão típicos. Para demonstrar isto para partículas sem massa, por exemplo, estudamos o comportamento de

$$\frac{\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{s=0}} \equiv \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_s - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{s=0}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{s=0}}, \quad (3.23)$$

como uma função do ângulo de espalhamento θ (veja a Fig. 2). É trivial mostrar que para pequenos ângulos a expressão anterior se reduz a

$$\frac{\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{s=0}} \approx -\frac{s\theta^2}{2}. \quad (3.24)$$

Para um ângulo de deflexão típico, digamos $\theta \sim 10^{-6}$, encontramos $\frac{\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{s=0}} \sim 10^{-12}$. A detecção de um efeito tão pequeno está, claramente, além da tecnologia atual. Conseqüentemente, para estes minúsculos ângulos de deflexão, as seções de choque não serão afetadas pelo spin das partículas.

- De modo a recuperar os resultados geométricos de Einstein a partir da Tabela 1, devemos ter $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$; em outras palavras, no limite não-trivial de pequenas trocas de momentum, o qual corresponde a um limite de ângulo pequeno não-trivial já que $|\mathbf{k}| = 2|\mathbf{p}|\sin\frac{\theta}{2}$, as partículas massivas (não massivas) se comportam da mesma maneira, independentemente do spin. De fato, quando o spin é “desligado”, i.e, para pequenos ângulos, obtemos da Tabela 1 que para $m = 0$,

m	s	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$
0	0	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2$
$\neq 0$	0	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2$
0	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$
$\neq 0$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\lambda}{4} \left(1 + \lambda + 3 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]$
0	1	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}$
$\neq 0$	1	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^4 \frac{\theta}{2} - \frac{\lambda}{3} \left(1 - \frac{3\lambda}{4} - 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]$
0	2	$\left(\frac{GM}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 \left(\sin^8 \frac{\theta}{2} + \cos^8 \frac{\theta}{2} \right)$

Tabela 3.1: Seções de choque diferenciais não-polarizadas para o espalhamento de diferentes partículas quânticas por um campo gravitacional fraco externo gerado por uma partícula puntual estática de massa M . Aqui m é a massa da partícula, s o spin, θ o ângulo de espalhamento e $\lambda \equiv \frac{m^2}{\mathbf{p}^2} = \frac{1-\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2}$, com \mathbf{v} e \mathbf{p} sendo a velocidade e o 3-momento, nesta ordem, da partícula incidente.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{16G^2 M^2}{\theta^4}, \quad (3.25)$$

enquanto para $m \neq 0$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{16G^2 M^2}{\theta^4} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2. \quad (3.26)$$

Utilizando a Eq. (3.18) concluimos que para $m = 0$,

$$\theta \approx \frac{4GM}{b}, \quad (3.27)$$

enquanto para $m \neq 0$,

$$\theta \approx \frac{4GM}{b} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right). \quad (3.28)$$

A primeira equação nos dá o ângulo de deflexão gravitacional para uma partícula sem massa — um resultado obtido por Einstein há muito tempo; enquanto a segunda coincide com a previsão da relatividade geral para a deflexão de uma partícula-teste massiva clássica por um campo gravitacional externo fraco [24]. Vale notar que as Eqs. (3.21) e (3.28) são exatamente a mesma. Resumidamente, para ângulos pequenos os resultados da Tabela 1 não apenas se reduzem àqueles previstos pela teoria geométrica de Einstein mas eles também concordam com o princípio de equivalência clássico.

