

JOÃO PAULO MAGNA JÚNIOR

**O USO DE *THIN-PLATE SPLINES* NA TRANSFORMAÇÃO DE
COORDENADAS COM MODELAGEM DE DISTORÇÕES
ENTRE REALIZAÇÕES DE REFERENCIAIS GEODÉSICOS**

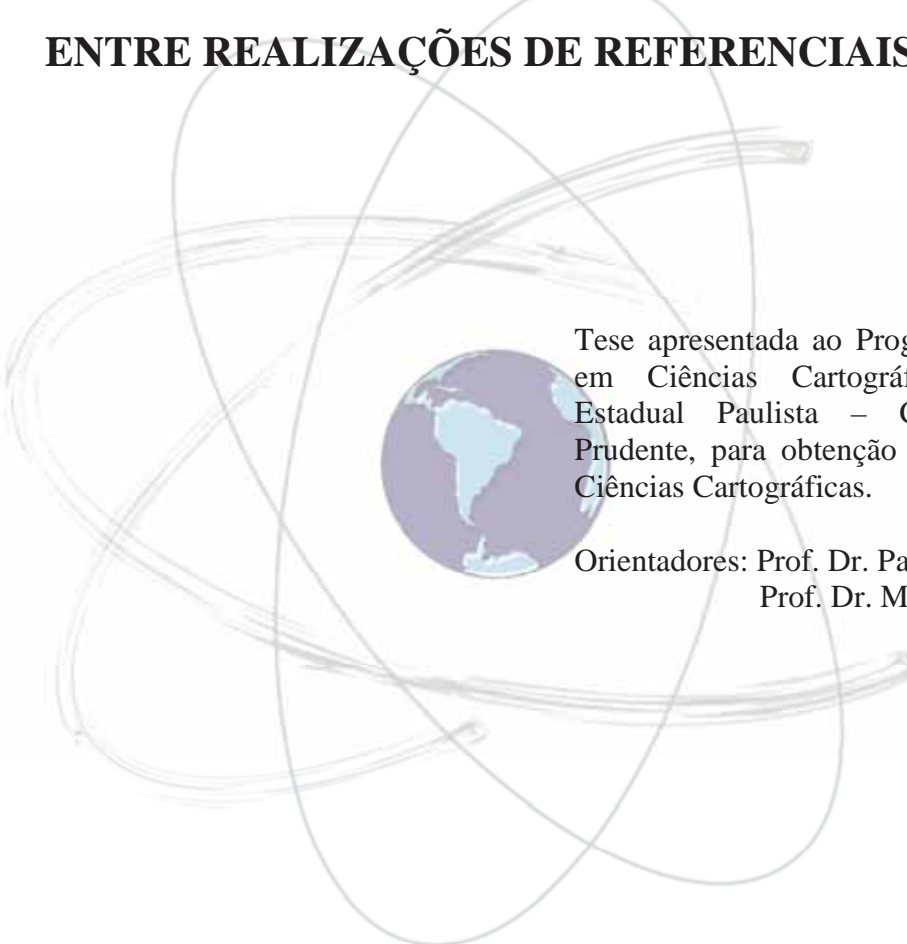


Presidente Prudente

2012

JOÃO PAULO MAGNA JÚNIOR

**O USO DE *THIN-PLATE SPLINES* NA TRANSFORMAÇÃO DE
COORDENADAS COM MODELAGEM DE DISTORÇÕES
ENTRE REALIZAÇÕES DE REFERENCIAIS GEODÉSICOS**



Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Cartográficas da Universidade Estadual Paulista – Campus de Presidente Prudente, para obtenção do título de Doutor em Ciências Cartográficas.

Orientadores: Prof. Dr. Paulo de Oliveira Camargo
Prof. Dr. Maurício Galo

Presidente Prudente

2012

DEDICATÓRIA

À minha esposa Regina pelo amor, suporte e compreensão.

À minha família, em especial aos meus pais João Paulo e Roseli, à minha irmã Michele e meus queridos sobrinhos João Guilherme e Gabriela, pelo incentivo, carinho e força.

AGRADECIMENTOS

A realização desta pesquisa teve a colaboração direta e indireta de diversas pessoas, as quais expresso meus sinceros agradecimentos, em particular:

- A Deus, pelo Dom da vida, da sabedoria, pela graça e força para atingir meus objetivos.
- Aos meus orientadores, Paulo de Oliveira Camargo e Maurício Galo, pelos ensinamentos, discussões enriquecedoras, confiança e incentivo profissional e pessoal.
- Aos colegas do Instituto Federal de Educação de Goiás, pelo apoio e compreensão, em especial ao Prof. Domingos Sávio de Queiróz, por proporcionar as condições necessárias para o desenvolvimento desta pesquisa mesmo nas adversidades.
- Aos amigos da Pós-Graduação, que compartilharam comigo bons momentos e dificuldades, com incentivos, auxílio, risos e companheirismo.
- Aos professores do Departamento de Cartografia pelas orientações e ensinamentos.
- Ao Grupo de Estudos em Geodésia Espacial, em especial ao Prof. João Francisco Galera Monico (coordenador), pelas discussões, sugestões e aprendizado.
- Ao Prof. Leonardo Castro de Oliveira, coordenador do GT3/PMRG, pela colaboração e disposição em tantas bancas.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo suporte financeiro durante o desenvolvimento da pesquisa.

RESUMO

O avanço das técnicas de posicionamento, sobretudo do posicionamento por satélites artificiais, impulsionou os processos de atualização da estrutura geodésica fundamental em diversos países. No Brasil, a mais recente mudança foi a adoção do SIRGAS2000 em fevereiro de 2005, se tornando o terceiro referencial adotado oficialmente pelo Sistema Geodésico Brasileiro. A mudança de referencial faz com que produtos cartográficos possam ter suas coordenadas associadas a diferentes referenciais e/ou realizações. Portanto, tornam-se necessários processos de transformação de coordenadas entre sistemas e/ou realizações, que possam modelar as distorções existentes nas materializações e garantir a integridade dos dados. A evolução das técnicas de posicionamento e a atualização dos sistemas de referência são processos dinâmicos, portanto, os métodos para mudança de coordenadas são uma necessidade atual e constante. Nesta pesquisa é apresentado um método para transformação de coordenadas tridimensionais entre realizações de referenciais geodésicos com modelagem de distorções baseado em *Thin-Plate Splines* (TPS). Pretende-se explorar a capacidade da técnica TPS em modelar dados provenientes de uma transformação linear, juntamente com distorções de natureza não linear. Foram realizados experimentos com dados simulados e reais de estações do SGB. Nos experimentos com pontos de verificação, foram obtidos valores de RMSE de 7,82 cm em latitude e 6,75 cm em longitude, para a transformação entre as realizações SAD69/96 e SIRGAS2000. Na comparação entre o modelo TPS e o ProGrid (programa computacional brasileiro para transformação de coordenadas entre realizações de referenciais geodésicos), os indicadores estatísticos tiveram valores reduzidos em média 97% para todas as realizações avaliadas, quando aplicado o modelo TPS. O método proposto é promissor, conforme sugerem os resultados obtidos, o que garante melhor qualidade no processo de transformação.

Palavras-chave: Transformação de coordenadas, referenciais geodésicos, modelagem de distorções, *Thin-Plate Splines*.

ABSTRACT

The advances in the positioning techniques, especially in the satellite positioning, drove the updating process in the fundamental geodesic network in several countries. In Brazil, the most recent change was the adoption of the SIRGAS2000 in February, 2005, as the third official referential adopted by the Brazilian Geodetic System. The change of reference system let cartographic products with his coordinates associated to different reference systems and/or frames. So, processes of coordinates change between reference systems and/or frames are necessary, which are able to model the distortion in the reference frames and guarantee the data integrity. The evolution of the positioning techniques and the updating of reference frames are dynamic processes, so, the methods of coordinates change are an actual and continuous necessity. In this research a method is presented for transformation of three-dimensional coordinates between reference frames with modeling of distortions based on Thin-Plate Splines (TPS). It is explored the capacity of the TPS in modeling data originated from a linear transformation, together with distortion of nature not linear. Experiments were performed with simulated data and real coordinates from the SGB. In the experiments with the checking points, the values of RMSE were 7,82 cm in latitude and 6,75 cm in longitude to the transformation between the networks SAD69/96 and SIRGAS2000. In the comparison between the TPS model and the ProGrid (the Brazilian software for transformations of coordinates between reference frames), the statistical indicators were reduced in about 97% in all evaluated reference frames, when the TPS model was applied. The proposed method is promising as the results suggest, guaranteeing more quality in the transformation process.

Keywords: Coordinates transformation, reference systems, distortion modeling, Thin-Plate Splines.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Distribuição das estações CA61 (a) e CA7072 (b).....	25
Figura 2 - Distribuição das estações SAD69 (a) e SAD69/96 (b).....	27
Figura 3 - Distribuição das estações da campanha SIRGAS2000.....	29
Figura 4 - Distribuição das estações da realização SIRGAS2000.....	30
Figura 5 - Distorções devido ao adensamento da rede geodésica	32
Figura 6 - Interpolação do nó da grade a partir de pontos vizinhos.	37
Figura 7 - Distorções entre as realizações CA61 e SIRGAS2000.....	44
Figura 8 - Detalhe das distorções na realização CA61.....	44
Figura 9 - Distorções entre as realizações CA7072 e SIRGAS2000.....	45
Figura 10 - Detalhe das distorções na realização CA7072.....	46
Figura 11 - Distorções entre as realizações SAD69 e SIRGAS2000.....	47
Figura 12 - Detalhe das distorções na realização SAD69.	47
Figura 13 - Distorções entre as realizações SAD69/96 e SIRGAS2000.....	48
Figura 14 - Detalhe das distorções na realização SAD69/96.	49
Figura 15 - Representação da função $-U(r)$	52
Figura 16 - Pontos nos espaços 1 e 2 representando um quadrado na forma normal e distorcido.	56
Figura 17 - Superfícies representando as funções de mapeamento em X e Y.	57
Figura 18 - Inserção do novo ponto (5) de coordenadas (100,001; 200,001).	58
Figura 19 - Inserção do novo ponto (5) de coordenadas (2000;2000).	59
Figura 20 - Representação geométrica para a solução de sistemas lineares.....	63
Figura 21 - Representação geométrica de um sistema mal condicionado.....	64
Figura 22 - Função de base radial com domínio 2D para a norma $\ \cdot\ _2$	72
Figura 23 - Fluxograma do processo de determinação dos coeficientes do modelo TPS. ...	76

Figura 24 - Possibilidades de transformação de coordenadas entre redes geodésicas.	77
Figura 25 - Disposição dos pontos de controle e de verificação para o experimento 1.	83
Figura 26 - Relação entre limiares de distância e número de pontos excluídos.....	86
Figura 27 - Relação entre limiares de distância e deficiência de característica da matriz A.	87
Figura 28 - Relação entre limiares de distância e número de condição da matriz A.....	87
Figura 29 - Fluxograma das etapas do experimento 4.....	89
Figura 30 - Fluxograma das etapas do experimento 5.....	90
Figura 31 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação para a análise da transformação.	91
Figura 32 - Fluxograma das etapas do experimento 5.....	92
Figura 33 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação da realização CA61.....	93
Figura 34 - Distorções na realização CA61, nos pontos de verificação, antes da modelagem.....	94
Figura 35 - Distorções na realização CA61, nos pontos de verificação, após a modelagem por TPS.	94
Figura 36 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação da realização CA7072...	95
Figura 37 - Distorções na realização CA7072, nos pontos de verificação, antes da modelagem.....	96
Figura 38 - Distorções na realização CA7072, nos pontos de verificação, após a modelagem por TPS.	97
Figura 39 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação da realização SAD69. ...	98
Figura 40 - Distorções na realização SAD69, nos pontos de verificação, antes da modelagem.....	99
Figura 41 - Distorções na realização SAD69, nos pontos de verificação, após a modelagem por TPS.	100
Figura 42 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação da realização SAD69/96.	101
Figura 43 - Distorções na realização SAD69/96, nos pontos de verificação, antes da modelagem.....	102

Figura 44 - Distorções na realização SAD69/96, nos pontos de verificação, após a modelagem por TPS.	102
Figura 45 - Mapa de intensidade das distorções em SAD 69 realização de 1996.....	103
Figura 46 - Gráfico comparativo do RMSE obtido pelo modelo TPS e pelo ProGrid.....	105
Figura 47 - Comparação entre TPS e ProGrid em latitude para o experimento 5.....	107
Figura 48 - Comparação entre TPS e ProGrid em longitude para o experimento 5.....	107

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Observações utilizadas nos ajustamentos SAD 69.	27
Tabela 2 - Estatísticas das distorções na rede CA61.....	43
Tabela 3 - Estatísticas das distorções na rede CA7072.....	45
Tabela 4 - Estatísticas das distorções na rede SAD69.	46
Tabela 5 - Estatísticas das distorções na rede SAD69/96.	48
Tabela 6 - Pontos no espaço 1 e distorcidos no espaço 2.	56
Tabela 7 - Dimensões das matrizes e vetores do modelo TPS para as três componentes cartesianas.....	74
Tabela 8 - Dimensões das matrizes e vetores do ajustamento por componente cartesiana	74
Tabela 9 - Estatísticas das discrepâncias nos pontos de controle e de verificação para o experimento 1, antes da modelagem.....	83
Tabela 10 - Estatísticas das discrepâncias nos pontos de verificação para o experimento 1, após a modelagem por TPS	84
Tabela 11 - Estatísticas das discrepâncias nos pontos de controle e de verificação para o experimento 2, antes da modelagem.....	85
Tabela 12 - Estatísticas das discrepâncias nos pontos de verificação para o experimento 2, após a modelagem por TPS	85
Tabela 13 - Estatísticas da análise da qualidade da modelagem com a totalidade dos pontos.....	89
Tabela 14 - Estatísticas do experimento 5 após a modelagem por TPS.	91
Tabela 15 - Resultados da modelagem nos pontos de verificação na rede CA61.	93
Tabela 16 - Resultados da modelagem nos pontos de verificação na rede CA7072.	96
Tabela 17 - Resultados da modelagem nos pontos de verificação na rede SAD69.....	98
Tabela 18 - Resultados da modelagem nos pontos de verificação na rede SAD69/96.....	101
Tabela 19 - Resultados do experimento 4 utilizando o ProGrid.....	104
Tabela 20 - Estatísticas do experimento 5 utilizando o ProGrid.....	106

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Considerações Iniciais.....	13
1.2	Objetivos	16
1.3	Relevância da Pesquisa	17
2	SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERÊNCIA	20
2.1	Aspectos Conceituais sobre Sistemas Geodésicos de Referência.....	20
2.2	Transformação entre Realizações de Referenciais Geodésicos	21
2.3	O Sistema Geodésico Brasileiro.....	23
2.4	Sistemas de Referência Adotados pelo SGB e suas Realizações.....	24
2.4.1	O sistema Córrego Alegre e realizações	24
2.4.2	O SAD 69 e suas realizações	25
2.4.3	O SIRGAS2000.....	28
3	DISTORÇÕES EM REDES GEODÉSICAS	31
3.1	Conceituação	31
3.2	A Transformação de Coordenadas Aliada à Modelagem de Distorções.....	33
3.3	Experiências Internacionais na Transformação de Coordenadas e Modelagem das Distorções.....	34
3.3.1	Experiência Canadense	34
3.3.2	Experiência Australiana	36
3.3.3	Experiência Americana	38
3.4	Transformações de Coordenadas e Modelagem das Distorções na Rede Geodésica Brasileira	39
3.5	Análise das Distorções nas Realizações dos Referenciais do SGB	41
3.5.1	Análise das distorções nas realizações do sistema Córrego Alegre.....	43
3.5.2	Análise das distorções nas realizações do SAD 69	46
4	<i>THIN-PLATE SPLINES: DEFINIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO MATEMÁTICA</i>	50
4.1	Thin-Plate Splines	50

4.1.1	A função $U(r)$	52
4.1.2	Formulação matemática clássica da TPS para um conjunto arbitrário de pontos no espaço bidimensional	53
4.2	Exemplo e Discussão de Alguns Aspectos Numéricos e Geométricos.....	56
5	CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	61
5.1	Sistemas de Equações Lineares.....	61
5.2	A Solução de Sistemas de Equações Lineares e o Problema de Condicionamento.....	63
5.3	Singularidade de Matrizes.....	65
5.3.1	Determinante e característica na suposição de singularidade de matrizes.....	65
5.3.2	Número de condição	66
5.4	A Decomposição em Valores Singulares (<i>Singular Value Decomposition – SVD</i>).....	68
5.4.1	Cálculo da matriz inversa usando SVD	69
6	MÉTODO PROPOSTO PARA A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS E MODELAGEM DAS DISTORÇÕES EM REDES GEODÉSICAS	71
6.1	Considerações Iniciais.....	71
6.2	Modelagem Tridimensional por <i>Thin-Plate Splines</i>	72
6.3	Implementação Computacional da Modelagem.....	78
7	EXPERIMENTOS E RESULTADOS	80
7.1	Descrição dos Experimentos	80
7.2	Avaliação do Modelo TPS em Dados Simulados a partir da Transformação Afim no Espaço Tridimensional – Experimento 1	82
7.3	Avaliação do Modelo TPS em Dados Simulados com Distorções – Experimento 2.....	84
7.4	Avaliação do Limiar de Distância Mínima – Experimento 3	86
7.5	Análise da Qualidade da Modelagem com o Conjunto Total de Pontos de Realizações do SGB – Experimento 4	88
7.6	Análise da Qualidade da Transformação em Pontos não Coincidentes com Estações do SGB – Experimento 5	90
7.7	Análise da Qualidade da Modelagem nos Pontos de Verificação das Realizações do SGB – Experimento 6	92
7.7.1	Análise da modelagem nos pontos de verificação na realização CA61.....	93
7.7.2	Análise da modelagem nos pontos de verificação na realização CA7072.....	95

7.7.3	Análise da modelagem nos pontos de verificação na realização SAD69	97
7.7.4	Análise da modelagem nos pontos de verificação na realização SAD69/96	100
7.8	Análise Comparativa entre o Modelo TPS e o ProGrid – Experimento 7	104
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	108
8.1	Considerações Finais e Conclusões	108
8.2	Recomendações e Sugestões para Trabalhos Futuros.....	110
	REFERÊNCIAS	112
	BIBLIOGRAFIA	117

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Os avanços tecnológicos ocorrem de maneira acelerada, quer nas missões espaciais com satélites de última geração, quer na informática com computadores cada vez mais robustos e capazes de trabalhar com grandes volumes de dados ou, ainda, na eletrônica, com o surgimento e modernização de equipamentos para diferentes finalidades. Nas ciências cartográficas, tais avanços impactam de maneira positiva, proporcionando alternativas cada vez mais rápidas e acuradas para a obtenção, análise e processamento de dados geoespaciais. A expansão e modernização de sistemas de posicionamento global por satélites é um exemplo claro destes avanços. Com a disponibilização de dados com melhor qualidade, surge a necessidade de novas realizações associadas aos referenciais geodésicos já existentes ou da definição e realização de referenciais novos para posicionamento e mapeamento com qualidade condizente com a realidade atual. Uma tendência mundial aponta para a adoção de referenciais globais e geocêntricos.

Acompanhando as tendências mundiais e a evolução tecnológica, o Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) tem se adaptado ao longo dos anos, procurando disponibilizar à comunidade usuária dados para posicionamento geodésico e mapeamento com qualidade cada vez melhor. Algumas das mais atuais e significantes mudanças no SGB foram: o reajustamento da componente planimétrica em 1996, denominado SAD69 (*South American Datum of 1969*) realização de 1996 e a mudança de referencial geodésico em 2005, passando-se a adotar o SIRGAS2000 (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas) oficialmente. No que se refere à modernização do SGB, o mais notável se trata da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo dos Sistemas GNSS (RBMC), a qual disponibiliza dados GNSS continuamente para os usuários.

Como efeito do processo de disponibilização de novas materializações, bem como novas definições de referenciais, uma diversidade de sistemas de referência passou a estar disponível aos usuários, evidenciando a necessidade de adoção de métodos para relacionar as coordenadas entre as realizações. A transformação de coordenadas e a modelagem de distorções passaram a ser fonte de estudos e uma preocupação latente quando se trata de dados georreferenciados.

A adoção do SIRGAS2000 reforçou a necessidade de suporte aos usuários. Nesse sentido, foi criado o Projeto Mudança de Referencial Geodésico (PMRG), coordenado pelo IBGE, com o objetivo de promover a adoção do SIRGAS2000 como novo referencial geodésico brasileiro, além de trabalhar no suporte aos usuários para conversão de suas coordenadas entre as diferentes realizações dos referenciais geodésicos oficiais (IBGE, 2002).

Aliado ao PMRG foi estabelecido o Projeto da Infraestrutura Geoespacial Nacional (PIGN), também coordenado pelo IBGE em conjunto com a Universidade de New Brunswick (UNB) e patrocinado pela Agência Canadense para o Desenvolvimento Internacional (CIDA). O objetivo principal do PIGN é colaborar nos esforços brasileiros para a adoção de um sistema de referência geocêntrico (PIGN, 2006).

No escopo do PMRG e do PIGN foram criados 6 Grupos de Trabalho (GTs) com a função de desenvolver pesquisas para subsidiar a adoção do novo referencial. O Grupo de Trabalho 3 (GT3) é o que trata especificamente da conversão de referenciais, tendo por diretrizes básicas avaliar parâmetros e metodologias de conversão de coordenadas entre realizações, através do desenvolvimento e disponibilização de aplicativos computacionais. Como elemento principal no processo de conversão de coordenadas, está a modelagem das distorções existentes na rede geodésica.

Diferentes alternativas metodológicas foram propostas e estudadas por diversas instituições de ensino e pesquisa no sentido de auxiliar na seleção de metodologias e aplicativos, que proporcionassem melhores resultados aos usuários na transformação de coordenadas com modelagem das distorções entre as realizações dos referenciais antigos e o SIRGAS2000. As alternativas propostas junto ao GT3 contemplaram diferentes técnicas e estratégias, tais como: colocação pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ); triangulação de Delaunay; utilização do aplicativo canadense NTV2 (*National Transformation version 2*); (OLIVEIRA et al., 2008) e modelagem baseada em grades com utilização do método de Shepard (MAGNA JÚNIOR, 2007; OLIVEIRA et al., 2008).

A solução final escolhida e corroborada pelas demais metodologias foi o NTV2. Embora os resultados obtidos em todas as soluções apresentadas fossem similares entre si, a questão operacional foi preponderante para a escolha do método, uma vez que o NTV2 poderia ser utilizado de imediato com algumas adaptações. Com base nesses estudos coordenados pelo GT3, foi disponibilizado em dezembro de 2008 para a comunidade usuária o aplicativo denominado de ProGrid, fundamentado na solução NTV2 (IBGE, 2008).

O ProGrid foi desenvolvido para permitir a migração de banco de dados e mapas de Córrego Alegre e SAD69 para o SIRGAS2000, em um esforço de promover à comunidade de

usuários de dados geoespaciais de uma ferramenta que os facilite na transição para o SIRGAS2000 (IBGE, 2008).

Mais abrangente, o ProGrid substitui o aplicativo TCGeo, aliando ao processo de conversão de coordenadas a modelagem de distorções, até então desconsiderada. A possibilidade de modelagem das distorções apresenta um avanço na tentativa de obtenção de um melhor relacionamento entre os referenciais envolvidos, incorporando correções que, de certo modo, modelam pelo menos parte das distorções e erros inerentes ao processo de realização da rede geodésica.

A definição do modelo de distorções para o Brasil foi um marco no que se refere ao estudo da rede geodésica brasileira. Além do propósito principal, ou seja, definir o método de transformação de coordenadas com modelagem de distorções, outra grande contribuição deste processo foi o estudo aprofundado das diferentes realizações que compõem a rede geodésica brasileira em seus mais diversos aspectos.

Algumas características são próprias da rede geodésica brasileira, decorrentes, principalmente, de sua grande extensão e dos processos de ajuste e levantamento de suas coordenadas. Os efeitos do comportamento não homogêneo, assim como a variação da magnitude das distorções ao longo da rede, podem impactar negativamente no processo de modelagem e merecem investigações.

Considerando os problemas destacados e as implicações abordadas, conclui-se que a conversão de coordenadas é um assunto relevante no atual estágio do SGB, tanto no aspecto prático de transformação, quanto a nível científico, com o estudo de métodos que garantam a integridade e qualidade da transformação. Trata-se de uma tarefa complexa que demanda investigações constantes a nível nacional e mundial. Assim, esta pesquisa pretende colaborar com estes estudos, na busca de um modelo que permita obter um melhor relacionamento entre as realizações de referenciais envolvidas no processo. Pretende-se avaliar os problemas como o comportamento não homogêneo das distorções, proporcionando uma metodologia alternativa e inédita para a modelagem de distorções em redes geodésicas.

A metodologia proposta se fundamenta nas funções de mapeamento tridimensionais por *Thin-Plate Spline* (TPS), usadas para determinar distorções relativas em dois conjuntos de pontos de controle correspondentes. As características das funções TPS são ideais para a transformação de coordenadas e modelagem de distorções em redes geodésicas, pois é possível a modelagem de dados homólogos resultantes de uma transformação geométrica que incorpora translação, rotação, não ortogonalidade e fator de escala, por exemplo, bem como de uma parcela adicional onde se tem distorções de natureza não linear. Em sua formulação

original, as funções de mapeamento por TPS são utilizadas, na grande maioria das aplicações, para a modelagem de dados bidimensionais. No entanto, a expansão para o caso tridimensional é prevista na bibliografia especializada e proporciona vantagens na transformação de coordenadas, uma vez que possibilita a incorporação da informação altimétrica no processo.

Considerando os aspectos abordados, esta pesquisa busca colaborar, por meio de um método alternativo, com o processo de conversão de referenciais no Brasil, melhorando a qualidade do aproveitamento de produtos cartográficos já existentes e que devem ser atualizados segundo a resolução IBGE (2005).

1.2 Objetivos

Essa pesquisa tem por objetivo estudar, desenvolver e avaliar um método para a transformação de coordenadas entre realizações de referenciais geodésicos, baseado no uso de funções *Thin-Plate Splines* e simultaneamente modelar as distorções existentes entre as realizações envolvidas, preservando o valor nominal das coordenadas.

No âmbito dos objetivos gerais, pretende-se alcançar os seguintes objetivos específicos igualmente relevantes:

- expandir o modelo TPS para o caso tridimensional utilizando coordenadas geodésicas cartesianas;
- implementar computacionalmente e avaliar a metodologia proposta com dados simulados e com dados reais de estações em diferentes realizações de referenciais oficiais do Sistema Geodésico Brasileiro;
- avaliar a qualidade dos resultados obtidos e os impactos derivados da abordagem proposta.

1.3 Relevância da Pesquisa

Com o surgimento e a rápida expansão dos métodos de posicionamento por satélites, diversos países passaram a atualizar suas redes geodésicas fundamentais, seja com a disponibilização de novas realizações ou com a adoção de novos referenciais. Os principais esforços convergiram para a adoção de referenciais geocêntricos, mais modernos e diretamente compatíveis com as técnicas de posicionamento modernas. O Brasil avançou nesse sentido através do Projeto SIRGAS, que culminou na adoção do SIRGAS2000.

As alterações no SGB, principalmente em sua componente planimétrica, na busca constante por melhor acurácia e abrangência, causam impactos aos usuários e produtores de produtos cartográficos de diversas áreas do conhecimento, tais como: geodésia, cadastro, cartografia, transportes, geologia, prospecção, geofísica, dentre outras. Entretanto, para que os impactos decorrentes destas alterações não deixem de ser benéficos e passem a ser complicadores, o processo de transição deve ser consistente, gradual e controlado. Deve-se, solucionar os problemas imediatos e prever problemas futuros procurando antecipar a solução para minimizar seus impactos.

As metodologias de transformação de coordenadas aliadas à modelagem de distorções auxiliam no sentido de manter uma consistência e homogeneidade dos dados, facilitando o aproveitamento dos recursos decorrentes da modernização. Tornam possível o aproveitamento de documentos cartográficos analógicos e digitais para fins cartográficos, cadastrais, dentre outros.

Nesse sentido, esforços realizados por meio do GT3 e do PMRG/PIGN, culminaram na disponibilização do ProGrid em novembro de 2008. Trata-se de um avanço no que se refere à conversão de referenciais, trazendo de forma inédita no Brasil a modelagem de distorções associada à transformação de coordenadas. No entanto, as mudanças na rede geodésica são constantes e acompanham a evolução tecnológica, assim também deve ser o processo de avaliação de métodos para transformação de coordenadas, garantindo que os recursos advindos da evolução ocorrida sejam bem aproveitados. O ProGrid é um grande passo, mas os estudos devem ser permanentes, procurando principalmente se adequar à realidade da rede geodésica brasileira, sua grande extensão e peculiaridades. A extensão continental do Brasil o torna diferenciado da maioria dos países, inclusive no que se refere à informação geoespacial. Logo, soluções adotadas em alguns países podem não ser as mais adequadas a outros, incluindo o Brasil.

Um dos principais problemas com relação à modelagem das distorções na rede geodésica brasileira está no comportamento das distorções. Em algumas regiões, as distorções tendem a ter um comportamento homogêneo, o que teoricamente possibilita uma melhor modelagem. Em contrapartida, existem regiões com comportamento bastante desordenado, dificultando a modelagem. Esse comportamento não homogêneo das distorções deve ser um fator considerado na escolha e avaliação de métodos de modelagem.

O modelo baseado em *Thin-Plate Splines* pode contribuir no processo de conversão de referenciais, pois permite a modelagem das distorções utilizando uma superfície suave que melhor se ajusta aos pontos de controle fornecidos. Trata-se de uma função contínua que gera um modelo analítico para as distorções com transição suave entre as diferentes regiões modeladas. Apesar de ser um modelo de interpolação global, o uso das funções de base radiais faz com que haja grande influência do comportamento local das distorções na modelagem. Uma das características que tornam a técnica TPS atrativa para a conversão de coordenadas entre referenciais geodésicos é a sua capacidade de modelar dados provenientes de uma transformação geométrica, juntamente com distorções de natureza não linear.

O modelo TPS é utilizado na maioria dos casos em modelagem bidimensional, mas sua expansão para o caso tridimensional é discutida na bibliografia pertinente, como em Bookstein (1989). O modelo TPS 3D pode ser utilizado na modelagem de distorções utilizando, por exemplo, coordenadas geodésicas cartesianas (X, Y e Z), sendo possível inclusive incorporar a informação altimétrica, quando disponível.

A grande maioria das aplicações que utilizam *Thin-Plate Splines* está voltada à modelagem de superfícies, registro de imagens e estudos de deformações em imagens médicas. Destacam-se algumas pesquisas, tais como: interpolação de superfícies a partir de dados irregularmente distribuídos (YU, 2001; BORKOWSKI; KELLER, 2005); geração de grades altimétricas a partir de curvas de nível (GOUSIE, 1998); modelagem digital do terreno (TAGHVAKISH; AMINI, 2004; SOYCAN; SOYCAN, 2009; BARBOSA et al., 2003); classificação da curvatura de vertentes em perfil (ANJOS, 2008); registro de imagens (CASTANHO, 1997; GAY-BELLILE et al., 2006); modelagem do quase-geóide (PRUTKIN; KLEES, 2007); e deformação em imagens médicas (TSAI et al., 2000; BOOKSTEIN, 1989).

O levantamento bibliográfico apresentado no parágrafo anterior explicita a utilização de TPS em diversas áreas do conhecimento. No entanto, para fins geodésicos, sobretudo na transformação de coordenadas entre referenciais geodésicos com modelagem de distorções, a técnica TPS é carente de pesquisas, apesar de apresentar potencial para tal aplicação.

Esta pesquisa pretende explorar de forma inédita o potencial da modelagem por TPS na conversão de referenciais, buscando contribuir com os estudos na modelagem de distorções e com os esforços na compatibilização de referenciais no Brasil. Do ponto de vista prático ou do usuário, a contribuição se deve à busca pelo melhor relacionamento possível entre as diversas realizações de referenciais utilizadas em produtos analógicos e digitais já existentes, melhorando o aproveitamento dos recursos decorrentes da mudança do referencial. No aspecto científico, a contribuição consiste em utilizar uma técnica conceituada (TPS) e pouco explorada para fins geodésicos, sobretudo na modelagem de distorções em redes geodésicas. Fazem parte também das contribuições a expansão, aplicação e análise do modelo no espaço 3D.

2 SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERÊNCIA

Neste capítulo são abordados aspectos conceituais importantes, no contexto da tese, sobre Sistemas Geodésicos de Referência e suas realizações; metodologias utilizadas para a transformação de coordenadas entre realizações de referenciais geodésicos; e o Sistema Geodésico Brasileiro, seus referenciais e realizações oficiais.

2.1 Aspectos Conceituais sobre Sistemas Geodésicos de Referência

Nas atividades que envolvem posicionamento geodésico, ou informações georreferenciadas em geral são imprescindíveis a definição e a realização de sistemas de referência para as coordenadas. Um sistema de referência é caracterizado pela ideia conceitual, onde o sistema ideal seria aquele em que a origem estivesse em repouso ou em movimento retilíneo uniforme caracterizando um referencial inercial (MONICO, 2008).

É importante salientar alguns conceitos fundamentais sobre os sistemas de referência terrestres e uma caracterização conceitual básica está relacionada com a definição e materialização destes sistemas. Assim, dois conceitos importantes devem ser destacados: *reference system* e *reference frame*. O IERS (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*) distingue estes dois conceitos em suas convenções (MCCARTHY; PETIT, 2004):

- *Reference system* (sistema de referência): é definido pelo conjunto de todas as convenções, algoritmos e constantes que proporcionam a origem, escala e orientação de um sistema e sua evolução temporal;
- *Reference frame* (rede de referência): é definido pelo conjunto de pontos físicos com coordenadas precisamente determinadas em um específico sistema de coordenadas, como a realização de um sistema de referência ideal.

Pode-se dizer que o *reference system* trata da ideia conceitual e o *reference frame* é a materialização do próprio sistema, por meio de um conjunto de coordenadas de pontos

materializados na superfície terrestre, associados a uma época de referência. A concepção do sistema de referência é pertinente ao espaço abstrato, enquanto a rede de referência (realização ou materialização) se refere ao espaço físico.

No Brasil, o sistema SAD 69, por exemplo, possui duas realizações: a original e a de 1996. Embora se tratem de realizações distintas do mesmo referencial, em geral, não se denomina explicitamente de maneira diferente tais realizações, ou seja, tanto as coordenadas resultantes do primeiro ajustamento quanto as coordenadas do ajustamento de 1996 são denominadas de SAD 69. O mesmo ocorre com o Córrego Alegre, onde não se diferencia nominalmente as diferentes realizações. No caso do SIRGAS2000, de acordo com a Resolução do IBGE nº1/2005 (IBGE, 2005) o sistema de referência é denominado SIRGAS2000, mesma denominação dada à sua realização ocorrida no ano de 2000. Oliveira (1998) salienta que, o fato de as realizações de referenciais no Brasil não sofrerem nenhuma diferenciação em termos de nomenclatura, pode provocar problemas de interpretação, já que o nome SAD 69, por exemplo, pode significar: a própria definição do Sistema, a primeira ou a segunda realização. Dessa forma, a distinção entre sistema e rede depende do contexto em que o termo SAD 69 é utilizado, se num sentido abstrato ou físico, respectivamente.

