



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.011/13

**Forma simplética para ondas não-lineares da corda clássica  
no espaço  $\text{AdS}_5$**

David Alfredo Torres Bejarano

Orientador

*Andrei Mikhailov*

25 Julho de 2013

## Agradecimentos

Com grande saudade agradeço enormemente à minha família pelo apoio incondicional durante minha estadia aqui no Brasil, especialmente ao meu primo Jorge. Agradeço à universidade, aos funcionários e aos professores por fazer do IFT um lugar rico em experiências, agradável e cômodo. Agradeço também à todas grandes pessoas que conheci e que agora chamo firmemente de amigos: Prieslei, José Cupertino, Rodolfo e Segundo pela amizade, apoio e grandes conselhos; e às senhoritas Nataly e Catalina por serem duas pessoas importantes na minha vida. Agradeço ao meu orientador Andrei Mikhailov pelo incentivo e pelas conversas destes dois anos. Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

## Resumo

Nesta dissertação calculamos a forma simplética que representa o espaço de fase para uma onda não-linear da corda clássica no espaço Anti-de Sitter (AdS). Revisamos alguns conceitos de geometria diferencial, como variedades diferenciáveis, campos tensoriais, transformação dual dada pela estrela de Hodge  $\star$  e a integração de formas sobre variedades. Estudamos algumas das aplicações destas ferramentas na mecânica clássica como por exemplo a construção de uma variedade simplética, sua relação com o espaço de fase e a álgebra de Poisson. Citamos alguns exemplos para compreender melhor a teoria proposta, como o caso da partícula não-relativística, o campo escalar livre, e a corda bosônica dada pela ação de Polyakov. Como motivação para os estudos da correspondência AdS/CFT apresentamos a solução para uma perturbação da corda clássica no espaço AdS, que é dada por uma onda não-linear na folha de mundo. Ao calcular a energia desta onda demonstramos que ela coincide com energia radiada por uma carga acelerada na eletrodinâmica clássica. E finalmente, a partir da solução encontrada, construímos o espaço de fase que descreve a corda clássica sobre o espaço  $AdS_5$ .

**Palavras Chaves:** Geometria simplética; ondas no lineais no espaço AdS.

**áreas do conhecimento:** Geometria diferencial; teoria clássica de cordas.

## Abstract

In this master thesis we calculate the symplectic form that represents the phase space for a classical nonlinear string in the Anti-de Sitter space (AdS). We review some concepts of differential geometry, such as differential manifolds, tensor fields, dual transformation given by the Hodge star operator  $\star$  and the integration of differential forms on manifolds. We study some applications of these tools in classical mechanics such as the construction of a symplectic manifold, its relation with the phase space, and the Poisson algebra. We show some examples to better understand the theory, such as the case of the nonrelativistic particle, the free scalar field, and the bosonic string given by the Polyakov action. As a motivation for the study of the AdS/CFT correspondence we present the solution for a disturbance of the classical string on the AdS space, which is given by a nonlinear wave on the worldsheet. By calculating the energy of this wave we show that it coincides with the energy radiated by an accelerated charge in the Classical Electrodynamics. Finally, from the found solution, we construct the phase space that describes the classical string on the  $\text{AdS}_5$ .

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>vi</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares de Geometria Diferencial</b>	<b>2</b>
2.1	Variedades . . . . .	2
2.2	Cálculo sobre variedades . . . . .	4
2.3	Vetor Tangente . . . . .	5
2.4	1-Formas . . . . .	7
2.5	Tensores . . . . .	8
2.6	Campos Tensoriais . . . . .	8
2.7	Pullback e mapas induzidos . . . . .	8
2.8	Produto wedge, derivada exterior e produto interior . . . . .	10
2.9	A estrela de Hodge $\star$ . . . . .	11
2.10	Integração de formas sobre uma variedade . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Mecânica Hamiltoniana diferencial</b>	<b>15</b>
3.1	Estrutura simplética e variedade simplética . . . . .	15
3.2	Espaço de fase . . . . .	16
3.3	Campos vetoriais hamiltonianos . . . . .	17
3.4	Parênteses de Poisson . . . . .	18
3.4.1	Sistema de coordenadas locais . . . . .	19
3.5	Sistemas hamiltonianos . . . . .	19
3.6	Forma simplética . . . . .	20
3.7	Ação para uma partícula clássica não-relativística . . . . .	21
3.8	Ação para um campo escalar clássico . . . . .	23
3.9	Ação de Polyakov para a corda clássica . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Corda bosônica livre</b>	<b>27</b>
4.1	Da partícula pontual à teoria de cordas . . . . .	27
4.2	Expansão em modos de Fourier . . . . .	29

<b>5</b>	<b>Corda no espaço anti-de Sitter</b>	<b>35</b>
5.1	Espaço anti-de Sitter . . . . .	35
5.2	Pequenas flutuações na corda . . . . .	36
5.2.1	Energia da onda . . . . .	39
5.3	Construção do espaço de fase para o caso linearizado . . . . .	43
5.4	Espaço de fase para a corda em AdS no caso linearizado . . . . .	45
5.5	Solução completa para a corda em AdS . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Conceitos Básicos de Geometria</b>	<b>50</b>
A.1	Mapa . . . . .	50
A.2	Vetores e espaço vetorial . . . . .	50
A.2.1	Mapa linear, imagem e kernel. . . . .	51
A.3	Espaço vetorial dual . . . . .	52
A.3.1	Fluxos e Derivada de Lie . . . . .	52
<b>B</b>	<b>Formas bilineares</b>	<b>56</b>
<b>C</b>	<b>Invariantes Integrais</b>	<b>58</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>59</b>
	<b>Referências</b>	<b>59</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Durante os dois últimos séculos a mecânica analítica ocupou um lugar de destaque na física. Atualmente várias ferramentas matemáticas passaram a ser utilizadas de forma a dar uma descrição mais formal de seus conceitos, como geometria diferencial e álgebras de Lie por exemplo. Nos últimos quarenta anos o estudo de estruturas geométricas que formam a base da mecânica melhoraram seu entendimento mediante o uso de ferramentas como a estrutura simplética e estrutura de Poisson[1].

Na primeira parte desta dissertação apresentamos uma breve introdução a alguns conceitos básicos de geometria diferencial, tomando como referência os livros [2],[3]. Destacamos a ação do operador dual,  $\star$ , devido à sua importância na criação de estruturas simpléticas, as quais descrevem o espaço de fase de um sistema físico[1],[4].

Na mecânica clássica o espaço de fase é construído a partir da variedade que define o espaço de configuração. Definimos a estrutura simplética sobre o fibrado cotangente da variedade. Com esta ferramenta podemos formular os teoremas da mecânica hamiltoniana, descritos pelo parênteses de Poisson. Para provar a veracidade dos teoremas citamos alguns exemplos como o caso da partícula não-relativística, o campo escalar livre e a corda bosônica descrita pela ação de Polyakov.

A teoria de cordas é um modelo fundamental que assume que as partículas da natureza são descritas como um estado vibracional de um objeto estendido, que basicamente é representado por uma corda.

Em 1974 Jöel Scherk e John Schwarz publicaram um artigo onde demonstraram que tal teoria podia descrever a força da gravidade. A princípio a teoria não tinha chamado tanto a atenção da comunidade científica Mas nesse momento a teoria não

chamou muito a atenção. Hoje em dia a teoria tem ganhado bastante força, pois o seus avances parecem promissórios. Gostaríamos de destacar entre os avanços o princípio holográfico, que é uma hipótese proposta por Gerard 't Hooft nos anos noventa e aperfeiçoada através da teoria de cordas por Leonard Susskind, a hipótese afirma que a informação contida num volume do espaço pode ser representada pela informação que reside na fronteira daquela região. Nesta dissertação nos focamos nos aspectos clássicos da teoria de cordas.

Como um exemplo da hipótese de 't Hooft e Susskind citamos a correspondência AdS/CFT, proposta originalmente por Juan Martín Maldacena. Esta conjectura propõe uma equivalência entre uma teoria de cordas, ou uma teoria da supergravidade, definida num certo espaço Anti-de Sitter (AdS) e uma teoria conforme de campos num espaço de menor dimensão que o espaço AdS. O espaço AdS corresponde à solução das equações de Einstein com constante cosmológica negativa, e é uma teoria clássica da gravidade, enquanto que a teoria conforme é uma teoria quântica de campos invariante sobre transformações do grupo conforme. A correspondência estabelece que a teoria de campos conforme corresponde à fronteira do espaço Anti-de Sitter.

Na dissertação apresentamos a solução para uma corda no espaço AdS<sub>5</sub> [5], que é dada por uma solução não-linear. Também provamos que a energia e o momento dados por uma perturbação na corda descrita no espaço AdS<sub>5</sub> correspondem à energia e o momento de uma carga acelerada pelo potencial de Liénard-Wiechert, sendo este um resultado relevante para uma melhor compreensão da correspondência AdS/CFT. Com solução que descreve a onda, e seguindo os passos realizados na primeira parte da dissertação, construímos a estrutura simplética que descreve a corda no espaço AdS<sub>5</sub>.



## Capítulo 2

# Preliminares de Geometria Diferencial

Muitos conceitos matemáticos como variedades diferenciáveis, geometria simplética e parênteses de Poisson são usados para dar uma descrição mais formal para a mecânica clássica. Uma breve introdução a alguns dos conceitos básicos de geometria diferencial e de cálculo sobre variedades são apresentadas neste capítulo, sendo a construção do espaço de fase o objetivo principal para uso dessas ferramentas. Este capítulo é baseado nas referências [2],[3].

### 2.1 Variedades

Variedades são generalizações das idéias intuitivas sobre as curvas e superfícies em objetos de dimensões arbitrários de qualquer dimensão e corpo (não necessariamente reais ou complexos). Por exemplo: uma curva é parametrizada com um parâmetro único enquanto são necessários dois parâmetros para descrever uma superfície, pelo número de parâmetros a curva e a superfície são homeomórficas a um espaço monodimensional e bidimensional respectivamente. O número de parâmetros forma um conjunto de  $n$  valores chamados de coordenadas. A transição de um sistema de coordenadas para outro tem que ser *suave*, isto é, infinitamente diferenciável ( $C^\infty$ ), permitindo o uso do cálculo usual sobre a variedade.

$M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ , ( $m$ -dim), se:

1.  $M$  é um espaço topológico;

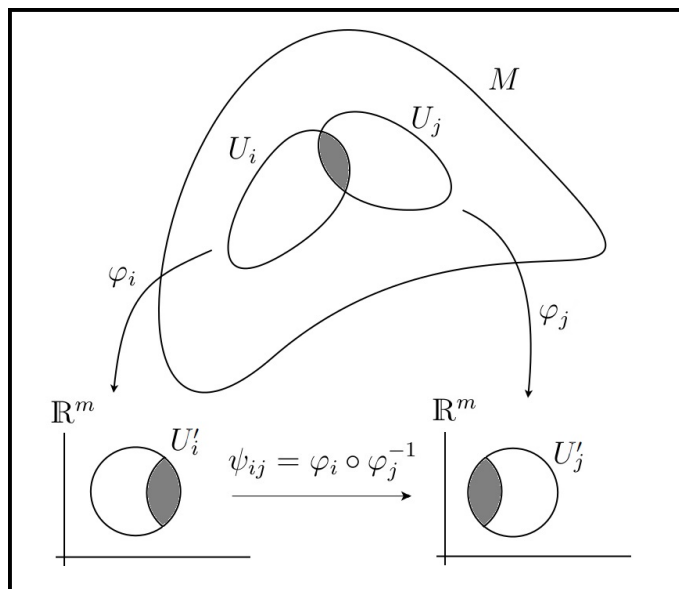


Figura 2.1: O homeomorfismo  $\varphi_i$  que mapeia de  $U_i$  para o subconjunto aberto  $U'_i$  de  $\mathbb{R}^m$ , dando coordenadas a cada ponto  $p \in \varphi_i$ . Se  $U_i \cup U_j \neq \emptyset$  a transição de um sistema coordenado para o outro é suave.

2.  $M$  é dado por uma família de pares  $\{U_i, \varphi_i\}$ , onde  $\{U_i\}$  é uma família de conjuntos abertos que cobrem  $M$ , isto é,  $\cup_i U_i = M$ , e  $\varphi_i$  é um homeomorfismo de  $U_i$  sobre um subconjunto aberto  $U'_i$  de  $\mathbb{R}^m$  [Figura 2.1];
3. Dados  $U_i$  e  $U_j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , o mapa  $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  de  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  para  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  é infinitamente diferenciável.

O par  $(U_i, \varphi_i)$  é chamado de carta (Chart) enquanto a família completa de cartas é chamada de atlas. O subconjunto  $U_i$  é chamado de vizinhança de coordenadas, enquanto que  $\varphi_i$  é uma função de coordenadas, ou simplesmente a coordenada. O homeomorfismo  $\varphi_i$  é representado por  $m$  funções  $\{x^1(p), \dots, x^m(p)\}$ , ou simplesmente  $\{x^\mu_p\}$ , que é chamado coordenada, onde  $p$  é um ponto tal que  $p \in M$ , e que existe independentemente das suas coordenadas. Em cada vizinhança  $U_i \in M$  aparece um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^m$  cujos elementos são  $\{x^1, \dots, x^m\}$ .

Na intersecção de dois conjuntos abertos  $U_i$  e  $U_j$  dois sistemas de coordenadas estão atribuídos a um mesmo ponto  $p$  em  $U_i \cap U_j$ . A transição de um sistema para o outro deve ser suave.

O mapa (Apêndice A.1)  $\varphi_i$  no ponto  $p$  assinala  $m$  valores de coordenada isto é,  $x^\mu$  com  $(1 \leq \mu \leq m)$ , enquanto que  $\varphi_j$  assinala ao mesmo ponto  $y^\nu$  ( $1 \leq \nu \leq m$ ).

A função de transformação de coordenadas de  $y$  para  $x$ ,  $x^\mu = x^\mu(y)$ , é explícita no mapa  $\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ . Deste modo, a diferenciabilidade é definida como no cálculo: a transformação de coordenadas é diferenciável se cada função  $x^\mu(y)$  é diferenciável respeito a cada  $y^\nu$ , desde que a transformação de coordenadas seja infinitamente diferenciável.

Se a união de dois atlas,  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  e  $\{(U_j, \varphi_j)\}$ , é novamente um atlas dizemos que estes atlas são compatíveis. A compatibilidade é uma relação de equivalência, a qual é conhecida como estrutura diferenciável.

## 2.2 Cálculo sobre variedades

A importância em se ter variedades diferenciáveis está no fato de que podemos usar o cálculo usual em  $\mathbb{R}$ . A suavidade da transformação de coordenadas garante a independência das coordenadas escolhidas.

Seja  $f : M \rightarrow N$  um mapa de uma variedade  $m - dim$  para uma  $n - dim$  respectivamente. Um ponto  $p \in M$  é mapeado a um ponto  $f(p) \in N$  mediante  $f : p \rightarrow f(p)$ . Escolhamos uma carta  $(U, \varphi)$  em  $M$  e uma  $(V, \psi)$  em  $N$ , com  $p \in U$  e  $f(p) \in V$ . O mapa  $f$  é visto como uma transformação de coordenadas e é apresentado como:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Se escrevemos  $\varphi(p) = \{x^\mu\}$  e  $\psi(f(p)) = \{y^\alpha\}$ ,  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$  é justamente a "função vetorial de valores" (vector-valued function) para  $m$  variáveis. A notação  $y = f(x)$  ou  $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$  de fato é um abuso de notação quando sabemos que quais sistemas de coordenadas estão sendo usados em  $M$  e  $N$ . Se  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ , ou simplesmente  $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ , é continuamente diferenciável com respeito de cada  $x^\mu$ , dizemos que  $f$  é diferenciável em  $p$ , ou  $x = \varphi(p)$ .

Seja  $f : M \rightarrow N$  um homeomorfismo e  $\psi$  e  $\varphi$  as mesmas funções previamente descritas. Se o mapa  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  é inversível, então  $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ . Ambas funções,  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$  e  $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ , são continuamente diferenciáveis, logo  $f$  é chamado de difeomorfismo e  $M$  e  $N$  são difeomórficos,  $M \equiv N$  [Figura 2.2].

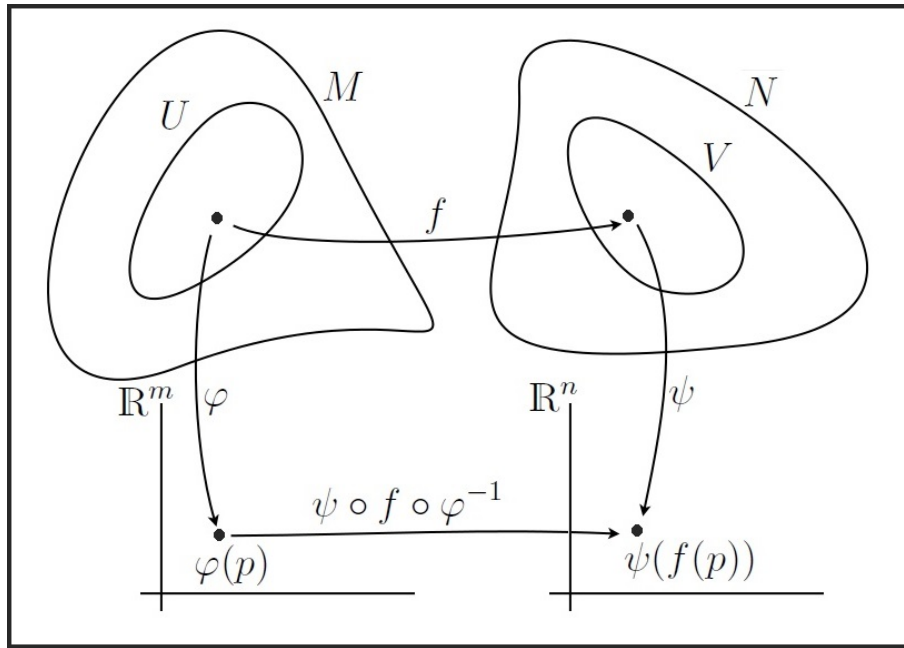


Figura 2.2: O mapa  $f : M \rightarrow N$ , cuja representação desde as coordenadas é  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que indica que o uso de calculo é independente das coordenadas escolhidas.

