
Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

**Equações com Impasse e
Problemas de Perturbação Singular**

Pedro Toniol Cardin

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São José do Rio Preto

Março - 2011

Aos meus pais,
José Carlos Cardin e Maria
Antonia Toniol Cardin
e as minhas irmãs,
Juciene e Laila
dedico.

“É impossível proceder ao infinito na série dos seres que se geram sucessivamente. Deve-se admitir, por isso, que existe um ser necessário que tenha em si toda a razão de sua existência, e do qual procedam todos os outros seres. A este chamamos Deus.”

(São Tomás de Aquino)

Agradecimentos

A DEUS, fonte da minha existência e o caminho da minha vida.

Aos meus pais, José Carlos Cardin e Maria Antonia Toniol Cardin, por todo o alicerce que me deram para eu chegar até este momento. As minhas duas irmãs Laila e Juciene pelo apoio e por sempre estarem do meu lado.

A todos os meus parentes que de uma forma ou de outra me ajudaram durante esta caminhada. Em especial, aos meus tios Valdir Cardin e Osmar Cardin e suas famílias que inicialmente me acolheram na cidade de São José do Rio Preto e por sua enorme ajuda na minha vivência e na minha adaptação neste novo lugar.

A minha namorada Mayara pelo seu incondicional amor e por sua paciente espera.

Aos meus amigos de república, André, Julius, Rafael, Rodiak e aos da minha cidade Ilha Solteira, pelos momentos de descontração.

Aos amigos da turma de pós-graduação, Eduardo (Caneta), Oyran, Ruikson, Iguer, Rodrigo Euzébio, e todos os demais amigos da Unesp pelo companheirismo em todos os momentos. Ao Tiago pela parceria e pela convivência no tempo em que estivemos em Barcelona.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação. Em especial ao Prof^o. Dr. Paulo Ricardo da Silva, pela orientação, incentivo, crença e paciência na elaboração deste trabalho.

A todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

A FAPESP pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos sistemas diferenciais forçados, também conhecidos como sistemas de equações com impasse. Estudamos os casos onde tais sistemas são suaves e os casos onde são possivelmente descontínuos. Usando técnicas de perturbação singular obtemos alguns resultados sobre a dinâmica destes sistemas em vizinhanças dos conjuntos de impasse. No caso suave, a Teoria de Fenichel clássica é crucial para o desenvolvimento dos principais resultados. Para o caso com descontinuidades, uma teoria similar a Teoria de Fenichel é desenvolvida. Além disso, estudamos a bifurcação de ciclos limites das órbitas periódicas de um centro diferencial linear quando perturbamos tal centro dentro de uma classe de sistemas diferenciais lineares por partes com impasse.

Palavras chave: Sistemas forçados, problemas de perturbação singular, conjunto de impasse, campo de vetores descontínuos, método averaging.

Abstract

In this work we study constrained differential systems, also known as systems of equations with impasse. We study the cases where such systems are smooth and the cases where they are possibly discontinuous. Using singular perturbation techniques we obtain some results on the dynamic of these systems in neighborhoods of the impasse sets. In smooth case, the classical Fenichel's Theory is crucial for the development of the main results. For the case with discontinuity, a similar theory to Fenichel's Theory is developed. Moreover, we study the bifurcation of limit cycles from the periodic orbits of a linear differential center when we perturb such center inside a class of piecewise linear differential systems with impasse.

Key words: Constrained systems, singular perturbation problems, impasse set, discontinuous vector fields, averaging method.

Sumário

Introdução	9
1 Conceitos Preliminares	14
1.1 Sistemas forçados	14
1.2 Teoria geométrica das perturbações singulares	19
1.3 Campos de vetores descontínuos	21
1.3.1 Regularização	24
2 Impasses e Perturbações Singulares	25
2.1 Afirmção dos principais resultados	25
2.2 Demonstração dos Teoremas A e B	33
2.3 Aplicações	36
2.4 Superfícies de impasse não-regular	41
3 Sistemas de Filippov Singularmente Perturbados	45
3.1 Descrição do problema	46
3.2 Teoria da variedade invariante para sistemas de Filippov singularmente perturbados	47
3.3 Exemplos com a hipótese $\frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$	50
3.4 Exemplos com a hipótese $\frac{\partial h}{\partial y} \neq 0$	54
3.5 Demonstração dos Teoremas D e E	57
4 Sistemas Forçados Descontínuos	60
4.1 Contextualização	60

4.2	Afirmção dos principais resultados	61
4.3	Demonstração dos Teoremas F e G	63
4.4	Aplicações dos resultados	65
5	Ciclos Limites de Sistemas Forçados via Teoria Averaging	68
5.1	Colocação do problema e resultados principais	68
5.2	Provas do Teorema 5.1.1 e Corolário 5.1.2	71
6	Apêndice	77
6.1	Método averaging de primeira-ordem	77
	Referências Bibliográficas	80

Introdução

Neste trabalho estudamos alguns aspectos qualitativos e geométricos relativos a teoria de sistemas dinâmicos forçados. Tais sistemas aparecem de um modo natural em um grande número de problemas físicos, principalmente na Teoria de Circuitos Elétricos [17]. Em notação matricial um sistema forçado pode ser escrito como

$$A(x)\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

onde A é uma função matricial e F é um campo de vetores.

A principal característica de um sistema diferencial forçado é a existência do assim chamado *conjunto de impasse* \mathcal{I}_A , formado pelos pontos onde o determinante da matriz A em (1) se anula. A existência deste conjunto é o que difere um sistema forçado de uma equação diferencial ordinária autônoma usual. Na figura 1 temos ilustrado um exemplo de um conjunto de impasse com algumas trajetórias próximas a este conjunto.

Nos últimos anos, alguns autores contribuíram fortemente para o desenvolvimento e amadurecimento do estudo de sistemas forçados. Em [27] por exemplo, podemos encontrar um estudo do retrato de fase de sistemas forçados genéricos de classe C^∞ próximo aos pontos do conjunto de impasse. Alguns resultados relativos a formas normais suaves C^∞ obtidos em [27] foram estendidos para dimensões maiores em [23]. Nos trabalhos [13] e [21] podemos obter o estudo da estabilidade estrutural de sistemas forçados polinomiais e sistemas forçados de classe C^r , respectivamente. Bifurcações de famílias a um parâmetro de sistemas forçados planares foram estudados em [14]. Em particular, nesta última referência, a estratificação do conjunto de impasse para uma família genérica de sistemas forçados foi dada.

Uma classe muito especial de exemplos de sistemas forçados é obtida quando consid-

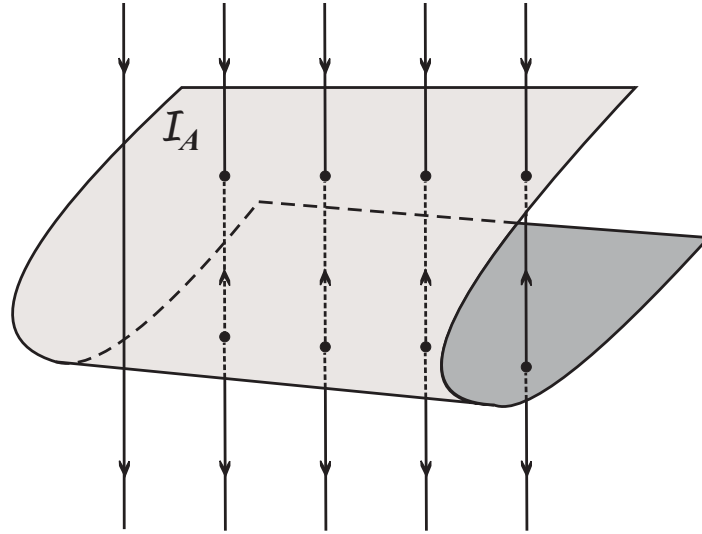


Figura 1: Conjunto de impasse \mathcal{I}_A .

eramos os assim chamados *problemas de perturbação singular*. Tais problemas surgem frequentemente em aplicações e podem ser escritos como

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \quad (2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é um parâmetro pequeno. As propriedades das soluções de um problema de perturbação singular podem ser estudadas usando métodos geométricos da teoria de sistemas dinâmicos. Esta aproximação ficou conhecida como *TGPS–Teoria Geométrica das Perturbações Singulares*, e foi fundamentada por Fenichel em [10].

Nosso principal objetivo nesta tese é estabelecer conexões entre a teoria de sistemas forçados e a teoria dos problemas de perturbação singular. Mais especificamente, usaremos técnicas de perturbação singular para descrever o comportamento dinâmico de sistemas forçados nas proximidades de pontos do conjunto de impasse. Focaremos nosso estudo de sistemas forçados em dois casos distintos.

Primeiro consideraremos famílias de sistemas forçados para os quais a hipótese de suavidade (C^∞) no sistema seja cumprida. Para este caso, a Teoria de Fenichel clássica realizada em [10] será crucial para o desenvolvimento dos principais resultados. Este será o conteúdo do Capítulo 2.

O Capítulo 4 será dedicado ao estudo do segundo caso mencionado acima. Este caso consiste em considerar sistemas forçados descontínuos. Mais especificamente, permitir-

mos que na definição do sistema forçado, o campo de vetores envolvido, seja um campo do tipo Filippov. Neste caso, a teoria clássica de Fenichel não poderá ser mais aplicada. No intuito de contornar esta situação, consideraremos sistemas de Filippov singularmente perturbados. Desenvolveremos uma teoria similar à Teoria de Fenichel, para este novo tipo de sistema. Este será o conteúdo do Capítulo 3. Aplicaremos esta nova teoria no estudo do segundo caso descrito acima, ou seja, no caso de sistemas forçados descontínuos.

No parágrafo anterior fizemos menção a um outro importante conceito, que são os sistemas de Filippov. Este assunto tem sido objeto de muitas pesquisas nos últimos anos e tem obtido grandes avanços principalmente devido ao fato de possuir uma estreita relação com outros ramos das ciências, como a engenharia e a física.

Agora, em se tratando do estudo de sistemas de Filippov singularmente perturbados, apenas recentemente este assunto tem sido abordado. A ideia do desenvolvimento de uma teoria similar à teoria dada por Fenichel em [10] para estes tipos de sistemas, foi explorada primeiramente no artigo [18]. Neste artigo os autores estudaram a assim chamada bifurcação *grazing-sliding* em sistemas de Filippov singularmente perturbados.

No Capítulo 1 daremos um apanhado geral sobre as três teorias envolvidas neste trabalho: a teoria de sistemas forçados, a teoria geométrica das perturbações singulares, e finalmente, a teoria de campos de vetores descontínuos.

Dentre os resultados obtidos nesta tese, alguns merecem um destaque maior. Damos a seguir uma descrição informal de tais resultados.

Resultado 1. Neste resultado consideramos famílias $A(x, \lambda)\dot{x} = F(x)$ de sistemas diferenciais forçados suaves. Em resumo, o teorema afirma que a dinâmica desta família próxima ao conjunto de impasse $\{\det A(x, \lambda) = 0\}$ é diferenciavelmente equivalente à dinâmica de um problema de perturbação singular como em (2). Veja o Teorema A na página 28.

Resultado 2. Neste resultado consideramos famílias de sistemas forçados como as consideradas no Resultado 1. Nele exibimos condições para a existência de pontos singulares e órbitas periódicas e suas respectivas estabilidades na vizinhança do conjunto de impasse. Veja o Teorema B na página 30.

Resultado 3. Neste teorema tratamos com sistemas forçados que possuem conjuntos

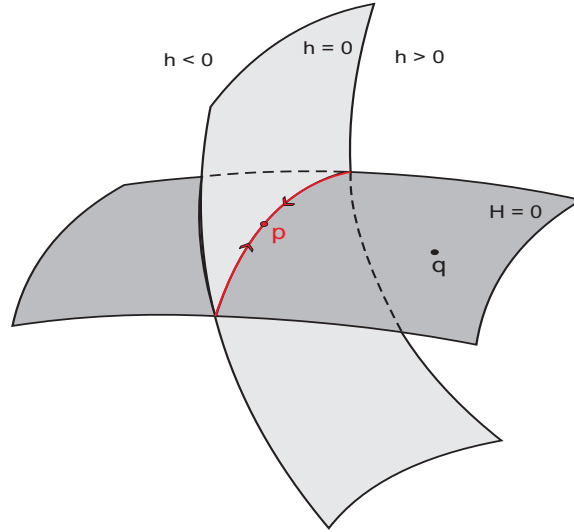


Figura 2: O problema reduzido (sistema (3) com $\varepsilon = 0$) é um sistema descontínuo definido sobre $\{H = 0\}$. A teoria clássica de Fenichel diz que pontos singulares do problema reduzido, fora da intersecção com $\{h = 0\}$, são persistentes para $\varepsilon > 0$. Provamos que singularidades em $\{H = 0\} \cap \{h = 0\}$, também persistem sob certas condições.

de impasse não-regular, como por exemplo impasses do tipo $xy = 0$. Usando um blow-up polar de coordenadas, veremos que é possível obter um sistema forçado cujo conjunto de impasse é regular. Trata-se de uma forma de regularizar os pontos do conjunto de impasse que não são regulares. Veja o Teorema C na página 42.

Resultado 4. Neste teorema consideramos sistemas de Filippov singularmente perturbados da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{cases} F(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y, \varepsilon) \leq 0, \\ G(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y, \varepsilon) \geq 0, \end{cases} \\ \varepsilon \dot{y} &= H(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é um parâmetro pequeno. Sob a hipótese $\frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$, temos que o campo de vetores deslizante associado ao sistema (3) é um problema de perturbação singular suave como em (2). Além disso, a dinâmica do problema reduzido associado a esta perturbação singular suave coincide com a dinâmica do campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido de (3). Veja o Teorema D na página 49.

Resultado 5. Este resultado é a versão do clássico Teorema de Fenichel para sistemas (3). Em resumo, ele diz que qualquer estrutura do campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido de (3), na qual persiste sobre perturbação regular persiste sobre

perturbação singular. Veja o Teorema E na página 50.

Resultado 6. Neste teorema consideramos famílias $A(x, \lambda)\dot{x} = F(x)$ de sistemas forçados descontínuos, ou seja, assumimos que o campo de vetores F é do tipo Filippov. Em resumo, o teorema afirma que a dinâmica do campo deslizante associado a essa família próximo ao conjunto de impasse $\{\det A(x, \lambda) = 0\}$ é diferenciavelmente equivalente a dinâmica deslizante associado a um sistema de Filippov singularmente perturbado como em (3). Veja o Teorema F na página 61.

Resultado 7. Neste resultado consideramos famílias de sistemas forçados como as consideradas no Resultado 6. Exibimos neste teorema condições para a existência de pontos singulares e órbitas periódicas do campo deslizante associado a tais famílias com suas respectivas estabilidades na vizinhança do conjunto de impasse. Veja o Teorema G na página 63.

Finalizando nosso trabalho, estudaremos no Capítulo 5, o problema de encontrar e quantificar ciclos limites em equações diferenciais. Mais precisamente, partindo de um centro diferencial linear em \mathbb{R}^n , estudaremos o número de ciclos limites que bifurcam das órbitas periódicas de tal centro quando o perturbamos dentro de uma classe de sistemas diferenciais lineares por partes com impasse. As demonstrações dos principais resultados desta parte são baseadas no método averaging de primeira-ordem. Apresentamos este método no Apêndice 6, na forma recentemente obtida em [1], onde a diferenciabilidade do sistema não é necessária. O processo de regularização desenvolvido por Marco Teixeira e por Jorge Sotomayor em [22] possibilitará a utilização da teoria averaging.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Introduzimos neste capítulo alguns conceitos básicos e definições que compõem a teoria de equações com impasse, a teoria geométrica de problemas de perturbação singular e de campos de vetores descontínuos. Tais conceitos e definições nos serão úteis no decorrer do texto. Apresentamos também alguns resultados preliminares sobre tais teorias.

1.1 Sistemas forçados

O foco desta tese é o estudo de uma classe de equações diferenciais implícitas tendo a forma

$$F_1(x, \dot{x}) = 0, \quad \dots, \quad F_n(x, \dot{x}) = 0, \quad (1.1)$$

onde $F_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^r , $i = 1, \dots, n$. Recordamos que uma **solução** de (1.1) é uma curva de classe C^1 , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F_i(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$, para cada $t \in [a, b]$ e $i = 1, \dots, n$. Nesta tese estamos considerando funções F_1, \dots, F_n satisfazendo

$$F_i(x, \dot{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_j - f_i(x),$$

para $i = 1, \dots, n$, onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e a_{ij}, f_i são funções de classe C^r em \mathbb{R}^n . Com isso o sistema (1.1) torna-se

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_j = f_i(x),$$

para $i = 1, \dots, n$. Chamamos tal sistema de **sistema diferencial forçado** (ou simplesmente, de **sistema forçado**). Em notação matricial um sistema forçado pode ser escrito como

$$A(x)\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

onde $A = (a_{ij})$ é uma função matricial $n \times n$, $n \geq 2$, e $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ é um campo de vetores. Um sistema da forma (1.2) será denotado por (A, F) . Sistemas como (1.2) são relevantes em um grande número de problemas físicos, principalmente na Teoria de Circuitos Elétricos (veja [17] e também os exemplos dados nesta tese).

O **conjunto de impasse** \mathcal{I}_A de um sistema forçado (1.2) é definido por

$$\mathcal{I}_A = \{x \in \mathbb{R}^n : \delta_A(x) = \det A(x) = 0\}.$$

Por essa razão, sistemas (1.2) são também conhecidos como **sistemas com impasse**. Vamos assumir que \mathcal{I}_A é uma subvariedade de codimensão 1 em \mathbb{R}^n . Qualquer $p \in \mathcal{I}_A$ é chamado um **ponto de impasse**. Para $x \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}_A)$, o sistema (1.2) torna-se

$$\dot{x} = A^{-1}(x)F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}_A. \quad (1.3)$$

Exemplo 1. Considere a família a um-parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ de sistemas forçados

$$\dot{x} = 0, \quad (\lambda \pm (x^2 + y^2))\dot{y} = 1. \quad (1.4)$$

Neste caso, o conjunto de impasse de (1.4) define uma superfície em \mathbb{R}^3 dada pela equação $\lambda = \pm(x^2 + y^2)$. A Figura 1.1 ilustra o retrato de fase da família (1.4).

Exemplo 2. Um outro exemplo de uma família de sistemas forçados é

$$\dot{x} = 0, \quad (\lambda \pm (x^2 - y^2))\dot{y} = 1. \quad (1.5)$$

A superfície de impasse de (1.5) é definida pela equação $\lambda = \pm(x^2 - y^2)$. O retrato de fase de (1.5) é dado na Figura 1.2.

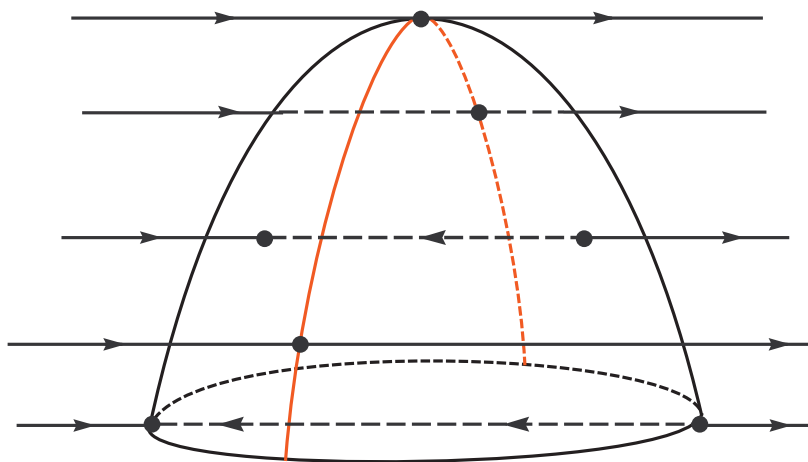


Figura 1.1: Ponto crítico de Morse do tipo máximo situado sobre uma linha de dobras na superfície de impasse.

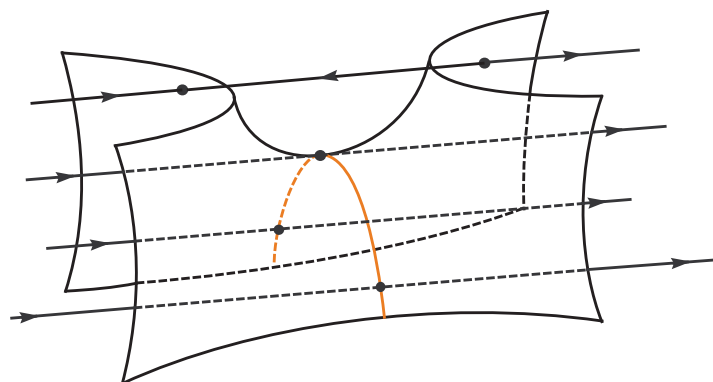


Figura 1.2: Ponto crítico de Morse do tipo sela situado sobre uma linha de dobras na superfície de impasse.

Exemplo 3. *Problemas de perturbação singular* constituem uma classe muito especial de sistemas forçados. Esta classe de sistemas pode ser escrita da forma

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, \varepsilon),$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é um parâmetro pequeno. As funções f e g são de classe C^r . A equação singular de van der Pol

$$\dot{x} = y, \quad \varepsilon \dot{y} = y - \frac{1}{3}y^3 - x,$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$, é um exemplo típico de um problema de perturbação singular (veja [8, 9] para mais detalhes). Na seção 1.2 apresentaremos com mais detalhes a teoria que fundamenta os problemas de perturbação singular.

