



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/11

Um estudo sobre sincronização no modelo de Kuramoto

Paulo Fernando Coimbra Tilles

Orientador

Gerson Francisco

Co-orientador

Fernando Fagundes Ferreira

Junho de 2011

Agradecimentos

Primeiro, e mais importante, agradeço a minha família. Obrigado pelo apoio.

Entre os amigos que foram e que ficaram, deixo um agradecimento especial ao Carlos Senise (Caco), Rodrigo Bufalo (Zé), Fernando Gardim (Fezão), David Barbato (Copperfield) e Leandro Ymai (Leandrão). Espero que tenhamos muito mais histórias para contar.

Agradeço a todos os professores que tive nesse período de IFT, mas em especial gostaria de expressar meu respeito e agradecimento ao Prof. Diógenes Galetti. Todos os seus comentários e críticas sempre foram extremamente bem fundamentados e honestos.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao meu Prof. Gerson Francisco pela orientação e pela liberdade cedida para seguir meu próprio caminho, ao Prof. Fernando Fagundes Ferreira, não só pela orientação, mas por estar presente sempre que eu precisei, e a Prof. Hilda Cerdeira pelas muitas discussões frutíferas e incontáveis risadas que partilhamos. É um prazer poder considerá-los como amigos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este texto é dedicado ao estudo do fenômeno de sincronização no modelo de Kuramoto. Na primeira parte o foco reside na formulação original do modelo no limite termodinâmico de infinitos osciladores e na descrição da transição para a sincronização e estabilidade das soluções em sistemas com número finito de elementos. Mostra-se também que o acoplamento crítico de sincronização K_s é determinado por um par de equações, e a solução para um caso especial com simetria na configuração de frequências naturais é obtida de forma perturbativa.

A segunda parte do texto é focada na descrição do modelo de Kuramoto com acoplamento local em 1 dimensão com condições periódicas de contorno. A estrutura de árvores de sincronização média é descrita, onde ocorrem transições entre regimes caóticos e periódicos dos movimentos individuais dos osciladores. A iminência da sincronização é explorada através uma série de aproximações que mostram o comportamento crítico característico de uma bifurcação sela-nó responsável pela sincronização. A partir da definição de uma função na região sincronizada é mostrado que o acoplamento crítico de sincronização é obtido exatamente através da minimização dessa função. Através de uma sequência de exemplos de configurações com simetria é mostrado que a região sincronizada do sistema apresenta uma estrutura de múltiplas soluções estáveis, sendo a sua caracterização, análise de estabilidade e descrição das bifurcações realizada para o caso com frequências aleatórias arbitrariamente distribuídas.

Palavras Chaves: Sincronização; osciladores de fase; modelo de Kuramoto; sistemas de tamanho finito e interação local; bifurcações; multiestabilidade.

Áreas do conhecimento: Sistemas dinâmicos não lineares; física estatística; caos e formação de padrão.

Abstract

This text is devoted to the study of the synchronization phenomena in the Kuramoto model. In its first part the focus lies on its original formulation of infinitely many oscillators and on the description of the synchronization transition and solutions' stability for systems with a finite number of elements. It is shown that a pair of equations characterize the critical synchronization coupling K_s , and the solution for a special case with symmetry on its natural frequencies configuration is obtained in a perturbatively way.

The second part of the text is focused on the 1-dimensional Kuramoto model with periodic boundary conditions. The synchronization tree structure is described, where it is observed several transitions between chaotic and periodic regimes among the individual oscillators. The onset on synchronization is explored through a series of approximations that show the characteristic critical behavior of a saddle node bifurcation, which is responsible for the synchronization. By defining a function on the synchronized region it is shown that the critical synchronization coupling is exactly determined by the function's minimization process. Through a sequence of examples with symmetry on its configurations it is shown that the synchronized region presents a structure of multiple stable solutions. Its complete characterization, stability analysis and bifurcations' description is carried through for the case with randomly distributed natural frequencies.

Sumário

1	Introdução	i
1.1	Breve contexto histórico sobre sincronização	i
1.2	Sincronização	iii
1.3	Descrição de fase e modelo de Kuramoto	iv
1.4	Limite termodinâmico e efeitos de tamanho finito	v
1.5	Acoplamento local	vi
1.5.1	Trabalhos iniciais e redes regulares d -dimensionais	vi
1.5.2	Acoplamento dependente da distância e estados Quimera	viii
1.6	Modelo de Kuramoto unidimensional	ix
1.7	Panorama sobre o texto	x
2	Osciladores autônomos, dinâmica de fase e sincronização	1
2.1	Dinâmica de fase	2
2.2	Travamento de fase e sincronização	5
2.3	Osciladores fracamente não lineares	7
2.3.1	Oscilador livre	7
2.3.2	Acoplamento de 2 osciladores	9
3	Modelo de Kuramoto: acoplamento global	13
3.1	Análise de Kuramoto	14
3.2	Análise de estabilidade linear de Strogatz e Mirollo	17
3.2.1	Estabilidade do estado incoerente	19
3.3	Efeitos de tamanho finito na região de sincronização	24
3.3.1	Estabilidade das soluções na região sincronizada e determinação de K_s	24
3.3.2	Duas frequências naturais	28
3.3.3	Frequências naturais igualmente espaçadas e limite termodinâmico	29
4	Condições periódicas de contorno em 1 dimensão: modelo de Kuramoto localmente acoplado (LCKM)	33
4.1	Dinâmica de acoplamento fraco e árvore de sincronização	34
4.2	Iminência da sincronização	42
4.3	Método de multiplicadores de Lagrange para determinação do acoplamento crítico	46

5	Região síncrona do modelo de Kuramoto localmente acoplado	48
5.1	Cadeia de osciladores	49
5.2	Condições periódicas de contorno: efeitos de simetria	52
5.2.1	Primeiro caso não trivial: $N=3$	53
5.2.2	$N=4$ com simetria especular	58
5.2.3	Doas frequências naturais	62
5.2.4	Simetria especular	72
5.3	Frequências naturais arbitrariamente distribuídas	81
5.3.1	Estabilidade das soluções e bacias de atração	84
5.3.2	Conexão com a cadeia de osciladores	90
6	Conclusões	93
	Referências bibliográficas	95

Capítulo 1

Introdução

1.1 Breve contexto histórico sobre sincronização

O primeiro relato sobre o fenômeno de sincronização data do século XVII quando o cientista Christiaan Huygens observava o movimento de dois relógios de pêndulo pendurados em um suporte comum (barra) e notou que eles balançavam em perfeita sincronia. Intrigado com esse fenômeno Huygens realizou uma série de testes envolvendo perturbações no ritmo dos relógios, obtendo sempre o mesmo resultado final: após um intervalo de tempo eles sempre retornavam ao seu movimento rítmico original. Após um longo período investigando esse comportamento Huygens resumiu suas descobertas teóricas e experimentais em um livro de memórias [1] onde ele forneceu uma descrição detalhada sobre o movimento dos relógios* e uma explicação qualitativa sobre o efeito da sincronização mútua, onde o movimento rítmico dos relógios era causado pelo movimento imperceptível da barra.

Na metade do século XIX Lord Rayleigh descreveu o aparecimento de sincronização em sistemas acústicos [3] onde dois tubos de órgão musical dispostos lado a lado influenciavam-se mutuamente, gerando um efeito sonoro uníssono. Em casos extremos de interferência ele também observou a extinção das vibrações sonoras, quando o acoplamento resulta em supressão das oscilações individuais.

Efeitos de sincronização também foram descobertos em organismos vivos no século XVIII, quando Jean-Jacques Dortous de Mairan notou que as folhas de plantas de feijão guisado movem-se para cima e para baixo em conformidade com o ciclo diário de luz e escuridão. No entanto esse movimento era persistente também em um ambiente isolado com ausência de luz, mantendo o ciclo de aproximadamente 24 horas. Vários estudos mais recentes mostraram a existência de relógios biológicos internos que regulam o ritmo circadiano dos organismos vivos. Na ausência de influências externas esses relógios diferem levemente do período de 24 horas, mas em condições normais eles apresentam-se sincronizados com ciclo de dia e noite.

*Huygens foi o inventor do relógio de pêndulo e grande parte do seu trabalho foi dedicado ao aumento da precisão e estabilidade dos relógios. Além do próprio livro de memórias por ele publicado [1], uma descrição mais detalhada sobre seu trabalho pode ser encontrada no livro de Pikovsky *et al.* [2].

O primeiro estudo teórico sobre sincronização foi realizado por Appleton [4] e van der Pol [5], que através de uma extensão dos experimentos realizados por Eccles e Vincent envolvendo geradores de triodo[†] (do inglês *triode generator*), mostraram que a frequência de um gerador pode ser sincronizada através de um sinal externo fraco com uma frequência levemente diferente.

Parafraseando Strogatz e Stewart [6], o que começou com uma observação fortuita de Huygens deu início a toda uma área de pesquisa multidisciplinar de osciladores acoplados que apresentam movimentos síncronos resultantes da interação mútua, independentes da natureza particular dos osciladores. Gradualmente ficou claro que diversos efeitos aparentemente desconexos obedeciam leis universais, e através do esforço de cientistas de diversas áreas (físicos, matemáticos, biólogos, entre outros) em anos de pesquisa a descrição de sincronização pôde ser descrita no contexto de uma teoria unificada.

Como exemplos de sistemas físicos que apresentam sincronização via acoplamento de osciladores é possível citar osciladores de micro-ondas [7], arranjos de lasers [8, 9] e junções de Josephson supercondutoras [10, 11]. Entre sistemas biológicos, conjuntos de vagalumes piscando simultaneamente [12] e emissões uníssonas de grupos de grilos [13] ilustram exemplos de osciladores não confinados no mesmo organismo.

Em especial, o estudo do comportamento síncrono de neurônios constitui uma importante área de pesquisa em neurociência [14]. O sistema nervoso central contém uma grande quantidade de neurônios interconectados a formar um circuito neuronal. Cada neurônio recebe e processa informação vinda de um conjunto de neurônios e depois retransmite o sinal para outros neurônios do circuito. A sinalização ocorre de forma oscilatória e a sincronização parece ser um dos mecanismos responsáveis pelo processamento de informações e comunicação entre diferentes áreas do cérebro, como em células marcapasso circadianas no núcleo supraquiasmático do cérebro [15], no reconhecimento de padrão visual onde a sincronização de reações oscilatórias em neurônios do córtex visual de gatos parece conectar padrões em diferentes partes do campo visual [16], na coordenação do controle motor via sincronização da atividade oscilatória no córtex sensorio-motor [17] ou em doenças neurológicas como epilepsia [18] e tremores patológicos [19].

Atualmente o campo de estudo de sincronização corresponde a uma vasta área de pesquisa, extremamente multidisciplinar. Introduções mais gerais sobre o fenômeno podem ser encontradas no livro de divulgação de Steven Strogatz [20], no artigo de divulgação de Strogatz e Stewart [6] e no artigo de revisão de Leon Glass [21], sendo esses dois últimos focados na descrição de osciladores biológicos. Uma descrição matemática mais completa sobre sincronização e as suas diversas frentes de pesquisa é descrita nos livros de Pikovsky *et al.* [2] e Balanov *et al.* [22].

[†]Dispositivo elétrico baseado em um tubo de vácuo que produz corrente elétrica alternada, com frequência de oscilação depende das características dos elementos que compõem o gerador.

1.2 Sincronização

Sincronização é um fenômeno coletivo definido como o ajuste entre ritmos (escalas de tempo) de processos oscilatórios devido à interação [2]. Embora todo processo que demonstre um certo grau de repetição possa ser considerado um oscilador, nem todo oscilador apresenta um tempo característico próprio de oscilação. Assim na descrição de sincronização os sistemas considerados devem ser capazes de se auto sustentar e apresentar oscilações estáveis quando submetidos à pequenas perturbações.

Oscilações auto-sustentáveis podem exibir várias formas de ritmos, desde ondas senoidais até sequências de pulsos. A quantificação do processo rítmico é realizada em termos do período T em que o processo se repete, sendo a frequência característica definida como o número de ciclos de oscilação que ocorrem em uma unidade de tempo. Como a frequência de oscilação de cada objeto sofre alterações quando submetidas à influências externas, a descrição de sincronização é realizada através da comparação entre a frequência resultante do processo de interação e a frequência característica ω do sistema quando isolado, denominada frequência natural.

A interação entre mais de um objeto é descrita em termos de um acoplamento, cuja intensidade determina o nível de proximidade entre as diferentes frequências resultantes dos osciladores. Embora em sistemas reais nem sempre seja possível determinar essa quantidade, na descrição abstrata desses sistemas, i.e., modelagem matemática, a descrição da interação é realizada em termos de um parâmetro de acoplamento K . Sob essa definição um sistema composto de dois osciladores autônomos é descrito em termos das frequências resultantes individuais,

$$\bar{\omega}_1(K) = \omega_1 + f_{2,1}(K, \omega_1, \omega_2), \quad \bar{\omega}_2(K) = \omega_2 + f_{1,2}(K, \omega_1, \omega_2), \quad (1.1)$$

onde $f_{i,j}(K, \omega_1, \omega_2)$ descreve o efeito da interação do oscilador i no oscilador j , dependente do acoplamento e das frequências naturais. Na ausência de interação ($K = 0$) as oscilações correspondem às frequências naturais, portanto $f_{i,j} = 0$. O efeito da interação afeta a frequência demonstrada por cada oscilador, e o processo de sincronização é caracterizado quando a frequência de dessintonização $\Delta\omega = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2$ é nula, ou seja, quando os osciladores apresentam a mesma frequência de oscilação $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \Omega$,

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2 + f_{1,2}(K, \omega_1, \omega_2) + f_{2,1}(K, \omega_1, \omega_2)}{2}. \quad (1.2)$$

Atualmente a pesquisa em fenômenos de sincronização é focada na descrição dos mecanismos responsáveis pelo comportamento coerente entre os membros de um sistema oscilatório. Mesmo quando os processos internos responsáveis pelo movimento rítmico são oriundos de naturezas físicas distintas, o objetivo da análise consiste na compreensão da sincronização em termos de poucos princípios básicos.

1.3 Descrição de fase e modelo de Kuramoto

A descrição de oscilações auto-sustentáveis é realizada através da teoria de sistemas dinâmicos [23], onde a evolução temporal do sistema é descrita por uma trajetória no espaço abstrato constituído de todas as variáveis dinâmicas do sistema, denominado espaço de fase. Como sistemas oscilatórios exibem comportamento periódico, no estado estacionário o sistema retorna ao mesmo ponto após um período T , formando uma curva fechada. Uma trajetória fechada isolada no espaço de fase tal que todas as trajetórias vizinhas formam espirais na direção da curva é denominada ciclo limite.

De uma forma geral o movimento de um oscilador auto-sustentável na proximidade de um ciclo limite pode ser separado em duas escalas de tempo: uma escala de tempo rápida (do inglês *fast timescale*) que representa a relaxação do oscilador quando ele alcança o ciclo limite, e uma escala mais lenta que descreve o movimento ao longo do ciclo. Cada ponto no ciclo pode ser mapeado em uma única variável θ , denominada fase, que descreve a evolução temporal do sistema no regime estacionário. Ela é definida de forma a crescer uniformemente no tempo, sendo o período T de cada rotação no ciclo representado pelo ganho de 2π .

Influências externas em um oscilador são representadas por perturbações que deslocam um ponto situado no ciclo limite para alguma região no espaço espaço de fase. Se essas perturbações forem pequenas as perturbações perpendiculares ao ciclo podem ser desconsideradas devido a escala de tempo rápida e a dinâmica da interação pode ser aproximada somente pelas perturbações resultantes na fase.

Sob essas premissas Arthur Winfree [24] formulou um modelo de N osciladores de ciclo limite quase idênticos com interação fraca. Assumindo que a sensibilidade de um oscilador ao ritmo coletivo seja determinado por uma função $Z(\theta)$ e a sua contribuição seja especificada por uma função $X(\theta)$, a dinâmica do sistema é caracteriza pelas equações

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + \left[\sum_{m=1}^N X(\theta_m) \right] Z(\theta_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

onde θ_n e $\omega_n = 2\pi/T_n$ são a fase e frequência natural do oscilador n . Entre os seus principais resultados, Winfree observou que os osciladores poderiam sincronizar sob condições de acoplamento intenso e dessintonização suficientemente pequena entre os osciladores, e quando o intervalo de frequências naturais fosse grande o suficiente para não permitir a sincronização a incoerência do movimento entre os osciladores persistia até um limiar, quando um grupo de osciladores realizavam uma transição abrupta para um estado sincronizado.

Intrigado com os resultados obtidos por Winfree, Yoshiki Kuramoto começou a trabalhar com sincronização coletiva. Usando as mesmas hipóteses propostas por Winfree, através de um intenso tratamento matemático ele conseguiu provar que a dinâmica de longo termo desses sistemas poderia ser resumida em um conjunto de equações universais [25]. Sob uma série de hipóteses para simplificar o problema e permitir um tratamento analítico Kuramoto obteve o

conjunto de equações

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + \frac{K}{N} \sum_{m=1}^N \sin(\theta_m - \theta_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

que a ele permitiu não só descrever a sincronização como uma transição de fase mas também determinar analiticamente o valor do acoplamento crítico K_c onde os osciladores começam a apresentar movimento coerente [26]. O sistema descrito pelas equações (1.4) ficou conhecido como o modelo de Kuramoto, e foi extensivamente estudado como um paradigma sobre sincronização. Os textos de revisão de Strogatz [27] e Acebrón *et al.* [28] fornecem uma descrição detalhada sobre o modelo e suas diversas ramificações e aplicações.

1.4 Limite termodinâmico e efeitos de tamanho finito

A maioria dos trabalhos iniciais foram realizados sob as mesmas hipóteses assumidas por Kuramoto de um número infinito de osciladores completamente conexos, o que permite realizar uma abordagem estatística do sistema. O método consiste em definir uma densidade de probabilidade cuja evolução temporal é descrita por uma equação de Fokker-Planck não linear. Entre as principais contribuições encontram-se o trabalho de Strogatz e Mirollo [29] que descreveram a transição para o regime sincronizado através de uma bifurcação onde o estado incoerente perde a estabilidade, e os trabalhos de Bonilla *et al.* [30], Acebrón e Bonilla [31] e Acebrón *et al.* [32], que estenderam os resultados obtidos por Strogatz e Mirollo, válidos no caso em que as frequências naturais são geradas a partir de uma distribuição de probabilidades simétrica, considerando distribuições de frequências assimétricas e multimodais. Através de uma análise de multiescala assintótica eles descobriram uma série de fenômenos como sincronização periódica supercrítica, bi-estabilidade e histerese.

Um problema com equações cinéticas que descrevam o comportamento de infinitos elementos é sempre o dos efeitos de um sistema com tamanho finito, ou mais especificamente no caso do modelo de Kuramoto a influência do número finito de osciladores nos estados parcialmente sincronizados e na transição para o regime sincronizado.

O primeiro trabalho envolvendo a descrição de um conjunto finito de osciladores data da década de 80, quando Ermentrout [33] obteve o acoplamento crítico em que todos os osciladores aparecem com travamento de fase. Os argumentos utilizados no artigo são válidos no limite de infinitos osciladores, sendo baseados nas condições de existência do estado travado e não na estabilidade dos mesmos. Ainda na década de 80 Daido [34, 35, 36] observou a presença de divergências do tipo lei de potência na iminência da transição em K_c , com expoentes críticos que dependem da forma como o limiar é atingido.

Na década de 90 van Hemmen e Wreszinski [37] foram os primeiros a descrever a estabilidade das soluções, quando eles construíram uma função de Lyapunov para provar que o estado de travamento de fase é estável para valores de acoplamento suficientemente grandes e que uma população finita com vários osciladores de Kuramoto atingiria um estado estacionário no limite

$t \rightarrow \infty$. Outra contribuição importante dessa década é devida a Pikovsky e Ruffo [38], que analisaram o caso com frequências naturais idênticas sujeitas a um ruído aditivo e obtiveram um lei de escala diferente da obtida por Daido, mostrando como o sistema pode ser descrito por uma forma normal (equação de Stuart-Landau com ruído).

O problema da descrição da estabilidade das soluções só foi resolvido em 2005 por Mirollo e Strogatz [39], que descreveram rigorosamente o espectro de autovalores do sistema com tamanho finito e frequências naturais arbitrariamente distribuídas. Além de determinar completamente a estabilidade das soluções em termos dos travamentos das diferenças de fase eles mostraram a existência de um autovalor nulo, caracterizando a existência de uma bifurcação sela-nó no acoplamento crítico de sincronização K_s , onde os osciladores apresentam sincronização completa com $\dot{\theta}_n = 0$. A partir dos resultados de Mirollo e Strogatz, Diego Pazó [40] analisou o caso de frequências naturais geradas por uma distribuição uniforme. Ele obteve a dependência do parâmetro de ordem na região imediatamente acima de K_s e mostrou como um arranjo de frequências naturais para N finito (frequências naturais igualmente espaçadas) converge para o limite termodinâmico, demonstrando que nesse caso existe a equivalência entre K_c e K_s .

Analisando o regime de poucos osciladores, Maistrenko *et al.* [41, 42, 43] já havia observado a existência da bifurcação sela-nó no ponto crítico K_s , porém realmente interessantes foram obtidos sobre o comportamento temporal dos osciladores. Em um intervalo finito de valores de K acima da bifurcação de sincronização foi observada a existência de fluxos[‡] de Cherry [44, 45] (do inglês *Cherry flows*), que são fluxos em um toro bidimensional dotado de dois pontos de equilíbrio (uma sela e um nó estável) e trajetórias periódicas. Na região anterior à sincronização, para $N \geq 4$, o sistema apresenta atratores caóticos, criados a partir da destruição de toro invariante bidimensional [47].

1.5 Acoplamento local

Uma descrição mais realística de sistemas físicos é obtida termos de interações locais e (ou) de alcance finito, no entanto esses sistemas apresentam um nível de complexidade muito superior, e as técnicas desenvolvidas para o caso de infinitos osciladores (ou mesmo para um número finito completamente conexo) raramente são aplicáveis a esses sistemas. Na sequência vamos fazer uma pequena excursão sobre alguns dos principais trabalhos nesse contexto, detalhando alguns dos principais problemas encontrados.

1.5.1 Trabalhos iniciais e redes regulares d -dimensionais

A primeira abordagem para tratar sistemas com interação local data do final da década de 80 pelo grupo do Kuramoto (Sakaguchi *et al.* [48]), que consideraram o caso em que os osciladores

[‡]O termo *Cherry flows* é uma homenagem ao cientista australiano Thomas Macfarland Cherry, que foi o primeiro a estudar alguns exemplos desse fluxo em toros [46].

são definidos em uma rede d -dimensional com interação somente entre os primeiros vizinhos,

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + K \sum_{(n,m)} \sin(\theta_m - \theta_n), \quad (1.5)$$

onde (n, m) denota os primeiros vizinhos do oscilador n e ω_n são as frequências naturais distribuídas a partir de uma função de distribuição de probabilidades $g(\omega)$. Através de argumentos heurísticos eles mostraram que nenhum movimento coerente é possível, no limite $N \rightarrow \infty$, para um valor finito de acoplamento K quando a dimensão da rede satisfaz $d \leq 2$.

Na mesma linha de pesquisa inicial, Strogatz e Mirollo [49, 50] analisaram a probabilidade de travamento de fase em redes de osciladores. No caso unidimensional (cadeia linear), eles mostraram que no limite em que o número de osciladores cresce infinitamente a probabilidade tende a zero, mas se a intensidade do acoplamento crescer com a raiz quadrada de N , a probabilidade tende a uma distribuição de Kolmogorov-Smirnov. No entanto, para redes com dimensões maiores do que a unitária a probabilidade de travamento de fase tende a zero exponencialmente, implicando que no limite $N \rightarrow \infty$ não existe um valor finito de K capaz de sincronizar o sistema.

Os resultados obtidos por Mirollo e Strogatz devem ser tomados com cuidado visto que as hipóteses por eles assumidas não correspondem a um caso completamente geral, não excluindo completamente a possibilidade de existência de coerência macroscópica[§]. Como mencionado por Acebrón *et al.* [28], esses resultados não aparentam contradizer os resultados obtidos por Hiroaki Daido [51], que através de uma análise de grupo de renormalização determinou a existência de uma dimensão crítica inferior de coerência macroscópica para uma classe de distribuições de probabilidades com $g(\omega) \sim |\omega|^{-\alpha-1}$.

Apesar das aparentes discrepâncias entre os resultados e do fato que tanto a existência como a determinação de uma dimensão crítica inferior de coerência ainda permanecem em aberto, um avanço importante obtido nessa abordagem inicial foi a observação de uma característica geral de sistemas com interação de alcance finito: a existência de diferentes regimes de sincronização. Enquanto no modelo globalmente conexo (para infinitos osciladores) é observada uma transição de fase que descreve o momento em que os osciladores começam a ganhar coerência, sistemas com interação local apresentam estruturas de ondas viajantes, sincronização parcial (formação de clusters com mesma frequência média) e travamento de fase com sincronização plena $\dot{\theta}_n = 0$ de todos os osciladores, sendo o ganho de coerência entre os osciladores nesses dois últimos casos uma consequência da sincronização. No entanto a análise em termos da coerência dos osciladores é validada pelo fato que ela só pode ocorrer se os osciladores apresentarem algum grau de sincronização[¶].

Essa diferenciação dos regimes de sincronização dependendo da topologia de acoplamento do sistema influenciou uma série de trabalhos mais recentes que procuraram compreender

[§]Mais detalhes sobre o assunto pode ser encontrado no artigo de revisão de Acebrón *et al.* [28].

[¶]Essa afirmativa pode ser resumida em uma máxima: coerência entre as fases dos osciladores só pode ser alcançada via sincronização, porém a existência de um estado sincronizado não exige que as fases estejam dispostas coerentemente.

os mecanismos que levam ao surgimento de cada regime. Ainda no contexto de redes d -dimensionais, Hong *et al.* [52] observaram a existência de dois tipos de sincronização dependendo da dimensão da rede: para $d > 4$ a sincronização ocorre com quebra da simetria de fase, onde os osciladores sincronizam simultaneamente, como no caso de campo médio através de uma transição espontânea (similar a uma transição de fase); para $d \leq 4$ eles mostraram que a dimensão da rede impede uma transição espontânea, de forma que a sincronização ocorre através da agregação de domínios sincronizados compactos (clusterização). No caso bidimensional, Lee *et al.* [53] observaram a existência de um limiar K_E , anterior ao acoplamento crítico K_s , responsável pela formação de um cluster macroscópico sincronizado com a presença de vórtices movendo-se em trajetórias fixas na fronteira do cluster.

1.5.2 Acoplamento dependente da distância e estados Quimera

Uma extensão natural do modelo de Kuramoto em redes regulares consiste em considerar efeitos de diferentes topologias de conexão^{||} e de acoplamento dependente da distância entre os osciladores, configurando interações de curto e médio alcance. Em um caráter geral a complexidade desses tipos de cenários dificulta em muito uma análise exata (ou mesmo aproximada) do sistema. Porém uma forma de se considerar esses efeitos e ainda manter um nível baixo de complexidade consiste em assumir configurações simplificadas da topologia e da interação. Nessa linha de pesquisa podemos citar os trabalhos de Lumer and Huberman [57, 58] que consideraram uma estrutura de acoplamento hierárquica definida em uma árvore ultramétrica, Radicchi e Meyer-Ortmanns [59, 60] que analisaram a sincronização do modelo de Kuramoto em árvores de Cayley, e o trabalho de Tsimring *et al.* [61] que consideraram uma cadeia de osciladores com acoplamento entre os L primeiros vizinhos.

Um caso intermediário entre o longo alcance das interações globais e o curto alcance da interação entre vizinhos próximos é caracterizado por um acoplamento com decaimento do tipo de lei de potência $r^{-\alpha}$, onde r denota a distância mútua entre os osciladores. Esse modelo foi inicialmente estudado em 1 dimensão por Rogers and Wille [62], que mostraram que a transição para o estado sincronizado só pode ocorrer para K finito com $\alpha < 2$ quando a interação é normalizada. O valor crítico $\alpha_c = 3/2$ foi obtido mais tarde por Chowdhury and Cross [63]. Porém um resultado realmente interessante foi obtido por Marodi *et al.* [64], que analisaram o sistema definido em uma rede regular d -dimensional com interação não normalizada. Eles observaram a existência de uma transição no tamanho N da população de osciladores para $\alpha < d$, quando para um tamanho acima de um limiar N_c sempre existe sincronização, independente do valor da constante de acoplamento K . Recentemente Uchida [65] desenvolveu uma teoria de perturbação sistemática para calcular o comportamento do parâmetro de ordem e das

^{||}Embora o modelo de Kuramoto tenha sido extensamente estudado no contexto de redes complexas, como definidas por Albert e Barabási [54] e Boccaletti *et al.* [55], esse tópico encontra-se muito fora do contexto dessa tese. Para o leitor que tiver interesse em se aprofundar nessa área, o artigo de revisão de Arenas *et al.* [56] contém um capítulo dedicado somente a esse tópico.

funções de correlação, e conseguiu mostrar para $\alpha \leq d$ o sistema exibe uma transição abrupta de sincronização, como no caso de campo médio.

No contexto de acoplamento não local, um resultado realmente surpreendente foi obtido por Kuramoto e Battogtokh [66]. Ao considerar um anel de osciladores idênticos e interação decadente com a distância, eles observaram a existência de uma solução estável em que os osciladores aparecem separados em dois domínios coexistentes: um composto de osciladores em movimento coerente com travamento de fase, e o outro com osciladores incoerentes e dessincronizados. Esse tipo de comportamento nunca havia sido observado para osciladores idênticos, e devido a forma como os dois tipos de comportamentos dinâmicos aparentemente incompatíveis coexistem temporalmente ele ficou conhecido como estado Quimera**.

Uma série de trabalhos envolvendo estados Quimera foram realizados no contexto do modelo de Kuramoto. Entre eles podemos citar soluções analíticas obtidas por Abrams *et al.* [67, 68, 69], generalização feita por Carlo Laing [70] para osciladores com frequências naturais aleatórias e a descrição do caso bidimensional realizada por Shima e Kuramoto [71]. Mas possivelmente a ampliação dessa área recente de pesquisa seja resultado do trabalho de Omel'chenko *et al.* [72], que mostraram o aparecimento natural desses estados em uma rede de osciladores acoplados com estimulação retroalimentária retardada, quando esses estados aparecem naturalmente na transição incoerência-coerência.

Uma característica importante dos estados Chimera no contexto do modelo de Kuramoto é a dependência das condições iniciais. Enquanto todos os trabalhos anteriores envolvendo o modelo de Kuramoto caracterizavam a região de sincronização do sistema como contendo apenas um ponto fixo estável, a descoberta dos estados Chimera corresponde à primeira configuração do sistema descoberta que apresenta biestabilidade: esse tipo de estado só é acessado a partir de uma pequena região do espaço de fase, sendo o conjunto complementar responsável pela sincronização plena dos osciladores. A única descrição de multiestabilidade no modelo de Kuramoto não envolvendo esse tipo de estado é devida à Maistrenko *et al.* [73], que consideraram o modelo sob a presença de plasticidade sináptica^{††} para descrever dinâmicas neurais.

1.6 Modelo de Kuramoto unidimensional

Em uma forma de tentar captar os efeitos mais complexos apresentados no contexto de interações locais, Zheng *et al.* [76, 77] consideraram o modelo de Kuramoto descrito em 1 dimensão com condições periódicas de contorno, que devido à sua configuração mais simples permitiu não só descrever a sincronização coletiva mas também realizar uma análise microscópica

**A denominação de estado Quimera foi cunhada por Strogatz, sendo inspirada na criatura mitológica com cabeça de leão, corpo de bode e rabo de serpente. No entanto o próprio Strogatz [67] menciona que atualmente a palavra é usada para indicar algo composto de partes incongruentes ou algo que aparenta ser altamente improvável.

^{††}Plasticidade sináptica foi primeiramente proposta por Hebb [74] como um mecanismo de aprendizado e memorização. Ele postulou que conforme um neurônio influencia a atividade de outro, a conexão entre eles é potencializada. Mais detalhes podem ser encontrados no livro *Encyclopedia of Neuroscience* [75] e referências internas.

dos comportamentos individuais dos osciladores. Eles mostraram a existência de uma árvore de sincronização, onde o acoplamento entre primeiros vizinhos proporciona a existência de clusters de sincronização média na região anterior à sincronização plena. Através da análise temporal dos osciladores eles observaram a existência de uma série de transições entre regimes caóticos e periódicos de oscilação, sendo que na iminência da sincronização o sistema apresentava um comportamento crítico característico de uma bifurcação sela-nó.

Posteriormente alguns trabalhos mais detalhados foram realizados por El-Nashar *et al.*, incluindo a investigação dos mecanismos responsáveis pela sincronização média nos clusters [78] e pela transição para o regime sincronizado [79]. A questão da determinação do acoplamento crítico de sincronização foi atacada por Muruganandam *et al.* [80], que desenvolveram um algoritmo computacional baseado no método dos multiplicadores de Lagrange, obtendo uma excelente aproximação com os valores observados através de simulação.

A dependência do acoplamento crítico com o número de osciladores foi analisada numericamente por El-Nashar e Cerdeira [81], que consideraram as frequências naturais obtidas a partir de uma distribuição de probabilidades gaussiana. Eles observaram que, diferentemente do caso unidimensional sem condições periódicas de contorno, o escalamento $K_s \propto N^\alpha$ do acoplamento crítico apresenta um parâmetro $\alpha < 1/2$. Através de argumentos heurísticos eles concluíram que a diferença observada era devido à mudança da topologia, o que poderia sugerir uma estrutura subjacente mais complexa nesse sistema.

1.7 Panorama sobre o texto

A idéia de uma introdução longa e descritiva de alguns dos diversos trabalhos realizados no contexto do modelo de Kuramoto foi concebida para introduzir o leitor a uma série de fenômenos extremamente complexos decorrentes da interação de simples elementos oscilantes, descritos apenas pelas interações entre suas respectivas fases. Ela serve não só como uma preparação para os resultados obtidos ao longo da tese como uma indicação direta da continuidade da pesquisa aqui desenvolvida.

O texto é dividido em duas partes: a primeira consiste na descrição do modelo de Kuramoto na sua formulação original (limite termodinâmico) e dos efeitos de tamanho finito do sistema, sendo analisadas a transição para o regime sincronizado e a estabilidade das soluções; na segunda parte o modelo em 1 dimensão é analisado, ilustrando o comportamento do sistema na região de acoplamento fraco e iminência da sincronização; a parte principal do texto reside no penúltimo capítulo, que descreve o método de determinação do acoplamento crítico de sincronização e a estrutura multiestável acima de K_s , correspondendo a contribuição original do autor.

A organização dos capítulos foi realizada da seguinte maneira:

- Capítulo 2: Descrição simples de como se realiza a aproximação de fase para sistemas oscilatórios (regime de acoplamento fraco) e dos tipos de sistema que o modelo de Kura-

moto é capaz de descrever.

- Capítulo 3: O modelo de Kuramoto é introduzido, juntamente com a análise de estabilidade e descrição da transição para sincronização em sistemas com número finito de osciladores.
- Capítulo 4: O modelo unidimensional localmente acoplado é introduzido, assim como os métodos aproximados desenvolvidos para tratar o sistema na iminência da sincronização.
- Capítulo 5: Descrição do espaço de fase e estabilidade na região sincronizada do modelo e o método de determinação do acoplamento crítico de sincronização.
- Capítulo 6: Conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Osciladores autônomos, dinâmica de fase e sincronização

O conceito de oscilações auto-sustentáveis (ou autônomas), proposto primeiro por Andronov, Vitt e Khaikin [82], apresenta três características básicas:

- As oscilações são próprias, independentes do ambiente externo.
- O movimento rítmico é estável.
- A forma, amplitude e escala de tempo das oscilações são escolhidas (determinadas) pelo sistema, independente das condições iniciais.

Com base nessas características necessárias é possível formular hipóteses de quais ingredientes físicos são necessários para se obter um oscilador auto-sustentável.

A primeira característica física desses sistemas é que eles devem ser ativos, dotados de uma fonte interna de energia que é transformada em movimento oscilatório. Sem essa fonte não seria possível isolá-lo do ambiente externo e mantê-lo oscilando. Porém somente a existência de uma fonte de energia não é suficiente para que a oscilação seja própria e perpétua.

Suponha um sistema oscilatório dotado de amplitude e frequência conectado a uma fonte de energia. Tipicamente a amplitude de oscilação é proporcional à energia tomada da fonte, portanto se o sistema absorve constantemente energia os efeitos da excitação devem ser refletidos em um comportamento divergente da amplitude. Para balancear esse efeito é necessário alguma forma de dissipação de energia, de forma que as características próprias do oscilador são exibidas quando existe um equilíbrio entre os dois efeitos.

Assumindo a existência dos efeitos de excitação e dissipação em um processo periódico $x(t)$, a descrição completa do processo em cada instante de tempo necessita no mínimo duas variáveis, uma que fornece a posição e outra que fornece a variação da posição. Se somente duas variáveis forem suficientes o comportamento do sistema pode ser completamente descrito pela evolução temporal do par (x, y) , que são as coordenadas do espaço de fase do sistema.

Para que o sistema apresente características próprias de oscilação é necessário que exista uma região atrativa bem definida no espaço de fase, de forma que os efeitos das condições

iniciais sejam gradualmente dispersados até o sistema atingir o seu comportamento estacionário. Uma vez atingido esse regime, o caráter periódico das oscilações implica que o sistema retorna a um mesmo ponto após um período T , descrevendo uma curva fechada no espaço de fase que corresponde ao ciclo limite estável do sistema.

A partir da existência do ciclo limite é possível introduzir a última condição necessária para caracterizar o sistema como um oscilador autônomo: a não linearidade das equações de movimento. Se uma solução $x(t)$ de um sistema linear é periódica, então para qualquer fator a a solução $ax(t)$ também é periódica, o que implica que um sistema linear com soluções periódicas é conservativo. Se o sistema linear apresentar dissipação ou ganho de energia por perturbações externas elas são adicionadas ao movimento, impedindo que o ritmo e forma das oscilações iniciais sejam restaurados. Resulta desse fato que sistemas lineares não são capazes de formar ciclos limites, portanto não caracterizando oscilações auto-sustentáveis.

Com essa pequena introdução sobre osciladores autônomos é possível formalizar matematicamente o método de aproximação que permite descrever o sistema em termos osciladores de fase acoplados. Essa descrição fornece a base para compreender as premissas do modelo de Kuramoto, assim como o seu regime de aplicabilidade.

2.1 Dinâmica de fase

Considere um sistema autônomo M -dimensional geral, composto pelas equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M). \quad (2.1)$$

Se o sistema apresenta uma solução periódica estável com período T_0 , i.e., $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T_0)$, no espaço de fase a oscilação é representada por um ponto movendo-se ao longo do ciclo limite. Sempre é possível definir uma variável θ , denominada fase, como uma coordenada ao longo do ciclo com crescimento monotônico (ganhando 2π a cada rotação) e uniforme, na forma

$$\dot{\theta} = \omega_0, \quad (2.2)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ é a frequência natural das oscilações. Em um caso geral ela sempre pode ser obtida a partir de qualquer variável angular ψ que seja 2π -periódica no ciclo através da transformação

$$\theta = \omega_0 \int_0^\psi \left(\frac{d\psi'}{dt} \right)^{-1} d\psi', \quad (2.3)$$

de forma que as variáveis \mathbf{x} sejam funções 2π -periódicas da fase: $\mathbf{x}(\theta + 2\pi) = \mathbf{x}(\theta)$.

Qualquer perturbação sobre uma solução estável do sistema pode ser projetada nas direções perpendicular e paralela ao ciclo limite. Pela própria definição de um ciclo limite estável, as perturbações perpendiculares sempre resultam em soluções amortecidas que levam o sistema de volta ao ciclo. Já as perturbações ao longo do ciclo resultam em deslocamentos da solução original que também representam soluções estáveis, ou seja, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}'(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t + \Delta t)$.

Desse fato resulta que o estado estacionário de um sistema dinâmico autônomo é invariante sob deslocamentos temporais.

Na fase o efeito de uma perturbação ao longo do ciclo corresponde à adição de uma constante, conforme pode ser inferido a partir da equação (2.2). Em termos de estabilidade isso significa que a fase é neutramente estável, ou seja, o ciclo limite possui um expoente de Lyapunov nulo correspondendo a perturbações ao longo do ciclo, de forma que um deslocamento temporal é equivalente a um deslocamento de fase $\Delta\theta = \omega_0\Delta t$.

Considere agora o efeito de uma força externa periódica sobre as oscilações na forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

onde a força $\varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{x}, t + T)$ possui período T diferente de T_0 . Assumindo que a intensidade ε da força externa seja pequena a trajetória é levemente desviada do ciclo limite estável $\mathbf{x}_0(t)$ para uma vizinhança próxima, resultando em pequenas perturbações transversais ao ciclo. Porém na fase os efeitos podem ser robustos, acelerando o ponto dentro ciclo. Isso sugere uma descrição da dinâmica perturbada (2.4) somente na variável de fase, mas para tal é necessário definir uma fase também em uma vizinhança próxima ao ciclo.

Uma forma de se atacar esse problema é definir uma variável de fase que rotacione uniformemente de acordo com (2.2) tanto no ciclo limite como em uma vizinhança próxima. Como todos os pontos no ciclo limite podem ser considerados como pontos fixos, então todos os pontos em uma vizinhança próxima são atraídos para eles. Se considerarmos o mapeamento

$$\Phi(\mathbf{x}) : \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + T_0),$$

é possível escolher um ponto \mathbf{x}^* no ciclo e todos os pontos na vizinhança que são atraídos para ele sob a ação repetitiva de Φ . Esse conjunto forma uma superfície $(M - 1)$ -dimensional I denominada isócrona, que cruza o ciclo limite em \mathbf{x}^* . Como ela pode ser construída para todos os pontos no ciclo é possível parametrizá-las de acordo com a fase θ , estendendo a definição para a vizinhança do ciclo e exigindo que a fase seja constante em cada isócrona $I(\theta)$. Assim é possível escrever a equação (2.2) em uma vizinhança do ciclo limite,

$$\frac{d\theta(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \quad (2.5)$$

que para o sistema não perturbado (2.1) fornece a relação

$$\sum_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) = \omega_0. \quad (2.6)$$

No sistema perturbado (2.4) a equação de movimento em termos de θ é escrita a forma

$$\frac{d\theta(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} [f_k(\mathbf{x}) + \varepsilon p_k(\mathbf{x}, t)] = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

Se considerarmos uma interação fraca, os desvios de \mathbf{x} em relação ao ponto \mathbf{x}_0 no ciclo limite também devem ser pequenos, de forma que em primeira ordem de aproximação é possível desprezar esses desvios e calcular o lado direito no próprio ciclo limite:

$$\frac{d\theta(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \theta(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0, t). \quad (2.8)$$

Como cada ponto no ciclo limite apresenta uma correspondência direta com a fase, a equação (2.8) fornece uma equação de movimento fechada para θ ,

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \epsilon Q(\theta, t), \quad (2.9)$$

onde $Q(\theta, t)$ é uma função 2π -periódica na fase θ e T -periódica no tempo, que pode ser expandida em uma série dupla de Fourier

$$Q(\theta, t) = \sum_{l,k} A_{l,k} e^{ik\theta} e^{il\omega t}, \quad (2.10)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência da força externa.

No caso em que os efeitos da força externa são desprezíveis ($\epsilon \approx 0$), a equação (2.9) tem solução

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0. \quad (2.11)$$

Para calcular a aproximação de interação fraca é necessário substituir a solução (2.11) no termo de interação $Q(\theta, t)$ em (2.10),

$$Q(\theta, t) = \sum_{l,k} A_{l,k} e^{ik\theta_0} e^{i(k\omega_0 + l\omega)t}. \quad (2.12)$$

Essa função contém termos rapidamente oscilantes e termos com variação lenta, que satisfazem a condição de ressonância

$$k\omega_0 + l\omega \approx 0. \quad (2.13)$$

As componentes de rápida oscilação em (2.12) levam a desvios de fase de ordem $O(\epsilon)$, enquanto os termos ressonantes podem levar a grandes desvios, de forma que eles correspondem à parte mais importante da dinâmica. Para manter somente a parte essencial da dinâmica é possível tomar a "média" da interação ao considerar somente os termos ressonantes, o que corresponde a realizar um processo de filtragem em todas as oscilações de alta frequência e baixa amplitude.

No caso geral a condição de ressonância entre duas frequências é escrita na forma

$$\omega \approx \frac{m}{n} \omega_0 \quad (2.14)$$

onde n e m são inteiros sem um divisor comum. Ao se considerar somente a parte essencial da dinâmica na equação (2.9) devemos considerar a interação na forma $\langle Q(\theta, t) \rangle$, i.e.,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{l,k} A_{l,k} e^{ik\theta} e^{il\omega t} \right\rangle &= \sum_{l=-nj, k=mj} A_{l,k} e^{ik\theta} e^{il\omega t} = \sum_j A_{-nj, mj} e^{ij(m\theta - n\omega t)} \\ &= q(m\theta - n\omega t), \end{aligned} \quad (2.15)$$

o que leva à equação de movimento para a fase

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \varepsilon q(m\theta - n\omega t). \quad (2.16)$$

Introduzindo a diferença de fase generalizada $\phi = m\theta - n\omega t$ obtemos a equação

$$\frac{d\phi}{dt} = m\omega_0 - n\omega + \varepsilon m q(\phi), \quad (2.17)$$

onde o termo de interação satisfaz a propriedade $q(\phi + 2\pi) = q(\phi)$. Como no regime de acoplamento fraco a equação (2.17) descreve completamente a dinâmica do sistema, é necessário analisar o seu espaço de soluções para obter uma descrição dos fenômenos emergentes e de como eles dependem da intensidade do acoplamento.

2.2 Travamento de fase e sincronização

O espaço de fase do sistema (2.17) é construído a partir da diferença de fase ϕ , definida pela função $q(\phi)$. Se considerarmos (por simplicidade) somente o caso de ressonância $\omega \approx \omega_0$, é possível definir a frequência de dessintonização $\nu = \omega - \omega_0$ e escrever a equação de movimento na forma

$$\frac{d\phi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\phi). \quad (2.18)$$

Essa equação apresenta dois regimes dinâmicos distintos, dependendo exclusivamente da relação entre ν e amplitude ε da força externa.

