Rônei Sandro Vieira

Problemas elípticos com potencial que pode tender a zero no infinito

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

Co-Orientador: Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

São José do Rio Preto

2013

Rônei Sandro Vieira

Problemas elípticos com potencial que pode tender a zero no infinito

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Olimpio Hiroshi Miyagaki
Professor Titular - UFJF - Juiz de Fora
Co-Orientador

Everaldo Souto Medeiros
Professor Associado II - CCEN - UFPB - Paraíba

German Jesus Lozada Cruz
Professor Doutor - IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto

Juliana Conceição Precioso Pereira
Professora Doutora - IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto

Sérgio Henrique Monari Soares
Professor Livre Docente - ICMC - USP - São Carlos

São José do Rio Preto

16 de setembro de 2013

Vieira, Rônei Sandro.
Problemas elípticos com potencial que pode tender a zero no infinito / Rônei Sandro Vieira. -- São José do Rio Preto, 2013
121 f. : fórmulas

Orientador: Waldemar Donizete Bastos
Coorientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki
Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Princípios variacionais. 4. Schrödinger, Operadores de. 5. Soluções positivas. 6. Equações biharmônicas. I. Bastos, Waldemar Donizete. II. Miyagaki, Olimpio Hiroshi. III. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.
CDU – 517.944

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Agradecimentos

Agradeço

Primeiramente a Deus, fonte e destino de toda vida, que me chamou a este doutorado e, em seu decurso, me fez ter esperança nova diante da vida e em relação a mim mesmo.

Eu não vim chamar justos, e sim pecadores,
pois quero a misericórdia e não o sacrifício.
Mateus 13, 9.

À minha Mãe, Maria Santíssima, que tantos cuidados dispensou a mim neste tempo difícil.

Como quisera cantar, ó Maria, por que te amo.
Por que teu nome dulcíssimo faz vibrar meu coração...
Kelly Patrícia - Compositora Católica

Infinitas graças vos damos(ou), Soberana Rainha, pelos
benefícios que todos os dias recebemos(i) de vossas mãos liberais...
Oração da Tradição Católica

Ao meu filho Pedro, por ser sempre alegria e motivação para mim.

À minha mãe, Eva; meus irmãos Rodnei, Ronan, Roberta e Rodrigo; à tia Vera; à tia Vanda (in memorian), por sempre me darem apoio incondicional.

Ao Professor Olimpio, não só pelo excelente profissionalismo com que conduziu este trabalho, mas também pela capacidade de ver minhas necessidades de aluno e de pessoa. Muito obrigado, professor Olimpio.

Ao Professor Carrião, por ter me motivado muito a voltar a estudar e me feito acreditar que eu poderia ir mais além, quando nem eu mesmo acreditava nisso. Muito obrigado também pelos prazeiros momentos de discussões sobre a primeira versão deste trabalho.

Ao professor Waldemar, por estar sempre disponível e pelas excelentes aulas.

À Banca, pelo profissionalismo e empenho ao me dar valiosas sugestões que aprimoraram meu trabalho.

Ao amigo German e sua família, pela acolhida sempre agradável em São José do Rio Preto, além dos auxílios como professor.

Aos amigos do doutorado, principalmente Valdiane (pelos estudos e artigos baixados!), Rodiak e Ruikson.

Aos amigos do GOU (Grupo de Oração Universitário!) de São José do Rio Preto e de Juiz de Fora, por serem sempre um lugar de apoio e de acolhida. De modo particular agradeço à Rafaela, pelos inúmeros momentos de oração e discernimento nas minhas dificuldades.

Aos professores e funcionários do Ibilce.

Aos amigos da república: Marlon, Thales e Guilherme. Ao Nilson e à Janete, por todos os auxílios.

À todos os amigos que sempre me animaram com palavras e orações.

Parte deste trabalho foi feito no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Agradeço ao Professor Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos, à todo o pessoal do departamento e à toda a faculdade por sua hospitalidade. Aos amigos que revi e aos que conheci em Juiz de Fora e que tanto me ajudaram com palavras de ânimo. Em particular, agradeço à Sandrinha, colega de doutorado e de sala, pelas inúmeras e valiosas discussões sobre as EDP's.

Aos amigos do CEFET-MG, campus Divinópolis, pelo apoio na obtenção da licença para capacitação. Ao CEFET-MG e à CAPES, pelo apoio financeiro.

Dedico este trabalho ao meu filho Pedro,

alegria e motivação constantes em minha vida.

Resumo

Neste trabalho estudamos problemas elípticos do seguinte tipo:

$$(P) \qquad \mathcal{L}u + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = K(x)|x|^{-ap^*}f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

em que $V, K : \mathbb{R}^N \to R$ são potenciais não negativos que podem tender a zero no infinito, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tem crescimento subcrítico e $\mathcal{L}u$ é um operador elíptico.

Quando $\mathcal{L}u$ é o operador p-Laplaciano com peso, isto é, $\mathcal{L}u = \mathcal{L}_{ap}u = -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, provamos resultados de existência de solução positiva para $K(x) \equiv 1$ em $\mathbb{R}^N$ e de solução positiva de energia mínima para K podendo tender a zero no infinito. No primeiro caso a técnica é baseada num argumento de truncamento, introduzido por del Pino e Felmer em [34] e usado por Alves e Souto em [10], que nos permite uma abordagem variacional. No segundo caso, usamos novamente a abordagem variacional e o principal argumento, usado por Alves e Souto em [11], é considerar convenientes condições de crescimento sobre os potenciais para obter imersões compactas no espaço todo. Esta última técnica foi adaptada para obter resultados de existência de solução de energia mínima não trivial para o operador $\mathcal{L}u = \Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

Palavras chave: Soluções positivas, Operador de Schrödinger não degenerado, Métodos variacionais, Operador biharmônico .

Abstract

In this work we studied elliptic problems of the following type:

$$(P) \qquad \mathcal{L}u + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = K(x)|x|^{-ap^*}f(u), \ \ in\ \mathbb{R}^N,$$

where $V, K : R^N \to R$ *are nonnegative potentials that can vanish at infinity,* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *has a subcritical growth and* $\mathcal{L}u$ *is an elliptic operator.*

When $\mathcal{L}u$ *is the weighted p-laplacian operator, namely,* $\mathcal{L}u = \mathcal{L}_{ap}u = -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, *we prove existence results of positive solution for* $K(x) \equiv 1$ *in* $\mathbb{R}^N$ *and positive ground state solution for the case when* K *may tend to zero in infinity. In the first case the technique is a truncation argument, introduced by del Pino and Felmer, in [34], and used by Alves and Souto, in [10], that allows us to use a variational approach. In the second case, we also use the variational approach and the main argument, used by Alves and Souto, in [11], is to consider suitable growth conditions on the potentials to obtain compact embedded in the whole space. This last technique was adapted to obtain existence of nontrivial ground state solution for operator* $\mathcal{L}u = \Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

Keywords: Positive solutions, Non degenerated Schrödinger operator, Variational methods, Biharmonic operator.