2.2 Transformação entre Realizações de Referenciais Geodésicos

A coexistência de diferentes sistemas geodésicos de referência e suas realizações implica na necessidade de metodologias de conversão de coordenadas. O processo de conversão entre referenciais consiste em encontrar a posição de estações conhecidas em certo sistema de referência (ou realização) num outro sistema (ou realização) de interesse, e vice versa.

Diversos modelos aplicados à conversão entre referenciais são apresentados na bibliografia. Oliveira (1998) classifica tais modelos em cinco categorias:

1. Equações cartesianas: também conhecidos como transformações geométricas, são modelos desenvolvidos a partir de coordenadas retilíneas, em que são consideradas as grandezas translação, rotação e escala. Exemplo: transformação de similaridade de Bursa, Molodenski - Badekas, Veis e Vaniček – Weells;

2. Equações diferenciais: são desenvolvidos considerando o efeito causado pelas diferenças referentes às dimensões (forma e tamanho) dos elipsoides associados aos sistemas de interesse, bem como às diferenças posicionais dos elipsoides com relação à superfície terrestre. Estes modelos são aplicáveis às coordenadas retilíneas e curvilíneas. Exemplo: equações diferenciais de Molodenski, conforme apresentado em IBGE (1983).
3. Regressões: também denominados de Equações de Regressão Múltiplas, Polinômios Conformes e Transformações Projetivas. Empregam coordenadas curvilíneas ou retilíneas, e estabelecem um modelo polinomial, de ordem variável, para efetuar a transformação;
4. Modelagem analítica: empregam métodos analíticos para geração de modelos ou processos matemáticos adequados à transformação, baseados nas diferenças de coordenadas retilíneas ou curvilíneas de pontos comuns nos dois sistemas;
5. Mapas de interpolação: consiste na geração de mapas de isolinhas ou malhas (reticulado ou grade) regulares, digitais ou não, referentes aos valores que permitem a transformação de coordenadas por meio de interpolações simples (por exemplo, bilineares).

As categorias 1 e 2 envolvem modelos clássicos ainda adotados, embora limitados quanto à modelagem de alguns efeitos como o das distorções. As demais abordagens possuem melhor capacidade de modelagem das distorções, sendo desta forma, alternativas possíveis no estudo da conversão entre referenciais.

No SGB, os modelos desenvolvidos baseiam-se em sua maioria, nas equações cartesianas ou diferenciais (categorias 1 e 2). Oliveira (1998) salienta que as soluções para o problema de transformação entre realizações de sistemas geodésicos para o caso nacional pressupõem caráter geral e simultâneo para o todo o SGB, sem modelagem das eventuais distorções não absorvidas nos modelos empregados.

Nos últimos anos, modelos vêm sendo adequados e/ou propostos com o intuito de melhor assimilar os efeitos decorrentes da mudança de referenciais geodésicos, como o efeito das distorções. Esse processo foi potencializado com a adoção do SIRGAS2000 e desde então, duas versões do aplicativo de conversão de coordenadas foram disponibilizadas para a

comunidade, a versão inicial denominada TCGeo e a segunda versão, denominado ProGriD as quais são descritas com mais detalhes na Seção 3.4. Na segunda e mais recente versão, a conversão é realizada considerando os efeitos das distorções na rede geodésica, proporcionando um melhor relacionamento entre os referenciais (realizações) envolvidos.

2.3 O Sistema Geodésico Brasileiro

O Sistema Geodésico Brasileiro é materializado a partir do conjunto de pontos geodésicos implantados na porção da superfície terrestre delimitada pelas fronteiras do país, pontos estes que são determinados por procedimentos operacionais e coordenadas calculadas, segundo modelos geodésicos de precisão compatível com as finalidades a que se destinam (IBGE, 1983).

As atividades cartográficas no Brasil iniciaram pioneiramente pela Diretoria do Serviço Geográfico (DSG), órgão do antigo Ministério do Exército, atualmente Ministério da Defesa. Entretanto, as primeiras atividades de levantamento que convergiram para a estrutura atual do SGB, iniciaram-se em outubro de 1939 pelo antigo Conselho Nacional de Geografia. A implantação sistematizada do SGB se deu através do IBGE, a partir de maio de 1944 com a medida da primeira base geodésica nas proximidades da cidade de Goiânia. Desde então, a manutenção do SGB passou a ser de responsabilidade do IBGE (IBGE, 2007).

Desde sua criação, o SGB vem sofrendo alterações, principalmente em sua componente planimétrica, de forma a acompanhar o estado da arte das ciências geodésicas. Diferentes metodologias foram empregadas em seu estabelecimento e manutenção, assim como diferentes sistemas de referência para as coordenadas. Durante esse processo, distorções foram inseridas na rede, decorrência de limitações computacionais e métodos de posicionamento da época. Grande parte da rede planimétrica foi estabelecida utilizando métodos clássicos de posicionamento geodésico, onde grandes redes de triangulação estenderam-se em todo o território nacional. Somente na década de 70 iniciou-se a utilização de satélites artificiais para fins de posicionamento, com a utilização do sistema TRANSIT.

Segundo o IBGE (2007), o desenvolvimento do SGB pode ser classificado em duas fases distintas: uma anterior e outra posterior ao advento dos sistemas de posicionamento por satélites. A utilização dessa tecnologia possibilitou a expansão da rede geodésica em áreas antes não abrangidas, como a região amazônica. Em 1991, o IBGE adquiriu receptores

NAVSTAR/GPS (*Navigation Satellite with Time and Ranging*) e começou a utilizar a tecnologia GPS na densificação dos marcos planimétricos do SGB.

Dentre os sistemas de referência associados ao SGB desde o seu estabelecimento, estão: o Sistema Córrego Alegre; o SAD 69; e atualmente o SIRGAS2000.

O SIRGAS2000 foi adotado oficialmente através da resolução 01/2005 da presidência do IBGE de 25 de fevereiro de 2005 (IBGE, 2005). Entretanto, durante um período de transição, não superior a dez anos, o SIRGAS pode ser utilizado em concomitância com o SAD 69 para o SGB, e para o SCN (Sistema Cartográfico Nacional) pode incluir, além do SAD 69, também o sistema Córrego Alegre (IBGE 2005).

Com a adoção do SIRGAS2000, estudos foram iniciados para proporcionar uma adequada transição entre os referenciais antigos e o novo, avaliando e minimizando impactos, bem como possibilitando o aproveitamento de produtos já existentes. Tal procedimento faz parte do processo evolutivo atual do SGB.

2.4 Sistemas de Referência Adotados pelo SGB e suas Realizações

Na sequência são apresentados alguns dos principais sistemas de referência já adotados pelo Sistema Geodésico Brasileiro e suas respectivas realizações.

2.4.1 O sistema Córrego Alegre e realizações

O primeiro ajuste da rede planimétrica do SGB foi realizado na década de 40 pelo método das equações de observação, adotando-se o Sistema Geodésico de Córrego Alegre (CA) como referência (COSTA, 1999).

A superfície de referência adotada no sistema CA é o Elipsoide Internacional de *Hayford* de 1924 ($a = 6.378.388$ m e $f = 1/297$). O CA é um sistema de orientação topocêntrica tendo como ponto origem o vértice de triangulação Córrego Alegre posicionado astronomicamente, com coordenadas geodésicas iguais às coordenadas astronômicas, sendo $\varphi = 19^\circ 50' 15,14''$ S e $\lambda = 48^\circ 57' 42,75''$ W.

O sistema CA foi utilizado como referencial oficial brasileiro da década de 50 até a década de 70, sendo substituído pelo SAD 69. De acordo com IBGE (2008), existem oficialmente 3 realizações do Córrego Alegre nos anos de 1961, 1970 e 1972. Durante o

processo de estudos do modelo de distorções para o SIRGAS2000, havia a intensão por parte do GT3 em disponibilizar um único modelo de distorções em CA, o que exigiu um estudo aprofundado da relação entre as três realizações existentes. Verificou-se, durante o processo de análise, que as realizações CA de 1970 e de 1972 são disjuntas, isto é, não têm sobreposição na maioria dos pontos. Apenas quatro pontos são comuns às realizações de 1970 e 1972 e suas coordenadas são iguais, o que sugere que as realizações possam ser unidas em única realização. A realização de 1961, por sua vez, tinha cerca de 466 pontos comuns com relação à realização composta de 1970 e 1972 e estatisticamente diferentes quando analisadas as discrepâncias das coordenadas. Em razão dessas análises, optou-se em agrupar as realizações de 1970 e 1972 em uma única realização denominada de Córrego Alegre 1970+1972 e manter a realização de 1961 denominada de Córrego Alegre 1961 (IBGE, 2008). Para efeito desta pesquisa, serão utilizadas as denominações CA61 e CA7072 para se referir às realizações do Córrego Alegre de 1961 e 1970+1972, respectivamente.

A Figura 1 mostra a distribuição das estações CA nas realizações de 1961 (Figura 1a) e conjuntamente 1970 e 1972 (Figura 1b).

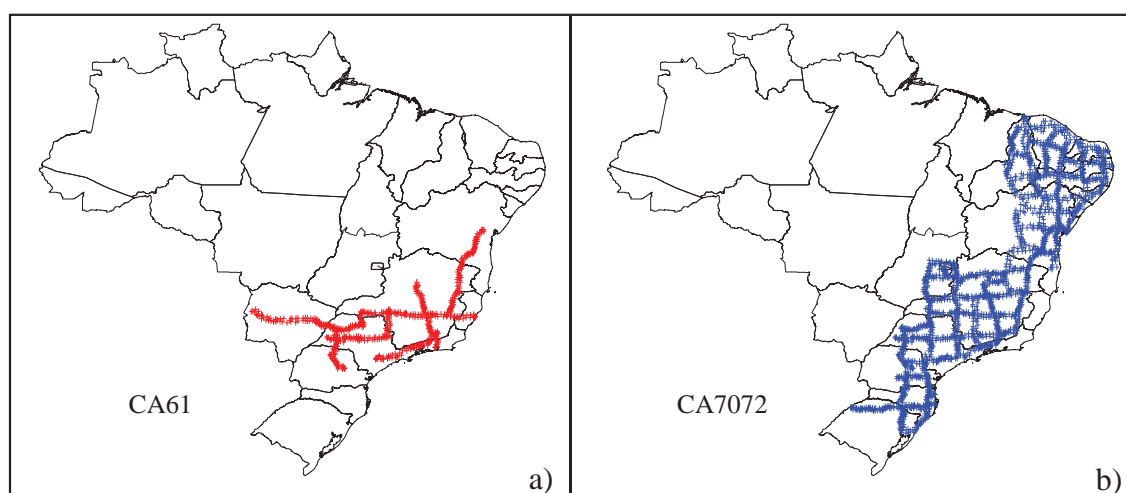


Figura 1 - Distribuição das estações CA61 (a) e CA7072 (b).

2.4.2 O SAD 69 e suas realizações

O SAD 69 é um sistema geodésico regional, de concepção clássica, que foi concebido com o objetivo de unificação do referencial para trabalhos geodésicos e cartográficos no continente Sul-Americano (COSTA, 2000).

Em 1944 foram iniciados os trabalhos para o estabelecimento de um Sistema Sul-Americano com o propósito de uniformizar uma rede continental de controle para todos os

levantamentos de engenharia e trabalhos cartográficos (FISHER, 1973). Somente em 1969 se deu a definição do SAD 69, durante a XI Consulta Pan-americana em Cartografia, realizada em Washington, nos Estados Unidos. No Brasil, O SAD 69 foi adotado como sistema de referência para trabalhos geodésicos e cartográficos oficialmente em 1977, em substituição ao sistema CA.

Trata-se de um sistema regional ou não geocêntrico devido ao deslocamento do centro do elipsóide de referência com relação ao centro de massa da Terra, face à melhor adaptação do elipsóide à área de interesse, no caso do SAD 69 a América do Sul. O sistema SAD 69 é também chamado de clássico, pois sua materialização se deu por meio de métodos de posicionamento denominados clássicos ou convencionais, destacando-se as cadeias de triangulação, poligonação e observações astronômicas.

A figura geométrica adotada para a Terra é o Elipsoide de Referência de 1967 ($a = 6.378.160$ m e $f = 1/298,25$) com orientação topocêntrica estabelecida através das coordenadas geodésicas do vértice CHUÁ iguais a $\varphi = 19^{\circ}45'41,6527''$ S e $\lambda = 48^{\circ}06'04,0639''$ W. A ondulação geoidal nesse vértice é considerada nula, enquanto as componentes meridiana e primeiro vertical do desvio da vertical são dadas, respectivamente, por $\varepsilon = -0,31''$ e $\eta = 3,52''$ (IBGE, 1996).

A rede planimétrica SAD 69 foi ajustada pela primeira vez na década de 60. Devido às longas redes de triangulação, trilateração e poligonação estendidas pelo continente Sul-Americano e às limitações computacionais da época, optou-se pelo ajustamento em blocos ou em áreas. O método de ajustamento adotado foi o *piece-meal*, no qual uma vez ajustada uma determinada área, as estações das áreas adjacentes comuns à ajustada são mantidas fixas, de modo que cada estação da rede só tenha um par de coordenadas associado. Segundo Costa (1999), esta metodologia foi uma das principais causas de acúmulo significativo de distorções geométricas (escala e orientação) na rede planimétrica. Outro fator que contribuiu com o acúmulo de distorções foi a não redução das observações geodésicas ao elipsóide e a aplicação destas em alguns trechos da rede com a utilização de mapas geoidais poucos precisos.

Com a evolução nos métodos de posicionamento, novos conjuntos de dados foram incorporados à rede, como os advindos de técnicas de posicionamento por satélites (GNSS). Estes dados, de melhor qualidade, foram utilizados como estrutura base para controle da rede clássica. Os problemas ainda remanescentes e o maior conjunto de dados culminaram em um novo ajustamento da rede planimétrica em SAD 69. Um requisito estabelecido para o novo ajustamento foi utilização de todas as observações disponíveis de forma simultânea. Utilizou-

se o sistema GHOST (*Geodetic adjustment using Helmert blocking Of Spacing and Terrestrial data*), o qual realiza o ajustamento de redes mediante sua decomposição em blocos de *Helmert*. Participaram deste ajustamento 4.759 estações entre estações GPS e da rede clássica. A ligação entre as duas estruturas (GPS e clássica) foi feita por 49 estações da rede clássica levantadas por GPS (COSTA, 1999).

Como forma de facilitar a distinção entre as duas realizações do sistema SAD69 são adotadas, para fins desta pesquisa, as denominações SAD69 e SAD69/96 para se referir, respectivamente, às realizações original e de 1996 do sistema SAD 69.

Uma comparação entre as observações utilizadas no ajustamento das duas realizações do SAD 69 é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 - Observações utilizadas nos ajustamentos SAD 69.

Observações	SAD69	SAD69/96
Estação fixa	1 (Chuá)	1 (Chuá)
n° de linhas de base	144	257 (triangulação) 1270 (poligonação)
n° de estações astronômicas	144	389
n° de direções horizontais	6.865	16.907
n° de linhas de base GPS	-	1.182
n° de posições injuncionadas (DOPPLER)	-	179

Fonte: COSTA; FORTES, 2000.

A Figura 2 apresenta a distribuição das estações pertencentes às realizações SAD69 (Figura 2a) e SAD69/96 (Figura 2b).

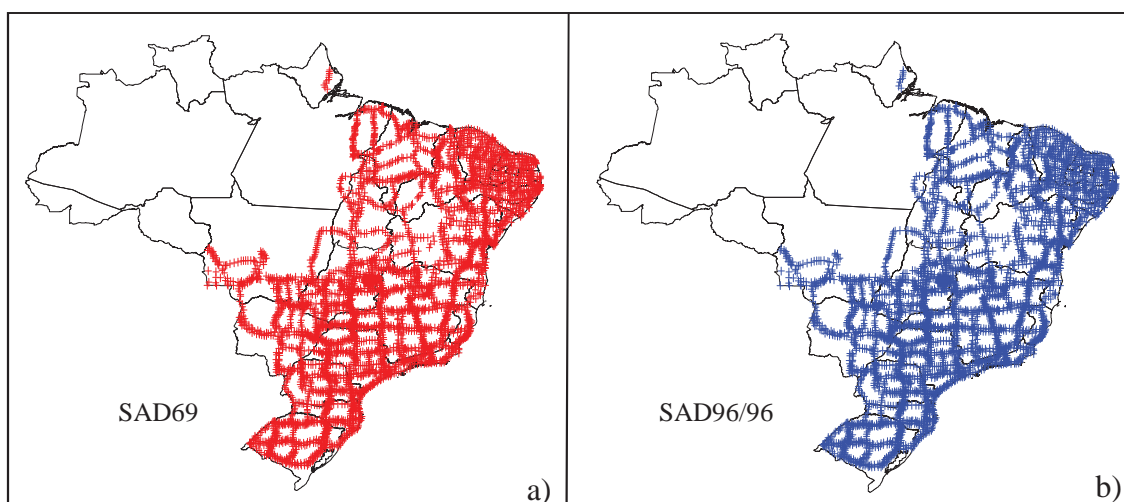


Figura 2 - Distribuição das estações SAD69 (esquerda) e SAD69/96 (direita).

Oficialmente as duas realizações do SAD 69 não sofreram alterações em termos de nomenclatura, sendo ambas denominadas de SAD 69. Segundo Oliveira (1998), a distinção entre sistema e rede é facilitada pelo contexto em que é empregado o termo SAD 69: se num sentido abstrato, trata-se da definição do sistema; se num sentido físico, suas materializações.

2.4.3 O SIRGAS2000

O projeto SIRGAS se desenvolveu com a motivação de adoção no continente Sul-Americano de uma rede de referência de precisão compatível com as técnicas atuais de posicionamento, notadamente as associadas ao GPS (IBGE, 1997).

Criado em 1993 e originalmente denominado Sistema de Referência Geocêntrico para a América do Sul, por dispor em sua primeira realização (SIRGAS1995) somente de estações localizadas no continente Sul-Americano, em sua segunda realização (SIRGAS2000) foram incorporadas estações da América Central, do Norte e Caribe. O SIRGAS2000 adota como figura geométrica de referência o Elipsóide do Sistema Geodésico de Referência de 1980 (*Geodetic Reference System of 1980 – GRS80*), cujos parâmetros geométricos são: $a = 6.378.160$ m e $f = 1/298,257222101$ (IBGE, 2005).

A primeira campanha SIRGAS ocorreu no período de 26 de maio a 04 de junho de 1995, onde foram utilizados dados de 58 estações principais e 9 excêntricas distribuídas em 11 países na América do Sul. As coordenadas finais desta realização estão referidas ao ITRF94, na época 1995,4 (IBGE, 1997).

A segunda campanha ocorreu no período de 10 a 19 de maio de 2000, sendo utilizadas 184 estações distribuídas em todo o continente Americano. O processamento dos dados foi realizado por três centros de processamento SIRGAS: o IBGE no Brasil; o DGFI (*Deutsche Geodätische Forschungsinstitut*) e o BKG (*Bundesamt für Kartographie und Geodäsie*) na Alemanha. As coordenadas finais desta realização estão referidas ao ITRF2000 na época 2000,4 e tem precisão da ordem de 3 a 6 mm. A distribuição das estações utilizadas na campanha SIRGAS2000 pode ser visualizada na Figura 3.

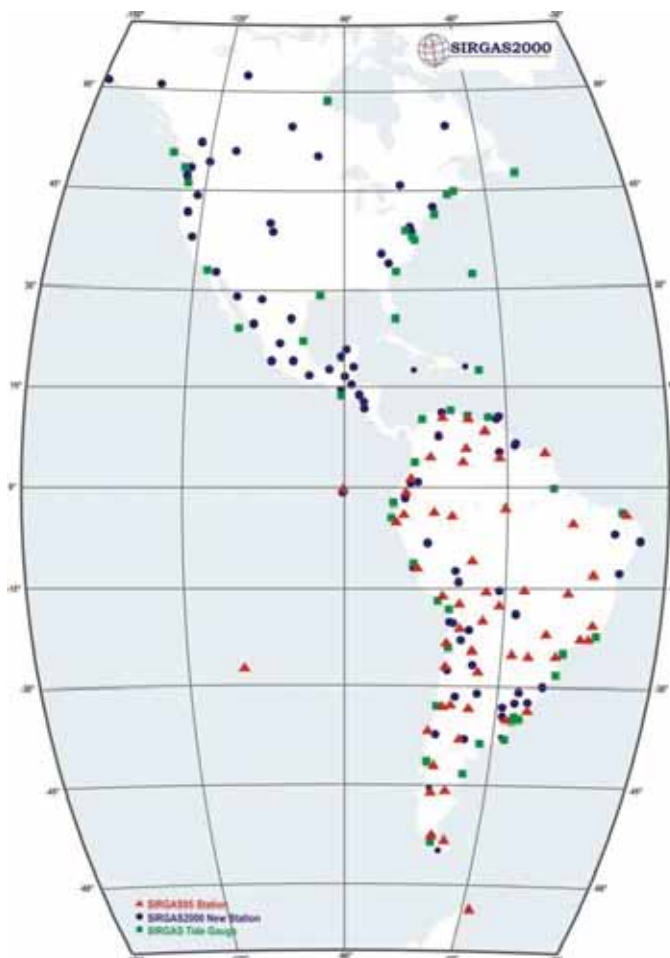


Figura 3 - Distribuição das estações da campanha SIRGAS2000.
(Fonte: SIRGAS, 2011)

No que se refere aos levantamentos com GPS, o SIRGAS2000 é compatível com o WGS84 (G1150) com uma diferença menor que 0,01 m.

Durante um período de transição, não superior a 10 anos, a contar da adoção oficial do SIRGAS em fevereiro de 2005, pode ser utilizado em concomitância o SAD 69, para o SGB, e ainda o Córrego Alegre, para o Sistema Cartográfico Nacional (IBGE, 2005). Esse período também é uma referência para a disponibilização de aplicativos e métodos de apoio aos usuários para adoção definitiva do SIRGAS2000. Inserido neste contexto está o processo de conversão de coordenadas entre os referenciais antigos e o novo, juntamente com o tratamento das distorções da rede.

A distribuição das estações da realização SIRGAS2000 é apresentada na Figura 4.

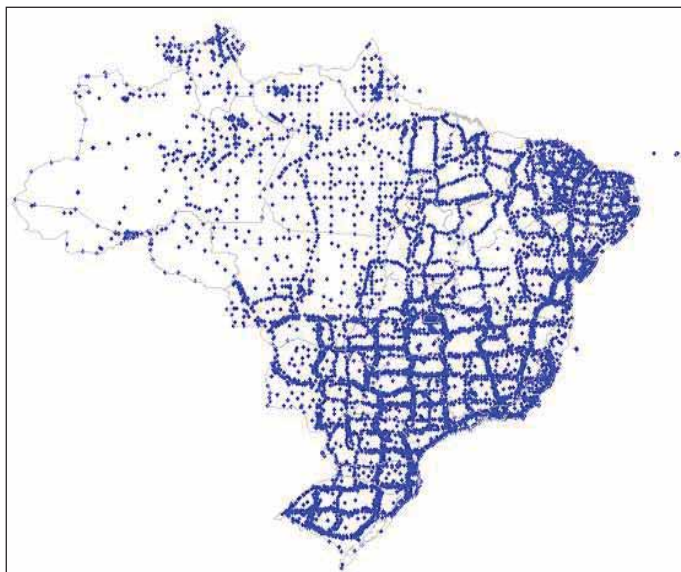


Figura 4 - Distribuição das estações da realização SIRGAS2000.
(Fonte: IBGE, 2008).

A mais recente realização do SIRGAS está associada à Rede SIRGAS de Operação Contínua (SIRGAS-CON), composta por 250 estações GNSS contínuas, das quais 48 pertencem à Rede Global IGS (*International GNSS Service*). A rede SIRGAS-CON compreende dois níveis de classificação (SIRGAS, 2011):

1. Uma rede de cobertura continental (SIRGAS-CON-C), densificação primária do ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*) na América Latina.
2. Redes de densificação (SIRGAS-CON-D) que incluem as estações de referência não contidas na rede continental e proporcionam o acesso ao ITRF a nível local.

Soluções multianuais são disponibilizadas pela rede SIRGAS-CON, sendo a mais recente denominada SIR11P01, que inclui soluções semanais calculadas pelos centros de análise SIRGAS entre 02 de Janeiro de 2000 e 16 de Abril de 2011. A solução SIR11P01 proporciona coordenadas e velocidades de 230 estações referenciadas ao ITRF2008, na época 2005,0, com precisão estimadas das coordenadas de +/- 1,0 mm (precisão horizontal) e +/-2,4 mm (precisão vertical) (SIRGAS, 2011).

3 DISTORÇÕES EM REDES GEODÉSICAS

Neste capítulo são apresentados conceitos sobre transformação de coordenadas associada a distorções em redes geodésicas, foco principal da pesquisa. Algumas experiências internacionais são apresentadas, contextualizando o estado da arte nas pesquisas sobre o assunto. Na sequência é feita uma análise das distorções nas realizações de referenciais geodésicos oficiais do Brasil.

3.1 Conceituação

A coexistência de diferentes sistemas geodésicos, em suas diferentes realizações, é uma realidade e implica na atribuição de diferentes coordenadas a um mesmo ponto na superfície terrestre. O que se pretende, no entanto, é que se possa migrar de um referencial (ou realização) ao outro da maneira mais confiável possível, modelando as distorções presentes.

As distorções existentes nas realizações de sistemas de referência podem ser originadas por erros de natureza aleatória, sistemática ou grosseira. As causadas pelos erros aleatórios são inevitáveis, pois constituem as flutuações probabilísticas e refletem a precisão das observações/parâmetros. Porém, a magnitude e os efeitos destes erros devem estar em níveis aceitáveis aos objetivos da rede. Já as distorções causadas pelos erros sistemáticos e grosseiros, nem sempre satisfatoriamente minimizados ou eliminados, podem atingir magnitudes que comprometem os propósitos da rede (OLIVEIRA, 1998).

Para compreender o conceito de distorções e seu efeito nas redes geodésicas, é apresentado o seguinte exemplo adaptado de Collier (2002).

A Figura 5a representa o levantamento de uma rede secundária referenciada a dois vértices de uma rede de primeira ordem (vértices de controle). As coordenadas dos pontos da rede secundária resultam do ajustamento das observações com relação à estrutura materializada pelos pontos de controle. A Figura 5b mostra a mesma rede adensada por mais alguns pontos, sendo incluídas novas observações e pontos de controle. Um novo ajustamento da rede resulta em novas coordenadas para os pontos inicialmente ajustados (Figura 5a). Os vetores que aparecem na Figura 5b representam o resultado da mudança de coordenadas. As

diferenças entre as novas coordenadas (resultantes do novo ajustamento) e as anteriores (primeiro ajustamento) representam as distorções da antiga estrutura com relação à nova.

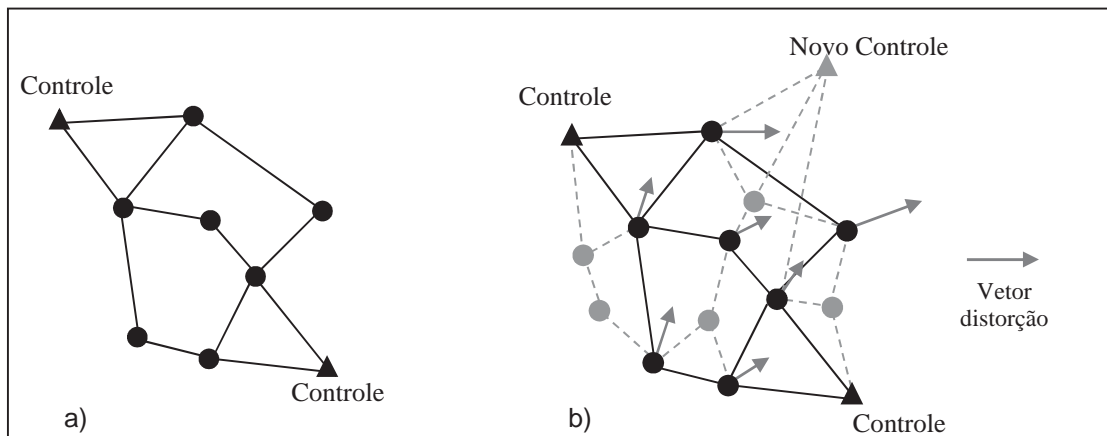


Figura 5 - Distorções devido ao adensamento da rede geodésica
(Fonte: Adaptada de Collier (2002))

Neste exemplo, a distorção ocorre devido à própria atualização e adensamento da rede. Isso indica que a distorção independe da mudança de referencial, já que a rede apresentada foi adensada através de novos pontos de controle referidos ao mesmo sistema de referência. Para que as coordenadas dos pontos da Figura 5a correspondam às suas reais posições após o reajustamento, um modelo de distorção deve ser utilizado.

Dentre as principais causas que provocam as distorções, pode-se citar: qualidade das injunções absolutas no ajustamento das redes, utilização de diferentes técnicas de coleta de dados de diferentes precisões, estratégias de cálculo e ajustamento, etc. Muitos desses fatores são inevitáveis e decorrentes de limitações tecnológicas da época do ajustamento, ou mesmo do próprio processo de modernização da rede.

É importante distinguir dois conceitos importantes quando se trata de transformação entre redes geodésicas, o conceito de *shift* (discrepância) e de distorção. O *shift* trata da discrepância total entre as coordenadas homólogas conhecidas nas realizações de destino e de origem. O *shift* envolve uma transformação geométrica juntamente com as distorções residuais presentes na rede. Não havendo distorções na rede geodésica (caso teórico ideal) as coordenadas na realização de origem poderiam ser associadas à realização de destino apenas com a aplicação de uma transformação geométrica, como por exemplo, a transformação de similaridade. Portanto, a distorção pode ser entendida como sendo o efeito que não é modelado no processo de conversão de coordenadas a partir de uma transformação geométrica, ou seja, a distorção é igual ao *shift* menos a porção da discrepância dada pela transformação geométrica.

3.2 A Transformação de Coordenadas Aliada à Modelagem de Distorções

O processo de modelagem das distorções está relacionado com o processo de transformação de coordenadas entre redes geodésicas, sendo essencial para preservar a integridade existente no conjunto de dados, além de assegurar uma transformação confiável independente do processo adotado.

Diversos modelos para transformação de coordenadas são apresentados na literatura, dentre os quais estão: modelos polinomiais complexos e reais (JUNKINS; ERICKSON, 1996); transformações geométricas de similaridade (também denominada isogonal, conforme ou de *Helmert*), ortogonal, afim e projetiva (IBGE, 2005); colocação pelo Método dos Mínimos Quadrados (COLLIER, 2002); e modelos baseados em grades de transformação (NOAA, 1990). Entre os mais utilizados destacam-se a transformação de similaridade com 7 parâmetros e aqueles baseados em grades de transformação. Alguns modelos adotados em diferentes países na transformação de coordenadas e modelagem das distorções serão apresentados na seção seguinte, contextualizando as pesquisas sobre o tema.

O que se espera no processo de modelagem é a correção das distorções, de forma a relacionar satisfatoriamente dois conjuntos de coordenadas em diferentes sistemas de referência (ou realizações). Collier (2002) identifica quatro critérios que um modelo de transformação deve satisfazer:

- simplicidade: para facilitar o entendimento e adoção do modelo pelos usuários;
- eficiência: para minimizar o tempo e demanda computacional na modelagem;
- unicidade: para assegurar a existência de uma solução única; e
- rigor: para prover o melhor resultado possível para a transformação.

Dessa forma, um modelo ideal deve ser de simples assimilação por parte dos usuários, eficiente no processamento das informações e ao mesmo tempo rigoroso, e proporcionar uma solução única. Os critérios unicidade e rigor estão mais estritamente relacionados com a qualidade do método de transformação. Os dois primeiros critérios (simplicidade e eficiência) estão relacionados com a utilização do método pelos usuários. A eficiência depende basicamente do volume de dados a ser processado e a simplicidade é um critério relativo que depende do perfil do usuário.

3.3 Experiências Internacionais na Transformação de Coordenadas e Modelagem das Distorções

Diversos países tiveram, em algum momento, a necessidade de métodos de transformação de coordenadas devido à atualização de suas redes geodésicas, seja pela disponibilidade de um conjunto maior de dados ou pela mudança de referencial. Países, tais como, Canadá, Austrália e Estados Unidos, adotaram soluções específicas de acordo com as características de suas redes geodésicas fundamentais.

3.3.1 Experiência Canadense

No Canadá, foi desenvolvido pela *Geodetic Survey Division of Geomatics Canada* o pacote de aplicativos denominado *National Transformation Version 2* (NTv2). O pacote de aplicativos e de dados incluídos no NTv2 foi utilizado para promover um padrão nacional de transformação de coordenadas entre os sistemas NAD27 (*North American Datum of 1927*) e NAD83 (*North American Datum of 1983*).

O modelo de distorção total do NTv2 é composto por um modelo global e um local. A distorção total predita ($\hat{\delta}$) é obtida pela soma das distorções global e local preditas:

$$\hat{\delta} = \hat{\delta}^G + \hat{\delta}^L, \quad (1)$$

sendo $\hat{\delta}^G$ a distorção global predita e $\hat{\delta}^L$ a distorção local predita.

A distorção global predita é obtida por um polinômio complexo no qual são modeladas simultaneamente as distorções em latitude e longitude ($\hat{\delta}\varphi^G, \hat{\delta}\lambda^G$):

$$\hat{\delta}^G = \{ \hat{\delta}\varphi^G, \hat{\delta}\lambda^G \}. \quad (2)$$

O polinômio complexo de grau n aplicado na modelagem global é representado por:

$$\hat{\delta}z = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n, \quad (3)$$

onde z e $\hat{\delta}z$ são números complexos definidos como:

$$z = \varphi + i\lambda, \quad (4)$$

e

$$\hat{\delta z} = \hat{\delta \varphi}^G + i \hat{\delta \lambda}^G. \quad (5)$$

Os coeficientes complexos $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ podem ser estimados em um ajustamento pelos mínimos quadrados:

$${}_i A_n \cdot {}_n X_1 = {}_i L_1 \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_i & z_i^2 & \cdots & z_i^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \\ \delta z_3 \\ \vdots \\ \delta z_i \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sendo:

${}_i A_n$ - matriz das derivadas parciais (ou matriz dos coeficientes) de dimensão $i \times n$ (nº de pontos de controle x grau do polinômio), formada pelas coordenadas antigas dos pontos de controle (z_i);

${}_n X_1$ - vetor incógnito dos parâmetros a serem determinados, formado pelos coeficientes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$; e

${}_i L_1$ - vetor das observações formado pela distorção total dos pontos de controle (δz_i).