A periodicidade de $q(\phi)$ no intervalo $[0, 2\pi)$ implica a existência de um máximo (q_{\max}) e um mínimo (q_{\min}), tipicamente não degenerados. Se a frequência de dessintonização satisfizer a condição $\varepsilon q_{\min} < \nu < \varepsilon q_{\max}$, então existe pelo menos um par de pontos fixos ϕ^* , um estável e outro instável, tais que a evolução temporal do sistema atinge o ponto fixo estável e permanece nele indefinidamente. Denotando esse ponto por $\phi^* = \phi_s$, é simples mostrar que a fase do oscilador rotaciona com a mesma frequência da força externa,

$$\theta = \omega t + \phi_s, \quad (2.19)$$

que corresponde ao regime de sincronização do sistema. Como a fase do oscilador aparece travada com relação à fase da força externa, a sincronização nesse sistema ocorre com travamento de fase.

O segundo regime dinâmico corresponde ao caso em que a frequência de dessintonização encontra-se fora da região $(\varepsilon q_{\min}, \varepsilon q_{\max})$. Isso significa que não existe solução $\dot{\phi} = 0$ para (2.19), de forma que a frequência de oscilação difere da frequência externa. A solução de (2.18) escrita na forma

$$\int^{\phi} \frac{d\phi'}{\varepsilon q(\phi') - \nu} = t, \quad (2.20)$$

define a diferença de fase como função do tempo $\phi(t)$, com período

$$T_\phi = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right|, \quad (2.21)$$

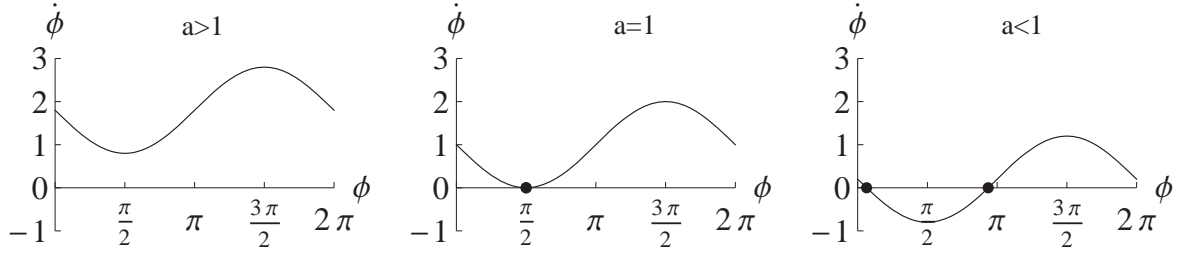


Figura 2.1: Caracterização da dinâmica do sistema $\dot{\phi} = a - \sin \phi$. Para $a > 1$ não existe solução de ponto fixo $\dot{\phi} = 0$ (esquerda). A iminência da sincronização ocorre em $a = 1$ (centro), quando uma bifurcação sela-nó cria dois pontos fixos (direita para $a < 1$).

de forma que a fase θ do oscilador apresenta uma rotação não uniforme

$$\theta(t) = \omega t + \phi(t). \quad (2.22)$$

Os dois tipos de comportamento e a existência de uma região sincronizada com dois pontos fixos pode ser visualizada na figura 2.1, onde ilustra-se o exemplo $\dot{\phi} = a - \sin \phi$.

Quando a frequência de dessintonização não é pequena o suficiente para garantir que o sistema encontre-se no regime de sincronização a amplitude das oscilações $\theta(t)$ oscila com uma frequência característica, denominada frequência de batimento. A análise desse fenômeno pode ser feita através da velocidade média de rotação da diferença de fase: conforme ϕ ganha $\pm 2\pi$ durante o período T_ϕ , a frequência média da rotação é dada por $\Omega_\phi = 2\pi T_\phi^{-1}$, de forma que a frequência observada da fase θ é

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \omega + \Omega_\phi, \quad (2.23)$$

e a frequência de batimento é definida como a diferença entre a frequências observada e externa.

A frequência de batimento depende monotonicamente da frequência de dessintonização ν , e na vizinhança do regime de sincronização é possível estimá-la analiticamente. Suponha que sob variações do parâmetro ν a transição para o regime sincronizado ocorra em $\nu_{\max} = \epsilon q_{\max}$. Para valores pequenos de $\nu - \nu_{\max}$ o termo $|\epsilon q(\phi) - \nu|$ é bem pequeno na vizinhança do ponto de transição ϕ_{\max} , o que permite expandir a função $q(\phi)$ em uma série de Taylor ao redor de ϕ_{\max} e realizar a integração de (2.21) com os limites de integração indo para infinito,

$$\begin{aligned} |\Omega_\phi| &\approx 2\pi \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\frac{\epsilon}{2} q''(\phi_{\max}) \phi^2 - (\nu - \nu_{\max})} \right|^{-1} \\ &= \sqrt{\epsilon |q''(\phi_{\max})| (\nu - \nu_{\max})} \sim \sqrt{(\nu - \nu_{\max})}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Na vizinhança do ponto de transição a dinâmica de ϕ é altamente não uniforme, e a trajetória passa bastante tempo na vizinhança de ϕ_{\max} , onde $\dot{\phi} \approx 0$. Esses períodos de diferença de fase aproximadamente constante $\phi \approx \phi_{\max}$ são alternados regularmente por pequenos intervalos onde ϕ sofre uma variação de $\pm 2\pi$, denominada deslizamento de fase (*phase slips*). A transição para o regime sincronizado aparece com o aumento do intervalo de tempo entre os deslizes, até a integral (2.24) tornar-se divergente no ponto de em que ocorre uma bifurcação sela-nó.

2.3 Osciladores fracamente não lineares

Nas seções anteriores foi mostrado como a influência de pequenas perturbações externas podem ser aproximadas por uma dinâmica de fase, que caracteriza completamente a sincronização do sistema. No entanto, em casos mais gerais a presença de forças externas afeta tanto a fase como a amplitude das oscilações.

Nessa seção vamos considerar uma classe de sistemas que possibilitam reduzir a dinâmica à equações de amplitude e fase e analisar as propriedades de sincronização analiticamente. Embora existe uma vasta literatura descrevendo o comportamento de osciladores fracamente não lineares, aqui vamos citar somente os livros de Nayfeh e Mook [83] e Paul Glendinning [84], que possivelmente são mais fáceis de ser encontrados.

2.3.1 Oscilador livre

Um oscilador fracamente não linear é definido como um oscilador linear (harmônico) com frequência ω_0 dotado de uma pequena perturbação $f(x, \dot{x})$ não linear, que determina as propriedades das oscilações autônomas:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}). \quad (2.25)$$

Como a equação (2.25) tem um formato próximo ao de um oscilador linear, é esperado que a solução seja uma forma harmônica com amplitude, frequência e fase a serem determinadas. Assim vamos procurar por soluções complexas na forma de oscilações harmônicas com frequência básica ω e amplitude dependente do tempo $A(t)$,

$$x(t) = \frac{1}{2} [A(t) e^{i\omega t} + A^*(t) e^{-i\omega t}]. \quad (2.26)$$

Reescrevendo (2.25) como um sistema de equações de primeira ordem

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x + f(x, y), \quad (2.27)$$

é possível utilizar um ansatz que fornece a relação entre y e A ,

$$y(t) = \frac{1}{2} [i\omega A(t) e^{i\omega t} - i\omega A^*(t) e^{-i\omega t}], \quad (2.28)$$

de forma a obter uma equação que descreve a evolução temporal da amplitude complexa $A(t)$:

$$\dot{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} [(\omega^2 - \omega_0^2) x + f(x, y)]. \quad (2.29)$$

Se considerarmos que a frequência ajustada ω não é muito diferente da frequência ω_0 (da parte linear) o lado direito de (2.29) é pequeno, de forma que as variações na amplitude A podem ser grandes com baixa frequência de oscilação ou pequenas com oscilações rápidas. Considerando

somente o primeiro caso, vamos desprezar os termos de alta frequência que aparecem no lado direito ao tomar a média da equação sobre o período $T = 2\pi/\omega$ das oscilações*.

No termo não linear

$$\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} f(x, y),$$

é possível descrever f como um polinômio em (x, y) , onde as potências são descritas com termos proporcionais a $(Ae^{i\omega t})^n (A^*e^{-i\omega t})^m$. Ao se realizar a média sobre T somente termos com $m = n - 1$ não são cancelados, de forma que o único resultado possível deve ser na forma $g(|A|^2)A$, onde $g(\cdot)$ é uma função arbitrária. Para pequenas amplitudes de oscilação somente o termo linear (proporcional a A) e o primeiro termo não linear (proporcional a $|A|^2A$) devem ser importantes, portanto†

$$\left\langle \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} f(x, y) \right\rangle_T = \mu A - (\gamma + i\alpha) |A|^2 A. \quad (2.30)$$

Como a média sobre

$$\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) x$$

fornece um termo linear em A , a equação média que fornece a evolução da amplitude é dada por

$$\dot{A} = \left(\mu + i \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} \right) A - (\gamma + i\alpha) |A|^2 A, \quad (2.31)$$

conhecida como a equação de Stuart-Landau. Essa equação é oriunda da investigação de osciladores de ciclo limite, onde na região imediatamente após a bifurcação responsável pelo movimento oscilatório (bifurcação de Hopf) qualquer sistema apresenta somente duas variáveis dinâmicas relevantes, sendo as outras eliminadas adiabaticamente. Landau [85] foi o primeiro a conjecturar a equação e Stuart [86] foi o primeiro a derivá-la através de um método assintótico.

Para que o método descrito acima seja válido é necessário garantir que os termos do lado direito de (2.31) sejam pequenos. Para realizar essa análise, vamos assumir $A(t) = R(t) e^{i\theta(t)}$ e separar as partes real e imaginária da equação,

$$\dot{R} = R(\mu - \gamma R^2), \quad \dot{\theta} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} - \alpha R^2. \quad (2.32)$$

No regime estacionário a amplitude real R e a fase θ assumem a forma

$$R_e = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}, \quad \theta(t) = \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} - \frac{\mu\alpha}{\gamma} \right) t + \theta_0. \quad (2.33)$$

Se o parâmetro de crescimento linear μ e a frequência de dessintonização $|\omega_0 - \omega|$ forem pequenos comparados com ω_0 a condição é satisfeita, visto que a amplitude estacionária R_e garante que o termo não linear em (2.31) é da mesma ordem que o termo linear μA .

*Embora introduzido de uma maneira informal, a técnica utilizada para captar somente a dinâmica essencial da equação (2.29) é conhecida como método de *averaging*. O livro de Nayfeh e Mook [83] fornece uma descrição aprofundada sobre o método, incluindo suas restrições e limite de validade.

†O parâmetro μ pode ser tomado real ao se considerar que a parte imaginária é absorvida na equação (2.31).

A dinâmica essencial de um oscilador fracamente não linear é descrita somente por duas equações, uma para a amplitude de oscilação R , dependente somente dos parâmetros do sistema, e uma para a fase θ que aparece acoplada com a amplitude. Na equação para a fase é possível interpretar $\bar{\omega} = (\omega_0^2 - \omega^2)/2\omega$ como sendo a frequência natural do oscilador, que é afetada pelo acoplamento κ com a amplitude. Essa interpretação será fundamental para analisarmos a interação entre dois osciladores fracamente não lineares e descrever como a sincronização ocorre nesse sistema.

2.3.2 Acoplamento de 2 osciladores

Se a intensidade do acoplamento entre dois osciladores é relativamente grande, ela afeta não somente as fases mas também as amplitudes. Em geral, as propriedades de interação forte não são universais, mas no caso de osciladores autônomos fracamente não lineares o uso do método de *averaging* fornece equações dependentes somente de um pequeno conjunto de parâmetros.

Considere dois osciladores acoplados linearmente:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1) + D_1(x_2 - x_1) + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \quad (2.34a)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = f_2(x_2, \dot{x}_2) + D_2(x_1 - x_2) + B_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad (2.34b)$$

onde $\omega_{1,2}$ são as frequências naturais do sistema linear. O acoplamento linear difusivo proporcional à diferença das variáveis e das derivadas, como considerado por Aronson, Ermentrout e Koppel [87] (e também por Bar-Eli [88] no contexto de osciladores químicos), é realizado de forma bidirecional para caracterizar um acoplamento nulo quando os estados dos dois sistemas coincidirem, i.e., $x_1 = x_2$ e $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$.

Seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, devemos procurar soluções na forma

$$x_n(t) = \frac{1}{2} [A_n(t) e^{i\omega t} + A_n^*(t) e^{-i\omega t}], \quad n = 1, 2, \quad (2.35a)$$

$$y_n(t) = \frac{i\omega}{2} [A_n(t) e^{i\omega t} - A_n^*(t) e^{-i\omega t}], \quad n = 1, 2. \quad (2.35b)$$

A realização do método de *averaging* fornece as equações para as amplitudes complexas

$$\dot{A}_1 = (\mu_1 + i\Delta_1) A_1 - (\gamma_1 + i\alpha_1) |A_1|^2 A_1 + (\beta_1 + i\delta_1) (A_2 - A_1), \quad (2.36a)$$

$$\dot{A}_2 = (\mu_2 + i\Delta_2) A_2 - (\gamma_2 + i\alpha_2) |A_2|^2 A_2 + (\beta_2 + i\delta_2) (A_1 - A_2), \quad (2.36b)$$

onde

$$\Delta_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega}, \quad \Delta_2 = \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{2\omega}, \quad (2.37)$$

e os parâmetros β_n e δ_n são proporcionais às constantes de acoplamento B_n e D_n , respectivamente. Introduzindo as amplitudes reais e as fases de acordo com $A_n = R_n e^{i\theta_n}$, obtemos um

sistema de 4 equações diferenciais acopladas

$$\dot{R}_1 = \mu_1 R_1 \left(1 - \frac{\gamma_1}{\mu_1} R_1^2 \right) + \beta_1 [R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - R_1] - \delta_1 R_2 \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (2.38a)$$

$$\dot{R}_2 = \mu_2 R_2 \left(1 - \frac{\gamma_2}{\mu_2} R_2^2 \right) + \beta_2 [R_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - R_2] - \delta_2 R_1 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.38b)$$

$$\dot{\theta}_1 = \Delta_1 - \alpha_1 R_1^2 + \delta_1 \left[\frac{R_2}{R_1} \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1 \right] + \beta_1 \frac{R_2}{R_1} \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (2.38c)$$

$$\dot{\theta}_2 = \Delta_2 - \alpha_2 R_2^2 + \delta_2 \left[\frac{R_1}{R_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 \right] + \beta_2 \frac{R_1}{R_2} \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (2.38d)$$

Como os termos de acoplamento dependem somente da diferença de fase $\phi = \theta_1 - \theta_2$, é possível reduzir o conjunto (2.38) para apenas três equações,

$$\dot{R}_1 = \mu_1 R_1 \left(1 - \frac{\gamma_1}{\mu_1} R_1^2 \right) + \beta_1 (R_2 \cos \phi - R_1) - \delta_1 R_2 \sin \phi, \quad (2.39a)$$

$$\dot{R}_2 = \mu_2 R_2 \left(1 - \frac{\gamma_2}{\mu_2} R_2^2 \right) + \beta_2 (R_1 \cos \phi - R_2) + \delta_2 R_1 \sin \phi, \quad (2.39b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & \Delta - \delta_1 + \delta_2 - \alpha_1 R_1^2 + \alpha_2 R_2^2 + \cos \phi \left(\delta_1 \frac{R_2}{R_1} - \delta_2 \frac{R_1}{R_2} \right) \\ & - \sin \phi \left(\beta_1 \frac{R_2}{R_1} + \beta_2 \frac{R_1}{R_2} \right), \end{aligned} \quad (2.39c)$$

onde $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$. Embora as equações (2.39) sejam bastante gerais, estamos interessados na análise da transição para a sincronização, então vamos fazer algumas considerações para reduzir o número de parâmetros: primeiro assumimos que os osciladores e o acoplamento sejam idênticos exceto nas frequências lineares, e depois realizamos uma mudança de escala nas amplitudes, na escala de tempo e nos parâmetros,

$$\bar{R}_n = \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} R_n, \quad \tau = \mu t, \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{\mu}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\mu}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\mu}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\mu}, \quad (2.40)$$

para obter

$$\dot{\bar{R}}_1 = \bar{R}_1 (1 - \bar{R}_1^2) + \bar{\beta} (\bar{R}_2 \cos \phi - \bar{R}_1) - \bar{\delta} \bar{R}_2 \sin \phi, \quad (2.41a)$$

$$\dot{\bar{R}}_2 = \bar{R}_2 (1 - \bar{R}_2^2) + \bar{\beta} (\bar{R}_1 \cos \phi - \bar{R}_2) + \bar{\delta} \bar{R}_1 \sin \phi, \quad (2.41b)$$

$$\dot{\phi} = \bar{\Delta} - \bar{\alpha} (\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2) + \bar{\delta} \cos \phi \left(\frac{\bar{R}_2}{\bar{R}_1} - \frac{\bar{R}_1}{\bar{R}_2} \right) - \bar{\beta} \sin \phi \left(\frac{\bar{R}_2}{\bar{R}_1} + \frac{\bar{R}_1}{\bar{R}_2} \right). \quad (2.41c)$$

No regime de acoplamento fraco (parâmetros $\bar{\beta}$ e $\bar{\delta}$ pequenos) é possível desacoplar as equações de amplitude da equação de evolução da fase. Em primeira ordem de aproximação é possível considerar que as amplitudes apresentam desvios pequenos de suas trajetórias não perturbadas $\bar{R}_{1,2} = 1$, de forma que podemos escrever

$$\bar{R}_n \approx 1 + r_n, \quad r_n \ll 1, \quad n = 1, 2, \quad (2.42)$$

e substituir nas equações (2.41a) e (2.41b) para obter

$$\dot{r}_1 = -2r_1 + \bar{\beta}(\cos \phi - 1) - \bar{\delta} \sin \phi \quad \dot{r}_2 = -2r_2 + \bar{\beta}(\cos \phi - 1) + \bar{\delta} \sin \phi. \quad (2.43)$$

Como as perturbações são fortemente amortecidas é possível assumir $\dot{r}_{1,2} \approx 0$, o que permite determinar as amplitudes $\bar{R}_{1,2}$ em termos da diferença de fase,

$$\bar{R}_1 = 1 + \frac{\bar{\beta}}{2}(\cos \phi - 1) - \frac{\bar{\delta}}{2} \sin \phi, \quad \bar{R}_2 = 1 + \frac{\bar{\beta}}{2}(\cos \phi - 1) + \frac{\bar{\delta}}{2} \sin \phi, \quad (2.44)$$

e substituir na equação (2.41c) para obter uma equação fechada que descreve a evolução temporal de ϕ :

$$\dot{\phi} = \bar{\Delta} - 2(\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\delta}) \sin \phi. \quad (2.45)$$

Antes de analisar a dinâmica de fase resultante é necessário fazer um comentário sobre o procedimento adotado. Se olharmos a equação (2.45) é possível observar que ela é idêntica à equação (2.18), com $\epsilon = -2(\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\delta})$ e $q(\phi) = \sin \phi$. Isso significa que a evolução temporal da fase de um oscilador acoplado com uma força externa é descrita da mesma maneira que o acoplamento com um segundo oscilador (a única diferença é que no segundo caso o oscilador adicionado também sofre o efeito do acoplamento). Se considerarmos o método de aproximação de fase descrito na seção anterior para o acoplamento de dois osciladores a equação que descreve a fase é exatamente a obtida em (2.45). A implicação disso é que todos os resultados obtidos na seção 2.2 permanecem válidos nesse caso.

Para descrever a dinâmica de (2.45) vamos considerar a simplificação $K = 2(\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\delta})$ e escrevê-la na forma

$$\dot{\phi} = \bar{\Delta} - K \sin \phi. \quad (2.46)$$

Se $\bar{\Delta} < K$ não existe solução estacionária $\dot{\phi} = 0$, e a evolução temporal da diferença de fase é dada por

$$\phi(t) = 2 \arctan \left\{ \frac{K}{\bar{\Delta}} + \sqrt{1 - \frac{K^2}{\bar{\Delta}^2}} \tan \left[\frac{\sqrt{\bar{\Delta}^2 - K^2}}{2} (t - t_0) \right] \right\}, \quad (2.47)$$

onde

$$t_0 = \frac{2}{\sqrt{\bar{\Delta}^2 - K^2}} \arctan \left[\frac{K - \bar{\Delta} \tan(\phi_0/2)}{\sqrt{\bar{\Delta}^2 - K^2}} \right]. \quad (2.48)$$

Porém se $\bar{\Delta} \geq K$ então existe uma solução estacionária $\dot{\phi} = 0$, dada por $\sin \phi = \bar{\Delta}/K$. Como mencionado na seção anterior, o ponto $K = \bar{\Delta}$ corresponde a uma bifurcação sela-nó, que cria duas soluções com estabilidades opostas na região sincronizada.

Para encerrar esse capítulo é importante observar que a equação (2.46) é exatamente a equação que descreve a interação entre dois osciladores no modelo de Kuramoto. A correspondência entre as equações para as fases $\theta_{1,2}$ é obtida quando se toma $\delta_{1,2} = 0$ em (2.36), que no limite de acoplamento fraco corresponde a assumir amplitude iguais para os osciladores de ciclo limite (vide equação (2.44)). Nesse caso as equações que descrevem a evolução temporal

das fases são[‡]

$$\dot{\theta}_1 = \bar{\Delta}_1 + K \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (2.49a)$$

$$\dot{\theta}_2 = \bar{\Delta}_2 + K \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.49b)$$

onde

$$\bar{\Delta}_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega\mu}, \quad \bar{\Delta}_2 = \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{2\omega\mu}, \quad (2.50)$$

são as frequências naturais dos osciladores de Kuramoto. Na região de sincronização os osciladores são travados com a frequência média

$$\Omega = \frac{\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2}{2}. \quad (2.51)$$

Essa discussão sobre osciladores autônomos (ou auto-sustentáveis) e aproximação de dinâmica de fase contextualiza as premissas sobre a descrição do modelo de Kuramoto: qualquer sistema de osciladores fracamente não lineares ou osciladores localizados próximos a uma bifurcação de Hopf admitem uma descrição dinâmica via equações acopladas de Stuart-Landau, que no limite de interação fraca para ciclos limites quase idênticos equivale à equação de fase do modelo de Kuramoto.

[‡]Por questão de simplicidade foi assumido $\alpha = 0$.

Capítulo 3

Modelo de Kuramoto: acoplamento global

O modelo de Kuramoto foi originalmente motivado pelo fenômeno de auto-sincronização em populações discretas de osciladores que espontaneamente apresentavam um regime de oscilação com frequência comum. Kuramoto acreditava que a compreensão teórica da origem do movimento rítmico coletivo podia ser obtida de maneira mais eficiente na sua iminência, tratando o fenômeno como uma transição de fase. Ao reconhecer que fatores aleatórios na natureza dos osciladores (mais especificamente nas frequências naturais) e efeitos do meio externo ao qual eles são suscetíveis contribuem destrutivamente para a formação de ritmicidade coerente, enquanto o acoplamento entre os osciladores favorece a sincronização mútua, ele foi capaz de formular um modelo em que a transição para o estado sincronizado pode ser compreendida analiticamente [25, 26, 89, 90].

Motivado pelo método pioneiro de Winfree [24], que considerou um conjunto de osciladores de ciclo limite descritos por uma fase acoplada ao ritmo gerado por toda a população, ele usou o método de *averaging* para mostrar que a dinâmica de longo termo de sistemas fracamente acoplados, com ciclos limite quase idênticos, é governada por equações de fase na forma universal

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{\langle j \rangle \in \{N\}} \Gamma_{ij} (\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

onde as funções Γ_{ij} dependem das características dos ciclos limites e do tipo de interação entre os osciladores*. Ao reconhecer que a abordagem analítica mais simples para o problema de N -corpos seria fornecida por algo similar à idéia de campo médio nas transições de fase em termodinâmica, onde os osciladores se comportariam como unidades cooperativas similares a magnetos de spin, ele considerou o caso mais simples possível de acoplamento global idêntico entre todos os osciladores com função senoidal na forma

$$\Gamma_{ij} (\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin (\theta_j - \theta_i), \quad (3.2)$$

onde $K \geq 0$ é a intensidade do acoplamento e o fator N^{-1} garante que o sistema seja bem comportado no limite $N \rightarrow \infty$. Assumindo que as frequências naturais ω_i são distribuídas a

*A metodologia utilizada por Kuramoto é essencialmente a descrita no capítulo 2, apenas tratada com um formalismo matemático mais rigoroso.

partir de uma densidade de probabilidade $g(\omega)$, considerada unimodal e simétrica com relação à frequência média Ω , $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$, a invariância do sistema sob translações das fases permite tomar $\Omega = 0$ sob a redefinição $\theta_i \rightarrow \theta_i + \Omega t$, o que leva ao conjunto de equações consideradas originalmente por Kuramoto:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

O modelo de Kuramoto foi extensamente estudado por vários autores desde a sua formulação, que contribuíram tanto para progressos nos métodos de análise como para extensões do modelo. Na impossibilidade de se citar todas as referências, vamos considerar aqui somente duas revisões feitas sobre o modelo: o artigo de Strogatz [27] faz uma revisão do trabalho do Kuramoto e da análise de estabilidade das soluções, e o artigo de Acebrón *et al.* [28] faz uma revisão mais completa que inclui várias extensões do modelo realizadas até 2005. Sem nos estendermos muito mais no assunto, por hora vamos ater à análise inicial realizada por Kuramoto.

3.1 Análise de Kuramoto

Em analogia à teoria de transições de fase, é apropriado definir um parâmetro de ordem para o sistema. Uma escolha conveniente consiste na quantidade complexa

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (3.4)$$

Se imaginarmos as fases como um conjunto de pontos movendo-se em torno de um círculo unitário complexo, a quantidade macroscópica $r(t) e^{i\psi(t)}$ pode ser interpretada como o ritmo coletivo produzido pela população, onde $r(t)$ é o raio que mede a coerência entre os osciladores e $\psi(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \theta_j(t)$ corresponde à fase média. Quando todos os osciladores movem-se extremamente próximos temos $r \approx 1$ e a população age como um grande oscilador. No regime em que eles encontram-se aleatoriamente distribuídos ao longo do círculo temos $r \approx 0$, o que significa que as oscilações individuais somam-se incoerentemente e nenhum ritmo macroscópico é produzido.

A partir da definição do parâmetro de ordem (3.4) é possível escrever as equações de movimento na forma

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

A dinâmica quando expressa dessa maneira permite observar que os osciladores estão acoplados somente através das quantidades r e ψ definidas pela abordagem de campo médio. Cada fase θ_i é atraída na direção da fase média ψ ao invés de ser direcionada a algum oscilador individual. A força efetiva do acoplamento é proporcional à coerência r , o que implica em uma retroalimentação positiva entre coerência e acoplamento: conforme a população torna-se mais

coerente o aumento de r introduz um aumento no acoplamento efetivo Kr , que por sua vez tende a trazer mais osciladores para o conjunto sincronizado, que aumenta r e fecha o ciclo lógico que configura o processo de retroalimentação.

No regime estacionário r é independente do tempo e ψ rotaciona uniformemente com frequência Ω . Como a média ψ depende do referencial, sempre é possível realizar uma escolha de referencial para θ_i tal que $\psi = 0$, o que permite escrever (3.5) na forma

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Os osciladores com frequência natural $|\omega_i| \leq Kr$ atingem um ponto fixo estável $\dot{\theta} = 0$ dado por

$$\omega_i = Kr \sin \theta_i, \quad (3.7)$$

com $-\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi/2$, permanecendo travados com relação à média $\psi = 0$, enquanto os osciladores com $|\omega_i| > Kr$ ficam à deriva, rotacionando não uniformemente ao longo do círculo unitário.

Para que r e ψ sejam constantes, mesmo na ausência de pontos fixos para uma parte do sistema, é necessário que os osciladores não sincronizados formem uma distribuição estacionária no círculo, inversamente proporcional à velocidade dos osciladores. A partir de (3.6) é possível definir a densidade em função da posição,

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\dot{\theta}|} = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|}, \quad (3.8)$$

onde $\rho(\theta, \omega) d\theta$ fornece a fração de osciladores com frequência angular ω contida na região entre θ e $\theta + d\theta$. A condição de normalização $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = 1$ para cada ω define a constante de proporcionalidade

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}. \quad (3.9)$$

No limite em que $N \rightarrow \infty$ a definição (3.4) do parâmetro de ordem passa a ser uma média sobre a fase e frequência,

$$r = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega), \quad (3.10)$$

de forma que a coexistência de osciladores travados e em deslocamento deve satisfazer a condição de consistência

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{travados}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{deslocamento}}. \quad (3.11)$$

Considerando primeiro a contribuição dos osciladores em deslocamento, o valor médio de $e^{i\theta}$ sobre os osciladores que satisfazem (3.8) é dada por

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{deslocamento}} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{|\omega| > Kr} d\omega e^{i\theta} \frac{g(\omega) C(\omega)}{|\omega - Kr \sin \theta|}. \quad (3.12)$$

Segue da densidade de probabilidade a relação de simetria $\rho(\theta - \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$, e como a distribuição $g(\omega)$ é simétrica, é possível mostrar que a integral é nula resultado em $\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{desl.}} = 0$, i.e., os osciladores em deslocamento não contribuem para o parâmetro de ordem.

A contribuição dos osciladores travados,

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{trav.}} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\theta} g(\omega) \delta \left[\theta - \arcsin \left(\frac{\omega}{Kr} \right) \right] = \int_{-Kr}^{Kr} d\omega g(\omega) \cos \theta(\omega), \quad (3.13)$$

pode ser reescrita em termos de uma integração em θ sob $d\omega = Kr \cos \theta d\theta$,

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{trav.}} = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta), \quad (3.14)$$

de forma que a condição de consistência (3.11) é escrita na forma

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta). \quad (3.15)$$

A equação (3.15) apresenta uma solução trivial $r = 0$, que corresponde ao caso completamente incoerente (sem sincronização), com densidade de probabilidade

$$\rho_{\text{incoerente}}(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}, \quad (3.16)$$

e uma solução com estados parcialmente sincronizados

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta), \quad (3.17)$$

que aparece como uma bifurcação quando r passa a ser positivo em um ponto crítico K_c . Tomando o limite $r \rightarrow 0^+$ o ponto crítico é obtido analiticamente:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (3.18)$$

O comportamento de r na região imediatamente após K_c pode ser obtido através da expansão em Taylor do integrando em (3.17),

$$g(Kr \sin \theta) = g(0) + \frac{1}{2} g''(0) K^2 r^2 \sin^2 \theta + O(r^3), \quad (3.19)$$

que fornece

$$r \approx \sqrt{\frac{-16}{\pi g''(0) K_c^4}} (K - K_c)^{1/2}. \quad (3.20)$$

Nessa equação é possível observar que o regime parcialmente sincronizado aparece como uma bifurcação supercrítica em K_c se $g''(0) < 0$, que corresponde ao caso considerado com $g(\omega)$ unimodal. Se considerarmos a distribuição de Lorentz

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (3.21)$$

a integral em (3.17) pode ser calculada analiticamente, fornecendo

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}, \quad K_c = 2\gamma. \quad (3.22)$$

A análise original de Kuramoto apenas tratava das soluções estacionárias, não se propondo a descrever as propriedades de estabilidade das soluções. O problema da estabilidade linear só foi tratado na década de 90 por Strogatz e Mirollo [29], que resultou na teoria de estabilidade linear da incoerência publicada por Strogatz, Mirollo e Matthews [91] (parte da análise linear e alguns problemas não resolvidos da teoria não linear de estabilidade foram considerados por Balmforth e Sassi [92]). A próxima seção consiste nos principais resultados descritos nesses artigos.

3.2 Análise de estabilidade linear de Strogatz e Mirollo

O limite $N \rightarrow \infty$ das equações de movimento (3.3) deve ser compreendido como um contínuo de osciladores distribuídos no círculo, descritos em termos de uma função densidade $\rho(\theta, \omega, t)$ normalizada para todo t e ω , tal que $\rho(\theta, \omega, t) d\theta$ fornece a fração de osciladores com frequência natural ω contida no intervalo $[\theta, \theta + d\theta]$ no tempo t . Como o número de osciladores é conservado, a presença de densidade de corrente crescente em alguma região do círculo deve corresponder ao fluxo de entrada de osciladores, de forma que a densidade deve satisfazer a equação de continuidade

$$\partial_t \rho(\theta, \omega, t) = -\partial_\theta [\rho(\theta, \omega, t) v(\theta, \omega, t)], \quad (3.23)$$

onde a velocidade instantânea $v(\theta, \omega, t)$ no ponto θ é obtida de (3.5),

$$v(\theta, \omega, t) = \omega + Kr \sin(\psi - \theta). \quad (3.24)$$

Considerando o parâmetro de ordem no limite do contínuo,

$$r e^{i\psi} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\theta} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega), \quad (3.25)$$

é possível obter uma única equação que descreve a evolução temporal de ρ ,

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(\theta, \omega, t) = & -\omega \partial_\theta \rho(\theta, \omega, t) \\ & - K \partial_\theta \left[\rho(\theta, \omega, t) \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \sin(\theta' - \theta) \rho(\theta', \omega', t) g(\omega') \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

tal que os estados estacionários são exatamente os obtidos anteriormente: da condição estacionária $\partial_t \rho_e = 0$ temos $\rho_e v = C(\omega)$, onde $C(\omega) \neq 0$ fornece a densidade (3.8) dos osciladores em deslocamento e $C(\omega) = 0$ fornece a função delta para os osciladores travados.

As equações (3.23) e (3.26) foram estudadas por Sakaguchi [93] que analisou o modelo de Kuramoto sob a influência de campos externos e com flutuações estocásticas nas frequências naturais. Considerando somente o segundo caso, o modelo é descrito pelas equações

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \xi_i(t) + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.27)$$

O ruído branco $\xi_i(t)$ é descrito por um processo estocástico com

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(s) \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t-s), \quad (3.28)$$

onde D é a intensidade do ruído e a média é tomada sobre um conjunto de realizações de $\xi_i(t)$. Como as equações (3.27) formam um conjunto de equações de Langevin, é possível derivar a equação de Fokker-Planck que descreve a evolução temporal da densidade $\rho(\theta, \omega, t)$. Para tal escrevemos (3.27) na forma diferencial [94, 95]

$$d\theta_i = \left[\omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \right] dt + \chi(t) \sqrt{2D} dt = v_i dt + \chi(t) \sqrt{2D} dt, \quad (3.29)$$

onde $\chi(t)$ é uma variável estocástica distribuída por uma normal $N(0, 1)$. Suponha $f(\theta)$ uma função contínua e diferenciável de θ , que admite expansão

$$\begin{aligned} df &= \partial_\theta f d\theta + \frac{1}{2} \partial_\theta^2 f d\theta^2 + O(d\theta^3) \\ &= \partial_\theta f \left(v dt + \chi \sqrt{2D} dt \right) + \partial_\theta^2 f D \chi^2 dt + O(dt^{3/2}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Se admitirmos que a hipótese ergódica seja válida[†] é possível escrever a identidade

$$\int d\theta f(\theta) \partial_t \rho = \left\langle \frac{df(\theta)}{dt} \right\rangle, \quad (3.31)$$

onde ρ é a densidade de probabilidade. Ao se inserir (3.30) em (3.31), o valor esperado no lado direito resume-se a $\langle \chi \rangle = 0$ e $\langle \chi^2 \rangle = 1$, e as integrais de superfície são anuladas devido às condições periódicas de contorno $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$. Assim a expressão final obtida de (3.31) é

$$\int d\theta f(\theta) \partial_t \rho = \int d\theta f(\theta) [D \partial_\theta^2 \rho - \partial_\theta(\rho v)], \quad (3.32)$$

que deve ser válida para qualquer função $f(\theta)$, o que leva à equação de Fokker-Planck que descreve a evolução da densidade de probabilidade sob a presença de ruído externo

$$\partial_t \rho(\theta, \omega, t) = D \partial_\theta^2 \rho(\theta, \omega, t) - \partial_\theta [\rho(\theta, \omega, t) v(\theta, \omega, t)]. \quad (3.33)$$

O limite sem interferência externa (ruído) dado por $D = 0$ é exatamente a equação de continuidade (3.23).

Uma análise das equações (3.24), (3.25) e (3.33) mostra que a solução incoerente $\rho = 1/2\pi$ sempre é solução do sistema, independente da presença do ruído externo: a integral em (3.25) resulta em $r = 0$ e $v(\theta, \omega, t) = \omega$, de forma que os dois lados de (3.33) são nulos. A análise de estabilidade será feita no contexto mais geral (na presença de ruído) devido a algumas peculiaridades que ocorrem quando $D = 0$, conforme ficará mais claro a seguir.

[†]Média sob alguma quantidade mensurável é a mesma quando tomada sob um grande número de sistemas ou sob apenas um único durante um longo período.

3.2.1 Estabilidade do estado incoerente

A solução incoerente $\rho_{\text{inc.}} = 1/2\pi$ corresponde ao estado em que todos os osciladores encontram-se uniformemente distribuídos no círculo, para todo ω , e a análise da estabilidade desse estado fornece a descrição do começo da sincronização, quando a solução perde a estabilidade.

Considere uma pequena perturbação $\eta(\theta, \omega, t; \varepsilon)$ na solução incoerente,

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi} + \eta(\theta, \omega, t; \varepsilon), \quad (3.34)$$

onde ε é o parâmetro de controle da perturbação. A condição de normalização fornece

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \eta(\theta, \omega, t; \varepsilon) = 0. \quad (3.35)$$

Inserindo (3.34) na equação de Fokker-Planck obtemos a equação que descreve a evolução temporal da perturbação:

$$\partial_t \eta = D \partial_\theta^2 \eta + \frac{Kr}{2\pi} \cos(\psi - \theta) + Kr \cos(\psi - \theta) \eta - [\omega + Kr \sin(\psi - \theta)] \partial_\theta \eta. \quad (3.36)$$

Como $\eta(\theta, \omega, t; \varepsilon)$ é uma função 2π -periódica em θ , vamos considerar uma expansão em harmônicos de Fourier

$$\eta(\theta, \omega, t; \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\omega, t; \varepsilon) e^{in\theta}. \quad (3.37)$$

Os termos em (3.36) com dependência em r e ψ podem ser escritos em termos dos harmônicos com auxílio de (3.25),

$$r \cos(\psi - \theta) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) [e^{i\theta} c_1(\omega, t; \varepsilon) + e^{-i\theta} c_{-1}(\omega, t; \varepsilon)], \quad (3.38a)$$

$$r \sin(\psi - \theta) = i\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) [e^{i\theta} c_1(\omega, t; \varepsilon) - e^{-i\theta} c_{-1}(\omega, t; \varepsilon)], \quad (3.38b)$$

onde $c_n^* = c_{-n}$, de forma que a evolução da perturbação é descrita pelas equações

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \partial_t c_n(\omega, t; \varepsilon) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} (n^2 D + in\omega) c_n(\omega, t; \varepsilon) \\ &+ \pi K \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') [c_{n-1}(\omega, t; \varepsilon) c_1(\omega', t; \varepsilon) - c_{n+1}(\omega, t; \varepsilon) c_{-1}(\omega', t; \varepsilon)] \\ &+ \pi K \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} (n-1) c_{n-1}(\omega, t; \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c_1(\omega', t; \varepsilon) \\ &- \pi K \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} (n+1) c_{n+1}(\omega, t; \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c_{-1}(\omega', t; \varepsilon) \\ &+ \frac{K}{2} \left[e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c_1(\omega', t; \varepsilon) + e^{-i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c_{-1}(\omega', t; \varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como a igualdade deve ser válida para cada ordem da expansão de Fourier, a evolução temporal do harmônico fundamental é descrita pela equação

$$\begin{aligned} \partial_t c_1(\omega, t; \varepsilon) &= -(D + i\omega) c_1(\omega, t; \varepsilon) + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c_1(\omega', t; \varepsilon) \\ &\quad - \pi K c_2(\omega, t; \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c_{-1}(\omega', t; \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.40)$$

enquanto os harmônicos superiores ($|n| \geq 2$) satisfazem

$$\begin{aligned} \partial_t c_n(\omega, t; \varepsilon) &= -(n^2 D + i n \omega) c_n(\omega, t; \varepsilon) + n \pi K c_{n-1}(\omega, t; \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c_1(\omega', t; \varepsilon) \\ &\quad - n \pi K c_{n+1}(\omega, t; \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c_{-1}(\omega', t; \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Se considerarmos somente termos de primeira ordem de perturbação ε ,

$$c_1(\omega, t; \varepsilon) = \varepsilon c(\omega, t), \quad c_n(\omega, t; \varepsilon) = \varepsilon c_n(\omega, t), \quad (3.42)$$

as equações (3.40) e (3.41) aparecem desacopladas para as amplitudes:

$$\partial_t c(\omega, t) = -(D + i\omega) c(\omega, t) + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c(\omega', t), \quad (3.43)$$

$$\partial_t c_n(\omega, t) = -(n^2 D + i n \omega) c_n(\omega, t), \quad |n| \geq 2. \quad (3.44)$$

Analisando primeiro a equação da amplitude do harmônico fundamental $c(\omega, t)$, a equação (3.43) possui tanto um espectro discreto como um contínuo. Para obter o espectro discreto assumimos que a solução seja separável,

$$c(\omega, t) = b(\omega) e^{\lambda t}, \quad (3.45)$$

onde o autovalor λ é independente de ω . Se interpretarmos o lado direito de (3.43) como um operador linear \hat{L} atuando em $c(\omega, t)$,

$$\hat{L}c(\omega, t) = -(D + i\omega) c(\omega, t) + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') c(\omega', t), \quad (3.46)$$

a equação de autovalores $(\hat{L} - \lambda \hat{I}) b(\omega) e^{\lambda t} = 0$ fornece

$$\lambda b(\omega) = -(D + i\omega) b(\omega) + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') b(\omega'). \quad (3.47)$$

Como a integral em (3.47) é apenas uma constante é possível definir

$$A \equiv \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') b(\omega'), \quad (3.48)$$

de forma a expressar $b(\omega)$ como

$$b(\omega) = \frac{A}{\lambda + D + i\omega}. \quad (3.49)$$

Para que a solução seja autoconsistente é necessário que ela satisfaça

$$A = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{Ag(\omega)}{\lambda + D + i\omega}. \quad (3.50)$$

A solução $A = 0$ não é permitida porque ela implica $b(\omega) = 0$ e conseqüentemente $c(\omega, t) = 0$. Portanto a equação que descreve o espectro discreto do sistema é

$$\frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{g(\omega)}{\lambda + D + i\omega} = 1. \quad (3.51)$$

Se $g(\omega)$ for uma função par não-crescente no intervalo $[0, \infty)$, i.e., $g(\omega) \leq g(\omega')$ para todo $\omega \geq \omega'$, então a equação (3.51) tem no máximo uma solução para λ , e se a solução existir ela necessariamente deve ser real [96]. Sob essa condição é possível reescrever a equação na forma

$$\frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) \frac{\lambda + D}{(\lambda + D)^2 + \omega^2} = 1. \quad (3.52)$$

Como o primeiro harmônico relaciona-se com r através de

$$re^{i\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) c_{-1}(\omega, t; \varepsilon), \quad (3.53)$$

a estabilidade de $c(\omega, t)$ fornece também a estabilidade de r . Se $\lambda > 0$ então $c(\omega, t)$ e r crescem exponencialmente, resultando em um estado incoerente instável. Quando $\lambda < 0$ temos um decaimento exponencial e o estado incoerente é estável.

Para que o lado esquerdo de (3.52) seja positivo é necessário que $\lambda > -D$. Na presença de ruído o modo fundamental pode ser estável, porém quando $D = 0$ não podem existir autovalores negativos, o que implica que o estado incoerente nunca é linearmente estável. O ponto de transição é obtido ao considerar $\lambda = 0$ em (3.52), que fornece o acoplamento crítico K_c :

$$K_c = 2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) \frac{D}{D^2 + \omega^2} \right]^{-1}. \quad (3.54)$$

Na equação (3.52) é possível observar que no caso livre de ruído a solução incoerente perde a estabilidade quando $K > 2/\pi g(0)$: sob $D = 0$ e $\lambda \rightarrow 0^+$ a função kernel $\lambda/(\lambda^2 + \omega^2)$ concentra-se formando um pico em torno de $\omega = 0$, apesar da integral ser igual a π para λ positivo. Isso implica que a função kernel tende a $\pi\delta(\omega)$ no limite $\lambda \rightarrow 0^+$, de forma que o lado esquerdo de (3.52) tende a $(K/2)\pi g(0)$. Portanto $\lambda > 0$ para $K > 2/\pi g(0)$.

Analisando agora o espectro contínuo de (3.43), a equação de autovalores pode ser escrita na forma

$$[\lambda(\omega) + D + i\omega] b(\omega) = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') b(\omega'), \quad (3.55)$$

onde novamente a integral é uma constante A , como definida em (3.48). Se considerarmos que o espectro contínuo é completamente determinado por

$$\lambda(\omega) = -D - i\omega, \quad (3.56)$$

a integral deve ser nula, o que implica que qualquer função ímpar $b(-\omega) = -b(\omega)$ é uma autofunção do operador \hat{L} com autovalores dados por (3.56), onde ω pertence ao conjunto de todas as frequências naturais que satisfazem $g(\omega) \neq 0$ (suporte de g). Para demonstrar que (3.56) corresponde ao espectro contínuo completo, considere a equação

$$\left[\hat{L} - \lambda(\omega) \hat{I} \right] b(\omega) = f(\omega). \quad (3.57)$$

Para que $\lambda(\omega)$ seja autofunção de \hat{L} é necessário que $f(\omega)$ seja nula. Se $\lambda(\omega) \neq -D - i\omega$ então é possível escrever

$$-[\lambda(\omega) + D + i\omega] b(\omega) + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' g(\omega') b(\omega') = f(\omega). \quad (3.58)$$

Usando a definição de A para escrever

$$b(\omega) = \frac{A - f(\omega)}{\lambda(\omega) + D + i\omega}, \quad (3.59)$$

é possível obter a equação de autoconsistência

$$A \left[1 - \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{g(\omega)}{\lambda(\omega) + D + i\omega} \right] = -\frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f(\omega) g(\omega)}{\lambda(\omega) + D + i\omega}. \quad (3.60)$$

O termo entre chaves só é nulo quando $\lambda(\omega) = \lambda$, i.e., quando o autovalor pertencer ao espectro discreto. Como por suposição $\lambda(\omega) \neq -D - i\omega$, então qualquer outro valor assumido por $\lambda(\omega)$ gera uma inconsistência pois o lado direito da igualdade deve ser obrigatoriamente nulo. Isso mostra que (3.56) reproduz todo o espectro contínuo.