## 2.3 Vetor Tangente

Para definir o vetor tangente precisamos de um mapa  $c$  que descreve uma curva aberta na variedade  $M$ ,  $c : (a, b) \rightarrow M$ , e uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $(a, b)$  é um intervalo aberto, parametrizado por uma variável  $t$ . Assumimos também que  $c$  não intersepta consigo mesma, e assumimos também que os valores  $a$  e  $b$  variam de  $-\infty$  a  $+\infty$ , com  $a < 0 < b$ . À cada ponto da curva  $c(t)$  associamos um vetor tangente [Figura 2.3]. Definimos vetor tangente sobre ponto  $c(0)$  como a derivada direcional de uma função  $f(c(t))$  ao longo da curva  $c(t)$  em  $t = 0$ , isto é:

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.2)$$

que em termos de coordenadas locais é escrito como:

$$\left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1}(x))}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.3)$$

Usando esta equação definimos o operador  $X$  atuando sobre  $f$  como

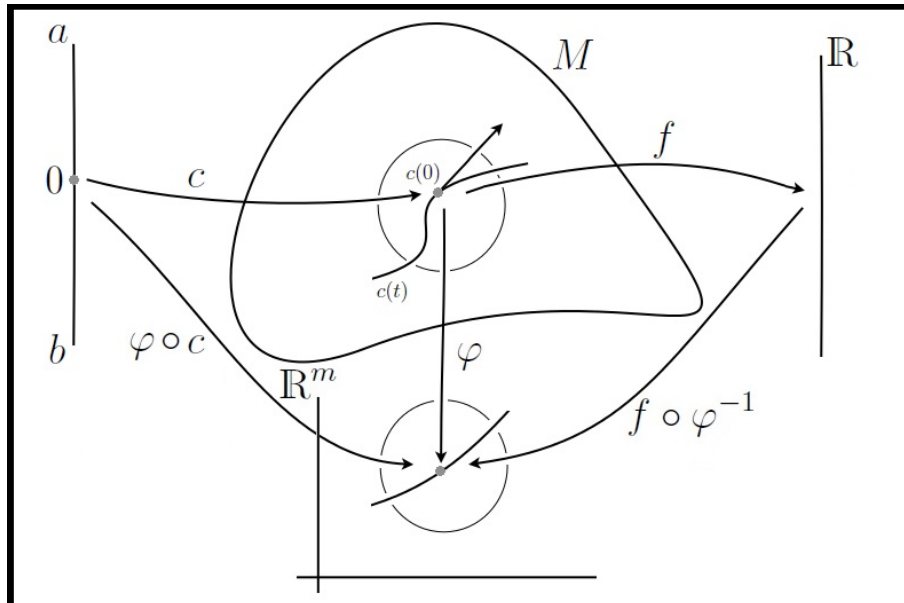


Figura 2.3: Uma curva  $c$  e uma função  $f$  define um vetor tangente ao longo da curva em termos da derivada direcional.

$$X[f] = X^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) f, \text{ onde } X^\mu = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.4)$$

Então o operador  $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$  define o vetor tangente a  $M$  no ponto  $p = c(0)$  ao longo da curva dada por  $c(t)$ .

Se em  $t = 0$  duas curvas  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  satisfazem

1.  $c_1(0) = c_2(0) = p$ ,
2.  $\left. \frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt} \right|_{t=0}$

elas produzem o mesmo operador  $X$  em  $p$ , logo são definidas como  $c_1(t) \sim c_2(t)$ , onde  $\sim$  é uma relação de classe de equivalência. Identificamos o vetor tangente  $X$  como a classe de equivalência entre as curvas.

Todas as classes de equivalência de curvas em  $p \in M$  que são chamadas de vetores tangentes formam um espaço vetorial chamado de espaço tangente de  $M$  em  $p$ , escrito\* como  $T_p M$ . A base vetorial para esse espaço evidentemente é  $\{e_\mu\} =$

---

\*Fisicamente associado ao espaço de momento

$\{\partial/\partial x^\mu\}$ , ou seja, um objeto que pode atuar sobre alguma função. A dimensão de  $(T_p M)$  é a mesma que a de  $M$ , isto é,  $\dim(T_p M) = \dim(M)$ . Logo um vetor  $V \in T_p M$  é escrito como  $V = V^\mu e_\mu$ , onde  $V^\mu$  são as componentes e  $\{e_\mu\}$  representa a base coordenada. Em geral o vetor  $X$  existe sem identificar nenhum tipo de sistema de coordenadas. A independência das coordenadas permite definir a transformação entre elas. Seja o ponto  $p \in U_i \cap U_j$ . As coordenadas  $x = \phi_i(p)$  e  $y = \phi_j(p)$  definem duas expressões para o mesmo vetor tangente  $X \in T_p M$ , dado por

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{X}^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}, \quad (2.5)$$

onde as componentes são vinculadas por  $X^\mu = \tilde{X}^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}$ . Logo dizemos que as componentes se transformam de forma contravariante.

## 2.4 1-Formas

Demostramos no apêndice A.3 que para cada espaço vetorial temos associado um espaço dual. O espaço dual a  $T_p M$  é conhecido como espaço cotangente,  $T_p^* M$ . Um elemento  $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  de  $T_p^* M$  é chamado de vetor dual, vetor cotangente ou no contexto de formas diferenciais, uma 1-forma. Um exemplo simples de uma 1-forma é o diferencial  $df$  de uma função  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Um vetor  $V$  atuando em  $f$  é  $V[f] = V^\mu \partial f / \partial x^\mu \in \mathbb{R}$ . Podemos definir a ação de  $df \in T_p^* M$  sobre  $V \in T_p M$  como

$$\langle df, V \rangle = V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Sendo  $\{dx^\mu\}$  uma base para o espaço cotangente  $T_p^* M$ ,  $df$  é expresso em termos da coordenada  $x = \varphi(p)$  da seguinte forma  $df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$ . Esta base é definida de forma que

$$\langle dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rangle = \delta_\mu^\nu. \quad (2.7)$$

Em geral representamos uma 1-forma é escrita como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu. \quad (2.8)$$

A 1-forma transforma como  $\omega_\mu = \tilde{\omega}_\nu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}$ . Definimos o produto interno  $\langle, \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  entre um vetor  $V = V^\mu \partial / \partial x^\mu$  e uma 1-forma  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  como

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu V^\nu \langle dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rangle = \omega_\mu V^\mu. \quad (2.9)$$

## 2.5 Tensores

Um tensor do tipo  $(q, r)$  é um objeto multilinear que mapeia  $q$  elementos de  $T_p^*M$  e  $r$  elementos de  $T_pM$  para um número real. O conjunto de tensores do tipo  $(q, r)$  é denotado por  $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$  com  $p \in M$ . Um tensor  $T$  deste tipo pode ser escrito em termos das bases  $\{dx^\nu\}$  e  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  como

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_r}. \quad (2.10)$$

Logo o tensor  $T$  é uma função linear de  $\otimes^q T_p^*M \otimes^r T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ . A ação de  $T$  em um vetor  $V_i = V_i^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$  e uma forma  $\omega_j = \omega_{j,\sigma} dx^\sigma$ , com  $(1 \leq i \leq r)$  e  $(1 \leq j \leq q)$  leva para o número

$$T(\omega_1, \dots, \omega_q; V_1, \dots, V_r) = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \omega_{1,\mu_1} \dots \omega_{q,\mu_q} V_1^{\nu_1} \dots V_r^{\nu_r}. \quad (2.11)$$

Nesta expressão representamos o produto interno  $\langle \omega, X \rangle$  como  $\omega(X)$ .

## 2.6 Campos Tensoriais

Um campo vetorial sobre  $M$  é definido por um conjunto de vetores, onde cada vetor está associado a um ponto da variedade. Em outras palavras,  $V$  corresponde a um campo vetorial se  $V[f] \in \mathcal{F}(M)$  para cada  $f \in \mathcal{F}(M)$ , onde cada componente do vetor mapeia de  $M \mapsto \mathbb{R}$  e é de tipo  $C^\infty$ . O conjunto dos campos vetoriais é denotado por  $\mathcal{X}[M]$ . Um campo vetorial  $X$  em  $p \in M$  denotado por  $X|_p$ , e é um elemento  $\in T_pM$ . Similarmente definimos um campo tensorial do tipo  $(q, r)$  por elementos do conjunto  $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$  para cada ponto  $p \in M$ . Note que  $\mathcal{T}_{0,p}^0(M) = \mathcal{F}(M)$ .

## 2.7 Pullback e mapas induzidos

Um mapa suave  $f : M \rightarrow N$  induz um mapa  $f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  chamado de mapa diferencial [Figura 2.4]. A forma explícita de  $f_*$  é obtida pela definição do vetor tangente como uma derivada direcional ao longo de uma curva  $c(t)$ . Seja  $g$  uma

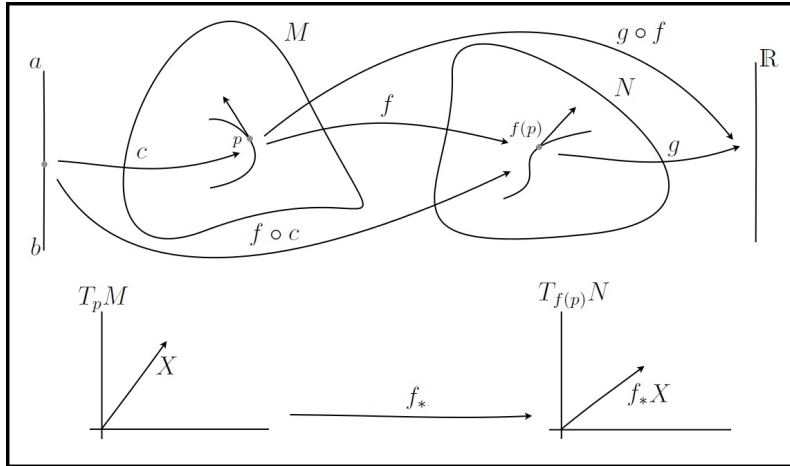


Figura 2.4: O mapa  $f : M \rightarrow N$  induz o mapa diferencial  $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ .

função  $g \in \mathcal{F}(N)$ . Logo  $g \circ f \in \mathcal{F}(M)$ . O resultado da ação de um vetor  $V \in T_p M$  agindo em  $g \circ f$  nos dá um número  $V[g \circ f]$ , que definimos como  $f_* V \in T_{f(p)} N$ , isto é

$$(f_* V)[g] = V[g \circ f]. \quad (2.12)$$

Em termos de cartas,  $(U, \varphi)$  em  $M$  e  $(V, \psi)$  em  $N$ , com  $x = \varphi(p)$  e  $y = \psi(f(p))$ , esta expressão é reescrita como

$$(f_* V)[g \circ \psi^{-1}(y)] = V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]. \quad (2.13)$$

Seja  $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  e  $f_* V = W^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}$ . Logo a equação anterior é dada por

$$(W^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu})[g \circ \psi^{-1}(y)] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]. \quad (2.14)$$

E tomando  $q = y^\nu$  obtemos uma relação entre os vetores  $V$  e  $W$

$$W^\nu = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y^\nu(x), \quad (2.15)$$

onde  $\partial y^\nu / \partial x^\mu$  representa o Jacobiano do mapa  $f$ . Este mapa também induz um mapa

$$f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M, \quad (2.16)$$



que é chamado de pullback. Note que que  $f^*$  vai na direção contrária a  $f_*$ , que por sua vez vai no mesmo sentido que  $f$ . Se tomamos  $V \in T_p M$  e  $\omega \in T_{f(p)}^* N$ , o pullback  $f^*$  sobre  $\omega$  é definido como

$$\langle f^* \omega, V \rangle = \langle \omega, f_* V \rangle. \quad (2.17)$$

## 2.8 Produto wedge, derivada exterior e produto interior

Um tensor totalmente antissimétrico do tipo  $(0, r)$  define uma forma de ordem  $r$ . O produto wedge  $\wedge$  pode ser entendido como uma antissimetriação do produto tensorial. Como exemplo podemos citar o caso das 2-formas

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu. \quad (2.18)$$

O caso de  $r$  1-formas é definido como

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}, \quad (2.19)$$

onde  $P$  é o operador de simetrização e  $S_r$  representa todas as permutações do grupo simétrico de ordem  $r$ . Os elementos do espaço vetorial das  $r$ -formas no ponto  $p \in M$  são elementos de  $\mathcal{T}_{r,p}^0(M)$ . Definimos  $\Omega_p^r(M)$  como o espaço vetorial das  $r$ -formas. A equação anterior representa uma base para estes elementos, e, em geral uma  $r$ -forma é escrita como

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (2.20)$$

Note que a dimensão do espaço vetorial definido por uma  $r$ -forma também depende da dimensão de  $\mu_i$ , isto é se  $\mu_i$  for de  $(1, \dots, m)$ , por exemplo, a dimensão do espaço vetorial  $\Omega_p^r(M)$  é dada por  $\frac{m!}{(m-r)!r!}$ .

O produto exterior entre duas formas, representado pelo símbolo  $\wedge$ , é uma operação tal que  $\wedge : \Omega_p^r(M) \times \Omega_p^q(M) \rightarrow \Omega_p^{r+q}(M)$ . A derivada exterior é definida como  $d_r : \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{r+1}(M)$ , isto é,

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (2.21)$$

Duas derivadas exteriores aplicadas numa mesma forma fornece como resultado  $d_{r+1}d_r = 0$  ou  $d^2 = 0$ . Da mesma maneira podemos definir o produto interior por  $i_X : \Omega_p^r(M) \times \Omega_p^q(M) \rightarrow \Omega_p^{r-1}(M)$ , onde  $X$  pertence ao grupo de funções, isto é,  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Para  $\omega$  sendo uma  $r$ -forma e  $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  o produto interior de  $\omega$  com respeito a  $X$  será

$$i_X \omega = \frac{1}{(r-1)!} X^\nu \omega_{\nu\mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{i-1}} \wedge dx^{\mu_{i+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (2.22)$$

A derivada de Lie<sup>†</sup> de uma forma pode ser escrita em termos do produto interior e da derivada exterior

$$\mathcal{L}_X \omega = (d(i_X) + i_X(d)). \quad (2.23)$$

## 2.9 A estrela de Hodge $\star$

Para definir o elemento de volume em uma variedade  $m$ -dimensional considere uma  $m$ -forma não-nula. Se  $M$  é dotado de uma métrica  $g$  existe um elemento natural de volume que é invariante sob transformações de coordenadas. Este elemento é definido por

$$\Omega_M = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m, \quad (2.24)$$

onde  $g = \det g_{\mu\nu}$  e  $x^\mu$  representa as coordenadas. Em uma variedade  $m$ -dimensional  $\Omega^r(M)$  e  $\Omega^{m-r}(M)$  são isomórficos, então podemos definir um isomorfismo entre eles chamado de estrela de Hodge, representado pelo símbolo  $\star$ . Este operador mapeia de forma linear qualquer  $r$ -forma para uma  $(m-r)$ -forma:  $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{m-r}(M)$ . A ação de  $\star$  sobre um vetor de base em  $\Omega^r(M)$  é definida por

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \sqrt{g} \frac{\varepsilon^{\mu_1, \dots, \mu_r, \nu_{r+1}, \dots, \nu_m}}{(m-r)!} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}. \quad (2.25)$$

Na equação anterior podemos identificar o tensor antissimétrico de Levi-Civita  $\varepsilon^{\mu_1, \dots, \mu_m}$  que toma valores diferentes de zero se seus índices são diferentes ( $\mu_1 \neq \dots \neq \mu_m$ ). O tensor de Levi-Civita transforma como

---

<sup>†</sup>Apêndice A.3.1

$$\varepsilon^{\mu_1, \dots, \mu_m} = g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \dots g^{\mu_m \nu_m} \varepsilon_{\nu_1, \dots, \nu_m} = \frac{1}{g} \varepsilon_{\mu_1, \dots, \mu_m}. \quad (2.26)$$

A estrela de Hodge pode ser usada para definir o mesmo elemento de volume  $\star 1$ :

$$\star(1) = \sqrt{|g|} \frac{\varepsilon^{\mu_1, \dots, \mu_m}}{m!} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m}. \quad (2.27)$$

De fato, qualquer  $r$ -forma pode ser representada como

$$\alpha = \frac{1}{r!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (2.28)$$

cujas forma adjunta é dada pela equação

$$\star \alpha = \frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_r} \varepsilon^{\mu_1, \dots, \mu_r} \nu_{r+1, \dots, \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m}. \quad (2.29)$$

Seja  $\alpha$  e  $\beta$  duas  $r$ -formas. Podemos usar a forma adjunta e definir o produto interno entre essas duas formas como

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge \star \beta = \frac{1}{r!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_r} \beta^{\mu_1, \dots, \mu_r} \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \int \alpha \cdot \beta(\star 1). \quad (2.30)$$

Note que o produto interno possui a seguinte simetria  $\alpha \wedge \star \beta = \star \alpha \wedge \beta$ .

## 2.10 Integração de formas sobre uma variedade

Em esta seção descrevemos a integração de  $k$ -formas. O campo de integração esta dado por uma construção de blocos, estendida sobre uma variedade  $n$ -dim, que é conhecida como  $k$ -cadeia, "k-chains".

O  $k$ -cubo padrão em  $\mathbb{R}^k$  é simplesmente o subconjunto dado por

$$I^k = [0, 1]^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, k\}. \quad (2.31)$$

Um  $k$ -cubo singular em uma variedade  $M$  de dimensão  $\mathbb{R}^n$  é dado por um mapa suave  $\sigma$  de  $\mathbb{R}^k$  para  $\mathbb{R}^n$ . Como exemplos de  $k$ -cubos consideremos o caso  $I^0 = [0, 1]^0 = \{0\}$  que representa um ponto em  $M$  e  $I^1 = [0, 1] = (0, 1)$  que representa uma curva em  $M$ .

Uma  $k$ -cadeia  $c$  de  $M$  é dada por uma combinação linear de  $k$ -cubos  $\sigma_i$  singulares e finitos, ou seja,  $c = \alpha_1 \sigma_1 + \dots + \alpha_r \sigma_r$  com  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  e  $i = 1, \dots, r$ . Denotamos  $C^k(M)$  como o conjunto de todas as  $k$ -cadeias em  $M$ .