As **soluções, órbitas, singularidades**, e demais ingredientes de (1.2) são definidos somente fora do conjunto de impasse pelos elementos similares correspondentes do sistema (1.3). Assim, o **retrato de fase** de (1.2) é caracterizado por um par ordenado cujo primeiro elemento é o conjunto de impasse \mathcal{I}_A e o segundo elemento é o retrato de fase de (1.3). Para cada sistema forçado (A, F) associamos o campo de vetores **adjunto** A^*F . A matriz A^* é a matriz adjunta de A , caracterizada por

$$AA^* = A^*A = \delta_A I_n.$$

O elemento de ordem ij de A^* é

$$(A^*)_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji},$$

onde M_{ji} é a matriz obtida de A removendo a linha j e a coluna i . Note que o sistema (1.3) pode ser escrito como

$$\dot{x} = (\delta_A)^{-1} A^*(x) F(x).$$

Com isso, o retrato de fase de (1.2) pode ser obtido agora pelo retrato de fase de A^*F removendo de suas órbitas os pontos de impasse e invertendo a orientação ao longo das órbitas nas regiões onde δ_A é negativo. Em resumo, temos que o retrato de fase de (1.2) equivale ao retrato de fase do seguinte campo de vetores descontínuo

$$\begin{cases} A^*F(x) & \text{se } \det A(x) > 0, \\ -A^*F(x) & \text{se } \det A(x) < 0. \end{cases}$$

Geralmente nenhuma solução de (1.2) passa através de \mathcal{I}_A . Por exemplo, se consideramos o sistema forçado

$$\dot{x} = 1, \quad x\dot{y} = (y - 1)^2,$$

então a curva de impasse é $x = 0$ e nenhuma solução passa através da curva de impasse exceto em $(0, 1)$. Uma solução através de $(0, 1)$ é dada por $\gamma(t) = (t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Outro exemplo é

$$\dot{x} = 1, \quad y\dot{y} = (y - 1)^2,$$

o qual não tem solução passando pela curva de impasse $y = 0$. Uma questão natural surge: Quando existe uma solução passando através de um ponto de impasse? Abaixo, condições necessárias para a existência de uma solução passando através de um ponto de impasse são apresentadas.

Proposição 1.1.1. *Se existe uma solução de (1.2) passando através de um ponto de impasse $p \in \mathcal{I}_A$ então p é um ponto singular do campo de vetores adjunto A^*F .*

Demonstração – De fato, suponha que $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ é uma solução de (1.2) tal que $\gamma(t_0) = p$. Então

$$A(p)\dot{\gamma}(t_0) = F(p). \tag{1.6}$$

Multiplicando a igualdade (1.6) pela matriz adjunta $A^*(p)$ temos

$$0 = \left(\delta_A(p) I_n \right) \dot{\gamma}(t_0) = \left(A^*(p) A(p) \right) \dot{\gamma}(t_0) = A^*(p) F(p)$$

pois $p \in \mathcal{I}_A$, isto é, $\delta_A(p) = 0$. Portanto, p é um ponto singular de A^*F . ■

A seguir apresentamos um exemplo na Teoria dos Circuitos Elétricos onde o modelo de equação diferencial obtido é um sistema forçado da forma (1.2).

Exemplo 4. Considere um circuito de rede RLC não-linear consistindo de um ramo resistor, um ramo capacitor e um ramo indutor em paralelo. Denote por $x_i = I_i$ as correntes no i -ésimo ramo, $i = 1, 2, 3$, e por $x_4 = V$ a voltagem (comum) em cada ramo. Supomos que $C(V)$ e $L(I_3)$ representam a capacitância e a indutância, respectivamente, onde $C : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ e $L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ são funções suaves (veja Smale [19] ou Takens

[25]). Das leis de Kirchhoff temos $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, enquanto que a evolução no tempo da voltagem e correntes elétricas nos ramos capacitor e indutor são dadas por $I_2 = C(V)\dot{V}$ e $V = L(I_3)\dot{I}_3$. Finalmente, no ramo resistor, I_1 e V estão relacionadas através de uma equação da forma $g(I_1, V) = 0$, onde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave.

As equações governando a evolução da voltagem e correntes elétricas do circuito de rede acima tem a forma (1.2) onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ g(x_1, x_4) \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.1.2. Dizemos que dois sistemas forçados (A, F) e (B, G) , nos pontos p_1 e p_2 são **topologicamente equivalentes** se existir um homeomorfismo h de uma vizinhança U de p_1 em uma vizinhança V de p_2 que leva \mathcal{I}_A em \mathcal{I}_B e envia arcos de órbitas de A^*F sobre arcos de órbitas de B^*G , preservando sua orientação forçada positiva. Essa orientação é definida pela orientação de A^*F multiplicada pelo sinal de δ_A .

Definição 1.1.3. Um ponto $p \in \mathcal{I}_A$ é **regular** se $\nabla\delta_A(p) = \left(\frac{\partial\delta_A}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial\delta_A}{\partial x_n}(p)\right) \neq 0$. Dizemos que \mathcal{I}_A é um conjunto **impasse-regular** se $\nabla\delta_A(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{I}_A$.

1.2 Teoria geométrica das perturbações singulares

Nesta seção resumimos alguns conceitos úteis e o principal resultado da teoria geométrica das perturbações singulares (veja também [10], por exemplo).

Sejam $w = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ e f, g funções suaves. Tratamos com equações que podem ser escritas na forma

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon). \quad (1.7)$$

A principal característica de problemas da forma (1.7) é a existência de duas escalas de tempo diferentes: uma escala de tempo lenta t e uma escala de tempo rápida $\tau := t/\varepsilon$. Por esse motivo, problemas como (1.7), são também conhecidos como sistemas **lento-rápido**. Mais precisamente, o sistema (1.7) é chamado de **sistema lento**. Transformando (1.7)

para a variável rápida $\tau := t/\varepsilon$ obtemos o **sistema rápido** equivalente

$$x' = \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \quad y' = g(x, y, \varepsilon). \quad (1.8)$$

Se consideramos $\varepsilon = 0$ em (1.7) e em (1.8) obtemos dois sistemas com dinâmicas essencialmente diferentes: o **problema reduzido**

$$\dot{x} = f(x, y, 0), \quad 0 = g(x, y, 0), \quad (1.9)$$

e o **problema layer**

$$x' = 0, \quad y' = g(x, y, 0). \quad (1.10)$$

Seja $\mathcal{S} = \{(x, y) : g(x, y, 0) = 0\}$. Chamamos \mathcal{S} a **variedade lenta** do problema de perturbação singular. Note que (1.9) define um sistema dinâmico sobre \mathcal{S} . Por outro lado, \mathcal{S} é uma variedade de pontos singulares para (1.10). A ideia da teoria geométrica das perturbações singulares consiste em combinar resultados sobre as dinâmicas dos dois problemas limites (1.9) e (1.10), para poder obter informação sobre a dinâmica do problema singularmente perturbado (1.7) para valores pequenos de ε .

Definição 1.2.1. Dizemos que o sistema (1.8) é **normalmente hiperbólico** em $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{S}$ se a parte real dos autovalores de $D_2g(x_0, y_0, 0)$ são diferentes de zero.

Começamos nossas análises considerando o sistema rápido (1.8) complementado pela equação trivial $\varepsilon' = 0$

$$x' = \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \quad y' = g(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon' = 0. \quad (1.11)$$

Seja $G(x, y, \varepsilon) := (\varepsilon f(x, y, \varepsilon), g(x, y, \varepsilon), 0)$ o campo de vetores definido pelo sistema (1.11). Assumimos que a parte linear de G em pontos $(x, y, 0)$, tais que $(x, y) \in \mathcal{S}$, tem k^s autovalores com partes reais negativas e k^u autovalores com partes reais positivas. Os autoespaços estável e instável correspondentes tem dimensões k^s e k^u , respectivamente.

Definição 1.2.2. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ conjuntos compactos. A **distância de Hausdorff** entre A e B é definida por $D(A, B) = \max_{z_1 \in A, z_2 \in B} \{d(z_1, B), d(z_2, A)\}$.

A principal questão na teoria geométrica das perturbações singulares é exibir condições sobre as quais uma órbita singular pode ser aproximada por órbitas regulares para $\varepsilon \downarrow 0$, de acordo com a distância de Hausdorff.

Estamos agora em posição para afirmar o Teorema de Fenichel (veja [10, 24] para detalhes). Grosseiramente falando, este teorema afirma que qualquer estrutura do problema reduzido a qual persiste sobre perturbação regular persiste sobre perturbação singular por restrição do fluxo do sistema rápido à variedade central.

Teorema 1.2.3 (Fenichel). *Considere uma família de classe C^r como em (1.8). Seja \mathcal{N} uma variedade invariante compacta normalmente hiperbólica j -dimensional do problema reduzido (1.9) com uma variedade local estável W^s de dimensão $j + j^s$ e uma variedade local instável W^u de dimensão $j + j^u$. Então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que:*

1. *Existe uma família de classe C^{r-1} de variedades $\{\mathcal{N}_\varepsilon : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ tal que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ e \mathcal{N}_ε é uma variedade invariante hiperbólica de (1.8);*
2. *Existem famílias de classe C^{r-1} de variedades $\{\mathcal{N}_\varepsilon^s : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ e $\{\mathcal{N}_\varepsilon^u : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ de dimensões $(j + j^s + k^s)$ e $(j + j^u + k^u)$ tais que para $\varepsilon > 0$, $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ e $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ são variedades locais estável e instável de \mathcal{N}_ε , respectivamente.*

1.3 Campos de vetores descontínuos

Nesta seção introduziremos algumas definições e resultados preliminares acerca de campos descontínuos.

O estudo de sistemas dinâmicos não suaves (ou sistemas de Filippov) tem, em recentes anos, estabelecido uma importante fronteira entre Matemática, Física e Engenharia. A beleza matemática de tais sistemas e sua forte relação com outros ramos fez este tema ter sido objeto de muitas pesquisas nos últimos anos. A principal fonte de motivação para o estudo de sistemas que emergem de equações diferenciais com lado direito descontínuo vem da teoria do controle (veja [7], por exemplo).

O caso mais simples de um sistema de Filippov é quando o espaço de fase é composto por dois domínios tal que para cada domínio uma equação diferencial ordinária diferente governa as dinâmicas, a saber

$$\dot{x} = Z(x) = \begin{cases} F(x) & \text{se } h(x) \leq 0, \\ G(x) & \text{se } h(x) \geq 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Em (1.12), $F = (F_1, \dots, F_n)$ e $G = (G_1, \dots, G_n)$ são campos de vetores de classe C^r sobre \mathbb{R}^n e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^r tendo $0 \in \mathbb{R}$ como um valor regular, $r \geq 1$.

A fronteira comum

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$$

entre os domínios $\mathcal{M}_- = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq 0\}$ e $\mathcal{M}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq 0\}$ é chamada de **variedade de descontinuidade**. Usaremos a notação $Z = (F, G)$ para representar o sistema de Filippov (1.12), ficando claro que o campo F está definido e é suave sobre \mathcal{M}_- e o campo G está definido e é suave sobre \mathcal{M}_+ . Denotaremos por $\Omega = \Omega^r(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos campos vetoriais $Z = (F, G)$ definidos por (1.12). As órbitas de Z sobre a descontinuidade \mathcal{M} seguem as convenções de Filippov estabelecidas em [11], a serem descritas abaixo. A unicidade das soluções não é exigida.

Definição 1.3.1. *Dizemos que dois campos de vetores descontínuos Z e \tilde{Z} são C^0 \mathcal{M} -equivalentes se existir um homeomorfismo \mathcal{M} -invariante $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} , preservando a orientação.*

Observação 1.3.1. *Sobre o conjunto de descontinuidade podemos definir as soluções de $\dot{x} = Z(x)$ segundo algumas convenções, visto que as soluções podem ser duplamente definidas sobre \mathcal{M} . Adotaremos aqui a convenção estabelecida por Gantmaher e Filippov.*

Usaremos a notação $(F.h)(p) = F(p) \cdot \nabla h(p)$ para o produto escalar entre o campo de vetores $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o gradiente da função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 1.3.2. *Distinguimos as seguintes regiões sobre a descontinuidade \mathcal{M} :*

- (i) **Região de Costura:** Caracterizada por $(F.h)(G.h) > 0$;
- (ii) **Região de Escape:** Caracterizada por $(F.h) < 0$ e $(G.h) > 0$;

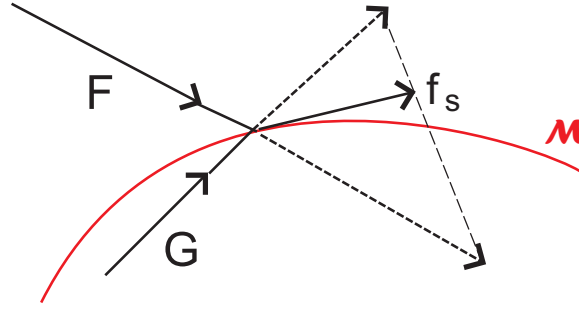


Figura 1.3: Campo de vetores deslizante.

(iii) **Região de Deslize:** Caracterizada por $(F.h) > 0$ e $(G.h) < 0$.

Denotaremos por \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_3 as regiões de costura, escape e deslize, respectivamente.

Seja $\mathcal{O} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$. Temos que genericamente \mathcal{O} é aberto e denso em \mathcal{M} . Observe que se $p \in \mathcal{O}$ então $(F.h)(p) \neq 0$ e $(G.h)(p) \neq 0$.

Definição 1.3.3. Sobre a região de deslize definimos o **campo de vetores deslizante** f_s associado ao sistema de Filippov $Z = (F, G)$ da seguinte maneira: dado $p \in \mathcal{M}_3$, $f_s(p)$ denota o cone gerado por $F(p)$ e $G(p)$ tangente a \mathcal{M} , ou seja, $f_s(p) = m - p$, onde m é o ponto onde o segmento ligando $p + F(p)$ e $p + G(p)$ é tangente a \mathcal{M} . Veja a figura 1.3.

Observação 1.3.2. É claro que se $p \in \mathcal{M}_2$ então $p \in \mathcal{M}_3$ para o campo $-Z$ e assim podemos definir um campo de vetores f_e na região de escape \mathcal{M}_2 por $f_e(p) = -g_s(p)$, onde g_s denota o campo deslizante associado a $-Z = (-F, -G)$. Aqui usaremos para ambos os casos a mesma notação f_s .

De acordo com as regras de Gantmaher e Filippov se um ponto do espaço de fase que está se movendo em uma órbita de $Z = (F, G)$ se encontra com \mathcal{M}_1 então esta órbita cruza \mathcal{M}_1 em direção a outra parte do espaço, e as soluções de $Z = (F, G)$ através dos pontos de $\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$ seguem as órbitas de f_s .

Dado um sistema de Filippov (1.12), a expressão geral para o campo de vetores deslizante f_s associado a (1.12) é dada por

$$\dot{x} = f_s(x) = \frac{[\nabla h(x)F(x)]G(x) - [\nabla h(x)G(x)]F(x)}{\nabla h(x)[F(x) - G(x)]}. \quad (1.13)$$

1.3.1 Regularização

Uma aproximação do campo de vetores descontínuo (1.12) por uma família a um-parâmetro de campos de vetores contínuos é chamada uma **regularização** de (1.12). Sotomayor e Teixeira [22] e Llibre e Teixeira [15] em dimensões 2 e 3, respectivamente, introduziram tal processo de regularização para estudar campos de vetores descontínuos.

Basicamente o processo consiste em considerar, para cada $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno, um campo de vetores suave $X_\alpha, 0 < \alpha \leq \alpha_0$, tal que :

- (i) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} X_\alpha = Z$;
- (ii) X_{α_0} é igual a F em todos os pontos de \mathcal{M}_- cuja distância até \mathcal{M} é maior que α_0 ;
- (iii) X_{α_0} é igual a G em todos os pontos de \mathcal{M}_+ cuja distância até \mathcal{M} é maior que α_0 .

Mais precisamente, temos o seguinte.

Definição 1.3.4. (a) Uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é uma **função de transição** se $\varphi(s) = -1$ para $s \leq -1$, $\varphi(s) = 1$ se $s \geq 1$ e $\varphi'(s) > 0$ se $s \in (-1, 1)$.

(b) A φ -**regularização** de um sistema de Filippov (1.12) é a família a um-parâmetro X_α de campos de vetores contínuos dada por

$$X_\alpha(q) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi_\alpha(h(q))}{2} \right) F(q) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_\alpha(h(q))}{2} \right) G(q), \quad (1.14)$$

com $\varphi_\alpha(s) = \varphi(s/\alpha)$, para $\alpha > 0$.

Aplicando o processo de regularização no sistema (1.12) temos que as trajetórias do campo de vetores regularizado X_α são as soluções do sistema diferencial

$$\dot{x}_i = \frac{F_i + G_i}{2} + \varphi\left(\frac{h}{\alpha}\right) \frac{F_i - G_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

Capítulo 2

Impasses e Perturbações Singulares

Neste capítulo estudamos famílias de sistemas forçados (1.2) tendo a forma

$$\dot{x}_1 = \alpha_1(x), \quad \dots \quad \dot{x}_{n-1} = \alpha_{n-1}(x), \quad (\lambda - z(x))\dot{x}_n = \alpha_n(x), \quad \dot{\lambda} = 0, \quad (2.1)$$

onde $z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^r , $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um campo de vetores de classe C^r sobre \mathbb{R}^n , $r \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ e λ é um parâmetro real. Em nosso primeiro resultado (Teorema A) veremos que as dinâmicas da família (2.1) na vizinhança de um ponto (x, λ) do conjunto de impasse $\lambda = z(x)$ é descrita por um problema de perturbação singular. Um segundo resultado (Teorema B) apresenta as propriedades de estabilidade de conjuntos compactos x_n -simples (veja Definição 2.1.2) da hipersuperfície de impasse. Por fim estudamos sistemas forçados planares com superfície de impasse não-regular, onde apresentamos um teorema (Teorema C) sobre regularização em tais pontos não-regulares. Estes três resultados fazem parte do artigo [6].

2.1 Afirmação dos principais resultados

Começamos nosso estudo neste capítulo com um resultado sobre a equivalência topológica entre famílias de sistemas forçados gerais (1.2) e famílias de sistemas forçados da forma (2.1). A proposição abaixo generaliza a Proposição 7 obtida no artigo [14], onde é feito o caso $n = 2$.

Proposição 2.1.1. *Considere famílias de classe C^r de sistemas forçados gerais (1.2)*

$$A(x, \lambda)\dot{x} = F(x), \quad \dot{\lambda} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Se $p = (x_0, \lambda_0) \in \mathcal{I}_A$ é tal que o posto de $A(p)$ é $(n - 1)$ e $\frac{\partial \delta_A}{\partial \lambda}(p) \neq 0$ então (2.2) é localmente C^{r-2} orbitalmente equivalente (em p) a uma família de sistemas forçados (2.1) com $\alpha_i(x) = \bar{\alpha}_i(x, \lambda)$, $i = 1, \dots, n$.

Demonstração – Como $A(x_0, \lambda_0)$ tem posto $n - 1$ então $\det M_{ji} \neq 0$ para algum $i, j = 1, \dots, n$, onde M_{ji} é a matriz citada na Seção 1.1 do capítulo anterior. Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que o campo de vetores

$$\mathcal{K} = ((-1)^{n+1} \det M_{n1}, (-1)^{n+2} \det M_{n2}, \dots, (-1)^{n+n} \det M_{nn})$$

não se anula em uma vizinhança \mathcal{V} de (x_0, λ_0) . Seja H um hiperplano passando pela origem ortogonal a \mathcal{K} . Na vizinhança \mathcal{V} tomamos as coordenadas X_1, \dots, X_{n-1} ao longo do hiperplano H . Definimos X_n como o tempo para o ponto $(x, \lambda) \in \mathcal{V}$ alcançar H ao longo do fluxo de \mathcal{K} . Claramente nas novas variáveis $H = \{X_n = 0\}$ e $\mathcal{K} = (0, 0, \dots, 0, X_n)$.

De $x_i = x_i(X_1, \dots, X_n, \lambda)$, obtemos pela regra da cadeia $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \dot{X}_j$, $i = 1, \dots, n$.

Assim o sistema (2.2) torna-se

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11}(X, \lambda) & \bar{a}_{12}(X, \lambda) & \cdots & \bar{a}_{1n}(X, \lambda) \\ \bar{a}_{21}(X, \lambda) & \bar{a}_{22}(X, \lambda) & \cdots & \bar{a}_{2n}(X, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1}(X, \lambda) & \bar{a}_{n2}(X, \lambda) & \cdots & \bar{a}_{nn}(X, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1(X, \lambda) \\ \bar{F}_2(X, \lambda) \\ \vdots \\ \bar{F}_n(X, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

onde

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Como X_n é o tempo que o fluxo de \mathcal{K} leva para alcançar o hiperplano H então $\mathcal{K} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_n}, \frac{\partial x_2}{\partial X_n}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial X_n} \right)$. Assim, pela definição de matriz adjunta temos

$$\bar{a}_{1n} = \bar{a}_{2n} = \cdots = \bar{a}_{(n-1)n} = 0.$$

De fato, \bar{a}_{in} , $i = 1, \dots, n - 1$, é o produto entre a i -ésima linha de A com a n -ésima coluna de A^* .