Com os dois espectros de autovalores completamente determinados é possível analisar a estabilidade da solução incoerente para uma função $g(\omega)$ par não crescente, definida em um intervalo $[-\gamma, \gamma]$. As equações que definem o espectro de λ são

$$\frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) \frac{\lambda_{\text{disc.}} + D}{(\lambda_{\text{disc.}} + D)^2 + \omega^2} = 1, \quad \lambda_{\text{cont.}} = -D - i\omega. \quad (3.61)$$

No caso com ruído ($D > 0$) o espectro contínuo é uma linha vertical no semi plano esquerdo do plano complexo de λ , com a parte real sempre negativa independente do valor de K , de forma que os modos desse espectro nunca causam instabilidade. O espectro discreto pode ser um valor puramente real positivo ($K > K^*$) ou vazio ($K \leq K^*$), onde K^* é definido pela condição $\lambda = -D$ quando o espectro aparece. Para $K > K^*$ o modo fundamental é instável pois $\lambda > 0$, e para valores menores do acoplamento o autovalor torna-se primeiro neutramente estável quando $\lambda = 0$ e linearmente estável na região $-D < \lambda < 0$. Para $\lambda = -D$ o espectro discreto desaparece ao ser absorvido pelo contínuo.

No caso sem ruído o espectro contínuo encontra-se exatamente sobre o eixo imaginário, com a parte real nula, o que significa que $K = K^*$. O modo fundamental é instável para $K > K_c$ e neutramente estável na região $K \leq K_c$, onde o espectro discreto torna-se nulo.

Alguns casos particulares da distribuição de frequências naturais $g(\omega)$ permitem calcular analiticamente o autovalor λ e o acoplamento crítico K_c :

1 Distribuição localizada: $g(\omega) = \delta(\omega)$

$$\lambda = \frac{1}{2}K - D, \quad K_c = 2D. \quad (3.62)$$

2 Distribuição uniforme no intervalo finito $[-\gamma, \gamma]$: $g(\omega) = \frac{1}{2\gamma}$

$$\lambda = \gamma \cot\left(\frac{2\gamma}{K}\right) - D, \quad K_c = \frac{2\gamma}{\tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{D}\right)}. \quad (3.63)$$

3 Distribuição de Lorentz: $g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}$

$$\lambda = \frac{1}{2}K - D - \gamma, \quad K_c = 2(D + \gamma). \quad (3.64)$$

A evolução das amplitudes dos harmônicos superiores (3.44) é descrita pelas soluções

$$c_n(\omega, t) = c_n(\omega, 0) \exp[-(n^2 D + in\omega)t], \quad (3.65)$$

de forma que a série de Fourier $\eta^\perp(\theta, \omega, t)$ dessa perturbação assume a forma

$$\eta^\perp(\theta, \omega, t) = \sum_{|n| \geq 2} c_n(\omega, t; \varepsilon) e^{in\theta} = \sum_{|n| \geq 2} c_n(\omega, 0) e^{-n^2 D t} e^{in(\theta - \omega t)}. \quad (3.66)$$

Para $D > 0$ a contribuição desses harmônicos decaem exponencialmente e a evolução da perturbação total $\eta(\theta, \omega, t)$ depende essencialmente do modo fundamental $c(\omega, t)$. No caso sem ruído a equação (3.66) mostra que $\eta^\perp(\theta, \omega, t)$ é uma onda rotacional não amortecida, dependente somente de $\theta - \omega t$. Esse resultado segue diretamente de (3.36) quando tomado a primeira ordem de perturbação diretamente, que resulta na equação de evolução

$$\partial_t \eta^\perp = D \partial_\theta^2 \eta^\perp - \omega \partial_\theta \eta^\perp. \quad (3.67)$$

Qualquer função na forma $\eta^\perp(\theta, \omega, t) = f(\theta - \omega t)$ é solução de (3.67) quando $D = 0$. Esse resultado mostra que as ondas rotacionais são neutramente estáveis para perturbações envolvendo somente harmônicos superiores.

Para compreender o significado da estabilidade neutra considere $D = 0$ e uma família S de densidades $\rho(\theta, \omega, t)$ que satisfaça

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} \rho(\theta, \omega, t) = 0 \quad (3.68)$$

para todo ω em algum tempo fixo t . Isso significa que para cada frequência ω os osciladores não contribuem para o parâmetro de ordem, de forma que $v(\theta, \omega, t) = \omega$ e $r = 0$. O fato de S ser invariante sob o fluxo (3.23) significa que $v = \omega$ para todo t , o que implica que existem soluções de ondas rotacionais na forma $\rho(\theta - \omega t, \omega)$, onde ρ é uma função completamente arbitrária. Uma consequência desse resultado é que para $D = 0$ existem infinitas soluções diferentes com $r = 0$, porém quando $D > 0$ todos os harmônicos superiores decaem no limite $t \rightarrow \infty$ e a única solução com $r = 0$ é a solução incoerente $\rho = 1/2\pi$.

3.3 Efeitos de tamanho finito na região de sincronização

Todos os resultados obtidos nas seções anteriores remetem somente ao limite termodinâmico de um sistema de osciladores, obtido no limite $N \rightarrow \infty$. Nessa seção vamos nos concentrar no trabalho de Mirollo e Strogatz [39] que analisaram a estabilidade do estado completamente sincronizado de uma população finita de osciladores, mostrando que a solução travada é estável e desaparece através de uma bifurcação sela-nó.

3.3.1 Estabilidade das soluções na região sincronizada e determinação de K_s

Partindo das equações de movimento do modelo de Kuramoto globalmente acoplado

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + \frac{K}{N} \sum_{m=1}^N \sin(\theta_m - \theta_n), \quad n = 1, \dots, N,$$

o lado direito descreve as componentes X_n de um campo vetorial \mathbf{X} definido em um toro T^N . É possível definir esse campo vetorial como o gradiente $\mathbf{X} = \nabla F$ de uma função escalar F ,

$$F(\theta_1, \dots, \theta_N) = - \sum_{n=1}^{2N} \left[\omega_n \theta_n + \frac{K}{N} \sum_{m=1}^N \cos(\theta_m - \theta_n) \right], \quad (3.69)$$

não unívoca no toro (admite vários valores), de forma que \mathbf{X} é um gradiente local em T^N . Ao introduzir o parâmetro de ordem obtemos

$$X_n = \omega_n + Kr \sin(\psi - \theta_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.70)$$

$$F(\theta_1, \dots, \theta_N) = - \left(\sum_{n=1}^N \omega_n \theta_n + \frac{1}{2} K N r^2 \right). \quad (3.71)$$

Para o sistema estar sincronizado é necessário que a frequência instantânea de todos os osciladores não se altere, i.e., $\dot{\theta}_n = \Omega$ para $n = 1, \dots, N$. Assumindo $\Omega = 0$ as fases para $K \geq K_s$ são travadas segundo a expressão

$$\omega_n = Kr \sin \theta_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.72)$$

A partir da relação trigonométrica entre arcos seno e cosseno é possível reescrever a equação (3.72),

$$\cos \theta_n = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{Kr} \right)^2}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.73)$$

o que permite escrever parâmetro de ordem em (3.4) na forma

$$r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos \theta_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{Kr} \right)^2}. \quad (3.74)$$

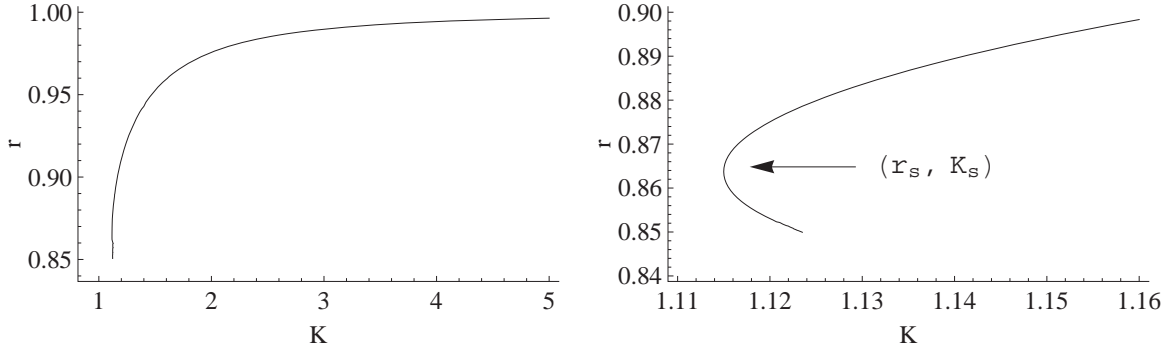


Figura 3.1: Solução numérica da equação (3.77) para um caso com $N = 10$ e frequências naturais geradas a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[-1, 1]$. A figura à esquerda mostra a solução completa no intervalo. A região ampliada da bifurcação é mostrada na figura à direita.

Qualquer solução de (3.74) com $r > 0$ e uma determinada escolha dos sinais \pm define um estado travado (ponto fixo) para o parâmetro de ordem r , o que resulta em 2^N diferentes configurações de travamento. No entanto somente soluções estáveis contribuem para a coerência na região sincronizada. Qualquer ponto fixo estável deve satisfazer $\partial_{\theta_n}^2 F \geq 0$ para todo n . Como

$$\partial_{\theta_n}^2 F = Kr \cos(\psi - \theta_n) - K/N, \quad (3.75)$$

e no referencial em que $\psi = 0$ a condição de estabilidade fornece

$$r \cos \theta_n \geq 1/N, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.76)$$

o que implica que qualquer solução estável deve satisfazer $\cos \theta_n > 0$ para todo n . Esse resultado permite escrever o parâmetro de ordem de maneira unívoca

$$r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{Kr}\right)^2}. \quad (3.77)$$

A equação (3.77) nas variáveis (r, K) pode ser compreendida como a definição da função implícita $K(r)$ definida em toda a região sincronizada, o que permite uma abordagem numérica para descrever as soluções, conforme ilustrado na figura 3.1 para um caso particular de $\{\omega\}_N$. A análise do gráfico para várias configurações diferentes permite obter algumas informações: duas soluções de r são criadas a partir de uma bifurcação em ponto que denotamos por (r_s, K_s) ; a bifurcação corresponde graficamente ao mínimo da função implícita $K(r)$; uma das soluções apresenta comportamento decrescente de r em relação a K , sendo destruída em um ponto (r_d, K_d) que satisfaz $r_d < r_s$ e $K_d > K_s$; a outra solução apresenta comportamento assintótico $r \rightarrow 1$ no limite $K \rightarrow \infty$.

Se o ponto (r_s, K_s) corresponde à primeira solução de travamento acessível ao sistema então por definição K_s é a constante de acoplamento crítica de sincronização. A localização

desse ponto no espaço (r, K) pode ser obtida derivando implicitamente (3.77) com respeito a r ,

$$1 = \frac{1}{NK^2r^3} \sum_{n=1}^N \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1 - (\omega_n/Kr)^2}} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{K} \frac{dK}{dr} \right), \quad (3.78)$$

e através da condição de mínimo $\left[\frac{dK}{dr} \right]_{K=K_s, r=r_s} = 0$ obtém-se a igualdade

$$\sum_{n=1}^N \sqrt{1 - (\omega_n/x_s)^2} = \frac{1}{x_s^2} \sum_{n=1}^N \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1 - (\omega_n/x_s)^2}}, \quad (3.79)$$

que define univocamente $x_s = K_s r_s$ e permite determinar (r_s, K_s) inserindo x_s em (3.77). Para demonstrar que o ponto (r_s, K_s) corresponde à transição para o regime sincronizado é necessário analisar a estabilidade da solução

Os elementos da matriz jacobiana são obtidos a partir das equações de movimento através da relação $J_{n,m} = \partial_{\theta_m} \dot{\theta}_n$, que fornece

$$J_{n,m} = \begin{cases} \frac{K}{N} \cos(\theta_m - \theta_n), & \text{se } n \neq m \\ \frac{K}{N} - Kr \cos \theta_n, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (3.80)$$

Como a matriz é simétrica e apresenta a propriedade $\sum_{m=1}^N J_{n,m} = 0$ para todo n é possível concluir que existe um autovetor $\mathbf{q} = (1, \dots, 1)$ com autovalor $\lambda = 0$, que corresponde a invariância das equações de movimento sob transformações $\theta_n \rightarrow \theta_n + \Theta$. Para que os pontos fixos sejam estáveis é necessário que todos os outros autovalores sejam negativos (uma vez que matrizes simétricas possuem somente autovalores reais). Para facilitar o cálculo vamos melhorar a notação: a matrix J é escrita na forma

$$J = \frac{K}{N} C - Kr D, \quad (3.81)$$

com as matrizes C e D definidas por

$$C_{n,m} = \cos(\theta_m - \theta_n) = c_n c_m + s_n s_m, \quad (3.82a)$$

$$D_{n,m} = c_n \delta_{n,m}, \quad (3.82b)$$

onde a notação usada é $c_n = \cos \theta_n$ e $s_n = \sin \theta_n$.

Devido às propriedades apresentadas por J a condição de estabilidade pode ser colocada na forma $J\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$ para todo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathfrak{R}$ tal que $\|\mathbf{x}\| > 0$ e $\sum_{n=1}^N x_n = 0$ (o que garante $\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} = 0$). Assim temos

$$\begin{aligned} J\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= \frac{K}{N} \sum_{n,m=1}^N C_{n,m} x_n x_m - Kr \sum_{n=1}^N c_n x_n^2 \\ &= \frac{K}{N} \left[\left(\sum_{n=1}^N c_n x_n \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N s_n x_n \right)^2 \right] - Kr \sum_{n=1}^N c_n x_n^2. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Definindo um vetor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ que representa uma mudança de escala em \mathbf{x} na forma $y_n = \sqrt{c_n}x_n$,

$$J\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{K}{N} \left[\left(\sum_{n=1}^N \sqrt{c_n} y_n \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N \frac{s_n}{\sqrt{c_n}} y_n \right)^2 \right] - Kr \|\mathbf{y}\|^2. \quad (3.84)$$

A partir de (3.84) é possível definir os vetores $\mathbf{u} = (\sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_N})$ e $\mathbf{v} = (s_1/\sqrt{c_1}, \dots, s_N/\sqrt{c_N})$ para escrever

$$J\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{K}{N} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{y})^2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{y})^2] - Kr \|\mathbf{y}\|^2, \quad (3.85)$$

o que evidencia o motivo subjacente da transformação: no referencial em que $\Omega = 0$ os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} são linearmente independentes,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{n=1}^N s_n = \frac{1}{Kr} \sum_{n=1}^N \omega_n = 0, \quad (3.86)$$

de forma que é possível utilizá-los como uma base ortonormal para expandir o vetor \mathbf{y} ,

$$\mathbf{y} = a \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} + b \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} + \mathbf{y}^\perp, \quad (3.87)$$

com $\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}^\perp = \mathbf{v} \cdot \mathbf{y}^\perp = 0$, e escrever (3.85) na forma

$$J\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{K}{N} (a^2 \|\mathbf{u}\|^2 + b^2 \|\mathbf{v}\|^2) - Kr (a^2 + b^2 + \|\mathbf{y}^\perp\|^2). \quad (3.88)$$

Da definição de \mathbf{u} segue que $\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{n=1}^N c_n = rN$, e ao inserir essa expressão em (3.88) obtemos a expressão final para $J\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$:

$$J\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{K}{N} b^2 (\|\mathbf{v}\|^2 - rN) - Kr \|\mathbf{y}^\perp\|^2. \quad (3.89)$$

Para qualquer sistema com $N \geq 3$ o termo $Kr \|\mathbf{y}^\perp\|^2$ é sempre positivo definido, de forma que a condição de estabilidade é garantida se $\|\mathbf{v}\|^2 - rN \leq 0$. Como $\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{s_n^2}{c_n}$, os pontos fixos serão estáveis se eles satisfizerem a condição

$$r \geq \frac{1}{N (Kr)^2} \sum_{n=1}^N \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1 - (\omega_n/Kr)^2}}. \quad (3.90)$$

A condição de igualdade fornece exatamente o resultado obtido anteriormente: o mínimo da função $K(r)$ corresponde à bifurcação em (r_s, K_s) responsável pela sincronização do sistema. A solução com $r > r_s$ representa os estados estáveis do sistema enquanto o ramo de soluções com $r_s < r < r_d$ corresponde às soluções instáveis.

Alguns casos particulares com alta simetria é possível obter soluções analíticas e serão analisadas nas próximas subseções.

3.3.2 Duas frequências naturais

Considere um sistema de N osciladores tal que N_1 tenham frequência natural ω_1 e $N - N_1$ tenham ω_2 . A partir da frequência média

$$\Omega(N, N_1) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega_n = \frac{N_1 \omega_1 + (N - N_1) \omega_2}{N}, \quad (3.91)$$

é possível fazemos a mudança de referencial $\omega_n \rightarrow \omega'_n(N, N_1) = \omega_n - \Omega(N, N_1)$ e escrever as equações de movimento sob influência do campo médio na forma ($\psi = 0$)

$$\dot{\theta}_n = \begin{cases} \omega'_1 - Kr \sin \theta_n, & n = 1, \dots, N_1 \\ \omega'_2 - Kr \sin \theta_n, & n = N_1 + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.92)$$

A condição de sincronização fornece o travamento das fases na região $K \geq K_s$,

$$\sin \theta_n = \begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{\omega'_1}{Kr}, & n = 1, \dots, N_1 \\ \sin \theta_2 = \frac{\omega'_2}{Kr}, & n = N_1 + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.93)$$

Se considerarmos as equações de movimento sem o campo médio mas na fixação de gauge $\psi = 0$ é possível reduzir o conjunto de fases $\{\theta_n\}$ somente a θ_1 e θ_2 para obter

$$\dot{\theta}_1 = \omega'_1 + \frac{N - N_1}{N} K \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (3.94a)$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega'_2 + \frac{N_1}{N} K \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (3.94b)$$

A condição de ponto fixo $\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = 0$ fornece o travamento da diferença de fase ϕ ,

$$\sin \phi = \frac{\omega'_1 - \omega'_2}{K}, \quad (3.95)$$

que permite determinar o acoplamento crítico K_s ,

$$K_s = |\omega'_1 - \omega'_2| = |\omega_1 - \omega_2|, \quad (3.96)$$

independente do tamanho do sistema ou das proporções das duas frequências naturais.

A forma funcional de $r(K)$ pode ser obtida a partir da definição de r ,

$$r = \frac{N_1}{N} e^{i\theta_1} + \frac{N - N_1}{N} e^{i\theta_2}. \quad (3.97)$$

Multiplicando essa equação por $e^{-i\theta_2}$, as partes real e imaginária fornecem

$$r \sin \theta_2 = -\frac{N_1}{N} \sin \phi, \quad r \cos \theta_2 = \frac{N_1}{N} \cos \phi + \frac{N - N_1}{N}. \quad (3.98)$$

Como $\cos \phi = \pm \sqrt{1 - (K_s/K)^2}$, a função $r(K)$ é escrita na forma

$$r_{\pm}(K) = \sqrt{\left(\frac{N - N_1}{N} \pm \frac{N_1}{N} \sqrt{1 - (K_s/K)^2}\right)^2 + \left(\frac{N_1 K_s}{NK}\right)^2}. \quad (3.99)$$

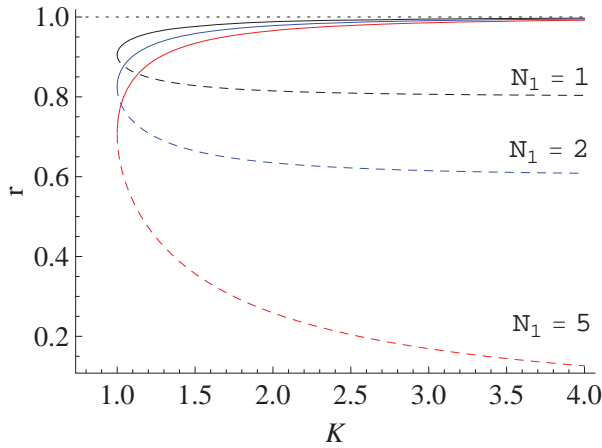


Figura 3.2: Comportamento do parâmetro de coerência r na região sincronizada para um sistema com $N = 10$ osciladores com frequências naturais que satisfazem $K_s = 1$. As soluções apresentam comportamento assintótico $r \rightarrow 1$ no limite $K \rightarrow \infty$. Como valor da coerência na bifurcação satisfaz a equação $r_s = \sqrt{(N - N_1)^2 + N_1^2}$, o sistema é equivalente para configurações simétricas das proporções N_1 e $N - N_1$.

O comportamento do parâmetro de coerência na região sincronizada pode ser observado na figura 3.2. A solução estável corresponde à $r_+(K)$, que apresenta comportamento assintótico $r \rightarrow 1$ no limite $K \rightarrow \infty$. Diferente da solução parcial (3.77), a equação (3.99) representa o espaço completo de soluções na região sincronizada por levar em conta as mudanças de sinal do cosseno das fases no ramo $r_-(K)$, por isso ela não apresenta a destruição da solução (como no caso considerado na figura 3.2). Esse resultado configura uma extensão do obtido por Tsimring *et al.* [61], que consideraram somente populações igualmente distribuídas ($N_1 = N/2$).

3.3.3 Frequências naturais igualmente espaçadas e limite termodinâmico

Vamos considerar um sistema no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) onde as frequências naturais são obtidas através de uma distribuição uniforme em um intervalo finito $[-\gamma, \gamma]$:

$$g(\omega) = \begin{cases} 1/2\gamma, & \text{para } |\omega| \leq \gamma \\ 0, & \text{para } |\omega| > \gamma \end{cases} \quad (3.100)$$

Seguindo a análise de Kuramoto descrita na seção 3.1, o parâmetro de ordem é definido pela integral

$$r = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) \cos[\theta(\omega)], \quad (3.101)$$

que no regime completamente sincronizado é descrito por

$$r = \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{\gamma} d\omega \sqrt{1 - (\omega/Kr)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\gamma/Kr)^2} + \frac{Kr}{2\gamma} \arcsin(\gamma/Kr). \quad (3.102)$$

Essa equação só admite solução para $Kr \geq \gamma$, de forma que no ponto crítico $K_c r_c = \gamma$ a solução incoerente torna-se instável, e o acoplamento crítico é dado por $K_c = 4\gamma/\pi$, conforme equação (3.63) no limite $D \rightarrow 0$.

Se considerarmos um sistema de tamanho finito as equações (3.77) e (3.79) descrevem o ponto de transição (r_s, K_s) para o regime sincronizado, com acoplamento crítico de sincroniza-

ção K_s :

$$\sum_{n=1}^N \sqrt{1 - \left[\frac{\omega_n(N)}{x_s(N)} \right]^2} = \frac{1}{x_s^2(N)} \sum_{n=1}^N \frac{\omega_n^2(N)}{\sqrt{1 - \left[\frac{\omega_n(N)}{x_s(N)} \right]^2}}, \quad (3.103a)$$

$$r_s(N) = \sum_{n=1}^N \sqrt{1 - \left[\frac{\omega_n(N)}{x_s(N)} \right]^2}, \quad (3.103b)$$

onde $x_s(N) = K_s(N) r_s(N)$. No limite $N \rightarrow \infty$ as frequências naturais são determinadas em termos da função de distribuição de probabilidades $g(\omega)$ definida na equação (3.100). Em um sistema de tamanho finito essa distribuição poderia ser usada para determinar as frequências, porém o ponto crítico da transição seria obtido somente em média sobre as realizações. Para contornar esse problema é possível assumir que $g(\omega)$ seja dividida no intervalo $[-\gamma, \gamma]$ para os N osciladores de forma que as diferenças entre frequências naturais sejam igualmente espaçadas e no limite termodinâmico essa configuração deve corresponder à distribuição uniforme (3.100). Sob essa hipótese as frequências naturais são representadas pela função

$$\omega_n(N) = \frac{\gamma}{N-1} (-2n + N + 1), \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.104)$$

Antes de procurarmos uma solução para o conjunto (3.103) é necessário fazer algumas considerações sobre o comportamento de $x_s(N)$. Primeiro é importante frisar que os somatórios na equação (3.103a) não podem ser aproximados por integrais para representar o limite de muitos osciladores (a equação é reduzida à uma identidade), de forma que é imperativo realizar o cálculo com os somatórios. A segunda consideração vem do comportamento do acoplamento crítico $K_s(N)$: resultados numéricos mostram que $\partial_N K_s(N) < 0$, com $K_s(N) \rightarrow K_s^\infty$ no limite $N \rightarrow \infty$. Como $r_s(N)$ é uma função definida somente no intervalo $(0, 1]$, é possível assumir que a função $x_s(N)$ seja representada pela expansão em série de Laurent

$$x_s(N) = x_s^\infty + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{N^m}, \quad (3.105)$$

com $x_s^\infty \geq \gamma$ por consistência com as equações (3.103), uma vez $\max_n(\omega_n) = \gamma$ e para $x_s < \gamma$ as equações não admitem solução.

Uma vez que as hipóteses iniciais foram feitas a solução de (3.103a) é obtida através da determinação das constantes x_m em (3.105). A partir das expansões em série de Taylor

$$\sqrt{1-y^2} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (2k-1) (k!)^2} y^{2k}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k (2k)!}{4^k (2k-1) (k!)^2} y^{2k}, \quad (3.106)$$

a equação (3.103a) pode ser escrita na forma[‡]

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (2k-1) (k!)^2} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\omega_n}{x_s} \right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k (2k)!}{4^k (2k-1) (k!)^2} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\omega_n}{x_s} \right)^{2k}. \quad (3.107)$$

[‡]A equação foi multiplicada por $1/N$ somente por conveniência, porque a expressão no lado direito de (3.107) aparece também na definição de $r_s(N)$.

O truque para se resolver essa equação é expandir os dois lados da igualdade em série de potências $1/N$ e igualar os coeficientes. Em primeira ordem o somatório é dado por

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\omega_n}{x_s} \right)^{2k} = \frac{1}{2k+1} \left(\frac{\gamma}{x_s^\infty} \right)^{2k} + O(1/N), \quad (3.108)$$

que inserido em (3.107) fornece a relação que define $x_s^\infty(\gamma)$:

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (4k^2 - 1) (k!)^2} \left(\frac{\gamma}{x_s} \right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k (2k)!}{4^k (4k^2 - 1) (k!)^2} \left(\frac{\gamma}{x_s} \right)^{2k}. \quad (3.109)$$

Definindo os operadores

$$\hat{L}_- f(y) = y \partial_y f(y), \quad \hat{L}_+ f(y) = \frac{1}{y} \int_0^y dy' f(y'), \quad (3.110)$$

as funções que representam os somatórios em (3.109) podem ser obtidas a partir das funções definidas em (3.106) por aplicações sucessivas de \hat{L}_\pm ,

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (4k^2 - 1) (k!)^2} y^{2k} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{y} \arcsin y \right], \quad (3.111a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k (2k)!}{4^k (4k^2 - 1) (k!)^2} y^{2k} = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2 - 1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{y} \arcsin y \right]. \quad (3.111b)$$

A substituição das equações (3.111) em (3.109) fornece a solução

$$x_s^\infty(\gamma) = \gamma. \quad (3.112)$$

A determinação da constante x_s^∞ facilita o cálculo das constantes de ordens superiores em (3.107): inserindo (3.112) na expansão (3.108) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\omega_n}{x_s} \right)^{2k} &= \frac{1}{2k+1} + \frac{2k}{2k+1} \left(1 - \frac{x_1}{\gamma} \right) \frac{1}{N} \\ &+ \left[2k \left(\frac{1}{3} + \frac{x_1^2}{2\gamma^2} \right) - \frac{2k}{2k+1} \frac{x_2}{\gamma} - \frac{(2k)^2}{2k+1} \frac{x_1}{\gamma} \right] \frac{1}{N^2} + O(1/N^3). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Considerando somente a primeira ordem em $1/N$, a inserção de (3.113) em (3.109) resulta na equação que define $x_1(\gamma)$:

$$\lim_{y \rightarrow 1} \left(1 - \frac{x_1}{\gamma} \right) \left[\frac{3y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{y^2 (y^2 - 1)}{(1-y^2)^{3/2}} \right] = 0. \quad (3.114)$$

Como a expressão em y diverge no limite $y \rightarrow 1$, a igualdade só pode ser satisfeita se

$$x_1(\gamma) = \gamma, \quad (3.115)$$

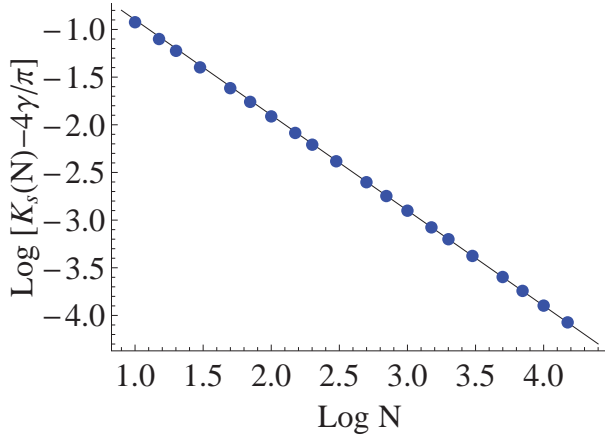


Figura 3.3: Acoplamento crítico $K_s(N)$ para um conjunto de osciladores com frequências naturais dadas pela equação (3.104). Os pontos são os resultados obtidos por cálculo numérico das equações (3.103), idênticos aos obtidos por simulação das equações diferenciais, enquanto a curva corresponde à função (3.118) calculada analiticamente.

portanto podemos escrever

$$x_s(N) = \gamma + \frac{\gamma}{N} + O(1/N^2). \quad (3.116)$$

Inserindo (3.116) na equação (3.103b) obtemos o comportamento de $r_s(N)$,

$$\begin{aligned} r_s(N) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (2k-1) (k!)^2} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\omega_n}{x}\right)^{2k} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (4k^2 - 1) (k!)^2} + O(1/N^2) = \frac{\pi}{4} + O(1/N^2), \end{aligned} \quad (3.117)$$

onde a última igualdade é obtida tomando o limite $y \rightarrow 1$ na equação (3.111a).

Uma vez concluído o procedimento de se determinar os comportamentos assintóticos de $x_s(N)$ e $r_s(N)$ o acoplamento crítico é obtido através da definição $x_s(N) = K_s(N) r_s(N)$:

$$K_s(N) = \frac{4\gamma}{\pi} + \frac{4\gamma}{\pi} \frac{1}{N} + O(1/N^2). \quad (3.118)$$

Esse resultado tinha sido inferido (porém aparentemente não calculado) por Pazó [40], que está de acordo com as hipóteses assumidas através do limite $N \rightarrow \infty$ que fornece o acoplamento crítico K_c , como mostrado no início da seção.

Capítulo 4

Condições periódicas de contorno em 1 dimensão: modelo de Kuramoto localmente acoplado (LCKM)

No capítulo anterior foi mostrado como o caráter de longo alcance (topologia trivial com todos os osciladores conectados entre si) do modelo de Kuramoto possibilita a obtenção de resultados analíticos via método de campo médio para infinitos osciladores ou mesmo para um sistema de tamanho finito com simetria (soluções assintoticamente analíticas).

Em muitos sistemas físicos (tanto biológicos como artificiais) o comportamento coletivo é obtido através da organização dos elementos em configurações que diferem do caráter globalmente acoplado, onde as contribuições individuais dos osciladores são fortemente dependentes dos efeitos das interações locais e da topologia (ou geometria, no contexto de interações que dependem da distância) do sistema.

A análise de configurações com nível mais realístico de interação faz-se importante porque elas proporcionam o surgimento de fenômenos não captados no caso idealizado. No entanto, o inconveniente dessa descrição é o nível muito superior de complexidade matemática, onde não só as técnicas previamente desenvolvidas são raramente aplicáveis mas também o advento de novas ferramentas corresponde a um grande desafio.

Um meio termo entre os dois níveis de descrição corresponde a assumir o modelo unidimensional com condições periódicas de contorno, que corresponde à forma mais simples de interação local que preserva alguma influência topológica. A forma simplificada com que a interação somente entre primeiros vizinhos é introduzida possibilita a análise dos comportamentos individuais e das contribuições de cada oscilador para a sincronização coletiva. A segunda parte do texto é inteiramente dedicada à essa configuração do sistema

4.1 Dinâmica de acoplamento fraco e árvore de sincronização

Em uma dimensão com condições periódicas de contorno o modelo de Kuramoto assume um caráter localmente acoplado com interação somente entre os dois primeiros vizinhos, com as evolução temporal de cada oscilador descrita pelas equações de movimento

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + K [\sin(\theta_{n-1} - \theta_n) + \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)], \quad (4.1)$$

com condições periódicas de contorno $\theta_{N+1} = \theta_1$ e $\theta_0 = \theta_N$. Seguindo de perto as primeiras análises do modelo realizadas por Zheng *et al.* [76, 77], vamos focar a atenção no comportamento dinâmico do sistema no regime dessincronizado (com ausência de travamento de fase). Para demonstrar as características gerais apresentadas vamos considerar um sistema com $N = 13$ osciladores e frequências naturais obtidas a partir de uma distribuição uniforme definida no intervalo $[-1, 1]$, como mostra a tabela 4.1.

$\omega_1 = 0.519158$	$\omega_2 = -0.502716$	$\omega_3 = 0.752939$	$\omega_4 = 0.03112$
$\omega_5 = -0.446421$	$\omega_6 = -0.597881$	$\omega_7 = 0.966028$	$\omega_8 = -0.327333$
$\omega_9 = -0.761618$	$\omega_{10} = -0.651343$	$\omega_{11} = 0.76217$	$\omega_{12} = 0.927337$
$\omega_{13} = -0.67144$	-	-	-

Tabela 4.1: Frequências naturais do sistema com $N = 13$ osciladores considerado nas simulações.

Na situação de acoplamento nulo ($K = 0$) a presença dos demais osciladores não interfere nos movimentos individuais, sendo a frequência instantânea de cada oscilador dada por sua frequência natural $\dot{\theta}_n = \omega_n$. Para pequenos valores de K observa-se que $\dot{\theta}_n$ varia oscilatoriamente ao redor da sua frequência natural, e conforme o valor do acoplamento é elevado as amplitudes das oscilações aumentam, mostrando uma tendência de aproximação de centros de oscilação entre dois osciladores vizinhos. Esses efeitos podem ser observados na figura 4.1 para algumas frequências instantâneas: a figura à esquerda mostra as oscilações em torno da frequência natural; na figura à direita é possível observar a aproximação dos centros de oscilação* entre os osciladores vizinhos ω_{11} e ω_{12} , e também para os osciladores ω_5 e ω_6 .

Para valores maiores de acoplamento a competição entre interações vizinhas torna o comportamento das frequências instantâneas extremamente complexo, dificultando a análise da evolução temporal dos osciladores. No entanto é possível definir uma frequência média

$$\langle \dot{\theta}_n \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_n(t) dt, \quad (4.2)$$

de forma a minimizar os efeitos das flutuações e permitir uma análise inicial mais clara da contribuição da interação na sincronização do sistema. A figura 4.2 mostra o comportamento das frequências médias em função do acoplamento.

*O comportamento oscilatório de $\dot{\theta}_n$ apresenta um valor médio $\langle \dot{\theta}_n \rangle$ em torno do qual as oscilações ocorrem, denominado centro de oscilação.

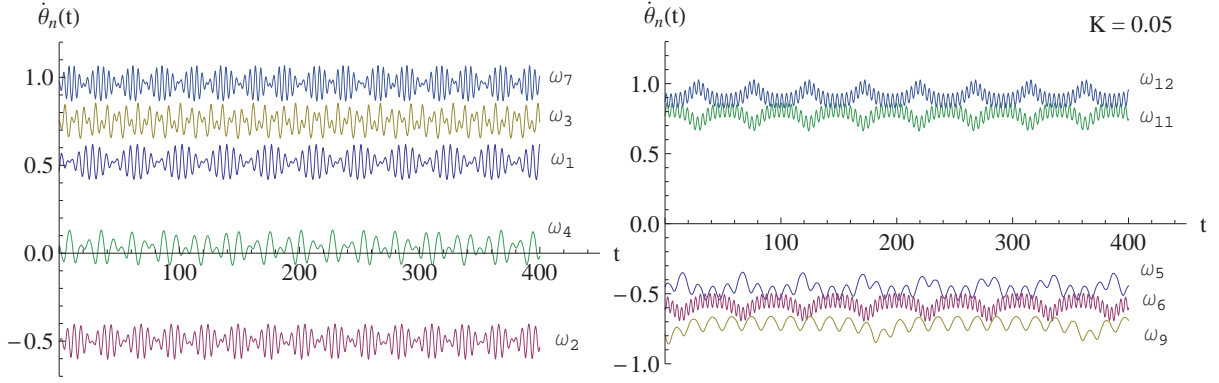


Figura 4.1: Evolução temporal das frequências instantâneas de alguns dos osciladores do sistema no regime de acoplamento fraco ($K = 0.05$). A figura à esquerda mostra as pequenas flutuações em torno das frequências naturais, enquanto a figura à direita mostra a aproximação dos centros das oscilações: na parte superior os valores médios $\langle \dot{\theta}_{11} \rangle$ e $\langle \dot{\theta}_{12} \rangle$ se aproximam, e na parte inferior o mesmo efeito é observado para $\langle \dot{\theta}_5 \rangle$ e $\langle \dot{\theta}_6 \rangle$.

O fato notável que se observa no comportamento das frequências médias é a estrutura de uma árvore de transições, responsável pela formação de clusters sincronizados na região anterior ao acoplamento crítico K_s onde ocorre a sincronização plena $\dot{\theta}_n = \text{constante}$. Uma análise minuciosa para diferentes realizações de frequências naturais e tamanhos do sistema mostra a existência de três tipos de transições oriundas do aumento da constante de acoplamento.

- A) Sincronização entre dois osciladores adjacentes (ou clusters adjacentes) com frequências próximas. A transição aparece como dois ramos mesclando-se em um único para um dado valor do acoplamento.

Essa transição é a mais comumente encontrada no sistema. Na figura 4.2 ela pode ser observada perto de $K = 0$ (osciladores ω_{11} e ω_{12} , por exemplo), e para valores mais elevados do acoplamento na forma de sincronização oscilador-cluster ($K \approx 0.7$ quando o oscilador ω_7 sincroniza-se com o cluster formado pelos osciladores ω_{1-6} e ω_{13}) ou cluster-cluster ($K \approx 0.65$ quando o cluster $\omega_{5,6}$ sincroniza-se com o cluster $\omega_{1-4,13}$). Todas as regiões no gráfico denotadas por A representam esse tipo de transição.

- B) Sincronização entre dois osciladores não adjacentes (ou clusters não adjacentes) com frequências próximas, enquanto os osciladores entre eles apresentam frequências consideravelmente diferentes.

Esse tipo de transição é responsável pela formação de clusters sincronizados não localmente e pode aparecer pela união de dois ou mais ramos. Na figura 4.2 ela aparece em duas regiões: em $K \approx 0.25$ a transição sincroniza o oscilador ω_8 com o cluster $\omega_{5,6}$, e em $K \approx 0.4$ causando a sincronização entre os osciladores ω_1 e ω_4 .

- C) Dessincronização de um oscilador pertencente a um cluster.

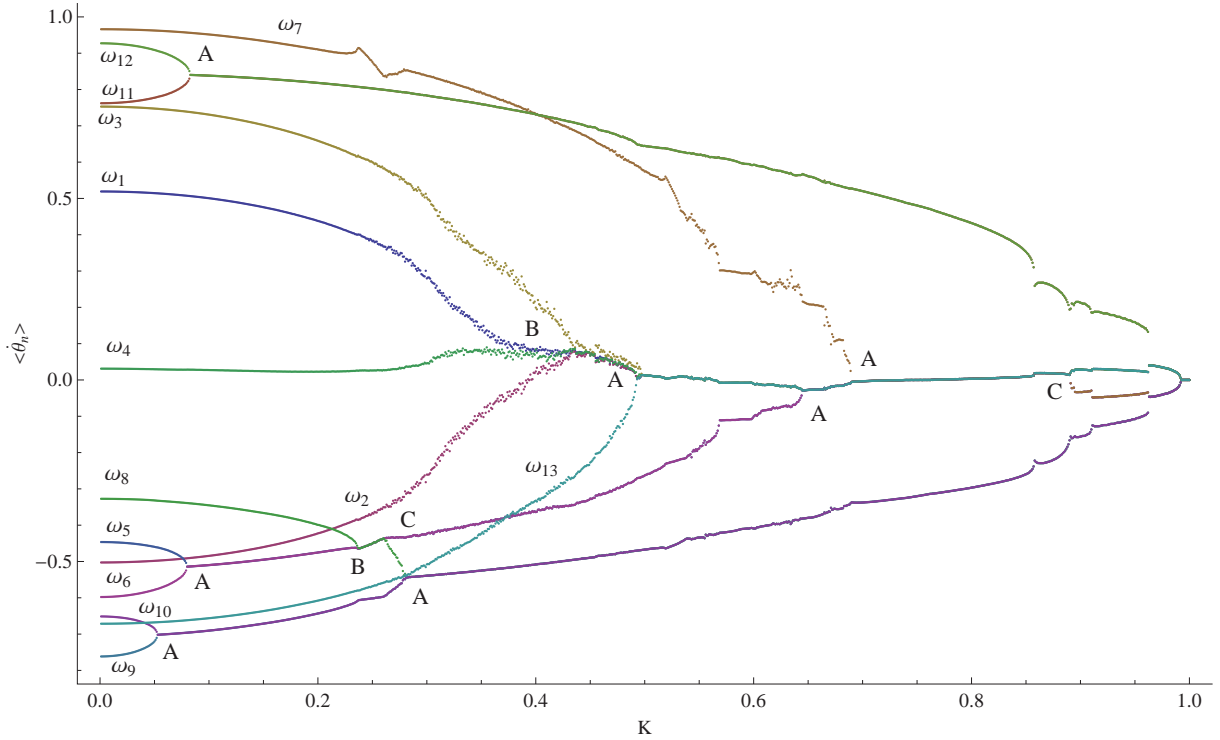


Figura 4.2: Estrutura de árvore de transições nas frequências médias nos osciladores em função do acoplamento K , responsável pela criação de clusters sincronizados. As regiões denotadas por A representam sincronização entre osciladores (ou clusters) adjacentes; B denota a sincronização entre osciladores (ou clusters) não adjacentes; a dessincronização de um oscilador localizado na extremidade de um cluster é denotada por C . Após uma sequência de transições dois grandes clusters são formados, e em $K = K_s$ eles se unem em um único grupo com $\dot{\theta}_n = \Omega$.

A dessincronização ocorre com um oscilador localizado na extremidade de um cluster, e é devida à competição entre dois clusters vizinhos. Ela pode ser observada em $K \approx 0.26$ quando o oscilador ω_8 dessincroniza-se do cluster $\omega_{5,6}$ para posteriormente sincronizar-se com o cluster $\omega_{9,10}$, e também em $K \approx 0.88$ quando ω_7 desincroniza-se do cluster $\omega_{1-6,13}$ para sincronizar-se com o cluster ω_{8-10} .

Ao descrever o comportamento médio das frequências instantâneas a árvore de sincronização fornece a informação de quais correlações devemos procurar ao analisar a evolução temporal dos osciladores. Se considerarmos primeiro o regime de acoplamento fraco, a análise das séries temporais dos osciladores que apresentam sincronização em média mostra os mais variados tipos de comportamento de oscilação em $\dot{\theta}_n$. Alguns deles são ilustrados na figura 4.3.

Conforme aumentamos a constante de acoplamento um fato realmente surpreendente no comportamento das oscilações é revelado: elas podem ser periódicas, quase-periódicas ou até mesmo caóticas[†]. A sincronização de osciladores caóticos tem chamado o interesse da comu-

[†]Para corroborar essa afirmativa é necessário analisar o espectro de Lyapunov do sistema. Detalhes sobre a análise podem ser encontrados nos trabalhos de Zheng *et al.* [76, 77], visto que esse procedimento encontra-se

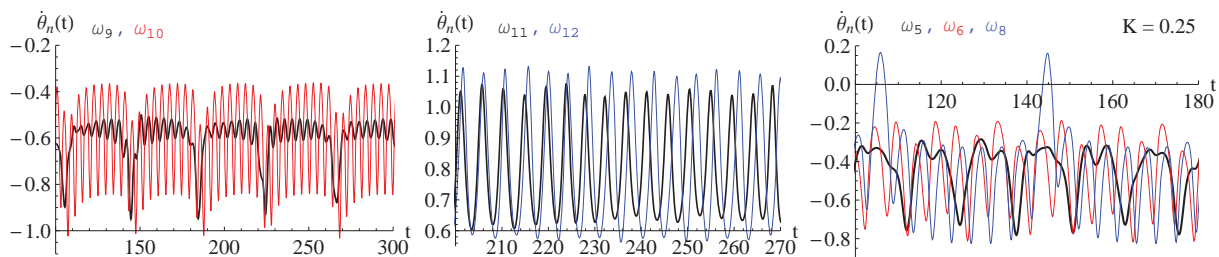


Figura 4.3: Ilustração de alguns dos diferentes tipos de comportamento das frequências instantâneas para osciladores com mesma frequência média em $K = 0.25$. Esquerda: osciladores ω_9 e ω_{10} com amplitudes distintas de oscilação em $\dot{\theta}$. Centro: osciladores ω_{11} e ω_{12} com amplitude e aceleração instantânea $\ddot{\theta}$ da mesma ordem. Direita: caso de sincronização não local com osciladores ω_5 , ω_6 e ω_8 apresentando comportamentos oscilatórios completamente distintos.

nidade científica recentemente[‡], mas em oposição a esses trabalhos que consideram osciladores caóticos por natureza (em muitos trabalhos foram considerados o acoplamento entre osciladores de Rössler caóticos [97] e hipercaóticos [98]), o modelo de Kuramoto localmente acoplado é formado por osciladores originalmente periódicos cujo comportamento caótico é induzido através do acoplamento.

