

FERNANDO ANTONIO ELIAS CLARO

GRÁFICOS DE CONTROLE DE  $\bar{X}$  PARA O  
MONITORAMENTO DE PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
do Campus de Guaratinguetá, Universidade  
Estadual Paulista, para a obtenção do título  
de Doutor em Engenharia Mecânica na área  
de Transmissão e Conversão de Energia.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa

Co-Orientador: Prof. Dr. Mauro Hugo Mathias

Guaratinguetá  
2008

Claro, Fernando Antonio Elias  
C613g Gráficos de controle de  $\bar{X}$  para monitoramento de  
processos autocorrelacionados / Fernando Antonio Elias  
Claro.- Guaratinguetá : [s.n.], 2008  
159 f.: il.  
Bibliografia: f. 106-114  
Inclui apêndice

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista,  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2008  
Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa

1. Autocorrelação (Estatística) I. Título

CDU 311

UNESP  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**"GRÁFICOS DE CONTROLE DE  $\bar{X}$  PARA O MONITORAMENTO DE  
PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS"**

**FERNANDO ANTONIO ELIAS CLARO**

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
"DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA"

PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA  
ÁREA: TRANSMISSÃO E CONVERSÃO DE ENERGIA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Marcelo dos Santos Pereira  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA  
Orientador/UNESP-FEG

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. LINDA LEE HO  
EPUSP-SP

Prof. Dr. ANDERSON PAULO DE PAIVA  
UNIFEI-MG

Prof. Dr. CARLOS ALBERTO CHAVES  
UNITAU-SP

Prof. Dr. MESSIAS BORGES SILVA  
UNESP-FEG

Agosto de 2008

## DADOS CURRICULARES

### FORMAÇÃO ACADÊMICA

<b>Engenheiro Mecânico Pleno</b> - Escola de Engenharia de Taubaté	<b>1971 – 1975</b>
<b>Mestre em Engenharia Mecânica</b> - UNITAU	<b>2002 – 2004</b>

### ATIVIDADES PROFISSIONAIS

<b>Magal Indústria e Comércio Ltda.</b>	<b>10/1999 – 03/2002</b>
<b>Monte Mor-SP</b>	
Diretor de Qualidade e Engenharia	03/01 – 03/02
Gerente de Qualidade	10/99– 02/01
<b>Ford Brasil Ltda.</b>	<b>06/1974 – 12/1998</b>
<b>Taubaté-SP</b>	
Gerente da Fábrica de Transmissões	06/97 – 12/98
Gerente de Qualidade Assegurada	12/88 – 03/91 e 01/95 – 05/97
Gerente de Engenharia de Manufatura	04/91 – 12/92
Superintendente de Inspeção da Manufatura	01/87 – 11/88
Supervisor de Laboratório	03/84 – 12/86
Engenheiro de Controle de Qualidade Sênior	02/77 – 02/84
Supervisor de Inspeção da Fundição	06/74 – 03/76
<b>Volkswagen do Brasil</b>	<b>01/1993 – 12/1994</b>
<b>São Bernardo do Campo-SP</b>	
Gerente de Fábrica - Fundição de Ligas Leves	
<b>Centro Técnico Aeroespacial</b>	<b>04/1976– 02/1977</b>
<b>São José dos Campos-SP</b>	
Engenheiro Mecânico	

### APERFEIÇOAMENTO, HABILITAÇÕES E CERTIFICAÇÕES

Curso de **Aperfeiçoamento em Administração e Negócios**, FEA-USP, 1999.

Habilitação como **Supervisor de Proteção Radiológica**, Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), 1999.

Certificação em **Engenharia de Qualidade**, *American Society for Quality*, 2002.

Certificação como **Auditor Líder de Qualidade** (ISO 9000:2000), Bureau Veritas Quality International (BVQI), 2002.

Certificação em **Engenharia de Confiabilidade**, *American Society for Quality*, 2007.

Dedico este trabalho...

A Deus,  
à minha esposa Cristiane,  
aos meus pais Helena (*in memoriam*) e Geraldo,  
às minhas irmãs Ana Christina e Ana Claudia,  
aos meus filhos Camila e Rafael,  
e a todos que me incentivaram ao longo deste caminho.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Criador supremo, pela infinita bondade em nos conceder saúde, força e entusiasmo no desenvolvimento deste trabalho.

A minha esposa Cristiane, pelo incentivo e cumplicidade.

Ao meu amigo e mentor, Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa, pelo apoio, paciência, conhecimento e segurança que sempre me transmitiu. Certamente, sem sua dedicada orientação, não teria sido possível alcançar os resultados desta pesquisa.

Aos professores membros da banca de avaliação desta tese, pelas críticas e sugestões que contribuíram significativamente para melhorar sua apresentação e qualidade.

À FEG-UNESP, na pessoa dos professores, funcionários e colegas com quem tive a oportunidade de conviver, pelo estímulo, amizade e colaboração na realização deste trabalho,

Ao amigo Antonio Cursino, pela ajuda em parte deste trabalho.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para transformar este trabalho em realidade.

CLARO, F. A. E. **Gráficos de Controle de  $\bar{X}$  para o monitoramento de processos autocorrelacionados**. 2008. 159 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2008.

## RESUMO

Os gráficos de  $\bar{X}$  são apresentados na literatura supondo quase sempre que as observações da variável  $X$  são independentes. Na prática, no entanto, está se tornando rotina descobrir que esta condição não existe. A dependência entre observações gera um aumento na frequência de alarmes falsos e diminui o poder do dispositivo estatístico. Nesta tese estuda-se o gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla (AD) supondo que as observações de  $X$  são descritas por modelos parcimoniosos da família ARIMA (Autoregressivo, Integrado e de Médias Móveis). As propriedades da carta foram obtidas considerando o conceito de subgrupos racionais. Para comparar o desempenho do gráfico proposto com o desempenho dos esquemas concorrentes, isto é, o gráfico de  $\bar{X}$  padrão, o gráfico de  $\bar{X}$  com amostra de tamanho variável (ATV) e o esquema da Média Móvel Ponderada Exponencialmente (EWMA), foi necessário obter o número médio de amostras até o sinal (NMA) para todos eles. Os resultados obtidos mostram que a autocorrelação dentro do subgrupo tem forte impacto sobre as propriedades dos gráficos. O gráfico de controle com amostragem dupla é geralmente mais eficiente do que os esquemas concorrentes na detecção de desajustes na média do processo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Autocorrelação; Amostragem Dupla; Carta de Controle; Controle Estatístico do Processo; Número Médio de Amostras até o Sinal.

CLARO, F. A. E.  $\bar{X}$  Control Charts for the monitoring of autocorrelated processes. 2008. 159 p. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2008.

### ABSTRACT

The  $\bar{X}$  charts are presented in the literature often assuming that the observations of the  $X$  variable are independent. In practice, however, it is becoming a routine to find out that such condition is unrealistic. The autocorrelation among the observations increases the false alarm rate and reduces the power of the statistical device. In this thesis, we study the Double Sampling  $\bar{X}$  chart (DS) assuming that the observations of  $X$  are described by parsimonious models of the ARIMA family (Autoregressive, Integrated and Moving Average). The properties of the charts were obtained considering the concept of rational subgroups. To compare the performance of the proposed chart with the performance of the competitor schemes, that is, the standard  $\bar{X}$  chart, the Variable Sample Size  $\bar{X}$  chart (VSS) and the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) chart, it was necessary to obtain the average run length (ARL) for all of them. The results show that the autocorrelation within the subgroup has strong impact on the chart properties. The Double Sampling  $\bar{X}$  chart is usually more efficient than the competitor schemes in the detection of the process mean shifts.

**KEY-WORDS:** Autocorrelation; Double Sampling; Control Chart; Statistical Process Control; Average Run Length.



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1	- Gráfico de controle (processo estável e ajustado).....	46
FIGURA 3.2	- Gráfico de controle (processo instável).....	47
FIGURA 3.3	- Gráfico de $\bar{X}$ - ocorrência de um alarme falso.....	48
FIGURA 3.4	- Gráfico de $\bar{X}$ - ocorrência de um alarme verdadeiro.....	49
FIGURA 3.5	- NMAs com gráficos de controle utilizando observações e resíduos como estatística de controle, modelo AR(1), $\phi=0,679$ .....	60
FIGURA 3.6	- Comparação do NMA entre gráficos usando-se resíduos do modelo e observações originais como estatística de controle, modelo ARMA(1,1), $\rho_1 = \{0,689; -0,689\}$ .....	61
FIGURA 3.7	- Representação gráfica da carta de controle com amostragem dupla.....	76
FIGURA 4.1	- Redução (%) do NMA do gráfico de médias pelo aumento do tamanho de amostra, de $n=3$ para $n=5$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação.....	84
FIGURA 4.2	- Redução (%) do NMA do gráfico com amostras de tamanho variável pelo aumento do tamanho médio da amostra, de $\bar{n} = 3$ para $\bar{n} = 5$ , com $n_1=2$ e $n_2=12$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação.....	86
FIGURA 4.3	- Variação (%) do NMA do gráfico com amostras de tamanho variável pelo aumento do tamanho de amostra, de $n_2=8$ para $n_2=16$ , com $n_1=2$ e $\bar{n} = 4$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação.....	87
FIGURA 4.4	- Redução (%) do NMA do gráfico com amostragem dupla pelo aumento do tamanho médio da amostra, de $\bar{n} = 3$ para $\bar{n} = 5$ , com $n_1=2$ e $n_2=12$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação.....	88

FIGURA 4.5	- Redução (%) do NMA do gráfico com amostragem dupla pelo aumento do tamanho da amostra no segundo estágio, de $n_2=8$ para $n_2=16$ , com $n_1=2$ e $\bar{n}=4$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação.....	89
FIGURA 4.6	- Probabilidade da amostragem prosseguir ao segundo estágio, gráfico com amostragem dupla, processo AR(1), $n_1=2$ , $n_2=12$ , $\bar{n}=5$ .....	89
FIGURA 5.1	- Representação esquemática do conjunto da carcaça da transmissão.....	92
FIGURA 5.2	- Gráfico seqüencial das observações originais.....	93
FIGURA 5.3	- Teste de normalidade das observações originais.....	94
FIGURA 5.4	- Carta de controle de observações individuais com limites não ajustados a autocorrelação.....	94
FIGURA 5.5	- Função autocorrelação das observações originais.....	95
FIGURA 5.6	- Função autocorrelação parcial das observações originais.....	95
FIGURA 5.7	- Teste de normalidade dos resíduos do modelo das observações originais.....	96
FIGURA 5.8	- Gráfico de controle de observações individuais dos resíduos do modelo ajustado .....	97
FIGURA 5.9	- Gráfico de controle de valores individuais dos resíduos do modelo após análise de intervenção (processo em controle).....	98
FIGURA 5.10	- Gráfico com amostragem dupla após ajuste das observações pelo método de análise de intervenção (processo em controle).....	100
FIGURA 5.11	- Alarmes falsos na carta de $\bar{X}$ .....	101
FIGURA 5.12	- Carta de $\bar{X}$ com limites de controle corrigidos.....	101
FIGURA 5.13	- Detecção da perturbação com o gráfico com amostragem dupla.....	102

FIGURA A.1	- Gráfico de controle de médias ( $n=4$ ).....	157
FIGURA A.2	- Função autocorrelação da série “Resistência elétrica de isolação”.....	157
FIGURA A.3	- Função autocorrelação parcial da série “Resistência elétrica de isolação”.....	158

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1	- Número médio de observações até o sinal (NMO) para algumas combinações $w$ versus $n$ ; gráfico GMAL; $NMO_0=21112$ ; modelo AR(1); $\sigma_e = 1$ e $\phi = 0,9$ .....	57
TABELA 3.2	- Número médio de observações até o sinal (NMO) para os gráficos GMAL, GMP e de resíduos; modelo AR(1); $NMO_0=10000$ .....	63
TABELA 4.1	- Tamanhos de amostra selecionados.....	82
TABELA 4.2	- Coeficientes selecionados.....	83
TABELA 4.3	- Valores ótimos para $\lambda$ no gráfico de EWMA, processo AR(1), $n=5$ .....	85
TABELA 4.4	- Comparação dos gráficos com tamanhos de amostra equivalentes (EWMA e Médias com $n=5$ ; ATV e AD com $n_1 = 2$ , $n_2 = 16$ , e $\bar{n} = 5$ ).....	91
TABELA 5.1	- Estatística descritiva das observações originais e limites superior e inferior de tolerância (LST e LIT) para a altura da face de assentamento.....	93
TABELA 5.2	- Valor e significância dos coeficientes do modelo.....	96
TABELA 5.3	- Teste da independência de resíduos.....	97
TABELA 5.4	- Observações originais discrepantes e valores ajustados.....	97
TABELA 5.5	- Alterações na variabilidade e parâmetros do modelo.....	98
TABELA 5.6	- Efeito da análise de intervenção sobre os limites de controle.	99
TABELA B.1	- NMA, gráfico de médias, processos IID e autocorrelacionados, $NMA_0=370,4$ .....	121
TABELA B.2	- NMA e limites de controle (LC), gráfico de EWMA, processos IID e autocorrelacionados, $n=3$ , $NMA_0=370,4$ .....	122
TABELA B.3	- NMA e limites de controle (LC), gráfico de EWMA, processos IID e autocorrelacionados, $n=4$ , $NMA_0=370,4$ .....	123

TABELA B.4	- NMA e limites de controle (LC), gráfico de EWMA, processos IID e autocorrelacionados, $n=5$ , $NMA_0=370,4$ .....	124
TABELA B.5	- NMA, coeficiente ( $k_1$ ) e $(p) = [\bar{X}_1 \in  k, k_1 ]$ , gráfico com ATV, processos IID e AR(1), $n_1=2$ , $NMA_0=370,4$ .....	125
TABELA B.6	- NMA, gráfico com ATV, processos IID e MA(1), $n_1=2$ , $NMA_0=370,4$ .....	126
TABELA B.7	- NMA, gráfico com ATV, processos IID e ARMA(1,1), $n_1=2$ , $NMA_0=370,4$ .....	127
TABELA B.8	- NMA, gráfico com ATV, processos IID e AR(2), $n_1=2$ , $NMA_0=370,4$ .....	128
TABELA B.9	- NMA, gráfico com ATV, processos IID e MA(2), $n_1=2$ , $NMA_0=370,4$ .....	129
TABELA B.10	- Coeficientes dos limites de advertência ( $L_1$ ) e de ação ( $L_2$ ) para o gráfico com AD, $NMA_0=370,4$ .....	130
TABELA B.11	- NMA, gráfico com AD, processos IID e AR(1), $n_1=1$ , $NMA_0=370,4$ .....	131
TABELA B.12	- NMA, gráfico com AD, processos IID e MA(1), $n_1=1$ , $NMA_0=370,4$ .....	132
TABELA B.13	- NMA, gráfico com AD, processos IID e ARMA(1,1), $n_1=1$ , $NMA_0=370,4$ .....	133
TABELA B.14	- NMA, gráfico com AD, processos IID e AR(2), $n_1=1$ , $NMA_0=370,4$ .....	134
TABELA B.15	- NMA, gráfico com AD, processos IID e MA(2), $n_1=1$ , $NMA_0=370,4$ .....	135
TABELA B.16	- NMA, gráfico com AD, processos IID e AR(1), $n_1=2$ , $NMA_0=370,4$ .....	136
TABELA B.17	- NMA, gráfico com AD, processos IID e MA(1), $n_1=2$ , $NMA_0=370,4$ .....	137
TABELA B.18	- NMA, gráfico com AD, processos IID e ARMA(1,1), $n_1=2$ , $NMA_0=370,4$ .....	138

TABELA B.19	- NMA, gráfico com AD, processos IID e AR(2), $n_1=2$ , NMA <sub>0</sub> =370,4.....	139
TABELA B.20	- NMA, gráfico com AD, processos IID e MA(2), $n_1=2$ , NMA <sub>0</sub> =370,4.....	140
TABELA B.21	- Probabilidade $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, $n_1=1$ , processos IID e autocorrelacionados, NMA <sub>0</sub> =370,4.....	141
TABELA B.22	- Probabilidade $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e AR(1), $n_1=2$ , NMA <sub>0</sub> =370,4.....	142
TABELA B.23	- Probabilidade $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e MA(1), $n_1=2$ , NMA <sub>0</sub> =370,4.....	143
TABELA B.24	- Probabilidade $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e ARMA(1,1), $n_1=2$ , NMA <sub>0</sub> =370,4.....	144
TABELA B.25	- Probabilidade $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e AR(2), $n_1=2$ , NMA <sub>0</sub> =370,4.....	145
TABELA B.26	- Probabilidade $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e MA(2), $n_1=2$ , NMA <sub>0</sub> =370,4.....	146

### LISTA DE QUADROS

QUADRO 2.1	- Identificação de modelos por meio de correlogramas.....	37
QUADRO A.1	- Banco de dados “Resistência elétrica de isolamento”.....	159

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AD	- Amostragem dupla
AIF	- Amostragem em intervalo fixo
AIV	- Amostragem em intervalo variável
AIVPD	- Amostragem em intervalo variável em tempo pré-definido
AR(1)	- Modelo autoregressivo de 1 <sup>a</sup> ordem ( <i>First order autoregressive model</i> )
AR(2)	- Modelo autoregressivo de 2 <sup>a</sup> ordem ( <i>Second order autoregressive model</i> )
ARIMA	- Modelo autoregressivo e integrado de médias móveis ( <i>Autoregressive integrated and moving average model</i> )
ARMA(1,1)	- Modelo autoregressivo e de médias móveis de 1 <sup>a</sup> ordem ( <i>First order autoregressive and moving average model</i> )
ATIVPD	- Amostragem com tamanho variável e intervalo variável em tempo pré-definido
ATV	- Amostra de tamanho variável
CEP	- Controle Estatístico do Processo
CUSUM	- Soma cumulativa ( <i>Cumulative-Sum</i> )
E ( )	- Esperança
EWMA	- Média móvel ponderada exponencialmente ( <i>Exponentially Weighted Moving Average</i> )
FAC	- Função autocorrelação
FACP	- Função autocorrelação parcial
GMAL	- Gráfico de médias aritméticas para lotes ( <i>Batch-means control chart</i> )
GMP	- Gráfico de médias ponderadas ( <i>Weighted means control chart</i> )
IID	- Independente e identicamente distribuída
IMA(1,1)	- Modelo integrado e de médias móveis de 1 <sup>a</sup> ordem ( <i>First order integrated and moving average model</i> )
LM	- Linha média do gráfico de controle
LC	- Limite de controle ou limite de ação
LIC	- Limite inferior de controle

LIT	- Limite inferior de tolerância
LSC	- Limite superior de controle
LST	- Limite superior de tolerância
MA(1)	- Modelo de médias móveis de 1ª ordem ( <i>First order moving average model</i> )
MA(2)	- Modelo de médias móveis de 2ª ordem ( <i>Second order moving average model</i> )
N()	- Distribuição normal
NA	- Número de amostras até o sinal
NMA	- Número médio de amostras até o sinal
NMO	- Número médio de observações até o sinal
NMA <sub>0</sub>	- Número médio de amostras até o sinal durante o período em controle
NMO <sub>0</sub>	- Número médio de observações até o sinal durante o período em controle
PA	- Perturbação aditiva ( <i>Additive Outlier</i> )
PI	- Perturbação de inovação ( <i>Innovation Outlier</i> )
Pd	- Poder do gráfico
Pr	- Probabilidade
TMS	- Tempo médio até o sinal



## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS LATINAS

- $B$  - Operador retroativo ou de atraso nos modelos ARIMA
- $C$  - Valor crítico em análise de intervenção
- $c_4$  - Constante usada para cálculo de limites de controle
- $d$  - Instante da ocorrência de uma observação atípica
- $d_2$  - Constante usada para cálculo de limites de controle
- $e$  - Erro ou resíduo
- $H_0$  - Hipótese nula
- $H_1$  - Hipótese alternativa
- $h$  - Intervalo de amostragem
- $I$  - Matriz identidade
- $k$  - Fator de abertura dos limites de controle  
Defasagem ou retardo na série temporal
- $k_1$  - Coeficiente do limite de advertência no gráfico com amostras de tamanho variável
- $L$  - Coeficiente do limite de advertência superior no primeiro estágio para os gráficos com amostragem dupla
- $L_1$  - Coeficiente do limite de advertência inferior no primeiro estágio para os gráficos com amostragem dupla
- $L_2$  - Coeficiente do limite de ação no segundo estágio para os gráficos com amostragem dupla
- $\overline{MR}$  - Amplitude móvel média (*Average Moving Range*)
- $N$  - Número de observações tomadas para estudo na série temporal
- $n$  - Tamanho da amostra
- $\bar{n}$  - Número médio de itens inspecionados por amostragem

- $n_1$  - Tamanho da amostra no primeiro estágio para o gráfico com amostragem dupla  
Tamanho da amostra seguinte no gráfico com amostras de tamanho variável, quando a média do subgrupo em inspeção é plotada na região central da carta
- $n_2$  - Tamanho da amostra no segundo estágio para o gráfico com amostragem dupla  
Tamanho da amostra seguinte no gráfico com amostras de tamanho variável, quando a média do subgrupo em inspeção é plotada na região de advertência da carta
- $p$  - Ordem do modelo autoregressivo
- $\mathbf{p}$  - Vetor de probabilidades iniciais
- $Q$  - Estatística do teste de Portmanteau
- $q$  - Ordem do modelo de médias móveis
- $\mathbf{R}$  - Submatriz de probabilidades de transição
- $\hat{\rho}_k$  - Função autocorrelação amostral
- $\bar{R}$  - Amplitude média
- $S$  - Desvio-padrão amostral
- $S_i$  - Estatística do gráfico de controle de CUSUM
- $T$  - Número de observações existentes na série temporal
- $t$  - Parâmetro adimensional de tempo
- $X$  - Variável de interesse
- $\bar{X}$  - Média amostral da variável aleatória  $X$
- $Y$  - Variável de interesse na série “contaminada”
- $\tilde{Y}$  - Valor de substituição ao dado original discrepante na série
- $Y_i$  - Estatística do gráfico de EWMA
- $\bar{Y}$  - Média da amostra de tamanho  $n$  no gráfico com amostragem dupla
- $Z$  - Variável resultante de padronização para distribuição  $N(0,1)$

## LETRAS GREGAS

- $\alpha$  - Probabilidade de alarme falso
- $\beta$  - Probabilidade de não-detecção
- $\delta$  - Deslocamento da média da variável em relação ao seu valor-alvo
- $\zeta$  - Parâmetro de derivação (*drift parameter*)
- $\mu$  - Média populacional
- $\mu_0$  - Média populacional com o processo em controle
- $\mu_1$  - Média populacional após influência da causa especial
- $\sigma$  - Desvio-padrão populacional
- $\sigma_0$  - Desvio-padrão populacional com o processo em controle
- $\sigma^2$  - Variância populacional
- $\gamma_k$  - Função autocovariância no *lag* k
- $\rho_k$  - Função autocorrelação no *lag* k
- $\lambda$  - Constante de amortecimento no gráfico da média móvel ponderada exponencialmente
- $\lambda_i$  - Estatística da análise de intervenção
- $\theta$  - Coeficiente do modelo de médias móveis
- $\phi$  - Coeficiente do modelo autoregressivo
- $\phi_{kk}$  - Função autocorrelação parcial
- $\hat{\phi}_{kk}$  - Função autocorrelação parcial amostral
- $\Phi$  - Função distribuição normal padronizada

## SUMÁRIO

### Capítulo 1

#### INTRODUÇÃO

1.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	22
1.2- PROBLEMA DA PESQUISA.....	23
1.3- TEMA DA PESQUISA.....	24
1.4- JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA DA PESQUISA.....	25
1.5- OBJETIVOS DA PESQUISA.....	25
1.6- CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS DA TESE.....	26
1.7- DELIMITAÇÕES DA PESQUISA.....	26
1.8- ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	27

### Capítulo 2

#### SÉRIES TEMPORAIS

2.1- CONCEITOS E FUNDAMENTOS.....	29
2.2- A FUNÇÃO AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL (FAC) .....	30
2.3- A FUNÇÃO AUTOCORRELAÇÃO PARCIAL AMOSTRAL (FACP) ....	31
2.4- MODELOS DA FAMÍLIA ARIMA .....	32
2.4.1- O modelo autoregressivo AR(p).....	33
2.4.2- O modelo de médias móveis MA(q).....	34
2.4.3- O modelo autoregressivo e de médias móveis de primeira ordem ARMA(1,1) .....	36
2.5- CONSTRUÇÃO DO MODELO.....	36
2.6- ANÁLISE DE INTERVENÇÃO.....	38

## Capítulo 3

### GRÁFICOS DE CONTROLE

3.1-	CONCEITOS FUNDAMENTAIS - PROCESSOS INDEPENDENTES	
3.1.1-	Causas aleatórias e causas especiais de variação.....	43
3.1.2-	Fases de implementação da carta de controle.....	44
3.1.3-	Subgrupos racionais.....	44
3.1.4-	O gráfico de $\bar{X}$ para processos com observações independentes....	45
3.2-	REVISÃO DA LITERATURA	
3.2.1-	Introdução.....	51
3.2.2-	Gráficos com limites de controle alargados.....	52
3.2.3-	Gráficos com propriedades independentes do modelo ( <i>model-free approach</i> ).....	55
3.2.4-	Gráficos com propriedades dependentes do modelo ( <i>model-based approach</i> ).....	58
3.2.5-	Gráficos adaptativos.....	65
3.2.6-	Análise crítica da literatura.....	67
3.3-	GRÁFICOS PARA PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS	
3.3.1-	Introdução.....	69
3.3.2-	O gráfico de $\bar{X}$ .....	69
3.3.3-	O gráfico da média móvel ponderada exponencialmente (EWMA)	71
3.3.4-	O gráfico de $\bar{X}$ com amostras de tamanho variável (ATV).....	72
3.3.5-	O gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla (AD).....	74

## Capítulo 4

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1-	CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES.....	82
4.2-	RESULTADOS.....	83
4.3-	DISCUSSÃO.....	84

4.3.1-	Gráfico de $\bar{X}$ .....	84
4.3.2-	Gráfico de EWMA.....	85
4.3.3-	Gráfico de $\bar{X}$ com amostras de tamanho variável.....	86
4.3.4-	Gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla.....	87
4.3.5-	Comparação entre todos os gráficos.....	90

## Capítulo 5

### EXEMPLO DE APLICAÇÃO

5.1-	ANÁLISE DE INTERVENÇÃO.....	92
5.2-	COMPARANDO O DESEMPENHO DE CARTAS DE CONTROLE.....	100

## Capítulo 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

6.1-	CONCLUSÕES.....	103
6.2-	SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS.....	104

REFERÊNCIAS.....	106
------------------	-----

APÊNDICE A – As grandezas $\Delta$ e $\bar{X}_2^*$ e suas variâncias.....	115
---	-----

APÊNDICE B - Limites e eficiência dos gráficos de controle.....	120
---	-----

APÊNDICE C - Códigos computacionais em <i>FORTRAN SUPER STATION 4.0</i> .	147
---	-----

ANEXO A - Resistência elétrica de isolamento.....	157
---	-----

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O princípio básico de melhoria contínua e produtividade nos processos, alavanca do grande crescimento experimentado pela indústria japonesa na década de 80, despertou no mundo ocidental a necessidade de entender melhor a relação entre qualidade e produtividade como mecanismo de redução de custos e aumento de competitividade.

Sabe-se atualmente que um dos pilares do sistema operacional das melhores empresas é centrar esforços em prevenção de defeitos ao invés de detectar produtos defeituosos. Utilizar um conjunto de técnicas estatísticas para identificar e aplicar medidas de redução de variabilidade no processo é a base fundamental ao esforço da prevenção.

Denomina-se Controle Estatístico do Processo (CEP) a coleção de ferramentas utilizadas com esta finalidade, dentre as quais se destacam os gráficos de controle, introduzidos pelo Dr. Walter Andrew Shewhart (SHEWHART, 1931). O Dr. Shewhart advogava enfaticamente o conceito de prevenção, porém, por ironia, seu trabalho somente passou a receber a devida atenção nos Estados Unidos a partir do avanço da indústria japonesa. Os conceitos que ele desenvolveu sobre estas técnicas relativamente simples para monitoramento de processos fundamentam a pesquisa sobre o assunto e, até os dias de hoje, o gráfico de médias amostrais é certamente uma das ferramentas de qualidade mais conhecidas e utilizadas.

O gráfico de controle de Shewhart é um dispositivo estatístico aplicado aos dados de um processo para determinar se a característica de qualidade deslocou-se de seu valor-alvo (MONTGOMERY, 2001). Esta forma de monitoramento é muito utilizada para distinguir causas comuns de causas especiais de variação (frequentemente responsáveis por desajustes na média do processo), identificar quando ocorreu a mudança no processo de modo a guiar a pesquisa na eliminação da causa-raiz e finalmente melhorar o processo pela prevenção de novas ocorrências.

## 1.2 PROBLEMA DA PESQUISA

A hipótese fundamental em Controle Estatístico do Processo (CEP) é que as observações da variável de interesse ajustem-se a uma distribuição normal e sejam independentes e identicamente distribuídas (IID). Nos últimos anos, entretanto, a crescente automatização no segmento de manufatura revolucionou muitos processos, acentuando coincidentemente a dependência em série entre observações.

A autocorrelação observada em processos industriais é tipicamente devida a presença de elementos inerciais que limitam a variabilidade entre observações próximas na escala do tempo. Hoerl e Palm (1992) mencionam que todos os processos são autocorrelacionados, e dependerá apenas da frequência de amostragem para que este comportamento fique evidente. Para eliminá-la, eles sugerem que haja um espaço de tempo suficientemente longo entre as observações da variável de interesse, o que nem sempre é razoável e parece não levar a uma solução eficiente para o monitoramento.

Uma vez constatada a dependência em série, é de grande importância distinguir quais são os padrões inerentes ao processo e quais são os atribuídos a causas especiais. Se a autocorrelação é sintoma de um problema, o dispositivo estatístico deve detectar sua presença; porém, se ela for intrínseca ao processo, um gráfico que por esta razão gere pontos fora de seus limites de controle é de pouca utilidade (GILBERT; KIRBY; HILD, 1997; CROWDER; HAWKINS; REYNOLDS JR.; YASHCHIN, 1997).

Quando a autocorrelação não é levada em conta, os limites de controle do dispositivo estatístico tornam-se muito “estritos” e ele passa a gerar muitos alarmes falsos, o que caracteriza um dos problemas da pesquisa.

A despeito deste fato, os usuários de cartas de controle em muitas ocasiões falham em reconhecer a presença de dados autocorrelacionados. Um primeiro exemplo desta afirmativa é encontrado dentro do próprio estudo pioneiro do Dr. Shewhart que, embora um grande estatístico, porém sem acesso a metodologia de séries temporais e os recursos computacionais hoje disponíveis, parece não ter detectado a ausência de aleatoriedade nas observações que ele utilizou em um dos seus estudos sobre gráficos de controle. No Quadro A.1 estão 204 medidas consecutivas de resistência elétrica de



isolação, organizadas em 51 subgrupos ( $n=4$ ), que utilizados na construção de carta de controle com limites de três desvios-padrão, apontaram 19,6% das médias na região de ação. No Anexo A verifica-se que vários destes pontos estão plotados na região de ação do gráfico pelo fato das observações serem autocorrelacionadas. Shewhart, no entanto, atribuiu à causas especiais a ocorrência de todos eles.

Nos últimos anos, embora os gráficos de controle tenham se desenvolvido e se tornado uma das mais utilizadas técnicas de monitoramento de processos, sua aplicação incorreta continua não sendo exceção. Pesquisa conduzida por Alwan (1995) com uma amostra de 235 aplicações, coletadas de fontes das quais se esperava considerável grau de sofisticação no domínio da técnica e uso desta ferramenta, mostrou que em 86% dos casos havia algum tipo de violação das hipóteses fundamentais para uso dos limites clássicos, na maior parte das vezes, falha em reconhecer a dependência em série no processo considerado, e conseqüentemente uso de limites de controle inapropriados.

Um segundo problema da pesquisa é a significativa redução do poder do gráfico, advinda da dependência em série nos processos com autocorrelação positiva (caso da grande maioria dos processos industriais).

### 1.3 TEMA DA PESQUISA

A busca por dispositivos estatísticos mais eficientes para monitoramento de processos tem, nas últimas duas décadas, fomentado pesquisas com cartas de controle adaptativas. Gráficos desta natureza são projetados de forma que ao menos um dos seus parâmetros (intervalo de amostragem, tamanho da amostra e coeficiente de abertura dos limites de controle) possa variar em tempo real com base nos valores amostrais da estatística de monitoramento e, por conta disto, se tornam muito mais eficientes que os gráficos tradicionais (TAGARAS, 1998).

O número médio de amostras até o sinal (NMA) é a métrica comumente empregada para medir a eficiência ou o desempenho das cartas de controle. Quando há uma mudança no processo, é desejável que o NMA seja pequeno de sorte que a

detecção seja rápida; por outro lado, quando o processo está em controle, é desejável que o NMA seja alto de modo a reduzir o número de alarmes falsos produzidos pela carta (LU; REYNOLDS JR., 1999). Uma alternativa para melhorar a eficiência do gráfico de  $\bar{X}$  consiste em adotar a amostragem dupla (AD). Se por um lado este esquema leva a uma maior complexidade na administração das amostras, por outro, ele faz com que o dispositivo estatístico sinalize mais rápido as perturbações no parâmetro de centralidade da distribuição da característica de qualidade  $X$ . O gráfico de controle com amostragem dupla para processos independentes foi proposto por Croasdale (1974), reprojetoado com algumas alterações por Daudin (1992) e recentemente estendido para dados multivariados (HE; GRIGORYAN, 2005; COSTA; MACHADO, 2007; CHAMP; APARISI, 2008). Embora as propriedades deste gráfico o tornem muito competitivo no monitoramento de processos independentes, a literatura consultada não faz menção a seu uso para processos com dependência em série. Com base nestes fatos, a proposta desta tese é projetar o gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla para monitorar processos autocorrelacionados, obter suas propriedades e compará-las com as de cartas concorrentes (as de médias amostrais, de EWMA para médias e de médias com amostras de tamanho variável).

#### 1.4 JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA DA PESQUISA

As observações das variáveis de monitoramento da grande maioria dos processos industriais são autocorrelacionadas, justificando-se assim que todo e qualquer estudo hoje existente sobre gráficos de controle para processos independentes sejam estendidos para dados autocorrelacionados.

#### 1.5 OBJETIVOS DA PESQUISA

O objetivo principal desta pesquisa é projetar o gráfico de controle de  $\bar{X}$  com amostragem dupla para o monitoramento de processos autocorrelacionados cujas observações se ajustem a modelos da família ARIMA.

Alguns objetivos mais específicos são:

- ✓ Projetar os gráficos de médias amostrais, de EWMA para médias e de médias com amostras de tamanho variável, para o monitoramento de processos autocorrelacionados;
- ✓ Obter as propriedades dos gráficos considerados;
- ✓ Mensurar o efeito da dependência em série no poder de detecção dos gráficos;
- ✓ Comparar, em condições de igualdade, o gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla aos gráficos concorrentes.

## 1.6 CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS DA TESE

Esta tese apresenta como contribuições originais:

- ✓ Extensão da metodologia hoje existente para o estudo das propriedades dos gráficos de controle de  $\bar{X}$  com amostragem dupla, para englobar também o caso em que as observações são autocorrelacionadas;

- ✓ Obtenção das propriedades do gráfico de EWMA para médias e do gráfico de  $\bar{X}$  com amostras de tamanho variável em processos autocorrelacionados.

Em todos os casos, o desempenho dos gráficos foi obtido analiticamente.

## 1.7 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA

No estudo dos dispositivos estatísticos tratados nesta tese consideram-se as seguintes delimitações:

- ✓ A autocorrelação é inerente ao processo, não sendo possível ou viável sua remoção.

- ✓ O modelo é estacionário, de baixa ordem e com autocorrelação positiva. Seus coeficientes são conhecidos e acurados e os resíduos se ajustam a uma distribuição IID  $N(0, \sigma_e^2)$ .

- ✓ A influência do erro de medição é desprezível.
- ✓ As amostras são coletadas segundo os conceitos de subgrupos racionais, portanto, com o processo em controle, é razoável supor que as observações dentro do subgrupo são autocorrelacionadas e a dependência em série entre as amostras é desprezível (GILBERT; KIRBY; HILD, 1997).
- ✓ A causa especial altera somente a média da distribuição. Este desajuste é do tipo “degrau” (“*step mean shift*”), com magnitude expressa em unidades do desvio-padrão do modelo de séries temporais que representa o processo.

## 1.8 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta tese está dividida em seis capítulos. Neste, apresentam-se as considerações iniciais, o problema e o tema da pesquisa, sua justificativa e importância, seus objetivos, as contribuições originais, as delimitações e a maneira como o trabalho está organizado.

No Capítulo 2, são apresentadas as noções sobre séries temporais, com particular ênfase a modelos parcimoniosos da família ARIMA, e análise de intervenção, uma ferramenta para identificação e modelamento de dados discrepantes. Estes fundamentos são necessários ao entendimento do modelo e dos dispositivos de controle considerados.

No Capítulo 3, estão os conceitos fundamentais sobre gráficos de controle para processos independentes (seção 3.1), a revisão bibliográfica sobre o monitoramento de processos autocorrelacionados (seção 3.2) e o desenvolvimento matemático requerido para estudo das propriedades dos gráficos concorrentes e do gráfico proposto (seção 3.3).

Os resultados obtidos são apresentados e discutidos no Capítulo 4.

No Capítulo 5, é apresentado um exemplo de aplicação com uso da análise de intervenção e outro em que se compara o poder de detecção dos gráficos de médias e com amostragem dupla.

No Capítulo 6 estão as conclusões do estudo e sugestões para futuras pesquisas.

No Apêndice A são obtidas as variâncias utilizadas na determinação dos limites de controle para processos cujas observações são representadas pelos modelos MA(1), ARMA(1,1), MA(2) e AR(2). O Apêndice B complementa o Capítulo 4 e contém as tabelas com valores de limites de controle e NMA para cada um dos modelos e gráficos considerados. O Apêndice C traz os códigos computacionais em *FORTRAN powerstation* 4.0 que forneceram os NMAs do Apêndice B. No Anexo A está o tratamento estatístico conduzido sobre os valores de resistência elétrica de isolamento, disponíveis em Shewhart (1931, p. 20).

## 2 SÉRIES TEMPORAIS

### 2.1 CONCEITOS E FUNDAMENTOS

Uma série temporal é qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo (MORETTIN; TOLOI, 2004). Exemplos de séries temporais são inesgotáveis e podem ser encontrados nos campos de economia e finanças, saúde e ambiental, física, demografia e controle de processos em engenharia. Uma série é contínua quando as observações são feitas ininterruptamente ao longo do tempo e é discreta quando as observações são tomadas a intervalos equiespaçados. A principal característica na análise de séries temporais é o fato que observações sucessivas normalmente não são independentes, o que torna a série estocástica, ou seja, valores futuros têm uma distribuição de probabilidade condicionada ao conhecimento de valores passados.

Uma série estocástica, cuja seqüência de variáveis aleatórias é representada por  $\{X_1, X_2, \dots\}$  pode ser, na maior parte das vezes, descrita por seus momentos de primeira e segunda ordem, respectivamente, a média, dada por  $\mu_t = E(X_t)$  para  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e a função autocovariância, dada por  $\gamma_{t,s} = E[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$ . Como a função autocovariância depende da unidade da variável aleatória prefere-se muitas vezes, por propósitos práticos, substituí-la pela função adimensional de autocorrelação, expressa por  $\rho_{t,s} = \gamma_{t,s} / \sqrt{\sigma_{X_t}^2 \sigma_{X_s}^2}$  sendo  $-1 \leq \rho_{t,s} \leq 1$ .

Nesta tese são consideradas apenas séries estacionárias, nas quais as leis de probabilidade que governam o fenômeno descrito não se alteram ao longo do tempo, ou seja, a distribuição de  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$  é a mesma que a distribuição de  $X(t_{1-k}), X(t_{2-k}), \dots, X(t_{N-k})$  quaisquer que sejam os pontos  $t_1, t_2, \dots, t_N$  e qualquer que seja a defasagem de tempo (ou *lag*)  $k$ . Desta maneira, a notação anterior pode ser simplificada para  $\gamma_k = \gamma(X_t, X_{(t-k)})$  e  $\rho_k = \rho(X_t, X_{(t-k)})$  e valem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sigma_X^2; \quad \gamma_k = \gamma_{-k} \text{ e } |\gamma_k| \leq \gamma_0 \\ \rho_0 &= 1; \quad \rho_k = \rho_{-k} \text{ e } |\rho_k| \leq 1\end{aligned}$$

Quando se formam subgrupos tomados de processos com média constante, como são os processos estacionários, a variância da média dos subgrupos, conforme Cryer (1986, p. 19), é expressa por:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\gamma_0}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \gamma_k \quad (2.1)$$

Um tipo particular de processo estacionário é o chamado ruído branco ( $e_t$ ), definido como uma seqüência de variáveis aleatórias, do qual muitos modelos úteis podem ser construídos. Normalmente se assume:  $e_t \sim \text{IID } N(0, \sigma_e^2)$ .

## 2.2 A FUNÇÃO AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL (FAC)

Basicamente, todos os processos de fabricação são governados por elementos inerciais, e quando o intervalo entre amostras se torna pequeno em relação a estas forças, as observações do processo serão correlacionadas ao longo do tempo. Esta é uma função de extrema importância para examinar dependência entre dados. Considere uma seqüência de observações  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . Um estimador natural da função autocorrelação  $\rho_k$  é a função autocorrelação amostral definida por:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^N (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

onde:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t \quad (2.3)$$

Segundo Schneider e Pruett (1994), o erro padrão de  $\hat{\rho}_k$  é aproximadamente igual a  $1/\sqrt{N}$ , onde  $N$  é o número total de dados empregados no cálculo da

autocorrelação. Box, Jenkins e Reinsel (1994) recomendam que a estimativa  $\hat{\rho}_k$  seja obtida com  $N \geq 50$  e para  $k \leq N/4$ . De modo prático admite-se que, se algum dos coeficientes  $\hat{\rho}_k$  for maior do que o valor  $\pm 2/\sqrt{N}$ , a autocorrelação será significativa ao nível aproximado de 95% de significância.

Na imensa maioria dos processos de manufatura a autocorrelação é positiva, isto é, um valor abaixo da grande média no instante  $(t-1)$  tende a ser seguido também por um valor abaixo no instante  $t$ , e vice-versa, o que acaba fazendo com que observações ordenadas cronologicamente em um gráfico de linhas apresentem certo padrão característico em forma de “U” denominado *stationary meandering* (ALWAN, 2000, p. 52). Nos processos com autocorrelação negativa observações consecutivas se alternam acima e abaixo da média global, criando igualmente um padrão típico no gráfico, que revela a ausência de aleatoriedade.