Agora, vamos mostrar que $\overline{a_{11}} \neq 0$, $\overline{a_{22}} \neq 0$, \dots , $\overline{a_{(n-1)(n-1)}} \neq 0$ em \mathcal{V} . Por continuidade das funções $\overline{a_{ii}}$, $i = 1, \dots, n-1$, é suficiente mostrar que $\overline{a_{ii}}(p) \neq 0$. Suponhamos que $\overline{a_{ii}}(p) = 0$. Para fixar ideias considere $i = 1$. Como

$$\overline{a_{11}}(p) = \left\langle (a_{11}(p), \dots, a_{1n}(p)), \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}(p), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial X_1}(p) \right) \right\rangle = 0,$$

segue que $(a_{11}(p), \dots, a_{1n}(p))$ e $\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}(p), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial X_1}(p) \right)$ são ortogonais. Mas $\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}(p), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial X_1}(p) \right) \in H$. De fato, seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ a base canônica com relação as novas variáveis X_1, \dots, X_n . Temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}(p), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial X_1}(p) \right) &:= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_1(p + tE_1) - x_1(p)}{t}, \dots \right. \\ &\left. \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_n(p + tE_1) - x_n(p)}{t} \right) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_1(p + tE_1)}{t}, \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_n(p + tE_1)}{t} \right). \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{x_1(p+tE_1)}{t}, \dots, \frac{x_n(p+tE_1)}{t} \right) \in H$, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que $\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}(p), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial X_1}(p) \right) \in H$. Assim, $\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}(p), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial X_1}(p) \right)$ e o campo de vetores \mathcal{K} são ortogonais. Consequentemente, $(a_{11}(p), \dots, a_{1n}(p))$ e $\mathcal{K}(p)$ são linearmente dependentes, o que é uma contradição, pois pela definição de matriz adjunta, $\langle (a_{11}(p), \dots, a_{1n}(p)), \mathcal{K}(p) \rangle = 0$. Analogamente podemos mostrar que $\overline{a_{22}} \neq 0$, \dots , $\overline{a_{(n-1)(n-1)}} \neq 0$ em \mathcal{V} .

A fim de concluir a demonstração, para fixar ideias supomos que $n = 3$. Das afirmações acima, o sistema (2.3) torna-se

$$\begin{aligned} \overline{a_{11}}(X, \lambda) \dot{X}_1 + \overline{a_{12}}(X, \lambda) \dot{X}_2 &= \overline{F_1}(X, \lambda) \\ \overline{a_{21}}(X, \lambda) \dot{X}_1 + \overline{a_{22}}(X, \lambda) \dot{X}_2 &= \overline{F_2}(X, \lambda) \\ \overline{a_{31}}(X, \lambda) \dot{X}_1 + \overline{a_{32}}(X, \lambda) \dot{X}_2 + \overline{a_{33}}(X, \lambda) \dot{X}_3 &= \overline{F_3}(X, \lambda) \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde temos $\overline{a_{11}} \neq 0$ e $\overline{a_{22}} \neq 0$. Note que, $\det \overline{A} = (\det \overline{M_{33}}) \overline{a_{33}}$, onde $\overline{M_{33}} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}$.

Dividindo a primeira equação do sistema (2.4) por $\overline{a_{11}}$, multiplicando a equação resultante por $\overline{a_{21}}$ e subtraindo isso da segunda equação, podemos substituir a segunda equação de (2.4) por $(\det \overline{M_{33}}) \dot{X}_2 = \overline{F_2}$. Analogamente, dividindo a segunda equação do sistema (2.4) por $\overline{a_{22}}$, multiplicando a equação resultante por $\overline{a_{12}}$ e subtraindo isso da primeira equação podemos substituir a primeira equação por $(\det \overline{M_{33}}) \dot{X}_1 = \overline{F_1}$. Agora, multiplicando a

terceira equação de (2.4) por $\det \overline{M_{33}}$ e usando as duas equações obtidas acima, podemos substituir a terceira equação de (2.4) por $(\det \overline{A})\dot{X}_3 = \overline{F}_3$. Assim obtemos de (2.4) o seguinte sistema

$$(\det \overline{M_{33}})\dot{X}_1 = \overline{F}_1, \quad (\det \overline{M_{33}})\dot{X}_2 = \overline{F}_2, \quad (\det \overline{A})\dot{X}_3 = \overline{F}_3. \quad (2.5)$$

Como $\det \overline{A} = (\det \overline{M_{33}})\overline{a_{33}}$ segue que o sistema (2.5) é equivalente a

$$\dot{X}_1 = \overline{\alpha}_1(X, \lambda), \quad \dot{X}_2 = \overline{\alpha}_2(X, \lambda), \quad (\det \overline{A})\dot{X}_3 = \overline{\alpha}_3(X, \lambda). \quad (2.6)$$

Visto que $\frac{\partial \delta_A}{\partial \lambda}(p) \neq 0$ temos também $\frac{\partial \delta_{\overline{A}}}{\partial \lambda}(p) \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, o conjunto de impasse de (2.6) definido pela equação $\delta_{\overline{A}}(X, \lambda) = \det \overline{A}(X, \lambda) = 0$ pode ser escrito localmente como $\lambda = z(X)$. Isso completa a prova da Proposição 2.1.1.

■

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema A. *Seja $X_\lambda(x)$ um sistema de classe C^r definido por (2.1), com $r \geq 1$. Considere o problema de perturbação singular*

$$\dot{x}_i = \varepsilon \alpha_i(x), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad \dot{x}_n = \alpha_n(x), \quad \dot{\varepsilon} = 0. \quad (2.7)$$

O difeomorfismo H de classe C^r dado por

$$H(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = (x_1, \dots, x_n, \varepsilon - z(x_1, \dots, x_n))$$

leva órbitas de (2.7) com $\varepsilon > 0$ sobre órbitas de $X_\lambda(x)$ próximos ao conjunto de impasse.

Assim como veremos na próxima seção, a ideia da prova do Teorema A para obter o problema de perturbação singular (2.7), consiste em fazer uma mudança de variáveis onde temos a relação $\varepsilon = \lambda - z(x)$. Note que por esta mudança, a folha $\varepsilon = 0$ da perturbação singular corresponde ao conjunto de impasse $\lambda = z(x)$. Também, para valores pequenos de ε , tal mudança significa que estamos suficientemente próximos do conjunto de impasse.

Antes de enunciarmos nosso próximo teorema, a seguinte definição é necessária.

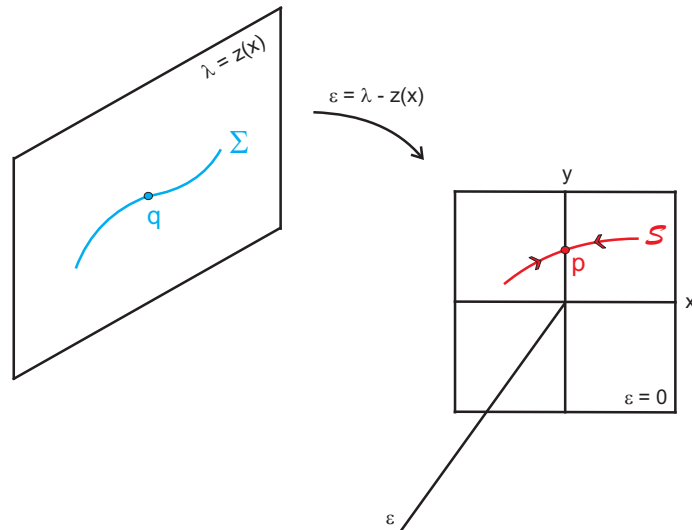


Figura 2.1: Impasse e perturbação singular.

Definição 2.1.2. *Seja $X_\lambda(x)$ um sistema definido por (2.1). Suponha que $p_0 = (x_0, \lambda_0) \in \mathcal{I}_A$ é tal que $\alpha_n(x_0) = 0$. Dizemos que $X_\lambda(x)$ é x_n -**simples** em p_0 se $\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. O sistema $X_\lambda(x)$ é x_n -**simples** em $K \subseteq \mathcal{I}_A$ se ele o é para qualquer $p_0 \in K$.*

No intuito de explicar melhor o conteúdo do próximo resultado, o significado da Definição 2.1.2 e reforçar a ideia contida no Teorema A, analisemos a Figura 2.1. Nesta figura temos ilustrado o conjunto de impasse $\lambda = z(x)$ juntamente com a folha $\varepsilon = 0$ da perturbação singular que é obtida depois de aplicar a mudança $\varepsilon = \lambda - z(x)$. A hipersuperfície \mathcal{S} denota a variedade lenta sobre a qual temos definido a dinâmica do problema reduzido.

Pela mudança de variáveis citada acima, a variedade lenta \mathcal{S} é levada em uma hipersuperfície Σ sobre o conjunto de impasse. Pontos normalmente hiperbólicos da variedade lenta são levados em pontos x_n -simples da hipersuperfície Σ . Também, pontos que não são normalmente hiperbólicos de \mathcal{S} são levados em pontos que não são x_n -simples de Σ . Este é o significado da Definição 2.1.2.

Em nosso segundo resultado exibimos condições para a existência de variedades invariantes, como por exemplo pontos singulares e órbitas periódicas, e suas respectivas estabilidades na vizinhança do conjunto de impasse. Mais especificamente, olhando a Figura 2.1, suponha que $p \in \mathcal{S}$ é uma singularidade normalmente hiperbólico do sistema

reduzido de (2.7). Pelo Teorema de Fenichel sabemos que p persiste como uma família de pontos singulares hiperbólicos p_ε do problema singularmente perturbado (2.7) para valores pequenos de ε . Além disso, é possível estudar as propriedades de estabilidade de p_ε . Pela mudança de variáveis, a família p_ε é levada em uma família de pontos singulares hiperbólicos p_λ de $X_\lambda(x)$ próximos ao conjunto de impasse e, além disso, as propriedades de estabilidade de p_λ são preservadas.

Por essa razão, podemos dizer que o Teorema B abaixo trata-se de uma versão similar, para sistemas forçados suaves, do teorema da variedade invariante de Fenichel [10] (veja Teorema 1.2.3 no Capítulo 1 desta tese).

Depois de um rescalonamento no tempo $\tau = t/\varepsilon$ em (2.7) obtemos o sistema lento

$$\dot{x}_i = \alpha_i(x), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad \varepsilon \dot{x}_n = \alpha_n(x), \quad \dot{\varepsilon} = 0. \quad (2.8)$$

Considere $G(x, \varepsilon) := (\varepsilon\alpha_1(x), \dots, \varepsilon\alpha_{n-1}(x), \alpha_n(x), 0)$ o campo de vetores definido pelo sistema (2.7). Assumimos que a parte linear de G em pontos $(x, 0)$, onde $\alpha_n(x) = 0$, tem k^s e k^u autovalores com partes reais negativas e positivas, respectivamente.

Teorema B. *Seja $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{I}_A$ uma variedade compacta x_n -simples j -dimensional e $\mathcal{P}_0 \subseteq \{x : \alpha_n(x) = 0\}$ o conjunto invariante correspondente do problema de perturbação singular (2.7) obtido do Teorema A. Suponha que \mathcal{P}_0 tem uma variedade local estável W^s de dimensão $(j + j^s)$ e uma variedade local instável W^u de dimensão $(j + j^u)$ para o sistema reduzido definido por (2.8) com $\varepsilon = 0$. Então*

1. *Existe $\lambda_1 > 0$ e uma C^{r-1} família $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)\}$ tal que \mathcal{A}_λ é uma variedade invariante hiperbólica para o campo de vetores adjunto A^*F , para todo $\lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)$;*
2. *Existem C^{r-1} famílias $\{\mathcal{A}_\lambda^s : \lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)\}$ e $\{\mathcal{A}_\lambda^u : \lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)\}$ de variedades de dimensões $(j + j^s + k^s)$ e $(j + j^u + k^u)$, tais que \mathcal{A}_λ^s e \mathcal{A}_λ^u são variedades locais estável e instável de \mathcal{A}_λ , respectivamente, para todo $\lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)$.*

*Em particular se \mathcal{P}_0 é um ciclo limite do sistema reduzido (sistema (2.8) com $\varepsilon = 0$) então \mathcal{A}_λ é uma família de ciclos limites de A^*F .*

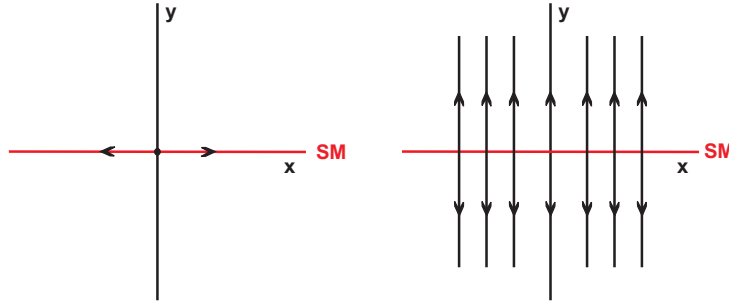


Figura 2.2: Retratos de fase dos sistemas reduzido e layer do Exemplo 1.

Os últimos resultados são ilustrados pelo seguinte exemplo.

Exemplo 1. Considere a seguinte família a um-parâmetro de sistemas forçados em \mathbb{R}^2

$$\dot{x} = x, \quad (x + y - \lambda)\dot{y} = y, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

De acordo com o Teorema A, e aplicando a mudança de variáveis

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \quad \text{e} \quad \varepsilon = x + y - \lambda,$$

obtemos o seguinte problema de perturbação singular $\dot{x} = x$, $\varepsilon\dot{y} = y$. Para $\varepsilon = 0$ temos o problema reduzido $\dot{x} = x$, $0 = y$. O rescalonamento no tempo $\tau = t/\varepsilon$ produz o sistema rápido $x' = \varepsilon x$, $y' = y$ e assim para $\varepsilon = 0$ temos o problema layer $x' = 0$, $y' = y$. Os retratos de fase dos sistemas reduzido e layer são exibidos na Figura 2.2.

A Figura 2.3 ilustra o retrato de fase do problema de perturbação singular. Observe que no ponto de impasse $(0, 0, 0)$, a configuração da superfície de impasse é ilustrada na Figura 2.4. A linha verde nessa figura corresponde aos pontos da forma $(\lambda, 0, \lambda)$. Todos eles são pontos y -simples da superfície de impasse e correspondem aos pontos da variedade lenta do problema de perturbação singular.

Podemos aplicar o Teorema B no ponto $(0, 0, 0)$. Ao redor deste ponto, o teorema assegura a existência da curva $\gamma(\lambda) = (0, 0, -\lambda)$ e tal que, para cada λ fixado, $(0, 0, -\lambda)$ é um ponto de equilíbrio para o campo de vetores adjunto

$$A^*F(x, y, \lambda) = (x^2 + xy - \lambda x, y).$$

Além disso, cada ponto $(0, 0, -\lambda)$ com $\lambda < 0$, possui uma variedade local estável P_λ^s de dimensão 1 e uma variedade local instável P_λ^u de dimensão 1. Também, para cada $(0, 0, -\lambda)$

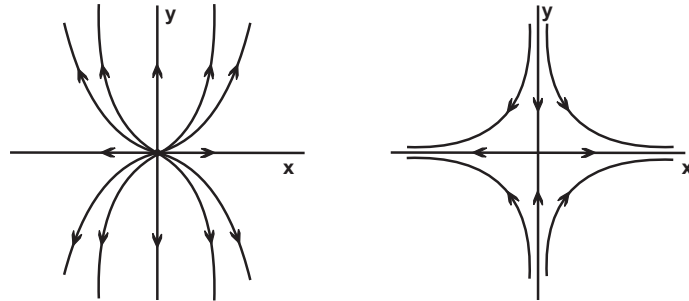


Figura 2.3: Retratos de fase para $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon < 0$ pequenos.

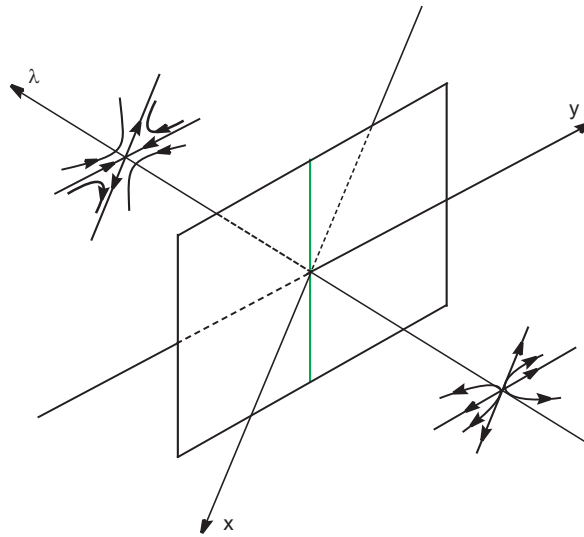


Figura 2.4: Retrato de fase de (2.9) próximo da superfície de impasse.

com $\lambda > 0$, existe uma variedade local instável P_λ^u de dimensão 2.

No próximo exemplo consideramos famílias de equações de Liénard para as quais são permitida ter um conjunto de impasse onde a família não está definida.

Exemplo 2. Considere famílias de equações de Liénard da forma

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + G(x, \dot{x}, \lambda) = 0, \quad (2.10)$$

onde a função G é dada por $G(x, \dot{x}, \lambda) = \frac{g(x, \dot{x})}{\alpha(x, \dot{x}, \lambda)}$. Como veremos, esse caso dá origem a famílias de sistemas forçados (2.2) onde o campo de vetores F é do tipo Liénard. Usando resultados conhecidos obtemos um sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}(x, y, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - H(x) \\ -\bar{g}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde $H(x) = \int_0^x f(s)ds$, $\bar{\alpha}(x, y, \lambda) = \alpha(x, y - H(x), \lambda)$ e $\bar{g}(x, y) = g(x, y - H(x))$. Seja p um ponto de impasse de (2.11), isto é, $\bar{\alpha}(p) = 0$. Se $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \lambda}(p) \neq 0$, então localmente em p temos $\bar{\alpha}(x, y, \lambda) = \lambda - z(x, y)$. De acordo com o Teorema A, aplicando a mudança de variáveis $X = x$, $Y = y$ e $\varepsilon = \lambda - z(x, y)$, poderemos tirar conclusões de (2.11) através do seguinte problema de perturbação singular

$$\dot{x} = y - H(x), \quad \varepsilon \dot{y} = -\bar{g}(x, y).$$

2.2 Demonstração dos Teoremas A e B

Nesta seção provaremos os Teoremas A e B.

Demonstração do Teorema A. Considere a mudança de variáveis

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad \dots, \quad X_n = x_n, \quad \varepsilon = \lambda - z(x_1, \dots, x_n). \quad (2.12)$$

Observe que o determinante Jacobiano de (2.12) é igual a 1. O sistema dado em (2.1) leva a forma

$$\dot{X}_i = \varepsilon \alpha_i(X), \quad \dot{X}_n = \alpha_n(X), \quad \dot{\varepsilon} = -\varepsilon z_{X_1} \alpha_1 - \dots - \varepsilon z_{X_{n-1}} \alpha_{n-1} - z_{X_n} \alpha_n, \quad (2.13)$$

onde $i = 1, \dots, n - 1$. Note que para valores pequenos de ε a mudança de variáveis (2.12) diz que o ponto (x, λ) está suficientemente próximo do ponto $(x, z(x))$ da hipersuperfície de impasse.

Considerando $\dot{\varepsilon} = 0$ em (2.13) obtemos um problema de perturbação singular (2.7). A aplicação de classe C^r ,

$$H(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = (x_1, \dots, x_n, \varepsilon - z(x_1, \dots, x_n))$$

leva órbitas do sistema (2.7) em órbitas do sistema (2.13). Ambos sistemas (2.13) e (2.7) tem os mesmos pontos singulares. De fato, sejam

$$Y = (\varepsilon\alpha_1, \dots, \varepsilon\alpha_{n-1}, \alpha_n, -\varepsilon(z_{X_1}\alpha_1 + \dots + z_{X_{n-1}}\alpha_{n-1}) - z_{X_n}\alpha_n)$$

e

$$W = (\varepsilon\alpha_1, \dots, \varepsilon\alpha_{n-1}, \alpha_n, 0)$$

os campos de vetores definidos pelos sistemas (2.13) e (2.7), respectivamente. Os pontos singulares de Y e W são os pontos $(P, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $\alpha_1(P) = \alpha_2(P) = \dots = \alpha_n(P) = 0$. As linearizações $DY(X, \varepsilon)$ e $DW(X, \varepsilon)$ de Y e W em um ponto qualquer (X, ε) são dadas por

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial X_1} & \cdots & \varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial X_n} & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial X_1} & \cdots & \varepsilon \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial X_n} & \alpha_{n-1} \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial X_n} & 0 \\ K_1 & \cdots & K_n & K_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial X_1} & \cdots & \varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial X_n} & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial X_1} & \cdots & \varepsilon \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial X_n} & \alpha_{n-1} \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial X_n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $K_i = -\varepsilon(z_{X_1 X_i} \alpha_1 + z_{X_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial X_i} + \dots + z_{X_{n-1} X_i} \alpha_{n-1} + z_{X_{n-1}} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial X_i}) - z_{X_n X_i} \alpha_n - z_{X_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial X_i}$, para $i = 1, \dots, n$ e $K_{n+1} = -z_{X_1} \alpha_1 - \dots - z_{X_{n-1}} \alpha_{n-1}$. Claramente para os pontos singulares de Y e W temos que $DY(P, \varepsilon)$ e $DW(P, \varepsilon)$ tem os mesmos autovalores. Além disso, órbitas do sistema (2.7) são levadas em órbitas do sistema (2.13). Em particular, ciclos limites de (2.7) são levados em ciclos limites de (2.13). As propriedades de estabilidade desses ciclos limites são preservadas. De fato, suponha que $\gamma(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t), \varepsilon_0)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma

órbita de W . Então $\psi(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t), \varepsilon_0 - z(X_1(t), \dots, X_n(t)))$ é uma órbita de Y . Com efeito,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= (\dot{X}_1(t), \dots, \dot{X}_n(t), -z_{X_1}\dot{X}_1(t) - \dots - z_{X_n}\dot{X}_n(t)) = \\ &= \left(\varepsilon\alpha_1(\gamma(t)), \dots, \alpha_n(\gamma(t)), -\varepsilon z_{X_1}\alpha_1(\gamma(t)) - \dots - z_{X_n}\alpha_n(\gamma(t)) \right) = \\ &= \left(\varepsilon\alpha_1(\psi(t)), \dots, \alpha_n(\psi(t)), -\varepsilon z_{X_1}\alpha_1(\psi(t)) - \dots - z_{X_n}\alpha_n(\psi(t)) \right) = Y(\psi(t)), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, se $\gamma(t)$ é uma órbita periódica de W , então claramente $\psi(t)$ é também uma órbita periódica de Y .