O aumento contínuo da constante de acoplamento leva o sistema a uma sequência de transições entre regimes periódicos e caóticos. Em um sistema com frequências naturais completamente aleatórias a localização dessas regiões em geral só pode ser obtida através do espectro de Lyapunov, porém para sistemas com simetria a identificação pode ser feita visualmente. Para isso vamos considerar um sistema com as frequências naturais igualmente espaçadas no anel,

$$\omega_n = \frac{\gamma}{N-1} (-2n + N + 1), \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Ao tomar a média das frequências instantâneas e construir a árvore de sincronização (figura 4.4 para o caso com $N = 11$), é possível observar que as transições descritas anteriormente podem aparecer de uma forma mais geral. Na região com $K \approx 0.41$ aparecem transições de dessincronização (C_1) que destroem o cluster inicial formado por dois osciladores (ω_{4-5} e também ω_{7-8}) mas não levam os osciladores a se sincronizarem com outro cluster: a frequência média deles se estabiliza em uma frequência equidistante dos dois osciladores (ou clusters) mais próximos. O segundo tipo de transição diferente que aparece corresponde à união final entre os ramos, em $K = K_s$: para N ímpar sempre ocorre a formação de três clusters que colapsam simultaneamente quando K atinge o acoplamento crítico de sincronização (A_1). Por último é importante notar que sob essa simetria não existem transições do tipo B (sincronização não local). O motivo ficará claro mais a frente.

Os processos dinâmicos responsáveis pela primeira transição diferenciada do caso com simetria ainda não são compreendidos, porém o segundo tipo de transição corresponde a um

fora do escopo do texto.

[‡]Para uma introdução sobre sincronização de osciladores caóticos os trabalhos iniciais de Rosenblum *et al.* [99, 100], Hu *et al.* [101] e Zhang *et al.* [102] consistem em uma ótima referência.

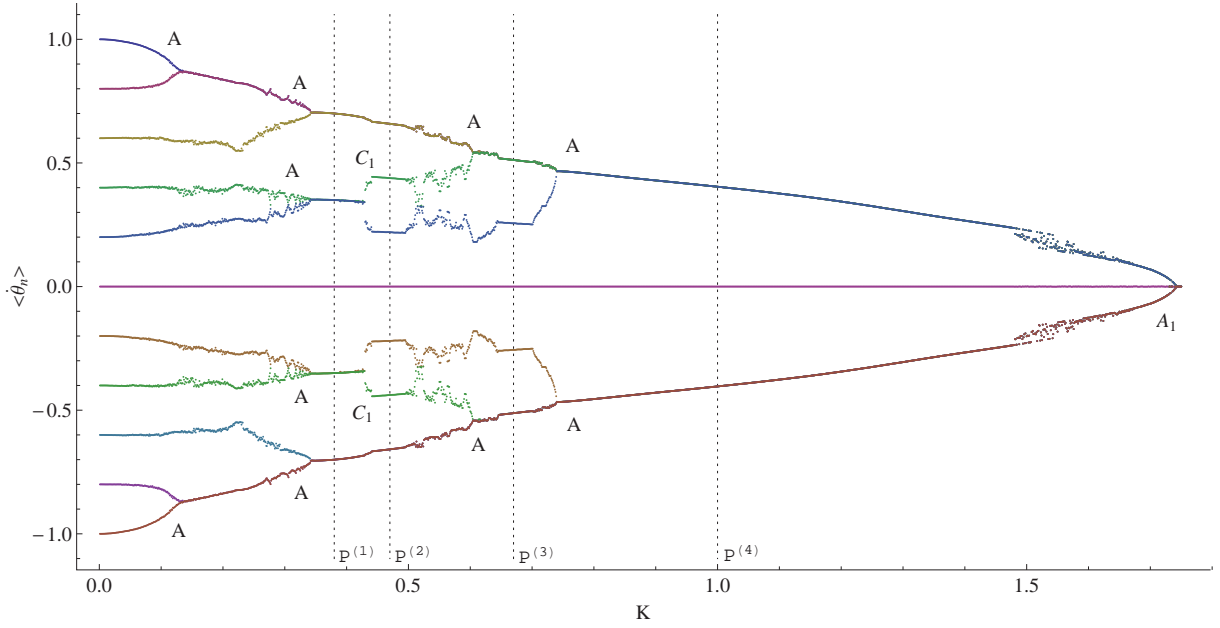


Figura 4.4: Árvore de sincronização para o sistema com $N = 11$ e frequências naturais igualmente espaçadas descritas por (4.3). Diferente do caso com frequências aleatórias, esse sistema não exibe transição do tipo B (sincronização não local), e apresenta dois tipos de transições diferenciadas: dessincronização entre dois osciladores que leva a formação de platôs equidistantes (C_1); sincronização mútua de três ramos em $K = K_s$ (A_1). A localização dos platôs é indicada pelas linhas pontilhadas verticais representadas por $P^{(n)}$.

fenômeno bastante compreensível. Como o oscilador com frequência $\omega_{(N+1)/2} = 0$ interage simetricamente com os seus dois vizinhos não existe uma direção preferencial para o deslocamento da sua frequência média, portanto ele permanece com a frequência média igual à sua própria frequência natural. Para valores maiores de N é possível que ele agregue outros osciladores próximos e forme um cluster com média nula, que por efeito puro da simetria deve encontrar-se com os dois outros clusters simultaneamente em $K = K_s$.

Apesar das diferenças existentes entre configurações com e sem simetria, ambos os casos exibem transições entre regimes periódicos (ou quase-periódicos) e caóticos, porém no primeiro caso todas as regiões na árvore de sincronização em que os clusters aparecem na forma de platôs de sincronização equidistantes correspondem a regiões com frequências instantâneas periódicas. Para o caso com $N = 11$ aparecem 4 platôs, representados por $P^{(n)}$, cuja localização é representada por linhas pontilhadas em $K_1 = 0.38$, $K_2 = 0.47$, $K_3 = 0.67$ e $K_4 = 1.0$. O comportamento da frequência instantânea de cada oscilador nas regiões periódicas é ilustrado na figura 4.5: cada uma das regiões gera um comportamento periódico de $\dot{\theta}_n$ distinto, mas para valores maiores de K o acoplamento mais intenso tende a aproximar o padrão de oscilação, gerando o comportamento de pulsos periódicos característico do sistema quando próximo à bifurcação sela-nó em $K = K_s$.

Com a localização das regiões periódicas do sistema através da presença de platôs de frequência média equidistantes na figura 4.4 é possível analisar o comportamento das frequências

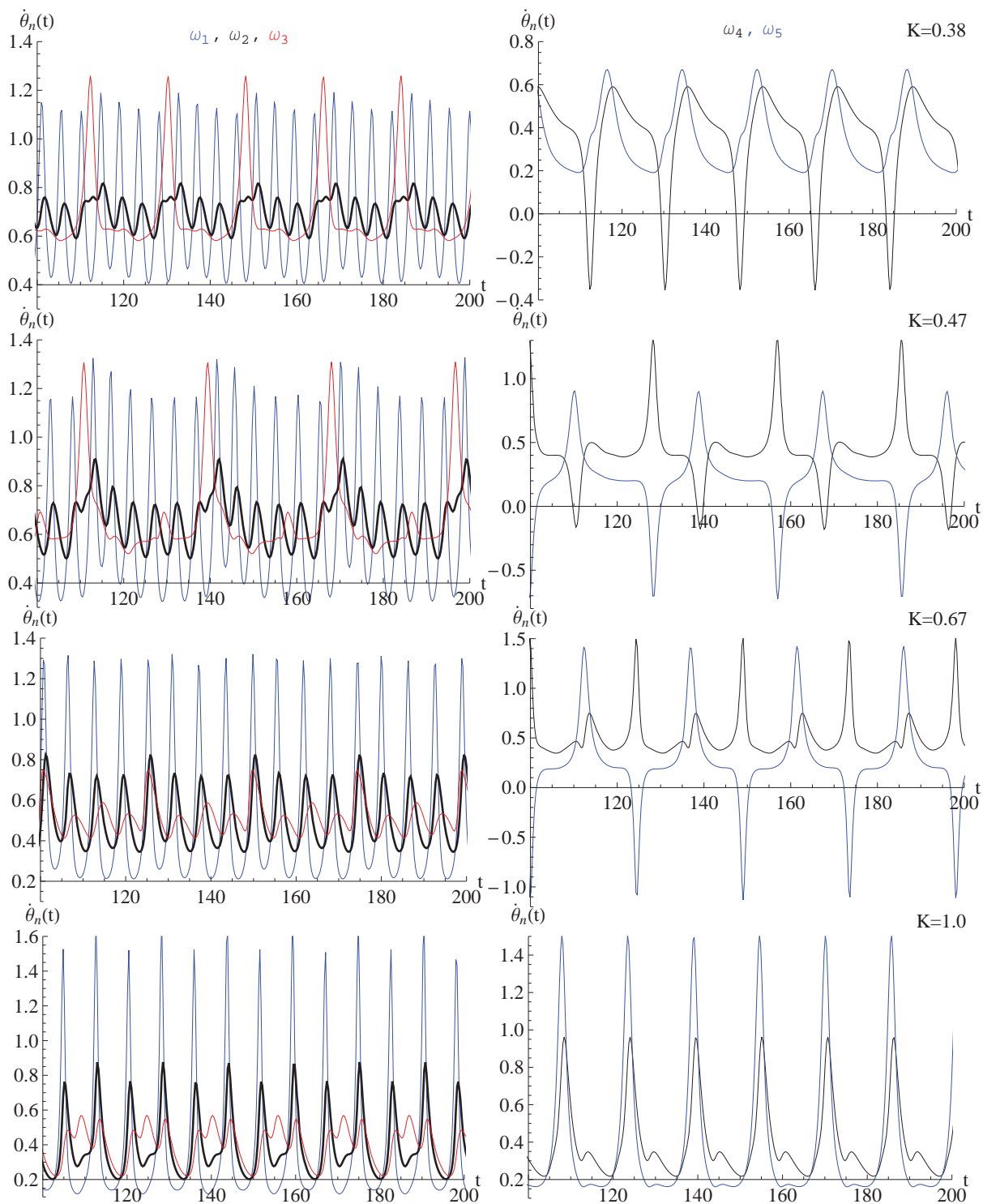


Figura 4.5: Frequências instantâneas dos osciladores em cada um dos platôs observados no caso igualmente espaçado com $N = 11$. A coluna à esquerda mostra os osciladores ω_{1-3} enquanto a coluna à direita exibe os osciladores ω_{4-5} . Os diferentes padrões periódicos de oscilação em $\dot{\theta}_n$ são aproximados para valores mais intensos do acoplamento, até a formação inicial dos pulsos característicos do sistema quando próximo à bifurcação sela-nó.

instantâneas antes e depois da transição do caos para a periodicidade. Para isso vamos focar somente na evolução em conjunto das variáveis $\dot{\theta}_1(t)$ e $\dot{\theta}_2(t)$, como ilustrado na figura 4.6 para $t \in [100, 300]$. Nas regiões de platô a periodicidade é facilmente reconhecida, visto que no gráfico parametrizado $\dot{\theta}_1(t) \times \dot{\theta}_2(t)$ a evolução temporal das variáveis forma um circuito fechado (coluna à direita). A coluna à esquerda ilustra o comportamento caótico do sistema antes de cada platô. Uma explicação para essas transições reside na hipótese de que para alguns valores específicos de K (ou pequenos intervalos) o sistema é capaz de criar e destruir ciclos limites estáveis responsáveis pelo movimento periódico, sendo que a criação de cada ciclo limite para valores maiores do acoplamento ocorre em uma "dimensão" menor do espaço de fase. Essa última afirmativa pode ser inferida pela sequente redução do espaço percorrido por $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ em cada platô. No entanto é importante frisar que essa explicação não passa de uma hipótese, visto que esse comportamento ainda não é compreendido.

Embora o comportamento temporal do sistema seja bastante complexo na região abaixo de K_s , a investigação das séries temporais dos osciladores propicia um melhor entendimento com respeito às transições observadas na árvore de sincronização. Tendo em vista que a aproximação da frequência média entre dois osciladores vizinhos corresponde a um comportamento completamente esperado, El-Nashar *et al.* [78] analisaram o espectro de Fourier dos osciladores procurando compreender a origem da formação de clusters sincronizados não localmente. Eles observaram que esse tipo de sincronização não ocorre ao acaso, uma vez que os osciladores não adjacentes que possuem frequências naturais mais próximas do que comparadas aos osciladores localizados entre eles partilham modos lentos de oscilação, o que permite que eles sincronizem primeiro. No entanto a sincronização não local observada na árvore apresenta forte dependência com as frequências naturais e suas posições no anel, i.e., existe um conjunto (infinito) de configurações que não apresentam esse tipo de transição. Como o sistema descrito pelas frequências naturais (4.3) é caracterizado por osciladores vizinhos sempre equidistantes no espaço das frequências, não é possível a existência de um outro oscilador não adjacente com frequência mais próxima, de forma que esse sistema não pode apresentar esse tipo de sincronização em média.

Em caráter complementar El-Nashar [103] analisou a correlação entre as fases ao longo da árvore de sincronização em termos de parâmetros de coerência

$$r_{n_c} = \frac{1}{N_c} \left| \sum_{n \in \{N_c\}} e^{i\langle \theta_n \rangle} \right|, \quad (4.4)$$

definidos para cada cluster de osciladores sincronizados em média[§]. Entre os resultados obtidos pelo autor o que se destaca é a forma como ocorrem as transições: primeiro os osciladores sincronizam em uma frequência média; na sequência as fases começam a se correlacionar, o que leva a um travamento de fase em média e possibilita a atração de outros osciladores (ou clusters) para formar um cluster maior. Esse tipo de análise promove uma aproximação com

[§]A equação (4.4) corresponde a um observável equivalente ao parâmetro de ordem no caso globalmente conexo. A diferença é que nesse caso ele é definido como a soma coerente somente dos osciladores que formam cada cluster.

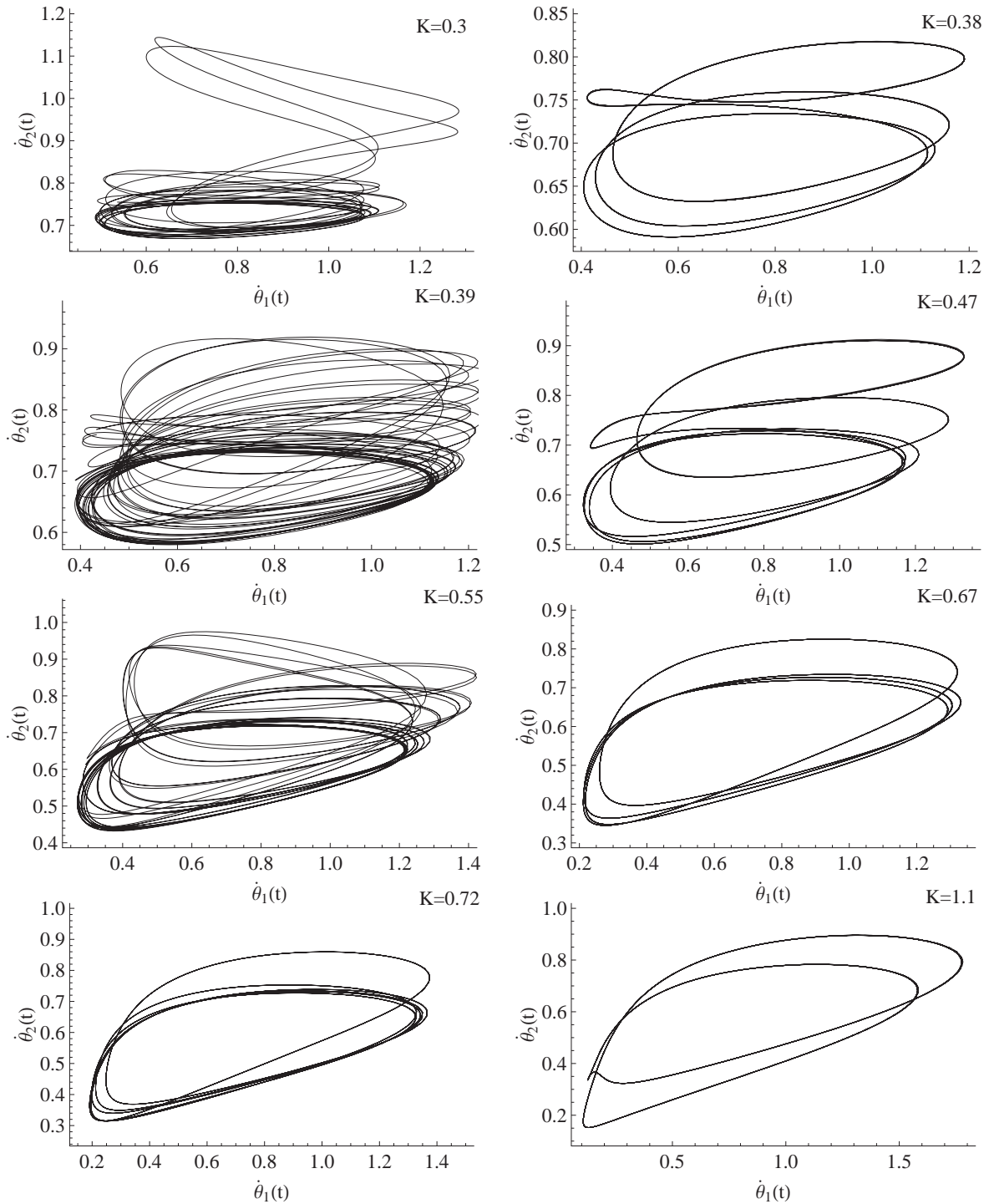


Figura 4.6: Regimes caóticos (coluna à esquerda) e periódicos (coluna à direita) representados no espaço $\dot{\theta}_1(t) \times \dot{\theta}_2(t)$, com $t \in [100, 300]$, para o sistema com $N = 11$ e frequências naturais igualmente espaçadas. Conforme a intensidade do acoplamento é elevada o sistema exibe transições entre os dois regimes. A comparação entre as duas colunas mostra a redução da região acessível no espaço de fase para valores maiores de K , uma vez que as variáveis acessam uma região menor quando no regime periódico.

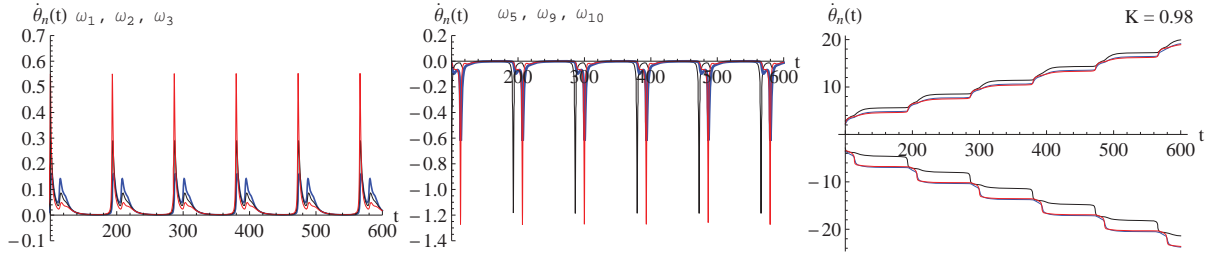


Figura 4.7: Figuras à esquerda e central: pulsos nas frequências instantâneas causados pelos deslizes de fase quando o sistema encontra-se perto da bifurcação sela-nó. Direita: saltos quantizados dos deslizes.

as técnicas desenvolvidas para tratar sistemas globalmente conexos, no entanto o alto grau de complexidade das interações locais gera muitas dificuldades para um tratamento analítico, seja ele de caráter dinâmico ou estatístico (isso pode ser inferido a partir da definição dos parâmetros de coerência, que não podem ser escrito em termos das equações de movimento).

Em resumo, na análise da árvore de sincronização foi observado que o aumento do acoplamento gera uma sequência de transições de sincronização média de três tipos básicos, resultando na formação de dois clusters finais próximo ao acoplamento crítico de sincronização. Quando $K = K_s$ os dois clusters são unidos e os osciladores passam a ser sincronizados plenamente, com $\dot{\theta}_n = \Omega$. Porém, na iminência da sincronização, i.e., valores de K muito próximos K_s , o comportamento do sistema muda drasticamente, o que torna necessário uma análise mais aprofundada.

4.2 Iminência da sincronização

Para valores grandes de acoplamento, próximos do acoplamento crítico K_s , é possível observar que os osciladores apresentam as fases praticamente travadas (com uma variação muito lenta) por um longo tempo, e após um período característico elas saem simultaneamente desse estado em um pulso ou "explosão" (*burst*). Após um período curto elas voltam novamente ao estado quase travado e repetem o procedimento indefinidamente.

Durante o período de tempo com quase travamento de fase as frequências instantâneas são descritas por $\dot{\theta}_n \approx 0$, o que implica em $\theta_n \approx \text{constante}$ ($n = 1, \dots, N$). No momento em que o pulso ocorre as frequências instantâneas variam abruptamente, gerando uma variação simultânea na fase de cada oscilador. Como após a explosão as frequências instantâneas voltam a ser aproximadamente nulas as fases encontram-se novamente em uma região aproximadamente constante. Esse fenômeno é comumente chamado de deslize de fase porque o novo platô alcançado pelas fases é sempre equidistante do anterior, o caracteriza uma quantização do deslize. A figura 4.7 ilustra os pulsos nas frequências instantâneas resultantes dos deslizes, que aparecem na forma de degraus caracterizando saltos quantizados.

Para compreender o que causa os deslizes simultâneos vamos considerar um valor de K

infinitesimalmente acima de K_s e um conjunto de fases travadas $\bar{\theta}_n(K)$. Sob essa condição qualquer solução que satisfaça

$$\bar{\theta}_{n+1}(K, \mathbf{m}) - \bar{\theta}_n(K, \mathbf{m}) = \bar{\theta}_{n+1}(K) - \bar{\theta}_n(K) + 2\pi m_n, \quad (4.5)$$

também é uma solução com travamento de fase, com $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n, \dots, m_N)$ e m_n correspondendo a valores inteiros. Se o valor do acoplamento for reduzido abaixo de K_s a solução sincronizada perde a estabilidade via uma bifurcação sela-nó, o que cria um fantasma (*ghost*) na região onde existia o ponto fixo. A região do fantasma é caracterizada como uma região do espaço de fase que atrai os osciladores e faz com que eles fiquem presos ali por um determinado intervalo de tempo, até escaparem novamente.

Agora considere que $\Delta\theta_n$ representa a variação da fase θ_n decorrente do deslize. Se as variáveis dinâmicas do sistemas fossem definidas no intervalo $(-\infty, \infty)$, então a região do fantasma apresentaria simplesmente o comportamento característico de gargalo (*bottleneck*), onde as variáveis passam lentamente pela região e depois tendem a um dos limites $\pm\infty$. Mas como sistema é descrito por variáveis 2π -periódicas o deslize de fase observado é essencialmente um movimento realizado pelo sistema ao longo de um circuito fechado, retornando à mesma condição inicial após a variação de 2π . Lembrando que a região de travamento é caracterizada por diferenças de fase, a única forma do sistema retornar ao seu estado original é se os deslizos forem descritos por deslocamento de fase que satisfaçam a condição

$$\sum_{n=1}^N \Delta\theta_n = 0. \quad (4.6)$$

Para que as diferenças de fase após o deslize sejam equivalentes às anteriores é necessário que o ganho de fase total dentro de cada argumento da função seno seja nulo ou igual a $\pm 2\pi$, i.e.,

$$\Delta\theta_{n+1} - \Delta\theta_n = 0, \pm 2\pi, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.7)$$

Combinando as duas equações é possível concluir que os deslizos são representados pelas quantidades quantizadas

$$\Delta\theta_n = 0, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{4\pi}{N}, \dots, \pm \frac{2\pi(N-1)}{N}, 2\pi, \quad (4.8)$$

onde o valor preciso $\Delta\theta_n$ de cada oscilador depende da configuração $\{\omega\}_N$ no anel.

A análise do comportamento dos deslizos de fase na iminência da sincronização mostra que o período T entre cada explosão aumenta conforme K tende a K_s , sendo caracterizado pela lei de escala

$$T \propto (K_s - K)^{-1/2}, \quad (4.9)$$

conforme pode ser observado na figura 4.5. Esse resultado é consistente com o esperado a partir de uma bifurcação sela-nó, visto que sob a forma normal da bifurcação,

$$\dot{x} = K_s - K + x^2, \quad (4.10)$$

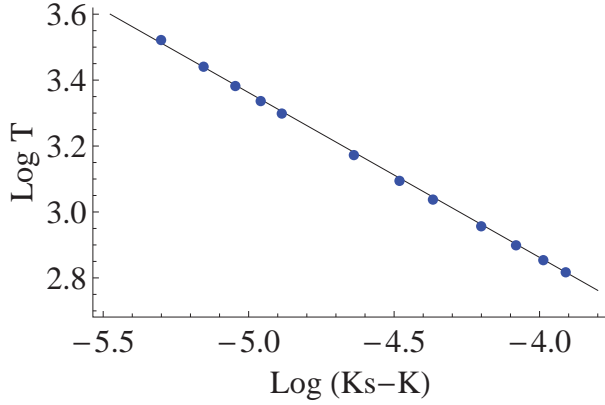


Figura 4.8: Lei de escala que descreve o comportamento do período T entre os pulsos em função do acoplamento na região próxima a K_s . Em escala logarítmica a inclinação de $-1/2$ da reta confirma a predição de uma bifurcação sela-nó.

o tempo T necessário para x mover-se de $x \rightarrow -\infty$ para $x \rightarrow \infty$ é dado por

$$T \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{K_s - K + x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{K_s - K}}. \quad (4.11)$$

Embora através da forma normal da bifurcação sela-nó seja possível prever o escalamento do período em função do acoplamento, a equação (4.11) não fornece nenhuma informação sobre como o sistema determina esse comportamento. A conexão da forma normal com a dinâmica do modelo foi realizada por El-Nashar *et al.* [79], que através de uma extensa investigação numérica observaram a existência de uma diferença de fase $\phi_{n^*} = \theta_{n^*+1} - \theta_{n^*}$ que satisfaz[¶] $|\sin \phi_{n^*}| = 1$ em K_s . Ao se reescrever as equações de movimento em termos das diferenças de fase $\phi_n = \theta_n - \theta_{n+1}$,

$$\dot{\phi}_n = \omega_n - \omega_{n+1} + K (\sin \phi_{n-1} - 2 \sin \phi_n + \sin \phi_{n+1}), \quad n = 1, \dots, N, \quad (4.12)$$

é possível considerar a equação de ϕ_{n^*} na forma

$$\dot{\phi}_{n^*} = K (A - 2 \sin \phi_{n^*}), \quad (4.13)$$

onde

$$A = \frac{\omega_{n^*} - \omega_{n^*+1}}{K} + \sin \phi_{n^*-1} + \sin \phi_{n^*+1}. \quad (4.14)$$

Assumindo $\sin \phi_{n^*} = 1$ em $K = K_s$ a sincronização é alcançada quando $T \rightarrow \infty$, o que ocorre com $A = 2$. Na vizinhança da bifurcação é possível tomar $A \approx 2$, visto que essa condição é satisfeita na maior parte do período, e obter uma expressão para T integrando a equação (4.13),

$$T \approx \frac{\pi}{K} \sqrt{\frac{2}{A(A-2)}}. \quad (4.15)$$

Através da simulação numérica do sistema é possível observar que $K_s \approx AK/2$, e ao inserir esse resultado em (4.15) obtemos a expressão final do período T entre os deslizes de fase,

$$T \approx \sqrt{\frac{\pi^2}{2K_s(K_s - K)}}, \quad (4.16)$$

[¶]Esse resultado já havia sido descrito por Strogatz e Mirollo [49] como uma condição resultante da bifurcação sela-nó em uma cadeia de osciladores. No entanto, como será mostrado mais a frente, no sistema com condições periódicas de contorno e frequências naturais aleatórias ela deve ser tomada na forma $|\sin \phi_{n^*}| \approx 1$, sendo a aproximação válida somente para valores de N não muito pequenos (tipicamente maiores do que $N = 10$).

que através de uma boa aproximação concorda com o resultado esperado na equação (4.11).

Se considerarmos a aproximação na vizinhança da bifurcação considerada acima na equação de movimento (4.13) é possível reescrevê-la na forma

$$\dot{\phi}_{n^*} \approx 2(K_s - K \sin \phi_{n^*}), \quad (4.17)$$

cuja solução fornece as dependências temporais de ϕ_{n^*} e $\dot{\phi}_{n^*}$:

$$\phi_{n^*}(t) \approx 2 \arctan \left[\frac{K + \sqrt{K_s^2 - K^2} \tan \left(\sqrt{K_s^2 - K^2} t \right)}{K_s} \right], \quad (4.18a)$$

$$\dot{\phi}_{n^*}(t) \approx \frac{2K_s(K_s^2 - K^2) \sec^2 \left(\sqrt{K_s^2 - K^2} t \right)}{K_s^2 + \left[\sqrt{K_s^2 - K^2} \tan \left(\sqrt{K_s^2 - K^2} t \right) \right]^2}. \quad (4.18b)$$

Tomando a aproximação $\dot{\theta}_n \approx \Omega$ (para todo $n \neq n^*$) nas equações de movimento e escrevendo as diferenças de fase em termos de ϕ_{n^*} ,

$$\sin \phi_n = \sin \phi_{n^*} + \frac{1}{K_s} \sum_{j=n+1}^{n^*} (\Omega - \omega_j), \quad n = 1, \dots, n^* - 1, \quad (4.19a)$$

$$\sin \phi_n = \sin \phi_{n^*} - \frac{1}{K_s} \sum_{j=n^*+1}^n (\Omega - \omega_j), \quad n = n^* + 1, \dots, N, \quad (4.19b)$$

a descrição dos deslizes de fase dos osciladores pode ser determinada como resultante do comportamento de $\phi_{n^*}(t)$:

$$\phi_n = \arcsin \left(a_n^{(1)} + \sin \phi_{n^*} \right), \quad \dot{\phi}_n = \frac{\dot{\phi}_{n^*} \cos \phi_n}{\sqrt{1 - \left(a_n^{(1)} + \sin \phi_{n^*} \right)^2}}, \quad (4.20a)$$

para $n = 1, \dots, n^* - 1$ e

$$\phi_n = \arcsin \left(-a_n^{(2)} + \sin \phi_{n^*} \right), \quad \dot{\phi}_n = \frac{\dot{\phi}_{n^*} \cos \phi_n}{\sqrt{1 - \left(-a_n^{(2)} + \sin \phi_{n^*} \right)^2}}, \quad (4.20b)$$

para $n = n^* + 1, \dots, N$, onde

$$a_n^{(1)} = \sum_{j=n+1}^{n^*} (\Omega - \omega_j), \quad a_n^{(2)} = \sum_{j=n^*+1}^n (\Omega - \omega_j). \quad (4.21)$$

Uma vez que todas as diferenças de fase são escritas em termos de $\phi_{n^*}(t)$, assim como as derivadas em termos de $\dot{\phi}_{n^*}(t)$, os valores de ϕ_n aparecem deslocados entre si por uma constante que depende das frequências naturais localizadas entre os osciladores ω_n e ω_{n^*} , como pode ser observado na figura 4.4, de forma que na iminência da bifurcação as mudanças abruptas de ϕ_{n^*} são difundidas entre os osciladores do anel através da interação entre os vizinhos próximos.

Embora esse tratamento aproximado permita descrever com boa aproximação o comportamento do sistema na iminência da sincronização, ele não fornece informação a respeito da dependência do acoplamento crítico K_s em função das frequências naturais, ou do tamanho N do sistema. Para tentar resolver esse problema Muruganandam *et al.* [80] desenvolveram um algoritmo computacional baseado no método dos multiplicadores de Lagrange [104], como será mostrado na seção a seguir.

4.3 Método de multiplicadores de Lagrange para determinação do acoplamento crítico

Para a existência de um estado sincronizado com travamento de fase é necessário que as equações de movimento apresentem um estado estacionário. Como todos os valores de $K \in (K_s, \infty)$ admitem solução $\dot{\theta}_n = \Omega$ para $n = 1, \dots, N$, o critério para se determinar o acoplamento crítico consiste em calcular o mínimo valor do acoplamento que permite a existência da sincronização.

Na região sincronizada o lado esquerdo das equações de movimento são todos iguais a Ω , de forma que as múltiplas igualdades

$$\begin{aligned} K &= \frac{\Omega - \omega_1}{\sin \phi_N - \sin \phi_1} = \frac{\Omega - \omega_2}{\sin \phi_1 - \sin \phi_2} = \frac{\Omega - \omega_3}{\sin \phi_2 - \sin \phi_3} = \dots \\ &= \frac{\Omega - \omega_N}{\sin \phi_{N-1} - \sin \phi_N} \end{aligned} \quad (4.22)$$

são válidas para qualquer valor de K acima de K_s . Manipulando essas equações é possível escrevê-las todas em termos da variável ϕ_1 (ou de uma variável qualquer),

$$K = \frac{a_2}{\sin \phi_1 - \sin \phi_2} = \frac{a_3}{\sin \phi_1 - \sin \phi_3} = \dots = \frac{a_N}{\sin \phi_1 - \sin \phi_N}, \quad (4.23)$$

onde as constantes a_n são dadas por

$$a_2 = \Omega - \omega_2, \quad (4.24a)$$

$$a_n = a_{n-1} + \Omega - \omega_n, \quad n = 3, \dots, N. \quad (4.24b)$$

O ponto chave para se implementar o método de determinação de mínimo consiste em interpretar as identidades de (4.23) como vínculos entre as variáveis ϕ_n e ϕ_1 ,

$$\Phi_n = \sin \phi_1 - \sin \phi_n - \frac{a_2}{a_n} (\sin \phi_1 - \sin \phi_n) = 0, \quad n = 3, \dots, N. \quad (4.25)$$

Sob a adição do vínculo natural^{||}

$$\Phi_0 = \sum_{n=1}^N \phi_n = 0, \quad (4.26)$$

^{||}Ao se escrever as diferenças de fase em termos de θ_n é fácil ver que a equação (4.26) é uma identidade.

a existência de relações que determinam $\phi_n = f_n(\phi_1)$ para todas as diferenças de fase com $n = 2, \dots, N$ permitem definir função energia (lagrangiana) $E(\phi_1)$,

$$E = \frac{a_2}{\sin \phi_1 - \sin \phi_2} + \lambda_0 \Phi_0 + \sum_{n=3}^N \lambda_n \Phi_n, \quad (4.27)$$

onde os vínculos são inseridos com auxílio dos multiplicadores de Lagrange λ_0 e λ_n . O procedimento de minimização da função, i.e.,

$$\partial_{\phi_n} E = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (4.28a)$$

$$\partial_{\lambda_0} E = 0, \quad (4.28b)$$

$$\partial_{\lambda_n} E = 0, \quad n = 3, \dots, N, \quad (4.28c)$$

fornece uma equação algébrica que vincula os possíveis valores das diferenças de fase,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\cos \phi_n} = 0. \quad (4.29)$$

O conjunto de equações formado por (4.25), (4.26) e (4.29) fornece N equações algébricas para determinação das N diferenças de fase travadas ϕ_n que caracterizam o acoplamento crítico K_s . A solução dessas equações pode ser obtida numericamente através do método de Newton-Raphson [105], que consiste em assumir um conjunto aleatório de valores iniciais $\phi_n^{(0)}$ e procurar a convergência de aproximações cada vez mais precisas da solução real. O valor do acoplamento crítico K_s é obtido ao substituir ϕ_1 e ϕ_n em qualquer das identidades da equação (4.23).

O valor do acoplamento crítico obtido através do método dos multiplicadores de Lagrange fornece uma excelente aproximação com o resultado obtido através da simulação das equações de movimento, sendo a equivalência entre os dois obtida tipicamente com no mínimo 5 ordens de precisão [80]. Mas um resultado realmente importante decorre do vínculo (4.29): a validade da equação em K_s implica a não existência de uma diferença de fase com $|\sin \phi| = 1$. Esse resultado contradiz as hipóteses anteriores utilizadas para descrever o sistema na iminência da sincronização, no entanto a boa aproximação com os resultados numéricos obtidos através das diferentes abordagens sugere a existência de alguma propriedade do sistema ainda não captada.

Capítulo 5

Região síncrona do modelo de Kuramoto localmente acoplado

No capítulo anterior, que serviu como uma introdução ao modelo de Kuramoto localmente acoplado, foi visto que existe uma sincronização média entre conjuntos de osciladores (clusters) para uma região de valores de acoplamento e foi mostrado o comportamento característico desses sistemas na iminência da sincronização plena: $\dot{\theta}_n(t) = \Omega$.

Nesse capítulo o objetivo será a análise da região de sincronização, como descrita nos trabalhos de Tilles *et al.* [106, 107], que não só resolveram o problema do conflito na determinação das propriedades apresentadas no acoplamento crítico (descrito no capítulo anterior) mas também mostraram a existência de múltiplas soluções estáveis em toda a região de sincronização.

Visando tornar claro o processo de determinação do acoplamento crítico e do comportamento das soluções ele foi organizado de forma crescente em complexidade: sistemas mais simples são analisados primeiro para mostrar algumas características específicas que ocorrem na região sincronizada e para introduzir os métodos de solução de equações e análise de estabilidade.

Notas sobre notação do capítulo:

- 1 A função $y = \arcsin x$ é tomada somente no intervalo $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ para facilitar a localização da solução y . Quando necessário considerar soluções no intervalo complementar elas serão especificadas no texto.
- 2 Uma bifurcação sela-nó descreve a colisão entre dois pontos de equilíbrio em um sistema dinâmico. No caso multidimensional $n \geq 2$ ela é caracterizada por um autovalor zero $\lambda_1 = 0$, n_e autovalores com $\text{Re}\lambda_j < 0$ e n_i autovalores com $\text{Re}\lambda_j > 0$, de forma a fornecer $n_e + n_i + 1 = n$. Ao longo do texto a caracterização das bifurcações remete somente aos tipos de pontos fixos criados e não à classificação das mesmas. Seguindo de perto a notação padrão, que pode ser encontrada no livro do Kuznetsov [108], pontos fixos com a parte real positiva (negativa) de todos os autovalores são denominados nós instáveis (estáveis), enquanto a presença de pelo menos um autovalor com sinal oposto aos demais caracteriza um ponto fixo do tipo sela. A única diferença com relação à

notação padrão refere-se à caracterização dos nós: para configurar um nó é necessário que os autovalores sejam todos positivos ou negativos, enquanto a presença de pelo menos um autovalor imaginário com a parte real positiva (ou negativa) configura um foco. Eles se diferenciam na forma como o sistema atinge o ponto fixo: na existência de um nó o sistema desloca-se diretamente na direção do ponto, enquanto um foco é caracterizado por um movimento espiral. Como do ponto de vista de estabilidade um nó e um foco são totalmente equivalentes, a distinção entre eles não se faz necessária no contexto deste capítulo.

5.1 Cadeia de osciladores

O sistema mais simples de osciladores localmente acoplados que se pode construir visando a análise da região sincronizada consiste em uma cadeia, definida pelas equações de movimento

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + K \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (5.1a)$$

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + K [\sin(\theta_{n-1} - \theta_n) + \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)], \quad 1 < n < N \quad (5.1b)$$

$$\dot{\theta}_N = \omega_N + K \sin(\theta_{N-1} - \theta_N). \quad (5.1c)$$

Uma solução plenamente sincronizada exige que os osciladores assumam uma frequência constante $\dot{\theta}_n = \Omega$. A soma das equações de movimento determina Ω como a média das frequências naturais:

$$\Omega = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega_n. \quad (5.2)$$

Como os termos de interação dependem somente das diferenças de fase entre osciladores vizinhos, o sistema é invariante sob translações globais de fase $\theta_n \rightarrow \theta_n + \Theta$. Decorre dessa invariância que a única forma do sistema apresentar uma frequência constante é através do travamento das diferenças de fase dos osciladores. Assim os termos $\sin(\theta_{n+1} - \theta_n)$ são constantes a serem determinadas pelas equações de movimento.

Substituindo (5.2) no conjunto (5.1) e somando as m primeiras equações é possível determinar os termos de interação,

$$K \sin(\theta_{n+1} - \theta_n) = \left(\sum_{j=1}^m \omega_j \right) - m\Omega, \quad m = 1, \dots, N-1, \quad (5.3)$$

que admitem solução se e somente se

$$\max_{1 \leq m \leq N} \left| \left(\sum_{j=1}^m \omega_j \right) - m\Omega \right| \leq K. \quad (5.4)$$

Qualquer valor da constante de acoplamento K que satisfaça (5.4) leva o sistema a um estado sincronizado, mas existe um valor mínimo para o acoplamento que sincroniza o sistema, deno-

minado acoplamento crítico de sincronização K_s e definido por

$$K_s = \max_{1 \leq m \leq N} \left| \left(\sum_{j=1}^m \omega_j \right) - m\Omega \right| = \left| \left(\sum_{j=1}^{n^*} \omega_j \right) - m\Omega \right|, \quad (5.5)$$

onde n^* é o inteiro que maximiza o argumento. A média Ω pode ser eliminada através da mudança de referencial $\theta_n \rightarrow \theta_n - \Omega t$ nas equações de movimento, o que mostra que K_s é definido como o valor absoluto da maior soma sequencial de frequências naturais:

$$K_s^{(\Omega=0)} = \left| \sum_{j=1}^{n^*} \omega_j \right|. \quad (5.6)$$

Voltando à equação (5.3) é possível definir as diferenças de fase $\phi_n = \theta_n - \theta_{n+1}$ e descrever o seu comportamento na região $K \geq K_s$ pelas equações (até o final da seção será assumido $\Omega = 0$)

$$\sin \phi_{n^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n^*} \omega_i}{K}, \quad (5.7a)$$

$$\sin \phi_n = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i}{K}, \quad n \neq n^*. \quad (5.7b)$$

Em $K = K_s$ a equação (5.7a) mostra que $|\sin \phi_{n^*}| = 1$, e para qualquer valor acima do acoplamento crítico a diferença de fase ϕ_{n^*} assume dois ramos de soluções

$$\phi_{n^*}^I(K) = s_{n^*} \arcsin \left(\frac{\left| \sum_{i=1}^{n^*} \omega_i \right|}{K} \right), \quad (5.8a)$$

$$\phi_{n^*}^{II}(K) = s_{n^*} \left[\pi - \arcsin \left(\frac{\left| \sum_{i=1}^{n^*} \omega_i \right|}{K} \right) \right], \quad (5.8b)$$

onde $s_{n^*} = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^{n^*} \omega_i \right)$. Como os dois ramos nascem no mesmo ponto $\phi_{n^*} = s_{n^*} \pi/2$ e possuem estabilidades opostas ($\phi_{n^*}^I$ é estável e $\phi_{n^*}^{II}$ instável [109]), a transição do sistema para o estado sincronizado é realizada através de uma bifurcação sela-nó. Devido a esse fato é possível utilizar (5.7a) como a definição de uma função $K(\phi_{n^*})$,

$$K(\phi_{n^*}) = \frac{s_{n^*} \left| \sum_{i=1}^{n^*} \omega_i \right|}{\sin \phi_{n^*}}, \quad (5.9)$$

definida somente na região $K \geq K_s$, de forma que K_s corresponda ao mínimo de $K(\phi_{n^*})$ tomado em relação tanto a ϕ_{n^*} como a $\sin \phi_{n^*}$.

As diferenças de fase definidas em (5.7b) também possuem dois ramos de soluções,

$$\phi_n^I(K) = s_n \arcsin \left(\frac{\left| \sum_{i=1}^n \omega_i \right|}{K} \right), \quad (5.10a)$$

$$\phi_n^{II}(K) = s_n \left[\pi - \arcsin \left(\frac{\left| \sum_{i=1}^n \omega_i \right|}{K} \right) \right], \quad (5.10b)$$

onde $s_n = \text{sign}(\sum_{i=1}^n \omega_i)$, mas como $|\sum_{i=1}^n \omega_i| < |\sum_{i=1}^{n^*} \omega_i|$ esses ramos não partilham o mesmo ponto de nascimento. Essa propriedade apresentada por todas as diferenças de fase com $n \neq n^*$ mostra que o método de minimização de uma função $K(\phi)$ só é válido se $\phi = \phi_{n^*}$. Embora até o momento tenha-se assumido que n^* seja único, os resultados são válidos para os casos em que n^* seja degenerado: se $M = \{m_1, m_2, \dots, m_L\}$ for um conjunto de soluções de (5.6) então

$$\left| \sum_{i=1}^{m_1} \omega_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{m_2} \omega_i \right| = \dots = \left| \sum_{i=1}^{m_L} \omega_i \right| = K_s^{(\Omega=0)},$$

de forma que $\sin \phi_{m_i} = \sin \phi_{n^*}$ para $i = 1, \dots, L$ e a equação (5.9) pode ser escrita em termos de qualquer uma dessas diferenças de fases.

Uma vez que o método de determinação do acoplamento crítico e das soluções na região sincronizada foram explicitados, resta determinar o comportamento de K_s em função do tamanho N do sistema. Qualquer prescrição que defina o valor das frequências naturais em função de N admite uma solução analítica $K_s(N)$ devido a (5.5). Mas se admitirmos que as frequências naturais sejam distribuídas a partir de uma função de distribuição de probalibidades com variância finita é possível determinar o comportamento médio do acoplamento crítico $\langle K_s(N) \rangle$ assintoticamente ao se interpretar o sistema como um movimento browniano de extremos fixos [49]. Para tal definimos as variáveis

$$Y_m = \sum_{j=1}^m \omega_j, \quad X_m = Y_m - \frac{m}{N} Y_N, \quad (5.11)$$

com $Y_0 = X_0 = 0$. Como Y_m é a m -ésima soma parcial de incrementos independentes ω_j o conjunto $\{Y_m; m = 1, \dots, N\}$ é um movimento aleatório com N passos definido em \mathbb{R} . De forma similar X é um movimento aleatório de extremos fixos (*pinned*) com passo $\omega_m - \Omega$ e posição instantânea X_m . No limite $N \rightarrow \infty$ existe uma relação entre esses movimentos aleatórios discretos e o movimento Browniano: ao se definir uma variável temporal discreta $t \in [0, 1]$ via $t = \frac{m}{N}$ a distribuição cumulativa de $\frac{Y_m}{\sqrt{N}}$ converge para um processo de Wiener W_t [94, 110]

$$\frac{Y_m}{\sqrt{N}} \xrightarrow{D} W_t, \quad \frac{X_m}{\sqrt{N}} \xrightarrow{D} W_t - tW_0 = W_t^0, \quad (5.12)$$

onde W_t^0 é a ponte browniana*. Qualquer funcional de $\frac{Y_m}{\sqrt{N}}$ converge (em distribuição) aos correspondentes funcionais de W_t^0 de forma que

$$\max_{1 \leq m \leq N} \left| \frac{X_m}{\sqrt{N}} \right| \xrightarrow{D} \max_{0 \leq t \leq 1} |W_t^0|. \quad (5.13)$$

Como o lado direito de (5.13) é sempre uma constante para cada realização de N e o valor maximal de $|X_m|$ é precisamente K_s , o regime assintótico do acoplamento crítico de sincronização fica definido pela média

$$\langle K_s(N) \rangle \sim \sqrt{N}, \quad (5.14)$$

*Uma ponte browniana é um processo estocástico de tempo contínuo S_t definida a partir de um processo de Wiener W_t que satisfaça a condição $S_0 = S_1 = 0$. Uma descrição detalhada sobre esse processo pode ser encontrada no livro escrito por Patrick Billingsley [110].