Já o modelo local trata individualmente a modelagem em cada componente ($\hat{\delta \varphi}^L, \hat{\delta \lambda}^L$) em função de suas distorções residuais globais ($\delta \varphi_i^R, \delta \lambda_i^R$):

$$\hat{\delta \varphi}^L = \frac{\sum w_i \cdot \delta \varphi_i^R}{\sum w_i}, \quad (7)$$

$$\hat{\delta \lambda}^L = \frac{\sum w_i \cdot \delta \lambda_i^R}{\sum w_i}, \quad (8)$$

sendo w_i o peso atribuído a um ponto de controle i obtido por:

$$w_i = e^{-\left(\frac{d_i}{r}\right)^2}, \quad (9)$$

sendo:

d - distância entre o ponto de predição \vec{P} e o i -ésimo ponto de controle \vec{C} ; e

r - densidade da rede no ponto de predição.

A escolha do valor de r é feita a partir da seguinte condição:

$$r = \begin{cases} R_i, & \text{se } \exists i | d_i < R_i \\ \min d_i & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (10)$$

onde R é o raio de vizinhança exclusiva de um ponto de controle. Seu valor é calculado por:

$$R_i = \frac{D_i}{2}, \quad (11)$$

sendo que o valor D_i representa a distância do ponto de predição i do seu ponto de controle vizinho mais próximo.

A incerteza da distorção predita é calculada através do modelo proposto por Junkins e Erickson (1996):

$$\hat{S}_\delta = \sqrt{\frac{\sum w_i^2 \cdot \sum (\delta_i - \hat{\delta})^2}{(\sum w_i)^2 \cdot (n-1)}}, \quad (12)$$

onde:

$\hat{\delta}$ - distorção predita no nó da grade para latitude e longitude

δ_i - distorção para cada ponto de controle (i) em latitude e longitude;

w_i - peso para cada ponto de controle; e

n - número de pontos de controle.

3.3.2 Experiência Australiana

A Austrália passou por um processo de transição de sistema geodésico em setembro de 1995, adotando oficialmente o GDA (*Geocentric Datum of Australia*) em substituição ao AGD (*Australian Geodetic Datum*). O GDA é realizado por um conjunto de coordenadas de estações geodésicas da Rede Fiducial Australiana (AFN – *Australian Fiducial Network*), referenciadas ao GRS80 (*Geodetic Reference System 1980*), que faz parte do ITRF92 na época 1994,0. Foram realizadas duas materializações do AGD denominadas de AGD66 e AGD84 as quais abrangem regiões diferentes da Austrália. Durante o processo de análise das redes verificou-se a existência de distorções da ordem de 3 a 5 metros entre as duas realizações do AGD e o GDA.

A colocação por mínimos quadrados, ou mais particularmente a interpolação linear por mínimos quadrados foi a técnica utilizada para gerar grades de distorções utilizada na

transformação entre o AGD e o GDA. Duas grades de distorções foram desenvolvidas, uma para cada realização do AGD. Nesta técnica, a contribuição de pontos vizinhos no cálculo das distorções é ponderada na proporção de suas distâncias ao ponto de interpolação, onde são estimadas as componentes da distorção ($\delta\phi$, $\delta\lambda$) em cada nó da grade. A Figura 6 ilustra a interpolação da distorção em um nó da grade a partir de 6 pontos vizinhos, cujas componentes da distorção são conhecidas ou calculadas.

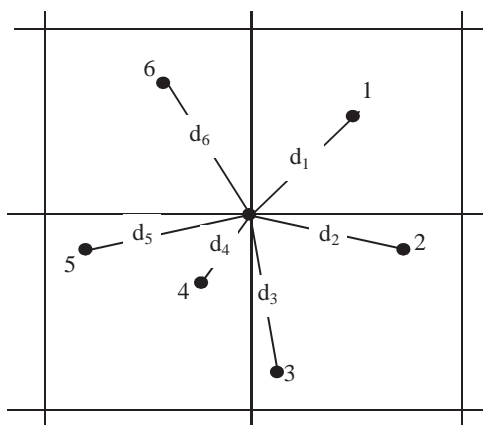


Figura 6 - Interpolação do nó da grade a partir de pontos vizinhos.
(Fonte: Adaptada de COLLIER, 2002).

A seguinte sequência de etapas foi realizada no processo de modelagem de distorções e na geração da grade de transformação no caso australiano (COLLIER, 2002):

1. aplicação da transformação de similaridade de 7 parâmetros para transformação das coordenadas AGD para o GDA;
2. comparação das coordenadas transformadas com coordenadas GDA94 conhecidas para determinar a distorção;
3. identificação ou rejeição de pontos não conformes, isto é, pontos nos quais a distorção é substancialmente diferente do padrão gerado pela distorção nos pontos vizinhos;
4. agrupamento dos pontos dados para produzir uma distribuição mais homogênea para a interpolação;
5. cálculo da função de covariância empírica para as componentes da distorção;
6. ajuste da função de covariância de *Reilly* para os dados de covariância empírica;
7. uso da colocação por mínimos quadrados, dados ajustados e derivados das funções de covariância analíticas para cálculo das componentes da distorção em cada nó da grade;

8. cálculo das componentes da transformação conforme (latitude e longitude) em cada nó da grade e adição das componentes da distorção;
9. cálculo da acurácia da transformação em cada nó da grade;
10. teste de desempenho da grade.

A função de covariância, gerada empiricamente pelos dados utilizados, expressa o comportamento espacial da distorção em função da distância. Um modelo analítico é então ajustado para os pontos empíricos, sendo este de fundamental importância para a determinação de termos de covariância relevantes entre os pontos dados e os pontos de interpolação. A função analítica indicada para o modelo de covariância empírico é baseada em elementos derivados da função de covariância analítica utilizando a distância entre os pontos dados e os pontos de interpolação.

A qualidade final esperada pelo modelo varia de 0,10 m até 1,50 m dependendo da região de análise.

3.3.3 Experiência Americana

Nos Estados Unidos foi desenvolvido o sistema computacional denominado NADCON (*North American Datum Conversion*) para a conversão entre o NAD27, antigo sistema de referência, e o NAD83, adotado oficialmente em 1993. O NADCON se baseia em duas etapas para o processo de transformação das coordenadas (NOAA, 1990):

1. geração de uma grade de transformação contendo os valores das diferenças entre as materializações dos dois referenciais para os nós da grade;
2. interpolação dos valores das diferenças de coordenadas em pontos a se determinar.

A geração da grade de transformação se fundamenta na técnica de curvatura mínima. Esta técnica trata de uma abordagem matemática que minimiza a curvatura total ou razão de curvatura, associada a uma suavização de superfícies, sendo capaz de descrever os valores das diferenças entre os referenciais realizados (NOAA, 1990). Assim, duas superfícies matemáticas são geradas para realizar a transformação de coordenadas, sendo cada uma dessas superfícies associada a uma componente das coordenadas (ϕ , λ).

Na interpolação das diferenças de coordenadas, um polinômio de ajuste local equivalente à interpolação bilinear é utilizado. A interpolação é feita pelo ajuste de uma superfície a quatro pontos nodais vizinhos ao ponto de interpolação.

De acordo com NOAA (1990), os valores de deslocamento (*shift*) nos Estados Unidos entre o NAD83 e o NAD27 são em média de 9,746 m em latitude e 20,690 m em longitude. Em geral, a precisão média alcançada com a utilização do NADCON é de 0,15 m.

3.4 Transformações de Coordenadas e Modelagem das Distorções na Rede Geodésica Brasileira

No Brasil, diferentes metodologias foram utilizadas no processo de transformação de coordenadas entre referenciais geodésicos. Em IBGE (1983) são sugeridas as equações diferenciais simplificadas de Molodenski para a transformação de coordenadas geodésicas curvilíneas entre os sistemas Córrego Alegre e SAD 69. Com a adoção do SIRGAS2000, foram publicados em IBGE (2005) parâmetros para a transformação de coordenadas geodésicas cartesianas entre SAD69 e SIRGAS2000, utilizando a abordagem cartesiana clássica. Nesse processo, eram estimados parâmetros de transformação (especificamente translações) entre os sistemas de referência, considerando o paralelismo dos eixos de suas superfícies de referência.

Em 2005, o IBGE disponibilizou o aplicativo denominado TCGEO, o qual possibilitava aos usuários a conversão de coordenadas entre os referenciais SAD69 e SIRGAS2000. A conversão também se baseava somente na aplicação de parâmetros de translação e o aplicativo apresentava como saída um resíduo da transformação, que proporcionava um indicativo do valor de distorção no ponto considerado. Para o cálculo dos resíduos, dois fatores eram considerados: a posição geográfica do ponto e a realização da qual o ponto pertence. A distinção quanto à origem das coordenadas era feita em termos de rede GPS, rede clássica SAD69 e rede clássica SAD69/96.

A mais atual mudança no que se refere à conversão de referenciais no SGB ocorreu em dezembro de 2008, com a disponibilização do ProGrid. O ProGrid foi desenvolvido visando permitir a migração de banco de dados e mapas de Córrego Alegre e SAD69 para o SIRGAS2000, em um esforço de disponibilizar à comunidade de usuários de dados geoespaciais de uma ferramenta que facilite a transição para o SIRGAS2000 (IBGE, 2008).

O principal diferencial do ProGrid consiste na incorporação da modelagem das distorções, até então não considerada no processo de conversão de coordenadas no Brasil. Com isso, o ProGrid possibilita um melhor relacionamento das coordenadas entre os referenciais envolvidos no processo de conversão.

Para realizar as transformações, o ProGrid utiliza grades no formato NTV2 (pacote de aplicativos computacionais desenvolvido e utilizado no Canadá), geradas a partir de estações homólogas nas seguintes materializações (IBGE, 2008):

- a materialização de 1961 do Córrego Alegre, referida no ProGrid como Córrego Alegre (1961);
- as materializações de 1970 e 1972 do Córrego Alegre, tratadas em conjunto, e referidas como Córrego Alegre (1970+1972) no ProGrid;
- a materialização original do SAD69, incluindo apenas a rede clássica, chamada simplesmente de SAD69 Rede Clássica;
- a materialização de 1996 do SAD69, incluindo apenas a rede clássica, chamada no ProGrid de SAD69/96 Rede Clássica.

Os pontos determinados com técnicas de posicionamento por satélites não são utilizados no conjunto de estações de cálculo do SAD69. No processo de análise das distorções realizado pelos grupos de estudo ligados ao GT3, constatou-se que a modelagem em estações provenientes de técnicas espaciais degrada a qualidade dos resultados. Isso ocorre devido a estas estações terem um padrão de distorção menor que o das estações provenientes de técnicas clássicas de posicionamento (IBGE, 2008). Dessa forma, há um tratamento diferenciado para estas estações, as quais foram denominadas no ProGrid de SAD69 Técnica Doppler ou GPS.

O ProGrid possibilita a realização de quatro grupos de transformações, são elas (IBGE, 2008):

1. Transformações bidimensionais: usam apenas as grades de transformação, sendo aquelas para as quais o ProGrid foi originalmente projetado. Envolvem o Córrego Alegre, SAD69 e SIRGAS2000;
2. Transformações tridimensionais: utilizam os parâmetros de transformação oficiais determinados pelo IBGE e publicados na Resolução R.PR – 1/2005, de

22/02/2005 (IBGE, 2005), baseadas na legislação em vigor. Envolvem o SAD69 Técnica Doppler ou GPS e SIRGAS2000;

3. Transformações mistas: utilizam conjuntamente as grades de transformação e os parâmetros de transformação oficiais, ou duas grades na mesma transformação. São transformações onde nem o referencial de entrada nem o de saída são o SIRGAS2000, porém o utilizam internamente durante o processamento.
4. Transformações entre o mesmo referencial: envolve apenas transformações entre tipos de coordenadas dentro do mesmo referencial, desse modo, não envolvem nem grade e nem parâmetros de transformação.

Com relação à precisão da transformação, o ProGrid expressa os valores em função do desvio padrão para latitude e longitude. Nas transformações bidimensionais, o desvio padrão é obtido diretamente da grade utilizada, nas transformações tridimensionais é calculado em função dos parâmetros envolvidos e nas transformações mistas é obtido propagando-se os desvios padrão da grade e dos parâmetros de transformação.

Outro aspecto importante com relação ao ProGrid consiste na possibilidade de utilizar diretamente as grades de transformação em sistemas computacionais compatíveis com o formato de grades NTV2. As grades de transformação no formato *.GSB são disponibilizadas no diretório de instalação do ProGrid e são aceitas em muitos sistemas computacionais de geoprocessamento. Dessa forma, é possível transformar para o SIRGAS2000 diretamente em sistemas de geoprocessamento, produtos cartográficos referenciados ao CA e o SAD69.

3.5 Análise das Distorções nas Realizações dos Referenciais do SGB

As distorções nas realizações dos referenciais adotados no Brasil variam em magnitude e comportamento, em função de diversos fatores, tais como: técnicas de posicionamento e ajustamento, forma de expansão da rede (campanhas de levantamento), equipamentos de diferentes natureza e qualidade empregados, etc. As análises das distorções apresentadas na sequência referem-se às realizações dos sistemas Córrego Alegre e SAD 69,

de acordo com a organização dos dados estabelecida no ProGrid, ou seja, duas realizações de cada sistema, independentes dos dados de levantamento por satélites.

Conforme abordado na Seção 3.1, as distorções são efeitos não modelados pelos parâmetros de transformação no processo de transformação de coordenadas entre realizações de referenciais geodésicos. Assim, é possível calcular as distorções pelas diferenças entre as coordenadas ajustadas em um determinado sistema geodésico e as coordenadas, no mesmo sistema, transformadas a partir dos parâmetros de transformação.

$$\begin{aligned}\delta\varphi_i &= \varphi_i - \varphi'_i, \\ \delta\lambda_i &= \lambda_i - \lambda'_i.\end{aligned}\tag{13}$$

sendo:

$\delta\varphi_i, \delta\lambda_i$ - distorções em latitude e longitude, respectivamente.

φ_i, λ_i - coordenadas ajustadas no sistema de destino; e

φ'_i, λ'_i - coordenadas transformadas para o sistema de destino.

As distorções calculadas pela Equação 13 são dadas em medidas angulares, para o cálculo desses valores em metros, podem ser utilizadas as seguintes equações apresentadas em Jekeli (2006):

$$\begin{aligned}ds_{meridiano} &= M \cdot d\varphi, \\ ds_{paralelo} &= N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda.\end{aligned}\tag{14}$$

sendo:

$ds_{meridiano}, ds_{paralelo}$ - comprimentos de arcos ao longo dos meridianos e paralelos, respectivamente;

N, M - raios de curvatura das seções primeiro vertical e meridiana, respectivamente;

$d\varphi, d\lambda$ - separação angular ao longo dos paralelos e meridianos; e

φ - latitude geodésica.

3.5.1 Análise das distorções nas realizações do sistema Córrego Alegre

O sistema Córrego Alegre foi realizado com a utilização de técnicas clássicas de posicionamento, triangulação e poligonação. Em termos oficiais, não existem parâmetros de transformação entre os referenciais Córrego Alegre e SIRGAS2000. A transformação de CA para SIRGAS2000 é realizada utilizando-se uma transformação intermediária para SAD 69, para o qual existem parâmetros de transformação a partir do CA. Assim, as coordenadas CA transformadas para SIRGAS2000 utilizam a soma dos parâmetros de CA para SAD 69 e de SAD 69 para SIRGAS2000. Os efeitos não modelados pelos parâmetros de transformação são considerados distorções da rede. A Tabela 2 apresenta algumas informações sobre as distorções nos 624 pontos da realização CA61.

Tabela 2 - Estatísticas das distorções na realização CA61.

Discrepâncias (m)	Latitude	Longitude
Máxima	7,519	12,321
Mínima	-3,641	-10,880
Média	1,035	0,118
Média Absoluta	1,865	1,676
RMSE	2,552	2,623
90% ≤	4,728	4,376

De acordo com a Tabela 2, o valor médio absoluto das distorções é de 1,865 m em latitude e 1,676 m em longitude, com RMSE (*Root Mean Square Error* - Raiz do Erro Médio Quadrático) de 2,552 m e 2,623 m em cada componente. O comportamento das distorções ao longo no território nacional para a realização CA61 é mostrado, como uma representação de vetores, na Figura 7.

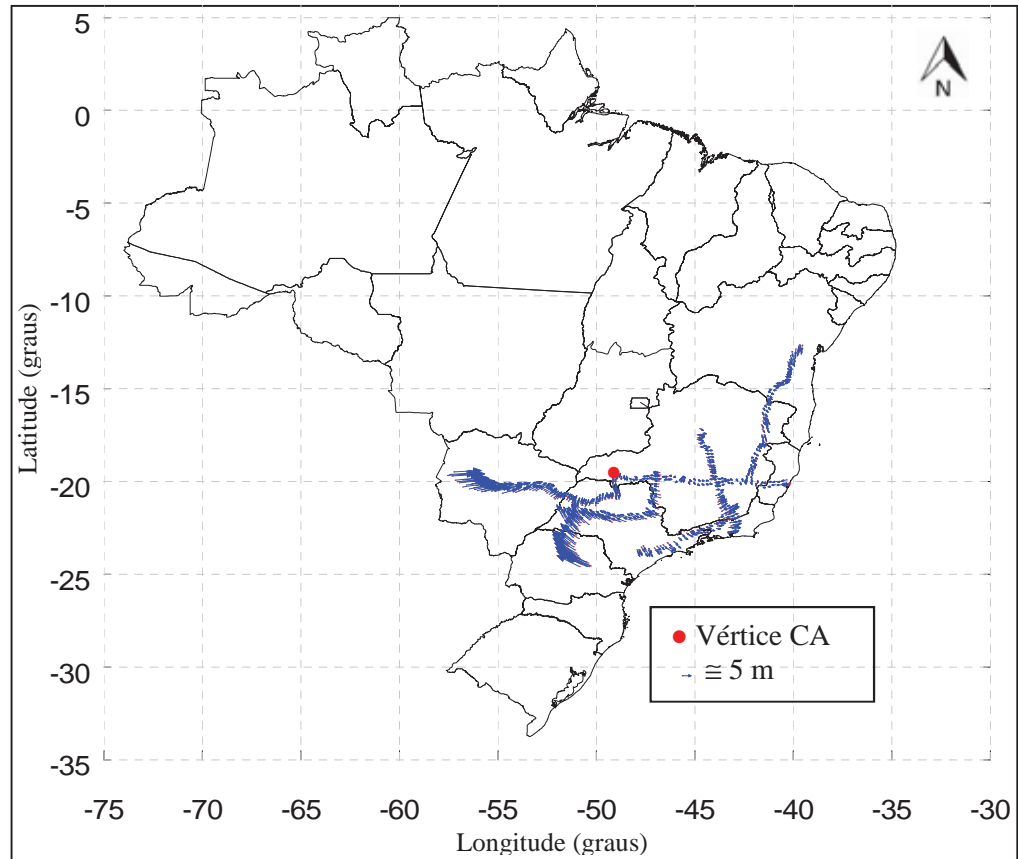


Figura 7 - Distorções entre as realizações CA61 e SIRGAS2000.

Verifica-se pela Figura 7 que as distorções têm magnitude menor nas proximidades do vértice Córrego Alegre, origem do sistema, que se localiza no sudoeste de Minas Gerais e é destacado na figura. Os maiores valores de distorção se localizam no oeste do estado de São Paulo e no estado no Mato Grosso do Sul, conforme destacado na Figura 8. Em geral, as distorções seguem um comportamento homogêneo ao longo da rede, sem variações abruptas de direções e magnitude.

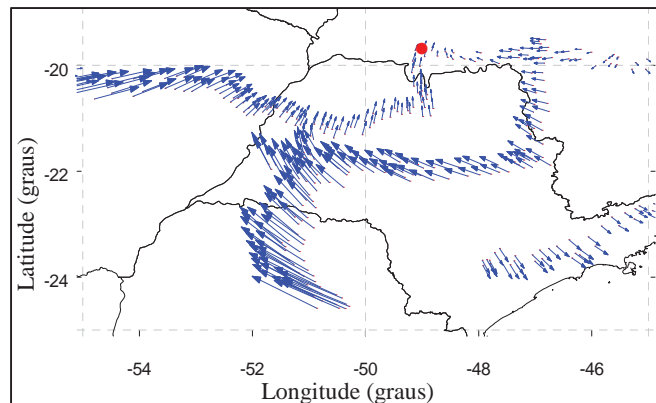


Figura 8 - Detalhe das distorções na realização CA61.

A realização CA7072 também é composta por estações de triangulação e poligonização. Embora se trate do mesmo referencial, as realizações CA61 e CA7072 apresentam distorções de comportamento e magnitude distintos. A Tabela 3 contém algumas informações sobre as distorções nas 2.152 estações da realização CA7072.

Tabela 3 - Estatísticas das distorções na realização CA7072.

Discrepâncias (m)	Latitude	Longitude
Máxima	6,611	4,677
Mínima	-4,249	-3,965
Média	0,875	-0,085
Média Absoluta	2,279	1,096
RMSE	2,751	1,489
90% ≤	4,729	2,665

As distorções médias absolutas são da ordem de 2,279 m e 1,096 m, com RMSE de 2,751m e 1,489 m, respectivamente em latitude e longitude.

A Figura 9 mostra o comportamento das distorções para a realização CA7072.

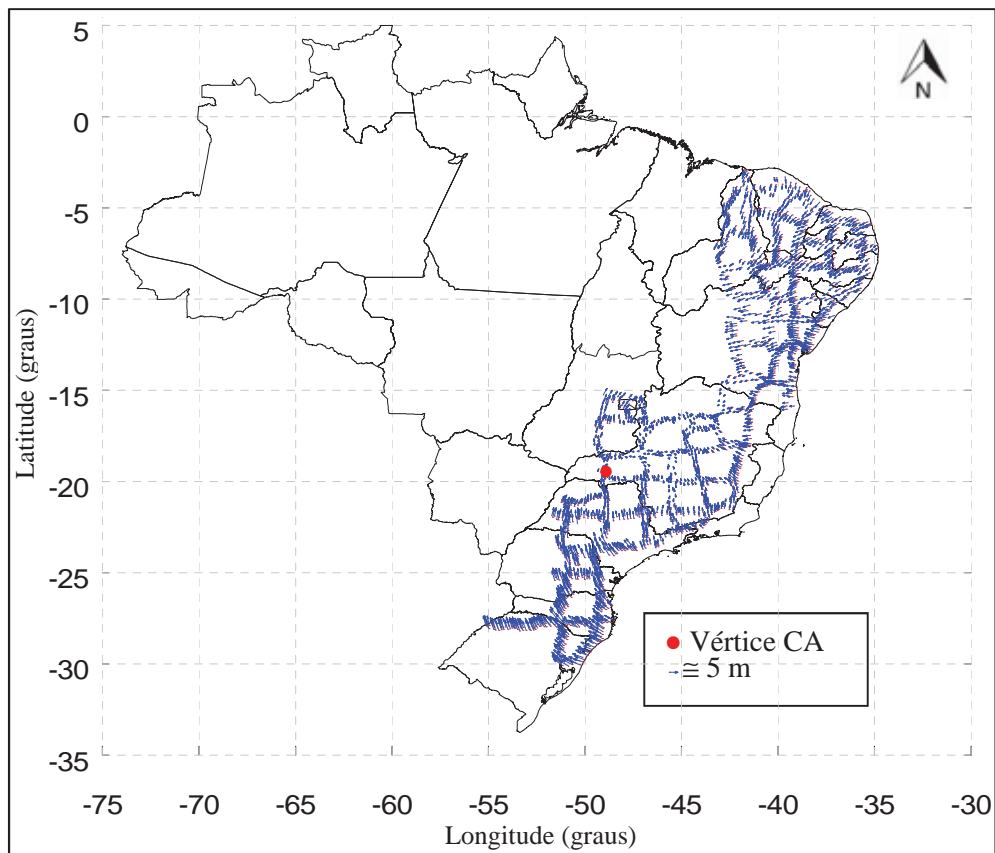


Figura 9 - Distorções entre as realizações CA7072 e SIRGAS2000.

As distorções apresentam maiores magnitudes ao sul do vértice Córrego Alegre (Figura 10), origem do sistema geodésico.

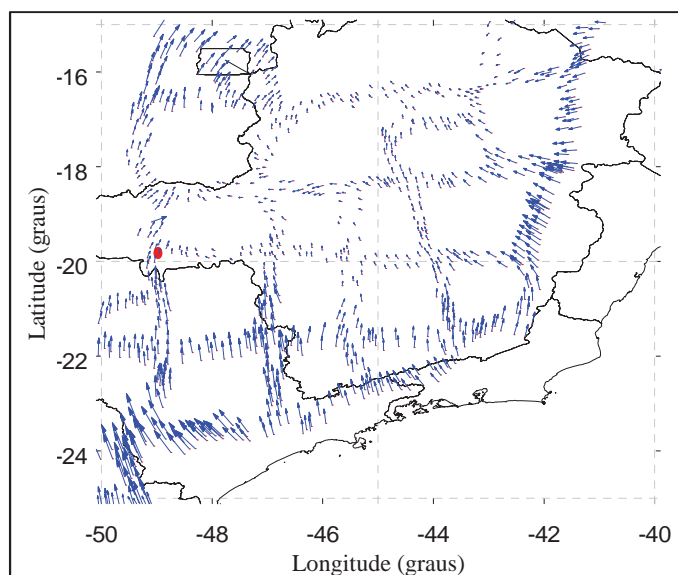


Figura 10 - Detalhe das distorções na realização CA7072.

3.5.2 Análise das distorções nas realizações do SAD 69

As realizações do SAD 69 contém um número maior de estações, cobrindo a maior parte do território nacional, embora ainda exista carência de estações na região amazônica.

Algumas estatísticas das distorções nas 4.604 estações clássicas da realização SAD69 são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 - Estatísticas das distorções na realização SAD69.

Discrepâncias (m)	Latitude	Longitude
Máxima	14,122	38,877
Mínima	-22,971	-9,945
Média	1,435	-0,110
Média Absoluta	3,320	1,455
RMSE	4,154	2,286
90% ≤	6,862	3,446

A realização SAD69 apresenta distorções de grande magnitude, chegando a valores de 38,877 m, conforme a Tabela 4. A magnitude e o sentido das distorções é altamente aleatório ao longo da rede, conforme se observa na Figura 11. Um dos principais fatores de acúmulo de distorções na realização SAD69 foi o ajustamento *piece-meal* abordado na Seção 2.4.2

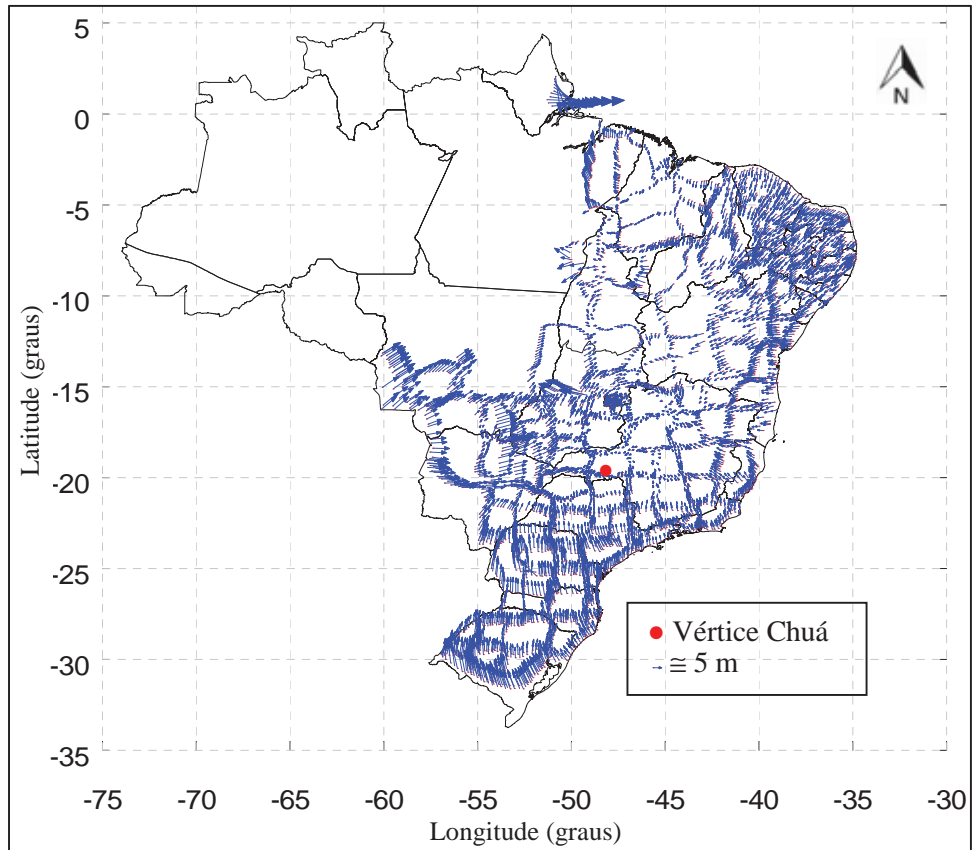


Figura 11 - Distorções entre as realizações SAD69 e SIRGAS2000.

Uma das regiões complexas para a modelagem na realização SAD69 é mostrada na Figura 12 e está localizada no norte do Tocantins e divisas com os estados de Maranhão e Pará. O comportamento das distorções nessa região é não homogêneo tanto em magnitude quanto em sentido, dificultando os processos de modelagem.

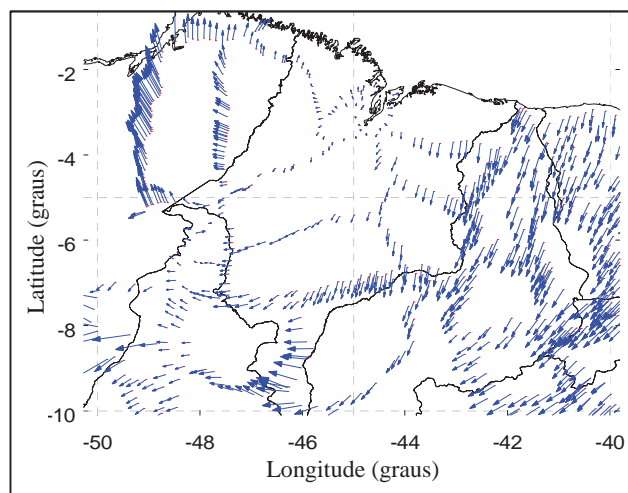


Figura 12 - Detalhe das distorções na realização SAD69.

Na realização SAD69/96 foram incorporadas estações provenientes de levantamento por satélites Doppler e GPS (COSTA, 1999). A utilização de linhas de base GPS e pontos

Doppler no ajustamento da rede auxiliaram na redução das distorções, pois devido a melhor precisão nas observações, estes dados controlaram as observações oriundas dos métodos clássicos (poligonação e triangulação). A Tabela 5 apresenta algumas estatísticas das distorções em 4.474 estações clássicas da realização SAD69/96.

Tabela 5 - Estatísticas das distorções na realização SAD69/96.

Discrepâncias (m)	Latitude	Longitude
Máxima	0,934	3,696
Mínima	-4,464	-3,676
Média	-0,649	0,010
Média Absoluta	0,679	0,391
RMSE	0,897	0,639
90% ≤	1,268	1,021

As distorções na realização SAD69/96 são as de menor magnitude dentre todas as realizações utilizadas no Brasil. Os valores máximos absolutos das distorções são de 4,464 m em latitude e 3,696 m em longitude, com valores médios absolutos de 0,679 m e 0,391 m em cada componente. A Figura 13 apresenta o comportamento das distorções para o SAD69/96.

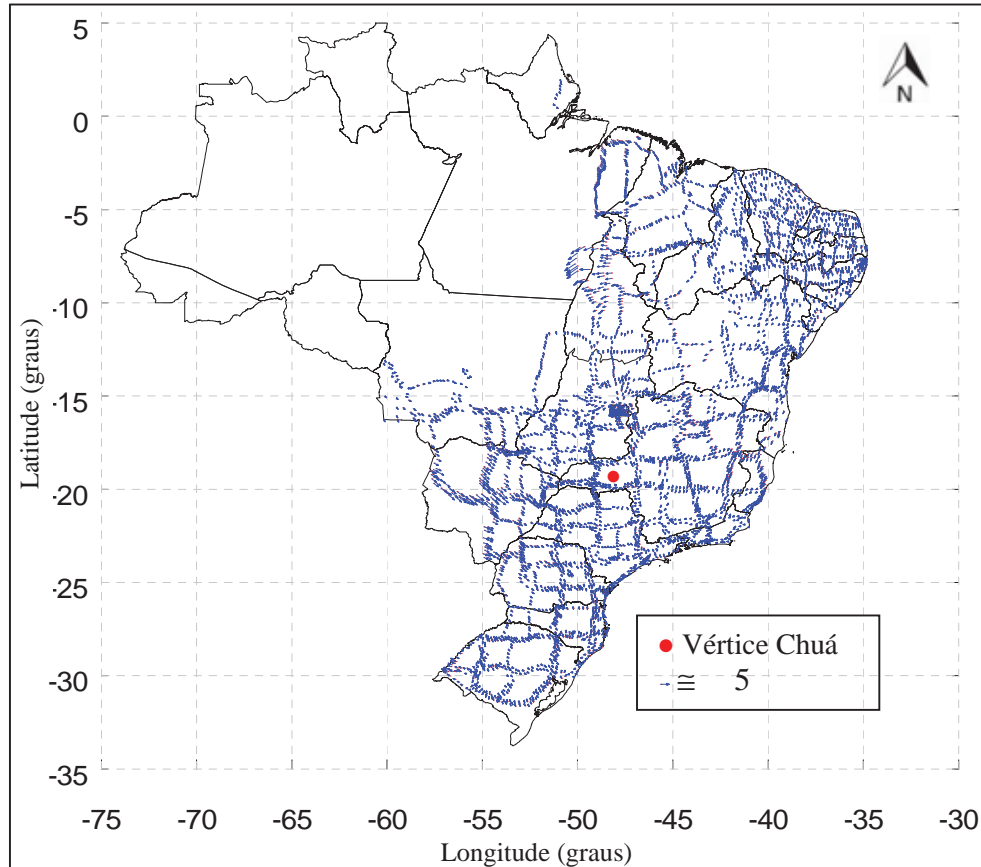


Figura 13 - Distorções entre as realizações SAD69/96 e SIRGAS2000.

