



unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no
Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição
para a formação continuada do professor de matemática**

Roger Ruben Huaman Huanca

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2014

510.07 Huaman Huanca, Roger Ruben
H874re A resolução de problemas e a modelização matemática no
processo de ensino-aprendizagem-avaliação: uma
contribuição para a formação continuada do professor de
matemática / Roger Ruben Huaman Huanca. - Rio Claro,
2014
315 f. : il., figs., quadros, fots.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Educação
matemática. 3. Formação continuada de professores. I. Título.

Comissão Examinadora

Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
(Orientadora)

Dr. Silvanio de Andrade

Dr. Mauro Carlos Romanatto

Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Dra. Maria Lucia Lorenzetti Wodewotzky

Dr. Glen César Lemos

Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Dra. Maria Cecília de Oliveira Micotti

Roger Ruben Huaman Huanca

- Doutorando -

Rio Claro, 11 de abril de 2014.

Resultado: Aprovado

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me proporcionado a oportunidade de realizar este estudo.

Agradeço à minha família pelo incentivo nos momentos difíceis... no percurso do doutorado.

Agradeço à minha orientadora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, por sua competência, por sua firmeza, pela dedicação, pelo incentivo e pelos momentos de estudo. Uma educadora que não mede esforços para fazer de nós, multiplicadores e verdadeiros profissionais da Educação Matemática.

Agradeço aos Professores Doutores Silvanio de Andrade, Mauro Carlos Romanatto, Rosana Giaretta Sguerra Miskulin e Maria Lucia Lorenzetti Wodewotzky, membros da Comissão Examinadora, pelas valiosas sugestões na época do Exame de Qualificação.

Agradeço aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro.

Agradeço aos membros do Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de Problemas – GTERP, da UNESP/Rio Claro: Andresa, Elizabeth, Fabiane, Fernanda, Maria Lúcia, Raquel, Rosilda, Sandra, Tatiane e Nilton, pelo estudo, discussões e sugestões sobre a minha pesquisa.

Agradeço aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, pelo companheirismo e sugestões.

Agradeço à UEPB e à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta tese se constitui na materialização de uma investigação que envolve aspectos metodológicos, pedagógicos e sociais, realizada no âmbito da formação continuada de professores que ensinam Matemática na Educação Básica. Para o desenvolvimento desta pesquisa, foi assumida como metodologia científica a metodologia de Thomas A. Romberg. O objetivo principal desta tese é o de formar professores de Matemática, da Educação Básica, da região do Cariri Paraibano, como multiplicadores junto a professores dessa região, visando à sua capacitação, propiciando-lhes momentos de reflexão e análise sobre o que ensinar e como ensinar ao fazerem uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Para isso, um projeto de ensino-aprendizagem foi criado atendendo às solicitações da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, e de um trabalho de Extensão Universitária à comunidade da UEPB Campus Monteiro. O referencial teórico considerado para o desenvolvimento desta pesquisa estruturou-se em três eixos: grupo de estudo colaborativo na formação continuada do professor; resolução de problemas e; modelização matemática. Esse projeto foi aplicado a um grupo de seis professores, selecionados em entrevistas individuais, durante quatro meses em doze encontros de oito horas. Além disso, houve atendimento diário do pesquisador a esses professores. Foram usados como procedimentos metodológicos para a coleta de dados: entrevistas, observação do trabalho do grupo, o material escrito pelos professores, filmagens, gravações e diário de campo. O material trabalhado por esses professores nesse processo investigativo foi, simultaneamente, aplicado pelos professores participantes do grupo em suas próprias salas de aula. Acreditamos que esta pesquisa possa contribuir com a Educação Matemática no sentido de promover uma nova forma de se trabalhar ensino-aprendizagem de Matemática em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação Continuada de Professores. Resolução de Problemas. Modelização Matemática.

Abstract

The present work consists of the materialization of an investigation that involved methodological, pedagogical and social aspects, developed in continuing education for teachers who teach Mathematics in basic education. Thomas A. Romberg's methodology was chosen as the scientific methodology for the development of the present research. The main goal of the present work is to educate Mathematics teachers of basic education from the region of Cariri Paraibano in order that they become multipliers to the teachers from that region, focusing on capacitating them and favoring them moments of reflection and analysis about what and how to teach when they use the Methodology of Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. So, a teaching-learning project was created to meet the requirements of the "5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba" and of a graduate course to the community of UEPB Campus Monteiro. The theoretical foundation considered for the development of the present research was structured on three grounds: collaborative group study in teacher continuing education; problem solving and; Mathematics modelization. That project was applied to a group of six teachers, who were selected in individual interviews, for four months, in twelve eight-hour meetings. Besides, the researcher provided daily assistance to those teachers. The methodological procedures to collect data were: interviews, observation of group work, teachers' written material, filming, recording and field diary. The material worked by those teachers in that investigative process was simultaneously applied by the teachers who participated in that group in their own classrooms. We believe this research might contribute with Mathematics Education in order to promote a new way of working Mathematics teaching-learning in classroom.

Keywords: Mathematics Education. Teacher Continuing Education. Problem Solving. Mathematical Modelization.

Sumário

Introdução	10
Capítulo 1	15
A busca de uma Metodologia de Pesquisa	
1.1. Aspectos relevantes sobre metodologia de pesquisa no contexto da Educação Matemática	15
1.2. Metodologia da Pesquisa e o Caminho Metodológico de Romberg	18
1.3. A Metodologia de Pesquisa de Thomas A. Romberg	19
1.3.1. As atividades de um pesquisador	21
1.3.1.1. O Primeiro Bloco do Fluxograma de Romberg	21
1.3.1.2. O Segundo Bloco do Fluxograma de Romberg	23
1.3.1.3. O Terceiro Bloco do Fluxograma de Romberg	24
1.4. Dando Início à nossa Pesquisa Apoiada na Metodologia de Romberg	25
1.4.1. Identificando Nosso Fenômeno de Interesse	26
1.4.2. Construindo um Modelo Preliminar	28
1.4.3. Relacionando o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar de nossa pesquisa com Ideias de Outros	30
Capítulo 2	33
A Formação Continuada do Professor de Matemática	
2.1. A Formação do Professor em seus diferentes estágios	33
2.2. A Formação do Professor de Matemática sob a perspectiva do desenvolvimento profissional	35
2.3. A Formação Continuada do Professor	42
Capítulo 3	45
O trabalho Colaborativo: Grupos de estudo na formação continuada do professor	
3.1. O que é trabalho colaborativo?	45
3.2. A autonomia do professor e o trabalho colaborativo	48
3.3. O trabalho colaborativo no desenvolvimento profissional	49
3.4. Grupo de Estudos – reflexão para mudança	51

Capítulo 4	63
Resolução de Problemas	
4.1. Tendências, Diretrizes e Perspectivas de Pesquisa em Resolução de Problemas	64
4.1.1. Tendências de Pesquisa em Resolução de Problemas	64
4.1.2. Um panorama da área de pesquisa em Resolução de Problemas e sua Pedagogia	72
4.1.3. Diretrizes e Perspectivas para a Pesquisa em Resolução de Problemas	78
4.2. Retrospectiva histórica da Resolução de Problemas	81
4.2.1. Resolução de Problemas no currículo da matemática escolar	81
4.2.2. Mudanças de papel na resolução de problemas	85
4.2.3. Resolução de Problemas no ensino da Matemática	89
4.2.3.1. Resolução de Problemas como Contexto	90
4.2.3.2. Resolução de Problemas como habilidade	91
4.2.3.3. Resolução de Problemas como Arte	91
4.3. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas	93
4.3.1. O “saber fazer” em Matemática?	97
4.3.2. A Resolução de Problemas como metodologia – Dinâmica para a Sala de Aula	99
4.4. O GTERP frente à Resolução de Problemas	102
Capítulo 5	105
A Modelização Matemática	
5.1. A Natureza da Matemática e da Educação Matemática	105
5.2. A Modelagem na Educação Matemática	108
5.3. A Modelização Matemática no contexto da Matemática Discreta	112
5.3.1. A Matemática Discreta	112
5.3.2. Os padrões na matemática escolar e a resolução de problemas	116
5.3.3. A Generalização na Resolução de Problemas	118
5.3.4. A Representação e a Modelização Matemática na Resolução de Problemas ..	119
Capítulo 6	128
O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa	
6.1. O Modelo Modificado	129
6.2. A pergunta da Pesquisa	131
Capítulo 7	132
Estratégias e Procedimentos da Pesquisa – 2º Bloco de Romberg	
7.1. Estratégias e Procedimentos da Pesquisa	132
7.2. Procedimento Geral da Pesquisa, em Ação	135
7.2.1. P ₁ : A visita a Monteiro/PB e a reunião com o Gerente da 5ª Gerência	

Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, em ação	135
7.2.2. P ₂ : A elaboração do Anteprojeto pretendido, em ação	136
7.2.3. P ₃ : A realização do encontro com professores de Matemática de escolas públicas do Cariri Paraibano, em ação	146
7.2.4. P ₄ : A seleção e a constituição do grupo colaborativo de trabalho e estudo, em ação	157
7.2.5. P ₅ : Entrevistas com os professores do grupo colaborativo de trabalho e estudo, em ação	158
7.2.6. P ₆ : A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no trabalho com os professores do grupo, em ação	165
7.2.7. P ₇ : A Criação do Projeto, para o grupo de professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, envolvendo problemas matemáticos e modelização, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em ação	168
7.2.7.1. Roteiro de Atividades	170
 Capítulo 8	 203
 A Aplicação do Projeto – Resultados e Discussão	
8.1. A Pesquisa pedagógica	203
8.2. Aplicação do projeto – Encontros do Grupo de Estudo	205
 Considerações Finais	 293

Introdução

Nosso interesse por Educação Matemática teve início no Peru onde vivíamos. Antes de irmos ao Brasil, já ouvíamos sobre possíveis mudanças na educação brasileira, pois tínhamos companheiros peruanos que estavam estudando aqui. Passamos a acreditar que, no Brasil, haveria mais chances de ser um pesquisador nessa área. É verdade que problemas de ensino e aprendizagem existentes no Peru também ocorriam no Brasil: a dificuldade dos alunos em aprender Matemática; a falta de interesse da grande maioria dos alunos em relação à Matemática; a falta de integração dos alunos em um trabalho colaborativo; e a falta de atenção e participação nas aulas tradicionais. Pensando encontrar, neste país, condições de trabalhar melhor esses problemas relativos ao ensino e à aprendizagem de Matemática nos motivaram a querer investigá-los no Brasil. Em 2003, participamos do GTERP¹, que se reunia, na ocasião, em todas as quintas-feiras, com o objetivo de buscar informações sobre ensino-aprendizagem visando a construir uma base para nosso projeto de pesquisa de Mestrado que, até então, não estava bem definido.

No 2º semestre de 2003, fizemos a inscrição para participar das provas de seleção para ingressar, como Aluno Regular do Curso de Mestrado do PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP - Rio Claro. Vivenciamos momentos de ansiedade, mas fomos aprovados em todas as provas. A partir daí, deveríamos cursar algumas disciplinas já no 1º semestre de 2004 e pôr em ação nosso trabalho de pesquisa, sob a orientação da Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic.

Em Huanca (2006), apresentamos nossa trajetória de vida e nosso relacionamento com a Educação Matemática que culminou em nossa Dissertação de Mestrado, na qual investigamos a resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática na e além da sala de aula. Essa investigação teve, como objetivo, verificar se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constituía-se em um bom caminho para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos por alunos do Ensino Médio. Percebeu-se que, ao trabalhar com essa metodologia de ensino, em sala de aula, houve um acréscimo na motivação, tanto para o professor quanto para os alunos, em aprender. Também, foi possível observar os alunos relacionarem suas atividades com tópicos já trabalhados anteriormente, sendo que uma das conclusões nela apresentada é que

¹ GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, coordenado pela profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic.

Numa das atividades desenvolvidas, os alunos construíram teodolitos “modelo caseiro” e aplicaram os conceitos de razões trigonométricas trabalhados em sala de aula para medir distâncias inacessíveis. Em outra atividade, os alunos visitaram um parque de recreações com a intenção de obter dados sobre o movimento periódico de um balanço. Os dados obtidos foram utilizados na construção de gráficos de funções trigonométricas relacionadas a esse movimento. Sem dúvida foi uma experiência marcante para os alunos. (HUANCA, 2006, p. 245)

Em paralelo ao nosso trabalho de Mestrado, começamos a nos interessar por questões relacionadas à formação de professores de Matemática, influenciados pelos estudos do GTERP, grupo do qual faço parte desde 2003.

Também é importante mencionar nossa participação, em vários eventos de Educação Matemática, dos quais destacamos: XI Conferência Interamericana de Educação Matemática (XI CIAEM), promovido pela Universidade Regional de Blumenau (FURB) e pelo Comitê Interamericano de Educação Matemática, em julho de 2003; VII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (VII EBRAPEM), realizado na Universidade Estadual Paulista - UNESP, em Rio Claro, em novembro de 2003; VII Encontro Paulista de Educação (VII EPEM), realizado na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, em Junho de 2004; VIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (VIII EBRAPEM), promovido pelo Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas, realizado na Universidade Estadual de Londrina (UEL), em Londrina, Paraná, em novembro de 2004.

Em 2007, após aprovação em concurso público, ingressamos na UEPB – Universidade Estadual da Paraíba, campus de Monteiro/PB, onde assumimos aulas nas áreas de Educação Matemática e Matemática. Recém formado mestre em Educação Matemática, na sala de aula ministrávamos as disciplinas procurando sempre utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Os alunos, em geral, olhavam com um ar assustado quando começávamos a partir de problemas geradores de novo conhecimento. Estavam acostumados com o modo de o professor ‘passar’ primeiro o conteúdo e, depois, resolver os exercícios ou problemas semelhantes para fixação. Já, para nós, o problema era o ponto de partida para a aprendizagem e, através e durante a resolução do problema, faziam-se conexões entre os diferentes ramos da Matemática juntamente com os alunos, assim gerando novos conceitos e novos conteúdos. Essa também foi uma experiência importante em nossa carreira acadêmica.

Durante os três anos em que estivemos trabalhando na UEPB, participamos de vários projetos de pesquisa e extensão envolvendo professores da Educação Básica da região do Cariri Paraibano. Ministramos palestras e oferecemos minicursos e oficinas nessa região.

Durante a realização dessas atividades, surgiram-me algumas indagações relacionadas à teoria e à prática dos professores de matemática delas participantes. Uma questão que sempre me preocupou foi o fato de que participar de minicursos ou ouvir palestras, considerando-os apenas como mais um evento, não garantia, aos professores que deles participavam, oportunidades de reflexão sobre sua própria prática. A discussão sobre o papel do educador e sua função, como um mediador em sala de aula, parecia raramente acontecer.

Nessa perspectiva, uma questão surgia: como organizar um grupo de professores em formação continuada, onde as discussões teórico-metodológicas estivessem vinculadas às questões mais gerais da Educação Matemática e que poderiam fazer com que o professor realmente sentisse necessidade de uma reflexão aliada às metodologias de ensino?

Nossa experiência e o envolvimento com os professores de Matemática do Ensino Básico do Cariri Paraibano, pareceu dar continuidade à nossa caminhada na Educação Matemática e, no ano de 2010, ingressamos no PPGEM da UNESP – Rio Claro para realizar nosso doutoramento em Educação Matemática.

Nesse contexto, surgiu nosso fenômeno de interesse: **Formação do Professor de Matemática utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**. Nessa metodologia pedagógica, o professor parte de um problema e, através de sua resolução, devem-se fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerar novos conceitos e novos conteúdos, com o aluno como co-construtor desse conhecimento.

Em seguida, criamos um Modelo Preliminar para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Esse modelo gerou um Modelo Modificado que permitiu identificar a pergunta da pesquisa: **Que contribuições, na ação da formação de um “Multiplicador”, criado para atuar junto a professores de Matemática da Educação Básica, da região do Cariri Paraibano, teria o trabalho realizado com um grupo colaborativo de professores, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?**

Após identificar nossa pergunta da pesquisa, apresentamos, a seguir, a forma como esta tese está estruturada.

No Capítulo 1 - A busca de uma Metodologia de Pesquisa - Apresentamos a metodologia de pesquisa de Thomas A. Romberg. Essa metodologia é composta por um conjunto interconectado de dez atividades, descritas por um fluxograma.

No Capítulo 2 - A Formação Continuada do Professor de Matemática – Descrevemos brevemente os principais estágios utilizados para trabalhar a formação de professores, com o intuito de nos auxiliar na compreensão do paradigma de formação de professores assumido na pesquisa que nos propusemos a fazer.

No Capítulo 3 - O Trabalho Colaborativo: Grupos de estudo na formação continuada do professor - Discutimos dentro da atividade 3 de Romberg ao relacionarmos com ideias de outros e trazer mais fundamentação teórica para nossa pesquisa. Para tanto, seria necessário trabalhar sobre as ideias de um trabalho colaborativo e a teoria que trata de organização de grupos de estudo no âmbito da formação continuada do professor.

No Capítulo 4 - Resolução de Problemas – Apresentamos um panorama sobre Tendências, Diretrizes e Perspectivas de Pesquisa em Resolução de Problemas, uma breve retrospectiva histórica sobre Resolução de Problemas no currículo da Matemática escolar, destacando-se a gênese da pesquisa em resolução de problemas. Também, apresentamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, considerando algumas questões voltadas mais especificamente à implementação da resolução de problemas em sala de aula, que será tomada como um dos principais referenciais teóricos da presente pesquisa e, por fim, destacaremos o GTERP frente à Resolução de Problemas.

No Capítulo 5 - A Modelização Matemática - Abordamos a natureza da Matemática, falando-se de sua essência que consiste em procurar padrões, expressos por regularidades, para podermos compreender o mundo à nossa volta; a Modelagem na Educação Matemática, a partir de uma revisão resumida da literatura sobre os trabalhos de modelagem; aspectos relevantes sobre Modelização Matemática que envolve Padrões e Generalização no contexto da Matemática Discreta, vista como eixo importante para modelar problemas matemáticos e levar a compreender o significado do modelo.

No Capítulo 6 - O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa - Retomamos o Modelo de Romberg, avaliando os quatro capítulos anteriores e suas contribuições para esta pesquisa. Posteriormente, apresentaremos nossa Pergunta de Pesquisa apoiada nos “outros” e elaborando novas variáveis que surgiram neste estudo e um Modelo Modificado que nos guiará até o fim desta pesquisa.

No Capítulo 7 - Estratégias e Procedimentos da Pesquisa – 2º Bloco de Romberg – Apresentamos as atividades 5 e 6 de Romberg, essas atividades nos solicitam para selecionar estratégias e procedimentos, a fim de termos subsídios para responder à pergunta da pesquisa.

Partindo do Modelo Modificado, definimos uma Estratégia Geral “O QUE FAZER?” e um respectivo Procedimento Geral “COMO FAZER?”, para depois colocá-los em ação.

No Capítulo 8 - A Aplicação do Projeto – Resultados e Discussão – Descrevemos os doze encontros que o grupo de estudo realizou durante os meses de setembro, outubro, novembro e dezembro de 2012.

Capítulo 1

A busca de uma Metodologia de Pesquisa

Neste capítulo apresentaremos o que se entende por metodologia de pesquisa e destacamos os aspectos metodológicos relevantes adotados nesta investigação, no contexto da Educação Matemática. Em seguida, exporemos nossa visão de como o conhecimento é produzido e a Metodologia de Pesquisa de Thomas A. Romberg, escolhido por nós, como caminho metodológico para esta pesquisa.

1.1. Aspectos relevantes sobre metodologia de pesquisa no contexto da Educação Matemática

Santos (2007) no livro “Metodologia Científica – a construção do conhecimento” defende a necessidade da pesquisa científica como oportunidade de resgate da construção da autonomia intelectual. Nesse livro o autor se refere a Metodologia Científica, Metodologia da Pesquisa Científica, Metodologia do Trabalho Científico e Metodologia da Construção do Conhecimento e pergunta: É tudo a mesma coisa? e ele responde: parte sim, parte não!

Segundo Santos (2007) continuamos, sim, interessados na formação correta de apresentar um texto técnico-científico nas medidas das margens, na encadernação bem feita, na paginação adequada. Para ele, hoje estamos mais interessados na geração de autonomia intelectual, na capacidade de pensar por conta própria numa pesquisa, a ser possibilitada aos estudantes e profissionais, especialmente àqueles em formação ou formados em nível superior, entendendo-se nível superior como o mais alto grau de formação em certa comunidade, constituindo-se em uma elite intelectual convidada a ser um grupo de “pensadores profissionais”. Afinal, diz ele: se o médico não puder pensar Medicina, quem o fará? Se o engenheiro não for preparado para pensar Engenharia, quem o fará? Se o pedagogo não pensar Pedagogia, quem pensará?

O mesmo autor, citado anteriormente, diz que a pesquisa científica pode ser caracterizada como atividade intelectual intencional que visa a responder às necessidades humanas para a produção do capital intelectual. Desse modo, procuramos responder as perguntas: (1) O que se entende por necessidades humanas? (2) O que se entende por atividade intelectual? (3) O que significa fazer pesquisa científica e, portanto, desenvolver um trabalho cientificamente?

Com relação à questão (1), as necessidades humanas básicas, percebidas nos indivíduos como sensação permanente de insatisfação com o estado atual em que se encontram, são a mola propulsora da atividade humana. E, por se perceber incompleto, o homem sente que precisa fazer algo consigo mesmo.

Para a pergunta (2), seres racionais são capazes de pensar, isto é, são capazes de transformar necessidades sentidas em problemas, que se manifestam como questões. Questões, por sua vez, pedem soluções. Levantar problemas e gerar soluções é o que se chama atividade intelectual ou teórica.

Teorizar é levantar um problema e, para ele, gerar soluções possíveis. O passo seguinte é escolher, entre as várias soluções possíveis, a mais adequada ao suprimento da necessidade geradora inicial. Este é o conteúdo da técnica, a aplicação dos resultados teóricos. Como se pode perceber, ação teórica e ação prática são indissociáveis no homem, da mesma forma que sua animalidade e sua racionalidade. Na verdade, a função essencial da razão humana é melhorar o animal humano. A capacidade de questionar intencionalmente é, então, a marca maior da racionalidade. É o que permite, ao ser racional, ir além das respostas naturais, únicas, para suas necessidades, impostas por instinto/ambiente/rotina, e diversificar. A razão manifesta-se na diversidade das respostas. (SANTOS, 2007)

Em relação à questão (3), encontramos uma resposta em Santos (2007) quando afirma que a pesquisa científica produz, primeiramente, conhecimentos para o pesquisador e, depois, um texto escrito para um leitor, o que demanda duas competências distintas: a habilidade de produzir conhecimento e a habilidade de apresentar conhecimento escrito. Então, em nosso entender, a atividade intelectual, que é a profundidade da pesquisa científica, é a construção de um conhecimento novo, que é o que pretendemos neste trabalho.

Se pesquisar é o exercício intencional da pura atividade intelectual, visando a melhorar as condições práticas da existência, então para garantir a consistência de uma pesquisa é necessário um método. Porém, não existe, uma única metodologia de pesquisa correta ou

aplicável para todo e qualquer tipo de trabalho. O que determina qual deverá ser a metodologia de pesquisa adotada é o objeto de estudo do trabalho a ser realizado.

Santos (2007, p.15) salienta que “métodos são caminhos facilitadores, em geral complementares e raramente excludentes”. A utilização de uma metodologia adequada é importante, pois a credibilidade da pesquisa transparece no método. Por isso, para nós, uma metodologia de pesquisa é um conjunto de métodos ou caminhos a serem seguidos.

Pesquisar, segundo Bicudo (1993, p.18), “quer dizer ter uma interrogação e andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões e outra vez...”. Segundo essa autora, pesquisar “configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada” e ela destaca que não há uma última resposta para uma pergunta de pesquisa.

É ético que o pesquisador persiga uma pergunta de modo rigoroso, sistemático, assumindo uma atitude de respeito e de compromisso com o objeto/sujeito pesquisado, e é importante, ainda, que a interrogação faça sentido para o pesquisador e seja elaborada no contexto onde ela foi formulada. Vale salientar que para essa autora “um pesquisador nunca está só, já é sempre com os outros, com as pesquisas já elaboradas, com o contexto social onde está a região de inquérito onde o significado é tecido e onde a generalização se esboça” (BICUDO, 1993, p.19).

Goldenberg (1999, p. 105) define como pesquisa a construção de conhecimento original, de acordo com certas exigências científicas. É um trabalho de conhecimento sistemático, não meramente repetitivo, mas produtivo, que faz avançar a área de conhecimento à qual se dedica.

Com relação ao significado de pesquisa, D’Ambrosio (2004) afirma que a pesquisa é inerente à ação, que é inerente à vida e complementa pesquisar é o resultado de identificar os fatores que permitem a continuidade do modelo social e observar, analisar e interpretar as consequências.

O termo pesquisa consiste na procura por informações com diligência, na busca minuciosa, na averiguação de algo que se tem interesse. Uma pesquisa surge de uma inquietação, de um interesse e até mesmo de uma curiosidade, pesquisar é sinônimo de investigar.

Para Garnica (2006, p.86) Um método sempre traz, em si, a noção de eficácia. Trata-se de engendrar um mecanismo que, julgado eficaz, nos dê pistas para compreender determinada

situação, resolver determinado problema, responder determinada questão ou encaminhar determinados entraves. Garnica diz que a eficácia de um método, porém, será julgada segundo os pressupostos teóricos e vivências do pesquisador, e esse é o motivo principal de não se poder apartar uma metodologia de uma concepção de mundo e dos fundamentos teórico-filosóficos do pesquisador.

Acreditamos que metodologia seja um conjunto de procedimentos utilizados para se alcançar o objetivo do estudo pretendido, ou seja, os caminhos, as estratégias e as ações utilizadas para investigar um dado problema. Mas não é apenas isso, é importante que exista uma harmonia entre a visão de produção de conhecimento e dos procedimentos metodológicos.

1.2. Metodologia da Pesquisa e o Caminho Metodológico de Romberg

Necessitando definir uma abordagem metodológica para nossa pesquisa, sentimos que ela deveria ser coerente com os objetivos da pesquisa, com nossa postura de pesquisador e de professor. Enfim, que deveria haver uma coerência entre os procedimentos utilizados e a visão de conhecimento que temos.

Alves-Mazzotti (2004) afirma que não há metodologias boas ou más em si e, sim, metodologias adequadas ou inadequadas para tratar um determinado problema. Dessa forma, a estrutura de um trabalho de pesquisa científica deve estar baseada em uma metodologia de pesquisa. Neste nosso trabalho, a metodologia de pesquisa definida é delineada e fundamentada no artigo de Thomas A. Romberg, publicado em 1992, no Capítulo 3 do *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Manual de pesquisa sobre Ensino e Aprendizagem de Matemática), intitulado *Perspectives on Scholarship and Research Methods* (Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa). Romberg é matemático, educador e professor da Universidade de Wisconsin. Ele trabalha no *Wisconsin Center for Education Research School of Education*, University of Wisconsin-Madison – USA. No resumo desse seu artigo pode-se ler que “O interesse de estudiosos na área de Educação Matemática em problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de matemática tem sido fortemente manifestado e discutido no último quarto do século XX, constituindo-se em um espaço de investigação” (ROMBERG, 2007, p. 93).

Esse autor, nesse artigo, procura identificar, nas ciências sociais, as amplas tendências de pesquisa relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares e determinar como essas tendências têm influenciado o estudo da matemática nas escolas.

Tendo sempre em mente que nosso objetivo é o de desenvolver uma pesquisa em Educação Matemática, apresentamos e discutimos agora, neste primeiro capítulo da tese, a Metodologia de Pesquisa de Romberg.

1.3. A Metodologia de Pesquisa de Thomas A. Romberg

Como disse Shulman (1988, apud Romberg 1992), Educação é um campo de estudo, um local que contém fenômenos, eventos, instituições, problemas, pessoas e processos que, por si só, constituem a matéria prima para investigações de muitos tipos. Romberg (1992) concorda com Shulman e afirma que a Educação Matemática é um campo de estudo, pois a escola é complexa e, assim, as perspectivas e os procedimentos de investigação escolar têm sido utilizados para pesquisar questões levantadas e inerentes aos processos envolvidos no ensino e na aprendizagem da Matemática nas escolas.

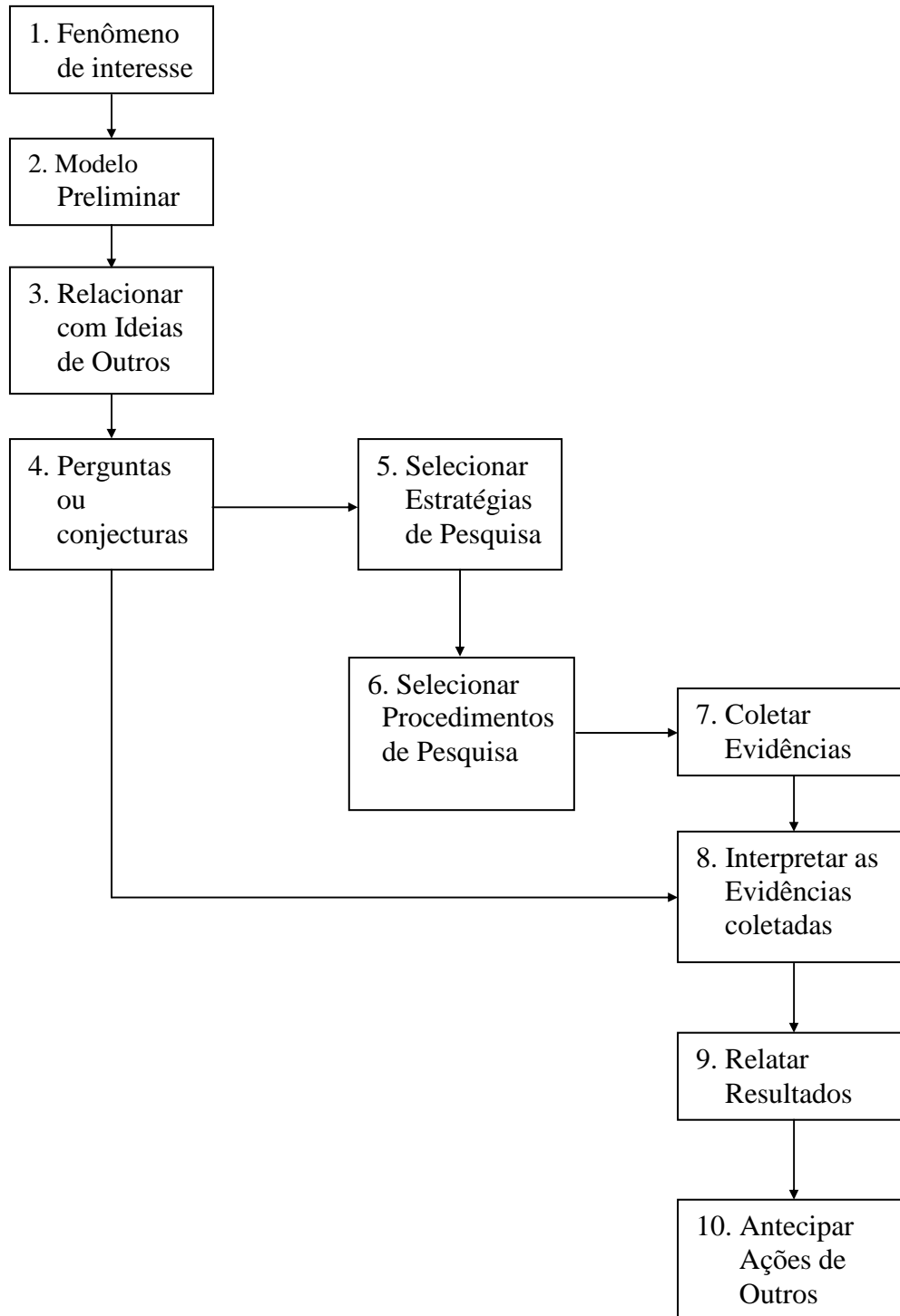
Para Romberg (1992, 2007),

Fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que os indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. [...] Esses consensos surgem dos relacionamentos do dia-a-dia dos pesquisadores. (ROMBERG, 1992 – tradução ONUCHIC e BOERO, 2007, p. 97)

Como assumir uma metodologia é ter capacidade de pôr em prática uma ideia na busca da verdade e como as atividades envolvidas em fazer pesquisa mostram-se como atividades de arte, Romberg (1992, 2007) apresenta, num fluxograma (Figura 1), um conjunto interconectado de dez atividades, relacionadas entre si e distribuídas em três blocos, para orientar o pesquisador durante a investigação no planejamento e no desenvolvimento de seu trabalho.

Assim, o primeiro bloco, destinado à identificação do problema da pesquisa; o segundo é um bloco de planejamento para a resolução do problema; e o terceiro é um bloco de coleta de evidências e tirada de conclusões que levam à resposta desse problema.

Figura 1 – Fluxograma das atividades dos pesquisadores segundo Thomas A. Romberg.



Fonte: Atividades de pesquisa e como elas estão relacionadas de Romberg (1992)

1.3.1. As atividades de um pesquisador

No primeiro bloco do fluxograma de Romberg – Identificação do problema da pesquisa – estão agrupadas as quatro primeiras atividades (1) Fenômeno de Interesse; (2) Modelo Preliminar; (3) Relacionar com Ideias de Outros; e (4) Perguntas ou Conjecturas. Para Romberg, essas quatro atividades são consideradas as mais importantes, pois estão envolvidas em situar as ideias que se tem a respeito do fenômeno de interesse, relacioná-las com o trabalho de outros pesquisadores e decidir o que se quer investigar.

1.3.1.1. O Primeiro Bloco do Fluxograma de Romberg

Fenômeno de interesse

Romberg (2007) diz que toda pesquisa se inicia com uma curiosidade, alguma coisa ou aquilo que nos interessa sobre um fenômeno determinado do mundo real. Em Educação Matemática, o fenômeno envolve professores e alunos, a forma como os alunos aprendem, como eles interagem com a Matemática, como respondem ao ensino e à aprendizagem, como os professores planejam seu trabalho e muitas outras questões. Então, no momento em que ficou posto o objeto de estudo, quando se diz: vou trabalhar sobre isto, o fenômeno de interesse fica conhecido.

Modelo Preliminar

Modelo preliminar é um esboço que mostra aspectos importantes, como as variáveis do fenômeno de interesse e como estes aspectos estão relacionados. Não se sabe, ao certo, se o trabalho vai ser desenvolvido assim, seguindo essa ordem, mas foi assim que, pela primeira vez pensou-se fazer. Pode até ser alterado ao longo da pesquisa que, então, pode mudar completamente seu rumo. Nesse sentido, um modelo é simplesmente um conjunto de descrições de variáveis e das relações implícitas que há entre elas.

Segundo Romberg (2007, p. 99-100)

Para a maioria dos estudiosos, um modelo é simplesmente um dispositivo heurístico para ajudar a esclarecer um fenômeno complexo. Situações reais são raramente bem definidas e frequentemente estão fixadas em um meio que torna difícil obter uma afirmação clara da situação. Formular um modelo preliminar usualmente ajuda, porque fazer assim envolve especificar as variáveis que se acredita estarem operando na situação real. De fato, o modelo é uma simplificação, desde que alguns aspectos da realidade serão significativos e outros irrelevantes. Apesar disso, o modelo serve como um ponto de partida ou de orientação para a situação de interesse.

Jeremy Kilpatrick (1981), citado por Romberg (1992) na página 51 de seu artigo, afirmou que bons pesquisadores, assim como bons artistas em qualquer campo, são mais criativos, ao identificar variáveis e relações que os capacitam a olhar novamente para fenômenos familiares, do que pessoas com menos imaginação. Assim, o modelo preliminar está ligado ao que estamos imaginando, vindo até onde a ideia pode nos levar.

Quase todos os textos de metodologia seguem passos semelhantes aos de Romberg. Mas nesse, o do modelo preliminar, parece que só mesmo Romberg o apresenta tão claramente.

Relacionar com Ideias de Outros

Relacionar com ideias de outros significa ir em busca das ideias de quem já trabalhou sobre o fenômeno de interesse e poder determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou até mesmo alterar o modelo proposto.

Segundo Romberg (2007), para poder fazer isso o pesquisador precisa reconhecer que cada investigador é um membro de um particular grupo de pesquisa, que possui uma determinada visão de mundo.

Se alguém busca examinar a contribuição potencial das ideias de outros, deve relacionar aquelas ideias a uma particular visão de mundo. Por exemplo, um estudioso que vê a variedade de compreensões das crianças sobre os conceitos de fração a partir de um ponto de vista construtivista, pode argumentar que as experiências típicas que as crianças têm com frações são pobres. Para construir esse argumento, o pesquisador teria que ler e refletir sobre as escritas e os estudos de outros estudiosos construtivistas. (ROMBERG, 2007, p. 100)

Perguntas ou Conjecturas

Com o problema identificado ao procurar caminhar para resolvê-lo, deve-se imaginar que resposta poderá ser dada ou que conjectura poderá ser definida. O problema se torna, então, um desafio para o pesquisador.

Romberg (2007) diz que esse é um passo muito importante no processo da pesquisa porque, na medida em que se examina um fenômeno particular, várias perguntas potenciais aparecem e decidir que perguntas examinar não é fácil. Citando Lakatos (1976), ele diz que a noção de fortes inferências leva à importante característica da maioria dos programas de pesquisa, isto é, a natureza cumulativa de uma série de estudos dentro de uma determinada estrutura.

As perguntas geralmente tomam as seguintes formas: - Como as coisas chegaram a ser desta maneira? (orientadas no passado); - Qual é a situação das coisas hoje? (orientadas no presente); ou - O que acontecerá se eu fizer tal coisa? (orientadas no futuro). Concordando com Romberg podemos ver que, a partir de uma observação específica, está o fato de que a maioria dos estudos orientados no passado e no presente são de caráter descritivo, enquanto que os orientados no futuro são preditivos.

Essa distinção leva a uma discussão em relação à possibilidade de se formular argumentos causais a partir de dados descritivos. Os experimentalistas afirmam que somente pela manipulação de variáveis sob situações controladas é possível construir, com confiança, argumentos causais. Outros estudiosos dizem que é possível construir tais argumentos a partir de dados descritivos baseados em campos teóricos. (ROMBERG, 2007, p. 101)

Diz Romberg (2007) que, mais do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores levantam geralmente uma ou mais conjecturas (suposições ou previsões fundamentadas) sobre o que seria necessário para responder as questões. As conjecturas estão baseadas em algumas relações entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e as ideias sobre aquelas variáveis-chave e suas relações delineadas no modelo.

1.3.1.2. O Segundo Bloco do Fluxograma de Romberg

As duas atividades seguintes: (5) e (6) constituem o Segundo Bloco do fluxograma de Romberg – Planejamento da pesquisa – que envolvem a tomada de decisões sobre a seleção de Estratégias de Pesquisa e a seleção de correspondentes Procedimentos de Pesquisa, visando à resolução desse problema.

Desde que o problema, dado por uma pergunta ou uma conjectura, seja identificado, é preciso buscar caminhos para poder resolvê-lo. Apoiados nas variáveis do fenômeno de interesse levantadas no modelo preliminar, como bom estrategista deve-se selecionar uma estratégia geral e outras auxiliares que irão ajudar no planejamento estratégico da resolução. Analogamente, um procedimento geral e procedimentos auxiliares ajudarão no desenvolvimento das ações previstas.

Selecionar Estratégias de Pesquisa para coletar evidências

Segundo Romberg (2007, p. 102)

A decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona da visão de mundo, na qual as questões estão situadas, do modelo preliminar que foi construído a fim de explicar o “fenômeno de interesse” e da conjectura que se faz sobre a evidência necessária.

Entre as possíveis estratégias de pesquisa serão selecionadas aquelas que melhor atendam à conjectura ou às perguntas formuladas no trabalho.

Selecionar Procedimentos específicos de Pesquisa

Para responder as questões específicas que foram levantadas, evidência deve ser coletada. É neste passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar a informação uma vez que ela tenha sido coletada, e assim por diante. Há um grande número de procedimentos específicos que se poderia seguir para diferentes tipos de questões. Deve-se tomar cuidado em selecionar procedimentos que irão esclarecer as questões. (ROMBERG, 2007, p. 102)

Definido o procedimento geral, esse será posto em ação.

Essa ação não está exibida nas atividades propostas por Romberg, mas nós a detalhamos para poder buscar sobre essa ação as evidências que podem surgir.

1.3.1.3. O Terceiro Bloco do Fluxograma de Romberg

Este terceiro bloco – Decisões e conclusões da pesquisa – depois de ter-se colocado em prática aquilo que fora planejado, busca-se verificar se as estratégias e correspondentes procedimentos idealizados foram úteis à resolução do problema proposto. Na sequência, coletar evidências surgidas nessa aplicação e, então, fazer um relatório dos resultados obtidos e finalmente antecipar esses resultados a outros membros da comunidade de estudos. Assim, esse terceiro bloco é formado por quatro atividades (7) Coletar evidências; (8) Interpretar as evidências coletadas; (9) Relatar resultados a outros; e (10) Antecipar as ações de outros.

Coletar evidências

Esta atividade, de acordo com Romberg (2007), pode ser levada à frente, uma vez que tenhamos decidido coletar certas informações para a construção de um argumento que atenda às questões propostas, a partir da aplicação dos procedimentos idealizados adequados às estratégias selecionadas.

Interpretar as evidências coletadas

Para Romberg (2007, p. 102), “neste estágio, analisa-se e interpreta-se a informação que foi coletada”. De acordo com Souza (2010, p. 30)

O pesquisador pode se utilizar de métodos quantitativos, no caso em que se atribui números às informações, e de métodos qualitativos, métodos de análise utilizados quando os números não forem necessariamente utilizados. Dentre as informações coletadas, parte delas é relevante, parte é irrelevante e parte é até não compreensível. Cabe ao pesquisador, então, selecionar aquelas que sejam importantes para a pesquisa e que ajudam a responder às perguntas ou às conjecturas levantadas.

Neste estágio, a análise feita permitirá ao pesquisador perceber se a pergunta ou conjectura se apresenta bem formulada ou não.

Relatar resultados a outros

Ser um membro de uma comunidade de pesquisa implica numa responsabilidade de informar aos seus outros membros sobre sua investigação completa e buscar seus comentários e críticas. Nesse sentido, diz Romberg, após a interpretação dos aspectos analisados, devemos relatar à comunidade de pesquisadores os resultados encontrados, para que possam emitir opiniões e críticas sobre o trabalho realizado.

Antecipar as ações de outros

Dados os resultados de uma investigação específica, todo pesquisador estará interessado no que acontecerá depois e, então, poderá antecipar ações posteriores. Membros de uma comunidade de estudo discutem ideias entre si, reagem a ideias de outros e sugerem novos passos, modificações de estudos anteriores, elaborações de procedimentos, e assim por diante.

Analisando cada uma dessas atividades de um pesquisador, podemos concluir que a metodologia de Romberg é, entre outros, um procedimento metodológico relevante para se desenvolver uma pesquisa diretamente relacionada com a Educação Matemática onde entendemos que os problemas educacionais se concretizam realmente.

1.4. Dando Início à nossa Pesquisa Apoiada na Metodologia de Romberg

Foi apresentado e escolhido, no item anterior, o caminho metodológico de Romberg com dez atividades de pesquisa e a forma como elas estão relacionadas em um fluxograma.

Decidimos denominar e adotar essa sequência de atividades como Metodologia de Pesquisa de Romberg, que servirá como uma bússola para a viagem da nossa pesquisa.

Neste item, dando início, trabalharemos sobre as três primeiras atividades de Romberg: identificar um Fenômeno de Interesse; construir um Modelo Preliminar; e Relacionar o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar com ideias de outros pesquisadores.

1.4.1. Identificando Nosso Fenômeno de Interesse

Nossa experiência e o envolvimento, com os professores de Matemática do Ensino Básico do Cariri Paraibano, puderam nos dar continuidade à nossa caminhada na Educação Matemática.

Onuchic (2003, p. 1-2) diz que

Sempre houve muita dificuldade para se ensinar matemática. Apesar disso todos reconhecem a importância e a necessidade da Matemática para se entender o mundo e nele viver. Como o elemento mais importante para se trabalhar Matemática é o professor de Matemática e como este não está sendo bem preparado para desempenhar bem suas funções, as dificuldades neste processo têm aumentado muito.

Questionamentos como: Por que educar? Por que matemática? O que é matemática e onde e como a matemática é usada? fazem parte da vida do professor que nem sempre está preparado para respondê-los.

Segundo Carvalho (2003), estes últimos anos formam um período de mudanças dramáticas para a escola brasileira, pois sobre ela avança uma série de reformulações propostas por novas legislações como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, que induziu novos pareceres dos Conselhos Nacional e Estadual de Educação, novos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), novos projetos pedagógicos para as escolas, novos... As novidades são tantas que os professores, de todos os níveis de ensino, tornaram-se inseguros sobre o que ensinar e como ensinar.

Os PCNs chegaram às escolas propondo principalmente novas metodologias de ensino, baseadas em pressupostos construtivistas, induzindo novas atitudes e posturas de professores e alunos durante as aulas.

Para Carvalho (2003), o principal conceito introduzido pelos PCNs é o do “ensino centrado no aluno”, ou seja, o ensino que leva o aluno a ser construtor de seu próprio conhecimento. Isso implica uma mudança de paradigma educacional, pois passa-se do ensino expositivo, centrado na capacidade do professor de explicar o conteúdo proposto, para o

ensino construtivista, centrado na capacidade do aluno de entender, reconstruindo um determinado conteúdo.

Como enfrentar as mudanças preconizadas pelos PCNs? Quantos professores estão preparados para utilizar suas recomendações e levar aos seus alunos, em suas salas de aula, um conteúdo que pode se encaixar dentro de determinados padrões de conteúdo, suportados por padrões de procedimento bem estruturados?

Nessas reflexões, a formação inicial e continuada do professor de Matemática deve ser reestruturada na perspectiva do desenvolvimento profissional. Segundo Perez (1999), ao concebermos a formação do professor, na perspectiva do desenvolvimento profissional, permitimos que se instaure uma nova cultura profissional, que pode proporcionar condições para que o professor de Matemática seja reflexivo, crítico, colaborador e investigador em sua prática cotidiana.

A investigação sobre a própria prática profissional do professor é, segundo Ponte (2002), um processo privilegiado de construção do conhecimento sobre essa mesma prática, sendo uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional.

Segundo Tardif (2002), os professores são sujeitos do conhecimento e a prática deles não é somente um lugar de aplicação de saberes produzidos por outros, mas, também, um espaço de produção, de transformação e de mobilização de saberes que lhes são próprios.

Desse modo, refletindo sobre nossa experiência profissional, a preocupação por um ensino voltado à aprendizagem, com significado e compreensão, identificamos como nosso fenômeno de interesse: **A Formação do Professor de Matemática.**

Justificamos a identificação do nosso fenômeno de interesse ao nos apoiarmos em Perez (1999, p. 269)

O professor de Matemática, como o principal mediador entre os conhecimentos matemáticos historicamente produzidos e os alunos, é um dos grandes responsáveis por possíveis transformações, tanto na escola como na sociedade. Entendemos, por isso, que a formação clássica desse profissional, inicial e continuada, necessita ser transformada e concebida na perspectiva do desenvolvimento profissional.

Nossas inquietudes didáticas como educadores matemáticos incrementam-se ao conhecer bem de perto a realidade do nordeste do Brasil, especificamente o Cariri Paraibano, e a necessidade urgente de melhorar seu nível de qualidade em Educação Matemática. Compreendemos que a formação e a capacitação dos professores de níveis básicos requerem educadores matemáticos comprometidos com essa tarefa, pois, em consonância com as recomendações dos PCNs, o professor que leciona Matemática deve promover o ensino em

conformidade com uma concepção de aprendizagem que considera o aluno como construtor de seu próprio conhecimento.

Estamos convencidos, então, da importância de investigar, em uma perspectiva de formação continuada de professores de Matemática e com um referencial teórico adequado, as interrelações entre a resolução de problemas e a modelização matemática num processo de ensino-aprendizagem-avaliação em aulas de Matemática. Justifica-se a utilização do nosso referencial teórico, sobre uma metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e a modelização matemática para dar suporte ao nosso fenômeno de interesse que é a formação de professores de Matemática.

Nos estudos de matemática pura é normal pôr-se ênfase fundamental à formalização e ao rigor matemático, no conhecimento construído. Entretanto, em nossa experiência docente isso nem sempre acontece, pois o ensino de um conceito ou a demonstração de uma propriedade não vai além da sua repetição na lousa ou na explicação de um exemplo.

Nessa direção, consideramos que a reflexão do professor sobre sua própria prática permitiria buscar uma compreensão intuitiva do conceito trabalhado ou da demonstração feita. Compreensão intuitiva que interatua com a linguagem formal e o rigor que deveria estar presente no professor visando a estimular os estudantes.

Nossas experiências docentes nos foram ensinando que uma boa opção de trabalho em sala de aula consiste em iniciar as aulas propondo um problema relacionado aos conceitos ou conteúdos que se deseja introduzir. Com problemas adequadamente criados ou selecionados e apropriadamente apresentados tivemos alguns resultados surpreendentes, pois alguns alunos, futuros professores, encontraram respostas corretas ou diferentes caminhos para resolvê-los, sem conhecer ainda os conceitos que iriam ser desenvolvidos. Isso foi particularmente interessante ao trabalhar-se com Resolução de Problemas, tanto com os estudantes de Licenciatura Plena em Matemática como nos cursos de extensão a professores em serviço. Isso se constituiu numa investigação sobre formação de professores de Matemática.

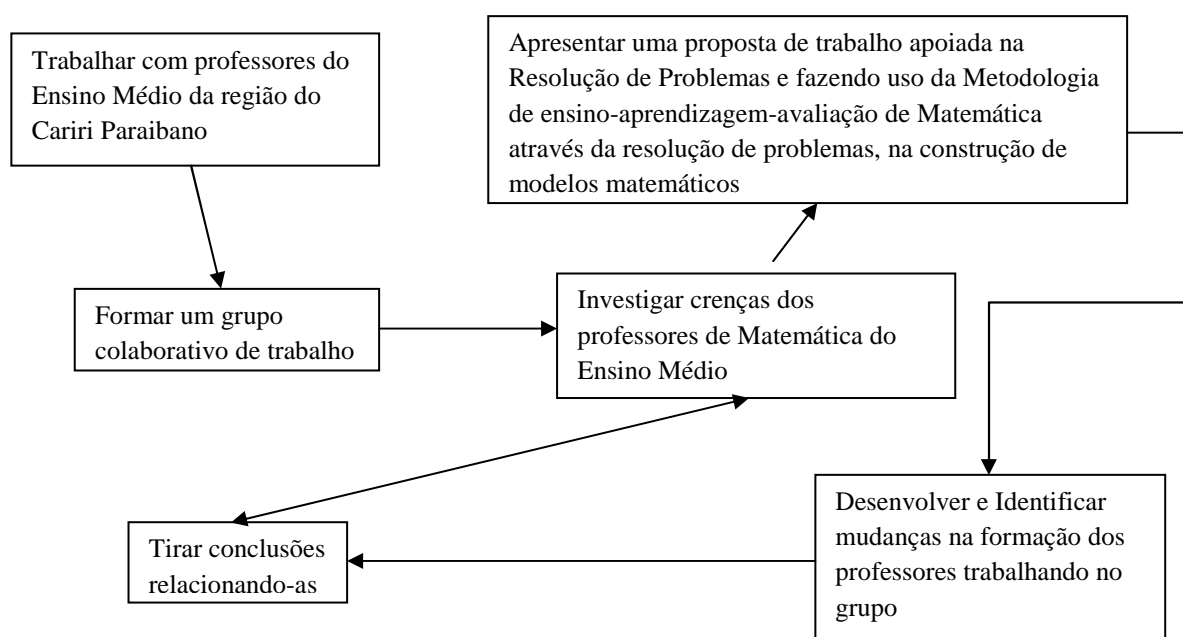
1.4.2. Construindo um Modelo Preliminar

O modelo preliminar serve como ponto de partida para o pesquisador organizar suas ideias, ações e caminhos que poderiam ser trilhados. Romberg (2007, p. 99), falando sobre as atividades de um pesquisador, diz que um pesquisador “faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e de como esses aspectos estão

relacionados”, ilustrando-os em um modelo, sendo que um modelo é simplesmente um conjunto de descrições de variáveis-chave e das relações implícitas entre elas.

Entendemos que o modelo preliminar constitui-se na primeira ideia do pesquisador de como a pesquisa poderia ser desenvolvida e vendo até onde ela pode nos levar. O nosso modelo preliminar se apresenta assim.

Figura 2 – Nosso modelo preliminar



Fonte: Elaborado pelo autor

Botta (2010, p. 22) diz que,

A Metodologia de Romberg estabelece um canal de duas mãos entre o modelo preliminar e o fenômeno de interesse, na medida em que o modelo contribui para a aquisição de conhecimento novo a respeito do fenômeno e, por sua vez, esse conhecimento novo pode levar a uma reestruturação do modelo.

Como nosso fenômeno de interesse é A Formação de Professores de Matemática, percebemos que, de início, a pesquisa de campo seria vista como uma caracterização do perfil e do levantamento das necessidades dos professores de Matemática do Cariri Paraibano. Esta etapa seria de caráter etnográfico e haveria necessidade de conhecer a história pessoal e profissional de cada professor, identificar seus saberes profissionais e conhecer as principais características de sua prática pedagógica. Uma vez atingida essa etapa, seria constituído um grupo cooperativo e colaborativo de trabalho e estudo, envolvendo professores de Matemática do Ensino Médio de escolas públicas do Cariri Paraibano.

O modelo preliminar da Figura 2, também mostra outras variáveis como: a formação de um grupo de trabalho; a Resolução de Problemas e o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e a criação de modelos (padrões). Sendo assim, haveria uma possibilidade de que o modelo preliminar de pesquisa não fosse seguido ao pé da letra, ou seja, que pudesse ser alterado de acordo com a realidade da pesquisa desenvolvida.

1.4.3. Relacionando o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar de nossa pesquisa com Ideias de Outros

Seguindo o fluxograma de Romberg (Figura 1, p. 20), nesta etapa, para relacionar nossas ideias com ideias de outros, passamos à busca de ideias de outros pesquisadores preocupados em trabalhar com nosso fenômeno de interesse e que suas ideias pudessem servir de base para a sustentação de nossa tese. A importância desta etapa se reflete na possibilidade de esclarecer, ampliar ou até mesmo alterar o Modelo Preliminar construído.

Dante (1991, p. 46) configura

A Educação Matemática como um campo amplo e sem restrições bem definidas, mas cujo núcleo é a Matemática de onde partiram estudos sobre a importância de seu ensino (objetivos); o que é relevante ensinar nos vários níveis (conteúdos, currículos); como ensiná-la, como vê-la num contexto histórico-sócio-cultural; que materiais instrucionais são adequados no processo do seu ensino e aprendizagem; onde e como pode ela ser aplicada no dia-a-dia e nas outras áreas do conhecimento; [...] e [...] Como os aprendizes assimilam, constroem e desenvolvem conceitos matemáticos (teorias da aprendizagem); como os professores podem auxiliar os aprendizes a assimilar, construir e desenvolver conceitos matemáticos (formação e atualização de professores); como o relacionamento e a cooperação social influi na aprendizagem da Matemática; como avaliar o desempenho matemático das pessoas.

Huanca (2006, p. 64) também diz que

A Educação Matemática vem apresentando um grande número de pesquisas com tendências variadas que procuram, de acordo com o fenômeno de interesse, contribuir para uma melhoria no ensino de Matemática. Essas tendências apresentam alguns eixos diretivos que norteiam o desenvolvimento de diferentes estratégias. Destacam-se, entre outras, como metodologias de ensino, a “Resolução de Problemas”; o uso de “Jogos e Materiais Concretos”; a “Etnomatemática”; a “Modelagem Matemática”; a “Informática Educativa”; e o uso da “História da Matemática”, além de alguns estudos de cunho psicológico, frequentemente centrados numa perspectiva construtivista de ensino da Matemática.

Kilpatrick (1992) já reconhecia a Educação Matemática como um campo de estudo que começou a se desenvolver lentamente no fim do século XIX nas universidades de vários países, em resposta à necessidade de mais e melhores professores preparados.

Dentro desta atividade serão realizadas leituras sobre o que outros escreveram sobre Formação do Professor de Matemática, tanto em literatura de pesquisa nacional e internacional quanto em livros didáticos nacionais e estrangeiros, artigos de pesquisa, teses, etc. Nessa fase de nossa pesquisa, ao olhar o modelo preliminar serão identificados os “outros”, pesquisadores que trabalham ou trabalharam com Resolução de Problemas; com a Metodologia de Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, onde o aluno é focado como co-construtor de um novo conhecimento; com as pessoas que trabalham ou trabalharam com modelos na linha da Modelização Matemática, e com aqueles que veem o Trabalho Colaborativo voltado para o Desenvolvimento Profissional.

Também serão consultados e analisados os Parâmetros Curriculares Nacionais para os Ensinos Fundamental e Médio (PCNs), na área de Matemática; documentos da Secretaria de Educação do Estado da Paraíba; do Conselho Nacional de Educação; e do NCTM - National Council of Teachers of Mathematics (USA).

Uma pesquisa bibliográfica torna-se então necessária.

Santos (2007, p. 104-105) afirma que

Primeiro, porque estará presente em qualquer processo de pesquisa. Com efeito a respeito de quase tudo que se deseje pesquisar, algo já foi pesquisado de forma mais básica, ou idêntica ou correlata. Há, portanto, outras percepções e posições que podem servir, seja para embasamento, seja para comparações ou mesmo para o conhecimento daquilo que se pretendia pesquisar por conta própria.

Segundo, porque a pesquisa bibliográfica é mais simples e confortável, pois dispensa todo o trabalho de montagem/escolha/testagem/relato de dados. Os dados já estão prontos, organizados, publicados [...] a pesquisa bibliográfica não costuma oferecer dados inéditos, como a pesquisa de campo ou de laboratório. Ressalte-se, porém, que em nada compromete a possibilidade de originalidade dos raciocínios que, a partir deles, possam ser desenvolvidos. A bem da verdade, dados já publicados podem mesmo possibilitar raciocínios inéditos, já que o conceito de inédito não se restringe a “realidade nova”. Pode também significar “pensamento novo” a respeito de “realidade velha”.

Nossa proposta é a de compilar, eventualmente em sua íntegra, trechos de especialistas nas áreas que escolhermos para investigar nosso Fenômeno de Interesse, seguindo o Modelo proposto na pesquisa.

Romberg destaca a importância de se reconhecer as pesquisas já desenvolvidas na área circunscrita ao nosso fenômeno de interesse, no sentido de se conhecer ideias e concepções teóricas de outros pesquisadores que podem ser utilizadas para explicar, ampliar ou modificar nosso modelo preliminar.

Para isso, entendemos que se faz necessária a visão e o auxílio dessas quatro frentes que expandirão o nosso objeto de pesquisa e, então, reservar um capítulo próprio para cada uma delas:

Capítulo 2 – Formação Continuada do Professor de Matemática;

Capítulo 3 – O Trabalho Colaborativo: Grupo de estudos como espaço para formação continuada do professor;

Capítulo 4 – Resolução de Problemas;

Capítulo 5 – Modelização Matemática.

Capítulo 2

A Formação Continuada do Professor de Matemática

Neste capítulo iniciamos brevemente com uma apresentação dos principais estágios utilizados para trabalhar a formação de professores, com o intuito de nos auxiliar na compreensão do paradigma de formação de professores assumido na pesquisa que nos propusemos a fazer. Em seguida discutimos o desenvolvimento profissional do professor de Matemática, sendo apresentadas algumas práticas que podem promover este desenvolvimento de ações de formação que possibilitem aos professores uma apropriação e uma adequação à mesma. Para finalizar apontaremos algumas ideias e propostas de “outros” que pretendem melhorar a formação continuada de professores e, sem dúvida, na inovação e na mudança.

2.1. A Formação do Professor em seus diferentes estágios

Quando se fala em formação do professor, uma diversidade de situações aparece. Dentre elas, destacam-se: reciclagem, treinamento, aperfeiçoamento, capacitação, educação permanente, formação inicial, formação continuada, educação continuada e desenvolvimento profissional.

Marin (1995, p 14) faz uma análise desses termos utilizados, termos esses que estão presentes, tanto no cotidiano dos profissionais das escolas quanto nos setores administrativos da educação escolar. Para essa autora, o termo reciclagem, por exemplo, significa “atualização pedagógica, cultural, para se obter melhores resultados”. Entretanto, Marin considera a terminologia um pouco comprometedor visto que, de acordo com o senso comum, “para haver reciclagem é preciso haver alterações substanciais, pois o material é manipulável, passível de destruição para posterior atribuição de nova função ou forma”.

Assim, a autora explica que este termo não é apropriado para designar pessoas, sobretudo os profissionais de educação, uma vez que o termo reciclagem é utilizado para o processo de transformação de materiais que não têm mais utilidade, passando, desse modo, a adquirir novas funções.

Segundo Marin (1995) a palavra treinamento é sinônimo de tornar destre, apto, capaz de determinada tarefa. Green (1971, apud Marin, 1995) esclarece que o foco, no treinamento, está na modelagem de comportamento. Ela apresenta como exemplos, o treinamento de músculos para reabilitação; de olhos, para ver certas cores e formas; de cães, para dar cambalhotas. Assim, a autora explica que tais ações dependem de automatismos e não da manifestação da inteligência. Considera, entretanto, que a palavra treinamento, com o significado de tornar apto, capaz de realizar certa tarefa, ela diz que, não é rejeitado integralmente, porque, entre profissionais de educação física, por exemplo, pode haver a necessidade de treinamentos a fim de se adquirir certas destrezas musculares para se ensinar uma dada modalidade esportiva. Mas adverte sobre a inadequação do termo, ao pensar na formação do professor a partir de ações puramente mecânicas, distantes das manifestações inteligentes (MARIN, 1995, p. 15).

Para Marin (1995, p.16), a palavra aperfeiçoamento, é sinônimo de tornar perfeito ou mais perfeito, acabar com perfeição, concluir com esmero, acabar ou completar o que estava incompleto, adquirir maior grau de instrução, emendar os próprios defeitos. Marin considera essa busca pela perfeição algo inatingível nos seres humanos e, conseqüentemente, em sua profissão. O que ocorre, para esta autora, são possibilidades de melhoria. Ela diz, pensa na utilização do termo aperfeiçoamento no sentido de “corrigir defeitos”, adquirindo maior grau de instrução.

Marin (1995), em relação ao termo de capacitação, identifica mais de uma forma de concebê-lo. Ela diz que, este termo significa tornar capaz, habilitar e, por outro, convencer, persuadir. Julga o primeiro conjunto de significados apropriado, visto que, para exercer a função de educadores, é preciso que estes se tornem capazes e adquiram as condições de desempenho próprias à profissão. Já com relação ao segundo conjunto de significados, ressalta que o profissionalismo deve caminhar no sentido oposto ao convencimento e a persuasão: “Os profissionais da educação não podem, e não devem ser persuadidos ou convencidos de ideias; eles devem conhecê-las, analisá-las, criticá-las, até mesmo aceitá-las, mas mediante o uso da razão” (MARIN, 1995, p.17).

Finalmente, Marin (1995, p. 18) considera que a “formação continuada” tem como significado fundamental “a atividade conscientemente proposta, direcionada para a mudança”. A autora considera o termo “formação continuada” como sendo o mais apropriado entre todos os demais, vendo-o como uma prática social de educação mobilizadora de todas as atividades e de todos os saberes profissionais. Ela acredita ainda que esta terminologia é mais ampla que

as demais, pois pode incorporar as noções anteriores (treinamento, capacitação, aperfeiçoamento) dependendo da perspectiva, do objetivo específico ou dos aspectos a serem focalizados no processo educativo.

2.2. A Formação do Professor de Matemática sob a perspectiva do desenvolvimento profissional

Ao consultarmos a literatura sobre desenvolvimento profissional, merece destaque o livro “Professional Standards for Teaching Mathematics” (Padrões Profissionais para o Ensino da Matemática), publicado nos Estados Unidos, em 1991, pelo NCTM², que considera questões relativas à prática pedagógica, com especial incidência na sala de aula, incluindo a natureza das atividades e os papéis do professor e do aluno, analisa os diversos aspectos da avaliação do ensino da Matemática, discute diversos componentes do desenvolvimento profissional dos professores e passa em revista as responsabilidades do governo, do meio empresarial, da indústria, das escolas, das universidades e das outras instituições de formação, bem como das organizações profissionais.

Uma das seções dessa publicação (NCTM, 1991, p. 125) apresenta as “Normas para o Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática”. Um dos pressupostos básicos que constituem a fundamentação para tais normas diz que “a formação de professores de Matemática é um processo contínuo”. Nesse sentido, “ser professor implica um processo de crescimento dinâmico e contínuo que abarca toda uma carreira”. Desse modo, “o crescimento do professor exige um compromisso com o desenvolvimento profissional que visa à melhoria do seu ensino, com base numa experiência cada vez maior, conhecimentos novos e preocupação em relação às reformas educativas”. Na seção mencionada são apresentadas seis normas para o desenvolvimento profissional de professores de Matemática: (1) Experimentar um bom ensino da Matemática; (2) Saber matemática e conhecer a matemática escolar; (3) Conhecer o modo como os alunos aprendem Matemática; (4) Conhecer a pedagogia da matemática; (5) Desenvolver-se enquanto professor de Matemática; e (6) O papel dos professores no desenvolvimento profissional.

² NCTM - National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática)

1. Experimentar um bom ensino da Matemática

Segundo o (NCTM, 1991, p. 127), os professores de matemática e educação matemática envolvidos em programas de formação inicial e contínua devem apresentar um bom modelo do ensino da matemática, propondo atividades matemáticas adequadas; envolvendo os futuros e atuais professores no discurso matemático; realçando o discurso matemático através do uso de uma grande variedade de ferramentas, incluindo calculadoras, computadores, modelos físicos e representações gráficas; criando ambientes de aprendizagem que apoiem e encorajem o raciocínio matemático e as tendências e aptidões dos professores para fazer matemática; encorajando os futuros e atuais professores a correr riscos intelectuais ao fazer matemática e a trabalhar cooperativamente, mas também de forma independente; e tendo expectativas positivas a este respeito; apresentando a matemática como uma atividade humana permanente; assegurando e apoiando a participação plena e o estudo continuado da matemática por todos os estudantes.

2. Saber matemática e conhecer a matemática escolar

Para a segunda norma, segundo o (NCTM, 1991, p. 132), leva-se em conta que a formação do professor de Matemática deve desenvolver o seu conhecimento do conteúdo e do discurso matemático, incluindo conceitos e procedimentos matemáticos e as conexões entre eles; múltiplas representações dos conceitos e dos procedimentos matemáticos; tipos de raciocínio matemático, formas de resolver problemas e de comunicar matemática eficazmente em diferentes níveis de formalidade; e, além disso, desenvolver as suas perspectivas sobre: a natureza da matemática, as contribuições de diferentes culturas para o desenvolvimento da matemática, e o papel da matemática na cultura e na sociedade; as mudanças na natureza da matemática e na forma como ensinamos, aprendemos e fazemos matemática como resultado da tecnologia disponível; a matemática escolar dentro da disciplina Matemática; a natureza mutável da matemática escolar, as suas relações com outras matérias escolares e as suas aplicações na sociedade.

3. Conhecer o modo como os alunos aprendem Matemática

Ao focalizarmos a terceira norma, segundo o (NCTM, 1991, p. 144), é importante mencionar que a formação inicial e contínua dos professores de Matemática deve fornecer múltiplas perspectivas acerca do modo como os alunos aprendem Matemática, desenvolvendo o conhecimento dos professores sobre os resultados da investigação sobre a aprendizagem de

Matemática; os efeitos da idade, aptidões, interesses e experiência dos alunos na aprendizagem da Matemática; as influências da origem linguística, étnica e racial, e do sexo, na aprendizagem da Matemática; os processos de afirmar e defender a participação empenhada e o estudo continuado de Matemática por todos os alunos.

4. Conhecer a pedagogia da matemática

A respeito da quarta norma, segundo o (NCTM, 1991, p. 151), a formação inicial e contínua dos professores de Matemática deve desenvolver nos professores conhecimentos e aptidões para usar e avaliar materiais e recursos para o ensino, incluindo tecnologia; modos de representação dos conceitos e procedimentos matemáticos; estratégias de ensino e modelos de organização da sala de aula; modos de estimular o discurso matemático e desenvolver na aula o sentido de comunidade matemática; meios para avaliar a compreensão matemática do aluno.

5. Desenvolver-se enquanto professor de Matemática

Para a quinta norma, segundo o (NCTM, 1991, p. 160), destacamos que a formação inicial e contínua dos professores de matemática deve proporcionar-lhes oportunidades para examinar e rever as suas ideias sobre a natureza da matemática, sobre como deve ser ensinada e sobre o modo como os alunos a aprendem; observar e analisar diversas abordagens do ensino e da aprendizagem da Matemática, centradas em atividades, discurso, ambiente e avaliação; trabalhar com grande diversidade de alunos, individualmente, em pequeno grupo, e com a turma toda, apoiados por profissionais da educação matemática em colaboração com eles; analisar e avaliar a adequação e a eficácia do seu ensino; desenvolver predisposição para o ensino da Matemática.

6. O papel dos professores no desenvolvimento profissional

Segundo o (NCTM, 1991, p. 168), na sexta norma, os professores de Matemática devem desempenhar um papel ativo no seu próprio desenvolvimento profissional, aceitando a responsabilidade de experimentar cuidadosamente abordagens e estratégias alternativas nas suas aulas; refletir sobre a aprendizagem e o ensino, quer individualmente, quer com colegas; participar em grupos de trabalho, seminários, cursos e outras oportunidades educacionais específicas para a matemática; participar ativamente na comunidade profissional dos educadores matemáticos; ler e discutir ideias apresentadas em publicações profissionais; discutir com colegas questões relativas à matemática e ao seu ensino e aprendizagem;

participar na proposta, elaboração e avaliação de programas para o desenvolvimento profissional específico para a matemática; participar nos esforços desenvolvidos pela escola, pela comunidade e a nível político, para conseguir uma mudança positiva na educação matemática. Escolas e distritos escolares devem apoiar e encorajar os professores a assumir estas responsabilidades.

Já no livro “Professional Development for Teachers of Mathematics” (Desenvolvimento Profissional para Professores de Matemática), publicado pelo NCTM, em 1994, apresenta-se uma coleção de artigos sobre desenvolvimento profissional de professores de Matemática. Em um desses artigos, Doug Clark (p. 37-46) apresenta dez princípios importantes, extraídos da literatura de pesquisa em desenvolvimento profissional, que podem ser usados para guiar o planejamento e a implementação de programas de desenvolvimento do corpo docente. Tais princípios são:

- Tratar questões de preocupação e interesse, largamente (mas não exclusivamente) identificadas pelos professores, e envolver um grau de escolha para os participantes.

Programas de desenvolvimento profissional são mais prováveis para atingir uma mudança significativa na prática de sala de aula se forem vistos pelos professores como sendo suscetíveis às suas necessidades. Muitas tentativas foram feitas para averiguar as preferências dos professores em relação a conteúdo, forma e estilo de programas de desenvolvimento profissional. Estes estudos assumiram que os professores estão na melhor posição para determinar suas necessidades de desenvolvimento profissional. (CLARK, 1994, p. 37)

- Envolver grupos de professores mais do que indivíduos de várias escolas, e pedir o apoio da escola e da administração distrital, de estudantes, de pais, e da ampla comunidade escolar.

Enquanto que os professores geralmente acreditam que seu maior auxílio em manter e melhorar suas habilidades vem de outros professores, é irônico que eles têm pouca oportunidade para trabalhar, observar, ou receber realimentação de pares sobre seu ensino. Encorajar professores a participar em programas de desenvolvimento profissional com colegas de sua própria escola pode começar a construir as normas de colegialidade e experimentação que são necessárias para mudança significativa (LITTLE, 1982, p. 47).

- Reconhecer e identificar os muitos impedimentos para o crescimento dos professores em nível individual, escolar e distrital.

Enquanto os professores procuram fazer crescer seu conhecimento e expandir as fronteiras de sua “zona de conforto”, muitas barreiras surgem, servindo como impedimentos. Clarke apresenta as seguintes categorias de impedimentos: a) impedimentos externos à escola; b) impedimentos relacionados à organização e administração escolar e à comunidade escolar;

c) impedimentos relacionados às crenças, conhecimento e prática dos professores; d) impedimentos relacionados ao conteúdo das sessões de desenvolvimento do corpo docente. (CLARK, 1994, p. 39)

- Utilizar professores como participantes em atividades de sala de aula ou estudantes em situações reais, modelar abordagens de sala de aula desejadas durante as sessões em serviço para projetar uma visão mais clara das mudanças propostas.

Muitos autores têm advogado programas em serviço que oferecem tanto aprendizagem experimental (“aprender fazendo”) quanto situações de aprendizagem informal, nas quais interação social pode ocorrer. (CLARK, 1994, p. 39)

- Solicitar um compromisso consciente dos professores para participar ativamente das sessões de desenvolvimento profissional e para empreender leituras requeridas e tarefas de sala de aula, apropriadamente adaptadas para suas próprias salas de aula.

Dois aspectos de compromisso são importantes aqui: o compromisso para participação ativa no programa e o compromisso para com a filosofia e abordagens subjacentes ao programa. (CLARK, 1994, p. 40)

- Reconhecer que mudanças nas crenças dos professores sobre ensino e aprendizagem são derivadas em grande parte da prática de sala de aula; como um resultado, tais mudanças darão a oportunidade para validar, através da observação de aprendizagem segura do estudante, informação fornecida por programas de desenvolvimento profissional.

Vários escritores reconhecem que os programas de desenvolvimento profissional falam acerca de mudança – em conhecimento dos professores, crenças e atitudes dos professores, prática de sala de aula, aprendizagem dos estudantes, ou uma combinação destes. Muitos professores são motivados a aceitar programas de desenvolvimento profissional porque desejam se tornar melhores professores e acreditam que seus estudantes se beneficiarão. Entretanto, muito ainda deve ser aprendido sobre o processo de mudar na sala de aula de Matemática. (CLARK, 1994, p. 41)

- Conceder tempo e oportunidades para planejamento, reflexão e realimentação para relatar sucessos e fracassos ao grupo, para compartilhar “a sabedoria da prática” e para discutir problemas e soluções com relação a cada um dos alunos e novas abordagens de ensino.
- Capacitar os professores participantes a ganhar um substancial grau de propriedade por seu envolvimento em tomada de decisão e por serem considerados como parceiros autênticos no processo de mudança.

- Reconhecer que mudança é um processo gradual, difícil e muitas vezes penoso, e proporcionar oportunidades para apoio contínuo de pares e amigos críticos.
- Encorajar os participantes para estabelecer objetivos adicionais para seu crescimento profissional.

Segundo Ponte (1996), o conceito de desenvolvimento profissional é relativamente recente nos debates sobre a formação de professores dos diversos níveis de ensino. De acordo com ele

sua importância resulta da constatação que uma sociedade em constante mudança impõe à escola responsabilidades cada vez mais pesadas. Os conhecimentos e competências adquiridos pelos professores antes e durante a formação inicial tornam-se manifestamente insuficientes para o exercício de suas funções ao longo de toda a sua carreira. (PONTE, 1996, p.193)

Ponte (1996) afirma que a noção de desenvolvimento profissional está muito próxima da noção de formação, mas não é uma noção equivalente. Para o autor, as principais diferenças entre elas são:

A formação está muito associada à ideia de “frequentar” cursos, numa lógica mais ou menos “escolar”; o desenvolvimento profissional processa-se de múltiplas formas e processos, que inclui a frequência de cursos, mas também outras atividades como projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões [..].

Na formação o movimento é essencialmente de fora para dentro, cabendo-lhe absorver os conhecimentos e a informação que lhe são transmitidos; com o desenvolvimento profissional está-se a pensar num movimento de dentro para fora, na medida em que toma as decisões fundamentais relativamente às questões que quer considerar, aos projetos que quer empreender e ao modo como os quer executar; ou seja: o professor é objeto na formação mas é sujeito no desenvolvimento profissional.

Na formação atende-se principalmente (se não exclusivamente) àquilo em que o professor é carente; no desenvolvimento profissional parte-se dos aspectos que o professor já tem mas que podem ser desenvolvidos.

A formação tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos (ou por disciplinas, como na formação inicial); faz-se a formação em avaliação, em cultura islâmica; o desenvolvimento profissional, embora possa incidir em cada momento num ou noutro aspecto, tende sempre a implicar a pessoa do professor como um todo.

A formação parte invariavelmente da teoria e muitas vezes (talvez na maior parte) não chega a sair da teoria; o desenvolvimento profissional tanto pode partir da teoria como da prática; e, em qualquer caso, tende a considerar a teoria e a prática interligadas. (PONTE, 1996, p.194)

Ponte (1996, p.196) analisa o desenvolvimento profissional ao longo da carreira do professor, enfatizando que “a cultura profissional dos professores é muito marcada pelo

individualismo e pelo espírito defensivo. Há na atitude de muitos professores um grande desinvestimento (cumpre-se estritamente o mínimo e por vezes menos que o mínimo)”.

Um aspecto que pode interferir decisivamente no desenvolvimento profissional do professor é a forma como ele vive sua profissão.

Nesse sentido, Ponte (1996) classifica as várias maneiras de estar em cada momento na profissão em três grandes grupos, a saber:

- *os investidos*, que vivem a sua profissão com entusiasmo e sentido de responsabilidade, remando muitas vezes contra ventos e marés (e que não são poucos);
- *os acomodados*, que não têm esperança de ver ocorrer qualquer mudança significativa no ensino e que encaram a profissão fundamentalmente como meio de sobrevivência;
- *os transitórios*, que estão na profissão apenas de passagem, à espera de mudar para outra atividade em que se sintam melhor.

Nesse sentido, Day (1999) considera o desenvolvimento profissional do professor como um processo que engloba todas as suas experiências de aprendizagem (naturais, planejadas e conscientes) que lhe trazem benefício direto ou indireto e que contribuem para a qualidade de seu desempenho junto aos alunos. O professor, individualmente ou com colegas, educadores e pesquisadores, revê, renova e amplia os seus compromissos quanto aos propósitos do ensino e adquire e desenvolve, criticamente, o conhecimento, as técnicas e a inteligência (cognitiva e afetiva) essenciais a uma prática profissional de qualidade com os alunos, no contexto escolar.