Agora, suponha que γ é um ciclo limite estável. Mostremos que ψ é também um ciclo limite estável. Temos que existe uma vizinhança \mathcal{V} de γ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma(t)) = 0, \quad (2.14)$$

para todo $q \in \mathcal{V}$. Chame de $\varphi(t, q) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t), \varepsilon_1)$ a trajetória de W passando por q . Queremos dizer que dado uma vizinhança \mathcal{V} de γ podemos encontrar uma vizinhança \mathcal{V}' de ψ tal que em correspondência a cada trajetória $\varphi(t, q)$ de W obtemos uma trajetória $\tilde{\varphi}(t, \tilde{q}) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t), \varepsilon_1 - z(Y_1(t), \dots, Y_n(t)))$ de Y por um ponto \tilde{q} , e reciprocamente.

Adotamos em \mathbb{R}^{n+1} a métrica $d(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_{n+1} - y_{n+1}|$, onde $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$. A igualdade (2.14) diz que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(|Y_1(t) - X_1(t)| + \dots + |Y_n(t) - X_n(t)| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_0| \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |Y_i(t) - X_i(t)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\varepsilon_1 - \varepsilon_0| = 0, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Em particular, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} d(\tilde{\varphi}(t, \tilde{q}), \psi(t)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(|Y_1(t) - X_1(t)| + \dots + |Y_n(t) - X_n(t)| + \right. \\ &+ |z(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) - z(X_1(t), \dots, X_n(t))| \left. \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} |Y_1(t) - X_1(t)| + \dots \\ &\dots + \lim_{t \rightarrow \infty} |Y_n(t) - X_n(t)| + \lim_{t \rightarrow \infty} |z(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) - z(X_1(t), \dots, X_n(t))| = 0. \end{aligned}$$

Portanto ψ é um ciclo limite estável de Y . Analogamente, se γ é um ciclo limite instável ou semi-estável então ψ também será instável ou semi-estável.

Concluimos que H é um difeomorfismo de classe C^r que envia órbitas de (2.7) com $\varepsilon > 0$ sobre órbitas de (2.1). ■

Provamos agora o Teorema B.

Demonstração do Teorema B. Para fixar ideias supomos que $j = 0$. Aplicando o Teorema 1.2.3 para o ponto singular normalmente hiperbólico $\mathcal{P} = (\tilde{x}_0, 0)$ do problema reduzido (sistema (2.8) com $\varepsilon = 0$) obtemos $\varepsilon_1 > 0$ satisfazendo o seguinte.

1. Existe uma C^{r-1} família $\{\mathcal{P}_\varepsilon : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ tal que $\mathcal{P}_0 = (\tilde{x}_0, 0)$ e \mathcal{P}_ε é um ponto singular hiperbólico de (2.7);
2. Existem C^{r-1} famílias $\{\mathcal{P}_\varepsilon^s : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ e $\{\mathcal{P}_\varepsilon^u : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ de variedades de dimensões $(j^s + k^s)$ e $(j^u + k^u)$, tais que $\mathcal{P}_\varepsilon^s$ e $\mathcal{P}_\varepsilon^u$ são variedades locais estável e instável de \mathcal{P}_ε , respectivamente, para todo $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$.

Pontos singulares \mathcal{P}_ε de (2.7) são enviados em pontos singulares \mathcal{A}_λ de (2.1) (isto é, pontos singulares de A^*F) próximos à hipersuperfície de impasse \mathcal{I}_A . Além disso, as propriedades de estabilidade são preservadas. Assim, para cada variedade local estável $\mathcal{P}_\varepsilon^s$ de dimensão $(j^s + k^s)$ e para cada variedade local instável $\mathcal{P}_\varepsilon^u$ de dimensão $(j^u + k^u)$ de \mathcal{P}_ε correspondem variedades \mathcal{A}_λ^s e \mathcal{A}_λ^u de dimensões $(j^s + k^s)$ e $(j^u + k^u)$, tais que \mathcal{A}_λ^s e \mathcal{A}_λ^u são variedades locais estável e instável de \mathcal{A}_λ , respectivamente, para todo $\lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)$.

■

2.3 Aplicações

Nesta seção damos outras aplicações dos Teoremas A e B.

Exemplo 3. Considere a seguinte família a um-parâmetro de sistemas forçados em \mathbb{R}^3

$$\dot{x} = f(x, y, z), \quad \dot{y} = g(x, y, z), \quad (x + y + z - \lambda)\dot{z} = z - x, \quad (2.15)$$

onde

$$f(x, y, z) = -y - x(-1 + x^2 + y^2) + (z - x)^2 \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = x - y(-1 + x^2 + y^2) - (z - x)^2.$$

De acordo com o Teorema A, depois de aplicar a mudança de variáveis $(X, Y, Z) = (x, y, z)$ e $\varepsilon = x + y + z - \lambda$, poderemos tirar conclusões para (2.15) através do seguinte problema

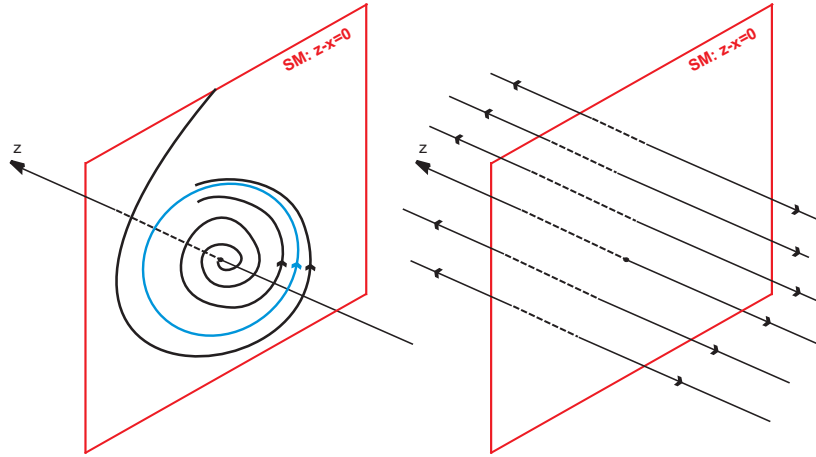


Figura 2.5: Retratos de fase de (2.17) e (2.19).

de perturbação singular

$$\dot{X} = f(X, Y, Z), \quad \dot{Y} = g(X, Y, Z), \quad \varepsilon \dot{Z} = Z - X. \quad (2.16)$$

Para $\varepsilon = 0$ em (2.16) temos o problema reduzido

$$\dot{X} = f(X, Y, Z), \quad \dot{Y} = g(X, Y, Z), \quad 0 = Z - X. \quad (2.17)$$

Depois do rescalonamento no tempo $\tau = t/\varepsilon$ em (2.16) obtemos o sistema rápido

$$X' = \varepsilon f(X, Y, Z), \quad Y' = \varepsilon g(X, Y, Z), \quad Z' = Z - X, \quad (2.18)$$

e para $\varepsilon = 0$ em (2.18) temos o problema layer

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = Z - X. \quad (2.19)$$

Os retratos de fase de (2.17) e (2.19) são dados na Figura 2.5.

Para o retrato de fase do problema reduzido (2.17) usamos coordenadas polares $X = r \cos \theta$, $Y = r \sin \theta$. Usando estas coordenadas é fácil ver que o sistema (2.17) apresenta um ponto singular na origem e um ciclo limite estável Γ . De acordo com a Definição 2.1.2, todos os pontos do conjunto de impasse são z -simples. Aplicando o Teorema B, obtemos para λ pequeno, famílias $\{\mathcal{P}_\lambda\}$ e $\{\Gamma_\lambda\}$ de pontos singulares e ciclos limites de A^*F , respectivamente, tais que $\mathcal{P}_0 = 0$ e $\Gamma_0 = \Gamma$. Além disso, cada ponto singular \mathcal{P}_λ tem uma variedade local instável \mathcal{P}_λ^u de dimensão 3, e cada ciclo limite Γ_λ tem uma variedade

local estável Γ_λ^s de dimensão 3 e uma variedade local instável Γ_λ^u de dimensão 2.

Exemplo 4. Considere a seguinte família de sistemas forçados

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda - \sin y + \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

A igualdade $\lambda = \sin y - \cos x$ define a superfície de impasse de (2.20). Por exemplo, o nível $\lambda = 0$ da superfície de impasse corresponde as retas paralelas $y = x + \frac{4k+1}{2}\pi$ e as retas paralelas $y = -x + \frac{4k+1}{2}\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Note que o campo de vetores adjunto é dado por

$$A^*F = (\sin x(\lambda - \sin y + \cos x), \sin y).$$

Assim, obtemos um campo de vetores sobre o toro bidimensional \mathbb{T}^2 . De fato, temos que $A^*F(x + 2k\pi, y + 2k\pi) = A^*F(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Podemos identificar o toro \mathbb{T}^2 com o retângulo $R = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$. Mais especificamente, obtemos o toro \mathbb{T}^2 quando identificamos o lado esquerdo com o lado direito e o lado inferior com o lado superior de R . Note que, as retas paralelas $y = x + \frac{4k+1}{2}\pi$ são levadas em dois segmentos paralelos sobre R . Como cada uma destas retas tem coeficiente angular igual a $1 \in \mathbb{Q}$, todas elas são levadas em uma curva fechada sobre R . Analogamente, as retas paralelas $y = -x + \frac{4k+1}{2}\pi$ são também levadas em uma curva fechada sobre R .

A Figura 2.6 ilustra o nível $\lambda = 0$ da superfície de impasse de (2.20) no plano \mathbb{R}^2 (retas vermelhas) e no toro R (segmentos verdes). A Figura 2.7 ilustra os níveis $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ da superfície de impasse de (2.20) no toro R .

De acordo com o Teorema A, depois de aplicar a mudança de variáveis $X = x$, $Y = y$, e $\varepsilon = \lambda - \sin y + \cos x$, poderemos tirar conclusões para (2.20) através do seguinte problema de perturbação singular

$$\dot{X} = \sin X, \quad \varepsilon \dot{Y} = \sin Y. \quad (2.21)$$

Para $\varepsilon = 0$ em (2.21) temos o problema reduzido

$$\dot{X} = \sin X, \quad 0 = \sin Y. \quad (2.22)$$

O conjunto $\{\sin Y = 0\} = \{Y = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ define a variedade lenta de (2.21). Depois

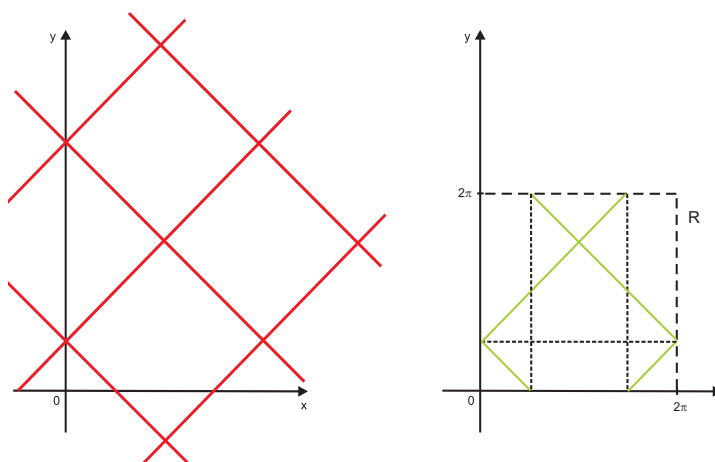


Figura 2.6: Nível $\lambda = 0$ da superfície de impasse de (2.20) no plano \mathbb{R}^2 (para $k = -1, 0$ e 1) e no toro R (para todo $k \in \mathbb{Z}$).

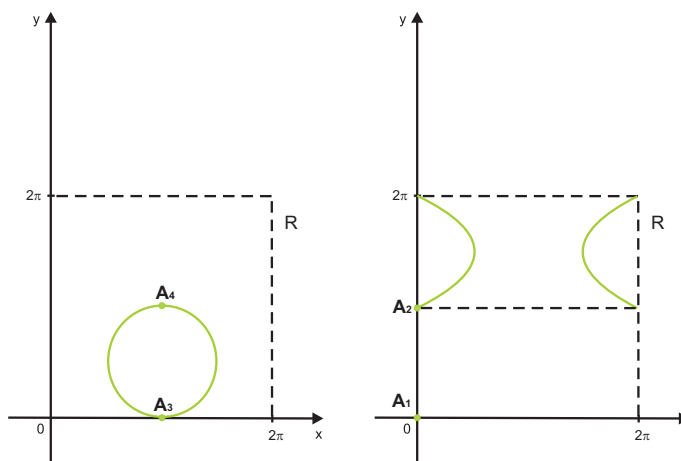


Figura 2.7: Níveis $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ da superfície de impasse de (2.20) no toro R .

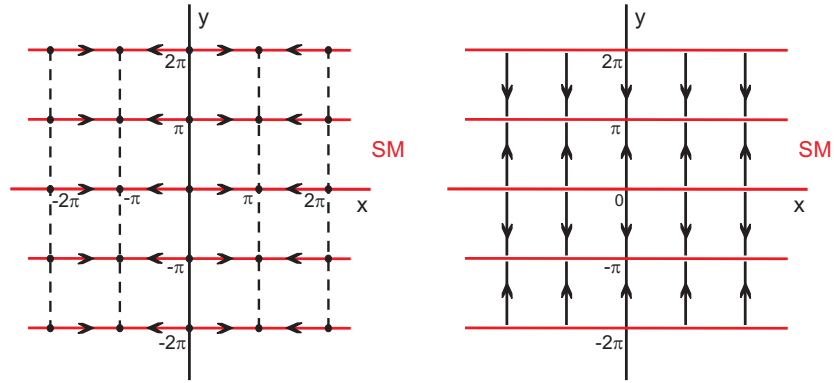


Figura 2.8: Retratos de fase de (2.22) e (2.24).

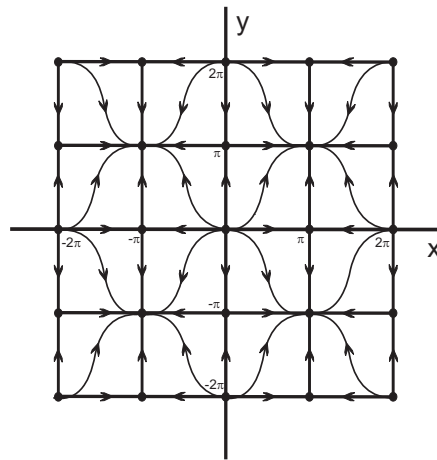


Figura 2.9: Retrato de fase de (2.21) para $\varepsilon > 0$ pequeno.

do rescalonamento no tempo $\tau = t/\varepsilon$ em (2.21) obtemos o sistema rápido

$$X' = \varepsilon \sin X, \quad Y' = \sin Y, \quad (2.23)$$

e para $\varepsilon = 0$ em (2.23) temos o problema layer

$$X' = 0, \quad Y' = \sin Y. \quad (2.24)$$

A Figura 2.8 ilustra os retratos de fase de (2.22) e (2.24). Na Figura 2.9 temos o retrato de fase do sistema (2.21) para $\varepsilon > 0$ pequeno.

Assim, podemos obter as dinâmicas próximas aos pontos de impasse $(k\pi, k'\pi, 1)$ e $(k\pi, k'\pi, -1)$, com $k, k' \in \mathbb{Z}$. Olhando no toro R , é suficiente considerar os pontos de impasse $A_1 = (0, 0, -1)$, $A_2 = (0, \pi, -1)$, $A_3 = (\pi, 0, 1)$ e $A_4 = (\pi, \pi, 1)$ sobre R .

De acordo com a Definição 2.1.2, todos os pontos da superfície de impasse são y -simples. De fato, seja (x_0, y_0, λ_0) um ponto de impasse, isto é, $\lambda_0 = \sin y_0 - \cos x_0$ tal que $\sin y_0 = 0$. Assim, $y_0 = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Como $\frac{\partial \sin y}{\partial y}(x_0, y_0) = \cos y_0 = \cos k\pi = \pm 1$, segue que (x_0, y_0, λ_0) é um ponto de impasse y -simples de (2.20).

Aplicando o Teorema B, obtemos para λ pequeno, famílias $\{\mathcal{A}_\lambda^1\}$, $\{\mathcal{A}_\lambda^2\}$, $\{\mathcal{A}_\lambda^3\}$ e $\{\mathcal{A}_\lambda^4\}$ de pontos singulares de A^*F , tais que $\mathcal{A}_0^1 = A_1$, $\mathcal{A}_0^2 = A_2$, $\mathcal{A}_0^3 = A_3$ e $\mathcal{A}_0^4 = A_4$. Além disso,

- cada $\{\mathcal{A}_\lambda^1\}$ tem uma variedade local instável de dimensão 2;
- cada $\{\mathcal{A}_\lambda^2\}$ e $\{\mathcal{A}_\lambda^3\}$ tem uma variedade local instável de dimensão 1 e uma variedade local estável de dimensão 1;
- cada $\{\mathcal{A}_\lambda^4\}$ tem uma variedade local estável de dimensão 2.

Observação 2.3.1. *O último exemplo mostra como um sistema forçado pode ser visto sobre o toro bidimensional \mathbb{T}^2 . Usualmente, podemos considerar qualquer sistema forçado $A(x)\dot{x} = F(x)$ sobre o toro \mathbb{T}^2 . Isso pode ser feito identificando o toro \mathbb{T}^2 com o retângulo $R = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ ou qualquer outro retângulo $[a, b) \times [a, b)$. Agora, temos o campo de vetores adjunto A^*F definido sobre R . Assumimos que A^*F é suave. A única dificuldade nesta transição para o toro R é que poderia acontecer de A^*F se tornar não-suave sobre R . Esta situação pode ser contornada aplicando o processo de regularização descrito na subseção 1.3.1 do Capítulo 1.*

2.4 Superfícies de impasse não-regular

Nesta seção consideramos sistemas diferenciais forçados de classe C^r da forma

$$A(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.25)$$

para o qual a origem é um ponto de impasse não-regular, isto é, $\delta_A(0, 0) = 0$ e $\nabla \delta_A(0, 0) = 0$ (veja Definição 1.1.3).

De acordo com a Proposição 2.1.1, se $A(0, 0)$ tem posto igual a 1 então qualquer sistema forçado (2.25) de classe C^r no ponto de impasse $(0, 0)$ é localmente C^{r-1} orbitalmente

equivalente a um sistema forçado da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{A}}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}(x, y) \\ \bar{g}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Se $(0, 0)$ é um ponto de impasse não-regular de (2.25) então ele também é um ponto de impasse não-regular de (2.26). Por essa razão, trabalharemos diretamente com o sistema (2.26).

Com hipóteses apropriadas sobre as funções $\delta_{\bar{A}}$, \bar{f} e \bar{g} em (2.26), veremos que depois de um blow-up polar o sistema obtido terá conjunto de impasse regular. Trata-se de uma forma de regularizar os pontos do conjunto de impasse que não são regulares. No intuito de dar este resultado, as seguintes hipóteses são assumidas.

(H1) As funções $\delta_{\bar{A}}$, \bar{f} e \bar{g} em (2.26) são polinômios homogêneos de grau d , n e m , respectivamente, nas variáveis x , y . Assumimos que $m \geq d + 1$;

(H2) Considere a equação $\delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta) = 0$. Suponhamos que nos pontos θ satisfazendo esta equação temos

$$\cos \theta \frac{\partial \delta_{\bar{A}}}{\partial y}(\cos \theta, \sin \theta) \neq \sin \theta \frac{\partial \delta_{\bar{A}}}{\partial x}(\cos \theta, \sin \theta).$$

A hipótese **(H1)** assegura que $(0, 0)$ é um ponto singular do campo de vetores (\bar{f}, \bar{g}) e que o conjunto de impasse de (2.26) é uma curva algébrica em \mathbb{R}^2 .

Teorema C. *Suponhamos que $(0, 0)$ é um ponto de impasse não-regular do sistema de classe C^r (2.26). Assumimos que as hipóteses **(H1)** e **(H2)** são cumpridas. Então existe um sistema forçado*

$$B(\xi)\dot{\xi} = G(\xi), \quad \text{onde } \xi = (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1, \quad (2.27)$$

que é localmente C^r orbitalmente equivalente ao sistema (2.26) e tal que o conjunto de impasse $\delta_B(r, \theta) = 0$ é regular.

Demonstração. Considere o blow up polar de coordenadas dado por $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, isto é, considere a aplicação $\phi : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. A aplicação ϕ é um difeomorfismo C^∞ , portanto uma genuína mudança

de coordenadas C^∞ sobre $S^1 \times (0, \infty)$, mas não sobre $\{r = 0\}$; ϕ envia $\{r = 0\}$ a $(0, 0)$, e como tal, a aplicação inversa ϕ^{-1} explode a origem em um círculo.