O contorno de cadeias corresponde ao operador de fronteira  $\partial : C^k(M) \rightarrow C^{k-1}(M)$ , por exemplo para  $k = 1$  temos  $\partial : [0, 1] = \{1\} - \{0\}$ . Para cada  $k$ -cadeia  $c$  é satisfeito que  $\partial(\partial c) = 0$ . Uma  $k$ -cadeia  $c$  é chamada de ciclo se  $\partial c = 0$  e de fronteira ou contorno se existe uma  $(k + 1)$ -cadeia tal que  $\gamma = \partial c$ .

A integral para uma  $k$ -forma  $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$  em  $M$  sobre uma  $k$ -cadeia  $[0, 1]^k$  em  $M$  é dada por

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f dx^1 \dots dx^k. \quad (2.32)$$

Se  $\sigma$  é um  $k$ -cubo singular em  $M$  a integral de  $\omega$  em  $\sigma$  será

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{[0,1]^k} \sigma^* \omega. \quad (2.33)$$

No caso especial de  $k = 0$ , a integral é calculada somente em um ponto da variedade, isto é

$$\int_{\sigma} \omega = \omega(\sigma(0)). \quad (2.34)$$

A integral de  $\omega$  sobre a  $k$ -cadeia  $c = \sum_i a_i \sigma_i$  será

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega, \quad (2.35)$$

onde  $\sigma_i$  são  $k$ -cubos em  $M$ .

O teorema de Stokes diz que se  $\omega$  é uma  $(k - 1)$ -forma em um conjunto aberto de  $M$  e  $c$  é uma  $k$ -cadeia em  $M$ , então

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega. \quad (2.36)$$

Note que o resultado não depende da parametrização escolhida  $\int_c \omega = \int_{c'} \omega$ , sempre que  $c^* \omega = \omega$ .

Com este resultado podemos dizer que para qualquer  $k$ -forma fechada  $\omega$ , isto é,  $d\omega = 0$ , a integral sobre qualquer  $(k + 1)$ -cadeia  $c$  é igual a 0:

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega = 0. \quad (2.37)$$

Como  $\omega$  é uma forma fechada em  $M$ , ela pode ser escrita como  $\omega = df$  de modo que  $\int_{x_0}^x \omega = f(x)$ , onde a integral é calculada ao longo do caminho ou  $k$ -cadeia

*c.* Novamente este resultado é independente da parametrização ou da escolha do caminho na integral. Se  $c' \in M$  é outro caminho que leva desde  $x_0$  até  $x$ , a  $k$ -cadeia  $c - c'$  representa uma parte da fronteira definida pela  $k + 1$ -cadeia  $\sigma \in M$ :

$$\int_c \omega - \int_{c'} \omega = \int_{c-c'} \omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega = 0, \quad (2.38)$$

onde  $\partial c$  e  $\partial c'$  representam as fronteiras de um volume  $\Sigma$ . Isto é válido para qualquer escolha de superfície [6].

## Capítulo 3

# Mecânica Hamiltoniana diferencial

Neste capítulo definimos a noção de variedade simplética seguindo as referências [1] e [4]. Na mecânica clássica o espaço de fase é construído a partir do espaço de configuração, que é o espaço de todas as posições representado por uma variedade. O espaço de fase é um fibrado tangente ao espaço de configuração do sistema mecânico. Esse fibrado tangente pode ser dotado de uma estrutura simplética que permite formular os teoremas da mecânica hamiltoniana. Associando qualquer hamiltoniano a um campo vetorial, as curvas integrais são soluções do conjunto de equações de Hamilton. Os campos vetoriais formam uma álgebra de Lie e a operação desta álgebra é chamada de parênteses de Poisson.

### 3.1 Estrutura simplética e variedade simplética

Sobre uma variedade  $M$  considere uma 2-forma diferencial  $\omega$ , fechada e não degenerada. Uma forma que satisfaz essas propriedades é chamada de forma simplética. A forma simplética é uma forma bilinear (Apêndice B), isto é:

1.  $d\omega = 0$  é fechado;
2. Dizemos que  $\omega$  é não degenerada se  $\forall x \in M, \exists \xi \in T_x M$ , de modo que  $\omega(\xi, \eta) = 0, \forall \eta \in T_x M$ , implicando que  $\xi = 0$ .

A variedade equipada com a forma  $\omega$  é chamada de variedade simplética, denotada pelo par  $(M, \omega)$ . Por definição a variedade simplética  $M$  tem dimensão par.

### 3.2 Espaço de fase

O fibrado cotangente associado a uma variedade simplética é conhecido também como espaço de fase. Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional. O conjunto de todos os vetores cotangentes em  $x$  denota um espaço cotangente que é dual a  $T_x M$ , onde uma 1-forma em  $T_x^* M$  (espaço cotangente em  $x$ ) representa um vetor cotangente no ponto  $x$ . A união dos espaços cotangentes de todos os pontos de  $M$  é chamado de fibrado cotangente  $T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^*(M)$ , e este espaço possui  $2n$  coordenadas. Seja  $(q_1, \dots, q_n)$  as coordenadas locais de  $M$  e  $(p_1, \dots, p_n)$  as coordenadas do fibrado, representamos as coordenadas locais de  $T^* M$  como  $(q, p)$ . A fim de obter uma expressão para  $\omega$  considere uma 1-forma  $\theta \in T^* M$ . Seja  $f : T^* M \rightarrow M$  uma projeção e seja  $\xi \in T_p(T^* M)$  um vetor tangente ao fibrado cotangente no ponto  $p \in T^* M$ , a derivada está definida pelo mapa  $f_* : T_p(T^* M) \rightarrow T_{f(p)} M$  (seção 2.7), que leva  $\xi$  para  $f_*(\xi)$ , que por sua vez é tangente ao ponto  $x = f(p)$  em  $M$ , dados por

$$\xi = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial p_i} + b_i \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad f_*(\xi) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial q_i}. \quad (3.1)$$

Definimos a 1-forma  $\theta$  em  $T^* M$  pela relação  $\theta(\xi) = p(f_*(\xi))$ , cujas componentes  $p(f_*(\xi)) = \sum_{i=1}^n p^i b_i$ , onde  $b_i$  representa a forma dual de  $\partial/\partial q^i$ , o que por sua vez resulta em

$$\theta = \sum_{i=1}^n p^i dq_i. \quad (3.2)$$

Assim definimos o co-vetor como  $\omega = d\theta$  que representa o espaço de fase, onde a 2-forma age como  $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . A 2-forma  $\omega$  pode ser expressa pela estrutura

$$\omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n. \quad (3.3)$$

Considere dois vetores tangentes  $\xi^j = (\xi_i^j \frac{\partial}{\partial p_i} + \eta_i^j \frac{\partial}{\partial q_i})$  com  $j = 1, 2$ , de forma que, ao calcular  $\omega(\xi^1, \xi^2)$  obtemos

$$\omega(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^n \eta_i^1 \xi_i^2 - \eta_i^2 \xi_i^1. \quad (3.4)$$

Considere a variedade simplética  $(M, \omega)$ , e os vetores tangentes  $\eta, \xi \in T_x M$ . Existe uma forma linear  $\omega^\flat(\xi, \cdot)$ , ou simplesmente  $\omega^\flat(\xi)$ , em  $T_x^* M$ , tal que  $\omega^\flat(\xi, \cdot) : \eta \rightarrow \omega(\xi, \eta)$ . Esta forma linear é definida como  $\omega^\flat : T_x M \rightarrow T_x^* M$ , por  $\xi \rightarrow \omega(\xi, \cdot)$ . Como  $\omega$  é bilinear,  $\omega^\flat$  é linear e é bem definida, exigimos que  $\omega$  seja não degenerada se  $\omega^\flat$  é injetiva. De fato, supondo que  $\omega^\flat(\xi) = 0$ , então  $\langle \omega^\flat(\xi), \eta \rangle = \omega(\xi, \eta) = 0$  para qualquer  $\eta \in T_x M$ . Na estrutura simplética o espaço tangente é isomórfico ao espaço cotangente sempre que  $T_x M$  e  $T_x^* M$  tenham as mesmas dimensões. Este elemento  $\omega^\flat$ , que define um isomorfismo, é representado por

$$\omega^\flat(\xi) = -\iota_\xi \omega. \quad (3.5)$$

Note que para a 2-forma (3.3) o mapa  $\omega^\flat$  satisfaz  $\omega^\flat(\frac{\partial}{\partial p_i}) = -dq^i$  e  $\omega^\flat(\frac{\partial}{\partial q_i}) = dp^i$ . Similarmente definimos o isomorfismo inverso por  $\lambda^\sharp : T_x^* M \rightarrow T_x M$ , de modo que ele satisfaz as relações para  $\beta \in T_x^* M$  e  $\xi \in T_x M$  dadas por

$$\iota_{\lambda^\sharp \beta} \omega = -\beta, \quad \omega(\lambda^\sharp \beta, \xi) = \langle \beta, \xi \rangle. \quad (3.6)$$

Por simplicidade usamos a notação  $(\lambda^\sharp)\beta = \sharp\beta$  e para a equação(3.5) escrevemos  $\flat\eta = -\iota_\eta \omega$ .

### 3.3 Campos vetoriais hamiltonianos

Um campo vetorial  $X_f \in T_x M$  numa variedade simplética  $(M, \omega)$  se chama de localmente hamiltoniano se a estrutura simplética  $\omega$  e se seu fluxo (Apêndice A.3.1) satisfaz que  $\phi_f^{t*} \omega = \omega$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , ou seja, o fluxo preserva a estrutura simplética  $\frac{d}{dt}(\phi_f^t)^* \omega = 0$ . Este fluxo é chamado de fluxo hamiltoniano.

O fato de preservar a estrutura simplética é equivalente a calcular a derivada de Lie de  $\omega$  ao longo de  $X$  e obter zero. Para provar isto derivamos o fluxo atuando sobre a 2-forma

$$\frac{d}{dt}(\phi_f^t)^* \omega = \frac{d}{ds}(\phi_f^{t+s})^* \Big|_{s=0} \omega \quad (3.7)$$

$$= \frac{d}{ds}(\phi_f^t)^*(\phi_f^s)^* \Big|_{s=0} \omega \quad (3.8)$$

$$= (\phi_f^t)^* \mathcal{L}_{X_f} \omega. \quad (3.9)$$

Usando as propriedades da derivada de Lie e o fato de que  $\omega$  é uma forma fechada obtemos



$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = (i_{X_f}d + di_{X_f})\omega \quad (3.10)$$

$$= 0 - d(df) = 0. \quad (3.11)$$

Logo  $\frac{d}{dt}(\phi_{X_f}^t)^*\omega = 0$ . O campo vetorial  $X_f$  se chama de globalmente hamiltoniano se a 1-forma  $\flat X_f = -\iota_{X_f}\omega$  é exata. Logo cada função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $-\iota_{X_f} = df$ , ou equivalente  $\sharp df = X_f$ .

### 3.4 Parênteses de Poisson

No contexto da mecânica hamiltoniana os parênteses de Poisson surgem naturalmente como uma equação que rege o movimento de qualquer variável dinâmica (evolução temporal) [4], [7].

Seja  $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$  o espaço de funções reais e diferenciáveis na variedade simplética  $(M, \omega)$ . Definimos a estrutura de Poisson como uma operação antissimétrica  $\mathbb{R}$ -bilinear,  $\mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$  denotado por  $(f, g) \rightarrow \{f, g\}$  (parênteses de Poisson) no espaço de funções diferenciáveis reais sobre  $M$ , tal que

$$\{f, g\} = \sharp df \cdot g = -\sharp dg \cdot f = \omega(\sharp df, \sharp dg). \quad (3.12)$$

Esta estrutura satisfaz a identidade de Jacobi  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$  e a identidade de Leibniz  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ . Logo quando  $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$  é equipado com esta estrutura seus elementos formam uma álgebra de Lie. Uma variedade equipada com os parênteses de Poisson  $\{, \}$  é chamada de variedade de Poisson. Uma variedade simplética de fato pode ser uma variedade de Poisson mas nem toda variedade de Poisson pode ser uma variedade simplética.

Seja  $\Pi$  um elemento tensorial do espaço  $\mathcal{T}_0^q(T_x M)$ . Este espaço é o produto exterior antissimétrico de  $q$ -cópias do espaço tangente  $T_x M$  \*. Escolhendo  $q = 2$  podemos representar  $\Pi$  como um campo bi-vetorial que atua na forma  $df \wedge dg$  com  $f, g \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ , tal que

$$\{f, g\} = \Pi(f, g) = \langle \Pi, df \wedge dg \rangle \quad (3.13)$$

---

\*Se  $\{x_1, \dots, x_n\}$  representa um sistema local de coordenadas,  $\mathcal{T}_0^q(T_x M)$  admite uma base linear constituída por elementos  $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}$ .

Se  $\{f, g\}$  é uma estrutura de Poisson (isto é, ser antissimétrico e satisfazer a condição de Leibniz), chamamos  $\Pi$  de tensor de Poisson.

### 3.4.1 Sistema de coordenadas locais

Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética numa carta de domínio  $U$ . Considere um sistema de coordenadas locais  $(z_1, \dots, z_{2n})$ , e  $f, g$  duas funções diferenciáveis em  $M$ . O tensor de Poisson é dado por

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad (3.14)$$

onde  $\Pi_{ij} = \langle \Pi, dz_i \wedge dz_j \rangle = \{z_i, z_j\}$ . Usando (3.13) e a equação anterior encontramos

$$\{f, g\} = \left\langle \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \{z_i, z_j\} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}, \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} dz_i \wedge dz_j \right\rangle, \quad (3.15)$$

e com a notação das equações acima obtemos uma expressão local para os parênteses de Poisson, isto é

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{2n} \{z_i, z_j\} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j}. \quad (3.16)$$

Com a equação (3.6) encontramos que o isomorfismo inverso de uma forma é dado por

$$\sharp \left( \sum_{i=1}^{2n} a_i dz_i \right) = \sum_{i,j} \{z_i, z_j\} a_j \frac{\partial}{\partial z_j} = \sum_{i,j} \Pi_{ij} a_j \frac{\partial}{\partial z_j}. \quad (3.17)$$

Ressaltamos o fato de que dada a condição de Jacobi nem todo campo bi-vetorial pode ser sempre um tensor de Poisson.

## 3.5 Sistemas hamiltonianos

Considere que a variedade simplética  $(M, \omega)$ , com  $M = T^*N$  cotangente á variedade  $N$ , é equipada com a forma fundamental (3.3), denotada por  $\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq_i$ . As coordenadas locais de  $T^*N$  são denotadas por  $(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n)$ . Usando as

equações (3.6) e (3.5), encontramos que  $\sharp(dq_i) = -\frac{\partial}{\partial p_i}$  e  $\sharp(dp_i) = \frac{\partial}{\partial q_i}$ , e também que  $\flat\frac{\partial}{\partial p_i} = -dq_i$  e  $\flat\frac{\partial}{\partial q_i} = dp_i$ .

Seja  $H$  uma função suave em  $(M, \mathbb{R})$  de forma que sua expressão local para o campo Hamiltoniano  $\sharp dH$  é dada por

$$\sharp dH = \sum_{n=1}^n \left( H_{p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - H_{q_i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right), \quad (3.18)$$

onde  $\frac{dH}{dq_i} = H_{q_i}$ ,  $\frac{dH}{dp_i} = H_{p_i}$ . Estes termos são vinculados às equações diferenciais de hamilton, isto é,

$$\frac{dp_i}{dt} = -H_{q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = H_{p_i}. \quad (3.19)$$

dessa forma os parênteses de Poisson entre duas funções suaves  $(M, \mathbb{R})$  são dados por

$$\{f, g\} = \sum_{n=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} \right). \quad (3.20)$$

### 3.6 Forma simplética

No contexto da mecânica clássica os estados de um sistema formam uma variedade simplética  $(\mathcal{M}, \omega)^\dagger$ . A estrutura da variedade surge da expressão da ação, que é definida pela integral de uma expressão simples chamada de densidade lagrangiana, que caracteriza a dinâmica do sistema. O teorema de Noether estabelece que, a cada simetria da ação temos uma corrente associada, que, quando integrada sobre as coordenadas espaciais, nos dá como resultado uma carga que é conservada no tempo.

Em uma teoria de campos clássicos o espaço-tempo define uma variedade  $M$ . Os campos pertencem ao espaço de funções sobre a variedade  $\mathcal{F}(M)$ , ou simplesmente denotado por  $\mathcal{F}$ . Uma densidade Lagrangiana  $L$  é uma densidade sobre  $M$  para cada ponto de  $\mathcal{F}$ . A densidade Lagrangiana determina as equações de Euler-Lagrange, ou equações de movimento, que se reduzem ao espaço dos extremos de  $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ . A forma simplética pode ser calculada diretamente da ação, e, para isto, suponha uma ação

---

<sup>†</sup>Agora definiremos a variedade simplética por outra letra, pois  $M$  será sendo usada para representar a variedade do espaço-tempo.

$$S = \int L(\phi). \quad (3.21)$$

Normalmente a integral da ação é definida numa região em  $M$ . Calculadas as equações de movimento da equação anterior, encontramos uma solução clássica denotada por  $\phi_{classica}$ , a variação de  $\phi_{classica}$  define uma 1-forma  $\delta\phi$ , e esta variação  $\delta$  apresenta uma deformação diferencial no espaço  $\mathcal{F}$ [8]. Segundo o princípio da mínima ação, para qualquer  $\delta\phi$  a 1-forma  $\delta S$  em  $\mathcal{F}$  deve ser nula. Isto fornece às equações de Euler Lagrange mais alguns termos de superfície,  $\delta S = \int_C \gamma$ , onde  $\gamma$  representa uma 1-forma no espaço  $\mathcal{F}$ , sendo  $C$  um contorno sobre  $M$ . Se a variação é uma solução  $\delta\phi_{classica}$ , encontraremos que  $\delta S$  representa uma 1-forma sobre o espaço de fase do sistema. O espaço de fase é dado pela 2-forma  $\omega = \int_C \delta\gamma$ , onde  $\delta\gamma$  é uma 2-forma com respeito a variação  $\delta$  e ambigualmente também é uma  $n$ -forma em  $M^\ddagger$ . Notemos que  $\omega$  é fechada com relação ao operador  $d$ , e em geral  $\omega$  não deve depender das coordenadas (não confundir  $d$  com  $\delta$ ) [9].