- À primeira vista parece que a Eq. (3.22) prediz um ângulo de deflexão dispersivo para fótons massivos. Na verdade, esta é uma falsa impressão; ainda mais, é simples mostrar que a Eq. (3.22) pode ser reescrita como

$$\theta = \theta_E \left(\frac{3 - v^2}{2} \right). \quad (3.29)$$

Após estas importantes digressões, retornemos à análise da Eq. (3.22). O primeiro termo na expressão (3.22) coincide com aquele obtido por Einstein em 1916, resolvendo

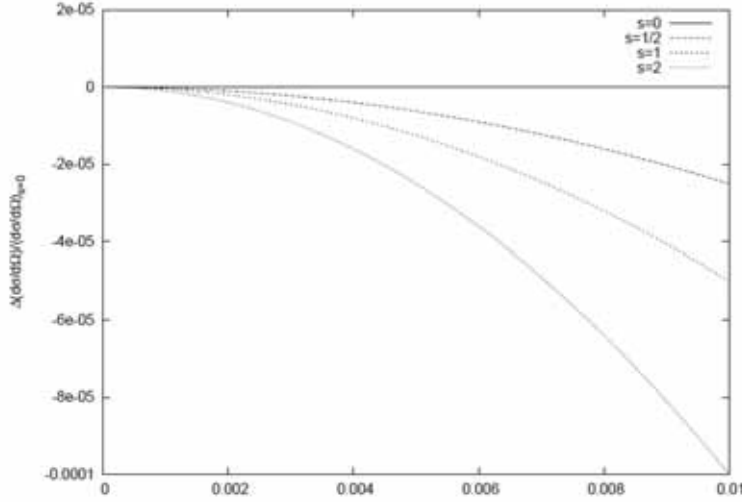


Figura 3.2: $\frac{\Delta(\frac{d\sigma}{d\Omega})}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{s=0}}$ como função do ângulo de espalhamento θ .

a equação da propagação da luz no campo gravitacional de um corpo estático [25], enquanto o segundo termo é a correção mais importante para a massa m do fóton massivo.

Por outro lado, o ângulo do desvio gravitacional determinado por grupos experimentais é geralmente expresso através da relação [26]

$$\theta_{\text{exp}} = \frac{1 + \gamma}{2} \theta_E, \quad (3.30)$$

onde γ é o parâmetro de deflexão, precisa e inequivocamente determinado pelos experimentais medindo a deflexão de radiação eletromagnética pelo campo do Sol.

Das Eqs. (3.22) e (3.30), obtemos

$$m < 2\pi\nu\sqrt{|1 - \gamma|}. \quad (3.31)$$

Este surpreendente resultado claramente mostra que existe um vínculo entre a massa do fóton e os parâmetros γ e ν . Além disso, nos diz que o conhecimento destes parâmetros é tudo que precisamos saber para estabelecer limites superiores para a massa do fóton [27, 28].

3.4 Encontrando limites gravitacionais superiores para a massa do fóton

Agora estamos prontos para encontrar limites gravitacionais superiores para a massa do fóton. Para tanto, faremos uso de medidas recentes da deflexão gravitacional solar de ondas de rádio encontradas por Fomalont *et al.* [13] utilizando a VLBI. As soluções para γ obtidas por meio destas medidas, assim como os limites correspondentes para a massa do fóton que estimamos utilizando a Eq. (3.31), estão organizadas na Tabela 2.

De modo a determinar o melhor valor de $(\gamma - 1)$ pelos resultados experimentais, os autores citados anteriormente minimizaram a seguinte expressão

$$\chi_k^2 = \frac{1}{k} \sum_{d,i} \left(\frac{P_d(i) - 0.5(\gamma - 1)D_d(i)}{\sigma_d(i)} \right)^2, \quad (3.32)$$

onde $P_d(i)$ e $\sigma_d(i)$ são as medidas de deslocamento de posição e o erro estimado, nesta ordem. O termo $D_d(i)$ é a média da predição do desvio gravitacional previsto pela relatividade geral, tomada em cada sessão de observação. Os σ_d 's e χ_k^2 's diretamente relacionados às soluções para γ são exibidos na Tabela 2.