Em outro livro “Perspectives on the Teaching of Mathematics” (Perspectivas sobre o Ensino de Matemática), publicado pelo NCTM, em 2004, pode-se ler que, Lynn Hart, Deborah Najee-ullah e Karen Schultz apresentam um modelo de ensino reflexivo, isto é, um modelo de desenvolvimento profissional para professores de Matemática em serviço.

O Modelo de Ensino Reflexivo foi desenvolvido com o intuito de criar experiências significativas de desenvolvimento profissional para professores que lecionam. Ele está fundamentado nas teorias de construtivismo e metacognição. Também está baseado em suposições sobre o valor de modelar, compartilhar autoridade, refletir, e no ensino heurístico. Segue um formato modelar/experimentar/refletir. Nesse sentido, os facilitadores primeiro modelam um exercício tal como planejar, ensinar, ou resolver problemas; mais tarde, os professores experimentam a atividade; e no fim de cada atividade, todos refletem. Enquanto uma atividade no Modelo circula através dos passos modelar/experimentar/refletir, hipóteses desse Modelo são compreendidas. Professores constroem novo conhecimento sobre ensino e

aprendizagem (construtivismo). Eles aprendem a monitorar seu pensamento e comportamento (metacognição). Expandem e aumentam suas estruturas para ensinar, observando como outros pensam e ensinam a partir de uma perspectiva de reforma (modelar). Eles têm uma experiência de aprendizagem onde suas ideias são valorizadas; experimentam um ensino onde valorizam as ideias de seus alunos; e, experimentam planejar colaborativamente com educadores de professor (compartilhando autoridade). Desenvolvem estratégias para planejar aulas que os ajudam a “resolver” o problema do ensino (ensino heurístico).

Segundo Nacarato (2005, p.176), pesquisas na área de formação de professores ressaltam “a importância da escola e do trabalho coletivo/colaborativo como instâncias de desenvolvimento profissional, uma vez que estas proporcionam aos professores condições de formação permanente, troca de experiências, busca de inovações e de soluções para os problemas que emergem do cotidiano escolar”. Um grupo constituído de professores de uma mesma escola, na própria escola, torna-se um ambiente ‘seguro’ para a produção coletiva compartilhada, atendendo às especificidades locais.

Nessa formação, é preciso considerar o relevante papel do agente externo que atua junto ao grupo da escola. Sua função de facilitador educativo estimula “processos de problematização e reflexão da prática docente. Seu papel é colaborar com o desenvolvimento profissional do professor, no intuito de ajudá-lo a tornar-se reflexivo sobre sua própria prática” (NACARATO, 2005, p.179).

Em relação ao desenvolvimento profissional concordamos com Ferreira (2006) quando afirma que este é um processo que se dá ao longo de toda a experiência profissional com o ensino e a aprendizagem de Matemática, cuja duração não é preestabelecida e nem acontece linearmente. Influenciado por fatores pessoais, motivacionais, sociais, cognitivos e afetivos, esse processo envolve a formação inicial e a continuada, como também a história pessoal como aluno e professor. Nesse sentido, Ferreira (2006, p. 150) afirma que as características do indivíduo, sua vida atual, sua personalidade, sua motivação para mudar, os estímulos ou pressões que sofre socialmente e sua cognição e afeto – crenças, valores, metas, etc. – possuem importante impacto sobre esse processo sob a perspectiva do desenvolvimento profissional.

2.3. A Formação Continuada do Professor

As propostas de formação docente, elaboradas a partir de 1998, passaram a ser influenciadas pelas determinações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em

particular pela concepção de formação e pela definição das atribuições da profissão professor presentes nesse documento. Conforme as diretrizes instituídas nos PCN, o papel do professor consiste em produzir, articular e planejar práticas educativas e mediar o conhecimento socialmente produzido. A formação continuada, por sua vez, é concebida como o processo que deve fornecer subsídios que auxiliem o docente a lidar com o multiculturalismo e as diferenças entre alunos, valorizando seus conhecimentos prévios, os quais devem servir como fonte de aprendizagem, de convívio social e ponto de partida à aprendizagem de conteúdos específicos (BRASIL, 1998).

Nacarato (2005) diz que tomar a experiência dos professores como ponto de partida da formação continuada não implica em negar o saber produzido pelas ciências da Educação, eo autor fala que devemos considerar, sim, a prática como ponto de partida e chegada do processo de formação. Dessa forma, momentos formais de formação se tornam espaço para reflexão, uma vez que o professor está sujeito a eventos inesperados e interrupções variadas e nem sempre as aulas saem de acordo com o planejado.

Perez et al. (2002, p. 69) dizem que os professores lidam diariamente com situações complexas, e considerando o ritmo acelerado das atividades, há poucas oportunidades para que eles possam refletir sobre os problemas e trazer seus conhecimentos à tona para analisá-los e interpretá-los.

Segundo Nacarato (2005, p.176-179), pesquisas na área de formação de professores ressaltam

a importância da escola e do trabalho coletivo/colaborativo como instâncias de desenvolvimento profissional, uma vez que estas proporcionam aos professores condições de formação permanente, troca de experiências, busca de inovações e de soluções para os problemas que emergem do cotidiano escolar.

Nessa formação *in lócus*, é preciso considerar o relevante papel do agente externo que atua junto ao grupo da escola. Sua função de facilitador educativo estimula processos de problematização e reflexão da prática docente. Seu papel é colaborar com o desenvolvimento profissional do professor, no intuito de ajudá-lo a tornar-se reflexivo sobre sua própria prática.

Perez et al. (2002, p. 61) escrevem que “a reflexão é vista como um processo em que o professor analisa sua prática, compila dados, descreve situações, elabora teorias, implementa e avalia projetos e partilha suas ideias com colegas e alunos, estimulando discussões em grupo”. E dizem que: “o professor precisa ter disposição para aceitar e implementar novas ideias, assumir atitudes de responsabilidade, baseadas em princípios éticos, e ter entusiasmo e coragem para adotar atitudes novas”.

Ainda dizem que pode-se “imaginar uma mudança sobre a concepção de formação continuada na qual são elementos cruciais a reflexão sobre a prática pedagógica e a colaboração e discussão entre os professores”.

Por outro lado, vivemos em sociedades complexas, em constante mudança, marcadas por várias contradições. Segundo Mizukami (2006, p.1), “na assim denominada ‘sociedade do conhecimento’, pessoas com acesso rápido, diversificado e atualizado a conhecimentos, convivem com pessoas à margem desse mundo”.

Nesse contexto, surge a educação como ferramenta de preparação do cidadão para viver e atuar nesse mundo. As reformas educacionais (nacionais e internacionais) trazem a formação continuada do professor para o foco do debate.

Políticas públicas têm sido elaboradas e implementadas com o objetivo de qualificar o professor, levando em conta a melhoria de aprendizagem do aluno.

Focalizando a formação do professor, Mizukami (2006, p. 1) diz que:

Os processos de aprender a ensinar e ser professor e de desenvolvimento profissional são lentos, iniciam-se antes dos cursos de licenciatura e prolongam-se por toda a vida. A escola e outros espaços de conhecimento são importantes nessa formação. Conhecimentos teóricos, assim como aqueles que têm como fonte a experiência pessoal e profissional são objetos de aprendizagem constantes.

Nesse sentido, considerando diferentes contextos, questões antigas e recorrentes continuam atuais quando consideramos a formação de professores de educação básica.

Segundo Mizukami (2006, p. 2), tais questões “são permeadas tanto pela necessidade de se formar bons professores para cada escola, quanto pelo desafio de oferecer processos formativos pertinentes a um mundo em mudança”. Especificando algumas dessas questões, temos: características, limites e desafios da formação inicial; estabelecimento de relações teoria-prática; formação continuada e aprendizagem ao longo da vida; a escola como um dos locais de aprendizagem e desenvolvimento profissional; a construção de comunidades de aprendizagem como instâncias que possibilitam o desenvolvimento profissional de professores; e o desenvolvimento de atitude investigativa como ferramenta de desenvolvimento profissional.

Partindo das questões relacionadas, Mizukami evidencia o ponto central em qualquer processo formativo, isto é, aquilo que os professores precisam saber para:

- Organizar situações de ensino que possibilitem aprendizagens para alunos de trajetórias e culturas diversas;
- Construir conhecimentos sobre o ensino dos diferentes componentes curriculares.

Capítulo 3

O trabalho Colaborativo: Grupos de estudo na formação continuada do professor

Neste capítulo pretendemos, dentro da Atividade 3 de Romberg, nos relacionarmos com ideias de outros e trazer mais fundamentação teórica para nossa pesquisa. Para tanto, seria necessário trabalhar sobre as ideias de um trabalho colaborativo e a teoria que trata de organização de grupos de estudo no âmbito da formação continuada do professor.

Inicialmente iremos apresentar uma discussão sobre trabalho colaborativo no desenvolvimento profissional, como uma forma de poder implementar mudanças nos trabalhos escolares e a seguir, destacaremos três experiências envolvendo grupos de estudo entre professores de Matemática e pesquisadores.

3.1. O que é trabalho colaborativo?

Considerando que cooperação e colaboração são termos relacionados à ideia de um grupo de pessoas mobilizadas por um objetivo comum há diferenças entre elas. Dillenburg et al. (1996, p.189), citados por Ferreira (2006, p.151), diz que:

a cooperação e a colaboração não diferem em termos de saber se a tarefa é dividida ou não mas em virtude da forma pela qual é distribuída: na cooperação, a tarefa é dividida (hierarquicamente) em subtarefas independentes; na colaboração, os processos cognitivos podem ser (sem hierarquia) divididos em camadas entrelaçadas. Na cooperação, a coordenação apenas é requerida quando se reúnem resultados parciais, enquanto que a colaboração é [...] uma atividade coordenada, sincronizada, que é resultado de uma tentativa contínua de construir e manter uma concepção compartilhada de um problema.

Nesse sentido, Fiorentini (2004, p.50) esclarece que, do ponto de vista etimológico, embora cooperação e colaboração tenham o mesmo prefixo *co*, que significa ação conjunta, eles se distinguem pelo significado de “operare”, que é “operar, executar, fazer funcionar de acordo com o sistema” e “laborare”, que é “trabalhar, produzir, desenvolver atividades tendo em vista determinado fim”. Dessa forma, na colaboração, “todos trabalham conjuntamente (co-laboram) e se apoiam mutuamente, visando a atingir objetivos comuns”.

Fiorentini (2004), assim como Ferreira e Miorin (2003), complementa que é possível partir de uma prática cooperativa e vir a constituir um grupo colaborativo, quando diz que

[...] à medida em que seus integrantes vão se conhecendo e adquirem e produzem coletivamente conhecimentos, os participantes adquirem autonomia e passam a auto-regular-se e a fazer valer seus próprios interesses, tornando-se, assim, grupos efetivamente colaborativos. (FIORENTINI, 2004, p. 53)

Pinto (2002) diz, o que se percebe é que, ao ajudar o outro também me ajudo, colaborando comigo mesmo. Cada um enuncia sua voz do lugar onde cada um ocupa, mas todos trabalham juntos. Já para Ferreira e Miorim (2003), colaborar é co-responsabilizar-se pelo processo. É ter vez, ter voz e ser ouvido, é sentir-se membro de algo que só funciona porque todos se empenham e constroem coletivamente o caminho para alcançar os objetivos.

Dessa forma, segundo Miskulin et al. (2005) esclarecem que, na cooperação, as pessoas estão envolvidas de forma a executar tarefas e realizar ações de seu interesse. Na colaboração, por sua vez, há maior reciprocidade, estabelecendo-se metas comuns.

Para Hargreaves (2001), o que determina a colaboração é a vontade interna de cada indivíduo de querer trabalhar junto com o outro, de desejar fazer parte de um determinado grupo. “Nas culturas de colaboração, as relações de trabalho em colaboração dos professores com seus colegas tendem a ser: espontâneas; voluntárias; orientadas para o desenvolvimento; difundidas no tempo e no espaço; e imprevistas” (HARGREAVES, 1998, p. 216). Nesse contexto, a colaboração pode contribuir para o desenvolvimento da escola e também do professor.

Em contrapartida, trocar experiências, compartilhar soluções de problemas propostos, atuar junto não implica pensar de maneira uniforme. As trocas visam os diversos objetivos, que podem ser de todo o grupo, de alguns membros ou de um único deles. É um ambiente de contribuição, em que se somam as individualidades na busca de um benefício coletivo. E coletivo não é necessariamente sinônimo de maciço e uniforme. Ao desenvolver atividades em grupo é preciso liderar, rever conceitos, propor problemas secundários de discussão, etc.

Nesse sentido, Nacarato (2005, p.183) salienta que um grupo colaborativo pode ser um ambiente “ideal para trocas de experiências e de aprendizagem [...], mas sem perder a subjetividade ou a individualidade de cada um, ou seja, sem produzir uma perspectiva única ou uniforme”. Como sugere Ferreira (2003a), esse processo não impede que cada participante tenha o seu ponto de vista e distintos interesses, aportando diferentes contribuições, a partir de diferentes níveis de participação. Ademais, colaborar não implica que todos participem da mesma forma. “Cada um colabora à sua maneira, com os recursos de que dispõe e a partir do

‘seu olhar’. O olhar de cada um tem a ver com sua história, suas experiências, suas condições de trabalho e seu momento de vida atual” (FERREIRA; MIORIM, 2003, p.19). As diferenças de ‘olhar’ podem vir a se revelar como elemento para a colaboração, ao possibilitar que os envolvidos deem o melhor de si, na busca de crescer e contribuir para o grupo.

Um aspecto bastante discutido na literatura sobre colaboração diz respeito à necessidade de confiança. Goulet e Aubichon (1997, p.118), citados por Boavida e Ponte (2002), afirmam que a confiança é “o primeiro passo para a colaboração”. Nesse sentido, a confiança é essencial para cada participante sentir-se à vontade em questionar abertamente as ideias, os valores e as ações dos outros, respeitando-os, e sabendo que o seu trabalho e os seus valores também são respeitados.

Outro aspecto bastante frequente na literatura referida é o do diálogo. Para Olson (1997), de um lado é fundamental a aceitação da voz pessoal, decorrente da experiência, de outro é necessário ter em mente que nenhuma ideia é definitiva. À medida em que uma voz se entrelaça com outras vozes, a compreensão fica enriquecida e a conversação torna-se cada vez mais informada. Nesse sentido, podemos afirmar que o diálogo constitui-se num instrumento de confronto de ideias e de construção de novas compreensões.

Uma terceira ideia essencial nos projetos colaborativos é a de negociação. Para Christiansen et al. (1997), “a chave para uma colaboração bem sucedida é uma negociação aberta da partilha de poder e expectativas relativamente ao papel de cada um dos participantes, à medida em que um projeto se desenvolve” (p.285).

Ferreira (2003a) apoia-se nos trabalhos de vários pesquisadores para dizer que a cooperação é aplicada, frequentemente, como uma estratégia de ensino. Nesse caso, a aprendizagem cooperativa, geralmente, está ligada a estratégias de trabalho em pequenos grupos, nos quais os alunos buscam solucionar problemas e/ou produzir conhecimentos conjuntamente. Com isso, a participação é mais ativa e, eles, em pequenos grupos, tentam solucionar as atividades propostas. Assim, a organização das aulas e a escolha das tarefas, geralmente ficam sob a responsabilidade do professor. Nesses termos, o poder de decisão e escolha dos alunos não é tão amplo. Analogamente, em vários programas de educação continuada, o professor dispõe de certa autonomia e participa de atividades e propostas de forma ativa. Entretanto a proposta norteadora do grupo de estudo, curso ou seminário é trazida de fora, elaborada por alguém, seja coordenador ou formador.

3.2. A autonomia do professor e o trabalho colaborativo

Segundo Contreras (2002), a autonomia pode ser considerada um processo contínuo de descobertas e transformações das diferenças entre a prática cotidiana e as aspirações sociais de igualdade, justiça e democracia, de compreensão dos fatores que dificultam não apenas as alterações de condições sociais e institucionais do ensino, como também de nossa própria consciência.

Contreras ainda diz que nas interações com a comunidade escolar, a autonomia profissional do professor deve começar junto à sensibilidade moral, pelo reconhecimento dos próprios limites e parcialidades como forma de compreensão dos outros. Esse reconhecimento não é espontâneo - precisa ser buscado de forma exigente e trabalhosa - tampouco pode ser imposto ou dogmaticamente estabelecido, uma vez que a autonomia profissional perde seu sentido de auto-suficiência, para fazer-se solidária.

A autonomia vista como a capacidade de governar-se pelos seus próprios meios, é uma qualidade na relação profissional dos professores. Precisamos reconhecer esse processo autônomo como uma necessidade educativa e não somente como parte da competência profissional. Elliot (1991) nos remete à noção de autonomia. Esta, como construção reflexiva em um contexto de relação, é uma concepção da atuação profissional baseada na colaboração, no entendimento e não na imposição.

Para Contreras (2002), a autonomia do professor está relacionada aos interesses da comunidade educativa na qual atua. Dessa maneira, ela representa busca e aprendizagem contínuas, uma abertura à compreensão e à reconstrução de nossa própria identidade profissional. Ela ganha grande importância em uma pesquisa colaborativa, ao significar um processo dinâmico de definição e constituição pessoal de quem somos como profissionais.

Ainda, esse autor diz que a autonomia e o trabalho colaborativo são relevantes para a elaboração e a efetivação do conhecimento e do desenvolvimento profissional. Este requer aquisição de competências e atitudes que permitam uma saudável e produtiva relação com nossos pares. A colaboração entre professores deve ser incentivada em ações de formação do professor de Matemática.

Hargreaves (1998) considera a questão da colaboração no quadro do desenvolvimento dos professores. Ele analisa os dois conceitos da cultura profissional: individualismo e colegialidade, atribuindo àquele o título de heresia genérica da mudança educativa. Para o autor, a colaboração ou a colegialidade são pontes vitais entre o desenvolvimento das escolas

e dos professores, pois suas formas se traduzem em uma tomada de decisões partilhadas e na realização de consultas entre colegas e diz que

Se a colaboração e a colegialidade são consideradas promotoras do crescimento profissional e do desenvolvimento das escolas a partir de dentro, também são largamente encaradas como formas de assegurar a implementação de mudanças introduzidas externamente. O seu contributo para a implementação das reformas curriculares centralizadas constitui, a este respeito, um fator crucial (HARGREAVES, 1998, p.209).

Dessa forma, tanto a colaboração quanto a individualidade constituem uma forma particular da cultura de ensino. Ao analisarmos essas manifestações culturais de ensino, podemos fazê-lo sob as dimensões de conteúdo e forma, sendo que

o conteúdo consiste nas atitudes substantivas, valores, crenças, hábitos, pressupostos e formas assumidas de fazer as coisas que são compartilhados no seio de um grupo particular de professores... A forma consiste nos padrões característicos de relacionamento e nas formas de associação entre os membros destas culturas (HARGREAVES, 1998, p. 186).

Precisamos considerar que somos pessoas com características individuais e pertencentes a grupos diversos, alguns sendo comuns e outros não. Como docentes, somos marcantes na forma de expressar nossas visões de mundo, constituídas por crenças e concepções adquiridas ao longo de nossas vidas, em relação à diversidade do conhecimento humano.

3.3. O trabalho colaborativo no desenvolvimento profissional

No grupo de professores, diferentes formas de relacionamento e interação podem existir e coexistir, como a independência associada a um exercício da individualidade; a interdependência - associada a lógicas de colaboração; e à dependência - em que os professores dependem fortemente de um instigador externo.

Alguns pesquisadores recomendam a colaboração como essencial ao desenvolvimento profissional do professor (Day,1999; Hargreaves, 1998; Lieberman, 1994; Serrazina, 1998). O trabalho colaborativo pode ser uma possibilidade de os professores poderem compartilhar ideias, valores e compreensões através da socialização da elaboração de seus pensamentos e de sua prática. É recomendável um processo dialético que seja crítico em relação às problemáticas emergentes no preparo, na execução e na pós-execução das atividades de ensino, priorizando comparações entre as práticas e reflexões sobre as decisões tomadas, durante o processo ensino-aprendizagem-avaliação.

Nesse sentido, a parceria entre professores não é simples e natural, exige o estabelecimento e a manutenção de relações duradouras, com a produção de um novo conhecimento, mais do que apenas consumidores do conhecimento produzido pela investigação.

Muitos investigadores do desenvolvimento profissional de professores alertam para a necessidade da execução de projetos colaborativos, envolvendo docentes e pesquisadores, sendo que Ponte (1996) considera que se deve ter mais interesse em investigar com os professores, do que investigar sobre eles.

Autores que propõem essa perspectiva, como Lieberman e Miller (1999) e Saraiva (2001), pretendem combater o paradigma da separação entre a prática profissional do professor e a investigação que pretende iluminar essa mesma prática, bem como a separação entre as escolas e as universidades e, em última análise, a separação da teoria e da prática.

Para Lieberman e Miller (2000), se os pesquisadores trabalharem colaborativamente com os professores e os incluírem no processo de formulação das questões de investigação, serão levados em conta seus pontos de vista no desenvolvimento do conhecimento, diretamente relacionado à prática de ensino. Tal perspectiva reconhece o papel fundamental dos docentes no processo de produção de conhecimento e que a atividade colaborativa é muito importante para os participantes da pesquisa.

Segundo Ponte (1996), na investigação colaborativa, o pesquisador terá acesso facilitado à prática orientada para a ação e à reflexão do próprio professor sobre essa mesma prática. Assim sendo, ele diz que, o resultado da investigação deverá levar à reflexão sobre os pontos de vista dos professores e do investigador, respondendo à problemática da pesquisa, através da produção de conhecimento coletivo que tem origem nas análises compartilhadas sobre a atividade docente.

Buscando construir uma visão de trabalho colaborativo voltado para o desenvolvimento profissional, encontram-se vários estudos onde a ideia de colaboração na formação e no desenvolvimento profissional é um elemento importante.

Fiorentini (2004, p. 60) faz considerações sobre grupo de trabalho colaborativo. Para esse pesquisador, em um grupo de trabalho colaborativo todos “negociam metas e objetivos comuns”, sendo que todos se responsabilizam em alcançá-los. Percebe-se a contribuição do coletivo na reflexão da própria prática e na produção conjunta.

3.4. Grupo de Estudos – reflexão para mudança

Ao abordar grupos de estudo na formação continuada de professores de Matemática e ao analisar o trabalho colaborativo na formação de professores, Miskulin et al. (2005) pontuam que há uma dimensão formativa do sujeito que participa de práticas colaborativas. Nesse sentido, eles dizem que, a colaboração entre professores requer atenção especial e a criação de uma sinergia no grupo de modo que possa haver, ao mesmo tempo, produção de conhecimentos novos que promovam melhoria da prática, aprendizagem compartilhada e também desenvolvimento pessoal e profissional dos participantes.

Fiorentini (2004) diz que, a opção de pertencer a um grupo, é influenciada pela identificação da pessoa com os integrantes desse grupo, e pela possibilidade de compartilhar problemas, experiências e objetivos comuns. Nesse contexto, esse autor diz, o apoio mútuo entre seus membros é um fator fundamental de sobrevivência de um ambiente colaborativo. Ao relatar sua experiência em um grupo colaborativo de professores de Matemática, ele observou que o respeito permeia o apoio mútuo:

O grupo, nesses casos, tem, de um lado, manifestado profundo respeito aos saberes conceituais e experiências que cada professor traz para os encontros, bem como em relação às suas dificuldades e possíveis falhas, e, de outro lado, apoio efetivo em tentar encontrar, colaborativamente, soluções para os problemas. Isso tem contribuído para aumentar a confiança, a auto-estima e o respeito mútuo dos professores. (FIORENTINI, 2004, p.54)

Para Nacarato (2005), a confiança é um ingrediente básico para a constituição de um grupo em que a criação de relações de trabalho em colaboração seja significativa, e essa confiança é pautada no diálogo, na lealdade e na reciprocidade nos momentos de tomada de decisão. Essa atitude não impede que, se necessário, o formador aja com polidez e delicadeza, de forma a não deixar de dizer coisas importantes por não serem agradáveis de se ouvir (FERREIRA; MIORIM, 2003).

De acordo com Fiorentini (2004), todos os membros do grupo assumem um mínimo de ação protagonista, não se limitando a ser meros fornecedores de informações e materiais, mas sendo atores que produzem conhecimento, que aprendem e também ensinam.

Nessa direção, Larrín e Hernández (2003, p.45) afirmam que o objetivo maior de um trabalho colaborativo “é criar uma sinergia que permita não apenas a aprendizagem, mas também a geração de um conhecimento novo, na medida em que é nutrida de vozes e de posições diferenciadas que contribuem para a melhoria da prática”.

Bickel e Hartrup (1995) afirmam que, em um grupo de trabalho colaborativo, formado por pesquisadores e professores, torna-se necessário repensar os papéis e as posições

hierárquicas normalmente desempenhadas. Nesse sentido, os pesquisadores nem sempre serão a liderança mais interessante e adequada para o grupo, muito menos a única fonte de conhecimento confiável e válido, do mesmo modo, os pesquisadores não serão apenas os executores de propostas ou simples receptores bem intencionados. Na verdade, as posições e os papéis devem ser definidos e redefinidos em função do momento vivido pelo grupo, das características pessoais de seus participantes, bem como de suas necessidades.

Ferreira (2003a) chama a atenção para a possibilidade de confronto cultural entre academia e escola. A esse respeito, acredita-se que tudo depende das pessoas envolvidas e da visão que possuem quanto ao trabalho colaborativo a ser desenvolvido e, também, da forma como o grupo será criado. Da mesma maneira, a questão da liderança e da definição de papéis também estará vinculada à constituição inicial do grupo.

Murphy e Lick (1998), dizem que organizar professores em pequenos grupos, para promover intercâmbio e ação não é uma ideia nova. Tais grupos de estudo têm existido para indivíduos que, por exemplo, fazem cursos juntos; leem, discutem e refletem sobre os conteúdos de uma publicação; exploram novas descobertas de pesquisa; e introduzem uma nova técnica educacional.

Dizem eles, nesse mesmo artigo, que o conceito de grupo de estudo é uma abordagem importante para o desenvolvimento profissional. Uma definição formal, para eles, de grupo de estudo em educação poderia ser a seguinte *“Um grupo de estudo de professores é um pequeno número de indivíduos que se juntam para aumentar suas capacidades através de nova aprendizagem para o benefício de estudantes”*.

Ainda dizem eles que

O processo do grupo de estudo cresce em complexidade enquanto se examina o que o grupo faz e como ele funciona de modo que os membros realmente implementarão novas práticas, mudança de comportamento, e demonstram novas habilidades, conhecimento e atividades no trabalho (MURPHY & LICK, 1998, p. 4).

Murphy e Lick (1998) destacam que a abordagem de grupo de estudos nas escolas, em se tratando do desenvolvimento profissional dos envolvidos, inclui vários aspectos, como, por exemplo, suporte mútuo; planejar e aprender juntos; contribuir para o conhecimento e a prática; imergir em um trabalho fundamentado em ideias, materiais e colegas; Testar ideias, compartilhando e refletindo juntos; construir conhecimento sobre o conteúdo; engajamento em questões genuínas, entre outros.

Conforme afirmam Murphy e Lick (1998), mudar não significa que o quê se está fazendo é ruim ou é de uma qualidade pobre. Como bem dizem esses autores, em outro

momento, as novas práticas e novos materiais não serão o remédio para os conteúdos ensinados. Não há uma fórmula, uma receita pronta para ensinar.

Murphy e Lick (1998) consideram que essa mudança pode ser confortável ou não entre os professores. Para esses autores, o ser humano é provido da necessidade de controlar a situação. Se ele tem o controle sobre a mudança ou a circunstância ele se sente confortável, ao passo que, se ele não tiver esse controle, ele se sentirá ameaçado e poderá resistir.

Serrazina (1999) esclarece que todo esse processo de mudança pode se dar a partir de uma prática reflexiva. Entendemos que o processo de reflexão, aqui mencionado, envolve uma parada para pensar na própria prática pedagógica, no ensino e aprendizagem da Matemática e, principalmente, na própria visão da Matemática.

Para Serrazina (1999, p.8):

[...] um professor, que não reflete sobre o ensino, atua de acordo com a rotina, aceitando a realidade da escola e os seus esforços vão no sentido de encontrar as soluções que outros definiram por ele. O professor reflexivo é, então, o que busca o equilíbrio entre a ação e o pensamento e uma nova prática implica sempre uma reflexão sobre a sua experiência, as suas crenças, imagens e valores.

Essa autora esclarece que o ensino reflexivo requer permanente auto-análise por parte do professor. Assim, quando inserido em uma equipe de trabalho, o professor pode analisar a situação real, perceber os alunos com quem trabalha e avaliar o que os alunos podem aprender em Matemática. Esse processo, segundo ela, o leva à ação. De fato. Para que isso ocorra, um caminho encontrado está nas discussões coletivas sobre sua prática de sala de aula e as práticas do contexto da sua equipe.

Para Ponte (1992, p.225), A dinâmica de grupo assume um papel muito importante porque proporciona aos professores, através da discussão, um sentido de comunidade que lhes dá força contra as resistências de todos os tipos, estimula a expressão individual e o confronto de perspectivas, argumentos e modelos concretos.

Pesquisas da SEF/MEC (1999, p.115) consideram que

O grupo de estudo propicia a construção de um percurso próprio de desenvolvimento intelectual, compartilhado com os pares. Podem ser organizados a partir das demandas identificadas ou de propostas dos formadores, mas sua trajetória deve ser sempre pautada nas necessidades dos participantes do grupo.

Já, Ikegami (2003, p.58) diz que, a participação num programa de formação em serviço propicia atitudes de reflexão individual e também uma dinâmica de grupo consistente, pode propiciar ao professor uma análise mais sistemática de suas práticas e, em consequência,

de suas concepções. Uma vez que o professor veja sua prática como problemática, pode se dispor a mudá-la e essa mudança poderá influenciar suas concepções.

Ferreira (2003a) assim como outros pesquisadores acreditam que a reflexão tem poder de criar condições favoráveis para o desenvolvimento profissional. Desse modo, consideramos que a reflexão constitui um elemento indispensável no processo de ensino e aprendizagem.

Ainda diz que a ideia de mudança, associada ao desenvolvimento profissional, tem sido abordada de diversas maneiras. Enquanto alguns atestam que essa mudança é alcançada quando alguém de fora traz ideias que alteram o ensino, outros, por sua vez, acreditam que essas ideias devam ser construídas por todos os envolvidos no processo de educação.

Assim, Ferreira (2003a, p. 40) considera que

O desenvolvimento profissional e a mudança por vezes envolvem construir e/ou descobrir conhecimentos, estratégias, atitudes distintas das até então conhecidas e incorporá-las à sua prática pedagógica.

A mudança de papéis, ou seja, os professores individualmente são levados a se identificar como aluno. Tal mudança de papéis, de professor para aprendiz, parece ser um ponto crucial para alguns professores.

Já para Gimenes (2006), essa mudança não é algo que ocorre rapidamente, exige um tempo para que ela ocorra. Um dos aspectos fundamentais nesse processo é aquele em que o professor passa a considerar outros pontos de vista além do seu próprio.

Ferreira (2003a, p. 98) tem como objetivo entender quais as contribuições que um grupo de estudos traz para o desenvolvimento profissional de professores de Matemática. Essa pesquisadora organizou um grupo em que os professores preocuparam-se em estudar conteúdos matemáticos e refletir sobre a própria prática. De acordo com ela, “o propósito do grupo não é alcançar um determinado resultado, mas é o próprio processo de construir e avaliar práticas e materiais que atendam às necessidades dos alunos”.

Para Arbaugh (2003a), um modo para professores colaborarem regularmente com seus pares é o de participar de um grupo de estudo. Cramer, Hurst e Wilson definem um grupo de estudo como “um grupo colaborativo organizado e mantido por professores para ajudá-los a fortalecer seu desenvolvimento profissional em áreas de interesse comum” (1996, p. 7). Dizem, também que o conceito de usar um grupo de estudo para promover o crescimento do professor emergiu durante a última década como modo viável de encorajar colaboração e colegialidade entre professores.

Disse, em outra ocasião, Arbaugh (2003b, p.141) que grupo de estudo é “um grupo de educadores que se reúnem regularmente para apoiar um ao outro quando trabalham

colaborativamente para desenvolver-se profissionalmente e mudar sua prática”. Desse modo, com a certeza de que todos os participantes estão envolvidos de modo responsável e comprometidos, pode-se considerar um grupo de estudo como um grupo de trabalho colaborativo.

Para Gimenes (2006) apesar de cada grupo de estudos ter um foco de organização, eles são, em grande parte, organizados a partir de um problema ou de uma necessidade comum, e que, em geral, tem a ver com as necessidades que os alunos encontram em aprender determinados conteúdos. Ela diz ainda que, a partir de uma meta coletiva, em que os indivíduos estejam engajados, é possível que a dinâmica do grupo de estudos permita a motivação entre os envolvidos.

Essa autora acredita que outro fator a ser propiciado pelo grupo de estudo é a atitude de pensar sobre aquilo que vem sendo feito na prática pedagógica. O professor tem oportunidade para refletir e discutir com seus pares sobre o contexto no qual está inserido, ou seja, os problemas vivenciados, as dificuldades de seus alunos, entre outros assuntos que são notórios no ambiente escolar. Ela considera que refletir permite ao professor rever aquilo que vem sendo feito na sua prática em sala de aula e, dessa forma, criar condições favoráveis para mudanças.

Gimenes (2006), em seu trabalho, teve a preocupação de evidenciar as possíveis contribuições de um grupo de estudo para professoras do Ensino Fundamental. Para isso, ela propôs às professoras que escolhessem um conteúdo matemático que quisessem estudar. Nesse trabalho, a pesquisadora destaca a preocupação do grupo em relação à produção de saberes relativos à prática docente.

Segundo Gimenes e Penteado (2008, p. 78), “a organização de grupos de estudo é uma ideia simples e poderosa que pode ser entendida como uma alternativa para apoiar o processo de desenvolvimento profissional e mudanças dos profissionais envolvidos”.

Para essas autoras, um grupo de estudo em Educação Matemática tem por objetivo proporcionar uma ocasião para os professores trabalharem juntos no seu próprio entendimento da Matemática e em questões relacionadas ao seu ensino e aprendizagem. Nele, o professor pode contrastar suas ideias com as de seus colegas e, dessa forma, clarear e ampliar seus conhecimentos.

Segundo Lima (2009), a organização de grupos de estudos, como propostos por Murphy e Lick (1998), Ferreira (2003a), Fiorentini (2004) e Gimenes (2006) pode ser uma resposta para que professores reflitam e elaborem alternativas pedagógicas para suas aulas.

Ele diz ainda que a formação de grupo de estudo tem sido fortemente recomendada pela literatura e que as pesquisas apontam que o envolvimento nesse tipo de trabalho pode promover, por meio da reflexão da própria prática, o desenvolvimento profissional de seus participantes.

Para Lima (2009), a comunicação no grupo de estudo pode contribuir para o crescimento pessoal dos professores e conseqüentemente “induzir” a uma reflexão sobre a sua importância na sala de aula. Ele diz ainda que, discutir coletivamente possibilidades para o ensino e a aprendizagem da Matemática produz experiências que podem “gerar” frutos como a utilização desse método nas salas de aula.

Esse autor acrescenta que o professor, ao refletir sobre a prática educativa que desenvolve, tem a possibilidade de expor ao grupo suas frustrações, expectativas, dificuldades, alegrias e experiências. Nesse sentido, o apoio do grupo pode ser significativo para contribuir com a auto-estima do professor. De acordo com Perez (2004, p. 256), “é fundamental que o professor de Matemática acredite no seu potencial, acredite que sua prática é muito importante e que possui momentos riquíssimos, os quais merecem uma discussão/reflexão coletiva.”

O grupo de estudo terá características de um grupo colaborativo uma vez que

- a participação será voluntária a todos os envolvidos que desejam crescer profissionalmente e que buscam autonomia profissional;
- as tarefas e as atividades dos encontros serão planejadas e organizadas de modo a garantir que o tempo de reunião do grupo seja o mais produtivo possível;
- os participantes compartilham significados acerca do que estão fazendo e aprendendo e o que isso significa para suas vidas e prática profissional;
- os participantes tenham oportunidade de produzir e sistematizar conhecimentos através de estudos investigativos sobre a prática de cada um, resultando, desse processo, a produção de textos escritos, os quais possam ser publicados e socializados aos demais professores (FIORENTINI, 2004, p. 59-60).

O grupo de estudo abre espaço para a reflexão, por meio do diálogo, tanto da prática quanto da teoria. Tal reflexão pode ajudar os docentes a entenderem, como afirmam Alrø e Skovsmose (2006, p. 12), que

aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E, por conseguinte, a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes. Em outras palavras, o contexto em que se dá a comunicação afeta a aprendizagem dos envolvidos no processo.

Em diferentes países do mundo, muitas experiências envolvendo grupos de estudo entre professores de Matemática e pesquisadores têm sido desenvolvidas. A seguir, destacamos três delas.

A primeira experiência trata de um projeto interessante, desenvolvido, nos Estados Unidos, por Philipp, Sowder, Flores e Schappelle (1994). No primeiro ano desse projeto, financiado pela San Diego State University – Ca, juntamente com o National Center for Research in Mathematical Sciences Education, (Centro Nacional para Pesquisa em Ciências da Educação Matemática), participaram professores e pesquisadores que investigavam o significado de “conhecer Matemática e de como esse conhecimento influencia o ensino”. Segundo Sowder (1995), os quatro professores que trabalharam com os pesquisadores da universidade foram cuidadosamente selecionados. Todos eles tinham se envolvido anteriormente com projetos de pesquisa. Além disso, todos tiveram sua prática de ensino observada e eram conhecidos e altamente respeitados por pelo menos um dos pesquisadores.

Nessa investigação foram realizados entrevistas, teste sobre conhecimentos de conteúdo matemático, discussões durante uma série de seminários organizados para tratar tópicos matemáticos considerados difíceis por alunos da escola básica, tais como: mover-se do raciocínio aditivo para o multiplicativo; a variedade de subconstructos do número racional; taxa e médias ponderadas e; o papel dos problemas, com enunciados em gerar compreensão conceitual de operação e, com as observações feitas pelos pesquisadores em salas de aula, coletaram dados, que foram utilizados, posteriormente, para definir as características dos professores segundo três áreas:

- A preparação matemática e o conhecimento matemático deles;
- As concepções sobre Matemática, aprendizagem, ensino, os papéis de professores e alunos, e avaliação de aprendizagem;
- As práticas de ensino.

Dentro de cada uma dessas áreas, muitas coisas comuns foram encontradas entre os professores envolvidos no projeto, que revelaram aos pesquisadores que uma mudança real no ensino só é possível quando os professores têm fundamentos matemáticos conjugados com o desejo, e o entusiasmo para empreender a mudança.

Esse estudo nos chamou a atenção pelos seguintes motivos: a organização dos encontros, o envolvimento dos pesquisadores e as atividades propostas. De acordo com Philipp, Sowder, Flores e Schappelle (1994) foram organizados quatro encontros na forma de

seminários, cada um deles com três horas de duração, visando aprofundar os conhecimentos matemáticos dos participantes, por meio de atividades orientadas pelos pesquisadores.

Com isso, o grupo de estudo formado por oito participantes, quatro professores e quatro pesquisadores, constituiu-se em um espaço estruturado, com metas bem definidas e objetivos claros de estudo. Desse modo, as atividades, desenvolvidas pelo grupo, envolviam estudo, leitura, e discussão. Os participantes buscavam uma meta específica e empenhavam-se em alcançá-la com persistência e esforço. Além disso, os pesquisadores tinham participação ativa nas atividades do grupo. Segundo os autores, o grupo tinha uma preocupação séria e que havia respeito, confiança e responsabilidade permeando a relação entre professores e pesquisadores.

A segunda experiência trata de um estudo, também realizado nos Estados Unidos, sobre a colaboração entre uma pesquisadora e professores de geometria de uma escola secundária, descrito por Arbaugh (2003a) num artigo intitulado “Grupos de Estudo: Crescimento Profissional através da Colaboração”. Nesse artigo, Fran Arbaugh, educadora matemática, ligada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade de Indiana, em Bloomington (USA), fala da sua satisfação em ter sido convidada pelo chefe do Departamento de Matemática da “Columbus North High School” (CNHS), localizada em Columbus, Indiana, para auxiliar na implementação de uma experiência de desenvolvimento profissional que fornecesse um ambiente colaborativo centrado no professor, para apoiar os professores de geometria no desenvolvimento e na implementação de um novo currículo de geometria que focalizasse o nível de raciocínio dos alunos.

Como Arbaugh estava interessada no uso de grupos de estudo para desenvolvimento profissional e havia necessidade de desenvolvimento profissional na CNHS, decidiu-se iniciar um grupo de estudo que focalizasse o ensino de geometria. Desse modo, todos os professores de geometria da CNHS foram convidados para participar do grupo de estudo. Oito dos nove professores de geometria da CNHS e um professor que ficou sabendo do grupo de estudo, mesmo lecionando em outra escola secundária em Columbus, expressaram interesse em participar do grupo.

Houve dez encontros do grupo de estudo, aproximadamente um a cada duas semanas. É importante mencionar o apoio recebido pelos professores, pois enquanto participavam dos encontros do grupo, substitutos foram providenciados para ministrar suas aulas. Além disso, os professores recebiam remuneração pelo tempo que excedia suas horas de trabalho estabelecidas em contrato.

Arbaugh (2003a) desempenhou um papel ativo em todos os encontros desse grupo de estudo. Ela participou de todas as discussões, formulando perguntas e desafiando os professores a refletir oralmente sobre conhecimentos e sua prática de ensino. Também localizou artigos relevantes para serem lidos pelos participantes do grupo. Depois que os professores diziam o que queriam fazer no encontro seguinte, Arbaugh e o chefe do Departamento de Matemática da CNHS, trabalhando juntos, estabeleciam a pauta. A pesquisa de Arbaugh sobre a experiência de um grupo de estudo foi subsidiada por reflexões escritas pelos professores e entrevistas realizadas com eles.

A seguir, apresentamos uma amostra das atividades desenvolvidas no grupo de estudo de Arbaugh.

- Descobrir e compartilhar tarefas geométricas que requeriam um alto nível de esforço cognitivo para resolvê-las;
- Discutir a implementação dessas tarefas (como os professores planejaram para implementar as tarefas e refletiram sobre o que aconteceu durante a implementação);
- Aprender sobre as tecnologias que melhorariam a compreensão de geometria dos estudantes;
- Ler artigos sobre questões pedagógicas, como questionar e criar comunidades de prática.

Quanto aos aspectos mais úteis da participação no grupo de estudo, evidenciamos os dizeres de um de seus participantes: *“A melhor coisa sobre o grupo foi ouvir como outros implementaram uma atividade e uma aula. Roubar ideias e atividades deles deu-me a chance de usar ou tentar melhorar essas coisas. Ouvi-os dizer o que foi bem e o que não foi ajudou minha aula a ser melhor”*. De forma similar, vários professores também descreveram os benefícios de ouvir outros professores de geometria falarem sobre implementar atividades. Nesse sentido, Arbaugh (2003a) afirma que os professores raramente têm a oportunidade para falar sobre o ensino, ouvir outros falarem sobre ensino, ou observar outros professores a ensinar.

Contribuindo de forma significativa para a nossa pesquisa os professores participantes do grupo de estudo de Arbaugh sugeriram algumas dicas importantes para aqueles professores que desejam iniciar um grupo de estudo. Eles fizeram sugestões em relação ao tempo liberado, necessidades externas ao tempo de encontro do grupo de estudo, frequência e duração dos encontros do grupo e do número de membros dele.

Quanto ao tempo liberado para os encontros do grupo de estudo, o grupo deveria procurar financiamento externo ou cooperação do distrito escolar para obter tempo liberado para que os professores pudessem realizar os encontros.

No que diz respeito às necessidades externas ao tempo do grupo de estudo, algum tempo durante os encontros do grupo deveria ser usado para escrita e leitura reflexiva.

Falando da frequência dos encontros do grupo de estudo, o grupo deveria encontrar-se duas vezes por mês. Os professores indicaram que os encontros deveriam ocorrer de duas em duas semanas, pois assim os tópicos tratados seriam facilmente lembrados.

A duração dos encontros do grupo de estudo também foi mencionada pelos professores. O tempo de encontro de duas horas e trinta minutos foi considerado bastante razoável para falar em profundidade sobre qualquer assunto.

No entender dos professores, o número total de participantes, incluindo o pesquisador, deveria ser limitado. O grupo necessitaria ter no mínimo quatro participantes para trazer muitas ideias e perspectivas para as discussões. Já um grupo formado por mais do que nove ou dez membros seria muito grande e nem todos conseguiriam participar.

Segundo Arbaugh (2003a), os professores muitas vezes reiteraram que trabalhar com seus pares os ajudou a refletir sobre seu próprio ensino e a construir novo conhecimento pedagógico. Nesse sentido, a participação deles no grupo de estudo foi muito significativa e altamente relevante.

A terceira experiência envolvendo grupos de estudo entre professores e pesquisadores, trata de uma experiência brasileira, em que um grupo de trabalho colaborativo, formado por duas pesquisadoras e quatro professoras de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, que lecionavam em escolas públicas do município de Campinas/SP, foi realizada por Ferreira (2003a). Nesse grupo de estudo, as participantes reuniram-se voluntariamente movidas pelo desejo de aprender e transformar sua prática.

Segundo Ferreira (2006), nessa experiência brasileira, cada qual com sua história, suas experiências profissionais e sua visão de mundo, contribuiu para o crescimento coletivo à sua maneira. Todas se sentiram membros de um grupo e compartilharam conhecimento, ideias e dificuldades.

Para Ferreira (2006, p. 157), o grupo não começou colaborativo, pois “as professoras da escola esperavam que as pesquisadoras da universidade preparassem os encontros e trouxessem as contribuições”. Porém, com o decorrer do tempo, todas passaram a participar intensamente nas decisões e responsabilidades do trabalho do grupo, “preparando textos e

materiais, realizando investigações em sala de aula, enfim, participando ativamente do movimento do grupo”. Desse modo, “passou-se da cooperação para a colaboração por meio do respeito mútuo, do espaço compartilhado e da tomada de decisões coletivas”.

Foram realizados trinta encontros de aproximadamente três horas e trinta minutos cada um, aos sábados pela manhã. Temas como frações, funções e probabilidade foram estudados a fundo pelo grupo. De acordo com Ferreira (2006), leituras sobre o surgimento e a evolução histórica de cada conceito estudado, sobre as dificuldades enfrentadas por professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem do conceito, bem como alternativas propostas, para um trabalho mais significativo com o mesmo, foram analisadas com muito cuidado.

Ao final do último encontro, constatou-se que todas as professoras haviam ampliado seus conhecimentos a respeito dos conteúdos estudados no grupo, da didática deles e da forma de pensar de seus alunos. Todavia, conforme a experiência, o momento de vida e as características pessoais de cada uma, os saberes foram assimilados e relacionados de uma forma diferente. Na verdade, a experiência proporcionada pela participação no grupo teve um significado distinto para cada professora.

A seguir, destacamos as condições que colaboraram para o sucesso do grupo de estudo de Ferreira (2003a).

- O número de participantes do grupo não foi superior a seis;
- Foi estabelecida uma agenda regular de reuniões, com datas combinadas coletivamente e com antecedência;
- Uma das condições estabelecidas implicitamente foi a realização de tarefas;
- Os encontros seguiam uma meta delineada pelo grupo;
- Houve estímulo aos registros pessoais e coletivos, como também à reflexão individual e coletiva;
- Todos os membros do grupo tinham o mesmo direito de opinar e expressar-se e sempre eram ouvidos com muita atenção;
- O foco estava sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática;
- Foram realizadas avaliações periódicas.

Ferreira (2003a) evidencia a parceria professor-pesquisador, escola-universidade, que mostrou-se ser um aspecto construtivo, positivo, e imprimiu uma dinâmica particular aos trabalhos desenvolvidos no grupo. Também mencionou que fatores como tempo, compromisso, foco no conteúdo e sua didática, registro pessoal e coletivo, afeto, respeito e companheirismo, fizeram a diferença.

Segundo Ferreira (2006), o grupo tornou-se um espaço onde seus participantes sentiram-se ativos, agentes do próprio processo de desenvolvimento profissional, dedicando-se ao estudo, à troca e à construção de conhecimento e de alternativas para os problemas enfrentados. Muitas dificuldades foram enfrentadas, mas a vontade de crescer e o apoio coletivo permitiram que elas fossem superadas.

Acreditamos que a pesquisa colaborativa é um caminho importante para pensarmos em um trabalho com professores de Matemática. A nosso ver, o grupo de estudo é um contexto privilegiado, onde são criadas oportunidades para que o professor explore e questione seus próprios saberes e práticas, bem como aprenda a partir dos saberes e práticas de outros professores.

Capítulo 4

Resolução de Problemas

É comum ver-se que pesquisadores em Educação Matemática, em diversas partes do mundo, tenham dedicado e sigam dedicando muito tempo à pesquisa sobre a Resolução de Problemas visando ao ensino-aprendizagem da Matemática, pois Resolução de Problemas é essencial na construção do conhecimento do estudante e do desenvolvimento da Matemática. A fonte inicial e principal dos problemas é o fato de que, permanentemente o problema coloca desafios para o homem e ele responde, com sua inteligência, sua capacidade de abstração e intuição.

Sobre esse assunto, na literatura, as denominações Problem-Solving e Solving-Problems são encontradas em inglês. Quando se referem à teoria, usam Problem-Solving mas, na ação de resolver problemas, usam solving-problems. No Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas - GTERP, da UNESP, Rio Claro/SP, usa-se, em português, Resolução de Problemas, com **R** e **P** maiúsculos, quando se refere à teoria da Resolução de Problemas, e o termo resolução de problemas, com **r** e **p** minúsculos, quando se refere ao ato de resolver problemas.

O contexto desta pesquisa está inserido em um ambiente onde Resolução de Problemas é utilizada como metodologia no processo pedagógico de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática na formação continuada de professores.

Inicialmente, neste capítulo, será descrito um panorama sobre Tendências, Diretrizes e Perspectivas de Pesquisa em Resolução de Problemas. A seguir será realizada uma breve retrospectiva histórica sobre Resolução de Problemas no currículo da Matemática escolar, destacando-se a gênese da pesquisa em resolução de problemas. Também, será apresentada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, considerando algumas questões voltadas mais especificamente à implementação da resolução de problemas em sala de aula, que será tomada como um dos principais referenciais teóricos da presente pesquisa e, por fim, destacaremos o GTERP frente à Resolução de Problemas.

4.1. Tendências, Diretrizes e Perspectivas de Pesquisa em Resolução de Problemas

4.1.1. Tendências de Pesquisa em Resolução de Problemas

Segundo Allevato e Onuchic (2009), a Educação Matemática começou como um campo de estudos sistemáticos com Felix Klein, o Pai da Educação Matemática, no início do século XX, tornando-se, ao final dele, um vasto e intrincado empreendimento.

Felix Klein foi um dos mais importantes matemáticos do final do século XIX e um dos últimos, junto com Gauss, Riemann e Poincaré, a conseguir quebrar a barreira da especialização fornecendo os elementos fundamentais que impulsionariam a Matemática do século XIX e início do século XX. Escreveu, então, seu livro *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Avançado*. Klein acreditava que a unidade de todo conhecimento e o ideal de uma educação completa não poderia ser negligenciada por causa dos estudos especializados e que as universidades deveriam se preocupar com o ensino preparatório nas escolas, dando particular ênfase à formação dos professores. Ele foi, portanto, um matemático brilhante que também tinha sinceras e sérias preocupações com as questões relacionadas ao ensino. (ALLEVATO e ONUCHIC, 2009, p. 135)

Nessa época, pretendendo formar melhor os alunos na disciplina Matemática, no início do século XX o ensino foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos como tabuadas era considerado de grande importância. Depois de alguns anos, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender com compreensão, entendendo o que faziam. Essas duas formas de ensino não tiveram êxito quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade alguns alunos aprendiam, mas a maioria não.

Botta (2010), falando sobre tendências de pesquisa em Educação Matemática, escreveu que, em 1983, na UNICAMP³, Beatriz S. D'Ambrósio, em um trabalho apresentado numa série de Palestras e Debates, fez uma análise das fases pelas quais passou o ensino da Matemática, desde o início do século XX até as décadas de 1960 e 1970, ressaltando a influência de teorias psicológicas da aprendizagem na evolução do currículo matemático. Essa autora associa, a cada fase, uma teoria subjacente que vem justificar o currículo e a metodologia nela predominantes.

Botta (2010) ainda diz que, segundo D'Ambrósio, durante os primeiros dois terços do século XX, o ensino elementar de matemática passou por três fases principais, motivadas por uma mistura de fatores sociológicos, políticos, tecnológicos e psicológicos: Fase do Exercício e Prática; Fase da Aprendizagem Significativa; e Fase da Matemática Moderna.

³ UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas – SP.

Por sua vez, Botta (2010) acrescenta que, no artigo *Mudanças através dos anos: conexões entre teorias de aprendizagem psicológica e o currículo da matemática escolar*, Lambdin e Walcott, em 2007, fazem essa análise, descrevendo, além das três fases já mencionadas, outras três que se seguiram ao período da Matemática Moderna: De volta às Bases; Resolução de Problemas; e Padrões, Avaliação e Responsabilidade (STANDARDS 1989, 1991, 1995, 2000). A seguir, apresentamos o quadro elaborado por essas autoras a respeito dessas fases:

Quadro 1 – Relações entre as fases e as Teorias Psicológicas de Aprendizagem.

FASES	PRINCIPAIS TEORIAS E TEÓRICOS	FOCO	COMO ATINGIR
Exercício e prática (aprox.1920-1930)	Coneccionismo ou Associacionismo Thorndike	Facilidade com cálculo	Memorização rotineira de fatos e de algoritmos Quebrar todo o trabalho em séries de pequenos passos
Aritmética Significativa (aprox.1930-1950's)	Teoria Gestalt Brownell, Wertheimer, Van Engen, Fehr	Compreensão de ideias e habilidades matemáticas Aplicações da matemática a problemas do mundo real	Ênfase nas relações matemáticas Aprendizagem incidental Abordagem de atividade orientada
Matemática Moderna (aprox.1960-1970's)	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural Bruner, Piaget, Dienes	Compreender a estrutura da disciplina	Estudo das estruturas matemáticas Currículo em espiral Aprendizagem pela descoberta
De volta às bases (aprox. 1970's)	(Volta ao) coneccionismo	(Volta à) preocupação com o conhecimento e o desenvolvimento de habilidade	Fatos aprendidos por exercício e prática
Resolução de problemas (aprox. 1980's)	Construtivismo, psicologia cognitiva, teoria sociocultural Vygotsky	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático	Volta à aprendizagem pela descoberta Aprendizagem através de resolução de problemas
Padrões, avaliação e responsabilidade (aprox. 1990 até hoje)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural versus ênfase renovada sobre psicologia experimental NCLB ⁴	“Guerras matemáticas”: preocupação pela alfabetização matemática dos indivíduos versus preocupação com a administração de sistemas educacionais	NSF ⁵ – desenvolve currículos baseados em padrões orientados para os estudantes versus foco sobre preparação de testes para expectativas especificada pelo Estado

Fonte: Traduzido de Lambdin e Walcott (2007, p.5)

⁴ NCLB - No Child Left Behind Act - Nenhuma Criança Ficará Para Trás

⁵ NSF – National Science Foundation - Fundação Nacional de Pesquisa

Botta (2010) diz que, segundo as autoras, a análise histórica pode fornecer uma perspectiva sobre as necessidades e as questões que contribuem para mudanças na educação e que a perspectiva histórica nos ajuda a evitar uma visão afunilada das particularidades dos problemas educacionais que enfrentamos hoje. Escreve que elas observam que, num exame mais detalhado, muitas inovações educacionais não são mais do que reciclagens de práticas antigas e, então, um outro benefício da análise histórica é o de revelar que certas práticas contemporâneas têm suas raízes em mudanças educacionais de anos anteriores.

Segundo Lambdin e Walcott (2007), tais fases merecem atenção porque cada uma delas corresponde a um período em que a educação, em geral, estava caminhando através de mudanças radicais e fundamentais, e cada uma introduzia práticas novas e inovadoras para a Educação Matemática. A essas razões, acrescenta-se o fato de que algumas das fases apontadas também foram vivenciadas em outros lugares do mundo, e exerceram forte influência nos rumos que o trabalho com a matemática escolar tomou a partir de então.

Como o quadro mostra, na fase Aritmética Significativa o foco estava na compreensão de ideias e habilidades matemáticas, com aplicações da Matemática a problemas do mundo real. Para atingir esses objetivos pedia-se ênfase nas relações matemáticas, com uma aprendizagem incidental e com uma abordagem de atividade orientada.

Onuchic (2011) disse que, o volume especial número 100, comemorando os “100 anos da revista *Mathematics Teacher (MT)*”, do NCTM, publicado em 2007, selecionou artigos especiais desses 100 anos da revista, fazendo uma retrospectiva da história da Educação Matemática.

Em março de 1948 foi feita uma análise do clássico *How to Solve it*, de George Polya. Philip Jones, que foi presidente do NCTM, de (1960 – 1962), descreveu esse trabalho como a discussão mais concreta e mais sugestiva disponível para:

- O método de ensino heurístico;
- A técnica de resolver problemas;
- A técnica de ensinar resolução de problemas.

E observou que onze anos mais tarde, Polya se dirigia aos leitores da MT sobre esses mesmos tópicos.

Para a década de 1950 foi escolhido o texto de Polya que fora publicado na MT 52, em janeiro de 1959, com o título *Mathematics as a Subject for Learning Plausible Reasoning*.

O discurso dos anos 1950 e início dos 1960 preocupava-se com a reorganização do currículo ao longo das linhas da Matemática Moderna. As páginas da MT eram preenchidas

com descrições da Matemática Moderna, parcialmente para demonstrar quão sensíveis e necessárias eram as mudanças advogadas, e parcialmente para familiarizar os professores de sala de aula com esse novo tema. Oponentes, como Morris Kline, não apoiavam esse status quo e sentiam que a abordagem rigorosa e altamente abstrata dos modernistas estava mal orientada.

O artigo de Polya é suave, uma voz sempre ouvida claramente a despeito do debate da Matemática Moderna. Polya nos guia a raciocinar como um matemático, a adivinhar, a aceitar erros, a examinar o progresso, tudo na esperança de que se pudesse dar aos estudantes as mesmas oportunidades.

Polya começou esse artigo, em 1959, dizendo que a Matemática é altamente respeitada como o objeto criado para se aprender o raciocínio demonstrativo. Entretanto, nesse artigo, diz ele, “*desejo avançar uma tese menos usual: que a matemática é também um excelente modo para se aprender o raciocínio plausível e deveria ser explorado como tal nas escolas secundárias*”.

Analisando a quadro deixado por Lambdin e Walcott (2007), pudemos perceber que a chegada da fase Matemática Moderna impediu a fase Aritmética Significativa de levar avante o trabalho iniciado por Polya na década de 1940.

No prefácio de sua Primeira Tiragem, escrito na universidade de Stanford, no dia 1º de agosto de 1944, Polya prometeu escrever dois volumes, sob os títulos *Induction and Analogy in Mathematics* e *Patterns of Plausible Inference*, que são apresentados no prefácio à Sétima Tiragem. Esse prefácio foi escrito em Zurich, em 30 de agosto de 1954.

Em 1962, em um outro livro: *Mathematical Discovery – On understanding, learning, and teaching problem solving – volume I*, Polya escreveu que

resolver problemas é uma arte prática, como nadar, esqui, ou tocar piano: você pode aprendê-la somente por imitação e prática. Diz ele que esse livro não pode oferecer ao leitor uma chave mágica que abre todas as portas e resolve todos os problemas, mas ele lhe pode oferecer bons exemplos para imitação e muitas oportunidades para a prática: se você quer aprender a nadar deve ir para dentro da água, e se você quer tornar-se um resolvidor de problemas, tem que resolver problemas. (POLYA, 1962, p. vii)

O método de resolver problemas, que ele apresenta e explica nesse seu livro, foi desenvolvido como um modo de se ensinar matemática para os estudantes. Diz ele que toda vez que se enfrenta um problema é necessário que se pergunte:

- O que é que eu quero fazer?
- O que é que eu tenho para poder fazer isso?

No livro *Mathematical Discovery* - volume I, Polya apresenta a resolução de problemas de um ponto de vista heurístico. Ele encoraja os leitores a resolver problemas e a pensar sobre os meios e os métodos que se usam para resolvê-los.

Em 1965, ele lança o volume II do livro *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. Nele, Polya continua seu programa de análise dos métodos psicológicos e técnicos de resolução de problemas. Sua principal preocupação nesse volume é a de analisar os caminhos e os meios da descoberta. Disse ele que esse livro combina seu fim teórico – o estudo da heurística – com um concreto e urgente fim prático – melhorar o preparo de professores de matemática da escola secundária.

Nesse livro, falando sobre conhecimento, ele disse que o conhecimento sobre qualquer matéria consiste de informação e know-how. Se você tem uma experiência genuína de trabalho matemático em qualquer nível, elementar ou avançado, não haverá dúvidas em sua mente de que, em matemática, ter know-how é muito mais importante do que apenas possuir informação. Assim, na escola secundária, como em qualquer outro nível, deveríamos oferecer, junto com uma certa quantidade de informação, um certo grau de know-how ao estudante.

O que é know-how em matemática? Ele, Polya, pergunta e responde, dizendo que é a habilidade em resolver problemas – não apenas problemas rotineiros mas problemas que requerem algum grau de independência, julgamento, originalidade e criatividade.

De acordo com Onuchic (1999, p. 203), “Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigada de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos 1960”. Para Andrade (1998), a resolução de problemas foi tratada pela primeira vez como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, a partir do livro *A Arte de Resolver Problemas*⁶, de Polya, cuja primeira edição data de 1945.

Foi nesse período, do século XX, que se começou, então, a falar em resolver problemas. George Polya (1944), o Pai da Resolução de Problemas, surge como uma referência enfatizando a importância da descoberta e a de levar o aluno a pensar por meio da resolução de problemas. Ele ainda afirma que: “Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema”. Em 1949, escreveu que resolver problemas é realização específica da inteligência e que, se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta.

⁶ O título original, em inglês, é *How to Solve it*.

Allevato e Onuchic (2009) relatam que, nas décadas de 1960 e 1970, o ensino de Matemática, no Brasil e em outros países do mundo, foi influenciado por um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. Essa reforma que, como as outras, não contou com a participação de professores, apresentava uma Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a Teoria dos Conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. O ensino era trabalhado com um excesso de formalização, distanciando-se das questões práticas.

Concomitante a isso, no início da década de 1970, começaram a ser feitas pesquisas sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares. A importância dada à resolução de problemas é, portanto, recente e somente nessa década é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. Onuchic (1999, p. 204) afirma que, no fim dos anos 1970, a resolução de problemas emerge, ganhando espaço no mundo inteiro. Nessa época, foi iniciado o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. Em 1976, no III Congresso Internacional de Educação Matemática, em Karlsruhe, Alemanha, a Resolução de Problemas se constituiu num dos temas de trabalho para o congresso.

Em 1980 é editada, nos Estados Unidos, uma publicação do NCTM, intitulada “*An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*” (*Uma Agenda para a Ação: Recomendações para a Matemática Escolar dos anos 1980*), que conclamava todos os interessados, pessoas e grupos, para, conjuntamente, num esforço cooperativo massivo, buscar uma melhor educação matemática para todos. A primeira dessas recomendações dizia que “*resolver problemas deve ser o foco da Matemática escolar para os anos 1980*”. Nesse sentido, o desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas deveria direcionar os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década.

As ações recomendadas pelo documento *An Agenda for Action* (NCTM, 1980, p. 2-5) evidenciavam que:

- o currículo matemático deveria ser organizado ao redor de resolução de problemas;
- a definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática deveriam ser desenvolvidas e expandidas de modo a incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que encerrassem o pleno potencial de aplicações matemáticas;

- os professores de matemática deveriam criar ambientes de sala de aula onde a resolução de problemas pudesse prosperar;
- materiais curriculares adequados ao ensino de resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade;
- os programas de matemática dos anos 1980 deveriam envolver os estudantes com resolução de problemas, apresentando aplicações em todos os níveis;
- pesquisadores e agências de fomento à pesquisa deveriam priorizar, nos anos 1980, investigações em resolução de problemas.

Segundo Onuchic (1999, p. 206), durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material passou a ajudar os professores a fazer da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. Porém, não deu o tipo de coerência e a direção necessária a um bom resultado porque havia pouca concordância na forma pela qual este objetivo era encarado. Essa falta de aceitação ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”.

Nessa importante década de 1980, também as dificuldades, encontradas por professores para “ensinar” e as dos alunos para “aprender”, passaram a ser consideradas como objetos de estudo e de reconceitualização por educadores e pesquisadores na Educação Matemática. Entretanto, havia linhas de pesquisa diferentes defendidas por eles.

Percebendo a falta de concordância entre as diferentes concepções sobre a resolução de problemas, no contexto da matemática escolar, Schroeder e Lester (1989, p. 31-34) apresentam três caminhos diferentes de abordar Resolução de Problemas, que ajudam a refletir sobre essas diferenças: ensinar sobre Resolução de Problemas; ensinar para resolver problemas de Matemática; e, em 1989, ensinar Matemática através da resolução de problemas. Eles ressaltam que embora, na teoria, esses três caminhos de trabalhar Resolução de Problemas possam ser separados, na prática eles se superpõem e podem acontecer em várias combinações e sequências.

Teorizar sobre Resolução de Problemas matemáticos significa trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, isto é, teorizar sobre Resolução de Problemas. O desencanto de professores e educadores matemáticos, com o fracasso da Matemática Moderna, levou-os a

buscar outras alternativas para o ensino de Matemática. Assim, passaram a trabalhar com heurísticas e o modelo de resolução de problemas de Polya de 1945 ou alguma sua variação.

Krulik e Reys, em 1980, organizaram e lançaram o livro do ano do NCTM, inteiramente dedicado a temas relacionados à Resolução de Problemas, intitulado *Problem Solving in School Mathematics*, e traduzido para o português por Hygino H. Domingues e Olga Corbo, em 1998, com o nome de “A Resolução de Problemas na matemática escolar”, apresentando 22 diferentes artigos. Percebe-se, em quase todos os artigos desse livro, a forte ênfase que se dava às heurísticas como forma de guiar os alunos na resolução de problemas.

Ao ensinar Matemática para resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender Matemática é ser capaz de usá-la.

Segundo Schroeder e Lester (1989), nesse caminho, aos estudantes são dados muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas sobre o que eles estão estudando e muitas oportunidades para aplicar aquela Matemática estudada na resolução de problemas. O professor, que ensina para resolver problemas, está muito preocupado com a habilidade dos estudantes em saber transferir o que eles aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte ligação desta abordagem pode afirmar que a única razão para aprender Matemática é ser capaz de usar o conhecimento ganho para resolver problemas. Um grande risco da adoção desse aspecto é que ele pode levar a ver a resolução de problemas apenas como uma atividade que os alunos só podem realizar depois da introdução de um novo conceito ou depois de praticar habilidades de cálculo.

Como diz Onuchic (1999), ao ensinar Matemática através da resolução de problemas, os problemas são avaliados não somente como um propósito para aprender Matemática mas, também, como um meio importante de fazer isso. O ensino de um tópico matemático começa com uma situação problema que incorpora aspectos chave do tópico, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis.

Por isso o ensino de Matemática através da resolução de problemas é importante. Ele nos oferece uma experiência em profundidade, uma oportunidade de conhecer e delinear as dificuldades, de conhecer as capacidades e limitações do conhecimento matemático que os estudantes possuem. O ensino através da resolução de problemas coloca ênfase nos processos de pensamento, nos processos de aprendizagem e trabalha os conteúdos matemáticos, cujo valor não se deve deixar de lado.

4.1.2. Um panorama da área de pesquisa em Resolução de Problemas e sua Pedagogia

O interesse na questão de como a História da Matemática pôde ajudar os professores e alunos de Matemática, desde pelo menos o tempo de David Eugene Smith e Florian Cajori, isto é, desde 1890, levou a um movimento internacional para tratar desse assunto.

No final do século XIX, com a necessidade de formar professores qualificados para atender à demanda dos sistemas escolares, as universidades começaram a ampliar seus programas de formação de professores. A Educação Matemática como um campo de estudo, então, tem sua origem. A identificação da Educação Matemática, como uma área de extrema importância na educação, ocorre na passagem do século XIX para o século XX. A consolidação da Educação Matemática como uma subárea da Matemática e da Educação, de natureza interdisciplinar, se dá com a fundação, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma, em 1908, da união das comissões IMUK/ICMI, sob a liderança de Felix Klein.

No início do século XX, em 1908 surgiram, de forma isolada, comissões internacionais para o ensino de matemática, em diferentes países: na França, a *Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique* (CIEM); na Alemanha, pela *Internationalen Mathematische Unterrichts Kommission* (IMUK); e, nos Estados Unidos, a *Internacional Comission on Mathematical Instruction* (ICMI). Após o surgimento dessas comissões, ocorreram, de forma organizada, os congressos na área de ensino de Matemática, que também serviram para um grande crescimento da pesquisa e da discussão sobre ensino.

O grande desenvolvimento da Educação Matemática, entretanto, veio após a Segunda Guerra Mundial (1939-1945) quando ocorreu uma efervescência da educação em todo cenário mundial. Foi nessa época, nos anos 50 e 60, que a pesquisa em Educação Matemática dá um salto significativo. Surgiram, então, vários grupos de pesquisa envolvendo matemáticos, educadores e psicólogos com o objetivo de reformular o currículo escolar. O mais influente deles nos Estados Unidos foi o *SMSG - School Mathematics Study Group* - que se fez notável pela publicação de livros didáticos e revistas de disseminação do ideal modernista para outros países.

O principal evento na vida da comunidade internacional de Educação Matemática é constituído pelo quadrienal ICME – Congresso Internacional de Educação Matemática. Os congressos ICME são organizados pelo ICMI – Comissão Internacional de Instrução Matemática.

Em 1968, o ICME-1 foi realizado em Lyons, França.

O ICME-2 ocorreu em 1972, em Exeter, Inglaterra. Nele foi organizado um grupo de trabalho sobre “História e Pedagogia da Matemática (HPM)”.

O trabalho desse grupo continuou até o ICME-3, ocorrido em Karlsruhe, na República Federal da Alemanha, em 1976. Nele foram desenvolvidas três seções adotando o título de “Historia da Matemática como uma ferramenta crítica para o projeto curricular”. Também, nesse ICME-3, outro grupo de estudo foi estabelecido, o “Grupo Internacional da Psicologia da Educação Matemática (PME)”. Nas atas do ICME-3, nota-se que um Grupo Temático intitulado “Resolução de Problemas, Estratégias de Ensino e Desenvolvimento Conceitual” dá algum destaque para o tema “Resolução de problemas”. Os objetivos desse projeto de Resolução de Problemas reafirmavam a importância de melhorar a competência do aluno na resolução de problemas dentro do ensino e aprendizagem de Matemática e, a meta fundamental desse projeto era a de produzir informações práticas e teorias sobre as relações entre aprendizagem e ensino de Matemática e resolução de problemas.

Nos anos 80, foram construídas relações entre o conhecimento matemático e o contexto sócio-cultural que envolveram educadores, educadores matemáticos, psicólogos, sociólogos e antropólogos com estudos e pesquisas sobre pensamentos não-matemáticos.

Segundo Lester (1994), no programa provisório do ICME-4, realizado em Berkeley, Califórnia (USA), em 1980, constava uma única sessão sobre resolução de problemas que deveria realizar-se dentro do tema “aspectos não usuais do currículo”.

Polya, em 1980, foi escolhido para presidente honorário desse ICME-4, mas por questões de saúde não pôde comparecer. O tema de Polya seria “A Matemática melhora a Mente”.

A conferência plenária do ICME-4 foi oferecida ao Congresso pelo ilustre educador matemático holandês Hans Freudenthal, afirmando que

A História da Matemática tem sido um processo de aprendizagem de esquematização progressiva. Os jovens não necessitam repetir a história da humanidade, mas eles não deveriam esperar tanto para começar no ponto em que a geração anterior parou. Em certo sentido os jovens deveriam repetir a história embora não aquela que de fato aconteceu, mas aquela que aconteceria se os nossos antepassados tivessem o conhecimento que nós temos a sorte de conhecer. (Anais do ICME-4, p.3)

Quatro anos depois, 1984, no ICME-5, realizado em Adelaide, na Austrália, o congresso foi um evento particularmente memorável, pois foi nele que Ubiratan D’Ambrosio resumiu seus pensamentos sobre a necessidade de desenvolver três histórias da matemática: história como ensinada no saber; história como desenvolvida através da criação da

matemática; e história daquela matemática que é usada na rua e no lugar do trabalho. Ubiratan D'Ambrosio, como um orador pleno, introduziu nesse ICME-5 a ideia de Etnomatemática, comparando-a com a matemática aprendida para tratar essas diferenças.

Durante o congresso foi aprovado que Ubiratan D'Ambrosio e Christian Houzel fossem eleitos co-presidentes para os quatro anos seguintes. Em sua programação, o ICME-5 relaciona temas como: matemática para todos; a vida profissional dos professores; o papel da tecnologia; teoria, pesquisa e prática em Educação Matemática; desenvolvimento curricular; aplicações da modelação e resolução de problemas.

No ICME-5, Resolução de Problemas tornou-se um dos sete temas principais. A partir daí, “Resolução de Problemas” permaneceu como um tema central nas outras conferências do ICME. Lester (1994) diz, parece que, em termos internacionais, embora Resolução de Problemas tenha merecido a atenção dos educadores matemáticos, somente há relativamente pouco tempo é que ela passou a ser reconhecida como um aspecto fundamental da Educação Matemática. Ele disse ainda que, infelizmente, muito pouca dessa atenção tem envolvido a pesquisa em Resolução de Problemas. Grupos de Pesquisadores no Japão - e, mais recentemente, no Brasil, em Portugal e na Suécia - têm sido os mais ativos no estudo sistemático da Resolução de Problemas.

Os congressos Internacionais de Matemática – ao possibilitarem o acesso, a matemáticos de diferentes países aos últimos estudos desenvolvidos pela área e ampliarem as oportunidades de reflexão conjunta sobre estes e futuros estudos – estavam, juntamente com as revistas especializadas e as associações nacionais, respondendo à última preocupação apresentada por Klein. Além disso, foi nesses Congressos que as preocupações com o ensino da Matemática – que acabariam culminando com o nascimento de um movimento internacional para a sua modernização - começaram a se manifestar. (MIORIM, 1998, p.72)

O ICME-6 realizou-se em Budapeste, Hungria, em 1988, trabalhos significativos foram reunidos em um tópico intitulado “Teoria da Educação Matemática”.

Em 1992, o ICME-7 foi realizado em Quebec, Canadá, houve um grupo de trabalho que tratou do tema “Resolução de Problemas”, tendo sido formuladas questões para a Resolução de Problemas. Houve duas sessões com esse grupo de trabalho. Foram levantadas questões primordiais nessas sessões sobre, por exemplo, o que é a Resolução de Problemas na Educação Matemática, a relevância da Resolução de Problemas para a Educação, a relação entre a colocação e a solução de problemas, as crenças dos professores, o uso de metáforas na Matemática, o simbolismo matemático, a Educação Matemática Crítica, uma perspectiva

crítica do currículo de Matemática, as ideologias da Educação Matemática, a relevância da Filosofia da Matemática, as suposições implícitas que diferentes teorias e filosofias contêm.

No ICME-8, realizado em Sevilha, Espanha, em 1996, num dos grupos temáticos tratou-se do tema “A Resolução de Problemas no Currículo”. Esse grupo temático estava envolvido com teorias e práticas que dão aos estudantes o poder de usar ideias matemáticas para resolver problemas originados dentro e fora da Matemática. Em quatro grupos de discussão separados também foram discutidos os seguintes temas: os desafios para planejar e administrar a avaliação apropriada de resolução de problemas; os requisitos necessários específicos da resolução de problemas na educação do professor; as possibilidades de currículo matemático inovador; e o que a pesquisa tem revelado sobre fatores psicológicos e sociais relevantes para a resolução de problemas.

Nas atas do ICME-8, publicadas em 1998, os organizadores do grupo temático, que focalizou “Resolução de Problemas”, enfatizaram que: cada vez mais o sucesso da Educação Matemática está sendo avaliado pelo poder que ela dá aos estudantes para lidar com aspectos de suas vidas no trabalho, em casa e como cidadãos informados.

O ICME-9 ocorreu em 2000, em Tóquio, Japão. Nele instalou-se um grupo de discussão sobre “Resolução de Problemas na Educação Matemática” - (TSG-11: Problem Solving in Mathematics Education). Um dos pontos enfatizados nessas discussões foi quanto à pesquisa sobre a prática e os trabalhos desenvolvidos para se ensinar através de, e sobre a resolução de problemas. Houve o pronunciamento de quatro especialistas, reportando sobre o ‘estado-da-arte’ da temática em seus países, e a apresentação de 20 participantes, que expuseram suas experiências de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas.

Preparatório ao ICME-10, da Dinamarca, houve um congresso satélite na Finlândia, destinado ao grupo de pesquisadores envolvidos com Resolução de Problemas – ProMath 2004 – The International Congress on the Problem-Solving in Mathematics Education – A Satellite Conference to ICME-10, na Universidade de Helsinki, no Palmenia Centre for Research and Continuing Education, Lahti.

Segundo Cai, Mamona-Downs e Weber (2005), o tema “Resolução de Problemas em Educação Matemática” foi amplamente discutido num dos grupos temáticos do ICME-10, realizado em Copenhague, na Dinamarca, em 2004. Os objetivos gerais desse grupo eram os de proporcionar um fórum para aqueles que estavam interessados em qualquer aspecto de pesquisa em Resolução de Problemas, em qualquer nível educacional, apresentando descobertas recentes e trocar ideias. Também foram estabelecidos três objetivos específicos:

- Examinar a compreensão dos processos cognitivos complexos envolvidos na resolução de problemas;
- Explorar os mecanismos atuais pelos quais os estudantes aprendem e dão sentido à Matemática através da resolução de problemas e como isso pode ser apoiado pelos professores;
- Identificar futuras linhas de pesquisa em resolução de problemas, incluindo o uso da TIC – Tecnologia de Informação e Comunicação.