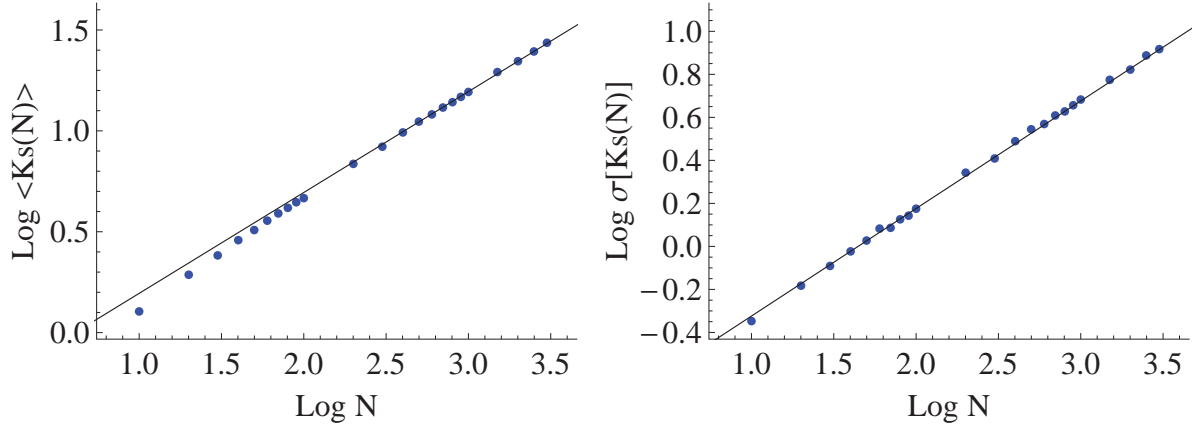


Figura 5.1: Esquerda: comportamento de $\langle K_s(N) \rangle$ para uma cadeia de osciladores com frequências naturais geradas por uma distribuição uniforme no intervalo $[-1, 1]$ com 1000 realizações (pontos); a reta corresponde à função $a\sqrt{N}$ com $a = 0.495$. Direita: desvio padrão dos pontos obtidos ajustados a curva $b\sqrt{N}$ com $b = 0.15$

conforme mostrado na figura 5.1.

5.2 Condições periódicas de contorno: efeitos de simetria

Sob condições periódicas de contorno o modelo de Kuramoto localmente acoplado é descrito pelas equações de movimento

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + K [\sin(\theta_{n-1} - \theta_n) + \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)], \quad n = 1, \dots, N, \quad (5.15)$$

onde $\omega_n \in \{\omega\}_N$ é o conjunto de frequências naturais dos osciladores. A topologia do anel é definida a partir de condições periódicas de contorno $\theta_{N+1} = \theta_1$ e $\theta_0 = \theta_N$. Semelhante ao caso da cadeia de osciladores, existe um valor mínimo para a constante de acoplamento K que leva o sistema para um estado completamente sincronizado onde as frequências instantâneas de oscilação assumem um valor constante $\Omega = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_j$.

O conjunto de equações (5.15) em um estado sincronizado pode ser escrito como

$$\frac{\Omega - \omega_n}{K} = \sin \phi_{n-1} - \sin \phi_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (5.16)$$

onde $\phi_n = \theta_n - \theta_{n+1}$. As condições de travamento para as diferenças de fase $\phi_n(K, \{\omega\})$ dependem do número de osciladores N e do valor da constante de acoplamento na região $K \geq K_s$. Em um estado sincronizado qualquer as variáveis ϕ_n sempre podem ser escritas em termos de uma variável ϕ_{n^*} arbitrariamente escolhida através das relações:

$$\sin \phi_n = \sin \phi_{n^*} + \frac{1}{K} \sum_{j=n+1}^{n^*} (\Omega - \omega_j), \quad n = 1, \dots, n^* - 1, \quad (5.17a)$$

$$\sin \phi_n = \sin \phi_{n^*} - \frac{1}{K} \sum_{j=n^*+1}^n (\Omega - \omega_j), \quad n = n^* + 1, \dots, N - 1. \quad (5.17b)$$

Como a identidade $\sum_{j=1}^N \phi_j = 0$ permite escrever ϕ_N como a soma de todas as fases ϕ_n , com $n = 1, \dots, N - 1$, o conjunto de equações (5.16) é reduzido a uma única equação em duas variáveis (ϕ_{n^*}, K) :

$$\sin \left(\phi_{n^*} + \sum_{n \neq n^*}^{N-1} \phi_n \right) + \sin \phi_{n^*} = \frac{\sum_{j=1}^{n^*} (\omega_j - \Omega)}{K}. \quad (5.18)$$

Assim como no caso da cadeia existe uma escolha apropriada para ϕ_{n^*} que permite descrever a região sincronizada do sistema, mas na topologia de anel as diferenças de fase não são independentes, de forma que tanto a escolha da diferença de fase ϕ_{n^*} como a descrição do comportamento das soluções em função de K não configuram simples extensões do caso anterior. Assim faz-se necessário analisar configurações simplificadas envolvendo condições periódicas de contorno para desenvolver uma compreensão inicial do sistema antes de analisar o caso geral de frequências naturais aleatoriamente distribuídas com dependência em N .

5.2.1 Primeiro caso não trivial: N=3

O primeiro caso não trivial que pode analisado analiticamente corresponde a um sistema com 3 osciladores cujas frequências naturais são dadas por $\omega_1 = -\omega_3 = \omega$ e $\omega_2 = 0$. Naturalmente temos $\Omega = 0$ e a região sincronizada do sistema é descrita por apenas duas equações:

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) + \sin \phi_1 = \frac{\omega}{K}, \quad (5.19a)$$

$$\sin \phi_2 - \sin \phi_1 = 0. \quad (5.19b)$$

Como (5.19b) possui apenas duas soluções,

$$\phi_2^I = \phi_1, \quad \phi_2^{II} = \pi - \phi_1, \quad (5.20)$$

é possível utilizar uma única diferença de fase $\phi = \phi_1$ para reescrever (5.19) como uma única equação $K(\phi)$ para cada tipo de solução:

$$K^I(\phi) = \frac{\omega}{\sin \phi + \sin 2\phi}, \quad K^{II}(\phi) = \frac{\omega}{\sin \phi}. \quad (5.21)$$

A função $K^{II}(\phi)$ apresenta a mesma estrutura obtida com uma cadeia de osciladores, possuindo apenas um mínimo em $K^{II} = \omega$ com $\sin \phi = 1$. Em contrapartida $K^I(\phi)$ possui uma estrutura um pouco mais complexa, a apresentando dois mínimos na região $K \geq 0$. Ao se definir a variável $x = \sin \phi$ os mínimos são escritos como $K_{\pm}^I = f(x_{\pm}^*)$,

$$K_{\pm}^I = \frac{\omega}{x_{\pm}^* \left(1 \pm 2\sqrt{1 - x_{\pm}^{*2}} \right)}, \quad (5.22)$$

onde

$$x_+^* = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{33}}{32}}, \quad x_-^* = -\sqrt{\frac{15 - \sqrt{33}}{32}}. \quad (5.23)$$

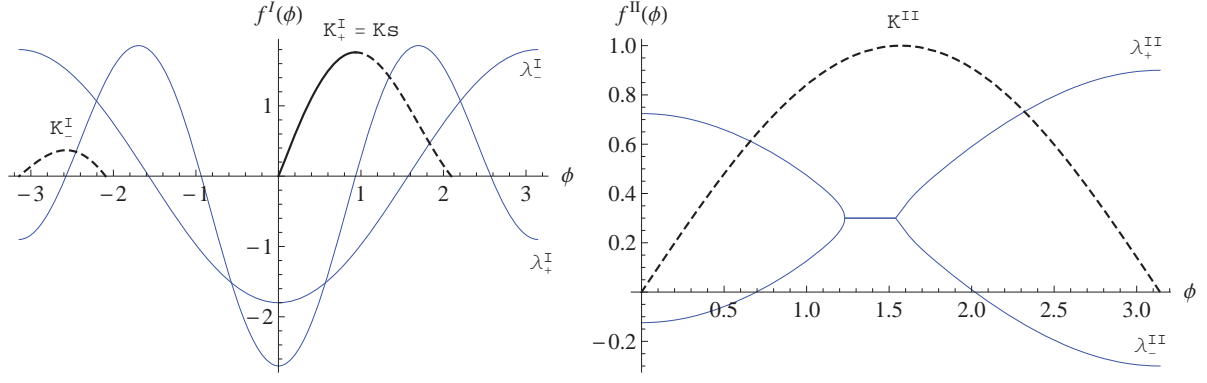


Figura 5.2: Gráfico das funções $1/K^{I,II}(\phi)$ (solução estável em preto e soluções instáveis como linhas tracejadas), $\lambda_+^{I,II}(\phi)$ e $\lambda_-^{I,II}(\phi)$ (azul) para $\omega = 1$. Esquerda: soluções do tipo I mostrando a bifurcação sela-nó estável em K_+^I e a bifurcação sela-nó instável em K_-^I . Direita: bifurcação nó-nó K^{II} com duas soluções instáveis. Nos gráficos os rótulos $f^{I,II}(\phi)$ dos eixos servem apenas para representar os tipos das funções mostradas.

Cada um dos três mínimos gera um par de soluções que se estende por toda a região $K \geq K_s$, cujas estabilidades são caracterizadas pelos autovalores da matriz jacobiana. Para obter a matriz jacobiana J reescrevemos as equações de movimento em termos das diferenças de fase

$$\dot{\phi}_1 = \omega - K [2 \sin \phi_1 - \sin \phi_2 + \sin(\phi_1 + \phi_2)], \quad (5.24a)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega + K [\sin \phi_1 - 2 \sin \phi_2 - \sin(\phi_1 + \phi_2)], \quad (5.24b)$$

de forma que J seja escrita na forma

$$J = K \begin{pmatrix} -2 \cos \phi_1 - \cos(\phi_1 + \phi_2) & \cos \phi_2 \\ \cos \phi_1 - \cos(\phi_1 + \phi_2) & -2 \cos \phi_2 - \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

com os autovalores para os dois tipos de soluções definidos por[†]

$$\lambda_{\pm}^I(\phi) = -2 \cos \phi - \cos 2\phi \pm (\cos \phi - \cos 2\phi), \quad (5.26)$$

$$\lambda_{\pm}^{II}(\phi) = \frac{1}{2} \left(2 \pm \sqrt{2} \sqrt{3 - 2 \cos \phi + 3 \cos 2\phi} \right). \quad (5.27)$$

Conforme pode ser observado na figura 5.2, o primeiro mínimo K_+^I representa uma bifurcação sela-nó: duas soluções são criadas, uma estável com $\phi \rightarrow 0$ e outra instável com $\phi \rightarrow 2\pi/3$ no limite $K \rightarrow \infty$. As soluções geradas a partir dos mínimos K_-^I e K^{II} são instáveis porque a parte real dos autovalores λ_-^I e λ_-^{II} é sempre positiva para todos os valores assumidos por K : K_-^I é uma bifurcação sela-nó instável e K^{II} é uma bifurcação do tipo nó-nó.

A forma funcional $\sin \phi(K)$ das soluções do tipo I após a sincronização pode ser obtida a partir da transformação $z = \sin \phi$, que permite escrever a equação do tipo I em (5.21) como uma equação polinomial

$$-4z^4 + 3z^2 + 2yz - y^2 = 0, \quad (5.28)$$

[†]O acoplamento K aparece como uma constante multiplicativa em todos os autovalores. Como sua presença não altera o sinal de $\lambda_{\pm}^{I,II}$ ele não foi escrito nas equações.

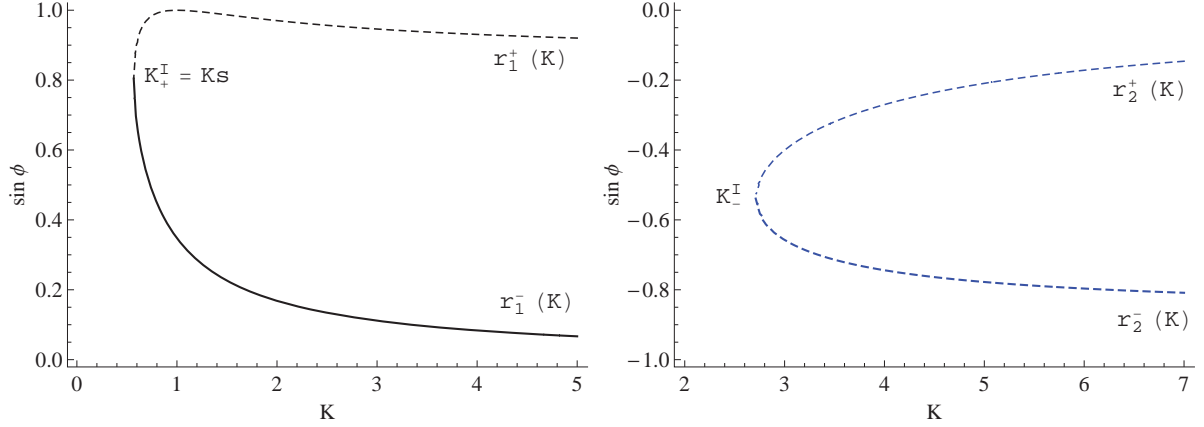


Figura 5.3: Raízes da equação polinomial (5.28) que representam as soluções $\sin \phi(K)$ no diagrama de bifurcação do sistema de $N = 3$ osciladores, com $\omega = 1$. Esquerda: bifurcação sela-nó com soluções r_2^- (estável) e r_2^+ (instável). Direita: soluções instáveis r_2^\pm da bifurcação K_-^I .

com $y = \omega/K$, cujas raízes $r_1^\pm(K)$ e $r_2^\pm(K)$,

$$r_1^\pm = \frac{1}{2}f_0(y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{f_0(y)}{3^{2/34}} - \frac{3 + 16y^2}{3^{1/34}f_0(y)} + \frac{y}{f_1(y)}}, \quad (5.29a)$$

$$r_2^\pm = -\frac{1}{2}f_0(y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{f_0(y)}{3^{2/34}} - \frac{3 + 16y^2}{3^{1/34}f_0(y)} - \frac{y}{f_1(y)}}, \quad (5.29b)$$

onde as funções $f_0(y)$ e $f_1(y)$ são definidas por

$$f_0(y) = \left(-9 + 216y^2 - 8\sqrt{3}\sqrt{-27y^2 + 207y^4 - 64y^6} \right)^{1/3}, \quad (5.30a)$$

$$f_1(y) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{f_0(y)}{3^{2/34}} + \frac{3 + 16y^2}{3^{1/34}f_0(y)}}, \quad (5.30b)$$

fornecem os ramos dos mínimos K_+^I e K_-^I , respectivamente. O comportamento das soluções pode ser visualizado na figura 5.3: $r_1^+(K)$ corresponde à solução instável com $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi = 2\pi/3$; $r_1^-(K)$ corresponde à solução estável com $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi = 0$; $r_2^+(K)$ corresponde à solução instável com $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi = -\pi$; $r_2^-(K)$ corresponde à solução instável com $\lim_{K \rightarrow \infty} \phi = -2\pi/3$.

Com o comportamento das soluções completamente descrito na região sincronizada é possível analisar o espaço de fase do sistema e visualizar a evolução dos pontos fixos em função do acoplamento, conforme ilustrado na figura 5.4 para $\omega = 1$. Para $K < K_s$ o sistema não admite a existência de pontos fixos de forma que $\phi_{1,2}(t)$ apresentam comportamento oscilante. Para $K = 0.5$ (figura 5.4a) a existência de uma bifurcação torna-se evidente pelo afunilamento do campo vetorial em $\phi \approx 0.936$. A bifurcação sela-nó ocorre em $K_s = K_+^I \approx 0.568$, gerando um nó estável (r_1^-) e uma sela (r_1^+). A sela move-se através da linha $\phi_2 = \phi_1$ até o ponto $\phi_1 = \pi/2$, onde se transforma em um nó instável com nascimento das soluções tipo nó instável

de $K^{II}(\phi)$ em $K = 1$ (figuras 5.4b e 5.4c). Na iminência do surgimento da bifurcação K_-^I , as curvas $\dot{\phi}_1 = 0$ e $\dot{\phi}_2 = 0$ deixam de ser circuitos fechados e passam a formar duas superfícies contínuas (cada uma) no espaço de fase; as soluções de $K^{II}(\phi)$ transformam-se em selas e deslocam-se uma na direção de $(\phi_1, \phi_2) = (0, \pi)$ e a outra na direção de $(\pi, 0)$ (figura 5.4d). A bifurcação K_-^I ocorre em $K \approx 2.71$ gerando um nó instável, que move-se para $\phi_1 = \phi_2 = -\pi$, e uma sela que move-se para $\phi_1 = \phi_2 = -2\pi/3$ (figura 5.4e). No limite em que $K \rightarrow \infty$ o sistema apresenta 6 pontos fixos: um nó estável em $(\phi_1, \phi_2) = (0, 0)$; dois nós instáveis em $(2\pi/3, 2\pi/3)$ e $(-2\pi/3, -2\pi/3)$; três selas localizadas em $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$ e (π, π) .

Como o sistema de 3 osciladores com simetria foi completamente descrito na região sincronizada, a sequência natural de análise seria considerar o caso em que nenhuma simetria esteja presente, i.e., sistema descrito por ω_1, ω_2 e $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$ (no referencial em que $\Omega = 0$), com equações no estado sincronizado

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) + \sin \phi_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{K}, \quad (5.31a)$$

$$\sin \phi_1 - \sin \phi_2 = -\frac{\omega_2}{K}. \quad (5.31b)$$

Com um pouco de álgebra a equação (5.31a) pode ser escrita na forma

$$4 \sin^2 \phi_1 \cos^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \cos^2 \phi_2 = \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{K} - \sin \phi_2 \right)^2 + \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 - 1 \right]^2, \quad (5.32)$$

e ao se definir $z = \sin \phi_2$ e $y_{1,2} = \omega_{1,2}/K$, a equação (5.32) é representada por um polinômio de sexta ordem:

$$\begin{aligned} & -4z^6 + 8(y_1 + 2y_2)z^5 + [3 - 4(y_1^2 + 6y_1y_2 + 6y_2^2)]z^4 + 4(y_1 + 2y_2)[-1 + 2y_2(y_1 + y_2)]z^3 \\ & - 2[y_1^2 - 2y_1y_2 - 2y_2^2(1 - y_1^2) + 4y_1y_2^3 + 2y_2^4]z^2 + 4y_1^2(y_1 + 2y_2)z \\ & - y_1^2(y_1 + 2y_2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

A ordem desse polinômio é muito alta para se procurar soluções analíticas do tipo $\sin \phi_2 = f(K)$, mas como a potência em K é menor do que a potência em $\sin \phi_2$ é possível obter soluções analíticas na forma $K^{-1}(\phi_2)$. Para tal reescrevemos o conjunto (5.31) na forma

$$\sin^2 \phi_2 [1 - (\sin \phi_2 - \omega_2 x)^2] = [(\omega_1 + \omega_2)x - \sin \phi_2 - (\sin \phi_2 - \omega_2 x) \cos \phi_2]^2, \quad (5.34)$$

onde $x = K^{-1}$. Como (5.34) é um polinômio de segunda ordem em x , as soluções $K^{-1}(\phi_2)$ são dadas por

$$K_{\pm}^{-1}(\phi_2) = \frac{(\omega_1 + 2\omega_2) \sin \phi_2 (1 + \cos \phi_2) \pm \sqrt{k(\phi_2)}}{2\omega_2(\omega_1 + \omega_2) \cos \phi_2 + \omega_2^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2}, \quad (5.35a)$$

$$k(\phi_2) = \sin^2 \phi_2 [\omega_1^2 \sin^2 \phi_2 + 2\omega_2(\omega_1 + \omega_2) \cos \phi_2 + (\omega_1 + \omega_2)^2]. \quad (5.35b)$$

O comportamento das soluções sincronizadas dado por (5.35) é qualitativamente idêntico ao caso com simetria ilustrado na figura 5.2: K_{+}^{-1} da origem a duas bifurcações, uma sela-nó (nó

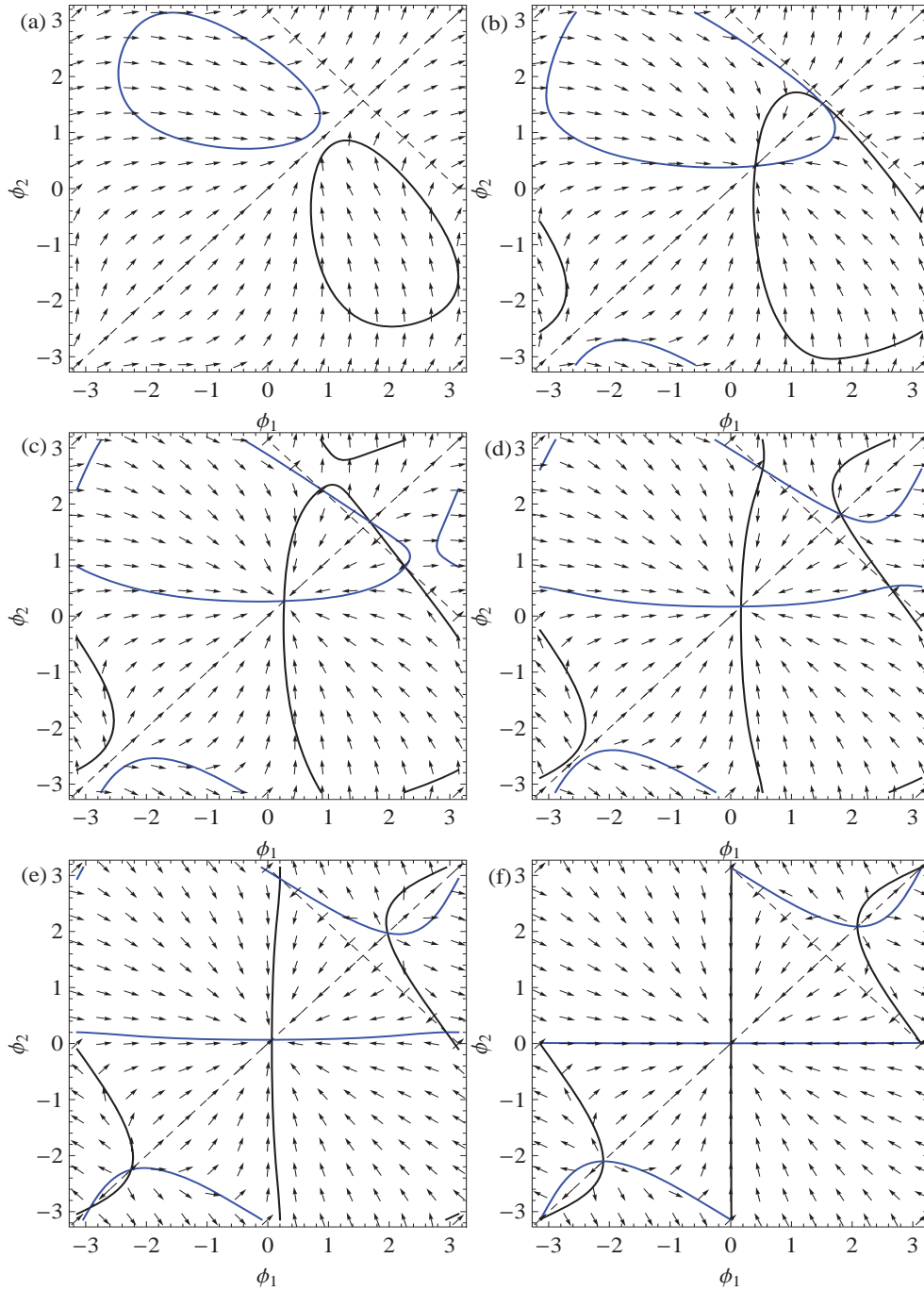


Figura 5.4: Espaço de fase para diferentes valores de K . Curvas pretas correspondem a $\dot{\phi}_1 = 0$, curvas azuis correspondem a $\dot{\phi}_2 = 0$ e as linhas tracejadas correspondem a $\phi_2 = \phi_1$ e $\phi_2 = \pi - \phi_1$. a) Presença do fantasma na iminência da bifurcação sela-nó ($K = 0.5$). b) Pontos fixos estável e instável oriundos de K^I_+ e iminência da bifurcação K^{II} ($K = 0.9$). c) Dois nós instáveis gerados por K^{II} ($K = 1.3$). d) Na iminência da bifurcação K^I_- as curvas $\dot{\phi}_1 = 0$ e $\dot{\phi}_2 = 0$ formam um contínuo no espaço de fase que transforma os nós instáveis de K^{II} em selas ($K = 2.0$). e) Geração de nó e sela instáveis a partir de K^I_- ($K = 5.0$). f) Espaço de fase no limite assintótico de $K \rightarrow \infty$ mostrando os 6 pontos fixos.

estável) em $K_+(\phi_2^*) = K_s$ onde ϕ_2^* é solução de $\partial_{\phi_2} K_+(\phi_2)|_{\phi_2=\phi_2^*} = 0$, e uma sela-nó com nó instável representada por K_-^I ; K_-^{-1} da origem a uma única bifurcação nó-nó representada por K^{II} . O que difere do caso com simetria (parte quantitativa) é que a determinação analítica dos pontos $K(\omega_1, \omega_2)$ e $\phi_2(\omega_1, \omega_2)$ no espaço de soluções onde as bifurcações ocorrem não admite uma representação simples (até o momento não foi obtida uma forma analítica para elas).

5.2.2 N=4 com simetria especular

Se considerarmos um sistema com $N = 4$ osciladores com simetria especular as frequências naturais devem satisfazer as condições $\omega_3 = -\omega_2$ e $\omega_4 = -\omega_1$. Considerando que ω_1 e ω_2 sejam positivos, a simetria impõe que $\sin \phi_1 = \sin \phi_3$, com soluções

$$\phi_3^I = \phi_1, \quad \phi_3^{II} = \pi - \phi_1. \quad (5.36)$$

Considerando primeiro a solução ϕ_3^{II} , as equações no estado sincronizado são escritas na forma

$$\sin(\pi + \phi_2) + \sin \phi_1 = \frac{\omega_1}{K}, \quad \sin \phi_2 - \sin \phi_1 = \frac{\omega_2}{K}. \quad (5.37)$$

A única forma desse sistema admitir solução é no caso especial $\omega_2 = -\omega_1$. Como esse caso será analisado em um contexto mais geral na próxima seção, vamos analisar somente a solução ϕ_3^I , que reduz o sistema a apenas duas equações:

$$\sin(2\phi_1 + \phi_2) + \sin \phi_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{K}, \quad (5.38a)$$

$$\sin \phi_2 - \sin \phi_1 = \frac{\omega_2}{K}. \quad (5.38b)$$

Manipulando a equação (5.38a), é possível escreve-la na forma

$$\sin^2 \phi_1 (1 - \sin^2 \phi_1) (1 - \sin^2 \phi_2) = \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2K} - \sin \phi_2 (1 - \sin^2 \phi_1) \right]^2. \quad (5.39)$$

Definindo $z = \sin \phi_2$ e $y_{1,2} = \omega_{1,2}/K$, e usando (5.38b) como $\sin \phi_1 = z - y_2$, a equação (5.39) pode ser escrita como um polinômio de terceira ordem,

$$\begin{aligned} z^3 (y_2 - y_1) - z^2 (3y_2^2 - 2y_1y_2) + z (3y_2^3 - y_1y_2^2 + y_1 - y_2) \\ - \frac{1}{4} (4y_2^4 - 3y_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2) = 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

cujas raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{2\omega_1\omega_2 - 3\omega_2^2}{3K(\omega_1 - \omega_2)} + \frac{4\omega_1^2\omega_2^2 + 12K^2(\omega_1 - \omega_2)^2 + K^4 f_0^{2/3}(K)}{6K^3(\omega_1 - \omega_2) f_0^{1/3}(K)}, \quad (5.41a)$$

$$\begin{aligned} r_2^\pm = \frac{2\omega_1\omega_2 - 3\omega_2^2}{3K(\omega_1 - \omega_2)} \\ + \frac{-4(1 \pm i\sqrt{3}) [3K^2(\omega_1 - \omega_2)^2 + \omega_1^2\omega_2^2] + (-1 \pm i\sqrt{3}K^4) f_0^{2/3}(K)}{12K^3(\omega_1 - \omega_2) f_0^{1/3}(K)}, \end{aligned} \quad (5.41b)$$

onde a função $f_0(K)$ é definida por

$$f_0(K) = f_1(K) + 3\sqrt{3}\sqrt{f_2(K)}, \quad (5.42a)$$

$$f_1(K) = -8\frac{\omega_1^3\omega_2^3}{K^6} - 9\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2(3\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 + 3\omega_2^2)}{K^4} \quad (5.42b)$$

$$f_2(K) = 16\frac{\omega_1^3\omega_2^3(\omega_1 - \omega_2)^4}{K^{10}} + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^4(27\omega_1^4 - 36\omega_1^3\omega_2 + 2\omega_1^2\omega_2^2 - 36\omega_1\omega_2^3 + 27\omega_2^4)}{K^8} - 64\frac{(\omega_1 - \omega_2)^6}{K^6}. \quad (5.42c)$$

As raízes $r_1(K)$ e $r_2^-(K)$ fornecem o comportamento das soluções travadas de $\sin \phi_2(K)$ para $K \geq K_s$, porém raiz r_2^+ assume valores somente maiores do que $|1|$, não representando uma solução real de $\sin \phi_2$. A partir das soluções é possível construir o diagrama de bifurcação do sistema uma vez que se conheça a estabilidade das soluções. Para tal reduzimos o espaço de fase do sistema ao considerar conjuntos de condições iniciais que satisfaçam $\phi_3(t=0) = \phi_1(t=0)$, sendo $\phi_1(t=0)$ e $\phi_2(t=0)$ gerados aleatoriamente. Assim é possível seguir o mesmo procedimento da seção anterior e escrever as equações de movimento em termos das diferenças de fase ϕ_n ,

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 - \omega_2 - K[2\sin \phi_1 - \sin \phi_2 + \sin(2\phi_1 + \phi_2)], \quad (5.43a)$$

$$\dot{\phi}_2 = 2\omega_2 + 2(\sin \phi_1 - \sin \phi_2), \quad (5.43b)$$

para obter os autovalores da matriz jacobiana

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad (5.44)$$

onde o traço τ e o determinante Δ da matriz são dados por

$$\tau = -2K \cos \phi_1 [1 + 2 \cos(\phi_1 + \phi_2)], \quad (5.45a)$$

$$\Delta = -4K^2 \cos^2\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) [1 - \cos 2\phi_1 - 2 \cos(\phi_1 + \phi_2)]. \quad (5.45b)$$

Nesse ponto encontramos um problema porque as soluções sincronizadas são dadas em termos de $\sin \phi_2$ enquanto os autovalores da jacobiana dependem de ϕ_1 e ϕ_2 . Para resolver este problema primeiro é necessário observar que para cada raiz em (5.41) existem duas soluções ϕ_2 :

$$\phi_2^I(r_1) = \arcsin(r_1), \quad \phi_2^{II}(r_1) = \pi - \arcsin(r_1), \quad (5.46a)$$

$$\phi_2^I(r_2^-) = \arcsin(r_2^-), \quad \phi_2^{II}(r_2^-) = \pi - \arcsin(r_2^-). \quad (5.46b)$$

Como r_1 e r_2^- não dependem de ϕ_1 , é necessário voltar e analisar as equações (5.38) para determinar a dependência $\phi_1 = f(\phi_2)$ para cada solução de (5.46). Uma análise numérica das equações mostra que a relação $\phi_1 = \arcsin(\sin \phi_2 - \frac{\omega_2}{K})$ leva às soluções $\phi_2^I(r_1)$ e $\phi_2^I(r_2^-)$ enquanto $\phi_1 = \pi - \arcsin(\sin \phi_2 - \frac{\omega_2}{K})$ corresponde aos ramos complementares $\phi_2^{II}(r_1)$ e $\phi_2^{II}(r_2^-)$, o que permite calcular os autovalores.

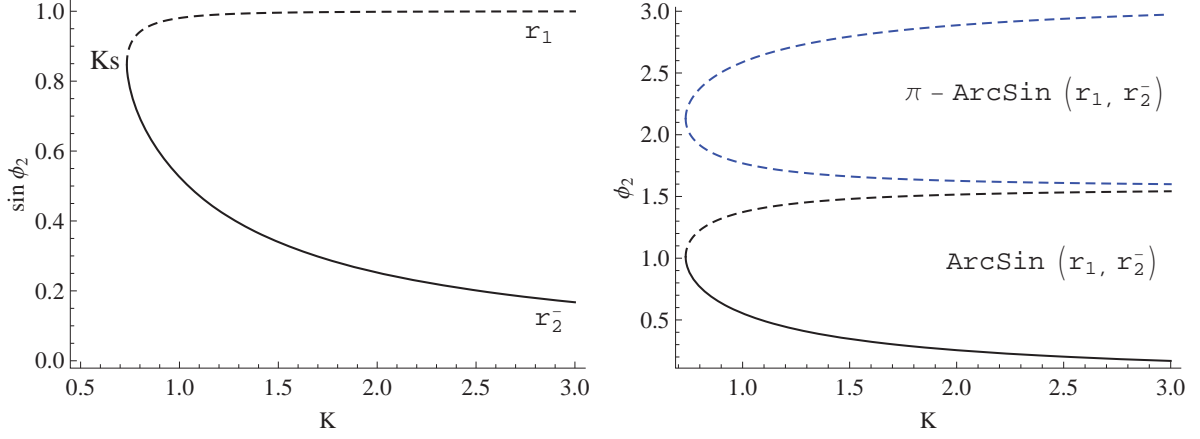


Figura 5.5: Raízes $r_1(K)$ e $r_2^-(K)$ de (5.40) representando o diagrama de bifurcação na região sincronizada para $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 1/3$. Linhas contínuas (tracejadas) representam soluções estáveis (instáveis). Esquerda: Projeção do diagrama de bifurcação no espaço $\sin \phi_2 \times K$ mostrando a bifurcação K_s gerando duas soluções, uma estável com $\sin \phi_2 \rightarrow 0$ e outra instável com $\sin \phi_2 \rightarrow 1$ no limite $K \rightarrow \infty$. Direita: diagrama de bifurcação mostrando a não localidade da bifurcação K_s , que aparece como uma bifurcação sela-nó usual na região $\cos \phi_2 > 0$ e como uma sela-nó não usual na região $\cos \phi_2 < 0$, contendo apenas soluções instáveis.

Na representação $\sin \phi_2 \times K$ duas soluções são criadas na bifurcação K_s (figura 5.5 esquerda). Como $\sin \phi = \sin(\pi - \phi)$ essa representação não mostra que para cada ramo de $\sin \phi_2$ existem na verdade dois ramos no espaço $\phi_2 \times K$, de forma que a bifurcação K_s ocorre simultaneamente em duas regiões do espaço de fase: na região definida por $\cos \phi_2 > 0$ ela aparece como uma bifurcação sela-nó usual, com uma solução estável $\phi_2^I(r_1)$ e uma instável $\phi_2^I(r_2^-)$; na região definida por $\cos \phi_2 < 0$ ela aparece como uma bifurcação sela-nó não usual contendo somente soluções instáveis, sendo $\phi_2^{II}(r_1)$ um nó instável e $\phi_2^{II}(r_2^-)$ uma sela instável (figura 5.5 direita).

No espaço de fase a visualização dos tipos de ponto fixo se torna mais clara, conforme ilustrado na figura 5.6: na iminência da bifurcação K_s é possível visualizar os dois pontos fixos simultâneos sendo formados em $(\phi_1, \phi_2) \approx (0.4, 1)$ e $(\phi_1, \phi_2) \approx (2.5, 2.5)$ (esquerda); para $K > K_s$ é possível visualizar o nó estável em $(\phi_1, \phi_2) \approx (0, 0.5)$ e a sela em $(\phi_1, \phi_2) \approx (1, 1.4)$ criados na região de $\cos \phi_2 > 0$, a sela em $(\phi_1, \phi_2) \approx (2.5, 1.5)$ e o nó instável em $(\phi_1, \phi_2) \approx (3, 2.5)$ (centro); no limite em que $K \rightarrow \infty$ o nó estável move-se em direção a $(0, 0)$, as duas selas movem-se na direção de $(\pi/2, \pi/2)$ até fundirem-se em uma única sela e o nó instável move-se em direção a (π, π) (direita).

A constante de acoplamento crítica pode ser obtida pelo mínimo da função $K(\sin \phi_2) = K(z)$, de forma que $\partial_z K(z)|_{z=z^*} = 0$ calculada implicitamente em (5.40) fornece duas soluções

$$z_{\pm}^* = \frac{\omega_2(2\omega_1 - 3\omega_2) \pm \sqrt{\omega_1^2\omega_2^2 + 3K^2(\omega_1 - \omega_2)^2}}{3K(\omega_1 - \omega_2)}. \quad (5.47)$$

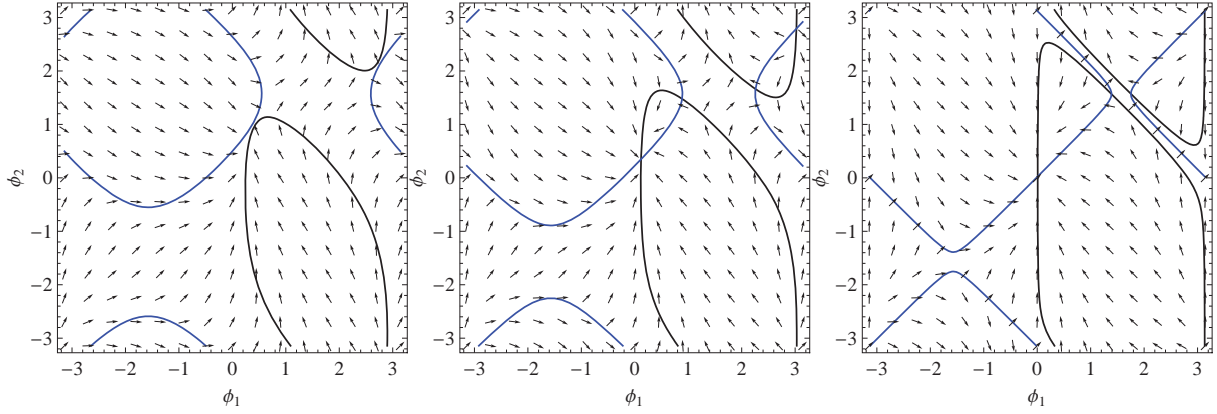


Figura 5.6: Espaço de fase do sistema mostrando a evolução dos pontos fixos em função do acoplamento K para a mesma configuração de frequências naturais. Linhas pretas (azuis) correspondem a $\dot{\phi}_1 = 0$ ($\dot{\phi}_2 = 0$). Esquerda: iminência da bifurcação K_s , mostrando a não localidade da bifurcação ($K = 0.7$). Centro: nó estável e sela instável criados na região com $\cos \phi_2 > 0$ (parte central da figura), e sela e nó instáveis criados na região $\cos \phi_2 < 0$, na parte superior direita da figura ($K = 1.5$). Direita: para valores grandes de acoplamento o nó estável move-se para $(\phi_1, \phi_2) = (0, 0)$, as duas selas instáveis movem-se na direção de $(\pi/2, \pi/2)$ até fundirem-se em uma única sela instável (no limite $K \rightarrow \infty$, não mostrado no gráfico), o nó instável move-se na direção de (π, π) e as curvas deformam-se até formar uma sela instável em $(0, \pi)$, presente somente quando $K \rightarrow \infty$ e não mostrado no gráfico ($K = 20.0$).

As raízes z_{\pm}^* inseridas de volta em (5.40) fornecem quatro soluções:

$$K_s^{\pm, \pm}(\omega_1, \omega_2) = \pm \frac{1}{8\sqrt{2}|\omega_1 - \omega_2|} \sqrt{k_0^{\pm}(\omega_1, \omega_2)}, \quad (5.48)$$

onde a função $k_0^{\pm}(\omega_1, \omega_2)$ é definida por

$$k_0^{\pm}(\omega_1, \omega_2) = 27\omega_1^4 - 9\omega_1^3 \left(4\omega_2 \pm \sqrt{k_1(\omega_1, \omega_2)} \right) + \omega_2\omega_1^2 \left(2\omega_2 \pm 5\sqrt{k_1(\omega_1, \omega_2)} \right) - \omega_1\omega_2^2 \left(36\omega_2 \mp 5\sqrt{k_1(\omega_1, \omega_2)} \right) + 9\omega_2^3 \left(3\omega_2 \mp \sqrt{k_1(\omega_1, \omega_2)} \right), \quad (5.49a)$$

$$k_1(\omega_1, \omega_2) = 9\omega_1^2 - 14\omega_1\omega_2 + 9\omega_2^2. \quad (5.49b)$$

Para o caso considerado (ω_1 e ω_2 positivos) as soluções $K_s^{\pm, +}$ são sempre números imaginários puros conjugados, não representando uma solução física. Já as soluções $K_s^{\pm, -}$ são sempre reais, mas como $K_s^{-, -}$ é sempre negativa o acoplamento crítico de sincronização é dado por

$$K_s = K_s^{+, -}(\omega_1, \omega_2). \quad (5.50)$$

O caso de frequências naturais $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 1/3$ considerado nos gráficos apresenta um acoplamento crítico $K_s \approx 0.734$.

5.2.3 Duas frequências naturais

Considere um sistema com um número par de osciladores tal que as frequências naturais sejam arranjadas na forma:

$$\omega_n = \begin{cases} \omega, & \text{para } n \text{ ímpar} \\ -\omega, & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad (5.51)$$

Na região sincronizada a simetria impõe restrições nas diferenças de fase ϕ_n para $n = 3, \dots, N-1$,

$$\sin \phi_n = \begin{cases} \sin \phi_1, & \text{para } n = 3, 5, \dots, N-1, \\ \sin \phi_2, & \text{para } n = 4, 6, \dots, N-2. \end{cases} \quad (5.52)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem as equações

$$\sin \left[\sum_{n=\text{ímpar}}^{N-1} \phi_n(\phi_1) + \sum_{n=\text{par}}^{N-2} \phi_n(\phi_2) \right] + \sin \phi_1 = \frac{\omega}{K}, \quad (5.53a)$$

$$\sin \phi_1 - \sin \phi_2 = \frac{\omega}{K}. \quad (5.53b)$$

A solução trivial de (5.53) corresponde a tomar $\phi_n = \phi_1$ para n par, $\phi_n = \phi_2$ para n ímpar e $\phi_2 = -\phi_1$, de forma que (5.53a) é escrita na forma

$$\sin \phi_1 = \frac{\omega}{2K}. \quad (5.54)$$

Como esse conjunto de soluções ϕ_n maximiza o lado esquerdo de (5.53a), o acoplamento crítico é dado por

$$K_s = \frac{\omega}{2}, \quad (5.55)$$

visto que não existe outra solução para as equações com $K < K_s$. Mas como cada igualdade em (5.52) admite soluções $\phi_n^+ = \phi_{1,2}$ e $\phi_n^- = \pi - \phi_{1,2}$, todas as possíveis combinações devem ser consideradas para construir o espaço de soluções, de forma que o acoplamento crítico K_s pode ser extremamente degenerado, onde o grau de degenerescência deve depender somente do número de osciladores que compõem o anel.

Para começar a descrever esse sistema, vamos primeiro analisar os subespaços simétricos (bidimensionais) do sistema, obtidos a partir de condições iniciais que satisfaçam cada simetria presente no conjunto de equações (5.52) e (5.53). Definindo

$$\phi_n^+ = \begin{cases} \phi_1, & \text{para } n = 3, 5, \dots, N-1, \\ \phi_2, & \text{para } n = 4, 6, \dots, N-2. \end{cases} \quad (5.56a)$$

$$\phi_n^- = \begin{cases} \pi - \phi_1, & \text{para } n = 3, 5, \dots, N-1, \\ \pi - \phi_2, & \text{para } n = 4, 6, \dots, N-2. \end{cases} \quad (5.56b)$$

as equações de movimento são escritas na forma

$$\dot{\phi}_1 = 2\omega - K [2 \sin \phi_1 - \sin \phi_2 + \sin \Phi^{\pm, \pm, \dots}(\phi_1, \phi_2)], \quad (5.57a)$$

$$\dot{\phi}_2 = -2\omega + 2K (\sin \phi_1 - \sin \phi_2), \quad (5.57b)$$

onde $\Phi^{\pm, \pm, \dots}(\phi_1, \phi_2)$, dado por

$$\Phi^{\pm, \pm, \dots}(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 + \phi_2 + \sum_{n=3,5,\dots}^{N-1} \phi_n^{\pm}(\phi_1) + \sum_{n=4,6,\dots}^{N-2} \phi_n^{\pm}(\phi_2), \quad (5.58)$$

define cada um dos 2^{N-3} subespaços do sistema. A estabilidade das soluções de cada subespaço é descrita pelos autovalores da matriz jacobiana

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad (5.59)$$

com o traço τ e o determinante Δ são definidos por

$$\tau = -K [2(\cos \phi_1 + \cos \phi_2) + \partial_{\phi_1} \Phi \cos \Phi], \quad (5.60a)$$

$$\Delta = 2K^2 [\cos \phi_1 \cos \phi_2 + (\partial_{\phi_1} \Phi \cos \phi_2 - \partial_{\phi_2} \Phi \cos \phi_1) \cos \Phi]. \quad (5.60b)$$

Começando com um sistema com $N = 6$, os subespaços simétricos são definidos por $\Phi^{\pm \pm \pm}$ de forma que a equação (5.53a) assume as seguintes representações em cada subespaço:

$$\Phi^{+++} = (\phi_3^+, \phi_4^+, \phi_5^+) \rightarrow \sin(3\phi_1 + 2\phi_2) + \sin \phi_1 = \frac{\omega}{K}, \quad (5.61a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi^{-++} = (\phi_3^-, \phi_4^+, \phi_5^+) \\ \Phi^{+-+} = (\phi_3^+, \phi_4^+, \phi_5^-) \end{array} \right\} \rightarrow -\sin(\phi_1 + 2\phi_2) + \sin \phi_1 = \frac{\omega}{K}, \quad (5.61b)$$

$$\Phi^{+--} = (\phi_3^+, \phi_4^-, \phi_5^+) \rightarrow -\sin 3\phi_1 + \sin \phi_1 = \frac{\omega}{K}, \quad (5.61c)$$

$$\Phi^{-+-} = (\phi_3^-, \phi_4^+, \phi_5^-) \rightarrow \sin(-\phi_1 + 2\phi_2) + \sin \phi_1 = \frac{\omega}{K}, \quad (5.61d)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi^{--+} = (\phi_3^-, \phi_4^-, \phi_5^+) \\ \Phi^{+--} = (\phi_3^+, \phi_4^-, \phi_5^-) \\ \Phi^{---} = (\phi_3^-, \phi_4^-, \phi_5^-) \end{array} \right\} \rightarrow \sin \phi_1 = \frac{\omega}{2K}. \quad (5.61e)$$

Como o conjunto (5.61) corresponde a todas as possíveis soluções da equação (5.53a), todas as soluções de ponto fixo na região sincronizada podem ser representadas através das funções $K^{-1}(\phi_1)$, obtidas a partir de (5.61) e (5.53b) com a determinação das relações $\phi_2 = f(\phi_1)$ em cada subespaço. As soluções, com os respectivos pontos de bifurcação em cada subespaço representados pelo par (K^*, ϕ_1^*) , são descritas nos itens a seguir e ilustradas na figura 5.7 para o caso com $\omega = 1$.