Na Tabela 2, os valores relacionados à 43 GHz (sem efeitos de corona) é o mais preciso, já que possui o menor valor para χ^2 . Isto se deve ao atenuamento de alguns efeitos da corona solar, e o aumento da estimativa dos erros na posição da fonte. Os dois valores para 43 GHz sem a correção dos efeitos de corona mostram as alterações

Tipo de Solução	$(\gamma - 1) \times 10^{-4}$	$\sigma_d \times 10^{-4}$	χ_k^2	$m \times 10^{-12}(MeV)$
43 <i>GHz</i> data (sem efeitos de corona)	-2.4	3.2	0.9	2.8
43 <i>GHz</i>	-1.0	2.6	2.2	1.8
43 <i>GHz</i> - Oct05	-3.2	2.8	1.1	3.2
23 <i>GHz</i> - Oct05	-2.0	2.4	4.7	1.3

Tabela 3.2: Limites superiores para a massa do fóton estimados utilizando as soluções para γ encontradas por Fomalont *et al.* [13].

nas medidas realizadas muito próximas ao Sol na seção de Oct05; a primeira destas soluções foi encontrada utilizando dados obtidos durante seções que duraram vários dias, enquanto a segunda é baseada em dados obtidos no intervalo de um único dia de observação. Finalmente, os valores para 23 *GHz* sugere que a refração devido à corona (a qual é quatro vezes maior do que a medida em 43 *GHz*), domina a sensibilidade do experimento em 23 *GHz*.

É importante notar que Fomalont *et al.* [13] utilizaram para os resultados que obtiveram no artigo uma média das quatro soluções exibidas na Tabela 2, obtendo $\gamma = 0.9998 \pm 0.0003$. Deste resultado – e assumindo que um fóton massivo passando próximo à borda solar possui uma frequência $\nu = 43GHz$, o que é perfeitamente justificável já que os dados deles são, em sua maioria, obtidos em observações de 43*GHz*, onde os efeitos de refração da corona solar são desprezíveis além de 3 graus do Sol – nós obtemos outro limite gravitacional para a massa do fóton, a saber, $m \sim 2.5 \times 10^{-12} MeV$.

Devido a razões já discutidas, chegamos à conclusão de que entre os limites gravitacionais para a massa do fóton que encontramos, o mais confiável é $m \sim 2.8 \times 10^{-12} MeV$. Além disso, o γ associado foi determinado, por um lado, utilizando uma única frequência; por outro lado, ele possui o melhor valor para χ^2 . Ademais, os dados utilizados para o cálculo de γ vêm principalmente das observações cujos efeitos de refração da corona solar são desprezíveis.

Chamamos atenção ao fato de que a Eq. (3.20) pode também ser deduzida, à *luz Einstein*, procurando uma solução aproximada para equação de movimento da geodésica de uma partícula teste massiva no campo de Schwarzschild. Adotando esta abordagem, uma expressão para o ângulo de deflexão de uma partícula pelo Sol foi obtido até a ordem de $\left(\frac{GM}{b}\right)^3$ na Ref. [24]. Este tipo de dedução, contudo, é muito trabalhosa. Por outro lado, Golowich, Gribosky e Pal [29], invés da usual abordagem geométrica, consideraram o fenômeno da curvatura da luz como um problema de espalhamento quântico. Este tratamento, que não só é instrutivo como também relativamente simples quando o campo gravitacional é fraco, permitiu-lhes facilmente obter uma expressão para a deflexão gravitacional de partículas massivas até uma ordem $\frac{GM}{b}$. Um resultado idêntico foi encontrado por Mohanty, Nieves e Pal [30], utilizando um método desenvolvido originalmente por Ohanian e Ruffini [23].

Seguem alguns comentários sobre a validade do resultado que obtivemos e como os mesmos podem ser melhorados num futuro próximo.