Lista de Símbolos

- "c" constante positiva que pode mudar de valor numa sequência de desigualdades.

- $B_R = B_R(0)$ bola aberta em $\mathbb{R}^N$ centrada na origem e com raio R.

- $(\rightharpoonup)$, $(\rightarrow)$ convergências fraca e forte, respectivamente.

- $\mathcal{L}_{ap}u = -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ operador p-Laplaciano com peso, sendo N a dimensão do espaço, $1 < p < N$ e $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$.

- $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ operador biharmônico.

- $||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, para $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e uma função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

- $||u||_p = ||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}$

- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : ||u||_{L^p(\Omega)} < \infty\right\}$, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

- $||u||_{L^p_a(A)} = \left(\int_A |x|^{-ap^*}|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, para $1 \leq p < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^N$ e uma função mensurável $u : A \to \mathbb{R}$.

- $L^p_a(A) = \left\{u : A \to \mathbb{R} : ||u||_{L^p_a(A)} < \infty\right\}$.

- $||u||_{L^p_{K,a}(A)} = \left(\int_A K(x)|x|^{-ap^*}|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, para $1 \leq p < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $K(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e uma função mensurável $u : A \to \mathbb{R}$.

- $L^p_{K,a}(A) = \left\{u : A \to \mathbb{R} : ||u||_{L^p_{K,a}(A)} < \infty\right\}$. Para $a = 0$ usamos $L^p_K(A)$.

- $L^\infty_a(\mathbb{R}^N) = \left\{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ \text{mensurável} : \sup_{\mathbb{R}^N} \text{ess}|x|^{-ap^*}|u| < \infty\right\}$.

- $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ espaço de funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ e de suporte compacto em $\mathbb{R}^N$.

- $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto.

- $\mathcal{D}_a^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : |x|^{-a}u \in L^{p^*}(\Omega)$ e $|x|^{-a}\nabla u \in L^p(\Omega)\}$. Para $\Omega = \mathbb{R}^N$ podemos dizer que $\mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em relação à norma $|u| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

- $\mathcal{D}_{a,0}^{1,p}(B_1)$ fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em relação à norma $|u| = \left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

- $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : u \in L^{2_*}(\mathbb{R}^N)$ e $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$.

- $W_a^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_a^p(\Omega) : D^\alpha u \in L_a^p(\Omega), \forall\ |\alpha| \leq m\}$. Aqui $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ é um multi-índice.

- $2_* = \frac{4N}{N-4}$ expoente crítico para a imersão do espaço $W^{2,2}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

- $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$ expoente crítico de Hardy-Sobolev com N a dimensão do espaço, $1 < p < N$, $d = 1 + a - e$, $a \leq e \leq a + 1$ e $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$.

- p' dual (ou conjugado) de p, dado pela condição $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ para todo $p > 1$.

- $o_n(1)$ termo que tende a zero quando $n \to \infty$.

- $\chi_{[s_0,s_1]}$ função característica para o intervalo $[s_0, s_1] \subset \mathbb{R}$.

- ω_N volume da bola unitária N-dimensional.

- $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = \max\{0, -u\}$.

- q.s. quase sempre, isto é, a menos de um conjunto de medida nula.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos equações elípticas não lineares do seguinte tipo:

$$(EE) \qquad \mathcal{L}u + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = K(x)|x|^{-ap^*}f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

em que $\mathcal{L}u$ pode ser o operador p-Laplaciano com peso, isto é, $\mathcal{L}u = \mathcal{L}_{ap}u = -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, ou ainda, o operador biharmônico, isto é, $\mathcal{L}u = \Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$. $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma não linearidade com crescimento subcrítico e $V, K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são potenciais que podem tender a zero no infinito.

Como os operadores envolvidos são elípticos, nos referiremos à (EE) como equação elíptica. À equação (EE) associamos o que chamamos de "problema elíptico (P)", que pode focar diversas questões a respeito de suas soluções, tais como, existência, multiplicidade, taxas de decaimento e mudança de sinal, entre outras. Porém, a primeira questão a ser respondida é a da "existência" e é a esta que nos propomos em todo este trabalho.

Nessa tese estudamos três problemas obtidos a partir da equação (P). Em cada um dos três subseqüentes Capítulos deste trabalho apresentamos um desses problemas com suas características específicas e seu resultado. Assim, a partir de agora, fazemos um detalhamento de cada um deles e mostramos seus respectivos resultados.

1.1 Problema $(P1)$

Primeiramente, considerando $K(x) \equiv 1$ em $\mathbb{R}^N$, temos o seguinte problema elíptico quase linear:

$$(P1) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_{ap}u + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = |x|^{-ap^*}f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N; \quad u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

em que $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$, $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$ denota o expoente crítico de Hardy e Sobolev, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial não negativo, limitado, que tende a zero no infinito e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento subcrítico.

Supomos que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando:

$$(V_{11}) \qquad V(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

$$(V_{12}) \qquad \text{Existe } \Lambda > 0 \text{ e } r_1 > 1 \text{ tal que } \inf_{|x|>r_1} V(x)|x|^{\frac{dp^2[N-p(a+1)]}{(p-1)(N-dp)}} \geq \Lambda.$$

Um exemplo para este tipo de potencial é dado por:

Exemplo 1.1.1 *Dado $\Lambda > 0$, defina o potencial V por*

$$V(x) = \begin{cases} 0, & se \ \ |x| \leq \overline{r} - 1 \\ \Lambda \overline{r}^{-\frac{dp^2[N-p(a+1)]}{(p-1)(N-dp)}}(|x| - \overline{r} + 1), & se \ \ \overline{r} - 1 < |x| \leq \overline{r} \\ \Lambda |x|^{-\frac{dp^2[N-p(a+1)]}{(p-1)(N-dp)}}, & se \ \ |x| \geq \overline{r}, \end{cases}$$

Também supomos que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz as condições abaixo, com $1 < p < N$ e $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$.

$$(f_{11}) \qquad \limsup_{s \to 0^+} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} < \infty.$$

$$(f_{12}) \qquad \text{Existe } \overline{p} \in (p, p^*), \text{ tal que } \limsup_{s \to \infty} \frac{sf(s)}{s^{\overline{p}}} < \infty.$$

$$(f_{13}) \qquad f(s) = 0, \text{ para todo } s \leq 0.$$

(f_{14}) Existe $\theta > p$ tal que $0 < \theta F(s) \leq sf(s),$ para todo $s > 0.$

Exemplo 1.1.2 *Um exemplo de uma função f que satisfaz as condições acima é dado por*

$$f(s) = \begin{cases} 0, & se \quad s \leq 0, \\ s^{q-1}, & se \quad 0 < s < 1, \\ s^{\overline{p}-1}, & se \quad s \geq 1, \end{cases}$$

com $q > p^*$ e $\overline{p}$ dado por (f_{12}).