### 2.3 A FUNÇÃO AUTOCORRELAÇÃO PARCIAL AMOSTRAL (FACP)

Esta função é utilizada na identificação de modelos estacionários juntamente com a função autocorrelação amostral. Ela define a correlação parcial entre  $X_t$  e  $X_{t-k}$  após remover o efeito das variáveis intervenientes  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$  e é usualmente representada por  $\phi_{kk}$ , sendo que as autocorrelações parciais teóricas, conforme Cryer (1986, p.109), podem ser calculadas por:

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_{k-j}}{1 - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{k-1,i} \rho_i} \quad (2.4)$$

com expressão geral:  $\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk} \phi_{k-1,k-j}$  para  $j = 1, 2, \dots, k-1$ .

Por definição considera-se  $\phi_{11} = \rho_1$  e aplicando (2.4), obtém-se, por exemplo:

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2};$$

$$\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22} \phi_{11};$$



$$\phi_{33} = \frac{(\rho_3 - \phi_{21}\rho_2 - \phi_{22}\rho_1)}{(1 - \phi_{21}\rho_1 - \phi_{22}\rho_2)}$$

Nestas equações, a estimativa do coeficiente de autocorrelação parcial é obtida substituindo  $\rho_i$  por  $\hat{\rho}_i$   $i=1,2,\dots$

## 2.4 MODELOS DA FAMÍLIA ARIMA

A classificação denominada ARIMA foi proposta por Box e Jenkins em 1970 e aplica-se a modelos estocásticos que descrevem um grande número de processos práticos (CASTILLO, 2002, p. 68). O acrônimo resulta da junção de autoregressivo (AR), integrado (I) e média móvel (MA, abreviatura de *moving average*), e normalmente o modelo é referenciado como ARIMA(p,d,q) onde “p” é a ordem do componente autoregressivo, “d” é o grau de diferenciação necessário para tornar o processo estacionário e “q” é a ordem do componente de média móvel. Se um dos componentes não está presente, seu termo e ordem são suprimidos do nome; por exemplo, o modelo ARIMA(1,0,0) é rotineiramente chamado por AR(1).

Nesta tese são consideradas as séries parcimoniosas ( $p, q \leq 2$ ) e estacionárias ( $d=0$ ) que representam significativa parte dos processos nas áreas de Engenharia (BISGAARD; KUHLAHC, 2007).

As observações de um modelo ARMA(p,q), segundo Castillo (2002, p. 85), são dadas por:

$$X_t = \mu + \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + e_t - \sum_{k=1}^q \theta_k e_{t-k} \quad \text{onde } t=1, 2, 3, \dots, T \quad (2.5)$$

A partir desta expressão é possível representar os modelos adotados nesta tese, como se detalha a seguir.

### 2.4.1 O modelo autoregressivo AR(p)

Os modelos autoregressivos foram propostos por Yule (1927) *apud* Cryer (1986) e são representados usando-se (2.5) com  $\theta_k = 0, \forall k$ . O valor  $X_t$  é uma combinação linear dos “ $p$ ” valores passados mais recentes, acrescidos da média ( $\mu$ ) e do resíduo ou erro aleatório,  $e_t \sim \text{IID N}(0, \sigma_e^2)$ , que incorpora o que é novo na série no tempo  $t$  e não pode ser explicado pelos valores passados. Os valores de  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$  são independentes de  $e_t$ . O coeficiente autoregressivo da defasagem “ $k$ ” é representado por  $\phi_k$ . A forma deste modelo, no qual os valores do processo são regredidos sobre eles mesmos, é análoga a usada no modelo de regressão linear (CASTILLO, 2002, p. 70).

O modelo autoregressivo de primeira ordem AR(1) é freqüentemente adotado para representar processos em manufatura onde são encontradas as aplicações de CEP. As observações deste processo podem ser escritas utilizando-se (2.5) com  $\theta_k = 0, \forall k$  e  $\phi_k = 0$  para  $k > 1$ . Neste modelo são válidas as seguintes propriedades:

$$E(X_t) = \mu = \frac{\zeta}{1 - \phi} \quad (2.6)$$

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi^2} \quad (2.7)$$

$$\gamma_k = \frac{\phi^k \sigma_e^2}{1 - \phi^2} \quad (2.8)$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

O parâmetro do modelo é  $\phi$  (o subscripto é normalmente suprimido nos modelos de primeira ordem) e  $\zeta$  é uma constante denominada *drifting parameter* ou parâmetro de derivação (CASTILLO, 2002, p. 78). Para que o processo seja estacionário a condição é  $|\phi| < 1$ . Quando  $|\phi| \geq 1$  o processo é chamado “passeio aleatório” não estacionário. Neste caso, a média e a variância não são constantes ao longo do tempo e

não se observa a tendência que o processo retorne ao valor alvo sem que haja algum tipo de interferência externa.

A equação definidora do modelo autoregressivo de segunda ordem, AR(2), é obtida usando-se (2.5) com  $(\phi_1, \phi_2) \neq 0$  e  $\phi_k = 0$  para  $k > 2$  em adição a  $\theta_k = 0, \forall k$ . A média do modelo é dada por:

$$E(X_t) = \mu = \frac{\zeta}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2} \quad (2.10)$$

As demais propriedades deste modelo são derivadas das equações propostas por Yule-Walker, isto é:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \quad (2.11)$$

e

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

quando  $k=0$  encontra-se:

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \left( \frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \right) \frac{\sigma_e^2}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} \quad (2.13)$$

para  $k=1$ ,  $\rho_0 = 1$  e  $\rho_{-1} = \rho_1$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \quad (2.14)$$

e para  $k=2$ :

$$\rho_2 = \frac{\phi_2(1 - \phi_2) + \phi_1^2}{1 - \phi_2} \quad (2.15)$$

Os parâmetros do modelo são  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e as condições de estacionariedade dadas por:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_1 - \phi_2 < 1 \quad \text{e} \quad |\phi_2| < 1.$$

#### 2.4.2 O modelo de médias móveis MA(q)

O modelo de médias móveis é expresso usando-se (2.5) e fazendo-se  $\phi_k = 0, \forall k$ . O coeficiente de médias móveis da defasagem “ $k$ ” é representado por  $\theta_k$ . A terminologia “médias móveis” deriva do fato que  $X_t$  é obtido aplicando os pesos

$1, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$  às variáveis  $e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-q}$  respectivamente e então movendo os mesmos pesos uma unidade de tempo a frente e aplicando-os novamente a  $e_{t+1}, e_t, e_{t-1}, \dots, e_{t-q+1}$  para obter  $X_{t+1}$ . Slutsky (1927) e Wold (1938) *apud* Cryer (1986) foram os precursores do modelo de médias móveis. Este modelo é adequado a muitas áreas, particularmente as de econometria (CHATFIELD, 2004). Processos de médias móveis são sempre estacionários para quaisquer valores de  $\theta_k$ .

Quando as observações de uma série temporal se ajustam ao modelo de médias móveis de primeira ordem MA(1) elas são representadas empregando-se (2.5) e considerando-se  $\theta_k = 0$  para  $k > 1$  além de  $\phi_k = 0, \forall k$ . O modelo, cujo parâmetro é  $\theta$ , é caracterizado pelas seguintes propriedades:

$$E(X_t) = \mu \quad (2.16)$$

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \sigma_e^2 (1 + \theta^2) \quad (2.17)$$

$$\gamma_1 = -\theta \sigma_e^2 \quad (2.18)$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1 + \theta^2} \quad (2.19)$$

$$\gamma_k = \rho_k = 0 \quad \text{para } k \geq 2 \quad (2.20)$$

Neste modelo o maior valor que  $\rho_1$  pode assumir é 0,5 para  $\theta = -1$  e o menor valor é -0,5 para  $\theta = +1$  (o valor da correlação para  $\theta$  negativo é igual ao valor da correlação para  $\theta$  positivo, porém com sinal trocado).

A equação definidora do modelo de médias móveis de segunda ordem MA(2) é obtida usando-se (2.5) com  $(\theta_1, \theta_2) \neq 0, \theta_k = 0$  para  $k > 2$  além de  $\phi_k = 0, \forall k$ . Os parâmetros do modelo são  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , a média é dada por (2.16) e as demais propriedades são:

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \sigma_e^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \quad (2.21)$$

$$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma_e^2 \quad (2.22)$$

$$\gamma_2 = -\theta_2 \sigma_e^2 \quad (2.23)$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \quad (2.24)$$

$$\gamma_k = \rho_k = 0 \quad \text{para } k \geq 3 \quad (2.25)$$

### 2.4.3 O modelo autoregressivo e de médias móveis de primeira ordem ARMA(1,1)

O modelo autoregressivo e de médias móveis de primeira ordem é equivalente ao modelo AR(1) com um erro aleatório adicional (BOX; JENKINS; REINSEL, 1994) e considerado apropriado em muitas aplicações para representar as observações do processo. A equação do modelo ARMA(1,1) é obtida de (2.5) com  $\phi_k = \theta_k = 0$  para  $k > 1$ . Neste modelo, as esperanças do produto da variável de interesse e os resíduos são dadas por  $E(e_t X_t) = \sigma_e^2$  e  $E(e_{t-1} X_t) = (\phi - \theta) \sigma_e^2$ , os parâmetros são  $\phi$  e  $\theta$ , a média é dada pela expressão (2.6) e as demais propriedades são:

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \frac{(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2} \sigma_e^2 \quad \text{para } k = 0 \quad (2.26)$$

$$\rho_k = \frac{(1 - \phi\theta)(\phi - \theta)}{1 + \theta^2 - 2\phi\theta} \quad \text{para } k \geq 1 \quad (2.27)$$

$$\gamma_k = \frac{(1 - \theta\phi)(\phi - \theta)}{1 - \phi^2} \phi^{k-1} \sigma_e^2 \quad \text{para } k \geq 1 \quad (2.28)$$

A condição de estacionariedade neste caso é a mesma já vista para o modelo AR(1).

## 2.5 CONSTRUÇÃO DO MODELO

Encontrar modelos apropriados para séries temporais não é um trabalho trivial e para fazê-lo segue-se normalmente um processo de múltiplas etapas, que pode ser repetido inúmeras vezes, consistindo na identificação, ajuste e diagnóstico do modelo.

Ao fazer a identificação do modelo tenta-se satisfazer o princípio da parcimônia, isto é, o modelo selecionado deve requerer o menor número possível de parâmetros que representem adequadamente os dados. O comportamento das funções autocorrelação e autocorrelação parcial versus o *lag*  $k$  (apresentado em gráficos

chamados de correlogramas) tem importante papel na identificação do modelo conforme indicado no Quadro 2.1, adaptado de Morettin e Toloi (2004).

Quadro 2.1 – Identificação de modelos por meio de correlogramas

MODELO	FAC	FACP
AR(p)	decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas, infinita em extensão	$\phi_{kk} \neq 0$ para $k \leq p$ e $\phi_{kk} = 0$ para $k > p$ ; ou seja similar a FAC do processo MA(q)
MA(q)	apresenta um corte após o lag q, portanto a função é finita	similar a FAC do processo AR(p)
ARMA(p,q)	decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidas, infinita em extensão	comporta-se como a FACP de um processo MA puro

Além do uso dos correlogramas da FAC e FACP, outros métodos, principalmente aqueles baseados em uma função penalizadora, podem ser usados para identificação do modelo. Entre estes métodos encontram-se, por exemplo, o critério de informação de Akaike e o critério do erro do preditor final (*final predictor error*), excluídos do escopo desta tese, onde se abordam apenas modelos de baixa ordem, usualmente identificados por análise gráfica.

Algumas regras práticas podem ser úteis ao se identificar o modelo:

- ✓ Evitar aumentar desnecessariamente a ordem dos parâmetros do modelo (*overfitting*);
- ✓ Quando isto não for possível, não aumentar simultaneamente a ordem dos componentes MA e AR do modelo;
- ✓ Desenvolver um modelo na direção sugerida pela análise dos correlogramas das observações e também dos resíduos.

Na etapa de ajuste do modelo procura-se pela melhor estimativa do valor do parâmetro. Em geral, esta estimação é obtida por métodos iterativos usando-se com frequência o método dos mínimos quadrados ou variações deste, para maiores detalhes veja Cryer (1986, p. 125-159). As estimativas das propriedades do modelo, isto é, média, variância, autocorrelação e autocovariância são obtidas pela substituição dos

parâmetros estimados nas fórmulas vistas na seção 2.4. Há vários aplicativos estatísticos que auxiliam na tarefa de estimação. Nesta tese fez-se uso do pacote estatístico MINITAB<sup>®</sup> (2003) para as aplicações e exemplos apresentados.

Na etapa de diagnóstico analisa-se a qualidade do modelo que foi especificado e estimado, ou seja, quão bem ele se ajusta aos dados e se as hipóteses do modelamento estão satisfeitas (CHATFIELD, 2004). Na etapa prévia de estimação foram obtidos os resíduos do modelo, que em analogia com a análise de regressão, são expressos como a diferença entre os valores observados e previstos. Se o modelo foi apropriadamente especificado e seus parâmetros bem estimados, os resíduos encontrados serão IID e se ajustarão a uma distribuição  $N(0, \sigma_e)$ , portanto, quando plotados seqüencialmente num gráfico de linha espera-se que estejam dispersos ao redor de uma linha zero sem apresentar quaisquer tendências. Além de ser importante observar a autocorrelação dos resíduos em *lags* individuais, é útil aplicar um teste estatístico que leve em consideração sua magnitude como um grupo. Com esta finalidade e tendo como origem o teste de Portmanteau, Ljung, Box e Pierce (1978) propuseram a seguinte estatística:

$$Q(K) = N(N + 2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{N - k} \quad (2.29)$$

Eles mostraram que se o modelo ARMA(p,q) estiver corretamente estimado, então, para valores de  $N$  suficientemente grandes,  $Q$  terá uma distribuição de Qui-quadrado com  $(K-p-q)$  graus de liberdade (MORETTIN; TOLOI, 2004, p. 204), onde  $K$  é o último *lag* sobre o qual será calculada a estatística.

## 2.6 ANÁLISE DE INTERVENÇÃO

Seja uma determinada série estacionária, representativa da variável de interesse  $Y_t$  de um processo, representada por um modelo autoregressivo e de médias móveis (ARMA) dado por  $\phi(B)Y_t = \theta(B)e_t$  onde  $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$  é um polinômio autoregressivo de ordem  $p$ ;  $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$  é um

polinômio de médias móveis de ordem  $q$ ;  $B$  é o operador retroativo ou de atraso e  $e_t$  é uma seqüência de erros aleatórios IID com média zero e variância  $\sigma_e^2$ . Uma forma alternativa de representar este modelo é:

$$Y_t = f(t) + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} e_t \quad (2.30)$$

onde  $Y_t$  e  $f(t)$  representam respectivamente a série “contaminada” por valores atípicos e as perturbações nela presentes, tais como dados discrepantes ou perturbações na média do processo. A função  $f(t)$  é expressa por:

$$f(t) = \omega_0 \frac{\omega(B)}{\kappa(B)} \zeta_t^{(d)} \quad (2.31)$$

onde  $\zeta_t^{(d)} = 1$  se  $t=d$  e  $\zeta_t^{(d)} = 0$  se  $t \neq d$ ;  $\omega(B)$  e  $\kappa(B)$  são polinômios de atraso que descrevem o efeito dinâmico da perturbação em  $y_t$  e  $\omega_0$  representa o impacto inicial da perturbação. Quando a razão  $\frac{\omega(B)}{\kappa(B)} = 1$  a perturbação é chamada aditiva (PA) e

afeta a série somente no tempo  $t=d$ . Por outro lado, quando  $\frac{\omega(B)}{\kappa(B)} = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$  a perturbação é chamada de inovação (PI), afeta a série no tempo  $t=d$  e a partir daí diminui gradativamente de magnitude de acordo com a memória do modelo.

Aplicando-se (2.31) em (2.30) encontra-se:  $\frac{\phi(B)}{\theta(B)} Y_t = \frac{\phi(B)\omega(B)}{\theta(B)\kappa(B)} \zeta_t^{(d)} \omega_0 + e_t$  que é

equivalente a uma equação de regressão linear dada por  $y_t = \omega_0 x_t + e_t$  onde

$y_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} Y_t$  e  $x_t = \frac{\phi(B)\omega(B)}{\theta(B)\kappa(B)} \zeta_t^{(d)}$ . Desta forma, a grandeza  $\omega_0$  pode ser estimada

usando-se  $\hat{\omega}_0 = \frac{\sum_{t=1}^N y_t x_t}{\sum_{t=1}^N x_t^2}$  com  $\sigma_{\hat{\omega}}^2 = \frac{\sigma_e^2}{\sum_{t=1}^N x_t^2}$  onde  $N$  representa o número

considerado de amostras na série. A razão entre as grandezas  $\hat{\omega}_0$  e  $\sigma_{\hat{\omega}}^2$  determina a estatística de intervenção,  $\lambda_i$ , que permite estimar e distinguir o tipo de perturbação

presente na série. Seja o polinômio  $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots = \phi(B)/\theta(B)$ ; segue-se

que  $\theta(B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = \phi(B)$  e a partir desta igualdade obtêm-se os



coeficientes  $\pi_j$ . Por exemplo, para um processo ARMA(1,1):

$$(1 - \phi B) = (1 - \theta B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = 1 - (\pi_1 + \theta)B - (\pi_2 - \theta\pi_1)B^2 - (\pi_3 - \theta\pi_2)B^3 - \dots$$

e igualando-se os coeficientes de potências iguais em  $B$  encontram-se:

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_1 = \phi - \theta, \quad \pi_2 = \theta\pi_1 \quad \text{e} \quad \pi_j = \theta\pi_{j-1}$$

As expressões particularizadas para obtenção dos valores, disponíveis em Morettin e Toloi (2004), são:

perturbação aditiva:

$$\omega_0 = \hat{\omega}_{PA} = \frac{e_d - \sum_{j=1}^{N-d} \pi_j e_{d+j}}{\sum_{j=0}^{N-d} \pi_j^2} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{\omega}^2 = \sigma_{PA}^2 = \frac{\sigma_e^2}{\sum_{j=0}^{N-d} \pi_j^2} \quad (2.33)$$

$$\lambda_i = \lambda_{PA} = \frac{\hat{\omega}_{PA} \left( \sum_{j=0}^{N-d} \pi_j^2 \right)^{1/2}}{\sigma_e} \quad (2.34)$$

perturbação de inovação:

$$\varpi_0 = \hat{\omega}_{PI} = e_d \quad (2.35)$$

$$\sigma_{\omega}^2 = \sigma_{PI}^2 = \sigma_e^2 \quad (2.36)$$

$$\lambda_i = \lambda_{PI} = \frac{\hat{\omega}_{PI}}{\sigma_e} \quad (2.37)$$

Sob a hipótese nula de ausência de dados atípicos na série, a estatística de intervenção é distribuída assintoticamente como  $N(0,1)$  e esta hipótese é rejeitada quando  $|\lambda_i|$  excede um valor crítico “C”, tipicamente pré-estabelecido a partir de um valor de erro tipo I fixo. Quando o dado discrepante identificado for do tipo aditivo deve-se substituí-lo por meio da seguinte expressão:

$$\tilde{Y}_t = Y_t - \hat{\omega}_{PA} I_t^d \quad (2.38)$$

onde:

$$I_t^d = \begin{cases} 0, & t \neq d \\ 1, & t = d \end{cases}$$

Se por outro lado a observação atípica for do tipo inovação deve ser substituída de acordo com:

$$\tilde{Y}_t = Y_t - \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} \hat{\omega}_{PI} I_t^d \quad (2.39)$$

onde:

$$\frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} = \frac{1 - \hat{\theta}B}{1 - \hat{\phi}B}$$

e

$$B = \frac{Y_{t-1}}{Y_t}$$

Na prática, os parâmetros do modelo são desconhecidos, bem como o instante  $d$  de ocorrência de uma observação atípica. Nestas circunstâncias, um método para identificar dados discrepantes e ajustar um modelo apropriado (CHANG; TIAO; CHEN, 1988) compreende as seguintes etapas:

- (i) Ajustar o modelo para a série original supondo que não existam observações atípicas e calcular os resíduos do modelo;
- (ii) Usando as expressões (2.32) a (2.37), calcular os valores da estatística de intervenção para dados atípicos do tipo inovação e aditivo. Comparar os valores absolutos obtidos com o valor limite pré-estabelecido  $C$  e, se necessário, substituir as observações discrepantes usando as expressões (2.38) e (2.39), estimando a seguir a nova variância do resíduo;
- (iii) Com os resíduos e a variância obtidos na etapa (ii), recalculer as estatísticas de intervenção. Repetir a etapa (ii) até que todas as observações atípicas estejam identificadas, mantendo, contudo, inalterada a estimativa inicial de  $\hat{\pi}(B)$ ;
- (iv) Suponha que tenham sido identificadas preliminarmente  $g$  observações atípicas nos instantes  $d_1, d_2, \dots, d_g$ . Considerando conhecidos estes instantes de tempo, pode-se simultaneamente estimar os parâmetros da série temporal, utilizando o modelo:

$$Y_t = \sum_{i=1}^g \omega_i v_i(B) I_t^{d_i} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} e_t \quad (2.40)$$

com  $v_i(B) = 1$  para observação atípica aditiva e  $v_i(B) = \left( \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \right)$  para observação atípica de inovação no instante  $d_i$ .

(v) A partir deste novo modelo, faz-se uma nova estimativa da variância do resíduo e repetem-se os passos de (ii) a (iv), até que todas as observações atípicas sejam identificadas e seus impactos estimados simultaneamente, obtendo-se finalmente o

modelo ajustado dado por  $Y_t = \sum_{j=1}^g \hat{\omega}_j v_j(B) I_t^{d_j} + \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} e_t$  no qual as grandezas

$\hat{\omega}_j$ ,  $\hat{\phi}(B)$  e  $\hat{\theta}(B)$  são estimadas na iteração final.

Atienza, Tang e Ang (1998) propuseram o uso da estatística da análise de intervenção para detectar dados discrepantes e desajustes da média no monitoramento de processos autocorrelacionados. Os autores utilizaram o modelo AR(1) para representar as observações do processo e mostraram que o método apresenta uma boa eficiência quando a autocorrelação é fortemente positiva e no mínimo 200 observações são usadas para análise.

### 3 GRÁFICOS DE CONTROLE

#### 3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS - PROCESSOS INDEPENDENTES

##### 3.1.1 Causas aleatórias e causas especiais de variação

Uma das maneiras mais efetivas para melhorar a qualidade é direcionar recursos e esforços no sentido de reduzir a variação. A variabilidade em um processo reflete as diferenças existentes entre as unidades produzidas. Parte desta variabilidade é inerente ao processo e advem de pequenas perturbações ou causas aleatórias. Na maioria das vezes, a presença de causas aleatórias não demanda qualquer reação e, quando o processo apresenta apenas esta variabilidade natural, diz-se que ele está em estado de controle estatístico ou simplesmente sob controle. Processos sob controle têm resultados previsíveis, dentro de limites estatísticos estabelecidos por meio de um conjunto preliminar de dados. A este respeito, encontra-se em Shewhart (1931, p. 6) a seguinte citação:

*... a phenomenon will be said to be controlled when, through the use of past experience, we can predict, at least within limits, how the phenomenon may be expected to vary in the future. Here it is understood that prediction within limits means that we can state, at least approximately, the probability that the observed phenomenon will fall within the given limits.*

Entretanto, um processo pode sofrer perturbações maiores cujo efeito é alterar os parâmetros da distribuição da variável aleatória  $X$ , seja afastando sua média do valor-alvo e/ou aumentando sua variabilidade. Esta perturbação é gerada por uma causa especial. As causas especiais de variação não são parte do processo e ocorrem acidentalmente, porém quando atuam provocam forte impacto. Reconhecer e remover causas especiais para melhorar o processo é tipicamente uma função do operador que deve estar instruído e capacitado a realizar tal tarefa. Muitas vezes, causas aleatórias (ou causas comuns) são erroneamente diagnosticadas e tratadas como especiais, o que leva a variações ainda maiores no processo. Esta prática, chamada “*tampering*”, resulta em frustração, desperdício de tempo e dinheiro. A previsibilidade de um processo cuja

variabilidade provém apenas de causas aleatórias é a base dos gráficos de controle, em outras palavras, uma das finalidades principais da carta de controle é distinguir causas especiais de causas comuns de variação.

### **3.1.2 Fases de implementação da carta de controle**

A implementação de uma carta de controle é normalmente feita em duas etapas:

- (i) Fase I (ou controle retrospectivo) - amostras em número suficiente são analisadas quanto a presença de causas especiais agindo sobre o processo e possível correlação entre valores consecutivos da característica de interesse. Se os dados são independentes e o processo está em controle, o conjunto de dados pode ser utilizado para estabelecer os limites de controle;
- (ii) Fase II (ou controle prospectivo) - os limites determinados na fase I são projetados para comparação com os dados futuros de sorte a determinar se o processo permanece ou não sob controle (FALTIN; MASTRANGELO; RUNGER; RYAN, 1997).

### **3.1.3 Subgrupos racionais**

Segundo Wheeler e Chambers (1992) a organização das observações em subgrupos racionais é norteadas por cinco princípios:

- (i) Nunca agrupar conscientemente observações originárias de diferentes fluxos do processo, pois isto pode mascarar a presença de causas especiais afetando o poder de detecção do gráfico;
- (ii) Minimizar a variação *dentro* de cada subgrupo para aumentar a sensibilidade da carta de controle às variações existentes entre os subgrupos, isto é, as observações que irão constituir a amostra devem ser coletadas no menor intervalo possível de tempo entre elas;

- (iii) Maximizar a oportunidade para variação *entre* os subgrupos, isto é, manter intervalos longos entre as amostras para permitir que todos os fatores de variação existentes no ambiente do processo encontrem oportunidade para se manifestar;
- (iv) Sempre que possível adotar subgrupos com tamanho de amostra maior que a unidade. Ao tomar a média das observações, reduz-se o nível de “ruído” o que torna mais fácil detectar diferenças entre subgrupos;
- (v) Elaborar definições operacionais para o procedimento de amostragem, e procurar mantê-las como parte da rotina de monitoramento.

### 3.1.4 O gráfico de $\bar{X}$ para processos com observações independentes

O gráfico de  $\bar{X}$  para dados independentes é usado para monitorar a estabilidade da média do processo quando a característica de qualidade de interesse é uma grandeza mensurável representada pelo modelo de Shewhart dado por:

$$X_t = \mu + e_t \quad \text{para } t=1,2,3,\dots \quad (3.1)$$

O monitoramento é realizado retirando-se amostras de tamanho  $n$  a cada intervalo de tempo  $h$ . Para cada amostra calcula-se a média  $\bar{X}$  e plota-se o valor encontrado em um gráfico que possui os limites de controle superior (LSC) e inferior (LIC) posicionados a  $k$  desvios-padrão da média, geralmente  $k=3$ . Se os pontos marcados no gráfico distribuem-se de modo aleatório ao redor da linha média (LM), localizada na média de  $\bar{X}$ , não há necessidade de intervenção. A linha média e os limites de controle do gráfico devem ser determinados quando o processo está sob controle, isto é:

$$LSC = \mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} \quad (3.2)$$

$$LM = \mu_0 \quad (3.3)$$

$$LIC = \mu_0 - k\sigma_{\bar{X}} \quad (3.4)$$

onde:

$$\mu_0 = \mu_{\bar{X}} = \mu_x \quad (3.5)$$

e:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (3.6)$$

são respectivamente a média e o desvio-padrão com o processo sob controle.

A abertura dos limites proposta por Shewhart,  $k=3$ , faz com que, enquanto o processo estiver sob controle, raramente os pontos marcados caiam na região de ação do gráfico (acima do LSC ou abaixo do LIC), minimizando a chance de intervenções equivocadas no processo. Um processo ajustado e sem influências de causas especiais é exemplificado na Figura 3.1 (adaptada de MONTGOMERY, 2001, p. 134).

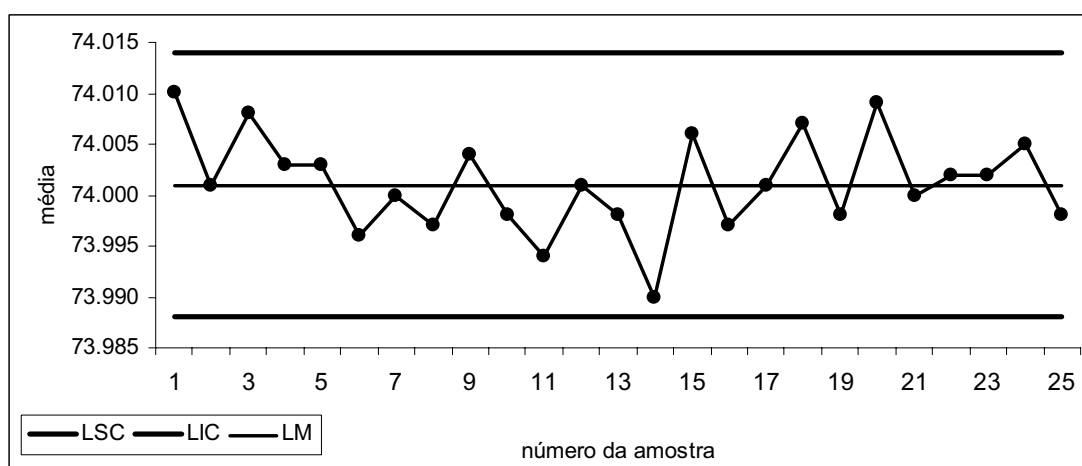


Figura 3.1 – Gráfico de controle (processo estável e ajustado)

Quando, contudo, um dos pontos cai na região de ação como aconteceu com o 15º valor de  $\bar{X}$ , (veja Figura 3.2, adaptada de COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005, p. 29), o processo provavelmente está sob influência de alguma causa especial, que deve ser investigada e corrigida.

O planejamento dos gráficos de controle é função de três parâmetros: o tamanho das amostras  $n$ , o intervalo de tempo entre amostras  $h$  e a abertura dos limites de controle  $k$ . Não existe uma razão imperativa para que os limites estejam posicionados a três desvios-padrão da média. Esta abertura é considerada uma variável de decisão e selecionada por meio de um projeto estatístico-econômico. A escolha do plano de amostragem e da abertura dos limites de controle é apoiada pelo conhecimento do desempenho do gráfico que consiste em quantificar a capacidade do esquema de controle para detectar perturbações no processo.

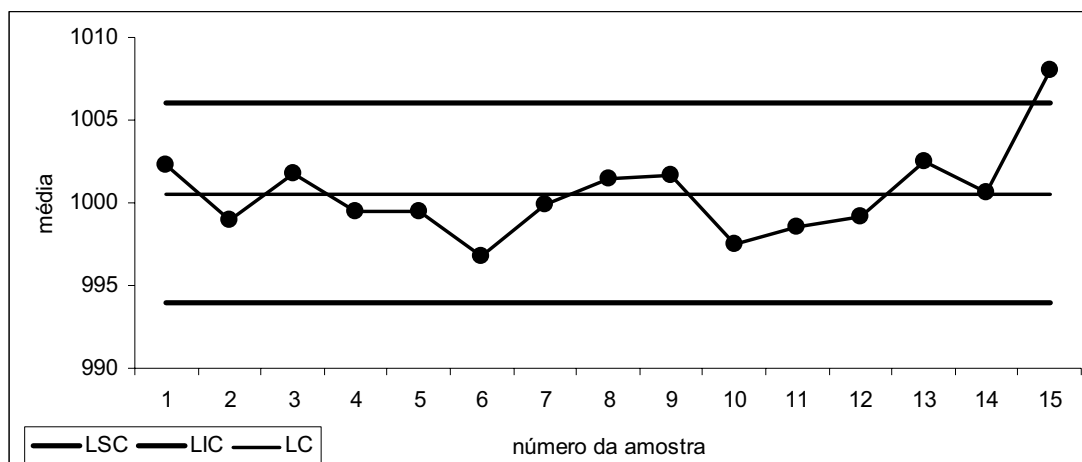


Figura 3.2 – Gráfico de controle (processo instável)

A teoria descrita a seguir, para determinação do desempenho do gráfico de controle, está disponível em Costa, Epprecht e Carpinetti (2005).

O gráfico de  $\bar{X}$ , quando em uso no monitoramento do processo, pode ser visto como uma seqüência de testes de hipóteses que se repetem a cada amostra. Nestes testes, as hipóteses são sempre as mesmas, ou seja:

$H_0$ :  $\mu = \mu_0$ , isto é, processo sob controle (ou livre de causas especiais);

$H_1$ :  $\mu \neq \mu_0$ , isto é, processo fora de controle (ou sobre a influência de causas especiais).

A hipótese  $H_0$  é aceita como verdadeira quando o valor de  $\bar{X}$  estiver dentro da região delimitada pelos limites de controle e é falsa quando  $\bar{X}$  cair na região de ação do gráfico. Se o processo estiver em controle, ( $\mu = \mu_0$ ),  $\alpha$  representa o risco de considerar-se erroneamente o processo fora de controle, caracterizando-se um alarme falso. O erro associado a este risco é chamado de tipo I. Se o processo estiver fora de controle, ( $\mu \neq \mu_0$ ),  $\beta$  representa o risco de considerar-se erroneamente o processo sob controle, ou o risco da não-detecção, cujo erro associado é denominado tipo II. As probabilidades de alarme falso ( $\alpha$ ) e de não-detecção ( $\beta$ ) são respectivamente expressas por:

$$\alpha = \Pr[\bar{X} > LSC_{\bar{X}} \text{ ou } \bar{X} < LIC_{\bar{X}} \mid \mu = \mu_0] \quad (3.7)$$

$$\beta = \Pr[LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} \mid \mu \neq \mu_0] \quad (3.8)$$



e o poder do gráfico de controle, (Pd), é definido como a probabilidade de detecção, dado por:

$$Pd = 1 - \beta \quad (3.9)$$

O alarme falso é um sinal errôneo que o processo se desajustou quando na realidade ele está em controle. A ocorrência de um alarme falso é ilustrada na Figura 3.3 (encontrada em COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005, p. 65).

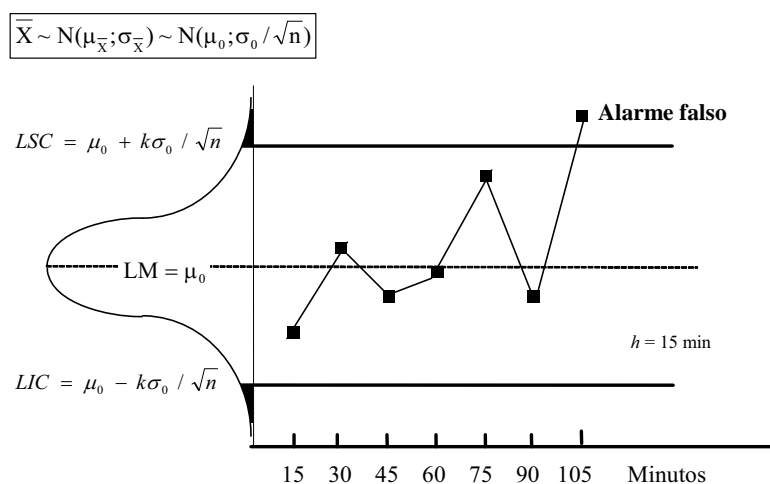


Figura 3.3 – Gráfico de  $\bar{X}$  - ocorrência de um alarme falso

Para calcular o risco  $\alpha$  é necessário conhecer a distribuição da variável aleatória  $\bar{X}$ . Na Figura 3.3, ainda que a variável  $X$  não seja normalmente distribuída, pode-se admitir pelo Teorema Central do Limite, que a distribuição da variável  $\bar{X}$  seja normal. Pode-se definir uma nova variável  $Z$ , resultante da padronização da variável  $\bar{X}$ , por meio da expressão:

$$Z = (\bar{X} - \mu_0) / \sigma_{\bar{X}} \quad (3.10)$$

Esta nova variável tem distribuição normal com média  $\mu_z = 0$  e desvio-padrão  $\sigma_z = 1$ . Como os limites de controle são usualmente estabelecidos a  $\mu_0 \pm 3\sigma_0 / \sqrt{n}$ , a probabilidade de um valor  $\bar{X}$  fora da região em controle é obtida pela equação (3.7), isto é,  $\alpha = \Pr[\bar{X} > LSC_{\bar{X}}] + \Pr[\bar{X} < LIC_{\bar{X}}]$ , ou seja:

$$\alpha = \Pr\left[Z > \frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}\right] + \Pr\left[Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}\right] \quad (3.11)$$

Quando o processo está sob controle,  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_0 / \sqrt{n}$ , portanto a expressão (3.11) se simplifica a:

$$\alpha = \Pr[|Z| > 3] \quad (3.12)$$

A probabilidade  $\Pr[|Z| > z]$  é dada pela distribuição normal padrão. O risco  $\alpha$  não é afetado pelo tamanho da amostra,  $n$ . Ele depende apenas do coeficiente que governa a abertura dos limites de controle,  $k$ , ou seja, afastando os limites de controle em  $k\sigma_{\bar{X}}$  da linha média, o risco  $\alpha$  se generaliza para:

$$\alpha(k) = \Pr[|Z| > k] \quad (3.13)$$

Quando o processo está sob influência de uma causa especial (hipótese  $H_0$  é falsa) o sinal dado pelo gráfico a esta condição pode não ser imediato, especialmente se o deslocamento da média for pequeno. Normalmente este deslocamento é expresso em unidades do desvio-padrão da variável  $X$ , assim o novo valor da média,  $\mu_1$ , é dado por  $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ , portanto:

$$\delta = (\mu_1 - \mu_0) / \sigma_0 \quad (3.14)$$

A Figura 3.4, (retirada de COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005, p. 70), ilustra a inércia da resposta ao deslocamento da média, pois neste caso o sinal só é dado quando o quinto valor de  $\bar{X}$  é levado ao gráfico.

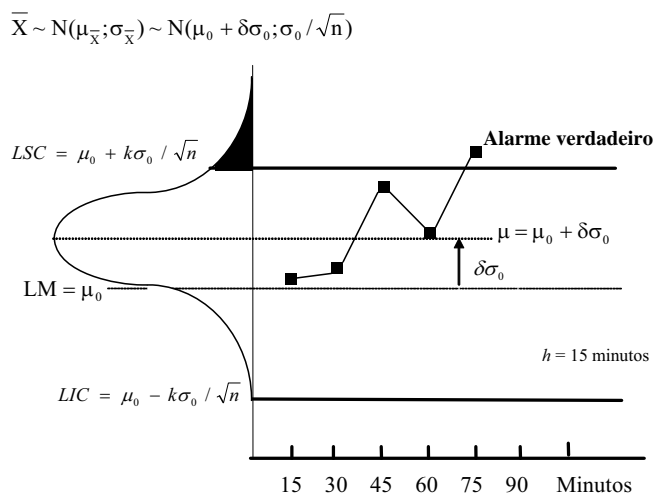


Figura 3.4 – Gráfico de  $\bar{X}$  - ocorrência de um alarme verdadeiro

Neste exemplo, a hipótese  $H_0$  é falsa, pois a média da variável  $\bar{X}$  foi deslocada de  $\mu_0$  para  $\mu_0 + \delta\sigma_0$ .

Para calcular o poder do gráfico (Pd), utilizam-se as expressões (3.8) e (3.9). A probabilidade de um valor  $\bar{X}$  estar acima do limite superior de controle é dada por:

$$\Pr[\bar{X} > LSC] = \Pr[Z > Z_{LSC}] = \Pr\left[Z > \frac{\mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\sigma_{\bar{X}}}\right] = \Pr[Z > k - \delta\sqrt{n}]$$

E analogamente a probabilidade de um valor  $\bar{X}$  estar abaixo do limite inferior de controle, é dada por:

$$\Pr[\bar{X} < LSC] = \Pr[Z < Z_{LIC}] = \Pr[Z < -k - \delta\sqrt{n}]$$

Como  $\Pr[Z > z] = \Pr[Z < -z]$  segue-se que  $\Pr[Z > LSC] = \Pr[Z < -LSC]$  resultando portanto:

$$Pd = \Pr[Z < -k + \delta\sqrt{n}] + \Pr[Z < -k - \delta\sqrt{n}] \quad (3.15)$$

Os valores das probabilidades  $\Pr[Z < z]$  são obtidos na tabela da distribuição normal acumulada.

Seja  $S$  o número de amostras que antecedem um alarme (incluindo a amostra que gera o alarme). Ele segue uma distribuição geométrica de parâmetro  $p$  dada por:

$$\Pr[S = d] = p(1-p)^{d-1}, d = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

A média da distribuição geométrica é igual a  $1/p$ .

Quando a hipótese  $H_0$  for verdadeira,

$$p = \alpha = \Pr\left[Z > \frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}\right] + \Pr\left[Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}\right],$$

e o número médio de amostras até um alarme falso é igual a:

$$NMA_0 = E(S | \mu = \mu_0) = 1/\alpha \quad (3.17)$$

Logo, com limites 3-sigma, é de se esperar em média um alarme falso a cada  $0,0027^{-1} = 370,4$  pontos no gráfico.

De modo análogo, quando a hipótese  $H_0$  for falsa,  $p = Pd = \Pr[Z < -k + \delta\sqrt{n}] + \Pr[Z < -k - \delta\sqrt{n}]$ , e o número médio de amostras que antecedem um alarme verdadeiro é igual a:

$$NMA = E(S | \mu \neq \mu_0) = 1/(Pd) \quad (3.18)$$

Para exemplificar o cálculo do Pd, considere-se novamente a Figura 3.4, onde  $S=5$ . Supondo-se  $k=3,00$ ;  $\delta=1,00$  e  $n=4$  e substituindo-se estes valores na expressão (3.15) encontramos  $Pd=0,1587$ , logo são necessárias em média  $0,1587^{-1} = 6,3$  amostras de tamanho 4 para detectar um deslocamento de um desvio-padrão na média. Voltando a esta expressão, nota-se que o poder de detecção cresce quando o tamanho da amostra aumenta. Assim, o esforço maior em inspeção traz em retorno maior rapidez na detecção (desde que os intervalos de amostragem sejam constantes) e redução no eventual prejuízo advindo de operar o processo fora de controle.

## 3.2 REVISÃO DA LITERATURA

### 3.2.1 Introdução

Faltin, Mastrangelo, Runger e Ryan (1997) classificaram em três grupos as principais estratégias de monitoramento de processos autocorrelacionados:

- Alargar os limites de controle do gráfico de modo que a região delimitada por eles possa conter o comportamento não aleatório peculiar da autocorrelação.
- Utilizar um dispositivo estatístico com propriedades independentes do modelo autocorrelacionado (“*model-free approach*”).
- Projetar o dispositivo estatístico a partir da identificação e ajuste do modelo de séries temporais que representa as observações do processo (“*model-based approach*”). E, recentemente, uma nova direção de pesquisa começou a ser explorada:
- Utilizar gráficos adaptativos.

A literatura relevante sobre cada uma destas estratégias está resumida nas seções 3.2.2 a 3.2.5.