- De acordo com a relatividade geral, os fótons não apenas são defletidos mas também sofrem um atraso devido à curvatura do espaço-tempo produzida por qualquer massa. Além disso, o desvio e o atraso da luz são proporcionais à $\gamma + 1$. Conseqüentemente, técnicas utilizadas para medir tal atraso podem também ser empregadas para encontrar limites para a massa do fóton. É interessante notar que há alguns anos, Bertotti, Iess e Tortora [15] relataram uma medida do deslocamento de frequência de fótons (na faixa de rádio) trocados com a espaçonave Cassini quando eles passavam próximos ao Sol, levando a um resultado para γ que concorda com as previsões da relatividade geral com uma sensibilidade que se aproxima a um nível no qual, teoricamente, desvios são esperados em

alguns modelos cosmológicos [31, 32].

- A Eq. (3.20) foi deduzida assumindo que o campo responsável pela deflexão do fóton é um campo gravitacional estático. Contudo, como sabemos, tanto o Sol quanto os planetas não estão em repouso no Sistema Solar. Na verdade, eles estão se movendo em relação ao baricentro do Sistema Solar e o observador. Este movimento certamente introduz correções dependentes da velocidade para a equação relativística da deflexão gravitacional da luz. Como consequência, a correção à deflexão gravitacional induzida pelos movimentos citados anteriormente devem estar correlacionadas com a correção da massa do fóton exibida na Eq. (3.22). Este fato nos leva a colocar uma questão importante: Atualmente, a tecnologia existente é sensível o suficiente para detectar estes pequenos efeitos da relatividade geral causados pela dependência temporal do campo gravitacional? Kopeikin [33] afirma que “futuros experimentos de deflexão de raios de luz [34] tais como o BepiColombo (com ondas de rádio)[35], ASTROD (com laser) [36] e LATOR [37] irão, definitivamente, alcançar a precisão suficiente para medir $\bar{\gamma}_{\text{PPN}}$, $\bar{\beta}_{\text{PPN}}$ e $\bar{\delta}_{\text{PPN}}$, e compará-los às correções pós-newtonianas para o atraso e deflexão causadas pelo movimento de corpos massivos no Sistema Solar [38]”. Aqui, o desvio da relatividade geral é descrito através da comparação dos parâmetros PPN[‡] $\bar{\gamma}_{\text{PPN}} \equiv \gamma_{\text{PPN}} - 1$, $\bar{\beta}_{\text{PPN}} \equiv \beta_{\text{PPN}} - 1$ e $\bar{\delta}_{\text{PPN}} \equiv \delta_{\text{PPN}} - 1$. Alternativamente, pode-se mostrar que, utilizando a equação para o pós-PPN (post-post-Newtonian) que dita o atraso temporal, Δt , a qual foi obtida por Kopeikin através do acoplamento dos parâmetros PPN com os termos dependentes da velocidade, para experimentos gravitacionais com a luz se propagando no

[‡]post-Newtonian parameters

campo do Sol,

$$\Delta t \approx (1 + \bar{\Gamma}) \ln \left(\frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} \right), \quad (3.33)$$

com

$$\bar{\Gamma} \approx \bar{\gamma}_{\text{PPN}} - 2\beta_{\odot}, \quad (3.34)$$

onde β_{\odot} ($= 5.3 \times 10^{-8}$) é a velocidade do Sol (em unidades naturais) em relação ao baricentro do Sistema Solar, r_{12} é a coordenada da distância entre os pontos de emissão e observação, r_1 , r_2 são as distâncias radiais dos pontos de emissão e observação, respectivamente. Agora, notando que as missões espaciais LATOR e ASTROD irão medir o parâmetro $\bar{\gamma}_{\text{PPN}}$ com uma precisão aproximada de 10^{-9} [36, 37], chegamos à conclusão de que, num futuro próximo, correções ao caso estático do atraso de tempo explicitamente dependentes da velocidade devido ao campo gravitacional solar deverá, aparentemente, ser levado em conta. Respondamos à questão levantada acima. Para simplificar vamos nos restringir a medidas de desvio da luz pelo Sol obtidas por VLBI. Atualmente os grupos experimentais determinaram os parâmetros $\bar{\gamma}_{\text{PPN}}$ utilizando técnicas de VLBI com uma precisão de 10^{-4} [13]. Portanto, a citada correção dependente da velocidade é muito pequena e pode ser desprezada na determinação de $\bar{\gamma}_{\text{PPN}}$. Na verdade, a detecção de um efeito tão pequeno está além da tecnologia atual.