Equações envolvendo o operador p-Laplaciano aparecem em muitos problemas de difusão não linear. Por exemplo, em ótica não linear, física dos plasmas, física da matéria condensada e na modelagem de problemas em fluidos não Newtonianos. Para mais informações de cunho físico indicamos [36].

Para vermos alguns problemas realcionados, consideremos primeiramente o caso $a = 0$, isto é, $\mathcal{L}u$ é o operador p-Laplaciano, e o potencial limitado inferiormente por uma constante positiva $V_0 > 0$. Para $p = 2$ citamos [2, 7, 8, 17, 22] e suas referências. Em [34], além das hipóteses acima, os autores consideraram uma condição local, a saber,

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} V < \min_{x \in \partial\Omega} V,$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto limitado, em vez da condição global imposta por Rabinowitz em [60]. Para $p \neq 2$ veja [4, 9, 69, 70]. Ainda com $a = 0$, consideremos o importante *caso de massa zero* para V, isto é,

$$\lim_{|x| \to \infty} V(x) = 0.$$

Quando $p = 2$ citamos [14, 15, 20] e o recente artigo [10] de Alves e Souto.

Tomemos agora o caso $a \neq 0$ e o potencial limitado inferiormente por uma constante positiva $V_0 > 0$. Neste caso, a equação surge em problemas de existência de ondas estacionárias para a equação anisotrópica de Schrödinger (veja [65]) e em outros problemas (por exemplo, veja [22, 37]). Citamos [65] para $p = 2$; e, [16, 51] para $p \neq 2$.

Para o caso $V \equiv 0$, indicamos [29], para $p = 2$ e $a \neq 0$ e [54], para $p \neq 2$ e $a = 0$.

A nossa contribuição para este problema é a extensão do resultado obtido em [10], com $p = 2$ e $a = 0$, para o caso em que $1 < p < N$ e $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$. A primeira grande dificuldade para esta extensão é mudança de estrutura no espaço. Em [10], a presença da estrutura Hilbertiana e imersões compactas fornecem a convergência do gradiente. No caso estudado aqui, com a ausência desta estrutura, não obtivemos esta convergência tão diretamente. Para transpor este problema usamos um resultado encontrado em [17, 39] cujas ideias vêm de [23, 41], quando o domínio é limitado e suave. Ainda em função desta mudança de estrutura tivemos que fazer novas estimativas. Outra dificuldade surgiu pela presença dos termos singulares no problema. Isso nos forçou a obter estimativas mais refinadas e para as quais o principal ingrediente é a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg (veja [26]).

Agora, afirmarmos o resultado para o problema $(P1)$.

Teorema 1.1.1 *Suponha que V e f satisfaçam, respectivamente, (V_{11}), (V_{12}), (f_{11}), (f_{12}), (f_{13}) e (f_{14}). Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, c_0) > 0$ tal que o problema $(P1)$ tem uma solução não negativa de energia crítica, para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$, sendo V_∞ o máximo de f no fecho de B_1. Além disso suponha que*

$(f_{12})'$ *Existe* $c > 0$ *tal que* $-ap^* = p(a+1) - c$ *e*

$$p \;<\; \overline{p} \;<\; \min\{\frac{Np}{N-p}; \quad p + \frac{cp}{N - p(a+1)}\}.$$

Então a solução é positiva.

Este resultado encontra-se publicado em [18] por Bastos, Miyagaki e Vieira.

Estudaremos o problema $(P1)$ no Capítulo 2 e nele definiremos o conceito de energia crítica.

1.2 Problema $(P2)$

Agora trabalhamos com a condição $K(x) \not\equiv 1$ em $\mathbb{R}^N$ e examinamos o seguinte problema:

$$(P2) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_{ap}u + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = K(x)|x|^{-ap^*}f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

em que $N \geq 3$, $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1+a-e$, $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$ denota o expoente crítico de Hardy-Sobolev, $V, K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são potenciais positivos contínuos, K tende a zero no infinito, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$ e tem crescimento subcrítico.

Supomos que $V, K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções positivas contínuas satisfazendo:

(K_{20}) $$V(x), K(x) > 0, \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } K \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L_a^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L_a^1(\mathbb{R}^N).$$

(K_{21}) $$K/V \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

(K_{22}) $$\text{Existe } \alpha \in (p, p^*), \text{ tal que } \lim_{|x|\to\infty} \frac{K(x)}{V(x)^{\frac{p^*-\alpha}{p^*-p}}} = 0.$$

Usamos a notação $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ para expressar que V e K satisfazem (K_{20}) e (K_{21}). Uma hipótese alternativa é considerar V e K satisfazendo (K_{20}) e (K_{22}), para o que usamos a notação $(V, K) \in \mathcal{H}_2$.

Para termos um exemplo, considere que V é uma constante positiva e que K seja dado por

$$K(x) = \begin{cases} |x|^{ap^*}, & se \;\; |x| \leq 1 \\ |x|^{ap^*} e^{-ap^*(|x|-1)}, & se \;\; |x| > 1, \end{cases}$$

com $0 \leq a < \frac{N-p}{p}$. Assim, o par (V, K) satisfaz $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. Para o caso $-\infty < a < 0$ é suficiente considerar

$$K(x) = \begin{cases} |x|^{b}, & se \;\; |x| \leq 1 \\ |x|^{ap^*} e^{ap^*(|x|-1)}, & se \;\; |x| > 1, \end{cases}$$

com $b > 0$.

Supomos que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz as condições abaixo, com $1 < p < N$ e $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$.