No ICME–11, realizado em Monterrey, México, em 2008, em sua programação vários temas foram discutidos: o que precisa saber um professor para ensinar Matemática; estudos comparativos dos sistemas educativos de vários países; o impacto das reformas educacionais; o lugar dos livros didáticos; a formação continuada dos professores de Matemática, o ensino de matemática desde a educação básica até a universidade. Entre outros, escolhemos desse congresso o trabalho apresentado por Lyn English, Richard Lesh e Thomas Fennewald, que trata exatamente sobre as diretrizes e perspectivas para a pesquisa em Resolução de Problemas, o que mais para frente discutiremos com mais detalhes.

O último ICME–12 foi realizado em Seul, Coréia, em 2012.

Dentre os congressos de Educação Matemática na América Latina vamos destacar: CIBEM–5 – Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, realizado no Porto, Portugal, em julho de 2005. Houve participação do GTERP com a comunicação “A Resolução de Problemas no Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas”; CIAEM–13 – Conferência Interamericana de Educação Matemática, realizada em Recife, Brasil, em junho de 2011, que teve como temas centrais – Formação de Professores na Educação Matemática; Resolução de Problemas e Modelização na Educação Matemática; RELME–26 – Reunião Latino-Americana de Matemática Educativa, realizada em Belo Horizonte, Brasil, em julho de 2012, cujo tema central foi “Matemática Educativa na América Latina” e houve a Mesa Redonda nº 3, denominada Resolução de Problemas, com participação de membros do GTERP.

Considerando os muitos congressos e encontros realizados no Brasil em Educação Matemática, visando à Resolução de Problemas destacamos:

SERP–1 – Seminário em Resolução de Problemas, realizado na Universidade Estadual Paulista – UNESP, campus de Rio Claro/SP, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM, nos dias 30 e 31 de outubro de 2008, cujo tema central foi “Os Múltiplos Olhares sobre Resolução de Problemas Convergindo para a Aprendizagem”, e seu

objetivo foi o de propiciar, aos participantes, momentos de reflexão e troca de experiências, compartilhando diferentes olhares sobre a Resolução de Problemas, visando a atingir efetivamente a sala de aula. Nesse Seminário, também foi criado um espaço para que convidados e inscritos apresentassem diferentes linhas metodológicas e diferentes trabalhos para a sala de aula envolvendo resolução de problemas, assim como uma articulação de debates a esse respeito.

Discussões no campo da Educação Matemática, no Brasil e no mundo, mostram a necessidade de se adequar o trabalho escolar a novas tendências que levem a melhores formas de ensinar, aprender e avaliar o progresso dos alunos e de aprimorar o trabalho dos professores e, em particular, em resolução de problemas.

No ano de 2011 foi realizado, o SERP-2, realizado na Universidade Estadual Paulista – UNESP, campus de Rio Claro/SP, nos dias 10 e 11 de novembro de 2011, que contou com painéis, palestras, mesas redondas, salas temáticas, comunicações científicas e pôsteres. O tema central do seminário foi “O Estado da Arte da Pesquisa em Resolução de Problemas na Educação Matemática no Brasil e no Mundo”. A proposta, para esse tema, foi a de dar ênfase às pesquisas realizadas em Resolução de Problemas no país e no mundo podendo, assim, contribuir com novos projetos e colaborar com a difusão da Resolução de Problemas em nosso país, pois, a Resolução de Problemas, como abordagem metodológica, tem sido recomendada em documentos oficiais de ensino, como pretendido nos Parâmetros Curriculares Nacionais, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e em documentos internacionais. O objetivo geral desse Seminário foi o de promover momentos de estudo, de reflexão e troca de experiências acerca da Resolução de Problemas no Brasil e no mundo, através de relatos de experiência, comunicações de pesquisas desenvolvidas por professores, alunos e comunidades científicas, assim como uma articulação de debates entre os participantes e convidados nacionais e estrangeiros.

Como objetivos específicos o II SERP apresentou:

- Refletir sobre diferentes metodologias de trabalho em sala de aula apoiadas em Resolução de Problemas;
- Possibilitar uma maior integração entre os professores que atuam na rede escolar e pesquisadores que trabalham na linha de Resolução de Problemas;
- Compartilhar conhecimentos acerca das diversas experiências de ensino e das pesquisas que vêm sendo desenvolvidas em Resolução de Problemas, por professores

e alunos dos cursos de Mestrado e Doutorado do país, visando à sua socialização e ao seu aprimoramento;

- Apresentar, dentre diferentes formas metodológicas apoiadas no tema Resolução de Problemas, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como um caminho adequado à construção do conhecimento matemático centrado no aluno;
- Relacionar Resolução de Problemas a outras áreas do conhecimento: Formação Inicial e Continuada de Professores, Modelagem Matemática, Tecnologia e Ciências Natural e Social.

4.1.3. Diretrizes e Perspectivas para a Pesquisa em Resolução de Problemas

Segundo Onuchic (2013), no *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, do NCTM, no capítulo sobre resolução de problemas, Schoenfeld concluiu que as tentativas de ensinar os estudantes a usarem as heurísticas e processos estilo-Polya, em geral não haviam provado ser bem sucedidas. No entanto, Schoenfeld chegou a sugerir que uma das razões para essa falta de sucesso pudesse estar no fato de que muitas de heurísticas de Polya parecem ser descritivas, mas não prescritivas. Isto é, são realmente apenas nomes de grandes categorias de processos ao invés de serem processos bem definidos em si mesmos. Assim, numa tentativa de ir além do "poder descritivo" para alcançar "o poder prescritivo", Schoenfeld sugeriu que a pesquisa e o ensino em resolução de problemas deveriam: ajudar os estudantes a desenvolver um grande número de estratégias mais específicas em resolução de problemas; ensinar estratégias metacognitivas; desenvolver formas de melhorar as crenças dos estudantes sobre a natureza da matemática, a resolução de problemas e suas próprias competências pessoais.

Diz Onuchic (2013), também, que dez anos depois de as propostas de Schoenfeld terem sido feitas, Lester e Koehle reviram novamente a literatura e concluíram que a pesquisa em resolução de problemas ainda tinha pouco a oferecer para a prática escolar. Uma explicação para essa falta de sucesso parecia, de uma maneira simples, dizer que a proposta de Schoenfeld elevava a falha básica das heurísticas de Polya para um nível superior. Ou seja, independentemente da atenção focada sobre as heurísticas estilo-Polya ou sobre o modelo dos processos ou crenças metacognitivos estilo-Schoenfeld, listas curtas de processos descritivos ou regras tendiam a ser muito gerais para terem poder prescritivo.

Recorrendo agora a Lyn English, Richard Lesh e Thomas Fennewald (2008), iremos compilar alguns trechos do artigo *Future Directions and Perspectives for Problem Solving Research and Curriculum Development*, que foi apresentado em 2008, no ICME-11, México.

Esses autores, na introdução do artigo, realçam que

A pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos recebeu muita atenção nas últimas décadas. Entre os desenvolvimentos notáveis está o trabalho pioneiro de Polya (1945) sobre como resolver problemas; estudos de hábeis resolvidores de problemas (por exemplo, Anderson, Boyle, & Reiser, 1985); pesquisa sobre o ensino de estratégias em resolução de problemas; e heurísticas e posteriores processos metacognitivos (por exemplo, Charles & Silver, 1988; Lester, Garofalo e Kroll, 1989); e, mais recentemente, estudos sobre modelação matemática (por exemplo, Lesh, no prelo; English, 2007). Existentes, perspectivas de longa data sobre resolução de problemas têm tratado essa pesquisa como um tópico isolado, onde as habilidades em resolução de problemas são assumidas para desenvolver, através da aprendizagem inicial de conceitos e procedimentos seguidos pela prática sobre "problemas com palavras", depois, através da exposição a uma série de estratégias (por exemplo, "desenhe um diagrama", "adivinha e verifique") e, finalmente, através de experiências em aplicar essas competências para resolver problemas "recentes" ou "não-rotineiros". (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p.1)

English, Lesh e Fennewald (2008), dizem que, quando ensinada dessa maneira, a resolução de problemas é vista como independente e isolada do desenvolvimento de ideias, compreensões e processos matemáticos essenciais. Apesar dessas décadas de pesquisa e do desenvolvimento curricular associado, parece que as habilidades em resolução de problemas dos estudantes ainda necessitam de uma melhora substancial, especialmente devido à rápida natureza mutável do mundo atual.

Eles relatam, também, que o estado atual dessas ocorrências não tem sido ajudado devido ao notável declínio da quantidade de pesquisas em resolução de problemas que foram conduzidas na década passada. Muitos fatores foram identificados como contribuintes para esse declínio. Tais fatores incluem as tendências cíclicas de desencorajamento na política e nas práticas educacionais; a limitada pesquisa sobre o desenvolvimento de conceitos e de resolução de problemas; o conhecimento insuficiente, em resolução de problemas, dos estudantes fora da sala de aula; a natureza mutável dos tipos de resolução de problemas; e o pensamento matemático necessário para fora da escola; e da falta de acúmulo de pesquisa em resolução de problemas.

English, Lesh e Fennewald (2008) dizem que, infelizmente, os últimos 50 anos de pesquisa não deram validação para as últimas expectativas. No entanto, alguma esperança

continua! A maioria das pesquisas passadas tem ido à frente para investigar as seguintes questões:

- (a) *Podem as heurísticas estilo-Polya serem ensinadas?*
- (b) *O fato de aprender as estratégias (heurísticas) tem provocado impactos positivos sobre as competências dos estudantes?*

Quase não existe pesquisa que tenha dado definições operacionais úteis para responder a questões mais fundamentais como:

- (a) *O que significa "entender" heurísticas tipo-Polya?*
- (b) *Como (e de que maneira) é que essas compreensões se desenvolvem?*
- (c) *Qual é a natureza dos níveis iniciais de desenvolvimento?*
- (d) *Como o desenvolvimento pode ser observado, documentado e medido (ou avaliado), de forma confiável?*

Até que os pesquisadores desenvolvam respostas úteis para essas últimas perguntas, não é razoável esperar que um progresso significativo seja feito sobre as duas questões anteriores. (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p.2)

Ainda, English, Lesh e Fennewald (2008, p. 3) ressaltam que

É hora de reexaminar hipóteses com base sobre o que significa compreender um pequeno número de grandes ideias em matemática elementar. Uma alternativa é a utilização de perspectivas teóricas e acompanhamento de metodologias de pesquisa que nós chamamos de modelo e perspectivas de modelização (MPM) sobre ensino, aprendizagem e resolução de problemas matemáticos.

No referido artigo, antes de descreverem os aspectos relevantes da MPM, esses autores identificam algumas das principais razões do porquê as últimas pesquisas em resolução de problemas produzirem pouco sucesso. Assim, eles abordam sobre os itens: - Fatores Limitantes da Pesquisa em Resolução de Problemas e Avançando no Campo da Pesquisa em Resolução de Problemas e Desenvolvimento Curricular.

Esses autores descrevem sobre cada um dos Fatores Limitantes da Pesquisa em Resolução de Problemas, que, em seu entender, são: Amplitude do Pêndulo movido pelos Testes; Pesquisa Limitada sobre Desenvolvimento de Conceito e Resolução de Problemas; Conhecimento Limitado de Resolução de Problemas nos Estudantes fora da Sala de Aula; Natureza Mutante dos Tipos de Resolução de Problemas e Pensamento Matemático necessário além da Escola; e Falta de Acúmulo da Pesquisa em Resolução de Problemas.

English, Lesh e Fennewald (2008) dizem que, chegou a hora de considerar outras opções para avançar na pesquisa em resolução de problemas e desenvolvimento curricular. Uma poderosa alternativa é a de utilizar as perspectivas teóricas e as metodologias de pesquisa associadas de uma perspectiva de modelos e modelização (MMP) em ensino, aprendizagem e resolução problemas matemáticos.

4.2. Retrospectiva histórica da Resolução de Problemas

Ao longo da história, matemáticos, filósofos, psicólogos, educadores e pesquisadores têm reconhecido a importância da resolução de problemas e da existência de diferenças pessoais na capacidade de se chegar a uma solução. Também, a história da matemática mostra que os avanços matemáticos quase sempre têm origem no esforço de resolver um problema específico.

Huanca (2006, p. 20) diz que

Resolver problemas faz parte da natureza humana. Bem antes da invenção dos números, os primeiros homens tiveram que desenvolver métodos para resolver problemas da vida como, por exemplo, localizar-se no tempo e no espaço e, também, para tentar descrever e explicar o mundo físico. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, medir, quantificar, inferir os elementos fundamentais que a tradição da cultura nomeia de Matemática.

4.2.1. Resolução de Problemas no currículo da matemática escolar

Stanic e Kilpatrick (1989), no artigo *Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum*, publicado no livro *The Teaching and Assessing of Mathematics Problem Solving*, dizem que problemas de Matemática têm ocupado um lugar central nos currículos desde a Antiguidade. Também traçam, nesse artigo, a história da resolução de problemas no currículo da Matemática, descrevendo o papel da resolução de problemas desde as primeiras civilizações até o fim do século XX.

Mas, apesar disso, Onuchic (1999, p. 203) diz que a importância dada à Resolução de Problemas é recente e que, somente nas últimas décadas, é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia atenção especial.

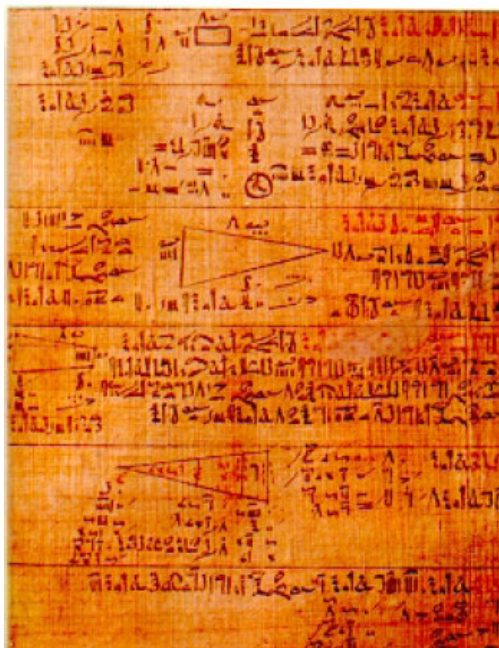
Segundo Stanic e Kilpatrick, o termo Resolução de Problemas transformou-se num slogan englobando diferentes visões do que é a educação, a escolaridade, a matemática, e das razões porque devemos ensinar Matemática em geral e Resolução de Problemas em particular. Esses autores mencionam uma Agenda para a Ação, do NCTM (1980), pedindo que “resolução de problemas seja o foco da matemática escolar durante os anos oitenta”. Nessa agenda, a resolução de problemas é caracterizada como uma das dez áreas de habilidade

básica⁷ e assume-se que há uma relação direta entre resolução de problemas nas aulas de Matemática e resolução de problemas encontrados em nossa vida. Os autores também observam que, nessa Agenda, não há uma clareza adequada do que seja resolução de problemas, o porquê deve-se ensiná-la ou como a posição tomada se ajusta num contexto histórico.

Stanick e Kilpatrick (1989) descrevem, em seu artigo, o papel da resolução de problemas nos currículos desde a Antiguidade até o século XX. Eles relatam escritas de antigos egípcios, chineses e gregos, apresentando problemas dessas épocas. Por exemplo, o Papiro de Ahmes, copiado, de um documento mais antigo, pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a.C., é um manuscrito matemático egípcio que consiste numa coleção de problemas matemáticos.

Num dos problemas, nesse manuscrito, era pedido ao aluno “efetue a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são ambos iguais a 7”. No próprio papiro, só é dada uma forma abreviada da resolução do problema, com dois métodos de resolução e resposta. O fato de o problema se referir a casas, gatos, ratos, etc., a serem adicionados, sugere que este seria um problema recreativo ou um quebra-cabeça.

Figura 3 – Papiro de Ahmes



Fonte: <http://centros5.pntic.mec.es/ies.ortega.y.rubio/Mathis/Egipto/papiros.htm>

⁷ Documento posicional sobre as competências básicas: resolução de problemas; aplicar matemática em situações do dia-a-dia; alerta para a razoabilidade dos resultados; estimativa e aproximação; habilidades computacionais adequadas; geometria; medida; ler, interpretar e construir tabelas, quadros e gráficos; usar a matemática para prever; e conhecimento de informática.

Os autores também citam um problema dos antigos gregos que é uma primeira versão do problema da cisterna: “Eu sou um leão de bronze; meus orifícios são meus dois olhos, minha boca e a planta do meu pé direito. Meu olho direito enche uma jarra em dois dias, meu olho esquerdo em três e meu pé em quatro. Minha boca é capaz de enchê-la em seis horas. Diga-me quanto tempo será preciso para enchê-la com os quatro juntos?”. A resolução desse problema não é apresentada no texto, nem alguma sugestão é feita.

Stanick e Kilpatrick (1989) observam que alguns métodos particulares de resolução de problemas têm também uma longa história. Por exemplo, uma técnica, muito parecida com a Regra da Falsa Posição, aparece no Papiro de Ahmes. Eles dizem que Vera Sanford (1927), em sua história sobre problemas de álgebra, deu um exemplo do uso dessa regra de falsa posição no seguinte problema, tirado de um trabalho do séc. XV, de autoria de Phillip Calandri: A cabeça de um peixe pesa $\frac{1}{3}$ do peso total dele, sua cauda pesa $\frac{1}{4}$ dele, e seu corpo pesa 30 libras. Qual é o peso total do peixe?

Sanford explicou que a regra da falsa posição foi usada para resolver esse problema do seguinte modo: Se o peixe todo pesasse 12 libras, então a cabeça pesaria 4, a cauda 3 e o corpo 5. Evidentemente, o peso do peixe é o mesmo múltiplo de 12 que 30 é de 5 e, então, o peso do peixe é 72 libras.

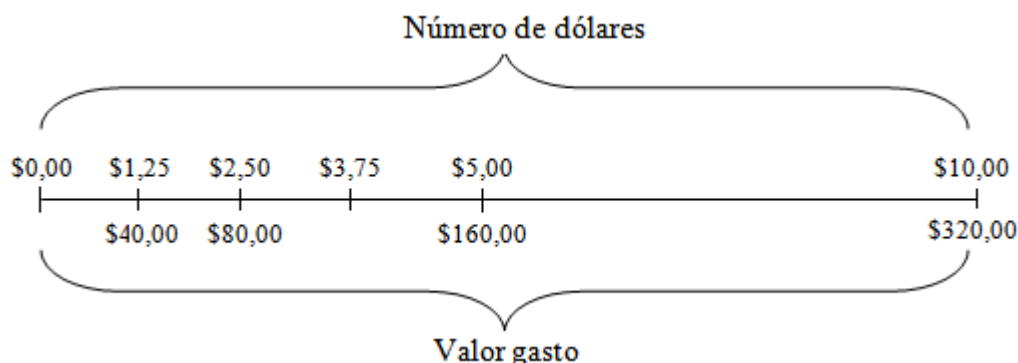
Seguindo no tempo, segundo Stanic e Kilpatrick (1989), encontram-se problemas tratados de forma semelhante a esses da Antiguidade, em livros de Matemática dos séculos XIX e XX. Eles chamam a atenção de que, nesses exemplos, é assumida uma visão muito limitada de aprendizagem de resolução de problemas.

Onuchic (1999) diz que, até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma solução técnica específica. Um exemplo disso é o problema, apresentado na página 97 do livro-texto de William J. Milne (1897), *A Mental Arithmetic*: “Quanto custará arar 32 acres de terra se por um acre pagaremos \$3,75?”.

Nesse tempo a Matemática era trabalhada segundo a Teoria da Disciplina Mental e, possivelmente, poucas pessoas sabiam fazer uso dela.

Tentando entender porque, como sugestão, Milne escreveu apenas: $\$3,75 = \frac{3}{8} \cdot \$10,00$, buscamos compreender como essa sugestão poderia levar à resolução dos onze outros problemas colocados.

Chegamos a acreditar que isso poderia ocorrer com os discípulos pensando assim:



Mas, $\$3,75 = \$2,50 + \$1,25$. Como $\frac{1}{4}$ de $\$10,00 = \$2,50$ e $\frac{1}{8}$ de $\$10,00 = \$1,25$.

Portanto

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \$10,00 = \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{8}\right) \$10,00 = \frac{3}{8} \$10,00 = \$3,75$$

Na solução apresentada eles dizem que $\$3,75 = \frac{3}{8} \cdot \$10,00$ e que, se se admitisse o custo $\$10,00/\text{acre}$, os 32 acres custariam $\$320,00$. Mas, como 1 acre custava $\frac{3}{8} \$10,00$, então, os 32 acres custariam $\frac{3}{8} \cdot \$320,00$ e, portanto, $\$120,00$.

Observamos que hoje dizer que $\$3,75 = \frac{3}{8} \cdot \$10,00$ não parece, de imediato, fácil de entender, ainda mais quando se fala em aritmética mental. Na verdade, eles conduziam essa igualdade fazendo, mais uma vez, o uso do conceito de proporcionalidade, pois uma proporção é uma igualdade entre duas razões e uma razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas. Vejamos que fração de $\$10,00$ é $\$3,75$:

$$\$3,75 = \frac{\$375}{100} = \frac{\$3750}{1000} = \frac{375 \$10,00}{1000} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} \$10,00 = \frac{3}{8} \$10,00$$

Tenho 32 acres para arar, se eu pagasse $\$10,00/\text{acre}$ eu gastaria $\$320,00$.

Mas, eu paguei $\$3,75 = \frac{3}{8} \$10,00$. Então meu gasto será $\frac{3}{8} \$320,00 = \$120,00$.

Hoje sem cálculo mental fazendo apenas a multiplicação teríamos

$$\$3,75 \times 32 = \$120,00$$

Depois de esse problema ter sido colocado e resolvido vem, no texto, uma lista com outros problemas que podem ser resolvidos segundo o mesmo modelo de resolução adotado para o primeiro.

No transcorrer dos séculos, problemas famosos de famosos matemáticos são encontrados, dando avanço à construção da Matemática.

Os três famosos problemas gregos: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo são aproximadamente do século V a.C. Esses problemas estimularam a atividade matemática entre matemáticos gregos e seus tratamentos rigorosos têm valiosas vinculações com a matemática moderna.

Outros problemas como: Achar a tangente a uma curva e a área de uma região delimitada por uma curva, são problemas que, no século XVII, levaram à construção do Cálculo Diferencial e Integral; O Problema da Braquistócrona, formulado por Johann Bernoulli em 1696 e que deu origem ao Cálculo das Variações; O Problema de Fermat, proposto no século XVII e resolvido somente depois de muitas tentativas e avanços teóricos, no final do século XX, por A. Wiles; Os 23 problemas de Hilbert, formulados em 1900, no Congresso Internacional de Matemática em Paris, estimularam grandemente o desenvolvimento da matemática no século XX.

Fatos como esses e muitos outros na história da Matemática e da humanidade nos fazem afirmar que a Matemática é uma construção social dinâmica, um conjunto estruturado de conhecimentos, mas em permanente extensão, não somente com novos resultados, mas também com novos métodos.

Sendo evidente a importância dos problemas e de suas resoluções no desenvolvimento da Matemática, é natural que também ocupe um lugar importante no campo da Educação Matemática, pois as raízes da Educação Matemática são a Matemática e a Psicologia.

Conforme veremos adiante, Stanic e Kilpatrick (1989) identificam vários temas que historicamente caracterizaram o papel da resolução de problemas nos currículos escolares. Segundo os autores, esses temas foram ligados e se mantiveram na maior parte sem exame. O que os educadores matemáticos dizem uns aos outros, hoje, acerca da resolução de problemas, está ligado a várias tradições diferentes nos campos da psicologia, do currículo, e do ensino da Matemática.

4.2.2. Mudanças de papel na resolução de problemas

Stanic & Kilpatrick (1989) afirmam que, como esses exemplos mostram, os problemas têm uma longa história no currículo da Matemática. Todavia, predominaram basicamente, neste último século, discussões sobre resolução de problemas para o ensino, em que se tem exigido, simplesmente, dos estudantes, que resolvam problemas com regras, resolvam problemas específicos e desenvolvam abordagens mais gerais da resolução de problemas. Embora o ensino e a aprendizagem de resolução de problemas estejam agora recebendo uma

grande ênfase, os educadores matemáticos não têm examinado completamente a questão: Porque deveríamos ter que trabalhar resolução de problemas para todos?

O papel da resolução de problemas nos currículos de matemática escolar é o resultado de forças conflitantes, ligadas e amarradas por ideias antigas e duradouras sobre os benefícios do conhecimento matemático e para uma variedade de eventos que interagem mutuamente e que aconteceram perto do início do século XX. (STANIC; KILPATRICK, 1989, p.4)

Os autores dizem que a principal razão dos educadores matemáticos darem ênfase ao ensino da resolução de problemas é que, até esse século, foi assumido que o conhecimento matemático, de qualquer área da Matemática e não só o que consideraríamos um problema, deveria, de um modo geral, melhorar o pensar das pessoas. Platão (429 - 348 A.C) disse que “aqueles que por natureza são bons em cálculo são, como se pode dizer, naturalmente aguçados em qualquer outro estudo e ... aqueles que são lentos em Matemática, se fossem educados e exercitados nesse estudo, não obstante melhorariam e se tornariam mais afiados do que são”. Partindo desse pensamento de Platão, Stanic e Kilpatrick aceitaram a ideia de que estudar Matemática melhorará a habilidade das pessoas em pensar, raciocinar e resolver problemas com os quais se confrontarão no mundo real. Num certo sentido, resolver problemas no currículo era simplesmente um meio para levar os estudantes a estudar Matemática. Os problemas eram um dado elemento do currículo de Matemática que contribuía, como todos os outros elementos, para o desenvolvimento de um raciocínio forte.

Nessa mesma perspectiva, Beatriz S. D’Ambrosio (2003) explica que, no final do século XIX, novos pontos de vista sobre aprendizagem começaram a desenvolver uma corrida contrária à da Teoria da Disciplina Mental. Em particular, estudos publicados por Edward L. Thorndike, durante a virada do século XX, puseram descrédito aos conceitos da disciplina mental e da transferência de treinamento. Como os resultados dos estudos de Thorndike tornaram-se mais aceitos, a teoria da Disciplina Mental perdeu sua força e foi substituída pelo conexãoismo ou associacionismo de Thorndike. Entretanto, vestígios da Teoria da Disciplina Mental permanecem mesmo até hoje, na crença duradoura de que matérias abstratas, como Matemática, são valiosas porque elas afiam a mente.

Stanic e Kilpatrick (1989) observam que a Teoria da Disciplina Mental, durante o século XIX, forneceu a estrutura para a expressão das ideias acima. Segundo eles, a Disciplina Mental foi resultado de uma fusão nem sempre pacífica entre a psicologia das faculdades e a tradição das artes liberais. Como uma teoria de currículo, a Disciplina Mental se baseava na ideia de que era um trabalho da escola ajudar os estudantes a desenvolverem

essas faculdades, e que as artes liberais tradicionais – ou seja, a Matemática e as línguas clássicas – eram os melhores veículos para o desenvolvimento dessas faculdades.

Embora a tradição refletida na Teoria da Disciplina Mental continuasse a resistir, acontecimentos que ocorreram perto da virada do século XX acarretaram mudanças significativas na forma como era visto o estudo da Matemática. A esse respeito, os autores comentam que o trabalho de Edward L. Thorndike é geralmente reconhecido como uma contestação às noções básicas da Teoria da Disciplina Mental. A Matemática, elemento crucial do currículo baseado na Teoria da Disciplina Mental, tornou-se alvo de críticas diretas. Os críticos concordavam que a matemática era muito importante, mas argumentavam que muitas pessoas não precisavam saber mais do que a aritmética do 6º ano de escolaridade (STANIC, apud STANIC; KILPATRICK, 1989).

Stanic e Kilpatrick (1989), em relação à virada do século XIX para o século XX, dizem que Thorndike mostrou, em 1924, que a Teoria da Disciplina Mental não desapareceu com a viragem do século. Contudo, o trabalho de Thorndike, combinado com outros desenvolvimentos, levou claramente ao declínio da importância dessa teoria. Cada vez mais, psicólogos, sociólogos e educadores iam tomando posição contra ela. Esses críticos olhavam para uma sociedade em mudança, sofrendo uma intensa industrialização, urbanização e imigração, estavam preocupados com a população escolar que cresceria vinte vezes entre 1890 e 1940 e concluíram que o currículo escolar tinha de mudar.

Segundo esses autores, na época argumentavam que uma pessoa necessitava estudar só o que era diretamente funcional para o seu futuro papel na sociedade. Análises da atividade dos vários papéis na sociedade foram usadas para estabelecer objetivos específicos para os currículos escolares. E o movimento das medidas mentais cresceu à medida em que as pessoas se voltavam para os testes de inteligência para decidir quem teria acesso a que conhecimento nos currículos escolares.

Então, o virar do século assistiu a duas maneiras muito diferentes de ver as pessoas, a educação e o currículo escolar. A Teoria da Disciplina Mental (que é, ironicamente, muitas vezes associada a uma visão elitista da educação) produziu uma visão fundamentalmente otimista de inteligência humana. Embora os defensores da Teoria da Disciplina Mental reconheçam as óbvias diferenças que existem entre as pessoas, o que era muito importante para eles era que todas as pessoas nasciam com as mesmas faculdades; e era tarefa da escola desenvolver estas faculdades que todos tinham. Porque todas as pessoas tinham as mesmas faculdades, os defensores da Teoria da Disciplina Mental argumentavam que, quando se ia decidir o que deveria ser ensinado e a quem, o que era bom para um estudante era bom para todos. Todos os alunos deviam ter acesso ao mesmo conhecimento e métodos de instrução. (STANIC; KILPATRICK, 1989, p 6)

Os autores dizem que deixou de ser assumido que o estudo da Matemática promove, inevitavelmente, o pensamento das pessoas. Essa visão estabelece as condições para uma maior ênfase da parte dos educadores matemáticos como, exatamente, os alunos devem melhorar sua capacidade de pensar, de raciocinar, de “resolver problemas”, através do estudo da Matemática. Muitos dos nossos antecessores profissionais, contudo, estavam relutantes em desistir da tradição que vinha desde Platão e dava um lugar tão proeminente à Matemática no currículo escolar.

No início do século XX pessoas como David Eugene Smith, no Teachers College, Columbia University, e Jacob William Albert Young, na Universidade de Chicago, estavam firmando a educação matemática como um campo de estudo profissional legítimo nas universidades e em outras escolas superiores do país.

Stanic e Kilpatrick observam que Smith, Young, e a maioria de nossos outros antecessores profissionais viam a Matemática, incluindo a Matemática de nível mais avançado, como apropriada para todos os estudantes, e como um veículo essencial para desenvolver a capacidade de raciocínio dos estudantes.

Os autores observam que, ironicamente, conforme crescia o número de educadores matemáticos profissionais, a posição da Matemática no currículo escolar passou a sofrer ataques. Os educadores matemáticos tentaram se ajustar aos tempos e ideias em mudança, alguns até mesmo abraçando as ideias dos críticos, mas o conflito resultante das tradições em disputa levou a uma crise na educação matemática nos anos 1930. Uma crise que, conforme disse Stanic (1983/1984, 1986), apud Stanick e Kilpatric (1989), ainda não foi resolvida.

Stanic e Kilpatrick apontam mais uma ironia ao observar que, em parte por causa dos ataques ao lugar da Matemática no currículo, muitos de nossos antecessores, embora advogando os benefícios da Matemática para o desenvolvimento do pensamento humano, não se sentiam à vontade com a ideia de dar aos problemas um papel demasiado extenso no currículo.

Matemáticos, tais como Felix Klein na Alemanha, John Perry na Inglaterra e Eliakim Hastings Moore nos Estados Unidos, discutiam a relação entre matemática pura e aplicada no currículo escolar, advogando, em essência, um maior papel para as aplicações. Mas muitos educadores matemáticos, particularmente Smith, não queriam dar um papel muito grande às aplicações, porque os críticos do currículo escolar que não eram matemáticos também pediam que a matemática escolar se tornasse mais relevante para a vida real. Smith tinha receio de desistir do que ele via como o papel e conteúdo essencial da matemática em nome das

aplicações, e receava dar demasiado apoio à causa dos críticos. Obviamente o local de problemas e resolução de problemas no currículo de matemática escolar tem sido um tópico polêmico durante um longo tempo.

Onuchic (1999) enfatiza o trabalho de Felix Klein que, em 1892, se interessou pelo professor que deveria trabalhar Matemática com seus alunos, nas escolas. Começou a escrever monografias em que trabalhava a matemática elementar sob um ponto de vista avançado e, nelas, deixava aos professores a responsabilidade de desenvolver caminhos por ele sugeridos. Klein já sentia a preocupação com um ensino de Matemática envolvendo a necessidade de professores melhor preparados.

Essa autora questiona: Será que as coisas mudaram ao longo do tempo? Não é assim que, na maioria das escolas, ainda hoje, se trabalha resolução de problemas? Há, atualmente, educadores matemáticos preocupados com um ensino-aprendizagem de melhor qualidade? Resolução de problemas se apresenta como um bom caminho para isso?

4.2.3. Resolução de Problemas no ensino da Matemática

No século XX, ao longo das reformas sociais, ocorreram muitos movimentos de mudança na Educação Matemática mundial. Com o passar do tempo, a Educação Matemática tornou-se um assunto de grande interesse sendo, muitas vezes, responsável por intensos debates.

Gente de todo o mundo está trabalhando para tornar o “ensino” de Matemática mais eficiente. Ensinar bem Matemática é um empenho complexo e não há receitas fáceis para isso. Não há um caminho único para se ensinar e aprender Matemática.

Pretendendo formar melhor os alunos, dentro da disciplina Matemática, no início do século XX, o ensino foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos, como por exemplo as tabuadas, era considerado de grande importância. Depois de alguns anos, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender com compreensão, entendendo o que faziam. Essas duas formas de ensino não tiveram êxito quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, mas a maioria não.

Nessa época começou-se a falar sobre resolução de problemas no ensino da Matemática. Com o objetivo de reforçar a retrospectiva histórica sobre resolução de problemas, recorreremos novamente a Stanic & Kilpatrick que colocam três temas gerais que têm caracterizado o papel da resolução de problemas no currículo da matemática escolar,

desde o antigo Egito até o final do século XX: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como habilidade e resolução de problemas como arte.

4.2.3.1. Resolução de Problemas como Contexto

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), a resolução de problemas como contexto tem pelo menos cinco sub-temas: Resolução de Problemas como justificativa; Resolução de Problemas como motivação; Resolução de Problemas como recreação; Resolução de Problemas como veículo; e Resolução de Problemas como prática, todos os quais estão baseados sobre a ideia de que problemas e resolução de problemas são meios para alcançar outros fins importantes.

Historicamente, a resolução de problemas foi incluída no currículo de Matemática em parte porque os problemas fornecem uma justificativa para ensinar Matemática. Já o sub-tema da motivação está relacionado com o da justificativa, em que os problemas justificavam a matemática que se ensinava. Contudo, no caso da motivação, a conexão é muito mais específica e é procurado o objetivo de atrair o interesse dos alunos.

O sub-tema da recreação está relacionado com o da motivação porque o interesse dos alunos está envolvido, mas no caso da recreação os problemas são fornecidos não tanto para motivar os alunos a aprender, mas para lhes permitir ter algum divertimento com a matemática que eles já aprenderam. O problema do Papiro de Ahmes, anteriormente mostrado, é uma boa ilustração. O sub-tema da recreação também difere dos dois primeiros na medida em que puzzles ou problemas sem qualquer ligação ao mundo real são perfeitamente apropriados.

Na Resolução de Problemas como veículo, os problemas são muitas vezes fornecidos, não simplesmente para motivar os alunos a interessarem-se na aprendizagem direta de um tópico, mas como um veículo através do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. Os métodos de descoberta refletem em parte a ideia de que a resolução de problemas pode ser um veículo para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas. Dos cinco sub-temas, a resolução de problemas como prática tem tido a maior influência no currículo de Matemática. Neste sub-tema, os problemas não provêm justificção, motivação, recreação ou veículo tanto como a prática necessária para reforçar habilidades e conceitos ensinados diretamente.

4.2.3.2. Resolução de Problemas como habilidade

Segundo Stanic & Kilpatrick (1989), resolução de problemas é frequentemente vista como uma das muitas habilidades a serem ensinadas no currículo escolar. De acordo com esta visão, a resolução de problemas não é necessariamente uma habilidade unitária, mas há uma clara orientação de habilidade.

Embora a resolução de problemas como contexto permaneça um tema forte e persistente, a resolução de problemas como habilidade tem se tornado dominante para aqueles que veem resolução de problemas como um valioso fim curricular merecendo atenção especial, mais do que como simplesmente um meio para alcançar outros fins ou um inevitável resultado do estudo da Matemática.

Colocar resolução de problemas numa hierarquia de habilidades a serem adquiridas por estudantes conduz a certas consequências para o papel da resolução de problemas no currículo. Uma consequência é que, dentro da habilidade geral da resolução de problemas, distinções hierárquicas são feitas entre resolver problemas rotineiros e não rotineiros. Isto é, a ação de resolver problemas não rotineiros é caracterizada como um nível de habilidade mais alto a ser adquirido depois da habilidade de resolver problemas rotineiros, o que, por sua vez, é ser adquirido quando os alunos aprendem conceitos e habilidades matemáticos básicos.

4.2.3.3. Resolução de Problemas como Arte

Para Stanic & Kilpatrick (1989), uma mais profunda, mais abrangente visão de resolução de problemas no currículo da matemática escolar - uma visão de resolução de problemas como arte - nasceu do trabalho de George Polya, com sua famosa ideia de heurística, a arte da descoberta, onde matemáticos como Euclides e Pappus, incluindo Descartes, Leibnitz e Bolzano, tinham discutido métodos e regras para descobertas e invenções na Matemática, mas suas ideias nunca haviam chegado até o currículo escolar. Isto sobrou para Polya reformular, isto é, ampliar e ilustrar várias ideias sobre descobertas matemáticas de uma maneira que os professores pudessem entender e aplicar.

Segundo Polya, segunda edição, tradução de Heitor Lisboa de Araújo (1978, p. 1),

o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajuda demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos mas, de tal modo que, ao estudante, caiba uma parcela razoável do trabalho.

Na formulação de Polya, o professor é a figura chave. Somente um professor sensível consegue determinar o tipo certo de problema a ser trabalhado e providenciar a quantidade apropriada de orientação. Porque o ensino também é uma arte, ninguém pode programar ou mecanizar o ensino de resolução de problemas.

Hoje, há ainda aqueles que seguem o trabalho de Polya, mas que reduzem, a grosso modo, a heurística a habilidades de procedimento, quase tomando uma visão algorítmica de heurística (isto é, heurísticas específicas ajustadas a situações específicas). Uma heurística torna-se uma habilidade, uma técnica, mesmo, paradoxalmente, um algoritmo. De certa forma, resolução de problemas como arte fica reduzida à resolução de problemas como habilidade quando tentativas são feitas para implementar idéias de Polya enfocando os passos e colocando-os em livros-texto. Ele, Polya reconhece que essas técnicas de resolução de problemas precisam ser ilustradas pelo professor e discutidas pelos alunos, e praticadas de uma maneira não mecânica.

Onuchic (2003) já dizia que, no fim da década de oitenta, o NCTM publicara, em 1989, seu documento Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics e, desde então, está ocorrendo uma revolução na Educação Matemática, revolução essa que, no entender de Van de Walle (2001), é mais positiva, mais pervasiva e mais amplamente aceita do que qualquer outra mudança feita antes. Essa revolução pedia por uma reforma e, para que ela fosse bem sucedida, era preciso que houvesse uma base sólida de pesquisa para apoiá-la.

Ainda ela disse que

O Curriculum and Evaluation for School Mathematics, lançado em 1989, foi projetado para falar àqueles muito próximos de poder tomar decisões sobre o currículo de matemática: professores, supervisores e promotores de materiais instrucionais e currículo. Posteriormente foram criados os Professional Standards for Teaching Mathematics, publicado em 1991, e os Assessment Standards for School Mathematics, publicado em 1995.

Esses Standards não pretendiam dizer, passo a passo, como trabalhar esses documentos. Ao contrário, queriam apresentar objetivos e princípios em defesa de que práticas curriculares, de ensino e de avaliação pudessem ser examinadas. Eles queriam estimular políticos educacionais, pais, professores, administradores, comunidades locais e conselhos escolares a melhorar os programas de matemática em todos os níveis educacionais.

Ao se iniciar um novo século, na verdade um novo milênio, é preciso se admitir que a visão colocada em 1989 pelos Standards não havia se realizado. Houve progresso, a mudança é visível, se bem que lenta, e a revolução continua. (ONUCHIC, 2003, p. 4)

Jinfa Cai (2003) diz que, embora pouco se conheça sobre os mecanismos atuais que os estudantes usam para aprender e dar sentido à matemática através da resolução de problemas,

os pesquisadores concordam que no ensinar através da resolução de problemas permanece a promessa de aprendizagem nos estudantes. Muitas das ideias tipicamente associadas a essa abordagem - mudança nos papéis do professor, projetar e selecionar problemas para o ensino, aprendizagem colaborativa, e problematizar o currículo - têm sido extensivamente estudadas, resultando em respostas baseadas em pesquisa para as várias questões frequentemente levantadas sobre o ensino com resolução de problemas.

Souza (2010, p. 121) diz que

A partir de 1990, a abordagem “ensinar **via** resolução de problemas” (Teaching via Problem Solving) passou a ser “ensinar **através** da resolução de problemas” (Teaching through Problem Solving) que é uma metodologia bastante nova na história da pesquisa em resolução de problemas no currículo de Matemática. A diferença entre essas duas abordagens é que a expressão “através de” significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema dado como pedia a expressão “via” que significa “por meio de”.

4.3. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Matemática, como todas as ciências, sofreu uma grande evolução em seus métodos, processos e técnicas na sua organização, na sua relação com as outras áreas de atividade humana e no alcance e importância de suas aplicações. Está, a Matemática, presente em todos os ramos da ciência e da tecnologia, em diversos campos da arte, em muitas profissões e setores de atividades diárias. Por isso, espera-se da escola uma formação sólida para todos os alunos que contribua para seu desenvolvimento pessoal. As oportunidades de os alunos aprenderem e desenvolverem seu conhecimento matemático e a predisposição para a disciplina estão intimamente relacionadas com o modo como aprendem (NTCM, 1991).

No Brasil, os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam

O papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (PCN, 1998, p. 15)

Para Onuchic (1999), a proposta dos PCN está em conformidade, com boa parte da literatura atual e inovadora em Educação Matemática. Entretanto, há pouca discussão quanto à sua operacionalização em sala de aula. Faz-se necessária a apresentação do desenvolvimento de alguns conteúdos matemáticos de acordo com os princípios estabelecidos nos PCN, bem como de relatos de experiência e episódios da sala de aula de Matemática, apontando o

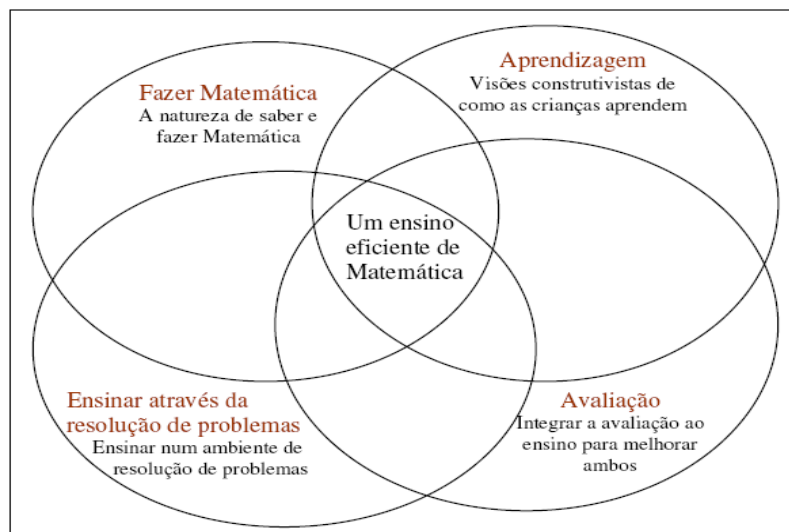
movimento de ida e volta entre teoria e prática. Ressaltamos que o sucesso da operacionalização de uma proposta depende, em grande parte, dos professores que irão implementá-la nas salas de aula e de como se dará a formação desses profissionais nessa perspectiva de trabalho.

Para que os professores de Matemática sejam verdadeiramente eficientes em seu trabalho de ensinar, o diagrama abaixo, apresentado por Van de Walle (2001), envolve trazer juntos quatro componentes básicos:

1. Uma apreciação da disciplina Matemática - o que significa “fazer Matemática”;
2. Uma compreensão de como os estudantes aprendem e constroem ideias;
3. Uma habilidade em planejar e selecionar tarefas, de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas;
4. A habilidade de integrar a avaliação com o processo de ensino para intensificar a aprendizagem e melhorar seu ensino, diariamente.

Van de Walle explica claramente, por meio de intersecções de quatro conjuntos, onde e como está apoiado um ensino eficiente de Matemática, dependendo das ações do professor e dos alunos.

Figura 4 – Diagrama de um ensino eficiente de Matemática



Fonte: Diagrama de Van de Walle (2001, p. 1)

De acordo com os PNME⁸ - Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008)

A resolução de problemas implica o envolvimento numa atividade, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. Para encontrar a solução, os alunos deverão explorar os seus conhecimentos e através desse

⁸ Tradução portuguesa do documento Principles and Standards for School Mathematics - 2000

processo desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos. A resolução de problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pela qual os alunos aprendem matemática. (PNME, 2008, p. 57)

Van de Walle, em 2007, em seu livro, intitulado *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, sexta edição, traduzido para o português por Paulo Henrique Colonese, em 2009, com o nome de “Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula”, considera a resolução de problemas como o foco do currículo da Matemática e diz que o ensino de Matemática através da resolução de problemas deve ser utilizado como a principal estratégia de ensino.

Em outras palavras, o autor diz que

Os estudantes devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas, baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas. (VAN DE WALLE, 2009, p. 57)

Pensando no processo de trabalho para a sala de aula, Pironel, em 2002, em sua Dissertação de Mestrado disse que

As reformas pretendidas na primeira metade do século XX referiam-se ao processo de ensino. Nas três ou quatro últimas décadas, passou-se a falar em ensino-aprendizagem na Educação Matemática e na Educação como um todo. Hoje, com certeza, a avaliação já está sendo agregada ao processo de ensino-aprendizagem como uma forte aliada para uma melhor construção do conhecimento matemático de nossos alunos. A avaliação, na sala de aula de matemática, constitui-se então parte integrante do próprio processo ensino-aprendizagem, e o processo passa a ser visto como um processo ainda mais amplo chamado ensino-aprendizagem-avaliação. (PIRONEL, 2002, p. 39)

Nesse contexto se insere a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nela, o problema é um ponto de partida e os professores, através da resolução do problema, devem fazer conexões com outras ciências e entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2003)

Assim, para que haja aprendizagem, pode-se lançar mão de visões construtivistas de como as crianças aprendem. Para isso é importante saber fazer Matemática, isto é, reconhecer a natureza de saber e fazer Matemática. Também, é preciso que haja uma avaliação integrando-a ao ensino para melhorar ambos. Ainda, ensinar através da resolução de

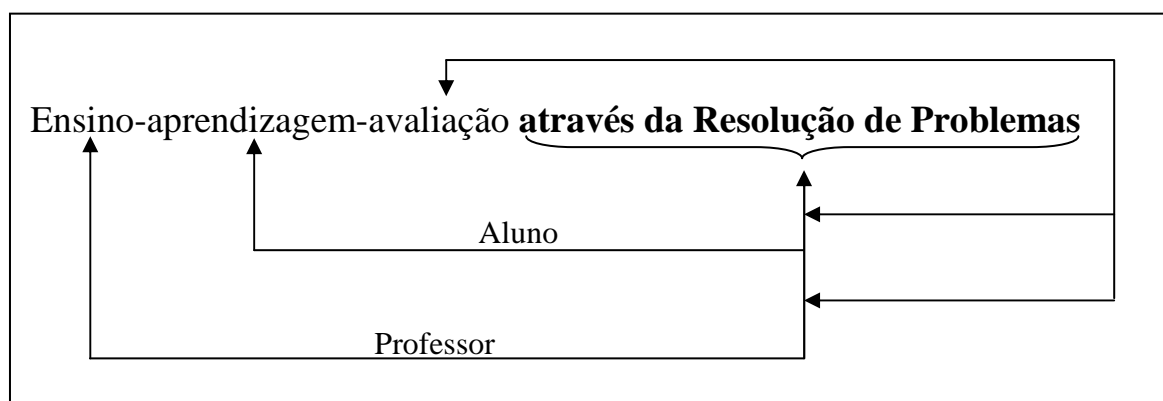
problemas, ou seja, ensinar num ambiente de resolução de problemas é uma forte recomendação.

Assim, Pironel (2002), amplia o conceito de processo ensino-aprendizagem da Matemática para algo maior e mais ambicioso, refletido na metodologia que pretende ensinar Matemática fazendo uso da resolução de problemas, e, então, o GTERP passou a chamá-lo de Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através de Resolução de Problemas.

Dessa forma, entendemos que o papel da avaliação muda. Ela deve ser expandida para além do conceito tradicional de avaliar a partir da realização de provas, e, assim, avaliação do crescimento dos alunos deve ser feita continuamente e, particularmente, durante a resolução do problema.

Segundo Onuchic e Allevato (2011), o GTERP passou a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, dentro de uma dinâmica de trabalho para a sala de aula, que passou-se a entender como uma metodologia. Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que esses três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos e para ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de novo conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário. As autoras chamam a esse processo de trabalho de uma forma Pós-Polya de ver Resolução de Problemas. Podemos perceber também isto no quadro abaixo:

Quadro 2 – A avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem



Fonte: Elaborado pelo autor

Huanca (2006, p. 44) apresentou um quadro que procura fazer a distinção entre essas três palavras, sejam elas consideradas isoladamente ou em composição.

Quadro 3 - Ensino-Aprendizagem-Avaliação

	Ensino	Aprendizagem	Avaliação
Três processos distintos	A responsabilidade do ensino é do professor que visa à aprendizagem do aluno.	Os alunos devem aprender com compreensão. A responsabilidade da aprendizagem é dos alunos. Como? Sabendo relacionar as ideias que têm com as novas ideias que se quer construir.	A avaliação apoia a aprendizagem e informa aos professores quanto ao crescimento dos alunos e, também, informa aos professores quanto ao seu próprio trabalho.
Um processo duplo ligando ensino à aprendizagem	Ensino-Aprendizagem		
	Este processo é um ser maior. É maior do que o ensino. É maior do que a aprendizagem. Acontece simultaneamente durante a construção do conhecimento, através da resolução de problemas, tendo os alunos como co-construtores desse conhecimento.		
Um processo triplo e único de ensinar, aprender e avaliar ao mesmo tempo e no mesmo espaço	Ensino-Aprendizagem-Avaliação		
	Este processo é um ser ainda maior. É maior do que o ensino, do que a aprendizagem e do que a avaliação. Tendo a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem , que passa a ser vista como um processo bem mais amplo chamado ensino-aprendizagem-avaliação. O professor avalia o crescimento dos alunos. Os alunos fazem também sua avaliação destinada a guiar e aumentar sua aprendizagem.		

Fonte: Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Huanca (2006, p. 44)

4.3.1. O “saber fazer” em Matemática?

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nela, o problema é o ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, deve-se fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos, novos conteúdos e novas técnicas operatórias. Entretanto, precisa-se ter uma ideia clara do que seja um problema. Para Onuchic (1999, p.

215), “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”.

De acordo com Van de Walle (2001), problema é qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Em sua concepção, Van de Walle diz que, ensinar Matemática através da resolução de problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. Para ele, o professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve ocorrer. Ainda, dentro desse contexto, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Focalizando a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase “durante”, os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho. Na terceira parte, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. A seguir, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos.

Para Onuchic e Allevato (2011), Fundamentar a Resolução de Problemas nessas concepções e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir.

Segundo Onuchic e Allevato (2004), Van de Walle (2001) e outros autores que abordam a resolução de problemas como um meio de ensinar matemática, dizem que é possível enfatizar:

- A Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar o sentido aos conceitos matemáticos;
- A Resolução de Problemas desenvolve o poder matemático nos alunos, ou seja, a capacidade de pensar matematicamente, de utilizar diferentes e convenientes

estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão de conteúdos e de conceitos matemáticos;

- A Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido; e daí que a confiança e a auto-estima dos estudantes aumenta;
- Os Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios meios;
- A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, trabalhadas pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

Romanatto (2008, p. 1) diz que, nesse novo cenário de práticas educativas,

a resolução de problemas se apresenta como um dos caminhos mais promissores para o “fazer matemática” em nossas salas de aula. Sabemos que toda disciplina tem um corpo de conhecimento e uma lógica peculiar (a sua especificidade). No caso da Matemática, essa especificidade é a resolução de problemas. É o que postulava Descartes: “(...) não nos tornaremos matemáticos, mesmo que decoremos todas as demonstrações, se o nosso espírito não for capaz, por si, de resolver qualquer espécie de problema”.

Trabalhar sobre partes e pedaços de Matemática não é fazer Matemática e nunca resultaria em compreensão. Exercícios resultantes de testes tradicionais podem produzir resultados a curto-prazo, mas os efeitos de longo-prazo devem produzir cidadãos capazes de admitir que não sabem Matemática. O simples domínio de habilidades não significa saber fazer Matemática.

4.3.2. A Resolução de Problemas como metodologia – Dinâmica para a Sala de Aula

As OCEM - Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), nas questões de metodologia, diz que falar de ensino e aprendizagem implica a compreensão de certas relações entre alguém que ensina, alguém que aprende e algo que é o objeto de estudo - no caso, o saber matemático.

As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Desta forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático. (OCEM, 2006, p. 81)

Segundo as OCEM (2006), a aprendizagem de um novo conceito matemático deveria se dar pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito

como última etapa do processo aprendizagem. As orientações, ainda dizem que, nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento.

Segundo Onuchic e Allevato (2011), a Resolução de Problemas como metodologia, trata de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem e a construção de novo conhecimento faz-se presente através de sua resolução. Elas dizem que professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula.

Uma proposta apresentada aos professores, por essas autoras, em 2011, consiste em organizar um **roteiro de atividades** entendida como uma dinâmica de trabalho para a sala de aula, compreendendo as seguintes etapas:

- *Preparação do problema* - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

- *Leitura individual* - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

- *Leitura em conjunto* - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
 - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
 - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

- *Resolução do problema* - A partir da compreensão do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- *Observar e incentivar* – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e as ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

- *Registro das resoluções na lousa* – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- *Plenária* – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- *Busca do consenso* – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- *Formalização do conteúdo* – Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através

da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

4.4. O GTERP frente à Resolução de Problemas

O grupo de estudo e pesquisa GTERP - desenvolve suas atividades no Departamento de Matemática da UNESP – Rio Claro/SP. Foi formado em 1992, embora já se reunisse semanalmente desde 1989, sempre coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic.

O GTERP possui, como principal objetivo, pesquisar as dimensões teórico-metodológicas que subjazem ao processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas, considerando o desenvolvimento do trabalho docente em contextos culturais distintos e as suas interferências na prática de professores que ensinam Matemática, nos diferentes níveis de escolaridade.

O GTERP é um núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produção científica nas linhas de pesquisa Resolução de Problemas e Formação de Professores. As pesquisas realizadas pelos integrantes do GTERP estão pautadas em alguns temas:

- Ensino e Aprendizagem da Matemática;
- Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática;
- A Resolução de Problemas e sua relação com as tecnologias de informação e comunicação;
- A Resolução de Problemas, a História da Matemática e suas contribuições para o Ensino Fundamental, Médio e Superior,
- Nivelamento de estudantes no Curso Superior através da Resolução de Problemas;
- A Matemática Discreta.
- Desenvolvimento de conteúdo matemático através da resolução de problemas e construção de modelos: Uma Proposta para a Formação de Professores de Matemática;
- A Modelização Matemática no contexto da Educação Matemática;

O GTERP, há mais de vinte anos está trabalhando na linha de Pesquisa Resolução de Problemas, produzindo 17 dissertações de Mestrado, sete teses de Doutorado e cinco teses de Doutorado em andamento. Relação de Dissertações de Mestrado e Teses de Doutorado defendidas até o ano de 2013 (em anexo). Envolvidos com o tema Resolução de Problemas e assumindo a concepção de trabalhar Matemática através da resolução de problemas, o Grupo passou a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, dentro de uma

dinâmica de trabalho para a sala de aula, que passamos a entender como uma forma de Filosofia de Educação Matemática mais do que apenas uma metodologia.

Uma descrição dessas dissertações e teses, bem como do trabalho já realizado pelo Grupo, pode ser encontrada em Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004), Onuchic e Allevato (2011) e trabalhos pós (2011) em outros documentos.

Ao apresentarmos as pesquisas do GTERP, destacamos alguns aspectos relevantes e centrais da filosofia de trabalho do Grupo, cujos trabalhos são desenvolvidos na linha de Resolução de Problemas. Sua produção científica tem sido divulgada por meio de capítulos de livros, artigos e trabalhos apresentados em eventos, especialmente em conferências, comunicações científicas e minicursos. As dissertações e teses citadas no quadro abrangem um amplo espectro de pesquisas voltadas a todos os níveis de ensino, todas elas tendo como fio condutor uma estreita e efetiva relação com a sala de aula de Matemática.

Os trabalhos do GTERP como Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas vem se mostrando potencialmente eficaz no campo da Educação Matemática e inclusive em outras áreas.

Onuchic e Allevato (2011), ao analisarem os estudos e investigações desenvolvidos pelo GTERP, sobre “*A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*”, dizem que

destacou-se à nossa atenção o fato de que esta forma de trabalho por nós desenvolvida e pesquisada, em sala de aula de Matemática, poderia ser considerada, mais do que uma metodologia, uma forma de *Filosofia de Educação Matemática*, dado seu alcance ao trabalho de alunos, professores, ensino, aprendizagem, avaliação, trabalho cooperativo e colaborativo, trabalho do professor em sala de aula; reflexão na ação e sobre a ação... A Resolução de Problemas, como praticada por esse Grupo, tem matiz filosófico aliado às filosofias contemporâneas da Educação Matemática. (ONUCHIC E ALLEVATO, 2011, p. 85)

Conforme afirma Bicudo (2010)

A tarefa de Filosofia da Educação Matemática é manter vivo o movimento de ação/reflexão/ação nas atividades realizadas e atualizadas em Educação Matemática, sejam elas de ensino e de aprendizagem, que ocorrem no âmbito escolar, sejam as que ocorrem no mundo-vida, cotidianamente, ou mesmo as concernentes às políticas públicas da Educação, além de outras atividades aqui não mencionadas, mas que cabem no que chamamos de Educação Matemática ou a ela se referem. (BICUDO, 2010, apud ONUCHIC E ALLEVATO, 2011, p. 85)

Onuchic e Allevato (2011) consideram que esta forma de conceber a Filosofia de Educação Matemática tem forte confluência com o que o GTERP tem desenvolvido no tocante à Resolução de Problemas em Educação Matemática. Apoiados na evolução do

conhecimento e das práticas acerca desse tema, e em teorias constituídas nas investigações conduzidas especificamente nessa linha de pesquisa e naquelas relacionadas às formas de construção do conhecimento matemático, o grupo tem refletido, metódica e sistematicamente, a partir das investigações científicas levadas a cabo. Tendo como objetivo desenvolver estudos que, efetivamente, atinjam a sala de aula, tanto a atividade do aluno como a do professor têm sido consideradas, buscando aprofundar conhecimentos e melhor compreender a dinâmica e as implicações do Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no trabalho com Matemática.

Capítulo 5

A Modelização Matemática

Algumas visões mais recentes acerca da natureza da Matemática e do significado da atividade matemática têm convergido no sentido de se considerar a Matemática como a ciência de padrão e ordem. Nela, o aluno deve ter um papel ativo na construção do seu conhecimento, explorando propriedades e relações de forma intuitiva, através da consideração de casos particulares que potenciam a procura de padrões que levem à formulação de conjecturas e à validação de resultados.

Neste capítulo inicialmente será abordada a natureza da Matemática, falando-se de sua essência que consiste em procurar padrões, expressos por regularidades, para podermos compreender o mundo à nossa volta. Em seguida, se falará sobre a Modelagem na Educação Matemática, a partir de uma revisão resumida da literatura sobre os trabalhos de modelagem e será sistematizado o que se entende por modelagem matemática. Posteriormente, serão descritos aspectos relevantes sobre Modelização Matemática que envolve Padrões e Generalização no contexto da Matemática Discreta, vista como eixo importante para modelar problemas matemáticos e levar a compreender o significado do modelo.

A Modelização Matemática enfatiza a importância de saber modelar problemas, condição necessária à formação do aluno no sentido de que: ela desperta o interesse pela Matemática, leva a sentir sua beleza; melhora a busca pela construção de novos conceitos matemáticos; desenvolve a habilidade em resolver problemas; e estimula a criatividade nos alunos. Para nós, implementar a Modelização Matemática em sala de aula e fora dela significa fazer Matemática ao modelar o problema.

5.1. A Natureza da Matemática e da Educação Matemática

De acordo com Devlin (2002), a Matemática começou com o estudo dos números, durante o período egípcio e babilônico, caracterizando-se pelo seu utilitarismo. Com os gregos, começou a ser valorizada a geometria e a Matemática passou a ser vista como o estudo dos números e da forma. Nessa fase impôs-se como uma área de estudo, deixando de ser um simples conjunto de técnicas para medir, contar e calcular.

Desde os alvares da civilização, dos antigos Gregos à “idade da informação”, a Matemática tem vindo a ocupar um lugar importante na história da cultura da humanidade. A partir de finais do século XIX, aproximadamente, “a Matemática passou a ser o estudo do número, da forma, do movimento, da mudança e do espaço, e das ferramentas matemáticas utilizadas nesse estudo.” (DEVLIN, 2002, p.9).

Desde então, tem-se assistido a um crescimento impressionante do conhecimento matemático, motivado pelos progressos verificados nos primeiros estudos matemáticos e pelos novos ramos da Matemática que foram surgindo. Perante este grande crescimento, não tem sido fácil chegar a um consenso na comunidade matemática quanto à definição do que é a Matemática. Como Devlin relata, foi somente nos últimos trinta anos que emergiu uma definição de Matemática com a qual a maioria dos matemáticos está de acordo: A Matemática é a ciência dos padrões. Segundo essa perspectiva, o trabalho do matemático consiste em examinar esses padrões abstratos, que tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais.

Durante muito tempo, disse ele, a Matemática foi apresentada aos alunos como um saber já construído, o que não deixava lugar para a descoberta ou para a experimentação. Um saber que não possibilitava a argumentação. Os conceitos eram apresentados já formalizados, não decorrentes das suas ações e da reflexão sobre elas. Não era dado tempo para sentir a formalização como algo natural e necessário à comunicação de processos e resultados. Favorecia-se assim a construção de uma imagem da Matemática como uma ciência abstrata, acabada, indiscutível, onde a criatividade dos alunos é totalmente nula.

Vale et al. (2006), por sua vez, afirmam que a essência da Matemática consiste em procurar padrões, não só porque os padrões se encontram em varias formas na vida de todos os dias e ao longo da matemática escolar, mas porque também podem constituir-se como um tema unificador.

[...] ao longo dos anos a Matemática tornou-se cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentraram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números, fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas, mas, sim, a compreensão de padrões – padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza. (VALE et al., 2006, p. 7)

Dessa forma, a Matemática revela os padrões ocultos, que nos ajudam a compreender o mundo à nossa volta. Agora, muito mais que aritmética e geometria, a Matemática representa uma disciplina variada, que trabalha dados, medidas e observações da ciência; com

inferência, dedução e prova; e com modelos matemáticos de fenômenos naturais, de comportamentos e de sistemas sociais (National Research Council, 1989, p. 31).

Para Onuchic e Allevato (2009, p. 169),

A Matemática é uma ciência de padrão e ordem. Seu domínio não são moléculas ou células, mas números, probabilidade, forma, algoritmos e mudança. Como uma ciência de objetos abstratos, a Matemática conta mais com a lógica do que com a observação como seu padrão de verdade, embora ainda empregue observação, simulação e mesmo experimentação como meios para descobrir a verdade.

Nesse sentido, ainda que habitualmente a Matemática seja referida como uma ciência exata, pura, constituindo um corpo de conhecimentos construído dedutiva e cumulativamente, com rigor absoluto, é necessário ter-se em conta a prática dos matemáticos e olhar para a Matemática principalmente como uma atividade humana.

Devlin (2002) chamou a Matemática de “ciência dos padrões”, o que a relaciona com a ideia de beleza, abstração e procura de união. Ele também referiu que a Matemática “torna visível o invisível”, referindo-se dessa forma à representação, à modelização e às aplicações da Matemática. Todas essas características conferem à Matemática um papel primordial na Educação Matemática.

Segundo Bass (1997), a cultura matemática continua sua profunda investigação nas estruturas fundamentais de número, espaço, dinâmica, mas, agora, com o poder exploratório e processante da nova tecnologia, ele diz que essas investigações são guiadas parcialmente por uma evolução puramente intelectual, mas, também grandemente, pelas ciências naturais, às quais ela fornece a linguagem e os conceitos para descrição, análise, modelização, simulação.

Para Bassanezi (2002), a ciência é uma atividade essencialmente desenvolvida pelo ser humano, que procura entender a natureza por meio de teorias adequadas. Ele, ainda, diz que a natureza continua existindo e funcionando independente das teorias científicas. O homem utiliza tais teorias para avançar seus conhecimentos que possibilitam, num futuro, tomar decisões e agir corretamente. Para esse autor, a Matemática justamente veio para auxiliar essa ciência, dizendo que

A matemática e a lógica, ciências essencialmente formais, tratam de entes ideais, abstratos ou interpretados, existentes apenas na mente humana - constroem os próprios objetos de estudo embora boa parte das ideias matemáticas sejam originadas de abstrações de situações empíricas (naturais ou sociais). Tais ideias, quando trabalhadas, enveredam-se pelo caminho do estético e do abstrato, e quanto mais se afastam da situação de origem, maior é o “perigo” de que venham a se tornar um amontoado de detalhes tão complexos quanto pouco significativos fora do campo da matemática. (BASSANEZI 2002, p. 17)

Nesse sentido

O objetivo fundamental do “uso” de matemática é, de fato, extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Dessa forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI 2010, p. 18)

Segundo Onuchic (2012), a **Educação Matemática** é relativamente nova, e leva a debates intensos professores de matemática de todos os níveis de ensino, educadores matemáticos trabalhando em um campo de estudos, matemáticos colaborando em currículos, seus conceitos e conteúdos, suas técnicas operatórias e suas muitas e diferentes aplicações.

Para essa autora, a Educação Matemática está modelada para produzir conhecimento matemático apropriado, com compreensão e habilidades para diferentes populações de estudantes. A emergência de uma economia mundial altamente competitiva e tecnológica tem, fundamentalmente, ampliado as demandas da Educação Matemática. A Educação Matemática, diferente da Matemática em si mesma, não é uma ciência exata. Ela é muito mais empírica e inerentemente multidisciplinar. Seus fins não são um fechamento intelectual, mas o de ajudar outros seres humanos, com tudo da incerteza e das muitas tentativas que vincula. É uma ciência social, com seus próprios padrões de evidência, métodos de argumentação e construção de teorias, discurso profissional, etc. Ela tem uma base de pesquisa estabelecida, da qual grande parte foi aprendida nas poucas décadas passadas, e que tem uma importante capacidade de desempenho educacional pelo qual os matemáticos acadêmicos são responsáveis.

5.2. A Modelagem na Educação Matemática

Gazzeta (1989, p.29) conceitua Modelagem como uma relação entre a realidade e a ação, na qual, a partir da realidade, o indivíduo codifica uma dada informação que acaba gerando uma ação. Para ela, a realidade é formada por elementos concretos e abstratos, e o indivíduo “é parte e ao mesmo tempo observador da realidade” e, com isso, complementa que a “Modelagem não apenas cria estratégias, mas também é, por si mesma, uma estratégia de ação sobre a realidade”.

Gazzeta ainda salienta que o processo de Modelagem se inicia a partir de um problema para o qual uma resposta é procurada, e afirma que ela é uma alternativa para a busca do conhecimento. Assim, quando um aluno cria modelos que lhe permitirão elaborar estratégias

para que o problema gerador do modelo matemático seja estudado, compreendido e, até, resolvido, ele está utilizando conceitos, procedimentos e conteúdos matemáticos para esse fim e, dessa maneira, está utilizando a Matemática em um contexto no qual a Modelagem está sendo usada como metodologia de ensino-aprendizagem.

Bassanezi (2002, p. 24) define a modelagem matemática assim

É um processo dinâmico para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), a Modelagem permeia o cenário da Educação Matemática há algum tempo. Mas, os autores dizem que, recentemente, ela passou a integrar também os documentos oficiais do MEC como um possível caminho para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

Esses autores dizem que as aplicações da Modelagem no ensino da Matemática tiveram início no século XX, quando matemáticos puros e aplicados discutiam métodos para se ensinar Matemática. Também eles relatam que a Modelagem se disseminou em alguns países. Seu surgimento no Brasil ocorreu tomando-se por base as ideias e os trabalhos de Paulo Freire e de Ubiratan D' Ambrosio, no final da década de 1970 e começo da década de 1980, os quais valorizam aspectos sociais em salas de aulas. O “toque” especial desses trabalhos era sempre o mesmo: “situações-problema” com o foco no real no cotidiano e em forma de desafios para alunos e professor.

Na década de 1980, a Modelagem ganhou força por meio da influência de trabalhos como os de Aristides Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Rodney Bassanezi, João Frederico Meyer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, que disseminaram a Modelagem valendo-se de cursos para professores e ações em sala de aula. Por meio deles, discussões sobre a elaboração de modelos matemáticos, bem como a maneira em que se elaboram tais modelos, em paralelo com outras sobre o ensino da Matemática, contribuíram para que a Modelagem se tornasse uma linha de pesquisa na Educação Matemática. (BIEMBENGUT, 2009 apud MEYER, CALDEIRA E MALHEIROS, 2011, p. 79)

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 79), dizem que a Modelagem Matemática possui diversas perspectivas, tanto na Matemática Aplicada quanto na Educação Matemática. Também, eles comentam que, no contexto da Educação Matemática, ela pode ser compreendida como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática

ou para o “fazer” Matemática em sala de aula, referindo-se à observação da realidade (do aluno ou do mundo). Partindo-se de questionamentos, discussões e investigações, defronta-se com um problema que modifica ações na sala de aula, além da forma como se observa o mundo.

Ainda Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 80-81), dizem que autores como

Borba, Meneguetti e Hermini (1997), defendem a Modelagem como uma estratégia pedagógica na qual os estudantes que trabalham em grupos são os responsáveis pela escolha do tema a ser investigado, com o auxílio do professor. Nessa perspectiva, os alunos são convidados a estudar e a pesquisar sobre um assunto de interesse deles, e, ao trabalhar com problemas abertos que não se restrinjam à disciplina Matemática, essa perspectiva pedagógica abre-se para a interdisciplinaridade.

Já Barbosa (2001) compreende a Modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a questionar e ou investigar situações com referências à realidade por meio da Matemática. Araújo (2002) caracteriza a Modelagem como uma abordagem na qual problemas não matemáticos, provenientes da realidade dos alunos, são escolhidos por eles e, com ela, por meio da Matemática, tentam encontrar uma solução para o problema dado, sendo a Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2001) o embasamento para as discussões e para o trabalho.

Por outro lado, Caldeira (2009) propõe a Modelagem como uma proposta para educar matematicamente, no sentido de não considerá-la “apenas” como um método de ensino, e sim como uma concepção de ensino e aprendizagem. Tal concepção deve gerar um programa no desenvolvimento do seu processo e, nesse, devem ser incorporadas também, além da Matemática dita universal, outras que por ventura possam advir de situações vivenciadas no processo de sua consecução. Assim, ele deve ser programado, flexível e em espiral, e não rígido e linear.

De modo geral, as etapas previstas, por diferentes autores, para a estruturação de uma atividade de modelagem matemática, contemplam inicialmente a ideia de organização do trabalho com projetos, nos quais se tem a escolha do tema como um ponto de partida da atividade.

De acordo com Biembengut e Hein (2003), os procedimentos para a realização de um projeto de modelagem podem ser organizados em três etapas, subdivididos em subetapas. São eles: interação, matematização e modelo matemático. A interação compreende o reconhecimento da situação-problema e a familiarização com o assunto, incluindo o estudo de livros e revistas, experiências de campo e outras formas de pesquisa. A matematização, entendida, pelos autores citados, como a mais “desafiante”, contempla a formulação e resolução do problema. Esse momento da atividade de modelagem pode conduzir a um conjunto de fórmulas, equações, representações, gráficos, esquemas que levem à resolução do problema com a utilização de conhecimentos matemáticos disponíveis. A última etapa, o

modelo matemático, compreende a interpretação do modelo e sua consequente validação, no sentido de perceber ou diagnosticar a eficiência do modelo produzido.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) dizem que alguns autores costumam reduzir a Modelagem a um método para ensinar Matemática. Entretanto, numa perspectiva mais ampliada, isto é, naquela de ensinar Matemática trabalhando-se sobre um currículo homogêneo e padronizado, a Modelagem tenta resgatar outras formas de se trabalhar a Matemática ao tratá-la com problemas da realidade.

Assumindo as ideias desses autores, a Matemática é aquilo que os profissionais dessa área estão construindo, ou seja, o conhecimento matemático produzido nas academias visando exclusivamente ao seu desenvolvimento. Assim, o matemático puro estuda e aprende Matemática para resolver problemas da Matemática. Já, os matemáticos aplicados tomam a Matemática que os matemáticos puros fazem e a usam como ferramental para estudar, entender e até ajudar a resolver determinados problemas. O Matemático aplicado estuda e aprende Matemática para resolver algo.

Considerando, agora, as questões educacionais,

Pesquisadores matemáticos preocupados tomaram emprestada essa ideia da Matemática Aplicada e colocaram-na no outro pé do tripé chamado “Educação Matemática”. Acontece que, para pegá-la e levá-la para sala de aula, temos de considerar uma variável nova e muito importante: em sala de aula, existem alunos. Tanto na Matemática Aplicada quanto na Pura isso não ocorre, não existem projetos educacionais, ou seja, nos dois outros sustentáculos do tripé não se faz necessário educar matematicamente ninguém, porque eles (os matemáticos aplicados e os puros, junto com seus interlocutores) têm como objetivos estudar e resolver determinado problema e supostamente já possuem um ferramental matemático minimamente suficiente para poder começar a fazer perguntas sobre aquele problema, aquela situação da realidade e a estudar modos de aproximar-lhe soluções viáveis. Eles não são professores. São matemáticos. (MEYER, CALDEIRA E MALHEIROS, 2011, p. 38-39)

Dessa maneira, dizem esses autores que quando deslocamos essa ideia da Matemática Aplicada, sustentada pela Matemática Pura, para as questões educacionais deve sempre existir a consciência de que há ali alunos que precisam aprender Matemática para viver. É necessário, então, conhecer o que esse aluno precisa saber de Matemática, para que precisará dela e como essa Matemática irá chegar até ele. Nesse contexto é que se insere a questão do currículo.

Complementando esses autores dizem que,

É por isso que não consideramos a Modelagem como um método que serve para legitimar algum currículo rígido. A Modelagem é uma perspectiva de educar matematicamente, que vai problematizar também o currículo e usar as ferramentas matemáticas para aquele tipo de problema específico, que está sendo investigado naquele momento.

Isso vai acarretar alguns problemas na escola, para os quais não temos ainda uma solução. Precisaremos discutir a relação da Modelagem com currículo, e suas especificidades, com mais cuidado. Como resolver uma situação em que, hipoteticamente, mesmo que tenhamos discutido, debatido (e resolvido) os problemas advindos dos alunos, e mesmo assim ainda existem conteúdos matemáticos na lista do programa daquele ano que não foram contemplados naquelas situações de sala de aula? Ou seja, como resolver a situação quando não conseguimos dar determinado conteúdo que está posto no currículo? Ou, ainda, quando os alunos nos pressionam a “dar” conteúdos de outros anos – e não o do ano presente? (MEYER, CALDEIRA E MALHEIROS, 2011, p. 40-41)

5.3. A Modelização Matemática no contexto da Matemática Discreta

5.3.1. A Matemática Discreta

Na sequência, sentimos que seria importante trabalhar também Matemática Discreta. Essa Matemática, que era somente desenvolvida na universidade, estava sendo vista por educadores matemáticos como necessária às escolas de nível secundário e, até para alguns, poderia e deveria ser trabalhada em todos os níveis de escolaridade.

Lima et al. (1996), em seu livro didático “A Matemática do Ensino Médio”-Volume 1, dizem que

Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas [...].

A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc.

A linguagem dos conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica. (LIMA et al., 1996, p. 1)

No Capítulo 2 desse seu livro, esses autores falam, na Introdução, sobre números naturais,

Enquanto os conjuntos constituem um meio auxiliar, os números são um dos dois objetos principais de que se ocupa a Matemática. (O outro é o espaço, junto com as figuras geométricas nele contidas.)

Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza.

Os compêndios tradicionais dizem o seguinte: “Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma contagem e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma medição e o resultado é um número real.” (LIMA et al., 1996, p. 25)

O NCTM publicou, em 1991, como livro do ano, o volume “Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12” (Matemática Discreta ao longo do Currículo, K-12). Em seu capítulo 1, Dossey (1991) apresenta a Matemática Discreta como a Matemática para o nosso tempo, dizendo que ela é um ramo da Matemática que cresceu rapidamente em importância na década passada. Este crescimento é devido em grande parte às muitas aplicações de seus princípios em negócios e para seus vínculos próximos à ciência da computação. Entretanto, cidadãos comuns e muitos professores de Matemática nunca ouviram falar sobre ela. O que é isso, perguntam?

Dossey (1991, p. 1) diz que

O dicionário define discreto como “distinto de outros; separado; consistindo de partes distintas, descontínuas”. A Matemática Discreta, então, envolve o estudo de objetos e de ideias que podem ser divididos em partes “separadas” ou “descontínuas”. Assim, a Matemática Discreta pode ser contrastada com a noção clássica da Matemática Contínua, que é a matemática subjacente à maioria dos problemas de Álgebra e do Cálculo. Esses dois tópicos tipicamente usam números reais ou complexos como um domínio para suas funções. A Matemática Discreta, por contraste, é necessária para a investigação de cenários onde as funções são definidas sobre conjuntos de números discretos ou finitos tais como os inteiros positivos.