- Hoje em dia, como já dissemos, a VLBI é a técnica mais precisa que temos à nossa disposição para medir a deflexão gravitacional de ondas de rádio regularmente [14, 16, 17].
- Medidas da deflexão da luz com técnicas ópticas podem vir a se tornarem mais

vantajosas para determinar o parâmetro γ num futuro próximo [39].

3.5 Discussão

Os limites que encontramos para a massa do fóton estão entre aqueles publicados pelo Particle Data Group, mas certamente são consideravelmente maiores do que outros encontrados por lá ($m < 1 \times 10^{-18} eV$) [40]. Eles são, todavia, comparáveis a outros limites existentes [20–22]. Vamos, então, discutir se um limite melhor para a massa do fóton pode ser obtido utilizando a Eq. (3.31). Em primeiro lugar, se as deflexões medidas utilizando VLBI puderem ser feitas com uma precisão maior, o valor de $\sqrt{|1 - \gamma|}$ poderia ser reduzido, dando como resultado uma melhor estimativa gravitacional. De acordo com Fomalont *et al.* [13], uma série de experimentos projetados com a VLBI poderiam aumentar a precisão de futuras medidas em pelo menos um fator de 4. Em segundo lugar, se as medidas de deflexão puderem ser obtidas em frequências menores, mantendo o valor do parâmetro de deflexão γ fixo, o limite gravitacional será melhorado em proporção direta à frequência. Este ponto, contudo, é muito delicado. Na verdade, como já mencionamos anteriormente, até agora os melhores resultados obtidos para a deflexão gravitacional via VLBI são aqueles advindos principalmente de frequências em $43GHz$, onde os efeitos da corona solar são desprezíveis além de 3 graus da borda do Sol. Contudo, a menor frequência utilizada pelos rádio-astrônomos é de $2GHz$. Infelizmente, as medidas realizadas nesta frequência são menos confiáveis devido aos efeitos de refração na corona, que é inversamente proporcional ao quadrado do comprimento de onda utilizado. Na verdade, os rádio-astrônomos utilizam em seus experimentos uma mistura de diferentes frequências mas as contribuições mais significativas vêm, em geral, de $\sim 43GHz$. A possibilidade de melhorar os limites gravitacionais para a massa

do fóton, neste caso, é bem limitada.

Enfatizamos que, até então, apenas duas tentativas de limitar a massa do fóton utilizando medidas de deflexão gravitacional foram feitas [41, 42]. Infelizmente, estas estimativas não são muito confiáveis pois em ambas os valores do parâmetro de deflexão γ utilizados foram superestimados, enquanto os valores da frequência foram subestimados. Na verdade, as frequências utilizadas nas estimativas citadas estão na vizinhança da menor frequência medida pelos rádio-astrônomos ($\approx 2GHz$).

É importante notar que as estimativas gravitacionais sobre a massa do fóton que obtivemos, como a maioria das estimativas feitas com o objetivo de limitar a massa do fóton que estão disponíveis na literatura, são essencialmente argumentos de ordem de magnitude. Todavia, nossos esforços neste trabalho são baseados em novas abordagens conceituais ao assunto; além disso, no cálculo dos limites, utilizamos como dados de entrada os melhores resultados disponíveis atualmente.

Para concluir, observamos que recentemente encontramos um limite quântico para a massa do fóton ($m \sim 1.6 \times 10^{-10} MeV$) baseado no cálculo do momento magnético anômalo do elétron no contexto da eletrodinâmica de Proca [43, 44]. Dentre todas as referências sobre o assunto que consultamos, esta parece ser a primeira vez que um limite quântico para a massa do fóton é estimado[§]. Vale notar que este limite quântico é uma ordem de magnitude maior do que o limite obtido através da deflexão gravitacional.