(f_{21}) $$\limsup_{s\to 0} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} = 0.$$

(f_{22}) $$\text{Existe } \overline{p} \in (p, p^*), \text{ tal que } \limsup_{s\to\infty} \frac{sf(s)}{s^{\overline{p}}} = 0.$$

(f_{23}) $$f(s) = 0, \text{ para todo } s \leq 0.$$

(f_{24}) $$\limsup_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^p} = \infty.$$

(f_{25}) $$s^{-(p-1)} f(s) \text{ é uma função crescente em } s \in (0, \infty).$$

Lembramos que a condição (f_{24}) é mais fraca do que a usual condição de Ambrosetti e Rabinowitz, a saber,

(AR) $$\text{existe } \theta > p \text{ tal que } 0 < \theta F(s) \leq s f(s), \quad \text{para todo } s > 0.$$

A condição (AR) é muito importante para assegurar que o funcional de Euler e Lagrange associado ao problema $(P1)$ tem a geometria do passo da montanha e também para garantir que a sequência de Palais-Smale deste funcional é limitada. Porém, uma vez que esta condição é muito restritiva, muitos pesquisadores têm tentado substituí-la. Observe que a função $f(s) = s^{p-1}(1 + lns^p)$ satisfaz (f_{24}) e não satisfaz (AR). Indicamos [53] e suas referências para mais informações sobre este tema.

Exemplo 1.2.1 *Um exemplo de uma função f que satisfaz as condições acima é dado por*

$$f(s) = \begin{cases} 0, & se \quad s \leq 0, \\ s^{q-1}, & se \quad 0 < s < 1, \\ s^{\overline{p}-1}, & se \quad s \geq 1, \end{cases}$$

com $q > p^*$ e $\overline{p}$ dado por (f_{22}).

Para vermos alguns problemas relacionados, tomemos $V(x) \geq V_0 > 0$. Para $a = 0$, citamos [19, 31, 32, 48, 56, 60] e, para $a \neq 0$, [65].

Ainda neste caso, com $a = 0$ e $p = 2$, destacamos o trabalho de Wang e Zeng, em [66]. Eles consideraram $f(s) = |s|^{p-1}s$ e $K(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N$, estudaram o fenômeno de concentração de soluções de energia mínima e mostraram que elas concentram-se num ponto no meio termo entre os vales de V e os picos de K.

Sirakov, em [63], usou uma condição que permite o potencial se anular num conjunto de medida finita e não usou a condição (f_{25}) sobre a não linearidade.

Considerando K tendendo a zero no infinito e V no caso de *massa zero*, isto é,

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = 0,$$

citamos [14, 15] e os recentes artigos [12, 11], para $a = 0$, e [29], para $a \neq 0$.

Finalmente, considerando os casos K limitado inferiormente por uma constante positiva e K ilimitado superiormente, ainda no caso de massa zero, temos os artigos [12] e [29], respectivamente.

Até onde sabemos, o artigo [11], com $a = 0$ e $p = 2$, é o melhor resultado para potenciais V e K e uma não linearidade f gerais. Sobre ele se fundamenta o nosso trabalho e, por isso, fazemos agora um breve esboço das principais ideias dele. Com o objetivo de obter a geometria do passo da montanha, os autores, em [11], usaram condições de crescimento subcrítico sobre f, além de uma condição específica sobre sua primitiva F. Eles impuseram convenientes condições sobre V e K para conseguir uma desigualdade do tipo Hardy e, com isto, conseguiram uma convergência forte no espaço todo. De fato, eles assumiram a condição

$$\text{existe } \alpha \in (2, 2^*), \text{com } 2^* = \frac{2N}{N-2}, \text{ tal que } \lim_{|x|\to\infty} \frac{K(x)}{V(x)^{\frac{2^*-\alpha}{2^*-2}}} = 0$$

para obter uma imersão compacta de $E \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^q_K(\mathbb{R}^N)$, sendo $2 < q < 2^*$. Com esta ferramenta, eles puderam superar a perda de compacidade na imersão de Sobolev no espaço todo, que é uma das grandes dificuldades deste tipo de problema. Em [49] foi usada uma condição muito semelhante àquela usada em [11], a saber,

$$\text{existe } \alpha \in [p, p^*), \text{ com } p^* = \frac{Np}{N-p}, \text{ tal que } \lim_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N\setminus B_r} \frac{K(x)^{p^*-p}}{V(x)^{p^*-\alpha}} = 0,$$

com o objetivo de obter a imersão compacta de $E \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ em $L^\sigma_K(\mathbb{R}^N)$ com $p \le \sigma < p^*$.

A nossa contribuição para o problema $(P2)$ é a extensão, pelo menos parcial, do resultado obtido em [11], com $p = 2$ e $a = 0$, para o caso em que $1 < p < N$ e $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$. Da mesma forma que no problema anterior, enfrentamos a dificuldade da perda da estrutura Hilbertiana do espaço com a conseqüente dificuldade de obtenção da convergência do gradiente e a necessidade de obtenção de novas estimativas. Isso foi superado do mesmo modo que no problema anterior. Porém, a técnica empregada aqui nos trouxe uma nova dificuldade: a necessidade de relacionar os crescimentos dos potenciais V e K e da não linearidade f com o crescimento dos termos singulares. Para superar isto tivemos que supor condições que impuseram restrições tanto nos potenciais como na não linearidade. Isso explica a parcialidade da extensão do resultado.

Agora, afirmamos o resultado para o problema $(P2)$.

Teorema 1.2.1 *Suponha* (f_{21}), (f_{22}), (f_{23}), (f_{24}), (f_{25}) *e* $(V,K) \in \mathcal{H}_1$ *ou* $(V,K) \in \mathcal{H}_2$. *Então, o problema* $(P2)$ *tem uma solução não trivial, não negativa e de energia mínima. Além disso suponha que*

$(f_{12})'$ $$\text{Existe } \ c > 0 \ \text{ tal que } \ -ap^* = p(a+1) - c \ \text{ e}$$

$$p \ < \ \overline{p} \ < \ \min\{\frac{Np}{N-p}; \ \ p + \frac{cp}{N - p(a+1)}\}.$$

Então a solução é positiva. No caso não singular $(a = 0)$ *podemos trocar* (f_{22}) *por*

$(f_{22})'$ $$\limsup_{s\to\infty} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} = 0$$

e obter o mesmo resultado. Também aqui temos a positividade da solução se p^* *satisfizer a condição* $(f_{12})'$.

Estudaremos o problema $(P2)$ no Capítulo 3 e nele definiremos o conceito de energia mínima.

1.3 Problema $(P3)$

Dando continuidade à analise do comportamento dos potenciais em problemas elípticos, estudaremos a ação de V e K no seguinte problema elíptico com o operador biharmônico em $\mathbb{R}^N$:

$$(P3) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + V(x)u = K(x)f(u), \ \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \neq 0, \ \text{em } \mathbb{R}^N, \quad u \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

em que $N \geq 5$, $V, K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas positivas, K pode tender a zero no infinito e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ com crescimento subcrítico.