Para esse autor, a Matemática Contínua é bem apropriada para situações cujo principal objetivo é a medida de uma quantidade. Em cenários de Matemática Discreta, o foco está em determinar uma contagem. Exemplos de situações do cotidiano envolvendo Matemática Discreta podem ser exploradas com os alunos: a tela de uma televisão ou de um computador, formados por milhares de linhas e colunas (matriz) definindo uma coleção de muitos pontos isolados que não formam um conjunto contínuo. As situações acima retratam exemplos da Matemática Discreta.

Segundo Onuchic e Allevato (2012), o interesse pela Matemática Discreta provém desde a Antiguidade, mas sua notoriedade e avanços surgiram com o fim da Segunda Guerra Mundial, com o estudo dos algoritmos e da Matemática Discreta. Elas dizem também que se estendeu pelas pesquisas envolvendo Criptografia, Programação Linear e Teoria das Filas, dos Grafos e dos Jogos e, atualmente, suas aplicações estão em várias áreas do conhecimento como a Economia, a Engenharia, a Administração e as Ciências da Computação.

Para Bogart, a Matemática Finita envolve estudos sobre teoria dos conjuntos, análise combinatória, probabilidades, estatística, teoria dos grafos, e matrizes e aplicações, por exemplo, em teoria dos jogos e programação linear. Não há diferenças marcantes, quanto aos conteúdos, entre o que usualmente e atualmente constitui a Matemática Finita e a Discreta: Cursos de Matemática Finita concentram-se em tópicos para o usuário final, tais como programação linear, estatística, finanças e aplicações de probabilidade, enquanto os de Matemática Discreta concentram-se sobre tópicos para uso futuro, tais como relações de equivalência, indução, recorrência, análise de algoritmos e a ideia de prova. (BOGART, 1991, p. 78 apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2012)

Essas autoras então dizem que os problemas da Matemática Discreta, com frequência, envolvem análise e busca por padrões, que são coleções de objetos que apresentam uma regularidade, ou seja, algo que se repete e que, assim, se define como um modelo.

Em 2007, o NCTM lançou o livro “Navigating through Discrete Mathematics/Grades 6-12” (Navegando através da Matemática Discreta/anos 6-12). Esse livro traz diretrizes para a integração de tópicos de Matemática Discreta em um currículo que é baseado nos Standards 2000, do NCTM – USA. Nele são listados e descritos os tópicos de Matemática Discreta que os Standards 2000 incluem: análise combinatória, iteração e recorrência, e grafos vértice-aresta, onde se entendem por

- Combinatória é a matemática da listagem e da contagem sistemática. Ela facilita a resolução de problemas como, por exemplo, a determinação do número de diferentes ordens para dar carona a três amigos, ou contar o número de diferentes senhas de computador que são possíveis com cinco letras e dois números.
- Iteração e recorrência podem ser usadas para representar e resolver problemas relacionados à sequência de mudança passo a passo, como o crescimento de uma população ou uma quantia de dinheiro variando de ano para ano. Iterar significa repetir, então a iteração consiste em repetir um procedimento, um processo, ou uma regra

repetitivamente. Recorrência é um método de descrever a etapa atual de um processo em termos das etapas anteriores.

- Grafos vértice-aresta são compostos por pontos (chamados vértices) e segmentos de linha ou arcos (chamados arestas) que conectam alguns dos pontos. Esses grafos fornecem modelos e conduzem às soluções de problemas sobre caminhos, redes e relações entre um número finito de elementos. (NCTM, 2007, p. 2-3)

Holliday (1991, p. 87), no seu artigo “Graph Theory in the High School Curriculum” (Teoria dos grafos no Currículo da High School), enfatiza que

Para cursos mais fortes na High School Junior ou Senior, a teoria dos grafos elementar pode ser uma abordagem importante e adequada para a apresentação da Matemática Discreta. A Teoria dos Grafos é um tópico não ameaçador no qual a análise dos resultados padrão pode dar aos estudantes excelentes exemplos da importância de definições precisas, dos argumentos de contagem, provas indutivas, algoritmos e aplicações do mundo real.

Para resolver uma determinada situação-problema, frequentemente se faz um esquema ou esboça-se um modelo inicial, que ajude na organização dos dados e na estruturação das ideias e do pensamento. Com base nesses modelos, consegue-se visualizar melhor qual é a solução para o problema ou, então, definir uma estratégia para sua resolução.

Consultando o documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio, verifica-se que, de forma mais ou menos explícita, a resolução de problemas e a modelagem constituem-se como duas das competências de pontos de apoio de uma alavanca no ensino da Matemática.

Uma das áreas que permite obter-se, com relativa facilidade, uma simbiose entre a resolução de problemas e a modelização⁹ matemática é a Teoria dos Grafos da Matemática Discreta pois, em muitas situações, o tipo de modelos utilizados são grafos, que não são mais do que esquemas nos quais se utilizam pontos ligados por linhas ou arcos atendendo às relações que são estabelecidas no problema.

A Matemática Discreta permite aos estudantes explorar situações-problema ímpares, exclusivas, que não são diretamente abordáveis através da escrita de uma equação ou da aplicação de uma fórmula comum.

Frequentemente pede-se aos estudantes que visualizem a situação através do desenvolvimento de um modelo ou de outra forma de representação. Outras situações pedem analisar casos especiais de desenvolver uma solução considerando um problema mais simples.

⁹ Ação ou efeito de modelizar; Modelizar é estabelecer um modelo; Modelo é o esquema teórico que representa um fenômeno. Assim, entende-se modelização como a criação de modelos.

Sua teoria não requer aprender um grande número de definições e teoremas, mas requer uma mente afiada e inquisitiva.

5.3.2. Os padrões na matemática escolar e a resolução de problemas

Como dito pelo NCTM, em 1989, matemáticos e educadores matemáticos acreditam que padrões são fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. A partir de uma sequência de experimentações, os alunos devem ser encorajados a procurar padrões na Matemática já que “relacionar padrões nos números, na geometria e na medida ajuda-os a compreender as conexões entre os tópicos matemáticos, o que potencia o tipo de pensamento matemático que serve de base à construção de ideias mais abstratas”. Além disso, é defensável o uso de padrões, na tentativa de ajudar os alunos a atribuir um maior significado à experiência ou ao ambiente de aprendizagem que pode levá-los a facilitar a memorização.

A importância do trabalho com padrões na matemática escolar tem-se refletido nas propostas curriculares de vários países. Uma das mais influentes referências na matemática educacional, o NCTM, propõe no documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), para os níveis de ensino K-4, uma norma designada por *Padrões e Relações* e, para os níveis 5-8, a norma *Padrões e Funções*, acabando por se diluir nos níveis de ensino seguintes em referência aos padrões.

Mais tarde, nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), há uma atualização do documento anterior surgindo padrões comuns a todos os níveis de K-12, tais como **Padrões de Conteúdo**: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medida; e Análise de Dados e Probabilidade, que explicitamente descrevem os conteúdos que os estudantes devem aprender nas escolas elementar e secundária, e **Padrões de Procedimento**: Resolução de Problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões; e Representação, que chamam a atenção para os caminhos necessários à aquisição e ao uso do conhecimento do conteúdo elaborado, cada um deles tendo seus programas de ensino estabelecidos para capacitar os alunos em seus vários níveis de escolaridade¹⁰: K-2, 3-5, 6-8 e 9-12. Nesse documento, fazer Matemática envolve descoberta, envolve a procura de padrões, o que potencia a utilização de processos não rotineiros como explorar, conjecturar, provar, modelar, simbolizar e comunicar (NCTM, 2000).

¹⁰ Escola Elementar: K-5; Graus Médios: 6-8; Escola Secundária: 9-12. K-2 correspondem aos nossos Pré, 1º e 2º anos; 3-5 correspondem aos anos 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental I; 6-8 correspondem aos anos 6º, 7º e 8º anos, praticamente ao nosso Ensino Fundamental II; 9-12 correspondem ao nosso Ensino Médio, entretanto o 9º ano corresponde ao nosso 9º ano do Ensino Fundamental II.

De acordo com os PCN (1998, p. 63), é preciso

[...] que os alunos ampliem os significados que possuem acerca dos números e das operações, buscando relações existentes entre eles, aprimorando a capacidade de análise e de tomada de decisões que começam a se manifestar. Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram **regularidades** e propriedades numéricas.

Esse documento também destaca ser interessante propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e, a partir de então, identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-las simbolicamente.

No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medida, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas. O aluno também poderá ser estimulado a construir procedimentos que levam à obtenção das fórmulas para calcular o número de diagonais ou determinar a soma dos ângulos internos de um polígono. (PCN, 1998 p. 118)

No tratamento de informação, por ser um campo que abarca uma ampla variedade de conteúdos matemáticos, seu desenvolvimento pode favorecer o aprofundamento, a ampliação e a aplicação de conceitos e procedimentos como porcentagem, razão, proporção, ângulo, cálculos, etc. Esse estudo também favorece o desenvolvimento de certas atitudes, como posicionar-se criticamente, fazer previsões e tomar decisões ante às informações veiculadas pela mídia, livros e outras fontes (PCN, 1998, p. 134).

Para Moyer-Packenham (2005), um padrão pode ser definido como uma sequência de números ou formas que se prolonga de forma regular, o que faz com que cada termo mude de forma previsível em relação ao anterior. Os alunos tendem a revelar mais dificuldades na exploração de padrões de crescimento do que nos de repetição. Esta situação é preocupante uma vez que, tradicionalmente, a ponte entre a aritmética e a álgebra é feita a partir dos padrões de crescimento. Os padrões de repetição são frequentemente associados ao pensamento sequencial enquanto os de crescimento se associam ao pensamento relacional. Ambos são necessários ao desenvolvimento do pensamento matemático, mas é o segundo tipo que conduz à relação entre duas quantidades variáveis.

Radford (2008) diz que, na exploração de padrões de crescimento de natureza visual, alguns alunos tendem a utilizar a tentativa e erro, ou seja, vão fazendo ajustes sucessivos à expressão geral, com base na substituição da variável por casos particulares, até encontrarem uma que sirva para todos. Nesses casos, o autor considera que os alunos fazem uma série de

abduções que não resultam da identificação de uma regularidade entre as figuras, apenas se constituem como meros palpites.

Esse autor destaca ainda casos em que a utilização do raciocínio recursivo impede os alunos de encontrarem a expressão geral que representa o padrão, apesar de considerar que existe uma generalização nesse procedimento já que, através dessa estratégia, é possível determinar alguns termos da sequência.

5.3.3. A Generalização na Resolução de Problemas

Segundo Polya (1965), a generalização não é um processo imediato mas sim gradual. Começa com tentativas, um esforço para tentar entender os fatos observados, para fazer analogias e testar casos especiais. Estas tentativas iniciais poderão conduzir a uma generalização mais apurada embora nenhuma generalização seja considerada definitiva sem uma demonstração matemática sólida.

Para Mason (1996, p. 65),

a generalização desempenha um papel crucial nas atividades de qualquer matemático, pois ela é uma capacidade inerente ao pensamento matemático. A generalização é o coração da Matemática. Se os professores não têm consciência da sua presença e não têm por hábito propor aos alunos que generalizem e expressem suas generalizações, então não está a ocorrer pensamento matemático.

Segundo esse autor, a utilização de tentativa e erro no estabelecimento da generalização, é uma abordagem muito encorajada na resolução de problemas, principalmente em contextos numéricos. No entanto, no campo da álgebra, propor uma regra, sem saber porque razão ela funciona, pode por vezes resultar em generalizações incorretas. Sendo assim, fundamental é que os alunos tenham em consideração todas as condições do problema, compreendendo a relação entre as variáveis no contexto apresentado.

Segundo Mestre e Oliveira, na Revista Quadrante, da APM – Associação de Professores de Matemática, de Portugal, volume XXI/nº 2/2012, na página 117, pode-se ler que, de acordo com diversos autores, a generalização é um elemento central do pensamento algébrico. A generalização matemática envolve “uma afirmação de que uma propriedade ou técnica é válida para um conjunto de objetos matemáticos”. Nela, para Mason (1996), uma das formas de desenvolver a generalização é a de sensibilizar para a distinção entre olhar para e olhar através, conjugando-se esta última com a capacidade de ver a generalização a partir do particular. Esse mesmo autor acrescenta que o processo de generalizar está relacionado com a

identificação de padrões e propriedades comuns a várias situações e de tentar expressá-los verbalmente ou simbolicamente.

Mestre e Oliveira (2012, p. 117), citando Ellis, dizem que esse autor caracteriza a generalização como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas. Esta perspectiva da generalização atende às interações sociais, às ferramentas, à história pessoal e ao ambiente partilhado por quem se envolve em ações de generalização. Assim, Ellis define a generalização como uma atividade onde as pessoas, dentro de um contexto sociomatemático específico, se envolvem em pelo menos uma das três ações seguintes: (a) Identificam o que é comum entre os casos; (b) Estendem o raciocínio para além do caso original; (c) Derivam resultados mais amplos a partir dos casos particulares.

Nesse sentido, para Mestre e Oliveira (2012), a generalização surge de uma representação coletiva que tem raiz no grupo, ocorrendo através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. As interações dos alunos no grupo suportam e modelam as atividades de generalização, pois são eles que tomam decisões sobre o que tem interesse e o que querem validar. Segundo as autoras, naturalmente o papel do professor é também crucial pela promoção de uma cultura de sala de aula que incentive a partilha de generalizações e o encorajamento de justificar e esclarecer.

5.3.4. A Representação e a Modelização Matemática na Resolução de Problemas

Na modelização matemática, o professor pode optar por escolher determinados modelos, tornando sua aula mais dinâmica, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em que estão, além de obedecer ao programa curricular. É bom que se tenham vários modelos para que se possa optar entre eles e não por eles. O seu aprimoramento ou adaptação cabe ao professor e a seu bom senso.

A modelização no ensino-aprendizagem de Matemática pode ser um caminho para despertar, no aluno, o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece. Pois, ao mesmo tempo em que ele aprende a arte de modelar, ele utiliza os modelos matemáticos criados para generalizar, buscando um padrão em determinadas situações.

Van de Walle (2001), citado por Onuchic (2003a), fala do papel dos modelos no desenvolvimento da compreensão, dizendo que, com frequência, ouve-se que bons professores usam uma abordagem de “pôr as mãos na massa” para ensinar Matemática. Trata-se de uso de materiais manipulativos ou físicos para modelar conceitos matemáticos que são, certamente, ferramentas importantes para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Ele diz

ainda que, na utilização de modelos na sala de aula, podem-se identificar três aspectos: ajudar a desenvolver novos conceitos ou relações; ajudar a fazer conexões entre conceitos e símbolos; e assegurar a compreensão dos alunos.

Kaput apud Van de Walle (2009), define modelização como o processo que parte de fenômenos reais e uma tentativa de matematizá-los. Isso significa que, de algum modo, a matemática é usada para registrar os fenômenos e para procurar padrões ou regularidades que possam, então, ser expressos usando modelos matemáticos como equações, tabelas e gráficos. Os modelos não apenas permitem uma boa descrição dos fenômenos, mas também permitem predições sem a necessidade de realizar realmente parte das experiências adicionais.

Van de Walle (2009, p. 50) diz que o papel dos modelos no desenvolvimento da compreensão é

um clichê em que os bons professores usam uma abordagem manual (concreta, interativa) para ensinar matemática. Modelos manipulativos ou materiais concretos para modelar conceitos matemáticos são ferramentas importantes para ajudar os estudantes a aprender matemática. [...] É importante que o professor tenha uma boa perspectiva sobre como os materiais concretos ou interativos podem ajudar, ou não, os estudantes a construir ideias.

Esse autor disse que um modelo para um conceito matemático se refere a qualquer objeto, figura ou desenho que represente o conceito ou sobre o qual a relação para aquele conceito possa ser imposta. Nesse sentido, ele diz que qualquer grupo de 100 objetos pode ser um modelo do conceito de “centena” porque nós podemos impor uma relação de “100 para 1” ao grupo e a um único elemento do grupo.

Van de Walle (2009) diz que é incorreto dizer que um modelo “ilustra” um conceito. Ilustrar implica mostrar. Isso significaria que, quando você olhasse o modelo, você veria um exemplo do conceito. Tecnicamente tudo que você vê, de fato, com os seus olhos, são os objetos físicos; apenas a sua mente pode impor a relação matemática sobre os objetos. Esse autor conclui dizendo que para uma pessoa que ainda não tenha desenvolvido a relação, o modelo não pode ilustrar o conceito de modo algum.

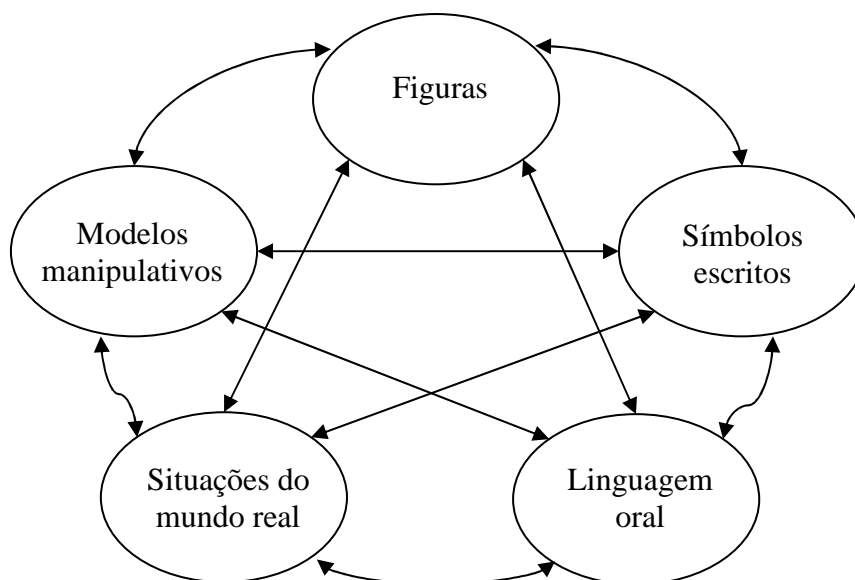
Os modelos pelas quais as ideias matemáticas são representadas são fundamentais para saber como as pessoas podem entender e usar essas ideias. O termo modelo tem diferentes significados. Assim, não é surpreendente que a palavra modelo seja usada em muitos modos diferentes nas discussões em Educação Matemática.

Para Van de Walle (2009), os modelos podem ser pensados como problemas para pensar, problemas para testar e problemas para conversar. Esse autor diz que é difícil, para estudantes (de todas as idades), falar sobre e testar relações abstratas usando apenas palavras. Segundo ele, os modelos dão aos aprendizes algo para pensar, explorar, falar e raciocinar.

Lesh, Post e Behr apud Van de Walle (2009, p. 53),

falam sobre cinco “representações” para os conceitos, duas das quais sendo os modelos manipulativos e as figuras. Eles também consideram que o simbolismo escrito, a linguagem oral e as situações do mundo-real são representações ou modelos de conceitos. Sua pesquisa descobriu que os alunos com dificuldade em traduzir um conceito de uma representação para outra são os mesmos alunos que têm dificuldade em resolver problemas e compreender cálculos [...]. Fortalecer a habilidade de se mover entre e em meio a essas representações fará maior o desenvolvimento dos conceitos dos alunos.

Figura 5 – As cinco representações de ideias matemáticas na modelização



Fonte: Van de Walle (2009, p. 53)

As cinco representações ilustradas na figura 4 são simplesmente uma expansão do conceito de modelo. Quanto mais modos sejam dados aos estudantes para pensar e testar uma ideia emergente, melhor será a chance de eles formarem corretamente e integrarem a ideia em uma rica teia de ideias e compreensão relacional.

Para usar as representações para modelar e interpretar fenômenos físicos, sociais e matemáticos, o documento PNME (2008, p. 79) diz que,

o termo modelo possui muitos significados. Conseqüentemente, o fato de a palavra ser utilizada de diversas maneiras, durante as discussões sobre

Educação Matemática, não constitui surpresa. Por exemplo, modelo é usado para referir os materiais físicos com os quais os estudantes trabalham na escola - modelos manipulativos. O termo modelo é também usado para sugerir exemplificação ou simulação, tal como quando um professor modela o processo da resolução de um problema para os seus alunos.

Porém, outra das suas utilizações trata o termo modelo como se ele fosse grosseiramente, sinónimo de representação. Ainda, esse documento diz que o termo modelo matemático, que é alvo de atenção nesse contexto, significa uma representação matemática dos elementos e das relações presentes numa versão idealizada de um fenómeno complexo. Nesse sentido, os modelos matemáticos podem ser utilizados para esclarecer e interpretar fenómenos e para resolver problemas, ou seja, a modelização matemática, utilizada pelos alunos, para modelar fenómenos físicos, sociais e matemáticos deve ser intensificada ao longo dos anos da escolaridade.

Os alunos do pré-escolar ao 2º ano (em Portugal) poderão modelar a distribuição de 24 bolachas para 8 crianças, utilizando sólidos ou blocos organizados de formas diversas. Ao continuar a deparar-se com representação no 3º, 4º e 5º anos (em Portugal), os alunos começam a utilizá-las para modelarem fenómenos do mundo circundante e para identificarem padrões quantitativos. Enquanto modelam e resolvem problemas inseridos em contextos quer do mundo real, quer puramente matemáticos, os alunos do 2º e 3º ciclos aprendem a utilizar variáveis na representação de valores desconhecidos e a empregar equações, tabelas e gráficos na representação e análise de relações. Os alunos do Ensino Médio criam e interpretam modelos de fenómenos delineados a partir de uma maior diversidade de contextos – incluindo os ambientes físico e social – através da identificação de elementos essenciais dos contextos e da concepção de representação que captem as relações matemáticas existentes entre esses elementos. (PNME, 2008, p.79-80)

Segundo os PNME (2008, p. 163), “Uma das principais responsabilidades do professor consiste em criar um ambiente de aprendizagem no qual a utilização, por parte dos alunos, de diversas representações seja encorajada”. Nesse sentido, então, os professores devem guiar os alunos, de forma eficaz, no desenvolvimento e na utilização de múltiplas representações. Desse modo, os estudantes irão desenvolver o seu entendimento, construir as suas certezas, estruturar os seus processos analíticos e tornar-se confiantes e competentes na construção de conceitos matemáticos.

Nesse documento, pode-se ler que os professores deverão ajudar os alunos a compreender que as representações constituem ferramentas para a modelização matemática e a interpretação de fenómenos de natureza matemática encontrados em contextos diversos. Ou seja, os estudantes necessitam desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações-problema, para investigar relações matemáticas, e

justificar ou refutar conjecturas. Deverão, ainda, aprender a usar tabelas, equações e gráficos para modelar e resolver problemas.

O documento PNME (2008, p. 242) diz que, “os professores podem e devem enfatizar a importância de representar as ideias matemáticas sob uma diversidade de formas”. A modelização desse processo, à medida em que os professores trabalham com seus alunos na resolução de um problema, constitui uma maneira de estimular os estudantes a utilizarem e analisarem representações. As representações não mostram a matemática aos estudantes. Pelo contrário, os estudantes devem trabalhar intensivamente com cada representação em contextos diversificados, e irem se movendo entre representações, de modo a compreenderem como podem utilizar uma representação para modelar ideias e relações matemáticas.

Cada representação revela uma maneira diferente de raciocinar sobre o problema. Ou seja, dar atenção aos diferentes métodos, bem como às diferentes representações, irá ajudar os alunos a compreenderem o poder da visualização de um problema sob diferentes perspectivas. Nesse sentido, a observação das escolhas e representações feitas pelos alunos fornece, ainda, ao professor, informações que lhe permitem avaliar quais os aspectos do problema que os alunos identificam e como raciocinam sobre os padrões e regularidades que surgem nas suas representações.

Segundo os PNME (2008, p. 336) pode-se ler que “é importante que os alunos tenham oportunidades de resolver problemas com números relativamente elevados, estimulantes e significativos, que envolvam a modelização” de fenômenos físicos, sociais ou matemáticos. O objetivo deste tipo da modelização matemática consiste no ganho de experiência na utilização dos conhecimentos matemáticos que os alunos possuem e na valorização de sua utilidade na compreensão e na resolução de problemas de aplicação.

Para Onuchic e Huanca (2013), a Matemática é uma ciência de padrão e ordem que pode nos revelar padrões ocultos que nos ajudam a compreender o mundo ao nosso redor. Hoje a Matemática, muito mais do que aritmética e geometria, é uma disciplina diferente, que trabalha com dados, medidas e observações da ciência, com inferência, dedução e prova e com modelos matemáticos de fenômenos naturais, de comportamento humano e de sistemas sociais. Se a Matemática é uma ciência de padrão e ordem, as representações são os meios pelos quais esses padrões são registrados e analisados.

O documento PNME (2008, p. 242) diz que, “diferentes representações sustentam diferentes formas de pensar e manipular os objetos matemáticos”. Por exemplo, a adição dos n primeiros números ímpares naturais, a área de jardins quadrangulares e a distância

percorrida por um veículo que inicia o seu percurso em repouso e acelera a uma velocidade constante, podem ser representados por funções do tipo $f(x) = ax^2$.

A matemática constitui uma das maiores proezas culturais da humanidade. É a linguagem da ciência, proporcionando meios pelos quais o mundo à nossa volta pode ser representado e compreendido. As representações matemáticas que os estudantes aprendem fornecem-lhes a oportunidade de compreender o poder e a beleza da matemática, apetrechando-os de modo a poderem usar as representações nas suas vidas pessoais, no seu local de trabalho e em estudos futuros. (PNME, 2008, p.427)

Nesse contexto, a modelização matemática requer a utilização de representações, sejam por tabelas, equações, gráficos ou símbolos como ilustraremos a seguir.

Segundo Sadovsky (2010), reconhecer um modelo, escolher uma teoria para tratá-lo, e produzir conhecimento novo a respeito são três aspectos essenciais no processo de modelização. Ela discute a seguir o seguinte problema: **“Um número natural excede em 22 um múltiplo de 5. Qual é o resto de sua divisão por 3?”**

Na modelização apresentada por ela, esse é um problema que envolve números e operações e que admite um modelo algébrico: os números mencionados podem ser representados na forma generalizada $n = 5k + 22$, com k natural. O modelo põe em evidência a estrutura dos números a que o problema se refere e permite produzir números que respondam a essa estrutura. Ao aplicar a expressão generalizada a uma série de números consecutivos k , obtêm-se números que respondam à estrutura dada e cujos restos na divisão por 3 se pretende estudar. Esses números dão lugar a uma primeira exploração do problema, cuja análise permite estabelecer uma regularidade: os restos vão se sucedendo em ordem: 1, 0, 2, 1, 0, 2...

Sadovsky diz que, se analisarmos com mais profundidade, constataremos que sempre que se obtém resto 1, a variável k foi substituída, na expressão generalizada, por um múltiplo de 3; do mesmo modo, os restos 0 correspondem a substituições, na expressão generalizada, por números de resto 1, na mesma divisão por 3; assim como os números de resto 2 correspondem a substituições, na generalização, por números que têm resto 2 quando divididos por 3:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$5k + 22$	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67
Resto da divisão por 3	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1

Segundo essa autora, na exploração do problema, separam-se os números que vão sendo colocados na expressão generalizada em três classes: os múltiplos de 3, os que têm resto 1 ao serem divididos por 3 e os que têm resto 2 ao serem divididos por 3. Na expressão generalizada, substituir a variável por expressões que considerem os restos que permitem ver como o resto do número k – colocado na expressão generalizada – influi no resto do número que se obtém:

$$5 \times 3q + 22 = 5 \times 3q + 21 + 1 = 3(5q + 7) + 1$$

$$5 \times (3q + 1) + 22 = 15q + 27 = 3(5q + 9) + 0$$

$$5 \times (3q + 2) + 22 = 15q + 32 = 3(5q + 10) + 2$$

Embora o problema admita um primeiro tratamento exploratório, a técnica de substituir a variável permite compreender melhor as relações nele envolvidas.

Sadovsky (2010) diz, a atividade de modelização integra conhecimentos de diferentes naturezas. Para abordar o problema é necessário: escolher uma relação pertinente e encontrar os meios para representá-la; realizar explorações e reconhecer nelas algumas regularidades relevantes; utilizar conhecimentos sobre divisão de números inteiros que permitam ajustar o uso do modelo, substituindo variáveis por expressões que representem números com determinado resto quando divididos por 3; saber que transformando uma expressão será possível extrair os restos de todos os números que respondem a uma certa estrutura; usar propriedades aritméticas que permitam transformar as expressões...

Ressaltemos que, ela diz, para fazer funcionar o modelo $5k + 22$, é preciso lançar mão de um conjunto de técnicas, cujo potencial não pode ser estimado caso elas se isolem do problema. Em outras palavras, se propusermos, numa classe, por exemplo, a tarefa de substituir uma variável de uma expressão algébrica por determinada expressão ou por um número como uma atividade em si, isso não serviria para aplicar essa mesma técnica num problema como o que estamos analisando.

Onuchic (2003b), diz que, como uma das grandes dificuldades dos alunos em matemática é saber resolver problemas, deve-se mudar e buscar novos caminhos para trabalhar a matemática em sala de aula. Na visão dessa autora, a compreensão da matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que entender é essencialmente relacionar; compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado de matemática, pelos alunos, é mais forte quando auto-gerado do que quando se lhes é imposto.

Onuchic (2013), citando English, Lesh, Fennewald, disse que esses autores descrevem os aspectos relevantes da PMM (Perspectivas de Modelo e Modelização) explorando as seguintes questões:

- Qual é a natureza da resolução de problemas em várias áreas do mundo de hoje?
- Quais perspectivas orientadas para o futuro são necessárias sobre o ensino e aprendizagem de resolução de problemas, incluindo um foco no desenvolvimento de conceitos matemáticos através da resolução de problemas?
- Como podem os estudos de hábeis resolvidores de problemas contribuir para o desenvolvimento de uma teoria que possa guiar projetos de experiências de aprendizagem que valem a pena?
- Por que modelos e perspectivas de modelação são uma poderosa alternativa para as visões existentes sobre resolução de problemas? (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, apud ONUCHIC, 2013, p.98)

Segundo Onuchic, esses autores falam sobre o item *Avançando no Campo da Pesquisa em Resolução de Problemas e no Desenvolvimento Curricular*, abordando sobre cada um dos subitens desse tópico: A Natureza da Resolução de Problemas do Mundo de hoje; Perspectivas Orientadas para o Futuro sobre o Ensino e a Aprendizagem de Resolução de Problemas; Estudos de Habilidades em Resolução de Problemas e suas Contribuições para o Desenvolvimento de uma Teoria; Desenvolvimento da Teoria: uma PMM sobre o Desenvolvimento de Resolução de Problemas na escola e além dela. E, os autores concluem dizendo que

[...] Chegou a hora de considerar outras opções para avançar na pesquisa em resolução de problemas e desenvolvimento curricular – “*nós temos destacado a necessidade de reexaminar as hipóteses de nível fundamental sobre o que significa compreender conceitos e processos de resolução de problemas matemáticos. Uma poderosa alternativa em que temos avançado é a de utilizar as perspectivas teóricas e as metodologias de pesquisa associadas a uma perspectiva de modelos e modelização (PMM) em ensino, aprendizagem e resolução problemas matemáticos*”. Adotar uma PMM significa ter pesquisadores que estudam desenvolvimentos de modelos e a modelização dos estudantes e que naturalmente utilizam abordagens integradas para explorar o (co)desenvolvimento de conceitos matemáticos, processos de resolução de problemas, funções metacognitivas, disposições, crenças e emoções. (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, apud ONUCHIC, 2013, p. 99)

Segundo Lesh (2008), a modelização pode ser vista como a detecção de padrões que se repetem em situações cotidianas, nas ciências e na matemática para reconstruir mentalmente o problema. Ou seja, ela é considerada como um processo na obtenção de modelos próprios da matemática. A construção de um modelo não se faz de maneira automática ou imediata. Pelo

contrário, requer de certo período de tempo no qual o modelador coloca em jogo seus conhecimentos prévios sobre a matemática, o conhecimento do contexto e da situação e suas habilidades para descobrir, estabelecer e representar as relações existentes, para poder chegar à sua generalização. A partir daí, o estudante pode construir um novo conhecimento matemático e, esse processo de obtenção de um modelo matemático a partir de um problema, se chama modelização matemática.

Zawojewski (2010) disse que, quando envolvido no processo de modelização, os modeladores passam por iterações de expressar, testar e rever o modelo de julgamento. Ao fazê-lo, eles, simultaneamente, melhoram o seu modelo e também desenvolvem uma compreensão mais profunda das restrições e das limitações que ainda existem em cada fase do desenvolvimento do modelo, e aprender a articular (para membros do grupo), os “trade-offs¹¹” e os benefícios de um modelo particular. Portanto, um componente muito importante do desenvolvimento de processos de modelização do indivíduo é o de aprender a interpretar e, eventualmente, produzir diferentes pontos de vista, a fim de facilitar o processo de revisão do modelo encontrado.

Entendemos a modelização como um processo que vai além da ideia generalizada de construir modelos, para situar-se na noção de prática envolvida na resolução de problemas por meio da construção, (re)construção e interpretação de modelos.

¹¹ Equilíbrio entre duas coisas opostas, que estão dispostos a aceitar a fim de alcançar algo.

Capítulo 6

O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa

Neste capítulo retomamos o Modelo de Romberg, avaliando os quatro capítulos anteriores e suas contribuições para esta pesquisa. Posteriormente, apresentaremos nossa Pergunta de Pesquisa apoiada nos “outros” e elaborando novas variáveis que surgiram neste estudo e um Modelo Modificado que nos guiará até o fim desta pesquisa.

Após a investigação feita nos quatro eixos temáticos identificados em nosso Modelo Preliminar: a Formação Continuada do Professor de Matemática; o Trabalho Colaborativo: grupos de estudo na formação continuada do professor; Resolução de Problemas; e Modelização Matemática, entendemos que é necessário modificar nosso Modelo Preliminar.

Devemos ter bem definido que o objetivo deste trabalho é o de formar professores de Matemática, da Educação Básica da região do Cariri Paraibano, procurando formá-los como MULTIPLICADORES junto aos professores dessa mesma região, em termos do *quê ensinar?* e *como ensinar?* num trabalho apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Frente às colocações de nossos “outros”:

- Ao pesquisarmos sobre “a Formação Continuada do Professor de Matemática”, nos aprofundamos nas discussões sobre a formação do professor de matemática na perspectiva de seu desenvolvimento profissional, justificando e entendendo a importância de se trabalhar com professores dessa região;
- Ao longo de nossa investigação a respeito do “Trabalho Colaborativo: grupos de estudo na formação continuada do professor” pudemos entender essa maneira de trabalhar colaborativamente, como uma forma de poder implementar mudanças no ensino e na aprendizagem dos alunos. Também foi importante conhecer três diferentes tipos de experiências envolvendo grupos de estudo. Na verdade, nossa intenção foi a de criar uma proposta de trabalho junto a professores de Matemática do Cariri Paraibano, interessados em participar de um grupo de trabalho colaborativo. O trabalho em grupo, cooperativo e colaborativo destaca o processo de ação, reflexão e

de troca de conhecimentos e de experiências, levando a uma ação social que, sobretudo, colabora na construção de conhecimento novo;

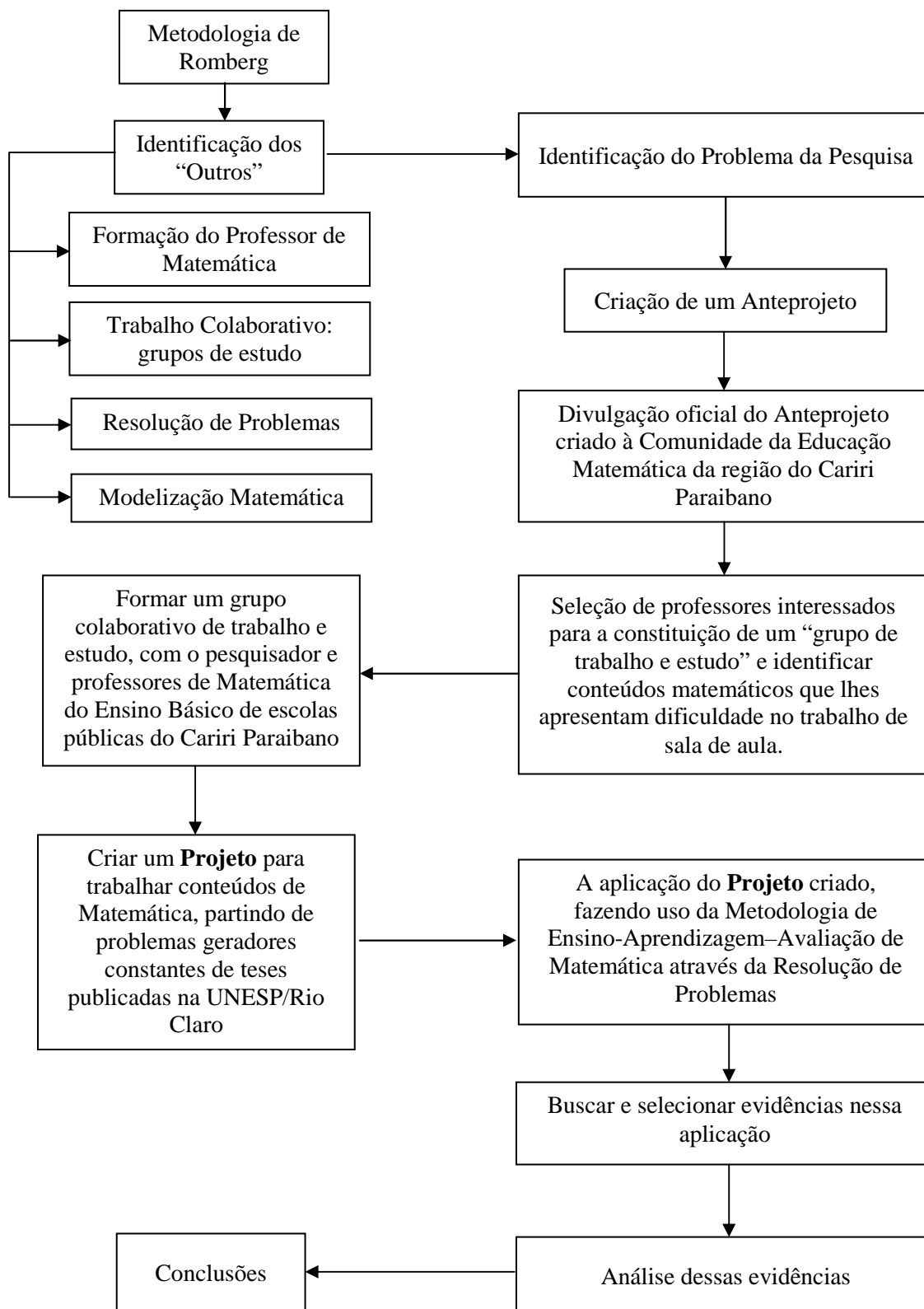
- Ao estudarmos o eixo de “Resolução de Problemas” conseguimos aprofundar nosso conhecimento sobre esse assunto. Nesse estudo, identificamos a gênese, as tendências, as diretrizes e as perspectivas de pesquisa em Resolução de Problemas. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constituiu-se como base de trabalho para a dinâmica de sala de aula. Nossa pretensão foi a de que os professores de Matemática do Cariri Paraibano pudessem chegar a ter autonomia para reconhecer o quê devem ensinar e a forma de como ensinar. Nesse grupo pode-se acreditar que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possa ser a dinâmica principal para atingir nosso objetivo. A Resolução de Problemas é atualmente uma área que congrega várias comunidades de pesquisa que trocam posições e experiências na busca de uma forma diferente de trabalhar em sala de aula com os alunos, vistos como co-construtores do conhecimento construído a partir do problema visando a melhorar o ensino, a aprendizagem e a avaliação;
- Ao nos envolvermos com a “Modelização Matemática”, conseguimos compreender a importância da natureza da Matemática, dos padrões que nos cercam, das regularidades e da generalização de um problema. Sabe-se que, em nossa sociedade, a Matemática está presente na maioria das atividades que o homem realiza. Ela desempenha um papel significativo na vida humana assumindo um caráter prático utilitário. Dentro desse contexto, o aluno deve aprender Matemática modelando os problemas e o professor deve levá-los a, através da Resolução de Problemas, construir conceitos, conteúdos e procedimentos matemáticos.

6.1. O Modelo Modificado

Após terem sido cumpridas as três primeiras etapas de nossa pesquisa, uma nova avaliação do Modelo Preliminar criado subsequente ao nosso Fenômeno de Interesse, pode nos levar à selecionar outras variáveis-chave e à identificação de novas relações entre elas. Portanto essa avaliação poderá nos levar à elaboração de um Modelo Modificado já previsto.

A seguir, descreveremos o Modelo Modificado, detalhando as variáveis que foram detectadas.

Figura 6 – Modelo Modificado



Fonte: Elaborado pelo autor

Esse Modelo Modificado deverá conduzir nossa pesquisa ao longo do desenvolvimento do trabalho da construção da tese que pretendemos defender.

6.2. A pergunta da Pesquisa

Seguindo os passos do primeiro bloco das dez atividades da Metodologia de Pesquisa de Romberg, a pergunta a ser definida deveria estar diretamente relacionada ao nosso Fenômeno de Interesse, ligada ao nosso Modelo Modificado, e refletindo a fundamentação teórica necessária à Formação Continuada do Professor de Matemática sob a perspectiva de seu desenvolvimento profissional; o Trabalho Colaborativo de grupos de estudo; a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e a aplicação da Modelização Matemática.

Todo esse envolvimento permitiu-nos chegar à Pergunta da Pesquisa:

Quais as contribuições, na ação da formação de um “Multiplicador”, formado para atuar junto a professores de Matemática da Educação Básica da região do Cariri Paraibano, teria o trabalho realizado com um grupo colaborativo de professores utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Capítulo 7

Estratégias e Procedimentos da Pesquisa – 2º Bloco de Romberg

Neste capítulo pretendemos, dentro das Atividades 5 e 6 de Romberg, iniciar o Segundo Bloco. Nele, essas atividades nos pedem para selecionar estratégias e procedimentos, a fim de termos subsídios para responder à pergunta da pesquisa. Partindo do Modelo Modificado, devemos definir uma Estratégia Geral “O QUE FAZER?” e um respectivo Procedimento Geral “COMO FAZER?”, para depois colocá-los em ação. Segundo Romberg (1992), para realizar uma pesquisa, a decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona, da visão de mundo na qual essas questões estão inseridas, do modelo que foi construído para explicar o fenômeno de interesse, e da pergunta que se faz a respeito da evidência necessária.

7.1. Estratégias e Procedimentos da Pesquisa

Frente à pergunta da pesquisa: **Quais as contribuições, na ação da formação de um “Multiplicador”, formado para atuar junto a professores de Matemática da Educação Básica da região do Cariri Paraibano, teria o trabalho realizado com um grupo colaborativo de professores utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?**

Para resolver o problema de pesquisa identificado, devemos elaborar um plano de ação para o mesmo. Este plano é focado no Modelo Modificado e deve contemplar as variáveis-chave que nele aparecem. Para isso, Romberg coloca as Atividades 5 e 6, em que o pesquisador deve planejar uma Estratégia Geral (E_G) e seu correspondente Procedimento Geral (P_G), onde estratégias e procedimentos auxiliares são necessários para que se obtenha sucesso no desenvolvimento deste trabalho.

Nossa Estratégia Geral ficou assim definida,

Estratégia Geral (E_G)



Criar um Projeto de Pesquisa: Formação Continuada de Professores de Matemática do Ensino Básico da região do Cariri Paraibano, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esse Projeto tem como objetivo formar alguns desses professores, tornando-os possíveis Multiplicadores, capazes de reproduzir um trabalho, como desenvolvido com eles, em termos de saber “o quê ensinar?” e “como ensinar?”.

Correspondente a essa Estratégia Geral foi selecionado o seguinte Procedimento Geral,

Procedimento Geral (P_G)



Este procedimento se manifesta como um ato da criação de um Projeto de Pesquisa: Formação Continuada de Professores de Matemática do Ensino Básico da região do Cariri Paraibano, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Selecionada a E_G , reconhecemos que ela precisa ser desdobrada em partes que a constituem. Para isso criaremos uma série de estratégias auxiliares olhando para nosso Fenômeno de Interesse, nosso Modelo Modificado e nossa Pergunta da Pesquisa. Correspondentemente, teremos procedimentos auxiliares que permitirão trabalhar o P_G .

Estratégias auxiliares	Procedimentos auxiliares
<p>E₁: planejar uma visita a Monteiro/PB, sede das escolas da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, para discutir a possibilidade de formar-se um grupo colaborativo de trabalho e estudo envolvendo professores de Matemática do Ensino Básico de escolas públicas.</p> <p>E₂: Elaborar um Anteprojeto para o desenvolvimento da análise dessas possibilidades.</p> <p>E₃: Organizar um encontro com professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de escolas públicas do Cariri Paraibano, com o objetivo de constituir um grupo interessado no Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.</p> <p>E₄: Selecionar e constituir um grupo colaborativo de trabalho e estudo com esses professores de Matemática.</p> <p>E₅: Conhecer a história pessoal e profissional de cada professor selecionado em participar do grupo e identificar seus saberes profissionais.</p> <p>E₆: Apresentar uma dinâmica para o trabalho no grupo de estudo.</p> <p>E₇: Elaborar um roteiro de atividades, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como alternativa para trabalhar, com os participantes do grupo.</p> <p>E₈: Aplicar o roteiro de atividades.</p>	<p>P₁: A visita a Monteiro/PB e a reunião com o Gerente da 5ª Gerência Regional de Ensino, escolhida como possibilidade de formação de um grupo colaborativo, de trabalho e estudo, com professores dessa região.</p> <p>P₂: A elaboração do Anteprojeto pretendido.</p> <p>P₃: A organização de um encontro, com professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de escolas públicas do Cariri Paraibano, com o objetivo da constituição de um grupo, onde o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas seria oferecido. Após o término do encontro, numa fala geral, agendar uma entrevista com professores interessados.</p> <p>P₄: A seleção e a constituição de um grupo colaborativo de trabalho e estudo, com professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, dentre os professores participantes do encontro.</p> <p>P₅: Entrevistar cada um desses professores selecionados para conhecer sua história pessoal e profissional e identificar seus saberes profissionais.</p> <p>P₆: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas seria a dinâmica escolhida.</p> <p>P₇: A Criação do Projeto a partir de um roteiro de atividades para cada encontro, visando ao trabalho em sala de aula, envolvendo problemas matemáticos e de modelos, fazendo uso da metodologia escolhida.</p> <p>P₈: A aplicação do roteiro de atividades.</p>

Para atingir o procedimento geral P_G desta Pesquisa – Formação Continuada dos Professores de Matemática do Ensino Básico da região do Cariri Paraibano, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – devemos recorrer a todos os procedimentos auxiliares citados.

7.2. Procedimento Geral da Pesquisa, em Ação

Visando a colocar em ação o Procedimento Geral da Pesquisa será necessário, antes, colocar em ação cada um dos procedimentos auxiliares: P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 e P_7 .

7.2.1. P_1 : A visita a Monteiro/PB e a reunião com o Gerente da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, em ação

Em maio de 2012 marcamos uma reunião com o Gerente, para discutir a possibilidade de formar um grupo colaborativo de trabalho e estudo envolvendo professores de Matemática, visando a uma mudança na forma de trabalho em suas salas de aula.

Sendo o pesquisador docente do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Campus de Monteiro, ele teve a sorte de encontrar o Gerente Regional de Ensino, na Secretaria com sede em Monteiro, logo no início do 1º semestre letivo de 2012. Depois de ter exposto suas reais intenções de formar um grupo colaborativo de trabalho e estudo, com professores de Matemática da Educação Básica de escolas públicas da região do Cariri Paraibano, para desenvolver sua pesquisa em nível de doutorado, o pesquisador recebeu, quase de imediato, importante apoio desse Gerente de Ensino para há realizá-la. Prontamente, ele pediu que se providenciasse um Anteprojeto sobre nossa pesquisa como um documento oficial que iria tratar da “Parceria entre a UNESP, a UEPB e as Escolas da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Educação da Paraíba”.

De acordo com o Gerente Regional, nessa reunião deveríamos também pensar em organizar um encontro que reunisse todos os professores dessa região. O encontro, segundo ele, objetivaria o aprimoramento profissional dos professores e diretores escolares, tanto no que dizia respeito à formação de professores quanto a dos procedimentos metodológicos adotados, tornando-os atualizados com novas perspectivas metodológicas. Desse modo, o Gerente disse que seria bom, nesse encontro, haver oficinas pedagógicas que poderiam fazer com que o professor se interessasse em participar desse projeto.

Nessa reunião, então, estabelecemos e negociamos alguns procedimentos sobre a realização de um encontro. Apesar das preocupações do Gerente de Ensino, sempre

expressamos que a participação dos professores de Matemática, em um grupo colaborativo de trabalho e estudo deveria ser voluntária, pois não queríamos professores convocados com a obrigação de participar do grupo. Também informamos que os encontros do nosso grupo seriam realizados aos sábados pela manhã e à tarde, nas dependências da Universidade Estadual da Paraíba, campus de Monteiro, em que seria cedida uma sala de estudos para o encontro dos professores e um laboratório com computadores e materiais necessários para o trabalho grupo.

7.2.2. P₂: A elaboração do Anteprojeto pretendido, em ação



Anteprojeto do Prof. Roger Huanca apresentado pelo Gerente Maurismar Feitosa Chaves da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, aos Diretores das Escolas da Região do Cariri Paraibano, como proposta de criação de um Grupo Cooperativo e Colaborativo de Trabalho e Estudo com professores da Região.

Nesse procedimento P₂, reproduzimos abaixo na íntegra o texto, de dez páginas, apresentado na ocasião.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática
Campus de Rio Claro/SP



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
Departamento de Matemática
Campus de Monteiro/PB

Projeto de Pesquisa e Extensão:

Formação Continuada dos Professores de Matemática do Ensino Básico, apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, no Cariri Paraibano

Roger Huanca

Professor e pesquisador em Educação Matemática

Instituições envolvidas:

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro/SP

Centro de Ciências Humanas e Exatas da UEPB – Monteiro/PB

Escolas da 5ª Gerência Regional de Ensino – Monteiro/PB

Anteprojeto de Trabalho apresentado à 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, como proposta de criação de um grupo cooperativo e colaborativo de trabalho e estudo com os professores da região.

Monteiro

2012

IDENTIFICAÇÃO**Título do Projeto de Pesquisa e Extensão**

Formação Continuada dos Professores de Matemática do Ensino Básico, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, no Cariri Paraibano.

Público alvo

Professores de Matemática da Rede Pública do Ensino Básico do Cariri Paraibano, no sentido de promover o aprofundamento de seu conhecimento matemático, visando ao trabalho da sala de aula.

Área de abrangência

Município de Monteiro/PB e cidades vizinhas.

Duração do Projeto

4 (quatro) meses

Instituições proponentes

- Universidade Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro/SP
PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
- Universidade Estadual da Paraíba – UEPB – Monteiro/PB
CCHE – Centro de Ciências Humanas e Exatas

Coordenadores do Projeto

Roger Huanca

Lourdes de la Rosa Onuchic (Orientadora)

APRESENTAÇÃO

“Não existe método de ensino que seja individualmente o melhor, como não existe a melhor interpretação de uma sonata de Beethoven”.

George Polya

Ensinar é uma ação complexa que depende em grande parte das personalidades envolvidas e das condições locais. Evidentemente, o ensino não é uma ciência exata com uma terminologia precisa e amplamente aceita. Por isso, os objetivos e métodos de ensino não podem ser discutidos de modo adequado sem que sejam dados exemplos concretos, descritos extensamente e com cuidado. O ensino é mais uma arte do que uma ciência.

A formação de professores continua sendo a função maior da Educação Matemática. Ao longo das últimas décadas, a Educação Matemática tem se firmado como campo profissional e de pesquisa em todo mundo. Como área acadêmica e profissional, a Educação Matemática tem como função primordial a produção de conhecimento especializado voltado para o ensino e a aprendizagem de Matemática e, como consequência, a aplicação desse conhecimento na formação de professores.

Como reflexo do desenvolvimento nessa área, há uma intensificação acerca das discussões sobre o papel da formação de professores de Matemática. Um ponto convergente, nessas discussões, diz respeito à necessidade dos professores vivenciarem práticas formativas que lhes propiciem a reflexão sobre sua profissão. Tais práticas passam por atividades de pesquisa e extensão que necessitam estar em ligação sistemática e constante. Nesse sentido apresentamos a presente proposta de criação de um grupo cooperativo e colaborativo de trabalho e estudos.

Com o objetivo de promover o aprofundamento do conhecimento matemático dos professores da rede pública do Ensino Básico do Cariri Paraibano e, também ao mesmo tempo integrando o Campus de Monteiro da UEPB, no que se refere a Ensino, Pesquisa e Extensão à comunidade, pretendemos, como um processo de extensão da universidade a essa região, trabalhar a formação continuada de seus professores de Matemática.

O Campus de Monteiro da UEPB, através de seu Centro de Ciências Humanas e Exatas, mantém há quase seis anos o Curso de Licenciatura Plena em Matemática. Esse curso tem uma importância acadêmica, social e econômica fundamental para as cidades

do Cariri Paraibano. Ao longo desses seis anos, essa instituição tem atuado na formação de professores de matemática, sendo que muitos desses profissionais formados já se destacam no mercado de trabalho e no meio acadêmico. Apesar das conquistas conseguidas até aqui, observamos que muitos desafios precisam ser superados. Dentre eles, destacamos o desenvolvimento de atividades de extensão que possam aproximar a comunidade externa à universidade e a promoção de ações de formação continuada que aproximem a universidade das escolas do Cariri Paraibano.

O projeto que estamos apresentando não pretende nem pode ser considerado como solução para todos os problemas. No entanto, o vemos como possibilidade de contribuição ao processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática relativo ao trabalho dos professores em suas salas de aula.

JUSTIFICATIVA

Um dos grandes desafios dos professores e dos gestores das escolas públicas é o de tornar a escola um ambiente de produção de conhecimentos no sentido de que haja espaço de aprendizagem para todos os alunos. Com relação à Matemática, sabe-se que ela tem um peso significativo na construção desse conhecimento.

Segundo Onuchic e Allevato(2011), é sabido que sempre houve muita dificuldade para se ensinar e aprender Matemática. Apesar disso, elas argumentam que se reconhece a importância e a necessidade da Matemática para se entender o mundo e nele viver. Nesse sentido, mudar radicalmente nosso sistema educacional em Matemática não é fácil. Essa mudança exige criar uma consciência do quê, do como e do porquê da Matemática. Tal consciência nos faz chegar, entre outras, a duas importantes razões para mudar: (1) para que os cidadãos de amanhã apreciem o papel importante e penetrante da Matemática na cultura em que vivem; (2) para que os indivíduos, que têm interesse em Matemática e talento para ela, sejam expostos à sua verdadeira natureza e extensão.

A melhoria do ensino de Matemática só pode ser alcançada a partir de uma proposta curricular onde sejam definidas atividades, apresentadas por problemas e modelos matemáticos, que sirvam de suporte à aprendizagens significativas.

Segundo Van de Walle (2001), o princípio básico do construtivismo é simplesmente este: as crianças constroem seu próprio conhecimento. De fato, não somente as crianças, mas todas as pessoas, durante todo o tempo, constroem ou dão

sentido às coisas que eles percebem ou pensam. Numa perspectiva construtivista, os problemas e os modelos matemáticos exploratórios em contextos diversificados podem desenvolver o conhecimento e a capacidade matemática dos alunos. Nesse contexto, o professor tem um papel crucial enquanto mediador entre os alunos e seu conhecimento matemático, pois cabe-lhe saber propor variados problemas geradores de modelos matemáticos de aprendizagem que lhes permitam experimentar, conjecturar, pensar e comunicar ideias matemáticas que possam contribuir para uma aprendizagem matemática mais eficaz.

Essa perspectiva exige do professor um conhecimento matemático, curricular e didático, muito mais aprofundado. Por outro lado, uma mudança curricular eficiente depende da habilidade dos professores em assumir novas estratégias para suas práticas, visando ao aumento da compreensão matemática dos seus alunos. Nessa fase de capacitação seria interessante que o professor tivesse à sua disposição materiais didáticos e metodologias de ensino que o ajudassem a atingir novas metas curriculares.

Sabe-se que a aprendizagem depende fortemente do papel do professor e de vários fatores que afetam suas ações como, por exemplo, a interpretação de documentos curriculares e a seleção de problemas e estratégias para o trabalho em sala de aula.

Ao criar, um grupo cooperativo e colaborativo de trabalho, com professores de matemática selecionados, pretendemos oferecer uma proposta de mudança no trabalho desses professores obedecendo às diretrizes curriculares estabelecidas. Como professor do Campus de Monteiro da UEPB e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, terei oportunidade de me aproximar dos professores de Matemática, atuantes em escolas públicas do Cariri Paraibano, com o propósito de extensão universitária que tem, em sua essência, um papel fundamental no desenvolvimento da sociedade.

Para isso faz-se necessário o incentivo e o desenvolvimento de ações sistemáticas, que possam contribuir para a consolidação e o aprimoramento do processo de formação continuada de professores da região, além de estabelecer uma aproximação mais proveitosa da universidade com a escola básica, uma vez que aproximar a escola básica da universidade deve ser um compromisso que pode gerar experiência e aprendizado para ambas as instituições. Nossa expectativa é de que o grupo criado com professores de matemática do Cariri Paraibano seja um elo entre a universidade, a escola básica e demais segmentos da sociedade, através de pesquisa e extensão.

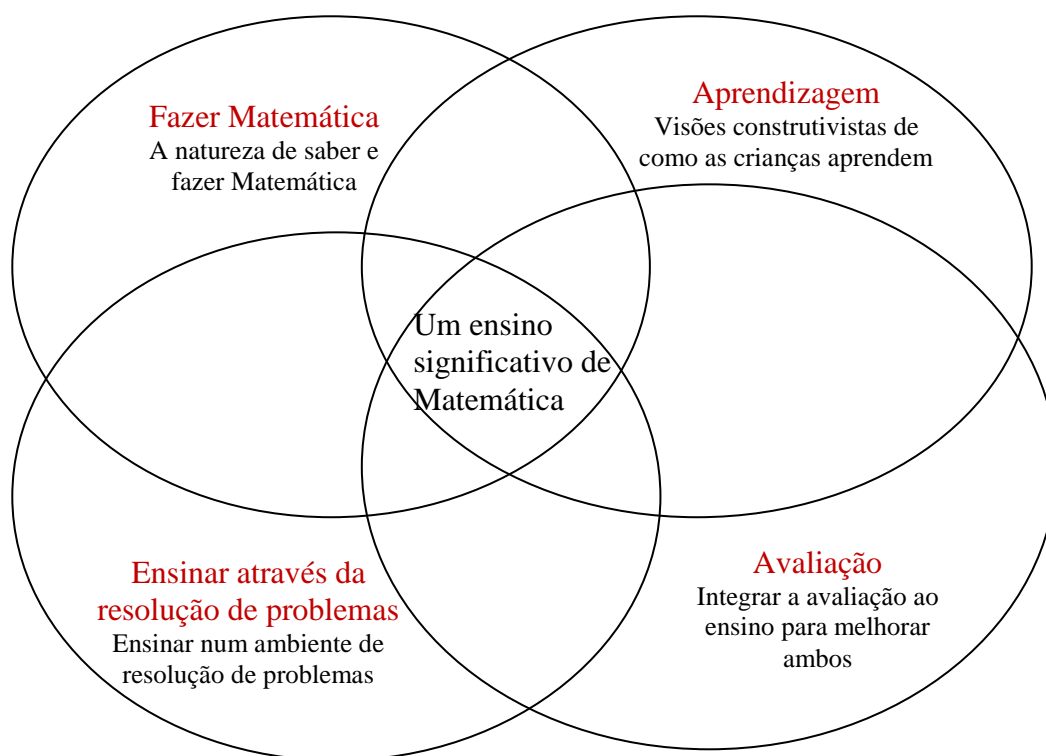
Essa proposta quer que o grupo seja um fio condutor para potencializar ações de seus participantes e a universidade que representamos como pesquisador.

FUNDAMENTAÇÃO

Para que os professores de Matemática sejam verdadeiramente eficientes em seu trabalho de ensinar, o diagrama abaixo, apresentado por Van de Walle (2001), envolve trazer juntos quatro componentes básicos:

1. Uma apreciação da disciplina Matemática - o que significa “fazer Matemática”;
2. Uma compreensão de como os estudantes aprendem e constroem ideias;
3. Uma habilidade em projetar e selecionar tarefas, de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas;
4. A habilidade de integrar a avaliação com o processo de ensino para intensificar a aprendizagem e melhorar seu ensino cotidiano.

Nele, Van de Walle explica claramente, por meio de intersecções de quatro conjuntos, onde e como está apoiado um ensino eficiente de Matemática, dependendo das ações do professor e dos alunos.



Segundo Shulman (1986), o professor deve possuir: Conhecimento da disciplina ensinada (subject knowledge matter) que se refere a conteúdos específicos da disciplina que o professor leciona. Segundo o autor, o professor necessita não somente entender que alguma coisa é assim; o professor precisa, além disso, compreender porque é assim, sobre que terreno sua justificativa pode ser defendida, e sob quais circunstâncias nossas crenças nestas justificativas podem ser enfraquecidas e, igualmente, escondidas.

Esse conhecimento se refere aos conhecimentos necessários para a prática de ensino dos conteúdos referentes à disciplina que o professor leciona. Ter o conhecimento não lhe garante saber como ensiná-lo. Para isso é preciso fazer parte da formação do professor a compreensão dos processos pelos quais os conceitos são construídos; as diferentes metodologias que podem ser utilizadas para viabilizar essa construção; e os materiais e recursos didáticos que podem fazer a mediação entre o conceito e a sua apreensão. Nesse conhecimento há, ainda, a importância de considerar as experiências prévias dos alunos, os saberes construídos em experiências pré-escolares ou paralelas à formação escolar.

Em seu artigo, Fincando Estacas, Kilpatrick (1996), ao falar sobre a formação de professores de Matemática, seja ela inicial ou continuada, como tarefa primordial da Educação Matemática, chama a atenção para o papel da universidade no processo de formação de professores. Para esse autor, a Educação Matemática tem a missão de oferecer, a futuros professores e professores em serviço, o acesso a um conhecimento especializado na área para o exercício da docência em Matemática quando diz que “Os educadores matemáticos universitários precisam trabalhar junto com matemáticos e com professores em sala de aula no desenvolvimento da teoria e da prática.” (Kilpatrick, 1996, p. 99).

Segundo Shulman (1986), o professor deve possuir: Conhecimento pedagógico de conteúdo (pedagogical knowledge matter) que corresponde a uma “mistura especial” entre o conteúdo a ensinar e a pedagogia que pertence unicamente aos professores, e que constitui a sua forma especial de compreensão de como tópicos particulares, problemas ou temas são organizados, representados e adaptados aos interesses e capacidades dos alunos e apresentados para o ensino.

Ainda, para Shulman, o professor deve possuir: Conhecimento curricular (curricular knowledge) que é o conhecimento sobre as alternativas curriculares possíveis para o ensino, ou seja, é o conhecimento dos materiais curriculares alternativos para um

determinado conteúdo (ou tópico), que inclui conhecimentos de teorias e princípios relacionados ao processo de ensino e aprendizagem.

Onuchic e Allevato (2011) dizem que, ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprende, e que a avaliação se realize por ambos. Elas dizem também que o aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento, ou seja levando o aluno a pensar. Nesse instante o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

Nesse sentido assumimos a concepção de trabalhar Matemática através da resolução de problemas, dentro de uma dinâmica de trabalho para a sala de aula, que passamos a entender como uma metodologia. – A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa metodologia, o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Van de Walle (2001) um dos estudiosos que também defendem o trabalho através da resolução de problemas no ensino de Matemática, diz que, muitas vezes, se fala em trabalhar com problemas para ensinar Matemática sem que haja clareza do que é um problema. Há muitas concepções diferentes de problema. Para Van de Walle, um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Para Onuchic e Allevato, problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer.

Fundamentar a Resolução de Problemas nessas concepções, e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. O professor precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e

assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que nem sempre é fácil conseguir.

Dessa forma, apresentamos o trabalho pretendido para os professores como uma iniciativa que poderá agregar e impulsionar tais ações na formação continuada, promovendo atividades que propiciem, aos professores e demais envolvidos, um processo de reflexão constante sobre a Matemática e o seu ensino, fortalecendo a formação de professores de Matemática e a Educação Matemática no Cariri Paraibano.

OBJETIVO DO PROJETO

Este projeto tem como objetivo geral promover o aprofundamento do conhecimento matemático e a capacitação de professores de matemática da Rede Pública do Ensino Básico do Cariri Paraibano, desenvolvendo um trabalho apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, visando a seu trabalho em sala de aula.

Temos para esta pesquisa de campo uma responsabilidade dupla: a de promover a formação matemática continuada dos professores, quer matemática quer metodológica; e a de discutir a forma como esses problemas e modelos matemáticos podem ser construídos, refinados e implementados, de modo a obter uma compreensão matemática profunda.

EXECUÇÃO DAS AÇÕES PROGRAMÁTICAS

Em maio de 2012, marcamos uma reunião com o Gerente da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria da Educação, do Estado da Paraíba, para discutir a possibilidade de um encontro com professores de matemática da região, visando a uma mudança de trabalho em suas salas de aula, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa reunião, estabelecemos e negociamos alguns procedimentos sobre a realização desse encontro.

Assim, pretendemos reunir professores de matemática da 5ª Gerência Regional de Ensino para um encontro, onde falaremos sobre a forma que pretendemos trabalhar com eles, como parte de nossa pesquisa de Doutorado na UNESP/Rio Claro. Nesse encontro, identificaremos os professores interessados e iremos convidá-los para a constituição de um grupo de trabalho e estudo. Um teste de conhecimento matemático

sobre tópicos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio será aplicado. Dentre eles serão convocados alguns professores para uma entrevista.

Uma vez atingida esta etapa, será constituído um grupo de estudo, envolvendo alguns professores. Nesse grupo de estudo será apresentada uma proposta de trabalho, apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como um novo caminho para ensinar os alunos e levar os professores a explorar diferentes tópicos da Matemática.

Inicialmente são previstos 12 encontros que se realizarão aos sábados de manhã e à tarde, nos meses de agosto, setembro, outubro e novembro. O horário indicado é o de permitir aos professores selecionados um horário livre para desenvolver as atividades propostas por nós.

Os encontros possivelmente ocorrerão no Campus de Monteiro da UEPB.

É nossa intenção que, ao finalizar este trabalho os participantes recebam um certificado de capacitação do Programa de Extensão, representando a UEPB, e da 5ª Gerência Regional de Ensino, representando a Secretaria de Estado da Educação do Governo da Paraíba.

7.2.3. P₃: A realização do encontro com professores de Matemática de escolas públicas do Cariri Paraibano, em ação

Pretendendo desenvolver nossa proposta no 2º semestre letivo de 2012. Conversamos com o Gerente de Ensino da Região do Cariri Paraibano sobre nossa intenção de organizar um encontro com os professores de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio de escolas públicas, com o objetivo da constituição de um grupo interessado, onde o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas seria oferecido. Após o término do encontro, numa fala geral, agendaríamos uma entrevista com professores interessados.

O Gerente de Ensino ficou muito feliz com nossa iniciativa e decidimos que o encontro poderia ser realizado no início do 2º semestre letivo.

No mês de julho de 2012, iniciamos a divulgação do encontro no site da UEPB. A imprensa dessa instituição nos solicitou algumas informações que acreditavam ser de suma importância para convocar os professores de Matemática a participar desse evento. As

informações solicitadas foram enviadas por correio eletrônico. Basicamente, além do cartaz informamos o seguinte:

**Centro de Ciências Humanas e Exatas discute formação acadêmica em Matemática no
Campus de Monteiro da UEPB**

O Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), instalado no Campus VI, em Monteiro, realizará, no dia 29 de agosto, o “Encontro de Educadores Matemáticos do Cariri Paraibano”, uma parceria colaborativa entre a UEPB e Escolas da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Educação da Paraíba.

O evento será proposto por ocasião do projeto de pesquisa e extensão do professor Roger Huanca, integrante da UEPB e da Universidade Estadual Paulista (UNESP). Poderão participar educadores da região, estudantes de Licenciatura e Pós-Graduação em Matemática e investigadores e especialistas em Educação Matemática.

As atividades acontecerão no anfiteatro do CCHE, localizado na Rua Abelardo Pereira dos Santos, 76, Centro de Monteiro. As inscrições são gratuitas e devem ser efetuadas entre os dias 13 e 27 de agosto, na secretaria da UEPB Campus VI ou na 5ª Gerência Regional de Ensino em Monteiro.

Com o objetivo de alicerçar para uma nova formação de professores de Matemática, os organizadores do encontro tinham em vista desenvolver interações de profissionais da educação matemática interessados na melhoria do ensino nas escolas públicas, e favorecer reflexões e conhecimentos sobre o ensino e o aprendizado da Matemática.

Constam da programação, uma apresentação musical, a exposição de painéis, discussões sobre a formação Matemática, apresentação do projeto de pesquisa e extensão do professor Roger Huanca, e oficinas. Entre as atividades destinadas às oficinas serão debatidos temas como “A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuindo para o trabalho dos Professores de Matemática em sala de Aula”; “Cine Debate Filme – Ideologia e Didática: escolhas e consequências”; “Ensino-aprendizagem de matemática via exploração de problemas e jogos no contexto de sala de aula”; “Resolução de Problemas Matemáticos e Jogos com Calculadora: Explorando Potencialidades”; “História da Matemática em Educação Matemática: o caso da Teoria dos Números”; “Investigações matemáticas mediadas pelo software Geogebra” e “O uso de materiais concretos de forma reflexiva no ensino da Matemática”.



ENCONTRO DE EDUCADORES MATEMÁTICOS DO CARIRI PARAIBANO

Parceria colaborativa entre Universidade e Escolas da 5ª Gerência Regional de Ensino
Alicerce para uma nova formação de professores de Matemática

Por ocasião do projeto de pesquisa e extensão do professor Roger Huanca (UNESP e UEPB)

29 de agosto de 2012

PAINEL - A formação Matemática inicial e continuada dos professores de Matemática.

OFICINAS – Voltadas para sala de aula.

Público Alvo: Professores de Matemática da rede Pública do Ensino Básico do Cariri Paraibano, Estudantes de Licenciatura e Pós-Graduação em Matemática, coordenadores e diretores de escolas e demais interessados em Educação Matemática.

Inscrições Gratuitas

Período de 13 de agosto a 27 de agosto

Inscrição: Na secretaria da UEPB/Monteiro ou na 5ª Gerência Regional de Ensino – Monteiro/PB.

**Local: Auditório do CCHE – Campus VI - UEPB
Rua Abelardo Pereira dos Santos, 76 – Centro
UEPB-Campus de Monteiro.**

Informações:

UEPB/Monteiro

Telefone: (83) 3351-2970

5ª Gerência Regional de Ensino – Monteiro/PB

Telefone: (83) 3351 - 2175

APOIO:



REALIZAÇÃO:



O Encontro de Educadores Matemáticos do Cariri Paraibano.

Primeiramente houve um planejamento na organização do evento em relação à programação para o dia 29 de agosto de 2012, na cidade de Monteiro, no campus da UEPB.



Na programação constavam palestrantes como a Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, o Prof. Dr. Silvanio de Andrade, a Profa. Dra. Abígail Lins, o Prof. Roger Huanca e outros.

Pela manhã, no painel “A formação Matemática inicial e continuada dos professores de matemática”, a professora Lourdes¹² disse, em sua palestra, que, em Julho de 2006, o Jornal da UNESP publicou o documento Suplemento (ano XX – número 212) cuidando de “Dilemas da Educação”, onde constam entrevistas e artigos dos educadores matemáticos:

- Maria da Graça Nicoletti Mizukami – Formação de Professores: velhos temas e novos contextos;
- Sonia Marrach – Informar não é o mesmo que formar;
- Áurea M. Guimarães – Que acontecimentos fazem da escola esse “inferno”?

¹² Alguns trechos da fala da Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic abordados durante a realização do painel são apresentados neste item com destaques em itálico.

Esse documento diz que *“os problemas que afetam a educação colocam o Brasil numa situação bastante desvantajosa, até mesmo em comparação com outras nações emergentes. O País ostenta índices lamentáveis de reprovação e evasão escolar no ensino básico, registram um percentual muito baixo da população com diploma universitário, além de não ter políticas que garantam o aperfeiçoamento e a remuneração adequados para os professores em todos os níveis de ensino”*.

Disse a professora Lourdes que, em seu artigo *“Formação de Professores: velhos temas e novos contextos”*, Mizukami escreveu *“vivemos em sociedades complexas, em constante mudança, marcadas por contradições: alto grau de desenvolvimento tecnológico x qualificação precária do trabalhador; acesso à informação e construção de conhecimentos x analfabetismo funcional; necessidade de especializações cada vez mais focalizadas na assim denominada ‘sociedade do conhecimento’; pessoas, com acesso rápido, diversificado e atualizado a conhecimentos, convivem com pessoas à margem desse mundo”*. Mizukami disse também que *“A educação surge como arena de análise e investimento e como ferramenta de preparação do cidadão para viver e atuar nesse mundo; As reformas educacionais, nacionais e internacionais trazem, para o foco do debate, a formação docente; Políticas públicas são elaboradas e implementadas objetivando qualificar o professor, tendo em perspectiva a melhoria da aprendizagem do aluno; Os processos de ‘aprender a ensinar e ser professor’ e de ‘desenvolvimento profissional’ são lentos, iniciam-se antes dos cursos de licenciatura e prolongam-se por toda a vida; A escola e outros espaços de conhecimento são importantes nessa formação. Conhecimentos teóricos, assim como aqueles que têm como fonte a experiência pessoal e profissional são objetos de aprendizagens constantes”*.

Ao referir-se à formação de professores, Mizukami diz que *“Focalizando-se a formação de professores da educação básica, questões antigas e recorrentes continuam atuais, considerando-se diferentes contextos. Elas são permeadas tanto pela necessidade de se formar bons professores para cada escola, quanto pelo desafio de oferecer processos formativos pertinentes a um mundo em mudança”*. E, ao referir-se à necessidade de se formar bons professores, levanta algumas questões que poderiam ser assim especificadas

- características, limites e desafios da formação inicial;
- estabelecimento de relações teoria-prática;
- formação continuada e aprendizagem ao longo da vida;
- a escola como um dos locais de aprendizagem e desenvolvimento profissional;

- a construção de comunidades de aprendizagem como instâncias que possibilitam o desenvolvimento profissional de professores; e
- o desenvolvimento de atitude investigativa como ferramenta de desenvolvimento profissional.



A professora Lourdes disse que Sonia Marrach, em uma entrevista ao Suplemento, afirmou que Informar não é o mesmo que Formar. Atualmente, a escola não consegue nem ensinar nem disciplinar e as causas dessa indisciplina, tanto nas escolas públicas quanto nas escolas privadas, têm, como causa primeira, sua história: ‘O processo de democratização da educação – que foi uma tentativa de dar o melhor para todos, feita entre 1930 e 1960 – foi substituído pelo processo de massificação do ensino, iniciado com a reforma de 1971’. O professor perdeu a autonomia intelectual. Quando Sonia Marrach disse que o professor perdeu a autonomia intelectual, ela quer dizer que A “autonomia intelectual do professor é o ‘fundamento de sua autoridade’ e a autoridade do professor é a autoridade do saber”. Essa autora complementa dizendo que, “desde 1968, os estudantes não aceitaram mais a autoridade tradicional”. Com essa perda de autonomia “restaram o autoritarismo e a anomia”, uma “autoridade anônima que é uma forma de persuasão baseada nas técnicas de manipulação da publicidade”.

Áurea M. Guimarães, ainda segundo a professora Lourdes, ao falar da indisciplina na escola, disse que a escola se tornou um sistema aberto, atingida por inúmeros projetos que

oferecem diferentes produtos aos seus usuários. Mas estamos todos em busca de novas formas de luta. Muitos dos acontecimentos que atingem nossas vidas nos lançam em ações, nas quais pensar é enfrentar-se a si mesmo num perpétuo combate entre o que somos e o que desejamos que nós sejamos, entre o trabalho de si para consigo e a comunicação com os outros. Nessa perspectiva, o trabalho do educador não é o de controlar, conformar, nem reformar, mas espalhar os germes de um novo modo de existência que se aventura a inventar novas possibilidades de vida.

Em relação à Formação Matemática Inicial e Continuada do Professor de Matemática, a professora Lourdes disse, *“Sabe-se que o desenvolvimento profissional constitui-se como um processo de crescimento na competência do professor, nas práticas de sala de aula e de fora dela, em sua atividade como educador e como elemento ativo da organização escolar. Ele se relaciona a aspectos didáticos mas, também, a aspectos pessoais relacionando teoria e prática, e de interação com outros professores e com a comunidade”*.

Segundo a professora Lourdes, Ponte (2006) afirma que a formação do professor se realiza de fora para dentro, com ênfase nas carências, compartimentada por aspectos trabalhados a partir da teoria, sendo que muitas vezes sem sair dela. Entretanto, no desenvolvimento profissional, a formação é trabalhada de “dentro para fora”, colocando-se ênfase nas potencialidades, implicando o professor como um todo onde a teoria e a prática são intensificadas e havendo múltiplas formas para sua realização (projetos, trocas de experiências, leituras, reflexão, etc.).

A professora Lourdes, então, levantou um questionamento: - Como articular a Educação Matemática e o desenvolvimento curricular?

Na fala da professora Lourdes, a formação inicial e a formação continuada de professores de Matemática têm de se apoiar na Educação Matemática ao: discutir questões de ordem curricular, identificando as finalidades do ensino da disciplina, da organização e dos conteúdos curriculares, das estratégias e dos métodos de ensino e do uso de materiais didáticos; saber identificar dificuldades na aprendizagem dos alunos; e informar-se sobre as necessidades de sua formação.

O propósito central da Licenciatura em Matemática é o de formar professores de Matemática para atuarem na Educação Básica. O estudante, nessa Licenciatura, deveria aprender Matemática com a finalidade de “Ensinar Matemática”. O saber dos professores é adquirido no contexto de uma história de vida e de uma carreira profissional, ou seja, ensinar supõe aprender a ensinar, aprender a dominar progressivamente os saberes

necessários à realização do trabalho docente. Antes mesmo de ensinar, os futuros professores vivem nas salas de aula e nas escolas – seu futuro local de trabalho – durante aproximadamente 16 anos, ou seja, 15 000 horas.

