

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
**INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA**

# FÍSICA DE SABORES E MODELOS MULTI-HIGGS

**Fagner Cintra Correia**

**Orientador:**

Dr. Vicente Pleitez (IFT - UNESP)

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. Jairo Alexis Rodríguez López (Universidade Nacional de Colombia)

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres (UNICAMP)

Prof. Dr. Adriano Antonio Natale (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Mauro Donizeti Tonasse (IFT-UNESP)

---

Dissertação de Mestrado IFT-D.012/13  
Apoio Financeiro: CAPES (08/2011 -  
02/2012), FAPESP (03/2012 - 07/2013)

---

São Paulo  
2013

FICHA CATALOGRÁFICA  
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física Teórica -UNESP

Cintra Correia, Fagner

FÍSICA DE SABORES E MODELOS MULTI-HIGGS — São Paulo,  
2013.

Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista  
“Júlio de Mesquita Filho”.

Instituto de Física Teórica

**Orientador:** Dr. Vicente Pleitez (IFT - UNESP)

**Área de concentração:** Física

**Unitermos:** 1. Modelo 3-3-1; 2. FCNC; 3. Mistura de Mésons.

UNESP/IFT/D.012/13

# Agradecimentos

Ao prof<sup>o</sup>. Dr. Vicente Pleitez pela admirável paciência.

À Dr<sup>a</sup>. Elaine C. F. S. Fortes pelo exemplo e imprescindível apoio.

Aos meus pais e à minha irmã pelo carinho e atenciosidade.

À tia Nara e primos pela confortante presença.

Aos meus queridos companheiros goianos e paulistas que tanto contribuíram para a minha formação e felicidade.

Aos professores, funcionários e colegas que fazem do Instituto de Física Teórica um ambiente de resistência às perigosas e reais transformações sofridas pela educação e pela ciência.

Ao meu leal camarada Marcelo Ferraz de Paula por me explicar incessantemente o significado da amizade.

Ao olhar que em pouco tempo passou a ocupar os cantos mais bonitos da minha memória e que por tantas vezes produz em mim largos sorrisos imprevisíveis.

Aos amigos, familiares, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES (08/2011 - 02/2012) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP (03/2012 - 07/2013) pelo apoio financeiro.

# Resumo

O modelo  $331$  mínimo consiste em uma extensão ao Modelo Padrão amparada em  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ . Os férmions se transformam como tripletos ou anti-tripletos de  $SU(3)_L$  com componentes envolvendo quarks exóticos e partículas conhecidas da fenomenologia atual. Nosso objetivo aqui é explorar qualidades adicionais e limitar novos parâmetros do  $331$  a partir de processos que violem sabor, como a mistura de mésons neutros.

**Palavras-chave:** Modelo 3-3-1; FCNC; Mistura de Mésons.

**Áreas do conhecimento:** Partículas Elementares e Campos.

# Abstract

The minimal 331 model has been proposed as an extension of the Standard Model based on the gauge group  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ . In this model, the left-handed fermions transform as triplets (or anti-triplets) under the action of  $SU(3)_L$ , whose generations correspond to the known SM fermions and new heavy quarks. Our purpose here is to constrain the 331 parameters considering the limits of flavour changing processes as meson mixing.

**Keywords:** 3-3-1 Model; FCNC; Meson Mixing.

# Lista de Figuras

3.1.	Diagramas de caixa do modelo padrão para a mistura de mésons neutros. . . .	31
3.2.	Diagramas de caixa para a mistura de mésons neutros envolvendo escalares e quarks exóticos do modelo 331. . . . .	38
3.3.	Diagrama de caixa com mais de dois tipos de partículas internas. . . . .	39
3.4.	Diagrama representado a mistura de mésons neutros. O modelo 331 admite que processos FCNC ocorra à nível de árvore . . . . .	42
3.5.	Função $S_0^{ST}$ . . . . .	44

# Prefácio

O trabalho apresentado adiante pode ser classificado como uma compilação objetiva dos aspectos fundamentais das teorias de gauge. Podemos esperar, portanto, que contenha como base o modelo de maior sucesso entre teorias deste tipo - o *Modelo Padrão das interações eletrofracas*<sup>1</sup>[1]. Por se tratar de um conjunto de princípios bastante aceito e coerente com a experiência, adotá-lo como referência consiste em uma escolha bastante razoável e, de fato, inevitável. Suas qualidades (e pequenas lacunas) motivaram a publicação dos vários livros didáticos utilizados por mim durante o desenvolvimento dos capítulos 1 e 3.

No entanto, mesmo uma escolha tão compreensível pode se mostrar bastante restritiva, sacrificando o certo grau de imparcialidade necessário para que a riqueza e a fraqueza do modelo sejam vistas. Sendo assim, a primeira seção do capítulo 1 tentará ser a mais genérica possível. As duas seções restantes farão uma discussão sobre a importância e a relação entre o teorema de Goldstone e o mecanismo de Higgs. Ademais, iremos estabelecer a notação para o conteúdo de léptons e quarks, matriz de mistura e correntes neutras e carregadas.

O capítulo 2 apresenta um novo modelo que, por substituir um dos grupos de simetria do MP, corresponderá a uma nova perspectiva sobre as interações eletrofracas. Todos os passos das teorias de gauge serão retomados e veremos que, em baixas energias, tanto o modelo de extensão, conhecido por 331, quanto o MP irão coincidir.

Por apresentar um conjunto adicional de partículas, o 331 será refinado de forma modesta através do cálculo de mistura de mésons neutros. Vamos impor, ao final do capítulo 3, que os resultados para a variação da massa de tais pseudo-escalares sejam sempre menores que os resultados do MP, restrição que dará um limite superior para as massas das novas partículas.

As seções do apêndice não pretendem fazer uma investigação detalhada dos temas ali enunciados, mas apresentar notações e cálculos necessários para o entendimento da dissertação. A parametrização de Feynman e a dedução da matriz de transformação de Fierz estarão entre estes cálculos. Por último, serão obtidas algumas características suplementares da mistura  $D^0 - \bar{D}^0$ .

---

<sup>1</sup>Doravante poderá ser representado pela sigla MP.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iv</b>
<b>1. O Modelo Padrão das Interações Eletrofracas</b>	<b>1</b>
1.1. Grupos de gauge: U(1) e SU(2) . . . . .	2
1.2. Teorema de Goldstone e Mecanismo de Higgs . . . . .	8
1.3. Léptons e Quarks . . . . .	15
1.3.1. Léptons . . . . .	15
1.3.2. Quarks . . . . .	17
<b>2. Extensões do Modelo Padrão</b>	<b>20</b>
2.1. O Modelo 331 mínimo . . . . .	20
<b>3. Processos <math>\Delta F = 2</math></b>	<b>29</b>
3.1. Modelo Padrão . . . . .	30
3.1.1. Inserção do vácuo . . . . .	36
3.1.2. $\Delta m$ . . . . .	38
3.2. Modelo 331 mínimo . . . . .	38
3.2.1. Inserção do vácuo . . . . .	40
3.2.2. $\Delta m$ . . . . .	42
<b>4. Conclusões</b>	<b>45</b>
<b>A. Apêndice</b>	<b>46</b>
A.1. Notações . . . . .	46
A.2. Parametrização de Feynman . . . . .	47
A.3. Transformações de Fierz . . . . .	49
A.4. $D^0 - \bar{D}^0$ . . . . .	53
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>



# 1

## O Modelo Padrão das Interações Eletrofracas

Definir um sistema físico consiste em determinar qual aspecto o espaço adquire após ser ocupado por uma partícula, um planeta, um campo, uma probabilidade ...

O teorema de Noether estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de quantidades conservadas à partir das propriedades de invariância da ação sob um determinado grupo de simetria contínuo.

Simetrias espaço-temporais são capazes de produzir informações à respeito da natureza da interação e de sua relação com o espaço-tempo. Contudo, a avaliação do espaço e de seus atributos nem sempre pode ser realizada de forma geométrica. Neste contexto as simetrias internas, ou *de gauge*, ganham relevância ao assumirem o papel de orientar a construção de um modelo teórico a partir da verificação experimental de grandezas conservadas. Entre as etapas fundamentais da construção de uma teoria de gauge consta a definição de uma Lagrangiana como representante de um sistema físico simétrico sob um certo grupo de transformações contínuas. A relação estabelecida pelo teorema de Noether entre tais simetrias e leis de conservação poderá confirmar ou descartar o modelo. Todo este procedimento irá promover o conceito de quebra espontânea de simetria que servirá de apoio ao teorema de Goldstone e ao fundamental mecanismo de Higgs.

O Modelo Padrão das interações eletrofracas corresponde à aplicação mais efetiva dos conceitos envolvidos em teorias de gauge para a física de partículas. Graças ao seu sucesso experimental é imprescindível que todos os passos de sua construção sejam seguidos por qualquer modelo que se proponha a refiná-lo.

Este capítulo se compromete em apresentar quais os aspectos do MP serão generalizados, alterados ou mantidos no modelo 331 e está baseado nas referências [2], [3] e [4].

## 1.1. Grupos de gauge: U(1) e SU(2)

O sistema físico de nosso interesse será composto por  $n$  campos independentes  $\phi_a(x)$ , ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) e tentaremos avaliar quais as implicações da transformação  $\phi_a \rightarrow \phi_a + \delta\phi_a$  para os casos

$$SU(n) : \phi_a \rightarrow \phi'_a = (e^{i\theta^i T^i})_{ab} \phi_b \quad (1.1)$$

$$U(1) : \phi_a \rightarrow \phi'_a = e^{i\theta} \phi_a \quad (1.2)$$

onde  $\theta$  e  $\theta^i$  são os parâmetros da transformação independentes da posição no espaço-tempo e  $T^i$  são geradores de  $SU(n)$  que na representação fundamental são dados por  $(n^2 - 1)$  matrizes  $n \times n$ . As correntes conservadas que surgem em decorrência da invariância da Lagrangiana  $\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$  sob (1.1) são dadas por <sup>1</sup>:

$$j_i^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \frac{\delta \phi_a}{\delta \theta^i} \quad (1.3)$$

tal que

$$\partial_\mu j^{i\mu} = 0 \quad (1.4)$$

Portanto cada gerador da transformação estará associado a uma corrente conservada.

Integrando (1.4) em todo o espaço e assumindo que  $\mathbf{j}^i(x)$  desaparece na fronteira segue que

$$Q^i(t) \equiv \int d^3x j_0^i(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{dQ^i}{dt} = 0$$

Para o caso de  $SU(n)$  as cargas  $Q^i$  irão satisfazer a mesma álgebra dos geradores  $T^i$ ,

$$[Q^i, Q^j] = i f_{ijk} Q^k$$

com  $f_{ijk}$  as constantes de estrutura completamente antissimétricas do grupo, cuja demonstração é obtida das relações de comutação canônicas e da definição de momento canonicamente conjugado

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_a)}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Q^i(t) &= -i \int d^3x T_{ab}^i \pi_a(\mathbf{x}, t) \phi_b(\mathbf{x}, t) \\ \therefore [Q^i, \phi_c] &= -i \int d^3x T_{ab}^i (\pi_a(\mathbf{x}, t) \phi_b(\mathbf{x}, t) \phi_c(\mathbf{y}, t) - \phi_c(\mathbf{y}, t) \pi_a(\mathbf{x}, t) \phi_b(\mathbf{x}, t)) \\ &= \int d^3x T_{ab}^i \delta_{ac} \phi_b(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= T_{cb}^i \phi_b(\mathbf{y}, t) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Os campos  $\phi_a$  são gerais, podendo ter componentes como, por exemplo, no caso de campos espinoriais.

$$\therefore \quad \Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta^i Q^i} \Phi e^{i\theta^i Q^i} = e^{-i\theta^i T^i} \Phi \quad (1.5)$$

A expressão acima fornece uma importante relação entre a realização do gerador  $Q^i$  e sua representação matricial.

Em discussões posteriores, a determinação das correntes será importante para o estudo de quebra espontânea de simetria e na obtenção de expressões fundamentais, como a relação de Gell-Mann-Nishijima.

O modelo padrão como um todo incorpora três grupos de simetria sendo um para cada interação fundamental. As interações fortes são manifestamente simétricas por  $SU(3)_C$ , com  $C$  representando o grau de liberdade de cor, e não serão tratadas no decorrer deste trabalho. Já o grupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  das interações eletrofracas será espontaneamente quebrado para  $U(1)_Q$  do eletromagnetismo através de um mecanismo que dará origem às três partículas vetoriais massivas do setor fraco e ao fóton de massa nula, mediador do setor eletromagnético.

Em seguida, iremos ilustrar o aparecimento dos campos de gauge como consequência de se impor uma Lagrangiana invariante local sob os grupos acima citados e identificar as implicações dos termos de massa nas diferentes fases de construção da teoria.

A lagrangiana para um férmion livre de massa  $m$  é dada por

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (1.6)$$

e é claramente invariante por uma transformação de fase global do tipo

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^{-i\theta} \psi(x), & \bar{\psi}'(x) &= e^{i\theta} \bar{\psi}(x) \\ \Rightarrow \mathcal{L}' &= \mathcal{L} \end{aligned} \quad (1.7)$$

O grupo associado às transformações (1.7) é denotado por  $U(1)$ .

Um sistema físico simétrico por transformações globais envolve um certo número de cargas conservadas mas não dá restrição alguma para a região do espaço para que estas cargas se conservem. Um determinado processo poderia, por exemplo, ‘aniquilar’ uma carga elétrica em um ponto do espaço-tempo e recriá-la instantaneamente em outra região qualquer do universo. A localidade, contudo, exigirá que esta conservação se dê no mesmo ponto, impedindo que informações possam se propagar com velocidades arbitrariamente grandes.

Estudar uma simetria de gauge local consiste em fazer de  $\theta$  uma função de  $x$

$$\psi'(x) = e^{-i\theta(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = e^{i\theta(x)} \bar{\psi}(x) \quad (1.8)$$

No entanto, esta generalização do parâmetro dará um termo adicional à Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' \\ &\stackrel{(1.8)}{=} \mathcal{L} + j^\mu(x) \partial_\mu \theta(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Da expressão (1.6) é possível perceber que a derivada  $\partial_\mu$  é responsável pela variação em (1.9). Portanto, a técnica para se encontrar uma lagrangiana invariante local será a de redefinir a derivada

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \quad (1.10)$$

de tal forma que

$$(D_\mu \psi(x))' = e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi(x) \quad (1.11)$$

A derivada covariante  $D_\mu$  agrega novos campos que, à princípio, estarão indiretamente associados aos mediadores das interações. Vale notar que, como o procedimento de restauração do caráter invariante da Lagrangiana consiste em realizar (1.10) e (1.11), estes campos de gauge serão sempre vetoriais,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieB_\mu(x) \quad (1.12)$$

O bóson  $B_\mu(x)$  se transforma como

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) \quad (1.13)$$

O produto  $m_B^2 B_\mu B^\mu$  não é simétrico por  $U(1)$ , característica que impedirá  $B_\mu$  de representar partículas massivas. Ademais a expressão

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

carece de um termo cinético para estes novos bósons.

O tensor associado à energia cinética do campo de gauge pode ser encontrado observando que (1.11) implica a seguinte identidade

$$([D_\mu, D_\nu]\psi)' = e^{-i\theta(x)} [D_\mu, D_\nu]\psi \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu - ieB_\mu(x), \partial_\nu - ieB_\nu(x)]\psi \\ &= \{[\partial_\mu, \partial_\nu] - ie([\partial_\mu, B_\nu] + [B_\mu, \partial_\nu]) - e^2[B_\mu, B_\nu]\}\psi \\ &= -ie(\partial_\mu \lrcorner B_\nu - \partial_\nu \lrcorner B_\mu - B_\nu \partial_\mu + B_\mu \partial_\nu)\psi \end{aligned}$$

onde definimos

$$\partial_\mu \lrcorner B_\nu \equiv (\partial_\mu B_\nu) + B_\nu \partial_\mu \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \therefore [D_\mu, D_\nu]\psi &= -ie(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)\psi \\ &\equiv -ieB_{\mu\nu}\psi \end{aligned} \quad (1.16)$$

Finalmente, a Lagrangiana completa para um sistema físico invariante por  $U(1)$  composto

por um férmion e um bóson de gauge não-massivo é dada por <sup>2</sup>

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

A primeira proposta de extensão de uma teoria de gauge Abeliana para uma não-Abeliana foi feita substituindo  $U(1)$  por  $SU(2)$  e reproduzindo as etapas apresentadas até aqui, o que faremos a seguir. Uma possível generalização para  $SU(n)$  não deverá apresentar novidades no que diz respeito à derivadas covariantes ou termos cinéticos. No entanto, cada álgebra terá atributos particulares que poderão ser devidamente aproveitados na criação de novos modelos ou conceitos. O modelo 331 estará apoiado nesta metodologia.