Supomos que V e K satisfazem as seguintes condições:

(K_{30}) $$V(x),\ K(x) > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \ \text{ e } \ K \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N).$$

(K_{31}) $$K/V \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

(K_{32}) $$\text{Existe } \alpha \in (2, 2_*),\ \text{com } 2_* = \frac{4N}{N-4},\ \text{tal que } \lim_{|x|\to\infty} \frac{K(x)}{V(x)^{\frac{2_*-\alpha}{2_*-2}}} = 0.$$

Usamos a notação $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ para expressar que V e K satisfazem (K_{30}) e (K_{31}). Uma hipótese alternativa é considerar V e K satisfazendo (K_{30}) e (K_{32}), para o que usamos a notação $(V, K) \in \mathcal{H}_2$.

Um exemplo para funções V e K satisfazendo as condições acima é dado pelas seguintes funções. Seja V uma constante positiva e K dado por

$$K(x) = \begin{cases} e, & se \ \ |x| \leq 1 \\ e^{-|x|}, & se \ \ |x| > 1. \end{cases}$$

Assim, é fácil ver que $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ e $(V, K) \in \mathcal{H}_2$.

Supomos que a função f é de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz

(f_{31}) $$\limsup_{s\to 0} \frac{sf(s)}{s^{2_*}} = 0.$$

(f_{32}) $$\limsup_{s\to \infty} \frac{sf(s)}{s^{2_*}} = 0.$$

(f_{33}) $$f(s) = 0,\ \text{para todo } s \leq 0.$$

(f_{34}) $$\limsup_{s\to \infty} \frac{F(s)}{s^2} = \infty.$$

(f_{35}) $$s^{-1}f(s) \text{ é uma função não decrescente em } s \in (0, \infty).$$

Lembramos que a condição (f_{34}) é mais fraca que a condição de Ambrosetti e Rabinowitz, a saber,

(AR) $$\text{existe } \theta > 2 \text{ tal que } 0 < \theta F(s) \leq sf(s), \quad \text{para todo } s > 0.$$

Por exemplo, a função $f(s) = s(1+lns^2)$ satisfaz (f_{34}) e não satisfaz (AR). Aqui podemos fazer as mesmas observações do problema anterior quanto à relação das condições (AR) e (f_{34}).

Exemplo 1.3.1 *Um exemplo de uma função f que satisfaz as condições acima é dado por*

$$f(s) = \begin{cases} 0, & se \quad s \leq 0, \\ s^{p-1}, & se \quad 0 < s < 1, \\ s^{q-1}, & se \quad s \geq 1, \end{cases}$$

com $p > 2_*$ e $2 < q < 2_*$.

Equações com o operador biharmônico em domínios limitados surgem no estudo de ondas viajantes em pontes suspensas e no estudo de deflexão estática de uma placa elástica num fluido (veja [68] e suas referências). Para o problema $(P3)$, com $K \equiv 1$ e V constante num domínio limitado citamos, por exemplo, [38].

Vamos citar brevemente alguns resultados sobre o operador biharmônico em regiões ilimitadas. Já é bem conhecido que a equação não linear de Schrödinger com termos adicionais contendo derivadas de maior ordem está proximamente relacionada com o auto foco de ondas Whistler em plasmas na fase final. Num meio isotrópico esta equação tem a forma

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{2}S\Delta\Psi + \lambda\Delta^2\Psi + \mu|\Psi|^2\Psi = 0,$$

em que o termo com Δ^2 descreve a contribuição da dispersão de ordem superior (veja [45]). Também sabemos que a equação não linear de Schrödinger de quarta ordem foi introduzida por Karpman, em [46], e por Karpman e Shagalov, em [47], para considerar o papel dos termos de quarta ordem de pequena dispersão na propagação de feixes de laser intenso num meio de grandes quantidades com não linearidade do tipo Kerr (veja [57]).

Voltando nossa atenção para a equação de Schrödinger biharmônica com potenciais em domínios ilimitados, citamos o trabalho [54] em que foi considerado $V \equiv 0$ e K um potencial radial não negativo tendendo a zero no infinito. Em [54] os autores obtiveram a existência de soluções radiais positivas. Alves, Do Ó e Miyagaki, em [5], tomaram o potencial V não negativo e a não linearidade com dois potenciais não negativos.

Considerando a periodicidade dos potenciais, os autores obtiveram existência de soluções. Em [5] foram consideradas pequenas perturbações dos potenciais e foi obtida existência de soluções. Os mesmos autores, em [6], usaram um potencial V que muda de sinal com alguns pontos de singularidades. Chabrowski e Do Ó, em [30], supuseram que K é um potencial contínuo limitado, variando o sinal e V é um potencial não positivo. Em [30], foi obtido a existência de duas soluções. Gazzola e Grunau, em [40], consideraram $K \equiv 1$ e $V \equiv 0$ para investigar existência, unicidade, comportamento assintótico e propriedades qualitativas posteriores de soluções radiais. Wang e Shen, em [62], tomaram o potencial $V \equiv 0$ e a não linearidade com um potencial não negativo, no caso de crescimento subcrítico; e um potencial não negativo que tende a zero no infinito, no caso de crescimento crítico. Com uma desigualdade de Hardy e Rellich melhorada, em [62] os autores estudaram a existência de múltiplas soluções com mudança de sinal pelos métodos minimax e teoremas de linking. Carrião, Demarque e Miyagaki, em [28], consideraram $K \equiv 1$ e V radial tendendo a zero no infinito para conseguir existência de soluções radiais. Finalmente, Pimenta e Soares, em [58], estudaram o fenômeno de concentração para o problema $(P3)$ com $K \equiv 1$ e V satisfazendo a seguinte propriedade: existe um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$0 < V(x_0) = V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V < \inf_{\partial\Omega} V.$$

Como a discussão acima mostra, os tipos de potencial afetam a existência e as características das soluções. A nossa contribuição para o problema $(P3)$ é conseguir existência de solução de energia mínima para potenciais e não linearidade sob hipóteses complementares. De fato, o resultado para o problema $(P3)$ estende o resultado de Demarque e Miyagaki, em [35], para potenciais V e K não radiais. Ele estende também o resultado de Alves e Do Ó, em [3], para potenciais e não linearidade mais gerais. Além disso, o resultado de Alves e Souto, em [11], é obtido para o operador biharmônico sob hipóteses complementares.