Na Figura 13 é possível observar que as distorções na realização SAD69/96 são de pequena magnitude, quando comparadas com as distorções nas demais realizações. Em algumas regiões, o comportamento das distorções é homogêneo, como é o caso do estado do Rio Grande do Sul (em destaque na Figura 14) e em outras regiões o comportamento é não homogêneo, como no norte do Tocantins.

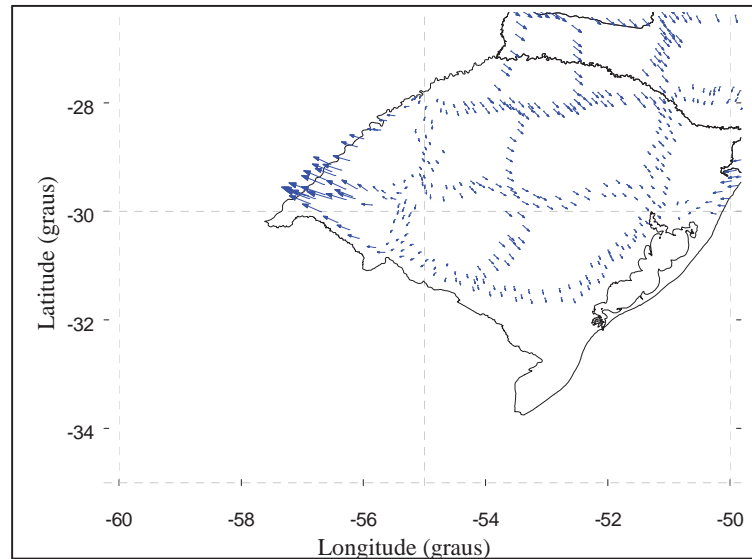


Figura 14 - Detalhe das distorções na realização SAD69/96.

4 THIN-PLATE SPLINES: DEFINIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO MATEMÁTICA

O problema da conversão de coordenadas com modelagem de distorções seria facilmente solucionado se os referenciais fossem realizados exatamente como são definidos. Nesse caso ideal, uma transformação geométrica aplicando translações, rotações e fator de escala, dependendo da definição dos referenciais envolvidos, seria suficiente. Entretanto, a transformação de referenciais ocorre nas coordenadas dos referenciais materializados (realizações) eivadas de distorções de natureza distinta, como discutido no Capítulo 3. Dessa forma, o processo de transformação de referenciais deve ser capaz de absorver efeitos passíveis de serem modelados por uma transformação geométrica, juntamente com as distorções existentes nas realizações envolvidas.

A utilização de *Thin-Plates* como *splines* de interpolação teve início com Duchon¹, 1976 *apud* Bookstein (1989) e foi matematicamente formalizada por Meinguet², 1979 e 1984 *apud* Bookstein(1989). A concepção de TPS apresenta características que a torna aplicável em grande parte dos problemas de modelagem, pois possibilita a decomposição da modelagem em uma transformação linear e uma componente de distorção não linear. Além disso, sua formulação matemática assegura algumas restrições importantes à superfície interpolante, a qual é suave e se estende ao infinito em todas as direções.

Na sequência são apresentados alguns conceitos e a formulação matemática de *Thin-Plate Splines*, bem como aspectos relevantes de sua aplicabilidade na modelagem das distorções em redes geodésicas.

4.1 Thin-Plate Splines

Thin-Plate Spline é uma técnica bastante utilizada e apropriada para a interpolação de superfícies sobre dados irregularmente espaçados. Sua formulação permite que a técnica

¹ DUCHON, J. **Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces.** RAIRO Analyse Numérique, v. 10, p. 5-12, 1976.

² MEINGUET, J. **Multivariate interpolation at arbitrary points made simple.** Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), v. 30, p. 293-304, 1979.

seja utilizada em várias aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, e que independa de um arranjo regular dos dados, por exemplo, na forma de uma grade regular.

TPS se baseiam na minimização da energia de curvatura de uma placa delgada de metal fixa a alguns pontos amostrais. Sua formulação garante restrições de que a superfície interpolante apresente mínima energia de deformação e que seja suave. De acordo com Bookstein (1989), para uma placa delgada sujeita a uma curvatura suave, a energia de curvatura em um ponto com coordenadas (x, y) é expressa pela Equação 15:

$$I_f = \iint_{R^2} \left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy. \quad (15)$$

A função *spline* $f(x,y)$ que minimiza a energia de curvatura é dada pela Equação 16.

$$f(x, y) = a + bx + cy + \sum w_i U(r), \quad (16)$$

onde:

a, b, c e w_i ($i = 1, \dots, n$) - coeficientes da *spline*;

U - função de base radial; e

r - distância do ponto (x, y) ao i -ésimo ponto de controle.

Thin-Plate Splines são formadas através de combinação linear de funções radiais (U), onde os valores da função são obtidos pelas diferenças (ou distâncias) entre as coordenadas do ponto onde a função deve ser avaliada e as coordenadas de pontos de referência.

Uma das aplicações da TPS é a geração de mapas de interpolação R^2 para R^2 . Dispondo de dois conjuntos de pontos homólogos são geradas funções de mapeamento que relacionam pontos de um conjunto ao outro. A função de mapeamento da TPS pode ser decomposta em uma transformação linear (transformação afim, por exemplo) e uma parcela representando as distorções não lineares (BOOKSTEIN, 1989). Assim, é possível distinguir os efeitos das distorções dos efeitos modelados pela transformação linear. Embora a transformação afim seja uma transformação linear, ao escrever o modelo matemático considerando a interpretação física, o modelo passa a ser não linear, conforme apresentado em Merchant (1979).

4.1.1 A função $U(r)$

A base das análises e da formulação da TPS está no estudo da função de base radial U , dada pela Equação 17.

$$z(x, y) = U(r) = r^2 \log r^2, \quad (17)$$

onde r é a distância euclidiana à origem cartesiana.

A função de base radial $U(r)$ apresenta um comportamento linear à medida que os pontos analisados se afastam da origem, a qual é dada pelos pontos de controle (utilizados na geração do modelo). Assim, embora sejam funções de interpolação globais, as influências das deformações locais tendem a diminuir com o afastamento em relação ao ponto de referência (CASTANHO, 1997).

Analisando a função $U(r)$ em um ponto com coordenadas $(0,0)$, ou seja, na origem cartesiana, a superfície formada pela função tem valor zero quando o raio = 1 e atinge seu ponto de máximo com valor de aproximadamente 0,607 quando o raio = $1/\sqrt{e}$ (BOOKSTEIN, 1989). Uma representação da função $U(r)$ é mostrada na Figura 15, a qual foi invertida no eixo Z para uma melhor visualização.

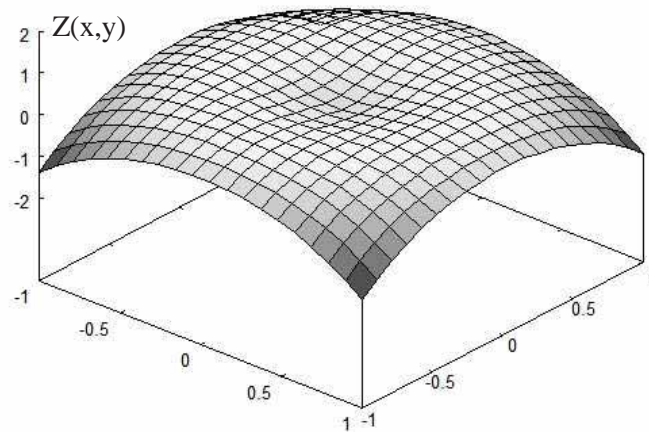


Figura 15 - Representação da função $-U(r)$.

A função U satisfaz a equação:

$$\Delta^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 U \propto \delta_{(0,0)}, \quad (18)$$

onde $\delta_{(0,0)}$ é uma função generalizada e \propto indica proporcionalidade.

O termo que contém as derivadas parciais de U (lado direito da Equação 18) é proporcional à função generalizada $\delta_{(0,0)}$, com valor zero em todos os pontos, exceto na origem. Assim, a função U é denominada de solução fundamental da equação bi-harmônica ($\Delta^2 U = 0$) e representa a equação para a forma de uma placa delgada de metal definida como uma função $z(x,y)$ sobre o plano (x,y) .

Uma combinação linear de múltiplos termos $U(r)$ pode ser usada para modelar uma placa delgada de metal que se estende ao infinito, incorporando suposições físicas, como custo zero de energia para deformações no plano e ausência de gravidade, como destaca Bookstein (1989).

4.1.2 Formulação matemática clássica da TPS para um conjunto arbitrário de pontos no espaço bidimensional

O princípio da formulação TPS é minimizar a energia de curvatura de uma placa delgada de metal fixa em alguns pontos de controle. Baseado nesse princípio, a formulação matemática para determinar uma função de mapeamento através de TPS, relacionando dois conjuntos de pontos homólogos com coordenadas bidimensionais é dada por (BOOKSTEIN, 1989):

$$f(x, y) = a_1 + a_x x + a_y y + \sum_{i=1}^n w_i U(|P_i - P|), \quad (19)$$

sendo:

$w_1, w_2, \dots, w_n, a_1, a_x, a_y$ - coeficientes calculados em função de pontos de controle homólogos;

n - número de pontos de controle;

P_i - i -ésimo ponto de controle;

P - ponto em que se deseja calcular a $f(x,y)$.

Para cada ponto de controle é definida uma equação da forma da Equação 19. A função $f(x, y)$ é dividida em duas partes: uma soma de funções $U(r)$, representando as distorções e outra parte expressando uma transformação afim, representando o comportamento de $f(x, y)$ no infinito (BOOKSTEIN, 1989). Conforme abordado nesta Seção, $f(x, y)$ minimiza a energia de curvatura dada pela Equação 15. A energia de curvatura é nula, ou seja, a integral dada pela Equação 15 é igual a zero, quando todos os elementos de

$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ são nulos. Nesse caso, a *spline* calculada $f(x, y) = a_1 + a_x x + a_y y$, se refere a uma superfície suave (um plano no espaço 2D).

Para a determinação da função de mapeamento TPS é necessário resolver um sistema de equações formado pelas Equações 19, 20, 21 e 22:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 0, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i = 0, \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i y_i = 0. \quad (22)$$

As condições definidas pelas Equações 20, 21 e 22 garantem que a soma dos coeficientes w_i seja nula, e que a multiplicação pelas coordenadas x e y dos pontos P_i também seja nula, ou seja, asseguram o crescimento quase linear da TPS à medida que o ponto de avaliação da função se torna mais distante do ponto de referência (CASTANHO, 1997). As injunções asseguram que o sistema linear a ser solucionado tenha número de equações iguais ao número de incógnitas, independentemente do número de pontos de controle.

Na sequência é apresentada a formulação clássica fornecida em Bookstein (1989) para a determinação das funções de mapeamento por TPS com coordenadas bidimensionais.

Considerando n pontos de coordenadas conhecidas $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, ..., $P_n = (x_n, y_n)$ no plano e referenciados a um sistema de coordenadas cartesiano, é possível calcular $r_{ij} = |P_i - P_j|$, que é a distância entre os pontos i e j , e definir uma matriz K de dimensão $n \times n$ que é função de $U(r)$.

$${}_n K_n = \begin{bmatrix} 0 & U(r_{12}) & \dots & U(r_{1n}) \\ U(r_{21}) & 0 & \dots & U(r_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U(r_{n1}) & U(r_{n2}) & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Uma matriz P de dimensão $n \times 3$ é construída contendo as coordenadas dos pontos fornecidos no sistema de origem:

$${}_n P_3 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Com as matrizes K e P , é composta uma matriz L de dimensão $(n + 3) \times (n + 3)$:

$${}_{n+3} L_{n+3} = \left[\begin{array}{c|c} K & P \\ \hline P^T & O \end{array} \right], \quad (25)$$

onde O é uma matriz nula 3×3 .

Considerando n pontos homólogos aos pontos fornecidos inicialmente com coordenadas em um sistema de destino: $P_1' = (x_1', y_1')$, $P_2' = (x_2', y_2')$, ..., $P_n' = (x_n', y_n')$, pode-se construir uma matriz V de dimensão $2 \times n$:

$${}_2 V_n = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \end{bmatrix}. \quad (26)$$

A matriz Y é obtida acrescentando três colunas com valores nulos à matriz V :

$${}_{n+3} Y_2 = (V \mid 0 \quad 0 \quad 0)^T. \quad (27)$$

Multiplicando a inversa de L pela matriz Y , é possível obter uma nova matriz (W), contendo os coeficientes da função de mapeamento por TPS:

$$W = {}_{n+3} L^{-1} Y_2 = (w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n \quad a_1 \quad a_x \quad a_y)^T. \quad (28)$$

Cada coluna da matriz $L^{-1}Y$ proporciona os coeficientes para a função de mapeamento em uma componente (x e/ou y). A primeira coluna contém os coeficientes para a função $f_x(x, y)$ que mapeia a coordenada x , e a segunda coluna os coeficientes de $f_y(x, y)$ para mapeamento da coordenada y . Dessa forma, a função de mapeamento é composta por: $f(x, y) = [f_x(x, y), f_y(x, y)]$.

4.2 Exemplo e Discussão de Alguns Aspectos Numéricos e Geométricos

Para melhor compreender as características das funções de mapeamento por *Thin-Plate Splines*, um exemplo é dado, onde se tem 4 pontos do R^2 , com coordenadas simuladas em dois espaços diferentes (Tabela 6):

Tabela 6 - Pontos no espaço 1 e distorcidos no espaço 2.

Ponto	Espaço 1		Espaço 2	
	X	Y	X	Y
1	100	200	70	180
2	100	100	140	70
3	200	100	220	140
4	200	200	160	150

Os pontos são homólogos e representam um quadrado no espaço 1, o qual foi distorcido ao ser transformado para o espaço 2. A Figura 16 ilustra o quadrado original (Figura 16a) e o distorcido (Figura 16b).

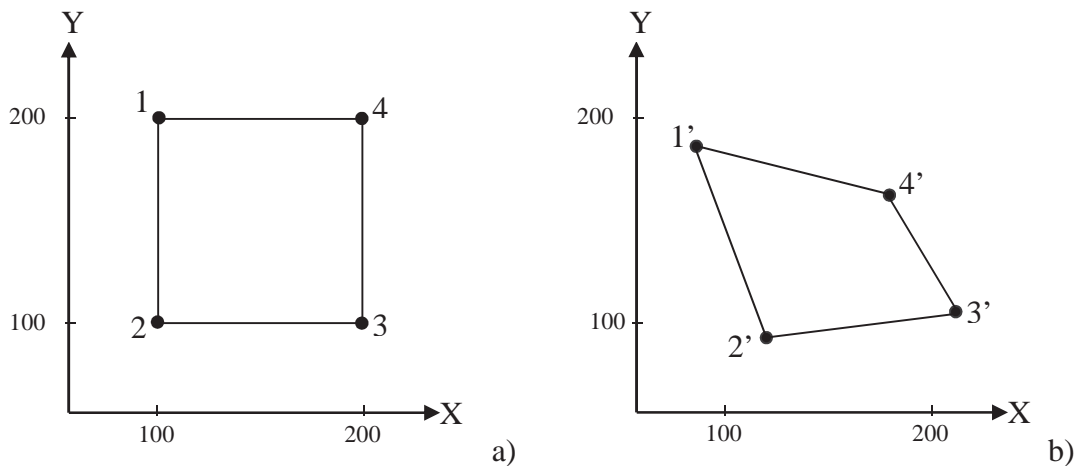


Figura 16 - Pontos nos espaços 1 e 2 representando um quadrado na forma normal e distorcido.

As matrizes P e V , montadas a partir das coordenadas dos pontos nos dois espaços, são dadas por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 100 & 200 \\ 1 & 100 & 100 \\ 1 & 200 & 100 \\ 1 & 200 & 200 \end{bmatrix} \text{ e } V = \begin{bmatrix} 70 & 140 & 220 & 160 \\ 180 & 70 & 140 & 150 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

A matriz K calculada em função de $U(r)$, sendo r a distância entre os pontos, tem a seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 92103,403 & 198069,751 & 92103,403 \\ 92103,403 & 0 & 92103,403 & 198069,751 \\ 198069,751 & 92103,403 & 0 & 92103,403 \\ 92103,403 & 198069,751 & 92103,403 & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

A matriz dos coeficientes que definem as funções de mapeamento em x e y entre os dois conjuntos de dados é dada por:

$$W = \begin{bmatrix} -0,0002 & 0,0018 \\ 0,0002 & -0,0018 \\ -0,0002 & 0,0018 \\ 0,0002 & -0,0018 \\ -117,5000 & 15,0000 \\ 0,8500 & 0,2000 \\ -0,6500 & 0,6000 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

A primeira coluna da matriz W representa os coeficientes da função de mapeamento para a coordenada x e a segunda coluna para a coordenada y . Todos os coeficientes são não nulos, já que houve alteração na configuração dos pontos de um sistema para o outro.

Se as coordenadas y não sofressem alteração de um sistema para o outro, os coeficientes para a função de mapeamento nesta componente seriam nulos, com exceção do termo a_x que seria unitário. A mesma consideração é válida para os coeficientes de x .

A Figura 17 representa as superfícies das funções de mapeamento em x e y .

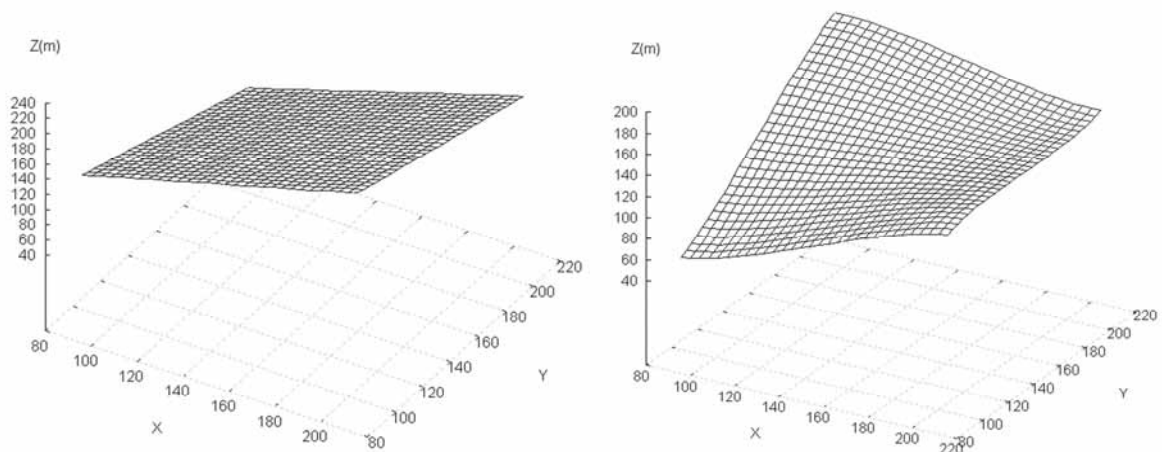


Figura 17 - Superfícies representando as funções de mapeamento em X e Y .

Os coeficientes $w_1, w_2, \dots, w_n, a_1, a_x, a_y$ calculados permitem estabelecer as funções de mapeamento em cada componente coordenada, através das quais os pontos no espaço 1 são relacionados no espaço 2.

Devido às características na função U , que considera as distâncias relativas entre os pontos utilizados na estimação dos coeficientes do modelo TPS, problemas de ordem numérica podem ocorrer em decorrência da distribuição desses pontos (geometria). Alguns pontos muito distantes entre si ou muito próximos em relação aos demais, podem fazer com que ocorram na matriz K linhas ou colunas linearmente dependentes (ou quase linearmente dependentes). Essa dependência linear pode provocar problemas de condicionamento e comprometer a da matriz K e conseqüentemente a inversão da matriz L , já que de acordo com Lugnani (1975), se uma matriz é mal condicionada sua inversa se torna instável.

Problemas na matriz K afetam a matriz L , que é uma concatenação das matrizes K , P e O e é a matriz L que será invertida no cálculo dos coeficientes TPS (Equação 28). Uma análise no condicionamento da matriz K proporciona um indicativo da estabilidade numérica da solução e, conseqüentemente, da qualidade dos parâmetros estimados.

Para avaliar a influência da geometria na modelagem por TPS, foi inserido um ponto adicional no exemplo anterior, próximo ao ponto 1, com coordenadas (100,001; 200,001), conforme mostrado na Figura 18.

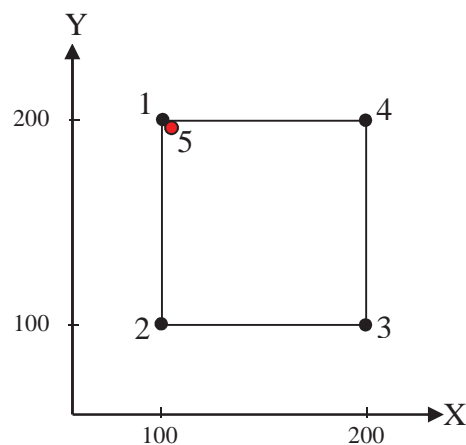


Figura 18 - Inserção do novo ponto (5) de coordenadas (100,001; 200,001).

Nesta situação a matriz K assume a seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 92103,403 & 198069,751 & 92103,403 & 0 \\ 92103,403 & 0 & 92103,403 & 198069,751 & 92105,445 \\ 198069,751 & 92103,403 & 0 & 92103,403 & 198069,751 \\ 92103,403 & 198069,751 & 92103,403 & 0 & 92101,361 \\ 0 & 92105,445 & 198069,751 & 92101,361 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Uma maneira de verificar o condicionamento da matriz é através do número de condição, como será detalhado no capítulo seguinte. De um modo geral, valores baixos para o número de condição expressam um melhor condicionamento da matriz, já valores altos pressupõem mal condicionamento.

A matriz K inicial, considerando apenas os 4 pontos que formam um quadrado, tem valor do número de condição igual a 27. Quando inserido o novo ponto, esse valor passa a ser de $1,13 \times 10^{10}$. O alto valor do número de condição é um indicativo de que a matriz é quase singular e que a solução do sistema é instável. Além disso, avaliando a nova matriz K , verifica-se que algumas linhas são quase combinações lineares de outras (por exemplo, as linhas 1 e 5 da matriz K). Como o novo ponto foi inserido muito próximo do ponto 1, suas distâncias aos demais pontos são muito similares às distâncias do ponto 1 com relação aos demais pontos, resultando em linhas com valores muito parecidos na matriz K .

O mesmo comportamento ocorre se for inserido um ponto muito distante dos demais. Considerando a mesma configuração inicial com 4 pontos e a inserção de um novo ponto com coordenadas (2000; 2000) distante dos demais, conforme mostrado na Figura 19.

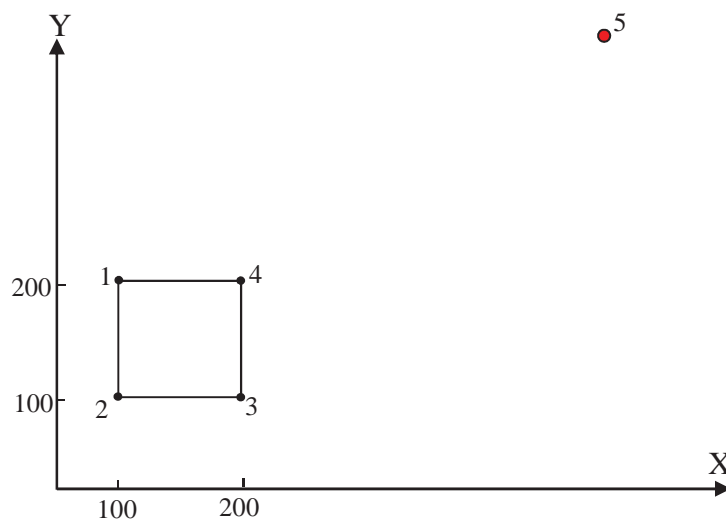


Figura 19 - Inserção do novo ponto (5) de coordenadas (2000;2000).

A nova matriz K assume a seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 92103,403 & 198069,751 & 92103,403 & 107817350590 \\ 92103,403 & 0 & 92103,403 & 198069,751 & 114020878988 \\ 198069,751 & 92103,403 & 0 & 92103,403 & 107817350590 \\ 92103,403 & 198069,751 & 92103,403 & 0 & 101633817322 \\ 107817350590 & 114020878988 & 107817350590 & 101633817322 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

O número de condição da matriz K na nova configuração de pontos passa a ser de 15.582, dando um indicativo de mal condicionamento da matriz.

Nas duas situações abordadas, de pontos muito próximos ou muito distantes, as matrizes K não apresentaram deficiência de característica, apenas números de condição maiores que na configuração inicial com 4 pontos. Em alguns casos, além de alteração no número de condição, a matriz K apresenta deficiência de característica, indicando que existem linhas ou colunas linearmente dependentes.

Pode-se notar que o problema de condicionamento discutido é decorrente apenas da distribuição dos pontos amostrais, ou seja, tem relação com a geometria dos pontos da rede. É importante observar que em aplicações nas quais são utilizados dados com distribuição homogênea ou regular, tal problema não ocorre.

5 CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste capítulo são abordados conceitos relacionados à resolução de sistemas de equações lineares, sobretudo, a questão do condicionamento. Conforme abordado no capítulo anterior, podem ocorrer problemas de condicionamento de matrizes na modelagem por TPS em função da geometria dos pontos de controle. Alguns indicadores que auxiliam na avaliação do condicionamento serão discutidos neste capítulo.

5.1 Sistemas de Equações Lineares

Nas Ciências Geodésicas, assim como em outras áreas do conhecimento, principalmente no campo das Ciências Exatas, a resolução de problemas frequentemente está condicionada à solução de sistemas de equações lineares (ou, simplesmente, sistemas lineares) da forma:

$$AX = L, \quad (34)$$

onde A representa uma matriz qualquer, X é um vetor que contém os parâmetros ou incógnitas a serem determinadas e L é o vetor dos termos conhecidos ou independentes.

A solução do sistema pode ser analisada considerando particularidades do sistema, tais como (GEMAEL, 1994):

- a) O sistema é consistente (possível ou compatível)?

A condição necessária e suficiente para que o sistema seja compatível é que as matrizes A e \bar{A} tenham a mesma característica (r). A matriz aumentada \bar{A} é obtida acrescentando o valor dos termos independentes à matriz A ($\bar{A} = [A | L]$). Designando $car(.)$ como o operador característica:

$$car(A) = car(\bar{A}) = r. \quad (35)$$

- b) Sendo o sistema compatível, resta saber se ele é determinado (solução única) ou indeterminado (infinitas soluções). Se a característica (r) for igual ao número de

parâmetros incógnitos (u), ou seja, $r = u$, o sistema é determinado, caso contrário é indeterminado.

Um sistema consistente admite solução obtida pela pré-multiplicação de A^T em ambos os termos, ou seja:

$$A^T A X = A^T L \Rightarrow X = (A^T A)^{-1} A^T L. \quad (36)$$

Substituindo $A^T A$ por N e $A^T L$ por U , a Equação 36 pode ser reescrita como:

$$X = N^{-1} U. \quad (37)$$

No caso da matriz A ser quadrada ($n \times n$) e de característica integral, o sistema será consistente e determinado. A solução única do sistema será dada por:

$$X = A^{-1} L. \quad (38)$$

Uma classificação geral sumarizada dos sistemas lineares não importando a dimensão do sistema e sendo A ($n \times u$) pode ser feita da seguinte forma (GARNÉS, 1996):

- a) Se $\text{car}(A) = \text{car}(\bar{A}) = r$, o sistema é compatível;
- b) Se $\text{car}(A) < \text{car}(\bar{A})$, o sistema é incompatível;

Se o sistema é compatível, poderá ser:

- c) Determinado se $r = u$;
- d) Indeterminado se $r < u$.

Como visto anteriormente, na solução dos sistemas lineares, torna-se necessária a inversão da matriz A ou N , a qual deve atender algumas condições, tal como a de não singularidade. Um problema pode ocorrer na solução do sistema de equações, quando uma pequena variação nos coeficientes da matriz A ou no vetor das observações L , implica em uma grande variação na solução do sistema. Essa instabilidade ocorre em sistemas mal condicionados e é um problema a ser detectado e minimizado para que uma melhor solução do sistema seja obtida.

Um caso específico na solução de sistemas lineares ocorre quando A é uma matriz quadrada com determinante nulo, ou A é retangular. Nesse caso, a inversa ordinária (A^{-1}) dá

lugar a um novo conceito de inversa, as chamadas inversas generalizadas. A inversa generalizada que apresenta solução de menor comprimento na norma-2 e que atende às condições de Penrose é conhecida por pseudo-inversa (GARNÉS, 1996).

5.2 A Solução de Sistemas de Equações Lineares e o Problema de Condicionamento

Um sistema linear é composto por um conjunto de equações lineares, ou linearizadas, que pode ser escrito de forma sintética (Equação 34) ou explícita. Assumindo que se tem n equações por u incógnitas, com $n > u$, este sistema pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1u}x_u &= l_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2u}x_u &= l_2, \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nu}x_u &= l_n, \end{aligned} \tag{39}$$

onde todos os a_{ij} e l_i , com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, u\}$ são números reais.

A solução do sistema $n \times u$ é entendida como sendo uma n -upla ordenada de números (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaz todas as equações do sistema (LEON, 1999).

Representando geometricamente a solução de um sistema linear pode-se considerar as seguintes situações:

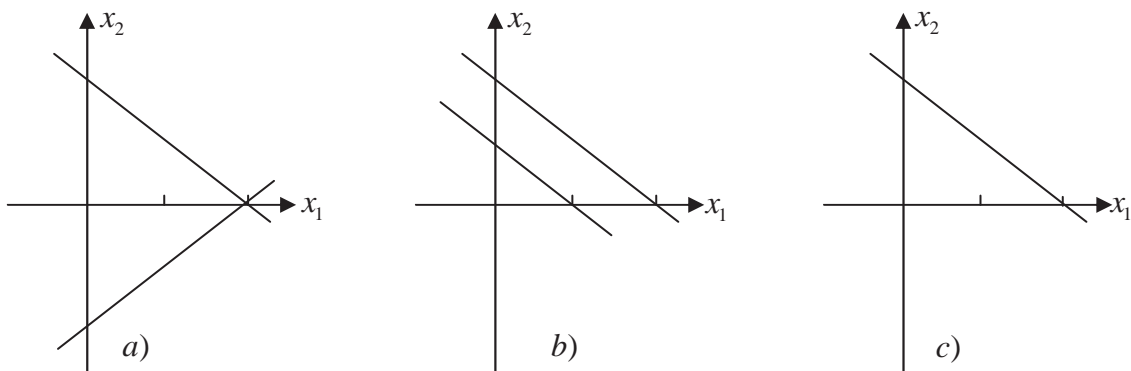


Figura 20 - Representação geométrica para a solução de sistemas lineares.
(Fonte: Adaptada de Leon, 1999).

Na Figura 20a, as duas retas se interceptam em um único ponto, o qual é o conjunto solução do sistema. Na Figura 20b, as duas retas são paralelas, logo, o sistema é incompatível e seu conjunto solução é vazio. No sistema representado pela Figura 20c, as retas são coincidentes, ou seja, as equações do sistema representam uma mesma reta e qualquer ponto nessa reta vai ser uma solução para o sistema.

Uma importante questão na solução de sistemas lineares está relacionada ao efeito na solução do sistema de pequenas mudanças ou perturbações na matriz dos coeficientes ou no vetor de termos independentes. O estudo desses efeitos está relacionado com o condicionamento do sistema de equações.

Segundo Lugnani (1975), um problema (relacionado a um conjunto de dados) é denominado de mal condicionado se uma perturbação relativamente pequena nos dados pode causar um erro relativamente grande na solução calculada.

É possível visualizar geometricamente o problema do mal condicionamento de sistemas a partir do exemplo mostrado na Figura 21:

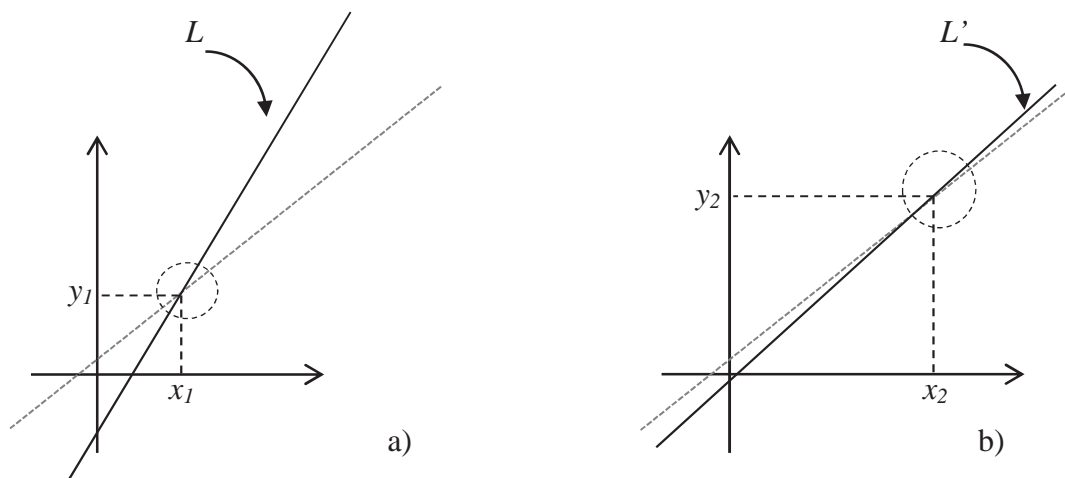


Figura 21 - Representação geométrica de um sistema mal condicionado.
(Fonte: Adaptado de Meyer (2001)).

A Figura 21 mostra a intersecção entre duas retas. Na Figura 21a, as duas retas se cruzam em um ponto de intersecção bem definido dado pelas coordenadas x_1 e y_1 , que simula a solução do sistema de equações bem condicionado. A reta L é ligeiramente perturbada na Figura 21b, resultando em L' , onde é possível notar que uma pequena perturbação ocorrida em L resulta em uma grande mudança no ponto de intersecção entre as retas, ou seja, na solução do sistema. Após a perturbação, o ponto de intersecção fica difícil de ser identificado e altera de posição para x_2 e y_2 . Conforme exemplificado, os sistemas mal condicionados

podem ser interpretados como retas quase paralelas, como apresentado na Figura 21b, onde é difícil identificar uma solução única.

De maneira geral, a solução do sistema $AX = L$ depende da inversão da matriz A (se A é quadrada e de característica integral) ou de N (se A é retangular e de característica integral). Deve ser avaliado se as matrizes A ou N admitem a matriz inversa. Se o sistema é não singular, então as matrizes admitem inversa, o que resulta em uma solução única para o sistema. Entretanto, a matriz a ser invertida pode apresentar problemas de condicionamento que devem ser investigados.

5.3 Singularidade de Matrizes

Para uma matriz quadrada $A \in R^{n \times n}$, a matriz $B \in R^{n \times n}$ que satisfaz as condições $AB=I$ e $BA=I$ é chamada de inversa de A e é denotada por $B=A^{-1}$. Nem toda matriz quadrada pode ser invertida. Se uma matriz admite inversa é dita não singular, caso contrário é uma matriz singular. Portanto, é necessário um estudo sobre a singularidade para definir se uma matriz admite ou não a inversão.