Segundo essa professora, a docência é uma profissão que se aprende pela vivência da discência, ela ainda diz que, a prática pedagógica é a componente intencional da formação de professores cuja finalidade explícita é a de iniciar os alunos no mundo da prática profissional docente.

Citando Nacarato (2011), disse a professora Lourdes, há que se considerar “*a falta de clareza do que seja o objetivo de investigação, quando se trata da formação docente. Evidentemente, qualquer pesquisa que envolva contextos de educação matemática (aprendizagem dos alunos, análise de livro didático, práticas de sala de aula, tendências metodológicas, crenças, concepções, etc.) tem implicações na formação docente*”.

Então, surge outra pergunta: - E o que dizer da Formação Continuada?

Segundo a professora Lourdes “Cada professor possui uma experiência própria de situações de aprendizagem ou de dificuldade com a Matemática e esses aspectos individuais são constitutivos de sua formação, ou seja, os conhecimentos dos professores são provenientes de várias fontes e construídos em tempos diferentes. Muitas vezes ele se espelha em situações vivenciadas na sua formação anterior ao curso de Graduação”.

Enfim, ao finalizar sua palestra ela diz,

- São suficientes os minicursos que apresentamos ou as palestras oferecidas por pesquisadores como contribuição à formação inicial e continuada?
- Na formação de professores é importante propor situações que levem à reflexão sobre a prática docente, para que o ensino de Matemática seja visto como um processo em constante desenvolvimento e contextualizado às atividades do cotidiano, embora não descartando o “fazer matemática na e pela própria matemática”.
- Entendendo-se que, num processo de formação do professor, além de se utilizarem as modalidades convencionais de comunicação, como seminários, palestras, cursos e oficinas pedagógicas, deve-se recorrer também a formas não convencionais como o uso de recursos que permitam trazer a prática para discussões, a troca de experiências e a implementação de outros métodos pedagógicos.

De início o professor Silvanio¹³ em sua palestra intitulada “A Formação Inicial e Continuada dos Professores de Matemática: Educação Matemática no Ensino Superior, Avanços e Perspectivas” levantou as seguintes questões:

- O educador matemático pergunta-se: de que forma se deve lidar com o conhecimento matemático como conteúdo de ensino?
- Como lidar com o conhecimento matemático num Curso de Licenciatura?
- A Licenciatura pode avançar a prática docente e a prática de sala de aula? Como?
- A sala de aula pode avançar a Licenciatura e a prática docente? Como?
- A Licenciatura tem olhado para o que, cotidianamente, acontece na sala de aula de Matemática?
- O que a Licenciatura pode aprender da prática da sala de aula?
- O que a prática de sala de aula pode colaborar na Licenciatura?

E as responde, dizendo “*Certezas sobre o que é ser um bom professor de Matemática, tal como a de que basta entender o conteúdo para ser um bom professor, passaram a ser destruídas quando os aportes das ciências humanas começaram a ser integrados ao ensino. O matemático, atualmente, tem ações que se diferenciam do educador matemático porque o seu trabalho tem uma função: desenvolver linguagens que permitam a solução de problemas tipicamente matemáticos. Já o educador matemático organiza situações de ensino que permitem a apreensão dos conceitos matemáticos considerados relevantes para a sua época e lugar*”.

Creio que os pesquisadores têm, muitas vezes, uma visão idealizada da sala de aula – para o bem ou para o mal. Muitos deles fazem recomendações para a sala de aula, principalmente no caso da educação básica, sem nunca terem estado lá, nunca terem tido contato com ela, sem terem conhecimento dos problemas que são ali enfrentados no dia a dia. Adotam uma posição de donos da verdade enquanto colocam o professor que ali atua como alguém desqualificado, que precisa que lhe digam o que deve fazer. (ANDRADE, 2008, p. 36)

Ainda, ao falar sobre o mérito de uma pesquisa colaborativa, ele disse “*Acreditamos na pesquisa colaborativa, na qual professores, licenciandos e professores/pesquisadores das universidades trabalham em parceria, não com uma igualdade absoluta, pois cada qual tem seus conhecimentos específicos para a colaboração, mas com paridade no relacionamento, com respeito ao conhecimento do outro e à contribuição que cada um pode dar*”.

¹³ Alguns trechos da fala do Professor Doutor Silvanio de Andrade abordados durante a realização do painel são apresentados neste item com destaques em itálico.



É importante lembrar, diante da fala do professor Silvanio que, *“O ensino de Matemática em cursos de graduação no Brasil ainda é muito tradicional, livresco (ou, o que é pior, às vezes “apostileiro”, cheio de listas de exercícios super mecânicos), preocupado com fórmulas, com regras. As aplicações dos conteúdos, quando são mencionadas em um curso de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, o são no início das aulas, para “motivar” os alunos de uma determinada área. Muitos professores são super autoritários e anti-didáticos, não dialogam com os alunos sobre o conteúdo ensinado. Até alguns anos atrás, os currículos dos cursos de formação de professores de Matemática enfatizavam as disciplinas de Matemática Pura ou Aplicada, em detrimento daquelas que apresentavam aspectos do contexto em que seria desenvolvida a prática dos futuros mestres. Dessa forma, quaisquer tentativas de mostrar aplicações em áreas sociais ou de modificar a forma de ensinar eram alvo de chacota por parte de alguns matemáticos que se consideravam “donos da verdade”. Infelizmente, isso ainda acontece”*.

Para finalizar suas considerações o professor Silvanio ressaltou, nas discussões do painel, que, na Educação Matemática do Ensino Superior, um dos temas que tem preocupado os pesquisadores é a dificuldade dos alunos que chegam ao ensino superior com sérias deficiências em matemática básica. Como lidar com essas deficiências e, ao mesmo tempo,

conseguir aprendizagem significativa nas disciplinas do 1º período? Que matemática básica é essencial para os alunos de graduação? Quais têm sido seus resultados nas pesquisas?

Em sua fala ele disse que *“Uma preocupação comum a todas as pesquisas é a de que seus resultados cheguem à sala de aula, isto é, de que causem interferência real no processo ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Superior. O uso de tecnologias no ensino superior não é garantia de que os alunos compreendem os conceitos. É preciso que o professor saiba explorar esse resultado”*.

À tarde, nesse dia, foram oferecidas oito Oficinas de Trabalho a professores de Matemática da região do Cariri Paraibano participantes do evento.

Oficina 1: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuindo para o trabalho dos Professores de Matemática em sala de Aula.

Apresentação: pelos Profs. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic e Ms. Roger Huanca

Oficina 2: CINE DEBATE FILME – Ideologia e Didática: escolhas e consequências.

Apresentação: pelos Profs. Ms. Sam Thiago Borges e Tony Regy Ferreira

Oficina 3: Ensino-aprendizagem de matemática via exploração de problemas e jogos no contexto de sala de aula

Apresentação: pelo Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Oficina 4: Resolução de Problemas Matemáticos e Jogos com Calculadora: Explorando Potencialidades

Apresentação: pela Profa. Dra. Katia Maria de Medeiros

Oficina 5: Investigações matemáticas mediadas pelo software Geogebra

Apresentação: pela Profa. Ms. Marília Lidiane Chaves da Costa

Oficina 6: História da Matemática em Educação Matemática: o caso da Teoria dos Números

Apresentação: pelo Prof. Ms. José Luiz Cavalcante

Oficina 7: O uso de materiais concretos de forma reflexiva no ensino da Matemática

Apresentação: pelos Profs. Ms. Alessandra Felix de Brito e Júlio Pereira da Silva

Oficina 8: O uso de material didático de manipulação no cotidiano da sala de aula de Matemática

Apresentação: pelo Prof. Ms. Rômulo Alexandre Silva



7.2.4. P₄: A seleção e a constituição do grupo colaborativo de trabalho e estudo, em ação

Após o encerramento do evento organizado, do qual participarão quase 90 (noventa) professores, 35 (trinta e cinco) deles se interessaram pelo nosso grupo. Desses selecionamos 6 (seis). Conversamos com os seis professores selecionados, enfatizando o compromisso que estavam assumindo. Durante a conversa, mencionamos a coleta de dados que seria realizada, por meio de entrevistas e observações feitas por nós, como algo muito importante em nossa pesquisa. Todos os seis professores concordaram com essa coleta de dados. Cada um deles preencheu uma ficha cadastral com alguns dados importantes, como: nome, idade, estado civil, endereço residencial, Gerência de Ensino a que pertencia, Escola onde lecionava, séries/anos e períodos em que lecionava Matemática em 2012, tanto no Ensino Fundamental

quanto no Ensino Médio, formação acadêmica, tempo de magistério, telefone e e-mail para contato. Depois do preenchimento, todas as fichas cadastrais foram assinadas pelos professores.

Os dados das fichas cadastrais foram fundamentais para mantermos contato posterior com os professores. Com isso pudemos agendar entrevistas com todos eles.

Dos seis professores selecionados para participar do grupo de estudo, dois eram do sexo masculino e quatro do sexo feminino.

7.2.5. P₅: Entrevistas com os professores do grupo colaborativo de trabalho e estudo, em ação

Buscando conhecer a história pessoal e profissional de cada professor, logo no início do mês de setembro de 2012 elaboramos um calendário de entrevistas.

As entrevistas aplicadas aos professores que mostraram interesse em participar do grupo de estudo foram do tipo semi-estruturadas, levando em conta a possibilidade de uma maior interação entre o entrevistado e o entrevistador. Essas entrevistas foram gravadas nas dependências da Universidade Estadual da Paraíba.

As perguntas-chave que direcionaram as entrevistas foram:

- ✓ Em qual instituição de ensino superior você se formou? Qual o curso que você concluiu nessa instituição?
- ✓ Como você ensina Matemática na sala de aula? Como seus alunos aprendem Matemática?
- ✓ De que maneira você verifica se seus alunos aprendem os conteúdos ensinados nas aulas de Matemática?
- ✓ Você conhece a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática da Secretaria de Ensino da Educação da Paraíba?
- ✓ Você utiliza essa Proposta Curricular para o Ensino de Matemática para planejar suas aulas?
- ✓ Você conhece os Parâmetros Curriculares Nacionais publicados pelo Ministério da Educação?
- ✓ Você utiliza esses Parâmetros Curriculares Nacionais para planejar suas aulas de Matemática?
- ✓ O que é um problema matemático para você?
- ✓ Como você trabalha a resolução de problemas matemáticos em sala de aula?

- ✓ Tradicionalmente, os problemas têm sido utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos. Qual a sua opinião sobre esta afirmação?
- ✓ Por que você demonstrou interesse em participar de um grupo de estudo sobre Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

A partir desse momento, os professores envolvidos em nossa pesquisa serão citados durante todo o trabalho por os seguintes nomes¹⁴, a saber: **Bruna, Larissa, Sara, Danielle, Ivã e Lucas.**

Bruna, 25 anos, solteira, lecionava há cerca de 3 anos. Em 2012 trabalhava em uma escola da rede estadual de ensino como professora efetiva. Ministrava aulas de Matemática para alunos do 1º ano e 2º ano do Ensino Médio. cursou Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual da Paraíba, localizada em Monteiro (PB). Também estava fazendo Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio (Lato Sensu) na UEPB, situada em Campina Grande (PB). Já havia lido a Proposta Curricular para o Ensino da Matemática, da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, e também a utilizava para planejar suas aulas. Principalmente no curso de Licenciatura, teve uma disciplina de Estágio Supervisionado que possibilitou estudar os Parâmetros Curriculares Nacionais, utilizados por ela para planejar suas aulas de Matemática.

Apresentamos a seguir pontos da transcrição de suas falas que julgamos mais importantes.

Como trabalhava a resolução de problemas matemáticos em sala de aula? (antes de participar no grupo)

Os problemas matemáticos trabalhados em sala de aula por mim antes de participar do grupo posso afirmar que não estavam presentes no dia a dia do trabalho docente, estava totalmente voltado para o seguimento das atividades do livro didático.

Às vezes timidamente, contextualizando, questionando, lendo bastante e tentando entender quais as informações que o problema dá.

¹⁴ Os nomes apresentados são fictícios, visando à proteção dos participantes.

Por que demonstrou interesse em participar de um grupo de estudo sobre Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Para adquirir novos conhecimentos na área, podendo assim trabalhar de uma maneira diferente da tradicional, de maneira que o interesse surja naturalmente [...]. Acho que temos que estar abertos ao novo, a estar mudando algumas metodologias, aprender metodologias novas. Não existe uma única maneira de aprender e nem uma única maneira de ensinar. Nós temos que procurar outras alternativas. Eu acho muito cansativo ficar sempre ali na sala de aula com aulas expositivas e voltadas para a sequência do livro didático. Eu sempre dou uma mudada para não cansar muito meus alunos. Para nós mesmos, fica aquela coisa rotineira, desmotivadora. Então tem que estar fazendo alguma coisa diferente.

Larissa, 37 anos, casada, lecionava há cerca de 18 anos. Em 2012 trabalhava em uma escola da rede Municipal de ensino como professora efetiva. Ministrava aulas de Matemática para alunos do 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental. Coursou Licenciatura Plena em Matemática, na Faculdade de Formação de Professores de Arcoverde, localizada em Arcoverde (PE). Não conhecia a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba. Quanto aos Parâmetros Curriculares Nacionais, os conhecia, mas não os utilizava.

Como trabalhava a resolução de problemas matemáticos em sala de aula? (antes de participar no grupo)

- Trabalhava como resolução de exercícios, após apresentar o conteúdo à turma.

Por que demonstrou interesse em participar de um grupo de estudo sobre Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Gosto muito de estudar e tenho interesse pela minha área de trabalho. No ano de 2009 eu comecei a fazer pós-graduação na UEPB, campus Monteiro e uma das minhas matérias foi “Tendências Metodológicas”. Sinceramente eu nunca tinha tido contato com esse foco de visão da Matemática resolvendo problemas. Eu me interessei

bastante, porque eu gosto de fazer meu aluno pensar. Eu não gosto de deixar ele simplesmente copiando. Me identifiquei com resolução de problemas. O professor Roger na época foi importante para nosso interesse e crescimento profissional, nesta região do Cariri Paraibano. Comecei, mas só fiz as disciplinas. Tenho intenção em concluir. Eu me interessei mais sobre resolução de problemas depois de um artigo que nós lemos sobre “Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas” de Onuchic. A forma como ela coloca resolução de problemas, eu achei isso bem interessante.

Sara, 29 anos, solteira, lecionava há cerca de 1 ano e 6 meses. Em 2012 trabalhava em uma escola da rede estadual de ensino como professora efetiva. Ministrava aulas de Matemática para alunos do 8º ano e 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano e 3º ano do Ensino Médio. Coursou Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual da Paraíba, situada em Campina Grande (PB). Não havia lido a Proposta Curricular para o ensino da Matemática, da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba. Conhecia os Parâmetros Curriculares Nacionais, mas os utilizava bem pouco para planejar suas aulas de Matemática.

Como trabalhava a resolução de problemas matemáticos em sala de aula? (antes de participar no grupo)

Aplicava antes o conteúdo e logo após trabalhava um problema (imaginando que era problema) e eu junto com os alunos respondia, porém era eu quem lia a questão, respondia junto com eles, não esperava que eles pensassem.

É complicado trabalhar problemas, porque como eles (os alunos) não têm muito interesse, não só na Matemática, na parte de Português a interpretação fica bem defasada. Então, a gente precisa inicialmente não trabalhar o problema, mas o problema está falando para eles, colher os dados, anotar, ver onde eles podem começar a mexer.

Por que demonstrou interesse em participar de um grupo de estudo sobre Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Depois de ter participado do encontro oferecido (pelo Projeto da Pesquisa de Roger) para os professores de Matemática da rede estadual do Cariri Paraibano, tive a oportunidade de participar da oficina oferecida pela Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, me encantei com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas. Foi uma oportunidade valiosa para nós professores do Cariri Paraibano. Uma das falas da professora Lourdes foi fundamental para que eu participasse do grupo “Trabalhar com resolução de problemas faz com que o aluno pense e não espere sentado que o professor responda, de imediato, a questão na lousa. Quando o problema se torna realmente um problema gerador que envolve o aluno, o mesmo toma gosto em procurar vários métodos de resolver tais questões”.

Danielle, 27 anos, casada, lecionava há cerca de 1 ano e 6 meses. Em 2012 era professora efetiva e trabalhava em uma escola da rede estadual de ensino. Ministrava aulas de Matemática para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e 1º ano e 2º ano do Ensino Médio.

Cursou Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual da Paraíba, localizada em Campina Grande (PB). Já havia lido a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba. Mas, igual a outros professores da rede que, todo início de ano, na época do planejamento, em vez de sentarem e discutirem a proposta, pegam o planejamento do ano anterior, dão uma lida, mudam as datas e os nomes, passando-o adiante. Também já havia lido os Parâmetros Curriculares Nacionais e procurava planejar suas aulas de Matemática de acordo com o planejamento de cada ano.

Como trabalhava a resolução de problemas matemáticos em sala de aula? (antes de participar no grupo)

Sinceramente utilizava problemas prontos dos livros didáticos, sem averiguar sua aplicação e contextualização, para relacionar com a realidade do alunado, me prendendo muitas das vezes a fórmulas, ou seja, limitando o conhecimento do aluno e trabalhando de forma

mecânica, focada nos resultados, apesar de ser muito preocupada com a explanação e abordagem de conteúdo.

Por que demonstrou interesse em participar de um grupo de estudo sobre Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

O meu maior interesse foi buscar novas metodologias e práticas para melhorar a qualidade das aulas por mim ministradas e, também, não queria ficar igual ha meus colegas que estão há muito tempo na profissão e não buscam mudanças. Muito pelo contrário, o comodismo se tornou uma constante. Sentia a necessidade de mudar mas, até então, não tinha surgido a oportunidade até a apresentação da proposta de trabalhar a matemática através da Resolução de Problemas.

Ivã, 34 anos, casado, lecionava há cerca de 15 anos. Em 2012 trabalhava, como professor efetivo, em duas escolas, uma na rede municipal de educação e outra na rede estadual de ensino. Ministrava aulas de Matemática para alunos de 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano ao 3º ano do Ensino Médio (EJA). Cursou Licenciatura Plena em Matemática, na Autarquia de Ensino Superior de Arcoverde/Aesa, localizada em Arcoverde (PE). Não conhecia a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba. Quanto aos Parâmetros Curriculares Nacionais, os conhecia, mas não os utilizava.

Como trabalhava a resolução de problemas matemáticos em sala de aula? (antes de participar no grupo)

Problemas matemáticos que eu trabalho, muitos deles são do livro didático. [...] Aí, a dificuldade é trabalhar como resolver um problema. Geralmente o livro didático não traz isso. Não existe livro didático “Como Resolver um Problema”. [...] Esse conhecimento de como resolver um problema não está disponível para o estudante. Está disponível para especialistas ou alguém que realmente queira buscar. [...] Quase todos os problemas do livro didático são problemas de aplicação.

Por que demonstrou interesse em participar de um grupo de estudo sobre Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

No momento não tenho uma resposta específica para dar. [...] Na vida nada se apresenta por acaso. [...] No momento em que estou aprendendo ou construindo um conhecimento novo, como é o caso desta proposta metodológica, eu posso ser um multiplicador talvez mais adiante. Assim, nós podemos estar melhorando nosso ensino-aprendizagem da Matemática. [...] Também, acredito que meu interesse se deve, por ser uma metodologia que atrai a atenção e a participação dos alunos e nos ajuda a melhor avaliá-los.

Lucas, 27 anos, união estável, lecionava há cerca 2 anos e 6 meses. Em 2012 trabalhava em uma escola da rede estadual de ensino como professor efetivo. Ministrava aulas de Matemática para alunos de 1º ano ao 3º ano do Ensino Médio e 1º ano ao 3º ano do Ensino Médio (EJA). Cursou Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual da Paraíba, localizada em Monteiro (PB). Conhecia a proposta Curricular para o Ensino de Matemática, da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, bem como a utilizava para fazer o planejamento dos conteúdos para as várias turmas. Quanto aos Parâmetros Curriculares Nacionais, já havia lido muito nas disciplinas de Educação Matemática quando cursava a licenciatura; mas havia utilizado muito pouco para planejar suas aulas de Matemática, justificando que: “até porque no papel é tudo muito bonito, na prática as coisas já são bem diferentes”.

Como trabalhava a resolução de problemas matemáticos em sala de aula? (antes de participar no grupo)

Eu tenho até certa dificuldade. Estou tentando cambiar. [...] Falo para meus alunos: Eu não quero que vocês aprendam fórmulas, eu quero que vocês aprendam a resolver problemas. A vantagem da Matemática, que é uma coisa que nem todos enxergam, é que vocês não precisam resolver com uma fórmula, vocês têm formas para resolver é só pensar. É o que eu tento colocar para meus alunos. Não interessa como você resolveu. Interessa que você consiga resolver.

[...] Nas avaliações, eu tento encontrar o sentido, o que o aluno enxergou e qual foi o raciocínio dele, como pensou

Por que demonstrou interesse em participar de um grupo de estudo sobre Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Por ser um professor recém formado achava a necessidade de conviver com outros professores mais experientes, pois nessa convivência, aprenderia a lidar com eventuais situações cotidianas em sala de aula e, além do mais, tinha sido aluno do professor Roger e já conhecia um pouco de sua forma de trabalhar com a Matemática, o que fez me apaixonar cada vez mais por Resolução de problemas. Eu só espero corresponder à expectativa, interesse até mesmo para o grupo aprender a trabalhar em equipe. [...] Meu interesse e esperança é de multiplicar e aplicar a resolução de problemas em sala de aula para meus alunos e porque não, depois, compartilhar com meus colegas isto. Não vou dizer que é fácil. Mas tenho noção das reais condições e acredito no grupo de estudo.

7.2.6. P₆: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no trabalho com os professores do grupo, em ação

Apoiados em nossas experiências em sala de aula e nas ideias de educadores que também trabalham a sala de aula a partir de problemas, a metodologia de trabalho a ser adotada para o desenvolvimento do curso com os professores é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa pesquisa, essa metodologia se desenvolverá nos encontros, com maior ênfase nas atividades com problemas.

A aprendizagem de Matemática deve ser orientada em uma perspectiva de resolução de problemas. A resolução de problemas não é apresentada como um tema diferenciado e sim como um processo, como um caminho, como uma metodologia que deve impregnar todo o trabalho e proporcionar o contexto em que se pode aprender conceitos e habilidades.

Na visão de Onuchic (1999, p.208),

a compreensão de Matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que entender é essencialmente relacionar [...]. As indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema.

Assim, como Onuchic, acreditamos que, ao ensinar Matemática através da resolução de problemas, o professor estará dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. Nesse sentido, decidimos apresentar aos professores de nosso grupo de estudo a metodologia de “Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas” como um caminho para ensinar, aprender e avaliar Matemática. Pretendíamos prepará-los como multiplicadores que pudessem levar a outros professores, através da resolução de problemas, a condução de seus alunos a construir e compreenderem novos conceitos, novos conteúdos e novos procedimentos matemáticos.

Em nosso entender, a razão mais importante para se trabalhar com a metodologia de “Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”, em sala de aula, é a de auxiliar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias no trabalho feito em cada unidade temática.

Segundo Onuchic e Allevato (2004, p. 221), “a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, ou seja, que tarefas envolvendo problemas ou atividades sejam o veículo pelo qual um currículo deva ser desenvolvido”. Para essas autoras, a aprendizagem será uma consequência do processo de Resolução de Problemas.

Para implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em nosso grupo de estudo decidimos utilizar um roteiro elaborado por Onuchic e Allevato (2011) que apresenta uma dinâmica de trabalho para a sala de aula:

- 1) **Preparação do problema** – Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
- 2) **Leitura individual** – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
- 3) **Leitura em conjunto** – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
 - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
 - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
- 4) **Resolução do problema** – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos

como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, afim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (ONUChic, ALLEVATO, 2011, p.83-85)

Nos encontros, ao idealizar uma sala de aula trabalhada com essa importante metodologia, será possível gerar situações que promovam caminhos favoráveis à construção de conceitos, de conteúdos e procedimentos matemáticos através de problemas e, também, à construção de padrões, modelizando os problemas.

7.2.7. P7: A Criação do Projeto, para o grupo de professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, envolvendo problemas matemáticos e modelização, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em ação

O procedimento **P7**, posto em ação, leva à criação do Projeto, cuja meta é o de formar professores dentro de um trabalho apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Isto é, pensamos na possibilidade de trabalhar com professores de Matemática de escolas públicas do Cariri Paraibano, participantes de um grupo colaborativo de trabalho e estudo.

Este projeto foi estruturado para ser desenvolvido em um grupo colaborativo de trabalho e estudo, formado por seis professores de Matemática da rede municipal e estadual de ensino, já identificados em nossa pesquisa, e um doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, identificado por seu nome real, Roger.

Para a criação deste projeto foi necessário, primeiramente, pesquisar sobre Formação do professor de Matemática, dando destaque à Resolução de Problemas e à Modelização Matemática. Qual a importância desse projeto na formação desses professores? Como se comportaria cada professor perante a implementação e o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? Como construir esse projeto? Porque se faz necessário conhecer e dominar essa metodologia, especificamente no ensino de Matemática em sala de aula?

A Resolução de Problemas tem um papel fundamental, na formação do professor, por oferecer estratégias teóricas e práticas para o desenvolvimento profissional da ação pedagógica do professor numa sala de aula. Vemos, também, que a Resolução de Problemas, para os cursos de formação de professores é importante e necessário para que eles sejam multiplicadores nas escolas.

O objetivo do projeto é o de capacitar os professores para serem multiplicadores, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Enviamos um anteprojeto do trabalho para ser realizado no curso, intitulado *Formação Continuada dos Professores de Matemática do Ensino Básico, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, no Cariri Paraibano*. O anteprojeto foi aceito pela 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba.

Depois de apresentar o anteprojeto e de ele ser aceito, em conversa com minha orientadora, começamos a pensar na criação do projeto para ser trabalhado por nós com professores de Matemática. Esse projeto seria desenvolvido na UEPB, Campus Monteiro, num curso que seria oferecido a partir do 2º semestre de 2012, em setembro, outubro, novembro e dezembro, tendo como sujeitos da pesquisa os seis professores selecionados, com encontros aos sábados, manhã e tarde, a ser desenvolvido e ministrado pelo pesquisador.

Então, a partir daí, passamos à elaboração de um projeto, pensando poder contribuir para a formação de um professor que pudesse promovendo uma aprendizagem com compreensão para seus alunos, onde planejamos desenvolver cada encontro em dois momentos.

Primeiramente, precisaríamos apresentar uma fundamentação teórica e, para isso, buscou-se em literatura, nacional e/ou internacional, suporte para apoiar a ideia de um trabalho, com professores, visando ao ensino e a aprendizagem da Matemática. Dessa forma, foram procuradas leituras relacionadas à Formação Continuada de Professores de Matemática: suas crenças e concepções sobre Matemática, sobre Resolução de Problemas e sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Também, buscamos na literatura textos relacionados à Didática da Matemática e à Modelização Matemática.

Já, para o segundo momento, seria adotada uma dinâmica de trabalho em grupos, com o objetivo de vivenciar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Também, apresentaríamos problemas que iriam servir como geradores de novos conhecimentos, de acordo com a metodologia adotada. Além disso, quando necessárias, apresentaríamos questões que exigissem reflexão.

Para a implementação desse curso, criamos um roteiro de atividades a ser desenvolvido nos encontros programados, composto por textos, problemas e tarefas extra-classe. Para todos os encontros foram propostas tarefas extra-classe por acreditarmos que elas se realizam no momento em que o professor reflete, revê sua prática, podendo consolidar os conteúdos trabalhados.

Nesse roteiro de atividades constam leituras de alguns textos criados por nós, outros extraídos de livros adaptados à situação de estudo pretendida para aquele encontro e, também, serão retirados problemas de teses orientadas pela coordenadora do GTERP.

A seguir apresentamos um cronograma dos 12 encontros idealizados para o trabalho do grupo selecionado, cada um deles com atividades a desenvolver. Esperamos que o

trabalho, por nós planejado, ajude esses professores a consolidarem e organizarem seus conhecimentos básicos de Matemática e, se possível, sanarem suas dificuldades.

7.2.7.1. Roteiro de Atividades

Selecionamos, para este projeto, textos que tratam as questões:

“O que ensinar?” – conteúdo – o conteúdo deve ser visto como uma fundamentação abrangente recomendada para todos os estudantes e não somente como uma lista de ações na qual se possa fazer escolhas.

“Como ensinar” – procedimento – é o processo que exhibe padrões que são descrições daquele ensino de matemática que pode capacitar os estudantes a saber e saber fazer.

1º Encontro: Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Objetivo geral:

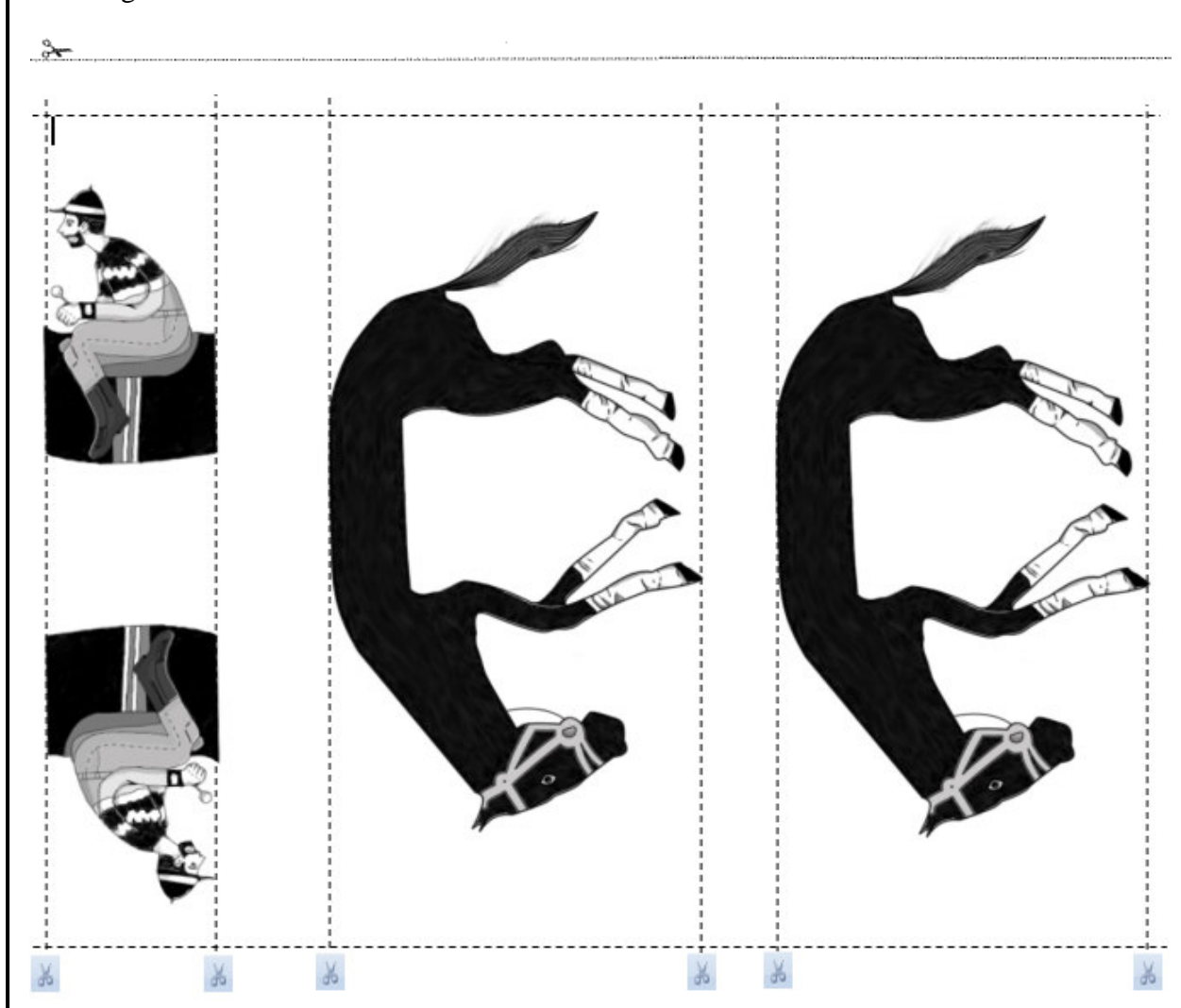
Mostrar uma metodologia de trabalho para a sala de aula, fazendo uso da Resolução de Problemas – a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Momentos do encontro:

1. A exposição, pelo pesquisador, sobre a metodologia adotada e a apresentação da dinâmica de trabalho do curso.
2. Proposição de problemas: Dado o problema ao grupo, é dado o tempo necessário para sua resolução, a resolução, por escrito, é entregue ao pesquisador, com as devidas justificativas do grupo.
3. Proposição de tarefa extraclasse
 - Problemas de fixação
 - Leitura de um texto a ser resenhado.

Problema 1: Problema dos cavalinhos e dos cavaleiros

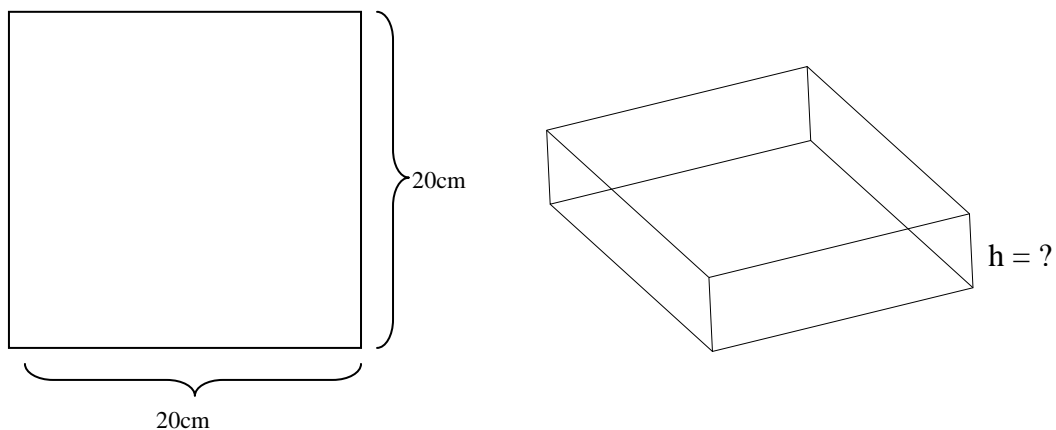
Recorte as figuras abaixo, em três pedaços. O recortar deve deixar os cavalos separados, mas os cavaleiros devem ficar juntos, mantendo-se a faixa branca que há entre o par de cavaleiros. O desafio é colocar cada cavaleiro sobre um cavalo, sem separar os cavaleiros, nem dobrar, nem rasgar nenhum deles.

**Objetivos do problema:**

- Envolver o espírito de trabalho em grupo.
- Fazer uma introdução do que se entende por problema, ou seja, “o que é um problema?”

Problema 2: Problema da caixa de papel

Dada uma folha de papel, de 20 cm por 20 cm. Qual deve ser a altura da caixa (quando dobrar) para que o volume seja máximo?

**Objetivos do problema:**

- Envolver conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio no modelo apresentado.
- Modelizar o problema.

Tarefa extraclasse 1: Problema da caixa de papelão

De um papelão retangular de 27 cm por 36 cm, devem-se cortar nos quatro cantos um quadrado. Qual deve ser a medida do lado do quadrado ou a altura da caixa sem tampa (quanto dobrar os lados) para que o volume seja máximo?

2º Encontro: Sobre aspectos teóricos da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática e discussão das estratégias de resolução

Objetivo Geral:

Neste encontro temos, por finalidade, que fazer com que os professores compreendam a importância da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática. Para que esse objetivo seja atingido é importante que se leve os professores a:

- Entender o aspecto histórico da Resolução de Problemas;
- Entender sobre as Tendências, Diretrizes e Perspectivas de Pesquisa em Resolução de Problemas;
- Trabalhar, inicialmente, com problemas, usar as experiências de pesquisadores do GTERP em sala de aula, visando atingir a uma matemática com compreensão. Depois, levá-los à construção de um novo conhecimento pois, como dizem Onuchic e Allevato (2011, p. 82), no Bolema¹⁵, “Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido”. A matemática, embora tenha incontáveis aplicações práticas, é uma ciência abstrata.

Momentos do encontro:

1. Fala do pesquisador a respeito das resoluções do problema extraclasse entregues a ele, por escrito, levando os participantes a uma plenária. Nesse momento, o pesquisador, atento ao trabalho e aos questionamentos do grupo, buscará um consenso. Durante esse trabalho, o pesquisador usará nomenclaturas e notações adequadas para a construção de conceitos e demais conhecimentos pertinentes aos objetivos pretendidos em cada problema apresentado.
2. Ler, refletir e discutir alguns trechos do Capítulo 4 deste trabalho.
3. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução dos problemas, ao pesquisador serão entregues por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.
4. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto a ser resenhado.

¹⁵ Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, nº 41. p. 73-98, 2011.

Problema 3: Completando o quadrado

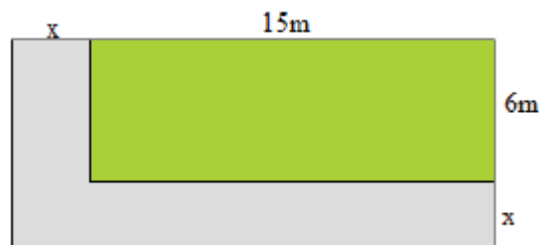
A área de um quadrado de lado x cm acrescida da área de um retângulo de lados 8 cm e x cm, mede 65cm^2 . Qual é a medida do lado desse quadrado?

Objetivos do problema:

- Interpretar o enunciado do problema;
- Usar conceitos algébricos para a resolução do problema na forma geométrica;
- Resolver equações polinomiais do 2º grau por diferentes métodos: fatoração e aplicação da Fórmula de Bhaskara;
- A demonstração da fórmula geral, a Fórmula de Bhaskara.

Problema 4: Problema do jardim retangular

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem pedras ornamentais, formando com o jardim uma área maior, também retangular. Na figura a seguir, a região cinza representa o lugar em que as pedras deverão ser colocadas.



Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de 46m^2 , escreva uma equação que represente o problema acima e calcule a medida x , em metros.

Objetivos do problema:

- Interpretar o enunciado do problema;
- Compreender a linguagem algébrica na representação geométrica de situações e problemas envolvendo equações polinomiais de 2º grau;
- Aplicação da fórmula Bhaskara.

Tarefa extraclasse 2: Problemas

- Resolva o problema abaixo usando o método desenvolvido por Al-Khwarizmi, apresentado na atividade anterior. Desenhe as figuras e escreva as equações equivalentes a cada etapa.

A área de um quadrado acrescida de 12 vezes o seu lado é igual a 13. Qual é a medida do lado desse quadrado?

- Resolva as equações de 2º grau aplicando o método do “completamento do quadrado” desenvolvido por Al-Khwarizmi.

a) $x^2 + 20x = 300$

b) $x^2 + 5x = 6$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

3º Encontro: Sobre as “grandes ideias” existentes na Análise Combinatória e a discussão de estratégias de resolução de problemas para esse tópico**Objetivo geral:**

Explorar as grandes ideias existentes na Análise Combinatória, entendendo por “grandes ideias” os conceitos importantes a serem construídos e os modos de agir dentro de uma teoria. Ao explorar e observar os grupos formados, através do processo de contagem pode-se chegar a um padrão, a uma regularidade, ou seja, algo que se repete sempre, um modelo.


O processo de contagem é essencial para se obter agrupamentos e é uma das grandes ideias dessa teoria, sendo que a busca por um padrão também é uma grande ideia.

Para que esse objetivo seja atingido é importante que se leve os professores a:

- Visualizar o processo de contagem;
- Trabalhar com o processo de contagem, através do uso da metodologia adotada, a partir de um problema, visando à construção de conceitos e conteúdos relativos à Análise Combinatória;
- Compreender e aplicar os conceitos básicos de contagem.

Momentos do encontro:

1. Evidenciar o padrão “Análise de dados e Probabilidades” para ser abordado no Ensino Básico, de modo que os professores e principalmente os alunos possam compreender o que significa fazer contagem; conheçam os processos que são usados para contagem e tornem-se proficientes no uso de técnica e fórmulas, em várias situações.
2. Proposição de problemas. Dar aos professores o tempo necessário para a resolução dos problemas dados, que serão entregues ao pesquisador por escrito, com as devidas justificativas.
3. Proposição de tarefas extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto a ser resenhado.

Problema 5: Problema da Ana Lúcia

Na escola de Ana Lúcia há 6 times de basquete. Eles querem planejar um torneio para após as aulas, de maneira que cada time jogue uma única vez com todos os outros. Quantas partidas devem ser jogadas?

Objetivos do problema:

- Identificar padrões por meio de observação e construção de tabelas.
- Usar a análise de dados como padrão de contagem.
- Trabalhar com o conceito de Combinação Simples e fazer a construção da respectiva fórmula.

Problema 6¹⁶: Problema dos adesivos

Suzie e Sam têm quatro adesivos numerados de 1 a 4. Eles decidiram repartir igualmente os adesivos, dois para cada um. De quantos modos eles podem dividir os quatro adesivos entre eles?

¹⁶ Atividade retirada e adaptada de Souza (2010, p.180).

Objetivos do problema:

- Trabalhar com o processo de contagem visando à construção de conceitos, conteúdos e procedimentos relativos à Análise Combinatória;
- Proporcionar aos participantes a oportunidade de visualizar o processo de contagem e de usar o Princípio Fundamental de Contagem (ou Princípio Multiplicativo);
- Trabalhar, durante a resolução do problema, os conceitos de Combinação, Arranjo e Permutação e fazer a construção das respectivas fórmulas.

Tarefa extraclasse 3: Problemas

1. **Cumprimente antes de você festejar:** Dez finalistas de diferentes estados foram convidados para uma confraternização. Antes de iniciar a festa, cada finalista cumprimentará, com as mãos, todos os outros finalistas. Quantos cumprimentos haverá ao todo?

2. Existem 16 times de futebol, em cidades diferentes, na Liga do Cariri Paraibano de Futebol. Para coordenar os jogos entre os times, cada cidade deve ter uma linha telefônica instalada, ligando-se diretamente às demais, para poder se comunicar com os times das outras cidades. Quantas linhas telefônicas devem ser instaladas, pela empresa telefônica, conectando as cidades?

**4º Encontro: Resolução de Problemas envolvendo Padrões, no Contexto da Modelização Matemática****Objetivo geral:**

Neste encontro temos, por finalidade, fazer com que os professores compreendam a importância da Modelização Matemática na formação do professor de Matemática, ou seja, Modelização Matemática, para nós, é fazer matemática ao modelar o problema. Para que esse objetivo seja atingido é importante que se leve os professores a:

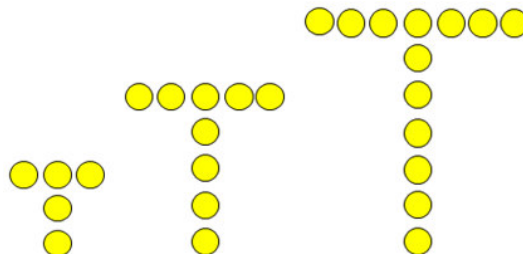
- Entender a diferença entre modelagem matemática e modelização matemática;
- Explorar padrões em busca de soluções e não somente procedimentos e fórmulas memorizadas;
- Entender a Matemática como uma ciência de coisas que têm um padrão de regularidade e uma ordem lógica;
- Participar em atividades de sala de aula modelando os problemas e encorajando-os a estabelecer futuros objetivos para seu crescimento profissional como multiplicador, pois, como disse Vale (2011, p. 2), “A generalização de padrões é um veículo com potencialidades para fazer a transição do pensamento numérico para o algébrico, porque permite dar significado à generalização sem ter de recorrer, obrigatoriamente, a variáveis e a fórmulas e, por outro lado, os padrões podem ser uma ferramenta poderosa para chegar a expressões numéricas que os estudantes compreendam e não sejam uma mera manipulação de símbolos sem significado”.

Momentos do encontro:

1. Avaliação da tarefa proposta no encontro anterior.
2. Fala do pesquisador a respeito de Modelização Matemática e discussão do texto sobre a Matemática dos Problemas e dos Padrões.
3. Evidenciar o padrão “Números e Operações” e o Padrão “Álgebra” para ser abordado no Ensino Básico, de modo que os professores e principalmente os alunos possam compreender o que significa fazer matemática.
4. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução dos problemas, ao pesquisador serão entregues por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções do grupo.
5. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto, com resenha.

Problema 7: Problema das Bolitas

Tisiu ficou sem parceiro para jogar bolita (bola de gude). Então, pegou sua coleção de bolitas e formou uma sequência de "T" (a inicial de seu nome), conforme a figura:



Suponha que Tisiu conseguiu formar 10 "T" completos, seguindo esse padrão...

- É possível descobrir a quantidade de bolitas utilizadas por Tisiu? Como você a calcularia?
- E se ele tivesse uma coleção de bolitas que totalizasse 10000. Quantos T, nessa perspectiva, ele formaria?

Objetivos do problema:

- Procurar um padrão no problema por meio de observação e construção de uma tabela;
- Construir um modelo matemático para este problema;
- Generalizar o termo geral da P.A. a partir deste problema;
- Generalizar a soma dos n termos de uma P.A. a partir deste problema.

Problema 8: Problema da aplicação na Poupança

Aplicando-se R\$ 10000,00 na Poupança durante 4 anos, à taxa de juros compostos de 20% a.a., apresente a sequência dos montantes, em reais, ano a ano, a partir do início da aplicação.

Objetivos do problema:

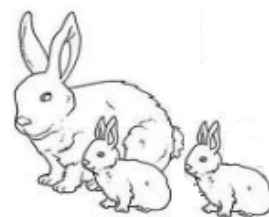
- Procurar um padrão no problema apresentado;
- Construir um modelo matemático para este problema;
- Generalizar o termo geral da P.G. a partir deste problema;
- Generalizar a soma dos n termos de uma P.G. a partir deste problema.

Tarefa extraclasse 4: Problemas**1. Um Problema curioso**

Complete o número no modelo seguinte: 9 , 61 , 52 , ___ , 94 , 46 , 18 , 1

2. Problema do casal de coelhos

Admitindo-se que cada casal de coelhos só procrie dois meses após o seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal a cada mês, quantos casais haverá em um ano, partindo-se de um único casal de coelhos recém-nascidos?

**5º Encontro: Sobre a Matemática Financeira****Objetivo geral:**

Este encontro tem por objetivo estudar a Matemática Financeira. Ou seja, pretendemos, com este trabalho, que os professores possam mostrar a importância desse tópico no cotidiano do aluno, através de exemplos práticos e, também, que os professores do grupo, ao trabalharem com seus alunos, possam resolver problemas, simples ou complexos, como, por exemplo, o parcelamento de dívidas nas compras a prazo. Além disso, apresentaremos questões que abordam reflexões acerca de situações existentes em nossa sociedade.

Para que esse objetivo seja atingido, extraímos e utilizamos os problemas da dissertação intitulada “Matemática Financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem” de Paulo Henrique Hermínio (Unesp – Rio Claro/SP, 2008).

Momentos do encontro:

1. Continuação com a discussão do texto “Padrões de Conteúdo”, que corresponde à questão – O quê ensinar?
2. Fala do pesquisador a respeito do trabalho de Paulo Henrique Hermínio.
3. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução desses problemas, ao pesquisador serão entregues, por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções do grupo.
4. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto, com resenha.

Problema 9: Problema de Paulo

Roberto pediu emprestado à Suzana a quantia de R\$50,00 para ser paga após 3 meses. Naquela data, além de pagar a quantidade de R\$50,00, Roberto se comprometeu a pagar mais R\$10,00. Quanto é a taxa de juros que Roberto estará pagando nesse trimestre? Se, passados esses três meses, Roberto pedir à Suzana mais três meses para pagar sua dívida, conservando a taxa de juros a esse trimestre, qual será o montante da dívida a ser paga se:

- a) Roberto calcular o juro somente sobre o capital emprestado inicialmente?
- b) Roberto calcular o juro sobre o capital que ele deve após os três primeiros meses?
- c) Os valores de (a) e (b) são diferentes? Justifique:
- d) Qual é o valor correto?

Questões:

- a) Quando vamos pagar uma dívida, qual tipo de cálculos de juros você acha que é aplicado? Por quê?
- b) Qual seria a melhor opção para Roberto? Por quê?
- c) Qual seria a melhor opção para Suzana? Por quê?

Objetivos do problema:

- Identificar e compreender em que circunstância se faz uso de um ou de outro regime de juros;
- Mostrar a diferença entre Juros Simples e Juros Compostos. Levar os alunos a compreender as características de cada uma dessas modalidades de juros.

Problema 10: Problema de parcelamento

A Sra. Célia comprou uma lavadora de louça por R\$359,00. O vendedor propôs que o pagamento fosse feito com dois cheques iguais, sendo um para 30 dias após a data de compra e outro para 60 dias após a data de compra. A taxa de juros composta combinada foi de 15% a.m. Qual foi o valor de cada uma das parcelas pagas pela Sra. Célia?

Questões:

- a) Nesse caso, compensa pagar de maneira parcelada a lavadora de louças? Por que muitas pessoas fazem isso?
- b) Se a Sra. Célia tivesse R\$150,00 para dar de entrada e o restante ela fizesse conforme o vendedor a indicou, qual seria o valor das parcelas?
- c) Será que é importante, se tivermos condições, pagar sempre um valor de entrada para que o juro seja menor? Justifique:

Objetivo do Problema:

- Trabalhar sobre parcelamentos, procurando levar os alunos a compreender as características desse conceito tão presente nas relações comerciais de nossa sociedade.

Tarefa extraclasse 5: Problemas

1. Vamos supor que Roberto e Suzana, do problema anterior, tivessem feito um trato em que a taxa de juros seria aplicada somente sobre o valor inicial emprestado, qual seria o valor da dívida de Roberto, passados:

- a) 3 trimestres?
- b) 6 trimestres?
- c) 2 anos?

Questões:

- a) É justo que Suzana espere tanto tempo pra receber esse empréstimo e receba esse valor calculado sob o regime de Juros Simples?
- b) Sob qual regime de cálculo de juros nós pagamos as nossas dívidas? Você acha isso justo?

2. O Sr. Mário aplicou, em uma instituição financeira, a quantia de R\$2500,00 numa certa data. Essa instituição comprometeu-se a pagar, para o Sr. Mário, 10% ao mês de juros sobre o valor que aplicado mês a mês. Se o Sr. Mário não pôde mexer no seu dinheiro durante 2 anos, qual será o valor que ele terá em sua aplicação, passados:

- a) 1 mês?
- b) 6 meses?
- c) 2 anos?

Questões:

- a) O sistema de Juros Compostos é melhor que o sistema de Juros Simples? Por quê?
- b) Atualmente, a taxa de juros de poupança é cerca de 11% ao ano e a taxa de juros anual para cheque especial do banco é de 130%. Por que será que existe tanta diferença?

6º Encontro: Resolução de Problemas na Formação de Professores

Objetivo geral:

Aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas visando à resolução de problemas, como padrão de processo, e o padrão Álgebra, como padrão de conteúdo. Insistir sobre essa metodologia levará o professor a ter consciência de que o problema é ponto de partida e que ela serve como orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos. Durante todo o encontro serão estimuladas discussões que promovam a reflexão sobre a finalidade, a adequação e as potencialidades pedagógicas dessa metodologia.

Para que esse objetivo seja atingido é importante que se leve os professores a:

- Vivenciar essa metodologia durante a resolução de alguns problemas em Aritmética, números e operações, e Álgebra, em suas diferentes concepções;
- Discutir as diferentes concepções de Álgebra: (1) A Álgebra como aritmética generalizada (generalizadora de modelos); (2) A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas (equação); (3) A Álgebra como estudo de relações entre grandezas (fórmulas e funções); (4) A Álgebra como estudo das estruturas algébricas;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas.

Momentos do encontro:

1. Discussão do texto sobre o Padrão Álgebra.
2. De acordo com os documentos “Principles and Standards for School Mathematics”, (NCTM, 2000), também conhecido como “Standards 2000”, e “Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática”, (MEC – Brasil, 1998, 1999, 2002), apresentar os objetivos pretendidos para o tópico Álgebra, destacar o papel que o professor deve desempenhar ao trabalhar com esse tópico e identificar o que se espera do aluno.
3. Como ministrar uma aula, para o Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio, usando a nossa metodologia de trabalho para a sala de aula.
4. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução desses problemas, ao pesquisador serão entregues, por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções do grupo.
5. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto, com resenha.

Problema 11: Problema dos sanduíches

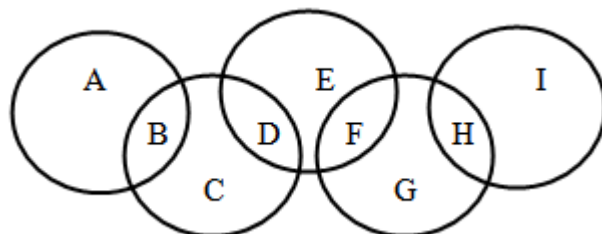
Uma pessoa chegou numa lanchonete e pediu: quero metade dos sanduíches que você tem, mais $\frac{1}{2}$ sanduíche. Um segundo comprador chegou e pediu: quero a metade dos sanduíches que você tem, mais $\frac{1}{2}$ sanduíche. Uma terceira pessoa chegou e pediu: quero a metade dos sanduíches que você tem, mais $\frac{1}{2}$ sanduíche. O dono da lanchonete viu que sobrara um único sanduíche. Quantos sanduíches ele tinha inicialmente?

Objetivos do problema:

- Trabalhar com os Padrões de Conteúdo – Números e operações e Álgebra;
- Resolver por diferentes caminhos e verificar a validade da solução (caminho de volta).

Problema 12: Problema do Puzzle Olímpico

Os anéis olímpicos dividem o plano em nove regiões fechadas, assinaladas na figura por letras.



Substituir as letras pelos números de 1 a 9, sem repetição, de tal modo que a soma S dos números dentro de cada um dos anéis seja sempre a mesma.

Como existem muitas soluções, podemos então ir um pouco mais longe:

Qual é a solução em que a soma S é mínima?

Qual é a solução em que a soma S é máxima?

Objetivos do problema:

- Este problema tem, como objetivo, o de trabalhar com os padrões de Conteúdo – Números e operações, Álgebra e Análise de Dados e Probabilidades;
- Envolver os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio no modelo apresentado.

Tarefa extraclasse 6: Problemas**1. Problema de João e Maria**

João pediu Maria em casamento. Indecisa, Maria pediu tempo para pensar.

Disse João: “Há 20 anos, quando eu tinha o triplo da idade que tu tens agora, eu podia esperar. Hoje, porém, tenho o quádruplo da tua idade e muita pressa para casar”. Então, qual é a soma das idades atuais de João e Maria?

2. Problema das idades

Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tu tiveres a idade que eu tenho a soma de nossas idades será 72. Quais são as nossas idades?

7º Encontro: Sobre a criatividade e a discussão de estratégias de resolução de problemas para esse tópico

Objetivo geral:

Apresentar aos professores um olhar para a criatividade na formação continuada de professores de matemática, onde a resolução de problemas, convenientemente desenvolvida, pode contribuir para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos, tornando a matemática mais significativa.

Aprender é uma grande aventura. Um desafio à nossa capacidade de reter informações, adquirir habilidades e explorar criativamente novos limites de pensamento e realizações. Aprendemos de diferentes formas. Por vezes percebemos que temos mais facilidade em aprender fazendo, outras vezes observando, sentindo ou pensando. No entanto, todas as formas são necessárias para o aprendizado.

Desse modo, esperamos estar contribuindo efetivamente para que nós, professores, possamos alcançar um novo caminho, capaz de entusiasmar os alunos no estudo da Matemática, ajudando-os na busca de uma compreensão maior e melhor do mundo em que vivem, desenvolvendo o espírito criativo, o raciocínio lógico e o modo de pensar matemático.

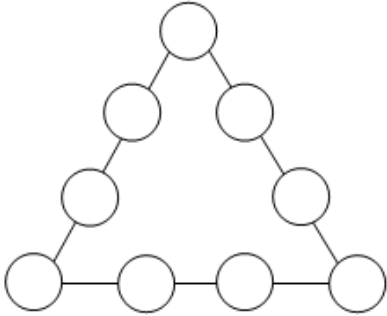
Para que esse objetivo seja atingido, extraímos e utilizamos problemas da dissertação intitulada “Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática”, de Valdir Rodrigues (Unesp – Rio Claro/SP, 1992).

Momentos do encontro:

1. Avaliação da tarefa proposta no encontro anterior.
2. Fala do pesquisador a respeito do trabalho de Valdir Rodrigues.
3. Discussão de texto sobre a didática da matemática.

4. Proposição de um problema. Dado o tempo necessário para a resolução desse problema, ao pesquisador serão entregues, por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.
5. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de avaliação da criatividade.
 - Leitura de um texto a ser resenhado.

Problema 13: Problema do Triângulo Mágico



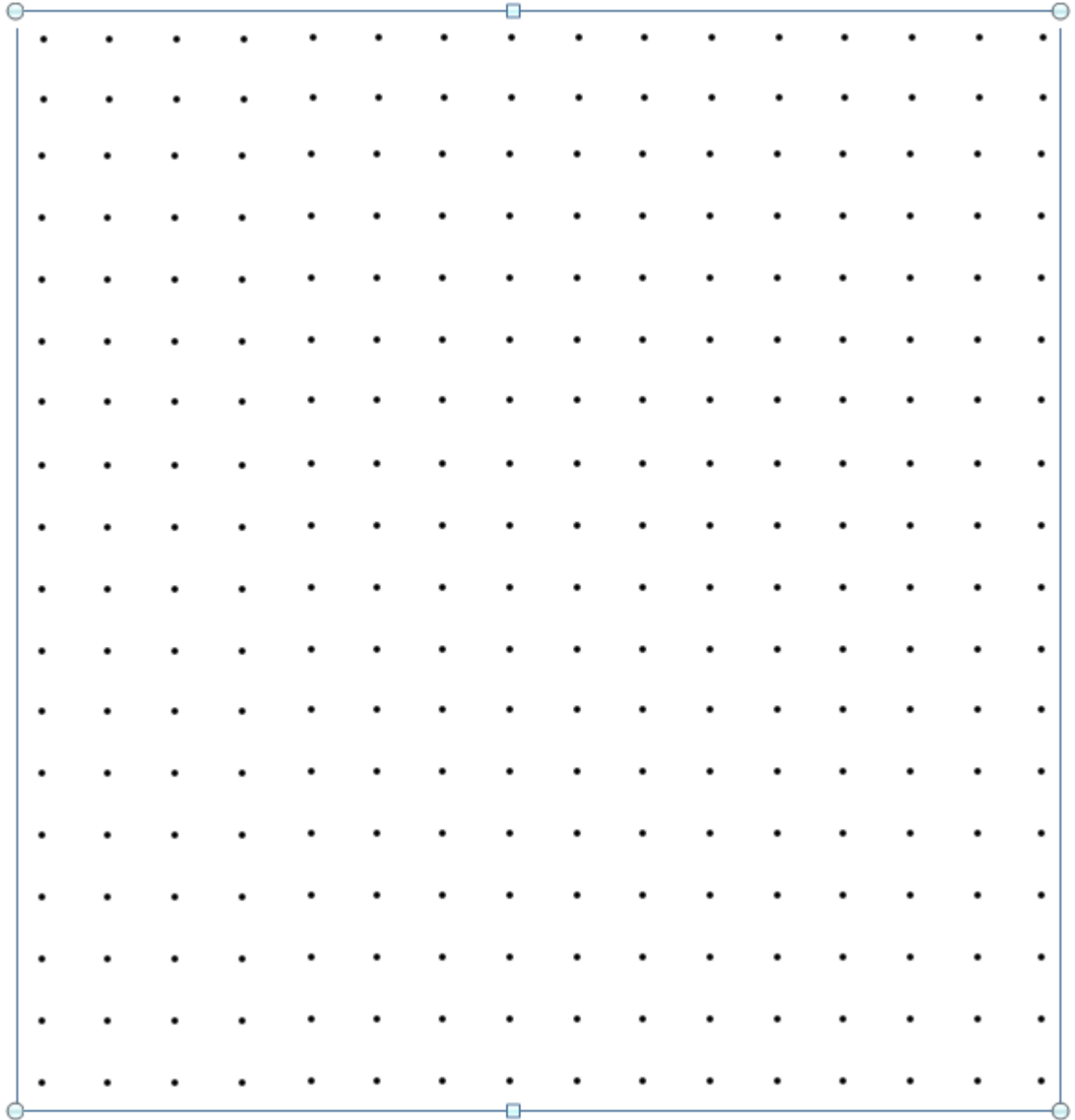
Coloque, dentro dos círculos, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sem repetição, de tal modo que a soma em cada lado do triângulo regular seja 20. Procure resolver esse problema de várias maneiras.

Objetivos do problema:

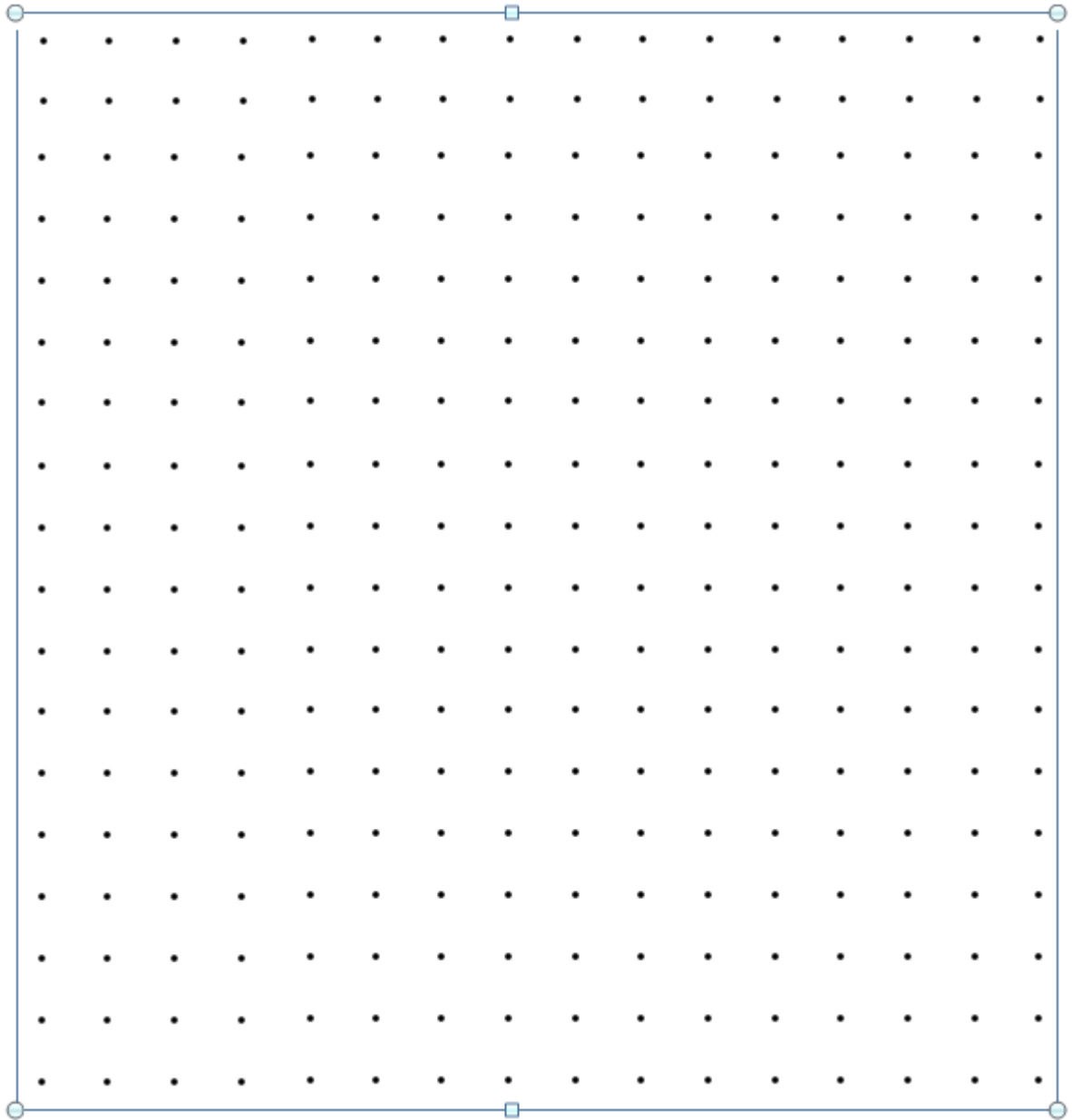
- Avaliar a criatividade matemática dos participantes como alunos e seu desempenho como professor, no que diz a respeito à resolução deste problema;
- Desenvolver o pensamento criativo e original;
- Perceber que a soma dos números nos vértices é 15;
- Notar que o número 5 está num dos vértices sempre e justifique;
- Verificar se é suficiente que a soma dos números nos vértices seja 15 e 5 esteja num dos vértices do triângulo;
- Verificar quantas soluções existem para esse problema.

Tarefa extraclasse 7:

1. Alguns pontos são dados abaixo, de tal modo que a distância entre dois pontos consecutivos, na horizontal, ou na vertical, é igual a 1 cm. Ligando algum desses pontos, construa polígonos que tenham perímetros iguais a 14 cm.



2. Alguns pontos são dados abaixo, de tal modo que a distância entre dois pontos consecutivos, na horizontal, ou na vertical, é igual a 1 cm. Ligando estes pontos, construa polígonos que tenham áreas iguais a 6 cm^2 .



8º Encontro: O Padrão de conteúdo Número e Operações e o Padrão de Procedimento Resolução de Problemas

Objetivo geral:

Neste encontro pretendemos promover uma reflexão sobre o padrão de conteúdo “Números e Operações”, trabalhando com o padrão de procedimento “Resolução de Problemas”. Para isso, será utilizada, especificamente, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esta metodologia considera o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos. Para que esse objetivo seja atingido é importante que se leve os professores a:

- Vivenciar os padrões de conteúdo e procedimento durante a resolução de alguns problemas em Aritmética – números e operações em suas diferentes concepções;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas.

Momentos do encontro:

1. Continuação com a discussão do texto “Padrões de Conteúdo”, que corresponde à questão – O quê ensinar?
2. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução desses problemas, ao pesquisador serão entregues, por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.
3. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto, com resenha.

Problema 14: Problema das balas

Uma empresa de doces se comprometeu a enviar balas para 5 instituições que abrigam crianças. Mandaram 7548 balas. Quantas balas cada instituição ganhou?

Responda:

- 1) Como resolver esse problema em uma turma de Ensino Fundamental I?
- 2) Que matemática “nova” quer-se construir através da resolução desse problema?
- 3) Para que série/ano vocês acreditam que esse problema é adequado? Se, para várias séries/anos, como ele poderia ser trabalhado nas diferentes séries/anos?

Objetivos do problema:

- Construir o modelo matemático para a divisão exata e divisão com resto e explorar seu algoritmo;
- Reconhecer a importância de trabalhar com o padrão Números e Operações fazendo uso do padrão Medida;
- Estabelecer a relação do conhecimento matemático com o conhecimento didático no problema.

Problema 15: Problema de dois dígitos

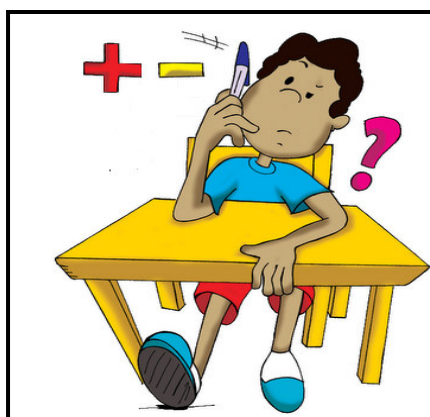
Quantos números naturais de dois dígitos existem em que o dígito das dezenas é maior do que o das unidades?

Objetivos do problema:

- O objetivo específico para este problema é o de apresentar um modelo aritmético que seja trabalhado fazendo uso da metodologia adotada;
- Fazer a representação operacional da escrita de números com mais de um dígito.

Tarefa extraclasse 8:**1. Problema dos soldadinhos**

Quando Jason arranja seus soldadinhos de chumbo em filas de 6, sobra 1. Quando ele os arranja em filas de 8, sobram 3. Quando ele os arranja em filas de 10, sobram 5. Qual é o menor número possível de soldadinhos que Jason tem para brincar?

2. Problema dos dígitos

A soma dos dígitos de um número primo de dois dígitos é subtraída desse número. Prove que a diferença não pode ser um número primo.

9º Encontro: Sobre Números Racionais**Objetivo geral:**

Nosso objetivo, para este encontro, é o de apresentar e analisar as diferentes personalidades dos números racionais, assim como o conceito de proporcionalidade. Para isso, escolhemos alguns problemas geradores. Acreditamos que, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a construção de conhecimentos relacionados a esses conceitos se realize de forma mais significativa e efetiva por professores e estudantes.

As diferentes “personalidades” que os números racionais podem assumir pertencem a campos semânticos distintos. Para compreender o significado de “números racionais” é preciso considerar a teoria matemática à qual eles estão submetidos, à classe de situações do mundo real a que eles se aplicam e às relações entre a teoria e a prática.

Momentos do encontro:

1. Discussão do texto sobre “As Diferentes Personalidades do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas”.
2. Fala do pesquisador a respeito do trabalho de Luciene Souto Botta, evidenciando que o tópico Números Racionais e Raciocínio Proporcional são recomendados para ser abordado no Ensino Fundamental II.
3. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução desses problemas, ao pesquisador serão entregues, por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.
4. Discussão sobre as diferentes formas de trabalhar esses problemas com os alunos.
5. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto, com resenha.

Problema 16: Problema do asfalto

Um grupo de operários asfaltou $\frac{15}{24}$ de uma rua na primeira etapa do trabalho e $\frac{7}{30}$ da rua na segunda etapa. Se nas duas etapas foram asfaltados 824 metros, quantos metros tem a rua toda?

- Isto é um problema? Por que?
- Como você trabalharia este problema na 5ª série/6º ano?
- Haveria necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Liste três objetivos para esse problema
- Que conceitos seriam abordados a partir desse problema?
- Quais seriam as possíveis estratégias de resolução?

Objetivos do problema:

- Resolver o problema usando uma representação conveniente.
- Resolver o problema, sem utilizar o raciocínio proporcional, pois o problema é oferecido para alunos da 5ª série/6º ano.

- Fixar a personalidade fração, que é definido como uma relação da parte com o todo.
- Ampliar o estudo das operações com frações.

Problema 17: Problema de divisão de frações

Quantas vezes $\frac{2}{3}$ de folha cabe em $\frac{5}{6}$ de folha?

Objetivos do problema:

- Justificar esse problema, usando papel sulfite.
- Perceber a personalidade quociente e seu significado.
- Promover a compreensão conceitual da operação divisão de frações visualizando concretamente, pictoricamente e algebricamente a partir do conceito aritmético da divisão.
- Refletir sobre o conceito de número racional, isto é, aquele que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.

Problema 18: Problema do suco de laranja

São dadas duas misturas A e B de suco de laranja concentrado mais água, para se fazer uma laranjada. Na figura, os copos brancos representam a quantidade de água e os copos hachurados o suco concentrado. Qual das misturas terá o gosto de laranja mais acentuado?



Objetivos do problema:

- Entender o que significa a mistura ter gosto de laranja mais acentuado.
- Compreender as personalidades razão e proporção.
- Resolver o problema fazendo uso de raciocínio proporcional.

Tarefa extraclasse 9:**1. Problema do salário**

Do meu salário gastei $\frac{2}{5}$ com aluguel. Do que sobrou gastei metade com alimentação. Da segunda sobra coloquei $\frac{1}{3}$ na Poupança. Restaram-me R\$300,00. Qual é o valor do meu salário?

2. Problema da pista de corrida

Teresa e Júlia correm numa pista à mesma velocidade. Teresa começa primeiro. Quando ela tinha acabado a 9ª volta, Júlia acabara a 3ª. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas tinha dado Tereza?

10º Encontro: Trabalhando com problemas no grupo de estudos**Objetivo geral:**

Este encontro tem por objetivo revisar tudo sobre potenciação com expoente natural, inteiro, racional, irracional e real, bem como a ligação com a operação inversa da potenciação, a logaritmação. Depois de realizar a revisão dessas operações, pretendemos dirigir nossa atenção para o conceito de função e suas particularidades sobre funções exponencial e logarítmica.

Para que esse objetivo seja atingido, extraímos e utilizamos problemas da dissertação intitulada “Uma proposta de mudança, na licenciatura em Matemática do ICLMA apoiada na Metodologia de Ensino de Matemática via Resolução de Problemas”, de Livia Lopes Azevedo (Unesp – Rio Claro/SP, 1998).

Momentos do encontro:

1. Avaliação da tarefa extraclasse proposta no encontro anterior.
2. Discussão do texto “Padrões de Procedimento”, que corresponde à questão – Como ensinar?

3. Fala do pesquisador a respeito do trabalho de Lívia Lopes Azevedo, evidenciando os tópicos Potenciação e Logaritmo, recomendados para serem abordados no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio respectivamente.
4. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução desses problemas, ao pesquisador serão entregues por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.
5. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto, com resenha.

Problema 19: Problema da Lívia - 1

Resolva as questões abaixo, justificando:

- a) $2^3 =$
- b) $5^4 =$
- c) $1^{100} =$
- d) $10^0 =$
- e) $2^{1/2} =$
- f) $2^x = 8$ $x =$ _____
- g) $7^x = \sqrt{7}$ $x =$ _____
- h) $10^w = 20$ $w =$ _____

Objetivos do problema:

- Resolver, usando propriedades conhecidas, se necessárias, ou a motivação das sequências lógicas.
- Resgatar nos professores seu conhecimento sobre potenciação com expoente racional. Com isso, estender a^n para n pertencente ao conjunto dos racionais.
- Perceber que a radiciação é a operação inversa da potenciação quando se pretende determinar o valor da base, conhecidos o expoente e a potência.
- Nas letras f, g e h, encontrar o valor do expoente, conhecidas a base e a potência. Com isso, chamar a atenção dos professores a fim de que eles pudessem perceber a existência de uma outra operação, a inversa da potenciação. Essa operação, depois de identificada, seria denominada logaritmação.

Problema 20: Problema da Lívia - 2

Sendo a função $f: R_+^* \rightarrow R$, definida por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, como a inversa da função exponencial, esboce seu gráfico e analise seu comportamento.

Objetivos do problema:

- Revisar o tópico função logarítmica através da resolução do problema.
- Neste problema, nossa expectativa seria a que, motivados pela resolução do problema, os professores do grupo pudessem fazer uma análise para a função dada, chegando aos gráficos para $a > 1$ e para $0 < a < 1$.

Tarefa extraclasse 10:

1. Qual é o montante economizado num período de trinta dias (um mês comercial), seguindo o seguinte padrão:

No primeiro dia, economiza-se 1 centavo;

No segundo dia, economizam-se 2 centavos;

No terceiro dia, economizam-se 4 centavos;

No quarto dia, economizam-se 8 centavos;

E assim, sucessivamente, chega-se à expressão do padrão de uma sequência: no n ésimo dia seriam economizados 2^{n-1} centavos, $n = 1, 2, 3, \dots$

2. Qual é o algarismo das unidades do resultado de $3^{1986} - 2^{1986}$?

3. Sendo a função $f: R \rightarrow R_+$, definida por $f(x) = a^x$.

- a) analise o seu comportamento para os possíveis valores de a ;
- b) esboce o gráfico da função para valores de: $a > 1$ e $0 < a < 1$;
- c) retire do gráfico da função as informações possíveis.

11º Encontro: Sobre a Educação Matemática Crítica na Sala de Aula

Objetivo geral:

Este encontro tem por objetivo estudar a Educação Matemática Crítica no contexto da sala de aula. Ou seja, neste encontro, a resolução de problemas não será olhada somente no nível de processos e conceitos mas, também, no nível de questões, de natureza sócio-político-cultural, da educação em geral e da Educação Matemática em particular, em que a sala de aula é observada em seus múltiplos aspectos, isto é, em toda sua multicontextualidade.

Para que esse objetivo fosse atingido, extraímos e utilizamos problemas da dissertação intitulada “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas e a Multicontextualidade da Sala de Aula”, de Silvanio de Andrade (Unesp – Rio Claro/SP, 1997).

Momentos do encontro:

1. Avaliação da tarefa extraclasse proposta no encontro anterior.
2. Ler, refletir e discutir o texto deixado como tarefa.
3. Fala do pesquisador a respeito do trabalho de Silvanio de Andrade.
4. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução desses problemas, ao pesquisador serão entregues por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.
5. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problemas de fixação.
 - Leitura de um texto, com resenha.

Problema 21: Problema do Silvanio - 1

Quando 20% é maior do que 90%? Explique

Objetivos do problema:

- Observar a ambiguidade do enunciado desse problema;
- Explorar a exigência de se falar em porcentagem sempre se referindo a um mesmo todo;
- Explorar o conceito de porcentagem no contexto sócio-político-cultural.

Problema 22: Problema do Silvanio - 2

Na eleição presidencial de um país, o candidato A obteve 3% dos votos, o candidato B obteve 900 mil votos, o candidato C obteve 52% dos votos, e o candidato D obteve 12 milhões de votos. Quem ganhou a eleição? Justifique sua resposta

Objetivos do problema:

- Esse problema tem como objetivo “relembrar” ou “reconstruir” os conceitos que envolvem Porcentagem.

Tarefa extraclasse 11:

1. Dois pais e dois filhos entraram num bar e pediram três refrigerantes. Cada um tomou uma garrafa inteira, ou seja, nenhum deles deixou de beber o seu refrigerante. Descubra como isso foi possível.

2. A loja “Loucura” está com uma liquidação de 40% na compra de cada produto à vista. E a loja “Preço Doido” está com um desconto de R\$ 40,00 na compra de cada produto à vista.

- a) Paula comprou uma calça Jeans na loja “Loucura” e Maria comprou uma calça Jeans, da mesma marca, na loja “Preço Doido”. Quem pagou mais pela calça, Paula ou Maria? Por quê?
- b) Marlene só faz suas compras na loja “Preço Doido” e Marcos só o faz na loja “Loucura”. Se fosse você, o que faria? Na sua opinião quem está certo: Marlene ou Marcos?
- c) Imagine como era a loja “Loucura” e faça uma história sobre ela. Faça isso também para a loja “Preço Doido”.