Como será utilizada a representação fundamental de  $SU(2)$ , daqui por diante o campo fermiônico  $\Psi$  passa a denotar um bi-spinor,

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2)$$

$$\bar{\psi}_a = \psi_a^\dagger \gamma^0 \quad (a = 1,2)$$

Uma transformação de  $SU(2)$  dependente de  $x$  será dada por

$$\Psi \rightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x)$$

$$U(x) = e^{ig\frac{\tau^i}{2}\theta^i(x)}$$

sendo  $g$  a constante de acoplamento associada à interação contida na condição de invariância. As matrizes de Pauli  $\tau^i$ , geradores de  $SU(2)$ , satisfazem a relação

$$\left[ \frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau^k}{2}$$

A derivada covariante irá introduzir três novos campos de gauge, já que o teorema de Noether fornece uma corrente conservada para cada gerador. Os bósons responsáveis pela interação estarão acoplados à essas correntes. De acordo com a prescrição (1.12),

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig\mathbb{A}_\mu(x)$$

com  $\mathbb{A}_\mu = \frac{\tau^i}{2}A_\mu^i \equiv \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu$ ,  $i = 1,2,3$ . Analogamente à (1.11)

$$(D_\mu \Psi)' = U D_\mu \Psi$$

---

<sup>2</sup>O fator  $(-1/4)$  no termo cinético faz com que as equações de Euler-Lagrange correspondam às equações de Maxwell.

o que implica em

$$\begin{aligned} (D_\mu \Psi)' &= D'_\mu \Psi' = UD_\mu U^{-1} U \Psi \\ &= (UD_\mu U^{-1}) \Psi' \\ \therefore D'_\mu &= (UD_\mu U^{-1}) \end{aligned}$$

A expressão acima deve necessariamente ser satisfeita e, portanto,

$$\begin{aligned} D'_\mu &= (UD_\mu U^{-1}) \\ &= U(\partial_\mu - ig\mathbb{A}_\mu)U^{-1} \\ &= U\partial_\mu U^{-1} - igU\mathbb{A}_\mu U^{-1} \\ \partial_\mu - ig\mathbb{A}'_\mu &= U\partial_\mu U^{-1} - igU\mathbb{A}_\mu U^{-1} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Nessa altura, convém utilizarmos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \partial_\mu U U^{-1} &= (\partial_\mu U)U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1} \\ \therefore \partial_\mu &= (\partial_\mu U)U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Substituindo (1.18) em (1.17)

$$\begin{aligned} \partial_\mu - ig\mathbb{A}'_\mu &= \partial_\mu - (\partial_\mu U)U^{-1} - igU\mathbb{A}_\mu U^{-1} \\ \therefore \mathbb{A}'_\mu &= U\mathbb{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Definindo  $\Theta \equiv \frac{\tau^i}{2}\theta^i = \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}$  e considerando transformações infinitesimais

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{I} - i\Theta + \mathcal{O}(\Theta^2) \\ U &= \mathbb{I} + i\Theta + \mathcal{O}(\Theta^2) \end{aligned}$$

segue que

$$\mathbb{A}'_\mu = \mathbb{A}_\mu - i[\Theta, \mathbb{A}_\mu] - \frac{1}{g}\partial_\mu \Theta \quad (1.20)$$

Da independência das matrizes de Pauli

$$\begin{aligned} [\Theta, \mathbb{A}_\mu] &= \theta^i A^j \left[ \frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2} \right] \\ &= -i\epsilon_{ijk} \frac{\tau^i}{2} A^j \theta^k \\ A'^i_\mu &\stackrel{(1.20)}{=} A^i_\mu - \epsilon_{ijk} \frac{\tau^i}{2} A^j \theta^k - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^i \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}
 [D_\mu, D_\nu]\Psi &= [\partial_\mu - ig\mathbb{A}_\mu(x), \partial_\nu - ig\mathbb{A}_\nu(x)]\Psi \\
 &= \{[\partial_\mu, \partial_\nu] - ig([\partial_\mu, \mathbb{A}_\nu] + [\mathbb{A}_\mu, \partial_\nu]) - g^2[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu]\}\Psi \\
 &= \{-ig(\partial_\mu\mathbb{A}_\nu - \partial_\nu\mathbb{A}_\mu) - g^2A_\mu^i A_\nu^j \left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2}\right]\}\Psi \\
 &= \{-ig(\partial_\mu\mathbb{A}_\nu - \partial_\nu\mathbb{A}_\mu) - ig^2\epsilon_{ijk}\frac{\tau^i}{2}A_\mu^j A_\nu^k\}\Psi
 \end{aligned}$$

A expressão (1.16) fornece um método bastante geral de se encontrar um tensor invariante por um grupo de gauge qualquer. Definindo

$$[D_\mu, D_\nu]\Psi \equiv -ig\mathbb{F}_{\mu\nu}\Psi$$

com  $\mathbb{F}_{\mu\nu} = \frac{\tau^i}{2}F_{\mu\nu}^i \equiv \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}$  e

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k \quad (1.22)$$

Portanto,

$$\mathbb{F}'_{\mu\nu}\Psi' = U\mathbb{F}_{\mu\nu}\Psi \rightarrow \mathbb{F}'_{\mu\nu} = U\mathbb{F}_{\mu\nu}U^{-1} \quad (1.23)$$

que, para transformações infinitesimais, corresponde à

$$\delta F_{\mu\nu}^i = \epsilon_{ijk}\theta^j F_{\mu\nu}^k$$

em contrapartida ao caso abeliano em que  $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$

De (1.23) convém construir o termo cinético aproveitando a qualidade de invariância do traço de uma matriz por transformações de similaridade:

$$-\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbb{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbb{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

Por hora, a Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G$$

$\mathcal{L}_F$  envolve termos de massa dos férmions e seus respectivos acomplamentos com os campos de gauge. Já  $\mathcal{L}_G$  será responsável pela dinâmica dos bósons mediadores, podendo apresentar auto-interação no caso não-Abeliano. Além disso, como a invariância de gauge é a única condição para que  $\mathcal{L}$  represente o sistema físico de interesse, é sempre possível adicionar novas interações renormalizáveis, como a lagrangiana de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = G_Y \bar{\Psi}(x)\Psi\Phi(x) \quad (1.24)$$

onde  $\Phi(x)$  é um campo escalar e  $G_Y$  é a constante de acoplamento.

Como citado anteriormente, os campos de gauge ainda são não-massivos. Os conceitos de quebra espontânea de simetria e mecanismo de Higgs preenchem essa lacuna final.

## 1.2. Teorema de Goldstone e Mecanismo de Higgs

O título desta seção traz dois importantes conceitos da física de partículas que serão complementares durante o processo de reprodução das interações fracas como interações de curta distância. Veremos que o grau de liberdade extra necessário para a massa dos bósons surgirá como consequência da *quebra de simetria*. Cada gerador responsável em ocultar a simetria do vácuo dará origem a uma partícula escalar não-massiva, conhecida como bóson de Goldstone, que durante o mecanismo de Higgs será agregada aos campos de gauge<sup>3</sup>, tornando-os massivos. Para que a quebra espontânea de simetria ocorra é necessário que o valor esperado do vácuo assuma um valor não-nulo.

Por conveniência iremos considerar o caso  $SU(n)$  como exemplo. O grupo das matrizes unitárias de determinante  $+1$  possui  $N = n^2 - 1$  geradores  $T^i$  com  $i = 1, 2, \dots, N$ . Um campo arbitrário escalar  $\Phi$  que compõe o sistema simétrico considerado se transformará como

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta^i T^i} \Phi$$

ou, para uma transformação infinitesimal,

$$\delta\Phi = -i\theta^i T^i \Phi \quad (1.25)$$

A expansão do potencial em torno do vácuo fornece

$$V = V_0 + \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial V}{\partial \phi_k} \right)_0 \phi'_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_l} \right)_0 \phi'_k \phi'_l + \dots$$

com  $\Phi' = \Phi - \Phi_0$  e  $m$  a dimensão da representação. Além disso,

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \phi_k} \right)_0 = 0, \quad m_{kl}^2 = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_l} \right)_0$$

Da invariância do potencial sob  $SU(n)$

$$\delta V = \sum_k \frac{\partial V}{\partial \phi_k} \delta \phi_k \stackrel{(1.25)}{=} \sum_{k,l} \frac{\partial V}{\partial \phi_k} T_{kl}^i \phi_l = 0$$

Diferenciando novamente em relação à  $\phi_j$

$$\sum_{k,l} \frac{\partial V}{\partial \phi_j \partial \phi_k} T_{kl}^i \phi_l + \frac{\partial V}{\partial \phi_k} T_{kj}^i = 0$$

Para o caso em que o campo  $\Phi$  for o vácuo,  $\Phi = \Phi_0$

$$\sum_{k,l} m_{jk}^2 T_{kl}^i(\phi_l)_0 = 0 \quad (1.26)$$

<sup>3</sup>Esta interpretação é manifesta através do gauge unitário.



Da expressão acima, os geradores que satisfazem  $T^i \Phi_0 \neq 0$  irão expandir um subespaço de campos cuja matriz de massa tenha autovalores nulos. Em resumo, cada gerador que quebra a simetria do vácuo será responsável pelo aparecimento de uma partícula escalar não-massiva conhecida como bóson de Goldstone.

A Lagrangiana invariante por  $SU(n)$  é dada por

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (1.27)$$

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (\mu^2 > 0)$$

A fim de explicitar a captura dos bósons de Goldstone na aquisição de massa das partículas de gauge iremos considerar um dubleto de  $SU(2)$  e recorrer à parametrização do escalar com campos  $H(x)$  e  $\xi^i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\tau^i \xi^i(x)}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

onde  $|\Phi_0|^2 = \frac{v^2}{2}$ . Em seguida, aproveitando a invariância do sistema, a Lagrangiana será reescrita no gauge unitário em termos dos campos abaixo

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = U(x)\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \\ \mathbb{A}_\mu &\rightarrow \mathbb{A}'_\mu = U\mathbb{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \end{aligned}$$

com

$$U(\xi) = e^{-i\frac{\tau^i \xi^i(x)}{2v}} \quad (1.29)$$

Dessa forma, é possível notar que os campos  $\xi$  desaparecem da lagrangiana, eliminando seu caráter físico. As derivadas covariantes presentes no setor dos campos escalares serão responsáveis por produtos entre os bósons de gauge, cujos coeficientes fornecerão suas massas.

Antes de prosseguirmos com a obtenção do grupo de simetria do setor eletrofraco do Modelo Padrão vamos fazer uma breve discussão sobre *realização* e *representação* de operadores a fim de estabelecer uma notação que facilite futuras extensões. Para tanto, utilizaremos uma única família de léptons não-massivos cuja lagrangiana livre é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R$$

Suponha que  $\mathcal{L}_0$  seja invariante global por

$$U_L(\Theta) = e^{-i\Theta \mathfrak{G}_L}, \quad U_R(\Theta) = e^{-i\Theta \mathfrak{G}_R}$$

Os índices  $L$  e  $R$  indicam em qual setor, esquerdo ou direito, a matriz atua (ver A.1).  $\mathfrak{G}_{L,R}$  são os geradores do grupo e têm dimensão igual a da representação escolhida para  $\Psi$ . De (1.3) o

operador de corrente conservada será

$$\frac{\delta\Psi_L}{\delta\Theta} = -i\mathfrak{G}_L\Psi_L, \quad \frac{\delta\Psi_R}{\delta\Theta} = -i\mathfrak{G}_R\Psi_R$$

$$j_\mu^\mathfrak{G} = \bar{\Psi}_L\gamma^\mu\mathfrak{G}_L\Psi_L + \bar{\Psi}_R\gamma^\mu\mathfrak{G}_R\Psi_R \quad (1.30)$$

com operador de carga  $\hat{G}$

$$\hat{G} = \int d^3x j_0^\mathfrak{G}(x) = \int d^3x (\Psi_L^\dagger\mathfrak{G}_L\Psi_L + \Psi_R^\dagger\mathfrak{G}_R\Psi_R)$$

No caso particular de geradores diagonais

$$\hat{G} = \int d^3x (q_{1L}\psi_{1L}^\dagger\psi_{1L} + \cdots + q_{nL}\psi_{nL}^\dagger\psi_{nL} + q_{1R}\psi_{1R}^\dagger\psi_{1R} + \cdots + q_{kR}\psi_{kR}^\dagger\psi_{kR})$$

onde os  $q$ 's são números quânticos acompanhados de seus respectivos operadores de número, enquanto  $n$  e  $k$  são as dimensões das representações dos respectivos setores esquerdo e direito.

Em seguida, aplicaremos a notação acima para uma família de férmions, tal que

$$SU(2)_L : \quad U_L(\theta_i) = e^{-i\theta_i\frac{\tau_i}{2}}, \quad U_R(\Theta) = \mathbb{I}$$

com  $\Psi_L$  dubleto e  $\Psi_R$  singlete de  $SU(2)$

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_L \\ \mathbf{c}_L \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = \mathbf{c}_R, \mathbf{n}_R$$

As correntes conservadas são dadas por

$$(j_\mu)_i = \bar{\Psi}_L\gamma^\mu\frac{\tau_i}{2}\Psi_L$$

com operadores de carga

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{n}_L^\dagger\mathbf{c}_L + \mathbf{c}_L^\dagger\mathbf{n}_L)$$

$$\hat{T}_2 = -\frac{i}{2} \int d^3x (\mathbf{n}_L^\dagger\mathbf{c}_L - \mathbf{c}_L^\dagger\mathbf{n}_L)$$

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{n}_L^\dagger\mathbf{n}_L - \mathbf{c}_L^\dagger\mathbf{c}_L)$$

Seja agora o grupo de simetria associado à conservação da carga elétrica

$$U(1)_Q : \quad U_L(\theta) = e^{-i\theta Q_L}, \quad U_R(\theta) = e^{-i\theta Q_R}$$

Da expressão para o operador de carga

$$\hat{Q} = q_c \int d^3x \mathbf{c}^\dagger \mathbf{c} + q_n \int d^3x \mathbf{n}^\dagger \mathbf{n}$$

onde  $q_n - q_c = 1$ . Vamos definir a matriz de hipercarga  $\mathbb{Y}_L = Y_L \mathbb{I}$  e  $\mathbb{Y}_R = Y_R$

$$\hat{Q} = \int d^3x \Psi_L^\dagger \frac{1}{2} (\mathbb{Y}_L + \tau_3) \Psi_L + \int d^3x \mathbf{c}_R^\dagger \frac{\mathbb{Y}_R}{2} \mathbf{c}_R + \int d^3x \mathbf{n}_R^\dagger \frac{\mathbb{Y}_R}{2} \mathbf{n}_R$$

ou seja,

$$\mathbb{Q}_L = \frac{1}{2} (\mathbb{Y}_L + \tau_3), \quad \mathbb{Q}_R = \frac{Y_R}{2} \quad (1.31)$$

De (1.31) é evidente que os grupos  $U_Q(1)$  e  $SU(2)_L$  não podem ser simetrias simultâneas de  $\mathcal{L}_0$  já que seus geradores não comutam entre si:

$$\mathbb{T}_i \equiv \frac{\tau_i}{2} \rightarrow [\mathbb{Q}_L, \mathbb{T}_i] = [\mathbb{T}_3, \mathbb{T}_i] \neq 0$$

No entanto, com

$$\hat{Y} = 2(\hat{Q} - \hat{T}_3)$$

$$\hat{Y} = \int d^3x \Psi_L^\dagger \mathbb{Y}_L \Psi_L + \int d^3x \Psi_R^\dagger \mathbb{Y}_R \Psi_R$$

Aplicando esta notação para uma família de léptons e notando que no MP o neutrino, por ser não-massivo, não terá componente de mão-direita

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = e_R$$

segue que  $Y_L = -1$  e  $Y_R = -2$ .

A Lagrangiana  $\mathcal{L}_0$  é invariante por  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  dado como

$$\begin{aligned} SU(2)_L &: & U(\theta_i) &= e^{-ig\theta_i \frac{\tau_i}{2}} \\ U(1)_Y &: & U(\theta) &= e^{-i\frac{g'}{2}\theta Y} \end{aligned}$$

que, atuando sobre férmions,

$$Y = \begin{cases} Y_L & \text{para } \Psi_L \\ Y_R & \text{para } \Psi_R \end{cases}$$

Conforme discutido no início do capítulo, a extensão para uma teoria invariante local é feita através da definição de uma derivada covariante contendo os bósons de gauge responsáveis pela interação.  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  será o grupo de simetria associado às interações eletrofracas. Seus geradores podem ser reescritos em uma base contendo três matrizes que quebram a simetria

do vácuo e  $\mathbb{Q}_L$  que a preserva. Do teorema de Goldstone três bósons escalares não-massivos deverão aparecer e o mecanismo de Higgs irá agregá-los às partículas de gauge. O resultado final apresenta correntes carregadas e neutras mediadas por  $W^\pm$  e  $Z^0$ , respectivamente, além do fóton da interação eletromagnética.

A construção da derivada covariante segue a prescrição usual

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\mathbb{A}_\mu - ig'\mathbb{B}_\mu$$

com  $\mathbb{A}_\mu = \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu$  e  $\mathbb{B}_\mu = \frac{Y}{2}B_\mu$ . Partículas de mão-direita não acoplam com  $A_\mu^i$  e serão representadas por singletos de  $SU(2)$ ,  $\Psi_R$ . A lagrangiana invariante por  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  local é dada por

$$\mathcal{L}_F = \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu - ig'\frac{Y_L}{2}B_\mu)\Psi_L + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'\frac{Y_R}{2}B_\mu)\Psi_R \quad (1.32)$$

Para o termo cinético dos campos de gauge, conforme (1.16) e (1.22), tem-se

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (1.33)$$

Graças ao comportamento seletivo da interação fraca sobre a paridade, o termo de massa dos férmions não é invariante por  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  e, portanto, não será incluído à priori. O dubleto de escalares e o termo de Yukawa serão os responsáveis pela aquisição de massa de todas partículas envolvidas através do mecanismo de Higgs. Ao escalar é associada a matriz de hipercarga  $\mathbb{Y}_\phi = +\mathbb{I}$  e

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

A Lagrangiana dos escalares será

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi^\dagger\Phi) \quad (1.34)$$

e a interação de Yukawa acoplando a eles os férmions será

$$\mathcal{L}_Y = -G_f(\bar{\Psi}_L\Phi\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Phi^\dagger\Psi_L) \quad (1.35)$$

com  $G_f$  a constante de acoplamento. Finalmente, de (1.32)-(1.35), a Lagrangiana completa pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_Y$$

A quebra espontânea de simetria ocorre quando  $\Phi$  desenvolve um valor esperado do vácuo diferente de zero

$$\Phi_0 = \langle 0|\Phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Escolhendo uma base de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  composta por  $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \mathbb{K}$  e  $\mathbb{Q}$  com

$$\mathbb{K} = \mathbb{T}_3 - \frac{1}{2}\mathbb{Y}$$

fica explícito que um dos geradores,  $\mathbb{Q}$ , não quebra a simetria de  $\Phi_0$

$$\mathbb{Q}\Phi_0 = \left( \mathbb{T}_3 + \frac{1}{2}\mathbb{Y} \right) \Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

Os três geradores restantes, por outro lado, não apresentam o mesmo comportamento. Do teorema de Goldstone cada um deles será responsável pelo aparecimento de um bóson escalar. O mecanismo de Higgs fará com que os bósons de gauge se apropriem do grau de liberdade associado a estas partículas e adquiram massa como atributo resultante. Reescrevendo o escalar na parametrização (1.28) e aproveitando a invariância da Lagrangiana, podemos definir os campos no gauge unitário e fazer com que somente as partículas físicas estejam manifestas. De (1.29)

$$\begin{aligned} \Phi' &= U(\xi)\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\chi \\ \Psi'_L &= U(\xi)\Psi \\ \Psi'_R &= \Psi_R \\ B'_\mu &= B_\mu \end{aligned}$$

com  $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . O termo de massa dos bósons de gauge surge da Lagrangiana escalar, que envolve produtos de derivadas covariantes,

$$\mathcal{L}'_s = (D_\mu \Phi')^\dagger (D^\mu \Phi)' - V(\Phi'^\dagger \Phi') \quad (1.36)$$

$$(D^\mu \Phi)' = \left( \partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}'_\mu - \frac{i}{2} g' B'_\mu \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H) \chi \quad (1.37)$$

Introduzindo os campos carregados

$$W_\mu^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp iA_\mu^2}{\sqrt{2}}$$

a lagrangiana de massa será

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{4} g^2 v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & B'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ B'^\mu \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

O último termo da expressão acima pode ser diagonalizado por

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^3_\mu \\ B'_\mu \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

para

$$\frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Consequentemente, o campo  $Z$  se torna massivo com  $M_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}$  e o fóton permanece sem massa. O potencial será

$$V(\Phi'^\dagger \Phi') = -\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{1}{2}(2\mu^2)H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4}H^4$$

que fornece  $m_H = \sqrt{2\mu^2}$  para a partícula de Higgs. Para  $\mathcal{L}_Y$  em (1.35), no gauge unitário, teremos

$$\mathcal{L}_Y = -G_f(\bar{\Psi}_L \Phi \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Phi^\dagger \Psi_L) \quad (1.41)$$

$$= -\frac{G_f v}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{c}} \mathbf{c} - \frac{G_f}{\sqrt{2}} H \bar{\mathbf{c}} \mathbf{c} \quad (1.42)$$

em que os acentos ' foram retirados, indicando que os campos representam partículas físicas. Os termos referentes aos campos  $n$  foram negligenciados pois, quando aplicarmos aos léptons, os neutrinos serão partículas de massa nula e, portanto, sem componente de mão-direita. No entanto, em se tratando de quarks, ambas projeções deverão estar presentes.