### 3.7 Ação para uma partícula clássica não-relativística

Dadas as condições de contorno e condições iniciais do sistema, a solução para as equações diferenciais que descrevem o sistema representam seu comportamento. Para encontrar a equação de movimento a mecânica clássica postula que a trajetória seguida por um sistema físico corresponde a aquela que minimiza a ação. A ação de um sistema é definida por a integral de um funcional conhecido como Lagrangiano, e segundo o princípio de Hamilton as equações de movimento do sistema podem ser achadas minimizando o valor da integral de ação, isto corresponde com um problema variacional de otimização. As equações obtidas no processo de otimização do funcional de ação se conhecem como equações de Euler-Lagrange.

Seja  $M = \mathbb{R}^n$  um espaço Euclidiano onde a evolução da partícula clássica de massa  $m$  é dada pelo mapa  $x : (t \in \mathbb{R}) \rightarrow M$ , A densidade Lagrangiana é dada pela 1-forma

---

<sup>‡</sup>O valor de  $n$  depende do numero de parâmetros sobre o qual esta definida a  $\phi$  em  $M$ , pode ser desde 1 parâmetro (tempo), ou vários parâmetros espaciais.

$$L = \left( \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 - U(x) \right) dt, \quad (3.22)$$

onde  $|\dot{\mathbf{x}}|^2$  representa o produto interno entre  $\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \rangle$ . A integral de  $L$  define a ação

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 - U(x) \right) dt, \quad (3.23)$$

cuja equação de movimento ou equação de Euler-Lagrange é

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(x). \quad (3.24)$$

Se deformamos  $x$  por uma quantidade  $\delta x$  a variação do funcional Lagrangiano é dada por

$$\delta L = \left( m\dot{\mathbf{x}} \cdot \delta\dot{\mathbf{x}} - \frac{U(x)}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} \right) dt \quad (3.25)$$

$$= - \left( m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{U(x)}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} dt + d(m\dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}). \quad (3.26)$$

Assim consideramos toda deformação  $\delta$  como um diferencial no espaço da trajetórias  $\mathcal{F}$ , e  $d$  como o diferencial em  $\mathbb{R}$ .

Integrando a equação anterior obtemos

$$\delta S = - \int_{t_0}^{t_1} \left( m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{U(x)}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} dt + [m\dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}]_{t_0}^{t_1}. \quad (3.27)$$

Como condição de minimização da ação,  $\delta S$  deve ser nulo sob deformações de  $x$  no espaço  $\mathcal{F}$  nos limites  $(t_0, t_1)$ . Isto nos leva às equações de Euler-Lagrange (3.24). Consideremos a variável  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$  como o momento canonicamente conjugado ( $\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ ). Assim o termo de fronteira, em cada instante de tempo, corresponde à 1-forma

$$\theta(t) = \mathbf{p}(t) \cdot \delta \mathbf{x}(t) \quad (3.28)$$

no espaço  $\mathcal{F}$  de todas as trajetórias de  $x$ . Deduzimos que no espaço  $M$  das evoluções clássicas a variação da ação corresponde a uma função cujo diferencial é  $\delta S = \delta\theta(t_1) - \delta\theta(t_0)$ . A 2-forma simplética que representa o espaço de fase em  $\mathcal{M}$  é dada por

$$\omega(t) = \delta\theta(t) \quad (3.29)$$

$$= \delta\mathbf{p}(t) \wedge \delta\mathbf{x}(t). \quad (3.30)$$

A 2-forma, em geral, não depende de nenhum parâmetro (tempo). Derivando parcialmente (3.30) com relação ao tempo temos

$$\partial_t \omega_2 = \partial_t d\mathbf{x}(t) \wedge d\mathbf{p}(t) + d\mathbf{x}(t) \wedge \partial_t d\mathbf{p}(t) \quad (3.31)$$

$$= d\mathbf{p}(t) \wedge d\mathbf{p}(t) + d\mathbf{x}(t) \wedge -d(\nabla U(x)) \quad (3.32)$$

$$= -d\mathbf{x}(t) \wedge d\mathbf{x}(t) \nabla^2 U(x) = 0. \quad (3.33)$$

### 3.8 Ação para um campo escalar clássico

O exemplo anterior é extensível para os sistemas simples da mecânica clássica, que são dados por um número finito de graus de liberdade, ou pelo menos sistemas de graus contáveis como os gases clássicos. Em geral, podemos generalizar estes conceitos para sistemas de graus de liberdade contínuos e infinitos, como por exemplo os campos clássicos como a gravidade ou a electrodinâmica. Para este exemplo escolhemos o caso mais simples, o campo escalar livre. Apresentaremos a construção do espaço de fase para o campo escalar livre.

Seja a variedade  $M^{n+1}$  um espaço com métrica  $g_{\mu\nu}$  e com coordenadas  $\{x^i\}$ . Ressaltamos que  $\star dx^\mu = \frac{\sqrt{|g|}}{n!} \varepsilon_{\nu_1, \dots, \nu_n}^\mu dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_n}$  [2]. O lagrangiano que descreve um campo escalar livre é dado por

$$L = \frac{1}{2} d\phi(x) \wedge \star d\phi(x) - U(\phi) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (3.34)$$

onde o diferencial de campo é  $d\phi(x) = \partial_\mu \phi(x) dx^\mu$ . O produto interno também pode ser representado em termos de formas diferenciais  $\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n =$

$d\phi(x) \wedge \star d\phi(x)$ . Aqui o diferencial de volume é identificado pela  $(n + 1)$ -forma  $dV = (\star 1) = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n$ , logo o lagrangiano define a ação

$$\mathcal{S} = \int \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) g^{\mu\nu} - U(\phi(x)) \right) dV. \quad (3.35)$$

Minimizando a ação

$$\delta \mathcal{S} = \int \left( \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \delta \phi(x) g^{\mu\nu} - \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \delta \phi \right) \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &= \int \partial_\mu \left( \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) \delta \phi(x) \right) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &- \int \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\phi(x) g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x)) + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \right) \delta \phi \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned} \quad (3.37)$$

encontramos a equação de movimento para o campo bosônico

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\phi(x) g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x)) = - \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi}, \quad (3.38)$$

onde segundo termo da equação (3.37) é o termo de fronteira, que contribui á corrente conservada

$$\gamma(x) |_{\partial V} = \int_V \partial_\mu \left( \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) \delta \phi(x) \right) \frac{\varepsilon^{\mu_0, \dots, \mu_n}}{(n+1)!} dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}, \quad (3.39)$$

onde  $\mu_i = \{0, \dots, n\} \forall i = 0 \dots n$ . Usando o teorema de Stokes a integral anterior pode ser reescrita como

$$\gamma(x) |_C = \int_C \delta \phi(x) \partial_\nu \phi(x) g^{\nu\mu_0} \sqrt{|g|} \frac{\varepsilon^{\mu_0, \dots, \mu_n}}{n!} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}, \quad (3.40)$$

ou em forma mais compacta,  $\gamma(x) |_C = \int_C \delta \phi(x) \star d\phi(x)$ , onde  $C$  representa o contorno de integração.

Assim para o campo escalar podemos propor uma 2-forma escrita como  $\omega = \int_C \delta(\phi) \wedge \delta(\star d\phi)$ , similar ao caso da partícula não-relativística. Onde  $\omega$  não depende do contorno. Para mostrar isto basta saber que a forma é fechada,  $d\omega = 0$ , isto é

$$d\omega = \int_C (d\delta(\phi) \wedge \delta(\star d\phi) + \delta(\phi) \wedge d\delta(\star d\phi)) \quad (3.41)$$

$$d\omega = \int_C (\delta(d\phi) \wedge \star \delta(d\phi) + \delta(\phi) \wedge \delta d(\star d\phi)). \quad (3.42)$$

Na equação (3.42) usamos a definição do produto escalar  $\alpha \wedge \star\beta = \alpha \cdot \beta(\star 1)$ , e a equação de movimento (3.37) no termo  $d(\star d\phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)$ .

Substituindo na equação anterior e usando o fato de que produto escalar é nulo pela simetria da variação encontramos que

$$d\omega = \int_C \left( g^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu\phi) \wedge \delta(\partial_\nu\phi)(\star 1) + \delta(\phi) \wedge \delta\left(-\frac{\delta U(\phi)}{\delta\phi}\right) \right) \quad (3.43)$$

$$d\omega = \int_C \delta(\phi) \wedge \delta(\phi) \left( -\frac{\delta^2 U(\phi)}{\delta\phi^2} \right) \quad (3.44)$$

$$d\omega = 0. \quad (3.45)$$

Segundo o teorema de Stokes, como  $d\omega = 0$ , a escolha do contorno da integral é arbitrária (2.38), logo podemos parametrizar a integral por diferentes caminhos.

### 3.9 Ação de Polyakov para a corda clássica

Como último exemplo de construção de espaços de fases estudaremos a ação de Polyakov. Nossa intenção nesta seção é apresentar conceitos básicos relativos à teoria de cordas usando geometria diferencial. Na ação de Polyakov temos campos escalares  $\chi^\mu$  acoplados a um campo gravitacional representado pelo tensor métrico  $\gamma_{ab}$ , onde cada campo escalar corresponde à coordenada da corda [10]. A ação desta teoria é descrita por

$$S_p = \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a \chi^\mu \partial_b \chi^\nu g_{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

Se fizermos a variação com relação à coordenada da corda  $\delta\chi^\mu$  obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_a \frac{\delta \mathcal{L}_p}{\delta(\partial_a \chi^\nu)} = \partial_a (\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a \chi^\mu) = 0. \quad (3.47)$$

A semelhança da ação com o caso do campo escalar clássico [14] permite igualmente, como no caso anterior, definir uma 2-forma  $\omega$  para o campo da corda

$$\omega = \int \delta(\chi) \wedge \delta(\star d\chi). \quad (3.48)$$



Para provar que a forma não depende das coordenadas, isto é, é fechada com respeito a  $d$  temos que mostrar que  $d\omega = 0$ , logo

$$d\omega = \int d\delta(\chi) \wedge \delta(\star d\chi) + \int \delta(\chi) \wedge d\delta(\star d\chi) \quad (3.49)$$

$$= \int \delta(d\chi) \wedge \star\delta(d\chi) + \int \delta(\chi) \wedge \delta(d(\star d\chi)). \quad (3.50)$$

A equação acima é uma 2-forma tanto no espaço  $M$  como em  $\mathcal{F}$ , logo o primeiro termo da equação anterior é nulo pois corresponde ao produto de um termo simétrico com um antissimétrico, similar a (3.43). Usando a equação de Euler-Lagrange para a corda  $d(\star d\chi^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\partial_a(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\partial_a\chi^\mu)(\star 1) = 0$ , obtemos

$$d\omega = \int \delta(\chi) \wedge \delta\left(\frac{1}{\sqrt{-h}}\partial_a(\sqrt{-h}h^{ab}\partial_a\chi^\mu)(\star 1)\right) = 0, \quad (3.51)$$

logo, como  $d\omega = 0$ , o interior da integral da forma simplética encontrada não depende diretamente das coordenadas. Se fizermos a variação com respeito a  $\delta$  encontraremos que  $\delta\omega = 0$  também, pois  $\delta^2 = 0$ .

# Capítulo 4

## Corda bosônica livre

A teoria de cordas considera que, à nível fundamental, a matéria não é constituída por partículas pontuais. Além disso ela considera que a partícula é representada por um modo de vibração de uma pequena corda. A abordagem do capítulo que segue foi escrita baseando-se em [11] e [10].

### 4.1 Da partícula pontual à teoria de cordas

Para escrever o lagrangiano que descreve uma corda consideremos um caso simples, a partícula pontual de massa  $m$  num campo gravitacional que é descrito pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x)$ \*. A ação da teoria é dado por

$$S = -m \int ds \quad \text{com} \quad ds^2 = -g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (4.1)$$

Se a trajetória clássica é descrita por  $x^\mu(\tau)$ , sendo um  $\tau$  um parâmetro a longo da trajetória ou linha de mundo, a equação anterior é reescrita como

$$S = -m \int \sqrt{-\dot{x}^2}, \quad \text{com} \quad \dot{x}^2 = -g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (4.2)$$

Note que ação (4.1) é invariante sob reparametrização. A ação da partícula pontual pode ser generalizada para casos mais gerais, como cordas ou branas (objetos de altas dimensões). O movimento da partícula é descrito pelas coordenadas  $X^\mu(\tau)$ ,

---

\*Usamos unidades naturais  $\hbar = c = 1$

que descrevem uma trajetória no espaço-tempo conhecido como linha de mundo, neste caso parametrizada pelo parâmetro  $\tau$ . No caso de uma corda no espaço-tempo precisamos além do parâmetro  $\tau$  um parâmetro espacial  $\sigma$ , logo as coordenadas da corda serão descritas pelo campo  $X^\mu(\tau, \sigma)$ , que descreve uma superfície bidimensional chamado de folha de mundo. Em geral representamos as coordenadas da folha de mundo por  $\sigma^a = \{\tau, \sigma\}$ , com  $a = 1, 2$  respetivamente. Assim como na dinâmica do caso da partícula pontual a ação é proporcional à longitude da linha de mundo, a generalização óbvia para a corda será que ela seja proporcional à folha de mundo, ou seja, proporcional à área da mesma. A folha do mundo não é mais do que uma superfície imersa no espaço-tempo. Tomaremos como ação para esta teoria a área desta superfície. Para encontrar a área em termos das coordenadas definimos uma métrica sobre a superfície  $G_{ab}$ , onde  $a, b = \{0, 1\}$ , que é relacionada com as coordenadas  $X$  através

$$G_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b} g_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

O tensor  $g_{\mu\nu}$  representa a métrica do espaço-tempo. Se assumimos que o espaço-tempo da folha de mundo é um espaço de Minkowski, encontramos que

$$G_{ab} = \begin{bmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X}X' \\ \dot{X}X' & X'^2 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

e a ação é dada por

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{-G}, \text{ com } G = \det G_{ab} = \sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}. \quad (4.5)$$

Esta é a ação de Nambu-Goto que descreve a corda relativística. A interpretação física da constante de proporcionalidade  $T$  corresponde à tensão da corda, que possui unidades de masa por unidade de área.

Com o objetivo de eliminar o radical da ação da Nabu-Goto procuramos uma ação equivalente. Esta ação foi encontrada por Polyakov (3.46), que introduz um campo auxiliar que é a métrica induzida na folha de mundo  $\gamma_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ .

A equação de movimento para este campo pode ser obtida pela variação  $\delta S_p$  em (3.46)

$$\delta S_p = \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \left( -\frac{1}{2} \delta\gamma^{cd} \gamma_{cd} (\gamma^{ab} \partial_a \chi^\mu \partial_b \chi^\nu) + \delta\gamma^{cd} \partial_c \chi^\mu \partial_d \chi^\nu \right) g_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Logo como a variação da ação deve ser zero encontramos

$$\partial_a \chi^\mu \partial_b \chi^\nu g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c \chi^\mu \partial_d \chi^\nu g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.7)$$

$$G_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} G_{cd} = 0. \quad (4.8)$$

Esta equação estabelece que a métrica  $\gamma_{ab}$  é proporcional a métrica  $G_{ab}$  além de um fator  $f(\sigma^a) = \frac{1}{2} \gamma^{cd} G_{cd}$ , isto é,  $\gamma_{ab} = f(\sigma^a)^2 G_{ab}$ . Logo calculando o determinante  $\gamma = f^4 G$  temos  $\sqrt{-G} = \sqrt{-\gamma} f^2 = \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma^{cd} G_{cd}$ . Portanto a ação de Polyakov e Nambu-Goto são equivalentes, sempre que a variação da ação com respeito a  $\delta\gamma_{ab}$  for nula.

A ação de Polyakov apresenta 3 tipos de simetrias locais que são:

1. Invariância sob transformações de Poincaré  $X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + c^\mu$ ;
2. Invariância sob reparametrização  $X^\mu(\sigma) \rightarrow X^\mu(\tilde{\sigma}) = \tilde{X}^\mu(\tilde{\sigma})$ ,  $g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial\sigma^\rho}{\partial\tilde{\sigma}^\alpha} \frac{\partial\sigma^\delta}{\partial\tilde{\sigma}^\beta} g_{\rho\delta}(\sigma)$ ;
3. Invariância de Weyl que leva as transformações  $X^\mu(\sigma) \rightarrow X'^\mu(\sigma)$ , e a métrica se transforma como  $g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma)$ .

## 4.2 Expansão em modos de Fourier

Se o tensor  $\gamma_{\alpha\beta}$  é simétrico as simetrias locais apresentadas anteriormente podem ser usadas para escolher os três parâmetros independentes de  $\gamma_{\alpha\beta}$ . O ideal seria tomar, por simplicidade, a métrica de Minkowski

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Para isto a reparametrização nos permite mudar duas das variáveis independentes usando duas transformações de coordenadas. Fazemos  $\gamma_{10} = 0$  e  $\gamma_{00} = -\gamma_{11}$ , portanto encontramos que a métrica é dada por algo do tipo  $\gamma_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$ , e usando a invariância de Weyl removemos a função  $\Omega^2$ . Logo a métrica  $\gamma_{\alpha\beta}$  pode ser trocada por  $\eta_{\alpha\beta}$ .

Com esta escolha a equação (3.46) se torna  $S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X$ , cuja equação de movimento é simplesmente a equação de onda livre,  $\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) X^\mu = 0$ .

O parâmetro  $\sigma$  é escolhido de modo que ele varie entre  $[0, \pi]$ , onde os valores  $0, \pi$  correspondem aos terminais da corda (pontas da corda) no caso de uma corda aberta. Também podemos escolher o parâmetro  $\sigma$  de forma que ele seja periódico,  $\sigma' = \sigma(\text{Mod } \pi)$  para o caso da corda fechada. Devemos levar em conta que sob variações do tipo  $X' \rightarrow X + \delta X$  no caso da corda aberta na ação (3.46) temos que anular o termo de superfície, isto é,  $-T \int d\tau [\delta X^\mu X'_\mu] |_{\sigma=\pi} - [\delta X^\mu X'_\mu] |_{\sigma=0} = 0$ , para garantir a invariância sob estas transformações, ou, em outras palavras, devemos impor que as condições de fronteira sejam de Dirichlet, Neumann ou mistas (onde cada ponta da corda tem uma condição de Dirichlet ou de Neumann).