Algumas propriedades podem caracterizar a não singularidade de uma matriz A ($n \times n$), tais como (DATTA, 2010):

1. Determinante não nulo: $\det(A) \neq 0$;
2. Possuir linhas e colunas linearmente independentes;
3. Os valores singulares da matriz são todos não nulos;
4. A matriz A e sua transposta possuem *rank* (posto ou característica) completo:

$$\text{car}(A) = \text{car}(A^T) = n.$$

5.3.1 Determinante e característica na suposição de singularidade de matrizes

O determinante é um dos elementos que permite inferências sobre a singularidade de uma matriz. Uma das propriedades dos determinantes rege que, se duas linhas ou colunas de uma matriz são idênticas (ou combinações lineares), então o determinante dessa matriz será nulo. Se o determinante de uma matriz tem valor próximo de zero, isso indica que existem

linhas ou colunas quase linearmente independentes. Dessa forma, matrizes mal condicionadas têm seus determinantes, em geral, de pequeno valor numérico. Porém, o caso inverso não é sempre válido, ou seja, determinantes pequenos não necessariamente implicam em matrizes mal condicionadas. Além disso, há dificuldade em se quantificar uma tolerância para o valor do determinante, de modo que se tenha um sistema bem condicionado.

O *rank* (característica ou posto) determina o número de valores singulares não nulos de uma matriz. Uma matriz quadrada A ($n \times n$) é não singular se possui característica integral, ou seja, $\text{car}(A) = n$. Se uma matriz quadrada não possui característica integral igual à sua dimensão, ela tem deficiência de característica. Essa deficiência de característica ($n - \text{car}(A)$) indica o número de linhas ou colunas linearmente dependentes que a matriz possui o que corresponde ao número de valores singulares nulos dessa matriz. Já uma matriz A ($n \times u$), com $n > u$ é não singular se $\text{car}(A) = u$, já que matrizes retangulares possuem característica integral quando $\text{car}(A)$ é igual a menor dimensão.

O determinante e as características de matrizes auxiliam na inferência sobre a singularidade de matrizes, juntamente com o número de condição. No entanto, conforme apresentado em Garnés (1996), o determinante não é um bom indicador de condicionamento de um sistema de equações lineares. A multiplicação de uma constante 10^{10} em todas as equações de um sistema, por exemplo, poderia tornar um sistema mal condicionado em um sistema bem condicionado.

5.3.2 Número de condição

O número de condição é um dos indicadores numérico que possibilita inferir sobre o condicionamento de uma matriz, já que não há um indicador único que reúne as condições necessárias para um diagnóstico definitivo sobre o condicionamento. O número de condição denotado por $C(A)$, é definido conforme Datta (2010) e Meyer (2001), pelo produto da norma de A pela norma da inversa de A , sendo A uma matriz quadrada e não singular. Em notação matemática:

$$C(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \quad (40)$$

onde $\|(\cdot)\|$ é a normal euclidiana.

De acordo com Lugnani (1975), existe diferentes denominação para o número de condição, de acordo com a norma utilizada.

Para a norma-2, $C(A)$ pode ser calculado pela divisão entre o maior e o menor valor singular da matriz A :

$$C_2(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \quad (41)$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ representam os valores singulares da matriz A , ordenados de modo decrescente.

Datta (2010) especifica algumas propriedades do número de condição de uma matriz:

- 1) $C_p(A) \geq 1$ para qualquer norma- p ;
- 2) $C(\alpha A) = C(A)$, onde α é um escalar não nulo, para qualquer norma;
- 3) $C_2(A) = I$ se e somente se A é um escalar não nulo múltiplo de uma matriz ortogonal, isto é, $A^T A = \alpha I$, onde $\alpha \neq 0$;
- 4) $C_2(A^T A) = (C_2(A))^2$;
- 5) $C_2(A) = C_2(A^T)$; $C_1(A) = C_\infty(A^T)$, onde ∞ representa a norma máxima ou infinita;
- 6) Para qualquer norma, $C(AB) \leq C(A)C(B)$ se A e B são compatíveis para a multiplicação matricial;
- 7) $C_2(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$, onde λ_1 e λ_n são, respectivamente, o maior e menor valor singular de A .

O sistema $AX = L$ é mal condicionado se $C(A)$ possui um valor muito grande, caso contrário, o sistema é bem condicionado. Entretanto, um problema que persiste está em definir o que seria um valor suficientemente grande para o número de condição o qual caracterizaria o sistema como mal condicionado.

O número de condição é muito importante para a análise se um sistema é ou não mal condicionado, pois ele dá a máxima ampliação que a variação relativa da solução pode sofrer frente a uma perturbação, quer seja no vetor de termos independentes ou na matriz dos coeficientes (GARNÉS, 1996).

No caso do ajustamento de observações utilizando as equações normais, o número de condição deve ser avaliado à segunda potência, já que, segundo a propriedade 4 citada anteriormente, $C_2(A^T A) = (C_2(A))^2$.

5.4 A Decomposição em Valores Singulares (*Singular Value Decomposition – SVD*)

A decomposição em valores singulares (SVD) é um método muito utilizado para análise e solução de sistema de equações com matrizes singulares ou quase singulares (mal condicionadas). A decomposição SVD se baseia no seguinte princípio da álgebra linear (PRESS et. al, 1992): qualquer matriz A ($n \times u$) com número de linhas n maior ou igual ao número de colunas u , pode ser escrita como um produto de matriz coluna ortogonal U ($n \times u$), uma matriz diagonal W ($u \times u$) com elementos nulos ou positivos (valores singulares) e a transposta de uma matriz ortogonal V ($u \times u$), ou seja:

$$A = U.W.V^T. \quad (42)$$

A matriz W é diagonal e contém os valores singulares associados à matriz A , os quais possibilitam inferências importantes sobre o condicionamento da matriz A e, conseqüentemente, do sistema de equações. Algumas análises que podem ser realizadas a partir da decomposição SVD são apresentadas na sequência.

Número de Condição

Uma primeira análise refere-se ao número de condição. A propriedade 7 do número de condição de uma matriz, apresentada no item 5.3.2, rege que: $C_2(A) = \lambda_1 / \lambda_n$, onde λ_1 e λ_n são, respectivamente, o maior e menor valor singular, como mencionado. Estes valores podem ser obtidos a partir da matriz W .

Singularidade (número de linhas ou colunas linearmente dependentes)

Outra análise possível através da decomposição SVD se refere especificamente aos valores singulares. Conforme já abordado, os valores singulares de uma matriz não singular são não nulos. Um valor singular nulo ou próximo à zero na matriz W indica que a linha e/ou coluna na posição em que se encontra o valor singular, pode ser (ou é próxima de ser escrita) uma combinação linear de outra linha ou coluna da mesma matriz. Dessa forma, é possível identificar onde ocorrem linhas ou colunas linearmente dependentes ou, quase linearmente dependentes, que causam instabilidade na matriz e no sistema de equações. Essa identificação

só é possível se os elementos de W não estiverem ordenados, o que descaracterizaria a correlação entre o valor singular analisado na matriz W com as linhas e colunas correspondentes na matriz original.

Característica (*rank* ou posto)

A característica da matriz, que representa o número de linhas ou colunas linearmente independentes, também pode ser calculada na decomposição SVD. O valor da característica será o número de valores singulares não nulos da matriz W .

5.4.1 Cálculo da matriz inversa usando SVD

O cálculo da matriz inversa pela decomposição SVD pode ser realizado nos seguintes casos: a) em que a matriz A seja quadrada e a solução do sistema é dada por $X = A^{-1}L$; b) onde a matriz A é retangular com o número de equações (linhas) maior que o número de incógnitas (colunas) e a solução do sistema é dada por $X = N^{-1}U$; e c) quando a matriz A tem menos linhas do que colunas.

a) SVD de uma matriz quadrada

Seja uma matriz quadrada $A(n \times n)$ decomposta em valores singulares como na Equação 42. A inversa de A pode ser escrita por:

$$A^{-1} = (UWV^T) . \quad (43)$$

Como as matrizes U e V são ortogonais, as inversas de tais matrizes são iguais a suas transpostas. A matriz W é uma matriz diagonal, logo, sua inversa é dada pela inversa dos elementos da sua diagonal principal. Assim, a Equação 43 pode ser reescrita como:

$$A^{-1} = V.[diag(1/w_i)].U^T . \quad (44)$$

Conforme já discutido, se a matriz A é mal condicionada ou fracamente condicionada, alguns elementos da matriz W são nulos ou próximos à zero. Uma estratégia para resolver a inversa deste tipo de matriz é substituir na inversa de W os valores referentes aos valores singulares próximos a zero pelo valor zero (PRESS et. al, 1992). A inversa de A nessas condições é dada por:

$$A^{-1} = V.W^{-1}.U^T, \text{ onde } W = \begin{cases} 1/\lambda_i & \text{se } \lambda_i > t \\ 0 & \text{se } \lambda_i \leq t \end{cases}, \quad (45)$$

sendo t um limiar com valor muito pequeno.

b) SVD quando o número de equações é maior que o número de incógnitas

Na solução do sistema de equações utilizando o método dos mínimos quadrados, o número de equações maior que o número de incógnitas e as equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{aligned} X &= N^{-1}U, \\ N &= A^T A, \\ U &= A^T L. \end{aligned} \quad (46)$$

Se $A^T A$ é mal condicionada ou singular, a solução de mínimos quadrados utilizando o SVD pode ser dada por (PRESS et. al, 1992):

$$X = VW^{-1}U^T L. \quad (47)$$

Portanto, a decomposição SVD é uma técnica vantajosa tanto para inferências sobre o condicionamento de sistemas de equações quanto para a solução desses sistemas, mesmo que mal condicionados.

6 MÉTODO PROPOSTO PARA A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS E MODELAGEM DAS DISTORÇÕES EM REDES GEODÉSICAS

A contribuição fundamental da pesquisa é apresentada neste capítulo. Inicialmente são abordados aspectos relativos à expansão do modelo TPS para o espaço tridimensional utilizando coordenadas geodésicas cartesianas. Na sequência são detalhadas as etapas do processo de transformação de coordenadas e discutidos detalhes sobre a implementação computacional.

6.1 Considerações Iniciais

A utilização de *Thin-Plate Splines* como funções de mapeamento é mais comum no caso bidimensional, embora a expansão para o caso tridimensional seja abordada por Bookstein (1989). A metodologia proposta nesta pesquisa se baseia na utilização de coordenadas tridimensionais (coordenadas geodésicas cartesianas X, Y e Z) para a modelagem por TPS.

As coordenadas de estações do SGB são disponibilizadas em latitude, longitude e altitude geométrica, sendo as duas primeiras componentes expressas em termos de graus, minutos e segundos e a altitude em metros. Para evitar problemas de distorção, por exemplo, decorrente da representação bidimensional dos dados em uma projeção, optou-se em trabalhar com coordenadas geodésicas cartesianas, obtidas por formulação direta (IBGE, 1989).

A primeira fase do desenvolvimento da metodologia proposta foi a expansão do modelo TPS para o espaço tridimensional seguida da resolução do sistema de equações (estimativa dos coeficientes do modelo). Com o modelo e a formulação matemática definidos, a etapa posterior foi a implementação computacional do método no ambiente de programação C/C++, seguida da validação com dados sintéticos e posteriormente reais.

Os detalhes das etapas de formulação, implementação, aplicação e validação do método proposto são descritos na sequência.

6.2 Modelagem Tridimensional por *Thin-Plate Splines*

A formulação TPS se baseia na função de base radial que sofre alterações em função da dimensão das coordenadas utilizadas. Para efeito dessa pesquisa, será utilizada a denominação TPS 2D para se referir à formulação TPS utilizando coordenadas no domínio bidimensional e TPS 3D quando se trata da formulação com coordenadas no domínio tridimensional. Conforme descrito no Capítulo 4, a função de base radial para a formulação TPS 2D é dada por $U(r) = r^2 \log r^2$. Ao se utilizar coordenadas no espaço tridimensional a função de base radial é dada por (BOOKSTEIN, 1989):

$$Z(x, y, z) = U(r) = \|r\|_2, \quad (48)$$

onde, $\|r\|_2$ é a norma Euclidiana de r que expressa a distância à origem do sistema cartesiano, a qual é definida pelas coordenadas de cada ponto de controle.

A norma usada na Equação 48 pode ser escrita, criando-se uma função similar à Equação 17, ou seja, $Z'(x, y) = U(r) = \|r\|_2$. A Figura 22 mostra o gráfico $-Z'(x, y)$ para x e y no intervalo $[-1, 1]$.

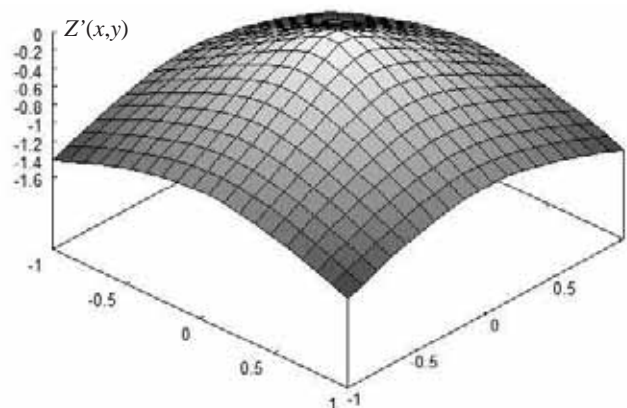


Figura 22 - Função de base radial com domínio 2D para a norma $\|.\|_2$.

A combinação linear de múltiplos termos de $U(r)$ é utilizada para modelar uma placa delgada de metal que se estende em todas as direções, conforme a definição de TPS. As mesmas suposições do caso 2D são válidas para o caso 3D, como mínima energia de curvatura e suavidade da superfície.

Por meio da função de base radial é possível definir as funções de mapeamento TPS em X , Y e Z , dadas pelas equações apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} X_2 &= a_0 + a_1X_1 + a_2Y_1 + a_3Z_1 + \sum_{i=1}^n u_i U(r_i), \\ Y_2 &= a_4 + a_5X_1 + a_6Y_1 + a_7Z_1 + \sum_{i=1}^n v_i U(r_i), \\ Z_2 &= a_8 + a_9X_1 + a_{10}Y_1 + a_{11}Z_1 + \sum_{i=1}^n w_i U(r_i), \end{aligned} \quad (49)$$

onde:

$a_0, a_1, \dots, a_{11}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ - coeficientes das funções TPS em X , Y e Z ;

X_2, Y_2, Z_2 - coordenadas geodésicas cartesianas na realização de destino;

X_1, Y_1, Z_1 - coordenadas geodésicas cartesianas na realização de origem;

n - número de pontos de controle;

$U(r_i)$ - aplicação da Equação 48, tendo a distância Euclidiana no espaço tridimensional (r_i) do ponto de controle aos demais pontos i como argumento.

Para a determinação dos coeficientes do modelo TPS é necessário a resolução do sistema de equações formado pela Equação 49, juntamente com as injunções dadas pelas equações:

$$\sum_{i=1}^n u_i = 0, \quad (50)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0, \quad (51)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 0, \quad (52)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i X_i = 0, \quad (53)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i Y_i = 0, \quad (54)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i Z_i = 0, \quad (55)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i X_i = 0, \quad (56)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i Y_i = 0, \quad (57)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i Z_i = 0, \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i X_i = 0, \quad (59)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i Y_i = 0, \quad (60)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i Z_i = 0. \quad (61)$$

As Equações 50 a 61 asseguram a expansão suave da TPS à medida que o ponto de avaliação da função se distancia de um ponto de controle.

Do modo como estabelecido, o sistema a ser solucionado é formado por $n + 12$ equações e $n + 12$ incógnitas, sendo n o número de pontos de controle. O número de incógnitas aumenta com o aumento de pontos de controle, uma vez que para cada ponto de controle é escrito um conjunto de equações como apresentadas na Equação 49, ou seja, o número de equações sempre será igual ao número de incógnitas.

Considerando o sistema de equações a ser solucionado para a determinação dos coeficientes do modelo TPS, as dimensões das matrizes e vetores são apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7 - Dimensões das matrizes e vetores do modelo TPS para as três componentes cartesianas.

Matriz/Vetor	N ° linhas	Nº colunas
<i>A</i>	$3n+12$	$3n+12$
<i>L</i>	$3n+12$	1
<i>X</i>	$3n+12$	1

Conforme pode ser observado na Tabela 7, a matriz *A*, que deve ser invertida, possui dimensão $(3n+12) \times (3n+12)$. Tomando, por exemplo, a realização SAD69/96 que contém cerca de 4600 pontos, a dimensão da matriz *A* seria de 13812 x 13812. O armazenamento e a inversão de uma matriz dessa dimensão exigiria um grande esforço computacional, que poderia ser minimizado se fossem estimados os coeficientes de cada componente (*X*, *Y* e *Z*) de modo independente.

A solução individual dos coeficientes para cada componente das coordenadas se resume à solução de um sistema formado por $n + 4$ equações por $n + 4$ incógnitas. Neste caso, as matrizes e vetores passam a ter suas dimensões conforme apresentado na Tabela 8.

Tabela 8 - Dimensões das matrizes e vetores do ajustamento por componente cartesiana.

Matriz/Vetor	N ° linhas	Nº colunas
<i>A</i>	$n+4$	$n+4$
<i>L</i>	$n+4$	1
<i>X</i>	$n+4$	1

Conforme abordado na Seção 4.2, alguns problemas de ordem numérica podem ocorrer na inversão da matriz *A* em função da geometria dos dados utilizados. Grande parte

dos elementos da matriz A são compostos por valores calculados em função das distâncias entre um determinado ponto e os demais pontos do conjunto de dados.

No caso do SGB, as estações estão distribuídas irregularmente ao longo de todo o território nacional, portanto, dois pontos muito próximos podem ter distâncias relativamente pequenas com relação aos demais pontos da rede. Isso implica que linhas e/ou colunas da matriz A podem ser combinações lineares umas das outras, provocando problemas de condicionamento e na inversão das matrizes. Por exemplo, um ponto P localizado no extremo sul do Estado do Rio Grande do Sul, tem suas distâncias relativas calculadas com todos os demais pontos da rede geodésica. As distâncias relativas de P com os demais pontos da rede podem atingir até 4.000 km. Um ponto Q localizado a 1 km de P também terá suas distâncias relativas calculadas com os demais pontos da rede geodésica. A relação de diferença entre as distâncias de P e Q para o ponto mais distante é a ordem de $1/4000$.

Como forma de melhorar o condicionamento da matriz A foi adotado um limiar de distância para identificar pontos próximos. Um pré-processamento é realizado nos pontos de controle para verificar pontos que estejam próximos a uma distância igual ou inferior ao limiar estabelecido. Uma vez identificados os pontos que atendem a essa condição, apenas um dos pontos é mantido no conjunto e dados e o outro é descartado. Os critérios para a escolha do limiar são apresentados no Capítulo seguinte. Pode-se pensar que ao eliminar pontos de uma rede a qualidade da modelagem pode ser prejudicada, o que é um aspecto a ser considerado. No entanto, assumindo que as redes apresentam localmente uma deformação homogênea, esta eliminação não prejudica os resultados da modelagem.

É importante destacar que o problema de condicionamento causado por pontos próximos em grandes conjuntos de dados é um complicador quando se trabalha com conjuntos de pontos irregularmente distribuídos. Nos casos onde os pontos são distribuídos regularmente, por exemplo, na forma de grade, os efeitos no condicionamento do sistema ocorrem de maneira mais branda e pode ser contornado mais facilmente. Os estudos apresentados por Ghosh (2010), por exemplo, sugerem que na solução da TPS pelo método clássico, a multiplicação de um valor α à diagonal principal da matriz K tem reflexo na mudança do condicionamento do sistema.

Outra forma de contornar os problemas de condicionamento é a inversão pela decomposição em valores singulares (SVD) discutida na Seção 5.4.1, sendo esta decomposição utilizada, neste trabalho, na inversão da matriz normal A para as três componentes, X , Y e Z .

Com os coeficientes do modelo TPS calculados em função dos pontos de controle homólogos, nas realizações de origem e de destino, a etapa final consiste na aplicação dos coeficientes em pontos na realização de origem para os quais se deseja conhecer as coordenadas na realização de destino.

É importante destacar que, em função da magnitude das coordenadas geodésicas cartesianas, todo o processamento foi realizado com coordenadas normalizadas no intervalo $[-10:10]$, procurando-se evitar problemas de ordem numérica. Ao final da modelagem é realizada a normalização inversa para obter as coordenadas geodésicas na mesma escala e magnitude originais.

O fluxograma da Figura 23 ilustra de maneira resumida as etapas de determinação do modelo TPS proposto nessa pesquisa.

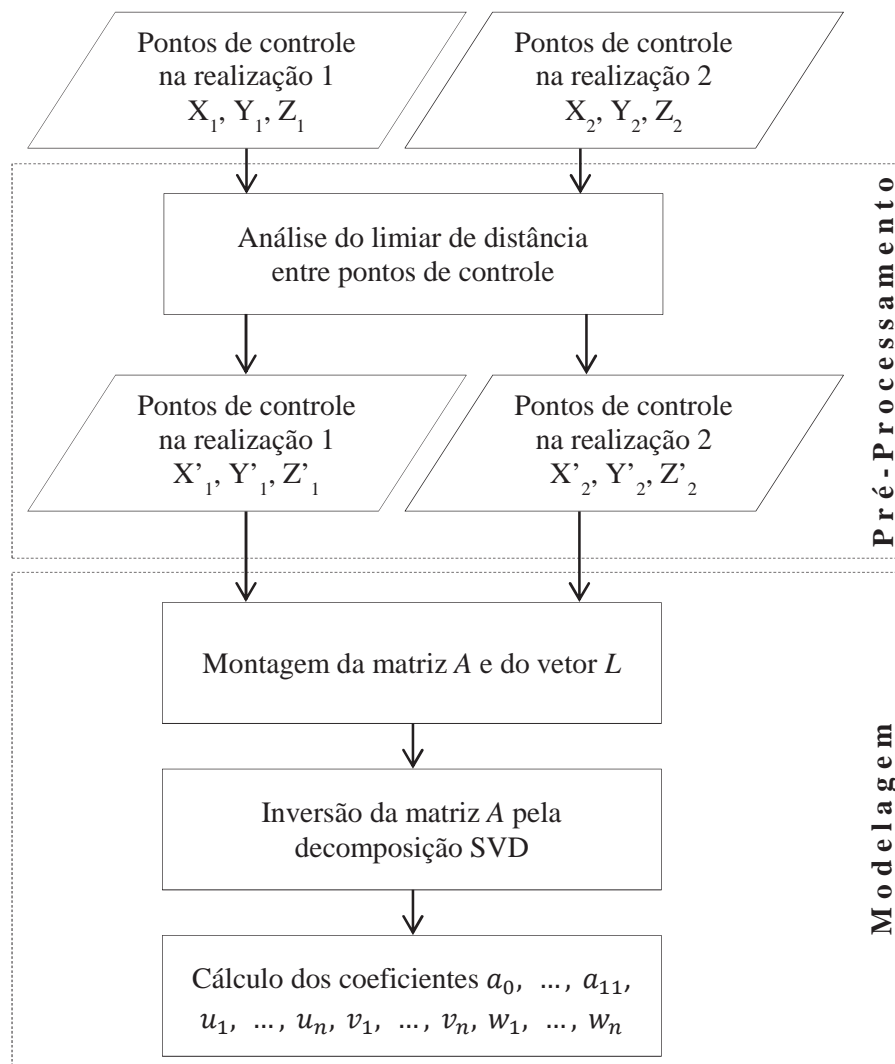


Figura 23 - Fluxograma do processo de determinação dos coeficientes do modelo TPS.

O processo de determinação do modelo TPS, conforme apresentado na Figura 23, inicia-se com dois conjuntos de pontos de controle homólogos associados às realizações de referenciais geodésicos envolvidos na transformação. Esses pontos passam por uma etapa de pré-processamento na qual são identificados os pontos vizinhos com distâncias iguais ou inferiores ao limiar de distância estabelecido. Com os pontos próximos identificados aos pares, apenas um dos pontos é mantido e o outro é excluído, gerando dois novos conjuntos de pontos homólogos.

Uma vez realizado o pré-processamento, os dois conjuntos de pontos resultantes dessa etapa são utilizados na solução do sistema de equações, ou seja, na determinação dos coeficientes do modelo TPS 3D. A matriz A e o vetor L são montados e aplica-se a decomposição por valores singulares SVD para a inversão da matriz A e posterior determinação do vetor X dos parâmetros.

O processo de determinação do modelo TPS, embora demande esforço computacional e tempo elevados, é realizado uma única vez para cada realização envolvida. Uma vez determinado o modelo TPS, seus coeficientes são utilizados para transformar as coordenadas fornecidas pelos usuários da realização de origem para a realização de destino. Este processo de transformação pode ser realizado basicamente de duas formas: analiticamente, ou seja, utilizando o modelo funcional e aplicando os parâmetros calculados; ou disponibilizando grades de transformação (GT). A Figura 24 ilustra as duas possibilidades de transformação de coordenadas.

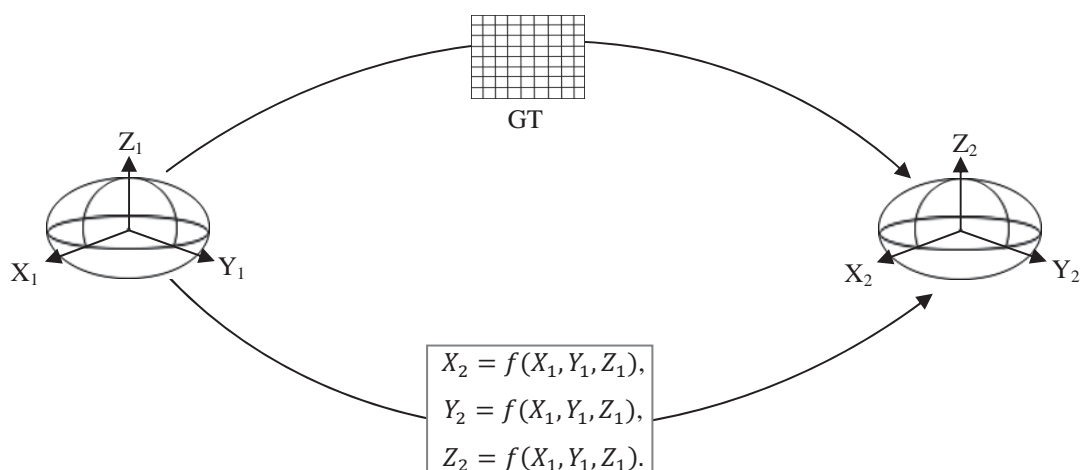


Figura 24 - Possibilidades de transformação de coordenadas entre redes geodésicas.

A disponibilização do modelo TPS a partir de grades de transformação pode ser útil na medida em que, muitos programas computacionais de geoprocessamento aceitam alguns

formatos padronizados de grades de transformação. Entretanto, um processo de interpolação é necessário para obter as coordenadas transformadas a partir das grades de transformação, o que pode degradar a qualidade da transformação.

Na transformação realizada analiticamente, a função f apresentada na Figura 24 se refere ao modelo funcional dado pela Equação 49. Embora o número de coeficientes do modelo possa ser elevado, já que é proporcional ao número de pontos das redes envolvidas no processo de transformação, o cálculo das coordenadas pela Equação 49 é realizado sem dispensar muito tempo ou esforço computacional. Além disso, a aplicação direta dos parâmetros elimina a etapa de interpolação, que seria necessária com a utilização de grades de transformação.

6.3 Implementação Computacional da Modelagem

A implementação da modelagem por TPS foi realizada em linguagem C/C++ no ambiente Borland Builder versão 6.0. O processamento foi realizado em um notebook com processador Intel Core I3 de 2,53GHz, 4 GB de memória RAM e sistema operacional Microsoft Windows 7.

Foram desenvolvidos dois módulos de processamento, um para cálculo dos coeficientes do modelo e outro para a transformação de coordenadas com aplicação dos coeficientes em pontos fornecidos pelo usuário. No módulo de cálculo dos coeficientes são realizadas basicamente as seguintes operações:

- Leitura de arquivos de pontos e de parâmetros;
- Operações de transformação de formato de coordenadas (cartesianas, curvilíneas e normalizadas);
- Montagem das matrizes para a determinação dos coeficientes da função de mapeamento por TPS;
- Determinação dos coeficientes do modelo TPS 3D.

No processo de determinação dos coeficientes do modelo TPS foram utilizadas as rotinas para a decomposição SVD apresentadas em Press et. al (1992).

O módulo de transformação de coordenadas realiza as seguintes operações principais:

- Leitura de arquivos de pontos, de parâmetros e dos coeficientes do modelo TPS 3D;
- Operações de transformação de formato de coordenadas;
- Aplicação do modelo em pontos fornecidos pelo usuário.

O tempo de processamento para a estimativa dos coeficientes variou de 16 segundos, para a realização CA61 (624 pontos), até 3 horas e 2 minutos para o SAD69/96 (4042 pontos).

Uma vez estimados os coeficientes do modelo, estes podem ser utilizados para calcular as coordenadas na realização de destino, a partir das coordenadas na realização de origem. Nesta etapa, o tempo de processamento para os pontos de verificação nas diferentes realizações utilizadas foi praticamente imediato. Dessa forma, mesmo se tratando de um conjunto grande de coeficientes (proporcional ao número de pontos da rede), não há dificuldades quanto ao tempo de processamento ou esforço computacional por parte dos usuários.

7 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Este capítulo trata dos experimentos para validação do método proposto. Análises são realizadas com dados simulados e reais de realizações de referenciais pertencentes ao SGB, procurando avaliar a qualidade e integridade do modelo TPS. Uma análise comparativa com o ProGrid é realizada buscando consolidar os resultados obtidos junto ao método de transformação de coordenadas utilizado do Brasil e consolidado mundialmente (NTv2).

7.1 Descrição dos Experimentos

Os experimentos realizados têm por objetivo principal validar a metodologia, especificamente a técnica *Thin-Plate Splines*, no contexto da transformação de coordenadas e modelagem de distorções em redes geodésicas. Foram utilizados nos experimentos dados simulados e dados reais de estações do SGB fornecidos pelo IBGE por meio do GT3/PMRG. Os dados reais utilizados nos experimentos estão associados às realizações CA61, CA7072, SAD69, SAD69/96 e SIRGAS2000, sendo organizados em: pontos de controle, sendo o conjunto de pontos utilizados para estimar os coeficientes do modelo TPS; e pontos de verificação, cerca de 10% do conjunto total de pontos de cada realização, os quais são utilizados para aplicar os coeficientes do modelo e realizar as análises de qualidade. A divisão entre pontos de controle e de verificação foi realizada pelo GT3 no processo de estudos para implantação do ProGrid e foi mantida nas análises que seguem. É importante destacar que as coordenadas curvilíneas foram transformadas em geodésicas cartesianas considerando a altitude geométrica igual a 0, ou seja, considerando os pontos na superfície do elipsóide. Isso se deve ao fato de não se ter disponível a informação altimétrica em todas as estações da rede nas diferentes realizações.

O Experimento 1 utiliza dados simulados para avaliar a capacidade do modelo TPS em modelar dados que se relacionem a partir de uma transformação geométrica no espaço 3D. A partir das coordenadas de um conjunto de estações em uma realização de origem, a transformação afim geral no espaço tridimensional é utilizada para simular as coordenadas desses mesmos pontos na realização de destino. Os pontos de verificação são transformados

para o sistema de destino utilizando o modelo TPS estimado com os pontos de controle e suas coordenadas comparadas com as coordenadas simuladas a partir da transformação afim 3D.

O Experimento 2 utiliza o mesmo conjunto de dados do experimento 1, porém, os dados simulados no sistema de destino, além de passarem pela transformação afim 3D, também são transformados por um polinômio de segunda ordem. Dessa forma é possível avaliar o comportamento do modelo TPS com dados que apresentem distorções não lineares, além da transformação geométrica afim 3D.

O Experimento 3 tem por objetivo estabelecer um limiar de distância mínima entre os pontos utilizados na geração do modelo TPS, como forma de contornar o problema de condicionamento do sistema de equações TPS. Diferentes limiares de distância são comparados, considerando como critérios: número de pontos excluídos, deficiência de característica e número de condição.

O Experimento 4 consiste em avaliar a qualidade da modelagem por TPS nos próprios pontos de controle utilizados na estimativa do modelo. O conjunto total de pontos de cada realização é utilizado como pontos de controle, ou seja, para estimar os coeficientes TPS. Posteriormente, o modelo estimado é então aplicado no mesmo conjunto total de pontos e suas coordenadas comparadas com as coordenadas ajustadas em SIRGAS2000.

O Experimento 5 consiste em avaliar a qualidade do modelo TPS propriamente dito na transformação direta e inversa entre realizações. Um conjunto de pontos, distinto do conjunto de dados do SGB, é assumido matematicamente como pertencente a uma realização. Este conjunto de pontos é transformado para SIRGAS2000 e novamente transformado para a realização de origem. As análises são baseadas na comparação entre as coordenadas originais (isentas de erro, pois são assumidas matematicamente) e as coordenadas modeladas.

O Experimento 6 tem como objetivo avaliar a qualidade da modelagem por TPS nos pontos de verificação de estações do SGB. Os pontos de controle são utilizados para estimar o modelo TPS que é posteriormente utilizado para transformar as coordenadas dos pontos de verificação para SIRGAS2000. As coordenadas transformadas são então comparadas com as coordenadas ajustadas do SGB.

O Experimento 7 tem por objetivo comparar os resultados da modelagem por TPS com os resultados obtidos pelo ProGrid. Os Experimentos 4 e 5 são novamente realizados utilizando o ProGrid e seus resultados comparados com os resultados obtidos pelo modelo TPS.

Nas análises envolvendo dados reais, os indicadores estatísticos de qualidade avaliados foram: discrepâncias máxima, mínima e média, o desvio padrão (DP) das

discrepâncias, o RMSE (considerando as coordenadas conhecidas em SIRGAS2000 como referência) e o valor máximo absoluto do erro para 90% dos pontos. Embora o processo de estimativa dos coeficientes do modelo e de transformação de coordenadas tenha sido realizado com coordenadas geodésicas cartesianas (X , Y e Z), os resultados são apresentados em termos de coordenadas geodésicas (latitude e longitude) por intuitivamente facilitar a compreensão dos resultados. As discrepâncias, calculadas em graus foram transformadas para metros utilizando as Equações 14, apresentadas na Seção 3.5.