Em (1.41) a massa de  $\mathbf{c}$  deve ser identificada como

$$m_f = \frac{G_f v}{\sqrt{2}} \quad (1.43)$$

$$\text{vértice } H \bar{\mathbf{c}} \mathbf{c} : \frac{m_f}{v} \quad (1.44)$$

Portanto, os acoplamentos com o Higgs serão proporcionais à massa dos férmions, o que na maioria dos casos tornarão desprezíveis vértices deste tipo.

Para a corrente carregada teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} &= \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu^- W^{-\mu} + J_\mu^+ W^{+\mu}) \\ J_\mu^+ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \mathbf{c} \\ J_\mu^- &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{c}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \mathbf{n} \end{aligned}$$

e para a corrente neutra

$$\mathcal{L}_{NC} = g' \cos \theta_W j_\mu^q A^\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} j_\mu^Z$$

com  $j_\mu^q$  a corrente eletrônica e

$$j_\mu^Z = \bar{\mathbf{n}} \gamma_\mu (C_V^n - C_A^n \gamma_5) \mathbf{n} + \bar{\mathbf{c}} \gamma_\mu (C_V^c - C_A^c \gamma_5) \mathbf{c}$$

$$C_V^n = \frac{1}{4} - q_n \sin^2 \theta_W \quad (1.45)$$

$$C_A^n = \frac{1}{4} \quad (1.46)$$

$$C_V^c = -\frac{1}{4} - q_c \sin^2 \theta_W \quad (1.47)$$

$$C_A^c = -\frac{1}{4} \quad (1.48)$$

Aqui  $q_c$  representa a carga elétrica do férmion  $\mathbf{c}$ .

## 1.3. Léptons e Quarks

Nesta seção iremos aplicar a notação e os resultados da seção anterior para um modelo com 3 famílias de léptons e 3 de quarks. A principal diferença a ser notada entre estas duas espécies de partículas será a ausência de singletos de mão-direita para os neutrinos nas famílias de léptons.

### 1.3.1. Léptons

Os léptons estarão distribuídos nas famílias do elétron, múon e tau

$$\Psi_{Le} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \Psi_{Re} = e_R; \quad \Psi_{L\mu} = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \Psi_{R\mu} = \mu_R;$$

$$\Psi_{L\tau} = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \Psi_{R\tau} = \tau_R;$$

cuja lagrangiana será

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_F^e + \mathcal{L}_F^\mu + \mathcal{L}_F^\tau$$

Para as interações de Yukawa tem-se

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{i,j} G_{ij} \bar{\Psi}_{Li} \Phi \Psi_{Rj} + h.c., \quad i,j = e, \mu, \tau \quad (1.49)$$

A expressão acima fornecerá as massas dos férmions

$$\mathcal{L}_F^m = - \begin{pmatrix} \bar{e}_L & \bar{\mu}_L & \bar{\tau}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

com  $m_{ij} = G_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}}$ . Em seguida vamos demonstrar que uma matriz complexa arbitrária  $M$ ,  $n \times n$ , sempre pode ser diagonalizada por uma transformação bi-unitária como

$$U^\dagger M V = M_d \quad (1.51)$$

com  $M_d$  diagonal [5].  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias que diagonalizam  $MM^\dagger$  e  $M^\dagger M$  como  $U^\dagger(MM^\dagger)U = V^\dagger(M^\dagger M)V = M_d^2$ ,

$$U^\dagger M V = M_d = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}$$

Considere uma matriz  $U$  que diagonaliza a matriz hermitiana  $MM^\dagger$  como

$$U^\dagger(MM^\dagger)U = M_d^2, \quad \text{com } (M_d^2)_{\alpha\beta} = m_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (1.52)$$

Da expressão acima,

$$m_\alpha^2 = \sum_\beta (U^\dagger M)_{\alpha\beta} (M^\dagger U)_{\beta\alpha} = \sum_\beta (U^\dagger M)_{\alpha\beta} (U^\dagger M)_{\beta\alpha}^\dagger = \sum_\beta |(U^\dagger M)_{\alpha\beta}|^2$$

Logo, os autovalores são reais e positivos. Com isso, basta definir uma matriz unitária  $V$  como

$$V = M^{-1} U M_d, \quad \text{com } (M_d)_{\alpha\beta} = \sqrt{m_\alpha^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.53)$$

$$V^\dagger V = M_d U^\dagger (M^\dagger)^{-1} (M)^{-1} U M_d = M_d U^\dagger (M M^\dagger)^{-1} U M_d \stackrel{(1.52)}{=} \mathbb{I}$$

e, analogamente,  $V V^\dagger = \mathbb{I}$ . A expressão para  $V$  fornece (1.51) e é equivalente à  $V^\dagger(M^\dagger M)V = M_d^2$ .

Os estados observados serão auto-estados da massa dados por

$$\begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad (1.54)$$



$$\begin{pmatrix} e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \end{pmatrix} = V^\dagger \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

No entanto, a degenerescência nas massas dos neutrinos,  $m_\nu = 0$ , sempre permitirá redefini-los de forma a absorver as fases dos léptons carregados. Logo, os auto-estados da massa coincidem com os auto-estados da simetria e as correntes carregadas permanecem diagonais no sabor.

### 1.3.2. Quarks

O procedimento para a construção de uma Lagrangiana invariante por  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  para quarks é análogo ao de léptons, com algumas extensões como, por exemplo, a diferença entre as cargas elétricas e o fato de que, aqui, todas as partículas serão massivas. A notação usualmente considerada é

$$Q'_{Li} = \begin{pmatrix} U'_i \\ D'_i \end{pmatrix}_L, \quad U'_{Ri}, D'_{Ri}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

com  $U'_i = u_1, u_2, u_3$ ,  $D'_i = d_1, d_2, d_3$ . A lagrangiana com os respectivos valores de hipercarga será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = \sum_{i=1}^3 \left\{ \bar{Q}'_{Li} i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu - \frac{i}{6}g_Y B_\mu) Q'_{Li} + \right. \\ \left. + \bar{U}'_{Ri} i\gamma^\mu (\partial_\mu - i\frac{2}{3}g_Y B_\mu) U'_{Ri} + \bar{D}'_{Ri} i\gamma^\mu (\partial_\mu + i\frac{1}{3}g_Y B_\mu) D'_{Ri} \right\} \quad (1.56) \end{aligned}$$

Já  $\mathcal{L}_Y$  incluirá um termo adicional que permita identificar a massa de todos os quarks envolvidos

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{i,j} (\Gamma_{i,j}^D \bar{Q}'_{Li} \Phi D'_{Rj} + \Gamma_{i,j}^U \bar{Q}'_{Li} \tilde{\Phi} U'_{Rj} + h.c.) \quad (1.57)$$

Os acoplamentos estão representados por  $\Gamma_{i,j}^D$  e  $\Gamma_{i,j}^U$  e a inserção do campo

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{*0} \\ -\phi^- \end{pmatrix}$$

é permitida pois, em  $SU(2)$ , a representação conjugada é equivalente à representação fundamental. Veremos que para o 331 a situação será diferente já que o grupo  $SU(3)$  não possui esta mesma propriedade. A hipercarga associada à  $\tilde{\Phi}$  é  $Y_{\tilde{\Phi}} = -1$ .

No gauge unitário os campos e termos de massa após a quebra de simetria serão

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \tilde{\Phi} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_m = - \sum_{i,j} \{ \bar{D}'_{Li} \mathcal{M}_{i,j}^D D'_{Rj} + \bar{U}'_{Li} \mathcal{M}_{i,j}^U U'_{Rj} \} + h.c. \quad (1.58)$$

Diagonalizando  $\mathcal{M}_{i,j}^D$  e  $\mathcal{M}_{i,j}^U$  separadamente teremos

$$\begin{aligned}V_L^U \mathcal{M}^U V_R^{U\dagger} &= M^U \\ V_L^D \mathcal{M}^D V_R^{D\dagger} &= M^D\end{aligned}$$

Logo, os auto-estados da massa se escrevem como

$$\begin{aligned}D'_L &= V_L^{D\dagger} D_L, & D'_R &= V_R^{D\dagger} D_R, \\ U'_L &= V_L^{U\dagger} U_L, & U'_R &= V_R^{U\dagger} U_R\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_m = -\bar{D} M^D D - \bar{U} M^U U \quad (1.59)$$

com

$$D = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}$$

e

$$M^D = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}, \quad M^U = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}$$

Nos auto-estados acima, a lagrangiana de corrente carregada é dada por

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}_L V_L^U \gamma^\mu V_L^{D\dagger} D_L W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{D}_L V_L^{D\dagger} \gamma^\mu V_L^U U_L W_\mu^-$$

A matriz unitária  $V_{CKM}$  definida como

$$V_{CKM} = V_L^U V_L^{D\dagger}$$

permite reescrever  $\mathcal{L}_{CC}$

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{U} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) V_{CKM} D W_\mu^+ + h.c.$$

Supondo o caso geral de  $n$  possíveis gerações de quarks, a matriz  $V_{CKM}$ , conhecida como matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ou CKM, será uma matriz  $n \times n$  com  $n^2$  parâmetros reais, pois a condição de unitariedade irá impor  $n^2$  restrições aos seus elementos. Se todas as fases forem nulas, ou seja, se  $V$  for ortogonal, os termos independentes passam a ser  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Logo,  $V$  será escrita como  $\frac{n(n-1)}{2}$  ângulos e  $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  fases. Estas, por sua vez, podem ser reduzidas para  $\frac{n(n+1)}{2} - 2n - 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  por uma redefinição de fases dos campos de quarks.

O termo de corrente neutra será

$$\mathcal{L}_{NC} = eJ_\mu^q A^\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} (J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W J_\mu^q) Z^\mu$$

com

$$\begin{aligned} J_\mu^q &= \frac{2}{3} \bar{U} \gamma_\mu U - \frac{1}{3} \bar{D} \gamma_\mu D \\ J_\mu^3 &= \frac{1}{2} (\bar{U}_L \gamma_\mu U_L - \bar{D}_L \gamma_\mu D_L) \end{aligned}$$

que, como pode ser visto, são diagonais no sabor mesmo quando escritos em termos de auto-estados da massa.

Embora apresentados brevemente, a definição da matriz unitária de mistura  $V$  e as expressões para a corrente neutra e carregada estão entre os pontos mais importantes deste trabalho - todo o conteúdo do próximo capítulo estará de alguma forma relacionado aos resultados desta subseção.

# 2

## Extensões do Modelo Padrão

Este capítulo consiste em um resumo das referências [6], [7], [8] e tem por objetivo apresentar os principais aspectos de um modelo que substitui o grupo de simetria  $SU(2)_L$ , associado ao setor de mão-esquerda dos léptons, para  $SU(3)_L$ . Conhecido como 331, esta extensão ao Modelo Padrão está amparado em  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  espontaneamente quebrado para  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ .

Aqui os férmions se transformarão como tripletos ou anti-tripletos cujas duas primeiras componentes conterão as partículas conhecidas da fenomenologia atual. Na terceira componente novos quarks serão incluídos enquanto que os léptons serão preenchidos por seus conjugados. Esta variante do modelo é conhecida como versão mínima.

Conforme discutido em 1.2, cada gerador implica um campo de gauge. 8 destes geradores irão quebrar a simetria do vácuo e como resultado 5 novos bósons vetoriais deverão aparecer, sendo conhecidos como o novo bóson neutro  $Z'$  e os carregados  $V^{\pm Q_V}$  e  $U^{\pm Q_U}$ . A presença do  $Z'$  permitirá correntes neutras com mudança de sabor, conhecidos como processos FCNC<sup>1</sup>, à nível de árvore. Os acoplamentos relevantes, no entanto, serão pequenos o suficiente para fazer com que estas transições não sejam maiores do que as contribuições de loops no MP.

O grupo  $SU(3)_C$  não estará envolvido na discussão a seguir.

### 2.1. O Modelo 331 mínimo

Os geradores do grupo de gauge serão as usuais matrizes de Gell-Mann  $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ , com  $a = 1, \dots, 8$  para  $SU(3)_L$  e  $T^9 \equiv \frac{\mathbb{I}}{\sqrt{6}}$  para  $U(1)_X$ . Como estaremos lidando com a representação fundamental,  $\mathbb{I}$  é matriz identidade  $3 \times 3$ . Os anti-tripletos se transformam como  $\bar{3}$  com geradores  $\bar{T}^a = -(T^a)^\top$ .

---

<sup>1</sup>FCNC : Flavour Changing Neutral Current.

Os bósons de gauge serão denotados como  $W_\mu^a$ ,  $a = 1, \dots, 8$  e  $X_\mu$ . Seguindo as prescrições apresentadas no capítulo anterior, as derivadas covariantes atuando sobre os campos serão

- triplete  $\Psi_L$ :  $D_\mu \Psi_L = \partial_\mu \Psi_L - igW_\mu^a \mathbb{T}^a \Psi_L - ig_X X X_\mu \mathbb{T}^9 \Psi_L$ ;
- anti-triplete  $\bar{\Psi}_L$ :  $D_\mu \bar{\Psi}_L = \partial_\mu \bar{\Psi}_L + igW_\mu^a (\mathbb{T}^a)^\dagger \bar{\Psi}_L - ig_X X X_\mu \mathbb{T}^9 \bar{\Psi}_L$ ;
- singlete  $\Psi_R$ :  $D_\mu \Psi_R = \partial_\mu \Psi_R - ig_X \frac{X}{\sqrt{6}} X_\mu \Psi_R$

Podemos ainda definir uma matriz de bósons,

$$\mathbb{W}_\mu = W_\mu^a T^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} W_\mu^8 & \sqrt{2} W_\mu^+ & \sqrt{2} U_\mu^{Q_U} \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} W_\mu^8 & \sqrt{2} V_\mu^{Q_V} \\ \sqrt{2} U_\mu^{-Q_U} & \sqrt{2} V_\mu^{-Q_V} & -\frac{2}{\sqrt{3}} W_\mu^8 \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \\ U_\mu^{\pm Q_U} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^4 \mp iW_\mu^5), \\ V_\mu^{\pm Q_V} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^6 \mp iW_\mu^7), \end{aligned}$$

Ademais, em analogia à (1.31), teremos matrizes de carga de tripletos, anti-tripletos e singletos,

$$\mathbb{Q}_W = \mathbb{T}_3 - \sqrt{3} \mathbb{T}_8 + X \mathbb{I} \quad (2.1)$$

- Tripletos:  $\mathbb{Q}_W \Psi_L$

$$\mathbb{Q}_W = \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X+2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

- anti-Tripletos:  $\mathbb{Q}_W \bar{\Psi}_L$

$$\mathbb{Q}_W = \begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

- Singletos:  $\mathbb{Q}_W \bar{\Psi}_R$

$$\mathbb{Q}_W = X_R \quad (2.4)$$

- Bósons de Gauge: Também é possível escrever uma matriz para os bósons de gauge tal que cada entrada corresponda à carga elétrica das componentes de  $\mathbb{W}_\mu$

$$Q_W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Portanto, o modelo irá comportar três bósons de gauge neutros e dois carregados que adiante serão identificados com o  $Z^0$ , o fóton  $A^\mu$  e  $W^\pm$  do MP, além do novo  $Z'$  neutro. Surgem ainda duas partículas com carga  $\pm 1$  e duas com carga  $\pm 2$ .

Em seguida, apresentaremos o conteúdo de partículas restante referente aos férmions e Higgs.

As duas primeiras gerações de quarks estarão distribuídas nas duas primeiras componentes de anti-tripletos e a terceira geração estará em um triplete. A terceira componente abrigará novos quarks pesados.

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ -u_1 \\ j_1 \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}^*, -1/3) \quad \begin{pmatrix} d_2 \\ -u_2 \\ j_2 \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}^*, -1/3) \quad \begin{pmatrix} u_3 \\ d_3 \\ J \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, 2/3) \quad (2.6)$$

A ordem dos quarks na terceira geração e o sinal negativo nos anti-tripletos surgem para tratar anomalias e para que os acoplamentos do MP sejam reproduzidos. Os termos entre parenteses indicam a representação de  $SU(3)_L$  correspondente e o valor da hipercarga  $X$ . Os índices de cor foram omitidos.