12º Encontro: Sobre a Teoria dos Grafos da Matemática Discreta e Modelização dos 4 Ts

Objetivo geral:

O objetivo deste encontro é o de refletir sobre a possibilidade e a necessidade de abordar a Modelização Matemática e a Matemática Discreta, empregando a resolução de problemas no trabalho em sala de aula. Esta proposta inclui duas seções com breves reflexões: (1) Modelização Matemática a partir de material concreto e (2) Modelização de Grafos da Matemática Discreta. Para que esse objetivo seja atingido é importante que se leve os professores a:

- Reconhecer números como entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir e, assim, avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza, ou seja, se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se contagem e seu resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se medição e o resultado é um número real.
- Entender a Modelização Matemática a partir de material concreto.
- Apresentar e discutir a modelização de grafos da matemática discreta;
- Resolver problemas envolvendo o material concreto e grafos e mostrar a importância de se trabalhar com a Modelização Matemática nas aulas de matemática.

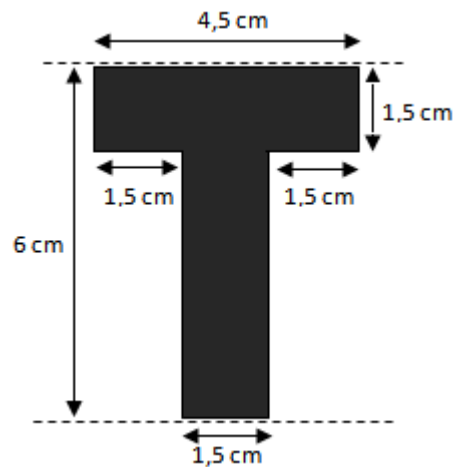
Decorre daí a presença forte, nesses processos, os padrões. Os problemas da Matemática Discreta, com frequência, envolvem análise e busca por padrões, que são grupos de objetos que apresentam uma regularidade, ou seja, algo que se repete, um modelo. Pode-se encontrá-los em sequências numéricas e de figuras, em ornamentos, na natureza, em fórmulas, em proposições a serem demonstradas, entre outras situações. A procura por padrões é uma interessante e importante estratégia de resolução de problemas.

Momentos do encontro:

1. Fala do pesquisador a respeito da utilização do material concreto e discussão do texto sobre Modelização de grafos da Matemática Discreta.
2. Proposição de problemas. Dado o tempo necessário para a resolução desses problemas, ao pesquisador serão entregues por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.
3. Proposição de tarefa extraclasse:
 - Problema desafiador

Problema 23: Problema dos quatro Ts

Com uma cartolina fazer um molde da “letra T” que servirá de modelo ou elemento gerador, como nos mostra a figura ao lado. Agora, cortar a “letra T”, em seguida, sobre o papel de cartolina, usar o molde para gerar outros três Ts, de tal forma que as medidas entre um molde e outro sejam as mesmas. Depois disso, em uma folha separada ou em seu caderno, desenhe um quadrado de 8,8 cm de lado e coloque os quatro Ts dentro dele, sem dobrar ou sobrepor um sobre o outro.

**Objetivos do problema:**

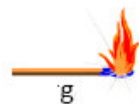
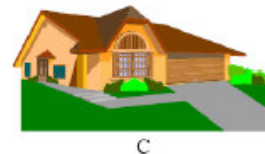
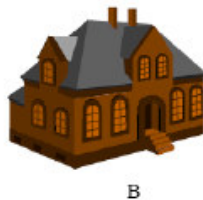
- Manipular os materiais, ou seja, construir os 4 Ts.
- Procurar um padrão no problema por meio de observação e manipulação.
- Movimentar os 4 Ts no plano seguindo um processo de rotação.
- Definir o Movimento de Rotação.

Problema 24:

Pretendemos ligar três casas A, B e C, a três utilitários, gás (g), água (a) e eletricidade (e).

a) Quantas ligações terão de ser feitas?

b) Por razões de segurança convém que as ligações não se cruzem. Será possível fazer isso?

**Objetivos do problema:**

- Esquematizar o problema.

- Fazer um diagrama da representação do esquema feito utilizando pontos para as casas e linhas para ligar os utilitários às casas.
- Definir grafos.

Problema 25:

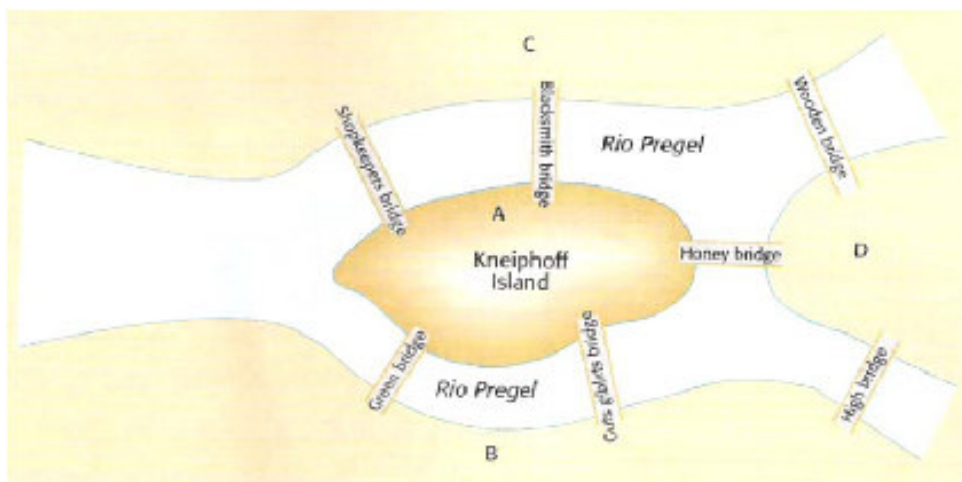
Quais das seguintes figuras podem ser desenhadas sem levantar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma linha? Tente encontrar uma justificativa que lhe permita fazê-lo.

Objetivos do problema:

- Resolver os problemas modelados por grafos.
- Indicar passeio, trajetos e caminhos.
- Indicar circuitos e ciclos.

Tarefa extraclasse 12:

Na antiga cidade de Königsberg, situada na Prússia, hoje Kaliningrad na Rússia, existe uma ilha, chamada Kneiphoff, formada pelos dois braços do rio Pregel. Há sete pontes que atravessam esses dois braços.



Será possível fazer uma visita a toda a cidade e regressar ao ponto de partida, atravessando cada ponte uma única vez?

Capítulo 8

A Aplicação do Projeto – Resultados e Discussão

Em nossa comunidade de pesquisa muito se tem discutido sobre a formação docente e a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, Jaworski (2004) disse que, em comunidades desse tipo, encontra-se a seguinte posição: não estamos satisfeitos com o estado (desejavelmente) normal, mas abordamos nossa prática com uma atitude questionadora, não para mudar tudo de um dia para o outro, mas para começar a explorar o que mais é possível; imaginar, questionar e procurar compreender, ao colaborar com outros, na tentativa de fornecer respostas a eles. Neste capítulo, será realizada uma breve apresentação de uma pesquisa pedagógica no contexto qualitativo. Em seguida, apresentamos a aplicação do Projeto após terem sido postos em ação os procedimentos auxiliares que levaram à ação o procedimento geral – A criação do projeto.

8.1. A Pesquisa pedagógica

O nosso percurso, da construção do projeto até sua implementação, constitui-se num caminho pedagógico desenvolvido no âmbito da pesquisa qualitativa, onde seus professores, em geral, com ou sem a colaboração de outros, se envolvem com a pesquisa de sua própria sala de aula. Assim, como dizem Lankshear e Knobel (2008), pesquisa pedagógica significa, no mínimo, professores pesquisando suas próprias salas de aula. Dois aspectos que podem ser percebidos numa pesquisa pedagógica são:

1. A pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula;
2. O principal pesquisador, em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica, é o professor cuja sala de aula está sob observação.

Esses autores afirmam que os objetivos da pesquisa pedagógica são: melhorar a percepção do papel e da identidade profissional dos professores; e reconhecer que o envolvimento com a pesquisa pedagógica pode contribuir para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula.

Sabe-se que a escolha, por determinada abordagem metodológica para estruturar uma investigação, depende do problema da pesquisa, do contexto em que serão coletados os dados, bem como das técnicas e métodos a serem utilizados. Além disso, exige a atenção a ser dada para as condições de acesso ao contexto e à disponibilidade dos sujeitos.

A metodologia pedagógica adotada nesta pesquisa é qualitativa, pois trata de abordá-la buscando compreender seus significados. Como dizem Lüdke e André (1987), a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como o seu principal instrumento. Os dados coletados são, em geral, descritivos e ela se preocupa mais com o processo do que com o produto.

Em nossa pesquisa, atendendo às solicitações da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba, o desenrolar do projeto criado ocorreu dentro da UEPB, Campus Monteiro, numa sala especial destinada aos nossos encontros, com os professores selecionados no desenvolvimento do projeto criado. Os professores foram liberados pela 5ª Gerência Regional de algumas de suas aulas regulares para poderem participar do projeto e os dados foram coletados pelo pesquisador.

Nesse sentido, Bogdan e Biklen (1994) dizem que os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas em seu ambiente habitual de ocorrência. A investigação qualitativa é descritiva e os dados coletados são obtidos em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação.

Desse modo, os dados recolhidos nessa abordagem:

[...] incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

Segundo Goldenberg (1999, p. 53), na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma instituição, etc. Ou seja, a abordagem qualitativa em uma pesquisa também “consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos”.

Essas considerações justificam a inserção desta pesquisa pedagógica no modelo qualitativo. A utilização de estratégias pedagógicas, como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e o trabalho com problemas geradores em sala de aula, exige uma constante interação entre o pesquisador e os sujeitos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, sendo que trabalhos investigativos e reflexivos pressupõem ações, conscientizações e transformações.

8.2. Aplicação do projeto – Encontros do Grupo de Estudo

Esta parte do trabalho trata da descrição, dentro de uma pesquisa pedagógica, e segundo as anotações feitas em caderno de campo, das entrevistas e das gravações feitas durante os encontros do nosso grupo colaborativo de estudo. Foram realizados em treze sábados consecutivos, sendo que uma delas foi para entrevista final e avaliação, no período de 22/09/2012 a 28/12/2012.

Faremos agora uma breve descrição de como ocorreu a aplicação do projeto, focalizando cada um dos 12 encontros realizados e apresentaremos alguns episódios ocorridos durante esses encontros, onde a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas foi adotada para trabalhar com os professores que participaram do grupo.

1^o ENCONTRO (22/09/2012): Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

O primeiro encontro ocorreu no dia 22 de setembro de 2012, em uma sala de aula da UEPB, na Cidade de Monteiro, Paraíba. Naquele dia, estavam presentes os professores Lucas, Ivã, Sara, Bruna, Danielle, Larissa e o pesquisador. Após a apresentação de todos os integrantes do grupo, conversamos sobre qual seria a dinâmica dos encontros. Pareceu-nos que todos haviam aceitado bem a proposta de se trabalhar como uma equipe (grupo de estudo) visando a construir-se um ambiente adequado ao processo ensino-aprendizagem-avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas.

Apresentar o que seria feito de forma diferenciada era relevante para a pesquisa. Afinal, o intuito era a o de formar professores de Matemática, da Educação Básica da região do Cariri Paraibano, procurando formá-los como MULTIPLICADORES junto a professores dessa mesma região, em termos do quê ensinar? e de como ensinar? num trabalho apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de

Problemas. Se o trabalho fosse conduzido na forma de um curso regular, acredito que ele poderia dar apenas a ideia de que bastaria, aos professores da Educação Básica, receberem instruções dos professores da Universidade, sobre a forma de como conduzir sua própria prática profissional, dado que o que se pretendia era mostrar como o grupo poderia se tornar mais do que bons professores, divulgadores de um conhecimento adquirido para alcançar o objetivo pretendido.

Durante este encontro comentou-se que, no trabalho do grupo, todos poderiam expressar-se livremente, colocando suas ideias sobre o quê e como pensavam a respeito das atividades trabalhadas.

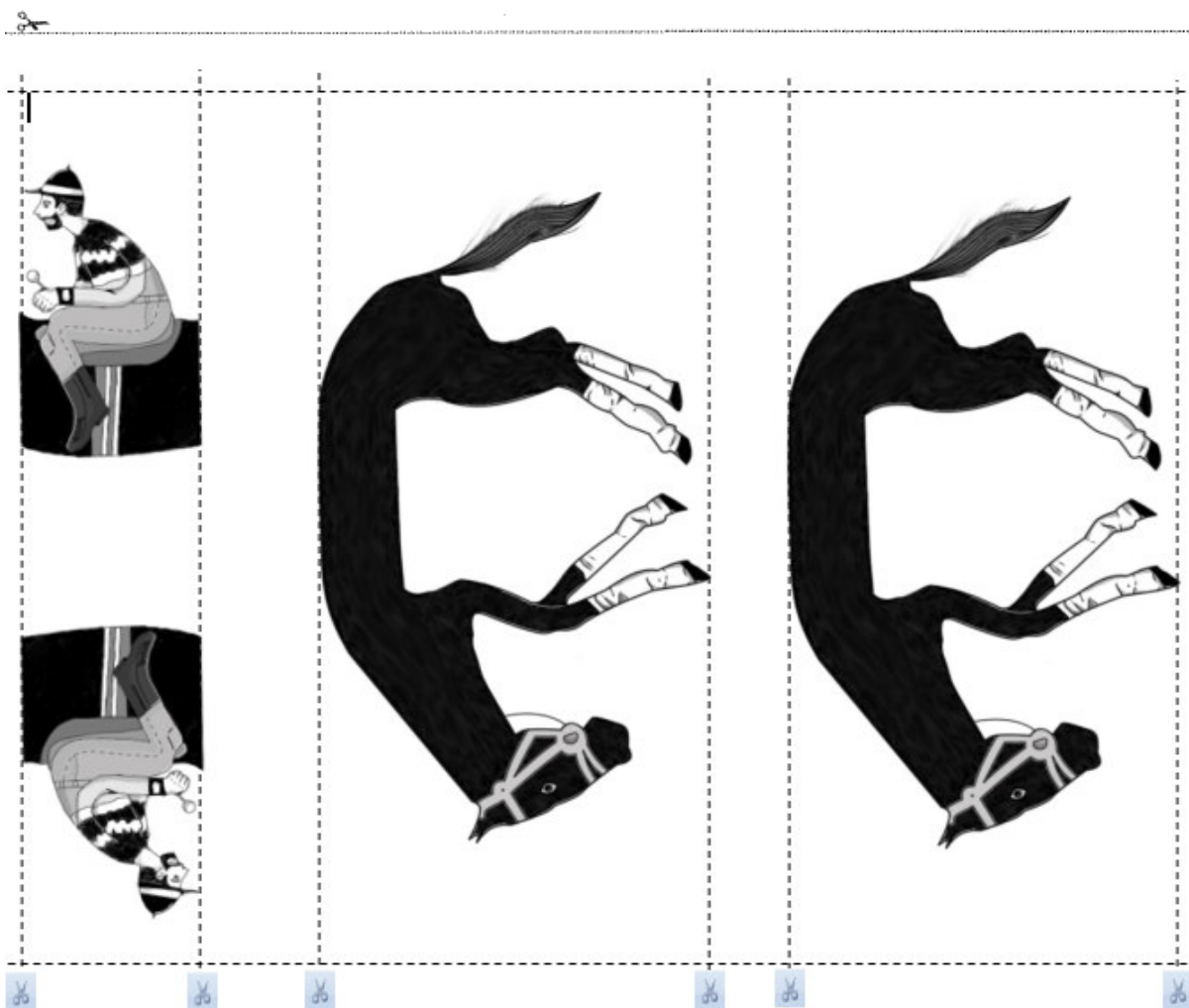
Após encerrarmos essa conversa inicial, desejando um bom trabalho a todos, desenvolvemos algumas atividades que já haviam sido preparadas a fim de que todos procurassem se familiarizar com a metodologia a ser adotada.

Em seguida, houve a exposição do pesquisador sobre a metodologia pedagógica adotada – A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e a apresentação da dinâmica de trabalho para a sala de aula.

O pesquisador propôs dois problemas aos participantes da equipe. Esses problemas envolviam o espírito de trabalho em grupos: Um, um problema sem números, outro problema tratava de tópicos de geometria e medida. Os seis professores, distribuídos em dois grupos de três, empenharam-se na resolução desses dois problemas, sendo que cada um deles procurou resolvê-los à sua maneira e, depois, buscaram uma resolução consensual do grupo.

Problema 1:

Recorte as figuras abaixo, em três pedaços. O recortar deve deixar os cavalos separados, mas os cavaleiros devem ficar juntos, mantendo-se a faixa branca que há entre o par de cavaleiros. O desafio é colocar cada cavaleiro sobre cada cavalo, sem separar os cavaleiros, nem dobrar, nem rasgar nenhum deles.



Os professores procuraram desenvolver as discussões nos grupos. Entretanto, alguns deles tiveram dúvidas sobre o que deveriam fazer, pois não conseguiam entender muito bem a proposta dessa atividade. O tempo estipulado pelo pesquisador, para seu desenvolvimento, mostrou-se insuficiente. Podia-se perceber que se se desse mais tempo, alguns deles não conseguiriam, ainda, entendê-la esse problema. Outros deles se dedicaram muito mais buscando meios de dobrar ou cortar as peças e, outros ainda se sentiram na obrigação de pedir ao pesquisador a solução do problema. No debate, com todos juntos, o principal foco das discussões era do tipo: Será que ele tem solução? angustiados que estavam diante de um problema que não sabiam resolver e que não pedia por cálculos numéricos.

Queríamos, com esse problema, que os professores soubessem dizer o que eles entendiam por problema. E a pergunta natural do pesquisador foi: Isso é um problema para você? Por quê? Há solução? O que fazer para chegar-se a ela?

A professora Bruna disse: - *Sim, pois eu ainda não sei como resolvê-lo. Preciso tempo para pensar!*

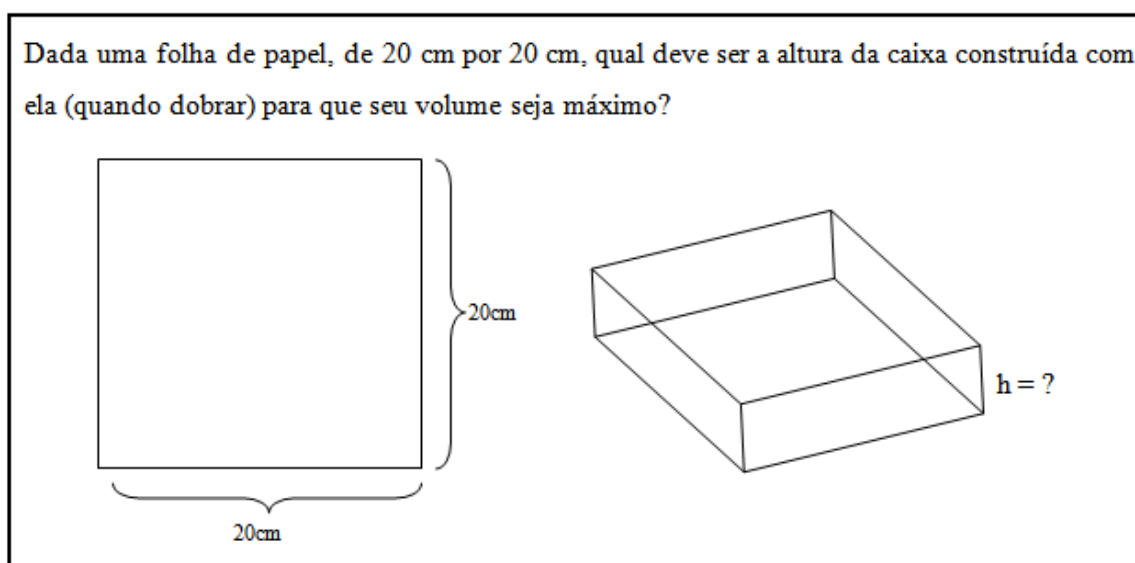
Então, o pesquisador lhes deu mais tempo dando-lhes oportunidade para refletirem em conjunto. Eles puseram-se a tentar resolver o problema, quando um dos grupos, depois de várias tentativas, conseguiu chegar à solução. E, como é natural, assim que um dos grupos o tinha resolvido, imediatamente, os participantes do outro grupo buscaram saber como eles haviam chegado à solução, que foi compartilhada por todos.

Tínhamos preparado algumas sugestões que caso necessário, o pesquisador usasse para conduzir os participantes à compreensão do enunciado e à resolução do problema:

1. Vocês leram o problema? O que ele pede?
2. Pedir que colocassem cada cavaleiro sobre cada um dos cavalos.
3. Você andaria num cavalo como esse?
4. As costas de um cavalo normal são assim retas?

Não foi preciso fazer uso das sugestões, pois um dos grupos havia conseguido chegar à solução. Como resposta à pergunta isso é um problema, houve um debate sobre o que se entende por problema. Segundo Onuchic, “é tudo aquilo que não sei fazer mas que estou ‘interessado’ em resolver”. Os professores perceberam que é importante deixar que o resolvidor trabalhe em grupo pensando. Portanto essa atividade “Cavalinhos e cavaleiros” foi um problema para o grupo, aonde em um processo de resolução, chegaram à solução.

Problema 2:



Durante o tempo em que ficaram debruçados na resolução desse problema, perceberam-se que os professores de cada grupo trocavam ideias. O pesquisador entregou folhas de almanaque para que eles pudessem registrar suas resoluções, sendo que foi cobrado o registro individual para que pudessem ter o material registrado para estudo posterior. Foi pedido pelo pesquisador e os professores, naturalmente, foram até a lousa colocar o que tinham feito.

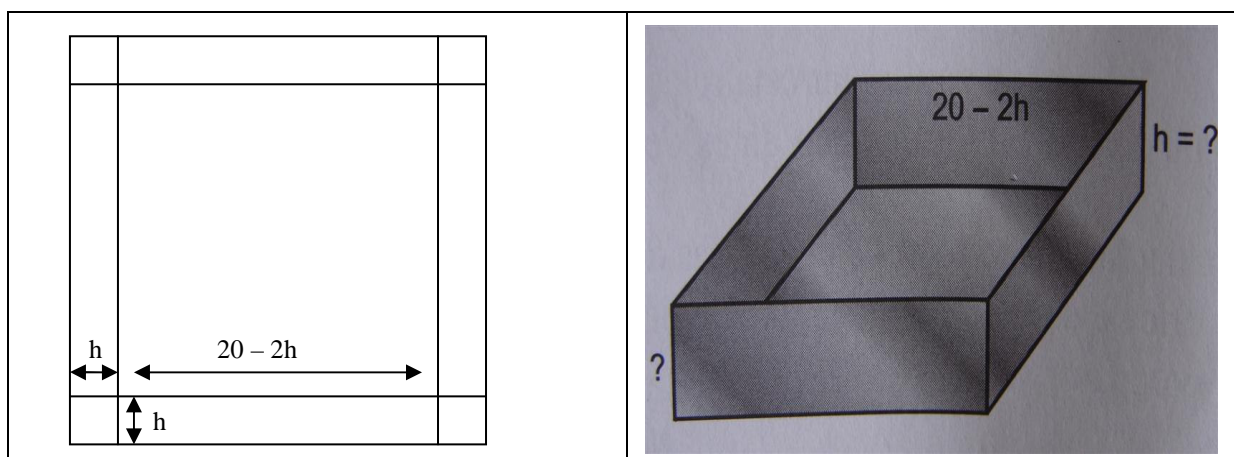
Iniciou-se a discussão da resolução do problema. Nenhum dos membros da equipe conseguiu resolvê-lo completamente. A resolução que segue abaixo foi feita, na lousa, pelo pesquisador, mas sempre instigando a participação deles.

O pesquisador perguntou:

- O que é um modelo? querendo se referir ao desenho apresentado. Esse modelo está relacionado com Álgebra? com a Geometria? O que temos que fazer para construir a caixa?

Nesse momento, responderam:

– primeiro, temos que encontrar a equação que determina o volume da caixa em função da altura: $V = \text{área da base} \times \text{altura}$.



A professora Danielle disse:

– como a base é quadrada, então a área da base é $(20 - 2h)^2$. Tomando “h” como sendo a altura da caixa, fizeram: $V = (20 - 2h)^2 \cdot h$. Deduziram que, como $0 < h < 10$ e não há altura negativa, nem podemos considerar $h = 0$, senão não teríamos como fazer a caixa.

Então, $V = V(h) = (400 - 80h + 4h^2) \cdot h$.

Logo, $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h$.

Nesse momento, o pesquisador chamou a atenção dos professores sobre o conceito de pontos críticos de uma função. Para isso, deveriam fazer uso do cálculo diferencial, que trabalharam na graduação. Mais especificamente, deveriam calcular o ponto de máximo local

e o ponto de mínimo local, justificando que a função derivada, nesses casos, deveria ser assim, igual a zero.

Se $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h$, calculando a derivada, escreveram: $V'(h) = 12h^2 - 160h + 400$.

Se $V'(h) = 0$, então $12h^2 - 160h + 400 = 0$ e, conseqüentemente, $h_1 = 10$ e $h_2 = \frac{10}{3}$. Como h está entre 0 e 10, então ele não pode ser 10. Portanto, o valor da altura da caixa procurada é igual a $\frac{10}{3}$, a fim de que obtenhamos o máximo volume, pedido no problema.

Este problema nos prendeu a atenção e nos estimulou a procurar a solução. Nele, foram usados conceitos algébricos e geométricos, embora tenha se descuidado o conceito de medida.

Ao final do encontro foi proposta, como tarefa extraclasse, a leitura do texto “*Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática*”, de Stanic e Kilpatrick (1989) e solicitada a entrega de uma resenha do mesmo para o encontro seguinte.

2º Encontro (29/09/2012): Sobre aspectos teóricos da Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Matemática e discussão das estratégias de resolução

Logo no início deste encontro, os seis professores entregaram ao pesquisador a resenha do texto que tratava sobre aspectos históricos da Resolução de Problemas no currículo escolar. Dessa forma, dando início às atividades deste encontro, alguns trechos do texto deixado como tarefa extraclasse foram lidos mais uma vez por todos e houve muita discussão.

Tal texto ajudou a evidenciar como a resolução de problemas era tratada dentro do currículo de Matemática, sendo possível visualizar essa situação por meio de três temas: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como habilidade e resolução de problemas como arte. Os sujeitos desta pesquisa se mostraram interessados sobre o assunto.

Concordamos com Stanic e Kilpatrick (1989) quando dizem que o papel da resolução de problemas nos currículos de matemática escolar é o resultado de forças conflitantes, ligadas a ideias antigas e duradouras, sobre os benefícios do estudo de matemática e a uma variedade de eventos que interagem mutuamente e que aconteceram perto do início do século XX.

Por outro lado, Onuchic (1999) diz que a importância dada à Resolução de Problemas é recente e que, somente nas últimas décadas, é que os educadores matemáticos passaram a

aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia atenção especial.


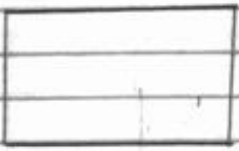
Em seguida, o pesquisador propôs aos professores dois problemas, estes envolvendo equações polinomiais do 2º grau resolvidos por diferentes métodos. Depois da leitura e interpretação do enunciado e durante o tempo em que ficaram debruçados na resolução dos problemas, percebeu-se que os sujeitos de cada grupo trocavam ideias. O pesquisador entregou folhas de almaço para que pudessem registrar as resoluções de seu grupo, sendo que foi cobrado o registro individual, em um caderno próprio, para que tivessem o material para estudo posterior.

O pesquisador deu tempo aos professores, em grupos colocados agora na posição de alunos, para pensar. Durante esse tempo, o pesquisador pôde observar se, de fato, os grupos operavam de forma cooperativa e colaborativa. As resoluções foram feitas. Ao pesquisador, elas foram entregues, por escrito, com as devidas justificativas.

Depois de os grupos terem terminado os dois primeiros problemas, iniciou-se a discussão da resolução do problema 1: *A área, de um quadrado de lado xcm acrescida da área de um retângulo de lados 8cm e xcm, mede 65cm² . Qual é a medida do lado desse quadrado?*

As resoluções que seguem abaixo foram feitas pelos grupos 1 e 2.

GRUPO 2 29/09/2012

x  $+$ x  $= 65$

$A_q = x^2$ $A_r = 8x$

$A_q + A_r = 65 \Rightarrow x^2 + 8x = 65$
 $x^2 + 8x - 65 = 65 - 65$
 $x^2 + 8x - 65 = 0$
 $(x - 5)$
 $(x + 13)$

$\Rightarrow (x - 5)(x + 13) = 0$
 $x - 5 = 0$ ou $x + 13 = 0$
 $x = 5$ / $x = -13$

R: O lado desse quadrado é 5cm.

Parece-nos que esses professores sabiam que uma equação polinomial do 2º grau, pode ser vista na forma $x^2 - sx + p = 0$, onde s = soma das raízes e p = produto das raízes.

No problema trabalhado, então, eles tinham $\begin{cases} x_1 + x_2 = -s \\ x_1 \cdot x_2 = p \end{cases}$, assim $\begin{cases} p = -65 = -(5)(13) \\ s = -8 = (-13) + 5 \end{cases}$, logo $x_1 = 5$ e $x_2 = -13$.

GRUPO 1 29/09/2012

$x^2 + 8x = 65$

$x^2 + 2 \cdot 4x = 65$

completando o quadrado

$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 65 + 16$

ou $\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{81}$

Então $(x+4) = 9$, Assim, o lado do quadrado é $(x+4) \text{ cm} = 9 \text{ cm}$

o $x = 5 \text{ cm}$

A partir do roteiro de trabalho inicialmente apresentado, com o trabalho do grupo concluído, os grupos 1 e 2 colocaram suas resoluções na lousa.

O pesquisador, apoiado nessas resoluções, juntamente com todos os professores, as analisou na plenária, explorou bastante as formas de resolver uma equação do 2º grau, questionou os caminhos percorridos pelas duas resoluções. A partir da análise, com a devida retirada das dúvidas, buscou-se um consenso sobre o resultado pretendido.

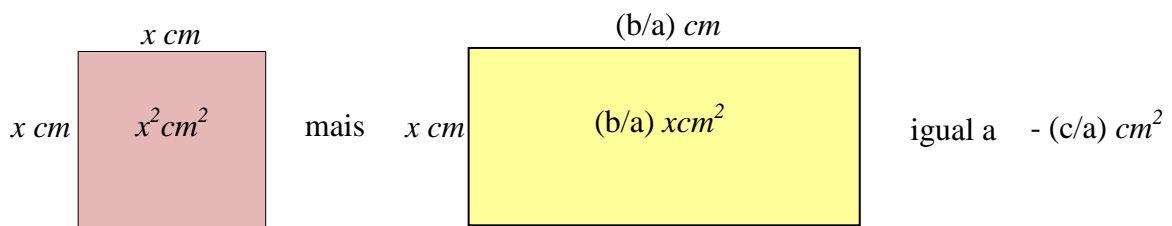
Na sequência, num trabalho conjunto, pesquisador e professores, com o pesquisador na lousa, foi feita uma síntese daquilo que se objetivava aprender a partir dos problemas dados e, formalmente, foram colocados os devidos conceitos trabalhados na formalização apresentada abaixo.

A partir da resolução desse problema, chegamos a uma fórmula geral para a obtenção de soluções de uma equação polinomial do 2º grau. Essa fórmula geral é conhecida, no Brasil, pelo nome de Fórmula de Bhaskara, que permite a resolução de qualquer equação polinomial de 2º grau, aplicando-se o método de Al-Khwarizmi, isto é, o método de completar quadrados para uma equação polinomial de 2º grau:

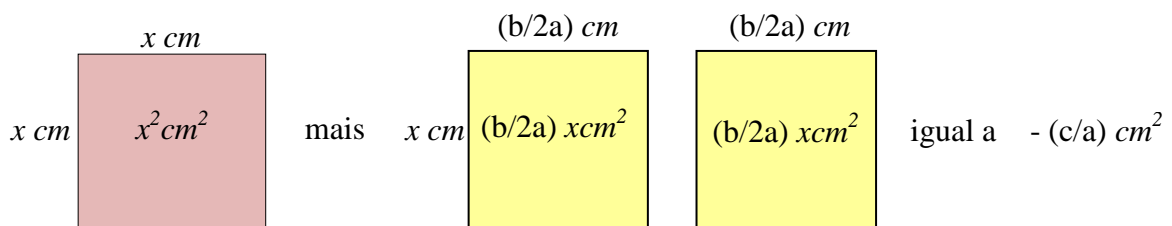
$ax^2 + bx + c = 0, \forall a, b, c \in R; \text{ com } a \neq 0$, que pode ser escrita na forma equivalente $ax^2 + bx = -c$, ao tirar-se $(-c)$ de ambos os membros.

Dividindo-se todos os termos por a , tem-se: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$. Desta forma, interpreta-se x^2 como a área de um quadrado de lado x e $\frac{b}{a}x$ como a área de um retângulo de lados x e $\frac{b}{a}$.

Considerando como unidade de medida o centímetro, as figuras se apresentarão assim:

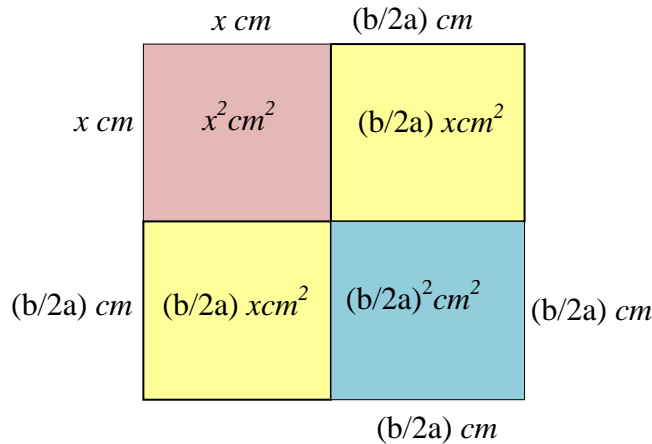


Aplicando-se o método de Al-Khwarizmi e dividindo o retângulo em dois retângulos de mesma área vê-se



$$\text{Assim, } x^2 cm^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x cm^2 = -\frac{c}{a} cm^2$$

Justapondo-se cada meio retângulo aos dois lados do quadrado, completa-se um quadrado maior ao se acrescentar um quadrado de lado $(b/2a)cm$.



$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

A área desse novo quadrado será então $x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraindo-se a raiz quadrada de ambos os membros dessa igualdade e considerando a possibilidade de raízes positivas ou negativas vem

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Então, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A Fórmula de Bhaskara apresenta duas soluções, chamadas raízes da equação, lembrando que raiz de uma equação é um número real que, ao substituí-lo no valor da incógnita, torna a equação verdadeira e lembrando que $\sqrt{x^2} = \pm x$.

Olhando-se algebricamente para esta fórmula e indicando as raízes dessa equação por x_1 e x_2 tem-se

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discutimos com os professores que a expressão $b^2 - 4ac$ é denominada discriminante e é denotada por Δ (delta). O discriminante é obtido em função dos coeficientes da equação algébrica e determina a qualidade de suas raízes reais. O valor do discriminante determina se uma equação polinomial do 2º grau admite duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais ou não admite raízes reais.

Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$ e se

$\Delta > 0 \rightarrow$ há duas raízes reais distintas

$\Delta = 0 \rightarrow$ há duas raízes reais iguais

$\Delta < 0 \rightarrow$ não há raiz real

O Caderno do Professor (2009, p. 9) sugere que, para trabalhar a resolução de equações polinomiais do 2º grau, “sejam enfatizados os procedimentos que envolvem o conhecimento sobre fatoração, exponenciação e radiciação para a resolução de equações quadráticas”.

Ao finalizar este encontro, procurando resumir ideias trabalhadas nos grupos, decidimos expor um texto do Caderno do Professor, produzido pela Secretária da Educação do Estado de São Paulo, onde, apresenta um roteiro com alguns métodos para resolver equações de 2º grau:

Para a introdução desse tema são sugeridos, inicialmente, problemas e outros tipos de equações que podem ser “traduzidos” por meio de equações de 2º grau, passando-se a discutir alguns modos possíveis de resolvê-las. Antes de introduzir qualquer técnica para a resolução de uma equação de 2º grau, é importante que os alunos utilizem seus conhecimentos já construídos para encontrar as raízes da equação ou solucionar o problema em questão. Como alguns problemas deverão ficar em aberto, esse é o momento propício para iniciar o trabalho com as técnicas de resolução. Todavia, sugere-se a discussão de diversos procedimentos e métodos para resolver equações do 2º grau, antes do desenvolvimento da fórmula de Bhaskara. Para o começo desse trabalho, é conveniente a proposição de equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, uma vez que para obter suas raízes podem ser aplicados os procedimentos utilizados na resolução de equações de 1º grau e conhecimentos sobre potências de números.

A combinação de elementos algébricos e geométricos é também explorada dando sequência às interpretações dos produtos notáveis trabalhados no 8º ano. Depois, o professor pode discutir o seguinte fato: se o produto de dois números reais é zero, necessariamente um desses números é zero, ou seja: se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$, ou $b = 0$ para quaisquer a, b pertencentes aos reais. Dessa forma, os alunos poderão resolver equações do tipo $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ e $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$. (CADERNO DO PROFESSOR, 2009, p. 12,13)

Ao final do encontro, foi proposta como tarefa extraclasse, a leitura do texto intitulado “Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas”, de autoria de Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato, 2004, e, solicitada a entrega de uma resenha do mesmo para uma discussão no início do encontro seguinte.

Acreditamos que nosso objetivo para esse encontro foi alcançado, houve uma participação ativa por parte dos professores nas discussões sobre o texto e os problemas trabalhados.

3º Encontro (13/10/2012): Sobre as “grandes ideias” existentes na Análise Combinatória e a discussão de estratégias de resolução de problemas para esse tópico

Este encontro começou com a discussão da tarefa extraclasse, onde os professores, ao considerarem o texto “Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas”, puderam refletir sobre reformas na Educação Matemática e a resolução de problemas no século XX. Dessa discussão passou-se para uma análise de uma nova concepção para Resolução de Problemas, de se ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, em que a Resolução de Problemas é vista como uma metodologia.

O pesquisador, com o intuito de refletir sobre as reformas ocorridas em ensino-aprendizagem e o porque da resolução de problemas neles existente, apresentou-lhes uma citação, retirada do texto, que dizia

No início do século XX, o ensino de matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos era considerado importante. Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender com compreensão, os alunos deviam entender o que faziam. Essas duas formas de ensino não lograram sucesso quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, mas a maioria não. (ONUCHIC E ALLEVATO, 2004, P. 2014)

Dando-lhes tempo para que pudessem interpretar o que as autoras pretendiam dizer com essa citação, alguns professores se manifestaram assim:

- *Todas essas reformas não tiveram o sucesso esperado?.*
- *Estariam essas reformas voltadas para a formação de um cidadão útil à sociedade em que vivia?*
- *Buscavam elas ensinar matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático?*

O pesquisador, apoiado no texto, disse que, durante a década de oitenta, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos visando ao trabalho de sala de aula,

na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material passou a ajudar professores de sala de aula a fazer da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho.

Nesse momento da discussão, os professores destacam o seguinte trecho do texto,

[...] muito possivelmente devido a uma falta de concordância entre as diferentes concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de resolução de problemas ser o foco da matemática escolar, o trabalho dessa década não chegou a um bom termo. Schroeder e Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes de abordar resolução de problemas que ajudam a refletir sobre essas diferenças: teorizar sobre resolução de problemas; ensinar a resolver problemas; e ensinar matemática através da resolução de problemas. (ONUChic, 1999; ONUChic; ALLEVATO, 2004, P. 216)

Após essa discussão, o pesquisador, tomando como base o texto deixado como tarefa extraclasse, questionou os professores sobre o que eles haviam entendido do texto. Durante essa discussão, muito se falou a respeito de que sempre houve muita dificuldade para se ensinar matemática, e isso se pôde perceber na fala de alguns de nossos professores referindo-se ao conteúdo do texto:

- Quando Van de Walle (2009) fala que a resolução de problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino e ele chama a atenção para que o trabalho de ensinar comece sempre onde estão os alunos, ao contrário da forma tradicional em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando-se o que os alunos trazem consigo para a sala de aula, entendi o seguinte: não há dúvida de que ensinar com problemas é difícil. As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades deles.

Em seguida, o pesquisador propôs dois problemas aos professores. Os problemas propostos envolviam contagem, combinação, arranjo e permutação.

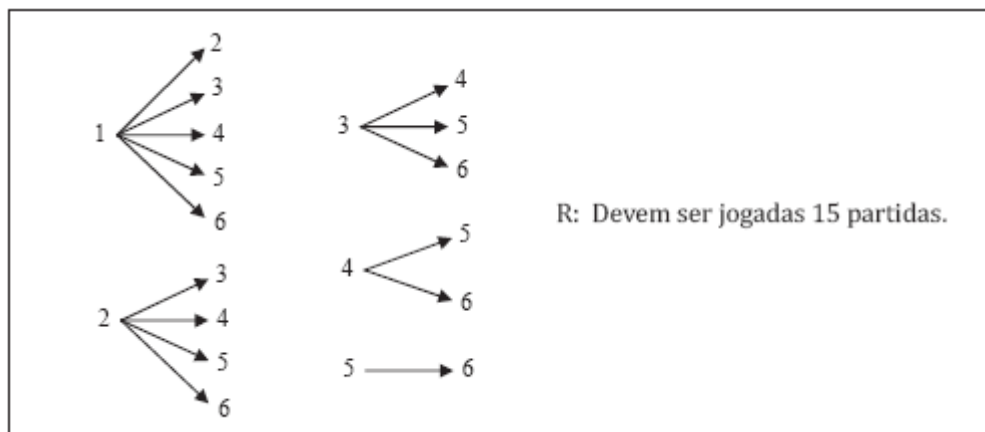
Dado tempo necessário para a resolução dos problemas, ao pesquisador foram entregues, por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.

O problema 1 tinha o seguinte enunciado: Na escola de Ana Lúcia há 6 times de basquete. Eles querem planejar um torneio para após as aulas, de maneira que cada time jogue uma única vez com todos os outros. Quantas partidas devem ser jogadas?

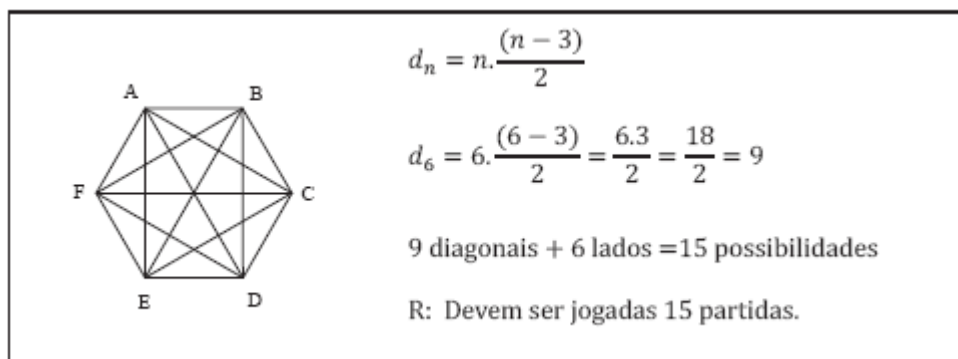
Os grupos 1 e 2 resolveram o problema de duas maneiras diferentes. O grupo 1 utilizou “tabela” e “diagrama” (de flechas) e o grupo 2 utilizou uma figura com a fórmula das diagonais de polígonos (figura e equação) e a fórmula de Combinação Simples. Naquele

momento, o pesquisador pediu ao grupo 1 que falasse da estratégia de diagrama e ao grupo 2 que falasse da estratégia do uso da figura para que pudessem representá-las na lousa.

Grupo 1



Um dos professores, membro do grupo 2, usou a seguinte estratégia a de construir o desenho de um hexágono para contar as diagonais e depois somar os lados: cruzei as diagonais, só que aí eu contei mais os lados. No entanto, as diagonais foram obtidas pela fórmula do número de diagonais: daí eu usei a fórmula da diagonal e somei os lados. A fórmula é $n(n - 3)/2$ Dividido por 2 aí você não repete pares. Você pode ligar tudo. A resolução ficou assim:



Esse professor chamou atenção para o fato de que, diante desse problema, buscasse em seu conhecimento prévio, recursos para sua resolução.

No trabalho com a resolução desse problema, o foco da aprendizagem deve ser o processo e não somente a resposta que os alunos encontram (Onuchic, 2011). Desse modo, é necessário realizar uma discussão na plenária, com eles, sobre as estratégias que utilizaram, resumindo suas ideias, possibilitando-lhes tirar conclusões apropriadas quando verificam a racionalidade da resposta encontrada.

Em seguida, o pesquisador apresentou a estratégia da “lista”. A resolução ficou assim:

<u>T1</u>	<u>T2</u>	<u>T3</u>	<u>T4</u>	<u>T5</u>	<u>T6</u>	
T2	T3	T4	T5	T6		
T3	T4	T5	T6			
T4	T5	T6				
T5	T6					
T6						
						R: Devem ser jogadas 15 partidas.

Para encerrar a discussão do problema 1, o pesquisador apresentou a resolução por meio da fórmula de Combinação Simples para enfatizar a diferença entre aplicar uma fórmula e tentar, pensando, resolver por outros meios.

$$C_{n, p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow C_{6, 2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{720}{2 \cdot 24} = 15$$

A respeito do trabalho com a resolução de problemas em sala de aula, alguns professores expuseram seus questionamentos.

Bruna: No começo da aula eu posso dar aquele mesmo problema (problema 1), explico, analiso a estratégia e depois digo que dá pra resolver de outro jeito, que é... aquele mesmo problema eu consigo resolver pela fórmula?

Pesquisador: Isso. O aluno ou vai conseguir fazer ou não vai conseguir. Isso vai acontecer. Pode ser que ele não consiga de nenhum jeito. Aí você pode incentivar a resolver e pedir que os alunos em grupo discutam. O professor nesse momento pode trabalhar com problemas secundários com os grupos, isto é, problemas menores que se não resolvidos, impedem a resolução do problema original.

Sara: A intenção é introduzir um conceito através de um problema, que é a construção de um novo conhecimento.

Pesquisador: Aí, na formalização, você destaca o que foi feito dessa forma e dessa outra mas que tem outro jeito... que é esse usando a fórmula. Você pode dizer que se trata de Análise Combinatória e depois introduzir e discutir o conteúdo.

Ivã: Não consigo pensar em um monte de problemas para cada conteúdo que eu vou dar.

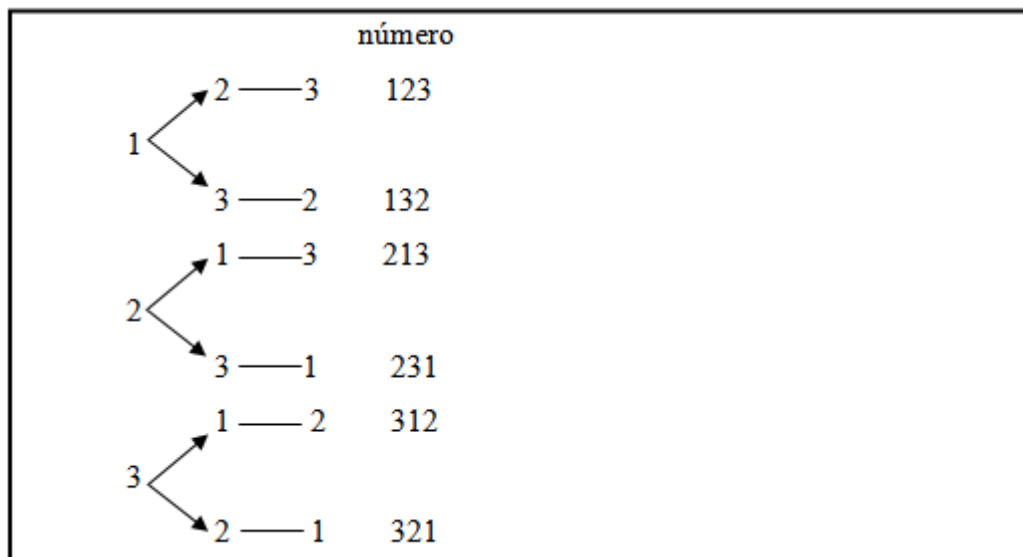
Bruna: Você procura! (dizendo para Ivã) ((risos))

Esse diálogo com os professores levou a evidenciar o trabalho com a Matemática em sala de aula, na perspectiva de se ensinar matemática através da resolução de problemas em que o ensino de um conteúdo matemático deve se iniciar a partir de um problema. Desse modo, os alunos deveriam ser direcionados a tomar suas próprias decisões sobre o caminho a ser seguido, o que permitiria identificar suas estratégias (Onuchic e Allevato, 2004).

Após ter discutido o problema 1. Para fixação das ideias de análise combinatória apresentamos um novo problema, esse levaria a outro conceito, o de arranjo.

Problema: Com os algarismos 1, 2 e 3, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

O grupo 1 fez uso da árvore de possibilidades:



Segundo Souza (2010, p. 164),

a árvore de possibilidades é um recurso útil para a sistematização da contagem de casos possíveis. Ela representa os principais tipos de raciocínio envolvidos nos problemas de Análise Combinatória: o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo. Os alunos deveriam aprender que a árvore de possibilidades representa o número de possibilidades e que tem uma estrutura multiplicativa.

A estratégia utilizada pelo grupo 2 para resolver esse problema, de início foi a de fazer uma lista organizada,

123	213	312
132	231	321

Os professores, também, apresentaram fazendo uso da ideia do Princípio Fundamental de Contagem. Para cada algarismo, colocaram o número de possibilidades, iniciando pelas centenas, com três possibilidades (1, 2 ou 3), nas centenas; como o número é formado com algarismos distintos, então restam duas possibilidades para as dezenas, e para as unidades, então, só resta uma possibilidade. Pelo Princípio Multiplicativo, são formadas $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Há portanto seis números diferentes com três algarismos distintos.

Durante a plenária foi discutido que, se ao invés de números de três algarismos, tivéssemos números com 9 algarismos, a árvore de possibilidades não seria tão facilmente representada.

Para formalizar foi utilizada, como recurso teórico-prático, a Dissertação de Mestrado, intitulada “Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”, de Analucia Castro Pimenta de Souza (Unesp – Rio Claro/SP, 2010).

Na Plenária trabalhamos o processo de contagem, observando a ordem dos elementos e verificando se o fato de mudar essa ordem influenciaria ou não o resultado. Utilizando as ideias básicas de Arranjo, construímos a fórmula de Arranjo segundo Souza (2010).

Arranjos simples - Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não nulo, $p \leq n$. O número de arranjos simples dos n elementos de I tomados p a p , isto é, $A_{n,p}$, pode ser calculado pelo Princípio Fundamental de Contagem:

Para o 1º elemento, há n possibilidades de assumir um lugar na sequência dos elementos;

para o 2º elemento, $(n - 1)$ possibilidades;

para o 3º elemento, $(n - 2)$ possibilidades;

para o 4º elemento, $(n - 3)$ possibilidades;

⋮ ⋮

e, para o p -ésimo elemento, $[n - (p - 1)]$ possibilidades.

Assim, temos que:

$$A_{n,p} = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdots [n - (p - 1)]$$

ou

$$A_{n,p} = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdots (n - p + 1)$$

Para chegar ao fatorial de n , precisamos multiplicar por $(n - p)!$.

Mas para não alterar a igualdade, devemos dividir o segundo membro dessa igualdade também por $(n - p)!$. Além de facilitar os cálculos, utilizando o conceito de fatorial, o fato de multiplicar por $(n - p)!$ decorre do número de agrupamentos que se repete utilizando os mesmos elementos, ou seja, há $(n - p)!$ agrupamentos formados pelos mesmos elementos.

Desse modo, temos:

$$A_{n,p} = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdots (n - p + 1) \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdots (n - p + 1)(n - p)!}{(n - p)!}$$

$$\therefore A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Teorema: Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não nulo tal que $p \leq n$. Chama-se arranjo simples de p elementos distintos de I a toda sequência formada por p elementos de I distintos.

O número de arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p é dado pela fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

O problema 2 tinha o seguinte enunciado: *Suzie e Sam têm quatro adesivos numerados de 1 a 4. Eles decidiram repartir igualmente os adesivos, dois para cada um. De quantos modos eles podem dividir os quatro adesivos entre eles?*

A respeito do problema 2, alguns professores expuseram a resolução.

Lucas: Temos quatro adesivos 1, 2, 3 e 4 para serem distribuídos igualmente para Suzie e Sam. Então, de quantos modos diferentes posso distribuir o adesivo 1?

Danielle: De 6 modos. Acho que mesma coisa, para os adesivos 2, 3 e 4.

Ivã: Se for assim Danielle, logo teríamos 6 modos multiplicado por 4, pois temos 4 adesivos, totalizando 24 modos na distribuição.

Lucas: Como são dois adesivos para cada um, dividimos por 2, o que está falando o Ivã, ou seja, resultando 12 modos. Aí, como são duas pessoas (Suzie e Sam), dividimos 12 por 2, resultando 6 modos de dividir os adesivos.

Neste problema o grupo utilizou, como estratégia, uma lista para melhor visualizar a distribuição dos adesivos.

Grupo 1

TABELA DO GRUPO 1					
SUZIE		SAM			
1-2	3-4				
1-3	2-4				
1-4	2-3				
2-3	1-4				
2-4	1-3				
3-4	1-2				
2-1	3-4				
2-3	1-4				
2-4	1-3				
3-1	2-4				
3-2	1-4				
3-4	1-2				
		SUZIE	SAM		
3-1	2-4	1-2	3-4		
3-2	1-4	1-3	2-4		
3-4	1-2	1-4	2-3		
4-1	2-3	2-1	3-4		
4-2	1-3	2-3	1-4		
4-3	1-2	2-4	1-3		
				SUZIE	SAM
4-1	2-3	3-1	2-4	1-2	3-4
4-2	1-3	3-2	1-4	1-3	2-4
4-3	1-2	3-4	1-2	1-4	2-3
1-2	3-4	4-1	2-3	2-3	1-4
1-3	2-4	4-2	1-3	2-4	1-3
1-4	2-3	4-3	1-2	3-4	1-2
24 MODOS		12 MODOS		6 MODOS	

Na Plenária, os professores perceberão que a ordem em que os adesivos são distribuídos não altera o resultado final, ou seja, os dois adesivos que Suzie e Sam receberam. Por exemplo, quando Suzie recebeu os adesivos 1 e 2, não importa se ela recebeu o adesivo 1 primeiro ou o adesivo 2 primeiro, pois isso não mudará os adesivos que ela tem em mãos que continuam sendo os adesivos 1 e 2. Mas, se fossem entregues os adesivos 1 e 2 para Suzie, restariam apenas os adesivos 3 e 4 para Sam. Esse modo de distribuição fica diferente se fossem entregues os adesivos 1 e 2 para Sam e o 3 e 4 para Suzie, alterando assim a natureza dos elementos recebidos pelos envolvidos no problema e, conseqüentemente, o modo de distribuição.

Deste modo, a ordem em que os adesivos são distribuídos não altera o resultado, mas muda a natureza dos elementos envolvidos. Um agrupamento que se diferencia de outros apenas pela natureza de seus elementos é chamado combinação e indicada por $C_{n,p}$.

No problema 2 temos 4 elementos 1, 2, 3 e 4 (adesivos). Pelo Princípio Multiplicativo, teremos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modos de distribuir esses adesivos. Como são dois adesivos para cada um, divide-se por 2, tendo então 12 desses modos. Mas como são duas pessoas, divide-se novamente por 2, resultando 6 modos de distribuir os quatro adesivos entre Suzie e Sam.

Então

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

Conjecturando, isto é, levantando a possibilidade de uma afirmação ser verdadeira indo em busca de um padrão e considerando:

n: número total de elementos

p: número de adesivos para cada um: Suzie e Sam.

Poderíamos escrever por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Segunda Souza (2010) na formalização, para a construção da fórmula de combinação simples, partimos da construção da fórmula para arranjo simples. Como já foi demonstrada em problema anterior a fórmula para arranjos simples $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Para essa fórmula eram consideradas a ordem e a natureza dos elementos, e para este nosso caso, a ordem não é relevante mas apenas a natureza dos elementos, e p! é o número das possíveis ordenações iguais, a fórmula geral para combinações é dada por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, sendo $p \leq n$.

Combinações simples - Conhecidas as ideias de arranjos simples, as ideias de combinações surgiriam como um conseqüente caso particular, e não dependeriam da ordem dos elementos mas, somente da natureza desses elementos.

A cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem p! arranjos que são obtidos permutando-se os elementos da combinação, ou seja:

$$A_{n,p} = C_{n,p} \cdot P_p \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p!} =$$

$$= \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Teorema: Sendo $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ um conjunto formado com n elementos e p um número natural, tal que $p \leq n$, chamamos de **combinação simples** dos n elementos de A , tomados p a p , a todo subconjunto de A com p elementos, onde o número de combinações é dado por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, sendo $p \leq n$.

Assim, se houvesse mais tempo, poderíamos ter trabalhado com os participantes do grupo, Arranjos com repetição, Permutações com repetição e Combinação com repetição através de problemas. Em nossa visão, a compreensão da Análise Combinatória, por parte dos alunos envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando o aluno é capaz de: relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas no problema. Ressalte-se que as indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 222)

Ao final deste encontro, foi proposta, como tarefa extraclasse, a leitura de dois textos: “Números e Operações” e “Álgebra” dos Principles and Standards for School Mathematics – NCTM, 2000, traduzido pelos portugueses como Princípios e Normas para a Matemática Escolar (PNME, 2008, p. 34-43).

4º Encontro (20/10/2012): Resolução de Problemas envolvendo Padrões, no Contexto da Modelização Matemática

A reunião teve início com uma conversa sobre os textos “Números e Operações” e “Álgebra”, deixados como tarefa extraclasse. Pedi aos participantes do grupo de estudos que se sentissem à vontade para compartilhar o que mais haviam gostado e o que menos gostaram da leitura realizada. Alguns afirmaram não ter conseguido fazer a leitura durante a semana. Então, pedi aos que leram que fizessem uma síntese das ideias do texto.

Sendo assim, a professora Danielle resolveu comentar, de forma sucinta, o texto. Pediu a leitura de trechos que ela havia destacado, ora para um participante, ora para outro. O pesquisador fez perguntas com o intuito de promover uma discussão sobre a importância dos

padrões “Números e Operações” e “Álgebra” para o ensino da Matemática escolar. O grupo se mostrava interessado nessa discussão e levantava perguntas sobre o que significava: Compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos, o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si. ...

Também os professores buscavam o significado de: Compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas, ...

Depois da discussão dos textos, os participantes do grupo de estudo consideraram difícil de entender, porém necessária, a visão histórica do Número como a pedra angular do currículo da matemática escolar e a Álgebra como algo mais do que a manipulação de símbolos. Com isso, parece que todos se sentiram mais entusiasmados em reconhecer a importância de se trabalhar com os Padrões “Números e Operações” e “Álgebra” em sala de aula.

Ainda em relação aos textos, a equipe concordou com a ideia de se trabalhar o Padrão “Números e Operações” e o padrão “Álgebra” através da Resolução de Problemas.

Em seguida, o pesquisador fez uma apresentação em *power-point* sobre a importância da modelização matemática na formação do professor de Matemática e destacou a diferença entre modelagem matemática e modelização matemática.

Nessa apresentação foi dito que, na Modelização Matemática, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua aula mais dinâmica, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em que estão, além de obedecer ao programa curricular. É bom que, durante as aulas, se tenham vários modelos para que se possa optar entre eles e não por eles, tornando-os como um modelo importante. O aprimoramento de um modelo ou de sua adaptação cabe ao professor e ao seu bom senso.

A modelização matemática no ensino e na aprendizagem pode ser um caminho para despertar, no aluno, o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece. Ao mesmo tempo em que aprendem a arte de modelar, os alunos utilizam os modelos matemáticos criados para resolver determinadas situações nas áreas da Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outros.

Onuchic (2003), citando Van de Walle, fala do papel dos modelos no desenvolvimento da compreensão, dizendo que, com frequência, ouve-se que bons professores usam uma abordagem de “pôr as mãos na massa” para ensinar matemática. Ela diz ainda que, na

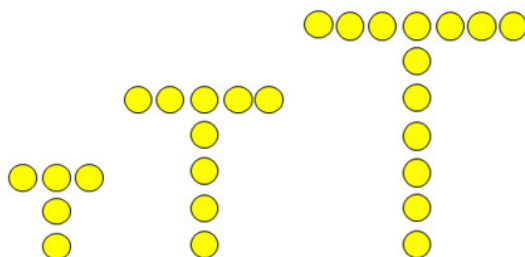
utilização de modelos na sala de aula podem-se identificar três aspectos: ajudar a desenvolver novos conceitos ou relações; ajudar a fazer conexões entre conceitos e símbolos e assegurar a compreensão dos alunos.

A modelização matemática tem, como objetivo, explicar matematicamente situações do cotidiano e demais situações-problema querendo buscar um padrão ou utilizando material manipulável para resolver certos problemas/desafios. Nesse sentido, a Modelização e a Resolução de Problemas possibilita uma inversão do modelo “tradicional” de ensino, visto que, com ela, os problemas são apresentados em primeiro lugar e, posteriormente, é feita a formalização do conteúdo matemático construído.

Como uma aplicação prática do que foi exposto, abordou-se o problema 1 deste encontro.

Problema 1:

Tisiu ficou sem parceiro para jogar bolitas (bolas de gude). Então, pegou sua coleção de bolitas e formou uma sequência de "T" (a inicial de seu nome), conforme a figura:



Suponha que Tisiu conseguiu formar 10 "T" completos, seguindo esse padrão...

- É possível descobrir a quantidade de bolitas utilizadas por Tisiu? Como você a calcularia?
- E se ele tivesse uma coleção de bolitas que totalizasse 10000. Quantos T, nessa perspectiva, ele formaria?

Nesse encontro, o pesquisador não disse a que conteúdo se referia o problema ou para que séries/anos ele seria apropriado. Os professores poderiam resolvê-lo utilizando os conteúdos e as estratégias que julgassem mais convenientes. Com isso foi possível que todos se pusessem a resolver o problema, respeitando as condições que cada um trazia de seus conhecimentos, suas experiências e estratégias.

O grupo 1 tentava resolver o problema, montando uma tabela com os valores da posição dos números dados e seus respectivos valores do número de bolitas em cada "T". No

entanto, não tentou encontrar uma expressão matemática a partir da tentativa de estabelecer uma relação entre esses valores. Esse grupo logo inferiu que se tratava de uma P. A. (Progressão Aritmética).

Ouvindo os professores,

Danielle, do Grupo 1 disse: Ah, eu só listei lá. Peguei 5. Depois, o segundo tem nove bolitas. O terceiro tem treze bolitas. Aí, uma tabelinha. Eu tentei achar um padrão pra esses. O que é o T de nove bolitas? É o cinco mais quatro. Aí depois o T com treze bolitas é nove mais quatro...

Pesquisador: Que expressão, então, você encontrou? Ou você descobriu isso direto?

Danielle, do Grupo 1: Eu descobri que era uma P. A. de razão 4. Daí eu achei a fórmula do último termo.

Pesquisador: será que é preciso de fórmula para resolvê-lo? Se você apresentasse esse problema a uma criança do Ensino Fundamental I, será que ela não seria capaz de resolvê-lo?

Após refletirem alguns instantes, sobre a necessidade de fórmulas, os professores disseram que não, e seguiram com o trabalho. Eles também perguntavam se poderiam utilizar esse ou aquele método de resolução, e se a resposta obtida estava correta. Os grupos se ajudavam com dicas, sugerindo que tentassem conferir, resolvendo de outro modo e que aguardassem para compartilhar as suas resoluções.

Após algum tempo, todos já tinham resolvido o problema de achar, o número de bolitas do T_{10} e foi solicitado que um participante de cada grupo colocasse, na lousa, sua resolução, sendo que as iguais não precisavam ser repetidas.

Querendo achar o número de bolitas utilizadas até T_{10} (o décimo T), precisavam achar a soma. Conseguiram achá-la embora o trabalho de busca por padrões não lhes pareceu natural. Nenhum grupo tentou resolvê-lo sem o recurso da P.A.

O grupo 1 resolveu esse problema montando a sequência de números de bolitas de T_1 a T_{10} , somando termo a termo.

A partir daí, o pesquisador, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, dentro de um processo dinâmico, junto com os professores, passou à construção de uma tabela, relacionando as variáveis presentes no problema. O pesquisador foi à lousa e desenhou-se ao quadro abaixo:

Posição dos T T_N	Número de bolitas em cada T N	A soma de bolitas de T_1 a T_N S_N	Total de bolitas utilizadas de T_1 a T_N T

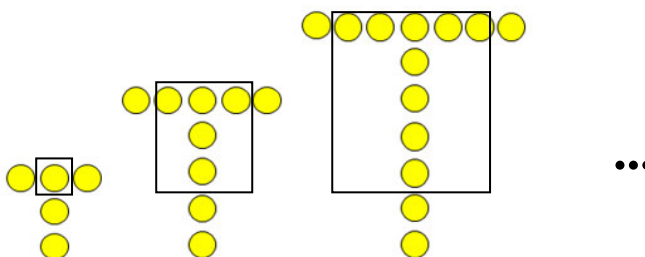
Essa tabela foi preenchida, ao longo das discussões e reflexões feitas a partir das questões do problema: Quantas bolitas Tisiu utilizou para formar T_1 (o 1º “T”)? E para T_2 (o 2º “T”)? E para T_3 (o 3º “T”)?

Responderam: 5, 9, 13

Como vocês sabem isso?

Os professores responderam, são dados do problema.

O pesquisador ao observar as figuras que representam os Ts, pôde perceber que, cada T apresenta o T anterior circundado na horizontal por duas bolitas e apresenta na vertical outras duas bolitas. Esse padrão deve se repetir sempre.



Pesquisador: Quantas bolitas Tisiu utilizou para formar o T_4 ? Como vocês sabem?

Professores: O número de bolitas aumenta quatro unidades a cada nova posição.

Pesquisador: Como a “posição do T” está relacionada com o número de bolitas naquela posição?

Professores: Número de bolitas = $4 \times$ “posição do T” + 1

Pesquisador: Então, quantas bolitas Tisiu utilizou para a 10ª posição?

Professores: 41

Pesquisador: Como chegou a esse número?

Professores: $4 \times 10 + 1 = 41$, achando o número de bolitas do T_{10} .

Pesquisador: Como vocês podem encontrar o total de bolitas ao formar 10 T completos?

Em seguida constrói-se a tabela:

Posição dos T T_N	Número de bolitas em cada T N	A soma de bolitas de T_1 a T_N S_N	Total de bolitas utilizadas T
1	5	5	5
2	9	5+9	14
3	13	5+9+13	27
4	17	5+9+13+17	44
5	21	5+9+13+17+21	65
⋮	⋮	⋮	⋮
10	41	5+9+13+17+ ... +37+41	230

De posse da tabela e com a condição encontrada pelos professores, podemos escrever

$$N = 4T + 1, \text{ então, } N_{10} = 4 \times 10 + 1 = 41 \text{ e como } S_T = \sum_{n=1}^N S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_N,$$

$$\text{daí, } S_T = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 = 230.$$

E foi conjecturado pela equipe toda que $S_T = 2T^2 + 3T$, onde T é a posição do T.

$$\text{Assim, } S_{10} = 2(10)^2 + 3(10) = 200 + 30 = 230.$$

Embora sua prova não tenha sido produzida, uma vez que ela requeria o PIF (Princípio da Indução Finita). Entretanto se quiséssemos fazer uso da P.A. teríamos trabalhado assim:

$$\text{Se } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \text{ onde } a_1 = 5, a_n = 41 \text{ e } n = 10.$$

$$S_{10} = \frac{(5+41)10}{2} = 230.$$

2ª pergunta do problema

Se Tisiu tivesse uma coleção de 10000 bolitas, quantos T, nessa perspectiva, ele formaria?

Para responder a essa pergunta, os professores puseram-se a pensar no problema como uma situação inversa da 1ª questão: Conhece-se o total de bolitas e quer-se saber o número de T.

Para buscar um caminho de resolução, procurou-se viver, um pouco, o problema. Os professores, ajudados pelo pesquisador, escreveram o seguinte:

$$\begin{array}{r}
 \underbrace{5 + 9 + 13 + 17 + 21}_{65} \quad + \quad \underbrace{25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 + 53 + 57 + 61}_{65} \\
 \phantom{\underbrace{5 + 9 + 13 + 17 + 21}_{65}} \quad + \quad \underbrace{65 + 69 + 73 + 77 + 81 + \dots}_{65} \\
 40 + 5 + 40 + 9 + 40 + 13 + 40 + 17 + 40 + 21 \quad + \quad 60 + 5 + 60 + 9 + 60 + 13 + 60 + 17 + 60 + 21 \\
 5 \times 40 + (5 + 9 + 13 + 17 + 21) \quad + \quad 5 \times 60 + (5 + 9 + 13 + 17 + 21) \\
 200 + 65 = 265 \quad + \quad 300 + 65 = 365 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}$$

E puderam perceber um padrão para cada cinco parcelas: $5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 65$. Generalizando tem-se a seguinte forma para a soma de n blocos de 5.

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=0}^n [5(2i \times 10) + 65] \\
 i = 0 &\rightarrow 65 \\
 i = 1 &\rightarrow 165 \\
 i = 2 &\rightarrow 265 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \sum_{i=0}^{13} [5(2i \times 10) + 65] &= \sum_{i=0}^{13} (100i + 65) = 65 + 165 + 265 + 365 + 465 + 565 + 665 + \\
 &\quad + 765 + 865 + 965 + 1065 + 1165 + 1265 + 1365 = 10010
 \end{aligned}$$

Respondendo a 2ª pergunta do problema temos:

$$\begin{aligned}
 5 T &\rightarrow \quad \quad \quad = 65 \\
 10 T &\rightarrow 65 + 165 = 230 \\
 15 T &\rightarrow 230 + 265 = 495 \\
 20 T &\rightarrow 495 + 365 = 860 \\
 25 T &\rightarrow 860 + 465 = 1325
 \end{aligned}$$

$$30 T \rightarrow 1325 + 565 = 1890$$

$$35 T \rightarrow 1890 + 665 = 2555$$

$$40 T \rightarrow 2555 + 765 = 3320$$

$$45 T \rightarrow 3320 + 865 = 4185$$

$$50 T \rightarrow 4185 + 965 = 5150$$

$$55 T \rightarrow 5150 + 1065 = 6215$$

$$60 T \rightarrow 6215 + 1165 = 7380$$

$$65 T \rightarrow 7380 + 1265 = 8645$$

$$70 T \rightarrow 8645 + 1365 = 10010$$

Resposta: Tisiu, com uma coleção de 10000 bolitas, nessa perspectiva, formaria 69 T. Assim $S_{69} < 10000$ bolitas considerando 14 blocos de 5.

Os diferentes caminhos seguidos proporcionaram, aos professores do grupo, vivenciar diferentes modos de resolver o problema dado e, embora inicialmente pudesse parecer demasiadamente simples, houve grande interesse e envolvimento por parte deles em sua resolução e no compartilhamento de ideias. Ficaram motivados ao ver a beleza dos números e poder observar padrões ao resolvê-lo utilizando diferentes estratégias.

O trio que fez referência à modelização como um generalizador de resultados foi o de Sara, Danielle e Bruna. Elas escreveram o seguinte comentário da atividade: Nesse encontro tivemos o primeiro contato com a Modelização Matemática e enfatizou a importância de saber modelar um problema, sentirmos sua beleza e pensarmos em construir modelos matemáticos com nossos alunos. Ficamos muito satisfeitas com as possibilidades que a modelização pode oferecer. Aparentemente, ela parece ter potencial para facilitar o trabalho de profissionais que não têm, em sua formação, um estudo aprofundado de Matemática, como nós licenciados em Matemática.

Sem nenhum comentário a mais, o pesquisador lhes entregou a tarefa extraclasse e encerrou esse encontro.

5º Encontro (27/10/2012): Sobre a Matemática Financeira

O objetivo deste encontro foi o de estudar e discutir Matemática Financeira como, também, o de apresentar a importância desse tópico, no cotidiano do aluno, através de exemplos práticos, visando a formar professores que, ao trabalharem com seus alunos em suas próprias salas de aula, possam conduzi-los na resolução de problemas, simples ou complexos, adequados a esse tema como, por exemplo, o parcelamento de dívidas nas compras a prazo.

Ao receber essas resoluções, o pesquisador aceitou, como trabalho terminado, duas apresentações formais, procurando atender aos dados do problema, sem preocupação alguma com o que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propõe. Os encontros foram programados visando a um trabalho do professor em sua sala de aula, levando os alunos à compreensão, dando significado ao que foi feito.

Todos os professores foram chamados para participar da Plenária, onde o pesquisador, como mediador do trabalho, começou a explorar as resoluções colocadas na lousa, chegando a um consenso quanto à resposta do problema.

Olhando para a resolução apresentada pelo grupo 2, o pesquisador ficou contente ao perceber que os professores sabiam que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e disse: Vejam a importância de se trabalhar com problemas geradores de conteúdos novos. ... Vocês construíram um conceito da Progressão Geométrica (P.G.).

Ivã: estou emocionado, esse problema significa muito para mim. Porque, agora, acredito que se pode construir um novo conhecimento, a partir de um problema.

Larissa: trabalhar com essa metodologia, nos faz pensar. Nós professores estamos acostumados a ensinar primeiro, tirando a oportunidade de o aluno pensar. Parabéns Ivã por ter gostado de trabalhar nesse problema, você mostrou que, com esforço, podemos conseguir ...

Pesquisador: Como se pode perceber, o problema não precisa ser complexo ou difícil para se fazer Matemática.

Bruna: O que significa fazer matemática?

Pesquisador: É o que vocês fizeram aí ou o que o aluno faz quando, diante de um problema, consegue explorar, refletir, argumentar, conjecturar e ver o que há por trás de cada problema.

Sara: Nesse simples problema foram trabalhados conceitos de porcentagem, de juros aplicados na poupança, Montante e, olha aí a P.G.

Após a discussão sobre a tarefa extraclasse, alguns professores disseram que um padrão é alguma coisa que se repete, vai se repetindo. O pesquisador confirmou a definição dada pelos professores e disse que padrão é um conceito importante da Modelização Matemática.... É um modelo, ... é algo que se repete sempre. Podemos encontrar padrões numa sequência numérica; numa sequência de figuras; em ornamentos, na natureza, nas fórmulas deduzidas, nas proposições demonstradas, nas rotinas do dia-a-dia, etc.

No segundo momento do encontro, o pesquisador fez uma apresentação, em *power-point*, sobre o trabalho de Paulo Henrique Hermínio. Nesse trabalho, ele analisou livros didáticos de Matemática, verificando como traziam e trazem o conteúdo Matemática

Financeira, no contexto da Matemática Escolar. Entrevistou pais e professores a respeito de Matemática Financeira, criou um Projeto de ensino sobre conceitos de Matemática Financeira para ser trabalhado com alunos em uma sala de aula fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Hermínio (2008) afirmou levando-se em conta, que ao se falar de Matemática Financeira consideram-se contextos que envolvem, entre outros assuntos, consumo, trabalho, operações bancárias, torna-se necessário que se reflita sobre a questão social implícita em cada uma dessas aplicações desse conteúdo. Dessa forma, para ele, a aprendizagem dos conceitos de Matemática Financeira, por parte dos alunos, é uma importante ferramenta para sua formação, já que problemas relacionados a esse conteúdo fazem parte de sua rotina diária.

Pensando-se objetivamente em Matemática Financeira, como diz Hermínio, pode-se, através dela, fazer com que nossos alunos aprendam a ser melhores na exigência de seus direitos, a entender melhor o que se passa nas relações comerciais existentes no meio social em que estão inseridos, além de poder entender as muitas questões que envolvem tantas desigualdades que hoje presenciamos.

Muitas vezes, os alunos deixam perdidas uma série de informações matemáticas recebidas, por não saberem relacionar essas informações com seu cotidiano. Na visão de Hermínio (2008), talvez não seja possível, aos alunos, terem a percepção clara quanto à aplicabilidade de todos os conceitos que envolvem a Matemática. Porém, ao se tratar de Matemática Financeira, isso pode ser minimizado consideravelmente, se sua abordagem for feita de maneira diferenciada pelos professores.

Em seguida, o pesquisador propôs dois problemas aos professores. Os problemas propostos envolviam juros simples, juros compostos e parcelamento.

Dado o tempo necessário para a resolução dos problemas, ao pesquisador foram entregues, por escrito, com as devidas justificativas, as resoluções dos grupos.

Problema 1:

Roberto pediu emprestado à Suzana a quantia de R\$50,00 para ser paga após 3 meses. Naquela data, além de pagar a quantidade de R\$50,00, Roberto se comprometeu a pagar mais R\$10,00. Qual é a taxa de juros que Roberto estará pagando nesse trimestre? Se, passados esses três meses, Roberto pedir à Suzana mais três meses para pagar sua dívida, conservando a taxa de juros a esse trimestre, qual será o montante da dívida a ser paga se:

- a) Roberto calcular o juro somente sobre o capital emprestado inicialmente?

- b) Roberto calcular o juro sobre o capital que ele deve após os três primeiros meses?
- c) Os valores de (a) e (b) são diferentes? Justifique:
- d) Qual é o valor correto?

Questões:

- a) Quando vamos pagar uma dívida, qual tipo de cálculos de juros você acha que é aplicado? Por quê?
- b) Qual seria a melhor opção para Roberto? Por quê?
- c) Qual seria a melhor opção para Suzana? Por quê?

Todos os professores foram chamados para participar da Plenária, onde o pesquisador começou a explorar as resoluções colocadas na lousa, chegando a um consenso quanto à resposta do problema.

Pesquisador: Primeiramente, qual é a taxa de juros que Roberto estará pagando nesse trimestre?

Grupo 1: Como já sabemos, taxa de juros é a razão entre o juro e o capital.

Logo, Roberto estará pagando $\frac{R\$10,00}{R\$50,00} = 0,20 = 20\%$ ao trimestre.

Olhando para a taxa de juros apresentada pelo grupo 1, o pesquisador disse: Qual será o montante da dívida depois de mais três meses?

Pesquisador: a) Se Roberto incorporar o juro dos dois trimestres somente no capital emprestado inicialmente?