### 3.2.2 Gráficos com limites de controle alargados

Vasilopoulos e Stamboulis (1978) adequaram o gráfico de  $\bar{X}$  para uso no monitoramento de processos AR(2) ou AR(1), em que a correlação está presente dentro do subgrupo mas as médias são independentes. Os autores apresentaram ábacos que permitem modificar os fatores tradicionais usados na determinação dos limites de controle de modo a evitar a alta taxa de alarmes falsos.

Limites alargados foram também considerados por Cryer e Ryan (1990) que compararam as propriedades de  $S/c_4$  e  $\overline{MR}/d_2$  como estimadores de variabilidade em carta de valores individuais e concluíram que ambos são viesados para processos com dependência em série. Entretanto, o estimador baseado no desvio-padrão do processo seria mais indicado que o baseado na amplitude móvel, pois seu viés tende a zero quando  $n$  tende a infinito.

Curiosamente, na mesma época, Yang e Hancock (1990), em pesquisa independente de Cryer e Ryan (1990), sugeriram um estimador análogo para o gráfico de  $\bar{X}$  em processos com dependência em série. Neste caso, o desvio-padrão da média

seria expresso por  $S_{\bar{X}} = \left( \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 / (k-1) \right)^{1/2}$  e os limites passariam a ser dados

por  $\bar{\bar{X}} \pm 3S_{\bar{X}}/c_4^*$  onde  $\bar{\bar{X}}$  é a média global,  $\bar{X}_i$  é a média do  $i$ -ésimo subgrupo,  $k$  é o número de subgrupos usado na estimação e  $c_4^*$  é o fator de correção baseado no número de subgrupos  $k$  e não mais no tamanho  $n$  do subgrupo, como tipicamente utilizado na determinação dos limites de ação do gráfico de  $\bar{X}$ . Este fator é encontrado em livros-texto (veja, por exemplo, COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005, p. 38).

Padgett, Thombs e Padgett (1992) avaliaram o desempenho do gráfico de médias quando as observações se ajustam a um modelo AR(1). Os resultados obtidos mostraram que a correlação, ainda que em níveis baixos, aumenta substancialmente o número de alarmes falsos.

Maragah e Woodall (1992) investigaram o efeito da autocorrelação sobre o gráfico de  $X$ , com os limites de controle baseados em amplitudes móveis e assumindo que as observações do processo pudessem ser representadas pelos modelos AR(1) e MA(1). Eles mostraram que quando as observações são autocorrelacionadas, segue-se que  $E(\bar{R}/d_2) = \sqrt{1-\rho}(\sigma_x)$  o que indica considerável viés neste estimador. Em particular, para autocorrelações positivas, o uso da amplitude móvel subestima a variabilidade do processo tornando pequena a abertura entre os limites, o que gera um número maior de alarmes falsos. Por outro lado, quando a característica do processo apresentar autocorrelação negativa, a abertura dos limites convencionais é demasiadamente grande e o poder do gráfico em sinalizar a causa especial é prejudicado.

Gilbert, Kirby e Hild (1997) deduziram a expressão que permite estimar a autocorrelação dentro do subgrupo mesmo quando uma seqüência consecutiva de medições da variável de interesse não esteja disponível. Embora isto possa ser útil numa análise preliminar dos dados de um processo, não oferece possibilidade de identificação do modelo. No mesmo artigo, os autores apresentam constantes que são utilizadas para compensação dos limites de controle dos gráficos  $\bar{X} \& S$  para processos AR(1), que levam a valores idênticos aos obtidos por Yang e Hancock (1990).

Lu e Reynolds Jr. (1999a) investigaram o esquema de EWMA para monitoramento da média de um processo positivamente autocorrelacionado cujas observações se ajustam a um modelo AR(1) com erro aleatório adicional. Eles compararam o uso das observações originais ao uso dos resíduos do modelo como estatística de controle e investigaram o efeito da estimação dos coeficientes do modelo sobre a eficiência do dispositivo. O gráfico de  $X$  foi incluído nas comparações como ponto de referência. Os autores mencionam que a constante  $\lambda$  do gráfico de EWMA deve ser escolhida de modo a se obter desempenho razoável em uma ampla gama de desajustes da média. Os resultados mostram que quando o nível de correlação do processo não é alto, os gráficos com observações e resíduos têm eficiências comparáveis; por outro lado quando a correlação é forte nenhum deles consegue detectar desajustes em tempo razoável (ainda assim, o gráfico com resíduos é mais

rápido para desajustes de grande magnitude e o gráfico com as observações originais para desajustes menores). Os autores também concluíram que os gráficos com observações ou com resíduos são muito sensíveis ao efeito de estimação de seus parâmetros os quais recomendaram que sejam obtidos a partir de um número significativo de amostras.

Lu e Reynolds Jr. (2001) investigaram o gráfico de CUSUM para monitoramento da média das observações de um processo representado pelo modelo AR(1) com erro aleatório adicional. Demonstraram que a taxa de alarmes falsos do gráfico de CUSUM depende do grau de autocorrelação e é necessário que os limites de controle sejam apropriadamente compensados. Na pesquisa estudou-se também o uso de resíduos do modelo como estatística de controle, constatando-se que neste caso o desempenho do gráfico é melhor quando a autocorrelação for alta e o interesse concentrado na detecção de grandes desajustes. Os gráficos de CUSUM foram comparados aos de observações individuais e de EWMA com as mesmas estatísticas de controle. Para autocorrelações relativamente baixas, as cartas de CUSUM e de EWMA foram muito melhores do que a de  $X$  para desajustes pequenos e moderados na média, entretanto, para autocorrelações moderadas a diferença entre os gráficos tornava-se insignificante. Concluiu-se que o poder dos gráficos de CUSUM e de EWMA é similar, portanto, a escolha entre eles poderia se basear na facilidade de uso e interpretação dos resultados. Quando a autocorrelação é alta, pequenos desajustes na média se confundem com o comportamento estocástico do modelo e dificultam a detecção, entretanto, os autores recomendam que gráficos de EWMA e de CUSUM não sejam otimizados para pequenos deslocamentos, pois isto penaliza severamente a eficiência na faixa de maiores desajustes.

Alwan (2000) reporta que na presença de autocorrelação positiva dentro dos subgrupos, a carta de médias com limites de controle calculados assumindo a independência das observações irá gerar mais alarmes falsos. Isto ocorre devido às duas principais influências advindas da dependência em série: (i) a variação observada dentro do subgrupo é pequena em relação à variação de longo prazo no processo e (ii) a variabilidade das médias dos subgrupos em relação a média do processo é maior do que seria observado se os dados fossem independentes. Em razão destas

circunstâncias, a estimativa de variabilidade fica subestimada e a região em controle fica equivocadamente reduzida. Quando a autocorrelação *entre* subgrupos é desprezível, os limites devem ser ajustados por meio do desvio-padrão apropriado (introduzido nesta tese como a expressão (2.1), p. 27) para levar em conta apenas a autocorrelação *dentro* do subgrupo. O autor enfatiza que nestas circunstâncias o comportamento resultante do efeito da autocorrelação é caracterizado como uma causa comum.

Sun e Xu (2004) estenderam a pesquisa de Gilbert, Kirby e Hild (1997) a processos representados pelo modelo AR(1) com erro aleatório adicional. Os autores apresentaram fatores de ajuste para compensação dos limites de gráficos  $\bar{X}$  &  $S$  e tabelas com os valores do NMA para diversos níveis de correlação.

Bisgaard e Kulahci (2005) apresentaram um estudo de caso com controle de temperatura de forno cerâmico. O responsável pelo monitoramento do processo utilizava o gráfico de observações individuais que por serem autocorrelacionadas geravam inúmeros alarmes falsos provocando frustração e descrédito. Os autores identificaram que medições de temperatura a intervalos regulares de 60 minutos se ajustavam a um processo AR(2). De modo claro e objetivo, mostram como a identificação do modelo, a estimativa dos coeficientes e a constatação de estacionariedade podem ser obtidas com uso do software Minitab®. Para reduzir a incidência de alarmes falsos, os limites são alargados para  $\bar{X} \pm 3S$ . Os autores argumentam que isto reduz o poder do gráfico, porém permite o uso da temperatura como a estatística de controle tornando a interpretação da carta mais simples ao usuário. Finalmente os autores usam os resíduos do modelo em um gráfico de EWMA, que indicam como o dispositivo apropriado ao monitoramento do processo.

### **3.2.3 Gráficos com propriedades independentes do modelo (*model-free approach*)**

Alwan e Radson (1992) mostraram que médias de amostras tomadas de um processo AR(1) se ajustam a um processo ARMA(1,1) cujos coeficientes podem ser



calculados a partir do valor do coeficiente da série original, do tamanho do subgrupo e do intervalo entre eles. Neste processo ARMA(1,1) o coeficiente da média móvel é muito menor do que o coeficiente autoregressivo, o que faz com que o processo na prática comporte-se como AR(1). Os coeficientes do modelo diminuem quando o intervalo entre os subgrupos aumenta, entretanto o erro tipo I continua a ser afetado pela correlação em série dentro do subgrupo. Os autores indicam recomendações de espaçamento entre subgrupos para que eles se tornem independentes, e neste caso limites de controle podem ser calculados por  $\pm 3\sigma_{\bar{x}}$  (usando-se a expressão (2.1) para calcular  $\sigma_{\bar{x}}$ ). O autor argumenta que limites de controle fixos serão inapropriados quando não houver independência entre os subgrupos.

Runger e Willemain (1996) consideraram ambientes com grande disponibilidade de dados provenientes do monitoramento da variável de interesse em processos autocorrelacionados e propuseram um dispositivo estatístico, que denominaram *batch-means charts* ou gráfico de médias aritméticas para lotes (GMAL). Este método não requer o modelamento dos dados do processo. A autocorrelação presente na série original é atenuada para  $\rho_1 \leq 0,10$  pela formação de subgrupos consecutivos com tamanho muito maior do que o convencional e suas médias aritméticas usadas como estatística de controle. O tamanho do subgrupo é dimensionado de acordo com o procedimento proposto por Fishman (1978), isto é, com o processo isento de causas especiais, considera-se inicialmente  $n=1$  e estima-se a autocorrelação de *lag* 1. Se a atenuação da dependência em série for insuficiente, repete-se o processo tantas vezes quanto necessário, dobrando-se o valor de  $n$  a cada etapa, até que a autocorrelação entre as médias alcance o valor proposto ( $\rho_1 \leq 0,10$ ), quando então se estabelece o número mínimo de observações no subgrupo. Os autores investigaram também a estratégia de amostragem na qual a dependência em série foi mitigada pela formação de subgrupos menores espaçados de  $w$  observações. Neste caso, a abertura dos limites foi ajustada para o mesmo número de alarmes falsos considerado com o emprego de subgrupos consecutivos.

A estatística de controle é dada por:

$$W_l = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{(l-1)(w+n)+i}, \quad l=1,2,\dots \quad (3.19)$$

onde  $W_l$  é a série derivada da série  $X_t$  original. Utilizando-se o modelo AR(1) para representar as observações do processo, as eficiências obtidas com as duas alternativas de amostragem foram comparadas. Na Tabela 3.1 são apresentados alguns resultados para determinadas combinações de tamanho de subgrupo e espaçamento.

Tabela 3.1 – Número médio de observações até o sinal (NMO) para algumas combinações  $w$  versus  $n$ ; Gráfico GMAL;  $NMO_0=21112$ ; modelo AR(1);  $\sigma_e = 1$  e  $\phi = 0,9$

$w$	$n$	$\delta/\sigma_x$					
		0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
0	57	2831	423	130	73	57	57
10	22	4882	883	239	95	39	32
19	5	7034	1602	464	173	48	28

Os autores concluíram que dispositivos com valores grandes de  $n$  e pequenos de  $w$  são mais eficientes para deslocamentos médios e pequenos da média, e inversamente, com subgrupos menores e espaçados a detecção é mais rápida para deslocamentos grandes da média.

Zhang (1998) propôs o gráfico denominado EWMAST, aplicável a processos estacionários em geral, que utiliza o valor do EWMA das observações originais como a estatística de controle. Neste dispositivo, os limites de controle são determinados analiticamente levando em conta apenas a autocorrelação da série de valores (isto é, de forma independente do modelo), estimada a partir de um conjunto histórico de no mínimo 100 observações com o processo sob controle. O autor comparou desempenhos entre o esquema proposto e os gráficos de resíduos, de observações com limites alargados e de EWMA com linha de centro móvel (MONTGOMERY; MASTRANGELO, 1991) para processos representados por modelos AR(1), AR(2) e ARMA(1,1). Os resultados encontrados em todos os casos demonstraram que o esquema proposto foi mais eficiente que os concorrentes no monitoramento de processos com autocorrelação positiva e moderada e em particular na detecção de desajustes de pequena e média magnitude na média.

Zhang (2006) demonstra que quando dados consecutivos de medição se ajustam a um processo de médias móveis, pode-se derivar a partir deles uma série formada por médias de subgrupos, organizados consecutiva ou espaçadamente. A pesquisa indica como obter combinações entre o tamanho do subgrupo e o número de observações entre eles, tal que as médias sejam independentes. Sabendo-se que a autocorrelação reduz a eficiência de dispositivos estatísticos de monitoramento da média, transformar a série original em dados não correlacionados contribui para melhorar a capacidade de detecção de mudanças no processo.

### **3.2.4 Gráficos com propriedades dependentes do modelo (*model-based approach*)**

A publicação de Berthouex, Hunter e Pallesen (1978) é a primeira referência encontrada sobre monitoramento de processos usando resíduos de modelos da família ARIMA como estatística de controle. Os autores abordam o processo de tratamento de efluentes em duas fábricas e modelam o logaritmo neperiano da demanda bioquímica de oxigênio.

Alwan e Roberts (1988) argumentam que a definição original de Shewhart não requer independência de observações sucessivas do processo, somente demanda que se possa prever como o processo é esperado variar no futuro. Eles empregam a expressão “em controle no amplo sentido da palavra” para caracterizar processos autocorrelacionados cujo comportamento é perfeitamente previsível, embora a média esteja sujeita a variações locais. Percebendo que processos autocorrelacionados são de natureza não-aleatória, propuseram ajustar suas observações a um modelo da família ARIMA e monitorar os valores previstos e os resíduos resultantes. Como estes resíduos apresentam as propriedades de independência e normalidade, eles são usados em um gráfico para observações individuais, com limites de controle calculados da maneira convencional, no qual é possível detectar causas especiais. Os valores previstos são plotados em um gráfico que não utiliza limites de controle, apenas informa a média local do processo e proporciona certo controle sobre tendências que

possam estar sendo filtradas pelo monitoramento com os resíduos.

Montgomery e Mastrangelo (1991) propuseram o uso do gráfico de EWMA como uma aproximação aos modelos ARIMA para ajustar as observações do processo. Este método de monitoramento, denominado EWMA com linha central móvel, baseia-se no fato que a média condicional de uma série temporal estacionária está constantemente mudando e a seqüência de valores de EWMA permite estimar estas mudanças. As informações sobre o estado de controle estatístico e a dinâmica do processo, representados respectivamente pelo EWMA e as observações originais, estão reunidas no mesmo gráfico. Como o EWMA com  $\lambda=1-\theta$  é a previsão um-passo-a-frente ótima para o modelo IMA(1,1) há equivalência entre os dois modelos. Assim, o EWMA pode ser usado como a linha central no gráfico e comparado com limites dinâmicos posicionados a  $\pm Z_{\alpha/2}\sigma_p$ , onde  $Z_{\alpha/2}$  é o ponto percentual  $\alpha/2$  superior na distribuição normal e  $\sigma_p$  é o desvio-padrão do processo. Os autores mostram como se determina  $\sigma_p$  e sugerem métodos para escolha da constante  $\lambda$  que melhoram a aproximação entre o modelo real e o modelo IMA(1,1).

Tseng e Adams (1994) demonstraram que quando o EWMA é usado como ferramenta de previsão alternativamente ao uso de modelos da família ARIMA, os resíduos obtidos serão independentes somente quando as observações do processo se ajustarem ao modelo IMA(1,1). Os autores adotam como referência um modelo AR(1) e, aplicando o EWMA para encontrar o valor previsto, usam os resíduos obtidos em gráficos de  $X$ , EWMA e CUSUM. As propriedades destes gráficos foram obtidas por simulação. Os resultados de  $NMA_0$  obtidos são erráticos e substancialmente diferentes do valor para o qual os limites haviam sido calibrados, especialmente nas cartas de EWMA e CUSUM. Os autores creditaram este comportamento ao fato dos resíduos não apresentarem a característica de independência.

Wardell, Moskowitz e Plante (1994) enfatizam que a estatística de controle a ser usada exerce influência no poder do gráfico. Em um processo ajustado ao modelo AR(1), no qual a causa especial desajusta a média  $\mu_0$  em  $\delta = \sigma_x$  no tempo  $t=1$ , a resposta dinâmica esperada das observações originais para  $t \geq 1$ , admitindo-se que não tenham ruído associado, será expressa por  $\mu_0 + \delta$ , entretanto a resposta dinâmica

esperada dos resíduos do modelo, a uma perturbação de mesma magnitude na média, será:

$$E(e_t) = \begin{cases} \mu_0 + \delta & \text{para } t = 1 \\ \mu_0 + \delta(1 - \phi) & \text{para } t > 1 \end{cases}$$

analogamente, se o modelo for ARMA(1,1) então:

$$E(e_t) = \begin{cases} \mu_0 + \delta & \text{para } t = 1 \\ \mu_0 + \delta \frac{1 - \phi}{1 - \theta} & \text{para } t > 1 \end{cases}$$

Ou seja, o resíduo atinge seu valor máximo no instante em que a causa especial se manifesta, e no instante seguinte já se reduz de um fator  $(1 - \phi)$  no modelo AR(1), ou  $(1 - \phi)/(1 - \theta)$  no modelo ARMA(1,1), do deslocamento inicial. Esta peculiaridade, chamada “*forecast recovery*”, origina o que Superville e Adams (1994) chamaram de “*window of opportunity*”, ou seja, se o dispositivo de controle não detectar o desajuste logo após a ocorrência da causa especial, a probabilidade de detecção com as próximas amostras é consideravelmente reduzida, em especial se a autocorrelação do processo for alta. Considerando um processo com  $\phi = 0,679$  e  $\sigma_e = 3,154$ , os autores mostraram que o dispositivo estatístico que usa observações originais como a variável de controle tem maior eficiência do que o gráfico construído com os resíduos do modelo, (veja Figura 3.5).

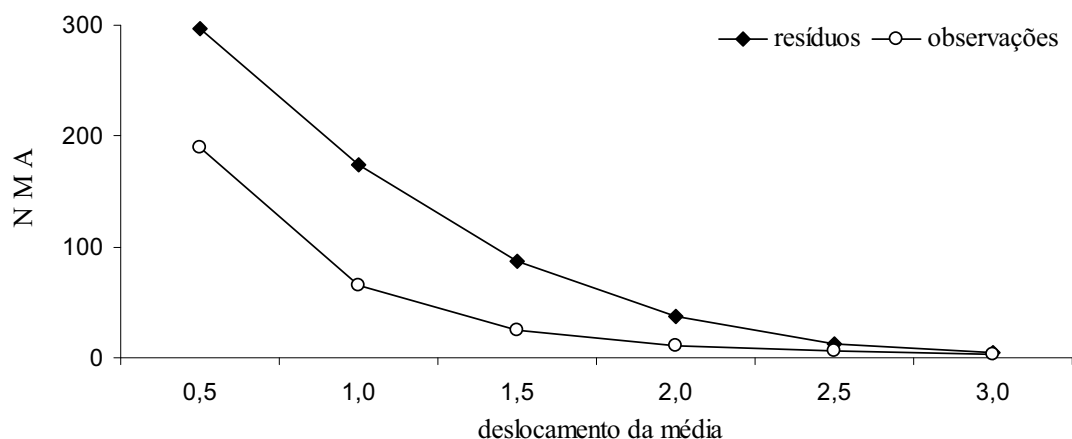


Figura 3.5 – NMAs com gráficos de controle utilizando observações e resíduos como estatística de controle, modelo AR(1),  $\phi = 0,679$

Um segundo fator de influência no desempenho de dispositivos estatísticos usados no monitoramento da média de processos com dependência em série é o sinal da autocorrelação. Nos processos negativamente autocorrelacionados em que os resíduos do modelo são a estatística de controle, quando a média se desajusta, o valor previsto se move em direção oposta ao valor observado, aumentando sobremaneira a diferença entre eles e conseqüentemente a chance de detecção. Quando as observações originais são a estatística de controle, observa-se o mesmo comportamento, porém em menor magnitude. Para ilustrar a diferença, os autores compararam valores de NMA com  $\delta = \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0 \text{ e } 2,5\}$  supondo gráficos com resíduos e observações originais para modelos ARMA(1,1) com parâmetros  $\phi = 0,475; \theta = -0,450$  e  $\rho_1 = 0,689$  e com parâmetros  $\phi = -0,475; \theta = 0,450$  e  $\rho_1 = -0,689$ , (veja Figura 3.6).

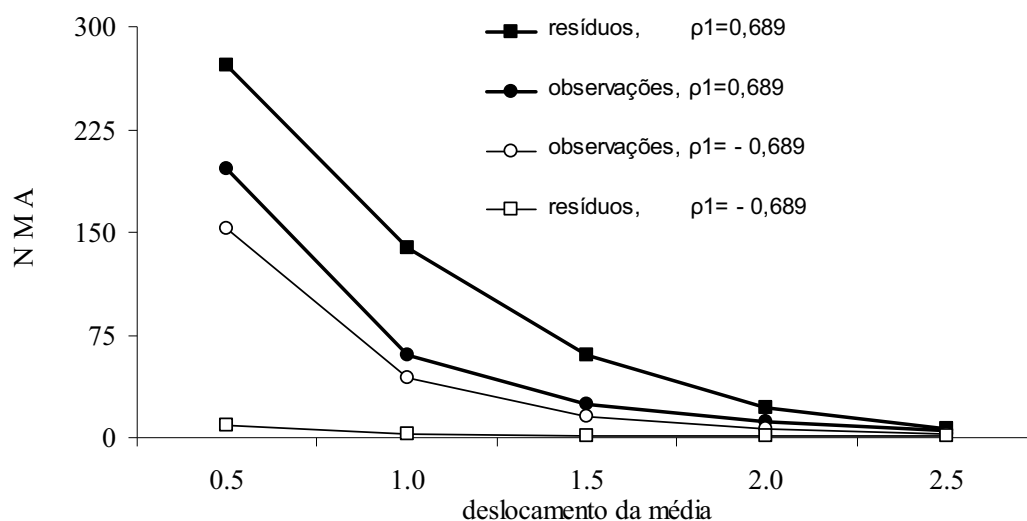


Figura 3.6 – Comparação do NMA entre gráficos usando-se resíduos do modelo e observações originais como estatística de controle, modelo ARMA(1,1),  $\rho_1 = \{0,689; -0,689\}$

Runger, Willemain e Prabhu (1995) investigaram o uso do gráfico de CUSUM com resíduos de um modelo AR(1) e obtiveram suas propriedades através de Cadeia de Markov. Quando o processo é formado por observações independentes, como é o caso com os resíduos, a estatística usada no gráfico de CUSUM (veja COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005) é dada por:  $S_t^+ = \max \{ 0; x_t - (\mu_0 + d_c) + S_{t-1}^+ \}$  e

$S_i^- = \max \{ 0, (\mu_0 - d_c) - x_i + S_{i-1}^- \}$  na qual  $S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0)$ ,  $\bar{X}_j$  é a média da  $j$ -ésima amostra,  $\mu_0$  é o valor alvo e  $d_c = \delta/2$ . Entretanto, dado que o desajuste da média desloca os resíduos de  $\delta(1-\phi)$  eles propuseram considerar  $d_c = \delta(1-\phi)/2$  e então adotar um valor de  $k$  para obter a taxa de alarme falso desejada. Os valores encontrados foram comparados aos obtidos por Wardell, Moskowitz e Plante (1994), podendo-se concluir que com esta estratégia a eficiência do gráfico é substancialmente melhorada.

Runger e Willemain (1995) propuseram o dispositivo chamado *weighted means chart*, ou gráfico das médias ponderadas (GMP), no qual observações originais da série autocorrelacionada são multiplicadas por fatores de ponderação apropriados e o produto usado para formar subgrupos consecutivos. Neste caso, a estatística de controle é dada por:

$$W_j = \sum_{i=1}^n m_i X_{(j-1)n+i}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

onde  $W_j$  é a  $j$ -ésima média ponderada formada pelos valores consecutivos  $X_{(j-1)n+i}$  tomados na série original e os fatores de ponderação,  $m_i$ , originalmente apresentados em Bischak, Kelton e Pollock (1993), devem somar a unidade para que  $W_j$  seja uma estimativa não-tendenciosa da média do processo. Para o modelo AR(1) eles são:

$$m_1 = \frac{-\phi}{(n-1)(1-\phi)} \quad (3.21)$$

$$m_i = \frac{1}{(n-1)}, \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (3.22)$$

$$m_n = \frac{1}{(n-1)(1-\phi)} \quad (3.23)$$

Considerando dados normais e  $n > 1$ , os ponderadores ótimos tornam independentes os subgrupos, que possuem média  $E(W_j) = \mu$  e variância  $\sigma_{W_j}^2 = [(1-\phi)^2(n-1)]^{-1}$ .

A eficiência do gráfico foi avaliada usando-se o modelo AR(1) para representar as observações do processo e assumindo-se a presença da causa especial antes do início do monitoramento, para evitar sua ocorrência *dentro* do subgrupo (um dos propósitos

do subgrupo racional é reduzir a probabilidade deste evento). Os resultados foram comparados aos obtidos com o dispositivo GMAL (já abordado na seção 3.2.3) e com o gráfico de resíduos. Os autores concluíram que a eficiência do dispositivo GMAL é maior do que a do dispositivo GMP, pois o maior valor dos fatores de ponderação usados com as observações dos extremos do subgrupo neste último método aumenta a variância da série e reduz a sensibilidade do dispositivo estatístico. A eficiência do gráfico em que os resíduos do modelo são usados como estatística de controle é, em geral, menor do que a obtida com os dispositivos GMAL e GMP, especialmente para  $\delta \leq 2,0$  e para processos fortemente correlacionados, (veja Tabela 3.2).

Tabela 3.2 – Número médio de observações até o sinal (NMO) para os gráficos GMAL, GMP e de resíduos; modelo AR(1);  $NMO_0=10000$

$\phi$	Método	$n$	$\delta/\sigma_e$				
			0	0,5	1,0	2,0	4,0
0,25	Resíduos	1	10000	4360	1183	116	3
	GMP	4	10000	2066	320	23	4
	GMAL	4	10000	1279	149	11	4
	GMP	23	10000	233	34	23	23
	GMAL	23	10000	210	32	23	23
	Resíduos	1	10000	6521	2818	506	17
0,50	GMP	8	10000	2230	378	33	8
	GMAL	8	10000	1607	225	20	8
	GMP	43	10000	397	66	43	43
	GMAL	43	10000	367	63	43	43
	Resíduos	1	10000	9801	9234	7279	1828
	GMP	58	10000	6119	2548	548	96
0,90	GMAL	58	10000	5619	2133	423	81
	GMP	472	10000	2547	823	476	472
	GMAL	472	10000	2504	809	476	472

Segundo os autores, por se haver considerado a presença da causa especial antes do início do monitoramento, os valores mostrados na Tabela 3.2 devem ser incrementados de  $n/2$  para pequenos deslocamentos da média.



Faltin, Mastrangelo, Runger e Ryan (1997) mencionam que ao considerar o monitoramento da média de um processo autocorrelacionado é necessário optar por alguma estatística, que representa a variável de interesse, a ser registrada no gráfico de controle. Entre as várias possibilidades para tal fim, comumente esta escolha recai sobre o uso das observações originais ou dos resíduos após ajuste de algum modelo. O uso das observações originais como estatística de controle torna mais evidente a flutuação da média do processo, mas requer que os limites de controle sejam ajustados para levar em conta a dependência em série. O monitoramento do processo por meio dos resíduos do modelo implica nos seguintes inconvenientes: (a) requer do usuário cálculos intermediários antes que o valor seja plotado na carta; (b) quando a autocorrelação é positiva, ou quando os deslocamentos da média são pequenos, a eficiência do dispositivo estatístico é baixa; (c) a interpretação de cartas de resíduos pode não ser tão simples para uma boa parte dos usuários; (d) ajustar e manter um modelo apropriado a cada variável pode ser extremamente trabalhoso.

English, Lee, Martin e Tilmon (2000) investigaram a efetividade dos gráficos de Médias e de EWMA no monitoramento de resíduos. O modelo considerado neste estudo foi o AR(2). Os autores partem do pressuposto que a causa especial pode alterar os coeficientes do modelo, a média do processo ou ambos e uma parte significativa da pesquisa foi apoiada em simulação. Assumindo que os coeficientes do modelo ao qual se ajustam as observações quando o processo está em controle são representados por  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e que quando o processo se desajusta os coeficientes se alteram para  $\phi_1^*$  e  $\phi_2^*$ , os resíduos ( $e_t$ ) passariam a comportar-se como um modelo com coeficientes  $\phi_{1,e} = \phi_1^* - \phi_1$  e  $\phi_{2,e} = \phi_2^* - \phi_2$ , ou seja, deixam de ser independentes. Os resultados obtidos confirmam a forte influência da correlação e do tamanho da amostra no poder do gráfico de médias e confirmam que baixos valores de  $\lambda$  no gráfico de EWMA melhoram a eficiência da carta na detecção de perturbações de pequena magnitude.

West, Dellana e Jarrett (2002) apresentam um estudo de caso relacionado ao monitoramento da demanda bioquímica de oxigênio, em um processo de tratamento de efluentes descrito por um modelo de transferência apropriado. Utilizando-se das funções autocorrelação e autocorrelação parcial, os autores identificaram que as

observações da variável se ajustavam a um modelo MA(1). Graças à inclusão do termo de intervenção no modelo, diversas observações discrepantes foram identificadas e apropriadamente modeladas permitindo considerável redução no desvio-padrão dos resíduos, utilizado no estabelecimento dos limites de controle.

Runger (2002) sintetizou orientações que direcionam a escolha do usuário ao tipo mais adequado de gráficos para monitoramento de processos autocorrelacionados em modelos dinâmicos. Utilizando uma analogia com um tanque de mistura no qual se desenvolve um processo cujas variáveis principais são consideradas controláveis (para maiores detalhes veja CRYER; RYAN, 1990 ou MONTGOMERY, 2001), o autor considera que as concentrações de saída podem ser representadas por um EWMA ou, alternativamente, por um modelo AR(1). Considerando que a variável concentração da mistura na entrada do tanque sofra, no tempo  $t=1$ , uma perturbação  $\delta$  que venha a se somar ao ruído branco, a média do resíduo do modelo que representa a concentração de saída passaria a ser expressa por  $E(r_t) = \delta$  para  $t \geq 1$ , portanto, diferindo da hipótese formulada em Wardell, Moskowitz e Plante (1994). O autor enfatiza que na entrada de um tanque de mistura freqüentemente convergem numerosos e diferentes fluxos cuja medição nem sempre é factível. O autor também menciona outros tipos de causas especiais, as quais ele denomina “*model-void*”, que podem mudar o modelo existente entre entrada e saída; por exemplo, um vazamento no tanque ou qualquer fator operacional que leve a uma alteração na taxa de fluxo podem alterar a constante de tempo do processo e resultar em um novo coeficiente do modelo o que tornaria os resíduos correlacionados.

### 3.2.5 Gráficos adaptativos

Reynolds Jr., Arnold e Baik (1996) compararam as propriedades dos gráficos com amostragem em intervalo variável (AIV) e em intervalo fixo (AIF) quando as observações do processo são representadas por um modelo AR(1) acrescido de um erro aleatório. Este modelo é expresso por  $X_k = \mu_k + \varepsilon_k$  para  $k=1,2,\dots$ , onde  $\mu_k$  é a média no tempo  $t_k$  representada por um modelo AR(1) e  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  são variáveis

aleatórias com distribuição N IID  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Ele é equivalente ao modelo ARMA(1,1) desde que os coeficientes satisfaçam a relação  $0 \leq \theta \leq \phi < 1$ . A variância das observações é formada pelos componentes de longo prazo, devida a  $\mu_k$ , e de curto prazo ou erro de medição, devida a  $\varepsilon_k$ . As combinações de parâmetros do modelo foram escolhidas para que as autocorrelações resultantes variassem de baixa a moderadamente alta e processos independentes adotados como valor de referência para as comparações de eficiência entre gráficos e efeito da autocorrelação. O desempenho dos gráficos é comparado através do tempo médio até o sinal (TMS) e do número médio de amostras até o sinal (NMA) para diferentes deslocamentos da média expressos em  $\delta$  unidades do desvio-padrão do processo, sendo  $0 < \delta \leq 5,0$ . Quando os gráficos com AIF e AIV são comparados em bases iguais, conclui-se que o efeito da autocorrelação positiva é aumentar o tempo necessário para detecção do sinal e, embora o gráfico com intervalo variável seja mais eficiente que o gráfico com intervalo fixo de amostragem, a diferença entre eles é pequena para processos fortemente autocorrelacionados.

Zou, Wang e Tsung (2008) estenderam o trabalho de Reynolds Jr., Arnold e Baik (1996) e estudaram as propriedades de dois gráficos, um deles com amostragem em intervalo variável em tempo predefinido (AIVPD) e o outro com amostras com tamanho variável e amostragem em intervalo variável em tempo predefinido (ATIVPD), para observações com o modelo AR(1) acrescido do erro aleatório e correlações positivas. O esquema AIVPD, que não têm como inconveniente a imprevisibilidade dos horários de coleta de amostra, é uma modificação do esquema AIV e o esquema ATIVPD considera adicionalmente o caso em que a amostra é constituída por mais de uma observação. O conceito em ambos os gráficos é o mesmo: na carta AIVPD, o intervalo entre duas amostras é longo enquanto não houver indicação de mudança no processo. Se isto ocorrer, o intervalo entre amostras é diminuído a uma fração predefinida do intervalo original. Na carta ATIVPD quando a amostra em análise não sinalizar mudança no processo (isto é, o valor encontrado localizar-se na região delimitada pelos limites de advertência), a próxima amostra é pequena (tamanho  $n_1$ ) e tomada em intervalo longo predefinido; caso contrário, a

amostra seguinte é grande (tamanho  $n_2$ ) e tomada em intervalo menor. Os resultados obtidos indicaram que (i) a taxa de alarmes falsos e o tempo para detectar a causa especial aumentam proporcionalmente com a correlação; (ii) gráficos AIVPD e AIV têm desempenho similar; (iii) o desempenho dos gráficos melhora quando se aumenta o número de subintervalos entre duas amostras; (iv) quando a maior fração da variância das observações é a de curto prazo, isto é, a variância devida a  $\varepsilon_k$ , o gráfico ATIVPD é mais ágil que os gráficos AIVPD e AIV para detectar a causa especial; (v) o desempenho melhora quando é possível trabalhar com valores grandes de  $n_2$ , desde que a correlação no processo não seja muito pronunciada. O desempenho do gráfico de EWMA com  $\lambda = 0,2$  foi comparado em bases iguais com os gráficos AIVPD e ATIVPD. O gráfico de EWMA tem uma maior eficiência quando os desajustes da média são pequenos e o esquema AIVPD é superior aos demais para maiores desajustes.

### 3.2.6 Análise crítica da literatura

Os principais aspectos de cada estratégia, identificados a partir desta revisão da literatura, são:

- a) O gráfico padrão que utiliza as observações originais autocorrelacionadas para formar subgrupos de tamanho convencional e considera limites com abertura ajustada para levar em conta a autocorrelação é fácil de usar, (pois é semelhante ao análogo empregado em processos independentes), entretanto sua eficiência é limitada.
- b) Os esquemas de EWMA e CUSUM com limites compensados para levar em conta a dependência em série e considerando observações individuais apresentam desempenhos similares. Para desajustes pequenos e moderados na média, ambos são em geral mais eficientes do que o gráfico de  $\bar{X}$ , entretanto, quando otimizados para esta condição específica, têm a eficiência penalizada na faixa de maiores desajustes.
- c) A estratégia “*model-free*” é subdividida em três possibilidades:

(c.1) formar subgrupos consecutivos de tamanho maior do que o convencional para que as médias tornem-se aproximadamente independentes ( $\rho_1 \leq 0,10$ ). Esta alternativa limita-se a ambientes com grande disponibilidade de dados, veja Runger e Willemain (1996).

(c.2) formar subgrupos menores e espaçados, anulando igualmente a dependência em série. A eficiência neste caso é menor do que a obtida quando a amostragem compreende subgrupos grandes e consecutivos.

(c.3) empregar o gráfico EWMAST (Zhang, 1998), no qual os limites são baseados apenas na autocorrelação do processo. O desempenho deste dispositivo é bastante competitivo quando a autocorrelação é de magnitude moderada e os desajustes da média são pequenos.

d) A estratégia “*model-based*” é subdividida em duas alternativas:

(d.1) fazer uso da propriedade de independência dos resíduos do modelo e usá-los em gráficos com limites 3-sigmas. Como neste caso a probabilidade de detectar a mudança na média é significativamente reduzida a partir do instante subsequente à ocorrência da perturbação no processo, esta alternativa resulta em baixo desempenho.

(d.2) usar fatores de ponderação apropriados para fazer com que as médias de subgrupos consecutivos sejam independentes. O efeito indesejável deste procedimento é o aumento da variância da série, que reduz a sensibilidade do dispositivo estatístico.

e) Poucos são os trabalhos com gráficos adaptativos para processos autocorrelacionados, destacando-se entre eles as publicações de Reynolds Jr., Arnold e Baik (1996) abordando os gráficos com amostragem em intervalo variável e, mais recentemente, o artigo de Zou, Wang e Tsung (2008) apresentando pesquisa com o gráfico com amostragem em intervalo variável em tempo pré-definido e o gráfico com amostras com tamanho variável e amostragem em intervalo variável em tempo pré-definido. Embora o desempenho dos gráficos com parâmetros variáveis seja em geral consideravelmente melhor do que o obtido com gráficos não-adaptativos, o número de aplicações na indústria envolvendo gráficos com amostragem em intervalos variáveis é pequeno, provavelmente devido às complexidades com a amostragem. Um dos poucos estudos disponíveis na literatura menciona a substituição do esquema de EWMA por

uma combinação AIVPD-EWMA no monitoramento de um processo independente com a principal finalidade de reduzir custos de inspeção, sem comprometer a eficiência estatística, veja Baxley Jr. (1995).

### 3.3 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

#### 3.3.1 Introdução

Nas seções seguintes deste capítulo são descritas as características de projeto e o método de obtenção das propriedades do gráfico padrão de  $\bar{X}$ , do gráfico de EWMA para médias, do gráfico de  $\bar{X}$  com amostras de tamanho variável e do gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla para o caso de dados autocorrelacionados. Dado o conhecimento preliminar do limitado desempenho dos gráficos que usam o resíduo do modelo como a estatística de controle, em todos os casos as observações originais do processo são usadas para formar as amostras. Um roteiro para implementação prática do gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla é sugerido ao final deste capítulo.

#### 3.3.2 O gráfico de $\bar{X}$

Quando no monitoramento do processo são considerados os conceitos de subgrupos racionais e as observações são autocorrelacionadas, a expressão (3.6), usada para determinação do desvio-padrão amostral com dados independentes, não é mais aplicável e deve ser substituída pela equação (2.1), isto é,

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \gamma_k}. \text{ Lembrando que } \gamma_0 = \sigma_X^2 \text{ e } \gamma_k = \rho_k \gamma_0, \text{ veja Chatfield}$$

(2004), esta expressão pode ser reescrita como  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n} \Psi}$  onde

$$\Psi = \left[ 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k \right]^{-1/2}.$$

A expressão (3.11) usada anteriormente para processos com dados independentes, isto é,  $\alpha = \Pr \left[ Z > \frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \right] + \Pr \left[ Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \right]$ , na qual  $LSC_{\bar{X}}$ ,  $LIC_{\bar{X}}$  e  $Z$  são determinados respectivamente por (3.2), (3.4) e (3.10), é igualmente válida para cálculo da probabilidade de alarme falso. Substituindo  $LSC_{\bar{X}}$  por  $\mu_0 + 3\sigma_{\bar{X}}$  e  $LIC_{\bar{X}}$  por  $\mu_0 - 3\sigma_{\bar{X}}$ , chega-se a expressão (3.12), isto é,  $\alpha = \Pr[|Z| > 3]$ , ou genericamente a expressão (3.13), isto é,  $\alpha(k) = \Pr[|Z| > k]$ , concluindo-se que o risco  $\alpha$  independe do tamanho de amostra e da autocorrelação, em outras palavras, a abertura dos limites é corrigida exclusivamente pelo uso do desvio-padrão apropriado.

Se por outro lado o processo estiver fora de controle, ( $\mu \neq \mu_0$ ), o risco  $\beta$  de não-deteccção continua a ser expresso por (3.8), isto é,  $\beta = \Pr[LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0]$  e o poder do gráfico, Pd, dado por (3.9), isto é,  $Pd = 1 - \beta$ . Em consequência da autocorrelação, a expressão (3.15), usada anteriormente para dados independentes, é modificada pelo uso do desvio-padrão do modelo considerado e se transforma em:

$$Pd = \Pr[Z < -k + \delta\sqrt{n} \Psi] + \Pr[Z < -k - \delta\sqrt{n} \Psi] \quad (3.24)$$

Logo, conclui-se que o poder do gráfico depende não só do tamanho da amostra, do coeficiente de abertura dos limites e da magnitude da perturbação na média, mas também da grandeza  $\Psi$ , que incorpora o efeito da autocorrelação e é função da série temporal representativa das observações do processo.

### 3.3.3 O gráfico da média móvel ponderada exponencialmente (EWMA)

A carta de controle da Média Móvel Ponderada Exponencialmente (EWMA) foi proposta por Roberts (1959) e é indicada quando se deseja detectar pequenos deslocamentos na média do processo. Embora o uso do gráfico de EWMA seja mais comum com observações individuais, ele pode também ser empregado para médias usando-se os valores da estatística  $Y_i$ :

$$Y_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)Y_{i-1} \quad (3.25)$$

e limites de controle dados por:

$$LC = \mu_0 \pm k\sigma_{\bar{x}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right)} \quad (3.26)$$

onde:  $0 < \lambda \leq 1$  e  $Y_0 = \mu_0$ .

Para pequenos valores de  $\lambda$ , a constante de amortecimento, o gráfico detecta pequenos desajustes com maior rapidez, fazendo com que dados históricos tenham peso grande no cálculo de  $Y_i$  e, inversamente, valores altos de  $\lambda$  fazem com que a última observação tenha o maior peso no cálculo de  $Y_i$ . Diferentes estratégias de monitoramento de processos autocorrelacionados considerando o esquema de EWMA são encontradas na literatura (ZHANG, 1998; LU; REYNOLDS JR, 1999a; CLARO; COSTA; MACHADO, 2007). As propriedades do gráfico de EWMA para o modelo considerado nesta tese foram obtidas por meio de Cadeias de Markov seguindo o procedimento proposto por Saccuci e Lucas (1990).