7.2 Avaliação do Modelo TPS em Dados Simulados a partir da Transformação Afim no Espaço Tridimensional – Experimento 1

Esse experimento tem por objetivo avaliar a capacidade do modelo TPS na modelagem de dados que se relacionem por uma transformação geométrica (afim 3D). Para tanto, foram utilizados dados simulados partindo de coordenadas em um referencial (ou realização) de origem e simulando seus respectivos valores em um referencial (ou realização) de destino. Os dados de referência (no referencial de destino) foram calculados a partir de uma transformação afim no espaço tridimensional (Equação 62), sendo que os coeficientes da transformação foram estabelecidos aleatoriamente:

$$\begin{aligned} X_2 &= a_0 + a_1X_1 + a_2Y_1 + a_3Z_1, \\ Y_2 &= a_4 + a_5X_1 + a_6Y_1 + a_7Z_1, \\ Z_2 &= a_8 + a_9X_1 + a_{10}Y_1 + a_{11}Z_1, \end{aligned} \quad (62)$$

onde:

a_0, \dots, a_{11} - coeficientes da transformação afim 3D;

X_1, Y_1 e Z_1 - coordenadas geodésicas cartesianas no sistema 1 (sistema de origem); e

X_2, Y_2 e Z_2 - coordenadas geodésicas cartesianas no sistema 2 (sistema de destino).

Foram utilizados 137 pontos de controle para estimar os coeficientes do modelo TPS e 16 pontos de verificação para avaliar a transformação. Para fazer este teste com dados simulados mais próximos de uma situação real, optou-se por escolher os pontos de uma realização como pontos conhecidos, neste caso, em SAD 69/96. A partir disso, os coeficientes

foram simulados e os pontos da outra realização calculados utilizando a transformação afim 3D (Equação 62).

A Tabela 9 apresenta algumas estatísticas das discrepâncias entre as coordenadas no sistema de destino e as coordenadas no sistema de origem para os pontos de controle e de verificação antes da modelagem. Estes valores representam a magnitude das discrepâncias antes da modelagem e auxiliará a análise futura do desempenho do modelo TPS.

Tabela 9 - Estatísticas das discrepâncias nos pontos de controle e de verificação para o experimento 1, antes da modelagem.

Discrepâncias	Pontos de Controle			Pontos de Verificação		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
Média	-67,2330	4,3603	-38,3539	-67,4222	4,1258	-38,6859
Desvio Padrão	0,5674	1,3397	1,5257	0,6183	1,3203	1,5610
RMSE	67,2354	4,5601	38,3840	67,4249	4,3194	38,7154
N° de pontos	137			16		

A disposição dos pontos utilizados neste experimento é apresentada na Figura 25.

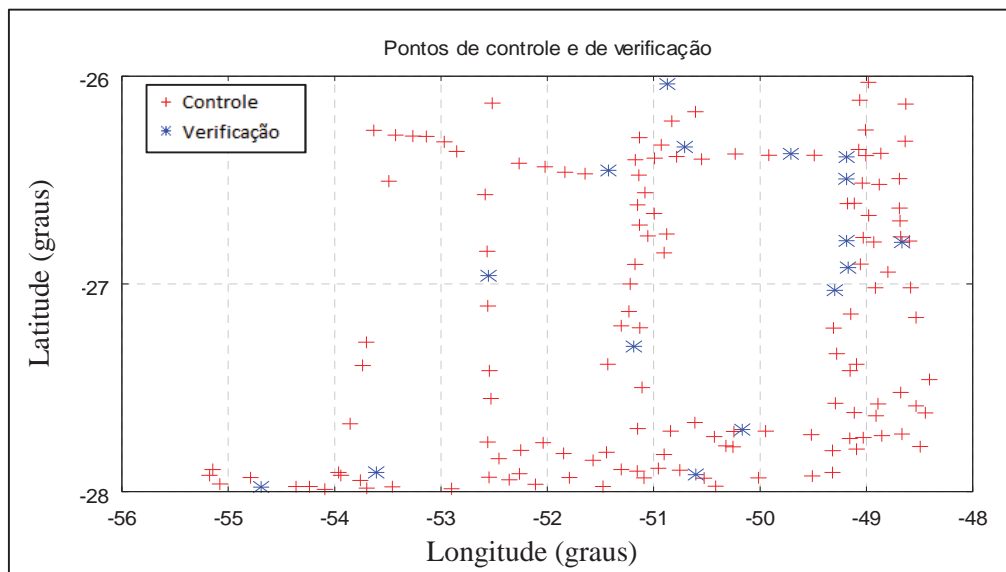


Figura 25 - Disposição dos pontos de controle e de verificação para o experimento 1.

Conforme observado na Figura 25, a disposição dos pontos de controle e de verificação não segue um padrão regular, justamente por se tratarem de pontos com coordenadas reais no referencial de origem. O objetivo é justamente avaliar como o modelo se comporta em situações mais próximas da realidade do SGB onde, em geral, as estações não obedecem a um padrão totalmente regular de distribuição espacial.

Uma vez estimados os coeficientes da função de mapeamento TPS nos pontos de controle foi realizada a transformação das coordenadas nos pontos de verificação e calculadas

as discrepâncias entre as coordenadas de referência e as transformadas com o modelo TPS. As estatísticas das discrepâncias nos pontos de verificação após a transformação com o modelo TPS são apresentadas na Tabela 10.

Tabela 10 - Estatísticas das discrepâncias nos pontos de verificação para o experimento 1, após a modelagem por TPS.

Discrepâncias	X (m)	Y (m)	Z (m)
Média	$-3,15 \times 10^{-7}$	$-4,58 \times 10^{-7}$	$-1,12 \times 10^{-7}$
Desvio padrão	$4,82 \times 10^{-7}$	$6,47 \times 10^{-7}$	$1,85 \times 10^{-7}$
RMSE	$5,63 \times 10^{-7}$	$7,76 \times 10^{-7}$	$2,11 \times 10^{-7}$
Nº de pontos	16		

Com a aplicação do modelo TPS, pode-se notar que todos os indicadores estatísticos na Tabela 10 indicam discrepâncias da ordem do bilionésimo de milímetros (1×10^{-7}). Esses resultados evidenciam a capacidade do modelo TPS na modelagem de dados que podem ser relacionados a partir da transformação afim 3D, mesmo se tratando de dados com distribuição irregular. Neste experimento não foi necessário excluir pontos muito próximos, uma vez que a distância relativa dos pontos não ocasionou problemas de condicionamento na matriz A.

7.3 Avaliação do Modelo TPS em Dados Simulados com Distorções – Experimento 2

Esse experimento tem por objetivo avaliar o comportamento do modelo TPS na modelagem de dados que apresentam, além do descolamento provocado por uma transformação geométrica, uma parcela não linear de distorções. Da mesma forma que no experimento 1, foram utilizados dados simulados partindo de coordenadas em um referencial de origem e simulando seus respectivos valores em um referencial de destino. Os dados de referência, ou seja, no sistema de destino, foram calculados aplicando uma transformação composta por termos lineares e não lineares (composta por um polinômio de segundo grau). Assim, os dados no sistema 2 são resultantes da aplicação da transformação afim 3D e do polinômio de segundo grau apresentado na Equação 63:

$$\begin{aligned}
X'_2 &= b_0 + b_1X_2 + b_2Y_2 + b_3Z_2 + b_4X_2Y_2 + b_5X_2Z_2 + b_6Y_2Z_2 + b_7X_2^2 \\
&\quad + b_8Y_2^2 + b_9Z_2^2, \\
Y'_2 &= b_{10} + b_{11}X_2 + b_{12}Y_2 + b_{13}Z_2 + b_{14}X_2Y_2 + b_{15}X_2Z_2 + b_{16}Y_2Z_2 + b_{17}X_2^2 \\
&\quad + b_{18}Y_2^2 + b_{19}Z_2^2, \\
Z'_2 &= b_{20} + b_{21}X_2 + b_{22}Y_2 + b_{23}Z_2 + b_{24}X_2Y_2 + b_{25}X_2Z_2 + b_{26}Y_2Z_2 + b_{27}X_2^2 \\
&\quad + b_{28}Y_2^2 + b_{29}Z_2^2,
\end{aligned} \tag{63}$$

sendo:

b_0, \dots, b_{29} - coeficientes do polinômio de segunda ordem;

X_2, Y_2 e Z_2 - coordenadas geodésicas cartesianas no sistema 2 geradas a partir da transformação afim; e

X'_2, Y'_2 e Z'_2 - são as coordenadas geodésicas cartesianas no sistema 2 geradas a partir do polinômio.

Foram utilizados os mesmos pontos do experimento 1, sendo 137 pontos de controle para estimar os coeficientes do modelo TPS e 16 pontos de verificação para avaliar a transformação. A Tabela 11 apresenta algumas estatísticas das discrepâncias nos pontos de controle e de verificação na comparação direta das coordenadas no sistema 1 e no sistema 2:

Tabela 11 - Estatísticas das discrepâncias nos pontos de controle e de verificação para o experimento 2, antes da modelagem.

Discrepâncias	Pontos de Controle			Pontos de Verificação		
	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
Média	162,3743	247,3418	-101,9868	184,6078	268,5915	-121,5575
Desvio Padrão	474,9677	374,1534	91,5071	501,9857	412,4127	116,5813
RMSE	500,5134	447,5169	136,8253	522,3094	482,9843	166,2892
N° de pontos	137			16		

As estatísticas das discrepâncias nos pontos de verificação após a modelagem por TPS são mostradas na Tabela 12:

Tabela 12 - Estatísticas das discrepâncias nos pontos de verificação para o experimento 2, após a modelagem por TPS.

Discrepâncias	X (m)	Y (m)	Z (m)
Média	$2,73 \times 10^{-5}$	$-2,29 \times 10^{-5}$	$-1,71 \times 10^{-5}$
Desvio padrão	$1,95 \times 10^{-4}$	$1,82 \times 10^{-4}$	$1,31 \times 10^{-4}$
RMSE	$1,92 \times 10^{-4}$	$1,78 \times 10^{-4}$	$1,29 \times 10^{-4}$
N° de pontos	16		

De maneira similar ao experimento 1, houve reduções nas discrepâncias após a modelagem por TPS, resultando em valores dos indicadores estatísticos da ordem de décimos de milímetros. Esses resultados evidenciam a capacidade do método em modelar deformações de natureza não linear contidas nos dados homólogos.

7.4 Avaliação do Limiar de Distância Mínima – Experimento 3

Conforme mencionado no Capítulo 4, pares de pontos muito próximos com relação aos demais pontos da rede podem causar problemas de mal condicionamento na matriz A e degradar a modelagem. Assim, foi realizada uma análise para definir um limiar de distância mais apropriado para a exclusão de pontos próximos e, com isso, minimizar o problema de condicionamento. A escolha do limiar de distância se pautou no teste de diferentes limiares, analisando valores de deficiência de característica, número de condição da matriz A e número de pontos descartados em cada limiar. Foram testados os seguintes limiares para distâncias: 500 m, 800 m, 1000 m, 1500 m e 2000 m. Os gráficos apresentados nas Figuras 26, 27, e 28, apresentam os resultados obtidos para o conjunto de pontos de controle na realização SAD69/96 (composto por 4067 pontos), comparando os limiares de distância, respectivamente, com número de pontos excluídos, deficiência de característica e número de condição.

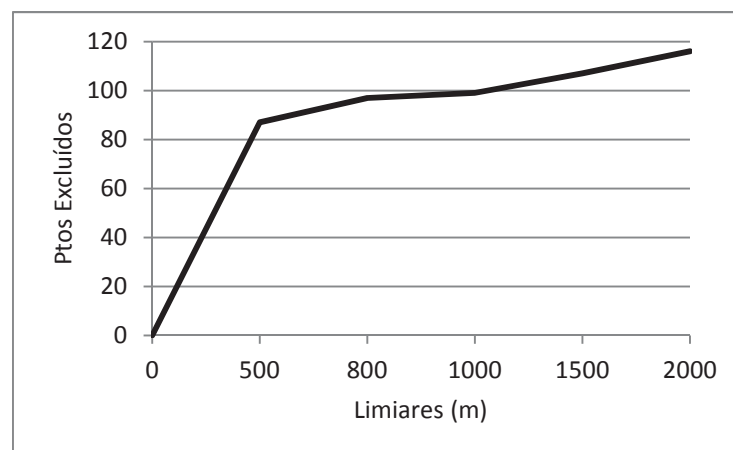


Figura 26 - Relação entre limiares de distância e número de pontos excluídos.

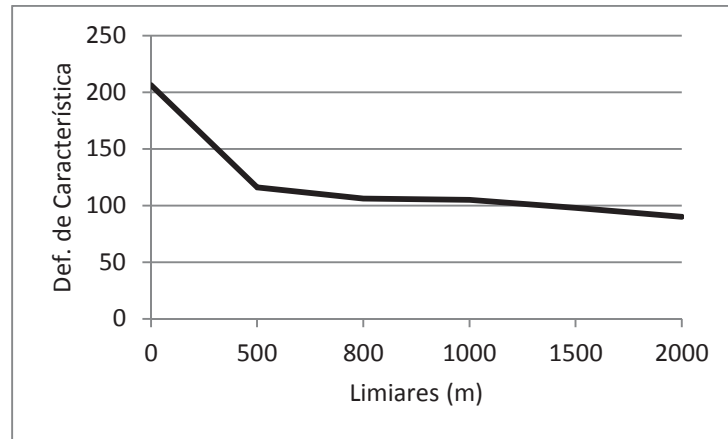


Figura 27 - Relação entre limiares de distância e deficiência de característica da matriz A.

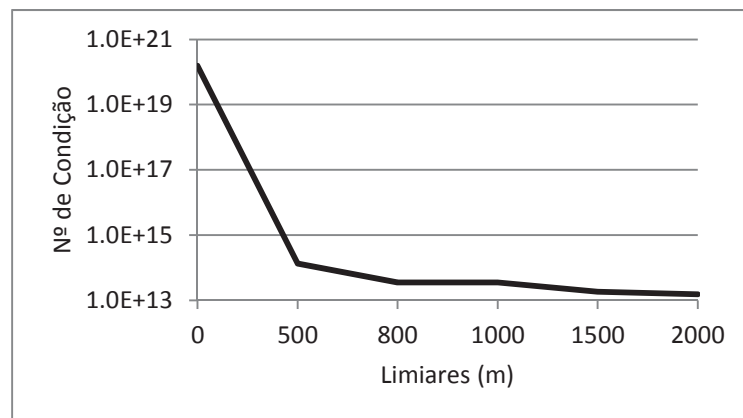


Figura 28 - Relação entre limiares de distância e número de condição da matriz A.

Na Figura 26 é possível observar o aumento natural do número de pontos excluídos em função do aumento do limiar de distância. O número de pontos excluídos se torna estável entre os limiares 800 m e 1000 m, com cerca de 100 pontos excluídos. A partir do limiar de 1500 m o número de pontos excluídos passa a aumentar novamente, atingindo 116 pontos no limiar de 2000 m.

Com relação à deficiência de característica, é possível verificar na Figura 27, que sem a aplicação de nenhum limiar de distância, a matriz A possui deficiência de característica igual a 206. Assim como ocorreu com a exclusão de pontos, a deficiência de característica se estabiliza em 98 entre os limiares 800 m e 1000 m. Com o aumento do limiar de distância para 1500 m e 2000 m a deficiência de característica continua a reduzir lentamente.

O número de condição (Figura 28) calculado para a matriz A, possui magnitude de $1,5 \times 10^{20}$ quando nenhum limiar de distância é adotado, sendo reduzido para $1,3 \times 10^{14}$ quando aplicado o limiar de 500 m. A partir do limiar 800 m o valor do número de condição se estabiliza na ordem de $1,5 \times 10^{13}$.

Baseado nas análises apresentadas, os limiares 800 m e 1000 m são aqueles que apresentam características mais favoráveis para exclusão de pontos próximos. Um fator que reforça a justificativa para a escolha dos limiares é o fato de que, de acordo com IBGE (1983), nos levantamentos geodésicos de alta precisão em âmbito nacional, o espaçamento desejável das estações é de 15 km e no máximo 25 km. No entanto, existem na rede geodésica pontos com distâncias menores em decorrência dos processos de expansão da rede. Sabe-se que estes marcos não se caracterizam por marco de azimute (ou marco testemunho), pois esse tipo de marco foi excluído do conjunto de dados disponibilizado pelo IBGE ao GT3.

Partindo do princípio de que a escolha do limiar 1000 m ao invés de 800 m não aumenta consideravelmente o número de pontos excluídos, mas proporciona uma pequena melhora na deficiência de característica e no condicionamento da matriz A , optou-se pela escolha do limiar 1.000 m nas análises de pontos próximos. Assim, antes da geração do modelo TPS é feito um pré-processamento nos pontos homólogos das realizações envolvidas e, uma vez detectados pares de pontos com distância inferior a 1 km, um dos pontos é mantido e o outro é descartado automaticamente.

7.5 Análise da Qualidade da Modelagem com o Conjunto Total de Pontos de Realizações do SGB – Experimento 4

Uma das qualidades requeridas em modelagem é que nos pontos de controle, ou seja, nos pontos utilizados para gerar o modelo, o erro do modelo seja mínimo. Neste experimento, foram determinados os coeficientes do modelo TPS para cada uma das realizações dos referenciais oficiais do Brasil, utilizando todo o conjunto de pontos disponíveis em cada realização como pontos de controle.

O pré-processamento foi realizado nos dados para eliminar pontos próximos de acordo com o limiar de distância. Uma vez estimados, os coeficientes do modelo TPS foram aplicados, em cada realização, nos mesmos pontos de controle, com o propósito de avaliar a consistência do modelo funcional ao conjunto de dados disponível. As análises de qualidade foram realizadas baseadas nas discrepâncias entre as coordenadas conhecidas no referencial de destino e as respectivas coordenadas transformadas pelo modelo TPS. A Figura 29 ilustra as etapas deste experimento. As etapas relacionadas por linhas pontilhadas representam a

transformação de coordenadas, ou seja, a aplicação dos coeficientes do modelo TPS em coordenadas fornecidas no sistema de origem.

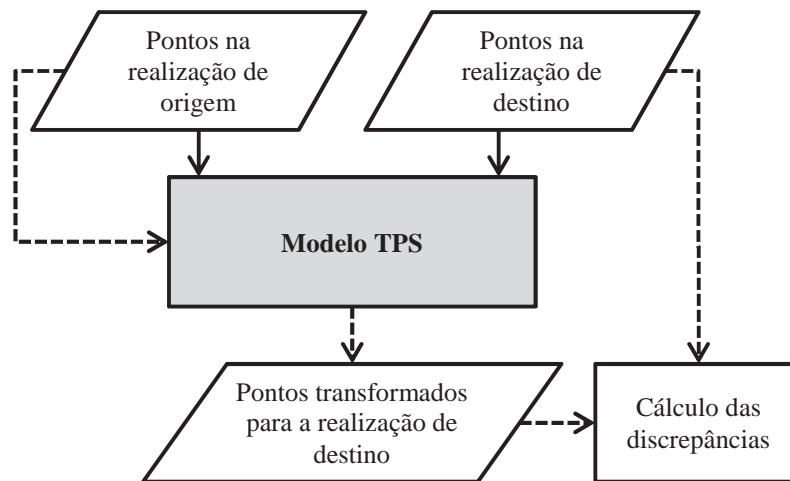


Figura 29 - Fluxograma das etapas do experimento 4.

As informações estatísticas das discrepâncias calculadas nos pontos de controle são apresentadas na Tabela 13.

Tabela 13 – Estatísticas da análise da qualidade da modelagem com a totalidade dos pontos.

Discrepâncias	CA61		CA7072		SAD69		SAD69/96	
	Lat (m)	Lon (m)	Lat (m)	Lon (m)	Lat (m)	Lon (m)	Lat (m)	Lon (m)
Máxima	0,0006	0,0005	0,0017	0,0012	0,0085	0,0081	0,0074	0,0065
Mínima	0,0005	-0,0005	-0,0552	-0,0011	-0,0085	-0,0098	-0,0103	-0,0082
Média	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Desvio Padrão	0,0003	0,0003	0,0013	0,0003	0,0009	0,0007	0,0009	0,0006
RMSE	0,0003	0,0003	0,0013	0,0003	0,0009	0,0007	0,0009	0,0006
90% ≤	$2,5 \times 10^{-7}$	$2,2 \times 10^{-7}$	0,0006	0,0005	0,0013	0,0009	0,0012	0,0009

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 13, a discrepância média foi nula em todos os casos avaliados. Os valores do RMSE foram mínimos para o CA61 com 0,3 mm em cada componente das coordenadas e máximos para o SAD69 com 0,9 mm em latitude e 0,7 mm em longitude. Em geral, os valores próximos à zero para os indicadores estatísticos das discrepâncias, sugerem que a modelagem TPS atende à característica desejada para o modelo, que deve garantir a fidelidade dos valores nos pontos amostrais. Pode-se dizer que o modelo proposto atende ao requisito analisado em todas as realizações testadas.

7.6 Análise da Qualidade da Transformação em Pontos não Coincidentes com Estações do SGB – Experimento 5

A análise da qualidade das transformações direta e inversa por meio da metodologia proposta é realizada neste quinto experimento. Para tanto, foram utilizados 368 pontos de verificação regularmente espaçados de $2^\circ \times 2^\circ$ em latitude e longitude. Os pontos de verificação com coordenadas distintas dos pontos do SGB foram assumidos como tendo suas coordenadas referenciadas ao SAD69/96. Estes pontos poderiam ser, por exemplo, provenientes de uma base cartográfica digital, um mapa ou qualquer outro documento cartográfico. Os pontos foram convertidos para o referencial SIRGAS2000, aplicando o modelo TPS obtido no experimento 4 com o conjunto total de pontos. As coordenadas resultantes da transformação foram novamente convertidas para SAD69/96 usando o modelo TPS inverso calculado como no experimento 4, entretanto utilizando a realização SIRGAS2000 como origem e a realização SAD69/96 como destino. Como as coordenadas iniciais dos pontos utilizados estavam isentas de erros, em função da maneira com que foram definidas (matematicamente), as diferenças entre as coordenadas originais e as transformadas representam os erros decorrentes das próprias transformações. A Figura 30 ilustra as etapas deste experimento em um fluxograma.

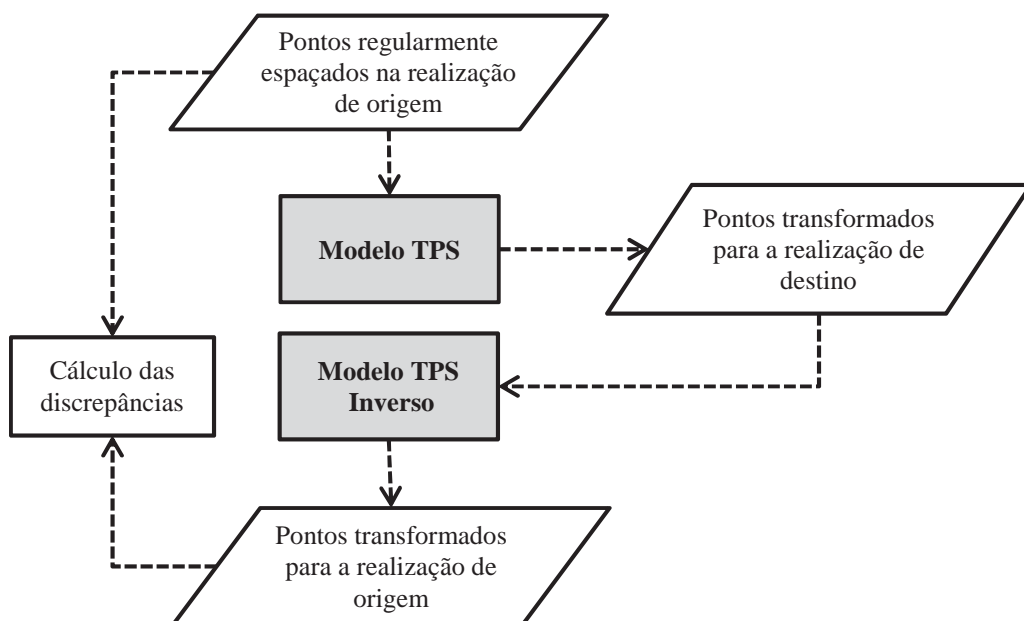


Figura 30 - Fluxograma das etapas do experimento 5.

A Figura 31 mostra a distribuição dos pontos de verificação utilizados neste experimento.

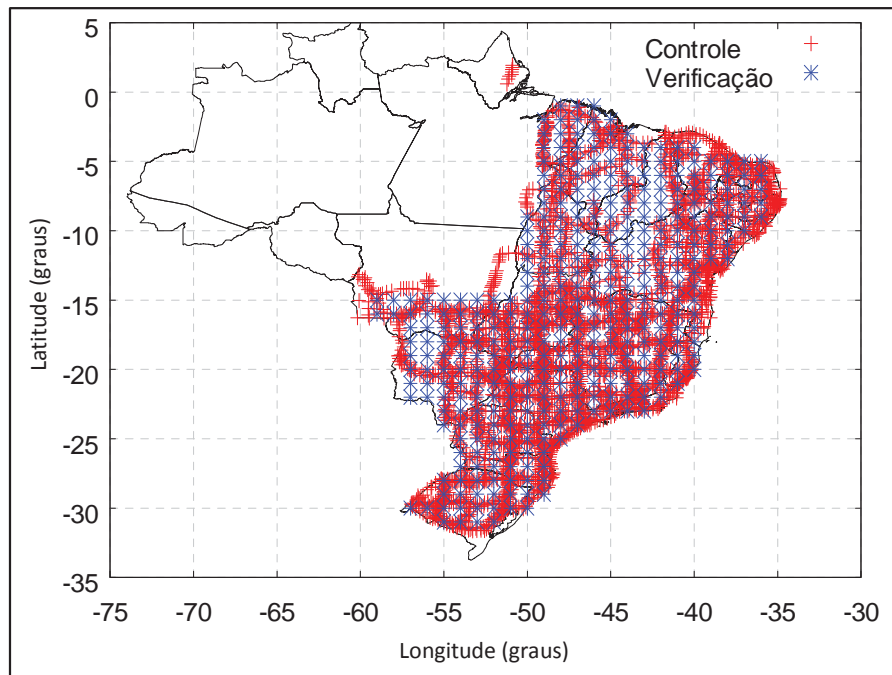


Figura 31 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação para a análise da transformação.

A Tabela 14 apresenta os resultados das discrepâncias entre as coordenadas originais e transformadas pelo modelo TPS nos pontos de verificação.

Tabela 14 - Estatísticas do experimento 5 após a modelagem por TPS.

Discrepâncias	Latitude (m)	Longitude (m)
Máxima	0,0035	0,0018
Mínima	-0,0034	-0,0026
Média	0,0000	0,0000
Desvio Padrão	0,0005	0,0003
90% ≤	0,0005	0,0003

De acordo com a Tabela 14 o erro máximo absoluto esperado para a modelagem com TPS é de aproximadamente 3,5 mm em latitude e 2,6 mm em longitude. Os demais valores são da ordem dos décimos de milímetro, indicando que os erros decorrentes da transformação utilizando TPS são de pequena magnitude.

7.7 Análise da Qualidade da Modelagem nos Pontos de Verificação das Realizações do SGB – Experimento 6

Esse experimento tem por objetivo avaliar a qualidade da modelagem TPS nos pontos de verificação de estações do SGB. Foram utilizados os pontos de cálculo para estimar os coeficientes do modelo TPS e pontos de verificação, distintos dos pontos de cálculo, para analisar a qualidade da transformação. Foram mantidas as mesmas configurações de pontos de cálculo e de verificação utilizadas no processo de análise do modelo de distorções para o SIRGAS2000 junto ao GT3.

Estimados os coeficientes do modelo TPS nos pontos de cálculo, realizou-se a modelagem nos pontos de verificação e foram comparadas as coordenadas de referência (ajustadas pelo IBGE em SIRGAS2000) com as coordenadas transformadas com o modelo TPS. A Figura 32 apresenta um fluxograma com as etapas realizadas neste experimento.

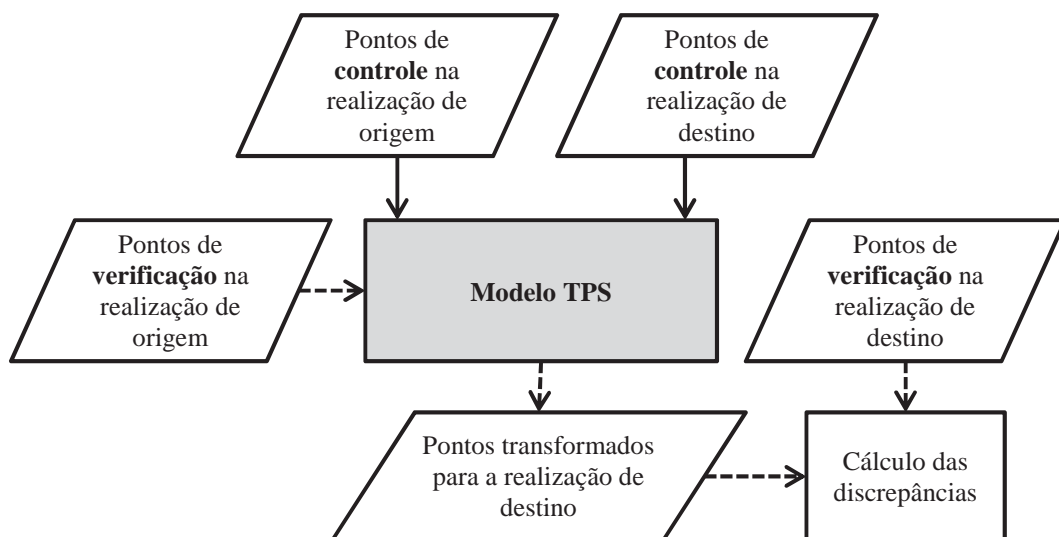


Figura 32 - Fluxograma das etapas do experimento 6.

As realizações analisadas foram: CA61, CA7072, SAD69 e SAD69/96. Todas as análises foram feitas considerando a transformação de coordenadas das realizações antigas para o SIRGAS2000.

Pode-se dizer que as discrepâncias obtidas para as coordenadas representam a acurácia das mesmas, já que as coordenadas transformadas para a realização de destino foram comparadas com os valores de referência, ou seja, a própria coordenada no sistema de destino.

7.7.1 Análise da modelagem nos pontos de verificação na realização CA61

Para o experimento com a realização CA61 foram utilizados 567 pontos de controle e 57 pontos de verificação. Nesta realização não houve a necessidade de descarte de pontos próximos, uma vez que a realização é limitada a uma região restrita do território nacional, como mostrado na Figura 33.

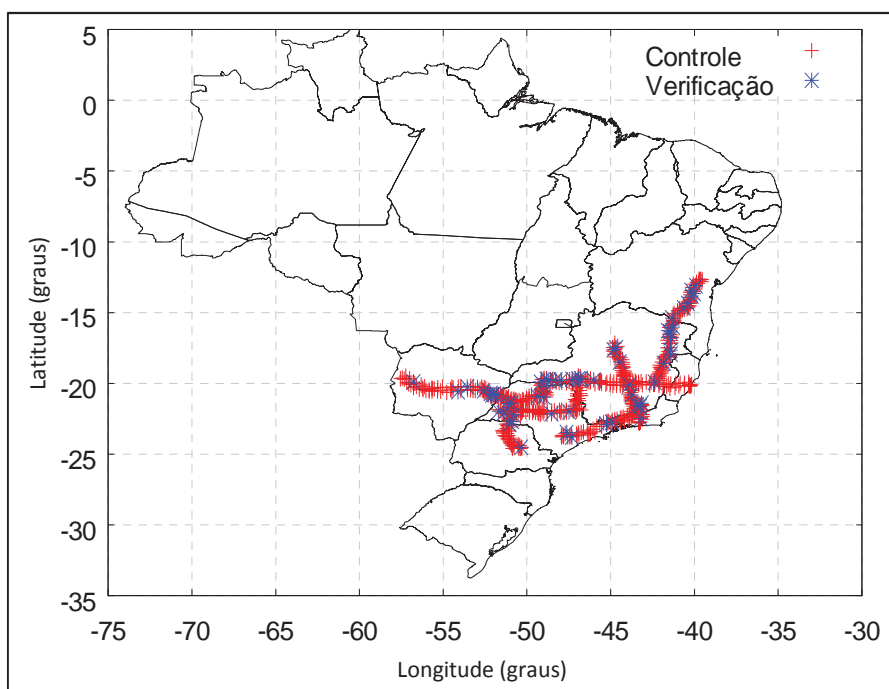


Figura 33 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação da realização CA61.

Na Tabela 15 são apresentadas as informações estatísticas sobre as discrepâncias nos pontos de verificação antes e após a modelagem por TPS.

Tabela 15 - Resultados da modelagem nos pontos de verificação na realização CA61.

Discrepâncias	Antes da Modelagem		Após a Modelagem por TPS	
	Latitude (m)	Longitude (m)	Latitude (m)	Longitude (m)
Máxima	45,3697	66,7413	0,2115	0,3429
Mínima	26,2411	2,7114	-0,3438	-0,4755
Média	-33,5580	-33,0668	-0,0130	0,0176
Desvio Padrão	4,1061	20,7789	0,0860	0,1138
RMSE	33,8039	38,9564	0,0862	0,1142
90% ≤	37,2924	59,3561	0,1193	0,1505
Nº de pontos	57			

Com base nos resultados apresentados na Tabela 15 verifica-se que a modelagem por TPS para a realização CA61 proporciona uma redução superior a 99,7% do RMSE nos pontos

de verificação, atingindo os valores de 8,62 cm em latitude e 11,42 cm em longitude. Em 90% dos pontos de verificação, as discrepâncias foram inferiores a 11,93 cm em latitude e 15,05 cm em longitude. Em termos de distorções residuais, as Figuras 34 e 35 apresentam a magnitude da resultante planimétrica nos pontos de verificação, respectivamente, antes e após a modelagem por TPS.