Grupo 1: Como Roberto paga R\$10,00 a cada trimestre, então ele deverá pagar R\$20,00 pelos dois trimestres. Ou seja, sua dívida seria de R\$70,00.

Pesquisador: b) Se Roberto incorporar, além dos juros do primeiro trimestre, os juros sobre o capital que ele deve após os 3 primeiros meses?

Grupo 1: Após o primeiro trimestre ele fica com um montante de dívida de R\$60,00 (R\$50,00 + 20% de R\$50,00). Incorporando, à mesma taxa de juros, de 20% ao trimestre, sobre o valor, agora de R\$60,00, teríamos: $R\$60,00 \cdot 1,20 = R\$72,00$. Logo, sua dívida não seria mais R\$70,00 e, sim, R\$72,00.

Pesquisador: c) Os valores são diferentes? Justifique:

Grupo 1: Pelos cálculos acima, podemos perceber que os valores são diferentes. Isto quer dizer que se a taxa de juros for aplicada somente ao capital inicial, Roberto pagará sempre R\$10,00 por trimestre. Já se a taxa for sendo aplicada trimestre a trimestre, sobre o valor da dívida atualizada, sua dívida aumentará.

Pesquisador: d) Qual é o valor correto?

Grupo 1: Se perguntássemos para Roberto, provavelmente ele diria que a primeira maneira é melhor. Se perguntássemos para Suzana, provavelmente ela diria que a segunda maneira é a melhor. A melhor maneira seria entendermos as diferenças entre as duas maneiras de se calcular juros e ficarmos atentos às taxas.

Na Plenária procuramos discutir as resoluções apresentadas pelo Grupo 1, tentando ir à busca de uma resolução tida como consensual como foi apresentada. Além disso, refletimos sobre as questões que o problema gerador trazia e procuramos responder a possíveis questionamentos dos professores sobre as ideias existentes nas perguntas do problema, tais como: empréstimos a juros; juros abusivos; que modalidade de juros é melhor; e em que situação devem as diferentes modalidades ser utilizadas.

Após essa discussão formalizamos.

Segundo ideias de Hermínio (2008), o regime de juros simples será quando a taxa de juros incidir apenas sobre o capital inicial. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Os juros de cada intervalo de tempo sempre são calculados sobre o capital inicial emprestado ou aplicado. Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo e do processo de descontos.

Para esse autor, no regime de juros compostos, os juros de cada período são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Após cada período, os juros são incorporados ao capital e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecido como, juros sobre juros.

Problema 2:

A Sra. Célia comprou uma lavadora de louça por R\$359,00. O vendedor propôs que o pagamento fosse feito com dois cheques iguais, sendo um para 30 dias após a data de compra e outro para 60 dias após a data de compra. A taxa de juros composta combinada foi de 15% a.m. Qual foi o valor de cada uma das parcelas pagas pela Sra. Célia?

Questões:

- Nesse caso, compensa pagar de maneira parcelada a lavadora de louças? Por que muitas pessoas fazem isso?
- Se a Sra. Célia tivesse R\$150,00 para dar de entrada e o restante ela fizesse conforme o vendedor a indicou, qual seria o valor das parcelas?
- Será que é importante, se tivermos condições, pagar sempre um valor de entrada para que os juros sejam menores? Justifique:

Terminando esse encontro, foi apresentada em *power-point*, pelo pesquisador, a resolução do problema 2. Como disse Hermínio (2008), ao resolver esse problema: Não conhecemos o valor de cada parcela, mas desejamos que elas sejam iguais. Chamaremos cada

parcela de P. O que temos, de acordo com o enunciado do problema, é que uma parcela P deverá ser paga após 30 dias e outra após 60 dias. Na primeira parcela tem-se embutida a taxa de juros de 15% ao mês e, na segunda, tem-se embutida a taxa de juros tanto do primeiro mês, quanto do segundo mês.

Lembrando que quando se trabalha o montante, sob o regime de juros compostos, ele é calculado através da fórmula $M_n = C \cdot (1 + i)^n$ que, pode ser demonstrada, pelo Princípio da Indução Finita (PIF). Essa fórmula é um padrão e, portanto, é sempre válida.

Logo pode-se resolver o problema da seguinte maneira.

$$P + P \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$$

Como C, o capital, é o valor da lavadora de louça, aplicado por dois meses a uma taxa de juros de 15% ao mês.

Assim

$$P + P \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$$

$$P + P(1 + 0,15) = R\$359,00 \cdot (1 + 0,15)^2$$

$$P + P(1,15) = R\$359,00 \cdot (1,15)^2$$

$$P(1 + 1,15) = R\$359,00 \cdot (1,15)^2$$

$$2,15 \cdot P = R\$474,78$$

$$P = \frac{R\$474,78}{2,15}$$

$$P = R\$220,83$$

Portanto, cada parcela deverá ser igual a R\$220,83.

Após ter encontrado $P = R\$220,83$, o pesquisador fez o seguinte questionamento: Nesse caso, compensa pagar de maneira parcelada a lavadora de louças? Por que muitas pessoas fazem isso?

Hermínio (2008) disse que, se a compra em parcelas for com juros não compensa fazê-la assim. No entanto, para ele, a maioria das pessoas faz compras parceladas porque não têm todo o dinheiro para o pagamento à vista. Além disso, ele diz como as pessoas são, em sua maioria, imediatistas, elas não gostam de aplicar seu dinheiro, esperar render juros e após isso, comprar o bem desejado.

Saber calcular as parcelas, de acordo com uma taxa de juros aplicada para uma determinada situação, pode ajudar as pessoas a tomarem decisões ao realizar ou não determinadas compras ou investimentos. O estudo de Parcelamentos é importante para a vida das pessoas.

Fruto desse trabalho, o grupo tentava prever o que poderia acontecer durante uma aula para reproduzir, da melhor forma possível, os trabalhos realizados nos encontros. Além disso, havia preocupações em possibilitar um ambiente em que todos nós do grupo estivéssemos familiarizados com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, experimentando e testando suas conjecturas. Essas reflexões, impulsionadas pelo estudo de textos sobre Resolução de Problemas, Matemática Financeira e Modelização, direcionaram a elaboração e reelaboração de nossas aulas.

Ao final deste encontro, foi proposta, como tarefa extraclasse, a leitura de dois textos: “Geometria” e “Medida” dos Principles and Standards for School Mathematics – NCTM, 2000, traduzido pelos portugueses como Princípios e Normas para a Matemática Escolar (PNME, 2008, p. 44-51).

6º Encontro (10/11/2012): Resolução de Problemas na Formação de Professores

Presentes os professores como sempre, o encontro teve início com uma conversa sobre os textos “Geometria” e “Medida”, dos PNME, deixados como tarefa extraclasse. O pesquisador pediu aos professores que se sentissem à vontade para compartilhar o que mais haviam gostado da leitura realizada. Eles afirmaram ter conseguido fazer a leitura durante a semana.

Sara foi a responsável por fazer uma exposição sobre o Padrão Geometria. Destacou o que no texto considerou mais interessante e promoveu uma discussão, com os outros componentes da equipe. Disse que, segundo o texto,

- *Com o estudo da geometria, os estudantes poderão aprender as formas e as estruturas geométricas e o modo de analisar suas características e relações;*
- *Usar a visualização espacial, ou seja, construir e manipular representações mentais de objetos bi e tri dimensionais e, ainda, perceber um objeto a partir de diferentes perspectivas – é um aspecto importante do pensamento geométrico;*
- *A geometria é um lugar natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos culminando no trabalho de demonstração no ensino básico.*
- *A modelação geométrica e o raciocínio espacial proporcionam formas de interpretar e descrever ambientes físicos, podendo ser ferramenta bastante importante na resolução de problemas;*

- *As ideias geométricas são úteis para representar e resolver problemas em outras áreas da matemática e em situações cotidianas. Assim, a geometria deveria estar integrada, sempre que possível, com outras áreas.*
- *As representações geométricas podem ajudar os alunos a dar significado à área, às frações, aos histogramas e a dados colhidos.*
- *Os gráficos podem servir para conectar a geometria e a álgebra.*

Os programas de ensino, segundo o texto, desde o Pré-primário até o fim do Ensino Médio, dentro do padrão de conteúdo Geometria, deveriam capacitar os estudantes a:

- 1) analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tri dimensionais e desenvolver argumentos matemáticos sobre relações geométricas;
- 2) especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à Geometria Analítica e outros sistemas representacionais;
- 3) aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- 4) usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

Com relação ao Padrão Medida, Bruna, foi a responsável por fazer uma exposição sobre ele. Disse que, para ela, um ponto de destaque do estudo desse texto, foi o de conhecer as orientações do padrão “Medida” dos (PNME, 2008). Resumindo disse que medida é um padrão de conteúdo que permeia não somente todos os ramos da Matemática mas, também, muitas disciplinas afins e atividades diárias. É uma área de estudo que precisa começar cedo e continuar a se desenvolver, em profundidade e sofisticação, durante todos os níveis de escolaridade.

Alguns professores, ao opinarem sobre o texto, disseram:

- *Aprender a selecionar a unidade apropriada constitui o cerne da compreensão sobre medida;*
- *Ao conceito medida deve se dar maior atenção no Ensino Fundamental do que no Ensino Médio;*
- *Compreender que todas as medidas são aproximações constitui um conceito difícil, mas importante para os estudantes;*
- *Muitos alunos têm dificuldade em compreender os conceitos de perímetro e área*

Percebi que todos os professores haviam realmente estudado os textos, e que todos puderam expressar-se sobre as contribuições da leitura desses textos.

Tratando ainda do tema Medida, o pesquisador decidiu falar sobre Van de Walle (2001) que destaca o padrão de conteúdo Medida, entre os cinco padrões escolhidos pelo NCTM, como um ramo de ensino da Matemática. Para ele, o tema Medida ainda não havia recebido tanta ênfase nos currículos mais tradicionais. Na verdade, os autores dos Principles and Standards for School Mathematics notaram que a medida é penetrante em nossas vidas e proporciona oportunidades para aprender e aplicar em outras matemáticas, incluindo operações com números, ideias geométricas, conceitos estatísticos e noções de função.

Levando em conta a complexidade do tópico Medida, para que os estudantes possam obter uma compreensão profunda desse conceito, faz-se necessário manusear materiais, comparar fisicamente e medir com instrumentos. Os conceitos de medida deveriam crescer em sofisticação e amplitude, ao longo dos anos da escolaridade, e os programas de ensino não deveriam repetir o mesmo currículo de medida ano após ano.

Para Van de Walle (2009), desde a pré-escola até o 9º ano, os estudantes precisam aprender os atributos que estarão medindo (comprimento, peso, capacidade, e assim por diante); o que significa medir, incluindo uma compreensão de unidades de medida e de como as unidades afetam as medidas; a escolha e o uso de instrumentos de medida; sistemas de medida (métrico e usual); e fórmulas que podem ser utilizadas para determinar as medidas. Medida é muito mais complexo do que nós frequentemente percebemos.

Van de Walle (2009) apresenta quatro grandes ideias que podem ser desenvolvidas no trabalho com medidas.

1. Medida envolve uma comparação de um item que está sendo medido com uma unidade que tem o mesmo atributo (comprimento, volume, peso, etc.). Para medir qualquer coisa significativamente, o atributo a ser medido deve ser compreendido.
2. Medida significativa e estimativa de medidas dependem de uma familiaridade pessoal com a unidade de medida que está sendo usada.
3. Instrumentos de medida são dispositivos que substituem a necessidade para unidades reais de medida ao fazer comparações.
4. Fórmulas de área e volume são modos de usar medidas de comprimento para contar as unidades de área e volume de um objeto sem usar unidades de área ou volume.

Num segundo momento desse encontro foram trabalhados dois problemas:

Problema 1:



Uma pessoa chegou numa lanchonete e pediu: quero metade dos sanduíches que você tem, mais $\frac{1}{2}$ sanduíche. Um segundo comprador chegou e pediu: quero a metade dos sanduíches que você tem, mais $\frac{1}{2}$ sanduíche. Uma terceira pessoa chegou e pediu: quero a metade dos sanduíches que você tem, mais $\frac{1}{2}$ sanduíche. O dono da lanchonete viu que sobrara um único sanduíche. Quantos sanduíches ele tinha inicialmente?

Os grupos reunidos leram o problema e, como primeira ação, resolveram levantar uma observação da situação, do tipo: ninguém compra $\frac{1}{2}$ sanduíche!

O pesquisador observou os grupos, acompanhando suas discussões sem intervir nelas e, ao mesmo tempo, esperando dos professores a solução do problema sem que se lhes dissesse nada sobre como proceder. Os professores continuaram a perguntar e, após essa insistência, o pesquisador começou a dar atenção aos questionamentos dos grupos, eles queriam respostas. O pesquisador, como guia, atendeu suas solicitações sem lhes dar resposta às perguntas feitas, procurando levantar outras questões relacionadas ao enunciado do problema.

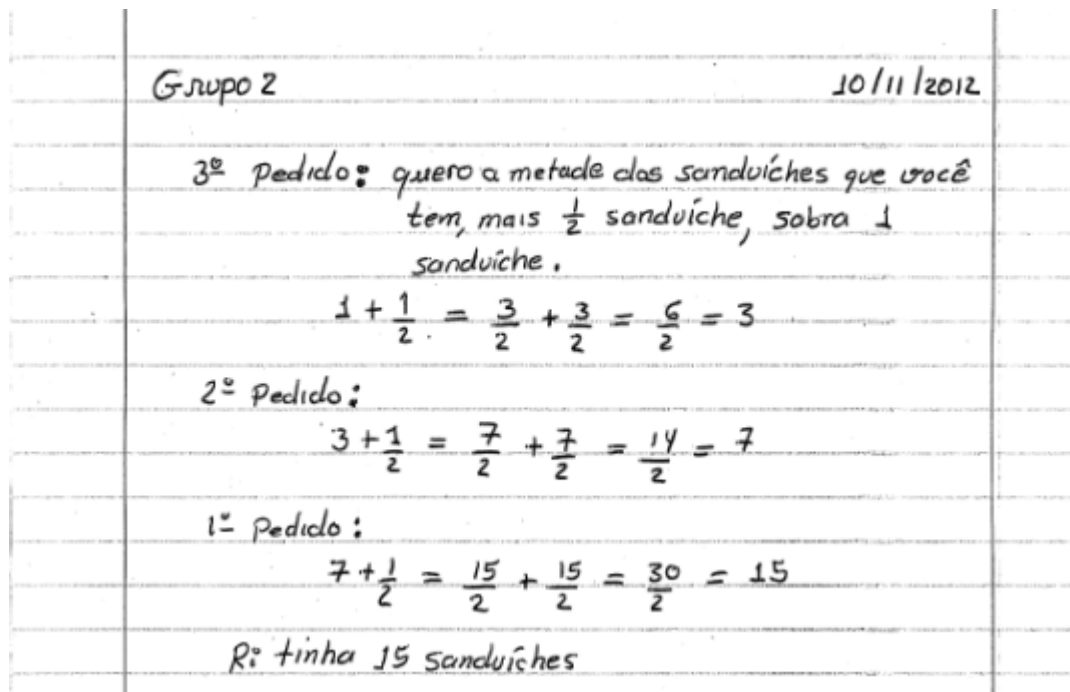
Deu-se mais tempo aos grupos, para pensarem e o pesquisador continuou observando para verificar se, de fato, o grupo era cooperativo e colaborativo. Cada grupo trabalhava de um modo: O grupo 2 tentava resolver o problema utilizando frações e o grupo 1, usando álgebra, montou uma equação algébrica de 1º grau. Os processos, assumidos pelos grupos, na resolução desse problema se apresentou como um passo importante para chegar à solução.

Os dois grupos entregaram, por escrito, suas resoluções. Então, o pesquisador pediu que um representante de cada grupo, colocasse suas resoluções na lousa. Os professores se agruparam em um grupo só, para participar da Plenária, onde o pesquisador, tomando as rédeas do trabalho, começou a explorar as resoluções colocadas na lousa.

O Grupo 2 apresentou sua resposta correta com erros no processo e isso somente depois de ter entendido o problema quando o pesquisador lhes falar para ver o problema de traz para frente. Usaram frações para representar os dados do problema, partindo de “quero a

metade dos sanduíches que você tem, mais $\frac{1}{2}$ sanduíche” e de que “O dono da lanchonete viu que sobrara um único sanduíche”, cometendo erros matemáticos a respeito de igualdade.

Deveriam ter, por exemplo, escrito assim $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$.



O Grupo 1 trabalhou esse problema a partir do número de x sanduíches e, depois, se apoiou nos dados do problema nas três compras utilizando a equação algébrica para chegar à solução.

Grupo 1:

1º) Número de sanduíches x

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{1} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2x - x - 1}{2} = \frac{x - 1}{2}$$

2º) Números de sanduíches $\frac{x-1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} - \left(\frac{\frac{x-1}{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2x-2-x+1-2}{4} = \frac{x-3}{2}$$

3º) Números de sanduíches $\frac{x-3}{4}$

$$\frac{x-3}{4} - \left(\frac{\frac{x-3}{4}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x-3}{4} - \frac{x-3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{2x-6-x+3-4}{8} = \frac{x-7}{8}$$

Do Problema: O dono da lanchonete viu que sobrara um único sanduíche

$$\frac{x-7}{8} = 1 \Rightarrow x - 7 = 8 \Rightarrow x = 15 \text{ (que é o número de sanduíches)}$$

Considerando a resolução do Grupo 1, o pesquisador perguntou qual havia sido a estratégia utilizada. A professora Sara respondeu: montar uma equação. Foi perguntado se haveria outro jeito de resolver, baseado nas resoluções apresentadas até aquele momento. Sara mostrou sua dúvida sobre isso: Tem outro jeito ainda? Nisso, o pesquisador utilizou a estratégia desse grupo.

O pesquisador, querendo explicar as passagens algébricas colocadas pelo grupo 1, disse: vamos tomar essa estratégia, a de montar uma equação.

Primeiro, como estamos querendo saber quantos sanduíches o dono da lanchonete tinha inicialmente e não sabemos, vamos representar essa quantidade por “x”, uma incógnita.

Continuou, primeiro comprador disse: quero metade dos sanduíches que você tem mais $\frac{1}{2}$ sanduíche.

Dá algebricamente $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ e, depois da 1ª compra temos a sobra:

$$x - \frac{x+1}{2} = \frac{2x-x-1}{2} = \frac{x-1}{2}$$

Em seguida, o segundo comprador disse: quero metade dos sanduíches que você tem mais $\frac{1}{2}$ sanduíche.

$$\frac{\frac{x-1}{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{x-1}{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x-1+2}{4} = \frac{x+1}{4}. \text{ Assim, feita a segunda compra, restaram,}$$

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{2x-2-x-1}{4} = \frac{x-3}{4} \text{ que é a segunda sobra.}$$

Uma terceira pessoa chegou e pediu: quero a metade dos sanduíches que você tem, mais $\frac{1}{2}$ sanduíche.

Isso foi feito, isto é:

$$\frac{\frac{x-3}{4}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x-3+4}{8} = \frac{x+1}{8}, \text{ após a 3ª compra, restaram}$$

$$\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{2x-6-x-1}{8} = \frac{x-7}{8},$$

Neste momento o dono da lanchonete viu que sobrara 1 sanduíche.

O pesquisador perguntou: Quantos sanduíches, então, ele tinha inicialmente?

$$\frac{x-7}{8} = 1 \Rightarrow x-7=8 \Rightarrow x=15$$

Resposta: O dono da lanchonete tinha 15 sanduíches.

Chegando todos a um consenso quanto à solução do problema, o pesquisador foi à lousa para mostrar outro possível caminho.

Essa estratégia, comum na resolução de muitos problemas é a de partir do número final indo em busca do inicial.

$x = \text{número de sanduíches}$ $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ e sobra 1 $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$ $x = 3$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ sobram 3 $\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ $x = 7$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ sobraram 7 $\frac{x}{2} = \frac{15}{2}$ $x = 15$
--	--	--

Como existe um padrão na realização das compras: metade do que tem mais $\frac{1}{2}$ sanduíche, partindo da 3ª sobra = 1, pensa-se no que significa esse 1 frente à compra anterior ou fazendo os cálculos para cada compra:

3º compra	2º compra	1º compra
$1 = x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ $1 = x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ $1 = \frac{2x - x - 1}{2}$ $1 = \frac{x - 1}{2}$ $2 = x - 1$ $x = 3$	$3 = x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ $3 = x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ $3 = \frac{2x - x - 1}{2}$ $3 = \frac{x - 1}{2}$ $6 = x - 1$ $x = 7$	$7 = x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ $7 = x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ $7 = \frac{2x - x - 1}{2}$ $7 = \frac{x - 1}{2}$ $14 = x - 1$ $x = 15$

Justificando as respostas, vê-se que

$$\rightarrow 15 \rightarrow \frac{15}{2} = 7,5 \rightarrow 7,5 + 0,5 = 8 \text{ sanduíches}$$

$$1^\circ \text{ Sobra } 15 - 8 = 7$$

$$\rightarrow 7 \rightarrow \frac{7}{2} = 3,5 \rightarrow 3,5 + 0,5 = 4 \text{ sanduíches}$$

$$2^\circ \text{ Sobra } 7 - 4 = 3$$

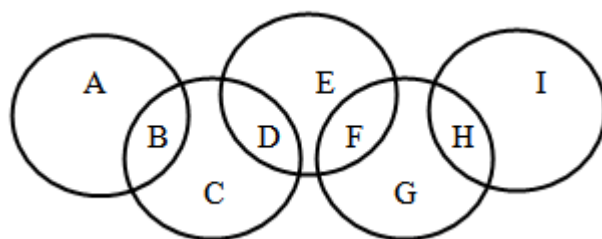
$$\rightarrow 3 \rightarrow \frac{3}{2} = 1,5 \rightarrow 1,5 + 0,5 = 2 \text{ sanduíches}$$

$$3^\circ \text{ Sobra } 3 - 2 = 1 \text{ Sanduíche.}$$

O uso de um mesmo problema para resolver por outros caminhos pode ajudar os alunos na compreensão de conteúdos de Matemática, uma vez que eles podem ser levados a relacionar o problema a várias ideias matemáticas presentes.

Posteriormente foi trabalhado o problema 2

Os anéis olímpicos dividem o plano em nove regiões fechadas, assinaladas na figura por letras.



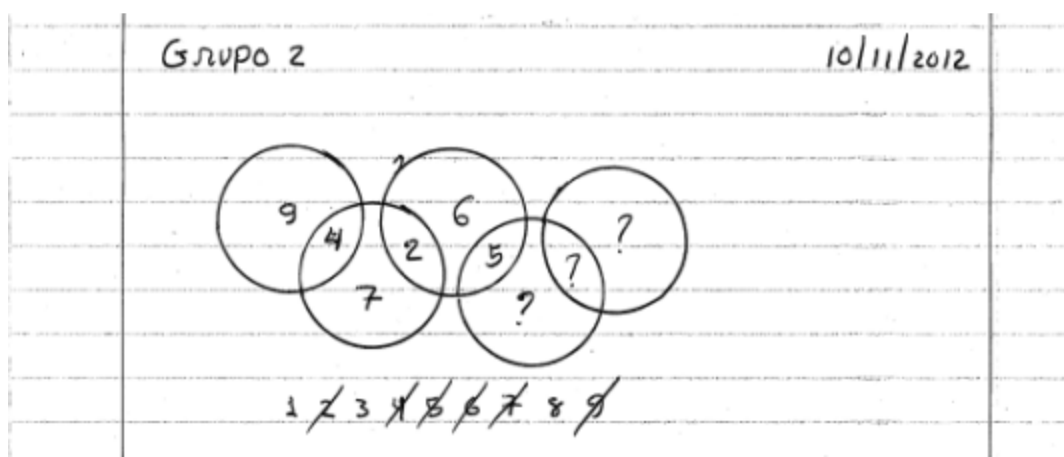
Substituir as letras pelos números de 1 a 9, sem repetição, de tal modo que a soma **S** dos números dentro de cada um dos anéis seja sempre a mesma.

Como existem muitas soluções:

Qual é a solução em que a soma **S** é mínima?

Qual é a solução em que a soma **S** é máxima?

Como tínhamos, nesse dia, pouco tempo para terminar o encontro, os grupos só estavam tentando resolvê-lo por tentativa e erro. Uma tentativa mostrada e não consumada foi a que pode ser vista abaixo.



O pesquisador, para não perder tempo, chamou a equipe para juntos trabalharem na resolução desse problema, deixando de lado o propósito de nossa metodologia.

O pesquisador perguntou: O que este problema está pedindo? Quais são seus dados? Como relacioná-los? Entenderam bem o enunciado?

Responderam: - Sim. Temos que substituir as letras pelos números de 1 a 9, sem repetição, de tal modo que a soma S dos números dentro de cada um dos anéis seja sempre a mesma.

Para ter certeza, o pesquisador resolveu fazer novamente a leitura do problema, com as devidas interpretações e tiradas as possíveis dúvidas do enunciado do problema.

Junto com os professores, na lousa, o pesquisador, olhando os anéis olímpicos, registrou o que o problema pedia.

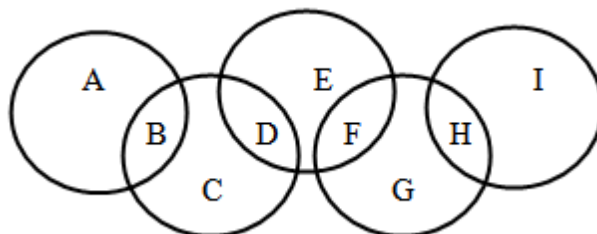
$$S = A + B$$

$$S = B + C + D$$

$$S = D + E + F$$

$$S = F + G + H$$

$$S = H + I$$



Passou a substituir as letras pelos números sabendo sempre que, em qualquer ordem pode ser.

$$A + B + C + D + E + F + G + H + I$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Vamos trabalhar agora buscando responder a esse problema.

$$A + B + C + D + E + F + G + H + I =$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Sabendo que a soma total das letras é 45 e que a Soma S dos números dentro de cada um dos anéis deve ser sempre a mesma, temos que:

$$S = A + B$$

$$S = B + C + D$$

$$S = D + E + F$$

$$S = F + G + H$$

$$S = H + I$$

$$5S = A + B + B + C + D + D + E + F + F + G + H + H + I$$

$$5S = A + B + C + D + E + F + G + H + I + (B + D + F + H)$$

$$5S = 45 + (B + D + F + H)$$

$$\text{Assim, } S = \frac{45}{5} + \frac{B+D+F+H}{5}$$

$$S = 9 + \frac{B+D+F+H}{5}. \text{ Onde } B + D + F + H \text{ deve ser um múltiplo de 5.}$$

Buscando, entre múltiplos de 5, aqueles que divididos por 5 e somados a 9 chequem à soma, podemos encontrar: $B + D + F + H = 5$. Então, $S = 10$, não serve. Pois, $B + D + F + H > 5$.

No nosso problema, como uma das questões é: Qual a solução em que a soma S seja mínima?

Substituindo os menores valores para $B + D + F + H$, temos que:

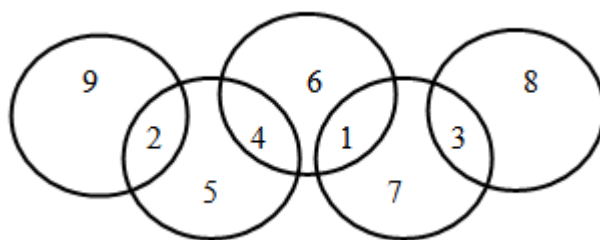
$$S_{\min} = 9 + \frac{B + D + F + H}{5}$$

$$S_{\min} = 9 + \frac{1 + 2 + 3 + 4}{5}$$

$$S_{\min} = 9 + 2 = 11.$$

Assim conseguimos uma solução para a soma mínima: $S_{\min} = 11$.

Construindo uma solução para essa soma mínima temos:



Quando tentaram resolver por tentativa e erro, os grupos já tinham percebido que a soma mínima não poderia ser 10.

Pois $B + D + F + H = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, portanto 5 não serve.

Em seguida, quando o pesquisador foi em busca da solução para a soma máxima, os participantes do grupo disseram que seria 15, então o pesquisador disse: Será?

Novamente juntos com os professores, na lousa, o pesquisador aproveitando a ideia usada para a Soma Mínima registrou

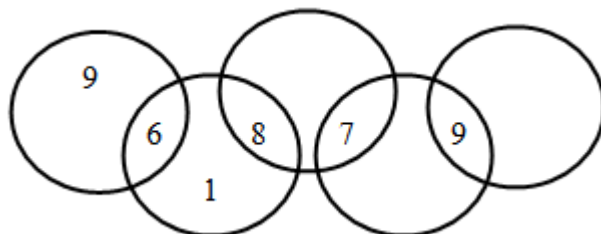
$$S_{\max} = 9 + \frac{B + D + F + H}{5}$$

Então substituindo os maiores valores para $B + D + F + H$ (sempre pensando nos múltiplos de 5) foi assim:

$$S_{\max} = 9 + \frac{6 + 7 + 8 + 9}{5}$$

$$S_{m\acute{a}x} = 9 + 6 = 15$$

Na hora de verificar a solução abaixo, o grupo se manifestou que teríamos números repetidos e isso não pode ser disse o pesquisador.



Só que nas intersecções dos anéis o par de números tem que ser menor que 14

$$B + D < 14, D + F < 14 \quad E F + H < 14$$

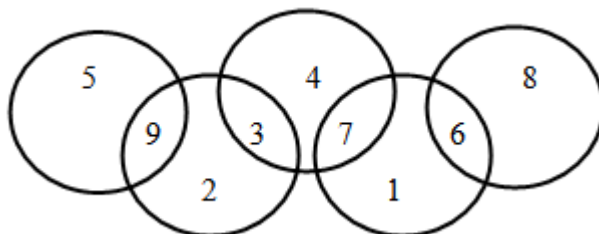
Então buscamos valores para que a Soma Máxima seja 14

$$S_{m\acute{a}x} = 9 + \frac{B + D + F + H}{5}$$

$$S_{m\acute{a}x} = 9 + \frac{3 + 6 + 7 + 9}{5} = 9 + \frac{25}{5} = 9 + 5 = 14$$

Agora com essas condições. Vamos verificar a Soma Máxima no problema.

Construindo uma solução para essa soma máxima temos:



Assim, verificado nos anéis olímpicos, a solução para a soma máxima é $S_{M\acute{a}x} = 14$.

Além da participação nas discussões que tratavam da resolução desse problema e apesar de considerar o trabalho com os anéis olímpicos aí encerrado, os professores tiveram que responder algumas perguntas sobre ele, a saber:

- Existem outras soluções?
- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópico de Matemática poderiam ser iniciados com este problema?
- Haveria necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para que ano de escolaridade você acredita ser este problema adequado?
- A solução necessariamente é única?

- Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- Você como professor, teria dificuldade em trabalhar este problema?
- Que grau de dificuldade você acredita que seu aluno possa ter diante deste problema?

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é uma metodologia pedagógica bastante eficiente para realizar esse trabalho. Trata-se de uma metodologia onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula.

Dessa forma, o ensino-aprendizagem-avaliação de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Sem nenhum comentário a mais, o pesquisador lhes entregou a tarefa extraclasse, a leitura do texto “Criatividade”, texto extraído e adaptado da Dissertação de Mestrado, intitulada “Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática”, de (Valdir Rodrigues, 1992) e encerrou esse encontro.

7º Encontro (17/11/2012): Sobre a criatividade e a discussão de estratégias de resolução de problemas para esse tópico

Um objetivo deste encontro foi o de procurar estudar e discutir o significado de criatividade e o de ser-se criativo.

Foi utilizada como recurso teórico-prático para este encontro, a Dissertação de Mestrado, intitulada “Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática”, de Valdir Rodrigues (Unesp – Rio Claro/SP, 1992).

Um texto (em anexo) extraído dessa Dissertação de Mestrado havia sido entregue aos professores para leitura.

Para dar início à sua discussão, o pesquisador selecionou alguns trechos desse texto, exibiu-os em *power-point*, procurando destacar caminhos alternativos para criar condições de

trabalho, em sala de aula, que permitisse se detectar lances criativos que, fazendo uso da resolução de problemas, poderiam guiar e identificar nos alunos a presença de pensamentos criativos.

Em sua teoria sobre a inteligência, Guilford acredita que as habilidades intelectuais relacionadas à criatividade são encontradas na categoria geral do pensamento divergente.

O pensamento divergente, também chamado criador e exploratório, é inovador e a pessoa criativa gosta da incerteza e do risco. Não se contenta em receber o pré-determinado, quer explorar o desconhecido. A capacidade divergente é acionada pelo pensamento que se move em busca de todas as soluções possíveis até encontrar uma ou várias soluções apropriadas. No pensamento divergente a busca da resposta ocorre com o objetivo de resolver o problema, quando este ainda não foi resolvido e não existem padrões pré-determinados para solucioná-lo. O pensamento divergente tende a uma variedade de respostas originais.

Nesse texto de Rodrigues, citando Guilford, o pensamento criativo, pede para se reconhecer nos atos dos alunos, ao reconhecerem um problema, as habilidades de fluência, flexibilidade e originalidade, assim, entende-se:

- Por fluência, a habilidade do sujeito em gerar um número relativamente grande de ideias na sua área de atuação.
- Por flexibilidade, a habilidade em produzir várias classes de ideias ou usar variedade de abordagens. A flexibilidade implica em alguma mudança, isto é, uma mudança no significado, na interpretação ou no uso de algo, uma mudança na estratégia de se fazer uma dada tarefa ou na direção do pensamento.
- Por originalidade, como a habilidade em produzir ideias novas, raras e inovadoras. É considerado um dos aspectos mais importantes do pensamento criativo e seu estudo se dá a partir da apresentação de respostas incomuns e remotas.

Rodrigues disse também que, nós professores, devemos ser capazes de entusiasmar os alunos no estudo da Matemática, ajudando-os na busca de uma compreensão maior e melhor do mundo em que vivem, desenvolvendo o espírito criativo, o raciocínio lógico e o modo de pensar matemático.

Segundo Krulik e Rudnick (2001), a maioria dos educadores matemáticos concorda que o desenvolvimento de um raciocínio forte é um objetivo primeiro da matemática elementar. De fato, resolver problemas, que é a base para o desenvolvimento de um raciocínio forte, tem estado na linha de frente dos currículos de Matemática por muitos anos. O NCTM -

Principles and Standards, lançado em 2000, continua a enfatizar essas duas áreas. Dentro do domínio do pensamento e do raciocínio, a área que requer a maior atenção é a do desenvolvimento de habilidades de pensamento de ordem superior, especificamente, o pensamento crítico e o pensamento criativo.

Esses autores dizem que

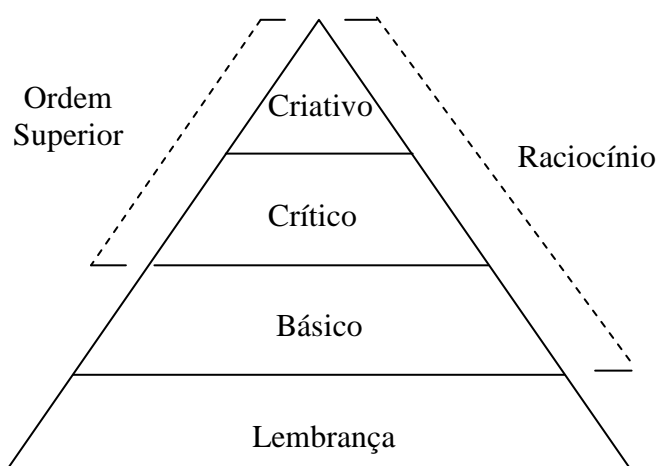
Pensamento Crítico: é a habilidade de analisar uma situação e tirar conclusões apropriadas e corretas dos dados fornecidos. Ele inclui, também, determinar dados inconsistentes, dados ocultos e informações.

Pensamento Criativo: é a habilidade de originar uma solução para uma situação-problema. Além disso, é a habilidade de gerar, sintetizar e aplicar ideias originais para produzir um produto complexo.

Ler com cuidado um problema com enunciado é frequentemente tão importante quanto ter habilidades matemáticas para resolver com sucesso um problema. É crucial que os estudantes:

- 1) leiam o problema cuidadosamente;
- 2) descubram o que se está pedindo para fazer;
- 3) resolvam o problema, e
- 4) determinem se ou não a resposta faz sentido.

Figura 7 – Hierarquia do Raciocínio.



Fonte: Krulik e Rudnick (2001)

Começamos então a discutir os textos. A todo momento os participantes tentavam trazer para a discussão a importância da criatividade. Danielle chamou a atenção, referindo-se ao texto, dizendo que “o pensamento criativo é como um processo natural nos seres humanos, através do qual uma pessoa se conscientiza de um problema, de uma dificuldade ou mesmo de uma lacuna nas informações, para a qual ainda não aprendeu a solução e procura, então, as soluções possíveis em suas experiências prévias ou nas experiências dos outros. Formula hipótese sobre todas as soluções possíveis, avalia e testa estas soluções, as modifica, as reexamina e comunica os resultados”. (TORRANCE apud RODRIGUES, 1992)

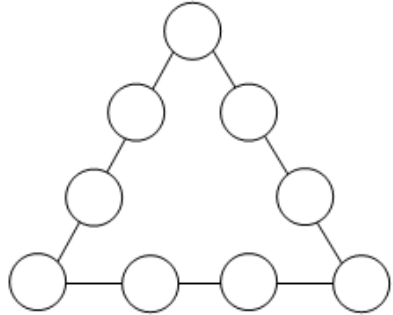
Ela disse, também, que o grupo deveria estar atento em ver se os alunos estão sendo criativos quando resolvem problemas, já que, caso isso não ocorresse, nossa proposta de mudança poderia ir por “água abaixo”.

Na discussão dessa parte do texto, Bruna, chamou a atenção para o que havia lido, de Guilford e seus colaboradores apud Rodrigues (1992), quando destacavam a complexidade das operações mentais do homem a partir da ideia de que a inteligência é formada de componentes ou fatores, cada um dos quais se constituindo numa habilidade única, necessária para que a pessoa realize satisfatoriamente determinada espécie de tarefas.

Lucas destacou que, mesmo que o aluno desenvolva uma ideia errada da atividade, é preciso tomar cuidado na forma de corrigi-lo. Baseado no texto, ele afirmou que teríamos que agir como um “orientador” ou “mediador”, ajudando o aluno a compreender a atividade e a ideia proposta, e não o privando de seu pensamento através de uma imposição.

Como uma aplicação prática do que foi dito, abordou-se o problema abaixo.

Problema do Triângulo Mágico



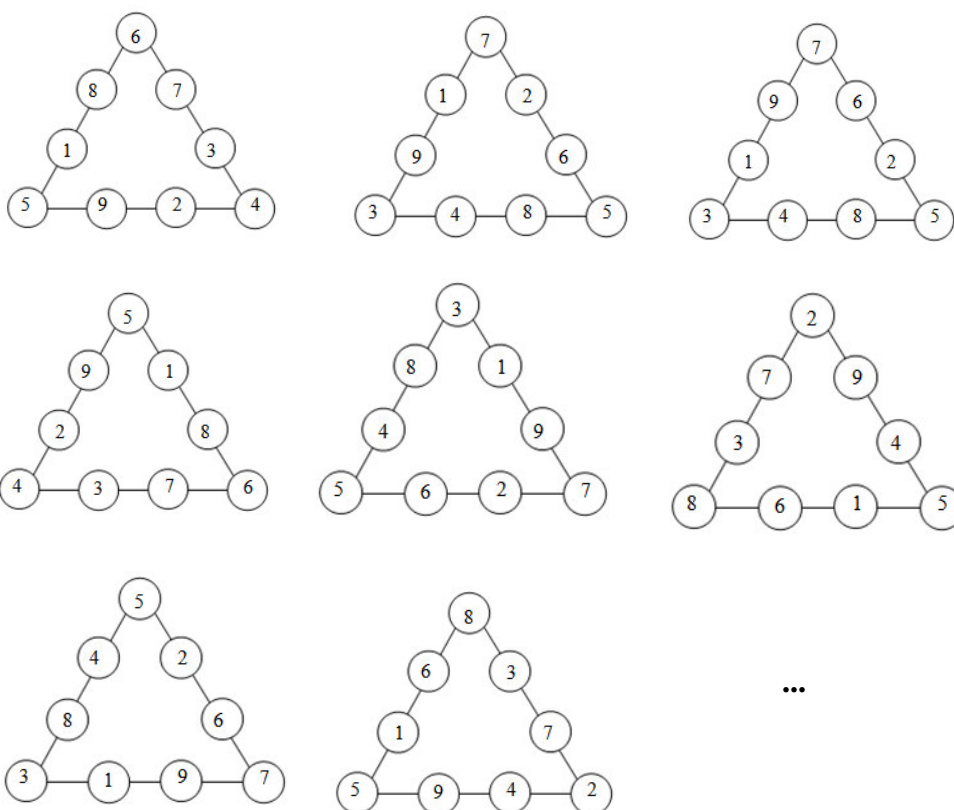
Coloque, dentro dos círculos, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sem repetição, de tal modo que a soma em cada lado do triângulo regular seja 20.

Foi dado um tempo para que os grupos o lessem e discutissem entre seus integrantes. Os professores acharam o problema criativo, devido ao fato de termos discutido, o texto sobre criatividade.

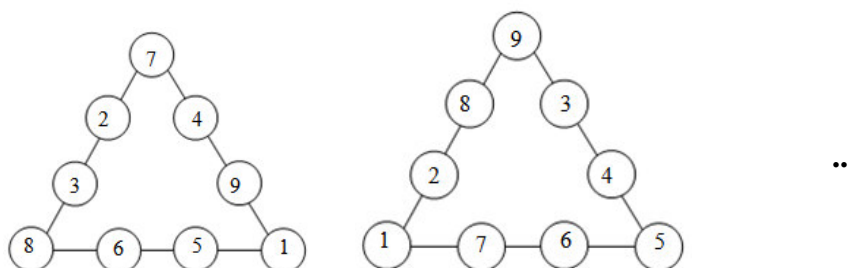
Este é um problema parecido com aquele trabalhado com o problema dos anéis olímpicos. Ficaram animados e houve envolvimento de toda a equipe. Eles estavam interessados.

O pesquisador entregou aos professores o problema com vários triângulos preparados (em anexo) para resolver o problema. Segue-se abaixo alguns desses triângulos, uns certos outros não.

Certos:



Erradas



Durante a exploração do Problema, perguntei aos professores: - Vocês notaram algo curioso que se apresenta em todos os triângulos que conseguiram preencher?

Alguns professores, observando seus triângulos, disseram que a soma dos números nos vértices é 15. Levantaram uma conjectura.

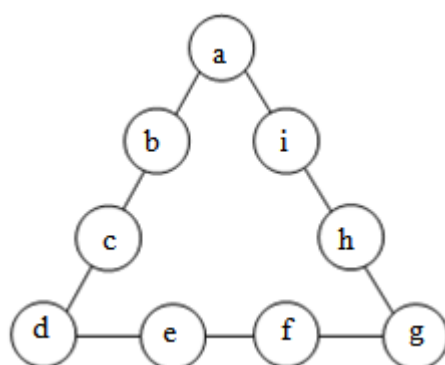
Perguntei por que isto ocorria e, também, perguntei se isso era verdade para todos os triângulos que acharam? será que é verdade sempre?

Então os grupos colocaram as letras em lugar dos números e trabalhando procuraram ver se a conjectura levantada era verdade.

Como $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, e então,

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45$$

Agora, somando os números de cada lado do triângulo temos:



$$(a + b + c + d) + (d + e + f + g) + (g + h + i + a) = 60.$$

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + (a + d + g) = 60.$$

$$45 + (a + d + g) = 60.$$

$$a + d + g = 60 - 45$$

$$a + d + g = 15$$

Com isto concluíram que a soma dos números nos vértices é 15.

Com essa demonstração, provaram que esse resultado vale sempre.

Uma outra pergunta foi feita: - Vocês notaram mais alguma regularidade além de terem percebido que a soma dos vértices é 15?

Um dos professores disse: - Em todos os triângulos que atenderam o problema o número 5 está num dos vértices.

Dito que o 5, necessariamente, deve estar em um dos vértices e, como o encontro estava terminando foi deixado, como tarefa extraclasse, que eles demonstrassem que essa afirmação era verdadeira.

Acreditamos que essa produção de conhecimento, assim como o seu alcance, foi possível graças a algumas das características do trabalho desenvolvido em um grupo de

estudos. Por isso, pretendemos ressaltar que tido esse trabalho em grupos contribuiu para o crescimento profissional dos participantes desta pesquisa, sendo que, de acordo com Murphy e Lick (1998), Ponte (1992), Ferreira (2003) e Gimenes e Penteadó (2008), esse tipo de atividade pode possibilitar uma reflexão sobre os desafios da profissão docente e a produção de um caminho diferente para superá-los.

Além disso, deixou-se o texto “Ensinar a ensinar” do livro “Elementos de Didática da Matemática”, de Bruno D’Amore (2007), para o encontro seguinte.

8º Encontro (24/11/2012): A Resolução de Problemas no Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática

Este encontro tinha por objetivo mostrar aos alunos que a Didática e, em especial, a da Matemática, não se limita apenas a ensinar a ensinar. Como disse D’Amore (2007), “por mais que essa crença esteja enraizada, principalmente entre os colegas matemáticos, as coisas não são bem assim”.

Para dar início à discussão do texto, deixado como tarefa extraclasse no encontro anterior, o pesquisador fez um comentário rápido sobre o livro de Bruno D’Amore: Elementos da Didática da Matemática (2007), um livro bastante atual, de leitura agradável e com muitas citações que transmitem ensinamentos relacionados ao ato de ensinar.

Uma pergunta se apresenta no início do livro: “Se a tarefa do estudioso em Didática da Matemática não é a de ensinar a ensinar a Matemática, então qual é?”. E com essa pergunta ele nos remete, em todo o seu livro, a uma reflexão mais profunda sobre essa questão, objetivando chegar à resposta.

Voltando à tarefa extraclasse, pudemos tirar algumas reflexões feitas pelos professores:

Lucas: No texto percebi que tem os dois lados dessa questão “ensinar a ensinar” do conhecimento matemático e do conhecimento pedagógico.

Sara: Vejo que a forma como o autor está colocando o “ensinar a ensinar” não é vista pela maioria dos professores de Matemática. É um modo diferente de ver esse ensinar a ensinar.

Bruna: O ensino-aprendizagem não depende apenas da disciplina e das metodologias, mas também de problemas de comunicação e da sociedade em que vivemos. Antigamente o professor não se comunicava bem com os alunos em sala de aula, vinha somente dar os conteúdos e hoje não. Os professores conversam com os alunos, passam a saber como o aluno está, então, acho que mudou bastante.

Danielle: Anos atrás, a ideia da didática, acho que não era tanto a questão de como os professores atuavam em sala de aula, de como eles passavam o conteúdo para os alunos, ou de se preocupar em como eles estão aprendendo.

Hoje, acho que a didática se preocupa mais com a questão do como estou ensinando. Se eu ensino bem a meus alunos, com certeza eles vão aprender.

Pesquisador: A sala de aula é um local onde o conhecimento deve ser construído e, portanto, o local onde a aprendizagem se faz. No meu ponto de vista, o professor deve ser um veículo ou um guia do aluno que o leva à construção de seu conhecimento, quer matematicamente, quer didaticamente.

Como disse Cantoral, citado por D'Amore (2007, p. 315)

O conhecimento é a informação sem uso; o saber é a ação deliberada para fazer do conhecimento um objeto útil diante de uma situação problemática. Disso se deduz que a aprendizagem é uma manifestação da evolução do conhecimento em saber. A aprendizagem consiste, portanto, em dar a resposta correta antes da situação concreta.

Cantoral quis, nessa fala, expressar que um aluno, diante de uma situação-problema, busca em sua mente o conhecimento prévio que já possui e, através da resolução desse problema, ao refletir sobre esse conhecimento, o transforma em saber, aprendendo mesmo antes de ter solucionado o problema.

Para esse encontro estava programada como atividade o problema das balas. Os objetivos desse problema foram os de construir modelos matemáticos para a divisão exata e a divisão com resto, explorando seus algoritmos; reconhecer a importância de trabalhar com o padrão Números e Operações fazendo uso do padrão Medida; e estabelecer a relação do conhecimento matemático com o conhecimento didático no problema.

Problema das balas:

Uma empresa de doces se comprometeu a enviar balas para cinco instituições que abrigam crianças. Mandaram 7548 balas. Quantas balas cada instituição ganhou?

O pesquisador pediu à equipe que se reunissem em grupos e deixou que os professores trabalhassem sobre o problema. Foram formados dois grupos: 1 e 2.



Entregar uma cópia do problema para cada membro; Em seguida, formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. Se houver dificuldade na compreensão do problema, o próprio professor pode auxiliar, os membros, nos problemas que surgirem como problemas secundários. Assim, busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas.

Na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, ao se trabalhar em grupos, o problema se mostra como um ponto convergente de trabalho, dando oportunidade aos vários elementos do grupo de se manifestarem.



Na fase de observação, o pesquisador, andando pela sala, vendo os grupos concentrados e pensando no caminho que iriam seguir para resolver o problema, pôde perceber, na fala dos professores de cada grupo, o que diziam entre si. Em um dos grupos, Grupo 1, um dos participantes dizia que só havia uma maneira de resolver o problema. Outro, contestando, disse que, na verdade, o problema estaria procurando saber como o professor trabalharia com as crianças e que matemática nova ele poderia construir com os alunos.



De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os membros, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os membros como co-construtores da “matemática nova” que se quer construir;
O problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os membros para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

Os membros investigam quando buscam, usando seus conhecimentos prévios, descobrir caminhos e decidir quais deles devem tomar para resolver o problema ao trabalhar colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução.



No grupo 2, os participantes usaram, de imediato, a divisão. Mas, o pesquisador observou que eles, sem se preocuparem com o contexto do problema, chegavam a um quociente dado por um número decimal fracionário. Ainda, esse mesmo grupo falava em divisão em partes proporcionais.



O professor observa, analisa o comportamento dos membros e estimula o trabalho colaborativo; Ainda, o professor, não mais como comunicador do conhecimento, mas como mediador, interventor, controlador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

Depois de ter dado tempo suficiente aos grupos, o pesquisador chamou um dos representantes de cada grupo e lhes pediu que colocassem na lousa a resolução de seu grupo. Após isso, sugeriu que os grupos se desfizessem e formassem um só grupo, reunidos numa Plenária.



Um representante de cada grupo é convidado a registrar, na lousa, sua resolução; resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os membros as observem, analisem e discutam.

Após cada grupo ter registrado, na lousa, a divisão efetuada que o problema pedia, o que se viu foi o seguinte:

Grupo 2		24/11/2012
7548	5	
-5		1509,6
25		
-25		
0048		
-45		
30		
-30		
00		

O Grupo 2 apresentou sua solução em forma decimal: 1509,6. O outro grupo, discordando da resolução do grupo 2, responderam dizendo que cada instituição receberia 1509 balas e sobriariam três.

Resolução do grupo 1		24/11/2012
Resolução 1		Resolução 2
Um CDU		Um CDU
7548	5	estamos consi-7548
-5000		5
2548		deixando os -5000
-2500	Um CDU	1000
0048		valores em 2548
-45		+500
(3)		-2500
		9
		48
		-45
		3

Em sequência, o pesquisador pediu que cada grupo desse sua opinião a respeito das questões levantadas para o problema.

Percebeu-se que todos haviam compreendido que o problema exigia a operação divisão. Porém, como não sabiam conceituá-la, apenas efetuaram o algoritmo da divisão.

Pesquisador: Não há nenhuma dúvida quanto à operação que o problema pede?

Danielle: Dentro do contexto do problema, como é que iria mandar 0,6 de bala para cada instituição?

Pesquisador: Quais são os termos da divisão?

Grupo 1: Dividendo, divisor, quociente e resto.

Pesquisador: porque vocês do grupo 2 não responderam.

Grupo 2: Estamos com dúvidas a respeito.

Pesquisador: Para que ano/série pode ser aplicado esse tipo de problema?

Grupo 2: Esse problema deveria ser aplicado a partir da 7º ano.

Grupo 1: acreditamos que esse tipo de problema poderia ser aplicado a partir do 4º ano do Ensino Fundamental I, porque, problemas envolvendo divisão somente são trabalhados a partir do 4º ano.

Pesquisador: Será que uma criança de 6 a 7 anos não teria condições de entender o que significa dividir, repartir?

Sara: acredito que sim.

Analisando as situações descritas, pode-se deduzir que a divisão permite avaliar duas situações diferentes: a divisão exata e a divisão com resto. Muitas vezes, o professor apoiado apenas em livros texto, enfatiza a matemática somente por seus algoritmos, conduzindo os alunos a conhecerem as regras que permitem fazer a operação. Embora, seja importante aos estudantes serem capazes de usar tais regras eficientemente, se não houver uma compreensão dos conceitos nele contidos, os estudantes não serão capazes de ver como aplicar essas regras em novas situações ou problemas.



Para esta etapa são convidados todos os membros para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa e, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas; o professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os membros; este é um momento bastante rico para a aprendizagem; ao adotar-se a Metodologia, na plenária o papel do professor é o de orquestrar o discurso de modo que os membros, na sala de aula, funcionem como uma comunidade intelectual.

O pesquisador explicou que, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o professor não está preocupado unicamente em ver se o grupo fez a operação correta ou erradamente. O importante, para o professor, é que cada grupo apresente sua versão e que somente na plenária é que o consenso será alcançado. No final, o professor formaliza todo conceito novo construído e toda a teoria utilizada ao longo da resolução do problema.

Nomeando por A, B, C, D e E as instituições, apresentamos uma possível resolução do problema das balas assim:

7548 = 7000 + 500 + 40 + 8					
	Milhar	Centena	Dezena	Unidades	Total por Instituição
A	1000	500	0	9	1509 balas
B	1000	500	0	9	1509 balas
C	1000	500	0	9	1509 balas
D	1000	500	0	9	1509 balas
E	1000	500	0	9	1509 balas
					7545 balas

Então, cada instituição receberia 1509 balas e sobrariam 3 balas.

Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema; o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado obtido. Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.



Formalização:

(1) Usando unidades de medida e fazendo uso da análise dimensional, vem:

$$\begin{array}{r}
 7548 \text{ balas} \quad \left| \quad 5 \text{ instituições} \right. \\
 \hline
 \underline{\quad - ? \text{ balas}} \quad \quad ? \text{ balas/instituição} \\
 \text{resto em balas}
 \end{array}$$

(2) Conhecimento conceitual:

$$D = q \cdot d + r \text{ (divisão com resto)}$$

$$D = q \cdot d \text{ (se exata. Portanto } r = 0)$$

(3) Conhecimento procedimental ou processual com sua técnica operatória:

$$\begin{array}{r}
 7548 \\
 \underline{- 5000} \\
 2548 \\
 \underline{- 2500} \\
 48 \\
 \underline{- 0} \\
 48 \\
 \underline{- 45} \\
 3 \text{ balas}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{l} 5 \\ \hline 1509 \text{ balas/instituição} \end{array} \right. \\
 \\
 \\
 \\
 \text{Nesta divisão o surgimento de um zero no quociente,} \\
 \text{muitas vezes é motivo de erros.}
 \end{array}$$

No processo de ensino-aprendizagem-avaliação, é fundamental que se trabalhe antes de tudo o conhecimento conceitual, que corresponde ao conhecimento do que é entendido para, depois, ter-se o conhecimento procedimental, ou seja, o conhecimento de regras, procedimentos e simbolismos que se usam na Matemática para executar tarefas rotineiras. (VAN DE WALLE, 2009, p. 46)

Segundo Van de Walle (2009, p.48) é comum, no ensino da Matemática, ensinar regras procedimentais sem uma base conceitual, levando os alunos, conseqüentemente, a erros e até mesmo a uma antipatia pela Matemática. Ele disse que, todos os procedimentos matemáticos podem e devem estar conectados a ideias conceituais que expliquem porque eles funcionam. Assim para esse autor, o conhecimento procedimental em Matemática tem um papel importante tanto na aprendizagem quanto no fazer Matemática, mas não podemos esquecer que nem mesmo o uso mais hábil de um procedimento nos ajudará a desenvolver conhecimento conceitual relacionado àquele procedimento.

Disse o pesquisador que: Pela leitura do texto e da resolução do problema das balas, pode-se sentir que o professor para ensinar precisa estar preparado, ou melhor, bem preparado, para fazer um uso significativo da Matemática existente num programa a ser desenvolvido para cada série/ano, nos conteúdos a serem trabalhados, em sala de aula, com seus alunos.

Danielle: E o que significa estar bem preparado?

Pesquisador: Para nós, um professor bem preparado é aquele que, além de ter o conhecimento do conteúdo, deve ter também o conhecimento pedagógico. Acreditamos, pois,

que um professor para ensinar bem Matemática não basta apenas conhecê-la bem. Ele deve, também, estar preparado sobre o modo e o método de como trabalhar esse conteúdo em sua sala de aula.

Ao final do encontro foi proposto como tarefa extraclasse dois problemas.

9º Encontro (01/12/2012): Sobre Números Racionais

No início do encontro, os participantes questionaram sobre a continuação do grupo para o próximo ano. Propuseram que o grupo não ficasse limitado apenas a esses encontros, mas que fossem feitos encontros mensais no decorrer do ano seguinte, pois os professores achavam muito boa, para sua formação, a ideia de trabalhar em um grupo de estudos. Sugeriram que, para o próximo ano, eles continuassem em participar com o grupo. Foi uma proposta muito boa e ficamos de analisá-la melhor nos próximos encontros.

Foi possível discutir as resoluções dos dois problemas propostos como tarefa extraclasse do encontro anterior. Um desses problemas pedia para trabalhar com frações e gastos com dinheiro. O outro também envolvia frações usando um mesmo todo, conhecendo uma parte e querendo encontrar o todo.

Coube ao grupo 1 o problema 1 e ao grupo 2 o problema 2.

Começamos então pela tarefa extraclasse:

Problema 1 - do salário

Do meu salário gastei $\frac{2}{5}$ com aluguel. Do que sobrou gastei metade com alimentação. Da segunda sobra coloquei $\frac{1}{3}$ na Poupança. Restaram-me R\$300,00. Qual é o valor do meu salário?

O pesquisador pediu que cada representante dos grupos colocasse suas resoluções na lousa.

O Grupo 1 apresentou sua resolução, mostrando ter entendido o problema, usando procedimentos de álgebra.

Grupo 1

O salário vamos representar por x (incógnita)

$$x - \frac{2x}{5} = \frac{5x - 2x}{5} = \frac{3x}{5}$$

$$\frac{\frac{3x}{5}}{2} = \frac{3x}{10}$$

$$\frac{\frac{3x}{10}}{3} = \frac{3x}{30}$$

$$\frac{3x}{5} - \frac{3x}{10} - \frac{3x}{30} = 300$$

$$\frac{18x - 9x - 3x}{30} = 300$$

$$6x = 300 \cdot 30$$

$$x = \frac{9000}{6}$$

$$x = 1500$$

O Salário é R\$ 1500,00

Chegando todos a um consenso quanto à resolução desse problema, o pesquisador foi à lousa para mostrar outro possível caminho, agora com raciocínio aritmético.

Inicialmente gastou $\frac{2}{5}$ do salário

$$1^{\text{a}} \text{ sobra} = \frac{5}{5} \text{ do salário} - \frac{2}{5} \text{ do salário} = \frac{3}{5} \text{ do salário}$$

Depois gastou $= \frac{1}{2}(1^{\text{a}} \text{ sobra}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{5} \text{ do salário}) = \frac{3}{10} \text{ do salário}$

$$2^{\text{a}} \text{ sobra} = \frac{3}{5} \text{ do salário} - \frac{3}{10} \text{ do salário} = \frac{3}{10} \text{ do salário}$$

Finalmente gastou $\frac{1}{3}(2^{\text{a}} \text{ sobra}) = \frac{1}{3}(\frac{3}{10} \text{ do salário}) = \frac{1}{10} \text{ do salário}$

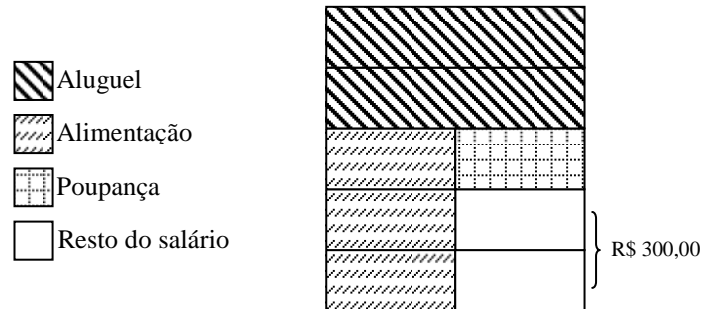
$$3^{\text{a}} \text{ sobra} = \frac{3}{10} \text{ do salário} - \frac{1}{10} \text{ do salário} = \frac{2}{10} \text{ do salário}$$

Se a 3^a sobra, $\frac{2}{10}$ do salário = R\$300,00.

Então $\frac{1}{10}$ do salário = R\$150,00.

E o salário todo será $\frac{10}{10}$ do salário = R\$1500,00.

Numa outra abordagem, este problema poderia ser trabalhado utilizando uma representação geométrica:



Observe-se que, neste problema, cada parte relaciona-se a um todo diferente, a sobra de cada gasto. Pela figura acima vê-se que o salário foi dividido em 10 partes iguais e que $\frac{2}{10}$ do salário correspondem a R\$300,00. Assim, $\frac{1}{10}$ do salário vale R\$150,00 e o todo, $\frac{10}{10}$ do salário.

Portanto, o salário $10 \times R\$150,00 = R\$1500,00$.

Problema 2 - do asfalto



Um grupo de operários asfaltou $\frac{15}{24}$ de uma rua na primeira etapa do trabalho e $\frac{7}{30}$ da rua na segunda etapa. Se nas duas etapas foram asfaltados 824 metros, quantos metros tem a rua toda?

- Isto é um problema? Por que?
- Como você trabalharia este problema na 5ª série/6º ano?
- Haveria necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Liste três objetivos para esse problema
- Que conceitos seriam abordados a partir desse problema?
- Quais seriam as possíveis estratégias de resolução?

O Grupo 2 apresentou sua resolução.

Com o trabalho concluído pelo grupo 2, o pesquisador anotou na lousa o resultado obtido pelo grupo para o problema proposto, e perguntou: Como vocês trabalharam este Problema levando-o em consideração como problema gerador para trabalhar na 5ª série/6º ano?

Ivã: Foi difícil de resolver o problema. Sempre dava vontade de resolver usando os conhecimentos da proporcionalidade que se trabalha no 7º ano em diante.

Larissa: Tendo mais de vinte anos trabalho com alunos do 6º ano. No começo pensei que não iria ter dificuldade em resolver esse problema. Não conseguia resolver. Me deu uma agonia e desespero. Sempre trabalhei com frações.

Bruna: Utilizando o conceito de proporcionalidade, montei uma regra de três e resolvi, mas não conseguia resolver de jeito nenhum sem apelar aos conteúdos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental II.

Pesquisador: Então, como resolveram o problema?

Larissa: Nos reunimos durante a semana, pensando em grupo e, discutindo, conseguimos resolver.

Grupo 2

$$824$$

1ª etapa 2ª etapa

$$\frac{15}{24} \times 5 \qquad \frac{7}{30} \times 4 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{75}{120} + \frac{28}{120} = \frac{103}{120}$$

$$\frac{103}{120} \qquad \frac{17}{120} \qquad \text{todo } \frac{120}{120}$$

$$\begin{array}{r} 824 \overline{) 103} \\ 824 \\ \hline 000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 103 \\ \times 8 \\ \hline 824 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$824 + 136 = 960$$

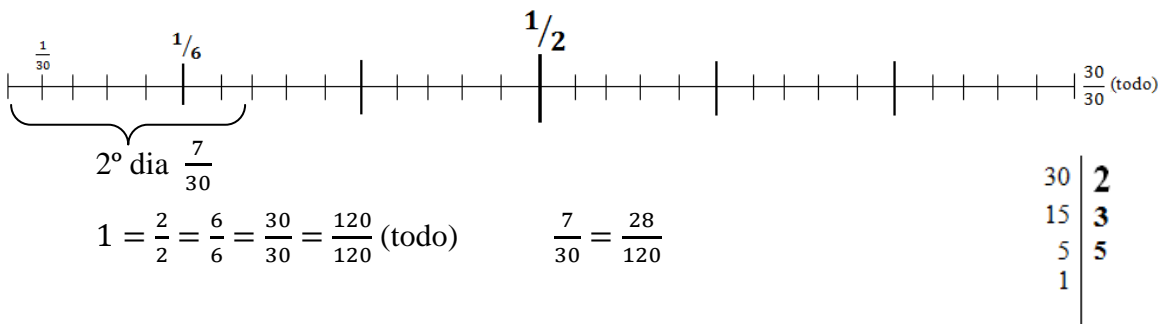
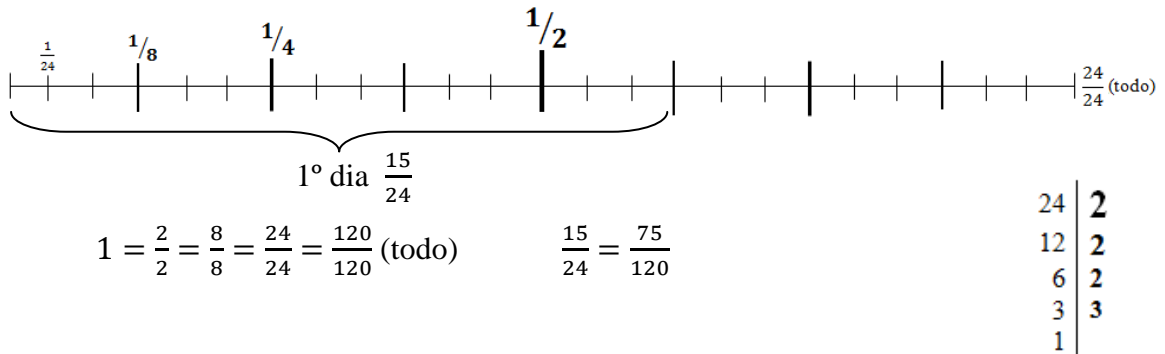
Depois, foi realizada uma plenária com todos aqueles que trabalharam sobre o problema.

Na análise do resultado apresentado, o pesquisador mencionou que o que faltou para eles foi colocar na resposta a unidade de medida metro. Chamou-lhes a atenção de que a

unidade de medida de comprimento não havia aparecido explicitamente nos cálculos apresentados, e assim nem na resposta.

Diante desses fatos, o pesquisador pediu mais cuidado aos professores quanto à colocação das unidades de medida nos cálculos e ao uso não correto dessas unidades.

Desejando tornar o problema e sua resolução mais convincente para alunos do 6º ano, o professor poderia trabalhá-lo assim:



$$\frac{15}{24} + \frac{7}{30} = \frac{75}{120} + \frac{28}{120} = \frac{103}{120}$$

$$\frac{103}{120} = 824 \text{ m}$$

$$\frac{1}{120} = 8$$

$$\frac{120}{120} = 960 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 824 \overline{) 103} \\ - 824 \quad 8 \\ \hline 000 \end{array}$$

$$120 \times 8 = 960$$

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, buscou-se um consenso sobre o resultado obtido.

Em seguida, o pesquisador fez uma apresentação em *power-point* sobre “as diferentes personalidades do número racional”.

Para Onuchic (2005), o conjunto dos números racionais é dado por

$Q = \left\{ x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$, isto é, número racional é todo número que pode ser escrito na

forma $\frac{a}{b}$ (lê-se “a barra b”), com a e b inteiros e b diferente de 0.

A autora, disse que, através da resolução de determinados problemas, podemos reconhecer o número racional sob diferentes personalidades:

1. Ponto racional: todo número racional $\frac{a}{b}$ ocupa um ponto bem definido na reta racional e, reciprocamente, a todo ponto da reta racional corresponde um número racional.

2. Divisão: a barra fracionária, neste caso, é vista como um sinal de divisão.

$$\frac{3}{5} \text{ é equivalente a } 3 \overline{) \frac{5}{0}} \text{ pois } \frac{3}{5} \cdot 5 = 3 \quad \text{Com } \begin{cases} \text{Dividendo} = 3 \\ \text{Divisor} = 5 \end{cases}$$

3. Fração: é uma relação da parte com o todo. O número $\frac{a}{b}$ pertence ao conjunto Q , onde se

entende b , o denominador, dizendo que o todo foi dividido em b partes iguais e dando nome a essa parte; e a , o numerador, dizendo quantas dessas partes iguais foram tomadas.

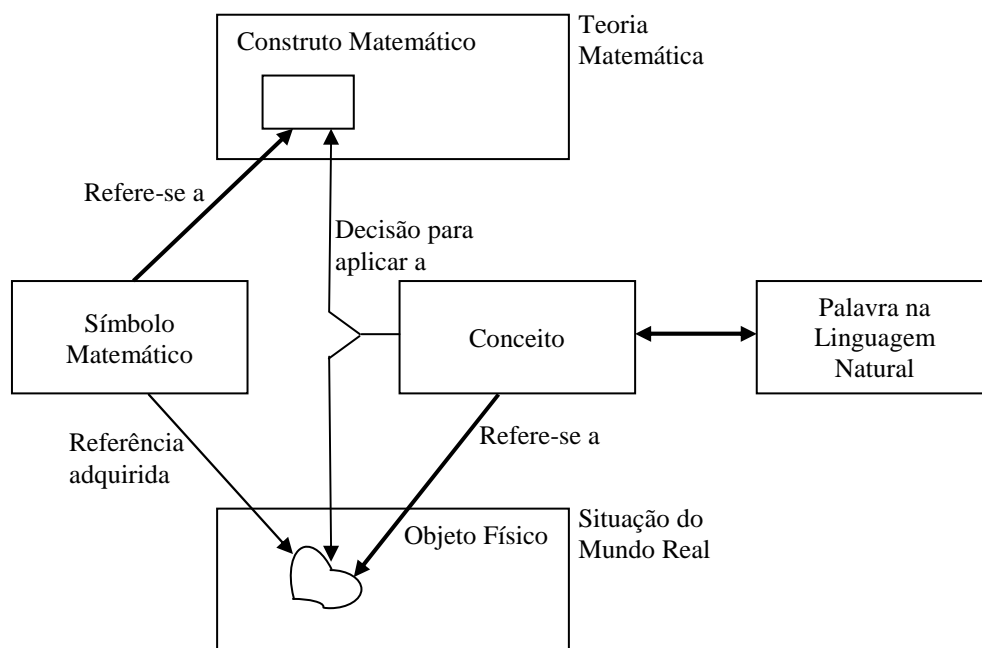
4. Números decimais: pertencem à mesma categoria das frações decimais, embora sejam escritos na forma horizontal.

5. Razão: $\frac{a}{b} = a:b$ (a está para b). Razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas.

Do conceito de razão, derivam outros importantes conceitos e conteúdos matemáticos:

- Proporção – proporcionalidade
- Regras de três
- Divisão em partes proporcionais: direta e inversa
- Misturas
- Porcentagem
- Descontos
- Taxas
- Juros
- Escala
- Estimativas populacionais
- Movimento uniforme
- Variação direta
- Variação indireta
- Razões trigonométricas
- Semelhança de triângulos
- Probabilidades

Segundo Onuchic e Allevato (2007), as diferentes personalidades que os números racionais podem assumir constituem campos semânticos distintos. Para compreender o significado dos “números racionais” é preciso considerar a teoria matemática à qual eles estão submetidos, à classe de situações do mundo real a que eles se aplicam, e às relações entre a teoria e estas situações.



As autoras dizem que, muitas situações do mundo real exigem o conhecimento de números racionais: medir a quantidade de farinha necessária para fazer um bolo, cortar um pedaço de tecido para fazer uma blusa ou calcular a probabilidade de ocorrer um evento.

Neste caso, precisamos dos números racionais que podem tomar a forma de frações, razões, decimais, porcentagem, quociente. Além disso, historicamente, o desenvolvimento das frações fornece um meio de se fazer a transição da contagem para a medida.

Num segundo momento desse encontro foram trabalhados dois problemas:

Problema 1:

Quantas vezes $\frac{2}{3}$ de folha cabe em $\frac{5}{6}$ dessa folha?

Os grupos reunidos e tendo de posse o problema como primeira ação, o problema se mostrou como um ponto convergente de trabalho.

Enquanto os professores, em grupo, buscavam resolver o problema, o pesquisador observou, analisou o comportamento dos grupos e estimulou o trabalho colaborativo. Nesse momento, o pesquisador se sentiu não mais como comunicador do conhecimento, mas como mediador, interventor, controlador, levando os grupos a trabalharem, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

Os dois grupos entregaram, por escrito, suas resoluções. Então, o pesquisador pediu que um representante de cada grupo, colocasse sua resolução na lousa.

Os professores se agruparam em um só grupo para participar da Plenária, onde o pesquisador orquestrou a equipe explorando as resoluções colocadas na lousa.

As resoluções apresentadas pelos grupos:

Grupo 1:

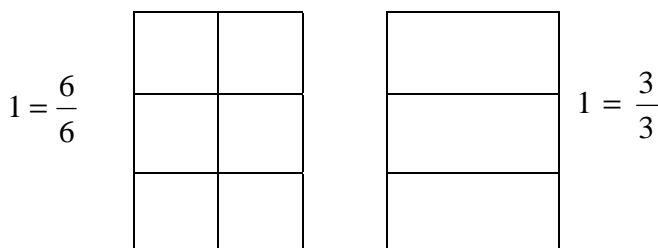
$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

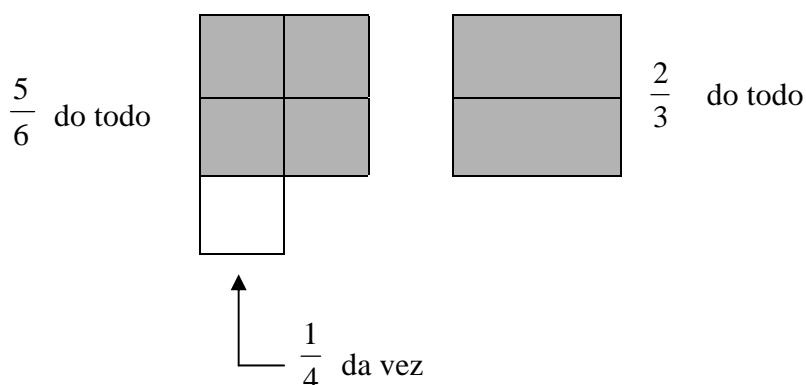
Grupo 2: não entendendo que o divisor cabe no Dividendo, trocou a posição das frações, fazendo.

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Os professores, que haviam recebido as duas folhas para, concretamente, resolverem o problema, as usaram para realizar os cálculos.

Nesse momento, o pesquisador entregou outras duas folhas de papel sulfite, de mesmo tamanho e pediu, a cada professor, que dividisse uma delas em seis partes iguais e a outra em três partes iguais. Pediu que reduzisse uma delas a $\frac{5}{6}$ do todo e a outra a $\frac{2}{3}$, contrariando a colocação de nossa metodologia que pede que os procedimentos sejam criados pelos alunos.





Depois, foi pedido que verificassem, concretamente, quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabiam em $\frac{5}{6}$.

Ao colocarem $\frac{2}{3}$ sobre $\frac{5}{6}$ viram que sobrava $\frac{1}{6}$ da folha, vendo isso, alguns professores disseram que $\frac{2}{3}$ cabiam em $\frac{5}{6}$ uma vez e $\frac{1}{6}$, errado. O que se perguntava era quantas vezes cabia $\frac{2}{3}$ em $\frac{5}{6}$. Olhando na figura poderiam dar a resposta.

Esse $\frac{1}{6}$ da folha é igual a $\frac{1}{4}$ da vez.

Então, a resposta é: Cabe 1 vez mais $\frac{1}{4}$ da vez, isto é, $\frac{5}{4}$ da vez.

O pesquisador, após ter tirado as dúvidas e analisado as resoluções e soluções obtidas para o problema, com todos os professores, chegou a um consenso sobre o resultado obtido. Isto para nos é fazer Matemática.

No momento, denominado formalização, o professor registrou na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – definindo os conceitos, exibindo os princípios e construindo os procedimentos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Outras colocações a respeito dessa divisão de fração poderiam ter sido analisadas, por exemplo, ver a divisão como:

- Subtrações sucessivas

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6} \quad \dots \quad \frac{1}{6} \text{ do quê?}$$

Como $\frac{1}{6} < \frac{2}{3}$, então, $\frac{2}{3}$ só coube uma vez inteira em $\frac{5}{6}$. E como termina esse problema? É preciso ver que $\frac{1}{6}$ da folha equivale a $\frac{1}{4}$ de vez.

- Regras da operação divisão

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{5 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{6}_2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$$

- Álgebra

$$\begin{array}{r|l} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & x \end{array}$$

Por que podemos garantir que o resto é zero? Nos racionais a divisão é sempre possível.

Do conceito de divisão vem que $x \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

Usando a propriedade do inverso multiplicativo $x \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}$

Logo $x = \frac{5 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{6}_2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$

- Usando a calculadora. É só apertar botões.

Ao aprender a resolver problemas, os alunos devem adquirir modos de pensar; hábitos de persistência e curiosidade; trabalhar usando as mãos e tendo confiança dentro de situações não familiares que lhes servirão quando fora da sala de aula de Matemática.

O trabalho com números racionais precisa ser feito de um modo diferente daquele em que regras de “como fazer” são privilegiadas. Considere-se, então, um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

Como tarefa extraclasse foi proposto um problema. Além disso, deixou-se o texto “Análise de Dados e Probabilidade” dos PNME (2008), para o encontro seguinte.

10º Encontro (08/12/2012): Trabalhando com problemas no grupo de estudos

Foi possível discutir a resolução de um problema e a leitura de um texto proposto como tarefa extraclasse no encontro anterior. O problema considerava a possibilidade de haver ou não proporcionalidade entre os números dados e o texto tratava de estudar o Padrão de conteúdo Análise de Dados e Probabilidade.

Começamos, então, pelo problema:

Tereza e Júlia correm numa pista à mesma velocidade. Teresa começa primeiro. Quando ela tinha acabado a 9ª volta, Júlia acabara a 3ª. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas tinha dado Tereza?

O pesquisador pediu que cada representante dos grupos colocasse sua resolução na lousa.