A região em controle no gráfico é dividida em  $[t=2m+1]$  subintervalos de largura  $2\Delta$ . O estado absorvente da cadeia é alcançado sempre que a estatística  $Y_i$  tiver seu valor fora dos limites de controle. O  $j$ -ésimo estado transiente é alcançado sempre que a estatística  $Y_i$  tiver seu valor no intervalo:

$$S_j - \Delta < Y_i \leq S_j + \Delta \quad (3.27)$$

onde  $S_j$  ( $-m \leq j \leq m$ ) representa o ponto médio do  $j$ -ésimo intervalo. O número médio de amostras até o sinal é dado por:

$$NMA = \mathbf{p}^T (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} \quad (3.28)$$



onde  $\mathbf{p}$  é o vetor de probabilidades iniciais após o processo ter alcançado o regime estacionário (*steady state probabilities*),  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade ( $t \times t$ ),  $\mathbf{1}$  é um vetor coluna ( $t \times 1$ ) de uns e  $\mathbf{R}$  é a submatriz de probabilidades de transição, isto é:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} P_{-m,-m} & P_{-m,-m+1} & \cdot & \cdot & P_{-m,m} \\ P_{-m+1,-m} & P_{-m+1,-m+1} & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & P_{m-1,m-1} & P_{m-1,m} \\ P_{m,-m} & \cdot & \cdot & P_{m,m-1} & P_{m,m} \end{bmatrix}$$

onde:

$$p_{jk} = \Pr \left\{ \lambda^{-1} \left[ (S_k - \Delta) - (1 - \lambda) S_j \right] \leq \bar{X}_i \leq \lambda^{-1} \left[ (S_k + \Delta) - (1 - \lambda) S_j \right] \right\} \quad (3.29)$$

O vetor de probabilidades iniciais  $\mathbf{p}$  é obtido resolvendo o sistema  $\mathbf{p} = \mathbf{P}^T \mathbf{p}$  sujeito a  $\mathbf{1}^T \mathbf{p} = 1$  (ÇINLAR, 1975) onde:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Saccucci e Lucas (1990) consideraram valores de  $t = \{51, 59, 67, 75, 83\}$  no programa computacional que fornece os NMAs do esquema EWMA. Eles determinaram que  $t=83$  estados transientes são suficientes para alcançar a precisão desejável. Nesta tese, a região de controle do gráfico de EWMA foi dividida em 101 partes, resultando, portanto, em uma cadeia de Markov com 101 estados transientes. Este número de subdivisões foi suficiente para alcançar a precisão desejada e foi necessário provavelmente pelo fato de, no cálculo das probabilidades de transição, haver um elemento novo, que é a autocorrelação.

### 3.3.4 O gráfico de $\bar{X}$ com amostras de tamanho variável (ATV)

As propriedades da carta de controle com amostras de tamanho variável (ATV) foram obtidas por Costa (1994). Nesta tese estes estudos foram ampliados para processos com dependência em série.

Quando o gráfico com ATV está em uso, amostras aleatórias são retiradas da linha de produção a intervalos fixos de tempo. O processo começa em um estado de

controle estatístico com média  $\mu = \mu_0$  e desvio-padrão  $\sigma$ , e a um tempo aleatório no futuro, a média se desloca de  $\mu_0$  para  $\mu_0 \pm \delta\sigma$ , onde  $\delta > 0$ . As médias amostrais são anotadas na carta de controle com limites de advertência dados por  $\mu_0 \pm k_1\sigma_{\bar{X}}$  e limites de ação expressos por  $\mu_0 \pm k\sigma_{\bar{X}}$ , onde  $0 < k_1 < k$ , sendo  $\sigma_{\bar{X}}$  o desvio-padrão das médias amostrais (veja expressão 2.1). O tamanho da próxima amostra depende do que é observado na amostra anterior. Se o valor de  $\bar{X}$  cai na região central da carta, o tamanho da próxima amostra, denominado  $n_1$ , deve ser pequeno. Alternativamente, se o ponto  $\bar{X}$  cai na região de advertência, o tamanho da amostra seguinte, denominado  $n_2$ , deve ser grande.

O gráfico de controle com intervalo fixo de tempo entre amostragens tem propriedades determinadas pelo número de amostras  $N$  e pelo número de observações  $M$  tomadas no processo até que haja o sinal. Sejam os números de amostras e observações dados respectivamente por  $N_0$  e  $M_0$  quando  $\mu = \mu_0$  e por  $N_1$  e  $M_1$  quando a média do processo desvia de seu valor-alvo.  $N_0$  deve ser grande de modo que a taxa de alarmes falsos seja pequena e  $N_1$  deve ser pequeno de modo que a detecção da causa especial seja rápida.

O número médio de amostras tomadas até o sinal é o NMA. Independente do tamanho da amostra:

$$E(N_0) = 1/q \quad (3.30)$$

onde  $q = \Pr[|Z| > k \mid Z \sim N(0,1)]$  é a probabilidade de alarme falso e  $Z = (\bar{X} - \mu_0)/\sigma_{\bar{X}}$ .

Quando  $\mu = \mu_0$  o tamanho médio da amostra  $\bar{n}$  é dado por:

$$\bar{n} = \frac{n_1 p_{01}^* + n_2 p_{02}^*}{1 - q} \quad (3.31)$$

onde  $p_{01}^* = \Pr[|Z| < k_1 \mid Z \sim N(0,1)]$  e  $p_{02}^* = \Pr[k_1 < |Z| < k \mid Z \sim N(0,1)]$ .

Segue-se que:

$$E(M_0) = \bar{n}/q \quad (3.32)$$

As expressões para  $E(N_1)$  e  $E(M_1)$  são obtidas usando cadeias de Markov, encontrando-se:

$$E(N_1) = p_1 \left[ \frac{1 - p_{22} + p_{12}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] + (1 - p_1) \left[ \frac{1 - p_{11} + p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] \quad (3.33)$$

e

$$E(M_1) = n_1 \left[ \frac{p_1(1 - p_{22}) + (1 - p_1)p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] + n_2 \left[ \frac{p_1p_{12} + (1 - p_1)(1 - p_{11})}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] \quad (3.34)$$

onde:

$$p_{i1} = \Pr[|W| < k_1 \mid W \sim N(\delta\sqrt{n_i}, 1)]$$

$$p_{i2} = \Pr[k_1 < |W| < k \mid W \sim N(\delta\sqrt{n_i}, 1)]$$

$$p_1 = \Pr[|Z| < k_1 \mid |Z| < k \text{ e } Z \sim N(0, 1)]$$

Quando o processo está em controle, as equações (3.33) e (3.34) se reduzem respectivamente às equações (3.30) e (3.32).

As propriedades da carta de controle de médias com amostras de tamanho variável consideradas neste estudo foram determinadas considerando a autocorrelação no cálculo do desvio-padrão amostral.

### 3.3.5 O gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla (AD)

A primeira referência encontrada sobre o uso da amostragem dupla no monitoramento de processos é a publicação de Croasdale (1974), na qual o autor mostra que este procedimento é consideravelmente melhor do que o proposto por Page (1954) quando a eficiência do gráfico é medida pelo número médio de amostras até o sinal. Este esquema de monitoramento voltou a ser considerado por Daudin (1992) com as seguintes diferenças: (a) a tomada de decisão sobre o estado do processo passou a ser possível no primeiro estágio de amostragem e (b) quando a amostragem vai ao segundo estágio, os resultados obtidos na etapa anterior são considerados no

cômputo da média amostral. Irianto e Shinozaki (1998) compararam os métodos propostos por Croasdale (1974) e Daudin (1992) e ao invés de adotar o tamanho médio de amostra mínimo como critério de desempenho no projeto da carta, propuseram maximizar o poder do gráfico para obter melhor desempenho na detecção de pequenos deslocamentos da média. Carot, Jabaloyes e Carot (2002) combinaram os esquemas de amostragem dupla e intervalo variável de amostragem em um único gráfico para monitoramento de processos independentes. Costa e Claro (2007) projetaram e estudaram as propriedades da carta de controle de  $\bar{X}$  com amostragem dupla para monitoramento de um processo com observações representadas pelo modelo ARMA(1,1).

O estudo nesta tese é uma extensão do trabalho de Daudin (1992). Quando a amostragem dupla está em uso, retira-se da linha de produção uma amostra mestra que se divide em  $n=n_1+n_2$  unidades. Como estas unidades são coletadas praticamente de forma simultânea e consecutiva, considera-se que pertençam a uma mesma distribuição de probabilidade. Os dois estágios da amostragem dupla são:

Primeiro estágio: tomar a amostra de tamanho  $n_1$  e calcular a média  $\bar{X}_1$ . Considere a média padronizada  $Z_1 = (\bar{X}_1 - \mu_0) / \sigma_{\bar{X}_1}$  sendo  $\bar{X}_1 \sim N(\mu_0, \sigma_{\bar{X}_1}^2)$  onde  $\mu_0$  e  $\sigma_{\bar{X}_1}$  são respectivamente a média do processo sob controle e o desvio-padrão amostral. Neste estágio existem três possibilidades:

- ✓ Se  $|Z_1| \leq L_1$ , conclui-se que a média do processo está em controle;
- ✓ Se  $|Z_1| > L$ , sendo  $L > L_1 > 0$ , conclui-se que a média do processo deslocou-se do valor-alvo;
- ✓ Se  $L > |Z_1| > L_1$ , a decisão sobre o estado do processo é tomada no segundo estágio.

Segundo estágio: tomar a amostra de tamanho  $n_2$  e calcular a média  $\bar{X}_2$ . Seja  $Z_2 = (\bar{Y} - \mu_0) / \sigma_{\bar{Y}}$  onde  $\bar{Y} = (n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2) / (n_1 + n_2)$  e  $\sigma_{\bar{Y}}$  são respectivamente a média e o desvio-padrão da amostra mestra. Neste estágio existem somente duas possibilidades:

- ✓ Se  $|Z_2| \leq L_2$ , conclui-se que a média do processo está em controle;

✓ Se  $|Z_2| > L_2$ , conclui-se que a média do processo deslocou-se do valor-alvo.

A representação gráfica deste procedimento está ilustrada na Figura 3.7.

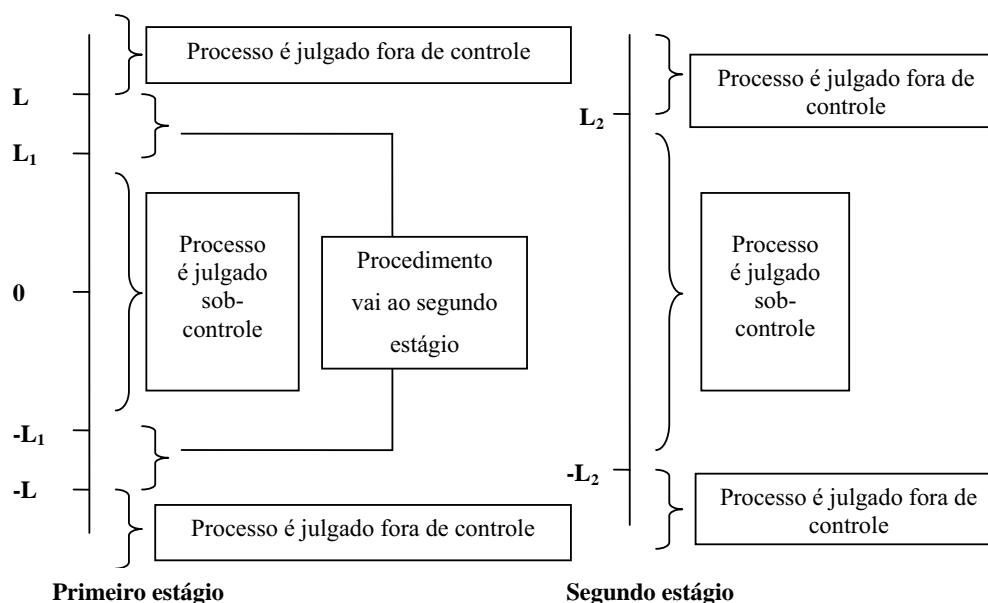


Figura 3.7 – Representação gráfica da carta de controle com amostragem dupla

Antes de estudar as propriedades da carta de  $\bar{X}$  com amostragem dupla torna-se necessário derivar as variâncias específicas do modelo considerado. Seja, por exemplo, o modelo AR(1). Empregando-se sua equação definidora, e considerando-se  $\mu = 0$  e  $\sigma_e^2 = 1$ , a expressão das observações que compõem a amostra pode ser obtida por substituição recursiva, ou seja:

$$X_t = \phi^{t-1} X_1 + \sum_{j=1}^{t-1} \phi^{t-(j+1)} e_{j+1} \quad (3.35)$$

No primeiro estágio da amostragem, a média é dada por:

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1} = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} \sum_{i=1}^t \phi^{t-i} \omega_i}{n_1} \quad (3.36)$$

onde:  $\omega_i \begin{cases} = X_1 & \text{para } t = 1 \\ = e_i & \text{para } t > 1 \end{cases}$

Dada a estrutura de correlação dentro do subgrupo, a média ( $\bar{X}_2$ ) compreende dois termos,  $X_{i,k}$  e  $X_{i,u}$ , que contém respectivamente a informação conhecida e desconhecida após a medição da amostra de tamanho  $n_1$ .

$$\bar{X}_2 = \frac{\left( \sum_{i=n_1+1}^n X_{i,k} + \sum_{i=n_1+1}^n X_{i,u} \right)}{n_2} \quad (3.37)$$

sendo:

$$X_{i,k} = \sum_{t=1}^{n_1} \phi^{i-t} \omega_t \quad i = n_1 + 1, \dots, n \quad (3.38)$$

e

$$X_{i,u} = \sum_{t=n_1+1}^i \phi^{i-t} \omega_t \quad \begin{cases} i = n_1 + 1, \dots, n \\ i \geq t \end{cases} \quad (3.39)$$

onde:  $\omega_t \begin{cases} = X_1 \text{ para } t = 1 \\ = e_t \text{ para } t > 1 \end{cases}$

As expressões de  $X_{i,k}$  e  $X_{i,u}$  para os demais modelos considerados nesta tese podem ser obtidas de forma análoga.

Quando a amostragem vai ao segundo estágio a média ( $\bar{Y}$ ) é dada por:

$$\bar{Y} = \frac{n_1}{n} \bar{X}_1 + \frac{n_2}{n} \bar{X}_2 \quad (3.40)$$

portanto:

$$\bar{Y} = \frac{n_1}{n} \left( \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1} \right) + \frac{n_2}{n} \left( \frac{\sum_{i=n_1+1}^n X_{i,k} + \sum_{i=n_1+1}^n X_{i,u}}{n_2} \right)$$

e agrupando-se os termos semelhantes:

$$\bar{Y} = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{i=n_1+1}^n X_{i,k}}{n} \right) + \frac{n_2}{n} \left( \frac{\sum_{i=n_1+1}^n X_{i,u}}{n_2} \right) \quad (3.41)$$

ou simplesmente:

$$\bar{Y} = \Delta + \frac{n_2}{n} \bar{X}_2^* \quad (3.42)$$

onde:

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} B_i \omega_i \quad (3.43)$$

sendo:

$$B_i = \sum_{t=1}^{n-i+1} \phi^{t-1} \quad (3.44)$$

A variável  $\bar{X}_2^*$ , apresentada em (3.42), é dada por:

$$\bar{X}_2^* = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} C_j e_{n_1+j}}{n_2} \quad (3.45)$$

sendo:

$$C_j = \sum_{i=n_1+j}^n \phi^{i-(n_1+j)} \quad j=1,2,3,\dots,n_2 \quad (3.46)$$

A variância de  $\Delta$  é expressa por:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{1}{n^2} \left( \frac{B_1^2}{1-\phi^2} + B_2^2 + \dots + B_{n_1}^2 \right) \quad (3.47)$$

A variância de  $\bar{X}_2^*$  é dada por:

$$\sigma_{\bar{X}_2^*}^2 = \frac{1}{n_2^2} (C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_{n_2}^2) \quad (3.48)$$

A variância de  $\bar{Y}$  é obtida pela equação (2.1) e a de  $\bar{X}_1$  é determinada pela mesma expressão, porém neste último caso substituindo-se  $n$  por  $n_1$ .

As expressões das grandezas  $\Delta$  e  $\bar{X}_2^*$ , e suas respectivas variâncias, para os demais modelos estudados nesta tese são apresentadas no Apêndice A.

Para obtenção das propriedades do gráfico de controle com amostragem dupla, são considerados os seguintes intervalos e uniões de intervalos no primeiro estágio:

$$I_1 = [\mu_0 - L_1 \sigma_{\bar{X}_1}; \mu_0 + L_1 \sigma_{\bar{X}_1}]$$

$$I_2 = [(\mu_0 - L\sigma_{\bar{X}_1}; \mu_0 - L_1\sigma_{\bar{X}_1}) \cup (\mu_0 + L_1\sigma_{\bar{X}_1}; \mu_0 + L\sigma_{\bar{X}_1})]$$

$$I_3 = [(-\infty; \mu_0 - L\sigma_{\bar{X}_1}) \cup (\mu_0 + L\sigma_{\bar{X}_1}; +\infty)]$$

e o intervalo no segundo estágio é expresso por:

$$I_4 = [\mu_0 - L_2\sigma_{\bar{Y}}; \mu_0 + L_2\sigma_{\bar{Y}}]$$

Conforme a Figura 3.7 a probabilidade de tomar a segunda amostra é:

$$\Pr[\bar{X}_1 \in I_2] = \Phi(L - \delta\sqrt{n_1} \Psi) - \Phi(L_1 - \delta\sqrt{n_1} \Psi) + \Phi(-L_1 - \delta\sqrt{n_1} \Psi) - \Phi(-L - \delta\sqrt{n_1} \Psi) \quad (3.49)$$

onde  $\Phi$  é a função distribuição normal padronizada e  $\delta = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma_X$ , introduzido na expressão (3.14), expressa a magnitude do desajuste na média.

O tamanho médio da amostra é dado por:

$$\bar{n} = n_1 + n_2 \Pr[\bar{X}_1 \in I_2] \quad (3.50)$$

A eficiência do gráfico de controle com intervalo de tempo fixo entre amostragens é medida pelo NMA, que é o número médio de amostras necessárias para que o gráfico sinalize que o processo está fora de controle. O NMA é expresso por:

$$\text{NMA} = 1/(1 - P) \quad (3.51)$$

onde  $P = P_1 + P_2$  e  $P_i$  ( $i=1,2$ ) é a probabilidade de decidir se o processo está sob controle no estágio  $i$  do procedimento de amostragem. As propriedades da carta de controle com AD dependem dos parâmetros  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $L$ ,  $L_1$  e  $L_2$ . Em investigação preliminar, percebeu-se que o desempenho do gráfico é otimizado quando se empregam valores grandes de  $L$ , isto é, quando o risco de alarme falso no primeiro estágio da amostragem é praticamente zero. Daudin (1992) recomenda adotar  $L=4$  ou  $L=5$  (e seguindo sua sugestão estabeleceu-se  $L=5$ ). Neste caso,

$$P_1 = (\bar{n} - n_1)/n_2 \quad (3.52)$$

e

$$P_2 = 1 - P_1 - (1/\text{NMA}_0) \quad (3.53)$$

onde  $\text{NMA}_0$  é o número médio de amostras até o sinal quando o processo está sob controle ( $\delta = 0$ ).



O coeficiente  $L_1$  é calculado considerando-se o processo isento de causas especiais. Ele é determinado pela relação:

$$\Pr[\bar{X}_1 \in I_1] = \Pr[-L_1\sigma_{\bar{X}_1} - \delta\sigma_X < \bar{X}_1 < L_1\sigma_{\bar{X}_1} - \delta\sigma_X]$$

que pode ser reescrita como:

$$P_1 = \Pr[-L_1 - \delta\sqrt{n_1}\Psi < Z < L_1 - \delta\sqrt{n_1}\Psi] \quad (3.54)$$

Como  $P_1$  é uma função crescente de  $L_1$  é possível encontrar seu valor de  $L_1$  que conduza à igualdade na expressão (3.54) para qualquer valor de  $P_1$ , através de busca direta.

O coeficiente  $L_2$  é obtido considerando-se igualmente o processo sob controle e satisfazendo a igualdade:

$$P_2 = \Pr\left[\left(\bar{Y} \in I_4\right) \cap \left(\bar{X}_1 \in I_2\right)\right]$$

que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} P_2 = & \int_{-L_1 - \delta\sqrt{n_1}\Psi}^{-L_1 - \delta\sqrt{n_1}\Psi} \left\{ \Phi\left[\left(\frac{n}{n_2}\right)\left(\frac{L_2\sigma_{\bar{Y}} - \delta\sigma_X - z\sigma_{\Delta}}{\sigma_{\bar{X}_2}}\right)\right] - \Phi\left[\left(\frac{n}{n_2}\right)\left(\frac{-L_2\sigma_{\bar{Y}} - \delta\sigma_X - z\sigma_{\Delta}}{\sigma_{\bar{X}_2}}\right)\right] \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \\ & + \int_{L_1 - \delta\sqrt{n_1}\Psi}^{L_1 - \delta\sqrt{n_1}\Psi} \left\{ \Phi\left[\left(\frac{n}{n_2}\right)\left(\frac{L_2\sigma_{\bar{Y}} - \delta\sigma_X - z\sigma_{\Delta}}{\sigma_{\bar{X}_2}}\right)\right] - \Phi\left[\left(\frac{n}{n_2}\right)\left(\frac{-L_2\sigma_{\bar{Y}} - \delta\sigma_X - z\sigma_{\Delta}}{\sigma_{\bar{X}_2}}\right)\right] \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (3.55) \end{aligned}$$

Analogamente  $P_2$  é uma função crescente de  $L_2$ , logo é possível encontrar o valor de  $L_2$  que satisfaça a expressão (3.55) para quaisquer valores dados de  $L_1$  e de  $NMA_0$ , através de busca direta.

Para a aplicação prática do gráfico com amostragem dupla no monitoramento de um processo autocorrelacionado, sugere-se o seguinte procedimento:

- 1) Com o processo operando em regime normal, coletar observações da variável de interesse em um número suficiente de itens (recomendam-se no mínimo 150 observações) produzidos consecutivamente;
- 2) Usar estes valores para testar as hipóteses de normalidade e dependência em série;
- 3) Aplicar a metodologia de análise de intervenção para encontrar e substituir os dados discrepantes eventualmente existentes;
- 4) Com a série “descontaminada”, identificar e ajustar o modelo que representa as observações;
- 5) Planejar o tamanho da amostra respeitando a dinâmica do processo e a capacidade de medição. Recomenda-se que a razão  $n_2/n_1$  seja alta, pelos seguintes motivos: (i) o tamanho médio da amostra é reduzido sem que se aumente  $n_1$ , (ii) quando o processo está em controle, é maior a probabilidade de terminar o procedimento no primeiro estágio e (iii) amostras maiores no segundo estágio aumentam a eficiência do gráfico;
- 6) Utilizar o procedimento sugerido por Fishman (1978), para maiores detalhes veja Runger e Willemain (1996), para determinar o intervalo mínimo entre subgrupos que anule a autocorrelação entre médias;
- 7) O coeficiente dos limites de ação no primeiro estágio deve ser alto, sugere-se  $L=5$ , para otimizar a eficiência do dispositivo estatístico;
- 8) Considerando processos independentes, Daudin (1992) sugeriu o intervalo  $1,3 \leq L_1 \leq 1,8$  para escolha do coeficiente dos limites de advertência no primeiro estágio. Como este coeficiente não depende da autocorrelação do processo, a sugestão é extensiva aos processos com dependência em série;
- 9) O coeficiente  $L_2$  dos limites de ação no segundo estágio pode ser obtido por busca direta;
- 10) Periodicamente, ou sempre que houver alterações significativas no processo, verificar se o modelo existente continua válido.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Os tamanhos de amostra selecionados para o estudo das propriedades dos gráficos de controle estão na Tabela 4.1. O tamanho de amostra do subgrupo nas cartas de médias e de EWMA coincide com o tamanho médio de amostra ( $\bar{n}$ ) usado nos gráficos com amostras de tamanho variável e com amostragem dupla, sendo a escolha justificada pelo uso prático freqüente de subgrupos de tamanho 3 a 5. Os tamanhos de amostra no primeiro e segundo estágio foram escolhidos seguindo a orientação de Daudin (1992) onde  $\left(\frac{n_2}{n_1} \geq 2\right)$ .

Tabela 4.1 – Tamanhos de amostra selecionados

$\bar{n}$	$n_1$	$n_2$	razão $n_2/n_1$
3	1	4	4
		8	8
		12	12
	2	4	2
		8	4
		12	6
4	1	8	8
		12	12
		16	16
	2	8	4
		12	6
		16	8
5	1	12	12
		16	16
		20	20
	2	12	6
		16	8
		20	10

Os coeficientes dos modelos, veja Tabela 4.2, foram escolhidos para obter processos estacionários e positivamente autocorrelacionados. Nos modelos AR(1),

MA(1) e ARMA(1,1) eles foram selecionados para se ter  $\rho_1$  em três níveis eqüidistantes. Também foram estudados os modelos AR(2) e MA(2), ambos com mesma correlação de *lag* 1 (respectivamente  $\rho_1 = 0,500$  e  $\rho_1 = 0,375$ ), entretanto com diferentes valores de  $\rho_2$ .

Tabela 4.2 – Coeficientes selecionados

modelo	coeficientes		autocorrelação	
	$\phi$		$\rho_1$	$\rho_2$
AR(1)	0,250		0,250	0,060
	0,500		0,500	0,250
	0,750		0,750	0,562
	$\theta$			
MA(1)	-0,127		0,125	
	-0,268		0,250	
	-0,451		0,375	0
	$\phi$	$\theta$		
ARMA(1,1)	0,437	0,200	0,250	0,109
	0,612	0,150	0,500	0,306
	0,794	0,100	0,750	0,595
	$\phi_1$	$\phi_2$		
AR(2)	0,250	0,500	0,500	0,417
	0,560	-0,120	0,500	0,160
	$\theta_1$	$\theta_2$		
MA(2)	-0,387	-0,900	0,375	0,459
	-0,545	0,100	0,375	-0,076

## 4.2 RESULTADOS

No apêndice B, estão os NMAs para as diferentes combinações “esquema de monitoramento x modelo”. Os NMAs para o processo independente foram incluídos em todas as tabelas, para salientar o efeito da autocorrelação positiva sobre o desempenho dos gráficos. Em todos os casos o valor de  $NMA_0$  foi fixado em 370,4 e o desajuste da média expresso pelo número  $\delta$  de desvios-padrão do processo,  $\delta = \{0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75; 2,00\}$ .

### 4.3 DISCUSSÃO

Nesta seção são discutidos os aspectos mais relevantes a cada um dos gráficos estudados, e a seguir faz-se uma comparação entre todos eles. Como o modelo AR(1) é freqüentemente encontrado na prática, ele foi o escolhido para construir as figuras que ilustram os resultados, os quais são conceitualmente aplicáveis a quaisquer dos modelos autocorrelacionados estudados.

#### 4.3.1 Gráfico de $\bar{X}$

Os NMAs obtidos com o gráfico de médias estão na Tabela B.1. Um fator comum a todos os gráficos estudados é o efeito negativo sobre o poder de detecção de perturbações na média, decorrente da autocorrelação no processo. A opção por amostras maiores contribui para recuperar parcialmente a eficiência, entretanto esta vantagem diminui quando a autocorrelação do processo aumenta, veja Figura 4.1, onde se ilustra a melhora no desempenho do gráfico quando a amostra aumenta de  $n=3$  para  $n=5$ , em processos com diferentes níveis de autocorrelação.

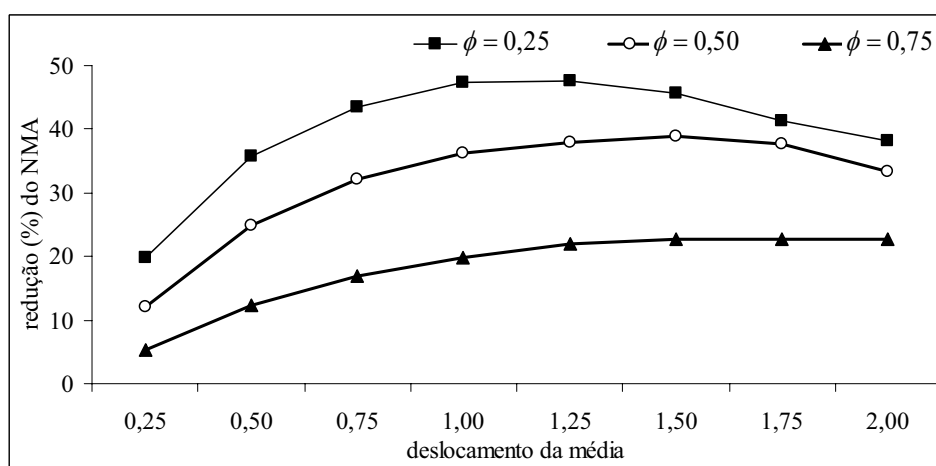


Figura 4.1 – Redução (%) do NMA do gráfico de médias pelo aumento do tamanho de amostra, de  $n=3$  para  $n=5$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação

Neste caso, a redução percentual do NMA foi calculada pela expressão  $\left[ \left( \frac{NMA_{n=3} - NMA_{n=5}}{NMA_{n=3}} \right) 100 \right]$ , onde  $NMA_{n=3}$  é o número médio de amostras até o sinal para amostras de tamanho 3 e  $NMA_{n=5}$  é o número médio de amostras até o sinal para amostras de tamanho 5.

### 4.3.2 Gráfico de EWMA

Os valores de NMA e os limites de controle do gráfico de EWMA para  $n = \{3, 4, 5\}$  e  $\lambda = \{0,25; 0,50; 0,75\}$  estão nas Tabelas B.2 a B.4. Embora o gráfico de EWMA seja freqüentemente usado com amostras individuais, os resultados neste estudo mostram que amostras maiores melhoram sua eficiência, segundo um comportamento similar ao encontrado para o gráfico de médias.

Para se obter a máxima eficiência do gráfico de EWMA é necessário conhecer o histórico de deslocamentos da média e o grau de autocorrelação do processo para selecionar o valor  $\lambda$  conveniente. As combinações que otimizam o desempenho deste dispositivo para um processo AR(1) são apresentadas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Valores ótimos para  $\lambda$  no gráfico de EWMA, processo AR(1),  $n=5$

$\phi$	deslocamento da média ( $\delta$ )		$\lambda$
	de	até	
0,25	0,25	1,00	0,25
	1,25	1,50	0,50
	1,50	2,00	0,75
0,50	0,25	1,25	0,25
	1,50	2,00	0,50
0,75	0,25	2,00	0,25

### 4.3.3 Gráfico de $\bar{X}$ com amostras de tamanho variável

Os NMAs obtidos para o gráfico com amostras de tamanho variável estão nas Tabelas B.5 a B.9. Na Tabela B.5 estão também os valores dos coeficientes dos limites de advertência e  $\Pr[\bar{X}_1 \in |k, k_1|]$  que são igualmente aplicáveis a todos os modelos. Quando o tamanho médio da amostra aumenta de  $\bar{n} = 3$  para  $\bar{n} = 5$ , a melhora no desempenho do gráfico para deslocamentos da média até  $1,0 \sigma_X$  é menor nos processos com autocorrelação moderadamente alta. A partir daí, a redução do NMA, calculada de modo análogo ao descrito para o gráfico de  $\bar{X}$ , é praticamente igual qualquer que seja o nível de dependência em série, veja Figura 4.2.

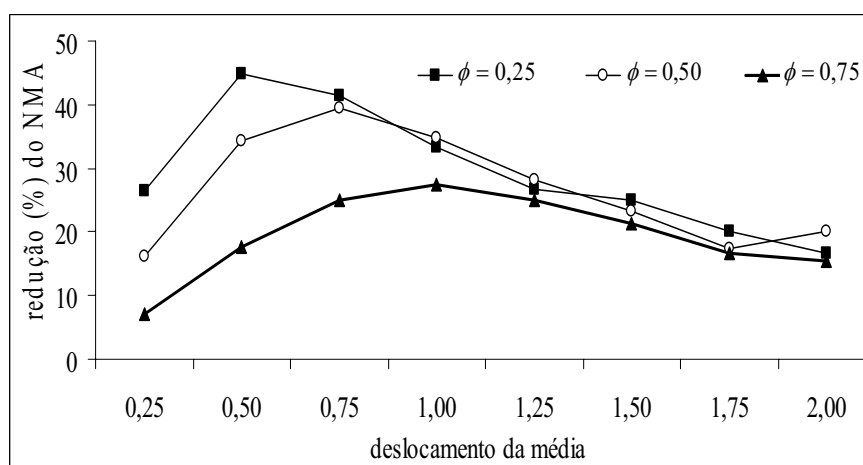


Figura 4.2 – Redução (%) do NMA do gráfico com amostras de tamanho variável pelo aumento do tamanho médio da amostra, de  $\bar{n} = 3$  para  $\bar{n} = 5$ , com  $n_1=2$  e  $n_2=12$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação

O efeito do aumento de  $n_2$  sobre o desempenho do gráfico diferencia-se em função da autocorrelação dos dados: quando ela é baixa, o aumento da eficiência se limita a deslocamentos da média de até  $1,0 \sigma_X$  para processos moderadamente autocorrelacionados a eficiência aumenta até deslocamentos de  $1,5 \sigma_X$  e, finalmente, para processos com autocorrelação moderadamente alta o desempenho melhora em toda a faixa de deslocamentos da média considerada neste estudo. Para ilustrar este padrão, tomou-se como exemplo o caso em que  $n_2$  aumenta de 8 para 16, fixando-se

$n_1=2$  e  $\bar{n}=4$ . A Figura 4.3 ilustra a variação percentual do NMA, expressa por  $\left[ \left( \frac{NMA_{n_2=8} - NMA_{n_2=16}}{NMA_{n_2=8}} \right) 100 \right]$ , onde  $NMA_{n_2=8}$  é o número médio de amostras até o sinal para quando  $n_2=8$  e  $NMA_{n_2=16}$  é o número médio de amostras até o sinal quando  $n_2=16$ , para processos com diferentes níveis de autocorrelação.

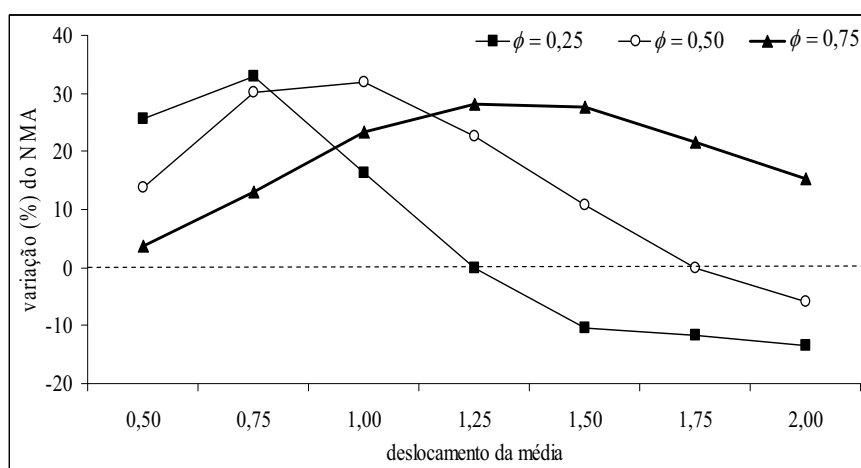


Figura 4.3 – Variação (%) do NMA do gráfico com amostras de tamanho variável pelo aumento do tamanho de amostra, de  $n_2=8$  para  $n_2=16$ , com  $n_1=2$  e  $\bar{n}=4$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação

#### 4.3.4 Gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla

Os valores dos coeficientes  $L_1$  e  $L_2$  para os gráficos com amostragem dupla estão na Tabela B.10, os NMAs nas Tabelas B.11 a B.20 e os valores da  $\Pr[\bar{X}_1 \in I_2]$  nas Tabelas B.21 a B.26. Como o gráfico permite certa flexibilidade no projeto, é interessante estabelecer valores de  $n_1$ ,  $n_2$  e  $\bar{n}$  para melhorar seu desempenho.

O aumento do tamanho da amostra no primeiro estágio, de  $n_1=1$  para  $n_1=2$ , resulta em contribuição pouco significativa ao poder do gráfico. Ao se aumentar o tamanho médio da amostra, de  $\bar{n}=3$  para  $\bar{n}=5$ , em processos com autocorrelação moderadamente alta o NMA tem pequena redução para deslocamentos da média até  $1,75\sigma_X$  e se deteriora a partir deste valor. Para processos com autocorrelação baixa e moderada obtém-se um melhor desempenho do gráfico em toda a faixa de



deslocamentos da média, veja Figura 4.4, na qual a redução percentual do NMA foi calculada de modo análogo ao descrito para o gráfico de  $\bar{X}$ .

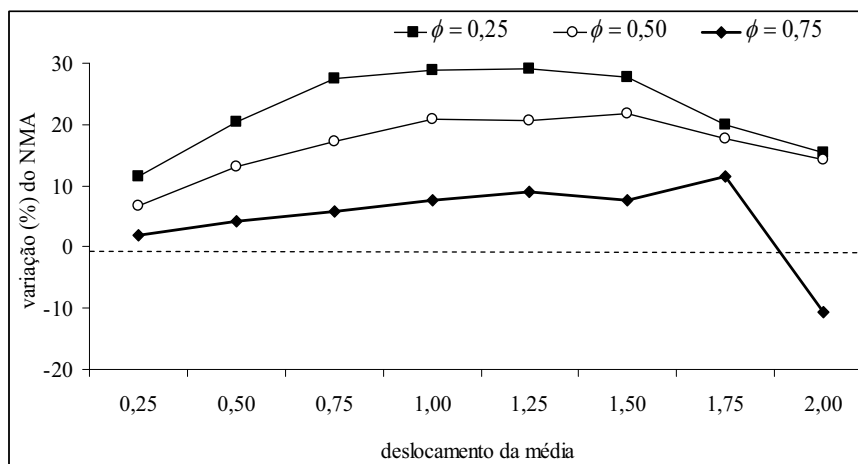


Figura 4.4 – Redução (%) do NMA do gráfico com amostragem dupla pelo aumento do tamanho médio da amostra, de  $\bar{n} = 3$  para  $\bar{n} = 5$ , com  $n_1=2$  e  $n_2=12$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação

Amostras maiores no segundo estágio ( $n_2$ ) melhoram sensivelmente a eficiência do gráfico para processos com autocorrelação moderadamente alta. Para processos com dependência em série moderada, a eficiência aumenta para deslocamentos de até  $1,75\sigma_x$  na média. Para processos com autocorrelação baixa observa-se melhor desempenho para deslocamentos de até  $1,25\sigma_x$ , a partir do qual a melhora é inexpressiva, ou mesmo há deterioração, veja Figura 4.5, na qual a variação do NMA foi calculada de modo análogo ao apresentado para o gráfico com amostras de tamanho variável.

No esquema com amostragem dupla, quando a média se afasta do valor-alvo o tamanho médio das amostras aumenta. Quando  $n_1=1$ , a grandeza  $\Psi$  usada para incorporar o efeito da autocorrelação em  $\sigma_{\bar{X}}$  é igual à unidade e, neste caso, a expressão (3.48) com a qual se determina a probabilidade de tomar a segunda amostra não é afetada pela dependência em série, veja Tabela B.21. Quando  $n_1=2$ , esta probabilidade é tanto menor quanto maior o nível de autocorrelação do processo, veja Figura 4.6.

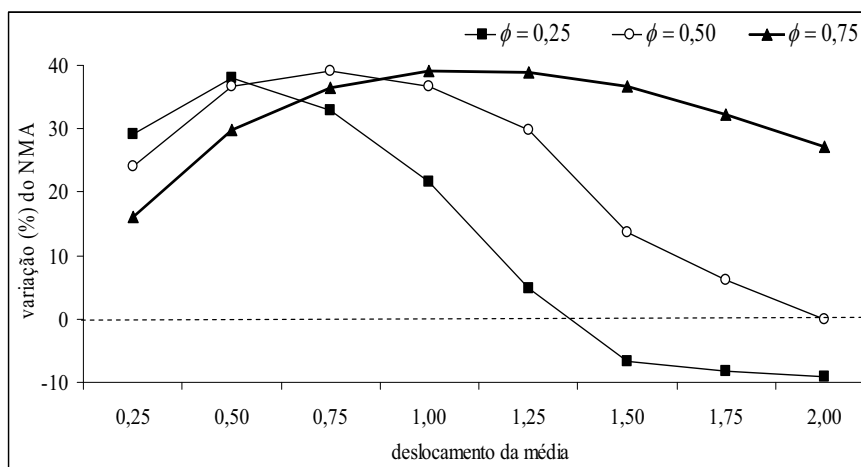


Figura 4.5 – Redução (%) do NMA do gráfico com amostragem dupla pelo aumento do tamanho da amostra no segundo estágio, de  $n_2=8$  para  $n_2=16$ , com  $n_1=2$  e  $\bar{n} = 4$ , em processo AR(1) a diferentes níveis de autocorrelação

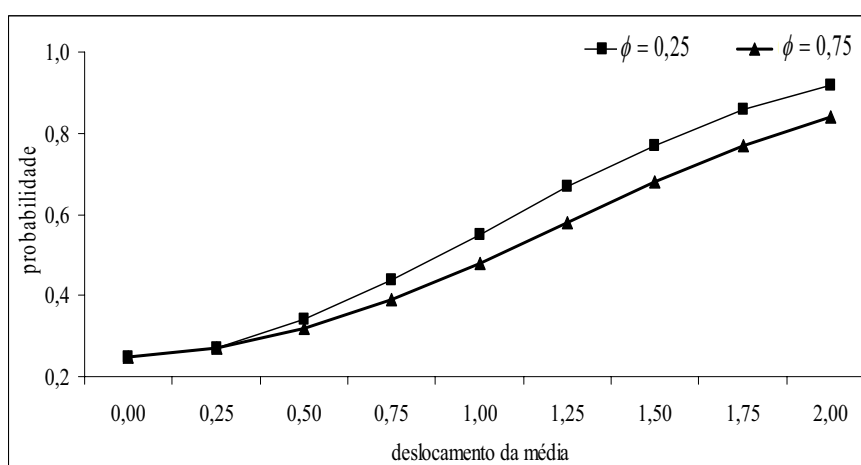


Figura 4.6 – Probabilidade da amostragem prosseguir ao segundo estágio, gráfico com amostragem dupla, processo AR(1),  $n_1=2$ ,  $n_2=12$ ,  $\bar{n}=5$

O aumento do tamanho médio das amostras, quando o processo se desajusta, leva a duas considerações: (i) o esforço de inspeção cresce, porém o preço a se pagar por isto é compensado pela detecção mais rápida da causa especial que empobrece a qualidade dos itens produzidos; e (ii) quando o processo está em controle, o custo de monitoramento é menor, pois em média se inspecionam menos itens.