1 Subespaço Φ^{+++} (figura 5.7a):

$$\phi_2^+ = \frac{2\pi}{3}n_1 - \phi_1 \rightarrow \begin{cases} n_1 = 0 & \rightarrow (K^*, \phi_1^*) = (\omega/2, \pi/2) \\ n_1 = 1 & \rightarrow (K^*, \phi_1^*) = (\omega, 5\pi/6) \\ n_1 = -1 & \rightarrow (K^*, \phi_1^*) = (\omega, \pi/6) \end{cases} \quad (5.62)$$

$$\phi_2^- = \pi(2n_2 - 1) - 3\phi_1 \rightarrow n_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} (K^*, \phi_1^*) = (\omega/2, \pi/2) \\ (K^*, \phi_1^*) = (1.83712, 3.56213) \\ (K^*, \phi_1^*) = (1.83712, -0.42053) \end{cases}$$

2 Subespaços Φ^{-++} e Φ^{++-} (figura 5.7b):

$$\begin{aligned} \phi_2^+ &= 2\pi n_1 - \phi_1 \quad \rightarrow \quad n_1 = 0 \quad \rightarrow \quad (K^*, \phi_1^*) = (\omega/2, \pi/2) \\ \phi_2^- &= \frac{\pi(2n_2 + 1) - \phi_1}{3} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (K^*, \phi_1^*) = (1.83712, 1.87999) \\ n_2 = 1 \quad \rightarrow \quad (K^*, \phi_1^*) = (1.83712, 1.2616) \\ n_2 = 2 \quad \rightarrow \quad (K^*, \phi_1^*) = (\omega/2, \pi/2) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.63)$$

3 Subespaço Φ^{+-+} (figura 5.7c):

$$\left. \begin{aligned} \phi_2^+ &= 3\phi_1 \\ \phi_2^- &= \pi - 3\phi_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} (K^*, \phi_1^*) = (\omega/2, \pi/2) \\ (K^*, \phi_1^*) = (1.83712, -0.420534) \\ (K^*, \phi_1^*) = (1.83712, 3.56213) \end{cases} \quad (5.64)$$

4 Subespaço Φ^{-+-} (figura 5.7d):

$$\begin{aligned} \phi_2^+ &= \frac{2\pi n_1 + \phi_1}{3} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n_1 = 0 \quad \rightarrow \quad (K^*, \phi_1^*) = (1.83712, 1.2616) \\ n_1 = 1 \quad \rightarrow \quad (K^*, \phi_1^*) = (1.83712, 1.87999) \\ n_1 = -1 \quad \rightarrow \quad (K^*, \phi_1^*) = (\omega/2, \pi/2) \end{cases} \\ \phi_2^- &= \pi(2n_2 - 1) + \phi_1 \quad \rightarrow \quad n_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (K^*, \phi_1^*) = (\omega/2, \pi/2) \end{aligned} \quad (5.65)$$

5 Subespaços Φ^{--+} , Φ^{+--} e Φ^{---} :

$$\left. \begin{aligned} \phi_2^+ &= -\phi_1 \\ \phi_2^- &= -\pi + \phi_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow (K^*, \phi_1^*) = (\omega/2, \pi/2) \quad (5.66)$$

Conforme esperado o acoplamento crítico K_s é altamente degenerado porque cada subespaço apresenta duas bifurcações responsáveis pela sincronização: uma nó-nó, com um nó estável e outro instável, sempre acompanhada de uma sela-sela ou uma sela-nó instável[‡]. É importante notar que não só K_s mas todos os valores do acoplamento responsáveis pelo surgimento de novas soluções apresentam a mesma composição de bifurcações duplas, conforme pode ser observado na figura 5.7.

Embora as soluções encontradas em cada subespaço correspondam a todas as soluções do sistema, a estabilidade obtida via autovalores da matriz jacobiana bidimensional na equação (5.59) não corresponde necessariamente à estabilidade das soluções quando as condições iniciais não satisfazem propriedades de simetria. No caso é necessário obter os autovalores a partir da matriz jacobiana formada por todas as equações de movimento[§]. O que se observa ao realizar esse procedimento para os pontos fixos nascidos em K_s (cálculo realizado bem próximo

[‡]A definição do tipo de bifurcação não pode ser inferida a partir da figura 5.7, visto que ela depende da estrutura dos autovalores. A determinação do tipo de cada bifurcação será demonstrada mais a frente.

[§]O tratamento da estabilidade será discutido mais a frente quando considerarmos um sistema de osciladores completamente geral.

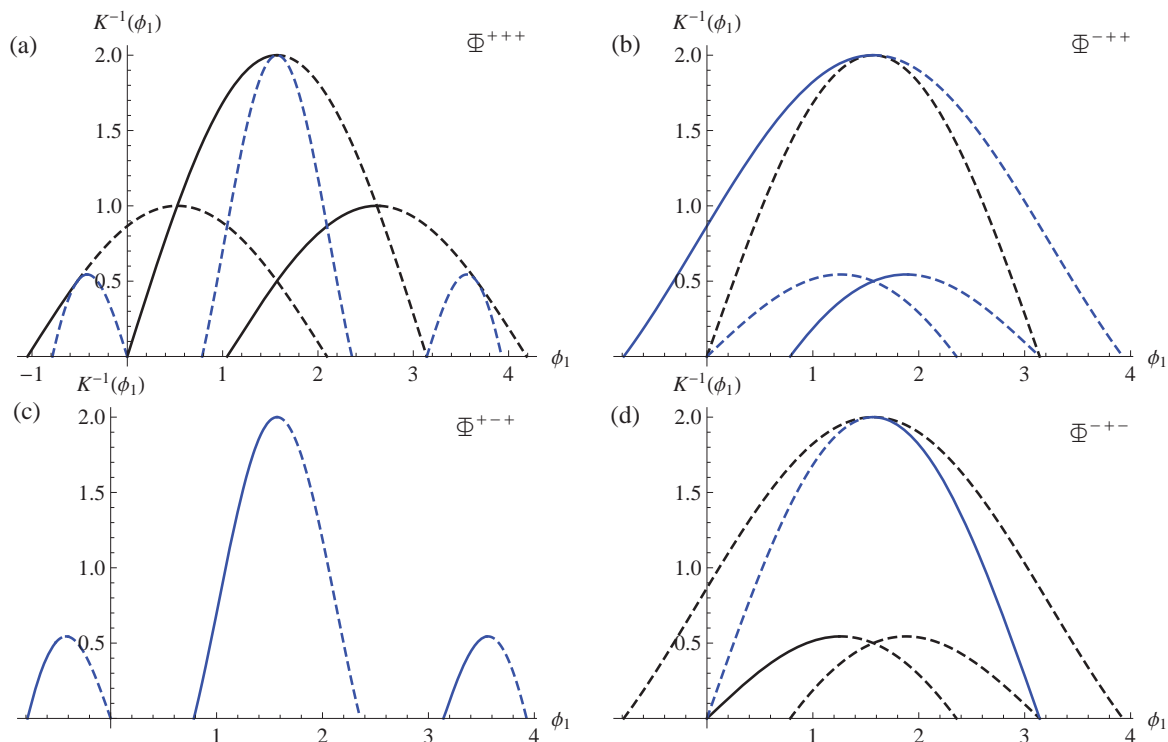


Figura 5.7: Projção do diagrama de estabilidade com as soluções de ponto fixo dadas pela função $K^{-1}(\phi_1)$ definida nos subespaços simétricos. Linhas contínuas (tracejadas) representam soluções estáveis (instáveis); linhas pretas (azuis) representam soluções do tipo ϕ_2^+ (ϕ_2^-). (a) Subespaço Φ^{+++} . (b) Subespaço Φ^{-++} . (c) Subespaço Φ^{+-+} . (d) Subespaço Φ^{-+-} .

das bifurcações) é a existência de duas soluções estáveis oriundas de Φ^{+++} : a solução estável de ϕ_2^+ ($n_1 = 0$), nascida em uma bifurcação nó-nó, mantém a sua estabilidade enquanto uma das selas de ϕ_2^- (nascida de uma bifurcação sela-sela no subespaço Φ^{+++}) ganha estabilidade por a bifurcação transformar-se em nó-nó, conforme pode observado na figura 5.8. Todos os outros pontos fixos nascidos em K_s são criados a partir de bifurcações do tipo sela-sela no espaço de fase completo.

O fato de uma solução ser estável em um subespaço mas perder a estabilidade no espaço de fase completo não configura uma situação inusitada porque os subespaços podem representar somente as direções estáveis de um ponto fixo do tipo sela, porém o motivo pelo qual um ponto fixo se apresenta instável em um subespaço mas estável do espaço completo ainda não é compreendido.

O resultado da análise de estabilidade dos pontos fixos na região imediatamente após K_s fornece um panorama um tanto quanto inesperado: de um total de 32 soluções criadas a partir de 16 bifurcações diferentes (lembrando que existem 8 subespaços de soluções simétricas, cada um com duas bifurcações), existem dois pontos fixos estáveis originados de duas bifurcações nó-nó enquanto os outros 28 pontos fixos são do tipo sela. Se considerarmos um sistema com um número tão grande de selas e 2 nós estáveis, seria natural esperar algum tipo de comportamento fora do comum. Ao se analisar da evolução temporal das frequências instantâneas o

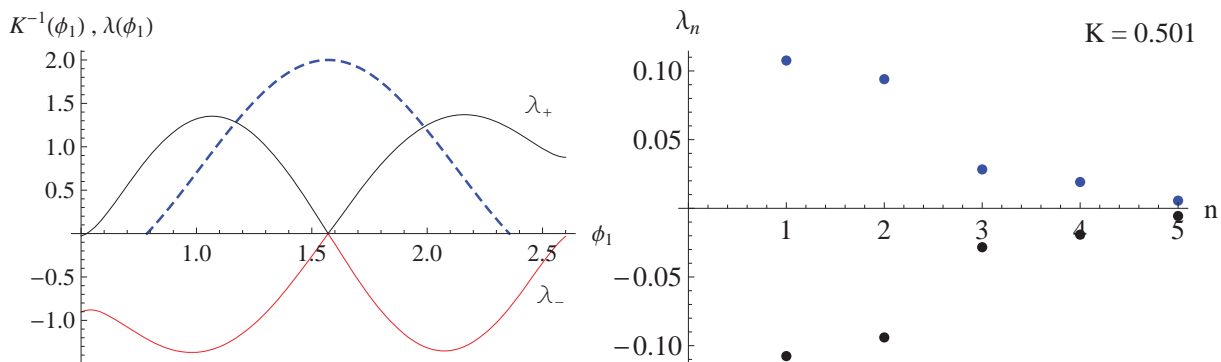


Figura 5.8: Soluções $\phi_2^-(\phi_1)$ de Φ^{+++} nascidas em K_s através de uma bifurcação sela-sela no subespaço (figura à esquerda). No espaço de fase completo a bifurcação altera a estabilidade, transformando-se em uma bifurcação nó-nó: a solução com $\phi_1 \rightarrow 0.8$ (no limite $K \rightarrow \infty$) é um nó estável (autovalores negativos representados por pontos pretos na figura à direita), enquanto a solução com $\phi_1 \rightarrow 2.35$ é um nó instável (autovalores positivos representados por pontos azuis)

que se observa corresponde precisamente a essa expectativa, conforme ilustrado na figura 5.9. Na iminência da sincronização ($K = 0.499$) deveria ser observado os deslizos de fase relatados no capítulo anterior, com o período entre cada deslize proporcional a $(K_s - K)^\alpha$, porém o que se observa nesse sistema é uma forte dependência com relação às condições iniciais: existem condições iniciais que levam os osciladores próximos às regiões de aparecimento das bifurcações, mas como eles visitam mais de um dos fantasmas das bifurcações os deslizos de fase aparecem com períodos caóticos (esquerda); ao mesmo tempo existem condições iniciais que fazem os osciladores percorrerem todo o espaço de fase e eventualmente encontrar algum fantasma, o que em geral não ocorre simultaneamente para todos os osciladores, resultando no aparecimento intermitente dos deslizos de fase (direita).

Esse comportamento não usual também é observado na região de valores de acoplamento imediatamente acima de K_s : sob um conjunto de condições iniciais $\theta_n(t=0) = \eta$, onde η é uma variável aleatória definida a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[-a, a]$, para valores de a menores do que 1 (aproximadamente) o sistema sempre encontra o ponto fixo estável de $\phi_2^+(n_1 = 0)$; porém para $a \geq 1$ existem condições iniciais que não levam o sistema a um estado sincronizado, onde os osciladores ficam continuamente procurando por pontos fixos (a figura à direita de 5.9 ilustra perfeitamente o comportamento típico das frequências instantâneas nesse caso); o ponto fixo de ϕ_2^- apresenta uma bacia de atração extremamente pequena, sendo necessárias condições iniciais muito próximas para que ele seja observado. Esse comportamento implica que os nós estáveis gerados em K_s correspondem somente a atratores locais no espaço fase. Uma possível explicação para esse fenômeno é que as superfícies definidas por $\dot{\phi}_n = 0$ formam um invólucro ao redor desses pontos fixos, atuando como um região de repulsão para soluções fora do seu interior. No entanto a alta dimensionalidade do sistema torna bastante difícil a verificação dessa hipótese.

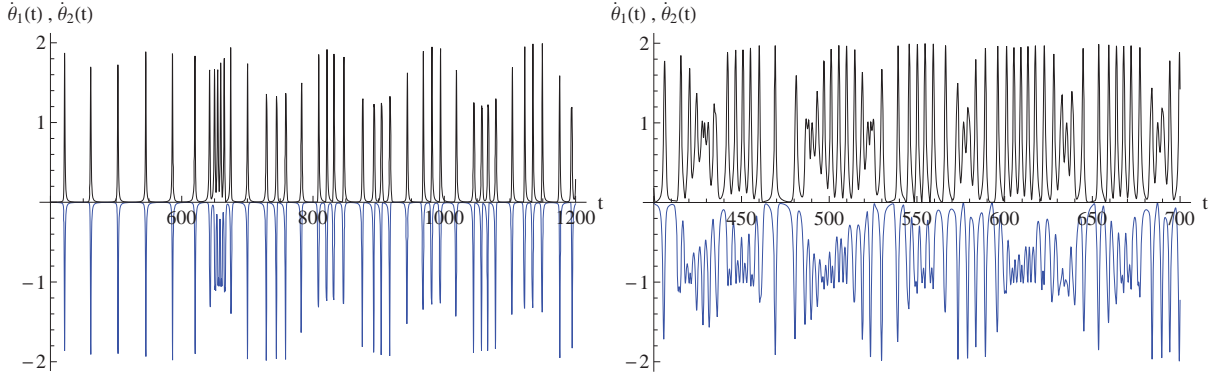


Figura 5.9: Evolução temporal das frequências instantâneas $\dot{\theta}_1(t)$ e $\dot{\theta}_2(t)$ na iminência da sincronização ($K = 0.499$). Para um conjunto de condições iniciais são observados deslizamentos de fase sem a caracterização de um período definido (esquerda), devido à presença de vários fantasmas das bifurcações. Outros conjuntos fazem os osciladores percorrerem todo o espaço de fase e só eventualmente encontram algum fantasma, em geral não simultaneamente para todos os osciladores (direita). Sob essas condições os deslizamentos de fase ocorrem intermitentemente.

Devido à alta degenerescência não só em K_s mas em todos os valores de $K > K_s$ onde ocorrem bifurcações, o comportamento das soluções também apresenta peculiaridades, tanto nos subespaços como no espaço de fase completo. Para ilustrar esse fato vamos considerar somente soluções no subespaço $\Phi^{++\dots}$ (o motivo dessa escolha ficará mais claro adiante). A representação da equação (5.53a) que descreve a região sincronizada desse sistema, obtida através da definição das fases em (5.56a), é dada por

$$\sin \left[\frac{N\phi_1 + (N-2)\phi_2}{2} \right] + \sin \phi_1 = \frac{\omega}{K}. \quad (5.67)$$

Combinando (5.67) com (5.53b), as variáveis ϕ_1 e ϕ_2 são relacionadas pela equação

$$\sin \left[\frac{N\phi_1 + (N-2)\phi_2}{2} \right] = -\sin \phi_2, \quad (5.68)$$

que admite dois tipos de solução $\phi_2 = f(\phi_1)$:

$$\phi_2^+ = \frac{4\pi m_1}{N} - \phi_1, \quad m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.69a)$$

$$\phi_2^- = \frac{2\pi(2m_2 - 1) - N\phi_1}{N-4}, \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (5.69b)$$

Para cada tipo de solução em (5.69) existe uma função $K_{\pm}^{-1}(\phi_1)$ que descreve os pontos fixos do sistema,

$$K_+^{-1}(\phi_1, m_1) = \frac{1}{\omega} \left[\sin \phi_1 \left(1 + \cos \frac{4\pi m_1}{N} \right) - \cos \phi_1 \sin \frac{4\pi m_1}{N} \right], \quad (5.70a)$$

$$K_-^{-1}(\phi_1, m_2) = \frac{1}{\omega} \left\{ \sin \left[\frac{(N-2)(2m_2-1)\pi}{N-4} - \frac{N}{N-4}\phi_1 \right] + \sin \phi_1 \right\}, \quad (5.70b)$$

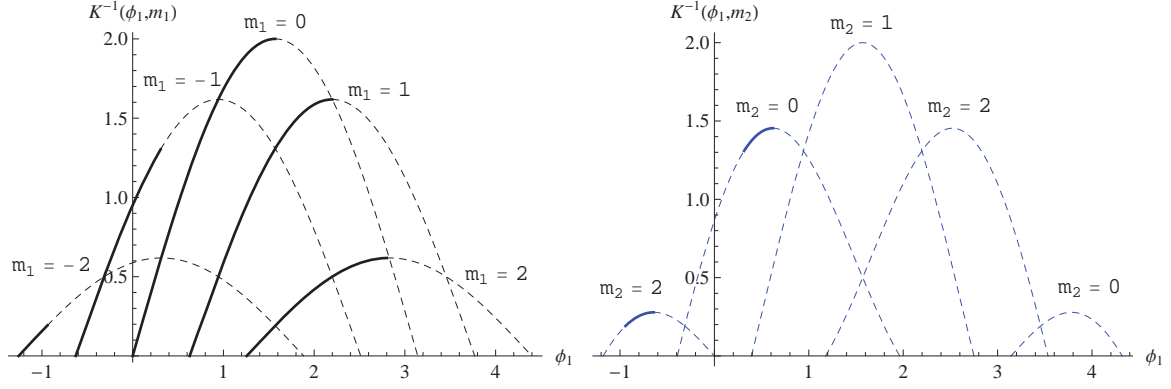


Figura 5.10: Soluções de $K_{\pm}^{-1}(\phi_1)$ que representam os pontos fixos do sistema na região de sincronização. Linhas contínuas (tracejadas) representam pontos fixos estáveis (instáveis). Esquerda: soluções de $K_{+}^{-1}(\phi_1, m_1)$, com bifurcações nó-nó para $m_1 = 0$, sela-nó estáveis para $m_1 = 1$ e $m_1 = 2$, e sela-nó instáveis para $m_1 = -1$ e $m_1 = -2$, cujas selas ganham estabilidade (tornam-se nós estáveis) depois da bifurcação. Direita: soluções de $K_{-}^{-1}(\phi_1, m_2)$, com bifurcações sela-sela para $m_2 = 1$, sela-nó estáveis (instáveis) nas bifurcações à esquerda (direita) de $m_2 = 0$ e $m_2 = 2$; os nós estáveis de perdem a estabilidade depois da bifurcação, transformando-se em selas.

onde mínimos $\partial_{\phi_1} K_{\pm}^{-1}(\phi_1)|_{\phi_1=\phi_1^*} = 0$ (máximos de K_{\pm}^{-1}) fornecem os pontos $\phi_{m_1}^*$ e $\phi_{m_2}^*$ onde ocorrem as bifurcações,

$$\tan \phi_{m_1}^* = -\frac{1 + \cos \frac{4\pi m_1}{N}}{\sin \frac{4\pi m_1}{N}}, \quad (5.71a)$$

$$\cos \phi_{m_2}^* = \frac{N}{N-4} \cos \left[\frac{(N-2)(2m_2-1)\pi}{N-4} - \frac{N}{N-4} \phi_{m_2}^* \right]. \quad (5.71b)$$

A figura (5.10) mostra as soluções $K_{+}^{-1}(\phi_1, m_1)$ (esquerda) e $K_{-}^{-1}(\phi_1, m_2)$ (direita) com as estabilidades explícitas para $N = 10$. Semelhante a casos descritos anteriormente, o sistema apresenta bifurcações sela-nó estáveis para $m_1 = 1, 2$ e nas bifurcações à esquerda de $m_2 = 0, 2$, sela-nó instáveis para $m_1 = -1, -2$ e nas bifurcações à direita de $m_2 = 0, 2$, uma bifurcação nó-nó para $m_1 = 0$ e uma sela-sela para $m_2 = 1$ (as duas últimas em K_s). O que chama a atenção nesse sistema é a existência de ramos de soluções que apresentam inversão de estabilidade quando a intensidade do acoplamento é variada ($m_1 = -1, -2$ e bifurcações à esquerda de $m_2 = 0, 2$). A análise da parte real dos autovalores dessas soluções (figura 5.11) mostra que o autovalor $\lambda_{-}(\phi_1)$ é responsável pelas inversões: nas bifurcações de $m_1 = -1, -2$ o ponto fixo nasce uma sela ($\text{Re}[\lambda_{+}] < 0$ e $\text{Re}[\lambda_{-}] > 0$), mas quando a parte real do autovalor λ_{-} torna-se negativa ele vira um nó estável (figuras 5.11a e 5.11b); nas bifurcações à esquerda de $m_2 = 0, 2$ a parte real de λ_{-} é positiva e torna-se negativa a partir de um determinado valor de ϕ_1 , que transforma os nós estáveis em selas (figuras 5.11c e 5.11d).

Os pontos precisos onde a parte real do autovalor $\lambda_{-}(\phi_1)$ troca de sinal podem ser identificados ao analisar essas soluções em conjunto, conforme figura 5.12: o ramo originado da bifurcação à esquerda de $m_2 = 0$ perde a estabilidade quando cruza com o ramo originado

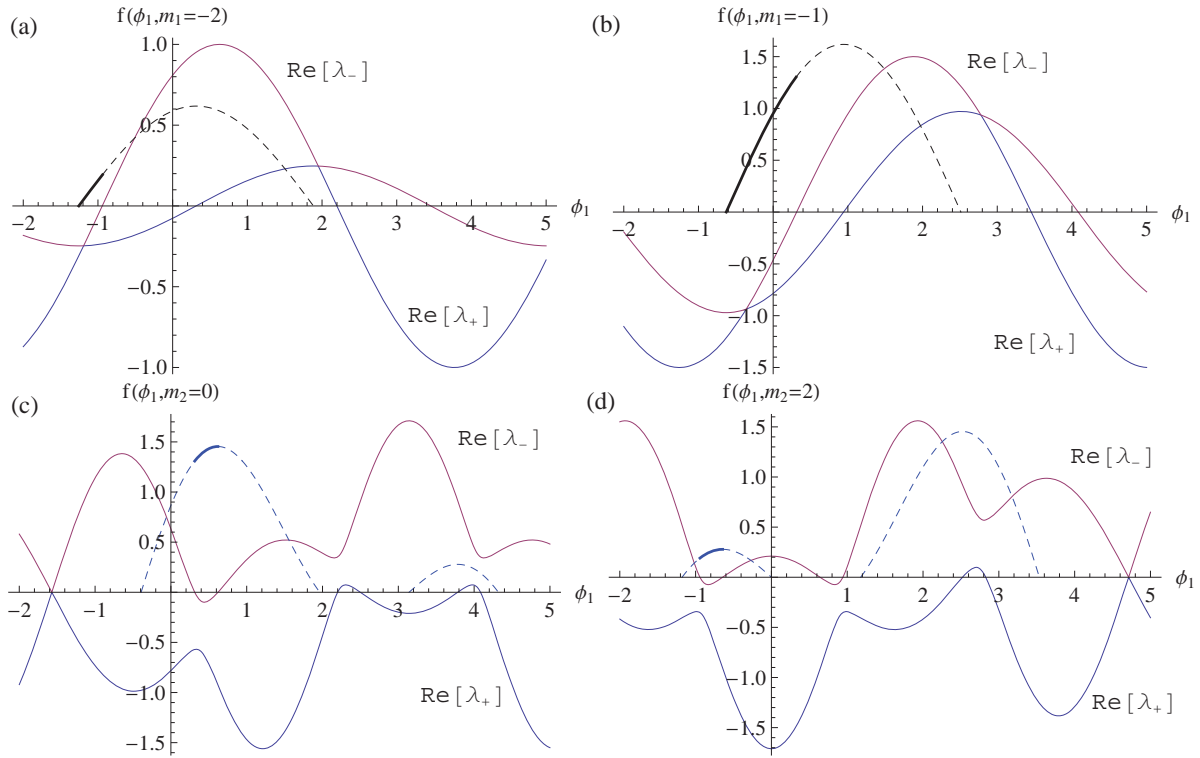


Figura 5.11: Ramos de soluções do sistema com $N = 10$ que apresentam mudança de estabilidade com a variação da intensidade do acoplamento. Soluções estáveis (instáveis) são representadas por linhas contínuas (tracejadas), pretas (azuis) para as soluções de m_1 (m_2), enquanto a parte real dos autovalores λ_{\pm} são representados por linhas foscas, indenticadas nas figuras. Figuras (a) e (b): bifurcações com $m_1 = -1$ e $m_1 = -2$, respectivamente, mostrando que as soluções à direita nascem selas e tornam-se nós estáveis quando a parte real de λ_- torna-se negativa. Figuras c) e d): bifurcações com $m_2 = 0$ e $m_2 = 2$, respectivamente, mostrando os nós estáveis nascidos na bifurcação à esquerda tornarem-se selas quando a parte de real de λ_- passa a ser positiva.

de $m_1 = -1$ em $K \approx 0.764$ com $\phi_1 = \pi/10$, que passa a ser estável para valores superiores do acoplamento (figura à esquerda); o mesmo processo ocorre com o ramo proveniente da bifurcação à esquerda de $m_2 = 2$, que troca a estabilidade com o ramo de $m_1 = -2$ em $K \approx 5.236$ e $\phi_1 = -3\pi/10$ (figura à direita).

Mudanças do tipo de estabilidade dos pontos fixos de sistema ocorrem não só nos ramos que apresentam partes estáveis mas também nos ramos instáveis, como pode ser observado nas figuras 5.11c e 5.11d: nas bifurcações sela-nó instáveis à direita de $m_2 = 0$ e $m_2 = 2$, os nós instáveis passam a ser selas quando a parte real de λ_+ torna-se negativa. Como as soluções $K_{\pm}^{-1}(\phi_1)$ são simétricas em relação ao eixo definido por $\phi_1 = \pi/2$, o mecanismo que altera a estabilidade dessas soluções é o mesmo processo descrito no parágrafo acima ocorrendo nos pontos $\phi_1 = 9\pi/10$ e $\phi_1 = 13\pi/10$, que são as projeções simétricas na região $\phi_1 \geq \pi/2$.

A movimentação das soluções de ponto fixo e o aparecimento das bifurcações podem ser visualizados no espaço de fase (ϕ_1, ϕ_2) do sistema, conforme mostra a figura 5.14. Todo ponto

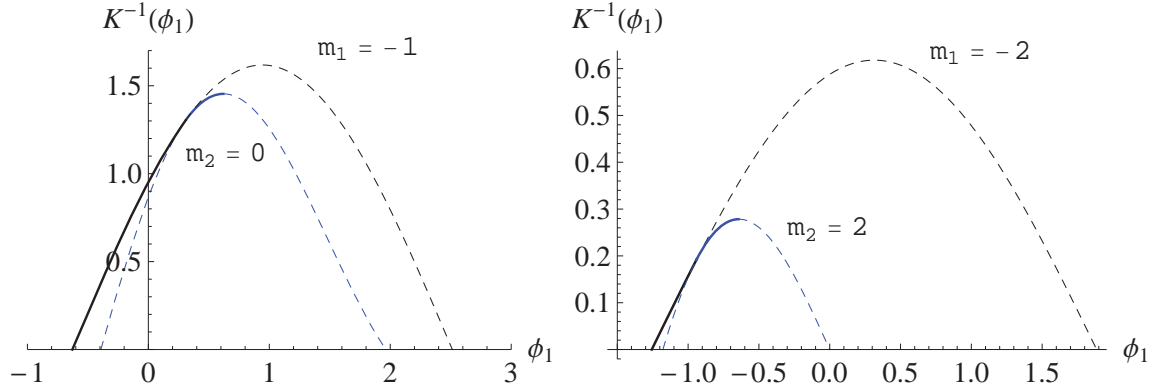


Figura 5.12: Região de troca de estabilidade das soluções de $K_{\pm}^{-1}(\phi_1)$. Esquerda: nó estável de $m_2 = 0$ perde a estabilidade para a sela de $m_1 = -1$ no cruzamento das soluções. Direita: nó estável de $m_2 = 2$ perde a estabilidade para a sela de $m_1 = -2$ no cruzamento das soluções.

fixo aparece nas intersecções das curvas $\dot{\phi}_1 = 0$ (preto) e $\dot{\phi}_2 = 0$ (azul). Para facilitar a descrição vamos definir algumas regiões do espaço:

- O espaço de fase pode ser dividido em 4 regiões ao se definir os eixos de simetria $\phi_1 = \pi/2$ e $\phi_2 = -\pi/2$: região I com $\phi_1 \leq \pi/2$ e $\phi_2 \geq -\pi/2$; região II com $\phi_1 \geq \pi/2$ e $\phi_2 \geq -\pi/2$; região III com $\phi_1 \leq \pi/2$ e $\phi_2 \leq -\pi/2$; região IV com $\phi_1 \geq \pi/2$ e $\phi_2 \leq -\pi/2$.
- Existe uma linha S, definida por $\phi_2 = \phi_1 - \pi$ (diagonal em todos os gráficos), que divide o espaço de fase ao meio, sendo a parte superior formada pela região I inteira e metade das regiões II e III.

Sob essas definições é possível observar que a região IV corresponde a inversão especular de I e que a região II corresponde a inversão especular de III. Os pontos fixos estáveis do sistema aparecem somente na parte superior de S, de forma que podemos focar a análise somente nas soluções dessa região (as soluções que aparecem na parte inferior de S correspondem somente aos pares instáveis mencionados anteriormente).

O acoplamento crítico K_s ocorre em $K = 0.5$ no ponto $(\phi_1, \phi_2) = (\pi/2, -\pi/2)$, onde a solução estável nasce em uma bifurcação nó-nó. No espaço de fase as curvas $\dot{\phi}_1 = 0$ e $\dot{\phi}_2 = 0$ formam circuitos fechados e o aparecimento dessas soluções é mostrado na região I da figura 5.14a: o nó estável (instável) encontra-se à esquerda (direita), para $K = 0.52$. As bifurcações de $m_1 = \pm 1$ aparecem na intersecção de outros dois circuitos fechados $\dot{\phi}_1 = 0$ (figura 5.14b), onde o ponto fixo estável de $m_1 = 1$ aparece na intersecção superior dos circuitos na região III (figura 5.14c). As soluções da primeira bifurcação de $m_2 = 0$ ($m_2 = 2$ na região II) são geradas quando a parte inferior do circuito $\dot{\phi}_1 = 0$ (na região III) cruza a linha $\dot{\phi}_2 = 0$ (figura 5.14c). Na região III o nó estável de $m_2 = 0$ encontra-se sobre a curva $\phi_2 = -\frac{5}{3}\phi_1 - \frac{\pi}{3}$ (C1), inferior à curva $\phi_2 = -\phi_1 - \frac{2\pi}{5}$ (C2) onde encontra-se a sela de $m_1 = -1$. Conforme a intensidade do acoplamento é aumentada os pontos fixos movem-se sobre essas curvas na direção da região I.

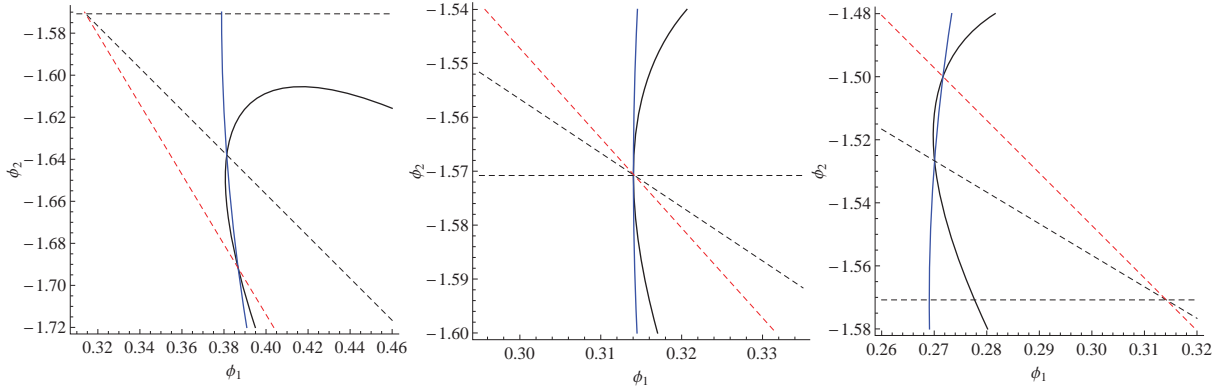


Figura 5.13: Região de troca de estabilidade das figuras 5.14d e 5.14e ampliada. A linha contínua preta (azul) representa $\dot{\phi}_1 = 0$ ($\dot{\phi}_2 = 0$), as linhas tracejadas pretas representam $\phi_2 = -\pi/2$ e a curva $\phi_2 = -\phi_1 - \frac{2\pi}{5}$ (C2), enquanto a linha tracejada vermelha representa a curva $\phi_2 = -\frac{5}{3}\phi_1 - \frac{\pi}{3}$ (C1). Para $K = 0.73$ (esquerda) o nó estável encontra-se sobre C1 e a sela sobre C2. Em $K = 0.764$ os dois pontos fixos chocam-se em $(\phi_1, \phi_2) = (\pi/10, -\pi/2)$ (centro). Após o choque as estabilidades são trocadas: o ponto fixo sobre C1 passa ser uma sela enquanto o ponto fixo sobre C2 vira um nó estável (direita).

No ponto de intersecção $(\phi_1, \phi_2) = (\pi/10, -\pi/2)$ entre C1 e C2, para $K = 0.764$, o choque entre o nó estável e sela resulta em um único nó estável, descrito pelas duas soluções. Após o colapso cada solução continua movendo-se ao longo das respectivas retas, mas a estabilidade dos pontos fixos é trocada (a figura 5.14e mostra quando os dois pontos fixos entram na região I, e o intervalo de valores de K onde ocorre a troca de estabilidade é exibida na figura 5.13). Para valores maiores do acoplamento os três circuitos centrais de $\dot{\phi}_1 = 0$ mesclam-se formando um único circuito, enquanto as bifurcações de $m_1 = \pm 2$ são originadas da intersecção de um novo circuito fechado $\dot{\phi}_1 = 0$ com $\dot{\phi}_2 = 0$ nas regiões II (ponto fixo instável) e III (ponto fixo estável), conforme ilustrado na figura 5.14f. Depois da bifurcação o mesmo processo de transferência de estabilidade ocorre para as soluções de $m_1 = -2$ e $m_2 = 2$ (região III da figura 5.14g), que culmina na formação de um único circuito fechado $\dot{\phi}_1 = 0$ (figura 5.14h). No limite assintótico $K \rightarrow \infty$ todos os pontos fixos estáveis são localizados sobre a curva $\phi_2 = \phi_1$ (região I da figura 5.14i), representados por todos os pontos onde $\dot{\phi}_1 = 0$ cruza $\dot{\phi}_2 = 0$ a partir de valores inferiores a curva $\phi_2 = \phi_1$.

Esse fenômeno de troca de estabilidade também ocorre no espaço de fase completo do sistema, porém essas trocas não ocorrem necessariamente entre soluções dos mesmos subespaços. Isso significa que para obter todas as soluções estáveis do sistema, independente do tamanho de suas bacias de atração, é necessário obter todos os pontos no espaço onde duas (ou mais) soluções entram em choque e analisar a estabilidade desses pontos fixos, tanto antes como depois dos choques (isso sem mencionar a análise de estabilidade para todas as outras soluções). Como o número de soluções é extremamente grande mesmo para sistemas pequenos, isso torna esse problema quase que intratável, de forma que esse tipo de simetria não configura uma boa

simplificação do sistema para se continuar a aprender sobre a região sincronizada. Uma forma de contornar esse problema e ainda continuar em configurações de frequências naturais simplificadas é considerar outros tipos de simetria.

5.2.4 Simetria especular

Considere uma configuração com um número par de osciladores que satisfaçam uma simetria especular inversa,

$$\omega_{N/2+n} = -\omega_n, \quad n = 1, \dots, N/2, \quad (5.72)$$

e que todas as frequências naturais no intervalo $[\omega_1, \omega_{N/2}]$ sejam positivas definidas. Sob essas condições temos $\Omega = 0$ e, lembrando a definição de K_s no caso da cadeia de osciladores, a maior soma sequencial de frequências é dada por $n^* = N/2$ ou $n^* = N$. Para todo $n < N/2$ vamos definir as diferenças de fase ϕ_n em termos de $\sin N/2$,

$$\sin \phi_n = \sin \phi_{N/2} - \frac{1}{K} \sum_{j=n+1}^{N/2} \omega_j, \quad n = 1, \dots, N/2 - 1, \quad (5.73)$$

e para a outra metade do sistema ($m > N/2$) escreveremos as relações em termos de $\sin \phi_N$,

$$\begin{aligned} \sin \phi_m &= \sin \phi_N - \frac{1}{K} \sum_{j=m+1}^N \omega_j \\ &= \sin \phi_N + \frac{1}{K} \sum_{j=m+1-N/2}^{N/2} \omega_j, \quad m = N/2 + 1, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (5.74)$$

Como a simetria (5.72) faz com que as somas presentes nas duas equações apresentem o mesmo valor para todo par (n, m) que satisfaça a condição $m = n + N/2$, é possível inferir a existência de uma solução com simetria $\phi_{n+N/2} = -\phi_n$, onde $n = 1, \dots, N/2 - 1$, mediante a condição $\sin \phi_N = -\sin \phi_{N/2}$. Substituindo (5.73) na equação que relaciona ϕ_1 e ϕ_N (equação (5.16) com $n = 1$) é possível obter uma equação que relaciona $\phi_{N/2}$ e ϕ_N :

$$\sin \phi_{N/2} - \sin \phi_N = \frac{\sum_{n=1}^{N/2} \omega_n}{K}. \quad (5.75)$$

A soma presente em (5.75) é maior do que todas as somas presentes em (5.73) e (5.74), portanto o menor valor de K que satisfaça (5.75) satisfará automaticamente todas as outras equações, representando o acoplamento crítico K_s do sistema. Como a condição $\sin \phi_N = -\sin \phi_{N/2}$ maximiza o lado esquerdo de (5.75), então não pode existir outra solução sincronizada com K menor do que

$$K_s = \frac{\sum_{n=1}^{N/2} \omega_n}{2}. \quad (5.76)$$

A determinação do acoplamento de sincronização nesse sistema se resume simplesmente a realizar uma soma de frequências naturais, portanto qualquer prescrição $\omega_n(N)$ ($n = 1, \dots, N$)

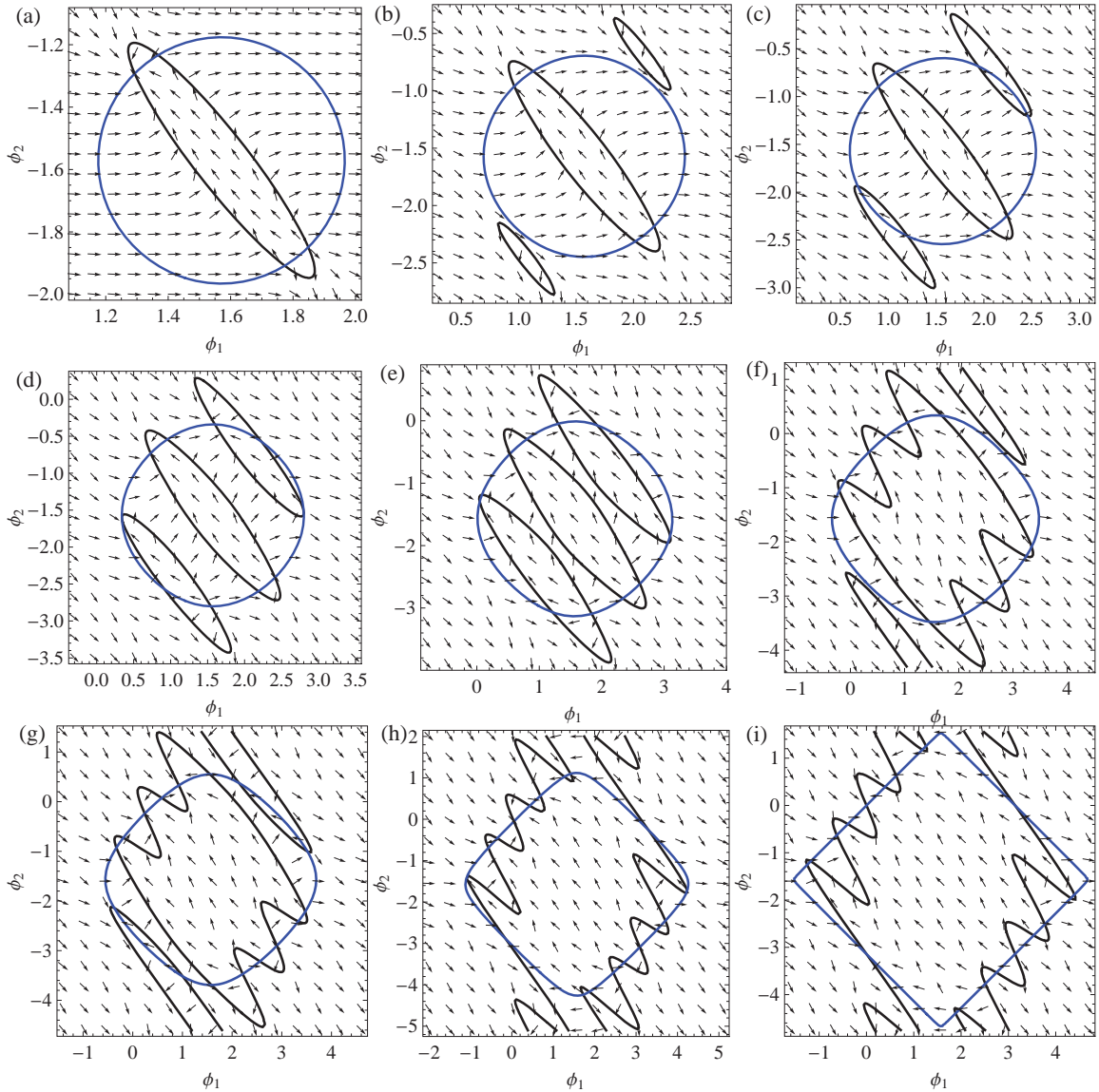


Figura 5.14: Subespaço de fase Φ^{5+} do sistema com $N = 10$ mostrando a evolução dos pontos fixos em função do acoplamento. Linhas pretas (azuis) correspondem as superfícies $\dot{\phi}_1 = 0$ ($\dot{\phi}_2 = 0$), e as flexas representam o campo vetorial indicando o fluxo das soluções a) Região imediatamente após K_s mostrando o surgimento do nó estável (instável) à esquerda (direita) na região I ($K = 0.52$). b) Iminência das bifurcações de $m_1 = \pm 1$ ($K = 0.61$). c) Surgimento da solução estável de $m_1 = 1$ na região II, e da solução instável de $m_1 = -1$ (que ganhará estabilidade) na região III ($K = 0.64$). d) Aparecimento das primeiras soluções oriundas de $m_2 = 0$ e $m_2 = 2$, com uma estável, quando a parte inferior do circuito fechado $\dot{\phi}_1 = 0$ cruza a linha de $\dot{\phi}_2 = 0$ na região III ($K = 0.75$). e) Troca de estabilidade das soluções quando os pontos fixos cruzam a linha $\phi_2 = -\pi/2$ e entram na região I ($K = 0.99$). f) Iminência das bifurcações $m_1 = \pm 2$ no aparecimento de mais um circuito fechado $\dot{\phi}_1 = 0$; três circuitos fechados anteriores mesclam-se formando um único circuito ($K = 1.5$). g) Início do processo da segunda troca de estabilidade na região II ($K = 2.1$). h) Formação de um único circuito fechado $\dot{\phi}_1 = 0$ ($K = 10$). i) Comportamento assintótico ($K = 1000$).