Neste trabalho usamos uma técnica análoga àquela usada por Alves e Souto, em [11]. De fato, com o objetivo de obter a geometria do passo da montanha, usamos condições de crescimento subcrítico em f, agora envolvendo derivadas de segunda ordem e uma condição específica sobre a sua primitiva F. Também supomos convenientes condições sobre V e K para conseguir uma desigualdade do tipo Hardy e, com isto, conseguimos uma convergência forte no espaço todo. De fato, supomos as condições (K_{31}) ou (K_{32}) para conseguir a imersão compacta de $E \subset \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^q_K(\mathbb{R}^N)$ com $2 < q < 2_*$. Com esta ferramenta, pudemos transpor a perda de compacidade na imersão de Sobolev no espaço todo, que é uma das grandes dificuldades deste tipo de problema, de modo que esse é um resultado crucial do nosso trabalho.

Agora afirmamos o resultado para o problema $(P3)$.

Teorema 1.3.1 *Suponha* $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ *ou* $(V, K) \in \mathcal{H}_2$, (f_{31}), (f_{32}), (f_{33}), (f_{34}) *e* (f_{35}). *Então o problema* $(P3)$ *tem uma solução não trivial de energia mínima.*

Estudaremos o problema $(P3)$ no Capítulo 4 e nele definiremos o conceito de energia mínima.

Capítulo 2

Solução para o problema $(P1)$

Neste Capítulo apresentaremos uma solução não trivial, não negativa e de energia crítica para o problema $(P1)$, termo que será definido no começo da segunda seção. Além disso, mostraremos uma outra condição sobre $\overline{p}$, dado em (f_{12}), com a qual teremos a positividade da solução.

2.1 O Problema inicial $(P1)$ e o problema auxiliar (PA).

Para o conforto do leitor reapresentamos aqui tanto o problema $(P1)$ quanto as hipóteses sobre V e f.

$$(P1) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_{ap}u + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = |x|^{-ap^*}f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N; \quad u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

em que $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$, $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$ denota o expoente crítico de Hardy e Sobolev.

Supomos que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando:

$$(V_{11}) \qquad V(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

$$(V_{12}) \qquad \text{Existe } \Lambda > 0 \text{ e } r_1 > 1 \text{ tal que } \inf_{|x|>r_1} V(x)|x|^{\frac{dp^2[N-p(a+1)]}{(p-1)(N-dp)}} \geq \Lambda.$$

Também supomos que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz as condições abaixo, com $1 < p < N$ e $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$.

(f_{11})
$$\limsup_{s\to 0^+} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} < \infty.$$

(f_{12})
$$\text{Existe } \overline{p} \in (p,p^*), \text{ tal que } \limsup_{s\to\infty} \frac{sf(s)}{s^{\overline{p}}} < \infty.$$

(f_{13})
$$f(s) = 0, \text{ para todo } s \leq 0.$$

(f_{14})
$$\text{Existe } \theta > p \text{ tal que } 0 < \theta F(s) \leq sf(s), \text{ para todo } s > 0.$$

Observação 2.1.1 *Das condições sobre f podemos encontrar valores $c > 0$ tais que*

$$0 \leq sf(s) \leq c|s|^{p^*}, \textit{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

$$0 \leq sf(s) \leq c|s|^{\overline{p}}, \textit{ para todo } s \in \mathbb{R}, \textit{ com } \overline{p} \in (p,p^*) \textit{ dado em } (f_{12}). \tag{2.2}$$

Desejamos encontrar uma solução para o problema $(P1)$ através de um método variacional. Isto significa que estamos procurando suas soluções entre os pontos críticos de um funcional definido num conveniente espaço E. O funcional adequado aos nossos propósitos é o funcional de Euler e Lagrange, dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}F(u)dx, \tag{2.3}$$

sendo $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

A primeira preocupação que devemos ter é com a boa definição deste funcional, isto é, devemos garantir que as três integrais acima sejam finitas. Para garantir que a primeira integral seja finita, num primeiro momento, escolhemos E como sendo o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em relação à norma $|u| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, em símbolos,

$$E = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{|.|}, \quad \text{com} \quad |u| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pelo Lema A.1.1, temos que

$$E = \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : |x|^{-a}u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ e } |x|^{-a}\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)\}.$$

Impondo a condição de crescimento subcrítico para f, feito com as hipóteses (f_{11}) e (f_{12}), temos as estimativas (2.1) e (2.2). Com (2.1) podemos dizer que

$$\text{existe } c > 0 \text{ tal que } |x|^{-ap^*}F(s) \leq c|x|^{-ap^*}|s|^{p^*}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Para os parâmetros $N \geq 3$, $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$ e $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$, temos a importante desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq S\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx, \tag{2.5}$$

(veja [26]). Por (2.4) e (2.5) temos a finitude da terceira integral, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}F(s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} c|x|^{-ap^*}|u|^{p^*}dx \leq c\left(S\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p^*}{p}} < \infty.$$

Agora, para garantir que a segunda integral seja finita, restringimos nosso espaço àquelas funções u que têm esta propriedade, isto é, a partir de agora consideramos que

$$E = \left\{u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^p dx < \infty\right\}, \tag{2.6}$$

de modo que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ está bem definido.

Uma outra preocupação que devemos ter com o funcional é quanto à sua difenciabilidade. Mas, como visto no Lema A.2.1, das hipóteses sobre f, segue que I é de classe $C^1(E)$ com derivada de Gâteaux

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}f(u)vdx,$$

para todos $u, v \in E$.

A Hipótese (V_{11}) nos permite considerar o espaço E com norma

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como desejamos encontrar uma solução usando o Teorema do Passo da Montanha, precisamos seguir alguns passos e, para melhor entendê-los, fazemos duas definições.