GRUPO 1

Não conseguimos interpretar o problema

O pesquisador verificou que o Grupo 1 não havia resolvido o problema proposto, pois não tinha conseguido interpretar seu enunciado, como registrado acima. Chamou-lhes a atenção da importância de interpretar o enunciado do problema como, também, da passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática.

Grupo 2

Júlia	3	—	15
Tereza	9	—	x
			$3x = 9 \cdot 15$
			$x = \frac{9 \cdot 15}{3} = \frac{135}{3} = 45$

Ao analisar o resultado apresentado, o pesquisador disse que o grupo 2 não havia justificado a solução apresentada para o problema. De fato, os professores tentaram resolvê-lo fazendo uso do procedimento da regra de três,

$$\frac{3}{9} = \frac{15}{x}.$$

Afinal o problema apresentava três quantidades conhecidas e uma desconhecida. Usando o produto cruzado chegaram a 45. Não percebendo que, com essa condição, ao completar Júlia 15 voltas, Tereza não poderia ter chegado a 45 voltas, uma vez que elas corriam à mesma velocidade.

Nesta questão não há proporcionalidade, pois a comparação entre as grandezas é aditiva e proporcionalidade existe quando a comparação é multiplicativa.

Diante desses fatos, o pesquisador pediu mais cuidado aos professores quanto a esse importante conceito de proporcionalidade.

Finalmente o pesquisador apresentou e comentou a resolução do problema, dizendo que, no problema, um dado essencial é que as atletas correm à mesma velocidade. Assim, a partir da terceira volta de Júlia, onde a diferença entre elas era de 6 voltas, essa diferença se mantém nas demais voltas. Assim, quando Júlia tiver terminado 15 voltas, Teresa terá terminado 21 voltas. A comparação entre essas duas grandezas é aditiva, não se configurando, portanto, uma situação de proporcionalidade.

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, buscou-se um consenso sobre o resultado obtido.

Em seguida, houve uma conversa sobre o texto *Análise de Dados e Probabilidade do PNME (2008)*, deixado como tarefa extraclasse. Lucas foi o responsável por fazer uma exposição sobre o Padrão *Análise de Dados e Probabilidade*. Destacou o que, no texto, considerou mais interessante e promoveu uma discussão com os outros componentes da equipe. Segundo o texto, disse que:

- Os estudantes formulem questões que possam ser respondidas através da utilização de dados e expliquem em que consiste a recolha e a utilização sensata de dados;
- Os estudantes devem aprender a recolher dados, a organizar os seus próprios dados ou os de terceiros e a apresentá-los em gráficos e tabelas, que serão úteis na obtenção de respostas para as suas questões;

- Os livros, os jornais, a internet e os outros meios de comunicação encontram-se repletos de dados;
- Os estudantes deverão aprender o que significa fazer comparações estatisticamente válidas;
- A probabilidade está relacionada com outras áreas da matemática.

Os programas de ensino, segundo o texto, desde o Pré-primário até o fim do Ensino Médio, dentro do Padrão de conteúdo Análise de Dados e Probabilidade, deveriam capacitar os estudantes a:

- 1) Formular questões que possam ser abordadas por meio de dados e recolher, organizar e apresentar dados relevantes que permitam responder a essas questões;
- 2) Selecionar e usar métodos estatísticos adequados à análise de dados;
- 3) Desenvolver e avaliar inferências e previsões baseadas em dados;
- 4) Compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidade.

Num segundo momento desse encontro foram trabalhados dois problemas:

Problema 1 da Lívia

Resolva as questões abaixo, justificando:

a) $2^3 =$

b) $5^4 =$

c) $1^{100} =$

d) $10^0 =$

e) $2^{1/2} =$

f) $2^x = 8$ $x =$ _____

g) $7^x = \sqrt{7}$ $x =$ _____

h) $10^w = 20$ $w =$ _____

Problema 2:

Qual é o algarismo das unidades do resultado de $3^{1986} - 2^{1986}$?

Problema 1

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

c) $1^{100} = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$

d) $10^0 = \frac{10^m}{10^m} = 10^{m-m} = \text{Se } m=2 \Rightarrow 10^{2-2} = 10^0 = 1$

e) $2^{1/2} = \sqrt{2}$

f) $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x=3$

g) $7^x = \sqrt{7} = 7^x = 7^{1/2} \Rightarrow x=1/2$

h) $10^w = 20 ?$

Analisando o problema 1, os grupos souberam trabalhar até a letra “g”, mas na letra “h” já tiveram dificuldade.

Nas questões “f” e “g”, reconhecendo uma equação exponencial e sabendo que igualdade de potências de mesma base tem mesmo expoente fizeram

$$\begin{array}{lcl} 2^x = 8 & \text{e} & 7^x = \sqrt{7} \\ 2^x = 2^3 & & 7^x = 7^{1/2} \\ x = 3 & & x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Alguns professores insistindo na fatoração, não concordavam quando se lhes mostrou, a partir da definição de logaritmo, que se $2^x = 8$, então, $x = \log_2 8$.

Levá-los a pensar sobre isso, permitiu ver que se $2^x = 8$ aplicando-se a operação logaritmo a ambos os membros da equação, ter-se-ia,

$$\log 2^x = \log 8$$

E, por uma propriedade dos logaritmos,

$$x \cdot \log 2 = \log 8$$

$$\text{levando a } x = \frac{\log 8}{\log 2} = \log_2 8$$

A mesma técnica, que usaram nas questões “f” e “g”, tentaram aplicar na questão “h”, usando fatoração, chegando a $10^w = 20$

Fatorando ficou assim $(2 \cdot 5)^w = 2^2 \cdot 5$. Tentaram igualar as bases, mas não chegaram a resolver o problema.

Enquanto os professores insistiam em se lembrar da definição de logaritmo, percebi que eles não tinham clareza da necessidade e da importância desse novo conceito para resolver a questão proposta: o logaritmo.

Depois dessa discussão, os professores já tinham identificado que se tratava do logaritmo, porém, não se mostravam seguros em relação à sua aplicação.

Se $2^x = 8 \leftrightarrow x = \log_2 8$, que tinha sido escrito, aplicado ao problema $10^w = 20$, chegaram a $w = \log_{10} 20$ do qual voltando chegam a $10^w = 20$, o ponto de partida.

Segundo Azevedo (1998), ficou definida uma nova operação vinculada à potenciação. Uma outra operação inversa da potenciação, na qual se pretende determinar o expoente, conhecidas base e potência, que foi denominada logaritmação e denotada por $n = \log_a b$ desde que $a^n = b$.

Assim, $10^w = 20$ é equivalente a $w = \log_{10} 20$, isto é, w é o número real tal que $10^w = 20$.

No problema 2, os professores perceberam uma regularidade. Acharam o problema bem criativo. Como resolver problemas significa engajar-se numa tarefa para a qual o método de solução não é conhecido de saída, para achar a solução desse problema os professores precisaram buscar recursos em seu conhecimento prévio.

Problema 2 : $3^{1986} - 2^{1986} =$			
$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$
$3^2 = 9$		$2^2 = 4$	
$3^3 = 27$		$2^3 = 8$	
$3^4 = 81$		$2^4 = 16$	
$3^5 = 243$		$2^5 = 32$	
$3^6 = 729$		$2^6 = 64$	
$3^7 = 2187$		$2^7 = 128$	
$3^8 = 6561$		$2^8 = 256$	
:		:	
:		:	
$3^{1986} - 2^{1986}$			
$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$			

De quatro em quatro as potências de 3 e de 4 se repetem na casa das unidades. Assim dividindo 1986 por 4, o resto vai indicar o expoente relativo a ele.

$$\begin{array}{r}
 \text{Então} \quad 1986 \quad \left| \begin{array}{l} 4 \\ \hline 496 \end{array} \right. \\
 \underline{- 16} \\
 38 \\
 \underline{- 36} \\
 26 \\
 \underline{- 24} \\
 2
 \end{array}$$

Logo a diferença $3^{1986} - 2^{1986} = 3^2 - 2^4 = 9 - 4 = 5$

Com todos juntos, pesquisador e professores, em nenhum momento houve a ingenuidade de tratar Resolução de Problemas como solução para os problemas da Educação Matemática. Mas, também, não ocorreu uma posição negativa a ponto de pensar-se que a condição atual, da escola pública brasileira, pudesse impedir qualquer mudança na prática da atividade docente desses professores de Matemática. Com uma boa dose de ponderação, nem tão ingênuos, nem tampouco pessimistas, buscou-se valorizar as potencialidades dos professores no processo de resolução de problemas, por meio da utilização de problemas e modelos matemáticos a fim de promover sua participação durante os encontros.

Ao final do encontro foi proposta como tarefa extraclasse a resolução de um problema que tratava de assuntos abordados no Ensino Médio, sobre o tópico que foi discutido nos dois últimos problemas. Também deveriam ser dadas sugestões para trabalhá-los em sala de aula.

11º Encontro (15/12/2012): Sobre a Educação Matemática Crítica na Sala de Aula

Neste encontro não contamos com a participação de Sara, devido a problemas de saúde. Entretanto, contamos com a presença do professor Dr. Silvanio de Andrade da UEPB, Campus Campina Grande/PB, que contribuiu bastante em nossas reflexões sobre a troca de experiências. O professor Silvanio preparou e apresentou, com muito entusiasmo, um Seminário na parte da manhã desse dia sobre sua Dissertação de Mestrado “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas e a Multicontextualidade da Sala de Aula”, defendida no ano de 1997.

Antes de começar, o professor Silvanio pediu uma apresentação rápida dos professores para poder conhecê-los melhor. O professor Lucas além de se apresentar, destacou a importância de participar de um grupo de estudos, dizendo que ele já estava obtendo bons resultados e já estava começando a aplicar esses resultados na sala de aula onde trabalha. A professora Danielle destacou, também com relação ao grupo, um despertar porque, até então, ela ensinava como aprendera e que não ensinava a pensar. Disse, também, que ela está dando os primeiros passos para melhorar seu trabalho em sala de aula.

O professor Silvanio mencionou a forma como iria trabalhar a atividade apresentada por ele. Num primeiro momento, disse que ele daria um ou dois problemas para os professores e que, a partir das resoluções trabalhadas nesse encontro, ele estaria explorando os problemas. Antes disso, fez um breve comentário sobre o ensino da Matemática relacionado à Resolução de Problemas, destacando a década de 80 como uma força nessa área de pesquisa e, disse ele que, na década de 90, essa área já estava entrando em outra perspectiva na Educação. Nesse estudo, Resolução de Problemas não era olhado somente no nível de processos e conceitos mas, também, no nível de questões de natureza sócio-político-cultural, da Educação em geral e da Educação Matemática em particular, onde a sala de aula é observada em seus múltiplos aspectos, isto é, em toda sua multicontextualidade. Também destacou a presença da Resolução de Problemas nos eventos regionais, nacionais e internacionais.

Após esse comentário, ele apresentou o seguinte problema: **Quando 20% é maior do que 90%?** Dado o problema, ele deu um tempo e disse para os professores não se preocuparem com a estratégia a usar. O professor Silvanio disse, então, para se juntarem todos em um grupo só.

Ao receber as resoluções dadas pelos professores em relação a esse problema, nosso convidado em suas explorações, ao olhar o que tinham feito os professores, disse que: 20% é maior que 90% quando o preço ou a quantidade do objeto considerado é maior que o preço ou a quantidade do objeto do qual se extrai 90%.

Usando certos dados dos professores, escreveu como exemplo,

$$\begin{array}{r} 4000,00 \\ \underline{x \quad 20\%} \\ 800,00 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{r} 600,00 \\ \underline{x \quad 90\%} \\ 540,00 \end{array}$$

Disse, então, que nesse caso temos 20% maior que 90%, uma vez que os objetos dos quais se extrai 20% é maior do que o objeto do qual se extrai 90%.

O trabalho feito por esses participantes foi apresentado e bastante discutido. Outros exemplos foram trabalhados. A intervenção do professor Silvanio, levou os professores a verificarem outros casos e a reformularem as conclusões anteriores.

Para confirmar essa posição, o professor Sivanio levantou alguns exemplos do cotidiano:

- Que 20% do salário de um deputado federal representa um valor bastante alto e, se comparado com 90% do salário de um trabalhador que ganha um, dois ou três salários mínimos, ficando clara a diferença.
- Que uma calça que é vendida numa loja A que anuncia uma liquidação de 30% pode ser comprada por um preço maior ou menor ou igual ao comprado em uma outra loja que anuncia uma liquidação de 40%.

Concluindo reforçou a ideia de que toda porcentagem está submetida a um todo-referência. 20% é subentendido como 20% de alguma coisa. O Professor Silvanio disse que esse problema ainda poderia ser trabalhado da seguinte forma:

- Para 20% tornar-se maior do que 90% temos a seguinte inequação,
 $(20\% \text{ de } x) > (90\% \text{ de } y) \Rightarrow 0,20x > 0,90y \Rightarrow x > 4,5y \text{ ou } y < 2x/9$
- Para 20% tornar-se igual a 90% temos a seguinte equação,
 $(20\% \text{ de } x) = (90\% \text{ de } y) \Rightarrow 0,20x = 0,90y \Rightarrow x = 4,5y \text{ ou } y = 2x/9$
- Para 20% tornar-se menor a 90% temos a seguinte inequação,
 $(20\% \text{ de } x) < (90\% \text{ de } y) \Rightarrow 0,20x < 0,90y \Rightarrow x < 4,5y \text{ ou } y > 2x/9$

A resolução desse problema, por esse caminho, gerou, dentre outros, os seguintes conteúdos: estudo dos sinais da função $y = ax$, $a \neq 0$ e de inequações do 1º grau com duas variáveis. Nesse caso é de grande importância sua resolução por via da representação gráfica.

Aproveitando-se ao trabalho de exploração feito ressaltou que com seus alunos um problema semelhante poderia ser investigado em várias situações em vez de uma só.

Depois da apresentação do Seminário e de ter trabalhado esse problema, no período da tarde, ele discutiu, com os professores, a utilização de jogos no ensino da Matemática. Também destacou aspectos importantes de quando se ensina Matemática a partir de jogos, dizendo que não seja considerado o jogo pelo jogo. Ele levou um jogo dinâmico que foi apresentado aos professores.

Os professores se reuniram ao redor de uma mesa e começaram a jogar seguindo as orientações dadas pelas regras estabelecidas na folha que lhes foi entregue. O material do jogo era, basicamente, constituído por cartas, dados e um tabuleiro. Ele explicou as regras do jogo, isto é, as condições de um problema a ser resolvido.



Para participar desse jogo, um conhecimento de álgebra fez-se necessário visto que, para atender suas regras, relações algébricas deviam ser atendidas.

Nas cartas, que seriam retiradas pelo jogador, apareciam expressões algébricas, onde “ x ”, a variável seria substituída pelo valor numérico obtido no dado jogado. Esse valor obtido correspondia ao número de casas que o jogador avançaria ou voltaria da casa em que se encontrava. O vencedor seria o jogador que completasse duas voltas ao longo do tabuleiro.

O Cálculo com expressões algébricas foi explorado nesse jogo, possibilitando que os participantes percebam e se expressem por meio das propriedades matemáticas relativas e cálculos algébricos. Os professores reconheceram nesse jogo a possibilidade de levar seus alunos, iniciantes na área da álgebra, a entender os conceitos de variável, valor numérico de uma expressão algébrica e a introdução do conceito da função.

Dr. Silvanio agradeceu o convite do pesquisador e pôs-se à disposição do grupo.

No final desse encontro, o pesquisador entregou a tarefa extraclasse.

12º Encontro (22/12/2012): Sobre a Teoria dos Grafos da Matemática Discreta e Modelização dos 4 Ts.

Nosso último encontro ocorreu no dia 22 de dezembro de 2012, sábado, em uma sala de aula nas dependências da universidade UEPB, campus Monteiro. No início desse dia, tivemos a presença do professor Maurismar Feitosa Chaves, Gerente da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba e do professor Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Diretor do Centro de Ciências Humanas e Exatas da UEPB, Campus Monteiro/PB, para a entrega, aos professores participantes do Grupo de Estudo, de um certificado de capacitação do Programa de Extensão representando a UEPB e da 5ª Gerência Regional de Ensino representando a Secretaria de Estado da Educação do Governo da Paraíba.



Essas autoridades, depois dos devidos agradecimentos, se retiraram e o grupo deu início a esse encontro.

Manifestaram-se a respeito do trabalho do grupo Sara, Danielle, Bruna, Larissa, Lucas e Ivã, mostraram-se muito contentes por terem participado desse Grupo de Estudo, dizendo que, pelo incentivo e pelo conhecimento recebidos durante os encontros, mudaram sua prática de ensino em suas aulas de Matemática, passando a valorizar mais os padrões de conteúdo estudados e propondo, de início, problemas para os alunos resolverem, sendo que Sara comentou que os encontros do grupo serviram para que ela pudesse levar alguns problemas trabalhados nos encontros para trabalhar com os alunos do Ensino Fundamental e Médio, em suas aulas de Matemática.

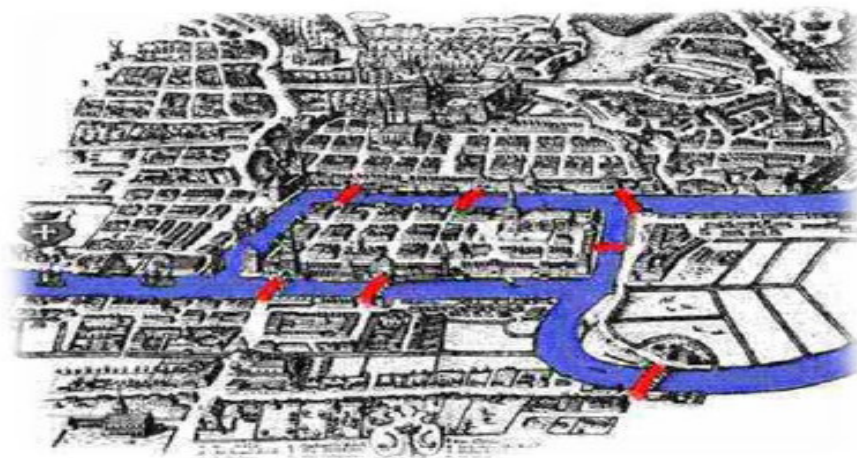
Em seguida houve uma conversa sobre o texto Modelização de Grafos da Matemática Discreta, preparado pelo pesquisador, deixado como tarefa extraclasse no encontro anterior. Para começar seu estudo, o pesquisador selecionou alguns trechos desse texto, exibiu-os em *power-point*, procurando destacar a Teoria dos Grafos da Matemática Discreta como uma das áreas que nos permite obter, com relativa facilidade, uma simbiose entre a resolução de problemas e a modelização.

Nesse texto, pudemos encontrar alguma informação relativa à origem dos grafos, alguns conceitos gerais sobre grafos, bem como alguns problemas ligados às suas aplicações.

Holliday (1991), em seu artigo, apresenta o problema das Pontes de Königsberg, antiga capital da Prússia Oriental que, atualmente, se designa por Kaliningrad.

Na cidade de Königsberg existiam sete pontes que atravessavam o rio Pregel. As pontes ligavam duas pequenas ilhas entre si e a cada uma das margens, conforme a Figura 8 documenta.

Figura 8

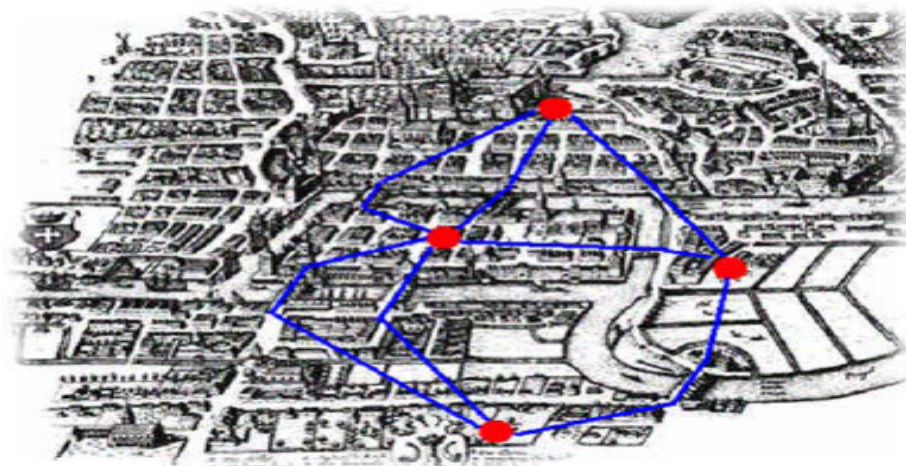


Conta a história que os habitantes da cidade, em seus passeios, tentavam encontrar um percurso (com partida e chegada no mesmo lugar) que permitisse atravessar todas as pontes

uma e uma só vez. Tendo tido dificuldade em encontrar tal caminho, apresentaram, numa carta, o problema ao matemático suíço Leonard Euler (1707-1783).

Para responder a questão, Euler modelou o problema associando um vértice a cada região de terra e ligando dois vértices através de uma aresta sempre que havia uma ponte entre duas regiões conforme figura abaixo.

Figura 9



Assim, o problema ficou reduzido à determinação de ciclos contendo cada aresta apenas uma vez. Para demonstrar que tal passeio não era possível, Euler começou por admitir que existia um percurso nas condições indicadas dizendo que, para atingir qualquer vértice utiliza-se uma aresta e para continuar o passeio é necessário utilizar outra aresta diferente da anterior.

Dáí se conclui que cada um dos vértices tinha que ter um número par de arestas para que o trajeto de saída do vértice fosse diferente do trajeto de chegada. Ora, isto é absurdo, pois todos os vértices têm um número ímpar de arestas como se pode verificar pela Figura 8. A impossibilidade da existência de tal percurso foi publicada por Euler, em 1736.

O despertar do interesse pelo estudo e desenvolvimento dos grafos surgiu após os contributos de Euler, a partir de meados do século XIX.

Durante a conversa no grupo, o pesquisador disse que, desde então, num pequeno período de tempo, aconteceram os principais desenvolvimentos da Teoria dos Grafos, inspirados sobretudo pela evolução das ciências ligadas aos computadores.

A seguir, o pesquisador falou que esse problema, embora tivesse apenas um interesse teórico e histórico, foi importante para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos em diferentes áreas. Também mencionou ele que, na primeira metade do século XX, vários matemáticos, na

tentativa de resolvê-lo, contribuíram para o aprofundamento do estudo e para o grande interesse que a Teoria dos Grafos tem vindo a despertar até nossos dias.

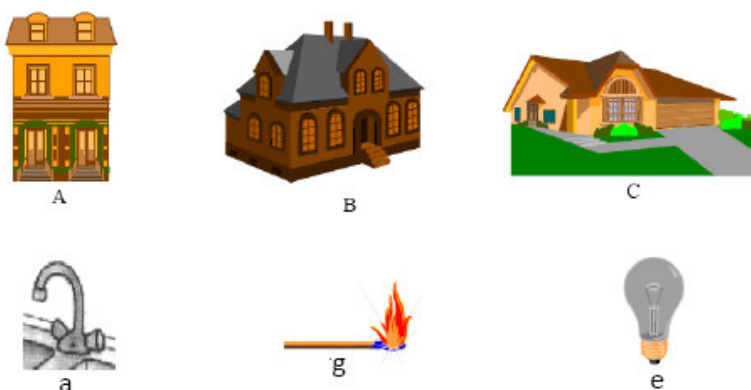
Depois dessa conversa, ainda discutimos sobre dois problemas.

Problema 1:

Pretendemos ligar três casas A, B e C, a três utilitários: gás (g), água (a) e eletricidade (e).

a) Quantas ligações terão de ser feitas?

b) Por razões de segurança convém que as ligações não se cruzem. Será possível fazer isso?



Os grupos, tendo de posse o problema, e reunidos como sempre num trabalho colaborativo e cooperativo, tentaram resolver o problema, ligando as casas com os utilitários.

Como, em geral, procuram-se números para operá-los na resolução de um problema, uma vez que o problema era diferente, se tratava da teoria dos grafos. Os professores viram, nele, um problema. Esse problema deveria ser tratado na Teoria dos Grafos, da matemática Discreta.

Observei que os grupos, procuravam buscar a solução mas não conseguiam imaginar como. O que conseguiam pensar era de poder ligar cada casa aos três utilitários.

Enquanto os professores, em grupos, atravessavam esse processo, o pesquisador, como guia, atendia a suas solicitações, sem lhes dar resposta às perguntas feitas por eles, sempre procurando levantar questões relacionadas a suas dúvidas. O pesquisador lhes deu mais alguns minutos, para pensarem e, depois disso, pediu que cada representante dos grupos colocasse sua forma de resolver o problema.

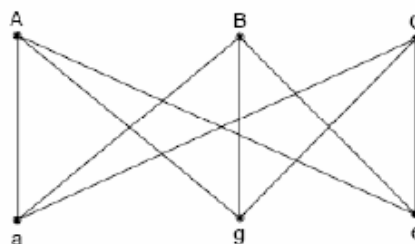
Na Plenária, um momento muito rico de investigação, com toda a equipe participando, o pesquisador deu oportunidade de defenderem suas ideias e esclarecerem suas dúvidas. O

pesquisador, nesse momento, respeitando suas falas, disse: Todos juntos agora vamos explorar e discutir esse problema!

Primeiramente, os professores disseram que era impossível fazer isso.

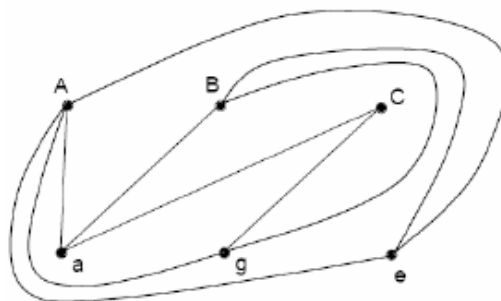
Ao propor essa atividade pretendíamos levar os participantes a criarem um esquema que lhes facilitasse a organização de ideias e lhes permitisse encontrar uma estratégia para resolver o problema, para que, posteriormente, o pesquisador pudesse formalizar a linguagem básica e a simbologia dos Grafos.

Assim, o Grupo 1 apresentou sua resolução.



Nessa representação é claro, as ligações se cruzavam, mas a primeira pergunta foi respondido. Entretanto a expectativa do pesquisador era a de responder a segunda pergunta: por razões de segurança convém que as ligações não se cruzem.

O Grupo 2 apresentou sua resolução:



Nessa representação, para ligar as casas aos utilitários, eles representaram as casas por pontos e as ligações por linhas retas ou curvas. Observando o desenho deles pode se perceber as ligações assim: A_a , A_g , A_e , B_a , B_g , B_e , C_a , C_g , mas não conseguiram fazer C_e sem cruzar outras ligações.

Nos dois casos, os professores se interessaram em considerar um conjunto de pontos e um conjunto de ligações entre eles, deixaram de observar os cruzamentos.

O pesquisador disse então, que na matemática, esse problema pertence à teoria dos grafos e salientou que, na passagem de uma situação real para um grafo, é irrelevante se as

linhas são longas ou curtas, retilíneas ou curvas ou do que lado partem. O importante é conhecer os pontos e as linhas que os ligam.

Termos usados na teoria dos grafos que podem ser definidos assim:

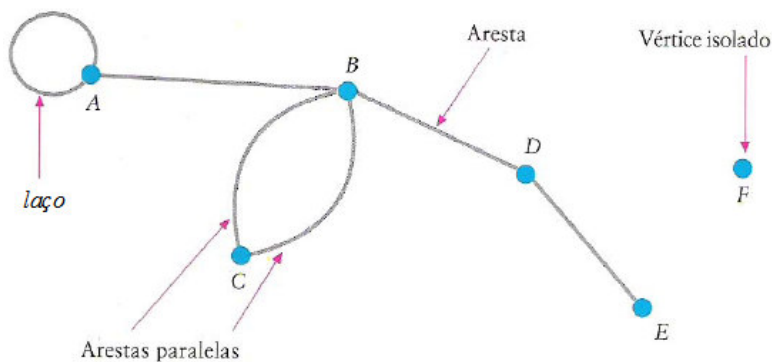
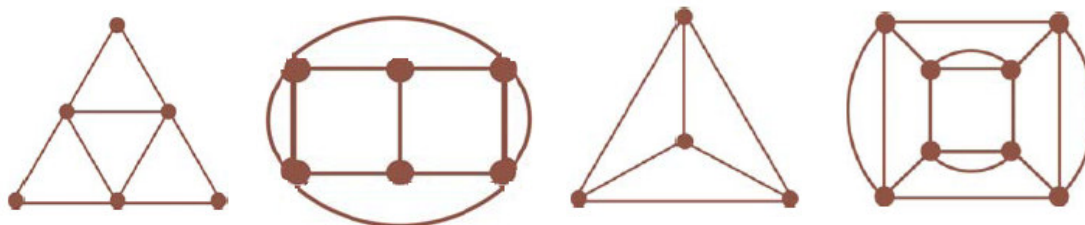


figura 9

- Uma aresta liga um vértice com outro vértice ou o vértice com ele próprio. Uma aresta que liga um vértice com ele próprio chama-se laço.
- Um vértice que não tem ligação com nenhum outro vértice é um vértice isolado.
- Se dois vértices estão ligados por mais do que uma aresta, então as arestas que os ligam chamam-se arestas paralelas.
- Um grafo sem arestas chama-se grafo nulo.
- Um grafo que não tenha arestas paralelas nem laços é designado por grafo simples.

Problema 2:

Quais das seguintes figuras podem ser desenhadas sem levantar o lápis do papel e sem atravessar duas vezes a mesma aresta?



Ao propor esse problema, pretendíamos que os grupos, por tentativa e erro, descobrissem uma solução possível para o problema. Os professores foram levados a desenhar cada figura sem levantar o lápis do papel e tentar justificar, qual das figuras podem ser desenhadas.

Esses desenhos são grafos que não admitem passar mais de uma vez em cada aresta.

Formalizando

Um grafo é uma representação de um conjunto de pontos e do modo como eles estão ligados. Aos pontos de um grafo chamamos vértices e às ligações (que representamos por linhas) chamamos arestas ou arcos.

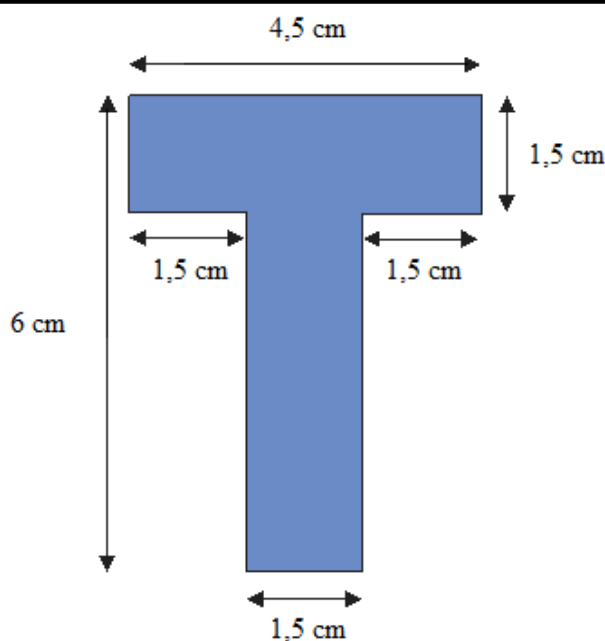
Essa teoria é resumida por três regras:

- 1) Se um grafo é composto apenas de vértices de ordem par, você pode percorrê-lo de uma única passagem, saindo de um dado vértice e retornando a ele.
- 2) Se um grafo contém apenas dois vértices de ordem ímpar, também você pode ir de uma só passagem, mas sem voltar ao ponto de partida.
- 3) Se um grafo tem mais de dois vértices de ordem ímpar, então o problema não tem solução.

No segundo momento deste encontro foi trabalhado o problema dos 4 Ts, utilizando material manipulativo para modelar o problema, procurando descobrir a matemática que o resolveu.

Problema dos quatro Ts

Com uma cartolina fazer um molde da “letra T” que servirá de modelo ou elemento gerador, como nos mostra a figura ao lado. Agora, cortar a “letra T”, em seguida, sobre o papel de cartolina, usar o molde para gerar outros três Ts, de tal forma que as medidas entre um molde e outro sejam as mesmas. Depois disso, em uma folha separada ou em seu caderno, desenhe um quadrado de 8,8 cm de lado e coloque os quatro Ts dentro dele, sem dobrar ou sobrepor um sobre o outro.



Segundo Lesh (2008), a Modelização pode ser vista como um processo na obtenção de modelos próprios da Matemática. A construção de um modelo não se faz de maneira automática ou imediata. Pelo contrário, requer de certo período de tempo no qual o modelador coloca em jogo seus conhecimentos prévios sobre a matemática, o conhecimento do contexto e da situação e suas habilidades para descobrir, estabelecer e representar as relações existentes, para poder chegar à sua generalização.

O problema dos 4 Ts tinha a finalidade de construir o conceito de Movimento de Rotação e de levar os professores a poderem perceber a beleza da Matemática como uma ciência de padrões. Os professores, primeiramente, se organizaram em grupos e o pesquisador entregou, a cada grupo, o material manipulável.



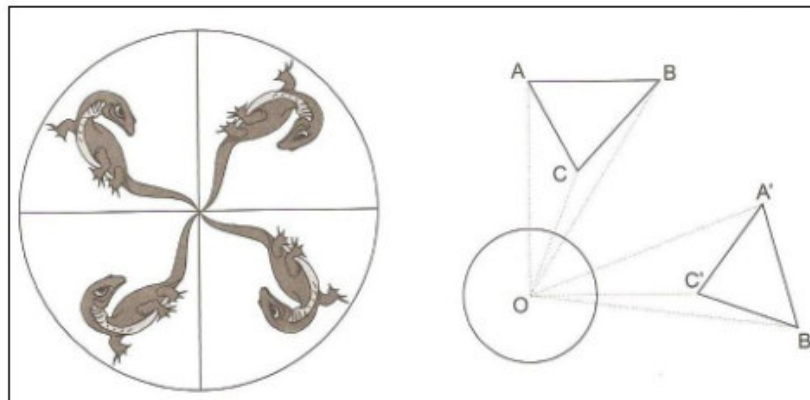
Enquanto os grupos resolviam o problema, o pesquisador observava e analisava o comportamento dos grupos, estimulando o trabalho colaborativo. Os professores discutiram bastante essa questão e a pergunta dos professores era: Porque não estamos conseguindo pôr os quatro Ts dentro da caixa? Em um dos grupos pudemos observar que os professores perguntavam entre si se havia algum conceito matemático por trás desse problema, mas ninguém sabia responder. O pesquisador, intermediando, no sentido de levar os professores a pensar, perguntou se eles conseguiam ver um padrão nos Ts, mas eles achavam difícil. Assim, eles continuaram tentando, sem ter sucesso em resolver o problema.

Ao final do encontro, no momento da Plenária, quando o pesquisador convidou a equipe para uma discussão geral, os professores participaram colocando suas opiniões e dizendo está difícil!

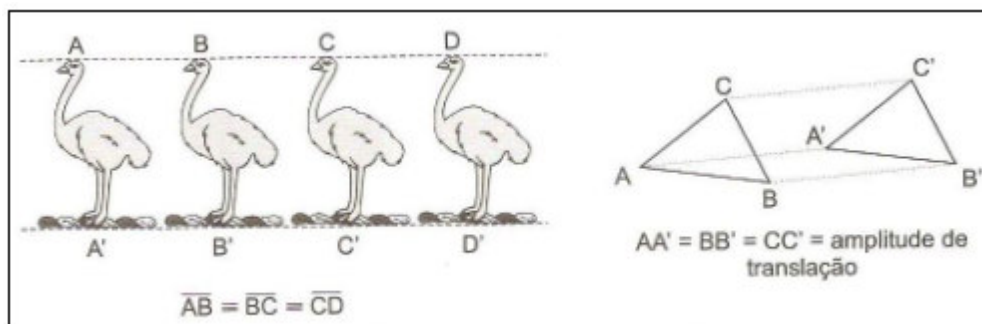
A partir da discussão com os professores, o pesquisador apresentou em *power-point*, um resumo das principais ideias desse problema.

Segundo Biembengut e Hein (2003)

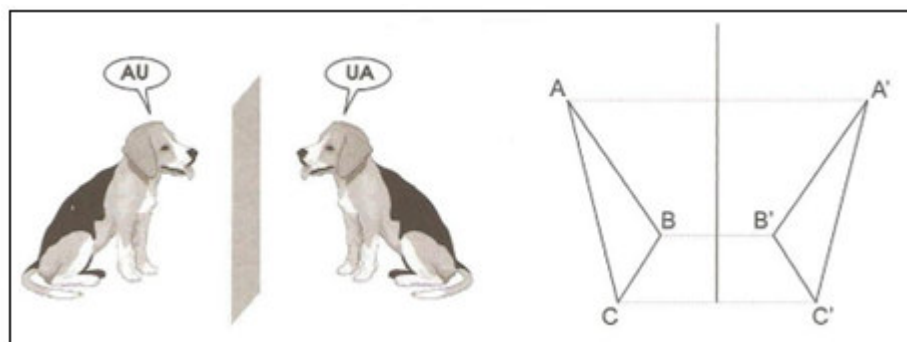
- *Rotação* é um “giro” da figura em torno de um ponto fixo O (ponto que pode ou não pertencer à figura).



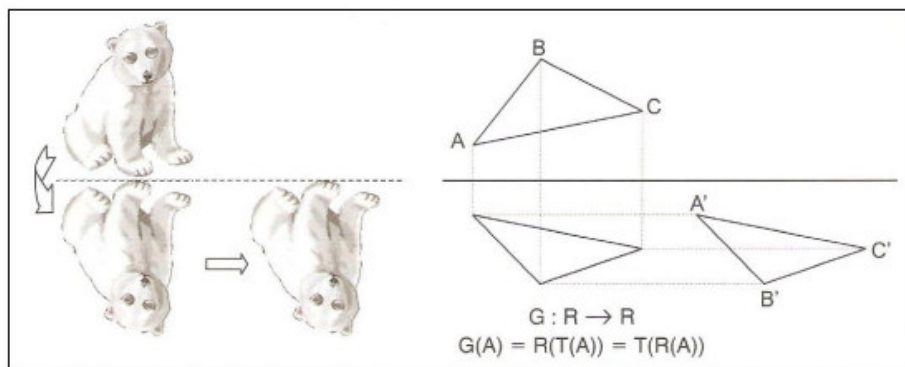
- *Translação* é o “deslizamento” da figura sobre uma reta. Os pontos da figura percorrem segmentos paralelos.



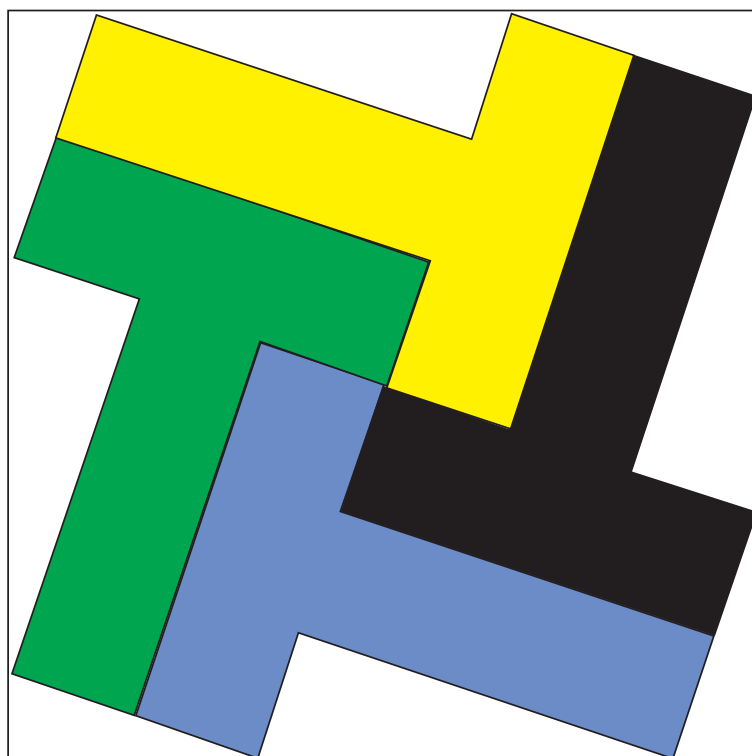
- *Reflexão* é a transformação (movimento) que conserva a distância de um ponto a um eixo fixo. Esse eixo é a mediatriz de cada segmento determinado por um ponto da figura inicial e seu correspondente da figura obtida no final.



- *Translação refletida* é o movimento que combina dois movimentos: reflexão R com eixo e translação paralelo ao eixo.



Ao propor o problema dos 4 Ts pretendíamos levar os professores a modelarem manipulando os Ts. Também, queríamos que encontrassem uma estratégia para resolver o problema, ou seja, fazendo o giro de 90° no “T” até completar os 4 Ts conforme a figura abaixo.



Nessa figura podemos observar que o T, o elemento gerador, sofre um movimento de rotação.

Ao final do encontro, o pesquisador e os professores firmaram um compromisso de serem multiplicadores, junto a outros professores, apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Se for possível, o pesquisador poderia continuar com os encontros desse grupo de estudo.

Considerações Finais

Nesta tese de doutorado, estando nas considerações finais, somos levados a retomar nossa pergunta da pesquisa: **Quais as contribuições, na ação da formação de um “Multiplicador”, formado para atuar junto a professores de Matemática da Educação Básica da região do Cariri Paraibano, teria o trabalho realizado com um grupo colaborativo de professores, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?**

Envolvemos professores de Matemática da Educação Básica, da rede pública estadual e municipal de ensino da região do Cariri Paraibano, PB, perpassando diferentes momentos e situações, como a criação de um anteprojeto para atender a uma solicitação da 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba e a realização de um Encontro de Educadores Matemáticos do Cariri Paraibano.

Esse encontro, constituído para selecionar professores dentre os participantes desse evento, pretendia a criação de um grupo de estudo colaborativo, visando à formação de professores de Matemática multiplicadores, junto a outros professores, na busca de um novo processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para o Ensino Básico, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Foram selecionados seis professores e um projeto de trabalho foi criado. Esse projeto foi aplicado na Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campus Monteiro. Para desenvolver esse projeto planejaram-se 12 encontros a serem conduzidos pelo pesquisador, que decidiu trabalhar em um ambiente de investigação, não apenas como observador, mas como membro atuante no grupo.

Huanca (2006), em sua Dissertação de Mestrado, em 2006, na página 238, disse que dissertações e teses produzidas no PPGEM – UNESP de Rio Claro, enfocavam alternativas didáticas para a sala de aula, mas que essas dissertações e teses raramente chegavam às mãos de professores. Assim, surgiu-lhe uma preocupação: De que forma esses trabalhos estariam contribuindo para melhorar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática? O que nós, enquanto pesquisadores, podemos fazer para ajudar em tal processo?

Temos que ir além, ou seja, devemos fazer com que essas dissertações ou partes delas cheguem às mãos de professores que estão atuando no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, contribuindo para uma reflexão desses professores sobre suas próprias práticas.

Depois do Mestrado, fizemos um concurso para uma vaga na UEPB, Campus de Monteiro, no Departamento de Matemática, que oferecia duas vagas para a Educação Matemática. Fomos aprovado, como pioneiro nessa linha de Educação Matemática.

A cidade de Monteiro faz parte da região do Cariri paraibano e é administrada pela 5ª Gerência Regional de Ensino da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba. Essa região é composta por 18 cidades e tem 36 escolas.

Frente àquela nossa preocupação, a dos trabalhos publicados não chegarem às mãos dos professores, o que nos vinha à lembrança era sempre a questão: O que poderíamos fazer, usando o material produzido pelo GTERP, para levar os professores dessa região a se interessarem por uma nova forma de se aprender e, principalmente, de ensinar Matemática?

Em nossa pesquisa, um de nossos eixos de fundamentação teórica foi Resolução de Problemas. Essa linha de pesquisa, tendo como pioneiro Polya, nos motivou a falar, com nossos professores selecionados da região do Cariri Paraibano, sobre ela. Essa linha de Resolução de Problemas, buscando inspiração em Polya, que acreditava que a Matemática melhora a mente, historicamente nos levou a trabalhos de Stanic e Kilpatrick, Schoenfeld, Lester, Silver, Charles, Carpenter e Lesh, mostrando-nos um caminho novo que se apresentava.

Ouvindo o que esses outros nos falaram e acreditando que Resolução de Problemas, que se apresentava como uma teoria, depois como uso de estratégias e, no fim da década de 1980, como uma metodologia, pudemos sentir que trabalhar com essa metodologia poderia ser um bom caminho para encaminhar esses seis professores no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática.

Buscando saber o quê e, desde quando, Resolução de Problemas se apresentava como uma linha forte de ensino-aprendizagem de Matemática, chegamos ao GTERP que seguia de perto pesquisas realizados em Congressos Internacionais de Educação Matemática, os ICMEs.

Assim, a partir do que ouvimos desses pesquisadores, decidimos trabalhar nesta pesquisa, nessa linha, com trabalhos produzidos no GTERP, isto é, levar resultados de dissertações e teses nele defendidas, quer teoricamente quer na prática, para nossos encontros, sempre fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Escolhemos, coletamos e reunimos discussões realizadas nesses trabalhos, que indicavam pontos de dificuldade, quer no conhecimento, quer na justificativa, quer na forma de se ensinar, acreditando que ao fazer nossos professores selecionados trabalharem sobre conteúdos e sobre atividades por eles trabalhados pudessem também acreditar que esse novo caminho era bom. Tomamos alguns desses trabalhos: Luciene Souto Botta, com Números Racionais; Paulo Henrique Hermínio, com Matemática Financeira; Silvanio de Andrade, explorando uma Matemática Crítica; Livia Lopes Azevedo, trabalhando Potenciação e Logaritmação; e Analucia Castro Pimenta de Souza, com Análise Combinatória.

Reconhecemos que não é fácil trabalhar ensino-aprendizagem-avaliação, em sala de aula, com essa metodologia e que esse trabalho requer tempo para ser assimilado. O roteiro para o desenvolvimento de uma aula, que se apresenta nele, requer maturidade dos professores, dedicação e uma grande vontade de mudar.

Nossa linha de pesquisa, na UNESP de Rio Claro, chamada Resolução de Problemas e Ensino e Aprendizagem, começou a parecer, a esses professores, como algo forte, que poderia levar os alunos a “pensar” e a “saber tomar decisões”, que o papel do professor, em sala de aula, deveria ser o de um condutor dos alunos na construção de novo conhecimento, onde, mais uma vez dizemos, o ensino e a aprendizagem devem acontecer simultaneamente e a avaliação, contínua, deve estar integrada ao ensino promovendo melhor aprendizagem.

Aproximar pessoas com interesses comuns foi outra condição para a formação do grupo de estudo. Um trabalho dessa natureza permite um contato mais próximo entre seus membros, o que foi consolidado pela vontade de pensar o ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática como um processo de Resolução de Problemas. Daí derivou-se o compartilhamento de experiências entre os professores, com conversas, debates e discussões envolvendo conceitos matemáticos e com ajuda mútua.

Conceitos importantes foram construídos ou reconstruídos, com esses professores, na maioria das vezes sem utilizar regras ou fórmulas, e sem nos preocuparmos com a sequência curricular. Na resolução dos problemas, os professores apresentaram desenvoltura ao expor suas estratégias de resolução na lousa, para uma discussão. Verificou-se uma participação ativa que se estendeu até o último encontro. Esforçaram-se todos em estudar. O grupo desde o início sempre foi colaborativo e cooperativo.

A dinâmica de grupos de estudo pode ser uma forma eficiente para se discutir as dificuldades relacionadas ao trabalho do professor e para se buscar alternativas para o ensino, a aprendizagem e a avaliação da Matemática trabalhada. Dessa forma, acreditamos ser possível desenvolver atividades matemáticas que não se restrinjam às aulas tradicionais.

Muitas questões, abordadas neste trabalho e que foram evidenciados pelos grupos, revelam a força que um grupo de estudo tem. Por exemplo, refletir sobre a prática e perceber lacunas no ensino da Matemática pode ser uma alavanca para que o professor busque mais conhecimento de Matemática e, conseqüentemente, se prepare para ser um melhor professor.

Esse trabalho, realizado em grupos, exigiu deles uma troca de experiências e ideias, o levantamento de conjecturas que pediam, muitas vezes, justificativa e até provas de sua validade.

Dentro daquilo que estudamos e vivenciamos com os grupos de estudo, percebemos a força que esse tipo de trabalho pode ter no cenário da formação continuada de professores. Professores reunidos, estudando sobre o que lhes causava dificuldades, discutindo sobre seus comportamentos como professores, buscando novas estratégias de ensino e trocando ideias com seus pares, foram características notórias nesse espaço de estudo, propiciando-lhes mudanças em suas próprias salas de aula.

Citando Lesh (2008) e outros, Onuchic (2013) falando sobre o item “Avançando no Campo da Pesquisa em Resolução de Problemas e no Desenvolvimento Curricular”, disse que esses autores abordam como subitens desse tópico: A Natureza da Resolução de Problemas do Mundo de hoje; Perspectivas Orientadas para o Futuro sobre o Ensino e a Aprendizagem de Resolução de Problemas; Estudos de Habilidades em Resolução de Problemas e suas Contribuições para o Desenvolvimento de uma Teoria, e falam em uma PMM - Perspectiva de Modelos e Modelização. Para eles, adotar uma PMM significa haver pesquisadores que estudam desenvolvimentos de modelos e a modelização.

Segundo Lesh (2008), a modelização pode ser vista como um processo na obtenção de modelos próprios da Matemática. A construção de um modelo não se faz de maneira automática ou imediata. Pelo contrário, requer certo período de tempo no qual o modelador coloca em jogo seus conhecimentos prévios sobre a Matemática, o conhecimento do contexto e da situação e suas habilidades para descobrir, estabelecer e representar as relações existentes, para poder chegar à sua generalização.

Trabalhar modelando o problema possibilitou uma maior reflexão a esses professores, porque lhes permitia encontrar um padrão e, depois, tentar chegar à sua generalização.

Durante a aplicação do projeto, os professores tiveram oportunidade de vivenciar momentos que lhes possibilitavam fazer uma autoavaliação de sua prática, refletir sobre questões relacionadas ao ensino, ao currículo, à aprendizagem dos alunos e às metodologias subjacentes à sua prática.

Nos depoimentos seguintes, pode-se perceber a contribuição, deste nosso trabalho de pesquisa, na formação desses professores querendo os tornar multiplicadores.

Pesquisador: A Resolução de Problemas pode ser pensada como uma metodologia de Ensino?

Sara: *A gente tinha, como metodologia em sala de aula, o uso do livro didático, alguns vídeos e slides. A gente se prendia a isso pensando que era o máximo, que com isso a gente já estava fazendo com que os alunos mudassem a cabeça. No entanto, a gente não estava fazendo aluno pensar, a gente só estava copiando algo que já estava pronto e repassando para ele que era a mesma coisa que já estava no livro. A gente passava problemas que a gente pensava que eram resoluções de problemas e que, na verdade, não deixava o aluno pensar, a gente já dava as respostas. A gente, mesmo impaciente não sabia motivar, não sabia como mexer o alunado e, depois, de participar desse grupo, como já diz bem o nome cooperativo e colaborativo, tenho certeza de que, pra cada um dos seis, serviu e muito. A gente vê que resolução de problemas é muito mais. Eu tiro isso porque a gente pensou e muito, a gente queimou, a gente estudou mesmo, a gente aprendeu o que é pensar, o que é fazer Matemática, como você disse em vários encontros. No grupo aprendeu-se muita Matemática através de problemas. Acho que a resolução ... Eu acho não. Tenho certeza. A resolução de um problema para um professor de Matemática na verdade é a solução de um grande problema, que é a motivação do aluno com relação à disciplina de Matemática. Eu acho que se não tivesse tido esses encontros, porque para gente falta muito incentivo, ... de outros professores terem esses olhos que o senhor têm em relação aos outros professores, de fazer com o que fizeram com você, você retribui dessa forma. Agora é minha vez de fazer o que fizeram comigo. Vou ser uma multiplicadora. [...] essa colheita está sendo boa, está multiplicando, já tá multiplicando “somos seis”, daqui a um ano quem sabe serão uns doze, seremos dezoito quanto for aumentando. É isso o que tenho a dizer.*

Bruna respondendo à pergunta disse: *Com certeza sim. Como metodologia ela serve tanto de apoio no início que é o problema gerador, depois passa por um processo de desenvolvimento de construção de um novo conhecimento na aprendizagem dos alunos. A gente tem o problema como um ponto de partida. Para ensinar matemática, nós, do que vimos aqui, temos consciência de que não é fácil de ser trabalhada, mas, assim, a partir dos encontros que a gente teve, está aumentando nossa autoestima, no sentido de que já somos capazes de encarar uma sala de aula com essa metodologia. Não é tarefa fácil. Vários outros profissionais que atuam nessa linha não concordam tanto com isso, mas eu acredito que essa metodologia de ensino através da resolução de problemas vai contribuir muito no meu trabalho, tanto como professora quanto multiplicadora, ao compartilhar com meus colegas. Antes de participar do grupo estava super desanimada por não conseguir segurar minhas turmas em sala de aula. A partir do momento que entrei no grupo, comecei a aplicar os problemas que o senhor deixava como tarefa extraclasse. Vi uma melhora com meus alunos em sala de aula. Tanto que eu terminei o ano e estava com 45 alunos em sala de aula em pleno final de ano. Eles queriam mais problemas, a partir de encarar a resolução de problemas, como consegui chamar a atenção dos meus alunos. A gente vê ali, na realidade, a mudança que a resolução de problemas levou pra sala de aula. Vi o entusiasmo deles, porque a aula de Matemática pra eles era super chata. Até pra mim, quanto professora de matemática, estava chato. Aquela coisa de pegar o livro, tentar decorar, tentar fazer e não conseguir e você via que não estavam aprendendo. A partir do momento que entrei no grupo aumentou minha autoestima. A gente viu e está vendo as mudanças que a resolução de problemas traz numa sala de aula de Matemática.*

Diante da pergunta feita, Danielle disse: *Eu concordo. Como foi dito, no primeiro encontro, não tinha uma noção disso, ou seja, a gente fez o curso que não nos formou em questão de metodologia e prática em tudo isso. O primeiro contato que tive com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foi aqui no grupo de estudo. Eu defendo essa metodologia visto que ela proporciona aos alunos pensar, refletir e buscar uma solução a partir do problema dado. O mais importante que eu acho do grupo foi o de estudar bastante e da troca de experiências, porque a gente aprende com o outro. A gente ensina mas ao mesmo tempo que a gente está ensinando, a gente está aprendendo. Então, eu acho que o mais importante dos encontros em si foi o trabalho colaborativo, a troca de visões em relação às questões. As visões diferentes em relação ao*

problema, as explicações feitas no quadro, as maneiras de se resolver. As diferentes visões, ... Acho que isso foi o que mais contribuiu e fez com que a gente visse, de uma outra maneira, a questão de resolução de problemas ser encarada como metodologia e não simplesmente ver um problema como um simples problema, mas, abordado de uma maneira em que ele realmente fosse formador de conhecimento. Já estou sendo uma multiplicadora na escola que trabalho. As ideias, trabalhadas no grupo de estudo, compartilho com outros professores que não tiveram a mesma sorte que nós a de estar em um grupo de estudo. Foi muito bom, os encontros foram muito proveitosos, ... aprendemos... eu particularmente aprendi muito com esses encontros. Tirei muita lição para o meu dia-a-dia, para minhas aulas e para meu modo de trabalhar um novo conteúdo. Andei repensando muito. Em muita coisa eu mudei né? e foi muito proveitoso.

Larissa respondeu assim: Sim, concordo e vejo que o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas ajuda e incentiva mais o aluno. Deixa o aluno mais curioso. Então, isso pode ser usado como metodologia em que o problema é o ponto de partida. Realmente você pode usar outras metodologias também. Mas a resolução de problemas é o diferencial, porque os alunos ficam curiosos, eles querem descobrir e, a partir dali, a gente pode fazer com que eles se interessem mais pela Matemática e aprendam mais. Então, eu afirmo que foi positivo ter estudado e reconstruído alguns conceitos matemáticos através de problemas. [...] Confesso que estudar frações, da forma que nós estudamos no grupo, foi como se o senhor tivesse desmanchando o que eu tinha aprendido para reconstruir novamente. Então, comecei a pensar, meu Deus como a gente sabia tão pouco, a gente está acostumada a fazer continha.

O Ivã: Eu confesso que vou começar pela parte que achei positivo. O que eu achei positivo foi esse apoio e incentivo que tivemos pela 5ª Gerência de Ensino do Cariri Paraibano, entendeu? Eu creio que sim, porque há uma inversão aí. A gente entra com problema, ... o aluno está sendo desafiado, ... vai se sentir mais atraído, vai ser chamada mais à atenção da participação dele para despertar o interesse do que iniciar a aula, copiando na lousa as definições e fórmulas prontas. O grupo me ajudou muito a refletir e mudar minha forma de ensinar. Estudei bastante. Já vinha buscando algo mais concreto e, a partir da participação nesse grupo de estudos, o que a gente vêm participando, veio acrescentar uma visão que eu tinha ... e formalizar mais essa visão que eu tinha que não era muito organizada. A partir desses estudos é que a gente desenvolveu, vou ter que organizar melhor minhas ideias. Nosso

grupo abriu novos leques, tornando-nos multiplicadores, através de oficinas, palestras ministradas, nas cidades do interior do Cariri Paraibano, para professores e a maior contribuição foi a de encontrar novos meios de se ensinar Matemática, onde os alunos vivam a Matemática, compreendam o significado e não se prendam a fórmulas.

Lucas: Pra mim foi excelente. Eu aprendi muito, até a repensar mesmo na maneira de trabalhar com resolução de problemas. Muitas coisas eu mudei e aprendi a fazer. Muita coisa que eu não sabia e aprendi a fazer por causa desses encontros, ... Assim, foi muito bom, foi muito proveitoso. [...] Então, esses nossos encontros serviram para enriquecer os meus conhecimentos, principalmente com relação a resolução de problemas. Eu comecei a repensar muita coisa, repensar a forma de trabalhar com novas metodologias. Por exemplo, a Resolução de Problemas. Repensar o momento de começar um conteúdo, repensar o que trabalhar com Resolução de Problemas, por quê? Entendeu? Então, eu achei muito legal nesse sentido assim, de repensar muitas coisas e reavaliar.

Destacamos que os 12 encontros foram um espaço para argumentar coletivamente, e esse processo só foi possível pela presença da Metodologia adotada. Observamos que, apesar das construções terem sido baseadas respeitando-se suas práticas profissionais e, dessa forma, usuais nas práticas pedagógicas, foi possível perceber que os professores não tinham o costume de elaborar justificativas para as mesmas. Assim sendo, consideramos a reflexão dessa dimensão uma contribuição no âmbito da formação continuada. Nessa direção, investigar experiências em um ambiente de resolução de problemas, cujo foco principal são propostas em que um processo descritível passa a ser um processo prescritível, vivenciado pelos professores, foi um possível desdobramento desta prática dos professores.

Nossa pesquisa também nos revela os desdobramentos possíveis para outros estudos dessa natureza. Por exemplo, investigar a formação inicial do futuro professor nas Licenciaturas em Matemática, uma vez que esse trabalho poderia, ou deveria, contemplar deficiências de professores em relação à Matemática. Percebemos, também, com nossa pesquisa, que a dificuldade em compreender e justificar conteúdos matemáticos é bastante notória. Por isso, trabalhar essas dificuldades, num curso de formação inicial, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, seja um possível caminho para a aprendizagem da docência.

Acreditamos que o fato de, o professor se colocar no lugar do aluno, pode ser algo fundamental para que ocorra a aprendizagem. Para tal, Ferreira (2003) esclarece que esse é um passo importante para a mudança do professor. Para ela, essa situação da oportunidade para que o professor observe a si mesmo de fora, gerando reflexão e mudança. Consideramos que o trabalho em grupos contribuiu também nesse sentido.

Concluimos então, que diante desses depoimentos dos seis professores e olhando para toda a aplicação do nosso projeto em 12 encontros, estamos convencidos de que houve contribuição na ação da formação de um multiplicador... Esses professores de Matemática, da Educação Básica, da região do Cariri Paraibano, podem, de fato, ser considerados multiplicadores junto a demais professores dessa região, já que eles tiveram uma capacitação que lhes propiciou momentos de reflexão e análise sobre o que ensinar e como ensinar ao fazerem uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, Ano 33, n. 55, p.133-154, jul./dez. 2009.

ALRØ, H. e SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Tradução: Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ALVES-MAZZOTI, A. J. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2004.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da Prática Escolar**. Campinas: Editora Papirus, 2004.

ARAÚJO, J.L.; BORBA, M.C. **Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática**. In: BORBA, M.C.; ARAUJO, J.L. (Org.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.25-45.

ARBAUGH, F. Study Groups: Professional Growth through Collaboration. **Mathematics Teacher**, v. 96, n. 3, p. 188-191, 2003a.

_____. Study Groups as a Form of Professional Development for Secondary Mathematics Teacher. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 6, n. 2, p. 139-163, 2003b.

AZEVEDO, L. L. **Uma proposta de mudança, na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de “ensino de matemática via resolução de problemas”**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

BASS, H. **Mathematicians as Educators**. In: Notices of the AMS. Volume 44: Number 1, 1997. p. 18-21.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. Editora Contexto: São Paulo, 2002.

BICKEL, W.; HARTRUP, R. Teachers and Researchers in Collaboration: reflections on the process. **American Educational Research Journal**, v. 32, n.1, p. 35-62, 1995.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. Pró-Posições. Campinas, v. 4., n.1[10], 1993. p. 16-23.

_____. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa Segundo a Abordagem Fenomenológica. In: BORBA, M. C. ; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 99-112.

_____. Pesquisa Qualitativa: significados e a razão que a sustenta. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v. 1, n. 1, 2005. p. 7-26.

BIEMBENGUT, M. S. e HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**, Editora Contexto, 3ª ed. São Paulo, 2003.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Org.) **Refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002, p. 43-55.

BOGART, K. P. The Roles of Finite and Discrete Mathematics in College and High School Mathematics. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum**, K-12: 1991, Yearbook. NCTM, 1-9, 1991.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336p.

BOTTA, L. S. **Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

BOTTA, E. S. **O Ensino do Conceito de Função e Conceitos Relacionados a partir da Resolução de Problemas**. 2010. 425 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 1º e 2º ciclos**. Brasília: MEC, 1997. 141p.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC, 1998. 148p.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 1999, 113p.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002, 144p.

_____. Ministério Educação e Cultura. Secretaria do Ensino Fundamental. **Referenciais para formação de Professores**. Brasília: A Secretaria, 1999.

_____. Ministério da Educação – Secretaria da Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2006. v.2, p.69-98.

CAI, J. What Research tells us about Teaching Mathematics through Problem Solving In: LESTER, F.; CHARLES, R. **Teaching Mathematics through Problem Solving: prekindergarten – grade 6**. Reston: NCTM, p.241-253, 2003.

CARVALHO, A. M. P. (Coord.) **Formação Continuada de Professores: uma releitura das áreas de conteúdo**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 153p.

CARR, W.; KEMMIS, S. **Teoría Crítica de la Enseñanza: La investigación-acción en la formación del profesorado**. Barcelona: Martinez Roca, 1988.

CHRISTIANSEN, H. et al. Making the connections. In: CHRISTIANSEN, H.; GOULET, L.; KRENTZ, C.; MACERS, M. (Org.) **Recreating relationships: Collaboration and educational reform**. New York, NY: State University of New York Press, 1997, p. 283-292.

CLARK, D. Ten Key Principles from Research for the Professional Development of Mathematics Teachers. In: AICHELE, D. B.; COXFORD, A. F. (Ed.) **Professional Development for Teachers of Mathematics**. Reston: NCTM, 1994, p. 37-48.

CONTRERAS, J. **A autonomia de professores**. São Paulo: Cortez, 2002.

DANTE, L.R. Algumas reflexões sobre educação matemática. **Temas & Debates**, nº 3, ano IV. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1991, p. 43-49.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonami. São Paulo, Editora e Livraria da Física, 2007.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In.: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J.L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

DAY, C. **Developing teachers: The challenges of lifelong learning**. Londres: Falmer, 1999. 264p.

DEVLIN, K. **Matemática: a ciência dos padrões**. Porto: Porto Editora, 2002.

DOSSEY, J.A. The Math for Our Time. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, 1-9, 1991.

ELLIOT, J. Actuación profesional y formación del profesorado. **Cuadernos de Pedagogía**, nº 191, 1991, p. 76-80.

ENGLISH, L.; LESH, R.; FENNEWALD, T. **Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development**. In: Conferência apresentada no 11º Congresso Internacional de Educação Matemática - ICME 11. Monterrey, México, 2008.

FERREIRA, A. C. **Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: uma experiência de trabalho colaborativo**. 2003. 368 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003a.

_____. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.) **Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003b. Cap. 1, p. 19-50.

_____. O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para o desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Org.) **A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 149-166.

FERREIRA, A. C.; MIORIM, M. A. O grupo de trabalho em educação matemática: análise de um processo vivido. In: **SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 2., Santos. Anais ... Santos, 2003. 1CD-ROM.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 47-76.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática In: ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 79-100.

GAZZETTA, M. **A Modelagem como estratégia de ensino da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores**. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

GIMENES, J. **Contribuições de um Grupo de Estudos para a Formação Matemática de Professoras que Lecionam nas Séries Iniciais**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

GIMENES, J.; PENTEADO, M.G. Aprender Matemática em grupo de estudos: uma experiência com professoras de séries iniciais. **Zetetikê**, Cempem – FE - Unicamp - v.16 - nº 29, 2008, p.73-92.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar - Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 3ª Edição. Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

_____. **Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 5.ed. Rio de Janeiro: Record, 2001. 112p.

HARGREAVES, A. **Os professores em tempos de mudança**. Alfragide: McGraw-Hill, 1998.

_____. **O ensino como profissão paradoxal**. Pátio. Porto Alegre, Ano4, nº 16, fev/abr, 2001.

HART, E. W. Discrete Mathematics: An Exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum**, k-12: 1991, Yearbook. NCTM, p. 67-77, 1991.

HERMÍNIO, P. H. **Matemática financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

HOLLIDAY, R. L. Graph Theory in the High School Curriculum. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum**, k-12: 1991, Yearbook. NCTM, p. 87-95, 1991.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 2006. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

IKEGAMI, R. T.; **Professores das séries iniciais e o ensino de matemática: concepções e influências**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

JAWORSKI, B. **Grappling with complexity: co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development**. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004. V. I, p. 17-36.

JORDÃO, R. S. **Tutoria e Pesquisa-ação no estágio supervisionado: Contribuições para a formação de professores**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo: São Paulo, 2005.

KILPATRICK, J.A History of Research in Mathematics Education In: In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap.15, p.3-38.

KRULIK, S.; REYS, R. E. (Ed.) **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1998. 360p.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica: do projeto à implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. Changes through the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the School Mathematics Curriculum. In: MARTIN, W. G. et.al. (Ed.). **The Learning of Mathematics**. Yearbook 2007. Reston, VA: NCTM, 2007. p. 3 - 25.

LARRÍN, V.; HERNÁNDEZ, F. **O desafio do trabalho multidisciplinar na construção de significados compartilhados**. Pátio, Porto Alegre, Ano 7, nº 26, maio/jul. 2003.

LESTER, F. K. What has happened to mathematical problem-solving research? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1. , 1993, Rio de Janeiro. **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1993, p. 57-68.

_____. Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. **Journal for Research in Mathematics Education**. Reston: NCTM, v. 25, n. 6, p. 660-675, 1994.

LIEBERMAN, A. Teacher development: commitment and challenge. In: GRIMMETT, P. e NEUFELD (Eds.). **Teacher development and the struggle for authenticity**. Nova York: Teachers College Press. p. 15-30. 1994.

LIEBERMAN, A.; MILLER, L. **Teachers - transforming their world and their work**. New York: Teachers College Press, 1999.

_____. **Teaching and Teacher Development: A New Synthesis for a New Century**. In: Brandt, Ronald S. Education in a New Era, ASCD Yearbook, 2000.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio – Volume 1**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. 233p. (Coleção do Professor de Matemática)

LIMA, L.F. **Grupo de estudos de professores e a produção de atividades matemáticas sobre funções utilizando computadores**. 2009. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

LINCOLN, Y.S.; GUBA, E.G. **Naturalistic Inquiry**. Sage Publications, 1985.

MARIN, A. J. **Educação continuada: introdução a uma análise de termos concepções**. Caderno Cedes 36, Educação Continuada, 1ª. ed., 1995.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), **Approaches to algebra**, 1996. p. 65-86. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

MESTRE, C; OLIVEIRA, H. A generalização enquanto prática coletiva. **Quadrante: Revista teórica e de investigação**. Lisboa: APM, v. 21, n. 2, 2012.

MEYER, J. F.C.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A.P.S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 4. ed. São Paulo: Hucitec-Abrasco Ed. Afiliada, 1996. 267 p.

MIORIM, M. A. **Introdução á História da Educação Matemática**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1998.

MISKULIN, R. G. S.; NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B.; LOPES, C.A.E.; FIORENTINI, D.; BRUM, E. D.; MEGID, M. A.; FREITAS, L. T. M.; MELO, M. V.; GRANDO, R.C. Pesquisas sobre trabalho colaborativo na formação de professores de matemática: um olhar sobre a produção do PRAPEM/UNICAMP. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática: investigando e teorizando a partir da prática**. São Paulo: Musa; Campinas, SP: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, 2005. p. 196-219.

MIZUKAMI, M. G. N. Formação de professores: velhos temas em novos contextos. **Jornal UNESP – Suplemento**, Junho/2006, n. 212, p. 1-3. Disponível em: <<http://www.unesp.br/aci/jornal212/suplec.php>>. Acesso em 08/06/2010.

MOYER-PACKENHAM, P. Using virtual manipulatives to investigate patterns and generate rules in algebra. **Teaching Children Mathematics**, 2005. p. 437-444.

MURPHY, C. U.; LICK, D. W. **Whole faculty study groups: a powerful way to change schools and enhance learning**. California: Corwin Press, Inc., 1998.

NACARATO, A. M. A escola como lócus de formação e aprendizagem: possibilidades e riscos de colaboração. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática: investigando e teorizando a partir da prática**. São Paulo: Musa; Campinas, SP, GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, 2005. p. 175-195.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action**. Reston: NCTM, 1980. 29p.

_____. **Curriculum and Evaluation Standards for Teaching Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. 257p.

_____. **Professional Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 1991. 196p.

_____. **Assessment Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 1995. 102p.

_____. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000. 402p.

_____. **Special Issue: 100 Years of Mathematics Teacher**. v. 100. Reston: NCTM, 2007. 96p.

_____. **Navigating through Discrete Mathematics/Grades 6-12**. Reston: NCTM, 2007.

_____. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Tradução: Associação de Professores de Matemática. APM. 2ª ed. Lisboa, 2008. 466p. PNME

NATIONAL RESEARCH COUNCIL, MATHEMATICAL SCIENCES EDUCATION BOARD. **Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education**. Washington, D. C.: National Academy Press, 1989. 129p.

OLSON, M. Collaboration: An epistemological shift. In: CHRISTIANSEN, H.; GOULET, L; KRENTZ, C.; MACERS, M. (Org.) **Recreating relationships: Collaboration and educational reform**. New York, NY: State University of New York Press, 1997, p. 13-25.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p. 199-218.

_____. Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11. , 2003, Blumenau. **Anais da 11ª Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003, p. 1-11.

_____. Educação Matemática & Perspectivas e Desafios. IN: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. **Anais da 11ª Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003b. p.1-12.

ONUCHIC, L. R. **Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo**. II SERP – II Seminário em Resolução de Problemas. Rio Claro, São Paulo, 10-11/novembro. 2011. Disponível em <<http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/lourdes.pdf>> Acesso em: 10 maio 2012.

ONUCHIC, L. R. **Resolução de problemas na Educação Matemática – Onde estamos e para onde iremos?** IV Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional de Educação Matemática, Passo Fundo, 2012.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p. 212-231.

_____. Formação de professores - Mudanças urgentes na licenciatura em matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.) **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 169 - 187.

_____. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, nº 41. p. 73-98, 2011.

_____. Matemática Discreta através da Resolução de Problemas. **Anais do XI Encontro Paulista de Educação Matemática: XI EPEM**. São José do Rio Preto: SBEM/SBEM-SP, 2012, p.1-4.

PEREZ, G. Formação de professores de Matemática sob a perspectiva do desenvolvimento profissional. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. Cap. 15, p. 263-282.

_____. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

PEREZ, G.; COSTA, G. L. M.; VIEL, S. R. Desenvolvimento profissional e prática reflexiva. *Bolema*, Rio Claro, Ano 15, nº 17, 2002, p. 59-70.

PHILIPP, R.; SOWDER, J. T.; FLORES, A.; SCHAPELLE, B. P. Conceptions and practices of extraordinary mathematics teachers. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 13(2), p. 155-180, 1994.

PINTO, R. A. **Quando professores de matemática tornam-se produtores de textos escritos**. 2002. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, 2002.

PIRONEL, M. A **Avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática**. 2002. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2 ed, 1994. 196p.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 179p.

_____. *Mathematical Discovery; on understanding, learning, and teaching problem solving*. 1962. vol.1 e vol.2. Wiley & Sons , Inc.

_____. *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and analogy in mathematics*. 1965. vol.1. New York: Wiley

_____. *Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of Plausible Inference*. vol 2, 2ª ed. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 1968.

PONTE, J. P.; Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In: BROWN, M.; FERNANDES, D.; MATOS, J.F.; PONTE, J.P. (Ed.). **Educação Matemática** Lisboa: IEE, 1992. p.185-239.

_____. **Normas Profissionais para o ensino de Matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática; Instituto Educacional, 1994. Preparadas pelos Grupos de Trabalho da Commission on Teaching Standards for School Mathematics do National Council of Teachers on Mathematics. Educacional

_____. Perspectivas de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. In: PONTE, J. P. et al. **Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que formação?** 1. ed. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1996.

RADFORD, L. Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns in Different Context. *ZDM: International Journal in Mathematics Education*, 40(1), 2008. p. 83-96.

RODRIGUES, V. **Resolução de Problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a Criatividade dos alunos na Prática Educativa Matemática**. 1992. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1992.

ROMANATTO, M. C. **Resolução de Problemas na Formação de Professores e Pesquisadores**. I SERP – I Seminário em Resolução de Problemas. Rio Claro, São Paulo, 30-31/outubro. 2008. Disponível em http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo6.pdf Acesso em: 10 maio 2012.

ROMBERG, T. A. Perspectives on Scholarship and Research Methods. In: Grouws, D. A. (ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, p.49-64. NCTM, New York: Simon & Schuster, 1992.

_____. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução: ONUCHIC, L.; BOERO, M.L. In: **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro: UNESP, n.27, p.93-139, 2007.

RUBENSTEIN, R. N.; BRIGHT, G. W. (Ed.) **Perspectives on the Teaching of Mathematics**. Reston: NCTM, 2004, 286p. (Sixty-sixth Yearbook)

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios**. Editora Ática: São Paulo, 2010.

SANTOS, A. R. **Metodologia científica - a construção do conhecimento**. 7. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SARAIVA, Manuel J. F.S. **O Conhecimento e o Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: um trabalho colaborativo**. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa, 2001.

SÃO PAULO, estado. **Caderno do Professor: matemática, ensino fundamental – 8ª série, volume 2**. Secretaria da Educação; FINI, M. I. (coord), Machado, N. J.; Granja, C. E. S. C.; Mello, J.L.P.; Moisés, R. P.; Spinelli, W. (equipe). São Paulo: SEE, 2009.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42. (Yearbook)

SERRAZINA, M. L. M. **Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal**. Tese de doutoramento. Lisboa: APM, 1998.

_____. **Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1 ciclo**. Texto de apoio ao seminário no Programa de Estudos de Pós Graduação da PUC-SP, Revista Quadrante, 1999.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1989, p. 1-22.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SOWDER, J. T. Continuing the Mathematical Preparation of Middle-Grade Teachers: Na **Introduction**. In: SOWDER, J. T.; SCHAPELLE, B. P. (Ed.) **Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades**. Albany, NY: State University of New York Press, 1995, Cap. 1, p. 1-11.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 3 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-Ação**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. **Os padrões no ensino aprendizagem da Álgebra**. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs.), **Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SPCE Secção de Educação e Matemática, 2006, p. 193-213.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally**. New York: Longman, 2001. 478p.

_____. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009 584 p.

Anexo

Relação de Dissertações de Mestrado e Teses de Doutorado produzido pelo GTERP

Título: Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Valdir Rodrigues

1992

Título: As influências da linguagem e da comunicação no ensino-aprendizagem da matemática

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Carlos Roberto dos Santos

1995

Título: Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Luciene Souto Botta

1997

Título: Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Silvanio de Andrade

1997

Título: Uma proposta de mudança, na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de “ensino de matemática via resolução de problemas”

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Livia Lopes Azevedo

1998

Título: Números complexos via resolução de problemas

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Flávia Sueli Fabiani

1998

Título: Conceitos algébricos iniciais: um estudo sobre sua formação nos anos de escolaridade
Tese (Doutorado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Leonardo Paulovich

1998

Título: A introdução da disciplina “Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas” no Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie: uma proposta de mudança

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Maria Lúcia Boero

1999

Título: A Avaliação integrada no processo ensino-aprendizagem da Matemática

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Márcio Pironel

2002

Título: Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Elizabeth Quirino de Azevedo

2002

Título: Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações, no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista-Unip

Tese (Doutorado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Walter Paulette

2003

Título: A Matemática nos Cursos Profissionalizantes de Mecânica

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Wagner José Bolzan

2003

Título: O Ensino–Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Mariângela Pereira

2004

Título: Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência

Tese (Doutorado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Norma Suely Gomes Allevato

2005

Título: A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da Sala de Aula

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Roger Ruben Huaman Huanca

2006

Título: Matemática financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Paulo Henrique Herminio

2008

Título: Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Analucia Castro Pimenta de Souza

2010

Título: O Ensino do Conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da resolução de problemas

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Marcos Vinícius Ribeiro

2010

Título: O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática

Tese (Doutorado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Célia Barros Nunes

2010

Título: O Ensino do Conceito de Função e Conceitos relacionados a partir da Resolução de Problemas.

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Eliane Saliba Botta

2010

Título: A Produção de Significados durante o Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Equações Polinomiais

Dissertação de (Mestrado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Tatiane da Cunha Puti

2011

Título: Resolução de Problemas no Cenário da Matemática Discreta

Tese (Doutorado) - UNESP, Campus de Rio Claro/SP.

Autor(a): Fernanda dos Santos Menino

2013