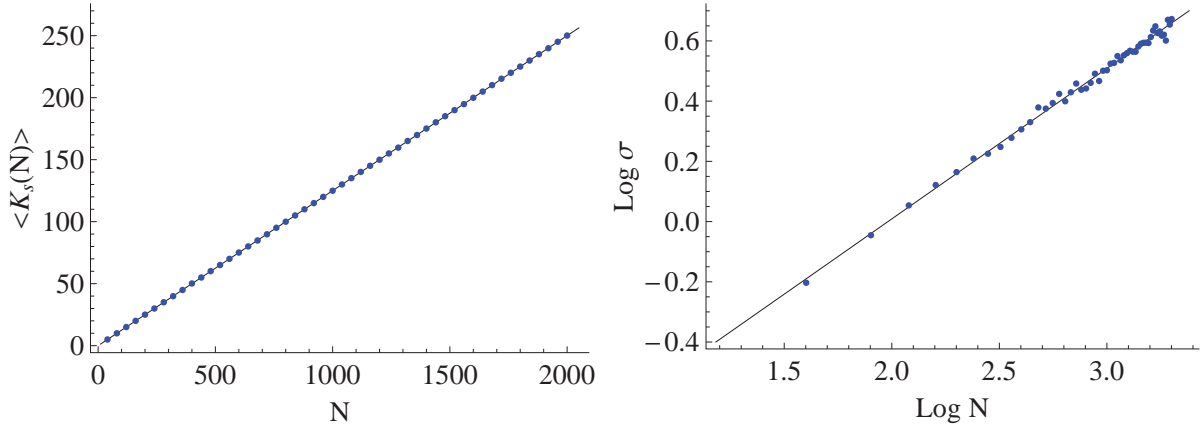


Figura 5.15: Direita: comportamento de $\langle K_s(N) \rangle$ para frequências naturais geradas por uma distribuição uniforme com $a = 0$ e $b = 1$. Esquerda: desvio padrão $\sigma[K_s(N)]$ do resultado numerico em escala logarítmica. Os pontos correspondem ao resultado obtido através de simulação, com média tomada em 1000 realizações. As curvas pretas correspondem ao comportamento calculado teoricamente via (5.77).

que se use para definir a dependência do conjunto de frequências naturais permitirá obter a dependência de K_s com relação ao tamanho N do sistema. Se assumirmos um caso geral em que as frequências naturais no intervalo $[\omega_1, \omega_{N/2}]$ são distribuídas de acordo com uma distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ com $a > 0$ e $b > a$, então é possível determinar a dependência média de $K_s(N)$,

$$\langle K_s(N) \rangle = \frac{a+b}{8}N, \quad \sigma[K_s(N)] = \frac{b-a}{4\sqrt{6}}\sqrt{N}, \quad (5.77)$$

conforme ilustrado na figura 5.15.

Embora a imposição da simetria (5.72) no conjunto de frequências naturais permite determinar K_s analiticamente, ainda resta o problema de se determinar as soluções na região sincronizada. Se escrevermos as variáveis ϕ_n em termos de $\phi_{N/2}$,

$$\sin \phi_n = \sin \phi_{N/2} - \frac{1}{K} \sum_{j=n+1}^{n^*} \omega_j, \quad n = 1, \dots, N/2 - 1, \quad (5.78a)$$

$$\sin \phi_n = \sin \phi_{N/2} + \frac{1}{K} \sum_{j=N/2+1}^n \omega_j, \quad n = N/2 + 1, \dots, N - 1, \quad (5.78b)$$

e usarmos a identidade $\phi_N = -\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n$, é possível obter uma única equação em $\phi_{N/2}$ e K :

$$\sin \left[\phi_{N/2} + \sum_{n \neq N/2}^{N-1} \phi_n(\phi_{N/2}) \right] + \sin \phi_{N/2} = \frac{\sum_{n=1}^{N/2} \omega_n}{K}. \quad (5.79)$$

A escolha da diferença de fase $\phi_{N/2}$ como a variável independente garante que nenhuma soma presente nas equações (5.78) seja maior do que a soma no lado direito de (5.79). Desse fato

resulta que existe uma região de valores de K tal que somente o conjunto (5.78) admite solução (o lado direito de cada equação sempre pertence ao intervalo $[-1, 1]$) enquanto não existe valor de $\phi_{N/2}$ que satisfaça (5.79). Isso significa que as soluções na região sincronizada só existem a partir de um valor $K = K_s$ que garanta a existência de solução para (5.79), e na região sincronizada ($K \geq K_s$) as soluções na forma $\phi_{N/2}(K)$ correspondem aos pontos fixos do sistema.

Esse método permite, como nos casos anteriores, definir completamente a região sincronizada ao se resolver apenas a equação (5.79), porém existe um problema na definição das funções $\phi_n(\phi_{N/2})$ dentro do argumento do seno: as equações (5.78) definem as relações entre os senos das variáveis, de forma que todas as possíveis combinações de

$$\phi_n^+ = \arcsin \left(\sin \phi_{N/2} - \frac{1}{K} \sum_{j=n+1}^{n^*} \omega_j \right), \quad n = 1, \dots, N/2 - 1, \quad (5.80a)$$

$$\phi_n^- = \pi - \arcsin \left(\sin \phi_{N/2} - \frac{1}{K} \sum_{j=n+1}^{n^*} \omega_j \right), \quad n = 1, \dots, N/2 - 1, \quad (5.80b)$$

$$\phi_n^+ = \arcsin \left(\sin \phi_{N/2} + \frac{1}{K} \sum_{j=N/2+1}^n \omega_j \right), \quad n = N/2 + 1, \dots, N - 1, \quad (5.80c)$$

$$\phi_n^- = \pi - \arcsin \left(\sin \phi_{N/2} + \frac{1}{K} \sum_{j=N/2+1}^n \omega_j \right), \quad n = N/2 + 1, \dots, N - 1, \quad (5.80d)$$

devem ser consideradas a priori[¶]. Para descrever corretamente esses sistemas vamos começar analisando configurações mais simples de frequências naturais.

A configuração mais simples de frequências naturais que satisfaz a simetria (5.72) consiste em assumir $\omega_n = \omega$ para $n = 1, \dots, N/2$, com acoplamento crítico de sincronização dado por

$$K_s(N) = \frac{\omega N}{4}. \quad (5.81)$$

Considerando um sistema pequeno com $N = 6$, as $2^{N-2} = 16$ possibilidades de combinação dos tipos de solução (5.80) podem ser consideradas para resolver (5.79) numericamente e obter todas as soluções $\phi_{N/2}(K)$, conforme mostrado na figura 5.16a. Apesar de ser possível determinar todas as soluções de $\phi_{N/2} = \phi_3$ acima de K_s , esse sistema com alta simetria leva ao mesmo problema de degenerescência no espaço $\phi_{N/2} \times K$ encontrado na seção anterior: existem vários valores de travamento das fases ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4 e ϕ_5 que levam ao mesmo valor de ϕ_3 . Em sistemas maiores o processo de identificação das diferenças de fase de travamento que correspondem aos pontos fixos estáveis se torna quase impossível. Porém a simetria dentro do conjunto $[\omega_1, \omega_{N/2}]$ não é necessária para analisar configurações de frequências naturais que satisficam (5.72), e mesmo se considerarmos casos em que essa simetria é quebrada a equação

[¶]Um certo cuidado deve ser tomado ao considerar o conjunto (5.80): as soluções ϕ_n^- foram escritas na forma $\pi - \arcsin(*)$ apenas para facilitar a apresentação. É necessário saber o quadrante em que o argumento se encontra para obter corretamente a solução no quadrante oposto que também satisfaz (5.78).

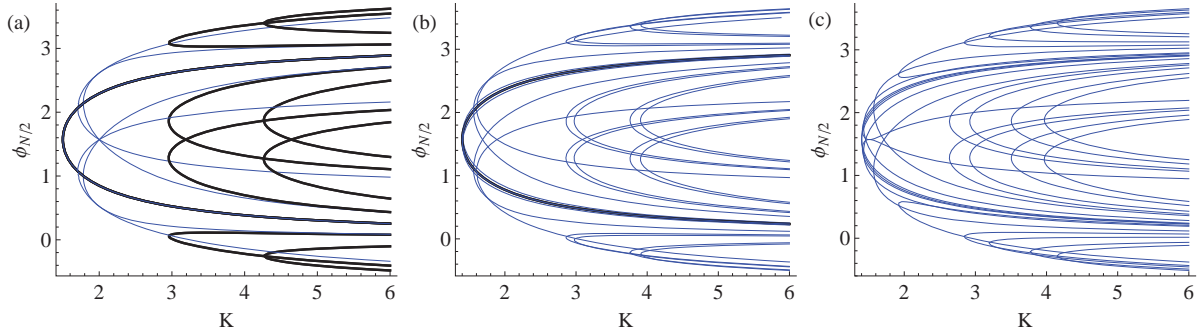


Figura 5.16: Solução numérica da equação (5.79) no espaço $\phi_{N/2} \times K$ que representa os pontos fixos do sistema com $N = 6$ osciladores. Soluções com degenerescência são representadas por linhas pretas (a estabilidade das soluções não é mostrada). (a) Configuração $\omega_n = \omega$ para $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, com alta degenerescência. (b) Presença somente da simetria (5.72) separa as soluções, sendo degenerada somente as bifurcações localizadas em K_s . As frequências naturais são $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.7$ e $\omega_3 = 1.1$. (c) Processo de quebra contínua da simetria separa completamente o espectro de soluções, destruindo a degenerescência. Frequências naturais: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.7, \omega_3 = 1.1, \omega_4 = -0.8, \omega_5 = -0.75$ e $\omega_6 = -1.25$.

(5.79) permanecerá válida desde que a soma no lado direito continue sendo maior do que todas as somas em (5.78).

Como pequenas perturbações nas frequências naturais têm pouco efeito na região sincronizada do sistema é possível partir da configuração que leva à equação (5.81) e variar continuamente as frequências naturais, acompanhando a posição das soluções no espaço. Para variações tais que a simetria (5.72) ainda seja preservada é possível observar que todas as soluções criadas após K_s são separadas (conforme pode ser observado na figura 5.16b para $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.7$ e $\omega_3 = 1.1$). Continuando o processo até a obtenção de configurações só satisfazem a equação (5.79) (sem simetria), a degenerescência das soluções é completamente destruída (a figura 5.16c mostra o caso com $\omega_1 = 1.0, \omega_2 = 0.7, \omega_3 = 1.1, \omega_4 = -0.8, \omega_5 = -0.75$ e $\omega_6 = -1.25$, em que existem várias soluções na região de K_s mas nenhuma se sobrepõe).

O processo de quebra contínua da simetria (5.72) mostrado acima ilustra uma propriedade presente em qualquer configuração de frequências naturais: a presença de degenerescência no espaço de soluções $\phi_{n^*} \times K$ são efeito exclusivo da presença de simetrias no conjunto $\{\omega\}_N$. A importância dessa propriedade aparece na análise de sistemas com configurações mais gerais de frequências naturais, onde o principal interesse não se encontra na descrição do espaço completo de soluções após K_s , mas na determinação das soluções estáveis. Um fato que se observa nas simulações é que as soluções estáveis aparecem sempre com travamento das diferenças de fase ϕ_n (ϕ_{n^*}) definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$, de forma que só é necessário analisar as soluções de (5.79) (onde $\phi_{n^*} = \phi_{N/2}$) com relações ϕ_n ($\phi_{N/2}$) definidas por (5.80a) e (5.80c), sendo que outras combinações de (5.80) sempre levam a soluções instáveis.

O sistema sem degenerescência mais simples de se analisar através das soluções de (5.79)

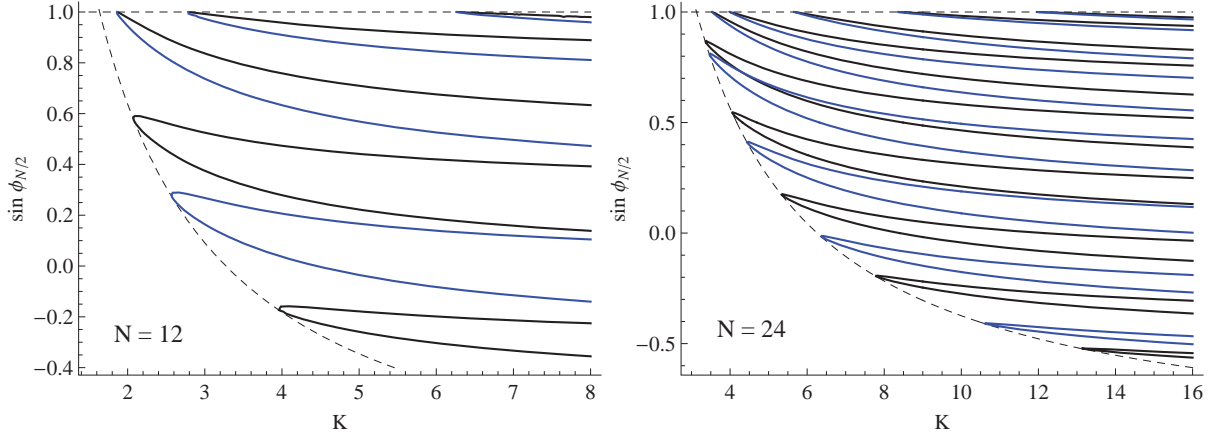


Figura 5.17: Soluções da equação (5.85) representado os pontos fixos do sistema com frequências naturais igualmente espaçadas definidas em (5.82). Linhas tracejadas representam a fronteira da região de solvabilidade, linhas pretas (azuis) representam soluções com $\cos \phi_{N/2} > 0$ ($\cos \phi_{N/2} < 0$). Estabilidade não mostrada.

consiste na configuração de frequências naturais igualmente espaçadas no intervalo finito $[-\gamma, \gamma]$:

$$\omega_n = \frac{\gamma}{N-1} (-2n + N + 1), \quad n = 1, \dots, N. \quad (5.82)$$

Sob essa configuração as frequências naturais apresentam simetria especular com relação ao eixo entre ϕ_N e $\phi_{N/2}$, i. e., $\omega_{N+1-n} = -\omega_n$ para $n = 1, \dots, N/2$, o que resulta na propriedade

$$\sin \phi_{N/2+n} = \sin \phi_n, \quad n = 1, \dots, N/2 - 1. \quad (5.83)$$

Assumindo $\phi_{N/2+n} = \phi_n$ as diferenças de fase ϕ_n em (5.80) são dadas por

$$\phi_n(\phi_{N/2}, K) = \arcsin \left[\sin \phi_{N/2} - \frac{\gamma(N-2n)^2}{4(N-1)K} \right], \quad n = 1, \dots, N/2 - 1, \quad (5.84)$$

de forma que as soluções na região sincronizada são descritas pela equação

$$\sin \left(\phi_{N/2} + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} \phi_n \right) + \sin \phi_{N/2} = \frac{\gamma N^2}{4(N-1)K}. \quad (5.85)$$

Da mesma forma que os casos mostrados no começo do capítulo, essa equação pode ser resolvida tanto para $\phi_{N/2}$ como para $\sin \phi_{N/2}$. A figura 5.17 ilustra a forma geral das soluções no espaço $\sin \phi_{N/2} \times K$ para os casos com $N = 12$ e $N = 24$ ($\gamma = 1$). A caracterização completa dos tipos de soluções (e estabilidade) na região sincronizada será feita na próxima seção, mas por hora a compreensão de algumas propriedades se faz necessária.

Todas as soluções nascem em bifurcações localizadas perto das curvas

$$\sin \phi_{N/2} = \frac{\gamma N^2}{4(N-1)K} - 1, \quad \sin \phi_{N/2} = 1, \quad (5.86)$$

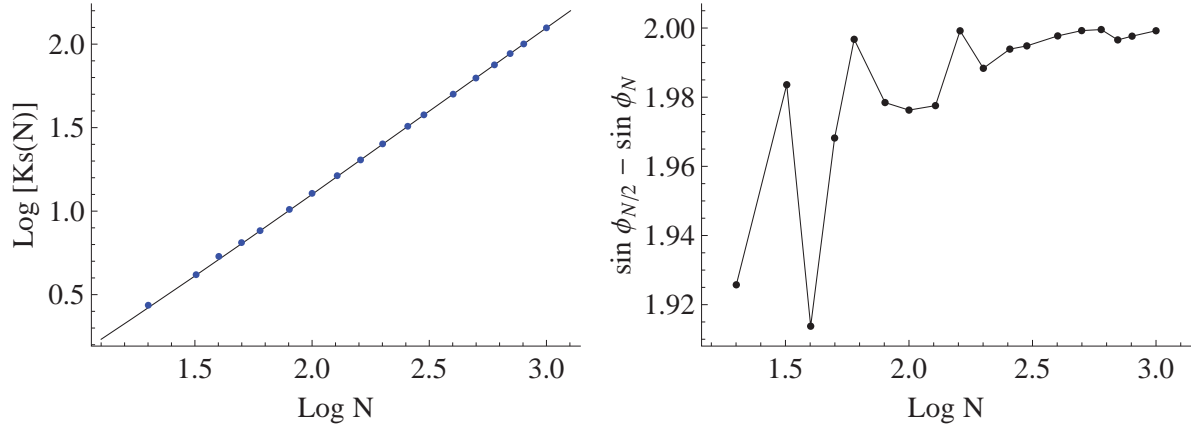


Figura 5.18: Comportamento de $K_s(N)$ obtido a partir da configuração de frequências naturais (5.82) com $\gamma = 1$ (escala logarítmica). Os pontos são os resultados obtidos via simulação e a curva representa o comportamento assintótico teórico em (5.87). A figura à direita mostra o comportamento de $\sin \phi_{N/2} - \sin \phi_N$ obtido nas simulações.

que definem a fronteira de solvabilidade do espaço (só podem existir soluções dentro dessa região), e os tipos de bifurcação que geram as soluções são caracterizadas pelo sinal de $\cos \phi_{N/2}$: as bifurcações localizadas na parte inferior da figura 5.17, próximas à primeira curva de (5.86), criam soluções com $s \equiv \text{sign}(\cos \phi_{N/2}) = \pm 1$ (no gráfico $s = 1$ são representadas por curvas pretas e $s = -1$ são representadas por curvas azuis); bifurcações localizadas na parte superior, perto de $\sin \phi_{N/2} = 1$, geram duas soluções com sinais opostos^{||}.

A bifurcação responsável pela sincronização é sempre a primeira solução de (5.85), de forma que ela pode aparecer próxima de qualquer uma das duas fronteiras, sendo portanto caracterizada por $\sin \phi_{N/2} \approx 1$ ou $\sin \phi_N \approx -1$, lembrando que o argumento dentro do seno no lado esquerdo de (5.85) corresponde a ϕ_N . Quando se aumenta o número de osciladores o número de bifurcações também aumenta, e a distância entre elas ao longo das fronteiras se torna cada vez menor para soluções (isso pode ser inferido ao se comparar os dois gráficos na figura 5.17). Se considerarmos um número muito grande de osciladores todas as soluções próximas a K_s devem ficar condensadas próximas à origem da região de solvabilidade (na parte superior esquerda dos gráficos), de forma que nessa situação a relação $\sin \phi_{N/2} - \sin \phi_N \approx 2$ deve ser válida, e assintoticamente o acoplamento crítico $K_s(N)$ apresenta um comportamento bem definido

$$K_s^{\text{assintótico}}(N) = \frac{\gamma N^2}{8(N-1)}, \quad (5.87)$$

conforme pode ser observado na figura 5.18.

Esse comportamento assintótico $K_s \sim N$, também observado em alguns casos tratados anteriormente, não é resultado do espaçamento igual entre frequências naturais vizinhas, mas sim do fato que o intervalo é finito, ou seja, as diferenças $\omega_n - \omega_{n+1}$, embora iguais para todos

^{||}Na realidade as duas soluções são geradas com $s = -1$ e uma delas troca de sinal quando toca a fronteira $\sin \phi_{N/2} = 1$, mas essa informação é desnecessária para a compreensão dos resultados nessa seção.

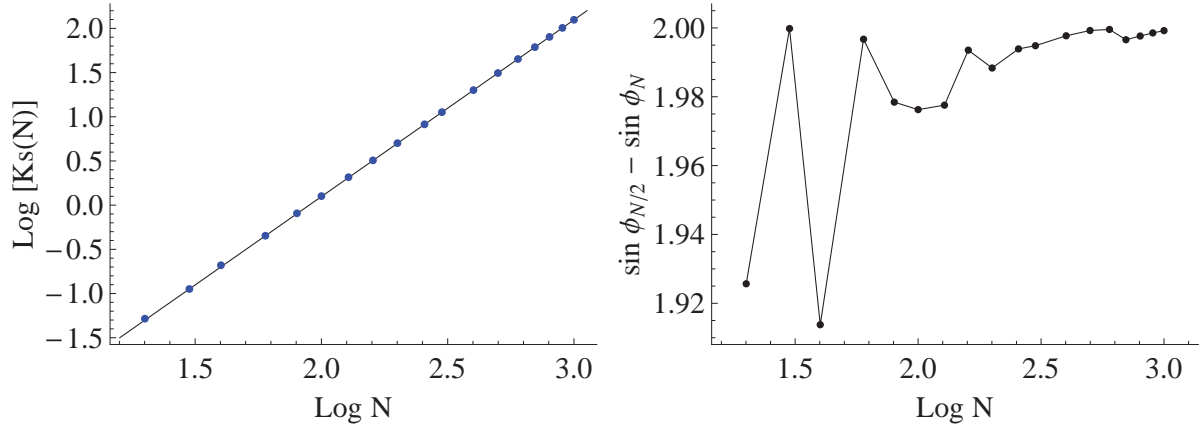


Figura 5.19: Comportamento de $K_s(N)$ obtido a partir da configuração de frequências naturais (5.88) com $\epsilon = 0.002$ (escala logarítmica). Os pontos são os resultados obtidos via simulação e a curva representa o comportamento assintótico teórico em (5.91). A figura à direita mostra o comportamento de $\sin \phi_{N/2} - \sin \phi_N$ obtido nas simulações.

os osciladores vizinhos, é inversamente proporcional a N . Se considerarmos a configuração

$$\omega_n = \frac{\epsilon}{2} (-2n + N + 1), \quad n = 1, \dots, N, \quad (5.88)$$

onde $\omega_n - \omega_{n+1} = \epsilon$, independente de N , as equações (5.84) e (5.85) são escritas na forma

$$\phi_n(\phi_{N/2}, K) = \arcsin \left[\sin \phi_{N/2} - \frac{\epsilon (N - 2n)^2}{8K} \right], \quad n = 1, \dots, N/2 - 1, \quad (5.89)$$

$$\sin \left(\phi_{N/2} + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} \phi_n \right) + \sin \phi_{N/2} = \frac{\epsilon N^2}{8K}. \quad (5.90)$$

Como esse sistema apresenta as mesmas características do considerado anteriormente, o limite assintótico de $K_s(N)$ também pode ser obtido pela aproximação $\sin \phi_{N/2} - \sin \phi_N \approx 2$ para fornecer

$$K_s^{\text{assintótico}}(N) = \frac{\epsilon N^2}{16}, \quad (5.91)$$

conforme ilustrado na figura 5.19.

Todos os casos analisados até agora, incluindo a cadeia de osciladores na seção 5.1, apresenta o acoplamento crítico de sincronização crescente com N , o que representa um comportamento comumente encontrado em sistemas de osciladores localmente acoplados. Tanto sob a simetria (5.72) como sob a simetria especular $\omega_{N+1-n} = \omega_n$, presente nas configurações igualmente espaçadas (5.82) e (5.88), qualquer prescrição que determine as frequências naturais de forma a apresentar um comportamento bem definido em N na soma das frequências, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{N/2} \omega_n = f(N), \quad (5.92)$$

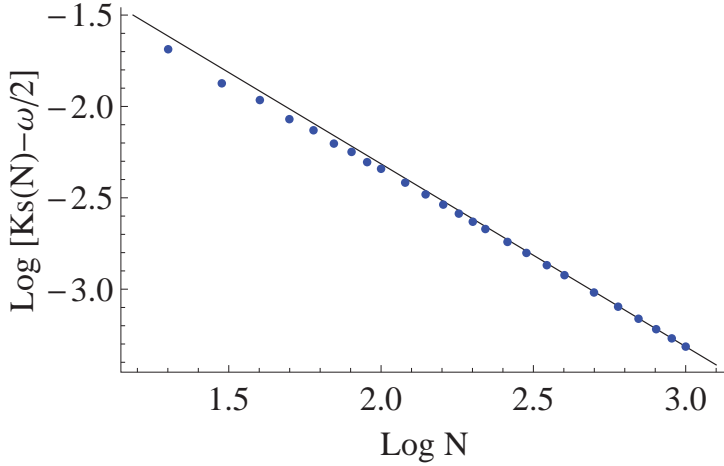


Figura 5.20: Comportamento de $K_s(N)$ obtido a partir da configuração de frequências naturais (5.93) com $\gamma = 1$, inversamente proporcional ao tamanho do sistema. Os pontos são os dados de simulação e a curva corresponde ao ajuste assintótico (5.96) com $A = 0.485$.

apresentará (em geral) um comportamento do acoplamento crítico na forma $K_s(N) \sim \frac{1}{2}f(N)$, sendo esse resultado exato para (5.72) e assintótico para o outro caso. Como em geral o somatório em (5.92) produz uma função crescente em N ($\partial_N f > 0$), essas configurações sempre apresentam $K_s \rightarrow \infty$ conforme $N \rightarrow \infty$. Porém existe pelo menos uma configuração em que essa propriedade não é válida: considere um sistema com simetria especular $\omega_{N+1-n} = -\omega_n$ tal que as frequências naturais sejam dadas por

$$\omega_n = \frac{\gamma(-1)^{n+1}}{N-1}(-2n+N+1), \quad n = 1, \dots, N/2. \quad (5.93)$$

Devido à presença do termo $(-1)^{n+1}$ a maior soma sequencial $\sum_n \omega_n$ que se pode formar corresponde somente ao maior elemento do conjunto $\{\omega\}_N$ ($\omega_1 = \gamma$), de forma que as equações que descrevem a região sincronizada desse sistemas são:

$$\phi_n(\phi_1) = \arcsin \left\{ \sin \phi_1 - \frac{\gamma[N-2+(-1)^n(N-2n)]}{2(N-1)K} \right\}, \quad n = 2, \dots, N/2, \quad (5.94)$$

$$\sin \left[2\phi_1 + 2 \sum_{n=2}^{N/2-1} \phi_n(\phi_1) + \phi_{N/2}(\phi_1) \right] + \sin \phi_1 = \frac{\gamma}{K}. \quad (5.95)$$

Ao se aumentar o número de osciladores o efeito na região de solvabilidade é o mesmo dos casos igualmente espaçados, portanto no limite $N \rightarrow \infty$ devemos ter $\sin \phi_1 - \sin \phi_N \sim 2$. Mas como o lado direito de (5.95) não depende de N o sistema não aumenta a escala onde K_s aparece, resultando em um comportamento decrescente com N (visto que para sistemas pequenos $K_s > \gamma/2$). Portanto se tomarmos o limite de um número muito grande de osciladores devemos obter

$$K_s^{\text{assintótico}}(N) = \gamma/2 + \frac{A}{N} + \mathcal{O}(N^{-2}), \quad (5.96)$$

conforme pode ser observado na figura 5.20.

A importância de se obter uma configuração de frequências naturais com comportamento $K_s \sim 1/N$ no modelo de Kuramoto localmente acoplado reside na comparação com sistemas envolvendo graus maiores de conectividade da rede. Como visto nos capítulos anteriores, o

modelo globalmente conexo apresenta um comportamento decrescente com N , porém em modelos de acoplamento local com conectividade fixa sempre foi observado a divergência de K_s no limite $N \rightarrow \infty$. Esse fato levava à crença de que deveria existir alguma transição no comportamento assintótico de K_s a partir de uma conectividade crítica da rede de osciladores. Mas se o sistema apresentar alguma prescrição de reordenamento** das frequências naturais de forma a apresentar $\partial_N K_s < 0$, então essa transição dependente da conectividade não deve existir.

Após uma longa descrição de sistemas simplificados (mas não simples) a maior parte das características básicas da região sincronizada do modelo de Kuramoto localmente acoplado foram introduzidas, de forma que podemos atacar agora o problema mais geral de descrição do sistema sob configurações de frequências naturais aleatoriamente distribuídas.

5.3 Frequências naturais arbitrariamente distribuídas

Se considerarmos um anel e removermos um link (interação) entre um par de osciladores vizinhos temos como resultado uma cadeia de osciladores. Para um anel com N osciladores existem N formas de se fazer isso, e para cada link diferente que se é retirado a cadeia resultante pode apresentar um acoplamento crítico K_s diferente. Para que o sistema no anel assuma uma solução sincronizada é necessário que todas as cadeias contidas nele também apresentem uma solução de sincronização. Esse fato sugere um indicativo de que devemos procurar a cadeia dentro do anel com o maior K_s .

Conforme a seção 5.1, o cálculo do acoplamento crítico de cadeias se resume ao cálculo da maior soma sequencial de frequências naturais. Mas como no anel essa soma pode começar de qualquer ponto em particular, vamos definir condições periódicas nas frequências naturais para facilitar o cálculo:

$$\omega_{N+n} = \omega_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (5.97)$$

Cada oscilador de onde se começa a calcular a soma define o primeiro oscilador dessa cadeia específica, enquanto o N -ésimo define o final da cadeia. Assim o acoplamento crítico de cada uma das N cadeias contidas dentro de um anel pode ser calculado como

$$K_r = \max_{r \leq l < r+N} \left| \sum_{j=r}^l (\Omega - \omega_j) \right|, \quad r = 1, \dots, N, \quad (5.98)$$

onde r denota a cadeia com os osciladores das extremidades definidos por ω_r e ω_{N+r} . Em cada cadeia de (5.98) o índice maximizante l_r da soma define o acoplamento crítico K_r , e a cadeia com maior acoplamento crítico é determinada por

$$K_s^{\text{chain}} \equiv K_{r_{\max}} = \max_r \{K_1, \dots, K_r, \dots, K_N\}. \quad (5.99)$$

**Embora não mencionado no texto, a configuração (5.93) pode ser interpretada como uma prescrição de reordenamento das frequências naturais de (5.82). Para esse sistema específico o reordenamento corresponde à disposição de menor acoplamento crítico que se pode obter, o que pode ser chamado de acoplamento mínimo de sincronização do conjunto $\{\omega\}_N$.

Como sempre é possível renumerar os osciladores dentro do anel (mantendo suas posições relativas), vamos considerar a indexação obtida através da translação $n \rightarrow n + 1 - r_{\max}$, que permite escrever

$$K_s^{\text{chain}} = \left| \sum_{j=1}^{n^*} (\Omega - \omega_j) \right|, \quad (5.100)$$

onde $n^* = l_{r_{\max}} + 1 - r_{\max}$.

Esse procedimento permite determinar especificamente a diferença de fase ϕ_{n^*} para a qual o conjunto de equações na região sincronizada deve ser resolvido:

$$\phi_n = \arcsin \left[\sin \phi_{n^*} + \frac{1}{K} \sum_{j=n+1}^{n^*} (\Omega - \omega_j) \right], \quad n = 1, \dots, n^* - 1, \quad (5.101a)$$

$$\phi_n = \arcsin \left[\sin \phi_{n^*} - \frac{1}{K} \sum_{j=n^*+1}^n (\Omega - \omega_j) \right], \quad n = n^* + 1, \dots, N - 1, \quad (5.101b)$$

$$\sin \left[\phi_{n^*} + \sum_{n \neq n^*}^{N-1} \phi_n(\phi_{n^*}) \right] + \sin \phi_{n^*} = \frac{\sum_{j=1}^{n^*} (\omega_j - \Omega)}{K}. \quad (5.102)$$

O motivo é que com essa escolha específica de n^* para a diferença de fase garante-se que nenhuma soma presente nas equações (5.101) seja maior do que a presente no lado direito de (5.102). Da mesma forma que na seção anterior, existe uma região de valores de K , antes da sincronização, que permite definir as relações (5.101) (argumentos dentro da função arco seno sempre pertencem ao intervalo $[-1, 1]$) enquanto a equação (5.102) não admite solução. Assim a solução sincronizada aparecerá somente quando (5.102) admitir solução, o que representa a primeira solução acessível à ϕ_{n^*} e portanto corresponde ao primeiro mínimo da função $K(\phi_{n^*})$, conforme detalhado na seção 5.1 para o caso da cadeia.

Uma vez expostas as considerações iniciais reescrevemos a equação (5.102) na forma

$$\sin \phi_{n^*} - \sin [\phi_N(\phi_{n^*})] = s \frac{K_s^{\text{chain}}}{K}, \quad (5.103)$$

onde $s = \text{sign} \left[\sum_{j=1}^{n^*} (\Omega - \omega_j) \right]$, e a resolvemos numericamente. A forma geral das soluções é ilustrada na figura 5.21 para $N = 10$ e $N = 50$, onde as frequências naturais foram geradas a partir de uma distribuição uniforme definida no intervalo $[-10, 10]$. Para evitar confusão a análise numérica, quando necessária, será realizada somente para o caso específico de $N = 10$.

As múltiplas soluções de travamento de fase, criadas espontaneamente acima de K_s , são confinadas a uma região do espaço $\sin \phi_{n^*} \times K$ denominada região de solvabilidade (RS), obtida ao se identificar que para cada valor de $\sin \phi_{n^*}$ existe um valor máximo de K tal que (5.103) nunca é satisfeita. Assumindo $\sin \phi_N = -s$ essa região é definida pela relação^{††}

$$|\sin \phi_{n^*}| \geq \left| s \left(\frac{K_s^{\text{chain}}}{K} - 1 \right) \right|. \quad (5.104)$$

^{††}A partir dessa definição é fácil deduzir que o acoplamento crítico de sincronização do anel deve satisfazer a condição $K_s \geq \frac{K_s^{\text{chain}}}{2}$.

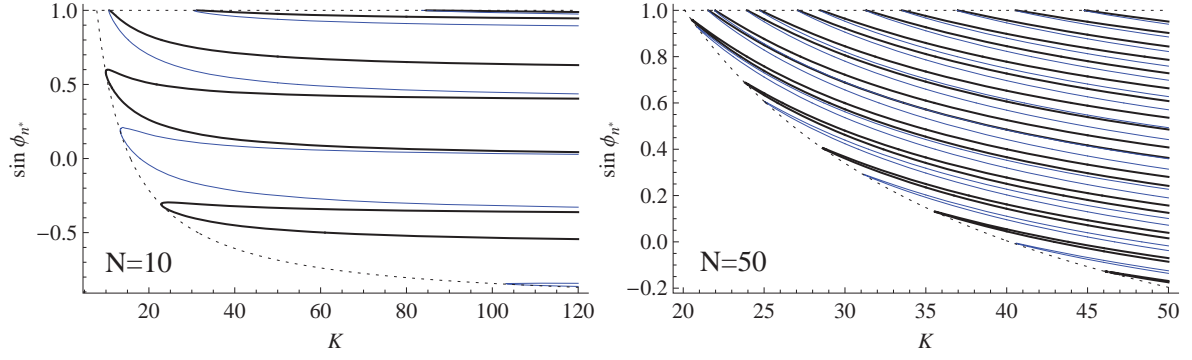


Figura 5.21: Soluções numéricas de (5.103) que representam os pontos fixos do sistema sincronizado (estabilidade não explícita). Esquerda: $N = 10$ com frequências naturais $\omega_1 = 6.9$, $\omega_2 = 2.8$, $\omega_3 = -0.4$, $\omega_4 = -2.6$, $\omega_5 = 1.3$, $\omega_6 = -6.8$, $\omega_7 = 0.8$, $\omega_8 = -1.6$, $\omega_9 = -9.5$ e $\omega_{10} = -6.7$. Direita: realização com $N = 50$. Os conjuntos de frequências naturais foram geradas por uma distribuição uniforme no intervalo $[-10, 10]$. Linhas pretas (azuis) apresentam $\cos \phi_{n^*} > 0$ ($\cos \phi_{n^*} < 0$), e as linhas tracejadas representam as fronteiras $\sin \phi_{n^*} = s$ e $\sin \phi_N = -s$ da região de solvabilidade.

Existem dois tipos de travamento de fase que correspondem aos pontos fixos do sistema:

- Tipo I: soluções geradas na parte inferior de RS com $\sin \phi_N \approx -s$ que bifurcam em ramos com $\text{sign}(\cos \phi_{n^*})$ invariante.
- Tipo II: soluções com sinais opostos de $\cos \phi_{n^*}$ geradas a partir de uma bifurcação na parte superior de RS com $\sin \phi_{n^*} \approx s$.

A partir de cada bifurcação sempre existe um ramo de solução com um ponto tangente à fronteira de RS: soluções do tipo I possuem um ponto tangente à curva

$$\sin \phi_{n^*} = s \left(\frac{K_s^{\text{chain}}}{K} - 1 \right), \quad (5.105)$$

que corresponde a todos os pontos de RS com $\sin \phi_N = -s$, enquanto as do tipo II possuem um ponto tangente em $\sin \phi_{n^*} = s$. Em todos os pontos tangentes, independente da fronteira, é possível demonstrar que a condição

$$\cos \left(\sum_{n \neq n^*}^{N-1} \phi_n \right) = \frac{K_s^{\text{chain}}}{K} - 1, \quad (5.106)$$

sempre é satisfeita. Essa condição é importante porque ela fornece o número de soluções em cada fronteira de RS: uma vez que o argumento dentro do cosseno pode ser expandido em uma série de Laurent definida por $\phi_n = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m^{(n)}}{K^m}$, o comportamento decadente em função de K garante um número finito de soluções; como A_0 depende do tamanho do sistema é possível concluir que o efeito de aumentar o número de osciladores corresponde a um maior número de soluções acima de K_s , conforme pode ser observado na figura (5.21).

Uma forma de se responder à questão de como as múltiplas soluções são geradas é analisando as soluções de ϕ_{n^*} e ϕ_N nos pontos tangentes. Iniciando pelas soluções de tipo I, a condição $\sin \phi_N = -s$ implica que ϕ_N deve satisfazer a equação

$$\phi_N^{(I)}(m_1) = -s \frac{(4m_1 + 1)\pi}{2}, \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (5.107)$$

Para cada possível valor de m_1 a equação (5.103) admite duas soluções:

$$\phi_{n^*}^{(I,1)} = \arcsin \left[s \left(\frac{K_s^{\text{chain}}}{K} - 1 \right) \right], \quad (5.108a)$$

$$\phi_{n^*}^{(I,2)} = \pi - \arcsin \left[s \left(\frac{K_s^{\text{chain}}}{K} - 1 \right) \right]. \quad (5.108b)$$

Sob a condição $\phi_{n^*} = \phi_{n^*}^{(I,1)}$ os valores assumidos por m_1 fornecem todos os valores de K onde as soluções com $\cos \phi_{n^*} > 0$ são tangentes à fronteira de RS. De forma similar quando $\phi_{n^*} = \phi_{n^*}^{(I,2)}$ os valores de m_1 fornecem os pontos tangentes das soluções com $\cos \phi_{n^*} < 0$.

O mesmo procedimento pode ser realizado para as soluções do tipo II, onde a condição $\sin \phi_{n^*} = s$ impõe

$$\phi_{n^*}^{(II)}(m_2) = -s \frac{(4m_2 - 1)\pi}{2}, \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (5.109)$$

Agora para cada valor de m_2 também existem duas soluções para ϕ_N :

$$\phi_N^{(II,1)} = -\arcsin \left[s \left(\frac{K_s^{\text{chain}}}{K} - 1 \right) \right], \quad (5.110a)$$

$$\phi_N^{(II,2)} = -\pi + \arcsin \left[s \left(\frac{K_s^{\text{chain}}}{K} - 1 \right) \right]. \quad (5.110b)$$

Os valores de K para os pontos tangentes nas fronteiras de RS são mostrados na figura 5.22 para o caso $N = 10$.

Com a descrição do surgimento das múltiplas soluções de travamento de fase acima de K_s (nos pontos tangentes) é possível responder a questão do seu surgimento. Se voltarmos à equação (5.102) e olharmos no primeiro termo do lado esquerdo é possível observar que conforme aumenta-se o acoplamento K a soma das diferenças de fase $\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n$ vai além de 2π mas não como múltiplos de 2π . Dessa forma é a presença desse termo - que conecta o primeiro ao último oscilador da cadeia - que gera as múltiplas soluções. A notável simetria entre as soluções tangentes de tipo I e II vem do fato que a remoção da interação entre os osciladores θ_1 e θ_N fornece uma cadeia com acoplamento crítico de sincronização igual à obtida pela remoção da interação entre os osciladores θ_{n^*} e θ_{n^*+1} , mesmo quando as soluções de travamento de fase nesse segundo caso são diferentes. Vale ressaltar que essa simetria não é perfeita porque o número de soluções dos tipos I e II não é em geral o mesmo.

5.3.1 Estabilidade das soluções e bacias de atração

Para realizar a análise de estabilidade linear das soluções é necessário obter a matriz jacobiana do sistema, mas como as equações de movimento são invariantes mediante translações

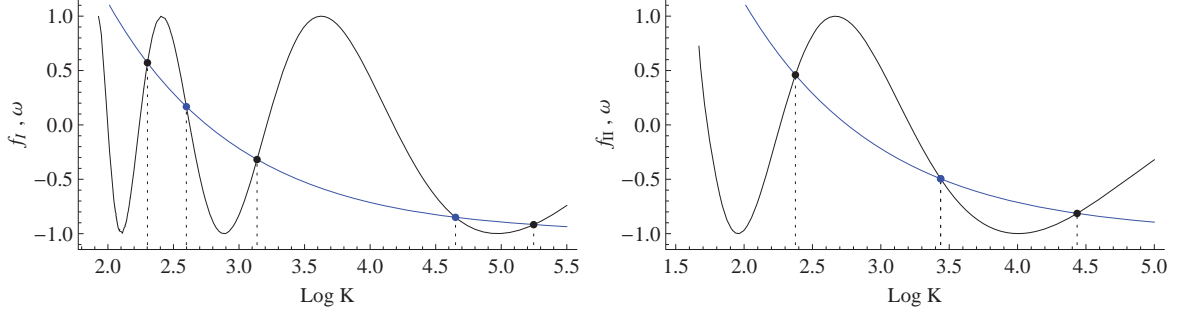


Figura 5.22: Representação gráfica das soluções numéricas de (5.106) para a realização $N = 10$, com $y = s \left(\frac{K_s^{\text{chain}}}{K} - 1 \right)$ (curva azul) e $f_{I,II} = \cos \left(\sum_{n \neq n^*}^{N-1} \phi_n \right)$ (curva preta) calculados nos pontos tangentes das soluções do tipo I e II, respectivamente. Esquerda: soluções $\phi_{n^*}^{(I,1)}$ (pontos pretos) em $K_{(m_1=0)} = 9.9905$, $K_{(m_1=1)} = 23.0467$, $K_{(m_1=2)} = 190.016$ e soluções $\phi_{n^*}^{(I,2)}$ (pontos azuis) em $K_{(m_1=0)} = 13.443$ and $K_{(m_1=1)} = 104.7171$. Direita: soluções $\phi_N^{(II,1)}$ (pontos pretos) em $K_{(m_2=0)} = 10.75473$, $K_{(m_2=1)} = 84.3981$ e soluções $\phi_N^{(II,2)}$ (ponto azul) em $K_{(m_2=2)} = 31.1029$.

globais de fase $\theta_n \rightarrow \theta_n + \Theta$ a análise é um pouco mais complicada. É necessário perceber que a liberdade de gauge reduz as N equações de movimento (5.15) a um sistema $(N - 1)$ -dimensional. Embora uma fixação de *gauge* permitiria eliminar o grau de liberdade extra e efetuar a análise de estabilidade nas variáveis θ_n , existe uma forma mais tratável de se fazer isso. Ao invés de considerar as equações de movimento na forma (5.15) é possível reescrevê-las nas variáveis ϕ_n e eliminar o grau de liberdade substituindo-se ϕ_N por $-\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n$. Assim obtemos as equações de movimento

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 - \omega_2 - K \left[\sin \left(\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n \right) + 2 \sin \phi_1 - \sin \phi_2 \right], \quad (5.111a)$$

$$\dot{\phi}_{N-1} = \omega_{N-1} - \omega_N + K \left[\sin \left(\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n \right) + \sin \phi_{N-2} - 2 \sin \phi_{N-1} \right], \quad (5.111b)$$

$$\dot{\phi}_n = \omega_n - \omega_{n+1} + K (\sin \phi_{n-1} - 2 \sin \phi_n + \sin \phi_{n+1}), \quad (5.111c)$$

onde $n = 2, \dots, N - 2$.