Abaixo listamos, para efeito de comparação, alguns valores de limites para a massa do fóton utilizando métodos de interferometria baseados na dispersão da luz.

[§]Note que o limite para a massa do fóton obtido por Boulware e Deser [45] via o efeito Aharonov-Bohm (o qual está presente na eletrodinâmica massiva) é um limite semiclássico; nosso limite, ao contrário daquele obtido por Boulware-Deser, se baseia em verdadeiros efeitos (de loop) quânticos.

Autor (ano)	Tipo de medida	Limites para m (MeV)
Froome (1958)	Interferometria de ondas de rádio	2.4×10^{-13}
Warner <i>et al.</i> (1969)	Observações do pulsar na Nebulosa do Caranguejo	2.9×10^{-14}
Bay <i>et al.</i> (1972) [46]	Emissão de pulsar	1.7×10^{-19}
Brown <i>et al.</i> (1973)	Pulsos de radiação curtos	7.9×10^{-7}
Schaefer (1999)	Explosões de raios gama (GRB980703)	2.4×10^{-17}
	Explosões de raios gama (GRB930229)	3.4×10^{-12}

Tabela 3.3: Alguns limites para massa do fóton obtidos utilizando medidas de dispersão da velocidade da luz em diferentes frequências do espectro eletromagnético (em ordem cronológica).

Referências Bibliográficas

- [1] R. Colella, A. Overhauser and S. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **34** 1472 (1975).
- [2] U. Bonse and T. Wroblewski, *Phys. Rev. Lett.* **51** 1401 (1983).
- [3] K. Littrell, B. Allman and S. Werner, *Phys. Rev. A* **56** 1767 (1997).
- [4] G. Adunas, E. Rodriguez-Milla and D. V. Ahluwalia-Khalilova, *Gen. Relativ. Grav. vit.* **33** 183 (2001).
- [5] G. Adunas, E. Rodriguez-Milla and D. V. Ahluwalia-Khalilova, *Phys. Lett. B* **485** 215 (2000).
- [6] A. Accioly and R. Paszko, *Phys. Rev. D* **78** 064002 (2008).
- [7] A. Accioly and R. Paszko, *Adv. Studies Theor. Phys.* **3** 65 (2009).
- [8] V. Nesvizhevsky *et al.*, *Nature* **415** 297 (2002).
- [9] V. Nesvizhevsky *et al.*, *Phys. Rev. D* **67** 102002 (2003).
- [10] A. Ernest, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 115207 (2009).
- [11] A. Ernest, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 115208 (2009).

- [12] S. Turyshev, *Usp. Fiz. Nauk* **179** 3 (2009).
- [13] E. Fomalont *et al.*, *Astrophys. J.* **699** 1395 (2009).
- [14] D. Robertson, W. Carter and W. Dillenger, *Nature* **349** 768 (1991).
- [15] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, *Nature* **425** 374 (2003).
- [16] S. Shapiro *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92** 121101 (2005).
- [17] S. Lambert and C. Le Poncin-Lafitte, *Astron. Astrophys.* **499** 331 (2009).
- [18] A. Ignatiev and G. Joshi, *Phys. Rev. D* **53** 984 (1996).
- [19] D. Boulware, *Ann. Phys.* **56** 140 (1970).
- [20] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43** 277 (1971).
- [21] Liang-Cheng Tu, J. Luo, and G. Gilles, *Rep. Prog. Phys.* **68** 77 (2005).
- [22] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **82** 939 (2010).
- [23] H. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime* (Norton, New York, 1994), 2nd ed.
- [24] A. Accioly and S. Ragusa, *Class. Quant. Grav.* **19** 5429 (2002) [Erratum *Class. Quant. Grav.* **20** 4963 (2003)].
- [25] A. Einstein, *Ann. Phys.* **49** 769 (1916).
- [26] C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993).