No caso Dirichlet temos que  $\delta X^\mu = 0$  em  $\sigma = 0, \pi$ , ou seja, as pontas da corda estão fixas no espaço. Para o caso de Neumann impomos  $\partial^\sigma X^\mu |_{\sigma=0, \pi} = 0$ , onde cada ponta é livre de forças. A solução para a equação de onda livre mais geral é uma função do tipo

$$x^\mu = \frac{1}{2}[F^\mu(\tau + \sigma) + F^\mu(\tau - \sigma)]. \quad (4.10)$$

As soluções podem ser entendidas como expansões de Fourier que são funções com a forma  $F(u) = a_0 + a_1 u + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{inu} + b_n e^{-inu})$ . Com isto a solução geral para a corda fechada é representada como

$$X_R^\mu = \frac{1}{2} \left( x^\mu + l^2 p^\mu (\tau - \sigma) + il \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \right), \quad (4.11)$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2} \left( x^\mu + l^2 p^\mu (\tau + \sigma) + il \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)} \right). \quad (4.12)$$

Como exigência para que  $X_L$  e  $X_R$  sejam funções reais precisamos de que  $\alpha_{-n}^\mu$  seja o adjunto de  $(\alpha_n^\mu)^*$ , e similarmente para  $\tilde{\alpha}_n^\mu$ , isto é,  $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$  e  $\tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^*$ . Similarmente a solução para o caso da corda aberta com condições de Neumann é

$$X^\mu = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (4.13)$$

onde  $\alpha_n^\mu = \tilde{\alpha}_n^\mu$ . Nas soluções anteriores usamos  $l = 1/\sqrt{T\pi}$ . Definimos o momento canônico a partir de  $P^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}^\mu}$ , logo o momento dado pela ação de Polyakov é  $P^\mu = T \dot{X}^\mu = \dot{X}^\mu / \pi l^2$ . Para o caso da corda fechada o momento é representado por

$$P_R^\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{p^\mu}{\pi} + 2\sqrt{\frac{T}{\pi}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \right), \quad (4.14)$$

$$P_L^\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{p^\mu}{\pi} + 2\sqrt{\frac{T}{\pi}} \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \right), \quad (4.15)$$

e para o caso de corda aberta as equações serão

$$P^\mu = \frac{p^\mu}{\pi} + \sqrt{\frac{T}{\pi}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (4.16)$$

Já temos as ferramentas necessárias para definir os parênteses de Poisson de nossa teoria. Fazemos isso de forma que, para um mesmo  $\tau$ , sejam satisfeitas as relações

$$\{P^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma') \eta^{\mu\nu}, \quad (4.17)$$

$$\{X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')\} = 0, \quad (4.18)$$

$$\{P^\mu(\sigma), P^\nu(\sigma')\} = 0. \quad (4.19)$$

Substituindo as soluções (4.13), (4.11) e (4.12) no grupo acima, encontramos que os modos de Fourier satisfazem

$$\{\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu\} = 0, \quad (4.20)$$

$$\{\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\} = im\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

$$\{\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu\} = im\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

$$\{p^\mu, x^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Logo os modos de Fourier  $\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$  representam funções harmônicas. Estas equações são validas inclusive para  $n = m = 0$ , onde  $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2}lp^\mu$ . A equação (4.23) nos diz que o momento e a posição do centro de massa são variáveis canonicamente conjugadas.

O nosso objetivo é construir a forma que representa o espaço de fase para as cordas. Para tanto precisamos do diferencial do campo  $X$  pois este representará

junto com o operador  $\star$  o momento conjugado. No caso da corda aberta essa forma é

$$TdX^\mu = \frac{p^\mu}{\pi} d\tau + \sqrt{\frac{T}{\pi}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} [\cos(n\sigma) d\tau - \sin(n\sigma) d\sigma]. \quad (4.24)$$

A 2-forma é dada pela equação (3.48). Se substituirmos a nossa solução no caso da corda aberta obtemos

$$\begin{aligned} \omega = \int_C \delta \left( x_\mu + \frac{p_\mu}{\pi T} \tau + i \frac{1}{\sqrt{\pi T}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{\mu n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right) \wedge \\ \delta \left( \frac{p^\mu}{\pi} d\sigma + \sqrt{\frac{T}{\pi}} \sum_{m \neq 0} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} (\cos(m\sigma) d\sigma - \sin(m\sigma) d\tau) \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Um contorno simples para entender o comportamento deste espaço é escolhido de forma o tempo seja fixo  $\tau = \tau_0$ , e deixar  $\sigma \in [0, \pi]$ . Isto nos leva a uma equação mais simples para a 2-forma

$$\begin{aligned} \omega = \int_0^\pi \delta x_\mu \wedge \delta p^\mu \frac{d\sigma}{\pi} \\ + \int \frac{i}{\pi} \sum_{m, n \neq 0} \frac{e^{-i(m+n)\tau}}{n} \delta \alpha_{\mu n} \wedge \delta \alpha_m^\mu \cos(n\sigma) \cos(m\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Após a integração sobre a variável  $\sigma$  no intervalo  $[0, \pi]$ , a contribuição da integral anterior proveniente da parte que contém o cosseno é dada por duas deltas  $\frac{1}{2}(\delta(m-n) + \delta(m+n))$ . O termo que acompanha a  $\delta(m-n)$  no caso  $m-n=0$  é eliminado pois temos um produto simétrico de formas, isto é,  $\delta \alpha_{\mu n} \wedge \delta \alpha_n^\mu = 0$ . De fato encontramos a forma que representa o espaço de fase para a corda aberta, que é dada por

$$\omega = \delta x_\mu \wedge \delta p^\mu + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \delta \alpha_{\mu n} \wedge \delta \alpha_{-n}^\mu, \quad (4.27)$$

onde as funções exponenciais são eliminadas automaticamente ao considerar  $m+n=0$ . Chamamos a atenção para o fato de não haver dependência da 2-forma com relação às coordenadas.

Definimos o diferencial de uma função  $f$  como uma expansão na base  $\{\delta x^\mu, \delta p^\mu, \delta \alpha_n^\mu\}$  mediante  $df = \frac{\partial f}{\partial \delta x^\mu} d\delta x^\mu + \frac{\partial f}{\partial \delta p^\mu} d\delta p^\mu + \frac{\partial f}{\partial \delta \alpha_n^\mu} d\delta \alpha_n^\mu$ . O vetor definido a partir do espaço cotangente para a função  $f$  é dado por  $X_f = \sharp df$ , isto é

$$X_f = -\frac{\partial f}{\partial \delta x^\mu} \frac{\partial}{\partial \delta p^\mu} + \frac{\partial f}{\partial \delta p^\mu} \frac{\partial}{\partial \delta q^\mu} + \sum_n in \frac{\partial f}{\partial \delta \alpha_n^\mu} \frac{\partial}{\partial \delta \alpha_{-n}^\mu}. \quad (4.28)$$

Com isto definimos os parênteses de Poisson entre duas funções mediante a relação  $\{f, g\} = i_{X_f} i_{X_g} \omega$  como

$$\{f, g\} = \left( \frac{\partial f}{\partial \delta p_\mu} \frac{\partial g}{\partial \delta q^\mu} - \frac{\partial f}{\partial \delta q_\mu} \frac{\partial g}{\partial \delta p^\mu} \right) + in \left( \frac{\partial f}{\partial \delta \alpha_{\mu-n}} \frac{\partial g}{\partial \delta \alpha_n^\mu} - \frac{\partial f}{\partial \delta \alpha_{\mu n}} \frac{\partial g}{\partial \delta \alpha_{-n}^\mu} \right). \quad (4.29)$$

Para o cálculo do espaço de fase da corda fechada seguimos os mesmos passos para o caso da corda aberta. Inicialmente precisamos do diferencial do campo  $X = X_R^\mu + X_L^\mu$ , que é

$$TdX^\mu = \frac{p^\mu}{\pi} d\tau + \sqrt{\frac{T}{\pi}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} (d\tau - d\sigma) + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} (d\tau + d\sigma), \quad (4.30)$$

que substituindo na 2-forma  $\omega$  (3.48) nos dá

$$\begin{aligned} \omega = \int \delta \left( x^\mu + \frac{p^\mu}{\pi T} \tau + \frac{i}{2\sqrt{\pi T}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} + \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \right) \wedge \\ \delta \left( \frac{p^\mu}{\pi} d\tau + \sqrt{\frac{T}{\pi}} \sum_{m \neq 0} \alpha_m^\mu e^{-2im(\tau-\sigma)} (d\sigma - d\tau) + \tilde{\alpha}_m^\mu e^{-2im(\tau+\sigma)} (d\sigma + d\tau) \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Assim como na conta feita para o caso da corda fechada o produto  $\wedge$  levará em conta somente aquelas variáveis que anti-comutam, por isso destacamos que  $\delta \alpha_{\mu n} \wedge \delta \tilde{\alpha}_m^\nu$  será sempre nulo. Escolhendo o mesmo contorno de integração do caso da corda aberta, encontramos que a 2-forma é dada por

$$\omega = \delta x_\mu \wedge \delta p^\mu + \int \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{\mu n} \wedge \alpha_{-n}^\mu d\sigma + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_{\mu n} \wedge \tilde{\alpha}_{-n}^\mu d\sigma. \quad (4.32)$$

Neste caso foram eliminadas as funções exponenciais como no caso anterior, que são eliminadas ao se fazer  $m + n = 0$ . Agora, integrando sobre o intervalo  $[0, \pi]$ , obtemos a forma que define o espaço de fase para a corda fechada, que é dada por



$$\omega = \delta x_\mu \wedge \delta p^\mu + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_{\mu n} \wedge \alpha_{-n}^\mu + \tilde{\alpha}_{\mu n} \wedge \tilde{\alpha}_{-n}^\mu). \quad (4.33)$$

O diferencial de uma função  $f$  é dado por uma expansão na base de variáveis da corda fechada,  $\{\delta x^\mu, \delta p^\mu, \delta \alpha_n^\mu, \delta \tilde{\alpha}_n^\mu\}$ , por  $df = \frac{\partial f}{\partial \delta x^\mu} d\delta x^\mu + \frac{\partial f}{\partial \delta p^\mu} d\delta p^\mu + \frac{\partial f}{\partial \delta \alpha_n^\mu} d\delta \alpha_n^\mu + \frac{\partial f}{\partial \delta \tilde{\alpha}_n^\mu} d\delta \tilde{\alpha}_n^\mu$ . Sabemos que o vetor definido a partir do espaço cotangente para a função  $f$  é dado por  $X_f = \sharp df$ , isto é,

$$X_f = -\frac{\partial f}{\partial \delta x^\mu} \frac{\partial}{\partial \delta p^\mu} + \frac{\partial f}{\partial \delta p^\mu} \frac{\partial}{\partial \delta q^\mu} + in \frac{\partial f}{\partial \delta \alpha_n^\mu} \frac{\partial}{\partial \delta \alpha_{-n}^\mu} + in \frac{\partial f}{\partial \delta \tilde{\alpha}_n^\mu} \frac{\partial}{\partial \delta \tilde{\alpha}_{-n}^\mu}. \quad (4.34)$$

Encontramos os parênteses de Poisson entre duas funções através da relação  $\{f, g\} = i_{X_f} i_{X_g} \omega$ , que para o caso de corda fechada é escrito como

$$\begin{aligned} \{f, g\} = & \left( \frac{\partial f}{\partial \delta p_\mu} \frac{\partial g}{\partial \delta q^\mu} - \frac{\partial f}{\partial \delta q_\mu} \frac{\partial g}{\partial \delta p^\mu} \right) + in \left( \frac{\partial f}{\partial \delta \alpha_{\mu-n}} \frac{\partial g}{\partial \delta \alpha_n^\mu} - \frac{\partial f}{\partial \delta \alpha_{\mu n}} \frac{\partial g}{\partial \delta \alpha_{-n}^\mu} \right) \\ & + in \left( \frac{\partial f}{\partial \delta \tilde{\alpha}_{\mu-n}} \frac{\partial g}{\partial \delta \tilde{\alpha}_n^\mu} - \frac{\partial f}{\partial \delta \tilde{\alpha}_{\mu n}} \frac{\partial g}{\partial \delta \tilde{\alpha}_{-n}^\mu} \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

# Capítulo 5

## Corda no espaço anti-de Sitter

O princípio holográfico estabelece que o comportamento de um sistema num certo volume pode ser representada pela descrição da fronteira do mesmo. A teoria de cordas é matematicamente equivalente a uma teoria de campos conforme num espaço-tempo definido. Estes campos de fato são interpretados como uma fronteira do espaço das cordas, que para este caso será o espaço AdS. Nos últimos anos a teoria de cordas ganhou um interesse maior por parte dos cientistas, devido à correspondência AdS/CFT, já que esta correspondência estabelece uma equivalência entre a uma teoria da gravidade em  $(d + 1)$ -dimensões descrita num espaço anti-de Sitter e uma teoria de campos conformes em  $d$ -dimensões[12]. \*

### 5.1 Espaço anti-de Sitter

Ate agora estudamos a teoria de cordas num espaço plano. Vejamos o que acontece quando estamos tratando de um espaço curvo, especificamente AdS. O espaço anti-de Sitter é um espaço lorentziano  $(+ + - - \dots)$ , com constante de curvatura negativa. Em cinco dimensões o espaço anti-de Sitter,  $AdS_5$ , é descrito pela superfície de um hiperbolóide em  $\mathbb{R}^{2+4}$  dimensões dado por

$$X_{-1}^2 + X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = 1. \quad (5.1)$$

A superfície do  $AdS_5$  é composta por todos os vetores  $X \in \mathbb{R}^{2+4}$  que satisfazem

---

\*Ambas teorias precisam necessariamente ter o mesmo grupo de simetria,  $SO(2, d)$ . Nos estamos interessados no caso  $d = 4$

$X \cdot X = 1$ . O espaço  $AdS_5$  é embutido dentro deste hiperbolóide. A métrica sobre a superfície é dada por

$$ds^2 = dX_{-1}^2 + (-dX_0^2 + \sum_{i=1}^3 dX_i^2) - dX_4^2. \quad (5.2)$$

Esta métrica é invariante sob transformações do grupo isométrico  $SO(2, 4)$ . Esta métrica pode ser escrita em diferentes sistemas coordenados, logo escolhemos as coordenadas de Poincaré que são dadas por

$$X = (X_{-1}, X_0, X_2, X_3, X_4) \quad (5.3)$$

$$= \left( \frac{1 - z^\mu z_\mu + h^2}{2h}, \frac{z^0}{h}, \frac{z^i}{h}, \frac{1 + z^\mu z_\mu - h^2}{2h} \right). \quad (5.4)$$

Este grupo de coordenadas não cobre completamente o hiperbolóide<sup>†</sup>, logo a folha de mundo que vamos descrever só estará definida sobre a metade do hiperbolóide. Imaginemos que um plano que corta o hiperbolóide transversalmente em dois. O parâmetro  $h$  é definido para ir desde 0 até  $+\infty$ . Isto define uma das metades do hiperboloide. Para cobrir a outra metade basta tomar  $h \rightarrow -h$ , o que equivale a fazer uma reflexão da metade com  $h$  positivo. A métrica em coordenadas de Poincaré é escrita como

$$ds^2 = \frac{dz^\mu dz_\mu - dh^2}{h^2}. \quad (5.5)$$

## 5.2 Pequenas flutuações na corda

O estudo de pequenas oscilações será feito substituindo a métrica de Poincaré na ação de Nambu-Goto e eliminando-se os termos de alta ordem, como será explicado posteriormente. Esta aproximação leva a métrica de Nambu-Goto para a métrica de Polyakov (5.2). Para nossa folha de mundo escolhemos como parâmetros da corda as variáveis  $\sigma^\alpha = (z^0, h)$ , com  $z_0$  sendo uma coordenada, onde  $z^\mu = z^\mu(z^0, h)$ .

Definimos as derivadas dos vetores  $X$  com respeito a  $z^0$  com um ponto como em  $\dot{X}$ , e as derivadas com respeito a  $h$  com prima como em  $X'$ . Derivando  $X$  temos

---

<sup>†</sup>Uma escolha para que o hiperboloide seja parametrizado totalmente é o grupo de coordenadas locais  $\rho, t, n_a$ , com  $X_{-1} + iX_0 = e^{it} \cosh \rho$  e  $X_a = n_a \sinh \rho$  para  $a = 1, 2, 3, 4$ , onde  $\sum_{i=1}^4 n_a^2 = 1$ .

$$\dot{X} = \left( -\frac{z^\mu \dot{z}_\mu}{h}, \frac{\dot{z}^\mu}{h}, \frac{z^\mu \dot{z}_\mu}{h} \right), \quad (5.6)$$

$$X' = \left( \frac{h^2 - 2z^\mu z'_\mu h + z^\mu z_\mu - 1}{2h^2}, -\frac{z^\mu}{h^2} + \frac{z^{\mu'}}{h}, \frac{-h^2 + 2z^\mu z'_\mu h - z^\mu z_\mu - 1}{2h^2} \right) \quad (5.7)$$

Ressaltamos o fato de que  $\dot{z}_0 = 1$  e  $z'_0 = 0$ . Fazendo o quadrado destes dois vetores encontramos o grupo de equações

$$\dot{X}^2 = \frac{\dot{z}^\mu \dot{z}_\mu}{h^2} = \frac{1}{h^2} - \frac{\dot{z}^i \dot{z}_i}{h^2}, \quad (5.8)$$

$$X'^2 = \frac{z^{\mu'} z'_\mu}{h^2} - \frac{1}{h^2} = -\frac{1}{h^2} - \frac{z^{i'} z'_i}{h^2}, \quad (5.9)$$

$$\dot{X} X' = \frac{\dot{z}^\mu z'_\mu}{h^2} = -\frac{\dot{z}^i z'_i}{h^2}. \quad (5.10)$$

E substituindo as formulas anteriores na ação de Nambu-Goto obtemos

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (5.11)$$

$$S = -T \int \frac{dz^0 dh}{h^2} \sqrt{(z^\mu z'_\mu)(\dot{z}^\nu z'_\nu) - (\dot{z}^\nu z'_\nu)(z^{\mu'} z'_\mu - 1)} \quad (5.12)$$

$$S = -T \int \frac{dz^0 dh}{h^2} \sqrt{(\dot{z}^\nu z'_\nu) - (\dot{z}^\nu z'_\nu)(z^{\mu'} z'_\mu) + (z^\mu z'_\mu)(\dot{z}^\nu z'_\nu)}. \quad (5.13)$$

Para o estudo de pequenas oscilações é razoável fazer uma aproximação de forma que podemos desprezar os termos  $\mathcal{O}(z^4)$ . Isto nos dá

$$S = -T \int \frac{dz^0 dh}{h^2} \sqrt{1 - \dot{z}^i \dot{z}_i + z^{i'} z'_i - (\dot{z}^i \dot{z}_i)(z^{j'} z'_j) + (\dot{z}^i z'_i)(\dot{z}^j z'_j)} \quad (5.14)$$

$$\approx -T \int \frac{dz^0 dh}{h^2} \sqrt{1 + z^{i'} z'_i - \dot{z}^i \dot{z}_i + \mathcal{O}(z^4)} \quad (5.15)$$

$$\approx -T \int \frac{dz^0 dh}{h^2} \left( 1 + \frac{1}{2} (z^{i'} z'_i - \dot{z}^i \dot{z}_i) \right). \quad (5.16)$$

A ação de Polyakov é de fato equivalente à ação anterior sempre que pudermos reescrever a métrica induzida  $\gamma^{\alpha\beta}$  como a métrica plana de Minkowski. Usando as relações (5.10) na ação de Polyakov encontramos

$$S = -\frac{T}{2} \int dz^0 dh \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X_\nu \eta^{\mu\nu} \quad (5.17)$$

$$= -\frac{T}{2} \int \frac{dz^0 dh}{h^2} \left( (\dot{X})^2 - (X')^2 \right) \quad (5.18)$$

$$= -\frac{T}{2} \int dz^0 dh \left( (1 - \dot{z}^i \dot{z}_i) + (1 + z^{i'} z'_i) \right) \quad (5.19)$$

$$= -\frac{T}{2} \int \frac{dz^0 dh}{h^2} \left( 2 - \dot{z}^i \dot{z}_i + z^{i'} z'_i \right). \quad (5.20)$$

É de esperar que as ações sejam equivalentes no contexto linear pois existe uma relação direta entre ação de Nambu-Goto e a ação de Polyakov.