Já os léptons de mão-esquerda estarão acomodados em tripletos. As duas primeiras componentes são ocupadas pelos campos do MP e a última pelo conjugado do lépton carregado:

$$\begin{pmatrix} \nu_a \\ l_a \\ l_a^c \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, 0) \quad \nu_{aR} = (\mathbf{1}, 0) \quad (2.7)$$

Na tabela 2.1 estão apresentados os férmions<sup>2</sup> do 331 e seus respectivos valores de carga elétrica  $Q_W$  e hipercarga  $X$ .

quarks	$Q_W$	$X$	quarks	$Q_W$	$X$	léptons	$Q_W$	$X$
$u_L, c_L$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$b_L$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$l_L$	-1	0
$u_R, c_R$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$t_L$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$l_R$	-1	-1
$d_L, s_L$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$b_R$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\nu_{lL}$	0	0
$d_R, s_R$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$t_R$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\nu_{lR}$	0	0
$j_{1L}, j_{2L}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$J_L$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$l_L^c$	1	0
$j_{1R}, j_{2R}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$J_R$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$l_R^c$	1	1

**Tabela 2.1.:** Conteúdo de férmions do modelo 331.

<sup>2</sup>Os férmions estão escritos nos auto-estados da massa.

Como discutido no capítulo anterior, as partículas envolvidas se tornam massivas através do mecanismo de Higgs - uma quebra de simetria não-abeliana que, neste contexto, ocorrerá em etapas  $SU(3)_L \otimes U(1)_X \rightarrow SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$ . Logo, a primeira quebra fará com que 4 dos 9 geradores de  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  preservem a simetria do vácuo denotado por  $\langle \Phi_1 \rangle$ . Estes 4 geradores estarão associados à  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . Na segunda quebra somente um deles deverá preservar a simetria do novo vácuo denotado por  $\langle \Phi_2 \rangle$ .

- Primeira quebra:

$$\mathbb{T}^1 \langle \Phi_1 \rangle = \mathbb{T}^2 \langle \Phi_1 \rangle = \mathbb{T}^3 \langle \Phi_1 \rangle = (-\sqrt{3}\mathbb{T}^8 + X\mathbb{I}) \langle \Phi_1 \rangle = 0 \quad (2.8)$$

- Segunda quebra:

$$\mathbb{Q}_W \langle \Phi_2 \rangle = 0 \quad (2.9)$$

O procedimento descrito acima fornecerá massa às partículas desde que esteja envolvido por lagrangianas de gauge e de Yukawa que acoplem os campos de Higgs aos bósons mediadores (através da derivada covariante) e aos férmions, respectivamente. Ademais, o fóton permanecerá sem massa.

O tripleto de Higgs associado à primeira quebra será dado por  $\chi$ , tal que

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

De  $(-\sqrt{3}\mathbb{T}^8 + X\mathbb{I}) \langle \Phi_1 \rangle = 0$  segue que  $X_\chi = -1$ .

A condição (2.9) para a segunda quebra permite duas possíveis escolhas para os tripletos de Higgs, cujos vev's serão denotados por

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

De  $\mathbb{Q}_W \langle \rho \rangle = \mathbb{Q}_W \langle \eta \rangle = 0$  segue que

$$X_\rho = 1, \quad X_\eta = 0 \quad (2.12)$$

A fim de que o modelo seja consistente com a fenomenologia atual, a escala da quebra de  $SU(3)_L$  deverá ser muito maior que a escala eletrofraca, ou seja,  $v_\chi \gg v_\rho, v_\eta$ .

A notação adotada e as matrizes de carga para os tripletos de Higgs serão

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$Q_\chi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix}, \quad Q_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Abaixo estão os campos neutros escritos em termos de suas partes real e imaginária

$$\begin{aligned} \chi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\chi + \xi_\chi + i\zeta_\chi), & \langle \chi^0 \rangle &= v_\chi, \\ \rho^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\rho + \xi_\rho + i\zeta_\rho), & \langle \rho^0 \rangle &= v_\rho, \\ \eta^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\eta + \xi_\eta + i\zeta_\eta), & \langle \eta^0 \rangle &= v_\eta \end{aligned}$$

O potencial de Higgs pode ser escolhido da forma usual

$$\begin{aligned} V(\rho, \eta, \chi) &= \mu_1^2(\rho^\dagger \rho) + \lambda_1(\rho^\dagger \rho)^2 + \mu_2^2(\eta^\dagger \eta) + \lambda_2(\eta^\dagger \eta)^2 + \\ &+ \mu_3^2(\chi^\dagger \chi) + \lambda_3(\chi^\dagger \chi)^2 + \lambda_{12}(\rho^\dagger \rho)(\eta^\dagger \eta) + \lambda_{13}(\rho^\dagger \rho)(\chi^\dagger \chi) + \\ &+ \lambda_{23}(\chi^\dagger \chi)(\eta^\dagger \eta) + \tilde{\lambda}_{12}(\rho^\dagger \eta)(\eta^\dagger \rho) + \tilde{\lambda}_{13}(\rho^\dagger \chi)(\chi^\dagger \rho) + \tilde{\lambda}_{23}(\eta^\dagger \chi)(\chi^\dagger \eta) + \\ &+ \sqrt{2}f_1(\epsilon_{ijk}\rho^i\eta^j\chi^k + h.c.) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Os auto-estados da massa são obtidos através dos ângulos de mistura

$$\sin^2 \beta_{\rho\eta} = \frac{v_\eta^2}{v_\eta^2 + v_\rho^2}, \quad \sin^2 \beta_{\rho\chi} = \frac{v_\rho^2}{v_\chi^2 + v_\rho^2}$$

e escritos como

- Estados com carga  $-1$ :

$$\begin{pmatrix} \phi_W^- \\ H_0^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{\rho\eta} & -\sin \beta_{\rho\eta} \\ \sin \beta_{\rho\eta} & \cos \beta_{\rho\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^- \\ \eta^- \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\text{com } M_{\phi_W^-} = 0 \text{ e } M_{H_0^-}^2 = \frac{f_1 v_\chi}{\sin \beta_{\rho\eta} \cos \beta_{\rho\eta}}.$$

- Estados com carga  $+1$ :

$$\begin{pmatrix} \phi_V^+ \\ H_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{13} & -\sin \beta_{13} \\ \sin \beta_{13} & \cos \beta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \chi^+ \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\text{com } M_{\phi_V^+} = 0, M_{H_2^+}^2 = f_1 v_\chi \tan \beta_{\rho\chi} + v_\chi^2 \frac{\tilde{\lambda}_{13}}{2}, \beta_{13} = \frac{\pi}{2} - \beta_{\rho\chi}.$$

As massas dos bósons de gauge surgem a partir da derivada covariante da Lagrangiana dos escalares, dada por

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) + (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) \quad (2.18)$$



que fornecem

$$M_{W^\pm}^2 = \frac{g^2}{4} v_+^2, \quad (2.19)$$

$$M_{V^\pm}^2 = \frac{g^2}{4} v_\chi^2 \left[ 1 - \frac{v_-^2}{2v_\chi^2} + \frac{v_+^2}{2v_\chi^2} \right], \quad (2.20)$$

$$M_{U^{\pm 2}}^2 = \frac{g^2}{4} v_\chi^2 \left[ 1 + \frac{v_-^2}{2v_\chi^2} + \frac{v_+^2}{2v_\chi^2} \right] \quad (2.21)$$

com  $v_+^2 = v_\rho^2 + v_\eta^2$  e  $v_-^2 = v_\eta^2 - v_\rho^2$ . Inicialmente os bósons de gauge neutros  $W_\mu^8$  e  $X_\mu$  se misturam através de  $\sin \theta_{331} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + \frac{g_X^2}{2}}}$  dando origem aos  $B_\mu$  e  $Z'_\mu$  que, em seguida, se misturam com  $W_\mu^3$  através de  $\sin \theta_W = \frac{g_Y}{\sqrt{g^2 + g_Y^2}}$  resultando no fóton  $A_\mu$  e em  $Z_\mu$  com

$$\frac{1}{g_Y^2} = \frac{6}{g_X^2} + \frac{3}{g^2} \quad (2.22)$$

O processo descrito pode ser ilustrado como

$$W_\mu^8, W_\mu^3, X_\mu \xrightarrow{\theta_{331}} Z'_\mu, B_\mu, W_\mu^3 \xrightarrow{\theta_W} Z'_\mu, Z_\mu, A_\mu$$

onde os ângulos  $\theta_{331}$  e  $\theta_W$  se relacionam através de

$$\cos \theta_{331} = \sqrt{3} \tan \theta_W \quad (2.23)$$

o que impõe  $\sin^2 \theta_W < \frac{1}{4}$ .

Considerando que  $v_\chi \gg v_\rho, v_\eta$ , as massas dos bósons de gauge serão

$$\begin{aligned} M_{W^\pm}^2 &= \frac{g^2}{4} v_+^2, \\ M_{V^\pm}^2 &= M_{U^{\pm 2}}^2 = \frac{g^2}{4} v_\chi^2, \\ M_A^2 &= 0, \\ M_Z^2 &= \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} v_+^2, \\ M_{Z'}^2 &= \frac{g^2 v_\chi^2 \cos \theta_W}{3[1 - 4 \sin^2 \theta_W]}. \end{aligned}$$

Por último, os quarks tipo-u tornam-se massivos pelo acoplamento com a partícula de Higgs  $\rho$  e os tipo-d pelo tripleto  $\eta$ . Os quarks exóticos  $j_1, j_2, J$  se acoplam com  $\chi$ . A lagrangiana de Yukawa para os quarks do MP escrita nos auto-estados da simetria  $U'_{L,R}$  e  $D'_{L,R}$ , em analogia à

(1.57), será

$$-\mathcal{L}_Y = \sum_{m=1}^2 \sum_{\alpha=1}^3 \bar{Q}_{mL} [G_{m\alpha} U'_{\alpha R} \tilde{\rho} + \check{G}_{m\alpha} D'_{\alpha R} \tilde{\eta}] + \bar{Q}_{3L} [F_{3\alpha} U'_{\alpha R} \eta + \check{F}_{3\alpha} D'_{\alpha R} \rho] + h.c.$$

com  $Q_i$  representando os anti-tripletos de mão-esquerda e  $Q_3$  o tripleto da terceira geração. Além disso,  $D'_{(1,2,3)R} = d_{1R}, d_{2R}, d_{3R}$  e  $U'_{(1,2,3)R} = u_{1R}, u_{2R}, u_{3R}$ .

Os auto-estados da massa são obtidos através das matrizes de rotação como  $U'_{L,R} = (V_{L,R}^U)^\dagger U_{L,R}$  e  $D'_{L,R} = (V_{L,R}^D)^\dagger D_{L,R}$  tal que  $V_L^U \mathcal{M}^U V_R^{U\dagger} = M^U$  e  $V_L^D \mathcal{M}^D V_R^{D\dagger} = M^D$ , onde  $\mathcal{M}$  é a matriz de massa na base dos auto-estados da simetria.

Uma das novidades do modelo é a qualidade de abrigar correntes neutras com mudança de sabor. Os acoplamentos entre  $Z'$  e a terceira geração de quarks diferem dos acoplamentos com as demais gerações.

Até aqui o conteúdo de partículas foi completamente apresentado restando, contudo, obter uma Lagrangiana de interação escrita na base dos auto-estados da massa que permita identificar as regras de Feynman a serem utilizadas no próximo capítulo. Os termos conhecidos do MP são:

- Interação mediada por  $W^\pm$

$$\begin{aligned} i\mathcal{L}^W = & i \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{l=e,\mu,\tau} (\bar{\nu}_{lL} \gamma_\mu l_L W^{+\mu} + \bar{l}_L \gamma_\mu \nu_{lL} W^{-\mu}) + \\ & + i \frac{g}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix} \gamma_\mu V \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} W^{+\mu} + h.c. \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

- Corrente eletromagnética

$$i\mathcal{L}^\gamma = i \sum_f Q e \bar{f} \gamma_\mu f A^\mu \quad (2.25)$$

em  $f$  representa os férmions do modelo com carga  $Q$  vezes a constante  $e = g \sin \theta_W$ .

- Corrente neutra mediada por Z

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{L}^Z &= \frac{ig}{2c_W} Z^\mu \left\{ \sum_{l=e,\mu,\tau} [\bar{\nu}_{lL} \gamma_\mu \nu_{lL} - (1 - 2s_W^2) \bar{l}_L \gamma_\mu l_L + 2s_W^2 \bar{l}_R \gamma_\mu l_R - 2s_W^2 \bar{l}^c \gamma_\mu l_L^c] \right. \\
 &+ \sum_{q_u=u,c,t} \left[ \left(1 - \frac{4}{3}s_W^2\right) \bar{q}_{uL} \gamma_\mu q_{uL} - \frac{4}{3}s_W^2 \bar{q}_{uR} \gamma_\mu q_{uR} \right] \\
 &+ \sum_{q_d=d,s,b} \left[ \left(-1 + \frac{2}{3}s_W^2\right) \bar{q}_{dL} \gamma_\mu q_{dL} + \frac{2}{3}s_W^2 \bar{q}_{dR} \gamma_\mu q_{dR} \right] \\
 &\left. + \frac{8}{3}s_W^2 [\bar{j}_1 \gamma_\mu j_1 + \bar{j}_2 \gamma_\mu j_2] - \frac{10}{3}s_W^2 \bar{J} \gamma_\mu J \right\} \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

E as novas interações:

- Corrente mediada por  $V^\pm$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{L}^V &= \frac{ig}{\sqrt{2}} \sum_{l=e,\mu,\tau} [\bar{\nu}_{lL} \gamma_\mu l_L^c V^{-\mu} + \bar{l}_L^c \gamma_\mu \nu_{lL} V^{+\mu}] \\
 &+ \frac{ig}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 [(\bar{q}_{dL})_i \gamma_\mu (Q_{JL})_j (V_L^D)_{ij}^* V^{+\mu} + (\bar{Q}_{JL})_j \gamma_\mu (q_{dL})_i (V_L^D)_{ij} V^{-\mu}] \right. \\
 &\left. + \sum_{i=1}^3 [(\bar{J}_L) \gamma_\mu (q_{uL})_i (V_L^U)_{3i} V^{+\mu} + (\bar{q}_{uL})_i \gamma_\mu (J_L) (V_L^U)_{3i}^* V^{-\mu}] \right\} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

com  $q_u = u, c, t$ ,  $q_d = d, s, b$  e  $Q_J = j_1, j_2$ .

- Corrente mediada por  $U^{\pm\pm}$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{L}^U &= -\frac{ig}{\sqrt{2}} \sum_{l=e,\mu,\tau} [\bar{l}_L^c \gamma_\mu l_L U^{++\mu} + \bar{l}_L \gamma_\mu l_L^c U^{--\mu}] \\
 &+ \frac{ig}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 [(\bar{q}_{uL})_i \gamma_\mu (Q_{JL})_j (V_L^U)_{ij}^* U^{++\mu} + (\bar{Q}_{JL})_j \gamma_\mu (q_{uL})_i (V_L^U)_{ij} U^{--\mu}] \right. \\
 &\left. - \sum_{i=1}^3 [(\bar{J}_L) \gamma_\mu (q_{dL})_i (V_L^D)_{3i} U^{++\mu} + (\bar{q}_{dL})_i \gamma_\mu (J_L) (V_L^D)_{3i}^* U^{--\mu}] \right\} \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

- Correntes neutras mediadas por  $Z'$

$$i\mathcal{L}^{Z'} = \frac{-ig}{2c_W} Z'^\mu [\bar{U}_L \gamma_\mu K_L^U U_L + \bar{U}_R \gamma_\mu K_R^U U_R + \bar{D}_L \gamma_\mu K_L^D D_L + \bar{D}_R \gamma_\mu K_R^D D_R] \quad (2.29)$$

com

$$K_{L(R)}^U = V_{L(R)}^U Y_{L(R)}^U V_{L(R)}^{U\dagger}, \quad K_{L(R)}^D = V_{L(R)}^D Y_{L(R)}^D V_{L(R)}^{D\dagger}$$

e

$$Y_L^U = Y_L^D = -\frac{1}{2\sqrt{3}h(x)} \begin{pmatrix} -2(1-2x) & 0 & 0 \\ 0 & -2(1-2x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$Y_R^U = -\frac{4x}{\sqrt{3}h(x)} \mathbb{I}, \quad Y_R^D = \frac{2x}{\sqrt{3}h(x)} \mathbb{I} \quad (2.31)$$

$$h(x) \equiv \sqrt{1-4x}, \quad x = s_W^2$$

Portanto, de (2.31), não haverá FCNC no setor de mão-direita dos quarks com  $Z'$ .

# 3

## Processos $\Delta F = 2$

O conteúdo essencial para que o cálculo de determinados processos sejam efetuados sob o amparo do modelo padrão e do modelo 331 foi apresentado nos dois capítulos precedentes. Com isso, uma parte importante da metodologia deste trabalho está concluída restando, contudo, uma aplicação que permita identificar aspectos equivalentes entre os dois modelos e guiar o 331 rumo à coerência com a fenomenologia atual. Para tanto iremos comparar os resultados obtidos na mistura de mésons neutros no contexto destas duas teorias, impondo que a contribuição do 331 para a variação da massa seja menor do que a contribuição do MP. Esta imposição fornecerá um limite para funções envolvendo massas de escalares e quarks exóticos.

A seguir, apresentaremos de forma breve uma justificativa para a expressão de  $\Delta m_{\mathbb{N}}$ , segundo [3], que será largamente utilizada no decorrer deste capítulo.