Substituindo estas coordenadas no sistema (2.26) obtemos o seguinte sistema forçado definido sobre o cilindro $\mathbb{R}^+ \times S^1$

$$\bar{a}(r, \theta)\dot{r} + \bar{b}(r, \theta)\dot{\theta} = \bar{f}(r, \theta), \quad \bar{c}(r, \theta)\dot{r} + \bar{d}(r, \theta)\dot{\theta} = \bar{g}(r, \theta), \quad (2.28)$$

onde $\bar{a}(r, \theta) = \cos \theta$, $\bar{b}(r, \theta) = -r \sin \theta$, $\bar{c}(r, \theta) = \delta_{\bar{A}}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta$, $\bar{d}(r, \theta) = r \delta_{\bar{A}}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta$, $\bar{f}(r, \theta) = \bar{f}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $\bar{g}(r, \theta) = \bar{g}(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Aplicando operações elementares no sistema (2.28) obtemos o sistema equivalente $(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})\dot{r} = \bar{f}\bar{d} - \bar{g}\bar{b}$, $(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})\dot{\theta} = \bar{g}\bar{a} - \bar{f}\bar{c}$. Assim

$$r \delta_{\bar{A}} \dot{r} = r(\delta_{\bar{A}} \bar{f} \cos \theta + \bar{g} \sin \theta), \quad r \delta_{\bar{A}} \dot{\theta} = \bar{g} \cos \theta - \delta_{\bar{A}} \bar{f} \sin \theta, \quad (2.29)$$

onde as funções $\delta_{\bar{A}}$, \bar{f} e \bar{g} são calculadas em $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Pela hipótese **(H1)** temos que

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{A}}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= r^d \delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta), \\ (\delta_{\bar{A}} \bar{f})(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \bar{g}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta &= r^k \tilde{h}(r, \theta), \\ \bar{g}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - (\delta_{\bar{A}} \bar{f})(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta &= r^k \tilde{\tilde{h}}(r, \theta), \end{aligned}$$

onde $k = d + n$ ou $k = m$. Substituindo as expressões acima em (2.29) obtemos

$$r^{d+1} \delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta) \dot{r} = r^{k+1} \tilde{h}(r, \theta), \quad r^{d+1} \delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta) \dot{\theta} = r^k \tilde{\tilde{h}}(r, \theta).$$

Como $k \geq d + 1$ (veja hipótese **(H1)**) obtemos um sistema na forma requerida (2.27), onde

$$B(r, \theta) = \begin{pmatrix} \delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta) & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta) \end{pmatrix}, \quad G(r, \theta) = \begin{pmatrix} \tilde{g}(r, \theta) \\ \tilde{\tilde{g}}(r, \theta) \end{pmatrix}.$$

Note que o conjunto de impasse de B é $\delta_B(r, \theta) = \delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta)$. Assim

$$\nabla \delta_B = \left(\frac{\partial \delta_B}{\partial r}, \frac{\partial \delta_B}{\partial \theta} \right) = \left(0, \cos \theta \frac{\partial \delta_{\bar{A}}}{\partial y}(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta \frac{\partial \delta_{\bar{A}}}{\partial x}(\cos \theta, \sin \theta) \right).$$

Pela hipótese **(H2)**, $\nabla \delta_B(r, \theta) \neq 0$ nos pontos (r, θ) onde $\delta_B(r, \theta) = 0$. Portanto o sistema obtido tem conjunto de impasse regular. ■

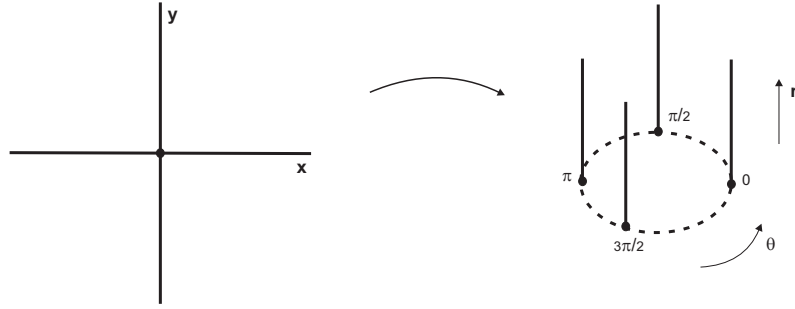


Figura 2.10: Conjuntos de impasse de (2.31) e (2.32).

Exemplo 5. O seguinte sistema forçado modela um circuito em série simples RLC

$$\begin{pmatrix} L(x) & 0 \\ 0 & C(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - g(x) \\ -x \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

onde L , C e g são funções suaves (para mais detalhes veja [19]). No caso $L = 1$ e $C = 1$, o sistema (2.30) é exatamente a equação de Liénard como uma equação de primeira ordem. Para $g(x) = \varepsilon(\frac{x^3}{3} - x)$ temos a equação de van der Pol.

Consideramos no sistema (2.30) as funções $L(x) = x$, $C(y) = y$, $g(x) = 0$ e $-x^3$ no lugar de $-x$. Então, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x^3 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Note que $(0, 0)$ é um ponto de impasse não-regular de (2.31). A hipótese **(H1)** é satisfeita. Também, a hipótese **(H2)** é satisfeita, visto que $\delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta$ e $\cos^2 \theta \neq \sin^2 \theta$ nos pontos (r, θ) onde $\delta_{\bar{A}}(\cos \theta, \sin \theta) = 0$. Pelo Teorema C, existe um sistema forçado da forma (2.27), que é localmente orbitalmente equivalente ao sistema (2.31) e tal que o conjunto de impasse $\delta_B(r, \theta) = 0$ é regular. De fato, o sistema obtido nas variáveis (r, θ) é

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos^2 \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ \cos \theta (\sin^3 \theta - \cos^3 \theta) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

A Figura 2.10 ilustra os conjuntos de impasse de (2.31) e (2.32), respectivamente.

Capítulo 3

Sistemas de Filippov Singularmente Perturbados

Assim como vimos no Capítulo 1, Fenichel em 1979 no artigo “*Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*” estudou sistemas de equações diferenciais ordinárias perturbadas singularmente

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^p, \quad y \in \mathbb{R}^{n-p},$$

com $\varepsilon \in \mathbb{R}$ um parâmetro pequeno. Vimos que as propriedades das soluções do sistema acima podem ser estudadas usando métodos geométricos da teoria de sistemas dinâmicos. Esta aproximação ficou conhecida como *TGPS–Teoria Geométrica das Perturbações Singulares*, e foi fundamentada por Fenichel em [10].

Neste capítulo pretendemos estender as ideias da teoria de Fenichel obtidas em [10] para sistemas de Filippov singularmente perturbados. Mais especificamente, nossa principal questão é saber como sistemas de Filippov são afetados por perturbações singulares? Assim, damos especial atenção para problemas de perturbação singular para o qual o fluxo lento é dado por um sistema de Filippov. Mais precisamente, consideramos sistemas de equações diferenciais da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{cases} F(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y, \varepsilon) \leq 0, \\ G(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y, \varepsilon) \geq 0, \end{cases} \\ \varepsilon \dot{y} &= H(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é um parâmetro pequeno, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$ denotam as variáveis lenta e rápida, respectivamente, e $F = (F_1, \dots, F_n)$, $G = (G_1, \dots, G_n)$, h e H são funções de classe C^r , com r grande o suficiente para nossos propósitos.

Por todo este capítulo estaremos supondo que a intersecção da variedade lenta

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : H(x, y, 0) = 0\}$$

com a variedade de descontinuidade

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : h(x, y, \varepsilon) = 0\}$$

acontece em posição geral, isto é, $\nabla H(p)$ e $\nabla h(p)$ são linearmente independentes para qualquer $p \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}$.

3.1 Descrição do problema

Os principais resultados deste capítulo refletem os resultados da teoria clássica da variedade invariante para sistemas dinâmicos suaves ([10]). Em geral, em sistemas dinâmicos suaves podemos dizer que qualquer fenômeno que persiste sobre perturbação regular (perturbações do lado direito) também persiste sobre perturbação singular. No intuito de descrever esta situação e os resultados deste capítulo, analisemos a Figura 3.1. Nesta figura temos desenhadas as variedades lenta e de descontinuidade arbitrárias em \mathbb{R}^3 em posição geral. A linha vermelha denota o conjunto $\{h = 0\} \cap \{H = 0\}$.

Suponha que $p_1 \in \{h < 0\}$ é um ponto singular normalmente hiperbólico do problema reduzido associado a (3.1) (neste caso, um ponto singular de $\dot{x} = F$ sobre $H = 0$). Então, o Teorema de Fenichel afirma que p_1 persiste como um ponto singular hiperbólico p_ε de (3.1) (neste caso, um ponto singular de $\dot{x} = F$, $\varepsilon \dot{y} = H$), para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Conclusões análogas podem ser obtidas se considerarmos qualquer variedade invariante normalmente hiperbólica \mathcal{N} localizada em $\{h > 0\}$ ou $\{h < 0\}$ (por exemplo o ponto singular p_2 ou as órbitas periódicas Γ_1 e Γ_2 na Figura 3.1).

Agora, considere um ponto singular $p_3 \in \{h = 0\} \cap \{H = 0\}$ do problema reduzido associado a (3.1) (isto é, um ponto singular do campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido de (3.1)). Neste caso, não podemos usar o Teorema de Fenichel

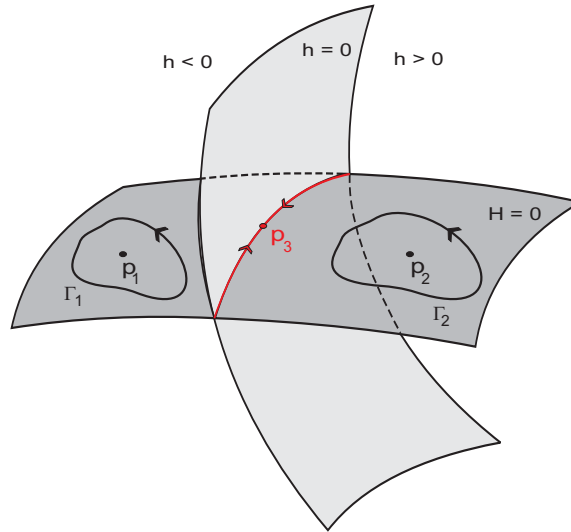


Figura 3.1: Exemplo de variedades lenta e de descontinuidade arbitrárias em \mathbb{R}^3 .

para dizer se p_3 persiste como um ponto singular p_ε do sistema de Filippov singularmente perturbado (3.1) para $\varepsilon > 0$ pequeno. Os principais resultados deste capítulo respondem esta questão.

3.2 Teoria da variedade invariante para sistemas de Filippov singularmente perturbados

Nesta seção afirmamos os principais resultados deste capítulo. No que segue, principalmente no que diz respeito aos exemplos e as demonstrações, distinguiremos os seguintes casos: a) quando a condição $\frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$ vale e b) caso contrário, ou seja, quando $\frac{\partial h}{\partial y} \neq 0$. Veremos que no primeiro caso, a teoria clássica de Fenichel para sistemas suaves singularmente perturbados poderá ser usada para estudar o modo de deslize em sistemas de Filippov singularmente perturbados (3.1) (veja Teorema D).

Quando estivermos tratando com o caso b), assumiremos também que a função H não depende da variável $x = (x_1, \dots, x_n)$, isto é, vamos supor que $\frac{\partial H}{\partial x} = (\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n}) = 0$. Neste caso, podemos considerar sem perda de generalidade que H é dada por $H(x, y, \varepsilon) = y$.

Para $\varepsilon = 0$ em (3.1) temos o *problema reduzido*

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x, y, 0) & \text{se } h(x, y, 0) \leq 0, \\ G(x, y, 0) & \text{se } h(x, y, 0) \geq 0, \end{cases} \quad 0 = H(x, y, 0). \quad (3.2)$$

Transformando (3.1) para a variável rápida $\tau := t/\varepsilon$ obtemos o *sistema rápido*

$$x' = \begin{cases} \varepsilon F(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y, \varepsilon) \leq 0, \\ \varepsilon G(x, y, \varepsilon) & \text{se } h(x, y, \varepsilon) \geq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$y' = H(x, y, \varepsilon).$$

Colocando $\varepsilon = 0$ em (3.3) temos o *problema layer*

$$x' = 0, \quad y' = H(x, y, 0). \quad (3.4)$$

Note que o fluxo lento definido por (3.2) é não-suave, enquanto que o fluxo rápido dado por (3.4) é suave. Para $\varepsilon > 0$ podemos expressar o sistema (3.1) na forma geral de um sistema de Filippov dada por (1.12), a saber

$$\dot{x} = \begin{cases} \left(F(x, y, \varepsilon), \frac{H(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) & \text{se } h(x, y, \varepsilon) \leq 0, \\ \left(G(x, y, \varepsilon), \frac{H(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) & \text{se } h(x, y, \varepsilon) \geq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Uma importante questão neste momento é saber como o efeito de perturbações singulares age sobre o modo de deslize, isto é, queremos saber se deslize persiste ou não sobre perturbações singulares. Em outras palavras, isso significa estudar o seguinte: se a condição de deslize é satisfeita para o problema reduzido (3.2), então ela também é satisfeita para o sistema de Filippov singularmente perturbado (3.1)? Analisemos agora esta questão.

Suponha que o modo de deslize ocorre para o problema reduzido (3.2). Neste caso, a condição que define deslize em um ponto $p \in \mathcal{M}$ é dada por

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p)F(p) > 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(p)G(p) < 0. \quad (3.6)$$

Lembre que o sistema reduzido (3.2) está definido apenas sobre \mathcal{S} .

Por outro lado, a condição de deslize para o sistema (3.1) em um ponto $q \in \mathcal{M}$ é dada por

$$\frac{\partial h}{\partial x}(q)F(q) + \frac{\partial h}{\partial y}(q)\frac{H(q)}{\varepsilon} > 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(q)G(q) + \frac{\partial h}{\partial y}(q)\frac{H(q)}{\varepsilon} < 0. \quad (3.7)$$

Levando em conta a continuidade das funções

$$\frac{\partial h}{\partial x} \cdot F + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{H}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial x} \cdot G + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{H}{\varepsilon}$$

definidas de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} , e a condição (3.6) segue que a condição (3.7) é satisfeita para todo $q \in \mathcal{M}$ em uma vizinhança de p .

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes.

Teorema D. *Suponha que $\frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$.*

(i) *O campo deslizante associado ao sistema de Filippov singularmente perturbado (3.5) é um sistema lento-rápido suave da forma*

$$\dot{x} = \alpha(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y} = H(x, y, \varepsilon), \quad (3.8)$$

onde α é uma aplicação de classe C^{r-1} .

(ii) *A dinâmica do problema reduzido de (3.8) dada por*

$$\dot{x} = \alpha(x, y, 0), \quad 0 = H(x, y, 0), \quad (3.9)$$

coincide com a dinâmica do campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido (3.2).

Por meio do rescalonamento no tempo $\tau = t/\varepsilon$ em (3.8) obtemos o *sistema rápido* equivalente

$$x' = \varepsilon \alpha(x, y, \varepsilon), \quad y' = H(x, y, \varepsilon). \quad (3.10)$$

Seja $M(x, y, \varepsilon) := (\varepsilon \alpha, H)$ o campo de vetores definido pelo sistema (3.10). Assumimos que a parte linear de M em pontos $(x, y, 0)$, onde $H(x, y, 0) = 0$, tem k^s autovalores com partes reais negativas e k^u autovalores com partes reais positivas. Note que em nosso caso

temos $k^s = 1$ e $k^u = 0$ ou $k^s = 0$ e $k^u = 1$. Isso é devido ao fato de que a variável rápida y é 1-dimensional. Note também que o problema layer associado ao sistema lento-rápido suave (3.8) (a saber, o sistema (3.10) com $\varepsilon = 0$) coincide com o problema layer (3.4) associado ao sistema lento-rápido Filippov (3.1).

Teorema E. *Considere uma família de classe C^r como em (3.1). Seja \mathcal{N} uma variedade invariante compacta normalmente hiperbólica de dimensão j do campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido (3.2) com uma variedade local estável W^s de dimensão $j + j^s$ e uma variedade local instável W^u de dimensão $j + j^u$. Então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que:*

- (i) *Existe uma família $\{\mathcal{N}_\varepsilon : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ de classe C^{r-1} tal que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ e \mathcal{N}_ε é uma variedade invariante hiperbólica de (3.1);*
- (ii) *Existem famílias $\{\mathcal{N}_\varepsilon^s : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ e $\{\mathcal{N}_\varepsilon^u : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ de classe C^{r-1} de dimensões $(j + j^s + k^s)$ e $(j + j^u + k^u)$, tais que para $\varepsilon > 0$ as variedades $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ e $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ são variedades locais estável e instável de \mathcal{N}_ε , respectivamente.*

Provaremos os Teoremas D e E na Seção 3.5.

Podemos concluir pelo Teorema E que, assim como acontece para sistemas suaves singularmente perturbados, variedades invariantes normalmente hiperbólicas do problema reduzido (3.2) persistem como variedades invariantes hiperbólicas do problema singularmente perturbado (3.1).

3.3 Exemplos com a hipótese $\frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$

Nesta seção apresentamos algumas aplicações dos Teoremas D e E, considerando casos onde a hipótese $\frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$ é cumprida.

Dizemos que o sistema de Filippov (1.12) é um **sistema não-elástico** se $\nabla h(x)F(x) = -\nabla h(x)G(x)$ para todo x . Note que neste caso o modo de deslize ocorre para todo x , e

a expressão do campo de vetores deslizante se simplifica a

$$f_s(x) = \frac{F(x) + G(x)}{\nabla h(x)F(x)}.$$

Nos exemplos abaixo temos que o fluxo lento é dado por um sistema não-elástico.

Exemplo 1. Considere o seguinte sistema de Filippov singularmente perturbado em \mathbb{R}^3

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \begin{cases} (1, -x_2) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (-1, -x_2) & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad \varepsilon \dot{y} = y. \quad (3.11)$$

Para $\varepsilon = 0$ em (3.11) temos o problema reduzido

$$\dot{x} = \begin{cases} (1, -x_2) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (-1, -x_2) & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad 0 = y. \quad (3.12)$$

O campo de vetores deslizante associado ao sistema descontínuo (3.12) é dado por $f_s(x_1, x_2) = (0, -x_2)$. Assim, a origem é um ponto singular de f_s .

Para $\varepsilon \neq 0$ podemos escrever o sistema (3.11) como em (3.5). O campo de vetores deslizante associado é dado pelo problema de perturbação singular

$$\dot{x}_2 = -x_2, \quad \varepsilon \dot{y} = y. \quad (3.13)$$

Note que o sistema (3.13) está definido sobre o plano $x_1 = 0$ e a dinâmica de f_s coincide com a dinâmica do problema reduzido de (3.13), $\dot{x}_2 = -x_2$, $0 = y$ (item (ii) do Teorema D). O rescalonamento no tempo $\tau = t/\varepsilon$ em (3.13) produz o sistema rápido $x'_2 = -\varepsilon x_2$, $y' = y$, e para $\varepsilon = 0$ temos o problema layer $x'_2 = 0$, $y' = y$. Os retratos de fase dos problemas reduzido e layer são dados na Figura 3.2. A linha vermelha nesta figura denota a intersecção da variedade lenta $\{y = 0\}$ com a variedade de descontinuidade $\{x_1 = 0\}$.

A Figura 3.3 ilustra o retrato de fase do problema de perturbação singular (3.13) para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. Podemos aplicar o Teorema E na origem. Neste ponto, o Teorema E assegura a existência de uma família \mathcal{P}_ε de pontos singulares hiperbólicos de (3.11) tal que $\mathcal{P}_0 = (0, 0, 0)$. Além disso, cada ponto \mathcal{P}_ε com $\varepsilon > 0$, possui uma variedade local estável P_ε^s de dimensão 1 e uma variedade local instável P_ε^u de dimensão 1. Também, para cada \mathcal{P}_ε com $\varepsilon < 0$, existe uma variedade local instável P_ε^u de dimensão 2.

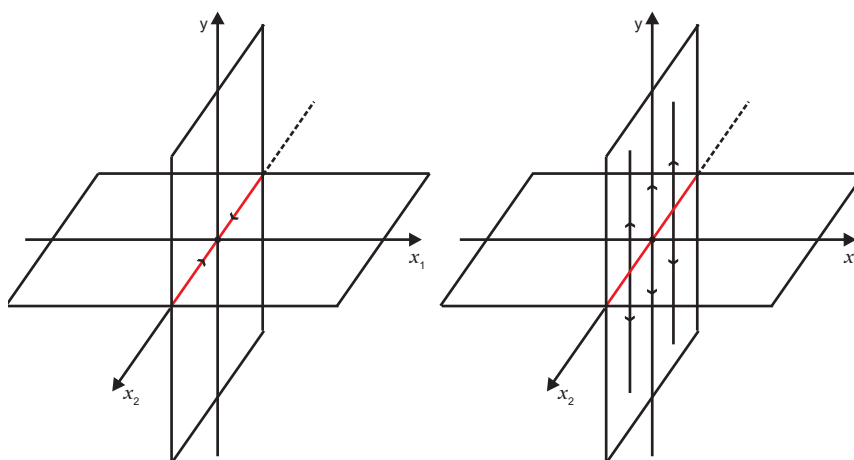


Figura 3.2: Retratos de fase dos problemas reduzido e layer de (3.13).