### 4.3.5 Comparação entre todos os gráficos

A comparação entre os esquemas estudados para um processo AR(1) com amostras equivalentes ( $n=5$  para os gráficos de médias e de EWMA;  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 16$ , e  $\bar{n} = 5$  para os gráficos com amostras de tamanho variável e com amostragem dupla) é apresentada na Tabela 4.4, preparada a partir de dados selecionados no Apêndice B. A diferença percentual, DP (%), entre o NMA do esquema concorrente ( $NMA_{CONC}$ ) e o NMA do gráfico com amostragem dupla ( $NMA_{AD}$ ) foi calculada pela expressão:  $DP(\%) = [(NMA_{CONC} - NMA_{AD})/NMA_{AD}]100$ .

O gráfico de médias é sempre o de menor eficiência entre todos os esquemas comparados, justificando-se seu emprego apenas por sua inerente simplicidade. O desempenho do gráfico com amostras de tamanho variável é sempre inferior ao do gráfico com amostragem dupla. Em todos os níveis de autocorrelação, o gráfico de EWMA com  $\lambda = 0,25$  tem melhor capacidade de detecção do que o gráfico com amostragem dupla para desajustes pequenos na média, entretanto a sua eficiência é baixa para deslocamentos maiores. Em geral, o desempenho do gráfico com amostragem dupla é maior do que o do gráfico de EWMA com  $\lambda = 0,50$  e com  $\lambda = 0,75$ .

Tabela 4.4 – Comparação dos gráficos com tamanhos de amostra equivalentes (EWMA e Médias com  $n=5$ ; ATV e AD com  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 16$ , e  $\bar{n} = 5$ )

$\phi$	Gráfico	$\delta$									
		0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00		
0,25			NMA								
	AD		77,8	15,0	4,9	2,5	1,7	1,4	1,2	1,0	
	$\bar{X}$		173,0	53,7	19,3	8,2	4,2	2,5	1,7	1,3	
	ATV		141,6	22,7	5,8	3,0	2,3	1,9	1,7	1,6	
	EWMA	$\lambda = 0,25$		48,4	11,9	5,8	3,8	2,9	2,4	2,0	1,8
		$\lambda = 0,50$		84,0	18,7	7,2	4,0	2,7	2,1	1,7	1,5
		$\lambda = 0,75$		126,0	31,7	11,0	5,1	3,0	2,1	1,6	1,3
			DP (%)								
	$\bar{X}$		122,4	258,0	293,9	228,0	147,1	78,6	41,7	30,0	
	ATV		82,0	51,3	18,4	20,0	35,3	35,7	41,7	60,0	
	EWMA	$\lambda = 0,25$		-37,8	-20,7	18,4	52,0	70,6	71,4	66,7	80,0
		$\lambda = 0,50$		8,0	24,7	46,9	60,0	58,8	50,0	41,7	50,0
		$\lambda = 0,75$		62,0	111,3	124,5	104,0	76,5	50,0	33,3	30,0
	0,50			NMA							
AD			118,6	28,1	9,2	4,1	2,3	1,7	1,4	1,2	
$\bar{X}$			212,7	81,2	32,9	15,0	7,7	4,4	2,8	2,0	
ATV			193,1	49,8	12,9	5,1	3,0	2,3	1,9	1,7	
EWMA		$\lambda = 0,25$		70,4	17,7	8,1	5,1	3,7	3,0	2,5	2,2
		$\lambda = 0,50$		117,1	30,0	11,4	5,9	3,8	2,8	2,2	1,8
		$\lambda = 0,75$		165,1	50,4	18,7	8,6	4,8	3,1	2,3	1,8
		DP (%)									
$\bar{X}$			79,3	189,0	257,6	265,9	234,8	158,8	100,0	66,7	
ATV			62,8	77,2	40,2	24,4	30,4	35,3	35,7	41,7	
EWMA		$\lambda = 0,25$		-40,6	-37,0	-12,0	24,4	60,9	76,5	78,6	83,3
		$\lambda = 0,50$		-1,3	6,8	23,9	43,9	65,2	64,7	57,1	50,0
		$\lambda = 0,75$		39,2	79,4	103,3	109,8	108,7	82,4	64,3	50,0
0,75				NMA							
	AD		181,3	59,1	21,9	9,6	4,9	2,9	2,0	1,7	
	$\bar{X}$		249,8	115,9	53,4	26,4	14,1	8,2	5,1	3,4	
	ATV		241,8	97,9	35,8	14,0	6,6	3,9	2,7	2,1	
	EWMA	$\lambda = 0,25$		99,6	26,8	11,8	7,0	4,9	3,8	3,1	2,7
		$\lambda = 0,50$		209,1	81,3	32,3	17,9	10,5	6,9	5,0	3,8
		$\lambda = 0,75$		205,5	76,7	31,4	14,9	8,2	5,1	3,5	2,6
			DP (%)								
	$\bar{X}$		37,8	96,1	143,8	175,0	187,8	182,8	155,0	100,0	
	ATV		33,4	65,7	63,5	45,8	34,7	34,5	35,0	23,5	
	EWMA	$\lambda = 0,25$		-45,1	-54,7	-46,1	-27,1	0,0	31,0	55,0	58,8
		$\lambda = 0,50$		15,3	37,6	47,5	86,5	114,3	137,9	150,0	123,5
		$\lambda = 0,75$		13,3	29,8	43,4	55,2	67,3	75,9	75,0	52,9

## 5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 5.1 ANÁLISE DE INTERVENÇÃO

Neste exemplo de aplicação, realizado em Junho de 2007, o processo considerado é a usinagem de uma carcaça da transmissão fundida em liga de alumínio e a variável de interesse é a altura fresada da face de assentamento do conjunto da alavanca, veja representação esquemática na Figura 5.1.

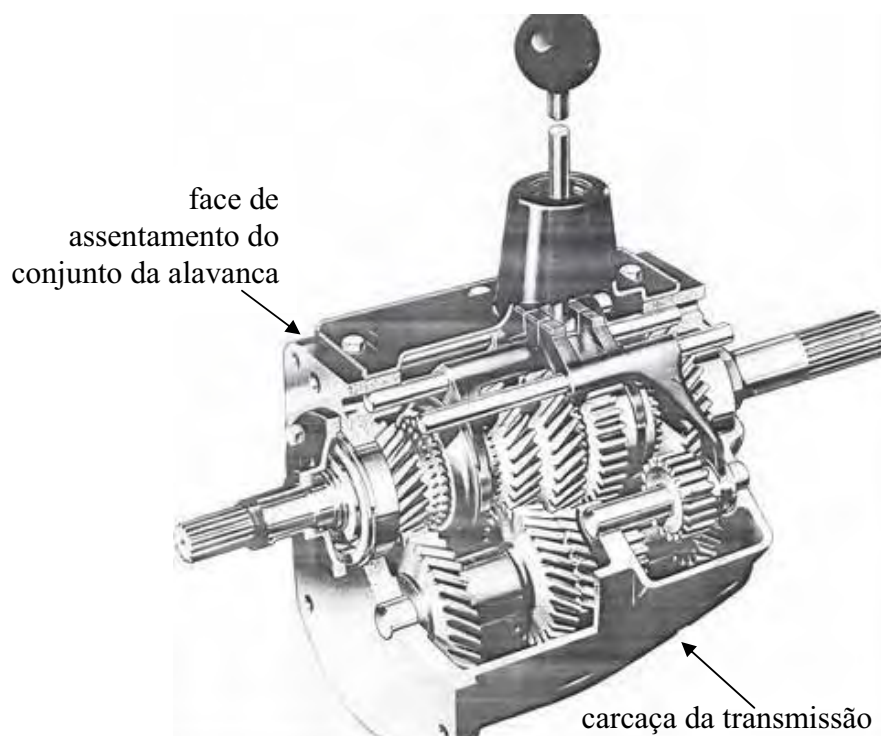


Figura 5.1 – Representação esquemática do conjunto da carcaça de transmissão (fonte: Digest, 1976)

Os dados no caso foram obtidos de 150 peças consecutivamente produzidas em um centro de usinagem de uma indústria da região de Campinas-SP. As estatísticas descritivas das observações e os limites de tolerância para a altura da face de assentamento do conjunto da alavanca são apresentados na Tabela 5.1 e na Figura 5.2.

Tabela 5.1 – Estatística descritiva das observações originais e limites superior e inferior de tolerância (LST e LIT) para a altura da face de assentamento

$N$	$\bar{X}$	$\sigma_x$	$\sigma_x^2$	amplitude		limites tolerância	
				máximo	mínimo	LST	LIT
150	165,020	0,146	0,021	165,346	164,469	165,350	164,650

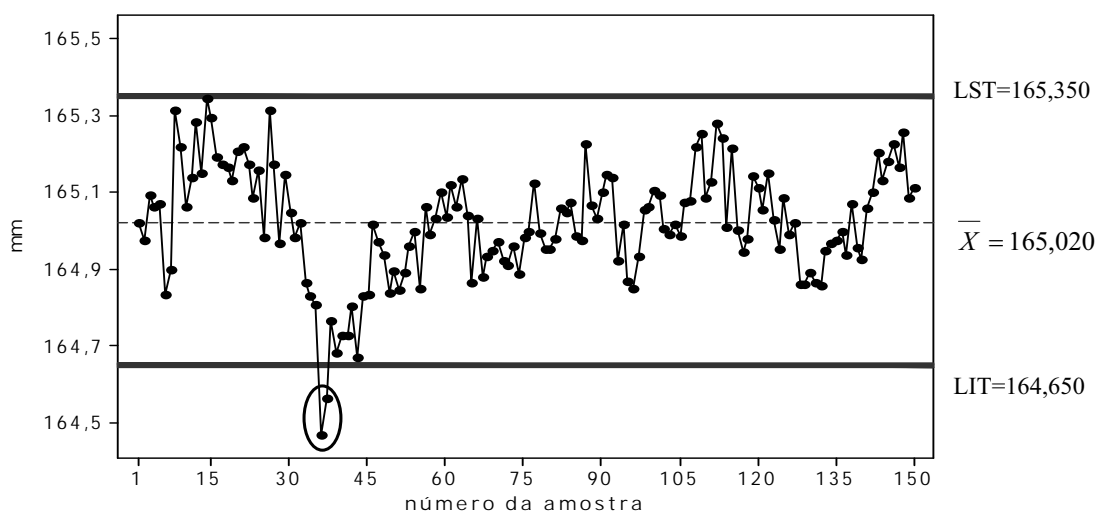


Figura 5.2 – Gráfico sequencial das observações originais

A dimensão encontrada para as amostras 36 e 37 está abaixo do limite inferior de tolerância em consequência de posicionamento incorreto da peça no dispositivo de fixação para usinagem, deficiência que foi corrigida a partir da amostra número 38.

A normalidade das observações foi comprovada (valor  $p > 0,150$ ) segundo o método de Kolmogorov-Smirnov, veja Figura 5.3. As observações foram utilizadas no gráfico de  $X$ , com os limites de controle estabelecidos por  $[\bar{X} \pm 3(\overline{MR}/d_2)]$ , onde

$$\overline{MR} = \sum_{i=2}^N MR_i / (N-1), \quad MR_i = |X_i - X_{i-1}| \text{ e } d_2 \text{ é uma constante usada para o cálculo}$$

dos limites de controle (para  $n=2$ ,  $d_2=1,128$ ). Muitos valores foram encontrados na região de ação (observações 8, 12, 14, 15, 26, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 112, 148), caracterizando-se como potenciais alarmes falsos, veja Figura 5.4.

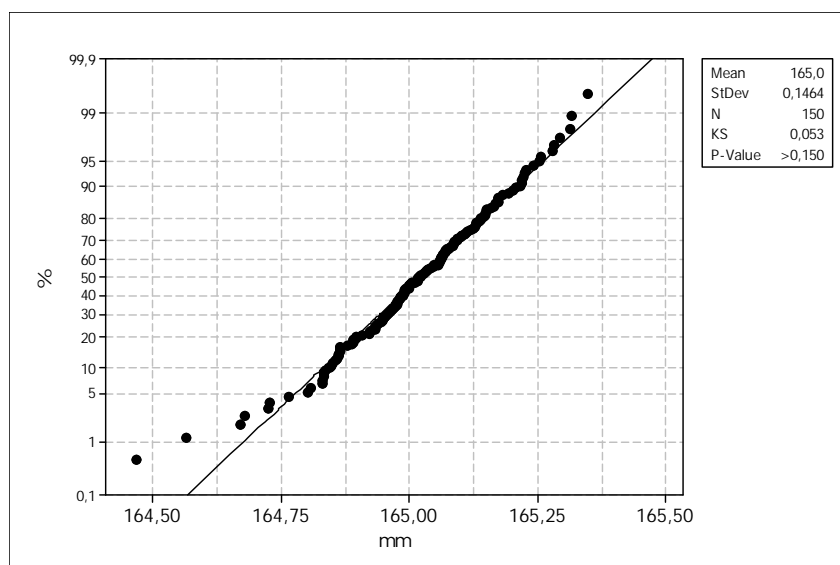


Figura 5.3 – Teste de normalidade das observações originais

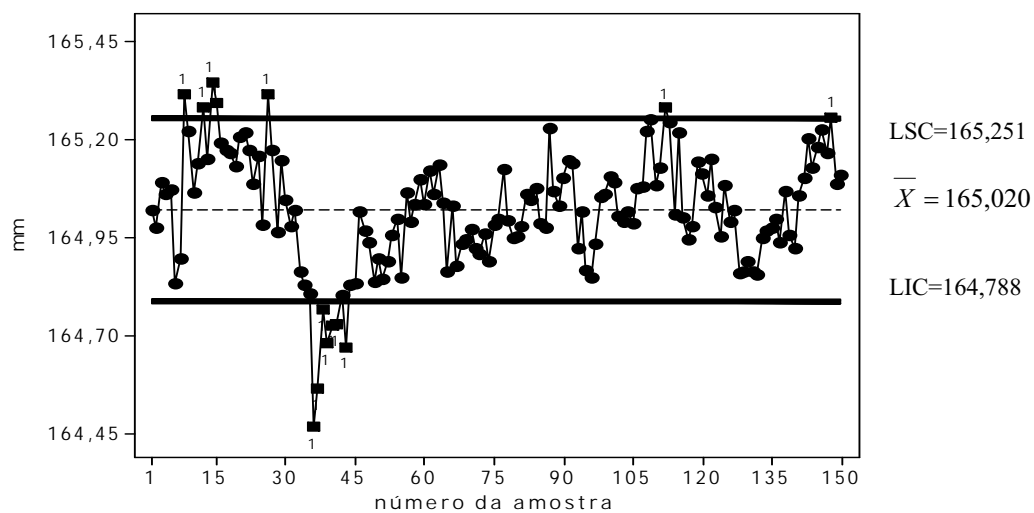


Figura 5.4 – Carta de controle de observações individuais com limites não ajustados a correlação

Para testar a independência das observações, foram construídos os correlogramas da FAC e da FACP, respectivamente Figuras 5.5 e 5.6. A análise gráfica da FAC mostra valores significativos de correlação nos *lags* 1 a 6 e decaimento exponencial combinado com senóide amortecida. No correlograma da FACP encontra-se

correlação significativa entre os *lags* 1 e 3 e decaimento na forma de senóide amortecida.

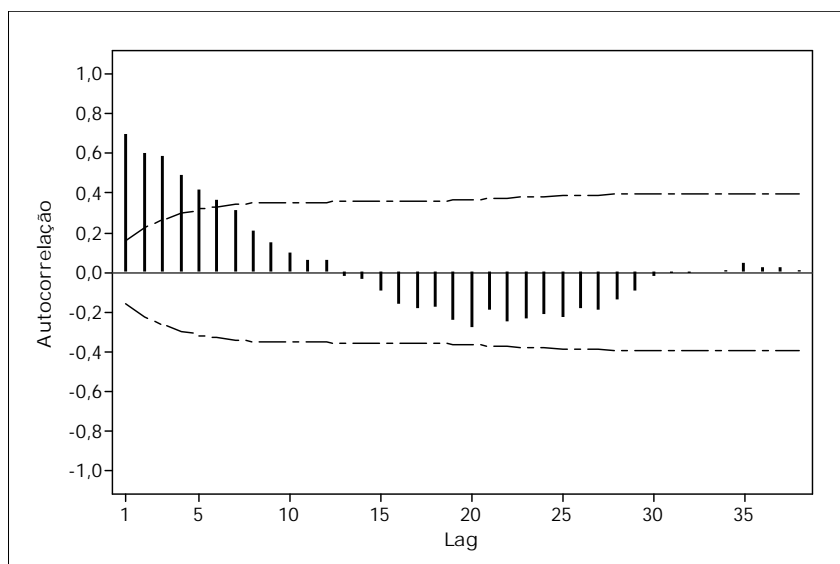


Figura 5.5 – Função autocorrelação das observações originais

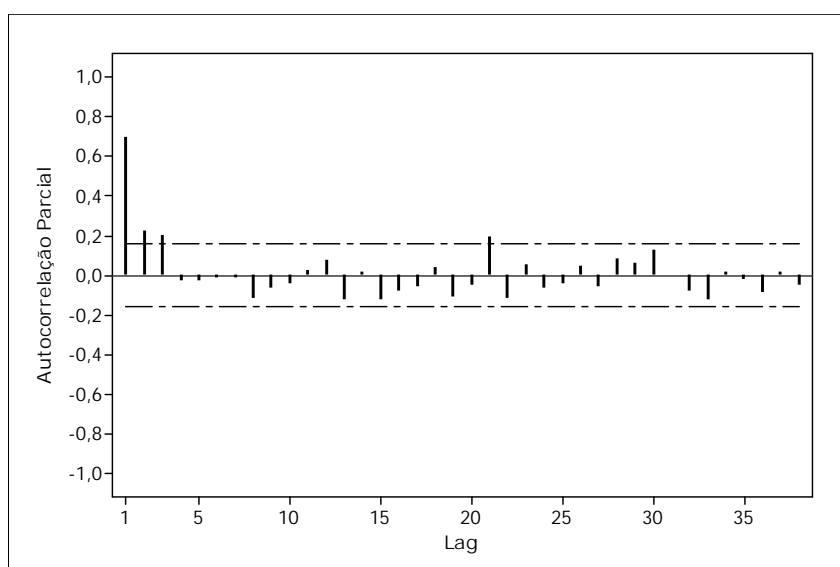


Figura 5.6 – Função autocorrelação parcial das observações originais



Este padrão indica (com base nos conceitos vistos no Capítulo 2) que preliminarmente é possível ajustar as observações a um modelo ARMA(1,1). As Tabelas 5.2 e 5.3 apresentam os dados sumarizados deste ajuste.

Tabela 5.2 – Valor e significância dos coeficientes do modelo

parâmetros	estimativas	valor t	valor p
$\phi$	0,894	17,98	0,000
$\theta$	0,411	4,13	0,000
soma dos quadrados dos resíduos=1,502			

Tabela 5.3 - Teste da independência de resíduos

estatística qui-quadrado (Ljung-Box) modificada por Box-Pierce			
<i>Lag</i>	12	24	36
Qui-quadrado	7,2	26,5	36,2
valor p	0,619	0,187	0,321

Os resíduos do modelo se distribuem normalmente, veja Figura 5.7, indicando que ele está apropriado.

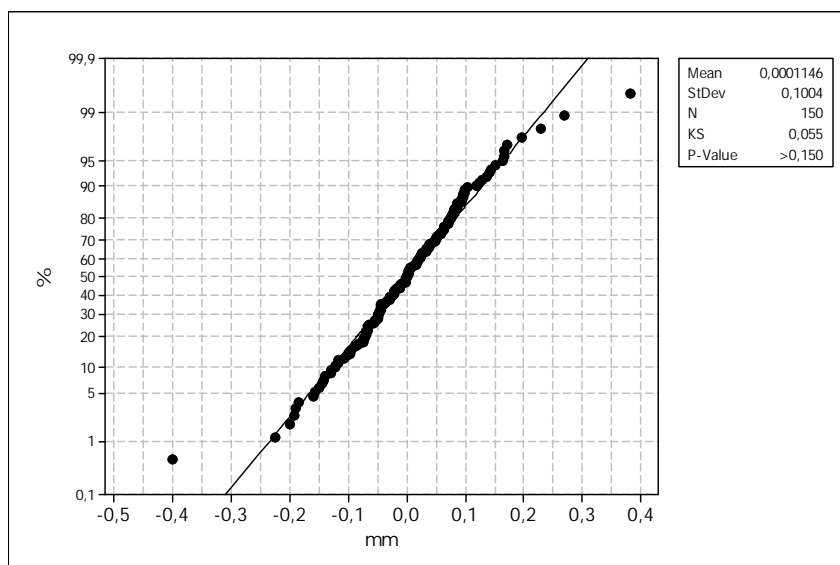


Figura 5.7 - Teste de normalidade dos resíduos do modelo das observações originais

Como os resíduos são independentes e normalmente distribuídos, pode-se levá-los a um gráfico de EWMA ou de  $X$  e observar o estado do processo. Nesta aplicação prática optou-se pelo uso dos resíduos para construir um gráfico de observações individuais, veja Figura 5.8.

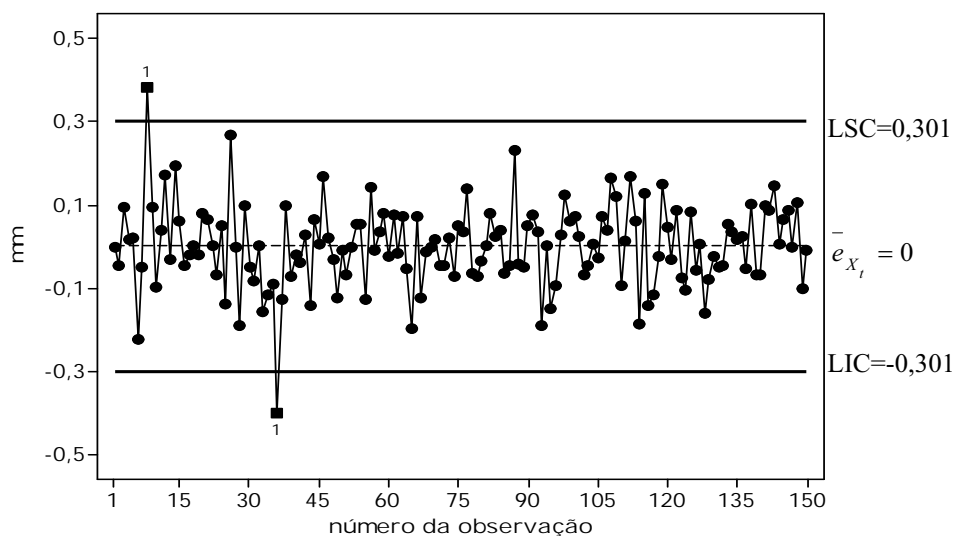


Figura 5.8 – Gráfico de controle de observações individuais dos resíduos do modelo ajustado

A maior parte dos pontos além dos limites de controle, veja Figura 5.4, eram efetivamente alarmes falsos, entretanto as observações 8 e 36 estão na região de ação da carta, sugerindo a presença de causas especiais no processo enquanto as 150 observações estavam sendo coletadas.

A técnica de análise de intervenção, (veja Capítulo 2), foi empregada para modelar dados discrepantes na amostra inicial de valores e os resultados são apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Observações originais discrepantes e valores ajustados

observação	valor original	tipo de discrepância	$\omega$	$ \lambda_i $	valor ajustado
8	165,314	Inovação	0,383	3,815	164,987
36	164,469	Inovação	-0,400	3,980	164,982
37	164,564	Inovação	-0,374	3,874	164,953

Substituindo-se os valores originais das observações 8, 36 e 37 pelos valores ajustados, a variabilidade e os parâmetros do modelo se alteram, veja Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Alterações na variabilidade e parâmetros do modelo

	resíduos		observações		parâmetros		autocorrelação
	$\sigma_x$	$\sigma_x^2$	$\sigma_x$	$\sigma_x^2$	$\phi$	$\theta$	$\rho_1$
observações originais	0,100	0,010	0,146	0,021	0,894	0,411	0,703
após modelagem	0,094	0,009	0,132	0,017	0,880	0,403	0,679

O gráfico de valores individuais dos resíduos após a modelagem dos dados está isento de observações discrepantes, veja Figura 5.9.

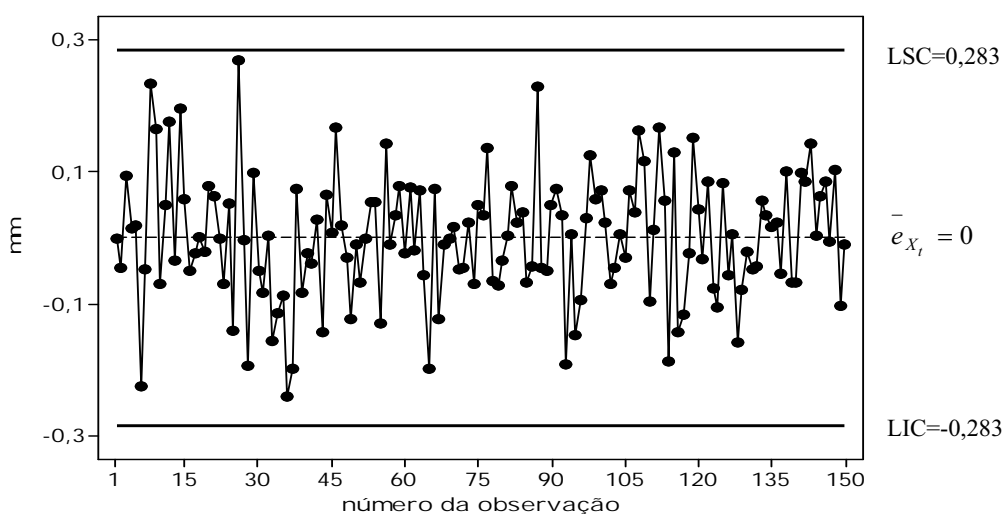


Figura 5.9 – Gráfico de controle de valores individuais dos resíduos do modelo após análise de intervenção (processo em controle)

Optando-se por um gráfico com amostragem dupla com  $n_1=1$ ,  $n_2=4$  e  $\bar{n}=3$  para monitoramento do processo, a influência da aplicação da técnica de análise de intervenção na determinação dos limites é mostrada na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Efeito da análise de intervenção sobre os limites de controle

	observações originais	após modelagem	diferença relativa
$L_1$	0,674	0,674	
$\sigma_{\bar{X}_1}$	0,147	0,135	
$L_1 \cdot \sigma_{\bar{X}_1}$	0,099	0,091	<b>8,10%</b>
$L_2$	2,999	3,002	
$\sigma_{\bar{Y}}$	0,124	0,111	
$L_2 \cdot \sigma_{\bar{Y}}$	0,372	0,333	<b>10,50%</b>

As diferenças nos limites, para este conjunto de dados em particular, são razoáveis em razão da magnitude e quantidade de dados discrepantes identificados. A região em controle após modelagem tornou-se mais estreita, aumentando o poder de detecção do dispositivo estatístico.

Para ilustrar o uso prospectivo da carta, foram simulados 356 valores, segundo a equação definidora do modelo e com os coeficientes e variâncias estabelecidos após modelagem dos dados originais, usados para formar 15 subgrupos ( $n_1 = 1$ ;  $n_2 = 4$ ;  $n = 5$ ) com intervalo de amostragem equivalente a 20 observações. O gráfico resultante é apresentado na Figura 5.10. No primeiro estágio são mostrados no gráfico apenas os limites de advertência com abertura  $\bar{X}_0 \pm L_1 \sigma_{\bar{X}_1}$ , identificados por LIA (inferior) e LSA (superior); no segundo estágio os limites de controle abertos com  $\bar{X}_0 \pm L_2 \sigma_{\bar{Y}}$  estão identificados por LIC (inferior) e LSC (superior). Os limites de ação do primeiro estágio, com fator de abertura  $L=5,00$ , não são mostrados no gráfico. Os valores de  $\bar{X}_1 = X_1$  estão registrados no eixo vertical esquerdo do gráfico e os valores de  $\bar{Y}$  no eixo vertical direito (os eixos têm escalas coincidentes). Nenhum alarme falso foi observado nas condições deste exemplo.

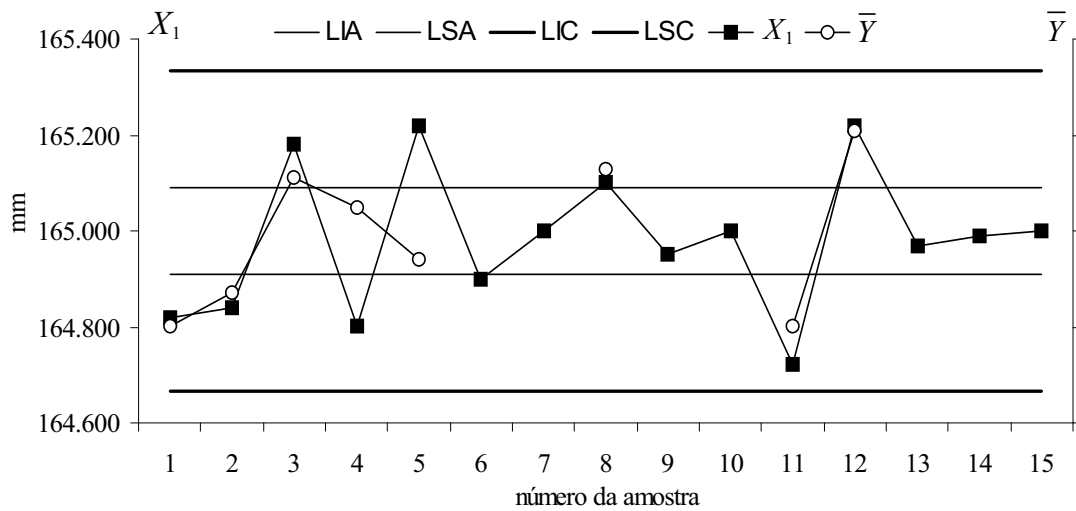


Figura 5.10 – Gráfico com amostragem dupla após ajuste das observações pelo método de análise de intervenção (processo em controle)

## 5.2 COMPARANDO O DESEMPENHO DE CARTAS DE CONTROLE

O propósito neste exemplo é mostrar o efeito da autocorrelação sobre a capacidade dos gráficos de  $\bar{X}$  e com amostragem dupla em detectar deslocamentos na média. Para esta finalidade, considerando-se um modelo AR(1) com  $\phi = 0,5$  e resíduos dados por uma distribuição IID  $N(0,1)$ , foram simuladas 435 observações de um processo, das quais foram formados 25 subgrupos ( $n=3$ ) com intervalo de amostragem fixado em 15 observações, suficientemente grande para atenuar a zero o efeito da autocorrelação entre eles. Assumindo inicialmente o processo em controle com  $\mu_0 = 0$ , as médias de cada subgrupo foram computadas e plotadas no gráfico de  $\bar{X}$  com desvio padrão do processo estimado por  $\bar{R}/d_2$ , onde  $\bar{R}$  é a amplitude média de 25 amostras. Os limites de controle resultantes,  $LC = \pm 1,387$ , foram determinados por  $LC = \bar{\bar{X}} \pm (3\bar{R}/d_2 \sqrt{n})$  com  $\bar{R} = 1,356$ ,  $d_2 = 1,693$  (MONTGOMERY, 2001) e ignorando a correlação em série, veja Figura 5.11. A presença de pontos na região de ação da carta (amostras 4, 16 e 25) indica que os limites estão muito estreitos e há alta probabilidade de alarme falso. A seguir, com o mesmo conjunto de dados e com  $\sigma_{\bar{X}}$

determinado por meio da expressão (2.1), foram calculados novos limites de controle,  $LC = \pm 3\sigma_{\bar{X}} = \pm 2,708$ , que levam em conta a autocorrelação. Além disto, as últimas 20 amostras foram simuladas novamente com  $\mu_1 = \sigma_x$ ; isto é, considerou-se a média deslocada em um desvio-padrão do processo. Neste caso, a carta de controle sinaliza pela primeira vez na amostra 14 (Número de amostras até o sinal=NA=9), ver Figura 5.12.

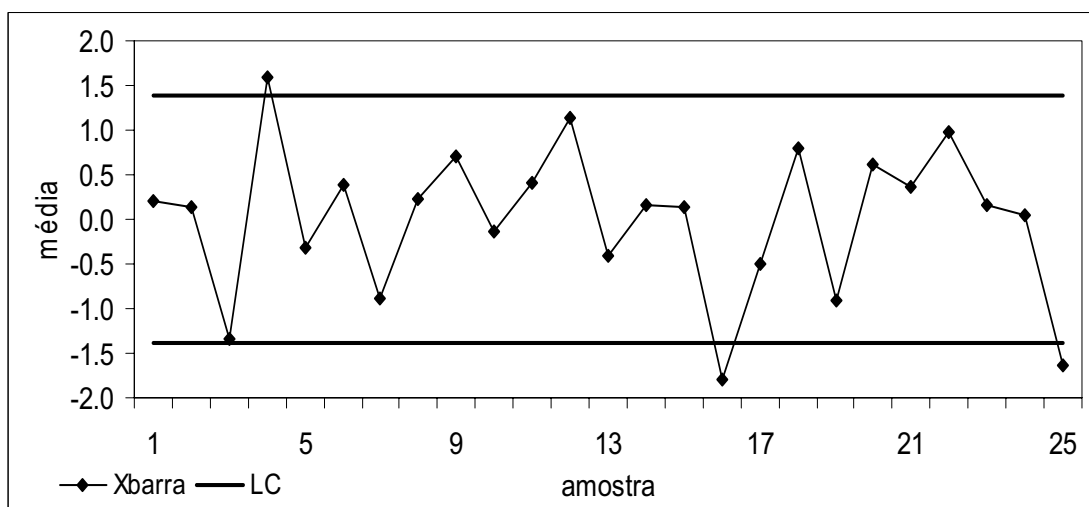


Figura 5.11 - Alarmes falsos na carta de  $\bar{X}$

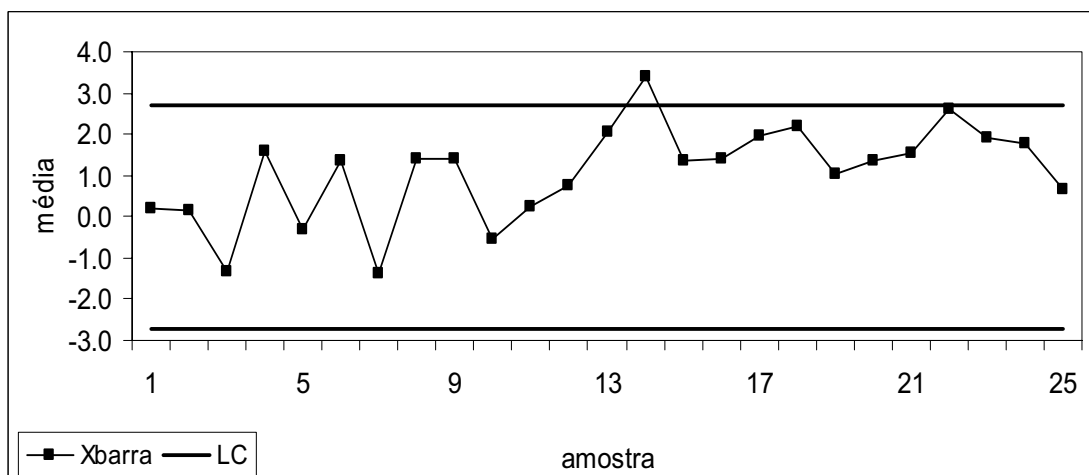


Figura 5.12 – Carta de  $\bar{X}$  com limites de controle corrigidos

Finalmente investigou-se a estratégia de monitoramento usando a carta com amostragem dupla. Um tamanho de amostra de  $n_1=1$  e  $n_2=4$  foi adotado e estabelecido  $\bar{n} = 3$ , de modo a se comparar o desempenho de ambas as cartas na mesma base. Com coeficientes  $L_1=0,6745$  e  $L_2=2,9779$ , os limites de advertência e de controle foram posicionados respectivamente em  $\pm 0,779$  e  $\pm 1,833$ , para o primeiro e segundo estágio (identificados no gráfico respectivamente por LSA e LIA e por LSC e LIC). Os limites de ação do primeiro estágio, com fator de abertura  $L=5,00$ , não são mostrados no gráfico. No eixo vertical esquerdo do gráfico, estão registrados os valores de  $X_1$  e, no eixo vertical direito, os valores de  $\bar{Y}$  (os eixos têm escalas coincidentes). De maneira similar à adotada na carta de médias, as últimas vinte amostras foram simuladas com  $\mu_1 = 1\sigma_X$ . Para este conjunto de dados em particular, a carta agora sinaliza a perturbação na amostra 9 (NA=4), ver Figura 5.13, substancialmente mais rápido que na simulação anterior com a carta de médias (no gráfico estão registrados apenas os valores obtidos até o sinal).

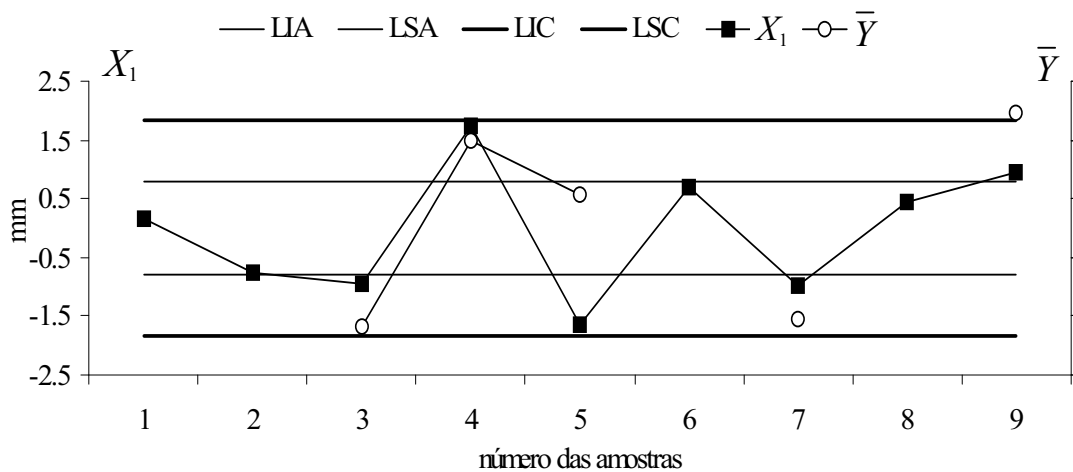


Figura 5.13 – Detecção da perturbação com o gráfico com amostragem dupla

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

### 6.1 CONCLUSÕES

Como processos autocorrelacionados são freqüentemente encontrados nos ambientes de manufatura é importante que possam ser monitorados por dispositivos estatísticos confiáveis e eficientes.

Sabe-se que o gráfico de  $\bar{X}$ , por sua simplicidade, é uma das mais populares ferramentas da qualidade, entretanto, sua principal desvantagem é a baixa eficiência para sinalizar pequenos desajustes na média do processo, característica esta ainda mais marcante na presença de autocorrelação positiva.

Em busca de métodos de monitoramento mais eficientes, foi estudado o gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla, admitindo-se que as observações se ajustassem a diferentes modelos estacionários e parcimoniosos da família ARIMA. Os gráficos de médias, de EWMA e de  $\bar{X}$  com amostras de tamanho variável foram selecionados como esquemas concorrentes. Em todos os casos, os limites de controle foram derivados analiticamente, levando-se em conta a autocorrelação, e calibrados para uma mesma taxa de alarmes falsos. A redução do poder do gráfico, resultante da dependência em série, foi quantificada em cada processo e para todos os diferentes dispositivos de monitoramento considerados. Comparando-se, em condições de igualdade, o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla ao desempenho dos esquemas concorrentes, destacam-se as seguintes conclusões:

- O gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla é sempre mais eficiente do que o gráfico padrão de  $\bar{X}$  e do que o gráfico de  $\bar{X}$  com amostras de tamanho variável;
- O gráfico de EWMA com  $\lambda = 0,25$  é geralmente mais eficiente do que o gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla no intervalo  $0,25 \leq \delta \leq 1,00$  qualquer que seja o nível de autocorrelação do processo;
- O gráfico de  $\bar{X}$  com amostragem dupla é, em geral, mais eficiente do que o gráfico de EWMA com  $\lambda = 0,50$  ou  $\lambda = 0,75$ .



## 6.2 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

a) Estender o uso do gráfico de controle com amostragem dupla a processos não estacionários: Deming (1986) afirma que nenhum processo, exceto aqueles cujas observações são criadas artificialmente com o uso de números aleatórios, é realmente estacionário (“*No process, except in artificial demonstrations by use of random numbers, is steady and unwavering*”). Observações provenientes de determinados processos de manufatura podem ser ajustadas ao modelo integrado de médias móveis de primeira ordem (BOX; PANIAGUA-QUIÑONES, 2007). A equação do modelo é dada por  $x_t = x_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}$  e, como a média das observações originais não é constante ao longo do tempo, a variância é alta e a correlação é fortemente positiva, torna-se sobremaneira difícil o estabelecimento de um instrumento eficaz de controle direto sobre as observações geradas. Considera-se a extensão do gráfico de controle com amostragem dupla a processos com tendência uma interessante via de prosseguimento à pesquisa iniciada com esta tese.

b) Estender o uso do gráfico de controle com amostragem dupla a processos autocorrelacionados cujo ruído branco seja exponencialmente distribuído: a distribuição exponencial é freqüentemente usada na área de confiabilidade para modelar a porção plana da “curva da banheira”, quando as falhas são de natureza aleatória e ocorrem devido a efeitos ambientais, não se identificando um mecanismo preponderante para a sua ocorrência. Suponha, por exemplo, um processo de produção de lâmpadas do qual em intervalos periódicos se coleta uma amostra em que se testa o tempo de vida do produto, considerado a variável de interesse. Neste caso é de se esperar que os dados obtidos apresentem certo grau de correlação em série e o uso de um gráfico de controle com amostragem dupla projetado apropriadamente pode contribuir no monitoramento deste processo.

c) Realizar o projeto econômico para o gráfico com amostragem dupla no monitoramento de processos autocorrelacionados: no projeto econômico da carta de controle, são estudados analiticamente os valores ótimos de tamanho de amostra, freqüência de amostragem e coeficientes dos limites de controle e busca-se encontrar a relação entre estes parâmetros e fatores econômicos, tais como os custos de

amostragem e teste, custos para investigar e remover a causa especial quando ela atua no processo e também o custo associado ao fornecimento de produto não conforme ao cliente. Como parte do estudo, diversas hipóteses são formuladas, entre outras, o modelo do processo, a natureza das transições entre os estados em controle e fora de controle, a distribuição que modela a ocorrência da causa especial, se a causa especial é única ou múltipla, se a produção é ou não interrompida enquanto se investiga a origem da causa especial, a necessidade de restrições tais que fatores econômicos ótimos não sejam antagônicos com as propriedades estatísticas desejáveis ao gráfico de controle, como por exemplo, as taxas de erro tipo I e tipo II. A pesquisa sobre projeto econômico de diversos tipos de gráficos de controle para processos independentes é bastante extensa. Há também outras iniciativas mais recentes voltadas ao estudo econômico de gráficos de controle de médias usados em processos cujas observações apresentam correlação cruzada (LIU; CHOU; CHEN, 2002), entretanto, o estudo nesta área com processos autocorrelacionados que usam a média como estatística de controle é bastante restrito.