Para obter a respectiva equação de movimento basta calcular a variação da ação

$$\delta S = T \int_V \frac{dz^0 dh}{h^2} \left( (\dot{z}^i)(\delta \dot{z}_i) - (z^{i'})(\delta z'_i) \right). \quad (5.21)$$

Usando integração por partes na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned} \delta S &= T \int_V \frac{dz^0 dh}{h^2} \left( \ddot{z}^i - z^{i''} + \frac{2}{h} z^{i'} \right) \delta z_i \\ &+ T \int_{\partial V(z_0)} dz^0 \frac{(z^{i'}) \delta z_i}{h^2} \Big|_{\partial V(h)} - T \int_{\partial V(h)} dh \frac{(z^i) \delta z_i}{h^2} \Big|_{\partial V(z_0)}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nesta equação os dois últimos termos correspondem às condições de fronteira e condições iniciais da solução da equação de movimento, para  $z_i(z_0, h)$ , que se segue

$$\ddot{z}^i - z^{i''} + \frac{2}{h} z^{i'} = 0. \quad (5.23)$$

Estes dois termos têm que ser anulados para que seja satisfeito o princípio de mínima ação.

A solução geral é dada por uma equação da seguinte forma

$$z^i(z^0, h) = q^i(z^0, h) - h \partial_h q^i(z^0, h), \quad (5.24)$$

onde  $q^i(z^0, h)$  é solução da equação de onda  $\ddot{q}^i(z^0, h) - q^{i''}(z^0, h) = 0$ . Em geral, a solução para este tipo de equação é definido por funções arbitrárias cujo argumento

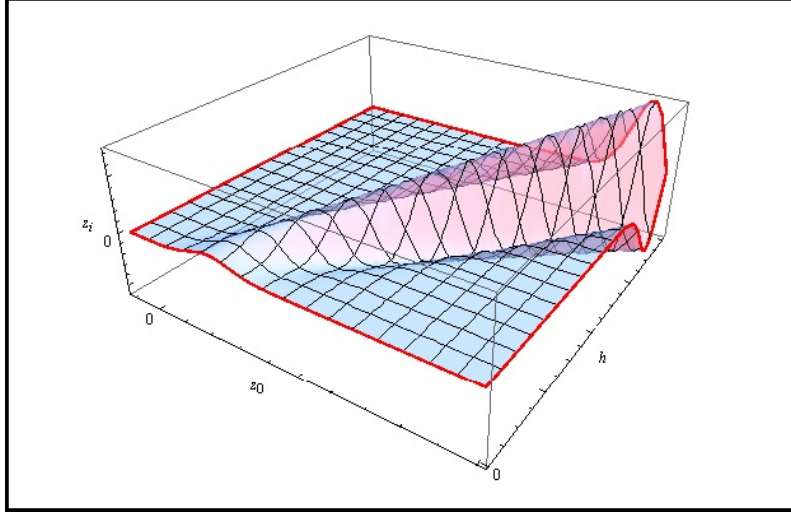


Figura 5.1: Propagação de uma pequena perturbação

as define como funções viajantes, que são definidas como aquelas que se propagam para esquerda  $q_+(z^0 + h)$  e direita  $q_-(z^0 - h)$ . A solução representada por estas ondas é

$$\begin{aligned} z^i(z^0, h) &= q_-^i(z^0 - h) + q_+^i(z^0 + h) - h(q_-^{i'}(z^0 - h) + q_+^{i'}(z^0 + h)) \quad (5.25) \\ &= q_-^i(z^0 - h) + q_+^i(z^0 + h) + h(\dot{q}_-^i(z^0 - h) - \dot{q}_+^i(z^0 + h)). \end{aligned}$$

A forma destas ondas viajantes é dada pelas condições de fronteira e condições iniciais. Na [Figura 5.1] plotamos um gráfico que representa o comportamento das funções anteriores após perturbações suaves sobre a fronteira  $h = 0$ .

### 5.2.1 Energia da onda

Um dos resultados mais importantes de [5] é o cálculo da energia e momento nas coordenadas de Poincaré para a perturbação na corda no espaço AdS. A solução encontrada para a corda em  $AdS_5$  é válida para trajetórias arbitrárias sobre o cone de luz. A função  $q^i(z^0, 0)$  corresponde a um dos extremos da corda (função que descreve a fronteira). Isto é visível ao se tomar limite  $h \rightarrow \infty$  em que  $z^i(z^0, 0) = q^i(z^0, 0)$ . Logo, segundo a conjectura a correspondência AdS/CFT interpretamos que a ponta da corda no espaço AdS representa a trajetória de uma partícula (Quark).

A solução obtida para descrever o comportamento da corda é solução também do caso não linearizado, como será mostrado na seção (5.4). Logo esta solução satisfaz a ação descrita por (5.14). Usemos a coordenada sobre o cone de luz  $\tau = z^0 - h$  em (5.26), logo a solução é escrita como

$$z^i(\tau, h) = q^i(\tau) + h \frac{q^i(\tau)}{d\tau}. \quad (5.26)$$

Em geral a solução é válida para o valor  $\mu = 0$ . Se tomamos a função

$$z^\mu(\tau, h) = q^\mu(\tau) + h \frac{q^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (5.27)$$

bastaria fazer com que  $q^0(\tau) = \tau$  e  $\frac{q^0(\tau)}{d\tau} = 1$  para recuperarmos a transformação de coordenadas  $z^0 = \tau + h$ . A variável  $\tau$  correspondem a um caso particular, que é a parametrização da solução pelo tempo próprio. Gostaríamos de analisar o que acontece com um observador mais geral, e para isso propomos um novo sistema de coordenadas. Na equação anterior note que se a fronteira da corda corresponde ao limite  $h \rightarrow 0$  a equação  $z^\mu(\tau, 0) = q^\mu(\tau)$  corresponde á trajetória de uma partícula. Em geral as funções  $q^\mu(\tau)$  são arbitrárias, isto é, validas para qualquer tipo de trajetória.

Definimos uma nova variável  $t$  (temporal) que esta vinculada com  $\tau$  de maneira que  $dt = d\tau/\sqrt{1-v^2}$  †, onde  $v^2 = v^i v_i$  e  $v^i(t) = \frac{dq^i(t)}{dt}$ , com  $\bar{q}^\mu(t) = q^\mu(\tau(t))$ . Logo se  $\tau$  corresponde ao tempo próprio então  $t$  corresponde ao tempo de um observador viajando com velocidade  $v$ .

A coordenada  $z^0$  será parte de nosso novo sistema coordenado mas para não confundir os dois sistemas coordenados usaremos  $\bar{z}^0$ .  $z^0$  está relacionado com  $z_0$  por

$$z^0 = \bar{z}^0 = \bar{q}^0(t) + h \frac{dt}{d\tau} \frac{d\bar{q}^0}{dt}. \quad (5.28)$$

Fazendo  $\bar{q}^0(t) = t$ , encontramos  $\bar{z}^0 = t + h\gamma$ , e colocando em evidência a coordenada  $\sigma$  temos que  $\gamma h = (\bar{z}^0 - t)$ . Agora podemos definir um novo sistema coordenado  $(\bar{z}^0, t)$ . Como interpretação destes dois sistemas de coordenadas podemos dizer que

---

†  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

o comportamento da corda num certo ponto de  $\sigma$ ,  $z^0$  é determinado pelo comportamento do extremo da corda num tempo retardado  $t$  obtido mediante a projeção que volta para a fronteira ao longo da linha determinada por  $h = (\bar{z}^0 - t)/\gamma$ .

A solução (5.24) em termos das variáveis  $(\bar{z}_0, t)$  é escrita como

$$z^\mu(\bar{z}^0, t) = \bar{q}^\mu(t) + (\bar{z}^0 - t) \frac{d\bar{q}^\mu(t)}{dt}. \quad (5.29)$$

Voltando para a ação de Nambu-Goto (5.13) as derivadas em termos do novo sistema coordenado são representadas por

$$\frac{d}{dh} = \frac{dt}{dh} \frac{d}{dt} + \frac{d\bar{z}^0}{dh} \frac{d}{d\bar{z}^0}, \quad \frac{d}{dz^0} = \frac{dt}{dz^0} \frac{d}{dt} + \frac{d\bar{z}^0}{dz^0} \frac{d}{d\bar{z}^0}. \quad (5.30)$$

A partir de agora denotamos a derivada de segunda ordem em  $\bar{q}^\mu$  com respeito a  $t$  como  $a^\mu$ , onde as derivadas são dadas por<sup>§</sup>

$$\frac{dt}{dh} = \frac{\sqrt{1 - v^i v_i}}{1 - v^i v_i + (\bar{z}^0 - t)(v^i a_i)}, \quad (5.31)$$

$$\frac{d\bar{z}^0}{dh} = 0, \quad (5.32)$$

$$\frac{d\bar{z}^0}{dz^0} = 1, \quad (5.33)$$

$$\frac{dt}{dz^0} = \frac{1 - v^i v_i}{1 - v^i v_i + (\bar{z}^0 - t)(v^i a_i)}. \quad (5.34)$$

Assim encontramos que as derivadas de (5.24) são reescritas como

$$\frac{dz^i}{dh} = - \frac{(\bar{z}^0 - t)\sqrt{1 - v^2}}{1 - v^2 + (\bar{z}^0 - t)(v^i a_i)} a^i, \quad (5.35)$$

$$\frac{dz^i}{dt} = v^i + \frac{(\bar{z}^0 - t)(1 - v^2)}{1 - v^2 + (\bar{z}^0 - t)(v^i a_i)} a^i, \quad (5.36)$$

A ação é acompanhada pelo diferencial de volume  $\frac{dh dz^0}{h^2}$ , que, com a troca de variáveis, é reescrito como

---

<sup>§</sup>Para encontrar as derivadas (5.36) resulta útil derivar a definição  $h = (\bar{z}^0 - t)/\gamma$  com respeito de  $\frac{dh}{dz^0} = (1 - \frac{dt}{dz^0})\sqrt{1 - v^i v_i} - (\bar{z}^0 - t) \frac{dt}{dz^0} \frac{v^i a_i}{\sqrt{1 - v^i v_i}} = 0$  e  $\frac{dh}{dh} = -\frac{dt}{dh} \sqrt{1 - v^i v_i} - (\bar{z}^0 - t) \frac{dt}{dh} \frac{v^i a_i}{\sqrt{1 - v^i v_i}} = 1$



$$\frac{dh dz_0}{h^2} = d\bar{z}_0 dt \frac{1 - v^2 + (\bar{z}^0 - t)(v^i a_i)}{(1 - v^2)^{(3/2)}(\bar{z}^0 - t)^2}. \quad (5.37)$$

Sabemos que o momento da onda é definido pela variação da lagrangiana

$$L = -T \int \frac{dh}{h^2} \sqrt{(\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu) - (\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu)(z^{\mu'} z'_\mu) + (\dot{z}^\mu z'_\mu)(\dot{z}^\nu z'_\nu)} \quad (5.38)$$

$$= -T \int \frac{dh}{h^2} \sqrt{1 - (\dot{z}^i \dot{z}_i) + (z^{i'} z'_i) + (\dot{z}^i \dot{z}_i)(z^{i'} z'_i) + (\dot{z}^i z'_i)^2}, \quad (5.39)$$

onde o radical é dado por

$$\sqrt{1 - (\dot{z}^i \dot{z}_i) + (z^{i'} z'_i) + (\dot{z}^i \dot{z}_i)(z^{i'} z'_i) + (\dot{z}^i z'_i)^2} = \frac{(1 - v^2)^{(3/2)}}{1 - v^2 + (\bar{z}^0 - t)(v^i a_i)}.$$

Derivando a densidade lagrangiana da equação anterior com respeito a  $\dot{z}^i$  obtemos

$$P^i = T \int \frac{dh}{h^2} \frac{\dot{z}^i + (z^{i'} z'_i) \dot{z}^i - (\dot{z}^i z'_i) z^{i'}}{\sqrt{1 - (\dot{z}^i \dot{z}_i) + (z^{i'} z'_i) + (\dot{z}^i \dot{z}_i)(z^{i'} z'_i) + (\dot{z}^i z'_i)^2}}, \quad (5.40)$$

e assim usando a transformada de Legendre com a densidade lagrangiana, obtemos a expressão da energia dada por

$$E = T \int \frac{dh}{h^2} \frac{1 + (z^{i'} z'_i)}{\sqrt{1 - (\dot{z}^i \dot{z}_i) + (z^{i'} z'_i) + (\dot{z}^i \dot{z}_i)(z^{i'} z'_i) + (\dot{z}^i z'_i)^2}}. \quad (5.41)$$

Substituindo  $(z'_i, \dot{z}_i)$  nas duas equações anteriores obtemos as equações clássicas de radiação por uma carga acelerada [15], onde a energia é dada por

$$E(\bar{z}_0) = T \int_{-\infty}^{\bar{z}_0} dt \frac{a^2 - (v \times a)^2}{(1 - v^2)^3} + T \left( \frac{1}{(1 - v^2)(\bar{z}_0 - t)} \right) \Big|_{t \rightarrow -\infty}^{t = \bar{z}_0}. \quad (5.42)$$

O segundo termo da equação anterior corresponde a uma derivada total e representa a energia intrínseca da partícula no tempo  $\bar{z}_0$  [13]. O primeiro termo que está sendo integrado sobre  $t$  recolhe toda a energia perdida pela partícula em cada momento antes do tempo  $\bar{z}_0$ . Similarmente para o momento encontramos

$$P^i(\bar{z}_0) = T \int_{-\infty}^{\bar{z}_0} dt \frac{a^2 - (v \times a)^2}{(1 - v^2)^3} v^i + T \left( \frac{v^i}{(1 - v^2)(\bar{z}_0 - t)} \right) \Big|_{t \rightarrow -\infty}^{t = \bar{z}_0}. \quad (5.43)$$

É muito interessante termos encontrado estas duas equações já que elas estabelecem uma equivalência entre a energia da propagação de uma onda sobre a corda no espaço AdS e a energia de radiação para uma carga acelerada.

### 5.3 Construção do espaço de fase para o caso linearizado

Para construir o espaço de fase no caso linearizado é útil trabalhar com uma das soluções em (5.26). Para esta seção continuamos com a parametrização  $\tau_{\pm} = z^0 \pm h$  e  $\sigma = 1/h$ , e escolhemos aquela que representa o movimento de uma oscilação da corda para a direita  $\tau = z^0 - h$ .