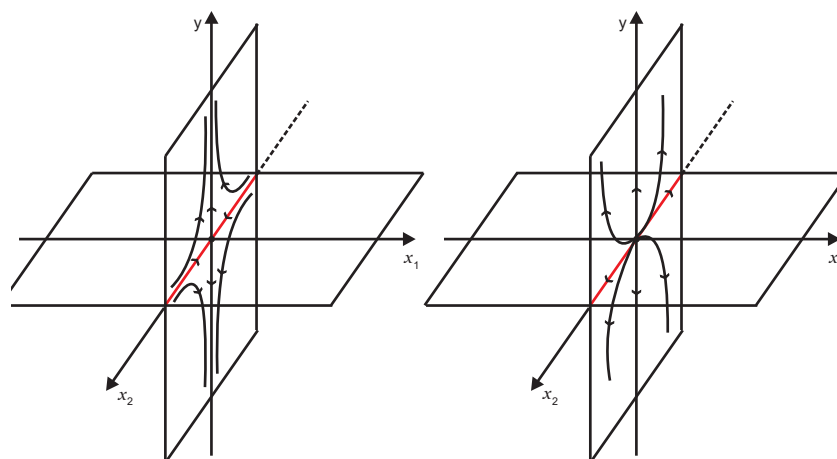


Figura 3.3: Retrato de fase de (3.13) para $\epsilon > 0$ e $\epsilon < 0$ pequenos.

Exemplo 2. Neste exemplo consideramos um sistema lento-rápido de Filippov em \mathbb{R}^4

$$\dot{x} = \begin{cases} (1, -2x_2(-1 + x_2^2 + x_3^2), -2x_3(-1 + x_2^2 + x_3^2)) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (-1, -2x_3, 2x_2) & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon \dot{y} = y.$$

Para $\varepsilon = 0$ o conjunto $\mathcal{S} = \{y = 0\}$ define a variedade lenta de (3.14), e sobre \mathcal{S} temos definido o sistema diferencial

$$\dot{x} = \begin{cases} (1, -2x_2(-1 + x_2^2 + x_3^2), -2x_3(-1 + x_2^2 + x_3^2)) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (-1, -2x_3, 2x_2) & \text{se } x_1 \geq 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

O campo de vetores deslizante associado ao sistema descontínuo (3.15) é dado por

$$f_s(x_1, x_2, x_3) = (0, \alpha_1(x_2, x_3), \alpha_2(x_2, x_3)),$$

onde

$$\alpha_1(x_2, x_3) = -x_3 - x_2(-1 + x_2^2 + x_3^2) \quad \text{e} \quad \alpha_2(x_2, x_3) = x_2 - x_3(-1 + x_2^2 + x_3^2).$$

Usando coordenadas polares $x_2 = r \cos \theta$ e $x_3 = r \sin \theta$, é fácil ver que o fluxo de f_s apresenta um ponto singular na origem e um ciclo limite estável Γ .

Considere $\varepsilon > 0$. Escrevemos o sistema (3.14) como em (3.5). O campo de vetores deslizante associado é dado pelo sistema lento-rápido suave

$$\dot{x}_2 = \alpha_1(x_2, x_3), \quad \dot{x}_3 = \alpha_2(x_2, x_3), \quad \varepsilon \dot{y} = y. \quad (3.16)$$

O sistema (3.16) está definido sobre o hiperplano $x_1 = 0$. Note que a dinâmica de f_s coincide com a dinâmica do problema reduzido de (3.16), $\dot{x}_2 = \alpha_1(x_2, x_3)$, $\dot{x}_3 = \alpha_2(x_2, x_3)$, $0 = y$. O rescalonamento no tempo $\tau = t/\varepsilon$ em (3.16) produz o sistema rápido $x'_2 = \varepsilon \alpha_1(x_2, x_3)$, $x'_3 = \varepsilon \alpha_2(x_2, x_3)$, $y' = y$ e para $\varepsilon = 0$ temos o problema layer $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$, $y' = y$. Os retratos de fase dos problemas reduzido e layer são dados na Figura 3.4.

Aplicando o Teorema E, obtemos para $\varepsilon > 0$ pequeno, famílias $\{\mathcal{P}_\varepsilon\}$ e $\{\Gamma_\varepsilon\}$ de pontos singulares e ciclos limites hiperbólicos de (3.14), respectivamente, tal que $\mathcal{P}_0 = 0$ e $\Gamma_0 = \Gamma$. Além disso, cada ponto singular \mathcal{P}_ε tem uma variedade local instável $\mathcal{P}_\varepsilon^u$ de dimensão 3, e cada ciclo limite Γ_ε tem uma variedade local estável Γ_ε^s de dimensão 3 e uma variedade local instável Γ_ε^u de dimensão 2.

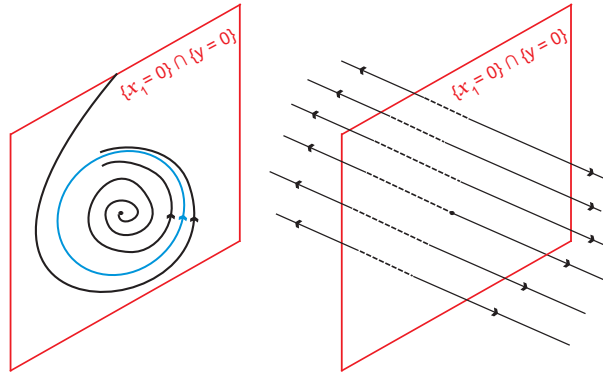


Figura 3.4: Retratos de fase dos problemas reduzido e layer de (3.16).

3.4 Exemplos com a hipótese $\frac{\partial h}{\partial y} \neq 0$

Nesta seção apresentamos dois exemplos de aplicações do Teorema E, considerando casos onde a condição $\frac{\partial h}{\partial y} \neq 0$ é cumprida.

Exemplo 3. Considere o seguinte sistema de Filippov singularmente perturbado em \mathbb{R}^3

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \begin{cases} (1, -x_2) & \text{se } x_1 + y \leq 0, \\ (-1, -x_2) & \text{se } x_1 + y \geq 0, \end{cases} \quad \varepsilon \dot{y} = y. \quad (3.17)$$

Para $\varepsilon = 0$ em (3.17) temos o problema reduzido

$$\dot{x} = \begin{cases} (1, -x_2) & \text{se } x_1 + y \leq 0, \\ (-1, -x_2) & \text{se } x_1 + y \geq 0, \end{cases} \quad 0 = y. \quad (3.18)$$

O campo de vetores deslizante associado ao sistema descontínuo (3.18) é dado por $\alpha(x_1, x_2) = (0, -x_2)$. Então, a origem é um ponto singular de α .

Para $\varepsilon > 0$, escrevemos o sistema (3.17) como em (3.5), assim obtemos

$$\dot{x} = \begin{cases} \left(1, -x_2, \frac{y}{\varepsilon}\right) & \text{se } x_1 + y \leq 0, \\ \left(-1, -x_2, \frac{y}{\varepsilon}\right) & \text{se } x_1 + y \geq 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Para o sistema (3.19) temos que a condição de deslize é cumprida se, e somente se, a condição $-\varepsilon < y < \varepsilon$ é satisfeita. Neste caso, o campo de vetores deslizante associado ao sistema (3.19) é dado por

$$f_s(x, y, \varepsilon) = \left(-\frac{y}{\varepsilon}, -x_2, \frac{y}{\varepsilon}\right).$$

Visto que o campo deslizante f_s está definido sobre a descontinuidade $x_1 + y = 0$, podemos escrevê-lo como

$$f_s(x, y, \varepsilon) = \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, -x_2, -\frac{x_1}{\varepsilon} \right).$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$ temos que $(0, 0, 0)$ é um ponto singular de f_s . Para cada $\varepsilon > 0$, a parte linear de f_s calculado na origem é dada por

$$Df_s(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de $Df_s(0, 0, 0)$ são 0 , $\frac{1}{\varepsilon}$ e -1 . Assim, para cada $\varepsilon > 0$, $(0, 0, 0)$ possui variedades locais estável e instável P_ε^s e P_ε^u de dimensões 1, respectivamente.

Exemplo 4. Neste exemplo consideramos um sistema lento-rápido de Filippov em \mathbb{R}^4

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{cases} (1, -2x_2(-1 + x_2^2 + x_3^2), -2x_3(-1 + x_2^2 + x_3^2)) & \text{se } x_1 + y \leq 0, \\ (-1, -2x_3, 2x_2) & \text{se } x_1 + y \geq 0, \end{cases} \quad (3.20) \\ \varepsilon \dot{y} &= y. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon = 0$ em (3.20), o conjunto $\mathcal{S} = \{y = 0\}$ define a variedade lenta de (3.20), e sobre \mathcal{S} temos definido o problema reduzido

$$\dot{x} = \begin{cases} (1, -2x_2(-1 + x_2^2 + x_3^2), -2x_3(-1 + x_2^2 + x_3^2)) & \text{se } x_1 + y \leq 0, \\ (-1, -2x_3, 2x_2) & \text{se } x_1 + y \geq 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

O campo de vetores deslizante associado ao sistema descontínuo (3.21) é dado por

$$f_s(x_1, x_2, x_3) = (0, \alpha_1(x_2, x_3), \alpha_2(x_2, x_3)),$$

onde

$$\alpha_1(x_2, x_3) = -x_3 - x_2(-1 + x_2^2 + x_3^2) \quad \text{e} \quad \alpha_2(x_2, x_3) = x_2 - x_3(-1 + x_2^2 + x_3^2).$$

Vimos na seção anterior que, usando coordenadas polares $x_2 = r \cos \theta$ e $x_3 = r \sin \theta$, o fluxo de f_s apresenta um ponto singular na origem e um ciclo limite estável Γ .

Para $\varepsilon > 0$, escrevemos o sistema (3.20) como em (3.5), assim obtemos

$$\dot{x} = \begin{cases} \left(1, -2x_2(-1 + x_2^2 + x_3^2), -2x_3(-1 + x_2^2 + x_3^2), \frac{y}{\varepsilon}\right) & \text{se } x_1 + y \leq 0, \\ \left(-1, -2x_3, 2x_2, \frac{y}{\varepsilon}\right) & \text{se } x_1 + y \geq 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Para o sistema (3.22), a condição de deslize é cumprida se, e somente se, a condição $-\varepsilon < y < \varepsilon$ é satisfeita. Nesta região temos definido o campo de vetores deslizante associado ao sistema (3.22). Sua expressão é dado por

$$f_s(x, y, \varepsilon) = \left[-\frac{y}{\varepsilon}, \left(1 - \frac{y}{\varepsilon}\right)\alpha_1 - 2x_3\frac{y}{\varepsilon}, \left(1 - \frac{y}{\varepsilon}\right)\alpha_2 + 2x_2\frac{y}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right].$$

Novamente, usando coordenadas polares $x_2 = r \cos \theta$ e $x_3 = r \sin \theta$, temos que as trajetórias de f_s são dadas pelas soluções do seguinte sistema diferencial

$$\dot{x}_1 = -\frac{y}{\varepsilon}, \quad \dot{r} = -\left(1 - \frac{y}{\varepsilon}\right)r(r^2 - 1), \quad \dot{\theta} = 1 + \frac{y}{\varepsilon}, \quad \dot{y} = \frac{y}{\varepsilon}. \quad (3.23)$$

O sistema (3.23) está definido na faixa $-\varepsilon < y < \varepsilon$. Isso implica as desigualdades

$$0 < 1 + \frac{y}{\varepsilon} < 2 \quad \text{e} \quad 0 < 1 - \frac{y}{\varepsilon} < 2.$$

Logo, $\dot{\theta}(t) > 0$ para todo t , ou seja, a componente angular é crescente. Além disso, temos

- $r = 0, y = 0$ corresponde a um ponto singular \mathcal{P}_ε , para cada $\varepsilon > 0$;
- $r = 1$ corresponde a um ciclo limite Γ_ε , para cada $\varepsilon > 0$;
- se $0 < r < 1$ então $r(t)$ é crescente;
- se $r > 1$ então $r(t)$ é decrescente.

Portanto concluímos que o ponto singular na origem e o ciclo limite Γ do campo deslizante associado ao problema reduzido persistem para $\varepsilon > 0$ pequeno. Além disso, cada ponto singular \mathcal{P}_ε tem uma variedade local instável $\mathcal{P}_\varepsilon^u$ de dimensão 3, e cada ciclo limite Γ_ε tem uma variedade local estável Γ_ε^s de dimensão 3 e uma variedade local instável Γ_ε^u de dimensão 2.

3.5 Demonstração dos Teoremas D e E

Nesta seção provamos os Teoremas D e E. Recordamos que os campos de vetores F e G em (3.1) tem componentes $F = (F_1, \dots, F_n)$ e $G = (G_1, \dots, G_n)$.

Demonstração do Teorema D. A prova será feita para o caso $n = 2$. O caso geral é similar. Temos que a expressão geral (1.13) para o campo de vetores deslizante associado ao sistema de Filippov singularmente perturbado (3.5) é dada por

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}) = f_s(x_1, x_2, y, \varepsilon) = \left(\frac{\frac{\partial h}{\partial x_2}(F_2 G_1 - F_1 G_2) + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{H}{\varepsilon}(G_1 - F_1)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(F_1 - G_1) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(F_2 - G_2)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(F_1 G_2 - F_2 G_1) + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{H}{\varepsilon}(G_2 - F_2)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(F_1 - G_1) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(F_2 - G_2)}, \frac{H}{\varepsilon} \right).$$

Visto que $\frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$ obtemos que as trajetórias do campo deslizante f_s são as soluções do sistema lento-rápido suave (3.8) onde a aplicação α de classe C^{r-1} é dada por

$$\alpha(x, y, \varepsilon) = \left(\frac{\frac{\partial h}{\partial x_2}(F_2 G_1 - F_1 G_2)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(F_1 - G_1) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(F_2 - G_2)}, \frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(F_1 G_2 - F_2 G_1)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(F_1 - G_1) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(F_2 - G_2)} \right).$$

Isso completa a prova do item (i).

Por outro lado é fácil ver que a expressão do campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido (3.2) é exatamente $\alpha(x, 0)$. Além disso, note que o sistema diferencial (3.2) está definido sobre a variedade lenta $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : H(x, y, 0) = 0\}$. Isso prova o item (ii). ■

Demonstração do Teorema E. Dividiremos a prova para os casos a) e b) mencionados anteriormente.

Começamos supondo que estamos no caso a), ou seja, vale a condição $\frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$. De acordo com o item (ii) do Teorema D temos que \mathcal{N} é uma variedade invariante compacta normalmente hiperbólica de dimensão j do problema reduzido (3.9) do sistema lento-rápido suave (3.8). Agora aplicamos a teoria de Fenichel para discutir as características de \mathcal{N} quando o sistema (3.1) é ε -perturbado. Deste modo as afirmativas (i) e (ii) do Teorema E seguem diretamente do Teorema 1.2.3.

Supomos agora que estamos no caso b), ou seja, podemos ter que $\frac{\partial h}{\partial y} \neq 0$. Lembre que neste caso estamos assumindo também que $H(x, y, \varepsilon) = y$. Por simplicidade suporemos que $n = 3$. O caso geral é similar. A expressão geral (1.13) para o campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido (3.2) é dada por

$$\alpha(x) = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial h}{\partial x_2} (F_2 G_1 - F_1 G_2) + \frac{\partial h}{\partial x_3} (F_3 G_1 - F_1 G_3), \frac{\partial h}{\partial x_1} (F_1 G_2 - F_2 G_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial h}{\partial x_3} (F_3 G_2 - F_2 G_3), \frac{\partial h}{\partial x_1} (F_1 G_3 - F_3 G_1) + \frac{\partial h}{\partial x_2} (F_2 G_3 - F_3 G_2) \right],$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $k = \frac{\partial h}{\partial x_1} (F_1 - G_1) + \frac{\partial h}{\partial x_2} (F_2 - G_2) + \frac{\partial h}{\partial x_3} (F_3 - G_3)$. Chamamos $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$. Começamos supondo que a variedade \mathcal{N} é um ponto singular normalmente hiperbólico p_0 de α com uma variedade local estável W^s de dimensão j^s e uma variedade local instável W^u de dimensão j^u .

Temos que a expressão geral (1.13) para o campo de vetores deslizante associado ao sistema de Filippov singularmente perturbado (3.5) é dada por

$$f_s(x, y, \varepsilon) = \left(\alpha_1 + \frac{y}{\varepsilon} \beta_1, \alpha_2 + \frac{y}{\varepsilon} \beta_2, \alpha_3 + \frac{y}{\varepsilon} \beta_3, \frac{y}{\varepsilon} \right),$$

onde $\beta_i(x, y) = \frac{1}{k} \frac{\partial h}{\partial y} (G_i - F_i)$, para $i = 1, 2, 3$.

Assim, note que para todo $\varepsilon > 0$ o ponto $p_\varepsilon = (p_0, 0, \varepsilon)$ é um ponto singular de f_s . A parte linear $Df_s(x, y, \varepsilon)$ de f_s em um ponto qualquer (x, y, ε) é dada por

$$\left(\begin{array}{c|c} D\alpha(x) & \begin{matrix} (1/\varepsilon)\beta_1 \\ (1/\varepsilon)\beta_2 \\ (1/\varepsilon)\beta_3 \end{matrix} \\ \hline 0 & (1/\varepsilon) \end{array} \right) + \frac{y}{\varepsilon} D\beta(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3} & 0 \end{array} \right),$$

onde $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0)$. Visto que $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ temos que os autovalores de $Df_s(p_\varepsilon)$ são dados pelas raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \det(D\alpha(p_0) - \lambda)(1/\varepsilon - \lambda)$. Concluímos que para cada $\varepsilon > 0$, o ponto singular p_0 de (3.2) persiste com um ponto singular $p_\varepsilon = (p_0, 0, \varepsilon)$ de (3.1). Além disso, p_ε possui variedades $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ e $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ de dimensões $(j^s + k^s)$ e $(j^u + k^u)$, tal que para $\varepsilon > 0$ as variedades $\mathcal{N}_\varepsilon^s$ e $\mathcal{N}_\varepsilon^u$ são variedades locais estável e instável de p_ε , respectivamente.

Agora supomos que \mathcal{N} é uma órbita periódica normalmente hiperbólica $\Gamma : x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ de α . As dinâmicas próximas à órbita periódica Γ são descritas completamente por sua aplicação de retorno local (também chamada aplicação de Poincaré). Essa aplicação é definida seguindo o fluxo de uma pequena seção transversal à órbita periódica voltando sobre ela mesma. Assim, seja Σ uma seção transversal à órbita periódica Γ e $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a aplicação de retorno local correspondente. Seja $q \in \Sigma$ o ponto fixo de π o qual corresponde à órbita periódica Γ . A aplicação π captura o comportamento próximo à órbita Γ . Em resumo, sabemos que existem variedades locais estável e instável W^s e W^u de Γ com dimensões $j + j^s$ e $j + j^u$, respectivamente.

Para cada $\varepsilon > 0$ considere $\Gamma_\varepsilon = (x(t), 0, \varepsilon)$. Então é fácil ver que Γ_ε é uma órbita periódica de f_s , para todo $\varepsilon > 0$. Além disso, suas propriedades de estabilidade são completamente descritas pela aplicação de retorno local $\tilde{\pi} : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma \times I$ definida por $\tilde{\pi}(x, y, \varepsilon) = (\pi(x), y/\varepsilon)$, onde I é um intervalo contendo a origem em \mathbb{R} . O ponto fixo $(q, 0)$ de $\tilde{\pi}$ corresponde à órbita periódica Γ_ε , para cada $\varepsilon > 0$, e neste caso a conclusão do item (ii) do Teorema E segue diretamente pelas observações feitas acima. ■

Capítulo 4

Sistemas Forçados Descontínuos

Neste capítulo aplicaremos os resultados obtidos no capítulo anterior para estudar o modo de deslize em sistemas forçados não-suaves próximos ao conjunto de impasse. Usaremos ideias similares aquelas desenvolvidas no Capítulo 2 no intuito de estabelecer conexões entre a teoria de sistemas forçados descontínuos e a teoria de sistemas de Filippov singularmente perturbados.

4.1 Contextualização

Assim como vimos no Capítulo 1, sistemas diferenciais forçados aparecem de um modo natural em um grande número de problemas físicos, principalmente na Teoria de Circuitos Elétricos (veja [17] por exemplo). Um importante assunto é a caracterização matemática de sistemas forçados em uma colocação não-suave. Mais especificamente, isso significa considerar um sistema diferencial da forma

$$A(x)\dot{x} = Z(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

onde o campo de vetores Z é um sistema de Filippov do tipo (1.12).

Agora no sistema (4.1) temos dois ingredientes principais: o *conjunto de impasse*

$$\mathcal{I}_A = \{x \in \mathbb{R}^n : \det A(x) = 0\},$$

e o *conjunto de descontinuidade*

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$$

do campo de vetores Z . Aqui vamos supor que a intersecção entre \mathcal{I}_A e \mathcal{M} sempre acontece em posição geral.

O estudo da dinâmica do sistema (4.1) em vizinhanças de pontos da intersecção de \mathcal{I}_A e \mathcal{M} é o principal objetivo deste capítulo. Mais especificamente, consideraremos famílias a um-parâmetro de sistemas forçados tendo a forma

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x, y) & \text{se } h(x, y) \leq 0, \\ G(x, y) & \text{se } h(x, y) \geq 0, \end{cases} \quad [\lambda - z(x, y)]\dot{y} = H(x, y), \quad \dot{\lambda} = 0, \quad (4.2)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ e $F = (F_1, \dots, F_n)$, $G = (G_1, \dots, G_n)$, h , z e H são funções de classe C^r , com r grande o suficiente para nossos propósitos. Nosso principal objetivo é descrever o comportamento da família (4.2) em pontos da variedade de descontinuidade $\{h = 0\}$ e próximos ao conjunto de impasse $\lambda = z(x, y)$, ou seja, estudaremos a dinâmica do campo de vetores deslizante associado à família (4.2) próximos ao conjunto de impasse.