## REFERÊNCIAS

ALWAN, L. C. The problem of misplaced control limits. **Applied Statistics**, v. 44, n. 3, p. 269-278, 1995.

ALWAN, L. C.; RADSON, D. Time-series investigation of subsample mean charts. **IIE Transactions**, v. 24, n. 5, p. 66-80, 1992.

ALWAN, L. C.; ROBERTS, H. V. Time-series modeling for statistical process control. **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 6, n. 1, p. 87-95, 1988.

ALWAN, L. C. **Statistical Process Analysis**. Irwin/McGraw-Hill, 1<sup>st</sup>. ed.; 751 p., 2000.

ATIENZA, O. O.; TANG, L. C.; ANG, B. W. A SPC procedure for detecting level shifts of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v. 30, n. 4, p. 340-350, 1998.

BAXLEY JR., R. V. An application of variable sampling interval control charts. **Journal of Quality Technology**, v. 27, n. 4, p. 275-282, 1995.

BERTHOUEX, P. M.; HUNTER, W. G.; PALLESEN, L. Monitoring sewage treatment plants: some quality control aspects. **Journal of Quality Technology**, v. 10, n. 4, p. 139-149, 1978.

BISCHAK, D. P.; KELTON, W. D.; POLLOCK, S. M. Weighted batch means for confidence intervals in steady-state simulations. **Management Science**, v. 39, n. 8, p. 1002-1019, 1993.

BISGAARD, S.; KULAHCI, M. Quality quandaries: the effect of autocorrelation on statistical quality control procedures. **Quality Engineering**, v. 17, n. 4, p. 481-489, 2005.

BISGAARD, S.; KULAHCI, M. Quality quandaries: practical time series modeling. **Quality Engineering**, v. 19, n. 3, p. 253-262, 2007.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. 3<sup>rd</sup> ed., Englewood Cliffs: Prentice-Hall, NJ-USA, 784 p., 1994.

BOX, G. E. P.; PANIAGUA-QUIÑONES, C. Two charts: not one. **Quality Engineering**, v. 19, n. 2, p. 93-100, 2007.

CAROT, V., JABALOYES, J. M., CAROT, T. Combined double sampling and variable sampling interval  $\bar{X}$  chart. **International Journal of Production Research**, v. 40, n. 9, p. 2175-2186, 2002.

CASTILLO, E. D. **Statistical Process Adjustment for Quality Control**. 1<sup>st</sup> ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 357 p., 2002.

CHAMP, C. W.; APARISI, F. Double sampling Hotelling's  $T^2$  chart. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 24, n. 2, p. 153-166, 2008.

CHANG, I.; TIAO, G. C.; CHEN, C. Estimation of time series parameters in the presence of outliers. **Technometrics**, v. 30, n. 2, p. 193-204, 1988.

CHATFIELD, C. **The Analysis of Time Series, an Introduction.** 6<sup>th</sup> ed., Washington, D.C., 352 p., 2004.

ÇINLAR, E. **Introduction to Stochastic Processes.** 1<sup>st</sup>. ed., NJ: Prentice Hall, 402 p., 1975.

CLARO, F. A. E.; COSTA, A. F. B., MACHADO, M. A. G. Gráficos de controle de EWMA e  $\bar{X}$  para monitoramento de processos autocorrelacionados. **Produção**, v. 17, n. 3, p. 536-546, 2007.

COSTA, A. F. B.  $\bar{X}$  charts with variable sample size. **Journal of Quality Technology**, v. 26, n. 3, p. 155-163, 1994.

COSTA, A. F. B.; CLARO, F. A. E. Double sampling  $\bar{X}$  control chart for a first-order autoregressive and moving average process model. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, in-press: DOI 10.1007/s00170-007-1230-6, 2007.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI; L. C. R. **Controle Estatístico de Qualidade.** 2<sup>a</sup>. ed., São Paulo: Editora Atlas, 334 p., 2005.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Synthetic control charts with two-stage sampling for monitoring bivariate processes. **Pesquisa Operacional**, v. 27, n. 1, p. 117-130, 2007.

CROASDALE, P. Control charts for a double sampling scheme based on average production run length. **International Journal of Production Research**, v. 12, n. 5, p. 585-592, 1974.

CROWDER, S. V.; HAWKINS, D. M.; REYNOLDS JR, M. R.; YASHCHIN, E. Process control and statistical inference. **Journal of Quality Technology**, v. 29, n. 2, p. 134-139, 1997.

CRYER, J. D. **Time Series Analysis**. 2<sup>nd</sup> ed., Boston-Duxbury, 289 p., 1986.

CRYER, J. D.; RYAN, T.P. The estimation of sigma for an  $X$  chart:  $MR/d_2$  or  $S/c_4$ ? **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 3, p. 187-192, 1990.

DAUDIN, J. J. Double sampling  $\bar{X}$  charts. **Journal of Quality Technology**, v. 24, n. 2, p. 78-87, 1992.

DEMING, W. E. **Out of the Crisis**. Massachusetts Institute of Technology, Center for advanced engineering study, 1<sup>st</sup> ed.; Cambridge, 507 p., 1986.

DIGEST, R. **O Livro do Automóvel**. 1<sup>a</sup> ed., Lisboa-Portugal, Editora Reader's Digest, 379 p., 1976.

ENGLISH, J. R.; LEE, S. - C.; MARTIN, T. W.; TILMON, C. Detecting changes in autoregressive processes with  $\bar{X}$  and EWMA charts. **IIE Transactions**, v. 32, n. 12, p. 1103-1113, 2000.

FALTIN, F.; MASTRANGELO, C. M.; RUNGER, G. C.; RYAN, T. P. Considerations in the monitoring of autocorrelated and independent data. **Journal of Quality Technology**, v. 29, n. 2, p. 131-133, 1997.

FISHMAN, G. S. Grouping observations in digital simulation. **Management Science**, v. 24, n. 5, p. 510-521, 1978.

GILBERT, K. C.; KIRBY, K.; HILD, C. R. Charting autocorrelated data: guidelines for practitioners. **Quality Engineering**, v. 9, n. 3, p. 367-382, 1997.

HE, D.; GRIGORYAN, A. Multivariate multiple sampling charts. **IIE Transactions**, v. 37, n. 6, p. 509-521, 2005.

HOERL, R. W.; PALM, A. C. Discussion: integrating SPC and APC. **Technometrics**, v. 34, n. 3, p. 268-272, 1992.

IRIANTO, D., SHINOZAKI, N. An optimal double sampling  $\bar{X}$  control chart. **International Journal of Industrial Engineering**, v. 5, n. 3, p. 226-234, 1998.

LIU, H. - R.; CHOU, C. - Y., CHEN, C.- H. Minimum-loss design of  $\bar{X}$ -bar charts for correlated data. **Journal of Loss Prevention in the Process Industries**, v. 15, n. 6, p. 405-411, 2002.

LU, C. - W.; REYNOLDS JR., M. R. Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 3, p. 259-274, 1999.

LU, C. - W.; REYNOLDS JR., M. R. EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 2, p. 166-188, 1999a.

LU, C. - W.; REYNOLDS JR., M. R. CUSUM charts for monitoring an autocorrelated process. **Journal of Quality Technology**, v. 33, n. 3, p. 316-334, 2001.

MARAGAH, H. D.; WOODALL, W. H. The effect of autocorrelation on the retrospective  $\bar{X}$ -chart. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 40, n. 1 & 2, p. 29-42, 1992.

MINITAB, INC. **Minitab Statistical Software**. release 14.1, State College, Pennsylvania, EUA, 2003.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control**, 4<sup>th</sup> ed., Ed. John Wiley and Sons, 674 p., 2001.

MONTGOMERY, D. C.; MASTRANGELO, C. M. Some statistical process control methods for autocorrelated data. **Journal of Quality Technology**, v. 23, n. 3, p. 179-193, 1991.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de Séries Temporais**. 1<sup>a</sup>. ed., São Paulo: Ed. Edgard Blucher Ltda., 535 p., 2004.

PADGETT, C. S.; THOMBS, L. A.; PADGETT, W. J. On the  $\alpha$ -risks for Shewhart control charts. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 21, n. 4, p.1125 – 1147, 1992.

PAGE, E. S. Control charts for the mean of a normal population. **Journal of the Royal Statistical Society-Series B**, v. 16, n. 1, p.131-135, 1954.

REYNOLDS JR., M. R., ARNOLD, J. C., BAIK, J. W. Variable sampling interval  $\bar{X}$  charts in the presence of correlation. **Journal of Quality Technology**, v. 28, n. 1, p. 12-30, 1996.



ROBERTS, S. W. Control chart tests based on geometric moving averages. **Technometrics**, v. 1, n. 3, p. 239-250, 1959.

RUNGER, C. G. Assignable causes and autocorrelation: control charts for observations or residuals? **Journal of Quality Technology**, v. 34, n. 4, p. 165-170, 2002.

RUNGER, C. G.; WILLEMAIN, T. R. Model-based and model-free control of autocorrelated process. **Journal of Quality Technology**, v. 27, n. 4, p. 283-292, 1995.

RUNGER, C. G.; WILLEMAIN, T. R. Batch-means control charts for autocorrelated data. **IIE Transactions**, v. 28, n. 6, p. 483-487, 1996.

RUNGER, G. C.; WILLEMAIN, T. R.; PRABHU, S. Average run lengths for CUSUM control charts applied to residuals. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v. 24, n. 1, p. 273-282, 1995.

SACCUCCI, M. S.; LUCAS, J. L. Average run lengths for exponentially weighted moving average control schemes using the Markov chain approach. **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 2, p. 154-162, 1990.

SCHNEIDER, H.; PRUETT, J. M. Control charting issues in the process industries. **Quality Engineering**, v. 6, n. 3, p. 347 – 373, 1994.

SHEWHART, W.A. **Economic Control of Quality of Manufactured Product**. D.Van Nostrand Company, NY, 1<sup>st</sup> ed., 501 p., 1931 (republicado em 1980 por American Society for Quality, Chelsea-MI-EUA).

SUN, J.; XU, L. Batch average control chart. **Quality Congress**, in: ASQ's Annual Quality Congress Proceedings, v. 58, p. 85-96; 2004.

SUPERVILLE, C. R.; ADAMS, B. M. An evaluation of forecast-based quality control schemes. **Communications in Statistics-Simulation and Computation**, v. 23, n. 3, p. 645-661, 1994.

TAGARAS, G. A survey of recent developments in the design of adaptive control charts. **Journal of Quality Technology**, v. 30, n. 3, p. 212-231, 1998.

TSENG S.; ADAMS, B.M. Monitoring autocorrelated processes with an exponentially weighted moving average forecast. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 50, n. 3 & 4, p. 187-195, 1994.

VASILOPOULOS, A.V.; STAMBOULIS, A. P. Modification of control charts limits in the presence of data correlation. **Journal of Quality Technology**, v. 10, n. 1, p. 20-30, 1978.

ZHANG, N. F. A statistical control chart for stationary process data. **Technometrics**, v. 40, n. 1, p. 24-37, 1998.

ZHANG, N. F. The batched moving averages of measurement data and their applications in data treatment. **Measurement**, v. 39, n. 9, p. 864-875, 2006.

ZOU, C.; WANG, Z.; TSUNG, F. Monitoring autocorrelated processes using variable sampling schemes at fixed-times. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 24, n. 1, p. 55-69, 2008.

WARDELL, D. G.; MOSCOWITZ, H., PLANTE, R. D. Run-length distributions of special-cause control charts for correlated processes. **Technometrics**, v. 36, n. 1, p. 3-17, 1994.

WEST, D.; DELLANA, S.; JARRETT, J. Transfer function modeling of processes with dynamic inputs. **Journal of Quality Technology**, v. 34, n. 3, p. 315-326, 2002.

WHEELER, D. J.; CHAMBERS, D. S. **Understanding Statistical Process Control**. 2<sup>nd</sup> ed., Ed. SPC Press, 406 p., 1992.

YANG, K.; HANCOCK; W. M. Statistical quality control for correlated samples. **International Journal of Production Research**, v. 28, n. 3, p. 595-608, 1990.

## APÊNDICE A: AS GRANDEZAS $\Delta$ E $\overline{X}_2^*$ E SUAS VARIÂNCIAS

### A1. Processo MA(1)

Neste caso, dada a equação definidora do modelo, as observações são dadas por:

$$X_t = e_t - \theta e_{t-1} \quad (\text{A1})$$

Os termos  $\Delta$  e  $\overline{X}_2^*$  são expressos respectivamente por:

$$\Delta = \left[ \frac{-\theta e_0 + (1-\theta)e_{n_1} + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n_1-1} e_i}{n} \right] \quad (\text{A2})$$

e

$$\overline{X}_2^* = \left[ \frac{e_n + (1-\theta)\sum_{i=n_1+1}^{n-1} e_i}{n_2} \right] \quad (\text{A3})$$

cujas variâncias são:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{1}{n^2} \left[ \theta^2 + (1-\theta)^2 + (n_1-1)(1-\theta)^2 \right] \quad (\text{A4})$$

$$\sigma_{\overline{X}_2^*}^2 = \frac{1}{n_2^2} \left[ 1 + (n_2-1)(1-\theta)^2 \right] \quad (\text{A5})$$

### A2. Processo ARMA(1,1)

Neste caso, considerando-se a equação definidora do modelo e voltando-se a usar substituições recursivas, as observações são expressas por:

para  $t=1$ : 
$$X_t = X_1$$

para  $t > 1$ :

$$X_t = \phi^{t-1} X_1 - \theta e_1 \phi^{t-2} + e_t + J \left( \sum_{i=3}^t \phi^{t-i} e_{i-1} \right) \quad (\text{A6})$$

onde:  $J = \phi - \theta$

de modo análogo aos modelos anteriores, segue-se que:

$$\Delta = \frac{1}{n} \left[ \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \phi^i \right) X_1 - \sum_{i=0}^{n-2} \theta \phi^i e_1 + \left( 1 + \sum_{i=2}^{n_1} \sum_{l=0}^{(n-i-1)} J \phi^l \right) I e_i \right] \quad (\text{A7})$$

onde:  $I \begin{cases} = 0 & \text{para } n_1 = 1 \\ = 1 & \text{para } n_1 \geq 2 \end{cases}$

e

$$\bar{X}_2^* = \frac{1}{n_2} \left[ e_n + \left( e_i + \sum_{i=n_1+1}^{n-1} \sum_{l=0}^{(n-i-1)} J \phi^l e_i \right) \right] \quad (\text{A8})$$

Usando a propriedade da variância para dados independentes, segue-se que:

$$\sigma_{X_2}^2 = \frac{1}{n_2^2} \left[ 1 + \left( 1 + \sum_{i=n_1+1}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-i-1} J \phi^l \right)^2 \right] \quad (\text{A9})$$

Na expressão de  $\Delta$  os termos  $X_1$  e  $e_1$  são correlacionados e  $e_1$  e  $e_i$ , ( $i \geq 2$ ), são independentes. A partir deste ponto, para simplificar a notação, seja  $\Delta$  expresso por:

$$\Delta = \frac{1}{n} (b_1 X_1 - b_2 e_1 + b_3 e_i)$$

onde:

$$b_1 = \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \phi^i \right)$$

$$b_2 = \sum_{i=0}^{n-2} \theta \phi^i$$

$$b_3 = 1 + \sum_{i=2}^{n_1} \sum_{l=0}^{n-i-1} J \phi^l$$

A esperança entre  $X_1$  e  $e_1$  é igual a  $\sigma_e^2$  (Cryer, 1986, p. 71). A covariância entre duas variáveis correlacionadas é  $\text{Cov}(x,y)=E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$ . Como as médias das séries  $X_1$  e  $e_1$  são iguais a zero a covariância entre as variáveis transforma-se em  $\text{Cov}(x,y)=E[(x, y)]$ , logo a esperança entre  $X_1$  e  $e_1$  é igual a covariância entre estas duas variáveis.

As seguintes propriedades são válidas para variáveis correlacionadas (Cryer, 1986, p. 24):

$$\sigma^2(X - Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) \quad (\text{A10})$$

e

$$\text{Cov}(a + bX, c + dY) = bd\text{Cov}(X, Y) \quad (\text{A11})$$

portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}^2 &= \frac{1}{n^2} (b_1^2 \sigma_X^2 + b_2^2 \sigma_e^2 - 2b_1 b_2 \sigma_e^2 + b_3^2 \sigma_e^2) \\ \therefore \sigma_{\Delta}^2 &= \frac{1}{n^2} \left[ \frac{b_1^2 (1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2} + b_2^2 - 2b_1 b_2 + b_3^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

### A3. Processo MA(2)

Neste caso, as observações são descritas por:

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} \quad (\text{A13})$$

de modo análogo aos modelos anteriores, segue-se que:

$$\Delta = \left[ \frac{-\theta_2 e_{.1} - (\theta_1 + \theta_2) e_0 + (1 - \theta_1 - \theta_2) \sum_{i=1}^{n_1} e_i}{n} \right] \quad (\text{A14})$$

e

$$\overline{X}_2^* = \left[ \frac{e_n + (1 - \theta_1) e_{n-1} + (1 - \theta_1 - \theta_2) \sum_{i=n_1+1}^{n-2} e_i}{n_2} \right] \quad (\text{A15})$$

cujas variâncias são respectivamente:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{1}{n^2} \left[ \theta_2^2 + (\theta_1 + \theta_2)^2 + n_1(1 - \theta_1 - \theta_2)^2 \right] \quad (\text{A16})$$

$$\sigma_{\bar{X}_2}^2 = \left[ \frac{1 + (1 - \theta_1)^2 + (n_2 - 2)(1 - \theta_1 - \theta_2)^2}{n_2^2} \right] \quad (\text{A17})$$

#### A4. Processo AR(2)

A partir da equação definidora do modelo e por meio de substituições recursivas, as observações que compõem a amostra são dadas por:

$$\text{para } t = 1: \quad X_t = X_1$$

$$\text{para } t = 2: \quad X_2 = \phi_1 X_1 + \phi_2 X_0 + e_2$$

$$\text{para } t \geq 3: \quad X_t = A_t X_1 + \phi_2 A_{t-1} X_0 + \sum_{j=1}^{t-2} A_{j+1} e_{t-j} + e_t \quad (\text{A18})$$

sendo:

$$A_2 = \phi_1$$

$$A_3 = \phi_1^2 + \phi_2$$

$$\text{e genericamente, para } i \geq 4: \quad A_i = A_{i-1} \phi_1 + A_{i-2} \phi_2$$

de modo análogo aos modelos anteriores, segue-se que:

$$\Delta = \frac{1}{n} \left[ \left( 1 + \sum_{j=2}^n A_j \right) X_1 + \left( 1 + \sum_{j=2}^{n-1} A_j \right) \phi_2 X_0 + \left( 1 + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^{n-i+1} A_j \right) I e_i \right] \quad (\text{A19})$$

$$\text{sendo } I \begin{cases} = 0 & \text{para } n_1 = 1 \\ = 1 & \text{para } n_1 \geq 2 \end{cases}$$

e

$$\bar{X}_2^* = \frac{1}{n_2} \left[ 1 + \sum_{i=n_1+1}^n \sum_{j=2}^{n-i+1} A_j \right] e_i \quad (\text{A20})$$

Usando a propriedade da variância para dados independentes, segue-se que:

$$\sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{1}{n_2^2} \left[ 1 + \left( 1 + \sum_{i=1}^{n_2-1} \sum_{j=2}^{i+1} A_j \right)^2 \right] \quad (\text{A21})$$

Na expressão de  $\Delta$  os termos  $X_1$  e  $X_0$  são correlacionados e  $e_i$  é independente. A partir deste ponto, para simplificar a notação, seja  $\Delta$  expresso por:

$$\Delta = \frac{1}{n} (b_1 X_1 + b_2 X_0 + b_3 e_i)$$

onde:

$$b_1 = \left( 1 + \sum_{j=2}^n A_j \right)$$

$$b_2 = \left( 1 + \sum_{j=2}^{n-1} A_j \right) \phi_2$$

$$b_3 = \left( 1 + \sum_{i=2}^{n_1} \sum_{j=2}^{(n-i+1)} A_j \right)$$

e, de modo análogo ao apresentado para o modelo ARMA(1,1), tem-se:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{1}{n^2} (b_1^2 \sigma_X^2 + b_2^2 \sigma_X^2 + 2b_1 b_2 \sigma_X^2 + b_3^2) \quad (\text{A22})$$



# **APÊNDICE B**

---

## **LIMITES E EFICIÊNCIA**

**DOS**

**GRÁFICOS DE CONTROLE**

---

Tabela B.1 – NMA, gráfico de médias, processos IID e autocorrelacionados,  $NMA_0=370,4$

n	$\delta$	AR(1)		MA(1)		ARMA(1,1)		AR(2)		MA(2)					
		$\phi$	$\theta$	$\phi$	$\theta$	$\phi$	$\theta$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$				
3	IID	0,25	0,50	0,75	-0,127	-0,268	-0,451	0,200	0,150	0,100	0,50	-0,12	-0,900	0,100	
		184,3	215,6	242,2	263,7	199,6	211,7	223,9	220,9	249,2	270,2	253,1	239,2	240,8	220,8
	0,50	83,5	108,0	132,1	71,2	81,2	90,6	88,0	115,3	140,3	119,6	105,0	106,6	87,9	
	0,75	34,1	48,4	64,2	27,7	32,9	38,1	36,6	53,0	70,0	55,8	46,5	47,5	36,6	
	1,00	9,8	15,6	23,5	32,9	12,3	15,0	17,7	16,9	26,1	36,6	27,8	22,4	23,0	16,9
	1,25	5,0	8,0	12,4	18,1	6,3	7,7	9,2	8,7	14,0	20,3	15,0	11,8	12,1	8,7
	1,50	2,9	4,6	7,2	10,6	3,6	4,4	5,3	5,0	8,1	12,0	8,7	6,8	7,0	5,0
4	IID	1,75	2,9	4,5	6,6	2,4	2,8	3,3	3,2	5,1	7,5	5,4	4,3	4,4	3,2
		2,00	1,5	2,1	3,0	4,4	1,7	2,0	2,3	2,2	3,4	5,0	3,6	2,9	3,0
	0,25	155,2	192,3	226,7	256,7	172,5	187,3	200,0	200,6	237,8	266,1	246,9	220,4	224,9	195,2
	43,9	66,1	93,1	123,7	53,5	62,7	71,5	71,9	103,5	135,0	112,8	87,6	91,5	68,1	
	0,75	15,0	25,1	39,5	58,4	19,1	23,4	27,8	28,0	45,7	66,3	51,4	36,4	38,6	26,1
	1,00	6,3	11,0	18,5	29,4	8,2	10,2	12,4	12,5	21,9	34,2	25,2	16,8	18,0	11,5
	1,25	3,2	5,6	9,6	15,9	4,2	5,2	6,3	6,4	11,5	18,8	13,4	8,7	9,3	5,8
5	IID	1,50	2,0	3,3	5,5	2,5	3,0	3,6	3,7	6,6	11,1	7,8	5,0	5,4	3,4
		1,75	1,4	2,2	3,5	5,8	1,7	2,0	2,4	2,4	4,2	6,9	4,9	3,2	3,4
	2,00	1,2	1,6	2,4	3,9	1,3	1,5	1,7	1,7	2,8	4,6	3,3	2,2	2,3	1,6
	133,1	173,0	212,7	249,8	151,1	166,6	180,1	183,4	227,2	262,3	241,7	203,3	209,5	174,2	
	33,4	53,7	81,2	115,9	41,8	50,1	58,1	60,1	93,6	130,3	107,4	73,9	78,7	54,5	
	0,75	10,8	19,3	32,9	53,4	14,1	17,6	21,2	22,2	39,8	63,0	48,0	29,0	31,5	19,6
	1,00	4,5	8,2	15,0	26,4	5,9	7,5	9,2	9,6	18,6	32,2	23,3	13,0	14,3	8,4
5	IID	1,25	2,4	4,2	7,7	3,1	3,8	4,7	4,9	9,7	17,6	12,3	6,6	7,3	4,3
		1,50	1,6	2,5	4,4	8,2	1,9	2,3	2,7	2,9	5,6	10,3	7,1	3,8	4,2
	1,75	1,2	1,7	2,8	5,1	1,4	1,6	1,9	1,9	3,5	6,4	4,4	2,5	2,7	1,7
	2,00	1,1	1,3	2,0	3,4	1,2	1,3	1,4	1,5	2,4	4,3	3,0	1,8	1,9	1,4
	173,0	212,7	249,8	298,8	151,1	166,6	180,1	183,4	227,2	262,3	241,7	203,3	209,5	174,2	

Tabela B.2 – NMA e limites de controle (LC), gráfico de EWMA, processos IID e autocorrelacionados,  $n=3$  e  $NMA_0=370,4$

$\lambda$	$\delta$	AR(1)			MA(1)			ARMA(1,1)			AR(2)		MA(2)				
		$\phi$	$\theta$	$\theta$	$\phi$	$\theta$	$\theta$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$						
0,25	IID	0,25	72,4	92,7	113,6	-0,127	-0,268	-0,451	0,200	0,150	0,100	0,50	-0,12	0,25	0,56	-0,387	-0,545
		0,50	18,2	24,5	32,0	62,3	70,4	78,2	76,0	99,0	120,8	102,7	90,2	28,0	23,7	91,5	76,0
	0,75	6,4	8,4	10,9	14,0	7,2	8,1	9,0	8,8	11,8	15,2	12,3	10,5	12,3	10,5	10,7	8,8
	1,00	4,1	5,2	6,5	8,1	4,6	5,1	5,6	5,4	7,0	8,8	7,3	6,4	7,3	6,4	6,5	5,4
	1,25	3,1	3,8	4,6	5,6	3,4	3,7	4,0	3,9	4,9	6,0	5,1	4,5	5,1	4,5	4,6	3,9
	1,50	2,5	3,0	3,6	4,3	2,7	2,9	3,2	3,1	3,8	4,6	3,9	3,5	3,9	3,5	3,6	3,1
	1,75	2,1	2,5	3,0	3,5	2,3	2,5	2,6	2,6	3,1	3,7	3,2	2,9	3,2	2,9	2,9	2,6
	2,00	1,9	2,2	2,5	3,0	2,0	2,2	2,3	2,2	2,7	3,1	2,7	2,5	2,7	2,5	2,5	2,2
	LC	0,632	0,766	0,989	1,473	0,689	0,756	0,850	0,794	1,078	1,823	1,155	1,002	1,155	1,002	1,190	0,871
	0,50	IID	0,25	119,8	147,0	225,1	105,4	117,1	127,9	124,9	154,8	180,6	159,5	143,8	159,5	143,8	145,5
0,50			31,0	43,0	94,5	25,6	30,0	34,3	33,1	46,9	61,5	49,3	41,5	49,3	41,5	42,3	33,1
0,75		8,1	11,8	16,7	42,6	9,7	11,4	13,1	12,6	18,4	25,1	19,5	16,0	19,5	16,0	16,4	12,6
1,00		4,4	6,1	8,4	21,9	5,1	5,9	6,7	6,5	9,2	12,6	9,8	8,1	9,8	8,1	8,3	6,5
1,25		2,9	3,9	5,2	12,8	3,4	3,8	4,2	4,1	5,6	7,5	5,9	5,0	5,9	5,0	5,1	4,1
1,50		2,2	2,8	3,6	8,3	2,5	2,8	3,1	3,0	3,9	5,0	4,1	3,5	4,1	3,5	3,6	3,0
1,75		1,8	2,2	2,8	5,9	2,0	2,2	2,4	2,3	3,0	3,7	3,1	2,7	3,1	2,7	2,8	2,3
2,00		1,6	1,9	2,3	4,5	1,7	1,8	2,0	2,0	2,4	3,0	2,5	2,2	2,5	2,2	2,3	1,9
LC		0,992	1,202	1,553	2,313	1,081	1,187	1,334	1,246	1,692	2,861	1,812	1,573	1,812	1,573	1,867	1,367
0,75		IID	0,25	168,0	196,9	221,8	151,8	165,1	176,8	173,7	204,8	229,6	209,3	193,6	209,3	193,6	195,3
	0,50		36,2	52,1	70,4	89,9	43,4	50,4	57,3	55,4	76,2	96,8	79,7	68,1	79,7	68,1	69,3
	0,75	12,7	19,5	28,2	38,6	15,7	18,7	21,8	20,9	31,2	42,6	33,0	27,1	33,0	27,1	27,7	20,9
	1,00	5,9	9,0	13,3	18,7	7,2	8,6	10,1	9,7	14,8	21,0	15,8	12,7	15,8	12,7	13,0	9,7
	1,25	3,4	5,0	7,3	10,3	4,1	4,8	5,6	5,4	8,1	11,5	8,6	7,0	8,6	7,0	7,1	5,4
	1,50	2,3	3,2	4,6	6,3	2,7	3,1	3,6	3,5	5,0	7,1	5,4	4,4	5,4	4,4	4,5	3,5
	1,75	1,8	2,3	3,2	4,3	2,0	2,3	2,6	2,5	3,5	4,8	3,7	3,1	3,7	3,1	3,1	2,5
	2,00	1,4	1,8	2,4	3,1	1,6	1,8	2,0	1,9	2,6	3,5	2,7	2,3	2,7	2,3	2,4	1,9
	LC	1,339	1,622	2,096	3,122	1,459	1,602	1,800	1,683	2,284	3,863	2,447	2,124	2,447	2,124	2,521	1,845

Tabela B.3 – NMA e limites de controle (LC), gráfico de EWMA, processos IID e autocorrelacionados,  $n=4$ ,  $NMA_0=370,4$

$\lambda$	$\delta$	AR(1)		MA(1)		ARMA(1,1)		AR(2)		MA(2)			
		$\phi$	$\theta$	$\phi$	$\theta$	$\phi$	$\theta$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$		
0,25	IID	0,25	0,50	0,75	-0,127	-0,268	-0,451	0,200	0,150	0,100	0,50	-0,12	
		40,6	80,3	106,2	48,2	55,5	62,6	62,9	88,9	116,3	96,9	75,7	
	0,50	14,4	20,6	29,2	11,8	13,7	15,5	15,6	23,3	33,0	25,9	19,2	
	5,1	6,8	9,3	12,8	5,8	6,5	7,3	7,3	10,4	14,4	11,5	8,7	
	3,4	4,4	5,7	7,5	3,8	4,2	4,6	4,6	6,3	8,4	6,8	5,4	
	2,6	3,2	4,1	5,3	2,9	3,2	3,4	3,4	4,5	5,8	4,8	3,9	
	2,2	2,6	3,2	4,0	2,4	2,5	2,7	2,7	3,5	4,4	3,7	3,1	
	1,9	2,2	2,7	3,3	2,0	2,2	2,3	2,3	2,9	3,6	3,1	2,6	
	1,6	1,9	2,3	2,8	1,8	1,9	2,0	2,0	2,5	3,0	2,6	2,2	
	LC	0,548	0,680	0,908	1,410	0,602	0,665	0,751	0,715	1,010	1,775	1,113	0,905
0,50	IID	0,25	99,3	130,7	215,6	83,4	95,1	105,8	106,2	142,2	175,3	152,2	124,5
		71,3	23,5	35,5	87,1	18,6	22,1	25,8	26,0	40,7	58,3	45,6	32,9
	15,1	8,9	13,6	38,5	7,1	8,4	9,8	9,8	15,7	23,6	17,8	12,5	
	6,0	4,8	6,9	19,7	3,9	4,5	5,2	5,2	8,0	11,8	9,0	6,5	
	3,4	3,1	4,4	11,5	2,7	3,0	3,4	3,4	4,9	7,0	5,5	4,1	
	2,4	2,4	3,1	7,5	2,1	2,3	2,5	2,5	3,5	4,8	3,8	3,0	
	1,8	1,9	2,4	5,4	1,7	1,9	2,0	2,0	2,7	3,6	2,9	2,3	
	1,5	1,6	2,0	4,1	1,4	1,6	1,7	1,7	2,2	2,8	2,4	1,9	
	1,3	1,068	1,425	2,211	0,944	1,044	1,179	1,123	1,585	2,785	1,747	1,420	
	LC	0,860	1,068	1,425	2,211	0,944	1,044	1,179	1,123	1,585	2,785	1,747	1,420
0,75	IID	0,25	144,6	179,9	213,5	125,6	139,7	152,2	152,7	191,9	224,6	202,2	173,2
		109,8	39,9	59,1	82,9	31,5	37,6	43,6	43,9	67,0	92,3	74,3	55,1
	25,4	14,2	22,7	34,8	10,9	13,3	15,8	15,9	26,5	40,0	30,2	20,8	
	8,6	6,6	10,5	16,7	5,1	6,2	7,3	7,3	12,4	19,5	14,3	9,6	
	4,1	3,8	5,8	9,1	3,0	3,5	4,1	4,1	6,8	10,7	7,8	5,3	
	2,5	2,5	3,7	5,6	2,1	2,4	2,7	2,7	4,3	6,6	4,9	3,4	
	1,8	1,9	2,6	3,9	1,6	1,8	2,0	2,0	3,0	4,4	3,4	2,5	
	1,4	1,5	2,0	2,9	1,3	1,5	1,6	1,6	2,3	3,2	2,5	1,9	
	1,2	1,441	1,924	2,987	1,275	1,409	1,591	1,516	2,140	3,760	2,358	1,917	
	LC	1,161	1,441	1,924	2,987	1,275	1,409	1,591	1,516	2,140	3,760	2,358	1,917

Tabela B.4 – NMA e limites de controle (LC), gráfico de EWMA, processos IID e autocorrelacionados,  $n=5$ ,  $NMA_0=370,4$

$\lambda$	$\delta$	IID	AR(1)			MA(1)			ARMA(1,1)			AR(2)		MA(2)			
			0,25	0,50	0,75	-0,127	-0,268	-0,451	$\phi$	$\theta$	0,437	0,612	0,794	$\phi$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$
0,25	1,00	32,4	48,4	70,4	99,6	39,0	45,4	51,8	53,4	80,6	112,0	92,3	64,5	68,4	49,0		
		8,2	11,9	17,7	26,8	9,7	11,2	12,7	13,1	20,7	31,4	24,4	16,0	17,1	12,0		
		4,3	5,8	8,1	11,8	4,9	5,5	6,2	6,3	9,3	13,7	10,8	7,5	7,9	5,9		
		3,0	3,8	5,1	7,0	3,3	3,7	4,0	4,1	5,7	8,0	6,5	4,7	5,0	3,9		
		2,3	2,9	3,7	4,9	2,6	2,8	3,0	3,1	4,1	5,5	4,6	3,5	3,6	2,9		
		1,9	2,4	3,0	3,8	2,1	2,3	2,4	2,5	3,2	4,2	3,6	2,8	2,9	2,4		
		1,7	2,0	2,5	3,1	1,8	2,0	2,1	2,1	2,7	3,4	3,0	2,4	2,4	2,0		
		1,5	1,8	2,2	2,7	1,6	1,7	1,8	1,9	2,3	2,9	2,5	2,1	2,1	1,8		
		0,490	0,618	0,844	1,353	0,541	0,600	0,680	0,656	0,953	1,732	1,080	0,828	1,006	0,688		
			84,0	117,1	209,1	68,6	79,3	89,4	92,0	131,2	170,5	146,4	108,6	114,2	84,9		
0,50	1,00	11,5	18,7	30,0	81,3	14,4	17,3	20,3	21,1	35,7	55,5	42,7	26,8	28,9	18,9		
		4,7	7,2	11,4	32,3	5,7	6,7	7,8	8,0	13,7	22,3	16,6	10,1	10,9	7,3		
		2,8	4,0	5,9	17,9	3,3	3,7	4,2	4,4	7,0	11,1	8,4	5,3	5,7	4,0		
		2,0	2,7	3,8	10,5	2,3	2,6	2,9	2,9	4,4	6,7	5,1	3,5	3,7	2,7		
		1,6	2,1	2,8	6,9	1,8	2,0	2,2	2,2	3,1	4,6	3,6	2,6	2,7	2,1		
		1,3	1,7	2,2	5,0	1,5	1,6	1,8	1,8	2,5	3,4	2,8	2,1	2,2	1,7		
		1,2	1,5	1,8	3,8	1,3	1,4	1,5	1,5	2,0	2,7	2,3	1,7	1,8	1,5		
		0,769	0,970	1,324	2,123	0,849	0,942	1,067	1,030	1,496	2,718	1,695	1,300	1,578	1,080		
			126,0	165,1	205,5	106,2	120,2	132,7	135,8	180,4	220,1	196,3	155,4	161,7	127,2		
		0,75	1,00	22,5	31,7	50,4	76,7	24,1	29,3	34,5	35,9	59,4	88,4	70,0	45,3	48,6	32,1
7,6	11,0			18,7	31,4	8,2	10,1	12,1	12,6	22,8	37,8	28,0	16,5	17,9	11,1		
3,7	5,1			8,6	14,9	3,9	4,7	5,6	5,8	10,6	18,3	13,2	7,6	8,3	5,2		
2,3	3,0			4,8	8,2	2,4	2,8	3,3	3,4	5,9	10,0	7,2	4,3	4,6	3,1		
1,6	2,1			3,1	5,1	1,7	2,0	2,2	2,3	3,7	6,2	4,5	2,8	3,0	2,1		
1,3	1,6			2,3	3,5	1,4	1,5	1,7	1,7	2,7	4,2	3,2	2,1	2,2	1,6		
1,2	1,3			1,8	2,6	1,2	1,3	1,4	1,4	2,0	3,1	2,4	1,7	1,7	1,3		
1,107	1,309			1,787	2,867	1,146	1,272	1,440	1,390	2,019	3,670	2,289	1,755	2,131	1,458		
	101,6			165,1	205,5	106,2	120,2	132,7	135,8	180,4	220,1	196,3	155,4	161,7	127,2		

Tabela B.5 - NMA, coeficiente ( $k_1$ ) e  $(p) = \lceil \bar{X}_1 \in |k, k_1| \rceil$ , gráfico com ATV, processos IID e AR(1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n} = 3$				$\bar{n} = 4$				$\bar{n} = 5$					
	$n_2$	$k_1$ (p)	$\phi$		$n_2$	$k_1$ (p)	$\phi$		$n_2$	$k_1$ (p)	$\phi$			
			0,25	0,50			0,25	0,50			0,25	0,50	0,25	0,50
0,25	148,0	187,8	224,5	256,1	122,6	167,6	211,0	250,1	97,7	145,1	194,5	242,1		
0,50	34,1	57,1	87,0	121,2	20,0	39,4	70,3	111,8	12,5	26,9	54,9	100,8		
0,75	9,8	18,5	33,5	55,2	5,3	10,6	22,8	47,2	3,8	6,9	15,6	39,1		
1,00	4	0,672	4,1	7,4	14,3	26,6	41,0	66,6	12	1,032	2,3	3,2	6,0	16,2
1,25	2,4	3,8	7,1	13,8	0,34	1,9	2,6	4,4	10,3	0,30	1,9	2,2	3,3	7,8
1,50	1,7	2,5	4,1	7,9	1,7	1,9	2,8	5,8	1,7	1,8	2,3	3,3	4,4	
1,75	1,5	1,8	2,7	4,9	1,5	1,7	2,1	3,7	1,5	1,6	1,9	3,0		
2,00	1,3	1,5	2,0	3,3	1,4	1,5	1,7	2,6	1,4	1,5	1,6	2,2		
0,25	156,2	197,2	231,8	260,0	118,8	166,6	211,4	250,8	92,0	141,6	193,1	241,8		
0,50	28,9	54,0	87,2	123,4	15,8	33,7	65,3	110,0	10,3	22,7	49,8	97,9		
0,75	7,0	14,3	29,6	54,3	4,4	8,2	18,7	44,0	3,5	5,8	12,9	35,8		
1,00	8	1,376	3,3	5,4	11,1	24,4	41,0	66,6	16	1,236	2,4	3,0	5,1	14,0
1,25	2,3	3,1	5,3	11,9	0,20	2,1	2,5	3,7	8,6	0,22	2,0	2,3	3,0	6,6
1,50	1,9	2,3	3,2	6,5	1,8	2,0	2,5	4,8	1,8	1,9	2,3	3,9		
1,75	1,7	1,9	2,4	4,1	1,6	1,8	2,0	3,2	1,6	1,7	1,9	2,7		
2,00	1,5	1,7	1,9	2,9	1,5	1,6	1,8	2,4	1,5	1,6	1,7	2,1		
0,25	154,0	197,1	232,3	260,4	113,7	163,9	210,5	250,6	86,6	137,8	191,2	241,2		
0,50	24,4	48,8	83,7	122,4	13,3	29,3	60,7	107,8	9,0	19,8	45,6	95,1		
0,75	6,1	11,8	25,8	52,1	4,3	7,1	15,9	41,0	3,6	5,3	11,2	32,9		
1,00	12	1,633	3,4	4,8	9,2	22,3	36,0	66,6	20	1,376	2,6	3,1	4,6	12,3
1,25	2,5	3,0	4,6	10,4	0,15	2,2	2,6	3,4	7,4	0,17	2,1	2,4	2,9	5,8
1,50	2,1	2,4	3,0	5,6	1,9	2,1	2,5	4,2	1,9	2,0	2,3	3,5		
1,75	1,8	2,0	2,3	3,6	1,7	1,9	2,1	2,9	1,7	1,8	2,0	2,5		
2,00	1,6	1,8	2,0	2,6	1,5	1,7	1,8	2,2	1,5	1,6	1,8	2,1		