Em geral, graças à violação de sabor (S, B, C) por parte das interações fracas, é conveniente reescrever os estados de mésons neutros como auto-estados de  $\mathcal{CP}$ :

$$\mathcal{CP}|\mathbb{N}^0\rangle = -|\bar{\mathbb{N}}^0\rangle, \quad \mathcal{CP}|\bar{\mathbb{N}}^0\rangle = -|\mathbb{N}^0\rangle \quad (3.1)$$

segue que

$$|\mathbb{N}_1^0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbb{N}^0\rangle - |\bar{\mathbb{N}}^0\rangle) \rightarrow \mathcal{CP}|\mathbb{N}_1^0\rangle = |\mathbb{N}_1^0\rangle \quad (3.2)$$

$$|\mathbb{N}_2^0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbb{N}^0\rangle + |\bar{\mathbb{N}}^0\rangle) \rightarrow \mathcal{CP}|\mathbb{N}_2^0\rangle = -|\mathbb{N}_2^0\rangle \quad (3.3)$$

Assumindo que  $m_1$  e  $m_2$  sejam dados como os valores esperados de um Hamiltoniano efetivo

$$H = H^{\Delta F=0} + H^{\Delta F=2},$$

$$m_1 \equiv \text{Re}[\langle \aleph_1 | H | \aleph_1 \rangle] = \text{Re} \frac{1}{2} [\langle \bar{\aleph}^0 + \aleph^0 | H | \bar{\aleph}^0 + \aleph^0 \rangle]$$

$$m_2 \equiv \text{Re}[\langle \aleph_2 | H | \aleph_2 \rangle] = \text{Re} \frac{1}{2} [\langle \aleph^0 - \bar{\aleph}^0 | H | \aleph^0 - \bar{\aleph}^0 \rangle]$$

A variação da massa dos auto-estados será definida como

$$\Delta m_{\aleph} \equiv m_1 - m_2 = \text{Re}[\langle \aleph^0 | H^{\Delta F=2} | \bar{\aleph}^0 \rangle + \langle \bar{\aleph}^0 | H^{\Delta F=2} | \aleph^0 \rangle] \quad (3.4)$$

Para um sistema físico que preserve  $\mathcal{CP}$ ,

$$\Delta m_{\aleph} = 2\text{Re}\langle \bar{\aleph}^0 | H^{\Delta F=2} | \aleph^0 \rangle \quad (3.5)$$

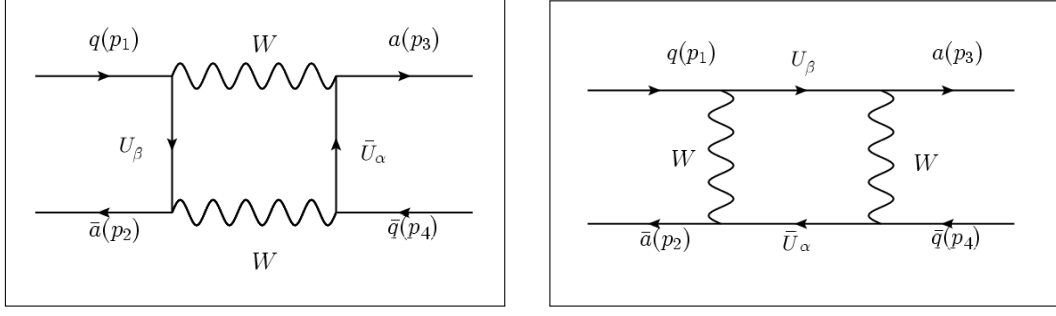
### 3.1. Modelo Padrão

Nesta seção iremos calcular  $\Delta m$  para misturas de mésons neutros  $\aleph^0 - \bar{\aleph}^0$  cuja composição de quarks seja dada por  $(q\bar{a})$ .  $\aleph$  representará os mésons  $K$  (com  $q = d$  e  $a = s$ ),  $B_s$  ( $q = s$ ,  $a = b$ ) ou  $B_d$  ( $q = s$ ,  $a = b$ ).

A mistura de mésons  $D$  será discutida no apêndice e a razão para esta separação se deve a uma aproximação referente aos momentos dos quarks externos envolvidas. Na mistura do  $K^0$  o diagrama de caixa dominante envolve quarks do tipo- $c$  como partículas internas, cuja massa é muito superior às dos quarks  $d$  e  $s$ . Para o caso  $B_q^0$ , os elementos da matriz CKM suprimem os quarks internos leves e preservam o quark- $t$ , cuja massa é 40 vezes superior ao quark- $b$ . Em situações onde as partículas internas dos diagramas dominantes são mais pesadas que as partículas reais é permitido, em excelente aproximação [9], excluir os momentos externos a fim de simplificar os cálculos envolvidos<sup>1</sup>. O mesmo, no entanto, não ocorre com o méson  $D$  - os diagramas de maior contribuição envolvem os quarks internos  $d$  e  $s$ , com massas inferiores ao quark tipo- $c$ . Levar em conta o momento externo dará origem a um novo operador, como será demonstrado em (A.4).

Das orientações de [10] tentaremos encontrar a expressão final para a amplitude referente aos diagramas 1 e 2 da figura 3.1 a partir do caso mais geral, em que os bósons de Goldstone são considerados. Veremos que os resultados não irão depender do gauge  $\xi_W$ .

<sup>1</sup>A referência [9] demonstra que o erro cometido ao eliminar os momentos externos é de 1.27% para  $K^0$  e 0.04% para o  $B^0$ .



**Figura 3.1.:** Diagramas de caixa do modelo padrão para a mistura de mésons neutros.

As expressões para os propagadores são:

$$\mathcal{P}^\phi(k) : \frac{i}{k^2 - \xi_W m_W^2} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(k) : \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_W^2} + \frac{ik_\mu k_\nu}{m_W^2} \left( \frac{1}{k^2 - m_W^2} - \frac{1}{k^2 - \xi_W m_W^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\mathcal{P}^\alpha(k) : i \frac{k + m_\alpha}{k^2 - m_\alpha^2} \quad (3.8)$$

E os vértices:

$$D_\beta W^+ U_\alpha : i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \gamma_L V_{\alpha\beta} \quad (3.9)$$

$$U_\alpha W^- D_\beta : i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \gamma_L V_{\alpha\beta}^* \quad (3.10)$$

$$D_\beta \phi^+ U_\alpha : i \frac{g}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_\alpha}{m_W} \gamma_L - \frac{m_\beta}{m_W} \gamma_R \right) V_{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

$$U_\alpha \phi^- D_\beta : i \frac{g}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_\alpha}{m_W} \gamma_R - \frac{m_\beta}{m_W} \gamma_L \right) V_{\alpha\beta}^* \quad (3.12)$$

com os projetores definidos abaixo

$$\gamma_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad \gamma_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$$

$$\gamma_L \gamma_L = \gamma_L, \quad \gamma_R \gamma_R = \gamma_R, \quad \gamma_L \gamma_R = \gamma_R \gamma_L = 0$$

$$\gamma_L \gamma_\mu = \gamma_\mu \gamma_R, \quad \gamma_R \gamma_\mu = \gamma_\mu \gamma_L$$

Além disso, serão utilizadas as seguintes abreviações

$$\begin{aligned} A_p(k) &\equiv k^2 - m_p^2 \\ A_g(k) &\equiv k^2 - \xi_W m_W^2 \end{aligned}$$

Os operadores são construídos segundo as regras de Feynman

- Para férmions de momento  $P$ 
  - \* no estado inicial :  $u(P)$  à direita;
  - \* no estado final :  $\bar{u}(P)$  à esquerda.
- Para antiférmions de momento  $P$ 
  - \* no estado inicial :  $\bar{v}(P)$  à esquerda;
  - \* no estado final :  $v(P)$  à direita.

Das expressões (3.6)-(3.12) acima é possível notar que os denominadores  $A_p$  dos propagadores dos quarks poderão ser fatorados, assim como o coeficiente  $i\frac{g}{\sqrt{2}}$  de seus respectivos vértices e o produto  $\lambda_\alpha \lambda_\beta$  dos elementos da matriz  $CKM$ . Após estas simplificações, o diagrama 1 será dividido em região final, denotada por  $(\mathcal{F})$ , e inicial,  $(\mathcal{I})$ , e a amplitude total será:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{(1)} &= \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{A_\alpha} \frac{1}{A_\beta} \times \\ &\quad \{(\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{W^+W^-} + (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{W^+\phi^-} + (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{\phi^+W^-} + (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{\phi^+\phi^-}\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

com

$$\lambda_\alpha \equiv V_{a\alpha} V_{q\alpha}^* \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{W^+W^-} &= -\{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu \not{k} \gamma_\lambda \gamma_L v(p_4)\} [\mathcal{P}^{\mu\nu}] [\mathcal{P}^{\lambda\epsilon}] \{\bar{v}(p_2)\gamma_\epsilon \not{k} \gamma_\nu \gamma_L u(p_1)\} \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{W^+\phi^-} &= \left\{ \frac{m_\alpha^2}{m_W} \bar{u}(p_3)\gamma_\mu \gamma_L v(p_4) \right\} [\mathcal{P}^{\mu\nu}] \left[ \frac{i}{A_g} \right] \left\{ \frac{m_\beta^2}{m_W} \bar{v}(p_2)\gamma_\nu \gamma_L u(p_1) \right\} \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{\phi^+W^-} &= \left\{ \frac{m_\alpha^2}{m_W} \bar{u}(p_3)\gamma_\lambda \gamma_L v(p_4) \right\} \left[ \frac{i}{A_g} \right] [\mathcal{P}^{\lambda\epsilon}] \left\{ \frac{m_\beta^2}{m_W} \bar{v}(p_2)\gamma_\epsilon \gamma_L u(p_1) \right\} \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{\phi^+\phi^-} &= \left\{ \frac{m_\alpha^2}{m_W^2} \bar{u}(p_3)\not{k} \gamma_L v(p_4) \right\} \left[ \frac{i}{A_g} \right]^2 \left\{ \frac{m_\beta^2}{m_W^2} \bar{v}(p_2)\not{k} \gamma_L u(p_1) \right\} \end{aligned}$$



Substituindo a expressão (3.7), segue que

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{(1)} = & \left(\frac{g^4}{4}\right) \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{A_\alpha} \frac{1}{A_\beta} \times \\
 & \left\{ \frac{1}{A_W^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\lambda \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\lambda \not{k} \gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] - \right. \\
 & - \left( \frac{1}{A_W} - \frac{1}{A_g} \right) \frac{1}{A_W m_W^2} \left( [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \not{k} \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \not{k} \gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] + \right. \\
 & + \left. [\bar{u}(p_3) \not{k} \gamma^\mu \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\mu \not{k} \gamma_L u(p_1)] \right) + \\
 & + \left( \frac{1}{A_W} - \frac{1}{A_g} \right)^2 \frac{1}{m_W^4} [\bar{u}(p_3) \not{k} \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \not{k} \gamma_L u(p_1)] + \\
 & + \frac{2m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^2 A_g} \left( \left( \frac{1}{A_W} - \frac{1}{A_g} \right) \frac{1}{m_W^2} [\bar{u}(p_3) \not{k} \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \not{k} \gamma_L u(p_1)] - \right. \\
 & - \left. \frac{1}{A_W} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] \right) + \\
 & \left. + \frac{m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^4 A_g^2} [\bar{u}(p_3) \not{k} \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \not{k} \gamma_L u(p_1)] \right\}
 \end{aligned}$$

Considerando a seguinte identidade

$$\not{k} \not{k} = k^2$$

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{(1)} = & \left(\frac{g^4}{4}\right) \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{A_\alpha} \frac{1}{A_\beta} \times \\
 & \left\{ \frac{1}{A_W^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\lambda \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\lambda \not{k} \gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] + \right. \\
 & + \left[ \frac{k^4 - m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^4} \left( \frac{1}{A_g^2} - \frac{2}{A_W A_g} \right) + \frac{k^4}{m_W^4 A_W^2} \right] [\bar{u}(p_3) \not{k} \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \not{k} \gamma_L u(p_1)] + \\
 & + 2 \left( \frac{k^4 - m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^2 A_W A_g} - \frac{k^4}{A_W^2 m_W^2} \right) [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Da unitariedade da matriz CKM,

$$\sum_{\alpha=u,c,t} \lambda_\alpha = 0 \quad (3.15)$$

todo termo independente de pelo menos um índice de quark interno será cancelado na expressão da amplitude. Substituindo a identidade

$$k^4 - m_\alpha^2 m_\beta^2 = -A_\alpha A_\beta + k^2 (A_\alpha + A_\beta) \quad (3.16)$$

a expressão final para  $\mathcal{M}_1$  será

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{(1)} = & \left(\frac{g^4}{4}\right) \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{A_\alpha A_W^2 A_\beta} \times \\
 & \left\{ [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\lambda \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\lambda \not{k} \gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] + \right. \\
 & + \frac{m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^4} [\bar{u}(p_3) \not{k} \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \not{k} \gamma_L u(p_1)] - \\
 & \left. - \frac{2m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^2} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \gamma_L v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] \right\}
 \end{aligned}$$

onde (3.16) foi utilizada com o propósito de eliminar a dependência de  $k^4$  nos coeficientes dos operadores. Nesta altura a identidade abaixo será bastante útil,

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\lambda = g^{\mu\rho} \gamma^\lambda + g^{\mu\lambda} \gamma^\rho - g^{\rho\lambda} \gamma^\mu - i\epsilon^{\mu\rho\lambda\beta} \gamma_5 \gamma_\beta$$

assim como,

$$\epsilon^{\mu\lambda\rho\beta} \epsilon_{\mu\lambda\eta\alpha} = -2(\delta_\eta^\rho \delta_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\rho \delta_\eta^\beta) \quad (3.17)$$

$$\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_L = \gamma_\alpha \gamma_L \quad (3.18)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma_L \otimes \gamma_\lambda \gamma_\eta \gamma_\mu \gamma_L & = 2(\gamma_\eta \gamma_L \otimes \gamma^\rho \gamma_L) + 2\delta_\eta^\rho (\gamma^\mu \gamma_L \otimes \gamma_\mu \gamma_L) + \\
 & + \epsilon^{\mu\lambda\rho\beta} \epsilon_{\mu\lambda\eta\alpha} (\gamma_5 \gamma_\beta \gamma_L \otimes \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma_L) \\
 & \stackrel{(3.17)}{=} 2(\gamma_\eta \gamma_L \otimes \gamma^\rho \gamma_L) + 2\delta_\eta^\rho (\gamma^\mu \gamma_L \otimes \gamma_\mu \gamma_L) - \\
 & - 2[\delta_\eta^\rho (\gamma_5 \gamma^\mu \gamma_L \otimes \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_L) - \gamma_5 \gamma_\eta \gamma_L \otimes \gamma_5 \gamma^\rho \gamma_L] \\
 & \stackrel{(3.18)}{=} 4(\gamma_\eta \gamma_L \otimes \gamma^\rho \gamma_L)
 \end{aligned}$$

Com auxílio da parametrização de Feynman (ver A.2) podemos considerar a mudança

$$\frac{1}{A_\alpha A_W^2 A_\beta} \stackrel{(A.5)}{=} 6 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{y}{[k^2 - M^2]^4} \quad (3.19)$$

com

$$M^2 = m_\alpha^2 + (m_\beta^2 - m_\alpha^2)x + (m_W^2 - m_\beta^2)y$$

Substituindo na expressão para a amplitude

$$i\mathcal{M}_{(1)} = \left(\frac{6g^4}{4}\right) \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \\ y \left\{ \left(4 + \frac{m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^4}\right) I_{\mu\nu}[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu \gamma_L v(p_4)][\bar{v}(p_2)\gamma^\nu \gamma_L u(p_1)] - \right. \\ \left. - \frac{2m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^2} I^0[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu \gamma_L v(p_4)][\bar{v}(p_2)\gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] \right\}$$

de (A.2) e (A.4)

$$i\mathcal{M}_{(1)} = \left(\frac{-ig^4}{64\pi^2}\right) [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu \gamma_L v(p_4)][\bar{v}(p_2)\gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] \times \\ \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int_0^1 dx \int_0^x dy y \left\{ \frac{2}{M^2} + \frac{m_\alpha^2 m_\beta^2}{2m_W^4 M^2} + \frac{2m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^2 M^4} \right\}$$

Após efetuar a integração nos parâmetros de Feynman:

$$i\mathcal{M}_{(1)} = \left(\frac{-ig^4}{m_W^2 64\pi^2}\right) [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu \gamma_L v(p_4)][\bar{v}(p_2)\gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta F_{\alpha\beta}$$

Da relação (3.15)

$$\sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta F_{\alpha\beta} = \lambda_c^2 (F_{cc} - 2F_{uc} + F_{uu}) + 2\lambda_c \lambda_t (F_{ct} - F_{uc} - F_{tu} + F_{uu}) + \\ \lambda_t^2 (F_{tt} - 2F_{ut} + F_{uu})$$

Considerando a aproximação  $m_u = 0$ , a expressão para a amplitude é, finalmente, dada por:

$$i\mathcal{M}_{(1)} = \left(\frac{-iG_F^2 m_W^2}{2\pi^2}\right) [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu \gamma_L v(p_4)][\bar{v}(p_2)\gamma_\mu \gamma_L u(p_1)] \mathcal{F}_0 \quad (3.20)$$

com

$$\mathcal{F}_0 = \lambda_c^2 S_0(x_c) + 2\lambda_c \lambda_t S_0(x_c, x_t) + \lambda_t^2 S_0(x_t) \quad (3.21)$$

e

$$x_\alpha \equiv \frac{m_\alpha^2}{m_W^2}$$

As funções  $S_0$  são conhecidas como funções de Inami-Lim [11]:

$$S_0(x, y) = xy \left[ -\frac{3}{4(1-x)(1-y)} + \frac{\ln x}{(x-y)(1-x)^2} \left(1 - 2x + \frac{x^2}{4}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\ln y}{(y-x)(1-y)^2} \left(1 - 2y + \frac{y^2}{4}\right) \right] \quad (3.22)$$

e

$$S_0(x) = \lim_{y \rightarrow x} S_0(x, y) = \frac{x}{(1-x)^2} \left[ 1 - \frac{11x}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^2 \ln x}{2(1-x)} \right] \quad (3.23)$$

Da amplitude de transição podemos obter o seguinte operador efetivo

$$H_{eft}^{\Delta F=2} = \zeta_{qa}^{MP} (\bar{a} \Gamma_\mu q) (\bar{a} \Gamma^\mu q) \quad (3.24)$$

$$\zeta_{qa}^{MP} = \frac{G_F^2 m_W^2}{4\pi^2} \mathcal{F}_0 \quad (3.25)$$

onde  $\mathcal{F}_0$  é dado em (3.21).

Na seção A.4 do apêndice é demonstrado que a contribuição do diagrama 2 é idêntica à (3.20).