Definição 2.1.1 *Dizemos que uma sequência de funções* (u_n) *é uma sequência de Palais e Smale, abreviadamente sequência* (PS)*, para o funcional* Φ*, no nível* c*, se*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad \Phi'(u_n) \to 0.$$

Definição 2.1.2 *Dizemos que o funcional* Φ *é de Palais e Smale se toda sequência* (PS) *para* Φ *possui uma subsequência que converge forte.*

O primeiro passo que devemos dar é verificar que o funcional I satisfaz a geometria do passo da montanha para conseguirmos a existência de uma sequência (PS). No segundo passo, mostramos que uma tal sequência é limitada, o que, junto com a reflexidade do espaço, nos garante a existência de $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. No terceiro passo, provamos que o funcional é de Palais e Smale. Em outras palavras, devemos mostrar que existe uma subsequência, renomeada (u_n), tal que $||u_n|| \to ||u||$. A prova deste terceiro passo não ocorre diretamente e isso acontece, essencialmente, devido ao fato de não termos a imersão compacta de Sobolev em domínios ilimitados. Para vermos isso com detalhes, observamos que, tomando (u_n), uma sequência (PS) limitada, temos $I'(u_n)u_n \to 0$ e $I'(u_n)u \to 0$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} f(u_n)u_n dx = o_n(1), \tag{2.7}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u + V|x|^{-ap^*}|u_n|^{p-2}u_n u dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} f(u_n)u dx = o_n(1). \tag{2.8}$$

Desta forma, vemos que a convergência de $||u_n||$ está relacionada com a convergência das outras integrais presentes nas duas equações acima. Agora, suponhamos que, de algum modo, conseguíssemos provar as seguintes afirmações:

A1 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} f(u_n)u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} f(u)u dx.$

A2 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} f(u_n)u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} f(u)u dx.$

A3 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u_n|^{p-2}u_n u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^p dx.$

A4 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx.$

Usando **A1** e a equação (2.7), teríamos

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n||^p = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} f(u)udx. \tag{2.9}$$

Usando **A2**, **A3** e **A4** e passando o limite na equação (2.8) conseguiríamos

$$||u||^p = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} f(u)udx. \tag{2.10}$$

Pelas duas equações anteriores teríamos

$$||u_n|| \to ||u||,$$

e este terceiro passo seria atingido.

Provar as afirmações **A1**, **A2**, **A3** e **A4** numa bola B_r é possível usando o Teorema da Convergência Dominada e a importante imersão compacta de Sobolev, em domínios limitados. Mas, no complementar da bola, B_r^c, não temos a imersão compacta e não conseguimos provar as convergências, assim diretamente. Para contornar este problema, a ideia, introduzida por del Pino e Felmer, em [34], e usada por Alves e Souto, em [10], foi definir uma nova não linearidade, chamada $g(x,u)$, a partir de um conveniente truncamento em $f(u)$ de modo que a integral de $g(x,u)$ pudesse ser comparada com a norma de u, em B_r^c, onde não temos a compacidade. Uma boa motivação para esta comparação é o fato de que a norma de u em B_r^c é arbitrariamente pequena desde que r seja suficientemente grande. Para fazer esta "comparação" foi introduzido o seguinte truncamento da função f. Tomando θ, dado pela condição (f_{14}), considere $k = \dfrac{p\theta}{\theta - p} > p$, $\overline{r} > 1$ e defina

$$g(x,t) = \begin{cases} f(t), & se\ |x| \leq \overline{r}, \\ f(t), & se\ |x| > \overline{r} \ \text{ e } \ f(t) \leq \frac{V}{k}|t|^{p-2}t, \\ \frac{V}{k}|t|^{p-2}t, & se\ |x| > \overline{r} \ \text{ e } \ f(t) > \frac{V}{k}|t|^{p-2}t. \end{cases} \tag{2.11}$$

Assim, temos

$$|x|^{-ap^*}g(x,t) = \begin{cases} |x|^{-ap^*}f(t), & se\ |x| \le \overline{r}, \\ |x|^{-ap^*}f(t), & se\ |x| > \overline{r} \ \text{ e } \ f(t) \le \frac{V}{k}|t|^{p-2}t \\ \frac{V}{k}|x|^{-ap^*}|t|^{p-2}t, & se\ |x| > \overline{r} \ \text{ e } \ f(t) > \frac{V}{k}|t|^{p-2}t. \end{cases} \tag{2.12}$$

Com esta nova não linearidade definimos o problema auxiliar:

$$(PA) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_{ap}u + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = |x|^{-ap^*}g(x,u), \ \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \ge 0, \ \text{em } \mathbb{R}^N; \quad u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{2.13}$$

Associado ao problema (PA), definimos em E o funcional de Euler e Lagrange

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}G(x,u)dx \\ &= \frac{1}{p}||u||^p - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}G(x,u)dx, \end{aligned} \tag{2.14}$$

sendo $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt$. Das hipóteses sobre g segue, pelo Lema A.2.1, que J é de classe $C^1(E)$ com derivada de Gâteaux dada por

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}g(x,u)vdx,$$

para todos $u, v \in E$.

2.2 Uma solução para o problema (PA)

Nesta seção mostramos que o problema (PA) tem uma solução não negativa e de energia crítica. Para sermos mais precisos fazemos agora sua definição.

Definição 2.2.1 *Dizemos que u é solução de energia crítica para (PA) se u satisfaz*

$$J(u) = c^*, \tag{2.15}$$

com J definido em (2.14) *e c^* dado por*

$$c^* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\}.$$

c^* é dado pelo Teorema do Passo da Montanha (A.3.1) e é chamado nível minimax para o funcional J. Além deste, definimos também outro nível minimax chamado $\bar{c}$. Para isso, consideramos V_∞ o máximo de f no fecho de B_1 e definimos, no espaço $\mathcal{D}^{1,p}_{a,0}(B_1)$, tanto a norma

$$|||u||| = \left(\int_{B_1} |x|^{-ap} |\nabla u|^p + V_\infty |x|^{-ap^*} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

como o funcional I_0 dado por

$$\begin{aligned} I_0(u) &= \frac{1}{p} \int_{B_1} |x|^{-ap} |\nabla u|^p + V_\infty |x|^{-ap^*} |u|^p dx - \int_{B_1} F(x,u) dx \\ &= \frac{1}{p} |||u|||^p - \int_{B_1} |x|^{-ap^*} F(u) dx. \end{aligned}$$

Lema 2.2.1 *Suponha* (V_{11}), (f_{11}), (f_{12}) *e* (f_{14}). *Então o funcional* I_0 *satisfaz a geometria do passo da montanha, a saber,*

1. Existem $\alpha_0, \rho_0 > 0$ *tais que* $I_0(u) \geq \alpha_0$ *para* $|||u||| = \rho_0$.

2. Existe $e_0 \in \mathcal{D}^{1,p}_{a,0}(B_1)$ *tal que* $|||e_0||| > \rho_0$ *e* $I_0(e_0) \leq 0$.

Demonstração.

Passo 1: Usando o crescimento de f, dado em (2.1), e a desigualdade (2.5) encontramos

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |x|^{-ap^*} F(u) dx &\leq \int_{B_1} c|x|^{-ap^*} |u|^{p^*} dx \leq c \left(\int_{B_1} |x|^{-ap} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{p^*}{p}} \\ &\leq c \left(\int_{B_1} |x|^{-ap} |\nabla u|^p + V_\infty |x|^{-ap^*} |u|^p dx \right)^{\frac{p^*}{p}} \\ &\leq c|||u|||^{p^*}, \end{aligned}$$

de modo que

$$I_0(u) = \frac{1}{p} |||u|||^p - \int_{B_1} |x|^{-ap^*} F(u) dx \geq \frac{1}{p} |||u|||^p - c|||u|||^{p^*}.$$

Uma vez que $p^* > p$, existe ρ_0 tal que $\alpha_0 := \frac{1}{p} \rho_0^p - c\rho_0^{p^*} > 0$. Assim, temos $I_0(u) \geq \alpha_0$ para $|||u||| = \rho_0$.