O seguinte grupo de equações define a troca de variáveis para as coordenadas  $(\tau, \sigma)$ , isto é,

$$dh = -\frac{1}{\sigma^2} d\sigma, \quad dz^0 = d\tau - \frac{1}{\sigma^2} d\sigma, \quad (5.44)$$

$$\partial_h = -\sigma^2 \partial_{\sigma} - \partial_{\tau}, \quad \partial_{z^0} = \partial_{\tau}. \quad (5.45)$$

A partir de agora a derivada com respeito a  $\tau$  também poderá ser representada pelo ponto acima da variável. Usamos este grupo de equações e rescrevemos o lagrangiano definido pela 2-forma  $L = \frac{T}{2} (\dot{z}^i \dot{z}_i - z^i z'_i) \frac{dz^0 \wedge dh}{h^2}$  como

$$L = \frac{T}{2} \left( \sigma^4 \partial_{\sigma} z^i \partial_{\sigma} z_i + 2\sigma^2 \partial_{\tau} z^i \partial_{\sigma} z_i \right) d\tau \wedge d\sigma, \quad (5.46)$$

cuja variação é dada por

$$\delta L = T \left( \sigma^4 \partial_{\sigma} z^i \partial_{\sigma} \delta z_i + \sigma^2 \partial_{\tau} \delta z^i \partial_{\sigma} z_i + \partial_{\tau} z^i \partial_{\sigma} \delta z_i \right) d\tau \wedge d\sigma \quad (5.47)$$

$$\delta L = \partial_{\sigma} \left( T \sigma^4 \partial_{\sigma} z^i \delta z_i + \sigma^2 \partial_{\tau} z^i \delta z_i \right) d\tau \wedge d\sigma + T \partial_{\tau} \left( T \sigma^2 \partial_{\sigma} z^i \delta z_i \right) d\tau \wedge d\sigma - T (E.L)^i \delta z_i d\tau \wedge d\sigma, \quad (5.48)$$

que nos leva à equação de movimento

$$(E.L)^i = \partial_\sigma(\sigma^4 \partial_\sigma z^i(\tau, \sigma) + \sigma^2 \partial_\tau z^i(\tau, \sigma)) + \partial_\tau(\sigma^2 \partial_\sigma z^i(\tau, \sigma)) = 0 \quad (5.49)$$

$$\partial_\sigma(\sigma^4 \partial_\sigma z^i) + 2\sigma^2 \partial_\sigma \partial_\tau z^i + 2\sigma \partial_\sigma \partial_\tau z^i = 0. \quad (5.50)$$

A solução para esta equação já foi obtida previamente,  $z_i(\tau, \sigma) = q_i(\tau) + \frac{1}{\sigma} \partial_\tau q_i(\tau)$ . Para a construção da 2-forma (3.48) precisamos ter as formas diferenciais escritas nas variáveis  $(\tau, \sigma)$ . Logo, fazendo a troca de variáveis a 1-forma  $dz_i$  é escrita como

$$dz_i = \partial_{z_0}(z_i) dz_0 + \partial_h(z_i) dh \quad (5.51)$$

$$dz_i = \partial_t(z_i) d\tau - \partial_\tau(z_i) d\sigma / \sigma^2 + \partial_\sigma(z_i) d\sigma + \partial_\tau(z_i) d\sigma / \sigma^2$$

$$dz_i = \partial_t(z_i) d\tau + \partial_\sigma(z_i) d\sigma. \quad (5.52)$$

O respectivo isomorfismo do  $dz_i$ , definido pela operação  $\star$ , é dado por

$$\star dz_i = \partial_{z_0}(z_i) dh + \partial_h(z_i) dz_0 \quad (5.53)$$

$$\star dz_i = -\partial_\tau(z_i) d\sigma / \sigma^2 - \partial_\tau(z_i) d\tau + \partial_\sigma(z_i) d\sigma - \partial_\sigma(z_i) \sigma^2 d\tau + \partial_\tau(z_i) d\sigma / \sigma^2$$

$$\star dz_i = \partial_\sigma(z_i) d\sigma - \partial_\tau(z_i) d\tau - \partial_\sigma(z_i) \sigma^2 d\tau. \quad (5.54)$$

Com estas definições encontramos que a lagrangiana (5.46) é representada pela 2-forma  $L = \frac{T}{2} \sigma^2 dz^i \wedge \star dz_i$ . A variação da lagrangiana anterior é simplesmente  $\delta L = T \sigma^2 d\delta z^i \wedge \star dz_i$ , que pode ser reescrita como

$$\delta L = d(T \sigma^2 \delta z^i \star dz_i) - T \delta z^i d(\sigma^2 \star dz_i), \quad (5.55)$$

onde o primeiro termo contribui como um termo de fronteira que é associado a uma corrente conservada, e o segundo termo corresponde à equação de movimento 5.50, de maneira análoga aos casos das seções (3.7) e (3.8). Se a variação da ação é definida como  $\delta S = \int_V \delta L$  podemos identificar o termo de fronteira como

$$\gamma(x) |_{\partial V} = \int_{\partial V} T \sigma^2 \delta z^i \star dz_i. \quad (5.56)$$

## 5.4 Espaço de fase para a corda em AdS no caso linearizado

Definimos o espaço de fase para nosso sistema a partir da 1-forma que representa as correntes conservadas mediante  $\omega_{Lin} = \delta\gamma$ , isto é

$$\omega_{Lin} = \int_C T \sigma^2 \delta z^i \wedge \star d\delta z_i \quad (5.57)$$

$$= \int_C T \sigma^2 \delta z^i \wedge (\partial_\sigma \delta z_i d\sigma - (\partial_t \delta z_i + \sigma^2 \partial_\sigma \delta z_i) dt). \quad (5.58)$$

Na equação acima  $C$  representa um contorno de integração. Lembre-se que  $\gamma$  pode depender da escolha do contorno de integração mas  $\omega$  não, como foi visto na seção (3.8). Substituindo a nossa solução  $\delta z_i = \delta q_i(\tau) + \frac{1}{\sigma} \delta \dot{q}_i(\tau)$  na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned} \omega_{Lin} &= \int_C T \left( (\delta \dot{q}^i(\tau) + \frac{1}{\sigma} \delta \ddot{q}^i(\tau)) \wedge \left( \frac{-1}{\sigma^2} \delta \dot{q}_i(\tau) d\sigma - \delta \ddot{q}_i(\tau) d\tau \right) \sigma^2 \right) \quad (5.59) \\ &= \int_C T \left( \delta \dot{q}^i(\tau) \wedge \delta q_i(\tau) d\sigma + \delta \ddot{q}^i(\tau) \wedge \delta \dot{q}_i(\tau) d\tau + \sigma \delta \ddot{q}^i(\tau) \wedge \delta q_i(\tau) d\tau \right) \\ &= \int_C T \left( \delta \dot{q}^i(\tau) \wedge \delta q_i(\tau) d\sigma + \delta \ddot{q}^i(\tau) \wedge \delta \dot{q}_i(\tau) d\tau + \sigma \partial_\tau (\delta \dot{q}^i(\tau) \wedge \delta q_i(\tau)) d\tau \right). \end{aligned}$$

As variáveis  $\sigma$  e  $\tau$  estão vinculadas pela escolha do contorno, de fato é possível parametrizar uma coordenada em termos da outra  $\sigma(\tau)$ . Então podemos fazer uma troca de variáveis  $d\sigma = \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau$ , e assim o último termo e o primeiro podem ser reagrupados em uma derivada temporal, logo, a equação anterior é reescrita como

$$\begin{aligned} \omega_{Lin} &= \int_C T \left( \delta \dot{q}^i(\tau) \wedge \delta q_i(\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau + \delta \ddot{q}^i(\tau) \wedge \delta \dot{q}_i(\tau) d\tau + \sigma \partial_\tau (\delta \dot{q}^i(\tau) \wedge \delta q_i(\tau)) d\tau \right) \\ &= \int_C \partial_\tau (T \sigma(\tau) \delta \dot{q}^i(\tau) \wedge \delta q_i(\tau)) d\tau + \int_C T (\delta \ddot{q}^i(\tau) \wedge \delta \dot{q}_i(\tau) d\tau) \\ &= (T \sigma(\tau) \delta \dot{q}^i(\tau) \wedge \delta q_i(\tau)) \Big|_C + \int_C T (\delta \ddot{q}^i(\tau) \wedge \delta \dot{q}_i(\tau) d\tau) \quad (5.60) \end{aligned}$$

$$= \omega_0 + \omega_1, \quad (5.61)$$

onde o primeiro termo da equação anterior  $\omega_0$  corresponde a um termo de superfície. ¶

---

¶Possivelmente a contribuição para a álgebra dos parênteses de Poisson dada pelo termo  $\omega_0$  pode ser nula sobre a fronteira  $\sigma \rightarrow \infty$ , pois se  $\omega_{ij}$  toma valores muito grandes eles não dão contribuição, já que  $\Pi_{ij} = \omega_{ij}^{-1}$ .

A contribuição dada por

$$\omega_1 = \int_C T \delta \ddot{q}^i(\tau') \wedge \delta \dot{q}_i(\tau') d\tau' \quad (5.62)$$

apresenta invariância sob transformações do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Uma forma de provar isto é através da transformação de Möbius,  $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ , onde  $ad - bc = 1$ , e cuja inversa é dada por  $\tau = \frac{d\tau'-b}{-c\tau'+a}$ . Em (5.62) as derivadas se transformam como

$$\partial'_{\tau'} = \partial'_{\tau'} \tau \partial_{\tau} = \frac{ad - bc}{(c\tau' - a)^2} \partial_{\tau} = \frac{(c\tau + d)^2}{ad - bc} \partial_{\tau}. \quad (5.63)$$

Para manter a invariância de (5.62) a função  $q(\tau')$  deve se transformar como uma função modular  $\frac{1}{(c\tau+d)^k} q(\tau)$ , com  $k = 2$ . Substituindo em (5.62) encontramos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \int_C T (c\tau + d)^2 \partial_{\tau} \left( (c\tau + d)^2 \partial_{\tau} \left( \frac{\delta q_i(\tau)}{(c\tau + d)^2} \right) \right) \wedge \partial_{\tau} \left( \frac{\delta q_i(\tau)}{(c\tau + d)^2} \right) d\tau \\ &= \int_C T \delta \ddot{q}^i(\tau) \wedge \delta \dot{q}_i(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.64)$$

## 5.5 Solução completa para a corda em AdS

A solução encontrada para a pequena flutuação é usada para construir a solução sobre todo o espaço AdS. Esta solução deve corresponder a uma superfície mínima, isto é, aquela solução que minimiza a ação de Nambu-Goto, ou seja, a solução deve minimizar a área definida pela ação.

Sabemos que espaço  $AdS_5$  é descrito por um hiperbolóide em  $\mathbb{R}^{2+4}$ , com vetores  $X^M \in \mathbb{R}^{2+4}$  que satisfazem  $g_{MN} X^M X^N = 1$ , com  $g_{MN} \{+ + - - -\}$ .

De fato a solução obtida para o caso linearizado mediante perturbações da corda no espaço  $AdS_5$  corresponde a uma solução mais geral dada por

$$X^M = \sigma l^M(\tau) \pm \partial_{\tau} l^M(\tau). \quad (5.65)$$

Note que a equação anterior corresponde à solução da corda no espaço  $AdS_5$ . A fronteira de  $\mathbb{R}^{2+4}$  é definida por vetores do tipo luz. Escolhemos  $l^M$  como uma série de vetores do tipo luz, isto é  $l^M(\tau) l_M(\tau) = 0$ , e para satisfazer  $g_{MN} X^M X^N = 1$

tomamos uma parametrização para  $\tau$  de modo que  $\partial_\tau l^M(\tau)\partial_\tau l_M(\tau) = 1$ . Note que  $l^M(\tau)\partial_\tau l_M(\tau) = 0$ . Basta substituir (5.65) na ação de Nambu-Goto e ver que o termo dentro da raiz quadrada é uma constante. Logo a superfície definida por esta ação é uma superfície mínima pois sua variação é nula.

Substituindo a solução  $z^\mu = q^\mu + (\partial_\tau q^\mu)/\sigma = q^\mu + \dot{q}^\mu/\sigma$  nas coordenadas de Poincaré e comparando com (5.65) encontramos que  $l^M$  é dado por

$$l^M = \left( \frac{1 - q^\mu q_\mu}{2}, q^\mu, \frac{1 + q^\mu q_\mu}{2} \right), \quad (5.66)$$

onde  $\dot{q}^\mu \dot{q}_\mu = 1$ . A métrica da folha de mundo é dada por

$$ds_{F.M}^2 = g_{MN} dX^M dX^N \quad (5.67)$$

$$= (\ddot{l}^M \ddot{l}_M + \sigma^2) d\tau^2 - 2d\sigma d\tau, \quad (5.68)$$

logo nossa ação em formas diferenciais é dada por

$$S = \frac{T}{2} \int dX^M \wedge \star dX_M. \quad (5.69)$$

A variedade simplética é facilmente calculada como na seção (3.9), e é dada por

$$\omega = T \int \delta X^M \wedge \delta(\star dX_M). \quad (5.70)$$

Da métrica induzida sobre a folha de mundo determinamos os diferenciais  $\star d\tau = -d\tau$  e  $d\sigma = -(\ddot{l}^N \ddot{l}_N + \sigma^2) d\tau - d\sigma$ . Substituindo  $X^M = \sigma l^M(\tau) + \partial_\tau l^M(\tau)$  na equação (5.70) obtemos exatamente

$$\begin{aligned} \omega &= \int_C \partial_\tau (T\sigma(\tau)\delta l^M(\tau) \wedge \delta l_M(\tau)) d\tau + \int_C T (\delta \ddot{l}^M(\tau) \wedge \delta \dot{l}_M(\tau) d\tau) \\ &+ \int_C T (\sigma(\tau)\delta l^M(\tau) + \delta \dot{l}_M(\tau)) \wedge \delta(\ddot{l}^N(\tau)\ddot{l}_N(\tau)l_M(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$= \omega' + \int_C T (\sigma(\tau)\delta l^M(\tau) + \delta \dot{l}_M(\tau)) \wedge \delta(\ddot{l}^N(\tau)\ddot{l}_N(\tau)l_M(\tau)) d\tau. \quad (5.72)$$

Chamamos os dois primeiros termos de (5.71) como  $\omega'$  por enquanto. Note que a primeira parte da forma simplética acima,  $\omega'$ , é muito parecida com a forma

encontrada para o caso linearizado  $\omega_{Lin}$  (5.61). O último termo pode ser simplificado levando em consideração que os vetores são do tipo luz. Da variação de  $l^M l_M = 0$  obtemos  $\delta l^M l_M = 0$ , logo, no último termo de (5.71) podemos anular o termo  $\sigma \delta l^M$  o que nos permite reescrever  $\omega$  como

$$\omega = \omega' + \int_C T \delta \dot{l}_M \wedge \delta (\ddot{l}^N \ddot{l}_N l_M) d\tau. \quad (5.73)$$

Usando (5.66) encontramos que  $\ddot{l}^N \ddot{l}_N = \ddot{q}^\mu \ddot{q}_\mu$ , e também que  $\delta l^4 = \delta q^\mu q_\mu = -\delta l^{-1}$ . Logo, em  $\omega_0$ , são anulados os termos que contém as coordenadas  $\delta l^{-1}$  e  $\delta l^4$ , já que

$$\begin{aligned} \delta \dot{l}^M \wedge \delta l_M &= \delta \dot{l}^{-1} \wedge \delta l^{-1} + \delta \dot{l}^\mu \wedge \delta l_\mu - \delta \dot{l}^4 \wedge \delta l^4 = \delta \dot{l}^\mu \wedge \delta l_\mu = \delta \dot{q}^\mu \wedge \delta q_\mu, \\ \delta \ddot{l}^M \wedge \delta \dot{l}_M &= \delta \ddot{l}^{-1} \wedge \delta \dot{l}^{-1} + \delta \ddot{l}^\mu \wedge \delta \dot{l}_\mu - \delta \ddot{l}^4 \wedge \delta \dot{l}^4 = \delta \ddot{l}^\mu \wedge \delta \dot{l}_\mu = \delta \ddot{q}^\mu \wedge \delta \dot{q}_\mu. \end{aligned}$$

Portanto  $\omega'$  é equivalente a (5.61),  $\omega' = \omega_{Lin}$ . Podemos simplificar ainda mais termos usando as relações dadas pelos produtos dos vetores sobre a superfície do AdS, isto é

$$\delta \dot{l}^M l_M = \delta \dot{q}^\mu q_\mu + \delta \dot{l}^{-1} l^{-1} - \delta \dot{l}^4 l^4 \quad (5.74)$$

$$= \delta \dot{q}^\mu q_\mu + \delta \dot{l}^{-1} \quad (5.75)$$

$$= \delta \dot{q}^\mu q_\mu - \delta \dot{q}^\mu q_\mu - \delta q^\mu \dot{q}_\mu \quad (5.76)$$

$$= -\delta q^\mu \dot{q}_\mu. \quad (5.77)$$

Substituindo os resultados das equações acima em (5.71) obtemos a forma simplética

$$\omega = \omega_{Lin} + \int_C T \left( \delta \dot{l}^M \wedge \delta l_M (\ddot{q}^\mu \ddot{q}_\mu) + \delta \dot{l}^M \wedge \delta (\ddot{q}^\mu \ddot{q}_\mu) l_M \right) d\tau \quad (5.78)$$

$$= \omega_{Lin} + \int_C T \left( \delta \dot{q}^\mu \wedge \delta q_\mu (\ddot{q}^\nu \ddot{q}_\nu) + \delta \dot{l}^M \wedge \delta (\ddot{q}^\mu \ddot{q}_\mu) l_M \right) d\tau \quad (5.79)$$

$$= \omega_{Lin} - \int_C T \left( \delta q^\mu \wedge \delta \dot{q}_\mu (\ddot{q}^\nu \ddot{q}_\nu) + \delta q^\mu \wedge \delta (\ddot{q}^\nu \ddot{q}_\nu) \dot{q}_\mu \right) d\tau. \quad (5.80)$$

É importante ressaltar que  $\delta \omega = 0$ . Note que a forma simplética  $\omega$  que descreve a corda clássica no espaço AdS, é escrita em termos das funções sobre a fronteira  $\sigma = 0$ , que são  $q_\mu$ , e lembramos que elas podem corresponder à trajetória de uma partícula num espaço de menor dimensão.

---

<sup>||</sup>Claramente  $l^{-1} + l^4 = 1$

# Capítulo 6

## Conclusões

Após uma revisão da origem de alguns dos conceitos básicos da geometria diferencial, em especial as estruturas simpléticas, estudamos algumas das aplicações desses conceitos como a construção de uma variedade simplética para os casos da partícula não-relativística, o campo escalar livre e a corda bosônica dada pela ação de Polyakov. Neste último caso calculamos explicitamente para a solução em modos de Fourier a estrutura simplética e a sua relação com a álgebra de Poisson. Motivados pelo princípio holográfico e pelos resultados da correspondência AdS/CFT apresentamos a solução para uma perturbação da corda clássica no espaço AdS no caso linearizado, que é dada por uma onda não-linear na folha de mundo. Ao calcular a energia desta onda demonstramos que ela coincide com energia irradiada por uma carga acelerada que é encontrada usando o potencial de Liénard Wiechert na eletrodinâmica clássica. Este resultado é interessante pois ele estabelece uma equivalência entre a fronteira da folha de mundo e os pontos terminais da corda, que representam a trajetória da carga acelerada. Propomos uma solução para a ação de Nambu-Goto no espaço AdS baseado no caso linearizado de modo que esta ação seja minimizada, em outras palavras de modo que a solução corresponda a uma superfície mínima. A partir da solução proposta construímos o espaço de fase que descreve a corda clássica sobre o espaço  $AdS_5$ . A forma simplética que descreve este espaço de fase é descrita em termos das funções sobre a fronteira, que são funções que representam trajetória da partícula no espaço de Minkowski.