### 3.1.1. Inserção do vácuo

O operador efetivo associado à diferença de massa na mistura será denotado por

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= (\bar{a} \Gamma_\mu q) (\bar{a} \Gamma^\mu q) \\ \Gamma^\mu &\equiv \gamma^\mu \gamma_L \end{aligned} \quad (3.26)$$

Os operadores  $\bar{a}$  e  $q$  correspondem à soma de operadores de criação e destruição

$$\bar{a} = \bar{a}^+ + \bar{a}^-$$

$$q = q^+ + q^-$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{a}^+ &: \text{cria quarks } a \\ \bar{a}^- &: \text{destrói antiquarks } \bar{a} \\ q^+ &: \text{cria antiquarks } \bar{q} \\ q^- &: \text{destrói quarks } q \end{aligned}$$

Como o operador resultante deverá conter um termo de criação e um de destruição para cada sabor, nosso objetivo será calcular

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a} \Gamma_\mu q) (\bar{a} \Gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle &= 2 \{ \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ \Gamma_\mu q^+) (\bar{a}^- \Gamma^\mu q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle + \\ &+ \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ \Gamma_\mu q^-) (\bar{a}^- \Gamma^\mu q^+) | \mathbb{N}^0 \rangle \} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para realizar a aproximação de inserção do vácuo, o último termo de (3.27) será rearranjado

via transformação de Fierz (ver A.3). Para as matrizes de Gell-Mann consideramos

$$\delta_{xy}\delta_{kl} = \frac{1}{3}\delta_{xl}\delta_{ky} + \frac{1}{2}\sum_a \lambda_{xl}^a \lambda_{ky}^a \quad (3.28)$$

Explicitando os índices de cor e índices de Dirac,

$$(\bar{a}^+\Gamma_\mu q^-)(\bar{a}^-\Gamma^\mu q^+) = (\bar{a}_{x\alpha}^+ q_{y\beta}^- \bar{a}_{k\lambda}^- q_{l\theta}^+)(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\Gamma^\mu)_{\lambda\theta} (\delta_{xy}\delta_{kl})$$

De (A.16)

$$(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\Gamma^\mu)_{\lambda\theta} = -(\Gamma_\mu)_{\alpha\theta}(\Gamma^\mu)_{\lambda\beta} \quad (3.29)$$

e das relações de anti-comutação fermiônicas

$$(\bar{a}_{x\alpha}^+ q_{y\beta}^- \bar{a}_{k\lambda}^- q_{l\theta}^+) = -(\bar{a}_{x\alpha}^+ q_{l\theta}^+ \bar{a}_{k\lambda}^- q_{y\beta}^-)$$

$$\therefore (\bar{a}^+\Gamma_\mu q^-)(\bar{a}^-\Gamma^\mu q^+) = \frac{1}{3}(\bar{a}^+\Gamma_\mu q^+)(\bar{a}^-\Gamma^\mu q^-) \quad (3.30)$$

Na expressão acima o segundo termo de (3.28) foi negligenciado. Substituindo em (3.27)

$$\langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}\Gamma_\mu q)(\bar{a}\Gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle = \frac{8}{3} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+\Gamma_\mu q^+)(\bar{a}^-\Gamma^\mu q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle \quad (3.31)$$

Podemos aplicar entre os operadores de (3.31) um conjunto completo de estados a fim de trabalharmos com produtos de bilineares. A *aproximação de inserção do vácuo*, todavia, irá assumir que uma boa estimativa do elemento de matriz pode ser dada considerando apenas o vácuo como estado intermediário [10]:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+\Gamma_\mu q^+)(\bar{a}^-\Gamma^\mu q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle &= \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+\Gamma_\mu q^+) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a}^-\Gamma^\mu q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle \\ &= \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}\Gamma_\mu q) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a}\Gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

Portanto,

$$\langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}\Gamma_\mu q)(\bar{a}\Gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle = \frac{2}{3} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)q) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)q) | \mathbb{N}^0 \rangle \quad (3.33)$$

Sabendo que,

$$\langle 0 | \bar{a}\gamma^\mu q | \mathbb{N}^0 \rangle = \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | \bar{a}\gamma_\mu q | 0 \rangle = 0$$

segue

$$\langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}\Gamma_\mu q)(\bar{a}\Gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle = \frac{2}{3} \left( f_{\mathbb{N}^0}^2 \frac{p_\mu p^\mu}{2m_{\mathbb{N}^0}} \right) \quad (3.34)$$

já que o 4-momento é o único candidato vetorial possível.  $f_{\mathbb{N}^0}$  é o fator de forma e o termo

$2m_{\mathbb{N}^0}$  é uma constante de normalização. Finalmente,

$$\langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}\Gamma_\mu q)(\bar{a}\Gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle = f_{\mathbb{N}^0}^2 \frac{m_{\mathbb{N}^0}}{3} \quad (3.35)$$

### 3.1.2. $\Delta m$

A hamiltoniana efetiva para a mistura será

$$H_{eft}^{\Delta F=2}|_{MP} = \zeta_{qa}^{MP} (\bar{a}\Gamma_\mu q)(\bar{a}\Gamma^\mu q) \quad (3.36)$$

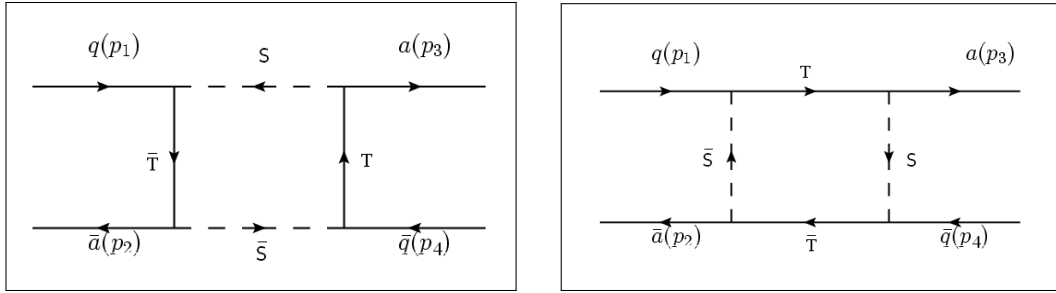
De (3.5) teremos

$$\Delta m_{\mathbb{N}}^{MP} = 2\text{Re}\langle \bar{\mathbb{N}}^0 | H^{\Delta F=2} | \mathbb{N}^0 \rangle \quad (3.37)$$

$$\stackrel{(3.35)}{=} \text{Re} \left\{ \frac{G_F^2 m_W^2 m_{\mathbb{N}^0}}{6\pi^2} \mathcal{F}_0 f_{\mathbb{N}^0}^2 \right\} \quad (3.38)$$

## 3.2. Modelo 331 mínimo

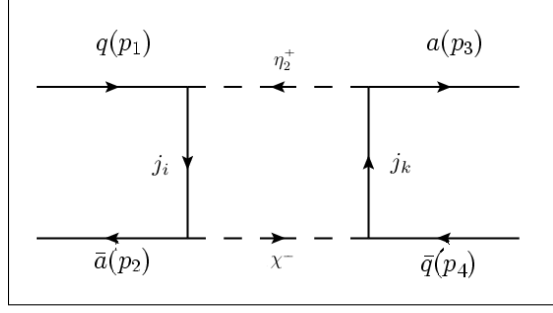
A fim de obter um limite para a massa dos quarks exóticos que surgem no modelo, podemos calcular a contribuição dos diagramas de caixa abaixo



**Figura 3.2.:** Diagramas de caixa para a mistura de mésons neutros envolvendo escalares e quarks exóticos do modelo 331.

Os pares  $(S, T)$  nas figuras acima serão  $(\eta_2^\pm, j_i)$ ,  $(\chi^\pm, j_i)$ ,  $(\rho^{\pm\pm}, J)$ ,  $(\chi^{\pm\pm}, J)$ ,  $i = 1, 2$ . Diagramas com termos cruzados, como o da figura 3.3, são igualmente possíveis.

Os vértices necessários para a construção da amplitude podem ser extraídos da seguinte lagrangiana



**Figura 3.3.:** Diagrama de caixa com mais de dois tipos de partículas internas.

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{L}_s = & \begin{pmatrix} \bar{j}_{1L} & \bar{j}_{2L} & \bar{J}_L \end{pmatrix} \mathcal{J}_1^D V_R^D \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} V_L^D \mathcal{J}_2^D \begin{pmatrix} j_{1R} \\ j_{2R} \\ J_R \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde a matriz  $\mathcal{J}^D$  contém os escalares carregados e as constantes de acoplamento

$$\mathcal{J}_1^D = \begin{pmatrix} \check{G}_{11}\eta_2^- & \check{G}_{12}\eta_2^- & \check{G}_{13}\eta_2^- \\ \check{G}_{21}\eta_2^- & \check{G}_{22}\eta_2^- & \check{G}_{23}\eta_2^- \\ \check{F}_{31}\rho^{++} & \check{F}_{32}\rho^{++} & \check{F}_{33}\rho^{++} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathcal{J}_2^D = \begin{pmatrix} G_{11}\chi^+ & G_{12}\chi^+ & 0 \\ G_{21}\chi^+ & G_{22}\chi^+ & 0 \\ 0 & 0 & g_J\chi^{--} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Com o objetivo de simplificar algumas expressões iremos considerar somente os diagramas 3.2, embora não exista nenhuma razão adicional que permita negligenciar contribuições como da figura 3.3. De acordo com as prescrições da seção anterior,

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} = & -\Lambda_{ST} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{A_T^2 A_S^2} [\bar{u}(p_3) \frac{(1+\gamma^5)}{2} (\not{k} + m_T) \frac{(1+\gamma^5)}{2} v(p_4)] \\
 & \times [\bar{v}(p_2) \frac{(1+\gamma^5)}{2} (\not{k} + m_T) \frac{(1+\gamma^5)}{2} u(p_1)]
 \end{aligned} \quad (3.42)$$

em que  $\Lambda_{ST}$  representa os elementos de matriz de mistura presentes no vértice entre o quark tipo-d, o escalar  $S$  e o quark exótico  $T$  e cuja determinação não será tratada neste trabalho. Reescrevendo a amplitude como operador efetivo e recorrendo às propriedades das matrizes

gamma, tem-se

$$i\mathcal{M} = \frac{-\Lambda_{ST}m_T^2}{4} \cdot \mathcal{F}_0^{ST} [\bar{a}(1 + \gamma^5)q][\bar{a}(1 + \gamma^5)q] \quad (3.43)$$

com

$$\mathcal{F}_0^{ST} \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{A_T^2 A_S^2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_T^2)^2 (k^2 - m_S^2)^2} \quad (3.44)$$

cuja solução está detalhada na seção (A.2) do apêndice e dada por

$$\mathcal{F}_0^{ST} = \frac{1}{m_S^4} \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{(x_T - 1)^3} [2(1 - x_T) + (x_T + 1)\ln x_T] \quad (3.45)$$

$$x_T \equiv \frac{m_T^2}{m_S^2}$$

A expressão (3.45) naturalmente é simétrica por  $S \leftrightarrow T$ .

Finalmente, temos

$$i\mathcal{M} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{\Lambda_{ST}}{4m_S^2} \cdot S_0^{ST}(x_T) [\bar{a}(1 + \gamma^5)q][\bar{a}(1 + \gamma^5)q] \quad (3.46)$$

$$S_0^{ST}(x_T) \equiv \frac{x_T}{(x_T - 1)^3} [2(1 - x_T) + (x_T + 1)\ln x_T] \quad (3.47)$$

### 3.2.1. Inserção do vácuo

O operador que aparece em (3.43) contém um termo  $(1 + \gamma^5)$  e convém discutirmos a aproximação de inserção do vácuo para o caso envolvendo novos elementos da matriz de transformação de Fierz, nos submetendo à seguinte definição

$$(1 + \gamma^5)q \equiv Q \quad (3.48)$$

Novamente reescrevemos os campos como a soma de operadores de criação e destruição

$$\bar{a} = \bar{a}^+ + \bar{a}^-$$

$$Q = Q^+ + Q^-$$

Arranjando os termos de criação à esquerda e de destruição à direita,

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}Q)(\bar{a}Q) | N^0 \rangle &= 2 \{ \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}^+ Q^+) (\bar{a}^- Q^-) | N^0 \rangle + \\ &+ \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}^+ Q^-) (\bar{a}^- Q^+) | N^0 \rangle \} \end{aligned} \quad (3.49)$$



e da primeira linha de (A.16), segue que

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}Q)(\bar{a}Q) | \mathbb{N}^0 \rangle &= \frac{11}{6} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ Q^+)(\bar{a}^- Q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle + \\
 &\quad - \frac{1}{6} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ \gamma^\mu Q^+)(\bar{a}^- \gamma_\mu Q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle + \\
 &\quad - \frac{1}{12} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ \sigma^{\mu\nu} Q^+)(\bar{a}^- \sigma_{\mu\nu} Q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{6} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ \gamma^\mu \gamma_5 Q^+)(\bar{a}^- \gamma_\mu \gamma_5 Q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle + \\
 &\quad - \frac{1}{6} \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ \gamma_5 Q^+)(\bar{a}^- \gamma_5 Q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

A aproximação de saturação do vácuo consiste em considerar

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ \mathbb{D}^\varsigma q^+)(\bar{a}^- \mathbb{D}_\varsigma q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle &= \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a}^+ \mathbb{D}^\varsigma q^+) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a}^- \mathbb{D}_\varsigma q^-) | \mathbb{N}^0 \rangle \\
 &= \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a} \mathbb{D}^\varsigma q) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a} \mathbb{D}_\varsigma q) | \mathbb{N}^0 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

com  $\mathbb{D}^\varsigma = \mathbb{I}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, \gamma_5$ .

Os candidatos tensoriais  $g^{\mu\nu}, p^\mu$  e  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$  não são capazes de fornecer um tensor antissimétrico de dois índices. Portanto,

$$\langle 0 | (\bar{a} \sigma^{\mu\nu} q) | \mathbb{N}^0 \rangle = \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a} \sigma_{\mu\nu} q) | 0 \rangle = 0 \tag{3.52}$$

Os operadores  $(\bar{a} \gamma^\mu q)$  sob a operação de paridade se transformam para  $(\bar{a} \gamma_\mu q)$  assim como os 4-momentos de  $p^\mu$  para  $p_\mu$ , o que nos permite afirmar que

$$\langle 0 | (\bar{a} \gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle \propto p^\mu \tag{3.53}$$

No entanto, como o vácuo possui paridade par, os mésons  $\mathbb{N}^0$  são pseudoescalares e o operador de paridade é hermitiano, a expressão acima é equivalente à

$$p^\mu = -p^\mu \tag{3.54}$$

o que é absurdo. Logo,

$$\langle 0 | (\bar{a} \gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle = \langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a} \gamma^\mu q) | 0 \rangle = 0 \tag{3.55}$$

Analogamente, para o caso escalar teremos

$$\langle 0 | (\bar{a} q) | \mathbb{N}^0 \rangle = -\langle 0 | (\bar{a} q) | \mathbb{N}^0 \rangle = 0 \tag{3.56}$$

$$\langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a} q) | 0 \rangle = -\langle \bar{\mathbb{N}}^0 | (\bar{a} q) | 0 \rangle = 0 \tag{3.57}$$

Das conclusões acima e utilizando a identidade

$$(\gamma_5)^2 = \mathbb{I}$$

em (3.51), segue que

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}(1 + \gamma_5)q)(\bar{a}(1 + \gamma_5)q) | N^0 \rangle &= \frac{11}{6} \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}\gamma_5 q) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a}\gamma_5 q) | N^0 \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{6} \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}\gamma^\mu \gamma_5 q) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a}\gamma_\mu \gamma_5 q) | N^0 \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{6} \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}\gamma^\mu \gamma_5 q)(\bar{a}\gamma_\mu \gamma_5 q) | N^0 \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{6} \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}\gamma_5 q)(\bar{a}\gamma_5 q) | N^0 \rangle \\
 &= \frac{5}{3} \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}\gamma_5 q) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a}\gamma_5 q) | N^0 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Os elementos de matriz que surgem em (3.58) são calculados em [10] como

$$\langle \bar{N}^0 | (\bar{a}\gamma_5 q) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{a}\gamma_5 q) | N^0 \rangle = f_{N^0}^2 \frac{m_{N^0}^3}{2(m_q + m_a)^2} \tag{3.59}$$

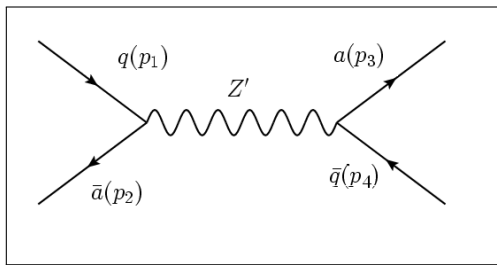
Portanto,

$$\langle \bar{N}^0 | (\bar{a}(1 + \gamma_5)q)(\bar{a}(1 + \gamma_5)q) | N^0 \rangle = \frac{5}{6} f_{N^0}^2 \frac{m_{N^0}^3}{(m_q + m_a)^2} \tag{3.60}$$

### 3.2.2. $\Delta m$

Conforme visto no início do capítulo, a diferença de massa de um sistema de mésons neutros,  $N^0$ , é dado por  $\Delta m_{N^0}^{MP} = 2\text{Re} \zeta_{qa}^{MP} \langle \bar{N}^0 | (\bar{a}\Gamma_\mu q)(\bar{a}\Gamma^\mu q) | N^0 \rangle$ . Da Lagrangiana (2.29) a mesma mistura ocorrerá à nível de árvore com vértices

$$q Z'_\mu a : -\frac{ig}{2c_W} (K_L^D)_{qa} \Gamma_\mu \tag{3.61}$$



**Figura 3.4.:** Diagrama representado a mistura de mésons neutros. O modelo 331 admite que processos FCNC ocorra à nível de árvore

Construindo a amplitude da figura 3.4 e lembrando que os momentos externos são nulos

$$i\mathcal{M} = -[(K_L^D)_{qa}]^2 \frac{g^2}{4c_W^2} [\bar{u}(p_3)\Gamma_\mu v(p_4)] \frac{i}{m_{Z'}^2} [\bar{v}(p_2)\Gamma^\mu u(p_1)] \quad (3.62)$$

com

$$g^2 = 8G_F \frac{M_W^2}{\sqrt{2}}$$

Novamente, das regras de Feynman para um operador efetivo, segue que

$$H_{eft}^{\Delta F=2}|_{Z'} = \zeta_{qa}^{Z'} (\bar{a}\Gamma_\mu q)(\bar{a}\Gamma^\mu q) \quad (3.63)$$

com

$$\zeta_{qa}^{Z'} = \frac{\sqrt{2}G_F m_W^2}{c_W^2 m_{Z'}^2} [(K_L^D)_{qa}]^2 \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \Delta m_{\mathbb{N}}^{Z'} &= 2\text{Re} \left\{ \zeta_{qa}^{Z'} \langle \mathbb{N}^0 | (\bar{a}\Gamma_\mu q)(\bar{a}\Gamma^\mu q) | \mathbb{N}^0 \rangle \right\} \\ &\stackrel{(3.35)}{=} \text{Re} \left\{ \frac{2\sqrt{2}G_F m_W^2 m_{\mathbb{N}^0}}{3c_W^2 m_{Z'}^2} [(K_L^D)_{qa}]^2 f_{\mathbb{N}^0}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Para os diagramas de caixa o operador efetivo será

$$H_{eft}^{\Delta F=2}|_{ST} = \zeta_{ST} [\bar{a}(1 + \gamma_5)q][\bar{a}(1 + \gamma_5)q] \quad (3.66)$$

com

$$\zeta_{ST} = -\frac{\Lambda_{ST}}{64\pi^2} \frac{S_0^{ST}(x_T)}{2m_S^2} \quad (3.67)$$