Lembre que no Capítulo 2 estudamos questão similar a esta para famílias de sistemas forçados suaves dadas por

$$\dot{x} = \alpha(x, y), \quad [\lambda - z(x, y)]\dot{y} = \beta(x, y), \quad \dot{\lambda} = 0.$$

Neste caso a Teoria de Fenichel foi crucial para o desenvolvimento dos principais resultados do Capítulo 2. Neste capítulo usaremos a teoria desenvolvida no Capítulo 3 para obter alguns resultados sobre a dinâmica do campo de vetores deslizante associado à família (4.2) ao redor de um ponto $(x, y, \lambda) \in \mathcal{I}_A$.

4.2 Afirmação dos principais resultados

Os próximos dois resultados generalizam os Teoremas A e B do Capítulo 2.

Teorema F. *Seja $X_\lambda(x, y)$ um sistema de classe C^r definido por (4.2), com $r \geq 1$.*

Considere o sistema de Filippov singularmente perturbado

$$\dot{x} = \begin{cases} \varepsilon F(x, y) & \text{se } h(x, y) \leq 0, \\ \varepsilon G(x, y) & \text{se } h(x, y) \geq 0, \end{cases} \quad \dot{y} = H(x, y), \quad \dot{\varepsilon} = 0. \quad (4.3)$$

O difeomorfismo K de classe C^r dado por

$$K(x, y, \varepsilon) = (x, y, \varepsilon - z(x, y))$$

leva órbitas do campo de vetores deslizante associado a (4.3) com $\varepsilon > 0$ sobre órbitas de $X_\lambda(x, y)$ próximas ao conjunto de impasse e sobre a variedade de descontinuidade $\{h = 0\}$.

Por meio do rescalonamento no tempo $\tau = t/\varepsilon$ em (4.3) obtemos o sistema lento

$$\dot{x} = \begin{cases} F(x, y) & \text{se } h(x, y) \leq 0, \\ G(x, y) & \text{se } h(x, y) \geq 0, \end{cases} \quad \varepsilon \dot{y} = H(x, y), \quad \dot{\varepsilon} = 0. \quad (4.4)$$

Seja $M(x, y) := (0, \dots, 0, H, 0)$ o campo de vetores definido pelo problema layer associado a (4.3). Assumimos que a parte linear de M em pontos $(x, y, 0)$, onde $H(x, y) = 0$, tem k^s e k^u autovalores com partes reais negativas e positivas, respectivamente.

A definição abaixo é similar a Definição 2.1.2 só que agora no contexto de sistemas forçados descontínuos.

Definição 4.2.1. Considere $X_\lambda(x, y)$ um sistema definido por (4.2). Suponha que $p_0 = (x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathcal{I}_A$ é tal que $H(x_0, y_0) = 0$. Dizemos que $X_\lambda(x, y)$ é ***y*-simples** em p_0 se $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. O sistema $X_\lambda(x, y)$ é ***y*-simples** em $K \subseteq \mathcal{I}_A$ se ele o é para qualquer $p_0 \in K$.

O próximo resultado estuda a persistência e a estabilidade de subconjuntos compactos *y*-simples da intersecção de \mathcal{I}_A e \mathcal{M} . Nele exibimos condições para a existência de variedades invariantes, como por exemplo pontos singulares e órbitas periódicas, do campo deslizante associado à família $X_\lambda(x, y)$ na vizinhança do conjunto de impasse, com suas respectivas estabilidades. Podemos enxergar este resultado como uma versão similar, para sistemas forçados não-suaves, do Teorema E obtido no Capítulo 3.

Teorema G. *Sejam $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{I}_A \cap \mathcal{M}$ uma variedade compacta y -simples j -dimensional e $\mathcal{P}_0 \subseteq \{(x, y) : H(x, y) = 0\}$ o conjunto invariante correspondente do sistema de Filippov singularmente perturbado (4.3) obtido do Teorema F. Suponha que \mathcal{P}_0 tem uma variedade local estável W^s de dimensão $(j + j^s)$ e uma variedade local instável W^u de dimensão $(j + j^u)$ para o campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido definido por (4.4) com $\varepsilon = 0$. Então*

1. *Existe $\lambda_1 > 0$ e uma família $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)\}$ de classe C^{r-1} tais que \mathcal{A}_λ é uma variedade invariante hiperbólica para o campo de vetores deslizante associado ao campo de vetores adjunto $Z^* = A^*Z$, para todo $\lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)$;*
2. *Existem famílias $\{\mathcal{A}_\lambda^s : \lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)\}$ e $\{\mathcal{A}_\lambda^u : \lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)\}$ de classe C^{r-1} de dimensões $(j + j^s + k^s)$ e $(j + j^u + k^u)$, tais que as variedades \mathcal{A}_λ^s e \mathcal{A}_λ^u são variedades locais estável e instável de \mathcal{A}_λ , respectivamente, para todo $\lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)$.*

4.3 Demonstração dos Teoremas F e G

Nesta seção provaremos os Teoremas F e G.

Demonstração do Teorema F. Considere a mudança de variáveis

$$X_1 = x_1, \quad \dots, \quad X_n = x_n, \quad Y = y, \quad \varepsilon = \lambda - z(x_1, \dots, x_n, y). \quad (4.5)$$

Temos que o determinante Jacobiano da mudança (4.5) é igual a 1. O sistema dado em (4.2) toma a forma

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varepsilon}) = \begin{cases} (\varepsilon F, H, -\varepsilon(z_{X_1} F_1 + \dots + z_{X_n} F_n) - z_Y H) & \text{se } h(x, y) \leq 0, \\ (\varepsilon G, H, -\varepsilon(z_{X_1} G_1 + \dots + z_{X_n} G_n) - z_Y H) & \text{se } h(x, y) \geq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Assim para valores pequenos de ε o ponto (x, y, λ) está suficientemente próximo do ponto $(x, y, z(x, y))$ da hipersuperfície de impasse.

Considerando $\dot{\varepsilon} = 0$ em (4.6) obtemos um sistema de Filippov singularmente perturbado (4.3). A aplicação K de classe C^r dada por

$$K(x, y, \varepsilon) = (x, y, \varepsilon - z(x, y))$$

leva órbitas do campo de vetores deslizante associado ao sistema (4.3) em órbitas do campo de vetores deslizante associado ao sistema (4.6). De fato, note que os sistemas descontínuos (4.3) e (4.6) definem a mesma região de deslize.

Na continuação da demonstração, suporemos por simplicidade que $n = 2$. O caso geral é similar. A expressão geral (1.13) para o campo de vetores deslizante associado ao sistema (4.3) é dada por

$$\alpha(x, y, \varepsilon) = (\varepsilon\alpha_1(x, y, \varepsilon), \varepsilon\alpha_2(x, y, \varepsilon), H(x, y), 0),$$

onde

$$\alpha_1(x, y, \varepsilon) = \frac{1}{k} \left[\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x_2} (F_2 G_1 - F_1 G_2) + H \frac{\partial h}{\partial y} (G_1 - F_1) \right],$$

$$\alpha_2(x, y, \varepsilon) = \frac{1}{k} \left[\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x_1} (F_1 G_2 - F_2 G_1) + H \frac{\partial h}{\partial y} (G_2 - F_2) \right]$$

e $k = \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x_1} (F_1 - G_1) + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x_2} (F_2 - G_2)$. Por outro lado, a expressão geral (1.13) para o campo de vetores deslizante associado ao sistema (4.6) é

$$\beta(x, y, \varepsilon) = (\varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, H, -\varepsilon(z_{X_1}\alpha_1 + z_{X_2}\alpha_2) - z_Y H).$$

Os campos de vetores α e β são similares aos campos de vetores W e Y obtidos na prova do Teorema A do Capítulo 2, respectivamente. Portanto, o estudo feito na demonstração do Teorema A pode ser aplicado para os campos de vetores α e β . Isso completa a prova do Teorema F. ■

Demonstração do Teorema G. Para fixar ideias supomos que $j = 0$. Aplicando o Teorema E para o ponto singular normalmente hiperbólico $\mathcal{P} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, 0)$ do campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido (sistema (4.4) com $\varepsilon = 0$) obtemos $\varepsilon_1 > 0$ satisfazendo o seguinte.

1. Existe uma família $\{\mathcal{P}_\varepsilon : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ de classe C^{r-1} tal que $\mathcal{P}_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, 0)$ e \mathcal{P}_ε é um ponto singular hiperbólico do campo de vetores deslizante associado a (4.3);
2. Existem famílias $\{\mathcal{P}_\varepsilon^s : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ e $\{\mathcal{P}_\varepsilon^u : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ de classe C^{r-1} de dimensões $(j^s + k^s)$ e $(j^u + k^u)$, tais que as variedades $\mathcal{P}_\varepsilon^s$ e $\mathcal{P}_\varepsilon^u$ são variedades locais estável e instável de \mathcal{P}_ε , respectivamente, para todo $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$.

Temos que pontos singulares \mathcal{P}_ε do campo de vetores deslizante associado a (4.3) são enviados a pontos singulares \mathcal{A}_λ de (4.2) (isto é, pontos singulares do campo de vetores deslizante associado a A^*Z) próximos da hipersuperfície de impasse \mathcal{I}_A . Além disso, as propriedades de estabilidade são preservadas. Assim, para cada variedade local estável $\mathcal{P}_\varepsilon^s$ de dimensão $(j^s + k^s)$ e para cada variedade local instável $\mathcal{P}_\varepsilon^u$ de dimensão $(j^u + k^u)$ de \mathcal{P}_ε , correspondem variedades \mathcal{A}_λ^s e \mathcal{A}_λ^u de dimensões $(j^s + k^s)$ e $(j^u + k^u)$, tais que \mathcal{A}_λ^s e \mathcal{A}_λ^u são variedades locais estável e instável de \mathcal{A}_λ , respectivamente, para todo $\lambda \in (-\lambda_1, \lambda_1)$.

■

4.4 Aplicações dos resultados

Nesta seção damos alguns exemplos de aplicações dos Teoremas F e G.

Exemplo 1. Considere a seguinte família a um-parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ de sistemas forçados não-suaves em \mathbb{R}^3

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \begin{cases} (1, -x_2) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (-1, -x_2) & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad [x_1 + x_2 + y - \lambda]\dot{y} = y, \quad \dot{\lambda} = 0. \quad (4.7)$$

O conjunto de impasse \mathcal{I}_A de (4.7) é definido pelo equação $\lambda = x_1 + x_2 + y$. Já o conjunto de descontinuidade \mathcal{M} é definido por

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, y, \lambda) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0\}.$$

Na Figura 4.1 temos ilustrado o nível $\lambda = 0$ da hipersuperfície de impasse e a projeção na última variável do conjunto de descontinuidade. A linha vermelha nesta figura denota a intersecção de \mathcal{I}_A e \mathcal{M} .

De acordo com o Teorema F, depois de aplicar a mudança de variáveis

$$(X_1, X_2, Y) = (x_1, x_2, y) \quad \text{e} \quad \varepsilon = x_1 + x_2 + y - \lambda,$$

poderemos tirar conclusões para (4.7) através do seguinte sistema de Filippov singularmente perturbado

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \begin{cases} (1, -x_2) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (-1, -x_2) & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad \varepsilon\dot{y} = y, \quad \dot{\varepsilon} = 0. \quad (4.8)$$

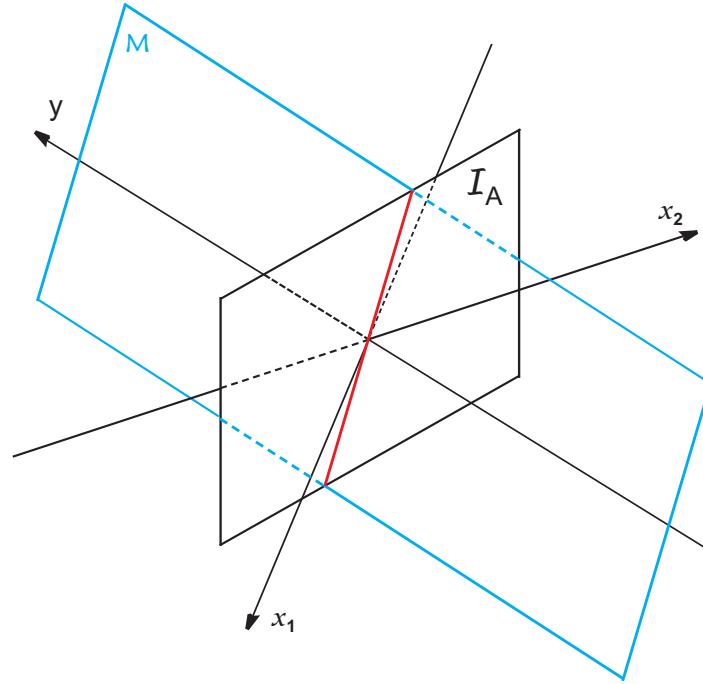


Figura 4.1: Nível $\lambda = 0$ da hipersuperfície de impasse e a λ -projeção da variedade de descontinuidade de (4.7).

O sistema (4.8) foi estudado no exemplo 1 do Capítulo 3. O retrato de fase do campo de vetores deslizante associado a (4.8) foi dado na Figura 3.3. Vimos neste exemplo que o campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido de (4.8) possui a origem como um ponto singular.

Escrevendo o sistema (4.7) como em (4.1) temos que o campo de vetores adjunto A^*Z é dado por

$$A^*Z(x_1, x_2, y, \lambda) = \begin{cases} (x_1 + x_2 + y - \lambda, -x_2(x_1 + x_2 + y - \lambda), y, 0) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (\lambda - x_1 - x_2 - y, -x_2(x_1 + x_2 + y - \lambda), y, 0) & \text{se } x_1 \geq 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

De acordo com a Definição 4.2.1, todos os pontos do conjunto de impasse $\lambda = x_1 + x_2 + y$ tais que $y = 0$ são y -simples. Podemos aplicar o Teorema G na origem. Ao redor deste ponto, o teorema assegura a existência da curva $\gamma(\lambda) = (0, 0, 0, -\lambda)$ e tal que, para cada λ fixado, $(0, 0, 0, -\lambda)$ é um ponto singular para o campo de vetores deslizante

$$f_s(x_1, x_2, y, \lambda) = (0, -x_2(x_2 + y - \lambda), y, 0)$$

associado ao campo de vetores adjunto A^*Z dado por (4.9). Além disso, cada ponto $(0, 0, 0, -\lambda)$ com $\lambda > 0$, possui uma variedade local estável \mathcal{P}_λ^s de dimensão 1 e uma

variedade local instável \mathcal{P}_λ^u de dimensão 1. Também, para cada $(0, 0, 0, -\lambda)$ com $\lambda < 0$, existe uma variedade local instável \mathcal{P}_λ^u de dimensão 2.

Exemplo 2. Neste exemplo consideramos uma família de sistemas forçados não-suaves em \mathbb{R}^4 dada por

$$\dot{x} = \begin{cases} (1, f_1(x), f_2(x)) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (-1, -2x_3, 2x_2) & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad [x_1 + x_2 + x_3 + y - \lambda]\dot{y} = y, \quad \dot{\lambda} = 0, \quad (4.10)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e

$$f_1(x) = -2x_2(-1 + x_2^2 + x_3^2) \quad \text{e} \quad f_2(x) = -2x_3(-1 + x_2^2 + x_3^2).$$

De acordo com o Teorema F, aplicando a mudança de variáveis

$$(X_1, X_2, X_3, Y) = (x_1, x_2, x_3, y) \quad \text{e} \quad \varepsilon = x_1 + x_2 + x_3 + y - \lambda,$$

poderemos tirar conclusões para (4.10) através do sistema de Filippov singularmente perturbado

$$\dot{x} = \begin{cases} (1, f_1(x), f_2(x)) & \text{se } x_1 \leq 0, \\ (-1, -2x_3, 2x_2) & \text{se } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad \varepsilon\dot{y} = y, \quad \dot{\varepsilon} = 0. \quad (4.11)$$

O sistema (4.11) foi estudado no exemplo 2 do Capítulo 3. Vimos neste exemplo que o campo de vetores deslizante associado ao problema reduzido de (4.11) apresenta um ponto singular na origem e um ciclo limite estável Γ .

Pela Definição 4.2.1, todos os pontos do conjunto de impasse $\lambda = x_1 + x_2 + x_3 + y$ tais que $y = 0$ são y -simples. Aplicando o Teorema G, obtemos para λ pequeno, famílias $\{\mathcal{P}_\lambda\}$ e $\{\Gamma_\lambda\}$ de pontos singulares e ciclos limites do campo de vetores deslizante associado ao campo de vetores adjunto A^*Z , respectivamente, tais que $\mathcal{P}_0 = 0$ e $\Gamma_0 = \Gamma$. Além disso, cada ponto singular \mathcal{P}_λ tem uma variedade local instável \mathcal{P}_λ^u de dimensão 3, e cada ciclo limite Γ_λ tem uma variedade local estável Γ_λ^s de dimensão 3 e uma variedade local instável Γ_λ^u de dimensão 2.

Capítulo 5

Ciclos Limites de Sistemas Forçados via Teoria Averaging

Um dos principais problemas na teoria qualitativa de equações diferenciais é identificar a existência e quantidade de ciclos limites. Um **ciclo limite** de um sistema diferencial é uma órbita periódica isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema. A restrição do problema acima para equações diferenciais polinomiais planares é o bem conhecido 16º problema de Hilbert. Outra direção de pesquisa que merece considerável atenção é estudar quantos ciclos limites bifurcam das órbitas periódicas de um centro diferencial linear quando perturbamos tal centro dentro de uma dada classe de equações diferenciais.

5.1 Colocação do problema e resultados principais

Neste capítulo investigamos a existência de órbitas periódicas de sistemas forçados que são perturbações de um centro diferencial linear. Mais especificamente consideramos a seguinte equação diferencial em \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = A_0 x, \tag{5.1}$$

onde A_0 é igual a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a origem de todo plano $x_k = \text{constante}$ para $k = 3, \dots, n$, é um centro global para (5.1), isto é, todas as órbitas contidas em tais planos diferentes da origem são periódicas com mesmo período 2π .

Nosso objetivo neste capítulo é estudar o número de ciclos limites que bifurcam das órbitas periódicas de (5.1) quando perturbamos tal equação dentro de uma classe de sistemas diferenciais lineares por partes com impasse, a saber

$$B(x, \varepsilon)\dot{x} = A_0x + \varepsilon F(x), \quad (5.2)$$

onde $|\varepsilon| \neq 0$ é um parâmetro real suficientemente pequeno, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é tal que $B(x, 0) = I_n$, e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado por $F(x) = Ax + \varphi(x_1)b$, com $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função linear por partes

$$\varphi(x_1) = \begin{cases} -1 & \text{se } x_1 \in (-\infty, -1), \\ x_1 & \text{se } x_1 \in [-1, 1], \\ 1 & \text{se } x_1 \in (1, \infty), \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. A variável independente é denotada por t . Aqui vamos supor que a matriz $B(x, \varepsilon)$ em (5.2) tem a seguinte expressão

$$B(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Para investigar este problema usaremos a *Teoria Averaging* na forma recentemente obtida em [1] (veja também apêndice 6 no final desta tese). A vantagem dos resultados

obtidos em [1] é que as hipóteses de suavidade para o campo de vetores do sistema diferencial são mínimas. Em particular, a diferenciabilidade do sistema não é exigida. Este método tem sido frequentemente usado para o cálculo de órbitas periódicas, assim como pode ser visto nos artigos [2], [3], [4], [5] e [12].

Chamamos de $G(x, \varepsilon) = A_0x + \varepsilon F(x)$ o campo de vetores definido em (5.2). No Capítulo 1 vimos que o retrato de fase do sistema forçado (5.2) coincide com o retrato de fase do seguinte campo de vetores descontínuo

$$\dot{x} = X(x, \varepsilon) = \begin{cases} B^*G(x, \varepsilon) & \text{se } \det B(x, \varepsilon) > 0, \\ -B^*G(x, \varepsilon) & \text{se } \det B(x, \varepsilon) < 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

onde recordamos que B^* denota a matriz adjunta de B caracterizada por $B^*B = BB^* = (\det B)I_n$.

Vimos também no Capítulo 1 que em [22] e [15], os autores introduziram um processo de regularização para estudar campos de vetores descontínuos. Aplicando tal processo de regularização (veja Definição 1.3.4) no sistema (5.5), obtemos a seguinte família a um-parâmetro $\alpha > 0$ de campos de vetores contínuos

$$\dot{x} = X_\alpha(x, \varepsilon) = \psi_\alpha(x_1)B^*G(x, \varepsilon), \quad (5.6)$$

onde ψ_α é a função linear por partes dada por

$$\psi_\alpha(x_1) = \begin{cases} -1 & \text{se } x_1 \in (-\infty, -1/\varepsilon - \alpha), \\ \frac{\varepsilon x_1 + 1}{\varepsilon \alpha} & \text{se } x_1 \in [-1/\varepsilon - \alpha, -1/\varepsilon + \alpha], \\ 1 & \text{se } x_1 \in (-1/\varepsilon + \alpha, 1/\varepsilon - \alpha), \\ \frac{1 - \varepsilon x_1}{\varepsilon \alpha} & \text{se } x_1 \in [1/\varepsilon - \alpha, 1/\varepsilon + \alpha], \\ -1 & \text{se } x_1 \in (1/\varepsilon + \alpha, +\infty). \end{cases}$$

O gráfico da função ψ_α é dado na Figura 5.1.

A fim de estudar o sistema (5.5) primeiro estudaremos o problema (5.6) e depois tenderemos $\alpha \rightarrow 0$.

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes.