# Apêndice A

## Conceitos Básicos de Geometria

### A.1 Mapa

Seja  $X$  e  $Y$  dois conjuntos. Um mapa  $f$  é uma função pela qual atribuímos a cada  $y \in Y$  um  $x \in X$ . Isto é representado por

$$f : X \rightarrow Y. \quad (\text{A.1})$$

Se  $f$  é expressado por alguma fórmula explícita ela pode ser escrita como

$$f : x \mapsto f(x). \quad (\text{A.2})$$

Um subconjunto de  $X$  cujos elementos são mapeados para  $y \in Y$  com a ação de  $f$  é chamado a *imagem inversa* de  $y$ , e é dado por  $f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$ . O conjunto  $X$  é chamado de domínio do mapa enquanto que  $Y$  é chamado de contradomínio do mapa. A imagem do mapa é  $f(X) = \{y \in Y | y = f(x) \text{ para qualquer } x \in X\} \subset Y$ , se denota com  $Im f$ .

### A.2 Vetores e espaço vetorial

Os vetores são objetos com norma e orientação. Um espaço vetorial é uma estrutura algébrica definida a partir dos elementos de um conjunto não vazio (os vetores), que satisfazem uma operação interna, a soma, e uma externa, o produto por escalares. Não é necessário que os vetores tenham uma interpretação geométrica, podendo ser quaisquer objetos, como polinômios ou grupos de matrizes, que satisfazem aos seguintes axiomas:

1.  $\mathbf{v} + \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}$ ,
2.  $(\mathbf{v} + \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} + (\boldsymbol{\nu} + \mathbf{v})$ ,
3.  $\exists 0$  tal que  $\boldsymbol{\nu} + 0 = \boldsymbol{\nu}$ ,
4.  $c(\boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}) = c\boldsymbol{\nu} + c\mathbf{v}$ ,
5.  $(c + d)\boldsymbol{\nu} = c\boldsymbol{\nu} + d\boldsymbol{\nu}$ ,
6.  $(cd)\boldsymbol{\nu} = c(d\boldsymbol{\nu})$ ,
7.  $1 \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}$ .

Onde  $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \in V$ ,  $c, d \in K$  (corpo) e  $1$  é a unidade de  $K$ . Seja  $\{\boldsymbol{\nu}_i\}$  um conjunto de  $k$ -vetores, se a equação

$$x_1\boldsymbol{\nu}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{\nu}_k = 0 \quad (\text{A.3})$$

tem solução não-trivial,  $x_i \neq 0$  para qualquer  $i$ , o conjunto é chamado de linearmente independente. Se a solução é dada só pela solução trivial  $x_i = 0$  o conjunto  $\{\boldsymbol{\nu}_i\}$  é chamado de linearmente dependente. Nenhum dos vetores da equação (A.3) pode ser o vetor  $\mathbf{0}$  pois de ser nulo os vetores seriam linearmente dependentes.

O conjunto de vetores linearmente independentes  $\{e_i\}$  são chamados de base para  $V$ . Qualquer elemento  $\boldsymbol{\nu} \in V$  pode ser escrito como combinação de  $\{e_i\}$ , isto é

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^1 e_1 + \cdots + \boldsymbol{\nu}^n e_n. \quad (\text{A.4})$$

Os números  $\boldsymbol{\nu}^i \in K$  são chamados de componentes de  $\boldsymbol{\nu}$  com respeito da base  $\{e_i\}$ . Se a base tem  $n$  elementos se diz que a dimensão de  $V$  é  $\dim V = n$ . Usualmente o espaço vetorial  $n$ -dimensional definido sobre um corpo  $K$  é escrito como  $V(n, K)$ .

### A.2.1 Mapa linear, imagem e kernel.

Dados dois espaços vetoriais  $V$  e  $W$ , um mapa  $f : V \rightarrow W$  é chamado de mapa linear se satisfaz  $f(a\boldsymbol{\nu} + b\mathbf{v}) = af(\boldsymbol{\nu}) + bf(\mathbf{v})$  para qualquer  $a, b \in K$  e  $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v} \in V$ , ou seja, preserva a soma de vetores e o produto escalar entre eles.

A imagem de  $f$  é  $f(V) \subset W$  se denota como  $Im f$ . O Kernel de  $f$  é  $\{\boldsymbol{\nu} \in V | f(\boldsymbol{\nu}) = 0\}$ , onde  $0$  representa o vetor nulo  $W$ , e é denotado como  $Ker f$ . Se  $f : V \rightarrow W$  é um mapa linear, então  $\dim V = \dim(Ker f) + \dim(Im f)$ .

### A.3 Espaço vetorial dual

Para cada espaço vetorial podemos definir um correspondente espaço vetorial dual. Definimos  $f : V \rightarrow K$  como uma função linear no espaço vetorial  $V(n, K)$  sobre o corpo  $K$ , e  $\{e_i\}$  uma base para o vetor  $\boldsymbol{\nu} = \nu^1 e_1 + \dots + \nu^n e_n$ . Pela linearidade de  $f$  temos que  $f(\boldsymbol{\nu}) = \nu^1 f(e_1) + \dots + \nu^n f(e_n)$ . Logo, se nos conhecemos os valores de  $f(e_i)$  para cada  $i$ , é possível conhecer sempre o resultado de  $f$  aplicado a qualquer vetor. Isto é muito útil para definir o espaço dual.

O espaço vetorial dual para  $V(n, K)$  é denotado como  $V^*(n, K)$ , ou simplesmente  $V^*$ . Se  $\dim V$  é finita então  $\dim V = \dim V^*$ . O espaço dual tem como base vetorial  $\{e^{*i}\}$  e é uma função linear definida pelo produto

$$e^{*i} \cdot e_j = \delta_j^i. \quad (\text{A.5})$$

Qualquer função linear  $f$  é chamada de dual se pode ser expandida em termos de  $V^*$ , isto é

$$f = f_i e^{*i}. \quad (\text{A.6})$$

A ação de  $f$  no campo vetorial  $\boldsymbol{\nu}$  é interpretada como um produto interno entre vetores filas e colunas

$$f(\boldsymbol{\nu}) = f_i e^{*i} (\nu^j e_j) = f_i \nu^j e^{*i} e_j = f_i \nu^j. \quad (\text{A.7})$$

Como  $f$  é um mapa linear que leva elementos do espaço vetorial  $V$  para o espaço vetorial  $W$ , podemos definir brevemente o Pullback como uma transformação linear que leva de elementos de  $f^* : W^* \rightarrow V^*$ .

#### A.3.1 Fluxos e Derivada de Lie

Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$ . Um curva integral  $x(t)$  é uma curva em  $M$  cujo vetor tangente em  $x(t)$  é  $X|_x$ . Dada uma carta  $(U, \varphi)$ , denotamos  $x^\mu(t)$  como a  $\mu$ -ésima componente de  $\varphi(x(t))^*$ . Atuando  $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$  sobre a função de coordenadas temos as equações diferenciais

---

\*É um abuso de notação usar  $x$  para denotar um ponto em  $M$  e ao mesmo tempo as coordenadas.

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(x(t)). \quad (\text{A.8})$$

A solução para as equações diferenciais anteriores são equivalentes a encontrar a curva integral dada pelo vetor  $X$  com a condição inicial  $x_0^\mu = x^\mu(t=0)$ .

Seja  $\sigma(t, x_0)$  uma curva integral de  $X$  que passa pelo ponto  $x_0$  em  $t=0$  denotada pela coordenada  $\sigma^\mu(t, x_0)$ , a equação diferencial da curva integral e sua condição inicial é

$$\frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma^\mu(t, x_0)), \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu. \quad (\text{A.10})$$

O mapa  $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  é chamado de fluxo gerado por  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Os fluxos satisfazem

$$\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = \sigma(t+s, x_0). \quad (\text{A.11})$$

Para um  $t$  fixo  $\sigma_t$  satisfaz as regras

1.  $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x)$ ,
2.  $\sigma_0$  é o elemento identidade,
3.  $\sigma_t = (\sigma_t)^{-1}$ .

Da equação (A.9) definimos uma transformação infinitesimal onde ponto  $x$ , com coordenada  $x^\mu$ , é mapeado para

$$\sigma_\varepsilon^\mu(x) = \sigma^\mu(\varepsilon, x) = x^\mu + \varepsilon X^\mu. \quad (\text{A.12})$$

Neste caso  $X$  representa o gerador infinitesimal da transformação  $\sigma_\varepsilon$ . Para definir a derivada de Lie suponhamos  $\sigma^1$  e  $\sigma^2$  dois fluxos com campos vetoriais  $X$  e  $Y$  respetivamente

$$\frac{d}{ds}\sigma^{1\mu}(s, x) = X^\mu(\sigma^1(s, x)) \quad (\text{A.13})$$

$$, \frac{d}{dt}\sigma^{2\mu}(t, x) = Y^\mu(\sigma^2(t, x)). \quad (\text{A.14})$$

Se nos movemos uma pequena distancia  $\varepsilon_1$  em  $x$  ao longo do fluxo  $\sigma^1_{\varepsilon_1}$ , e logo uma distancia  $\varepsilon_2$  mediante  $\sigma^2_{\varepsilon_2}$  temos

$$\sigma^{2\mu}(\varepsilon_2, \sigma^1(\varepsilon_1, x)) \approx x^\mu + \varepsilon_1 X^\mu + \varepsilon_2 Y^\mu + \varepsilon_1 \varepsilon_2 X^\mu \partial_\nu Y^\mu. \quad (\text{A.15})$$

Do mesmo jeito realizamos a mesma transformação anterior mas comutando  $\sigma^1_{\varepsilon_1}$  com  $\sigma^2_{\varepsilon_2}$ , isto é

$$\sigma^{1\mu}(\varepsilon_1, \sigma^2(\varepsilon_2, x)) \approx x^\mu + \varepsilon_2 Y^\mu + \varepsilon_1 X^\mu + \varepsilon_2 \varepsilon_1 Y^\mu \partial_\nu X^\mu. \quad (\text{A.16})$$

A diferença entre estas duas equações define o braket de Lie, onde

$$\sigma^{2\mu}(\varepsilon_2, \sigma^1(\varepsilon_1, x)) - \sigma^{1\mu}(\varepsilon_1, \sigma^2(\varepsilon_2, x)) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 X^\mu \partial_\nu Y^\mu - \varepsilon_2 \varepsilon_1 Y^\mu \partial_\nu X^\mu \quad (\text{A.17})$$

$$= \varepsilon_1 \varepsilon_2 [X, Y]^\mu. \quad (\text{A.18})$$

Para definir a derivada de Lie usamos as definições A.9 e A.14, estamos interessados no comportamento do campo vetorial  $Y^\mu$  ao longo do campo  $\sigma^1$ . A derivada de Lie é dada pela diferença entre  $(\sigma^1_{-\varepsilon_1})_* Y|_{\sigma^1_{\varepsilon_1}(x)}$  e  $Y|_x$  no limite  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ , isto é

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_1} [(\sigma^1_{-\varepsilon_1})_* Y|_{\sigma^1_{\varepsilon_1}(x)} - Y|_x], \quad (\text{A.19})$$

note que  $(\sigma^1_{-\varepsilon_1})_* Y|_{\sigma^1_{\varepsilon_1}(x)}$  e  $Y|_x$  são vetores de  $T_x M$ , com  $(\sigma^1_{-\varepsilon_1})_* : T_{\sigma^1_{\varepsilon_1}(x)} M \rightarrow T_x M$ . Usando a definição (A.12) temos que

$$(\sigma^1_{-\varepsilon_1})_* Y|_{\sigma^1_{\varepsilon_1}(x)} = [Y^\mu(x) + \varepsilon_1 X^\nu \partial_\nu Y^\mu(x)] \partial_\mu [x^\rho - \varepsilon_1 X^\rho(x)] \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Big|_x, \quad (\text{A.20})$$

que substituindo na equação anterior e eliminando os fatores da ordem maior que  $\mathcal{O}(\varepsilon_1^2)$  é escrita como

$$\mathcal{L}_X Y = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (\text{A.21})$$

Para formas a derivada de Lie é definida de forma similar, ou seja

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - \omega_\nu \partial_\mu X^\mu) d\omega^\nu. \quad (\text{A.22})$$

A derivada de Lie para funções  $f \in \mathcal{F}(M)$  ao longo de  $\sigma_\epsilon$ , com  $\sigma_\epsilon$  gerado por um campo vetorial  $X$ , é

$$\mathcal{L}_X f = X^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} f = X[f], \quad (\text{A.23})$$

que equivale a derivada direcional de  $f$  ao longo de  $X$ . Em geral a derivada de Lie satisfaz a regra de Leibnitz, isto é

$$\mathcal{L}_X(T_1 \otimes T_2) = \mathcal{L}_X(T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathcal{L}_X(T_2), \quad (\text{A.24})$$

onde  $T$  representa pode representar tensores.

# Apêndice B

## Formas bilineares

Em ordem de entender a estrutura simplética e os parenteses de Poisson definimos as formas bilineares, especialmente as formas bilineares antissimétricas. Uma forma bilinear é um mapa que atua sobre dois espaços vetoriais. Seja  $\mathbf{V}^n$  um espaço vetorial  $n$ -dimensional, uma forma bilinear é um mapeado  $\varphi : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \rightarrow K$ , com  $K$  um corpo, que satisfaz

1.  $\varphi(\alpha u + \beta v, y) = \alpha\varphi(u, y) + \beta\varphi(v, y)$ ,
2.  $\varphi(x, \alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(x, u) + \beta\varphi(x, v)$  com  $\alpha, \beta \in K$ , e  $u, v, x, y \in \mathbf{V}^n$ .

Existe uma correspondência entre o espaço matricial  $\mathbf{M}_{n \times n}(K)$  e a forma bilinear em  $\mathbf{V}^n$ . Dada uma matriz  $A \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbf{V}^n)$  podemos definir a forma bilinear  $\varphi_A$  em  $\mathbf{V}^n$  como

$$\varphi_A(x, y) = x' A y = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j, \quad (\text{B.1})$$

convenientemente, a matriz associada com a forma bilinear corresponde a  $A_\varphi = [a_{ij}] = [\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)] \in \mathbf{M}_{n \times n}(K)$ , onde  $\{\mathbf{e}_i\}$  é base de  $\mathbf{V}^n$ .

Uma forma bilinear pode ser simétrica ou antissimétrica, estamos interessados no caso antissimétrico  $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ , com  $A = -A^T$ .

Como exemplo para entender a álgebra da estrutura simplética definimos o produto simplético escalar estandar em  $\mathbb{R}^{2n}$  como  $[x, y] = x' J y = \sum_i = 1^n (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i)$ . Em general para  $n = 1$  nos temos

$$[x, y] = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

que representa a área orientada do paralelogramo formado pelos vetores  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Assim para  $n$ , em geral, podemos assumir que  $[x, y]$  representa a soma de várias áreas de paralelogramos formados mediante a projeção de  $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$  nos planos coordenados  $(x_i, x_{n+i})$ .

Para cada dimensão par  $2n$ , entendemos o grupo  $\mathbf{Sp}(2n)$  como o grupo de matrizes  $2n \times 2n$  que preservam a forma bilinear antissimétrica. Desde que as matrizes simpléticas  $J$  tenham determinante 1, o grupo simplético é um subgrupo do grupo linear especial  $\mathbf{SL}(2n, K)$ , que são matrizes do grupo  $S \in \mathbf{Sp}(2n)$  com elementos do corpo  $K$ , que deixam invariante a a forma bilinear antissimétrica e satisfazem  $S^T J S = J$ .



## Apêndice C

### Invariantes Integrais

Definamos um mapa diferencial  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , uma  $k$ -forma diferencial é chamada de integral invariante do mapa  $g$ , se a integral sobre qualquer  $k$ -cadeia  $c$  e a integral sobre a sua imagem  $g(c)$  é sempre a mesma, isto é

$$\int_{g(c)} \omega^k = \int_c \omega^k. \quad (\text{C.1})$$

Uma  $k$ -forma é invariante de sob o mapa  $g$  se e só se  $g^*\omega^k = \omega^k$ .

Se  $\omega^k \wedge \omega^l$  são integrais invariantes sob o mapa  $g$ , logo  $\omega^k \wedge \omega^l$  também.

Como  $\omega^2$  é uma estrutura simplética, qualquer forma  $(\omega^2)^k$  é invariante integral do fluxo hamiltoniano.

Definimos um elemento de volume usando  $\omega^{2n}$ , logo o fluxo hamiltoniano preserva o volume sempre que seja proporcional a  $\omega^{2k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} dp_{i_1} \wedge \dots \wedge dp_{i_k} \wedge dq_{i_1} \wedge \dots \wedge dq_{i_k}$ , com  $(1 < k < n)$ .

# Bibliografia

- [1] F. Kang, Qin. Mengzhao, *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010).
- [2] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, (Taylor & Francis, 2nd edition, 2003).
- [3] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, (Springer, 2nd edition 1989).
- [4] P. Libermann and C.M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, (D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987).
- [5] A. Mikhailov, *Nonlinear waves in AdS / CFT correspondence*, (University of California, Santa Barbara & Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow, 2007 2003)[arXiv:hep-th/0305196].
- [6] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, (Dover, New York, 1989)
- [7] J. P. Dufour, *Poisson Structures and problems concerning their singularities*, (Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal 2007).
- [8] A. Mikhailov, *Bihamiltonian structure of the classical superstring in  $AdS_5 \times S^5$* , (California Institute of Technology, Pasadena & Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow, 2007).[arXiv:hep-th/0609108].
- [9] P. Deligne, P. Etingof, D.S. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, J. Morgan, D.R. Morrison and E. Witten, *Quantum Fields and Strings: A Course For Mathematicians Vol. 1*, (American Mathematical Society, Providence, 1999).

- [10] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, (Cambridge University Press, 2nd edition, 2004).
- [11] W. Kevin, *An Introduction to String theory. Lecture Notes*, (University of California, Berkeley, 2011).
- [12] L. Susskind, E. Witten, *The Holographic Bound in Anti-de Sitter Space*, (Stanford University, Stanford & Institute For Advanced Study, Princeton, 1998).[arXiv:hep-th/9805114]
- [13] M. Chernicoff, A. Paredes, *Accelerated detectors and worldsheet horizons in AdS/CFT*, JHEP **63**, 1103, 2011.[arXiv:hep-th/1011.4206].
- [14] S. N. Solodukhin, *String Model in Differential Forms*, International Journal of Theoretical Physics, Vol. **31**, No. 1, 1992.
- [15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Teoría Clásica de los Campos*, (Reverté, Buenos Aires, 2da edición, 1992).