Enfim,

$$\Delta m_{\mathbb{N}}^{ST} \stackrel{(3.58)}{=} \text{Re} \left\{ -\frac{5}{6} \frac{\Lambda_{ST}}{64\pi^2} \frac{m_{\mathbb{N}^0}^3 f_{\mathbb{N}^0}^2}{m_S^2 (m_q + m_a)^2} S_0^{ST}(x_T) \right\} \quad (3.68)$$

Impondo que as contribuições do 331 para a variação da massa dos mésons neutros seja menor que a do MP

$$\left| \sum_{S,T} \Delta m_{\mathbb{N}}^{ST} \right| < \Delta m_{\mathbb{N}}^{MP} \quad (3.69)$$

teremos

$$\left| \sum_{S,T} \Delta m_{\mathbb{N}}^{ST} \right| < \text{Re} \left\{ \frac{G_F^2 m_W^2 m_{\mathbb{N}^0}}{6\pi^2} \mathcal{F}_0 f_{\mathbb{N}^0}^2 \right\} \quad (3.70)$$

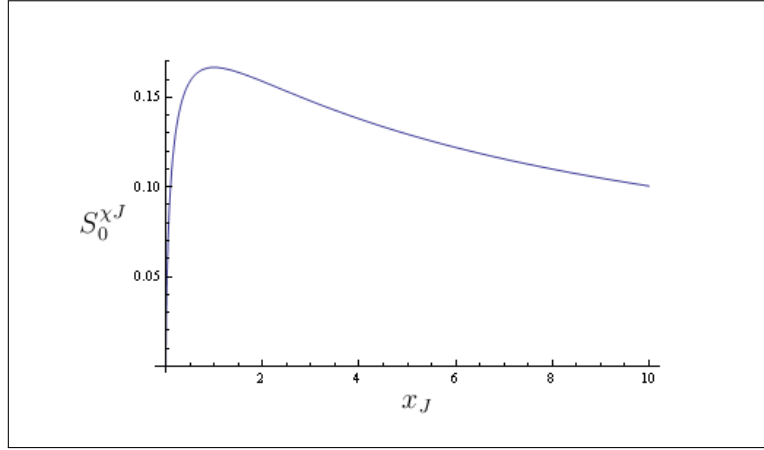
Vamos aplicar a expressão acima para o caso mais simples em que somente um diagrama de caixa do 331, com partículas internas  $\chi^{++}$  e  $J$ , seja considerado na mistura do méson  $K^0$ . Abaixo segue uma tabela para os valores das constantes em (3.68) e (3.69) com suas respectivas referências:

$\Delta m_K^{MP}$	$3.484 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$	[12]
$f_{K^0}$	$0.155 \text{ GeV}$	[12]
$m_{K^0}$	$0.498 \text{ GeV}$	[12]
$m_d$	$4.8 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}$	[12]
$m_s$	$0.095 \text{ GeV}$	[12]
$\Lambda_{\chi J}$	$8.98 \cdot 10^{-4} \cdot g_J^4$	[8]

**Tabela 3.1.:** Constantes necessárias para a aplicação de (3.69) na mistura  $K^0 - \bar{K}^0$ .

A função  $S_0^{ST}$  é apresentada na figura 3.5. Supondo que as massas do escalar  $\chi^{++}$  e do quark exótico  $J$  sejam tais que  $S_0^{xJ}$  ocorra em seu máximo valor, dado por  $x_J \cong 1$ , teremos

$$x_J \cong 1 \rightarrow S_0^{xJ}(1) = 0.17 \quad (3.71)$$



**Figura 3.5.:** Função  $S_0^{ST}$ .

Substituindo (3.71) e os valores da tabela 3.1 em (3.69) podemos assumir

$$g_J \cong 0.122 \quad (3.72)$$

Finalmente,

$$m_J = v_\chi g_J \rightarrow m_J > 62.47 \text{ GeV} \quad (3.73)$$

em que foi utilizado o resultado  $v_\chi > 510 \text{ GeV}$  [8].

# 4

## Conclusões

O modelo 331 redistribui os férmions do Modelo Padrão em tripletos e anti-tripletos de  $SU(3)_L$ , o grupo de simetria do setor de mão-esquerda. Surgem, portanto, quarks exóticos ( $j_1, j_2, J$ ) e novos campos de Higgs ( $\eta, \rho, \chi$ ), assim como novos bósons de gauge neutros e carregados. A presença do  $Z'$  neutro e a natureza de  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  fará com que processos FCNC ocorram à nível de árvore com contribuições sempre menores que as do MP. Diagramas de caixa adicionais para a mistura de mésons neutros determinam limites para as massas das partículas do modelo. De  $K^0 - \bar{K}^0$ , por exemplo, é possível obter  $m_J > 62.47$  GeV segundo a consideração  $m_J \cong m_\chi$ .

# A

## Apêndice

Para a composição das seções abaixo, as principais referências utilizadas foram [13], [14] e [10].

### A.1. Notações

Embora a maior parte da notação adotada esteja justificada ou implícita no contexto em que se faz necessária, esta seção reafirma alguns dos símbolos presentes no trabalho.

- Letras em negrito representam 3-vetores. Por exemplo,

$$\mathbf{x}^\mu = (x^0, \mathbf{x})$$

- Letras gregas maiúsculas representam n-pletos de isospin. Para um isospinor de  $SU(n)$  na representação fundamental podemos ter

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

- Matrizes  $n \times n$  são denotadas por letras maiúsculas  $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots$
- Soma implícita é feita sobre índices repetidos (gregos ou não) sempre que não haja menção ao contrário.

- Os projetores são definidos como

$$\gamma_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad \gamma_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$$

ou seja,

$$\psi_L \equiv \gamma_L \psi, \quad \psi_R \equiv \gamma_R \psi$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L &= \psi_L^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \gamma_R \\ \bar{\psi}_R &= \psi_R^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \gamma_L \end{aligned}$$

## A.2. Parametrização de Feynman

O termo abaixo

$$\frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 + 2k^\alpha P_\alpha - M^2 + i\epsilon]^n}$$

pode ser dado a partir de

$$\frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 + 2k^\alpha P_\alpha - M^2 + i\epsilon]^n} = \frac{1}{4(n-2)(n-1)} \partial_{P_\nu} \partial_{P_\mu} \left[ \frac{1}{[k^2 + 2k^\alpha P_\alpha - M^2 + i\epsilon]^{(n-2)}} \right]$$

Nosso principal interesse será calcular integrais do tipo

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 + 2k^\alpha P_\alpha - M^2 + i\epsilon]^n}$$

cujo volume de integração seja todo espaço. Essa condição permite a seguinte transformação

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2k^\alpha P_\alpha - M^2 + i\epsilon]^{(n-2)}} \Rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - (P^2 + M^2) + i\epsilon]^{(n-2)}}$$

com pólos em

$$k^0 = \pm[\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + P^2 + M^2} - i\epsilon_0]$$

A analiticidade do integrando no primeiro e terceiro quadrante do plano complexo justifica a chamada *rotação de Wick*

$$k^0 \rightarrow ik_E^0$$

$$\therefore \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - (P^2 + M^2) + i\epsilon]^{(n-2)}} \rightarrow i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + \Delta]^{(n-2)}} \quad (\text{A.1})$$

com

$$\begin{aligned} k_E^2 &= k_{0E}^2 + k_{1E}^2 + k_{2E}^2 + k_{3E}^2 \\ \Delta &= P^2 + M^2 \end{aligned}$$

A prescrição  $i\epsilon$  no lado direito de (A.1) não se faz necessária, já que o integrando é positivo.

Enfim,

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu} &= \frac{i}{4(n-2)(n-1)} \partial_{P_\nu} \partial_{P_\mu} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + \Delta]^{(n-2)}} \\ &= \frac{i}{2(n-1)(2\pi)^4} \int d\Omega_3 \int_0^\infty dk_E \left\{ 2(n-1) \frac{P^\mu P^\nu}{[k_E^2 + \Delta]^n} - \frac{g^{\mu\nu}}{[k_E^2 + \Delta]^{n-1}} \right\} k_E^3 \\ \\ \int_0^\infty dk_E \frac{k_E^3}{[k_E^2 + \Delta]^m} &= \frac{1}{2} \int_\Delta^\infty du \frac{u - \Delta}{u^m} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{u^{2-m}}{2-m} - \Delta \frac{u^{1-m}}{1-m} \right] \Big|_\Delta^\infty \\ &= \frac{\Delta^{2-m}}{2} \frac{1}{(1-m)(2-m)}, \quad m > 2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$I^{\mu\nu} = \frac{i\Omega_3}{2(n-1)(n-2)(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta^{n-2}} \left\{ P^\mu P^\nu - \frac{\Delta}{2} \frac{g^{\mu\nu}}{n-3} \right\} \quad (\text{A.2})$$

O termo referente ao ângulo sólido pode ser encontrado à partir da integral Gaussiana

$$I^n = \int_{-\infty}^\infty dx_1 \cdots dx_n e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = \pi^{n/2}$$

ou

$$\begin{aligned} I^n &= \int d\Omega_{n-1} \int_0^\infty dr r^{n-1} e^{-r^2} = \frac{1}{2} \Omega_{n-1} \int_0^\infty du u^{\frac{n-2}{2}} e^{-u} \\ &= \frac{1}{2} \Omega_{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (\text{A.3})$$

Seguindo os mesmos passos anteriores é possível demonstrar que

$$I^0 \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2k^\alpha P_\alpha - M^2 + i\epsilon]^n} = \frac{i\Omega_3}{2(n-1)(n-2)(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta^{n-2}} \quad (\text{A.4})$$



A parametrização de Feynman consiste em utilizar a identidade abaixo

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{[\sum_{i=1}^n a_i x_i]^n}$$

a fim de reescrever expressões usuais que surgem nos cálculos de diagramas envolvendo loops, como na mistura de mésons neutros. A integração sobre a função  $\delta$  implica em

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \\ &\quad \times \frac{1}{[x_1 a_1 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1} + (1-x_1-\cdots-x_{n-1}) a_n]^n} \end{aligned}$$

Considere o caso  $n = 3$ . A expressão acima fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 a_3} &= 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \\ &\quad \times \frac{1}{[x_1 a_1 + x_2 a_2 + (1-x_1-x_2) a_3]^3} \end{aligned}$$

Derivando com relação à  $a_2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2^2 a_3} &= 6 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \\ &\quad \times \frac{x_2}{[x_1 a_1 + x_2 a_2 + (1-x_1-x_2) a_3]^4} \end{aligned} \tag{A.5}$$

### A.3. Transformações de Fierz

As transformações de Fierz permitem expressar qualquer produto de bilineares do tipo  $(\bar{q}_1 \Gamma_I q_2)(\bar{q}_3 \Gamma_J q_4)$  como combinações de produtos em diferentes sequências de spinores. O objetivo desta seção é determinar uma matriz de transformação que permita relacionar produtos do tipo  $(\bar{q}_1 \Gamma^i q_2)(\bar{q}_3 \Gamma^j q_4)$  em diferentes combinações de spinores  $q_k$ .

As matrizes de Dirac serão denotadas por:

$$\begin{aligned} \Gamma_S^1 &\equiv \mathbb{I} \\ \Gamma_V^1, \dots, \Gamma_V^4 &\equiv \gamma^\mu \\ \Gamma_T^1, \dots, \Gamma_T^6 &\equiv \sigma^{\mu\nu}, \quad (\mu < \nu) \\ \Gamma_A^1, \dots, \Gamma_A^4 &\equiv i\gamma^\mu \gamma_5 \\ \Gamma_P^1 &\equiv \gamma_5 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\end{aligned}$$

e a definição para a métrica

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I} \quad (\text{A.6})$$

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -\vec{1})$$

Os índices de Lorentz serão denotados por letras minúsculas enquanto índices de Dirac (S,V,T,A,P) serão denotados por letras maiúsculas, além de seguirem a convenção abaixo:

- Índices de Lorentz repetidos  $\rightarrow$  notação de Einstein (soma implícita);
- Índices de Dirac  $\rightarrow$  soma explícita.

As seguintes relações serão úteis:

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -2\gamma^\alpha \quad (\text{A.7})$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu &= \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu + \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\mu - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\mu \\ &= \{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\}\gamma_\mu - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\mu \\ &\stackrel{(\text{A.6})}{=} 2g^{\mu\alpha}\gamma_\mu - 4\gamma^\alpha \\ &= -2\gamma^\alpha\end{aligned}$$

■

$$\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta}\gamma_\mu = 0 \quad (\text{A.8})$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\frac{2}{i}\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta}\gamma_\mu &= \gamma^\mu[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\gamma_\mu + \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma_\mu - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma_\mu - \\ &\quad -\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu + \gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu \\ &= \{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\}\gamma^\beta\gamma_\mu - \{\gamma^\mu, \gamma^\beta\}\gamma^\alpha\gamma_\mu - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma_\mu + \gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu \\ &\stackrel{(\text{A.6}),(\text{A.7})}{=} 0\end{aligned}$$

■

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 12\mathbb{I} \quad (\text{A.9})$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\alpha - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha) \\ &= -\frac{1}{4}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(2\gamma^\mu\gamma^\nu\{\gamma^\alpha,\gamma^\beta\} - 2\gamma^\mu\{\gamma^\beta,\gamma^\nu\}\gamma^\alpha + \\ &\quad + 2\gamma^\mu\sigma^{\beta\nu}\gamma^\alpha + \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\sigma^{\beta\alpha}) \\ &= -\frac{1}{4}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(4g^{\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu - 4\gamma^\mu g^{\beta\nu}\gamma^\alpha + 2\gamma^\mu\sigma^{\beta\nu}\gamma^\alpha + 2g^{\mu\nu}\sigma^{\beta\alpha}) \\ &= -\frac{1}{4}(4\gamma_\nu\gamma^\nu - 16\gamma_\alpha\gamma^\alpha) \\ &= 12\mathbb{I} \end{aligned}$$

■

De A.7, A.8 e A.9,

$$Tr(\Gamma_I^r\Gamma_{Jq}) = 4\delta_{Iq}\delta^r_q \quad (\text{A.10})$$

Com isso é possível escrever:

$$\Gamma_I^q\Gamma_J^s\Gamma_{Iq} = f_{IJ}\Gamma_J^s$$

logo,

$$\begin{aligned} (\Gamma_{J_s}\Gamma_J^s)f_{IJ} &= (\Gamma_{J_s}\Gamma_I^q\Gamma_J^s\Gamma_{Iq}) \\ Tr(\Gamma_{J_s}\Gamma_J^s)f_{IJ} &= Tr(\Gamma_{J_s}\Gamma_I^q\Gamma_J^s\Gamma_{Iq}) \end{aligned}$$

de A.10:

$$Tr(\Gamma_{J_s}\Gamma_J^s) = 4N_J$$

onde  $N_J$  é o número de elementos do índice  $J$  de Dirac (por exemplo, se  $J = T$ ,  $N_J = 6$ ):

$$\therefore f_{IJ} = \frac{1}{4N_J}Tr(\Gamma_{J_s}\Gamma_I^q\Gamma_J^s\Gamma_{Iq}) \quad (\text{A.11})$$

Para que a expressão matricial envolvendo os quadrilineares se torne evidente, será adotada a seguinte definição:

$$\begin{aligned} \text{bilineares} &: e_I^r(12) = \bar{q}_1\Gamma_I^r q_2 \\ \text{quadrilineares} &: e_I(1234) = n_I^2 e_I^r(12)e_{I_r}(34) \end{aligned}$$

com

$$n_I = \begin{cases} 1 & \text{I = S, V, P} \\ -i & \text{I = A} \\ \sqrt{2} & \text{I = T} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 e_S(1234) &= (\bar{q}_1 q_2)(\bar{q}_3 q_4) \\
 e_V(1234) &= (\bar{q}_1 \gamma^\mu q_2)(\bar{q}_3 \gamma_\mu q_4) \\
 e_T(1234) &= (\bar{q}_1 \sigma^{\mu\nu} q_2)(\bar{q}_3 \sigma_{\mu\nu} q_4) \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4 \\
 e_A(1234) &= (\bar{q}_1 \gamma^\mu \gamma_5 q_2)(\bar{q}_3 \gamma_\mu \gamma_5 q_4) \\
 e_P(1234) &= (\bar{q}_1 \gamma_5 q_2)(\bar{q}_3 \gamma_5 q_4)
 \end{aligned}$$

As transformações de Fierz, portanto, fornecem a relação entre  $e_I(1234)$  e  $e_J(1432)$  como

$$e_I(1234) = \sum_J F_{IJ} e_J(1432)$$

e o objetivo passa a ser determinar a matriz  $F_{IJ}$ . Para isso serão utilizadas as seguintes relações fundamentais:

### 1. Relação de fechamento

Qualquer matriz  $M$  pode ser expandida por  $\Gamma_I^r$ :

$$M = \sum_I m_{Ir} \Gamma_I^r$$

Aplicando  $\Gamma_{Js}$  e tomando o traço,

$$\begin{aligned}
 Tr(M \Gamma_{Js}) &\stackrel{(A.10)}{=} \sum_I m_{Ir} 4 \delta_{IJ} \delta^r_s \\
 \Rightarrow m_{Js} &= \frac{1}{4} Tr(M \Gamma_{Js}) \\
 \therefore M &= \frac{1}{4} \sum_I \Gamma_I^r Tr(M \Gamma_{Ir})
 \end{aligned}$$

Em termos de componentes da matriz  $M$  (soma implícita sobre índices repetidos de componentes da matriz):

$$\begin{aligned}
 M_{ad} &= \sum_I (\Gamma_I^r)_{ad} (\Gamma_{Ir})_{cb} M_{bc} \\
 \therefore \frac{1}{4} \sum_I (\Gamma_I^r)_{ad} (\Gamma_{Ir})_{cb} &= \delta_{ab} \delta_{cd} \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

### 2. Propriedade das matrizes $\Gamma$

$$\Gamma_I^q \Gamma_J^r = \alpha \Gamma_K^s \quad (\alpha = cte) \tag{A.13}$$

que pode ser demonstrada por inspeção.