Devido à estrutura das equações os elementos da matriz Jacobiana são escritos como $J_{n,m} = \partial_{\phi_m} \dot{\phi}_n$. A maioria dos elementos é igual a zero e os não nulos são dados por:

$$J_{1,1} = -K \left[2 \cos \phi_1 + \cos \left(\sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \right) \right], \quad J_{1,2} = K \left[\cos \phi_1 - \cos \left(\sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \right) \right], \quad (5.112a)$$

$$J_{N-1,N-2} = K \left[\cos \phi_{N-2} - \cos \left(\sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \right) \right], \quad (5.112b)$$

$$J_{N-1,N-1} = -K \left[2 \cos \phi_{N-1} + \cos \left(\sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \right) \right], \quad (5.112c)$$

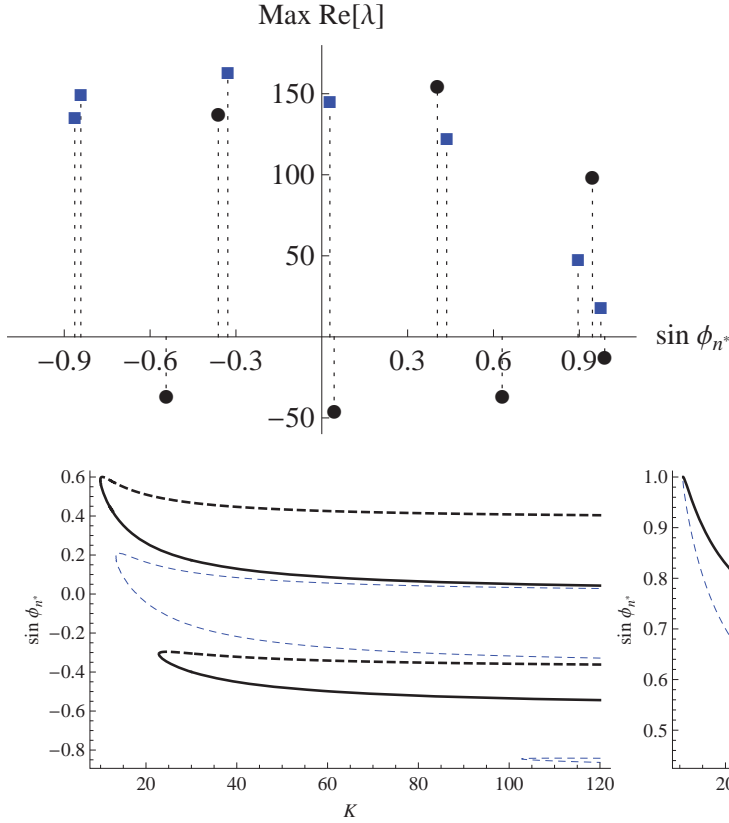


Figura 5.23: Maior autovalor da matriz jacobiana (parte real) para o caso $N = 10$ com $K = 120$. Pontos pretos (quadrados azuis) representam soluções travadas com $\cos \phi_{n^*} > 0$ ($\cos \phi_{n^*} < 0$).

Figura 5.24: Projeção do diagrama de bifurcação no espaço $\sin \phi_{n^*} \times K$ para o caso $N = 10$. Curvas contínuas (tracejadas) representam soluções estáveis (instáveis). Esquerda: soluções do tipo I. Direita: soluções do tipo II.

$$J_{N-1,n} = J_{1,n+2} = -K \cos \left(\sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \right), \quad n = 1, \dots, N-3, \quad (5.112d)$$

$$J_{n,m} = K \cos \phi_m (\delta_{m,n-1} - 2\delta_{m,n} + \delta_{m,n+1}), \quad n = 2, \dots, N-2. \quad (5.112e)$$

A estabilidade linear dos pontos fixos é determinada pela estrutura dos autovalores da matriz Jacobiana: uma solução é estável somente se a parte real de todos os autovalores for negativa. Como um sistema de N osciladores possui uma matriz $(N-1) \times (N-1)$, a equação de autovalores é muito complicada para ser tratada analiticamente. A saída para esse problema é realizar um cálculo numérico que envolve fixar um valor para K e substituir as soluções travadas ϕ_n nos elementos da matriz Jacobiana para calcular os autovalores λ_n ($n = 1, \dots, N-1$). A figura 5.23 mostra a parte real do maior autovalor para todos os pontos fixos de $N = 10$ com $K = 120$ (os pontos fixos podem ser inferidos tanto na figura 5.21 como na figura 5.25). Ao se repetir o processo para outros valores de K no intervalo $(K_s, 120]$ é possível determinar a estabilidade em todos os ramos e obter uma projeção do diagrama de bifurcação no espaço $\sin \phi_{n^*} \times K$, conforme figura 5.24.

As bifurcações do tipo I com $\cos \phi_{n^*} > 0$ geram dois ramos de solução com estabilidades opostas, sendo o ramo que apresenta um ponto tangente à fronteira $\sin \phi_{n^*} = s$ sempre estável.

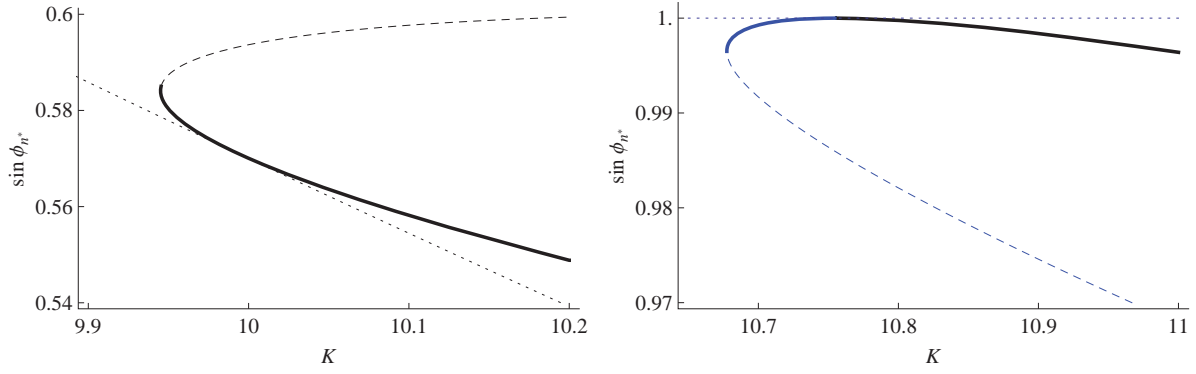


Figura 5.25: Região ampliada das suas primeiras bifurcações do caso $N = 10$. As linhas pontilhadas representam as fronteiras de RS, $\sin \phi_N = -s$ na figura da esquerda e $\sin \phi_{n^*} = s$ na figura a direita. Esquerda: bifurcação K_s da figura 5.25 com um ponto da solução estável tangente à fronteira $\sin \phi_N = -s$. Direita: primeira bifurcação do tipo II da figura 5.25 mostrando o nascimento da solução estável com $\cos \phi_{n^*} < 0$, que troca de sinal quando o ramo toca a superfície $\sin \phi_{n^*} = s$.

Já as bifurcações com $\cos \phi_{n^*} < 0$ sempre geram dois ramos instáveis (os dois casos podem ser observados na figura 5.24). A mesma característica também é observada nas bifurcações do tipo II, que apresentam tanto soluções com estabilidades opostas como soluções bi-instáveis originadas da mesma bifurcação. Todas as bifurcações do tipo II também possuem um ponto tangente à fronteira de RS, mas como $\sin \phi_{n^*} = s$, a solução muda o sinal de $\cos \phi_{n^*}$ quando toca a fronteira, de forma que toda bifurcação do tipo II gera duas soluções com $\cos \phi_{n^*} < 0$ (a figura 5.25 mostra dois exemplos da região de bifurcação ampliada para os dois tipos).

Uma análise da região onde aparecem as bifurcações mostra que elas de fato correspondem aos mínimos da função $K(\phi_{n^*})$ definida na região sincronizada. Um fato que se repete para todos os casos em que o conjunto de frequências naturais não apresenta simetria é que não existe valor de $\sin \phi_n$ igual a ± 1 em K_s ou qualquer outra bifurcação. A explicação para esse fato encontra-se nas equações (5.101-5.103): para que alguma bifurcação apresente uma diferença de fase com seno igual a ± 1 ela tem que ser ϕ_{n^*} ou ϕ_N , mas como ϕ_N é uma função não linear de ϕ_{n^*} existem soluções sincronizadas acessíveis antes do aparecimento do seno igual a ± 1 . Esse resultado é compatível com a condição

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\cos \phi_n} = 0, \quad (5.113)$$

satisfeita no acoplamento crítico K_s por qualquer distribuição aleatória de frequências naturais em um anel, como mostrado no capítulo anterior. No entanto dois pontos devem ser observados com relação a esse resultado. Primeiro, nas seções anteriores foram mostrados vários casos onde a bifurcação em K_s aparece com $\sin \phi_{n^*} = \pm 1$. A característica em comum desses exemplos é que em todos foram consideradas condições de simetria na configuração das frequências naturais, o que configura um regime onde (5.113) não é válida. O segundo é que todo ponto

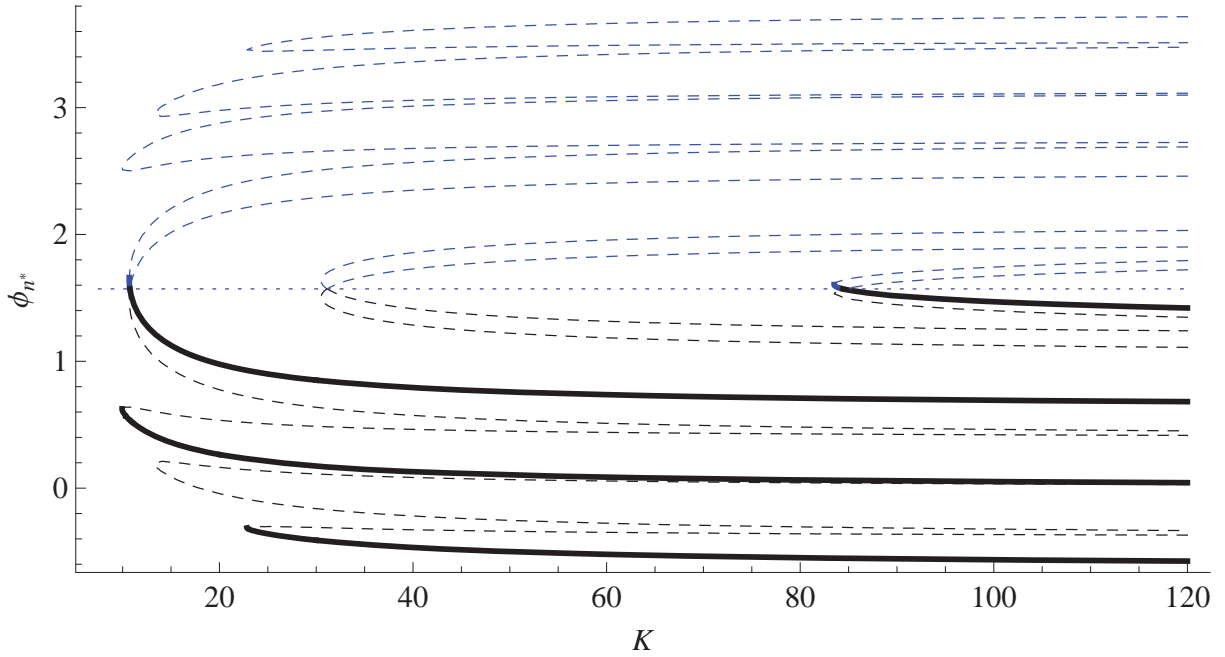


Figura 5.26: Diagrama de bifurcação do sistema com $N = 10$ representado pelo espaço $\phi_{n^*} \times K$. Linhas contínuas (tracejadas) correspondem a pontos fixos estáveis (instáveis); linhas pretas (azuis) correspondem a $\cos \phi_{n^*} > 0$ ($\cos \phi_{n^*} < 0$); linha pontilhada central representa $\phi_{n^*} = \pi/2$. Cada bifurcação responsável pela criação de duas soluções com ϕ_n^+ apresenta uma parceira complementar obtida pelas soluções com ϕ_n^- , o que caracteriza o aparecimento de bifurcações duplas em toda a região sincronizada. Todos os pontos fixos estáveis provêm do conjunto de soluções com ϕ_n^+ , o que implica em $\cos \phi_n > 0$ para todo n diferente de n^* . A diferença de fase ϕ_{n^*} apresenta uma característica especial por admitir solução estável com $\cos \phi_{n^*} < 0$ próximo à bifurcação.

tangente às fronteiras de RS sempre aparece perto da bifurcação, sendo que a distância entre eles tende a ficar muito pequena no limite $N \rightarrow \infty$, em concordância com o resultado numérico obtido por El-Nashar e Cerdeira [81] que analisaram o comportamento do acoplamento crítico em função de N para frequências naturais geradas a partir de uma distribuição gaussiana.

Embora a visualização das soluções no espaço $\sin \phi_{n^*} \times K$ seja muito mais simples, é importante lembrar que os pontos fixos do sistemas são dados como travamentos das diferenças de fase ϕ_n . Como a função $\sin \phi_{n^*}$ apresenta degenerescência de segunda ordem devido às duas soluções ϕ_{n^*} e $\pi - \phi_{n^*}$, as figuras 5.24 e 5.25 correspondem somente a projeções do diagrama de bifurcação. As soluções na região sincronizada só podem ser visualizadas univocamente no gráfico $\phi_{n^*} \times K$, apresentado na figura 5.26. Nesse espaço a degenerescência é levantada e a simetria com relação ao eixo $\phi_{n^*} = \pi/2$ torna-se evidente. O que se pode observar é que a estrutura de bifurcações duplas, presentes em todos os casos com $N \geq 4$ analisados até agora, aparece como a estrutura fundamental para sistemas com frequências naturais arbitrariamente distribuídas. A análise dos autovalores para esse sistema mostra que as soluções estáveis sempre nascem em uma bifurcação sela-nó, acompanhada de uma bifurcação sela-nó instável, simétrica

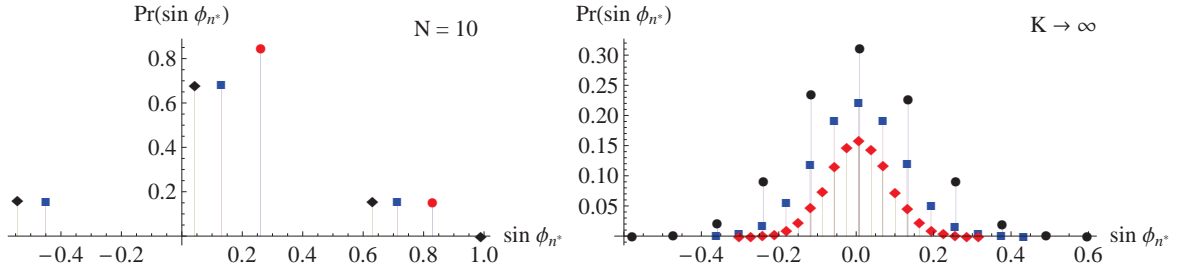


Figura 5.27: Estimação do tamanho relativo das bacias de atração do sistema pela probabilidade discreta de se atingir cada ponto fixo. Esquerda: caso com $N = 10$, com as probabilidades obtidas para $K = 20$ (pontos vermelhos), $K = 50$ (quadrados azuis) e $K = 120$ (losangos pretos). Direita: distribuição discreta obtida no limite $K \rightarrow \infty$ para $N = 50$ (pontos pretos), $N = 100$ (quadrados azuis) e $N = 200$ (losangos vermelhos).

em relação ao eixo $\phi_{n^*} = \pi/2$. Todas as bifurcações duplas com soluções instáveis são do tipo sela-sela.

Uma vez identificada a estrutura correta dos pontos fixos, a análise do espaço de soluções pode ser feita sem problemas através das projeções $\sin \phi_{n^*} \times K$ do diagrama de bifurcações, onde um ramo estável representa a existência de um ponto fixo estável com aquele valor de $\sin \phi_{n^*}$. Sob essas considerações o quadro geral da região sincronizada pode ser resumido da seguinte forma: para um dado N , a configuração $\{\omega\}_N$ determina a RS do sistema cujas soluções nascem em bifurcações localizadas próximo às fronteiras de solvabilidade; todas as soluções estáveis são representadas por ramos que tocam as fronteiras de RS; dados os dois tipos de bifurcação $K_j^{I,II}$, onde $j = 1, 2, \dots$ denota a ordem em que as bifurcações aparecem, todas as bifurcações com j ímpar correspondem ao par de bifurcações sela-nó, que produzem uma solução estável, e todas as bifurcações com j par correspondem ao par de bifurcações sela-sela que produzem quatro soluções instáveis.

Com a estabilidade das soluções completamente descrita, vamos analisar o comportamento das bacias de atração dos pontos fixos estáveis. Como o modelo de Kuramoto localmente acoplado é em geral um sistema de alta dimensionalidade, realizar uma análise gráfica não é viável. Portanto consideraremos uma abordagem estatística: uma vez que os pontos fixos podem ser representados por $\sin \phi_{n^*}$, é possível gerar uma grande amostra de condições iniciais aleatórias no intervalo $[-\pi, \pi]$, para valores fixos de K , e estimar o tamanho da bacia de atração através da probabilidade do sistema atingir cada solução estável.

Em cada região de valores de K onde o número de soluções estáveis é mantido constante é possível observar que o tamanho relativo das bacias de atração, dados pela probabilidade de se atingir o respectivo ponto fixo, apresenta somente pequenas flutuações estatísticas. No caso em que varia-se o acoplamento através de regiões com aumento crescente do número de soluções observa-se que quando um novo ponto fixo estável é criado a maior parte da sua bacia de atração é roubada do ponto fixo (pré existente) mais próximo no espaço $\sin \phi_{n^*}$, como ilustrado na figura 5.27 (à esquerda) para o caso com $N = 10$.

O resultado numérico para um dado tamanho de sistema mostra que os tamanhos relativos das bacias de atração não são igualmente distribuídos entre os pontos fixos: as soluções estáveis que apresentam travamento de fase $\phi_{n^*} \rightarrow 0$ no limite $K \rightarrow \infty$ atraem a maior parte das condições iniciais. O comportamento do sistema nesse limite é mais simples de se analisar: as diferenças de fase satisfazem a propriedade $\phi_n = \phi$ para $n = 1, \dots, N - 1$, com ϕ dado pelas soluções de

$$\sin [(N - 1) \phi] = -\sin \phi, \quad (5.114)$$

admitindo dois tipos de solução

$$\phi_{n_1}^+ = \frac{2\pi n_1}{N}, \quad n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.115a)$$

$$\phi_{n_2}^- = \frac{(2n_2 + 1)\pi}{N - 2}, \quad n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.115b)$$

Nesse regime as soluções dependem somente do tamanho do sistema N , e os valores assumidos pela probabilidade discreta de se atingir cada ponto fixo estável aparecem sobre a função envelope definida por $f(\sin \phi_{n^*}) \sim \exp[-a(N) \sin^2 \phi_{n^*}]$. O lado direito da figura 5.27 mostra a distribuição de probabilidades para sistemas com $N = 50$, $N = 100$ e $N = 200$.

5.3.2 Conexão com a cadeia de osciladores

Nas seções anteriores a região sincronizada do anel de osciladores foi completamente descrita, mostrando como algumas propriedades da cadeia ainda permanecem quando alterada a topologia, embora nesse caso não exista multiestabilidade após o acoplamento crítico. A questão que imediatamente vem a cabeça é como dois sistemas tão parecidos podem apresentar comportamentos tão diferentes.

Para responder a essa pergunta vamos considerar um anel de osciladores com um parâmetro de controle $\alpha \in [0, 1]$ acoplado no termo de interação $\sin \phi_N$, resultando nas equações de movimento

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + K \sin(\theta_2 - \theta_1) + \alpha K \sin(\theta_N - \theta_1), \quad (5.116a)$$

$$\dot{\theta}_n = \omega_n + K [\sin(\theta_{n-1} - \theta_n) + \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)], \quad n = 2, \dots, N - 1, \quad (5.116b)$$

$$\dot{\theta}_N = \omega_N + K \sin(\theta_{N-1} - \theta_N) + \alpha K \sin(\theta_1 - \theta_N). \quad (5.116c)$$

Para $\alpha = 0$ o sistema é uma cadeia de osciladores, com $\sin \phi_{n^*} = s \frac{K_s^{\text{chain}}}{K}$ em toda a região com $K \geq K_s^{\text{chain}}$. O efeito de se fechar a cadeia em um anel necessita do termo extra de interação que comporta-se como uma função não linear de todas as variáveis ϕ_n antes de K_s , e como uma função de ϕ_{n^*} na função não unívoca $K(\phi_{n^*})$ na região sincronizada. A figura 5.28 mostra o comportamento das soluções no diagrama parcial^{††} de bifurcação $\phi_{n^*} \times K$ para alguns valores de α considerados no caso com $N = 10$.

^{††}A notação parcial foi utilizada para descrever o diagrama de bifurcação contendo somente soluções com $\phi_n^+(\phi_{n^*})$. As soluções complementares $\phi_n^- = \pi - \phi_n^+$ não foram consideradas para melhor visualização, mesmo porque o comportamento delas pode ser facilmente inferido a partir dos gráficos (lembrando que elas correspondem à parte oposta simétrica de cada solução em relação ao eixo $\phi_{n^*} = \pi/2$).

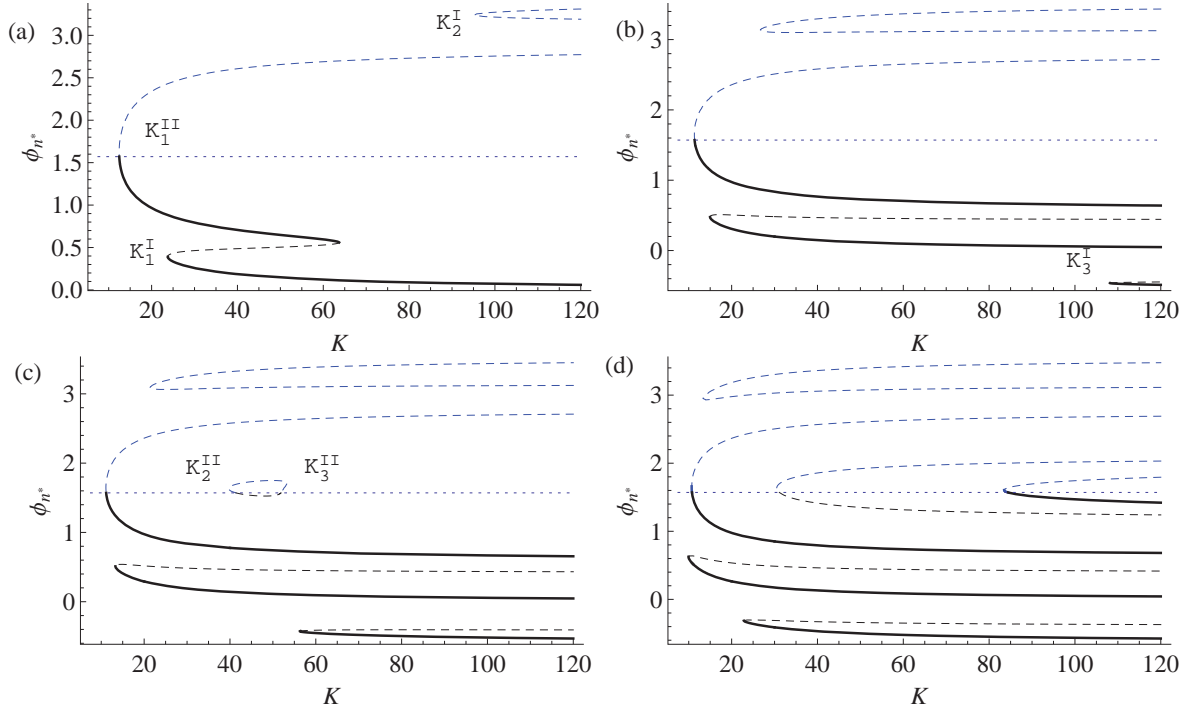


Figura 5.28: Diagrama parcial de bifurcação $\phi_{n^*} \times K$ para o caso com $N = 10$ em função do parâmetro α . (a) Histerese formada quando a solução estável perde a estabilidade; K_2^I gerada no limite $K \rightarrow \infty$ ($\alpha = 0.3$). (b) Ponto de retorno vai para $K \rightarrow \infty$ criando duas soluções distintas; K_3^I gerada no limite $K \rightarrow \infty$ ($\alpha = 0.5$). (c) Nascimento de K_2^{II} e K_3^{II} a partir do circuito fechado ($\alpha = 0.7$). (d) Diagrama final para a topologia do anel ($\alpha = 1.0$).

Pequenos valores de α deformam a solução estável original $\phi_{n^*}(\alpha = 0) = \arcsin sK_s/K$ na região acima de K_s , responsável pela geração de outras soluções. A primeira deformação leva a região do sistema a uma *cusp catastrophe*, responsável pela criação de uma histerese via bifurcação de dobra (*fold bifurcation*): o ramo estável é dobrado para trás até a geração da bifurcação K_1^I , conforme ilustrado na figura 5.28a. Valores maiores de α distanciam K_1^I do ponto de retorno da solução estável de K_1^{II} , que vai para o infinito separando completamente as soluções. O resultado desse processo é que a bifurcação K_1^I , com seus respectivos ramos estável e instável, origina-se a partir da solução estável de K_1^{II} através de um processo de deformação da solução.

As outras bifurcações presentes no anel não são necessariamente geradas a partir desse mesmo processo. No caso com $N = 10$ é possível observar que as bifurcações K_2^I e K_3^I , no anel localizadas perto da fronteira $\sin \phi_N = -s$ de RS, são geradas espontaneamente no limite $K \rightarrow \infty$, sem o auxílio do processo de deformação (as figuras 5.28a e 5.28b mostram a aparecimento delas na região $[K_s, 120]$). Já as bifurcações K_2^{II} e K_3^{II} , no anel localizadas perto da fronteira $\sin \phi_{n^*} = s$ de RS, são criadas a partir da geração espontânea de um circuito fechado de soluções instáveis (figura 5.28c). A formação do circuito é melhor observada na figura 5.29, que mostra a região ampliada: o circuito nasce na região próximo a $\phi_{n^*} = \pi/2$ com $\cos \phi_{n^*} < 0$ (α_1); o aumento de α faz com que ele cruze a linha $\phi_{n^*} = \pi/2$ (α_2), criando a

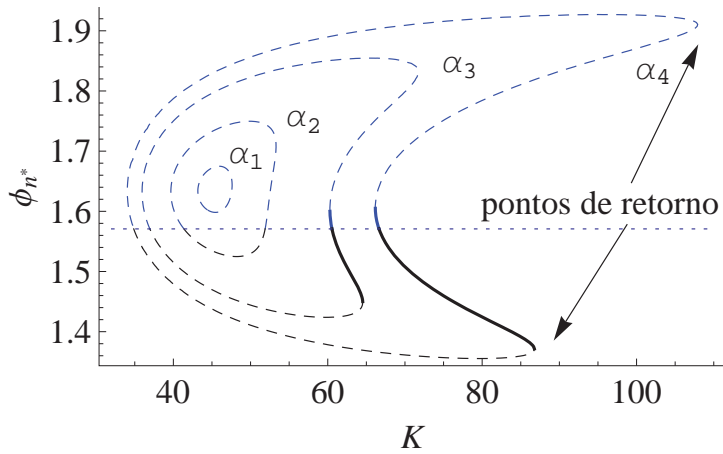


Figura 5.29: Região de nascimento do circuito fechado que dá origem às bifurcações K_2^{II} e K_3^{II} , mostrando quatro valores de α : $\alpha_1 = 0.683$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 0.75$ e $\alpha_4 = 0.8$.

solução estável de K_3^{II} no começo do processo de deformação (α_3); valores maiores de α fazem levar os pontos de retorno para $K \rightarrow \infty$ (α_4), separando completamente as soluções e dando origem às bifurcações K_2^{II} e K_3^{II} como observadas no anel.

Capítulo 6

Conclusões

Na primeira parte do texto, que trata da configuração de acoplamento global (entre todos os osciladores), foram mostrados os dois diferentes tipos de descrição de sincronização dependendo da caracterização do número de osciladores.

No limite termodinâmico, em que se assume uma quantidade infinita de osciladores, o acoplamento entre os osciladores é simplificado através da interação com um campo médio, e o sistema pode ser descrito por uma única equação de evolução da densidade de osciladores. Sob a hipótese de um estado incoerente estável para pequenos valores do acoplamento, a transição para o regime sincronizado ocorre em um ponto crítico K_c onde o comportamento coletivo começa a demonstrar coerência entre as fases dos osciladores e o estado incoerente perde a estabilidade.

Para sistemas com tamanho finito, os efeitos das flutuações geradas pela realização da distribuição de probabilidade $g(\omega)$ não podem ser desconsiderados, o que impele a uma descrição das equações de movimento levando em conta a configuração específica das frequências naturais. Nesse caso a transição para o regime sincronizado ocorre para um valor de acoplamento crítico K_s onde todas as equações de movimento assumem um estado estacionário em que os osciladores encontram-se plenamente sincronizados com travamento das diferenças de fase.

A equivalência entre as duas descrições, mais precisamente a equivalência entre os pontos críticos caracterizados de forma fundamentalmente diferentes, permanece uma questão em aberto. No entanto foi mostrado que para um caso especial com simetria nas frequências naturais (usada para simular uma distribuição uniforme) o limite com infinitos osciladores promove a unificação das duas descrições, onde coerência e sincronização podem ser tratadas da mesma maneira. Uma das possíveis continuações desse trabalho consiste em estender a análise para distribuições de probabilidade mais gerais e verificar se a equivalência é robusta, ou seja, se ela é válida para qualquer distribuição ou classes de distribuições.

Visando uma compreensão inicial dos efeitos de acoplamento local no modelo de Kuramoto, a segunda parte do texto foi dedicada à descrição do modelo em uma dimensão com condições periódicas de contorno, que corresponde ao caso mais simples de interação entre vizinhos com efeitos topológicos.

Para valores de acoplamento inferiores ao acoplamento crítico foi mostrada a estrutura de árvore de sincronização média, onde os osciladores apresentam uma sequência de transições entre comportamentos periódicos e caóticos que contribuem para a formação de clusters sincronizados. A iminência da sincronização foi explorada através de métodos aproximados que mostraram, através do comportamento crítico do sistema, a existência de uma bifurcação sela-nó responsável pela transição para o regime sincronizado.

Ao se reconhecer a existência de uma função que caracteriza toda a região sincronizada do modelo, foi mostrado através de uma série de exemplos simplificados (com simetria) que o espaço de fase do sistema sincronizado apresenta uma estrutura de múltiplas soluções de ponto fixo, não necessariamente nascidos em bifurcações do tipo sela-nó. No exame do sistema definido por frequências naturais completamente arbitrárias foi mostrado que a multiestabilidade é originada a partir do termo de interação que transforma uma cadeia de osciladores em um anel.

Embora a ocorrência de múltiplas soluções estáveis em sistemas de osciladores de fase não caracterize um fato incomum, a importância desse resultado reside no fato que ela não deveria existir para uma interação senoidal entre osciladores. A multiestabilidade no modelo de Kuramoto localmente acoplado aparece como um efeito exclusivo da topologia do sistema, o que permite prever que o mesmo fenômeno deve ocorrer em situações mais gerais quando a interação do sistema é definida no contexto de redes complexas.

A presença de multiestabilidade na região sincronizada foi só recentemente descoberta, e a tanto a sua completa caracterização em topologias mais gerais como as implicações no comportamento síncrono do sistema permanecem em aberto.

Referências Bibliográficas

- [1] Christiaan Huygens. The Pendulum Clock (English translation, Iowa State University Press, Ames, 1986).
- [2] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum and Jürgen Kurths. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences (Cambridge, New York, 2001).
- [3] J. Rayleigh. The Theory of Sound (Dover, New York, 1945).
- [4] E. V. Appleton. The automatic synchronization of triode oscillators. Proceeding of the Cambridge Philosophical Society (Mathematical and Physical Sciences) 21 (1922) 231-248.
- [5] B. van der Pol. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance (reception with reactive triode). The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 3 (1927) 65-80.
- [6] Steven H. Strogatz and Ian Stewart. Coupled oscillators and biological synchronization. Scientific American 269 (1993) 102-109.
- [7] Robert A. York and Richard C. Compton. Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques 39 (1991) 1000-1009.
- [8] Ziping Jiang and Martin McCall. Numerical simulation of a large number of coupled lasers. Journal of the Optical Society of America 10 (1993) 155-163.
- [9] S. Yu. Kourtchatov, V. V. Likhanskii and A. P. Napartovich. Theory of phase locking of globally coupled laser arrays. Physical Review A 52 (1995) 4089-4094.
- [10] Kurt Wiesenfeld, Pete Colet and Steven H. Strogatz. Synchronization transitions in a disordered Josephson series array. Physical Review Letters 76 (1996) 404.
- [11] Kurt Wiesenfeld, Pete Colet and Steven H. Strogatz. Frequency locking in Josephson arrays: connection with the Kuramoto model. Physical Review E 57 (1998) 1563-1569.
- [12] John Buck. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. Quarterly Review of Biology 63 (1988) 265-289.

- [13] Thomas J. Walker. Acoustic synchrony: two mechanisms in the snowy tree cricket. *Science* 166 (1969) 891-894.
- [14] Wolf Singer and Charles M. Gray, Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis. *Annual Review of Neuroscience* 18 (1995) 555-586.
- [15] Chen Liu, David R. Weaver, Steven H. Strogatz and Steven M. Reppert. Cellular construction of a circadian clock: period determination in the suprachiasmatic nuclei. *Cell* 91 (1997) 855-860.
- [16] Charles M. Gray, Peter König, Andreas K. Engel and Wolf Singer. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties. *Nature* 338 (1989) 334-337.
- [17] William A. MacKay. Synchronized neuronal oscillations and their role in motor process. *Trends in Cognitive Sciences* 1 (1997) 176-183.
- [18] Roger D. Traub and Robert K. S. Wong. Cellular mechanism of neural synchronization in epilepsy. *Science* 14 (1982) 745-747.
- [19] Hans-Joachim Freund. Motor unit and muscle activity in voluntary motor control. *Physiological Reviews* 63 (1983) 387-436.
- [20] Steven Strogatz. *Sync: How Order Emerges from Chaos in the Universe, Nature and Daily Life* (Hyperion, New York, 2003).
- [21] Leon Glass. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature* 410 (2001) 277-284.
- [22] Alexander Balanov, Natalia Janson, Dmitry Postnov and Olga Sosnovtseva. *Synchronization: From Simple to Complex* (Springer, Berlin, 2009).
- [23] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Westview Press, Cambridge, 2001).
- [24] Arthur T. Winfree. *The Geometry of Biological Time* (Springer, New York, 1980).
- [25] Yoshiki Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984).
- [26] Yoshiki Kuramoto. Cooperative dynamics of oscillator community. *Progress of Theoretical Physics* 79 (1984) 223-240.
- [27] Steven H. Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D* 143 (2000) 1-20.

- [28] Juan A. Acebrón, L. L. Bonilla, Conrad J. Pérez Vicente, Félix Ritort and Renato Spigler. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics* 77, 137 (2005).
- [29] Steven H. Strogatz and Renato E. Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics* 63 (1991) 613-635.
- [30] Luis L. Bonilla, John C. Neu and Renato Spigler. Nonlinear stability of incoherence and collective synchronization in a population of coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics* 67 (1992) 313-330.
- [31] J. A. Acebrón and L. L. Bonilla. Asymptotic description of transients and synchronized states of globally coupled oscillators. *Physica D* 114 (1998) 296-314.
- [32] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, S. De Leo and R. Spigler. Breaking the symmetry in bimodal frequency distributions of globally coupled oscillators. *Physical Review E* 57 (1998) 5287-5290.
- [33] G. B. Ermentrout. Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies. *Journal of Mathematical Biology* 22 (1985) 1-9.
- [34] Hiroaki Daido. Scalling behavior at the onset of mutual entrainment in a population of interacting oscillators. *Journal of Physics A* 20 (1987) L629.
- [35] Hiroaki Daido. Intrinsic fluctuation and its critical scaling in a class of populations of oscillators with distributed frequencies. *Progress of Theoretical Physics* 81 (1989) 727-731.
- [36] Hiroaki Daido. Intrinsic fluctuations and a phase transition in a class of large populations of interacting oscillators. *Journal of Statistical Physics* 60 5-6 (1990) 753-800.
- [37] J. L. van Hemmen and W. F. Wreszinski. Lyapunov function for the Kuramoto model of nonlinearly coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics* 72 (1993) 145-166.
- [38] Arkady Pikovsky and Stefano Ruffo, Finite-size effects in a population of interacting oscillators. *Physical Review E* 59 2 (1999) 1633-1636.
- [39] Renato E. Mirollo and Steven H. Strogatz. The spectrum of the locked state for the Kuramoto model of coupled oscillators. *Physica D* 205 (2005) 249-266.
- [40] Diego Pazó. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model. *Physical Review E* 72 (2005) 046211.
- [41] Yu. Maistrenko, O. Popovych, O. Burylko and P. A. Tass. Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model. *Physical Review Letters* 93 (2004) 084102.

- [42] Yuri L. Maistrenko, Oleksandr V. Popovych and Peter A. Tass. Chaotic attractor in the Kuramoto model. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 15 (2005) 3457-3466.
- [43] Y. L. Maistrenko, O. V. Popovych and P. A. Tass. Desynchronization and chaos in the Kuramoto model. *Lecture Notes in Physics* 671 (2005) 285-306.
- [44] C. Baesens, J. Guckenheimer, S. Kim and R. S. MacKay. Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos. *Physica D* 49 (1991) 387-475.
- [45] Michael A. Zaks. Fractal Fourier spectra of Cherry flows. *Physica D* 149 (2001) 237-247.
- [46] T. M. Cherry. Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus. *Proceedings of the London Mathematical Society* 44 (1938) 175-215.
- [47] V. S. Afraimovich and L. P. Shilnikov. Invariant two-dimensional tori, their breakdown and stochasticity. *American Mathematical Society (Translation Journals)* 149 (1991) 201-212.
- [48] Hidetsugu Sakaguchi, Shigeru Shinomoto and Yoshiki Kuramoto. Local and global self-entrainments in oscillator lattices. *Progress of Theoretical Physics* 77 (1987) 1005-1010.
- [49] Steven H. Strogatz and Renato E. Mirollo. Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies. *Physica D* 31 (1988) 143-168.
- [50] Steven H. Strogatz and Renato E. Mirollo. Collective synchronisation in lattices of nonlinear oscillators with randomness. *Journal of Physics A* 21 (1988) L699-L705.
- [51] Hiroaki Daido. Lower critical dimension for populations of oscillators with randomly distributed frequencies: a renormalization group analysis. *Physical Review Letters* 61 (1988) 231.
- [52] Hyunsuk Hong, Hugues Chaté, Hyunggyuy Park and Lei-Han Tang. Entrainment transition in populations of random frequency oscillators. *Physical Review Letters* 99 (2007) 184101.
- [53] Tony E. Lee, Heywood Tam, G. Refael, Jeffrey L. Rogers and M. C. Cross. Vortices and the entrainment transition in the two-dimensional Kuramoto model. *Physical Review E* 82 (2010) 036202.
- [54] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics* 74 (2002) 47-97.
- [55] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.-U. Hwang. Complex networks: structure and dynamics. *Physics Reports* 424 (2006) 175-308.

- [56] Alex Arenas, Albert Días-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno and Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports* 469 (2008) 93-153.
- [57] Erik D. Lumer and Bernardo A. Huberman. Hierarchical dynamics in large assemblies of interacting oscillators. *Physics Letters A* 160 (1991) 227-232.
- [58] Erik D. Lumer and Bernardo A. Huberman. A basis for dynamic perceptual grouping. *Neural Computation* 4 (1992) 341-355.
- [59] Filippo Radicchi and Hildegard Meyer-Ortmanns. Entrainment of coupled oscillators on regular networks by pacemakers. *Physical Review E* 73 (2006) 036218.
- [60] Filippo Radicchi and Hildegard Meyer-Ortmanns. Reentrant synchronization and pattern formation in pacemaker-entrained Kuramoto oscillators. *Physical Review E* 74 (2006) 026203.
- [61] L. S. Tsimring, N. F. Rulkov, M. L. Larsen and M. Gabbay. Repulsive synchronization in an array of phase oscillators. *Physical Review Letters* 95 (2005) 014101.
- [62] Jeffrey L. Rogers and Luc T. Wille. Phase transitions in nonlinear oscillator chains. *Physical Review E* 54 (1996) R2193-R2196.
- [63] Debanjan Chowdhury and M. C. Cross. Synchronization of oscillators with long-range power law interactions. *Physical Review E* 82 (2010) 016205.
- [64] Máté Maródi, Francesco d'Ovidio and Tamas Vicsek. Synchronization of oscillators with long range interaction: phase transition and anomalous finite size effects. *Physical Review E* 66 (2002) 011109.
- [65] Nariya Uchida. Many-body theory of synchronization by long-range interactions. *Physical Review Letters* 106 (2011) 064101.
- [66] Y. Kuramoto and D. Battogtokh. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* 5 (2002) 380-385.
- [67] Daniel M. Abrams and Steven H. Strogatz. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters* 93 (2004) 174102.
- [68] Daniel M. Abrams and Steven H. Strogatz. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 16 (2006) 21-37.
- [69] Daniel M. Abrams and Steven H. Strogatz. Solvable model for chimera states of coupled oscillators. *Physical Review Letters* 101 (2008) 084103.
- [70] Carlo R. Laing. Chimera states in heterogeneous networks. *Chaos* 19 (2009) 013113.

- [71] Shin-ichiro Shima and Yoshiki Kuramoto. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators. *Physical Review E* 69 (2004) 036213.
- [72] Oleh E. Omel'chenko, Yuri L. Maistrenko and Peter A. Tass. Chimera states: the natural link between coherence and incoherence. *Physical Review Letters* 100 (2008) 044105.
- [73] Yuri L. Maistrenko, Borys Lysyansky, Christian Hauptmann, Pleksandr Burylko and Peter A. Tass. Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity. *Physical Review E* 75 (2007) 066207.
- [74] D. O. Hebb. *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory* (Wiley, New York, 1949).
- [75] Marc D. Binder, Nobutaka Hirokawa and Uwe Windhorst (Eds.). *Encyclopedia of Neuroscience* (Springer, Berlin 2009).
- [76] Zhigang Zheng, Gang Hu and Bambi Hu, Phase slips and phase synchronization of coupled oscillators. *Physical Review Letters* 81, 5318 (1998).
- [77] Zhigang Zheng, Bambi Hu and Gang Hu, Collective phase slips and phase synchronizations in coupled oscillator systems. *Physical Review E* 62, 402 (2000).
- [78] Hassan F. El-Nashar, Ahmed S. Elgazzar and Hilda A. Cerdeira. Nonlocal synchronization in nearest neighbor coupled oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 12 (2002) 2945-2955.
- [79] Hassan F. El-Nashar, Paulsamy Muruganandam, Fernando F. Ferreira and Hilda A. Cerdeira. Transition to complete synchronization in phase-coupled oscillators with nearest neighbor coupling. *Chaos* 19 (2009) 013103.
- [80] P. Muruganandam, F. F. Ferreira, H. F. El-Nashar and H. A. Cerdeira. Analytical calculation of the transition to complete phase synchronization in coupled oscillators. *Pranama Journal of Physics* 70 (2008) 1143-1151.
- [81] Hassan F. El-Nashar and Hilda A. Cerdeira. Determination of the critical coupling for oscillators in a ring. *Chaos* 19 (2009) 033127.
- [82] A. A. Andronov, A. A. Vitt and S. E. Khaikin. *Theory of Oscillations* (Pergamon, Elmsford, 1966).
- [83] Ali Hasan Nayfeh and Dean T. Mook. *Nonlinear Oscillations* (Wiley, New York, 1979).
- [84] Paul Glendinning. *Stability, Instability and Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [85] L. D. Landau. On the problem of turbulence. *C. R. (Doklady) Academy of Sciences URSS* 44 (1944) 311.

- [86] J. T. Stuart. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part I: The basic behavior in plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics* 9 (1960) 353.
- [87] D. G. Aronson, G. B. Ermentrout and N. Koppel. Amplitude response of coupled oscillators. *Physica D* 41 (1990) 403-449.
- [88] K. Bar-Eli. On the stability of coupled chemical oscillators. *Physica D* 14 (1985) 242-252.
- [89] Hidetsugu Sakaguchi and Yoshiki Kuramoto. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment. *Progress of Theoretical Physics* 76 (1986) 576-581.
- [90] Yoshiki Kuramoto and Ikuko Nishikawa. Statistical macrodynamics of large dynamical systems: case of a phase transition in oscillator communities. *Journal of Statistical Physics* 49 (1987) 569-605.
- [91] Steven H. Strogatz, Renato E. Mirollo and Paul C. Matthews. Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: relaxation by generalized Landau damping. *Physical Review Letters* 68 (1992) 2730.
- [92] Neil J. Balmforth and Roberto Sassi. A shocking display of synchrony. *Physica D* 143 (2000) 21-55.
- [93] Hidetsugu Sakaguchi. Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields. *Progress of Theoretical Physics* 79 (1988) 39-46.
- [94] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, 2nd edition, New York, 1985).
- [95] Tânia Tomé e Mário José de Oliveira. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade* (Edusp, São Paulo, 2001).
- [96] Renato E. Mirollo and Steven H. Strogatz. Amplitude death in an array of limit-cycle oscillators. *Journal of Statistical Physics* 60 (1990) 245-262.
- [97] O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A* 57 (1976) 397-398.
- [98] O. E. Rössler. An equation for hyperchaos. *Physics Letters A* 71 (1979) 155-157.
- [99] Michael G. Rosenblum, Arkady S. Pikovsky and Jürgen Kurths. Phase Synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters* 76 (1996) 1804.
- [100] Michael G. Rosenblum, Arkady S. Pikovsky and Jürgen Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters* 78 (1997) 4193.

- [101] Gang Hu, Ying Zhang, Hilda A. Cerdeira and Shigang Chen. From low-dimensional synchronous chaos to high-dimensional desynchronous spatiotemporal chaos in coupled systems. *Physical Review Letters* 85 (2000) 3377.
- [102] Ying Zhang, Gang Hu, Hilda A. Cerdeira, Shigang Chen, Thomas Braun and Yugui Yao. Partial synchronization and spontaneous spatial ordering in coupled chaotic systems. *Physical Review E* 63 (2001) 026211.
- [103] Hassan F. El-Nashar. Phase correlation and clustering of a nearest neighbor coupled oscillators system. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13 (2003) 3473-3481.
- [104] Tom M. Apostol. *Cálculo Volume 2: Cálculo com Funções de Várias Variáveis e Álgebra*, Segunda Edição (Reverté Brasil, 2008).
- [105] J. Frédéric Bonnans, J. Charles Gilbert, Claude Lemaréchal and Claudia A. Segastizábal. *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*, Second Edition (Springer, 2000).
- [106] Paulo F. C. Tilles, Fernando F. Ferreira and Hilda A. Cerdeira. Multistable behavior above synchronization in a locally coupled Kuramoto model. *Physical Review E* 83 (2011) 066206.
- [107] Paulo F. C. Tilles, Hilda A. Cerdeira and Fernando F. Ferreira. Local attractors, degeneracy and analyticity: symmetry effects on the locally coupled Kuramoto model. Submitted to *Physical Review E* (<http://arxiv.org/abs/1108.3271>).
- [108] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, 3rd edition. (Springer, New York, 2010).
- [109] G. Bard Ermentrout. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 52 (1992) 1665-1687.
- [110] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures* (Wiley, New York, 1999).