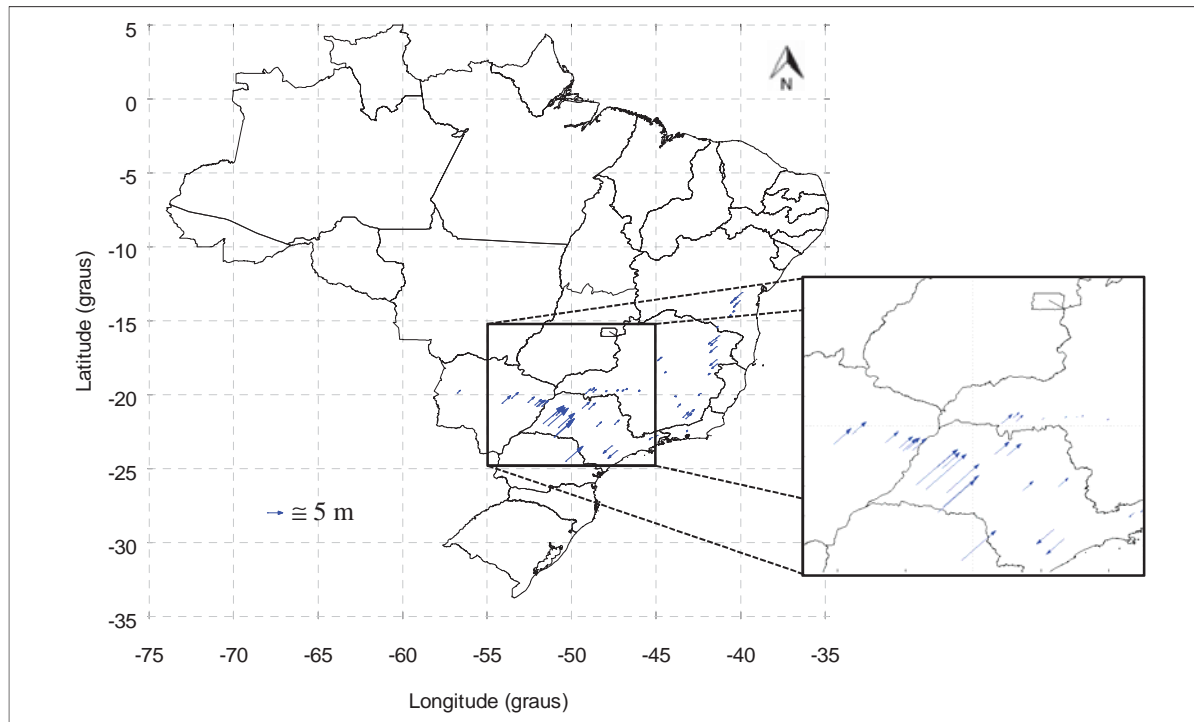


Figura 34 - Distorções na realização CA61, nos pontos de verificação, antes da modelagem.

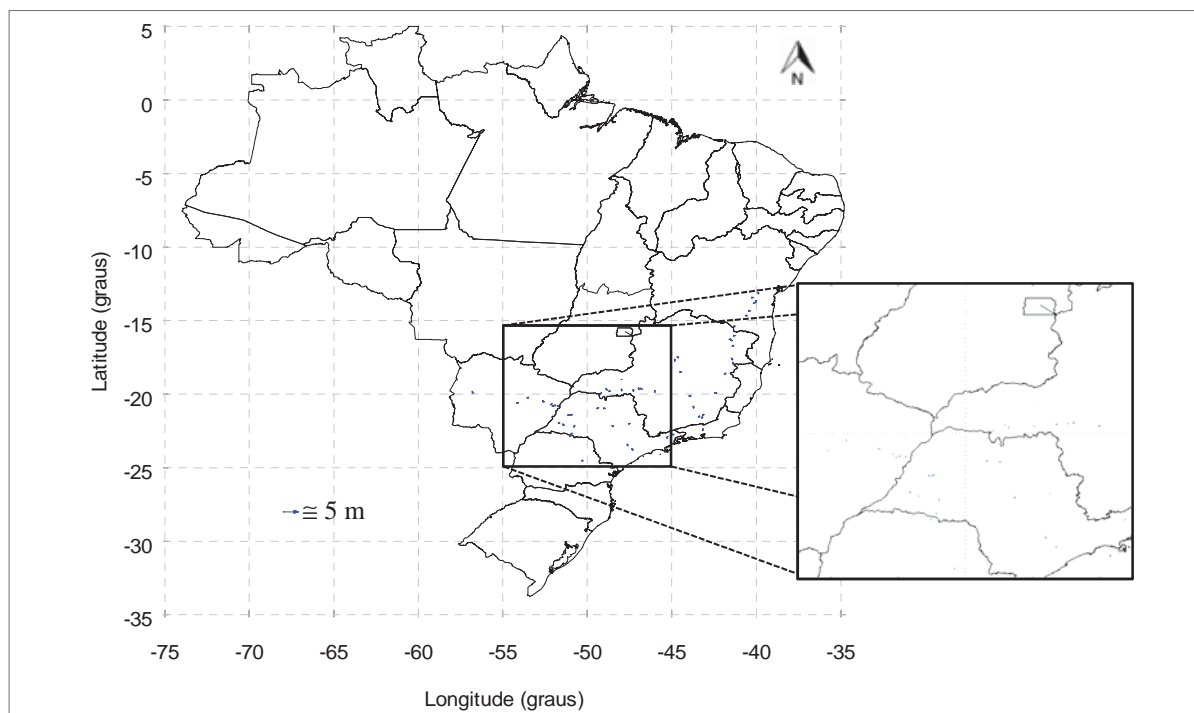


Figura 35 - Distorções na realização CA61, nos pontos de verificação, após a modelagem por TPS.

É possível constatar a redução das distorções após a modelagem, mesmo nos pontos de verificação que apresentavam distorções de maior magnitude antes da modelagem.

7.7.2 Análise da modelagem nos pontos de verificação na realização CA7072

Na realização CA7072, de um total de 2152 pontos, 1945 foram utilizados como pontos de controle, 11 foram descartados (pontos próximos) e 196 foram utilizados como pontos de verificação. A distribuição dos pontos de controle e de verificação é apresentada na Figura 36.

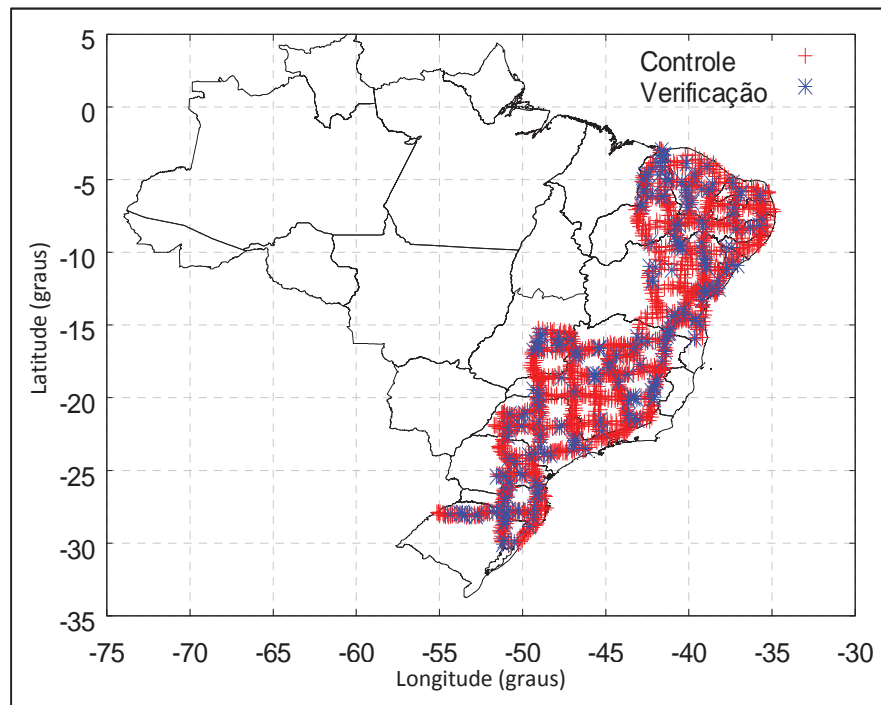


Figura 36 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação da realização CA7072.

Na Tabela 16 são apresentadas as informações estatísticas sobre as discrepâncias nos pontos de verificação antes e após a modelagem TPS.

Tabela 16 - Resultados da modelagem nos pontos de verificação na realização CA7072.

Discrepâncias	Antes da Modelagem		Após a Modelagem por TPS	
	Latitude (m)	Longitude (m)	Latitude (m)	Longitude (m)
Máxima	-10,7901	14,8913	0,5645	0,2959
Mínima	-51,9128	-70,8955	-0,4136	-0,4606
Média	-35,3909	-34,6704	0,0053	-0,0177
Desvio Padrão	10,4327	21,5174	0,1137	0,1083
RMSE	30,1546	33,0506	0,1137	0,1082
90% ≤	43,1184	56,0279	0,1587	0,1899
N° de pontos	196			

Apesar de se tratar de uma realização com distorções de grande magnitude, chegando a atingir 70,89 m de discrepância em uma das componentes, o RMSE foi reduzido em cerca de 99,7% em cada componente após a modelagem, atingindo 11,37 cm em latitude e 10,82 cm em longitude. As discrepâncias médias foram reduzidas para 0,53 cm e 1,77 cm em latitude e longitude, respectivamente.

As Figuras 37 e 38 apresentam a magnitude da resultante planimétrica das distorções antes e após a modelagem TPS, respectivamente.

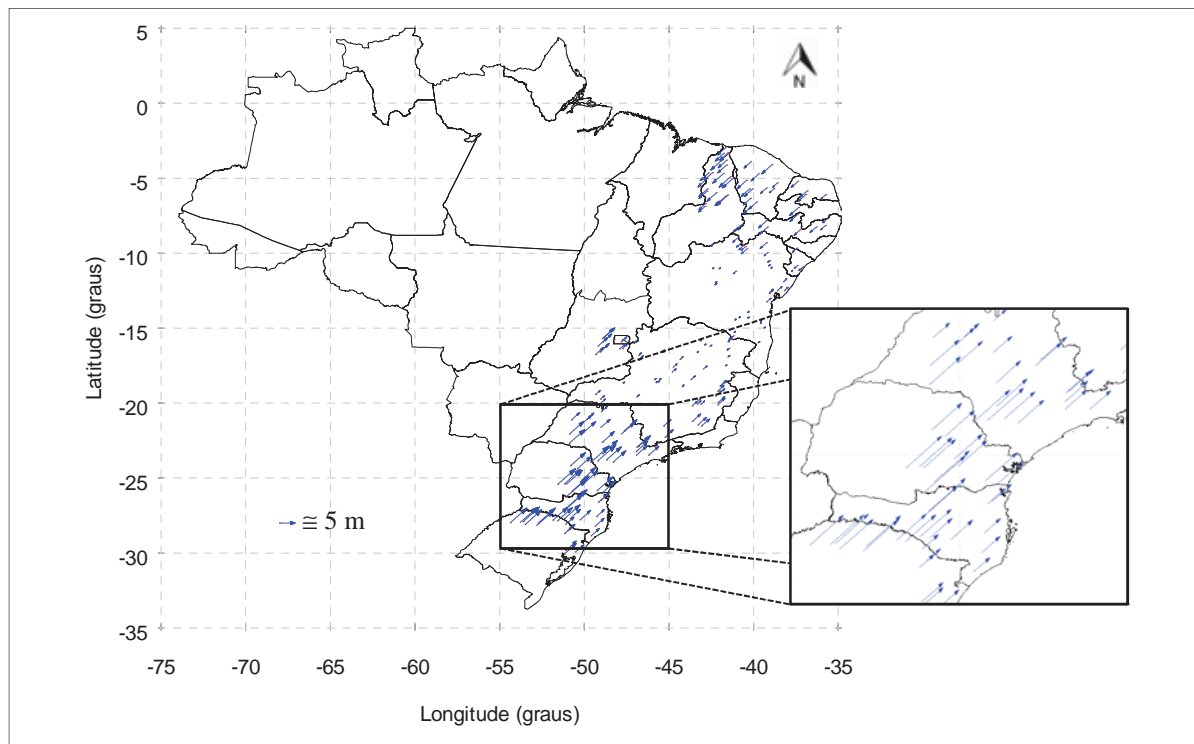


Figura 37 - Distorções na realização CA7072, nos pontos de verificação, antes da modelagem.

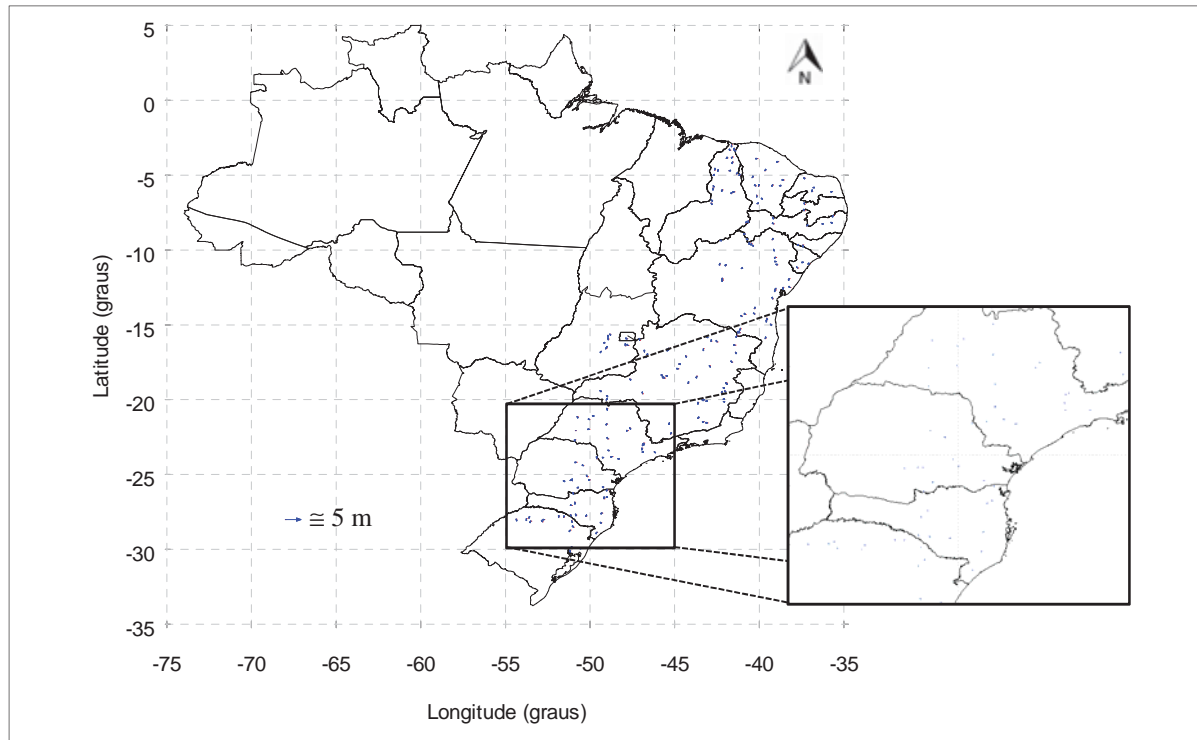


Figura 38 - Distorções na realização CA7072, nos pontos de verificação, após a modelagem por TPS.

É possível verificar a redução das distorções após a modelagem, inclusive em regiões teoricamente mais complexas para a modelagem devido ao comportamento das distorções, como no litoral norte da Bahia, por exemplo.

7.7.3 Análise da modelagem nos pontos de verificação na realização SAD69

O conjunto de dados utilizado para a realização SAD69 é composto por 4.604 pontos, sendo 4.185 pontos de controle e 419 pontos de verificação. Foram descartados 108 pontos pelo limiar de distância. A distribuição dos pontos de controle e de verificação para a realização SAD69 é mostrada na Figura 39.

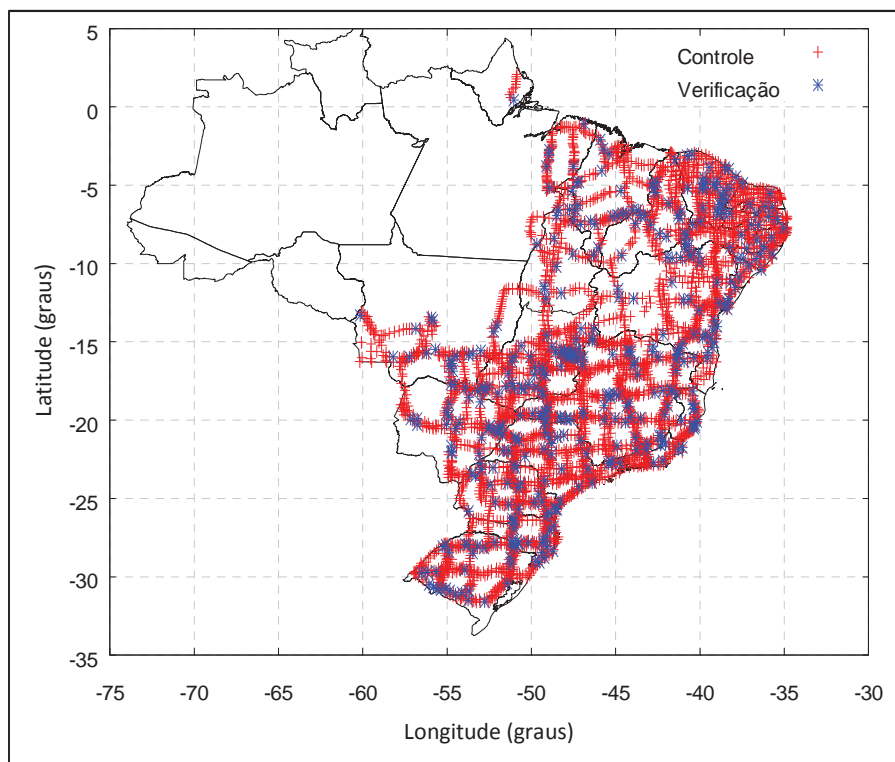


Figura 39 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação da realização SAD69.

Pela Figura 39, percebe-se que há falta de dados na região norte do Brasil. Isso se deve ao fato de que grande parte dos pontos do SGB localizados nessa região é proveniente de posicionamento por técnicas espaciais (GPS e Doppler).

Na Tabela 17 são apresentadas as informações estatísticas sobre as discrepâncias nos pontos de verificação antes e após a modelagem por TPS.

Tabela 17 - Resultados da modelagem nos pontos de verificação na realização SAD69.

Discrepâncias	Antes da Modelagem		Após a Modelagem por TPS	
	Latitude (m)	Longitude (m)	Latitude (m)	Longitude (m)
Máxima	-33,2162	-6,9294	3,5687	9,0555
Mínima	-52,6345	-59,1034	-0,6272	-4,0639
Média	-48,0122	-46,3333	0,0153	-0,0063
Desvio Padrão	3,1604	3,9891	0,2440	0,6009
RMSE	48,1159	46,5043	0,2442	0,6002
90% ≤	51,4308	51,1782	0,2256	0,2279
Nº de pontos	419			

A realização SAD69 possui estações em quase todo o território nacional. O comportamento das distorções é heterogêneo, ou seja, não segue o mesmo padrão de magnitude e sentido ao longo de toda a rede geodésica. Esse comportamento heterogêneo é

um desafio para a modelagem, já que o modelo deve assimilar as diferenças regionais que ocorrem ao longo do território nacional.

Conforme apresentado na Tabela 17, após a modelagem por TPS as discrepâncias foram reduzidas a valores máximos absolutos de 3,569 m e 9,055 m, com média de 0,015 m e 0,006 m, respectivamente em latitude e longitude. As discrepâncias maiores ocorrem em alguns pontos isolados em regiões com carência de pontos de controle ou com comportamento desordenado das distorções. Por exemplo, a estação número 10020, localizada no estado do Amapá com coordenadas $0^{\circ}25'51,95''\text{N}$ e $51^{\circ}02'36,44''\text{O}$ (SIRGAS2000), teve as maiores discrepâncias: 3,57 m em latitude e 9,05 m em longitude. Como pode ser observado na Figura 39, no estado do Amapá existem poucos pontos de controle e numa distribuição não adequada para a modelagem de distorções, uma vez que são praticamente colineares. No restante do Brasil, em 90% dos pontos, as discrepâncias máximas chegaram a 22,56 cm em latitude e 22,79 cm em longitude.

Apesar dos valores elevados observados nesta realização para a magnitude máxima, que ocorrem em pontos isolados, o RMSE para o conjunto de pontos analisado sofreu uma redução de 99,5% em latitude e 98,7% em longitude após a modelagem por TPS, chegando aos valores de 24,42 cm e 60,02 cm em latitude e longitude, respectivamente.

As distorções para a resultante planimétrica nos pontos de verificação antes e após a modelagem por TPS são apresentadas nas Figuras 40 e 41.

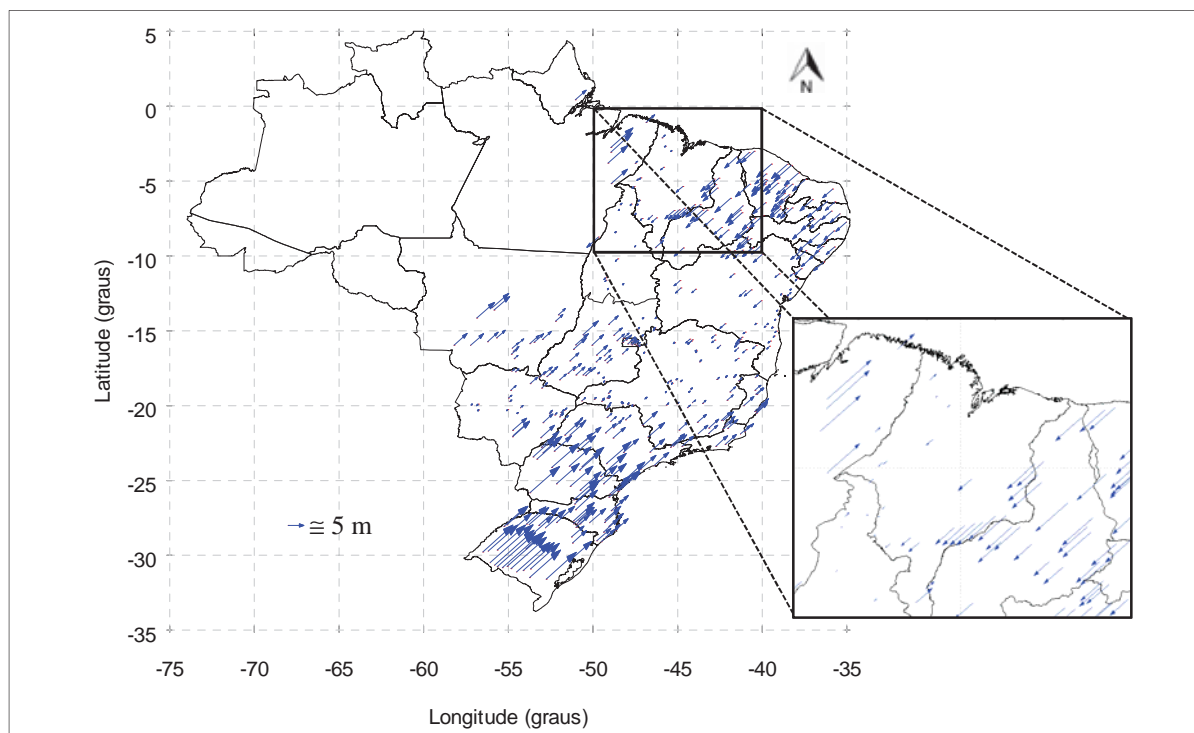


Figura 40 - Distorções na realização SAD69, nos pontos de verificação, antes da modelagem.

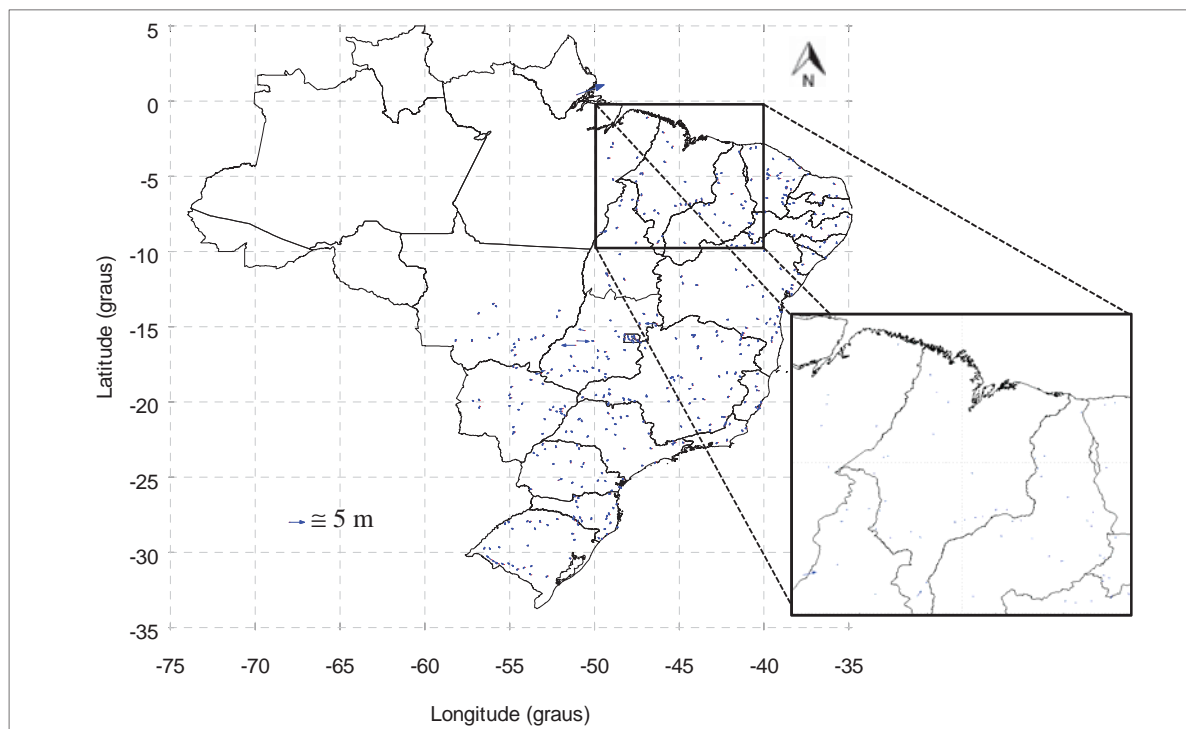


Figura 41 - Distorções na realização SAD69, nos pontos de verificação, após a modelagem por TPS.

É possível constatar pelas Figuras 40 e 41, que houve redução das distorções em quase todos os pontos de controle, exceto em alguns pontos localizados no Amapá e na região oeste de Goiás. A não redução dos valores de distorção nesses pontos pode ser explicada pela deficiência de pontos da rede geodésica nessas regiões, como pode ser observado na Figura 39.

7.7.4 Análise da modelagem nos pontos de verificação na realização SAD69/96

O conjunto total de dados disponível na realização SAD69/96 é composto por 4.474 pontos (técnicas clássicas), sendo 4.067 pontos controle e 407 pontos de verificação. Foram descartados 99 pontos do conjunto de pontos de controle pelo limiar de distância. A distribuição dos pontos de controle e de verificação para a realização SAD69/96 pode ser visualizada na Figura 42.

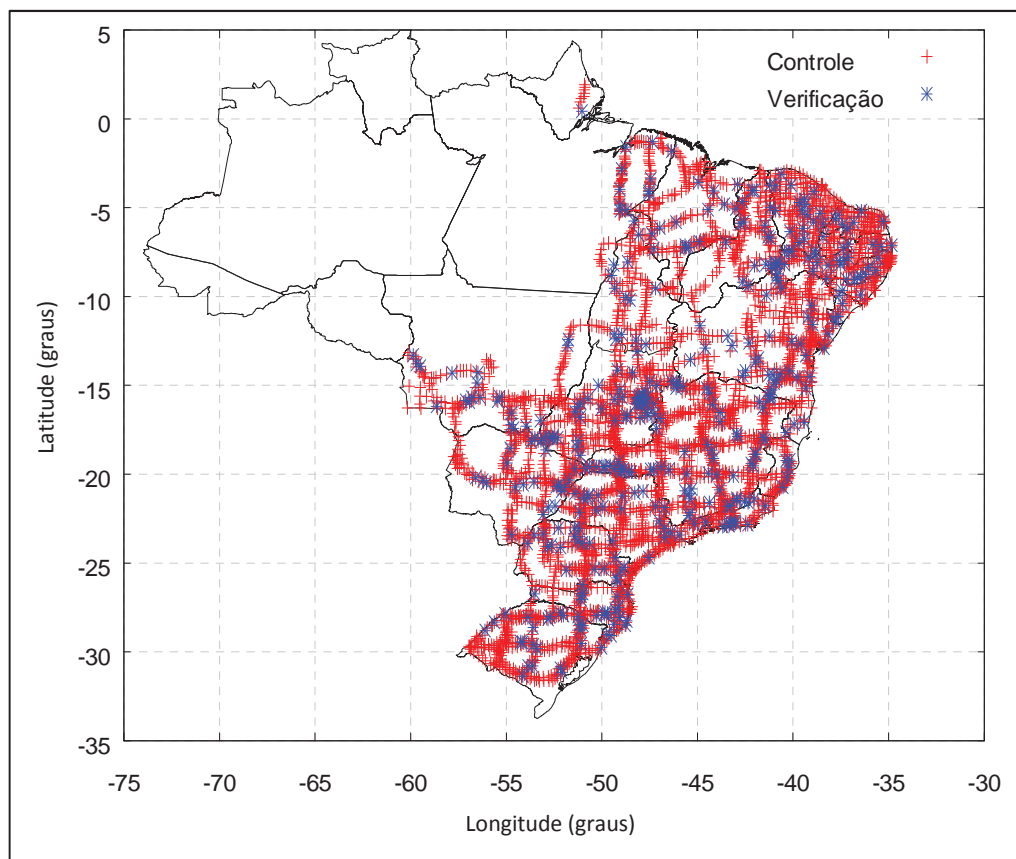


Figura 42 - Distribuição dos pontos de controle e de verificação da realização SAD69/96.

Na Tabela 18 são apresentadas as informações estatísticas das discrepâncias nos pontos de verificação antes e após a modelagem por TPS.

Tabela 18 - Resultados da modelagem nos pontos de verificação na realização SAD69/96.

Discrepâncias	Antes da Modelagem		Após a Modelagem por TPS	
	Latitude (m)	Longitude (m)	Latitude (m)	Longitude (m)
Máxima	-37,5658	-35,4456	0,5482	0,4795
Mínima	-56,6398	-56,2023	-0,5109	-0,2965
Média	-49,9696	-45,7392	0,0080	0,0012
Desvio Padrão	3,9509	4,5453	0,0779	0,0676
RMSE	53,7011	46,8038	0,0782	0,0675
90% ≤	54,5998	50,5703	0,0256	0,0067
N° de pontos	407			

A magnitude das discrepâncias da realização SAD69/96 é similar à magnitude das discrepâncias da realização SAD69, conforme se observa nos indicadores estatísticos na Tabela 18. Entretanto, em termos de distorções, esta última realização do SAD69 é menos distorcida que a realização original, o que se torna evidente quando se observa nas Figuras 43

e 44 a menor magnitude das discrepâncias, respectivamente, antes e após a modelagem das distorções.

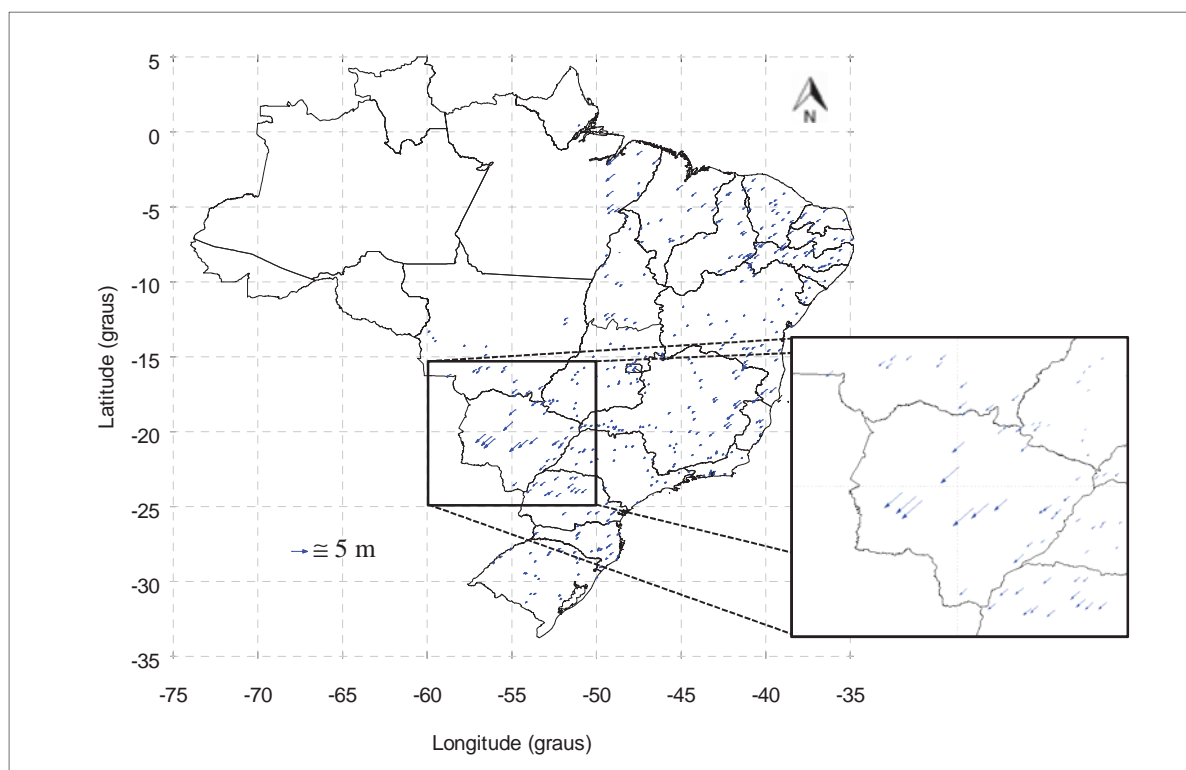


Figura 43 - Distorções na realização SAD69/96, nos pontos de verificação, antes da modelagem.