- [27] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Lett. A* **374** 3806 (2010). *This essay was awarded an “honorable mention” in the 2010 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.*
- [28] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Int. J. Mod. Phys. D* **19** 2393 (2010).
- [29] E. Golowich, P. Gribovsky, and P. Pal, *Am. J. Phys.* **58**(7), 688 (1990).
- [30] S. Mohanty, J. Nieves, and P. Pal, *Phys. Rev. D* **58**, 093007 (1998).
- [31] T. Damour and A.M. Polyakov, *Nucl. Phys. B* **423**, 532 (1994).
- [32] T. Damour, F. Piazza, and G. Veneziano, *Phys. Rev. D* **66**, 046007 (2002).
- [33] S. Kopeikin, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **399**, 1539 (2009).
- [34] S. Kopeikin and B. Mashhoon, *Phys. Rev. D* **65**, 064025 (2002).
- [35] A. Milani *et al.*, *Phys. Rev. D* **66**, 082001 (2002).
- [36] W.-T. Ni, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **166**, 153 (2007).
- [37] S. Turyshev, M. Shao and K. Nordtvedt, *Class. Quantum Grav.* **21**, 2773 (2004).
- [38] J. Plowman and R. Hellings, *Class. Quantum Grav.* **23**, 309 (2006).
- [39] S. Klioner, P. Seidelmann, and M. Soffel, *International Astronomical Union Symposium* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010), Vol. 261.
- [40] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **86** 010001 (2012).
- [41] D. Lowenthal, *Phys. Rev. D* **8** 2349 (1973).
- [42] A. Accioly and R. Paszko, *Phys. Rev. D* **69** 107501 (2004).

- [43] A. Accioly, J. Helayël-Neto and E. Scatena, *Phys. Rev. D* **82** 065026 (2010).
- [44] A. Accioly, J. Helayël-Neto, R. Turcati, J. Morais and E. Scatena, *Classical Quantum Gravity* **27** 205010 (2010).
- [45] D. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **63** 2319 (1989).
- [46] Z. Bay and J. White, *Phys. Rev. D* **5**, 796 (1972).

Epílogo

Como mencionamos na introdução, este trabalho tinha dois propósitos especiais:

- Tentar compreender melhor a conjectura em voga sobre a incompatibilidade entre unitariedade e renormalizabilidade em teorias de ordem mais alta.
- Encontrar limites para a massa do fóton que na fossem baseados somente em cálculos de ordem de grandeza, mas sim em resultados provenientes de cálculos rigorosos realizados no contexto da QFT e onde fossem utilizados como dados de entrada as mais recentes medidas experimentais.

Será que os objetivos foram atingidos? Antes de responder a esta indagação é necessário analisar o que os resultados obtidos até aqui nos dizem sobre os dois tópicos previamente mencionados.

Iniciemos pela conjectura sobre as teorias com derivadas de ordem superior.

No caso específico da versão atual da eletrodinâmica de Lee e Wick foi mostrado em detalhe que esta teria é **não-unitária**, porém **renormalizável**. Por sua vez, Lee e Wick tentaram contornar o problema da não unitariedade introduzindo modificações *ad hoc* nas regras usuais da teoria quântica de campos. Entre estas modificações engenhosas, porém inortodoxas, a assim chamada prescrição de Lee e Wick para a continuação

analítica das amplitudes foi alvo de críticas acerbas [1, 2]. Apesar de altamente instigantes e bem formuladas, as prescrições de Lee e Wick não foram ainda incorporadas ao ferramental da física teórica. Assim sendo, é mais prudente, por ora, nos basearmos na teoria quântica de campos ortodoxa que nos assevera que a eletrodinâmica de Lee e Wick é não-unitária. É importante notar, por outro lado, que nossos cálculos mostraram claramente que os efeitos devidos aos termos de ordem superior só se manifestam em distâncias muito pequenas, como se esperava. Portanto, fora desta diminuta região, não há diferença sensível entre as eletrodinâmicas de Maxwell e a de Lee e Wick. Em resumo, dentro do esquema padrão da teoria de campos, a eletrodinâmica de Lee e Wick é renormalizável mas não-unitária.