Tabela B.6 - NMA, gráfico com ATV, processos IID e MA(1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n} = 3$			$\bar{n} = 4$			$\bar{n} = 5$					
	$n_2$	$\theta$		$n_2$	$\theta$		$n_2$	$\theta$				
		IID	-0,127 -0,268 -0,451		IID	-0,127 -0,268 -0,451		IID	-0,127 -0,268 -0,451			
0,25	148,0	165,9	179,6	189,4	122,6	142,4	157,7	168,8	97,7	117,9	134,0	146,0
0,50	34,1	43,4	51,5	58,1	20,0	27,2	34,1	39,9	12,5	17,5	22,5	27,1
0,75	9,8	13,0	16,1	18,9	5,3	7,1	8,9	10,7	3,8	4,7	5,8	6,9
1,00	4	4,1	5,3	6,5	7,6	3,2	3,8	4,4	2,3	2,6	2,9	3,2
1,25	2,4	2,9	3,4	3,9	1,9	2,2	2,4	2,6	1,9	2,0	2,1	2,2
1,50	1,7	2,0	2,2	2,5	1,7	1,8	1,9	2,0	1,7	1,7	1,8	1,8
1,75	1,5	1,6	1,7	1,9	1,5	1,6	1,6	1,7	1,5	1,6	1,6	1,6
2,00	1,3	1,4	1,5	1,5	1,4	1,4	1,5	1,5	1,4	1,5	1,5	1,5
0,25	156,2	175,2	189,2	199,0	118,8	139,9	156,1	167,8	92,0	113,1	129,9	142,4
0,50	28,9	38,8	47,7	54,9	15,8	22,2	28,5	34,1	10,3	14,4	18,8	22,9
0,75	7,0	9,5	12,1	14,5	4,4	5,6	7,0	8,3	3,5	4,2	5,0	5,8
1,00	8	3,3	4,0	4,8	2,6	3,0	3,4	3,7	2,4	2,6	2,9	3,1
1,25	2,3	2,6	2,9	3,2	2,1	2,2	2,4	2,5	2,0	2,1	2,2	2,3
1,50	1,9	2,0	2,2	2,3	1,8	1,9	2,0	2,0	1,8	1,8	1,9	1,9
1,75	1,7	1,8	1,8	1,9	1,6	1,7	1,7	1,8	1,6	1,7	1,7	1,8
2,00	1,5	1,6	1,6	1,7	1,5	1,5	1,6	1,6	1,5	1,5	1,6	1,6
0,25	154,0	174,1	188,7	198,8	113,7	135,9	152,8	165,1	86,6	108,3	125,6	138,6
0,50	24,4	33,7	42,4	49,6	13,3	18,8	24,5	29,6	9,0	12,5	16,3	19,9
0,75	6,1	8,0	10,0	12,0	4,3	5,1	6,2	7,2	3,6	4,1	4,7	5,3
1,00	3,4	3,8	4,4	4,9	2,8	3,0	3,3	3,6	2,6	2,7	2,9	3,1
1,25	2,5	2,7	2,9	3,1	2,2	2,4	2,5	2,6	2,1	2,2	2,3	2,4
1,50	2,1	2,2	2,3	2,4	1,9	2,0	2,1	2,1	1,9	2,0	2,0	2,1
1,75	1,8	1,9	2,0	2,0	1,7	1,8	1,8	1,9	1,7	1,7	1,8	1,8
2,00	1,6	1,7	1,7	1,8	1,5	1,6	1,7	1,7	1,5	1,6	1,6	1,7

Tabela B.7 - NMA, gráfico com ATV, processos IID e ARMA(1,1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$				
	$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$			
		0,437	0,612 0,794 $\theta$		0,437	0,612 0,794 $\theta$		0,437	0,612 0,794 $\theta$		
		IID	0,200 0,150 0,100	IID	0,200 0,150 0,100	IID	0,200 0,150 0,100				
0,25	148,0		197,5 236,5 266,1	122,6	180,2	227,6	263,2	97,7	160,1	215,3	259,0
0,50	34,1		64,3 99,2 134,1	20,0	47,4	86,7	129,1	12,5	33,9	72,9	122,8
0,75	9,8		21,9 40,8 64,7	5,3	13,3	31,5	60,0	3,8	8,7	23,5	54,6
1,00	4	4	8,9 18,2 32,6	8	5,3	12,7	28,9	12	3,8	9,0	25,2
1,25	2,4		4,5 9,1 17,5	1,9	3,0	6,2	15,0	1,9	2,4	4,5	12,6
1,50	1,7		2,8 5,2 10,1	1,7	2,1	3,6	8,4	1,7	1,9	2,9	7,0
1,75	1,5		2,0 3,3 6,3	1,5	1,7	2,5	5,2	1,5	1,7	2,1	4,4
2,00	1,3		1,6 2,4 4,2	1,4	1,5	2,0	3,5	1,4	1,5	1,8	3,0
0,25	156,2		206,7 243,1 268,7	118,8	180,1	228,4	263,8	92,0	157,5	214,7	259,1
0,50	28,9		62,6 101,5 136,2	15,8	41,9	83,3	128,8	10,3	29,4	68,7	121,6
0,75	7,0		17,7 38,8 64,9	4,4	10,5	27,6	58,5	3,5	7,2	20,3	52,7
1,00	3,3	8	6,6 15,6 31,8	2,6	4,3	10,4	27,3	16	3,4	7,5	23,4
1,25	2,3		3,5 7,3 16,5	2,1	2,7	5,0	13,6	2,0	2,4	3,9	11,4
1,50	1,9		2,4 4,2 9,2	1,8	2,1	3,1	7,5	1,8	2,0	2,6	6,3
1,75	1,7		2,0 2,8 5,6	1,6	1,8	2,3	4,6	1,6	1,8	2,1	3,9
2,00	1,5		1,7 2,2 3,8	1,5	1,6	1,9	3,2	1,5	1,6	1,8	2,8
0,25	154,0		207,0 243,8 269,0	113,7	178,2	228,1	263,9	86,6	154,5	213,7	258,9
0,50	24,4		58,1 99,5 136,1	13,3	37,3	79,7	127,9	9,0	25,9	64,8	120,3
0,75	6,1		14,8 35,6 64,0	4,3	8,9	24,4	57,0	3,6	6,4	17,8	50,8
1,00	3,4	12	5,6 13,4 30,7	2,8	4,0	8,8	25,7	20	3,3	6,6	21,8
1,25	2,5		3,3 6,2 15,4	2,2	2,7	4,4	12,5	2,1	2,5	3,6	10,3
1,50	2,1		2,4 3,7 8,4	1,9	2,2	2,9	6,8	1,9	2,1	2,6	5,7
1,75	1,8		2,0 2,6 5,1	1,7	1,9	2,2	4,2	1,7	1,8	2,1	3,6
2,00	1,6		1,8 2,1 3,5	1,5	1,7	1,9	2,9	1,5	1,7	1,8	2,6



Tabela B.8 - NMA, gráfico com ATV, processos IID e AR(2),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n} = 3$			$\bar{n} = 4$			$\bar{n} = 5$		
	IID	$\phi_1$		IID	$\phi_1$		IID	$\phi_1$	
		$n_2$	0,25		0,56	$n_2$		0,25	0,56
0,25	148,0	247,1	216,2	122,6	243,3	198,9	97,7	237,9	179,1
0,50	34,1	111,6	79,0	20,0	105,9	59,7	12,5	98,7	43,8
0,75	9,8	49,5	28,9	5,3	44,5	17,9	3,8	39,1	11,7
1,00	4,1	23,4	12,0	2,7	19,9	6,9	2,3	16,7	4,7
1,25	2,4	12,1	6,0	1,9	9,9	3,6	1,9	8,1	2,8
1,50	1,7	6,9	3,5	1,7	5,6	2,4	1,7	4,6	2,1
1,75	1,5	4,3	2,4	1,5	3,6	1,9	1,5	3,0	1,8
2,00	1,3	3,0	1,9	1,4	2,5	1,6	1,4	2,2	1,6
0,25	156,2	250,8	224,2	118,8	244,4	173,5	92,0	235,1	177,2
0,50	28,9	114,0	77,5	15,8	105,3	41,5	10,3	93,2	38,8
0,75	7,0	49,4	24,0	4,4	42,7	11,1	3,5	34,3	9,6
1,00	3,3	22,4	8,8	2,6	18,3	4,5	2,4	13,7	4,1
1,25	2,3	11,0	4,4	2,1	8,8	2,7	2,0	6,5	2,7
1,50	1,9	6,1	2,9	1,8	4,9	2,0	1,8	3,8	2,1
1,75	1,7	3,8	2,2	1,6	3,2	1,7	1,6	2,6	1,9
2,00	1,5	2,7	1,8	1,5	2,3	1,6	1,5	2,0	1,7
0,25	154,0	251,4	224,5	113,7	236,5	152,0	86,6	235,1	174,5
0,50	24,4	113,8	72,8	13,3	94,6	30,1	9,0	91,5	34,6
0,75	6,1	48,3	20,2	4,3	35,0	7,8	3,6	32,3	8,3
1,00	3,4	21,1	7,3	2,8	13,9	3,5	2,6	12,4	3,9
1,25	2,5	10,1	3,9	2,2	6,6	2,3	2,1	5,9	2,7
1,50	2,1	5,5	2,8	1,9	3,8	1,9	1,9	3,5	2,2
1,75	1,8	3,5	2,2	1,7	2,6	1,7	1,7	2,5	1,9
2,00	1,6	2,5	1,9	1,5	2,1	1,6	1,5	2,0	1,8

Tabela B.9 - NMA, gráfico com ATV, processos IID e MA(2),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n} = 3$			$\bar{n} = 4$			$\bar{n} = 5$		
	IID	$\theta_1$		IID	$\theta_1$		IID	$\theta_1$	
		$n_2$	-0,387		-0,545	$n_2$		-0,387	-0,545
0,25	148,0	226,9	187,8	122,6	212,3	166,2	97,7	193,6	142,6
0,50	34,1	87,5	57,2	20,0	68,8	38,7	12,5	51,9	25,8
0,75	9,8	32,9	18,6	5,3	21,4	10,4	3,8	14,2	6,6
1,00	4,1	13,8	7,5	2,7	8,2	4,3	2,3	5,5	3,1
1,25	2,4	6,8	3,9	1,9	4,2	2,6	1,9	3,2	2,2
1,50	1,7	4,0	2,5	1,7	2,7	1,9	1,7	2,3	1,8
1,75	1,5	2,7	1,8	1,5	2,1	1,6	1,5	1,9	1,6
2,00	1,3	2,0	1,5	1,4	1,8	1,5	1,4	1,7	1,5
0,25	156,2	239,1	195,9	118,8	214,2	164,2	92,0	192,3	138,8
0,50	28,9	90,3	53,1	15,8	64,0	32,5	10,3	46,7	21,7
0,75	7,0	29,5	14,0	4,4	17,5	7,9	3,5	11,7	5,6
1,00	3,3	10,8	5,3	2,6	6,5	3,6	2,4	4,8	3,0
1,25	2,3	5,2	3,1	2,1	3,6	2,5	2,0	3,0	2,2
1,50	1,9	3,3	2,3	1,8	2,6	2,0	1,8	2,3	1,9
1,75	1,7	2,5	1,9	1,6	2,1	1,8	1,6	2,0	1,7
2,00	1,5	2,0	1,7	1,5	1,9	1,6	1,5	1,8	1,6
0,25	154,0	240,5	195,1	113,7	213,4	161,3	86,6	190,7	134,6
0,50	24,4	86,9	47,3	13,3	58,9	28,1	9,0	42,5	18,8
0,75	6,1	25,7	11,3	4,3	14,9	6,8	3,6	10,3	5,1
1,00	3,4	9,1	4,7	2,8	5,8	3,5	2,6	4,5	3,0
1,25	2,5	4,7	3,0	2,2	3,5	2,5	2,1	3,0	2,4
1,50	2,1	3,2	2,3	1,9	2,6	2,1	1,9	2,4	2,0
1,75	1,8	2,5	2,0	1,7	2,2	1,9	1,7	2,1	1,8
2,00	1,6	2,1	1,7	1,5	2,0	1,7	1,5	1,9	1,6

Tabela B.10 – Coeficientes dos limites de advertência ( $L_1$ ) e de ação ( $L_2$ ) para o gráfico com AD,  $NMA_0=370,4$

		$L_2$						
$n_1$	$n_2$	$L_1$	IID	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)	AR(2)	MA(2)
				$\phi$	$\theta$	$\phi$	$\phi_1$	$\theta_1$
				0,25 0,50 0,75	-0,127 -0,268 -0,451	0,437 0,612 0,794	0,25 0,56	0,387 -0,545
						$\theta$	$\phi_2$	$\theta_2$
						0,200 0,150 0,100	0,50 -0,12	-0,900 0,100
1	4	0,675	2,936	2,951 2,978 2,999	2,936 2,929 2,914	2,962 2,990 3,000	3,191 2,853	2,985 2,951
	8	1,150	2,752	2,771 2,823 2,934	2,753 2,751 2,745	2,788 2,872 2,983	3,212 2,699	2,832 2,772
	12	1,383	2,606	2,614 2,665 2,808	2,597 2,597 2,593	2,630 2,721 2,918	3,124 2,549	2,677 2,623
1	8	0,887	2,834	2,847 2,885 2,963	2,833 2,831 2,824	2,860 2,921 2,993	3,227 2,770	2,895 2,849
	12	1,150	2,701	2,715 2,756 2,868	2,702 2,700 2,697	2,728 2,800 2,950	3,164 2,645	2,765 2,723
	16	1,318	2,592	2,604 2,643 2,763	2,593 2,591 2,588	2,616 2,687 2,880	3,186 2,539	2,651 2,603
5	12	0,967	2,770	2,781 2,814 2,905	2,770 2,768 2,764	2,792 2,850 2,958	3,187 2,708	2,821 2,790
	16	1,150	2,671	2,681 2,714 2,816	2,672 2,670 2,666	2,691 2,752 2,912	3,226 2,613	2,720 2,680
	20	1,282	2,587	2,597 2,628 2,729	2,587 2,586 2,584	2,606 2,664 2,844	3,133 2,528	2,642 2,599
2	4	1,150	2,932	2,951 2,977 2,998	2,944 2,967 3,003	2,962 2,990 3,000	3,291 2,860	2,981 2,948
	8	1,534	2,727	2,750 2,803 2,918	2,739 2,763 2,802	2,769 2,854 2,975	3,222 2,680	2,810 2,743
	12	1,732	2,540	2,560 2,614 2,762	2,551 2,574 2,611	2,578 2,672 2,885	3,090 2,493	2,621 2,566
4	8	1,150	2,848	2,863 2,898 2,967	2,859 2,882 2,921	2,876 2,930 2,993	3,248 2,787	2,903 2,858
	12	1,383	2,709	2,724 2,763 2,869	2,719 2,742 2,781	2,737 2,805 2,947	3,166 2,657	2,768 2,730
	16	1,534	2,588	2,601 2,639 2,754	2,597 2,619 2,656	2,613 2,681 2,869	3,173 2,535	2,649 2,592
5	12	1,150	2,791	2,803 2,834 2,912	2,801 2,824 2,863	2,813 2,867 2,970	3,195 2,724	2,837 2,809
	16	1,318	2,688	2,698 2,730 2,824	2,697 2,720 2,758	2,709 2,765 2,914	3,228 2,628	2,738 2,697
	20	1,440	2,596	2,606 2,637 2,732	2,606 2,626 2,665	2,616 2,671 2,842	3,131 2,543	2,643 2,607

Tabela B.11 - NMA, gráfico com AD, processos IID e AR(1),  $n_1=1$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$					
	$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$				
		IID	0.25		0.50	0.75		IID	0.25	0.50	0.75	
0,25	136,5	174,2	212,8	249,8	89,6	126,0	170,2	224,1	65,9	98,4	141,8	202,2
0,50	35,1	54,6	81,3	116,0	18,1	30,8	52,3	90,9	11,9	20,9	37,7	73,2
0,75	11,5	19,7	33,0	53,4	5,7	10,0	18,7	38,2	4,0	6,7	12,7	28,7
1,00	4,9	8,5	15,0	26,4	2,7	4,3	8,0	17,8	2,2	3,1	5,4	12,9
1,25	2,6	4,3	7,7	14,1	1,8	2,4	4,1	9,2	1,6	1,9	2,9	6,6
1,50	1,7	2,6	4,4	8,2	1,4	1,7	2,5	5,3	1,4	1,5	1,9	3,8
1,75	1,3	1,8	2,8	5,1	1,2	1,3	1,7	3,4	1,3	1,3	1,4	2,5
2,00	1,2	1,4	2,0	3,4	1,2	1,2	1,4	2,3	1,2	1,2	1,2	1,8
0,25	94,1	129,5	172,0	224,3	69,3	101,5	143,9	202,7	54,0	82,9	123,5	184,8
0,50	19,8	32,5	53,5	91,0	13,1	22,2	38,9	73,6	9,7	16,6	30,1	61,2
0,75	6,5	10,8	19,3	38,3	4,5	7,2	13,2	28,9	3,7	5,5	9,9	22,9
1,00	3,1	4,7	8,4	17,9	2,5	3,4	5,7	13,0	2,3	2,8	4,4	10,0
1,25	2,0	2,7	4,3	9,3	1,9	2,1	3,1	6,7	1,8	1,9	2,5	5,1
1,50	1,6	1,8	2,6	5,3	1,6	1,6	2,0	3,9	1,6	1,6	1,8	3,0
1,75	1,4	1,4	1,8	3,4	1,4	1,4	1,5	2,5	1,4	1,4	1,4	2,1
2,00	1,2	1,3	1,4	2,3	1,2	1,2	1,3	1,8	1,1	1,2	1,3	1,6
0,25	74,8	106,6	147,6	203,9	57,8	86,7	126,6	186,1	46,5	72,5	110,6	171,0
0,50	15,1	24,4	40,9	74,6	10,9	18,0	31,6	62,2	8,6	14,2	25,6	53,2
0,75	5,5	8,3	14,2	29,5	4,3	6,2	10,6	23,4	3,7	5,0	8,5	19,2
1,00	3,1	4,0	6,3	13,3	2,7	3,2	4,8	10,3	2,5	2,8	3,9	8,4
1,25	2,2	2,5	3,4	6,9	2,1	2,2	2,8	5,3	2,0	2,1	2,4	4,4
1,50	1,8	1,9	2,2	4,0	1,7	1,8	1,9	3,2	1,7	1,7	1,8	2,7
1,75	1,6	1,6	1,7	2,6	1,5	1,5	1,5	2,1	1,5	1,5	1,5	1,9
2,00	1,4	1,4	1,4	1,9	1,3	1,3	1,3	1,6	1,2	1,3	1,3	1,5

Tabela B.12 - NMA, gráfico com AD, processos IID e MA(1),  $n_1=1$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$		
	$n_2$	$\theta$		$n_2$	$\theta$		$n_2$	$\theta$	
	IID	-0,127	-0,268 -0,451	IID	-0,127	-0,268 -0,451	IID	-0,127	-0,268 -0,451
0,25	136,5	153,3	167,3 178,9	89,6	105,0	118,5 130,2	65,9	79,3	91,4 102,2
0,50	35,1	43,1	50,6 57,4	18,1	23,0	27,9 32,5	11,9	15,3	18,7 22,1
0,75	11,5	14,7	17,9 21,0	5,7	7,3	9,0 10,7	4,0	4,9	6,0 7,1
1,00	4	4,9	6,2 7,7 9,1	8	3,3	3,9 4,6	2,2	2,5	2,8 3,2
1,25	2,6	3,2	3,9 4,6	1,8	2,0	2,2 2,5	1,6	1,7	1,8 2,0
1,50	1,7	2,0	2,4 2,7	1,4	1,5	1,6 1,7	1,4	1,4	1,5 1,5
1,75	1,3	1,5	1,7 1,9	1,2	1,3	1,3 1,3	1,3	1,3	1,3 1,3
2,00	1,2	1,2	1,3 1,4	1,2	1,2	1,2 1,2	1,2	1,2	1,2 1,2
0,25	94,1	109,1	122,2 133,6	69,3	82,6	94,6 105,3	54,0	65,8	76,5 86,3
0,50	19,8	24,8	29,6 34,2	13,1	16,5	20,0 23,4	9,7	12,2	14,9 17,5
0,75	6,5	8,1	9,8 11,4	4,5	5,5	6,5 7,6	3,7	4,3	5,0 5,8
1,00	3,1	3,7	4,3 5,0	2,5	2,8	3,2 3,5	2,3	2,5	2,7 2,9
1,25	2,0	2,2	2,5 2,8	1,9	1,9	2,0 2,2	1,8	1,9	1,9 2,0
1,50	1,6	1,7	1,8 1,9	1,6	1,6	1,6 1,6	1,6	1,6	1,6 1,6
1,75	1,4	1,4	1,4 1,5	1,4	1,4	1,4 1,4	1,4	1,4	1,4 1,4
2,00	1,2	1,2	1,3 1,3	1,2	1,2	1,2 1,2	1,1	1,2	1,2 1,2
0,25	74,8	88,0	99,8 110,2	57,8	69,6	80,3 90,0	46,5	57,0	66,7 75,6
0,50	15,1	18,6	22,2 25,6	10,9	13,6	16,3 19,0	8,6	10,6	12,8 15,0
0,75	5,5	6,5	7,5 8,7	4,3	4,9	5,7 6,5	3,7	4,1	4,7 5,2
1,00	3,1	3,4	3,7 4,1	2,7	2,8	3,0 3,3	2,5	2,6	2,7 2,9
1,25	2,2	2,3	2,4 2,5	2,1	2,1	2,2 2,2	2,0	2,0	2,0 2,1
1,50	1,8	1,8	1,9 1,9	1,7	1,7	1,7 1,8	1,7	1,7	1,7 1,7
1,75	1,6	1,6	1,6 1,6	1,5	1,5	1,5 1,5	1,5	1,5	1,5 1,5
2,00	1,4	1,4	1,4 1,4	1,3	1,3	1,3 1,3	1,2	1,3	1,3 1,3

Tabela B.13 - NMA, gráfico com AD, processos IID e ARMA(1,1),  $n_1=1$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$					
	$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$				
		0,437	0,612 $\theta$		0,437	0,612 $\theta$		0,437	0,612 $\theta$			
		IID	0,200	0,150	0,100	IID	0,200	0,150	0,100			
0,25	136,5	184,3	227,3	262,3	89,6	138,7	192,4	247,5	65,9	111,1	166,6	233,4
0,50	35,1	60,8	93,6	130,3	18,1	36,2	66,2	113,5	11,9	25,2	50,2	99,4
0,75	11,5	22,5	39,8	63,0	5,7	12,0	25,2	51,9	4,0	8,1	17,8	43,2
1,00	4,9	9,8	18,7	32,2	2,7	5,2	11,1	25,5	12	2,2	3,6	7,7
1,25	2,6	5,0	9,7	17,6	1,8	2,8	5,7	13,6	1,6	2,1	4,0	10,7
1,50	1,7	2,9	5,6	10,3	1,4	1,8	3,3	7,9	1,4	1,6	2,4	6,2
1,75	1,3	2,0	3,5	6,4	1,2	1,4	2,2	4,9	1,3	1,3	1,7	3,9
2,00	1,2	1,5	2,4	4,3	1,2	1,2	1,6	3,3	1,2	1,2	1,4	2,7
0,25	94,1	141,8	193,5	247,4	69,3	114,0	168,0	233,4	54,0	94,8	148,4	220,5
0,50	19,8	37,9	67,0	113,4	13,1	26,5	51,2	99,3	9,7	20,1	41,0	87,7
0,75	6,5	12,8	25,7	51,8	4,5	8,7	18,3	43,2	3,7	6,6	14,0	36,5
1,00	3,1	5,6	11,4	25,4	2,5	3,9	7,9	20,5	16	3,2	6,1	16,9
1,25	2,0	3,0	5,8	13,6	1,9	2,3	4,1	10,7	1,8	2,0	3,2	8,7
1,50	1,6	2,0	3,4	7,8	1,6	1,7	2,5	6,2	1,6	1,6	2,1	5,0
1,75	1,4	1,5	2,3	4,9	1,4	1,4	1,8	3,9	1,4	1,4	1,6	3,2
2,00	1,2	1,3	1,7	3,3	1,2	1,2	1,4	2,7	1,1	1,2	1,3	2,2
0,25	74,8	118,7	170,7	233,6	57,8	98,4	150,8	220,8	46,5	83,7	134,9	209,1
0,50	15,1	28,7	52,9	99,5	10,9	21,6	42,3	88,0	8,6	17,1	35,1	79,0
0,75	5,5	9,7	19,2	43,3	4,3	7,2	14,7	36,7	3,7	5,8	11,8	31,5
1,00	3,1	4,5	8,4	20,6	2,7	3,5	6,4	17,0	2,5	3,0	5,2	14,3
1,25	2,2	2,7	4,4	10,8	2,1	2,3	3,5	8,8	2,0	2,1	2,9	7,4
1,50	1,8	1,9	2,7	6,2	1,7	1,8	2,2	5,1	1,7	1,7	2,0	4,3
1,75	1,6	1,6	1,9	3,9	1,5	1,5	1,7	3,2	1,5	1,5	1,5	2,8
2,00	1,4	1,4	1,5	2,7	1,3	1,3	1,4	2,3	1,2	1,3	1,3	2,0

Tabela B.14 - NMA, gráfico com AD, processos IID e AR(2),  $n_1=1$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$		
	$n_2$	$\phi_1$		$n_2$	$\phi_1$		$n_2$	$\phi_1$	
		0,25	0,56		0,25	0,56		0,25	0,56
		IID			IID			IID	
0,25	136,5	252,4	196,3	89,6	233,9	141,1	65,9	221,0	120,6
0,50	35,1	118,8	68,9	18,1	99,8	37,3	11,9	88,1	28,7
0,75	11,5	55,2	26,5	5,7	43,4	12,4	4,0	36,7	9,3
1,00	4,9	27,5	11,7	2,7	20,6	5,3	2,2	17,0	4,1
1,25	2,6	14,8	6,0	1,8	10,8	2,8	1,6	8,8	2,3
1,50	1,7	8,6	3,5	1,4	6,2	1,8	1,4	5,0	1,6
1,75	1,3	5,4	2,3	1,2	3,9	1,4	1,3	3,2	1,3
2,00	1,2	3,6	1,7	1,2	2,7	1,2	1,2	2,2	1,2
0,25	94,1	237,2	151,9	69,3	216,5	118,4	54,0	206,4	103,3
0,50	19,8	103,0	42,7	13,1	84,3	28,1	9,7	76,4	22,8
0,75	6,5	45,3	14,7	4,5	34,6	9,2	3,7	30,4	7,4
1,00	3,1	21,7	6,4	2,5	15,9	4,1	2,3	13,7	3,5
1,25	2,0	11,4	3,4	1,9	8,2	2,4	1,8	7,0	2,2
1,50	1,6	6,6	2,2	1,6	4,7	1,7	1,6	4,1	1,6
1,75	1,4	4,1	1,6	1,4	3,0	1,4	1,4	2,6	1,4
2,00	1,2	2,8	1,3	1,2	2,1	1,2	1,1	1,9	1,2
0,25	74,8	221,8	127,7	57,8	201,8	104,0	46,5	193,7	91,4
0,50	15,1	88,9	32,2	10,9	72,9	23,4	8,6	67,7	19,4
0,75	5,5	37,1	10,9	4,3	28,6	7,9	3,7	25,8	6,5
1,00	3,1	17,3	4,9	2,7	12,8	3,8	2,5	11,5	3,3
1,25	2,2	8,9	2,9	2,1	6,5	2,4	2,0	5,9	2,2
1,50	1,8	5,2	2,0	1,7	3,8	1,8	1,7	3,5	1,7
1,75	1,6	3,3	1,6	1,5	2,5	1,5	1,5	2,3	1,5
2,00	1,4	2,3	1,4	1,3	1,8	1,3	1,2	1,7	1,3

Tabela B.15 - NMA, gráfico com AD, processos IID e MA(2),  $n_1=1$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$		
	$n_2$	$\theta_1$		$n_2$	$\theta_1$		$n_2$	$\theta_1$	
		-0,387	-0,545		-0,387	-0,545		-0,387	-0,545
		IID	0,100	IID	-0,900	0,100	IID	-0,900	0,100
0,25	136,5	209,9	175,6	89,6	163,9	125,0	65,9	134,2	97,0
0,50	35,1	79,0	55,4	18,1	48,7	30,4	11,9	34,3	20,5
0,75	11,5	31,7	20,1	5,7	17,2	9,9	4,0	11,4	6,5
1,00	4,9	14,4	8,6	2,7	7,4	4,3	2,2	4,9	3,0
1,25	2,6	7,4	4,4	1,8	3,8	2,4	1,6	2,7	1,9
1,50	1,7	4,2	2,6	1,4	2,3	1,6	1,4	1,8	1,5
1,75	1,3	2,7	1,8	1,2	1,7	1,3	1,3	1,4	1,3
2,00	1,2	1,9	1,4	1,2	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2
0,25	94,1	165,9	128,5	69,3	136,6	100,1	54,0	115,9	81,1
0,50	19,8	50,0	32,1	13,1	35,5	21,7	9,7	27,2	16,1
0,75	6,5	17,8	10,7	4,5	11,9	7,1	3,7	8,9	5,4
1,00	3,1	7,7	4,7	2,5	5,2	3,3	2,3	4,0	2,8
1,25	2,0	4,0	2,6	1,9	2,9	2,1	1,8	2,4	1,9
1,50	1,6	2,5	1,8	1,6	1,9	1,6	1,6	1,7	1,6
1,75	1,4	1,7	1,4	1,4	1,5	1,4	1,4	1,4	1,4
2,00	1,2	1,4	1,3	1,2	1,3	1,2	1,1	1,3	1,2
0,25	74,8	140,6	105,2	57,8	119,1	84,9	46,5	103,2	70,7
0,50	15,1	37,7	23,9	10,9	28,7	17,5	8,6	23,1	13,8
0,75	5,5	13,0	8,1	4,3	9,6	6,0	3,7	7,7	4,9
1,00	3,1	5,7	3,9	2,7	4,4	3,1	2,5	3,6	2,8
1,25	2,2	3,2	2,5	2,1	2,6	2,2	2,0	2,3	2,1
1,50	1,8	2,1	1,9	1,7	1,9	1,7	1,7	1,8	1,7
1,75	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
2,00	1,4	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2	1,3	1,3



Tabela B.16 - NMA, gráfico com AD, processos IID e AR(1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$					
	$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$				
		IID	0,25		0,50	0,75		IID	0,25	0,50	0,75	
0,25	119,0	158,3	200,6	243,3	80,0	116,3	161,8	218,8	59,5	91,5	135,4	197,8
0,50	27,7	45,6	71,9	109,1	15,1	26,9	47,6	86,3	10,2	18,6	34,7	70,0
0,75	8,8	15,7	28,0	49,0	4,7	8,5	16,6	35,7	3,4	5,8	11,5	27,1
1,00	3,7	6,7	12,5	23,8	2,2	3,7	7,1	16,4	1,8	2,7	4,9	12,0
1,25	2,1	3,4	6,4	12,6	1,5	2,1	3,7	8,5	1,4	1,7	2,7	6,1
1,50	1,4	2,1	3,7	7,3	1,2	1,5	2,2	4,9	1,2	1,3	1,8	3,6
1,75	1,2	1,5	2,4	4,6	1,1	1,2	1,6	3,1	1,1	1,2	1,4	2,3
2,00	1,1	1,2	1,7	3,1	1,0	1,1	1,3	2,2	1,0	1,1	1,2	2,1
0,25	85,9	121,7	165,4	219,6	63,1	95,2	138,3	198,8	49,4	77,8	118,6	181,3
0,50	17,3	29,4	49,8	87,0	11,3	20,0	36,2	70,8	8,4	15,0	28,1	59,1
0,75	5,6	9,7	17,7	36,1	3,8	6,4	12,2	27,5	3,1	4,9	9,2	21,9
1,00	2,7	4,3	7,7	16,7	2,1	3,0	5,3	12,3	1,9	2,5	4,1	9,6
1,25	1,8	2,4	4,0	8,6	1,6	1,9	2,9	6,3	1,5	1,7	2,3	4,9
1,50	1,4	1,7	2,5	5,0	1,3	1,5	1,9	3,7	1,3	1,4	1,7	2,9
1,75	1,2	1,4	1,7	3,2	1,2	1,3	1,5	2,4	1,1	1,2	1,4	2,0
2,00	1,1	1,2	1,4	2,2	1,1	1,1	1,2	1,8	1,1	1,0	1,2	1,7
0,25	71,2	103,4	145,0	201,8	53,6	82,4	122,7	183,4	43,0	68,6	106,8	168,4
0,50	14,1	23,4	39,9	73,1	9,7	16,7	30,1	60,5	7,6	13,0	24,1	51,5
0,75	5,1	8,0	13,9	28,8	3,7	5,7	10,1	22,7	3,1	4,5	8,0	18,5
1,00	2,8	3,8	6,2	13,0	2,3	2,9	4,5	10,0	2,0	2,5	3,7	8,1
1,25	2,0	2,4	3,4	6,7	1,7	2,0	2,6	5,2	1,6	1,8	2,3	4,2
1,50	1,5	1,8	2,3	3,9	1,4	1,6	1,9	3,1	1,3	1,5	1,7	2,6
1,75	1,3	1,5	1,7	2,6	1,2	1,3	1,5	2,1	1,2	1,3	1,4	1,8
2,00	1,2	1,3	1,4	1,9	1,1	1,2	1,3	1,6	1,1	1,2	1,2	1,4

Tabela B.17 - NMA, gráfico com AD, processos IID e MA(1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$					
	$n_2$	$\theta$	$n_2$	$\theta$	$n_2$	$\theta$	$n_2$	$\theta$				
		IID	-0,127	-0,268	-0,451			IID	-0,127	-0,268	-0,451	
0,25	119,0	136,2	150,9	163,1	80,0	95,3	108,9	120,7	59,5	72,6	84,6	95,4
0,50	27,7	34,9	41,8	48,2	15,1	19,6	24,2	28,6	10,2	13,3	16,6	19,8
0,75	8,8	11,4	14,2	16,8	4,7	6,1	7,6	9,1	3,4	4,2	5,2	6,2
1,00	3,7	4,8	6,0	7,2	2,2	2,8	3,3	3,9	1,8	2,1	2,5	2,8
1,25	2,1	2,6	3,1	3,7	1,5	1,7	1,9	2,2	1,4	1,5	1,6	1,8
1,50	1,4	1,7	1,9	2,2	1,2	1,3	1,4	1,5	1,2	1,3	1,3	1,4
1,75	1,2	1,3	1,4	1,6	1,1	1,1	1,2	1,2	1,1	1,1	1,2	1,2
2,00	1,1	1,1	1,2	1,3	1,0	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1
0,25	85,9	101,2	114,5	126,0	63,1	76,4	88,4	99,0	49,4	60,9	71,6	81,2
0,50	17,3	22,0	26,7	31,1	11,3	14,6	18,0	21,3	8,4	10,9	13,4	15,9
0,75	5,6	7,1	8,7	10,3	3,8	4,8	5,8	6,9	3,1	3,7	4,5	5,2
1,00	2,7	3,3	3,9	4,5	2,1	2,4	2,8	3,2	1,9	2,1	2,4	2,6
1,25	1,8	2,0	2,3	2,5	1,6	1,7	1,8	2,0	1,5	1,6	1,7	1,8
1,50	1,4	1,5	1,6	1,8	1,3	1,4	1,4	1,5	1,3	1,3	1,4	1,4
1,75	1,2	1,3	1,3	1,4	1,2	1,2	1,2	1,3	1,1	1,2	1,2	1,2
2,00	1,1	1,1	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1
0,25	71,2	84,7	96,8	107,2	53,6	65,4	76,2	85,9	43,0	53,3	62,9	71,8
0,50	14,1	17,7	21,3	24,8	9,7	12,4	15,1	17,7	7,6	9,6	11,7	13,8
0,75	5,1	6,1	7,3	8,4	3,7	4,4	5,2	6,0	3,1	3,6	4,2	4,8
1,00	2,8	3,2	3,6	4,0	2,3	2,5	2,8	3,0	2,0	2,2	2,4	2,6
1,25	2,0	2,1	2,3	2,5	1,7	1,8	1,9	2,0	1,6	1,7	1,8	1,9
1,50	1,5	1,6	1,7	1,8	1,4	1,5	1,5	1,6	1,3	1,4	1,5	1,5
1,75	1,3	1,4	1,4	1,5	1,2	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2	1,3	1,3
2,00	1,2	1,2	1,3	1,3	1,1	1,1	1,2	1,3	1,1	1,1	1,1	1,2

Tabela B.18 - NMA, gráfico com AD, processos IID e ARMA(1,1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$				
	$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$			
		0,437	0,612 $\theta$		0,437	0,612 $\theta$		0,437	0,612 $\theta$		
		IID	0,200 0,150 0,100		IID	0,200 0,150 0,100		IID	0,200 0,150 0,100		
0,25	119,0	164,8	207,9 246,8	80,0	124,0	172,6	225,7	59,5	99,1	147,2	206,9
0,50	27,7	49,1	77,4 112,8	15,1	29,9	53,6	92,3	10,2	20,9	40,1	76,7
0,75	8,8	17,2	30,9 51,4	4,7	9,6	19,3	39,0	3,4	6,6	13,6	30,5
1,00	4	3,7	7,3 13,9 25,2	8	4,1	8,3	18,2	12	3,0	5,8	13,8
1,25	2,1	3,8	7,1 13,4	1,5	2,3	4,2	9,5	1,4	1,8	3,0	7,0
1,50	1,4	2,3	4,1 7,8	1,2	1,6	2,5	5,4	1,2	1,4	1,9	4,1
1,75	1,2	1,6	2,6 4,9	1,1	1,2	1,8	3,4	1,1	1,2	1,4	2,6
2,00	1,1	1,3	1,9 3,3	1,0	1,1	1,4	2,4	1,0	1,1	1,2	1,9
0,25	85,9	128,9	175,4 226,2	63,1	102,5	149,6	207,5	49,4	84,9	130,1	191,5
0,50	17,3	32,2	55,5 92,7	11,3	22,3	41,5	77,3	8,4	16,9	32,7	65,6
0,75	5,6	10,7	20,2 39,3	3,8	7,2	14,2	30,8	3,1	5,5	10,8	25,0
1,00	8	4,7	8,8 18,4	2,1	3,3	6,1	14,0	16	2,7	4,7	11,0
1,25	1,8	2,6	4,5 9,6	1,6	2,0	3,2	7,2	1,5	1,8	2,6	5,6
1,50	1,4	1,8	2,7 5,5	1,3	1,5	2,1	4,1	1,3	1,4	1,8	3,3
1,75	1,2	1,4	1,9 3,5	1,2	1,3	1,5	2,7	1,1	1,2	1,4	2,2
2,00	1,1	1,2	1,5 2,4	1,1	1,1	1,3	1,9	1,1	1,1	1,2	1,6
0,25	71,2	110,3	155,4 209,8	53,6	89,4	133,8	193,1	43,0	75,0	117,9	179,0
0,50	14,1	25,7	44,9 79,1	9,7	18,6	34,5	66,9	7,6	14,6	28,1	57,7
0,75	5,1	8,7	15,9 31,9	3,7	6,2	11,7	25,7	3,1	4,9	9,3	21,3
1,00	12	4,1	7 14,6	16	3,1	5,2	11,4	20	2,6	4,2	9,3
1,25	2,0	2,5	3,8 7,5	1,7	2,0	2,9	5,9	1,6	1,8	2,4	4,8
1,50	1,5	1,8	2,4 4,4	1,4	1,6	1,9	3,5	1,3	1,5	1,7	2,9
1,75	1,3	1,5	1,8 2,8	1,2	1,3	1,5	2,3	1,2	1,3	1,4	2,0
2,00	1,2	1,3	1,4 2	1,1	1,2	1,3	1,7	1,1	1,2	1,2	1,5

Tabela B.19 - NMA, gráfico com AD, processos IID e AR(2),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$		
	$n_2$	$\phi_1$		$n_2$	$\phi_1$		$n_2$	$\phi_1$	
		0,25	0,56		0,25	0,56		0,25	0,56
		IID	-0,12		IID	-0,12		IID	-0,12
0,25	119,0	252,8	182,4	80,0	233,9	141,1	59,5	216,6	114,2
0,50	27,7	119,3	59,6	15,1	99,8	37,3	10,2	84,4	26,3
0,75	8,8	55,6	22,0	4,7	43,4	12,4	3,4	34,6	8,4
1,00	3,7	27,7	9,6	2,2	20,6	5,3	1,8	15,9	3,7
1,25	2,1	14,9	4,9	1,5	10,8	2,8	1,4	8,2	2,1
1,50	1,4	8,6	2,9	1,2	6,2	1,8	1,2	4,7	1,5
1,75	1,2	5,4	1,9	1,1	3,9	1,4	1,1	3,0	1,3
2,00	1,1	3,6	1,5	1,0	2,7	1,2	1,0	2,1	1,1
0,25	85,9	233,4	146,1	63,1	216,5	118,4	49,4	201,3	99,2
0,50	17,3	99,4	40,0	11,3	84,3	28,1	8,4	72,5	21,4
0,75	5,6	43,1	13,7	3,8	34,6	9,2	3,1	28,3	7,0
1,00	2,7	20,5	6,0	2,1	15,9	4,1	1,9	12,7	3,3
1,25	1,8	10,7	3,2	1,6	8,2	2,4	1,5	6,5	2,0
1,50	1,4	6,2	2,1	1,3	4,7	1,7	1,3	3,7	1,6
1,75	1,2	3,9	1,6	1,2	3,0	1,4	1,1	2,4	1,3
2,00	1,1	2,7	1,3	1,1	2,1	1,2	1,1	1,8	1,2
0,25	71,2	216,8	126,1	53,6	201,8	104,0	43,0	188,4	88,6
0,50	14,1	84,7	31,9	9,7	72,9	23,4	7,6	63,6	18,5
0,75	5,1	34,8	11,0	3,7	28,6	7,9	3,1	23,9	6,2
1,00	2,8	16,0	5,1	2,3	12,8	3,8	2,0	10,5	3,1
1,25	2,0	8,3	3,0	1,7	6,5	2,4	1,6	5,3	2,1
1,50	1,5	4,7	2,1	1,4	3,8	1,8	1,3	3,2	1,6
1,75	1,3	3,0	1,6	1,2	2,5	1,5	1,2	2,1	1,4
2,00	1,2	2,1	1,4	1,1	1,8	1,3	1,1	1,6	1,2

Tabela B.20 - NMA, Gráfico com AD, processos IID e MA(2),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$		
	$n_2$	$\theta_1$		$n_2$	$\theta_1$		$n_2$	$\theta_1$	
		IID	-0,387 $\theta_2$		-0,900	0,100		-0,387 $\theta_2$	-0,900
0,25	119,0	197,1	158,6	80,0	157,2	115,0	59,5	130,3	90,0
0,50	27,7	69,5	45,7	15,1	45,3	26,4	10,2	32,8	18,1
0,75	8,8	26,8	15,8	4,7	15,8	8,4	3,4	10,9	5,7
1,00	3,7	11,9	6,7	2,2	6,8	3,6	1,8	4,7	2,6
1,25	2,1	6,1	3,5	1,5	3,6	2,1	1,4	2,6	1,7
1,50	1,4	3,5	2,1	1,2	2,2	1,5	1,2	1,8	1,3
1,75	1,2	2,3	1,5	1,1	1,6	1,2	1,1	1,4	1,2
2,00	1,1	1,7	1,2	1,0	1,3	1,1	1,0	1,2	1,1
0,25	85,9	162,7	120,4	63,1	134,3	93,7	49,4	114,1	75,9
0,50	17,3	48,6	28,9	11,3	34,8	19,5	8,4	26,8	14,5
0,75	5,6	17,4	9,5	3,8	11,8	6,3	3,1	8,9	4,8
1,00	2,7	7,7	4,2	2,1	5,2	3,0	1,9	4,1	2,5
1,25	1,8	4,1	2,4	1,6	2,9	1,9	1,5	2,4	1,7
1,50	1,4	2,6	1,7	1,3	2,0	1,5	1,3	1,8	1,4
1,75	1,2	1,9	1,4	1,2	1,6	1,3	1,1	1,5	1,2
2,00	1,1	1,5	1,2	1,1	1,3	1,1	1,1	1,3	1,1
0,25	71,2	143,1	101,9	53,6	119,3	80,5	43,0	102,8	66,8
0,50	14,1	39,5	22,9	9,7	29,2	16,2	7,6	23,2	12,6
0,75	5,1	14,1	7,8	3,7	10,0	5,5	3,1	7,9	4,4
1,00	2,8	6,5	3,8	2,3	4,7	2,9	2,0	3,8	2,5
1,25	2,0	3,7	2,4	1,7	2,8	2,0	1,6	2,4	1,8
1,50	1,5	2,5	1,8	1,4	2,0	1,6	1,3	1,9	1,5
1,75	1,3	1,9	1,5	1,2	1,6	1,3	1,2	1,5	1,3
2,00	1,2	1,6	1,3	1,1	1,4	1,2	1,1	1,4	1,2