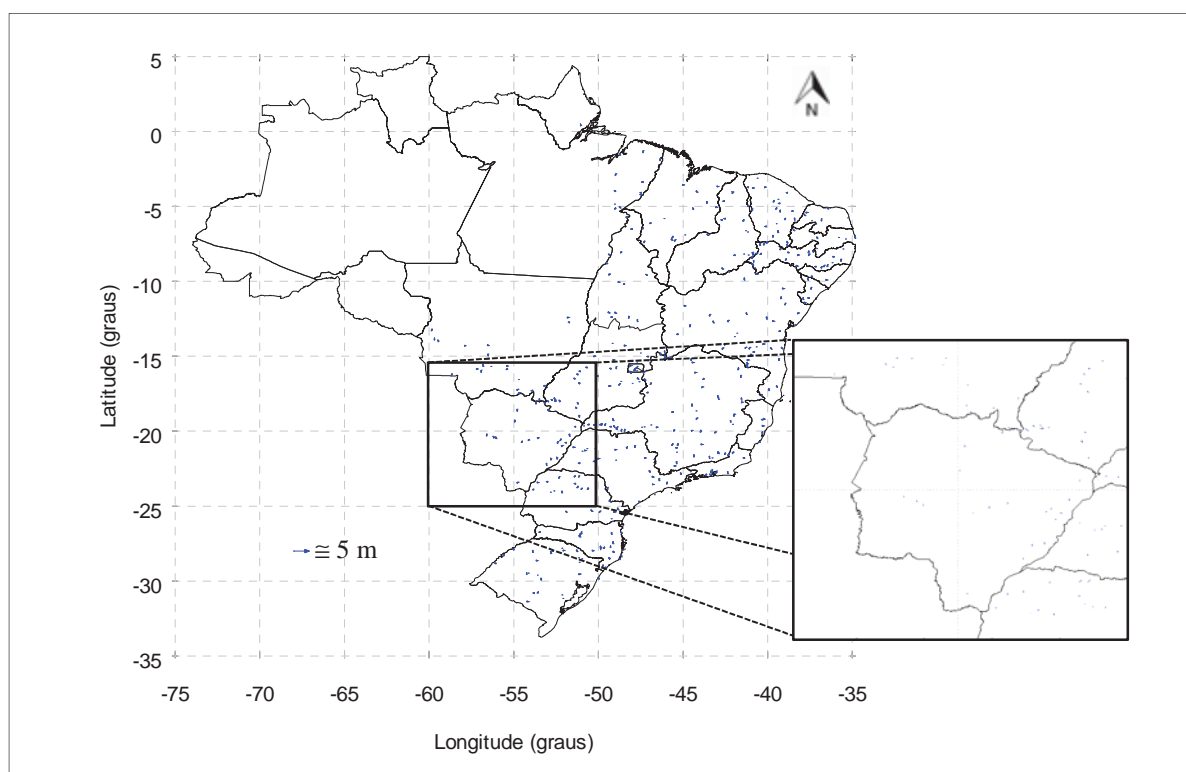


Figura 44 - Distorções na realização SAD69/96, nos pontos de verificação, após a modelagem por TPS.

Quanto ao RMSE, os valores após a modelagem foram de 7,82 cm em latitude e 6,75 cm em longitude. Novamente, percebe-se que a magnitude do RMSE é influenciada pela discrepância de poucos pontos de verificação localizados nas regiões mais complexas de modelagem, onde as discrepâncias são relativamente superiores aos demais pontos. A discrepância elevada em poucos pontos da realização SAD69/96 é comprovada se analisados os valores de discrepância em 90% dos pontos, os quais são inferiores a 2,56 cm em latitude e 0,67 cm em longitude. Na Figura 45 é apresentado um mapa da magnitude das distorções em SAD69/96 para a resultante das coordenadas planimétricas, juntamente com os pontos de verificação (10%) que tiveram valores de discrepância mais elevados.

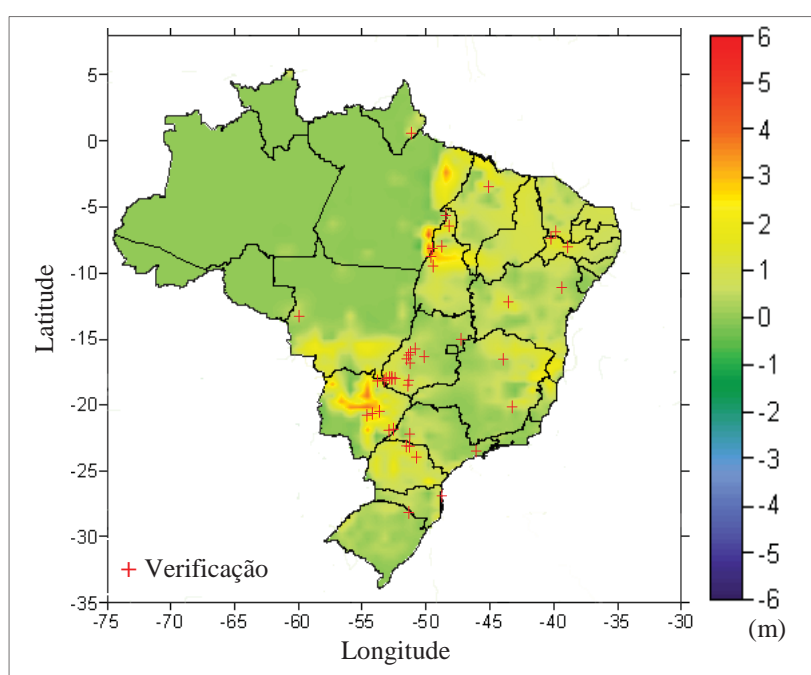


Figura 45 - Mapa de intensidade das distorções em SAD 69 realização de 1996 (Fonte: Adaptado de Magna Júnior (2007)).

Pela Figura 45 é possível observar que os pontos onde as discrepâncias após a modelagem foram mais elevadas estão localizados, em sua maioria, nas regiões com distorções de maior magnitude. Porém, o fator preponderante para a qualidade inferior da modelagem nesses pontos é o comportamento irregular das distorções que ocorre principalmente no estado do Mato Grosso do Sul, inclusive nas suas divisas com Goiás e Mato Grosso e na região limítrofe entre os estados de Tocantins e Pará.

7.8 Análise Comparativa entre o Modelo TPS e o ProGrid – Experimento 7

A análise comparativa entre a modelagem por TPS e a modelagem pelo ProGrid, tem por objetivo principal a validação do método proposto junto a um método consagrado. É importante ressaltar que o ProGrid se baseia no uso do NTV2, que é a base para a modelagem em diversos países, como Canadá, Inglaterra e França. Com o mesmo conjunto de dados utilizado nas análises do modelo TPS, foram refeitos os experimentos 4 e 5 tendo o ProGrid como método de transformação das coordenadas.

O experimento 4 permite verificar a integridade da modelagem nos pontos de controle, ou seja, o quanto as coordenadas transformadas se aproximam das coordenadas de referência (pontos da rede ajustada) na realização de destino. Uma característica desejável em qualquer modelagem é que as diferenças entre as coordenadas modeladas e as de referência sejam mínimas.

A Tabela 19 apresenta os resultados do experimento 4 para as realizações dos sistemas geodésicos oficiais, utilizando o ProGrid. Para uma comparação homogênea entre os modelos TPS e ProGrid, os resultados apresentados na Tabela 19 foram calculados utilizando exatamente os mesmos pontos. Assim, os pontos descartados nos cálculos do modelo TPS (pontos próximos) também foram desconsiderados nos experimentos com o ProGrid.

Tabela 19 - Resultados do experimento 4 utilizando o ProGrid.

Discrepâncias	CA61		CA7072		SAD69		SAD69/96	
	Lat (m)	Lon (m)	Lat (m)	Lon (m)	Lat (m)	Lon (m)	Lat (m)	Lon (m)
Máxima	0,5144	0,5984	0,8710	1,0992	4,4913	6,4132	0,4958	0,6457
Mínima	-0,3688	-0,5984	-0,5364	-0,5720	-5,0037	-6,2598	-1,6711	-0,7656
Média	0,0028	0,0039	0,0031	0,0017	0,0075	0,0066	-0,0068	-0,0061
Desvio Padrão	0,0726	0,0829	0,0749	0,0828	0,1775	0,3841	0,0474	0,0420
RMSE	0,0726	0,0829	0,0750	0,0828	0,1777	0,3842	0,0479	0,0424
90% ≤	0,1196	0,1284	0,1073	0,1171	0,1506	0,1653	0,0432	0,0448

Comparando os resultados apresentados na Tabela 19 com a Tabela 13, verifica-se a redução superior a 97% em todos os indicadores estatísticos, evidenciando que a modelagem por TPS se ajusta melhor aos pontos de controle que o ProGrid. O valor do RMSE mínimo obtido com o ProGrid foi de 4,79 cm em latitude e 4,24 cm em longitude para a realização SAD69/96, enquanto que na modelagem por TPS, em todas as realizações os valores de

RMSE foram inferiores a 1,3 mm em latitude e 0,7 mm em longitude. Em 90% dos pontos transformados pelo modelo TPS as discrepâncias máximas foram inferiores a 1,2 mm em latitude e 0,9 mm em longitude, já com o ProGrid os valores foram de 15,06 cm e 16,53 cm em cada componente.

Na Figura 46 é feita uma comparação do RMSE obtido pelo modelo TPS e pelo ProGrid, nas realizações analisadas. Os valores no eixo das ordenadas representam o RMSE, mostrado em escala logarítmica ($\log(\text{RMSE})$) para facilitar a visualização.

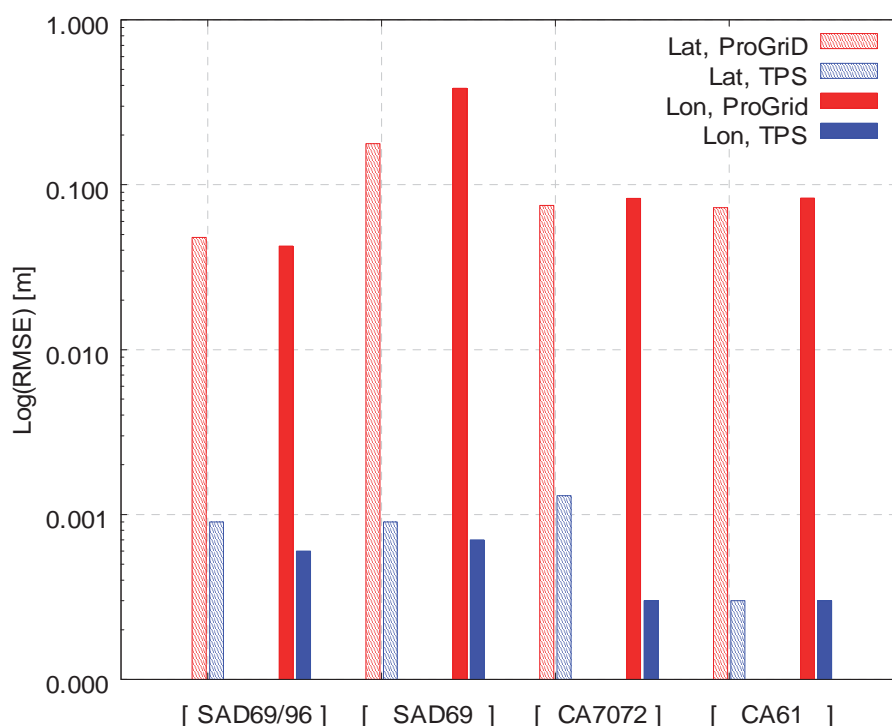


Figura 46 - Gráfico comparativo do RMSE obtido pelo modelo TPS e pelo ProGrid.

Pode-se observar na Figura 46, que os valores de RMSE obtidos com a utilização do modelo TPS são inferiores aos valores de RMSE obtidos com o ProGrid, nas duas componentes planimétricas e em todas as realizações analisadas.

Outra comparação entre o modelo proposto e o ProGrid foi realizada refazendo-se o experimento 5 com o aplicativo do IBGE. Neste experimento, um conjunto de pontos regularmente espaçados e não coincidentes com estações do SGB são assumidos como sendo pontos na realização SAD69/96. As coordenadas destes pontos são transformadas para SIRGAS2000 e as coordenadas obtidas são novamente transformadas para o SAD69/96. A comparação entre as coordenadas originais e aquelas resultantes das transformações,

permitem avaliar a qualidade da transformação. A Tabela 20 apresenta os resultados do experimento 5 utilizando o ProGrid.

Tabela 20 - Estatísticas do experimento 5 utilizando o ProGrid.

Discrepâncias	Latitude (m)	Longitude (m)
Máxima	0,0000	0,0000
Mínima	-0,0011	-0,0011
Média	-0,0002	-0,0002
Desvio Padrão	0,0005	0,0004
90% ≤	0,0011	0,0010

Comparando os resultados obtidos com o ProGrid (Tabela 20) com os resultados obtidos com o modelo TPS (Tabela 14) é possível verificar que ambos os modelos proporcionaram discrepâncias de pequena magnitude, inferiores a 3,5 mm. Em termos de discrepâncias máximas e mínimas, o ProGrid resultou em valores menores que o modelo TPS, inferiores a 1,1 mm em cada componente. Quanto às discrepâncias médias, desvios padrão e discrepâncias em 90% dos pontos, o modelo TPS obteve resultados similares (desvio padrão em latitude) ou melhores (desvio padrão em longitude, discrepância em 90% dos pontos e discrepâncias médias nas duas componentes) que o ProGrid. Destaca-se que houve redução de aproximadamente 57% nas discrepâncias em 90% dos pontos, quando utilizado o modelo TPS em comparação com o ProGrid.

Deve-se observar que, nesta análise, foram determinados os indicadores estatísticos considerando a diferença entre as transformações direta e inversa, para os dois modelos: TPS e o utilizado pelo ProGrid. Estes experimentos indicam que, assumindo como desprezível a discrepância máxima de 3,5 mm, para uma rede geodésica desta dimensão, ambos os modelos são coerentes entre si.

As Figuras 47 e 48 apresentam uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo TPS e pelo ProGrid em relação às discrepâncias médias, desvios padrão e às discrepâncias em 90% dos pontos, para a latitude e longitude.

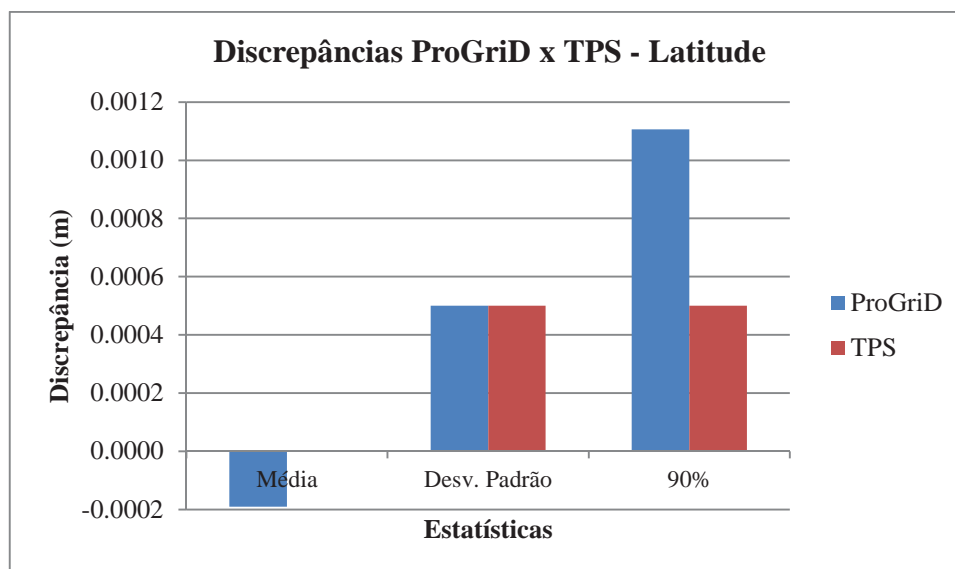


Figura 47 - Comparação entre TPS e ProGrid em latitude para o experimento 5.

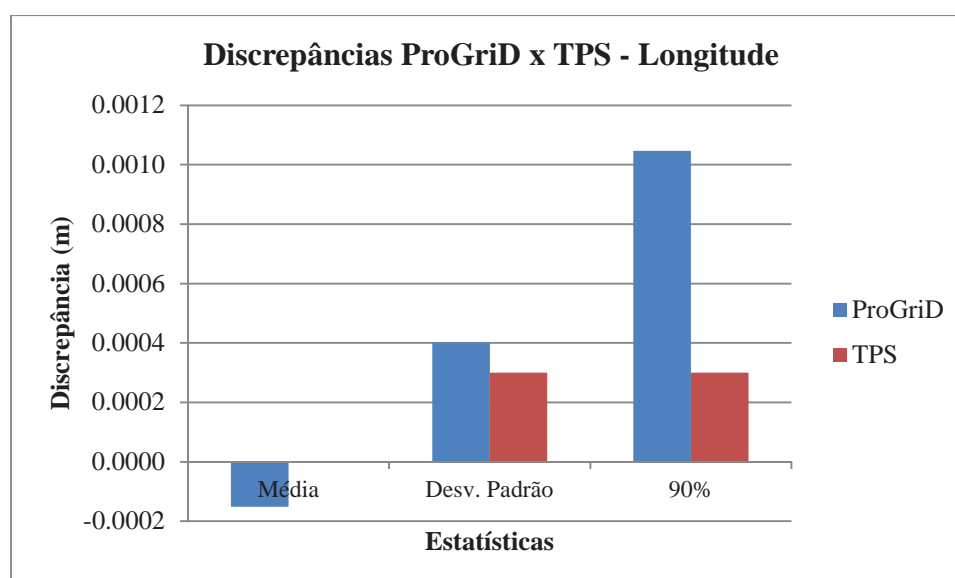


Figura 48 - Comparação entre TPS e ProGrid em longitude para o experimento 5.

É possível verificar pelas Figuras 47 e 48 que a utilização do modelo TPS proporciona menores valores de desvios-padrão, discrepância média e em 90% dos pontos, quando comparado com o ProGrid. Os resultados indicam que o modelo TPS proporciona qualidade similar ou superior nas transformações direta e inversa, quando comparado com o modelo oficial do Brasil.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo é dedicado às considerações finais; conclusões, com base nos resultados e análises da aplicação do método proposto; e recomendações sobre aspectos ligados ao método e sua aplicação. Além disso, são apresentadas sugestões para fins de continuidade e aprimoramento das pesquisas sobre transformação de coordenadas e modelagem de distorções em redes geodésicas.

8.1 Considerações Finais e Conclusões

A transformação de coordenadas entre realizações de referenciais geodésicos é uma necessidade mundial, atual e recorrente, sobretudo com a rápida expansão e popularização de métodos de posicionamento de melhor acurácia. Novas definições e realizações de referenciais serão disponibilizadas e métodos que possibilitem a transformação das coordenadas de maneira mais eficaz possível, garantindo qualidade e integridade, devem ser propostos e avaliados. Nesse sentido, procurou-se, nesta pesquisa, colaborar com o processo de transformação de referenciais propondo uma metodologia baseada em *Thin-Plate Splines*. O método proposto realiza a transformação no espaço tridimensional, tratando conjuntamente a modelagem de distorções inerentes às diferentes realizações.

Como forma de utilizar coordenadas no espaço tridimensional, foi desenvolvida a formulação TPS 3D, a qual preserva as mesmas características de continuidade e suavidade do modelo TPS convencional. A validação da metodologia se deu por meio de experimentos com dados simulados e reais de estações do SGB em diferentes realizações dos referenciais oficiais do Brasil, além da comparação com o ProGrid.

Nos experimentos com dados simulados foi possível verificar que o modelo TPS é capaz de modelar dados que são relacionados por uma transformação geométrica afim 3D (experimento 1) e também, que estejam submetidos a efeitos de distorções não lineares, simuladas a partir de um polinômio de segundo grau (experimento 2).

Utilizando dados reais o modelo foi avaliado em todos os pontos disponíveis em cada realização, apenas nos pontos de verificação, em pontos distintos das estações do SGB e na comparação com o ProGrid. Em função de problemas de condicionamento causados pela

geometria da distribuição dos pontos da rede geodésica, foi avaliado e estabelecido um liminar mínimo de distância para os pontos utilizados na estimativa do modelo (experimento 3). Para o estabelecimento do liminar, fixado em 1 km, foram analisados diferentes limiares em termos de: número de pontos excluídos, característica e o número de condição da matriz A .

Na análise das discrepâncias com o conjunto total de pontos (experimento 4), foi possível avaliar o comportamento do modelo proposto nos pontos de controle. Os valores de RMSE obtidos foram mínimos para a realização CA61 com 0,3 mm em cada componente das coordenadas e máximos para a realização SAD69 com 0,9 mm em latitude e 0,7 mm em longitude. Os resultados do experimento 4 indicam que o modelo TPS se ajusta adequadamente aos pontos de controle, ou seja, proporciona discrepâncias próximas de zero nestes pontos.

A qualidade da modelagem foi verificada nas transformações direta e inversa entre as realizações SAD69/96 e SIRGAS2000, com pontos não coincidentes com estações do SGB. Os resultados mostraram que o erro máximo esperado para a modelagem por TPS é de aproximadamente 3,5 mm em latitude e 2,6 mm em longitude. Em 90% dos pontos os valores de discrepância foram inferiores a 0,5 mm em latitude e 0,3 mm em longitude. Os valores obtidos representam o erro inerente ao próprio processo de transformação, já que as coordenadas utilizadas foram obtidas matematicamente e, portanto, isentas de erros de medida.

Na avaliação da qualidade da modelagem nos pontos de verificação (experimento 6), o RMSE máximo foi obtido para a realização SAD69 com 24,42 cm em latitude e 60,02 cm em longitude. Os menores valores de RMSE foram atingidos na realização SAD69/96, 7,82 cm em latitude e 6,75 cm em longitude e na realização CA61, 8,62 cm e 11,42 cm nas componentes latitude e longitude, respectivamente. Em 90% dos pontos da realização SAD69/96 as discrepâncias foram inferiores a 2,56 cm em latitude e 0,67 cm em longitude. Em razão das discrepâncias serem calculadas utilizando como referência os valores ajustados (reais), pode-se dizer que os resultados (RMSE) expressam a acurácia da transformação nos pontos de verificação.

Na comparação do modelo TPS com o ProGrid, verificou-se que a modelagem por TPS proporciona menores discrepâncias nos pontos de controle após a transformação das coordenadas. Em 90% dos pontos de controle na realização SAD69/96 as discrepâncias calculadas foram inferiores a 1,2 mm e 0,9 mm para o modelo TPS e 43,2 mm e 44,8 mm para o ProGrid, respectivamente em latitude e longitude. Os maiores valores de RMSE foram

obtidos para a realização SAD69, 0,9 mm e 0,7 mm com o modelo TPS e 177,7 mm e 384,2 mm com o ProGrid. Todos os indicadores estatísticos analisados sofreram redução superior a 97% de seus valores para o modelo TPS em comparação com o ProGrid.

Quanto à qualidade da transformação, ambos os modelos apresentam valores de pequena magnitude, com discrepâncias inferiores a 3,5 mm. Para o modelo TPS, as discrepâncias média e em 90% dos pontos, bem como o RMSE, tiveram os valores reduzidos ou similares ao ProGrid.

Em função dos resultados apresentados, conclui-se que a modelagem por TPS atingiu o objetivo geral da pesquisa, mostrando-se eficiente na transformação de coordenadas e na modelagem das distorções entre realizações de referenciais geodésicos, proporcionando uma transformação de qualidade e que garante integridade aos dados transformados. Os objetivos específicos também foram contemplados, com o desenvolvimento, implementação e avaliação do modelo proposto e de seus impactos em dados simulados e reais.

De acordo com os resultados e análises realizadas, a modelagem por TPS é um método promissor no processo de conversão de referenciais. O método proposto está apto a incorporar a informação altimétrica, sem a necessidade de adaptações adicionais, uma vez que os dados de entrada são as coordenadas geodésicas cartesianas.

8.2 Recomendações

Dentro do contexto da pesquisa, de seus resultados e análises, alguns aspectos merecem atenção. Desta forma, destaca-se:

- a) O IBGE é a instituição responsável pelo SGB e dispõe do ProGrid como procedimento recomendado para a conversão de coordenadas entre realizações de seus referenciais oficiais. O método proposto nesta pesquisa não substitui os procedimentos oficiais, mas corrobora com sua validação. Os resultados indicam que a modelagem por TPS oferece vantagens, sendo importante sua avaliação para atividades futuras relacionadas à conversão entre realizações de referenciais geodésicos.

- b) Embora as componentes planimétrica e altimétrica da rede geodésica sejam tratadas individualmente, o método proposto possibilita a incorporação da informação altimétrica no processo de conversão. Isso é possível devido ao uso de coordenadas geodésicas cartesianas nos cálculos do modelo TPS.

Para fins de continuidade e aprimoramento da pesquisa proposta são elencadas as seguintes sugestões:

- a) Um complicador na modelagem por TPS em redes geodésicas é a questão de condicionamento. A alternativa adotada nesta pesquisa foi analisar pares de pontos próximos dentro de um limiar de distância estabelecido (1 km) com a manutenção de apenas um dos pontos como parte do conjunto de pontos de controle. Embora essa estratégia não tenha causado degradação aparente na modelagem, o estudo de alternativas para contornar a questão do condicionamento é um aspecto relevante. Ghosh (2010) sugere que na solução da TPS pelo método clássico, a multiplicação de um valor α à diagonal principal da matriz K (ver Seção 6.2) tem reflexo na mudança do condicionamento, a qual foi avaliada nesta pesquisa, porém, não trouxe benefícios. Pode-se pensar que este comportamento se deve ao fato de que a formulação TPS foi desenvolvida para o caso 3D e não baseada na formulação TPS convencional, como feito em Ghosh (2010), para o caso 2D.
- b) A utilização da modelagem por TPS pelo método convencional, procurando incorporar na solução técnicas de otimização específicas para grandes matrizes esparsas, o que não é tão sintomático ao se trabalhar com um conjunto reduzido de dados.
- c) Tratar individualmente pequenas regiões problemáticas ou que tenham características de distorções muito diferentes das demais regiões da rede geodésicas. Um exemplo são as estações localizadas no estado do Amapá, as quais são “isoladas” das demais estações clássicas e possuem um comportamento distinto das demais estações nas realizações SAD69 e SAD69/96.

REFERÊNCIAS

ANJOS, D. S. **Classificação da curvatura de vertentes em perfil via Thin Plate Spline e inferência Fuzzy**. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente.

BARBOSA, R. L.; SILVA, J. F. C.; MENEGUETTE JR, M.; GALLIS, R. B. A. Geração de modelo digital do terreno utilizando a triangulação de Delaunay e Thin Plate Spline. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS, 3., 2003, Curitiba. **Anais do III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas**, 2003.

BORKOWSKI, A.; KELLER, W. Global and local methods for tracking the intersection curve between two surfaces. **Journal of Geodesy**, Berlin: Springer Berlin Heidelberg, v. 79, p. 1-10, 2005.

BOOKSTEIN, F. L. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 11, n. 6, p. 567-585, jun. 1989.

CASTANHO, J. E. C. **Registro de Imagens: uma solução para a modelagem de deformações e automação da correspondência**. 1997. 153 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

COSTA, S. M. A **Integração da rede geodésica brasileira aos sistemas de referência terrestres**. 1999. 170 p. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

COSTA, S. M. A. Solução na compatibilização de diferentes materializações de sistemas de referência. In: SEMINÁRIO SOBRE REFERENCIAL GEOCÊNTRICO NO BRASIL, I., 2000. **Anais eletrônicos...** Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/pmrg/historico.shtm?c=12>>. Acesso em: 10 abr. 2006.

COSTA, S. M. A.; FORTES, L. P. S. Nova hierarquia da rede planimétrica do Sistema Geodésico Brasileiro. In: SEMINÁRIO SOBRE REFERENCIAL GEOCÊNTRICO NO BRASIL, I., 2000. **Anais eletrônicos...** Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/artigos/2000-Nova_hierarquia_da_Rede_Planimetrica_do_SGB.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2006.

COLLIER, P. **Development of Australia's National GDA94 transformation GRIDS: consultant's report to the Intergovernmental Committee on Surveying and Mapping.** Department of Geomatics, The University of Melbourne, Melbourne – Australia, 2002.

DATTA, B. N. **Numerical linear algebra and applications.** 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.

FISHER, I. The basic framework of the South American Datum of 1969. In: **XII PAN AMERICAN CONSULTATION ON CARTOGRAPHY**, 1973, Panama.

GARNÉS, S. J. S. **Ajustamento paramétrico por Mínimos Quadrados com análise na estabilidade da solução.** 1996. 148 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) - Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

GAY-BELLILE, V.; PERRIOLLAT, M.; BARTOLI, A.; SAYD, P. Image registration by combining thin-plate splines with a 3d morphable model. In: **IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING**, 2006, Atlanta. **Proceedings of the International Conference on Image Processing.** Atlanta: IEEE Image Proc., 2006, p. 1069-1072.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas.** Curitiba: Editora UFPR, 1994.

GHOSH, A. **Efficient Thin Plate Spline interpolation and its application to adaptive optics.** 2010, 67 p. Dissertation (Master of Science in Industrial Mathematics), Institute for Industrial Mathematics, Johannes Kepler University Linz, Linz - Austria.

GOUSIE, M. B. Converting elevation contours to a grid. In: **INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPATIAL DATA HANDLING**, 8., 1998, Vancouver BC Canada. **Proceedings...** Burnaby: Depart of Geography, Simon Fraser University, 1998. p. 1-10.

IBGE – FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Resolução nº 22, de 1983. **Especificações e normas gerais para levantamentos geodésicos**, Rio de Janeiro, 1983.

IBGE – FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Resolução nº 23, de 1989. **Parâmetros para transformação de sistemas geodésicos**, Rio de Janeiro, 1989.

IBGE – FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Ajustamento da rede planimétrica do sistema geodésico brasileiro - relatório.** Rio de Janeiro, 1996. 10 p.

IBGE – FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **SIRGAS – Relatório final, Grupo de Trabalho I e II.** Rio de Janeiro: 1997. 100 p.

IBGE – FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Mudança do referencial geodésico. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE GEOMÁTICA, 1., 2002, Presidente Prudente. **Anais do Simpósio Brasileiro de Geomática.** Presidente Prudente: Departamento de Cartografia, 2002.

IBGE – FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Resolução nº 1, de 2005. Altera a caracterização do sistema geodésico brasileiro, Rio de Janeiro, 2005. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/pmrg/legislacao/RPR_01_-25fev2005.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2006.

IBGE – FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Apresenta informações sobre o Sistema Geodésico Brasileiro. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/default_sgb_int.shtm>. Acesso em: 22 jan. 2007.

IBGE – FUNDAÇÃO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **ProGrid – guia do usuário.** Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/pmrg/ProGrid_guia_do_usuario.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2008.

JEKELI, C. **Geometric reference systems in Geodesy.** Ohio: Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science – Ohio State University, 2006. 201 p.

JUNKINS, D.; ERICKSON, C. **Version 2 of the National Transformation between NAD27 and NAD83 and its importance for GPS positioning in Canada.** Draft Report, Geodetic Survey Division, Geomatics Canada, 1996. 7 p.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações.** 4. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1999.

LUGNANI, J. B. **O problema dos sistemas de equações lineares mal condicionados e suas implicações em Geodésia.** 1975. 107 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

MAGNA JÚNIOR, J. P. **Modelagem de distorções entre realizações de referenciais geodésicos**. 2007. 108 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente.

MCCARTHY, D. D.; PETIT, G. **IERS conventions (2003)**. IERS Technical Note n° 32. Frankfurt, Alemanha, 2004. Disponível em: <<http://www.iers.org/iers/publications/tn/tn32/>>. Acesso em: 07 jul. 2006.

MERCHANT, D. C. **Analytical photogrammetry: theory and practice**. Ohio: The Ohio State University, 1979.

MEYER, C. D. **Matrix analysis and applied linear algebra**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2008.

NOAA – NATIONAL OCEANIC AND ATMOSPHERIC ADMINISTRATION. **The application of Minimum-Curvature-Derived Surfaces in the transformation of positional data from the North American Datum of 1927 to the North American Datum of 1983**. NOAA Technical Memorandum NOS NGS-50. Rockville – U.S.A., 1990.

OLIVEIRA, L. C. **Realizações do Sistema Geodésico Brasileiro associadas ao SAD 69 – uma proposta metodológica de transformação**. 1998. 197 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

OLIVEIRA, L. C.; SANTOS, M. C.; NIEVINSKI, F. G.; LEANDRO, R. F.; COSTA, S. M. A.; SANTOS, M. F.; MAGNA JÚNIOR, J. P.; GALO, M.; CAMARGO, P. O.; MONICO, J. F. G.; SILVA, C. U.; MAIA, T. B. Searching for the Optimal Relationships Between SIRGAS2000, South American Datum of 1969 and Córrego Alegre in Brazil. In: SIDERIS, M. G. **Observing our Changing Earth**. Itália: Springer Berlin Heidelberg, 2008. v. 133, 71-79.

PIGN – **Projeto de Infraestrutura Geoespacial Nacional**. Disponível em: <<http://www.pign.org>>. Acesso em: 24 mai. 2006.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in C: the art of scientific computing**. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. p. 994.

PRUTKIN, I.; KLEES, R. Global On the non-uniqueness of local quase-geoids computed from terrestrial gravity anomalies. In: **Journal of Geodesy**. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2007. v. 82, 147-156.

SOYCAN, A.; SOYCAN, M. **Digital elevation model production from scanned topographic contour maps via thin plate spline interpolation**. The Arabian Journal for Science and Engineering, Dhahran, v. 34, n. 1A, p. 121-134, jan. 2009.

SIRGAS – Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas. Disponível em: <<http://www.sirgas.org/index.php?id=1&L=>>>. Acesso em: 12 out. 2011.

TAGHVAKISH, S.; AMINI, J. I. **Optimum weight in thin plate spline for digital surface model generation**. In: FIG WORKING WEEK, 2004. Athens, Greece. Proceedings... Athens: Fédération Internationale des Géomètres, 2004. p. 1-15.

TSAI, Y.; LIN, H; HU, Y; YU, C; LIN, K. Thin-Plate Spline technique for medical image deformation. **Journal of Medical and Biological Engineering**, v. 20, n. 4, p. 203-210, out. 2000.

YU, Z. W. Surface interpolation from irregularly distributed points using surface splines, with Fortran program. **Computer & Geosciences**, n. 27, p. 877-882, 2001.

BIBLIOGRAFIA

BOOKSTEIN, F. L. Landmark methods for forms without landmarks: morphometrics of group differences in outline shape. **Medical Image Analysis**, v. 1, n, 3, p. 225-243, 1997.

COSTA, M. F. **Modelagem da função covariância para transformação de referenciais geodésicos por colocação**. 2003. 112 p. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR.

DONATO, G.; BELONGIE, S. **Approximate Thin Plate Spline mappings**. Springer Berlin, v. 2352, p. 13-31, 2002.

GONZÁLEZ-MATESANZ, J.; DALDA, A.; QUIRÓS, R.; CELADA, J. **ED50 – ETRS89 transition models for the spanish geodetic network**. In: GENERAL IBÁÑEZ IBERO, 3. Madrid: Instituto Geográfico Nacional, Espanha, 2002.

ICSM. Intergovernmental Committee on Surveying & Mapping. **Geocentric Datum of Australia, Technical Manual**. Australia, v.2, 1999.

JUNKINS, D. R.; FARLEY, S. A. **NTv2 National Transformation Version 2 – User's Guide**. Canada: Geodetic Survey Division – Geomatics Canadá, 1995. 57 p.

MEINGUET, J. Surface spline interpolation: basic theory and computational aspects. In: SINGH, S. P.; BURRY, J. H. W.; WATSON, B. **Approximation theory and spline functions**. Ed. Dordrecht, 1984. v. 136. p. 127-142. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=V9rmbdF1oRAC&printsec=frontcover&source=gbs_summary_r&cad=0>. Acesso em: 12 jan. 2009.

NOAA – National Oceanic and Atmospheric Administration. **The application of Minimum-Curvature-Derived Surfaces in the transformation of positional data from the North American Datum of 1927 to the North American Datum of 1983**. NOAA Technical Memorandum NOS NGS-50. Rockville – U.S.A., 1990.