No que tange à gravitação massiva em 3D, verificamos que ela é a única teoria de ordem superior cuja versão linearizada é **unitária**. Será ela também renormalizável? Se assim for, a conjectura sobre a incompatibilidade entre unitariedade e renormalizabilidade em teorias de ordem superior cai por terra. Esta questão, como todas que envolvem renormalização de teorias gravitacionais, é sempre polêmica. Em 2009 Oda [3] “mostrou” que esta teoria era renormalizável e unitária. Bastante recentemente, no entanto, Muneyuki e Ohta [4, 5] demonstraram que as teorias de gravitação com derivadas de ordem superior em 3D são renormalizáveis, porém aquelas teorias que demandam uma relação especial entre seus coeficientes, incluindo a nova gravitação massiva, não o são. Conseqüentemente, a gravitação massiva em 3D é **unitária** mas **não-renormalizável** .

Analisemos então a questão da determinação de limites clássicos e quânticos para a massa do fóton. Como mostramos no texto, os efeitos devidos a uma massa de repouso não nula para o fóton podem ser incorporados no eletromagnetismo de uma maneira bastante simples via a QED massiva. Neste espírito, duas interessantes implicações

decorrentes da possível existência de um fóton massivo na natureza, a saber, pequenas alterações nos valores conhecidos tanto do momento magnético do elétron como da deflexão gravitacional da radiação eletromagnética, foram utilizados para estabelecer limites superiores para a massa do fóton. Os limites obtidos não são tão bons quanto aqueles recentemente estimados, sendo porém comparáveis a outros limites existentes e trazem novas contribuições para a questão da restrição da massa do fóton. Podemos responder agora, com total segurança, que os objetivos principais do trabalho foram plenamente atingidos. Para finalizar esta discussão gostaríamos de externar nossa opinião sobre a questão da conjectura relativa às teorias de ordem superior, ou seja, sobre a questão da renormalizabilidade versus unitariedade. Acreditamos, baseado nos dois exemplos acima, que presentemente é impossível conciliar numa mesma teoria de ordem superior os quesitos unitariedade e renormalizabilidade. A discussão sobre a renormalizabilidade da teoria de gravitação de ordem superior em 4D apresentada por Stelle em 1977 [6], que sem dúvida continua sendo o modelo ideal para quem deseja se aventurar neste importante campo de pesquisa, corrobora a nossa crença.

Para finalizar, vamos comentar rapidamente as investigações que seriam, de certa maneira, uma continuação natural deste trabalho. Como vimos que não podemos acomodar simultaneamente monopólos de Dirac e transformações de dualidade na eletrodinâmica de Lee e Wick e nem em uma versão estendida da mesma, seria interessante investigar a possibilidade desta coexistência em eletrodinâmicas com violação da simetria de Lorentz, tais como a de Meyers-Pospelov [7] e a de Gambini-Pullin [8]. Outro ponto interessante seria verificar, usando como paradigma o trabalho de Stelle [6], a questão da renormalizabilidade da teoria de gravitação massiva em 3D.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Cutkosky *etal.*, Nucl. Phys. **B12**, 281 (1969).
- [2] D. Boulware and D. Gross , Nucl. Phys. **B233**, 1 (1984).
- [3] I. Oda, J. High Energy Phys. 05 (2009) 064.
- [4] K. Muneyuki and N. Ohta, Phys. Rev. D **85**, 101501 (R) (2012).
- [5] N. Ohta, Classical Quantum Gravity **29**, 015002 (2012).
- [6] K. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [7] R. Meyers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003).
- [8] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999).