Tabela B.21 – Probabilidade  $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD,  $n_1=1$ , processos IID e autocorrelacionados,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$		$\bar{n}=4$		$\bar{n}=5$	
	$n_2$	$p_1$	$n_2$	$p_1$	$n_2$	$p_1$
0,00		0,50		0,38		0,33
0,25		0,51		0,39		0,35
0,50		0,55		0,43		0,39
0,75		0,61		0,50		0,46
1,00	4	0,67	8	0,57	12	0,54
1,25		0,74		0,66		0,62
1,50		0,81		0,74		0,71
1,75		0,87		0,81		0,79
2,00		0,91		0,87		0,85
<hr/>						
0,00		0,25		0,25		0,25
0,25		0,26		0,26		0,26
0,50		0,31		0,31		0,31
0,75		0,37		0,37		0,37
1,00	8	0,46	12	0,46	16	0,46
1,25		0,55		0,55		0,55
1,50		0,64		0,64		0,64
1,75		0,73		0,73		0,73
2,00		0,80		0,80		0,80
<hr/>						
0,00		0,17		0,19		0,20
0,25		0,18		0,20		0,21
0,50		0,22		0,24		0,25
0,75		0,28		0,30		0,32
1,00	12	0,36	16	0,39	20	0,40
1,25		0,45		0,48		0,49
1,50		0,55		0,57		0,59
1,75		0,64		0,67		0,68
2,00		0,73		0,75		0,76

Tabela B.22 – Probabilidade  $\overline{[X_1 \in I_2]}$ , gráfico com AD, processos IID e AR(1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\overline{n=3}$			$\overline{n=4}$			$\overline{n=5}$					
	$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$		$n_2$	$\phi$				
	IID	0,25	0,50	0,75	IID	0,25	0,50	0,75	IID	0,25	0,50	0,75
0,00		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
0,25		0,28	0,27	0,27	0,28	0,27	0,27	0,27	0,28	0,27	0,27	0,27
0,50		0,36	0,34	0,32	0,36	0,34	0,33	0,32	0,36	0,34	0,33	0,32
0,75		0,48	0,44	0,39	0,48	0,44	0,41	0,39	0,48	0,44	0,41	0,39
1,00	4	0,61	0,55	0,48	0,61	0,55	0,51	0,48	0,61	0,55	0,51	0,48
1,25		0,73	0,67	0,58	0,73	0,67	0,62	0,58	0,73	0,67	0,62	0,58
1,50		0,83	0,77	0,68	0,83	0,77	0,72	0,68	0,83	0,77	0,72	0,68
1,75		0,91	0,86	0,77	0,91	0,86	0,81	0,77	0,91	0,86	0,81	0,77
2,00		0,95	0,92	0,84	0,95	0,92	0,88	0,84	0,95	0,92	0,88	0,84
0,00		0,13	0,13	0,13	0,17	0,17	0,17	0,17	0,19	0,19	0,19	0,19
0,25		0,15	0,14	0,14	0,19	0,19	0,18	0,18	0,21	0,21	0,21	0,20
0,50		0,22	0,20	0,18	0,27	0,25	0,24	0,23	0,29	0,27	0,26	0,25
0,75		0,32	0,29	0,24	0,38	0,34	0,31	0,30	0,41	0,37	0,34	0,32
1,00	8	0,45	0,40	0,33	0,52	0,46	0,42	0,38	0,54	0,48	0,44	0,41
1,25		0,59	0,52	0,42	0,65	0,58	0,53	0,48	0,67	0,61	0,55	0,51
1,50		0,72	0,64	0,53	0,77	0,70	0,64	0,59	0,79	0,72	0,66	0,61
1,75		0,83	0,75	0,63	0,86	0,80	0,74	0,69	0,88	0,81	0,76	0,71
2,00		0,90	0,84	0,73	0,93	0,87	0,82	0,78	0,93	0,89	0,84	0,79
0,00		0,08	0,08	0,08	0,13	0,13	0,13	0,13	0,15	0,15	0,15	0,15
0,25		0,10	0,10	0,09	0,15	0,14	0,14	0,14	0,18	0,17	0,17	0,16
0,50		0,16	0,14	0,13	0,22	0,20	0,19	0,18	0,25	0,23	0,22	0,21
0,75		0,25	0,22	0,18	0,32	0,29	0,26	0,24	0,36	0,32	0,29	0,27
1,00	12	0,38	0,32	0,26	0,45	0,40	0,36	0,33	0,49	0,43	0,39	0,36
1,25		0,51	0,44	0,35	0,59	0,52	0,47	0,42	0,63	0,56	0,50	0,46
1,50		0,65	0,57	0,45	0,72	0,64	0,58	0,53	0,75	0,68	0,62	0,57
1,75		0,77	0,69	0,56	0,83	0,75	0,69	0,63	0,85	0,78	0,72	0,67
2,00		0,86	0,79	0,66	0,90	0,84	0,78	0,73	0,92	0,86	0,81	0,76

Tabela B.23 – Probabilidade  $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e MA(1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$		
	$n_2$	$\theta$		$n_2$	$\theta$		$n_2$	$\theta$	
		IID	-0,127 -0,268 -0,451		IID	-0,127 -0,268 -0,451		IID	-0,127 -0,268 -0,451
0,00		0,25	0,25		0,25	0,25		0,25	0,25
0,25		0,28	0,27		0,28	0,27		0,28	0,27
0,50		0,36	0,34		0,36	0,34		0,36	0,34
0,75		0,48	0,44		0,48	0,44		0,48	0,44
1,00	4	0,61	0,58	8	0,61	0,58	12	0,61	0,58
1,25		0,73	0,70		0,73	0,70		0,73	0,70
1,50		0,83	0,81		0,83	0,81		0,83	0,81
1,75		0,91	0,88		0,91	0,88		0,91	0,88
2,00		0,95	0,94		0,95	0,94		0,95	0,94
0,00		0,13	0,13		0,17	0,17		0,19	0,19
0,25		0,15	0,14		0,19	0,19		0,21	0,21
0,50		0,22	0,20		0,27	0,25		0,29	0,27
0,75		0,32	0,29		0,38	0,34		0,41	0,37
1,00	8	0,45	0,40	12	0,52	0,49	16	0,54	0,51
1,25		0,59	0,53		0,65	0,59		0,67	0,64
1,50		0,72	0,68		0,77	0,73		0,79	0,76
1,75		0,83	0,79		0,86	0,83		0,88	0,85
2,00		0,90	0,87		0,93	0,90		0,93	0,91
0,00		0,08	0,08		0,13	0,13		0,15	0,15
0,25		0,10	0,10		0,15	0,14		0,18	0,17
0,50		0,16	0,15		0,22	0,21		0,25	0,24
0,75		0,25	0,24		0,32	0,30		0,36	0,34
1,00	12	0,38	0,33	16	0,45	0,42	20	0,49	0,46
1,25		0,51	0,48		0,59	0,56		0,63	0,59
1,50		0,65	0,61		0,72	0,68		0,75	0,72
1,75		0,77	0,73		0,83	0,79		0,85	0,82
2,00		0,86	0,83		0,90	0,87		0,92	0,89



Tabela B.24 – Probabilidade  $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e ARMA(1,1),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$				$\bar{n}=4$				$\bar{n}=5$				
	$n_2$	$\phi$		IID	$n_2$	$\phi$		IID	$n_2$	$\phi$		IID	
		0,437	0,612			0,150	0,794			0,200	0,150		0,100
0,00		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25		0,25	0,25	0,25	0,25
0,25		0,28	0,27	0,28	0,28	0,27	0,28	0,28		0,27	0,27	0,28	0,27
0,50		0,36	0,34	0,36	0,36	0,32	0,31	0,36		0,34	0,32	0,36	0,31
0,75		0,48	0,43	0,48	0,48	0,40	0,38	0,48		0,43	0,40	0,48	0,38
1,00	4	0,61	0,55	0,61	0,61	0,50	0,47	0,61	12	0,55	0,50	0,61	0,47
1,25		0,73	0,66	0,73	0,73	0,61	0,57	0,73		0,66	0,61	0,73	0,57
1,50		0,83	0,77	0,83	0,83	0,71	0,67	0,83		0,77	0,71	0,83	0,67
1,75		0,91	0,85	0,91	0,91	0,80	0,75	0,91		0,85	0,80	0,91	0,75
2,00		0,95	0,91	0,95	0,95	0,87	0,83	0,95		0,91	0,87	0,95	0,83
0,00		0,13	0,13	0,13	0,17	0,17	0,17	0,17		0,17	0,17	0,19	0,19
0,25		0,15	0,14	0,15	0,19	0,19	0,18	0,19		0,19	0,18	0,21	0,21
0,50		0,22	0,20	0,22	0,27	0,25	0,23	0,27		0,25	0,23	0,29	0,25
0,75		0,32	0,28	0,32	0,38	0,34	0,31	0,38		0,34	0,31	0,41	0,31
1,00	8	0,45	0,39	0,45	0,52	0,45	0,41	0,52	16	0,48	0,43	0,54	0,40
1,25		0,59	0,51	0,59	0,65	0,57	0,52	0,65		0,60	0,54	0,67	0,50
1,50		0,72	0,63	0,72	0,77	0,69	0,63	0,77		0,71	0,63	0,79	0,60
1,75		0,83	0,74	0,83	0,86	0,79	0,73	0,86		0,81	0,73	0,88	0,70
2,00		0,90	0,83	0,90	0,93	0,87	0,81	0,93		0,88	0,81	0,93	0,78
0,00		0,08	0,08	0,08	0,13	0,13	0,13	0,13		0,13	0,13	0,15	0,15
0,25		0,10	0,10	0,10	0,15	0,14	0,14	0,15		0,14	0,14	0,18	0,16
0,50		0,16	0,14	0,16	0,22	0,20	0,18	0,22		0,20	0,18	0,25	0,20
0,75		0,25	0,22	0,25	0,32	0,28	0,26	0,32		0,28	0,26	0,36	0,27
1,00	12	0,38	0,32	0,38	0,45	0,39	0,35	0,45	20	0,43	0,38	0,49	0,35
1,25		0,51	0,43	0,51	0,59	0,51	0,45	0,59		0,55	0,49	0,63	0,45
1,50		0,65	0,56	0,65	0,72	0,63	0,57	0,72		0,67	0,57	0,75	0,55
1,75		0,77	0,68	0,77	0,83	0,74	0,67	0,83		0,77	0,67	0,85	0,65
2,00		0,86	0,78	0,86	0,90	0,83	0,77	0,90		0,86	0,77	0,92	0,74

Tabela B.25 – Probabilidade  $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e AR(2),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$		
	$n_2$	$\phi_1$		$n_2$	$\phi_1$		$n_2$	$\phi_1$	
		0,25	0,56		0,25	0,56		0,25	0,56
		IID	-0,12	IID	-0,12	IID	-0,12		
0,00		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25		
0,25		0,28	0,27	0,28	0,27	0,28	0,27		
0,50		0,36	0,33	0,36	0,33	0,36	0,33		
0,75		0,48	0,41	0,48	0,41	0,48	0,41		
1,00	4	0,61	0,51	0,61	0,51	0,61	0,51	12	
1,25		0,73	0,62	0,73	0,62	0,73	0,62		
1,50		0,83	0,72	0,83	0,72	0,83	0,72		
1,75		0,91	0,81	0,91	0,81	0,91	0,81		
2,00		0,95	0,88	0,95	0,88	0,95	0,88		
0,00		0,13	0,13	0,17	0,17	0,17	0,17		
0,25		0,15	0,14	0,19	0,18	0,19	0,18		
0,50		0,22	0,19	0,27	0,24	0,27	0,24		
0,75		0,32	0,26	0,38	0,31	0,38	0,31		
1,00	8	0,45	0,36	0,52	0,42	0,52	0,42	16	
1,25		0,59	0,47	0,65	0,53	0,65	0,53		
1,50		0,72	0,58	0,77	0,64	0,77	0,64		
1,75		0,83	0,69	0,86	0,74	0,86	0,74		
2,00		0,90	0,78	0,93	0,82	0,93	0,82		
0,00		0,08	0,08	0,13	0,13	0,13	0,13		
0,25		0,10	0,10	0,15	0,14	0,15	0,14		
0,50		0,16	0,13	0,22	0,19	0,22	0,19		
0,75		0,25	0,20	0,32	0,26	0,32	0,26		
1,00	12	0,38	0,28	0,45	0,36	0,45	0,36	20	
1,25		0,51	0,39	0,59	0,47	0,59	0,47		
1,50		0,65	0,50	0,72	0,58	0,72	0,58		
1,75		0,77	0,61	0,83	0,69	0,83	0,69		
2,00		0,86	0,72	0,90	0,78	0,90	0,78		
0,00		0,08	0,08	0,13	0,13	0,13	0,13		
0,25		0,10	0,10	0,15	0,14	0,15	0,14		
0,50		0,16	0,13	0,22	0,19	0,22	0,19		
0,75		0,25	0,20	0,32	0,26	0,32	0,26		
1,00	12	0,38	0,28	0,45	0,36	0,45	0,36	20	
1,25		0,51	0,39	0,59	0,47	0,59	0,47		
1,50		0,65	0,50	0,72	0,58	0,72	0,58		
1,75		0,77	0,61	0,83	0,69	0,83	0,69		
2,00		0,86	0,72	0,90	0,78	0,90	0,78		
0,00		0,08	0,08	0,13	0,13	0,13	0,13		
0,25		0,10	0,10	0,15	0,14	0,15	0,14		
0,50		0,16	0,13	0,22	0,19	0,22	0,19		
0,75		0,25	0,20	0,32	0,26	0,32	0,26		
1,00	12	0,38	0,28	0,45	0,36	0,45	0,36	20	
1,25		0,51	0,39	0,59	0,47	0,59	0,47		
1,50		0,65	0,50	0,72	0,58	0,72	0,58		
1,75		0,77	0,61	0,83	0,69	0,83	0,69		
2,00		0,86	0,72	0,90	0,78	0,90	0,78		

Tabela B.26 – Probabilidade  $[\bar{X}_1 \in I_2]$ , gráfico com AD, processos IID e MA(2),  $n_1=2$ ,  $NMA_0=370,4$

$\delta$	$\bar{n}=3$			$\bar{n}=4$			$\bar{n}=5$		
	$n_2$	$\theta_1$		$n_2$	$\theta_1$		$n_2$	$\theta_1$	
		-0,387	-0,545		-0,387	-0,545		-0,387	-0,545
		IID	0,100		IID	0,100		IID	0,100
0,00		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
0,25		0,28	0,27	0,28	0,39	0,28	0,28	0,27	0,27
0,50		0,36	0,34	0,36	0,43	0,36	0,36	0,31	0,34
0,75		0,48	0,44	0,48	0,50	0,48	0,48	0,38	0,44
1,00	4	0,61	0,56	0,61	0,57	0,61	0,61	0,47	0,56
1,25		0,73	0,67	0,73	0,66	0,73	0,73	0,57	0,67
1,50		0,83	0,78	0,83	0,74	0,83	0,83	0,66	0,78
1,75		0,91	0,86	0,91	0,81	0,91	0,91	0,75	0,86
2,00		0,95	0,92	0,95	0,87	0,95	0,95	0,82	0,92
0,00		0,13	0,13	0,17	0,17	0,17	0,17	0,19	0,19
0,25		0,15	0,14	0,19	0,26	0,19	0,21	0,20	0,21
0,50		0,22	0,20	0,27	0,31	0,27	0,29	0,25	0,27
0,75		0,32	0,29	0,38	0,37	0,38	0,41	0,31	0,37
1,00	8	0,45	0,40	0,52	0,46	0,52	0,54	0,40	0,49
1,25		0,59	0,52	0,65	0,55	0,65	0,67	0,50	0,61
1,50		0,72	0,65	0,77	0,64	0,77	0,79	0,60	0,72
1,75		0,83	0,76	0,86	0,73	0,86	0,88	0,69	0,82
2,00		0,90	0,84	0,93	0,80	0,93	0,93	0,78	0,89
0,00		0,08	0,08	0,13	0,13	0,13	0,15	0,15	0,15
0,25		0,10	0,10	0,15	0,20	0,15	0,18	0,16	0,17
0,50		0,16	0,15	0,22	0,24	0,22	0,25	0,20	0,23
0,75		0,25	0,22	0,32	0,30	0,32	0,36	0,27	0,32
1,00	12	0,38	0,32	0,45	0,39	0,45	0,49	0,35	0,44
1,25		0,51	0,44	0,59	0,48	0,59	0,63	0,45	0,56
1,50		0,65	0,57	0,72	0,57	0,72	0,75	0,55	0,68
1,75		0,77	0,69	0,83	0,67	0,83	0,85	0,65	0,78
2,00		0,86	0,79	0,90	0,75	0,90	0,92	0,74	0,87

**APÊNDICE C:****CÓDIGOS COMPUTACIONAIS EM FORTRAN SUPER STATION 4.0****C1. GRÁFICO DE MÉDIAS**

```
USE MSIMSL
```

```
DOUBLE PRECISION ARL, PROB ,SHIFT ,K, SIGYBAR ,OUTPUT(9),DPS
```

```
DATA OUTPUT/0.0D0,0.25D0,0.50D0,0.75D0,1.0D0,1.25D0,1.5D0,
&1.75D0,2.0D0/
```

```
WRITE(*,1485)
1485 FORMAT ('DIGITE DPS e SIGYBAR ')
```

```
READ(*,*) DPS,SIGYBAR
```

```
K=3.0D0
```

```
PROB=DNORDF(K)-DNORDF(-K)
```

```
ARL= 1.0D0/(1.0-PROB )
```

```
WRITE(*,1455) ARL
1455 FORMAT (' ARLo='F14.7)
```

```
DO 444 IJK = 1, 9
```

```
SHIFT=DPS*OUTPUT(IJK)
```

```
PROB=DNORDF(K-SHIFT/SIGYBAR)-DNORDF(-K-SHIFT/SIGYBAR)
```

```
ARL= 1.0D0/(1.0-PROB )
```

```
WRITE(*,1405) XARA(IJK), ARL
1405 FORMAT (' SHIFT=',F6.2' ARL=',F5.1)
```

```
444 CONTINUE
```

```
END
```

## C2. GRÁFICO DE CONTROLE EWMA

```

USE MSIMSL
PARAMETER (M=100)
DOUBLE PRECISION LSC, MEDIA, DESVIO, GRID, DPS, ARL,ARL0,
B(M,M), & PI(M), Y(M), INCREMENTO, LI,LS,LJ,LK, RES1, RES3, BINV(M,M),
LSEND,
&LAMBDA, AF(8)
DATA AF/0.250D0,0.5D0,0.75D0,1.0D0,1.25D0,1.5D0,1.75D0,2.0D0/
LAMBDA=XXXD0
SIGYBAR=ZZZD0
DPS = YYXD0
ARL0=370.4D0
LSC=0.1D0

INCREMENTO=0.00495D0

WRITE(*,287)

287  FORMAT('  ARLo digite 1; ARL digite 2')

READ(*,*)IJK

IF(IJK.EQ.2) GOTO 1115

400  IF(ARL.LT.ARL0) THEN
      LSC=LSC+INCREMENTO
    ELSE
      LSEND=LSC
      LSC=LSC-INCREMENTO
      INCREMENTO=INCREMENTO/2.0D0
      IF(INCREMENTO.LT.0.0000001) THEN

LSC=LSEND
GOTO 500
ENDIF
LSC=LSC+INCREMENTO

ENDIF

DESVIO=1.0D0
MEDIA=0.0D0

GRID=(2.0*LSC)/(2.0D0*M)

C  OBTEM MATRIZ B=I-R E O VETOR DE PROB. INICIAIS PI

```

```

DO 10 J=1,M
DO 20 K=1,M

LJ= GRID+(J-1.0D0)*2.0D0*GRID -LSC
LK= GRID+(K-1.0D0)*2.0D0*GRID -LSC

LS= ( (LK+GRID)-(1.0D0-LAMBDA)*LJ-LAMBDA*MEDIA)/LAMBDA*DESVIO
LI= ( (LK-GRID)-(1.0D0-LAMBDA)*LJ-LAMBDA*MEDIA)/LAMBDA*DESVIO

B(J,K)=0.0D0

RES1=DNORDF(LS/SIGYBAR)
RES3=DNORDF(LI/SIGYBAR)

B(J,K)= -(RES1-RES3)

IF(J.EQ.K) B(J,K)=B(J,K)+1.0D0

20 CONTINUE
10 CONTINUE

C   BINV= INVERSO (I-R)

CALL DLINRG(M,B,M,BINV,M)

DO 1117 I=1,M

PI(I)=0.0

1117 CONTINUE
PI(50)=1.0D0

CALL DMURRV (M,M,BINV,M,M,PI,2,M,Y)

ARL=0.0D0

DO 30 I=1,M

ARL=ARL + Y(I)

30 CONTINUE

C   WRITE(*,106) LSC, ARL
106 FORMAT(5X,2F14.6)

```

```

GOTO 400
500 CONTINUE

WRITE(*,106) LSC, ARL

STOP

C    OUT OF CONTROL
C    DETERMINAÇÃO DOS PIs

1115 CONTINUE

WRITE( *,432)

432  FORMAT(' DIGITE LSC ')
READ(*,*)LSC

WRITE(*,917)ARL0,LSC,LAMBDA
917  FORMAT(/,' STEADY STATE FOR EWMA_CORREL',/,ARL0=',F6.1, '
LSC=',F8.4 &' LAMBDA=',F5.2/)

MEDIA=0.0D0
DESVIO=1.0D0

GRID=(2.0*LSC)/(2.0D0*M)

DO 510 J=1,M
DO 520 K=1,M

LJ= GRID+(J-1.0D0)*2.0D0*GRID -LSC
LK= GRID+(K-1.0D0)*2.0D0*GRID -LSC
LS= ((LK+GRID)-(1.0D0-LAMBDA)*LJ-LAMBDA*MEDIA)/LAMBDA*DESVIO
LI= ((LK-GRID)-(1.0D0-LAMBDA)*LJ-LAMBDA*MEDIA)/LAMBDA*DESVIO

B(J,K)=0.0D0
RES1=DNORDF(LS/SIGYBAR)
RES3=DNORDF(LI/SIGYBAR)
B(J,K)= -(RES1-RES3)
C    WRITE(*,34) B(J,K)
C 34  FORMAT(F14.7)

IF(J.EQ.K) B(J,K)=B(J,K)+1.0D0

520 CONTINUE

510 CONTINUE

```

```
DO 117 I=1,M
```

```
PI(I)=0.0
```

```
117 CONTINUE
```

```
PI(50)=1.0D0
```

```
CALL DLINRG(M,B,M,BINV,M)
```

```
CALL DMURRV (M,M,BINV,M,M,PI,2,M,Y)
```

```
ARL=0.0D0
```

```
DO 340 I=1,M
```

```
ARL=ARL + Y(I)
```

```
340 CONTINUE
```

```
WRITE(*,1060) MEDIA, ARL
```

```
1060 FORMAT(2F12.2,F12.2)
```

```
DO 727 I=1,M
```

```
PI(I)=Y(I)/ARL
```

```
C WRITE(*,35) PI(I)
```

```
C 35 FORMAT(F14.7)
```

```
727 CONTINUE
```

```
C OUT OF CONTROL
```

```
C DETERMINAÇÃO DOS ARL
```

```
DO 447 IJL=1,8
```

```
MEDIA=DPS*AF(IJL)
```

```
DO 810 J=1,M
```

```
DO 820 K=1,M
```

```
LJ= GRID+(J-1.0D0)*2.0D0*GRID -LSC
```

```
LK= GRID+(K-1.0D0)*2.0D0*GRID -LSC
```

```
LS=((LK+GRID)-(1.0D0-LAMBDA)*LJ-LAMBDA*MEDIA)/LAMBDA*DESVIO
```

```
LI= ((LK-GRID)-(1.0D0-LAMBDA)*LJ-LAMBDA*MEDIA)/LAMBDA*DESVIO
```

```
B(J,K)=0.0D0
```

```
RES1=DNORDF(LS/SIGYBAR)
```

```
RES3=DNORDF(LI/SIGYBAR)
```

```
B(J,K)= -(RES1-RES3)
```

```
IF(J.EQ.K) B(J,K)=B(J,K)+1.0D0
```

```
820 CONTINUE
```



810 CONTINUE

CALL DLINRG(M,B,M,BINV,M)  
CALL DMURRV (M,M,BINV,M,M,PI,2,M,Y)  
ARL=0.0D0

DO 9930 I=1,M  
ARL=ARL + Y(I)

9930 CONTINUE

WRITE(\*,1060) AF(IJL), ARL

446 CONTINUE  
447 CONTINUE

END

### C3. GRÁFICO COM AMOSTRA DE TAMANHO VARIÁVEL

```

USE MSIMSL
DOUBLE PRECISION ARL, PROB ,SHIFT ,K, P01 ,N1,N2,NBARRA, &
W,P1,P11,P12,P21,P22,SIGN1,SIGN2 ,
DATA 0.0D0,0.25D0,0.50D0,0.75D0,1.0D0,1.25D0,1.50D0,1.75D0,2.0D0/
  K=3.0D0
  N1=LLD0
  N2=ZZD0
  NBARRA=MMD0
  SIGN1= NND0
  SIGN2= JJD0
  DPS=  KKD0
  PROB=DNORDF(K)-DNORDF(-K)
  P01=PROB*(N2- NBARRA)/(N2-N1)
  P01=(1.0D0-P01)/2.0D0
  W=-DNORIN(P01)
  ARL= 1.0D0/(1.0-PROB )
  P1= ( DNORDF(W)-DNORDF(-W))/(DNORDF(K)-DNORDF(-K))

  WRITE(*,1455) ARL,W ,2*P01
1455 FORMAT (' ARLo='F14.7, ' W=',F10.7, '  PN2=',F10.7)
  DO 444 IJK=1,9

  SHIFT=DPS*XARA(IJK)

P11=DNORDF(W-SHIFT/SIGN1)-DNORDF(-W-SHIFT/SIGN1)
P21=DNORDF(W-SHIFT/SIGN2)-DNORDF(-W-SHIFT/SIGN2)
P12=DNORDF(K-SHIFT/SIGN1)-DNORDF(W-SHIFT/SIGN1) +
& DNORDF(-W-SHIFT/SIGN1)-DNORDF(-K-SHIFT/SIGN1)
P22=DNORDF(K-SHIFT/SIGN2)-DNORDF(W-SHIFT/SIGN2) +
& DNORDF(-W-SHIFT/SIGN2)-DNORDF(-K-SHIFT/SIGN2)

ARL=P1*( (1.0D0-P22+P12)/ ((1.0D0-P11)*(1.0D0-P22)-P12*P21)) +
& (1.0D0-P1)*( (1.0D0-P11+P21)/ ((1.0D0-P11)*(1.0D0-P22)-P12*P21))

  WRITE(*,1405) XARA(IJK), ARL
1405 FORMAT ('SHIFT=',F6.2,' ARL=',F5.1)
444 CONTINUE

END

```

#### C4. GRÁFICO COM AMOSTRAGEM DUPLA

(comentários explicativos ao programa adicionados em letras minúsculas)

USE MSIMSL

DOUBLE PRECISION N,N1,N2,L, L1,L2, PROB ,SHIFT

DOUBLE PRECISION GRID ,ARL,ARL0,NBAR, A, B, F, ERRABS, ERREST,  
ERRREL, SX1BAR, DPS,VALOR, RESULT, RES ,FC(9)

DATA FC/0.0D0,0.25D0,0.5D0,0.75D0,1.0D0,1.25D0,1.5D0,1.75D0,2.0D0/

REAL ARG

COMMON L1, L2, SHIFT, SX1BAR, N, N2

EXTERNAL F, G, H

SHIFT=0.0D0

NBAR=xxD0

N2=xxD0

N1=xxD0

SX1BAR=xxD0

DPS=xxD0

dados de entrada:

(xx) são valores numéricos calculados em planilha auxiliar

$NBAR = \bar{n}$ ,  $SX1BAR = \sigma_{\bar{X}_1}$  e  $DPS = \sigma_X$

$N = N1 + N2$

(o valor abaixo é dado de entrada e representa o número médio de amostras até o sinal com o processo em controle)

ARL0=370.4D0
--------------

$ARG = (NBAR - N1) / (2.0D0 * N2)$

$L1 = -1.0D0 * ANORIN(ARG)$

$L = -ANORIN(0.0000001)$

$L = 5.0D0$

$L2 = 1.0D0$

$GRID = 0.5D0$

$PROB = DNORDF(L1) - DNORDF(-L1)$
-----------------------------------

expressão (3.48)

1000 CONTINUE

```
A=-10.0D0
B=10.0D0
```

```
ERRABS = 0.0
  ERRREL = 0.00001
  IRULE =2
```

```
MAXSUB=1000
CALL DQDAG (F, A, B, ERRABS, ERRREL, IRULE, RESULT, ERREST)
```

```
RES=RESULT
ARL= 1.0D0/(1.0-(PROB+RES) )
```

```
IF (ARL.LT.ARL0) THEN L2=L2+GRID
      GOTO 100
```

```
ELSE
  L2=L2-GRID
  GRID=GRID/10.0D0
```

```
  IF(GRID.LT.0.00001)      GOTO 2000
  L2=L2+GRID
  GOTO 1000
ENDIF
```

```
2000 CONTINUE
```

```
  L2=L2+10.0D0*GRID
```

```
WRITE(*,100)L1,L,L2,ARL, 1.0D0-PROB
100 FORMAT('L1='F10.7,'L='F10.7,'L2='F10.7,'ARL0='F9.3', 'PROB DE IR AO
SEGUNDO ESTAGIO'='F6.4')
```

```
3000 CONTINUE
DO 445 I=1,9
```

```
VALOR=FC(I)
SHIFT= FC(I)*DPS
```

linha de comando abaixo representa a expressão (3.53)
---

$PROB=DNORDF(L1-SHIFT/SX1BAR)-DNORDF(-L1-SHIFT/SX1BAR)$
---

```
CALL DQDAG (F, A, B, ERRABS, ERRREL, IRULE, RESULT, ERREST)
RES=RESULT
WRITE(*,888)VALOR,1.0D0/(1.0D0-(RES+PROB)), 1.0D0-PROB
888  FORMAT(' SHIFT='F4.2,' NMA='F5.1,' P2S='F3.2)
```

445 CONTINUE

READ(\*,\*)  
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION F (X)  
USE MSIMSL

EXTERNAL FUNCTION DNORDF

DOUBLE PRECISION X,AUX1,AUX2,DELTA ,L1,L2,SHIFT,SDELTA, SX1BAR,  
X1BARRA,AUX3,AUX4 ,N,N2

INTRINSIC DEXP  
COMMON L1, L2 ,SHIFT ,SX1BAR ,N,N2

SDELTA=xxD0  
SYBAR=xxD0  
SX2BAREST=xxD0

} dados de entrada: SDELTA= $\sigma_{\Delta}$ , SYBAR= $\sigma_{\bar{Y}}$  e SX2BAREST= $\sigma_{\bar{X}_2}^*$

linhas de comando abaixo representam a expressão (3.54)

DELTA= X\*SDELTA

AUX1=(N/N2)\*(( L2\*SYBAR-SHIFT-DELTA)/ SX2BAREST)

AUX2=(N/N2)\*((-L2\*SYBAR-SHIFT-DELTA)/ SX2BAREST)

F=(DNORDF(AUX1)-DNORDF(AUX2))\*(1.0D0/DSQRT(6.283185307D0))  
)\*DEXP(-0.5\*X\*X )

AUX3=-SX1BAR\*L1-SHIFT  
AUX4=SX1BAR\*L1-SHIFT

X1BARRA=X\*SX1BAR  
IF ( X1BARRA . GT.AUX3.AND X1BARRA .LT. AUX4) F=0.0D0

RETURN  
END

## Anexo A – RESISTÊNCIA ELÉTRICA DE ISOLAÇÃO

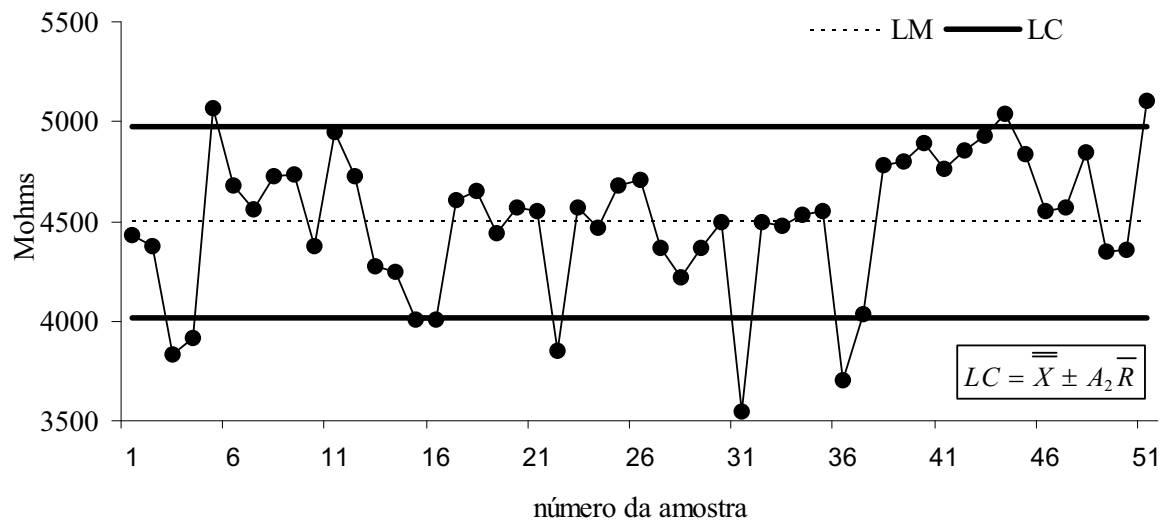


Figura A.1 – Gráfico de controle de médias ( $n=4$ )

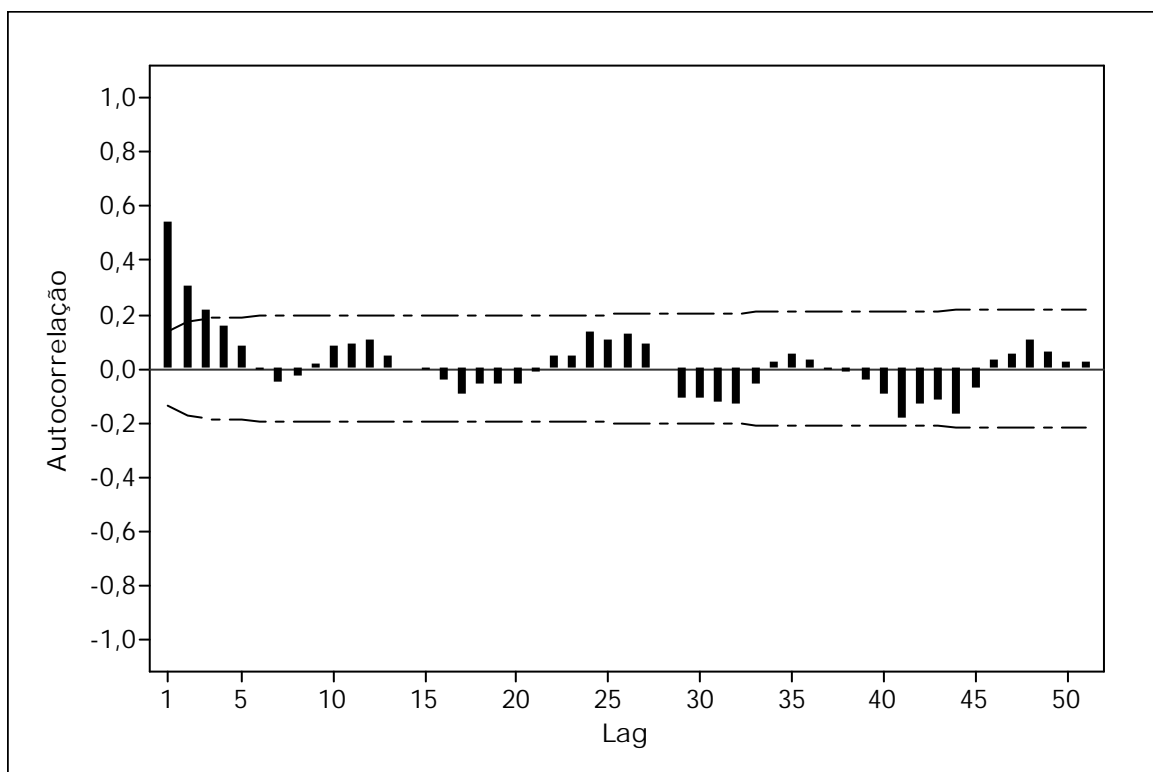


Figura A.2 – Função autocorrelação da série "Resistência elétrica de isolamento"

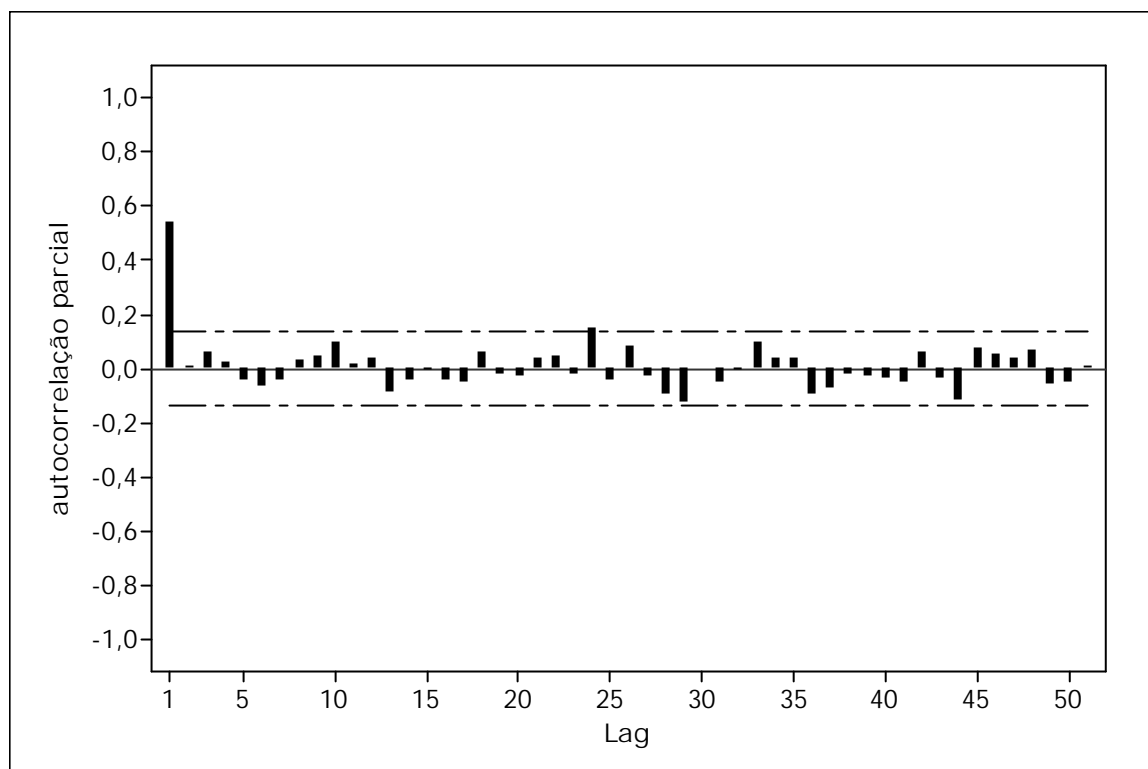


Figura A.3 – Função autocorrelação parcial da série “Resistência elétrica de isolamento”

Ajuste do modelo usando Minitab®

Estimativas dos Parâmetros

Tipo	Coefficientes	T	P
AR1	0,5525	9,39	0,000
Constante	2015,68	73,74	0,000
Media	4504,45		

Número de observações: 204

Graus de Liberdade : 202

Resíduos: Soma dos Quadrados = 30784041

Quadrado Médio = 152396

Estatística Qui-quadrado modificada Box-Pierce (Ljung-Box)

Lag	12	24	36	48
Qui-quadrado	6,5	15,5	25,8	43,7
Valor-P	0,773	0,840	0,842	0,569

Quadro A.1 – Banco de dados “Resistência elétrica de isolamento”

Observações (Mohms)					Observações (Mohms)				
Amostras	1	2	3	4	Amostras	1	2	3	4
1	5045	4350	4350	3975	27	4855	4160	4325	4125
2	4290	4430	4485	4285	28	4100	4340	4575	3875
3	3980	3925	3645	3760	29	4050	4050	4685	4685
4	3300	3685	3463	5200	30	4430	4300	4690	4560
5	5100	4635	5100	5450	31	3075	2965	4080	4080
6	4635	4720	4810	4565	32	4425	4300	4430	4840
7	4410	4065	4565	5190	33	4840	4310	4185	4570
8	4725	4640	4640	4895	34	4700	4440	4850	4125
9	4790	4845	4700	4600	35	4450	4450	4850	4450
10	4110	4410	4180	4790	36	3635	3635	3635	3900
11	4790	4340	4895	5750	37	4340	4340	3665	3775
12	4740	5000	4895	4255	38	5000	4850	4775	4500
13	4170	3850	4445	4650	39	4770	4500	4770	5150
14	4170	4255	4170	4375	40	4850	4700	5000	5000
15	4175	4550	4450	2855	41	5000	4700	4500	4840
16	2920	4375	4375	4355	42	5075	5000	4770	4570
17	4090	5000	4335	5000	43	4925	4775	5075	4925
18	4640	4335	5000	4615	44	5075	4925	5250	4915
19	4215	4275	4275	5000	45	5600	5075	4450	4215
20	4615	4735	4215	4700	46	4325	4665	4615	4615
21	4700	4700	4700	4095	47	4500	4765	4500	4500
22	4095	3940	3700	3650	48	4850	4930	4700	4890
23	4445	4000	4845	5000	49	4625	4425	4135	4190
24	4560	4700	4310	4310	50	4080	3690	5050	4625
25	5000	4575	4700	4430	51	5150	5250	5000	5000
26	4850	4850	4570	4570					

Fonte: SHEWHART, 1931, pg. 20