Multiplicando A.12 por  $(\Gamma_I^q)_{a'a}(\Gamma_{Iq})_{c'c}$ :

$$(\Gamma_I^q)_{ab}(\Gamma_{Iq})_{cd} \stackrel{(A.13)}{=} \sum_K C_{IK}(\Gamma_{K^r})_{ad}(\Gamma_{K^r})_{cb} \quad (A.14)$$

Aplicando  $(\Gamma_{J^s})_{da}(\Gamma_{J^s})_{bc}$  na expressão acima:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{J^s})_{da}(\Gamma_I^q)_{ab}(\Gamma_{J^s})_{bc}(\Gamma_{Iq})_{cd} &= \sum_K C_{IK}(\Gamma_{K^r})_{ad}(\Gamma_{J^s})_{da}(\Gamma_{J^s})_{bc}(\Gamma_{K^r})_{cb} \\ \therefore C_{IJ} &\stackrel{(A.10)}{=} \frac{1}{16N_J} \text{Tr}(\Gamma_{J^s}\Gamma_I^q\Gamma_{J^s}\Gamma_{Iq}) \stackrel{(A.11)}{=} \frac{1}{4} f_{IJ} \end{aligned} \quad (A.15)$$

de A.14:

$$\begin{aligned} e_I^q(ab)e_{Iq}(cd) &= \sum_K C_{IK}e_{K^r}(ad)e_{K^r}(cb) \\ \frac{e_I(abcd)}{n_I^2} &= \sum_K C_{IK} \frac{e_K(adcb)}{n_K^2} \\ \therefore F_{IJ} &= \frac{n_I^2}{n_J^2} C_{IJ} \end{aligned}$$

As propriedades A.7, A.8 e A.9 aplicadas em A.15, enfim, fornecem:

$$\mathbb{F} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A.16)$$

#### A.4. $D^0 - \bar{D}^0$

O méson  $D^0$  é composto pelos quarks  $(u\bar{c})$ . Como o diagrama dominante na mistura  $D^0 - \bar{D}^0$  é composto por quarks leves ( $d$  e  $s$ ) se comparados ao quark  $c$ , a aproximação de momento nulo para as partículas externas não pode mais ser considerada. Nesta seção iremos montar a expressão geral para a amplitude referente ao diagrama de caixa do méson  $\bar{D}$ , sem desprezarmos os momentos dos quarks de sua composição. Em uma segunda etapa, a fim de simplificarmos alguns cálculos, vamos expor os elementos da matriz  $CKM$  presentes em cada vértice e eliminar pequenas contribuições. Como resultado, o operador efetivo irá apresentar um termo adicional em relação às Hamiltonianas para os mésons  $K$ ,  $B_s$  e  $B_d$ .

Os momentos internos serão denotados por

$$\begin{aligned} k_{13} &\equiv k + p_3 - p_1 \\ k_4 &\equiv k + p_4 \\ k_3 &\equiv k + p_3 \end{aligned}$$

As expressões para os operadores serão (ver (3.13)),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{W^+W^-} &= \bar{u}(p_3)\gamma^\mu\gamma_L[i(\mathcal{K} + m_\alpha)][\mathcal{P}_{\mu\nu}(k_3)]\gamma^\lambda\gamma_L v(p_4) \\ \mathcal{I}^{W^+W^-} &= \bar{v}(p_2)\gamma^\epsilon\gamma_L[i(\mathcal{K}_{13} + m_\beta)][\mathcal{P}_{\lambda\epsilon}(k_4)]\gamma^\nu\gamma_L u(p_1) \\ \mathcal{F}^{W^+\phi^-} &= \bar{u}(p_3)\gamma^\mu\gamma_L[i(\mathcal{K} + m_\alpha)][\mathcal{P}_{\mu\nu}(k_3)]\left(\frac{m_c}{m_W}\gamma_R - \frac{m_\alpha}{m_W}\gamma_L\right)v(p_4) \\ \mathcal{I}^{W^+\phi^-} &= \bar{v}(p_2)\left(\frac{m_u}{m_W}\gamma_L - \frac{m_\beta}{m_W}\gamma_R\right)[i(\mathcal{K}_{13} + m_\beta)]\left[\frac{i}{A_g(k_4)}\right]\gamma^\nu\gamma_L u(p_1) \\ \mathcal{F}^{\phi^+W^-} &= \bar{u}(p_3)\left(\frac{m_u}{m_W}\gamma_L - \frac{m_\alpha}{m_W}\gamma_R\right)[i(\mathcal{K}_{13} + m_\alpha)]\left[\frac{i}{A_g(k_3)}\right]\gamma^\lambda\gamma_L v(p_4) \\ \mathcal{I}^{\phi^+W^-} &= \bar{v}(p_2)\gamma^\epsilon\gamma_L[i(\mathcal{K}_{13} + m_\beta)][\mathcal{P}_{\lambda\epsilon}(k_4)]\left(\frac{m_c}{m_W}\gamma_R - \frac{m_\beta}{m_W}\gamma_L\right)u(p_1) \\ \mathcal{F}^{\phi^+\phi^-} &= \bar{u}(p_3)\left(\frac{m_u}{m_W}\gamma_L - \frac{m_\alpha}{m_W}\gamma_R\right)[i(\mathcal{K} + m_\alpha)]\left[\frac{i}{A_g(k_3)}\right]\left(\frac{m_c}{m_W}\gamma_R - \frac{m_\alpha}{m_W}\gamma_L\right)v(p_4) \\ \mathcal{I}^{\phi^+\phi^-} &= \bar{v}(p_2)\left(\frac{m_u}{m_W}\gamma_L - \frac{m_\beta}{m_W}\gamma_R\right)[i(\mathcal{K}_{13} + m_\beta)]\left[\frac{i}{A_g(k_4)}\right]\left(\frac{m_c}{m_W}\gamma_R - \frac{m_\beta}{m_W}\gamma_L\right)u(p_1) \end{aligned}$$

É possível ainda obter algumas simplificações,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{W^+W^-} &= -\{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_L v(p_4)\}k^\rho[\mathcal{P}^{\mu\nu}(k_3)][\mathcal{P}^{\lambda\epsilon}(k_4)]k_{13}^\eta\{\bar{v}(p_2)\gamma_\epsilon\gamma_\eta\gamma_\nu\gamma_L u(p_1)\} \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{W^+\phi^-} &= \left\{\frac{m_c}{m_W}\bar{u}(p_3)\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_R v(p_4)k^\rho - \frac{m_\alpha^2}{m_W}\bar{u}(p_3)\gamma_\mu\gamma_L v(p_4)\right\}[\mathcal{P}^{\mu\nu}(k_3)] \\ &\quad \times \left\{\frac{m_u}{m_W}\bar{v}(p_2)\gamma_\eta\gamma_\nu\gamma_L u(p_1)k_{13}^\eta - \frac{m_\beta^2}{m_W}\bar{v}(p_2)\gamma_\nu\gamma_L u(p_1)\right\}\left[\frac{i}{A_g(k_4)}\right] \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{\phi^+W^-} &= \left\{\frac{m_u}{m_W}\bar{u}(p_3)\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_L v(p_4)k^\rho - \frac{m_\alpha^2}{m_W}\bar{u}(p_3)\gamma_\lambda\gamma_L v(p_4)\right\}\left[\frac{i}{A_g(k_3)}\right] \\ &\quad \times \left\{\frac{m_c}{m_W}\bar{v}(p_2)\gamma_\epsilon\gamma_\eta\gamma_R u(p_1)k_{13}^\eta - \frac{m_\beta^2}{m_W}\bar{v}(p_2)\gamma_\epsilon\gamma_L u(p_1)\right\}[\mathcal{P}^{\lambda\epsilon}(k_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{\phi^+ \phi^-} = & \left\{ \left\{ \frac{m_u m_c}{m_W^2} \bar{u}(p_3) \gamma_\rho \gamma_R v(p_4) k^\rho - \frac{m_u m_\alpha^2}{m_W^2} \bar{u}(p_3) \gamma_L v(p_4) \right\} + \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{m_\alpha^2}{m_W^2} \bar{u}(p_3) \gamma_\rho \gamma_L v(p_4) k^\rho - \frac{m_c m_\alpha^2}{m_W^2} \bar{u}(p_3) \gamma_R v(p_4) \right\} \right\} \left[ \frac{i}{A_g(k_3)} \right] \\
& \times \left\{ \left\{ \frac{m_u m_c}{m_W^2} \bar{v}(u) \gamma_\eta \gamma_R u(p_1) k_{13}^\eta - \frac{m_u m_\beta^2}{m_W^2} \bar{v}(u) \gamma_L u(p_1) \right\} + \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{m_\beta^2}{m_W^2} \bar{v}(p_2) \gamma_\eta \gamma_L u(p_1) k_{13}^\eta - \frac{m_c m_\beta^2}{m_W^2} \bar{v}(p_2) \gamma_R u(p_1) \right\} \right\} \left[ \frac{i}{A_g(k_4)} \right]
\end{aligned}$$

A partir deste ponto começaremos a discutir aproximações que permitam simplificar ao máximo as expressões acima sem, no entanto, sacrificarmos a validade do resultado final para a amplitude.

A primeira observação será a seguinte - os operadores representando diagramas com Goldstones envolvem as seguintes razões entre as massas dos quarks

$$\frac{m_c m_u}{m_W^2}, \quad \frac{m_u m_\alpha^2}{m_W^2}, \quad \frac{m_c m_\alpha^2}{m_W^2}, \quad \frac{m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^2}, \quad \frac{m_\alpha^2}{m_W^2}$$

De acordo com os dados apresentados em [12] os limites superiores para os termos acima são

$$\begin{aligned}
\frac{m_c m_u}{m_W^2} &< 6.5 \times 10^{-7} \\
\frac{m_u m_\alpha^2}{m_W^2} &< 5.1 \times 10^{-8} \quad \text{GeV}, \quad \alpha = d, s \\
\frac{m_c m_\alpha^2}{m_W^2} &< 2.0 \times 10^{-5} \quad \text{GeV}, \quad \alpha = d, s \\
\frac{m_\alpha^2 m_\beta^2}{m_W^2} &< 1.5 \times 10^{-8} \quad \text{GeV}^2, \quad \alpha, \beta = d, s \\
\frac{m_\alpha^2}{m_W^2} &< 1.5 \times 10^{-6}, \quad \alpha = d, s
\end{aligned}$$

Iremos assumir, portanto, que a contribuição dos operadores cujos coeficientes sejam os termos acima serão desprezíveis quando comparados ao diagrama envolvendo  $W^\pm$ . Resta ainda avaliar o caso para quarks do tipo  $b$  como partículas internas, já que a razão

$$\frac{m_\alpha^2 m_b^2}{m_W^2} < 0.04, \quad \alpha = d, s, b$$

pode ser relevante. Todos os termos envolvendo  $b$ , no entanto, estarão acompanhados dos

elementos da matriz  $CKM$  correspondente, cujos módulos são dados por

$$\begin{aligned} |V_{ub}| &= 0.00347_{-0.00012}^{+0.00016} \\ |V_{cb}| &= 0.0410_{-0.0007}^{+0.00011} \end{aligned}$$

Com isso faremos a aproximação complementar de desprezar razões envolvendo a massa do quark  $b$ , o que implica em eliminar a contribuição dos Goldstones como partículas internas.

Por último, os 4-momentos dos quarks externos tipo- $u$  serão nulos assim como os 3-momentos dos quarks tipo- $c$ , ou seja,

$$p_2 = p_3 = 0, \quad p_1 = p_4 = (m_c, \mathbf{0})$$

$$k_{13} = k - p_1 \equiv k_1, \quad k_4 = k_1, \quad k_3 = k$$

No gauge de Feynman,  $\xi_W = 1$ , teremos

$$(\mathcal{F} \cdot \mathcal{I})^{W^+W^-} = \{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_L v(p_4)\} k^\rho k_1^\eta \{\bar{v}(p_2)\gamma^\lambda\gamma_\eta\gamma^\mu\gamma_L u(p_1)\} \left[ \frac{1}{A_W(k)} \right] \left[ \frac{1}{A_W(k_1)} \right]$$

Substituindo em (3.13)

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{(1)} &= \left(\frac{g^4}{4}\right) \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k_1^\eta}{A_\alpha(k)A_\beta(k_1)A_W(k)A_W(k_1)} \\ &\quad \{\bar{u}(p_3)\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma_L v(p_4)\} \{\bar{v}(p_2)\gamma_\lambda\gamma_\eta\gamma_\mu\gamma_L u(p_1)\} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A expressão final para a amplitude referente ao diagrama 1 será

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{(1)} &= g^4 \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k_1^\eta}{A_\alpha(k)A_\beta(k_1)A_W(k)A_W(k_1)} \\ &\quad \{\bar{u}(p_3)\gamma_\eta\gamma_L v(p_4)\} \{\bar{v}(p_2)\gamma^\rho\gamma_L u(p_1)\} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Para o diagrama 2, fazendo as mesmas considerações do caso anterior, teremos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{(2)} &= \left(\frac{g^4}{4}\right) \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k_1^\eta}{A_\alpha(k)A_\beta(k_1)A_W(k)A_W(k_1)} \\ &\quad \{\bar{u}(p_3)\gamma^\mu\gamma_\eta\gamma_\mu\gamma_L v(p_4)\} \{\bar{v}(p_2)\gamma_\nu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma_L u(p_1)\} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Da identidade

$$\gamma^\mu\gamma_\eta\gamma_\mu = -2\gamma_\eta$$



segue que

$$i\mathcal{M}_{(2)} = g^4 \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k_1^\eta}{A_\alpha(k) A_\beta(k_1) A_W(k) A_W(k_1)} \{\bar{u}(p_3) \gamma_\eta \gamma_L v(p_4)\} \{\bar{v}(p_2) \gamma^\rho \gamma_L u(p_1)\} \quad (\text{A.20})$$

idêntica à (A.18).

Efetuando as integrações envolvidas (ver A.2) a amplitude pode ser reescrita como

$$i\mathcal{M} = \frac{ig^4}{16\pi^2} \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \times \left\{ \left[ \frac{g^{\mu\nu}}{2} \{\bar{u}(p_3) \gamma_\mu \gamma_L v(p_4)\} \{\bar{v}(p_2) \gamma^\nu \gamma_L u(p_1)\} \right] C_1^{\alpha\beta} + [P_1^\mu P_1^\nu \{\bar{u}(p_3) \gamma_\mu \gamma_L v(p_4)\} \{\bar{v}(p_2) \gamma^\nu \gamma_L u(p_1)\}] C_1^{\alpha\beta} \right\} \quad (\text{A.21})$$

Finalmente, da equação de Dirac,

$$i\mathcal{M} = \frac{ig^4}{16\pi^2} \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \times \left\{ \left[ \frac{g^{\mu\nu}}{2} \{\bar{u}(p_3) \gamma_\mu \gamma_L v(p_4)\} \{\bar{v}(p_2) \gamma^\nu \gamma_L u(p_1)\} \right] C_1^{\alpha\beta} + [m_c^2 \{\bar{u}(p_3) \gamma_L v(p_4)\} \{\bar{v}(p_2) \gamma_L u(p_1)\}] C_2^{\alpha\beta} \right\} \quad (\text{A.22})$$

Os cálculos envolvendo a inserção do vácuo sobre os dois operadores da expressão acima foram feitos em 3.1.1 e 3.2.1. As constantes  $C_1^{\alpha\beta}$  e  $C_2^{\alpha\beta}$  envolvem complicadas integrais nos parâmetros de Feynman e são dadas em [15].

# Referências Bibliográficas

- [1] J. L. Rosner, *Resource Letter SM – 1: The standard model and beyond* (Am. J. Phys. 71, 302, 2003).
- [2] T. Morii, C. S. Lim, S. N. Mukherjee, *The Physics of the Standard Model and Beyond* (World Scientific, 2004).
- [3] Q. Ho-Kim, P. X. Yem, *Elementary particles and their interactions - Concepts and Phenomena* (Springer, 1998).
- [4] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford Science Publications, 1982).
- [5] ([https://www.kvi.nl/~loehner/saf\\_seminar/2010/book\\_ssaf\\_marcel.pdf](https://www.kvi.nl/~loehner/saf_seminar/2010/book_ssaf_marcel.pdf)).
- [6] A. J. Buras, F. D. Fazio, J. Girrbach, M. V. Carlucci, *The anatomy of quark flavour observables in 331 models in the flavour precision era* (Journal of High Energy Physics, 10.1007, 2013, 2012).
- [7] A. G. Dias, J. C. Montero, V. Pleitez, *Closing the  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  Symmetry at Electroweak Scale* (Physical Review D 73,113004, 2006).
- [8] A. Machado, J. Montero, V. Pleitez, *FCNC in the minimal 3 – 3 – 1 model revisited* (arXiv:1305.1921, 2013).
- [9] J. Urban, F. Krauss, G. Soff, *Influence of external momenta in  $K^0 \bar{K}^0$  and  $B^0 \bar{B}^0$  mixing* (Nucl. Part. Phys. 23, 1997).
- [10] G. Branco, L. Lavoura, J. Silva, *CP Violation* (Clarendon Press Oxford, 1999).
- [11] T. Inami, C. Lim, *Effects of superheavy quarks and leptons in low-energy weak processes  $K_L \rightarrow \mu \bar{\mu}$ ,  $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$  and  $K^0 - \bar{K}^0$*  (Progress of theoretical physics 65, 1981).
- [12] P. D. Group, *Particle Physics Booklet* (2012).
- [13] J. C. Romão, *Modern Techniques for One-Loop Calculations* (Instituto Superior Técnico Lisboa, Portugal, 2004).
- [14] J. F. Nieves, P. B. Pal, *Generalized Fierz identities* (Am. J. Phys. 72, 1100, 2004).
- [15] A. Datta, D. Kumbhakar,  *$D^0 \bar{D}^0$  Mixing: A possible test of physics beyond the standard model* (Zeitschrift für Physik C 27, 1985).