Teorema 5.1.1. *Suponhamos que a expressão da matriz $B(x, \varepsilon)$ é como em (5.4). Então para cada $\alpha > 0$, no máximo um ciclo limite do sistema diferencial (5.6) bifurca das órbitas*

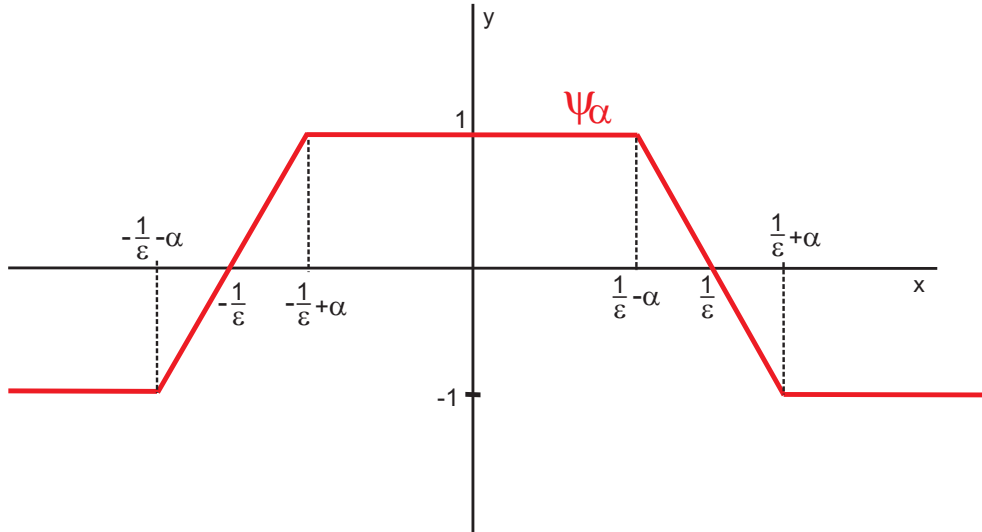


Figura 5.1: Gráfico da função ψ_α .

periódicas do sistema (5.1), sob expansão de primeira ordem da função deslocamento de (5.6) com relação ao parâmetro pequeno ε . Além disso existem sistemas (5.6) tendo exatamente um ciclo limite.

Corolário 5.1.2. *Suponha que $B(x, \varepsilon)$ é como em (5.4). Então no máximo um ciclo limite do sistema diferencial linear por partes com impasse (5.2) bifurca das órbitas periódicas do sistema (5.1), sob expansão de primeira ordem da função deslocamento de (5.2) com relação ao parâmetro pequeno ε . Além disso existem sistemas (5.2) tendo exatamente um ciclo limite.*

5.2 Provas do Teorema 5.1.1 e Corolário 5.1.2

O primeiro passo no estudo do sistema (5.6) é transformá-lo em um sistema o qual esteja na forma padrão para aplicar a teoria averaging. Mudando as variáveis (x_1, x_2, \dots, x_n) para $(\theta, r, x_3, \dots, x_n)$ usando $x_1 = r \cos \theta$ e $x_2 = r \sin \theta$, temos que o sistema (5.6) é transformado sobre um sistema da forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \psi_\alpha(r \cos \theta) \left[\varepsilon H_1(\theta, r, x_3, \dots, x_n) + O(\varepsilon^2) \right], \\ \dot{\theta} &= \psi_\alpha(r \cos \theta) \left[1 + \frac{\varepsilon}{r} (\cos \theta F_2 - \sin \theta F_1) + O(\varepsilon^2) \right], \\ \dot{x}_j &= \psi_\alpha(r \cos \theta) \left[\varepsilon H_{j-1}(\theta, r, x_3, \dots, x_n) + O(\varepsilon^2) \right], \quad \text{para } j = 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde

$$H_1 = \cos \theta F_1 + \operatorname{sen} \theta F_2,$$

$$H_j = a_{j1}r \cos \theta + a_{j2}r \operatorname{sen} \theta + b_j \varphi(r \cos \theta) + \sum_{k=3}^n a_{jk} x_k,$$

e temos que $F_1 = -r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta + G_1$, $F_2 = -r^2 \cos^2 \theta + G_2$ onde $G_i = a_{i1}r \cos \theta + a_{i2}r \operatorname{sen} \theta + \varphi(r \cos \theta) b_i + \sum_{k=3}^n a_{ik} x_k$, para $i = 1, 2$.

No intuito de estudar o sistema (5.7) primeiro estudaremos o retrato de fase de tal sistema sem o termo multiplicativo $\psi_\alpha(r \cos \theta)$, ou seja, consideramos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon H_1(\theta, r, x_3, \dots, x_n) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta F_2 - \operatorname{sen} \theta F_1) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{x}_j &= \varepsilon H_{j-1}(\theta, r, x_3, \dots, x_n) + O(\varepsilon^2), \quad \text{para } j = 3, \dots, n. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Note que o retrato de fase de (5.7) é o mesmo que o retrato de fase de (5.8) nas regiões onde $\psi_\alpha(r \cos \theta) > 0$. Nas regiões onde $\psi_\alpha(r \cos \theta) < 0$ temos que inverter a orientação das órbitas de (5.8). Quando $\psi_\alpha(r \cos \theta) = 0$ temos definido um conjunto de pontos singulares de (5.7).

Começamos agora o estudo do retrato de fase do sistema (5.8).

Note que para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno no sistema (5.8) temos que $\dot{\theta}(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos \theta F_2 - \operatorname{sen} \theta F_1) + O(\varepsilon^2) > 0$ para cada t quando $(\theta, r, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-2}$. Agora eliminamos a variável t no sistema (5.8) considerando θ como a nova variável independente. Depois de uma expansão com relação ao parâmetro pequeno ε obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon H_1(\theta, r, x_3, \dots, x_n) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dx_j}{d\theta} &= \varepsilon H_{j-1}(\theta, r, x_3, \dots, x_n) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{5.9}$$

para $j = 3, \dots, n$. Tomamos ε_0 suficientemente pequeno, m arbitrariamente grande e $D_m = (1/m, m)$. Então é fácil ver que o campo de vetores definido pelo sistema (5.9) está bem definido e é contínuo sobre $\mathbb{S}^1 \times D_m \times \mathbb{R}^{n-2} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Além disso tal campo de vetores é 2π -periódico com relação a variável independente θ e localmente Lipschitz com

relação a (r, x_3, \dots, x_n) . Aplicaremos a teoria averaging no sistema (5.9).

Nosso próximo passo é encontrar a função correspondente (6.2) (veja capítulo 6), ou seja, devemos calcular

$$h_j(r, x_3, \dots, x_n) = \int_0^{2\pi} H_j(\theta, r, x_3, \dots, x_n) d\theta, \quad (5.10)$$

para $j = 1, \dots, n - 1$.

A fim de calcular a expressão exata de h usaremos as seguintes fórmulas

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0.$$

Para cada $r > 0$ definimos

$$\begin{aligned} I_0(r) &= \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) d\theta, \\ I_1(r) &= \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) \cos \theta d\theta, \\ I_2(r) &= \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

onde φ é a função linear por partes dada por (5.3).

Lema 5.2.1. *As integrais I_0 , I_1 e I_2 satisfazem $I_0(r) = I_2(r) = 0$ para todo $r > 0$, e*

$$I_1(r) = \begin{cases} \pi r & \text{se } r \leq 1, \\ \pi r + \frac{2\sqrt{r^2 - 1}}{r} - 2r \arctan(\sqrt{r^2 - 1}) & \text{se } r > 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Demonstração – Sempre que $0 < r \leq 1$ temos que $|r \cos \theta| \leq 1$ e $|r \sin \theta| \leq 1$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Então $\varphi(r \cos \theta) = r \cos \theta$ para todo θ . Assim

$$\begin{aligned} I_0(r) &= r \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \\ I_1(r) &= r \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi r, \\ I_2(r) &= r \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

Fixamos agora $r > 1$ e considere $\theta_c \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos \theta_c = 1/r$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_0(r) &= \int_0^{\theta_c} d\theta + r \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \cos \theta d\theta - \int_{\pi-\theta_c}^{\pi+\theta_c} d\theta + \\
&\quad r \int_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} \cos \theta d\theta + \int_{2\pi-\theta_c}^{2\pi} d\theta, \\
I_1(r) &= \int_0^{\theta_c} \cos \theta d\theta + r \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \cos^2 \theta d\theta - \int_{\pi-\theta_c}^{\pi+\theta_c} \cos \theta d\theta + \\
&\quad r \int_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} \cos^2 \theta d\theta + \int_{2\pi-\theta_c}^{2\pi} \cos \theta d\theta, \\
I_2(r) &= \int_0^{\theta_c} \text{sen } \theta d\theta + r \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \text{sen } \theta \cos \theta d\theta - \int_{\pi-\theta_c}^{\pi+\theta_c} \text{sen } \theta d\theta + \\
&\quad r \int_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} \text{sen } \theta \cos \theta d\theta + \int_{2\pi-\theta_c}^{2\pi} \text{sen } \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Cálculos diretos levam às seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
I_0(r) &= 0, \\
I_1(r) &= \pi r + \frac{2}{r} \sqrt{r^2 - 1} - 2r \arctan \left(\sqrt{r^2 - 1} \right), \\
I_2(r) &= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\text{sen } \theta_c = \sqrt{r^2 - 1}/r$ e $\theta_c = \arctan \sqrt{r^2 - 1}$. ■

Em resumo, de (5.10) obtemos que

$$\begin{aligned}
h_1(r, x_3, \dots, x_n) &= \pi r a_{11} + b_1 I_1(r) + \pi r a_{22}, \\
h_{j-1}(r, x_3, \dots, x_n) &= 2\pi (a_{j3} x_3 + \dots + a_{jn} x_n),
\end{aligned} \tag{5.12}$$

para $j = 3, \dots, n$.

Agora vamos estudar a solubilidade do sistema $h_i(r, x_3, \dots, x_n) = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, onde as expressões das funções h_i são dadas por (5.12).

Proposição 5.2.2. *Suponhamos que*

- (i) *o determinante da matriz C obtida da matriz $A = (a_{ij})$ excluindo as primeiras duas linhas e as primeiras duas colunas seja diferente de zero (é claro que esta condição é somente exigida se $n > 2$), e*

$$(ii) \frac{(a_{11} + a_{22} + b_1)}{b_1} \in (0, 1), \text{ onde } b = (b_1, \dots, b_n)^T.$$

Então o sistema (5.9) para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno tem exatamente um ciclo limite bifurcando do círculo de raio r_0 centrado na origem do plano $x_3 = \dots = x_n = 0$, onde r_0 é a única solução no intervalo $(1, \infty)$ da equação

$$\arctan\left(\sqrt{r^2 - 1}\right) - \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2} = \frac{\pi(a_{11} + a_{22} + b_1)}{2b_1}.$$

Demonstração – A fim de que o sistema $h_i(r, x_3, \dots, x_n) = 0$ para $i = 1, \dots, n - 1$ tenha soluções isoladas – caso contrário o determinante Jacobiano sobre tais soluções torna-se zero e não podemos aplicar o Teorema 6.1.1 para estudar os ciclos limites do sistema (5.9) para $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno – é exigido, para $n > 2$, que o determinante da matriz C obtida da matriz A excluindo as primeiras duas linhas e as primeiras duas colunas seja diferente de zero. Então das equações $h_i(r, x_3, \dots, x_n) = 0$ para $i = 2, \dots, n - 1$ obtemos que $x_3 = \dots = x_n = 0$. Para $r > 1$, da equação $h_1(r, x_3, \dots, x_n) = 0$ obtemos

$$f(r) = \arctan\left(\sqrt{r^2 - 1}\right) - \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2} = \frac{\pi(a_{11} + a_{22} + b_1)}{2b_1}.$$

Note que a função $f : (1, \infty) \rightarrow (0, \pi/2)$ dada acima é um difeomorfismo. Assim temos que a Proposição 5.2.2 seguirá diretamente do Teorema 6.1.1 se o determinante Jacobiano

$$\det\left(\frac{\partial(h_1, \dots, h_{n-1})}{\partial(r, x_3, \dots, x_n)}\Big|_{(r, x_3, \dots, x_n) = (r_0, 0, \dots, 0)}\right) \neq 0, \quad (5.13)$$

onde r_0 é a única solução de $f(r_0) = \frac{\pi(a_{11} + a_{22} + b_1)}{2b_1} \in (0, \frac{\pi}{2})$. A expressão dada em (5.13) é igual a

$$\frac{2b_1 \det(C) \sqrt{r_0^2 - 1}}{\pi r_0^2},$$

e esta expressão é diferente de zero pois $r_0 > 1$ e estamos assumindo que $\det(C) \neq 0$ e $\frac{(a_{11} + a_{22} + b_1)}{2b_1} \in (0, \frac{1}{2})$. ■

Demonstração do Teorema 5.1.1. Denotamos por $\gamma(\cdot, \varepsilon)$ a família de ciclos do sistema (5.9) obtida na Proposição 5.2.2, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Sabemos pelo Teorema 6.1.1 que $\gamma(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0, 0, \dots, 0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Sabemos também que a função

$\psi_\alpha(x_1) > 0$ se, e somente se, $-\frac{1}{\varepsilon} < x_1 < \frac{1}{\varepsilon}$ e além disso, $-\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow -\infty$ e $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto podemos concluir que a família de ciclos $\gamma(\cdot, \varepsilon)$ do sistema (5.9) está localizada em regiões onde $\psi_\alpha > 0$. Segue que podemos tirar as mesmas conclusões para o sistema (5.7). Em resumo temos provado o Teorema 5.1.1. ■

Demonstração do Corolário 5.1.2. Como a solução encontrada $(r_0, 0, \dots, 0)$ do sistema $h_i(r, x_3, \dots, x_n) = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, não depende do parâmetro α concluímos que o Corolário 5.1.2 segue diretamente. ■

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Método averaging de primeira-ordem

O objetivo desta seção é apresentar o método averaging de primeira-ordem assim como foi obtido em [1]. Tal resultado apresenta hipóteses mais fracas do que, por exemplo, na versão clássica apresentada em [26], página 158, Teorema 11.5. A diferenciabilidade do campo de vetores não é necessária. As condições específicas para a existência de um zero simples da função averaged são dadas em termos do grau de Brouwer. De fato, o grau de Brouwer é um ponto chave na prova deste teorema. Lembre que a continuidade de uma função definida em um espaço de dimensão finita é uma condição suficiente para a existência do seu grau de Brouwer (veja [16] para definições precisas).

O próximo teorema está provado em [1].

Teorema 6.1.1. *Consideramos o seguinte sistema diferencial*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon H(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (6.1)$$

onde $H : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas na primeira variável, e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Definimos $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$h(z) = \int_0^T H(s, z) ds, \quad (6.2)$$

e assumimos que:

- (i) H e R são localmente Lipschitzianas com relação a x ;

(ii) para $a \in D$ com $h(a) = 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ e $d_B(h, V, 0) \neq 0$ (aqui $d_B(h, V, 0)$ denota o grau de Brouwer de h em 0).

Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica isolada $\psi(\cdot, \varepsilon)$ do sistema (6.1) tal que $\psi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Vamos precisar de alguns fatos da prova do Teorema 6.1.1. A hipótese (i) garante a existência e unicidade das soluções de cada problema de valor inicial sobre o intervalo $[0, T]$. Portanto, para cada $z \in D$, podemos denotar por $x(\cdot, z, \varepsilon)$ a solução de (6.1) com valor inicial $x(0, z, \varepsilon) = z$. Consideramos também a função deslocamento $\zeta : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\zeta(z, \varepsilon) = \int_0^T [\varepsilon H(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon)] dt. \quad (6.3)$$

Da prova do Teorema 6.1.1 extraímos os seguintes fatos.

Observação 6.1.1. Para todo $z \in D$ as seguintes relações valem

$$x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon) = \zeta(z, \varepsilon).$$

A função ζ pode ser escrita na forma

$$\zeta(z, \varepsilon) = \varepsilon h(z) + \varepsilon^2 O(1),$$

onde h é dada por (6.2) e o símbolo $O(1)$ denota uma função limitada sobre todo subconjunto compacto de $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. Além disso, para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, $z = \psi(0, \varepsilon)$ é um zero isolado de $\zeta(\cdot, \varepsilon)$.

Note que da Observação 6.1.1 segue que um zero z da função deslocamento $\zeta(z, \varepsilon)$ no tempo T fornece condições iniciais para uma órbita periódica do sistema de período T . Observamos também que $h(z)$ é a função deslocamento a menos dos termos de ordem ε . Consequentemente os zeros de $h(z)$, quando $h(z)$ não é identicamente zero, também fornece órbitas periódicas de período T .

Para um dado sistema existe a possibilidade de que a função ζ não seja globalmente diferenciável, mas a função h seja. De fato, somente a diferenciabilidade em alguma vizinhança de um zero fixo isolado de h poderia ser suficiente. Quando esse é o caso, podemos usar a seguinte observação a fim de verificar a hipótese (ii) do Teorema 6.1.1.

Observação 6.1.2. *Seja $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 , com $h(a) = 0$, onde D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $a \in D$. Sempre que a é um zero simples de h (isto é, o determinante Jacobiano $J_h(a)$ de h em a é diferente de zero), então existe uma vizinhança V de a tal que $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ e $d_B(h, V, 0) \in \{-1, 1\}$.*

Referências Bibliográficas

- [1] BUICA, A. E LLIBRE, J., **Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree**, Bull. Sci. Math. **128**, 7–22, 2004.
- [2] BUICA, A. E LLIBRE, J., **Bifurcation of limit cycles from a four-dimensional center in control systems**, International Jour. of Bifurcation and Chaos **15**, 2653–2662, 2005.
- [3] BUZZI, C.A., LLIBRE, J., MEDRADO, J.C. E TORREGROSA, J., **Bifurcation of limit cycles from a center in \mathbb{R}^4 in resonance $1 : N$** , Dynamical Systems: An International Jour. **24**, 123–137, 2009.
- [4] CARDIN, P.T., CARVALHO, T. E LLIBRE, J., **Bifurcation of limit cycles from a n -dimensional linear center inside a class of piecewise linear differential systems**, preprint, 2010.
- [5] CARDIN, P.T., CARVALHO, T. E LLIBRE, J., **Limit cycles of discontinuous piecewise linear differential systems**, preprint, 2010.
- [6] CARDIN, P.T., DA SILVA, P.R. E TEIXEIRA, M.A., **Implicit differential equations with impasse singularities and singular perturbation problems**, Israel Journal of Mathematics, 2010.
- [7] DI BERNARDO, M. ET AL, **Bifurcations in non-smooth dynamical systems**, Publications of the Bristol Centre for Applied Nonlinear Mathematics, N. 4, 2005.
- [8] DUMORTIER, F. E ROUSSARIE, R., **Canard cycles and center manifolds**, Mem-oirs Amer. Mat. Soc. **121**, 1996.

-
- [9] ECKHAUS, W., **Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks**, in Asymptotic Analysis II, Springer Lect. Notes in Math. **985**, 449-494, 1983.
- [10] FENICHEL, N., **Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations**, Jour. Diff. Equations **31**, 53–98, 1979.
- [11] FILIPPOV, A. F., **Differential equations with discontinuous righthand sides**, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [12] LLIBRE, J. E MAKHLOUF, A., **Bifurcation of limit cycles from a two-dimensional center inside \mathbb{R}^n** , Nonlinear Analysis **72**, 1387–1392, 2010.
- [13] LLIBRE, J. E SOTOMAYOR, J., **Structural stability of constrained polynomial systems**, Bull. London Math. Soc. **30**, 589–595, 1998.
- [14] LLIBRE, J., SOTOMAYOR, J. E ZHITOMIRSKII, M., **Impasse bifurcations of constrained systems**, Fields Inst. Commun., Lisbon, 2000, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [15] LLIBRE, J. E TEIXEIRA, M.A., **Regularization of discontinuous vector fields in dimension three**, Discrete Contin. Dynam. Systems **3**, 235–241, 1997.
- [16] LLOYD N. G., **Degree theory**, Cambridge University Press, 1978.
- [17] RABIER, P.J. E RHEINBOLDT, W.C., **On impasse points of quasilinear differential-algebraic equations**, Jour. Math. Anal. and Appl. **181**, 429–454, 1994.
- [18] SIEBER, J. E KOWALCZYK, P., **Small-scale instabilities in dynamical systems with sliding**, Physica D. Nonlinear Phenomena. **239**, 44–57, 2009.
- [19] SMALE, S., **On the mathematical foundation of electrical networks**, Jour. Differential Geometry **7**, 193–210, 1972.
- [20] SOTOMAYOR, J., **Lições de equações diferenciais ordinárias**, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

-
- [21] SOTOMAYOR, J., **Structurally stable differential systems of the form $A(x)x' = F(x)$** , Proceedings of Qualitative Theory of Planar Vector Fields, Delft, Differential Equations and Dynamical Systems **5**, 415–422, 1997.
- [22] SOTOMAYOR, J. E TEIXEIRA, M.A., **Regularization of discontinuous vector fields**, International Conference on Differential Equations, Lisboa, Equadiff 95, 207–223, 1996.
- [23] SOTOMAYOR, J. E ZHITOMIRSKII, M., **Impasse singularities of differential systems of the form $A(x)x' = F(x)$** , Jour. Diff. Equations **169**, n° 2, 567–587, 2001.
- [24] SZMOLYAN, P., **Transversal heteroclinic and homoclinic orbits in singular perturbation problems**, Jour. Diff. Equations **92**, 252–281, 1990.
- [25] TAKENS, F., **Constrained equations; a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions**, Lecture Notes in Mathematics **525**, Springer–Verlag, New York, 143–234, 1976.
- [26] VERHULST F., **Nonlinear differential equations and dynamical systems**, 2nd edition, Universitext, Springer, 1996.
- [27] ZHITOMIRSKII, M., **Local normal forms for constrained systems on 2-manifolds**, Bol. Soc. Bras. Mat. **24**, 211–232, 1993.