Passo 2: Por (f_{14}) segue que existe $\theta > p$ e $c > 0$ tal que $F(s) \geq c|s|^\theta$ (veja A.4.2). Tomando $u_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(B_1 \setminus \{0\})$ podemos dizer que

$$I_0(tu_0) = \tfrac{1}{p}|||tu_0|||^p - \int_{B_1} |x|^{-ap^*} F(tu_0)dx \leq \frac{t^p}{p}|||u_0|||^p - t^\theta c \int_{B_1} |x|^{-ap^*}|u_0|^\theta dx$$

Como $\theta > p$ existe t_0 suficientemente grande tal que, tomando $e_0 = t_0u_0$, temos $I_0(e_0) < 0$ e $|||e_0||| > \rho_0$. ∎

Lema 2.2.2 *Suponha* (V_{11}), (f_{11}), (f_{12}) *e* (f_{14}). *Então o funcional* J *satisfaz a geometria do passo da montanha, a saber,*

1. Existem $\rho_1, \alpha_1 > 0$ *tais que* $J(u) \geq \alpha_1$ *for* $||u|| = \rho_1$.

2. Existe $e_1 \in E$ *tal que* $||e_1|| > \rho_1$ *e* $J(e_1) \leq 0$.

Demonstração.

Passo 1: Da definição de G temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}G(x,u)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}F(u)dx$. Assim, de modo análogo ao Lema anterior, temos $J(u) \geq \alpha_1 := \frac{1}{p}\rho_1^p - c\rho_1^{p^*} > 0$ para $||u|| = \rho_1$.

Passo 2: Tome o mesmo u_0 da prova do Lema anterior. Assim, $u_0 \in E$ e $G(x,u_0) = F(u_0)$, pois $u_0 \equiv 0$ em B_1^c. Pelo mesmo argumento do Lema anterior, temos $J(tu_0) \leq \dfrac{t^p}{p}||u_0||^p - t^\theta c \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^\theta dx$. Como $\theta > p$ existe um t_1 suficientemente grande tal que, tomando $e_1 = t_1u_0$, temos $J(e_1) < 0$ e $||e_1|| > \rho_1$. ∎

Note que é possível tomar t tal que $e = tu_0$ satisfaz aos dois Lemas anteriores. Isto nos garante a boa definição dos níveis minimax c^* e $\overline{c}$ dados por

$$c^* = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \text{ com } \Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$$

e

$$\overline{c} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)) \text{ com } \Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], \mathcal{D}_{a,0}^{1,p}(B_1)\right) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Como $J(u_0) \leq I_0(u_0)$ em $\mathcal{D}_{a,0}^{1,p}(B_1)$, temos

$$c^* \leq \overline{c}, \tag{2.16}$$

por suas definições. Agora, usando o Lema acima junto com o Teorema do Passo da Montanha (veja A.3.1) concluímos que existe (u_n), uma sequência (PS) for J, no nível minimax c^*, isto é

$$J(u_n) \to c^* \ \text{ e } \ J'(u_n) \to 0.$$

Lema 2.2.3 *Suponha (V_{11}), (f_{11}), (f_{12}) e (f_{14}) e seja (u_n) uma sequência (PS) para o funcional J. Então (u_n) é limitada em E.*

Demonstração. Defina $A = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq \overline{r} \text{ ou } f(u(x)) \leq \frac{V(x)}{k}|u(x)|^{p-2}u(x)\}$. Pela definição de G, temos que $G(x,u) = F(u)$, em A, de modo que, usando (f_{14}), concluímos que existe $\theta > p$ tal que $-G(x,u) + \frac{1}{\theta}ug(x,u) \geq 0$, em A. Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_A |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx - \int_A |x|^{-ap^*}G(x,u)dx \\
&-\frac{1}{\theta}\left(\int_A |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx - \int_A |x|^{-ap^*}g(x,u)udx\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\int_A |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx \\
&\geq \frac{(p-1)}{pk}\int_A |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora, considere $B = A^c = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > \overline{r} \text{ e } f(u(x)) > \frac{V(x)}{k}|u(x)|^{p-2}u(x)\}$. Pela definição de G, temos $\int_B |x|^{-ap^*}g(x,u)udx = \int_B |x|^{-ap^*}\frac{V(x)}{k}|u|^{p-2}uudx > 0$ e $|x|^{-ap^*}G(x,u) = \frac{V}{pk}|x|^{-ap^*}|u|^p dx$, em B. Então

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx - \int_B |x|^{-ap^*}G(x,u)dx \\
&-\frac{1}{\theta}\left(\int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx - \int_B |x|^{-ap^*}g(x,u)udx\right) \\
&\geq \frac{1}{k}\int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx - \int_B \frac{V}{pk}|x|^{-ap^*}|u|^p dx \\
&\geq \frac{1}{k}\int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx \\
&\quad -\frac{1}{pk}\int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx \\
&\geq \frac{(p-1)}{pk}\int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Combinando as desigualdades (2.17) e (2.18) temos

$$J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u \geq \frac{(p-1)}{pk}||u||^p.$$

Em particular, a equação acima vale para (u_n) e temos

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n \geq \frac{(p-1)}{pk}||u_n||^p.$$

Por outro lado, temos $J(u_n) \to c^*$, $\theta > p > 1$ e $J'(u_n)\frac{u_n}{||u_n||} \to 0$, uma vez que $J'(u_n) \to 0$. Assim, conseguimos

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n \leq M + \frac{1}{\theta}||u_n|| \leq M + ||u_n||,$$

para alguma constante $M > 0$. Então, temos $\frac{(p-1)}{pk}||u_n||^p \leq M + ||u_n||$, que pode ser reescrito por

$$||u_n||\left((p-1)||u_n||^{p-1} - pk\right) \leq pkM. \tag{2.19}$$

Assumindo $||u_n|| \to \infty$, a equação (2.19) implica que $(p-1)||u_n||^{p-1} - pk \to 0$. Então $||u_n|| \to \left(\frac{pk}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, que é uma contradição. Portanto, (u_n) é limitada em E. ■

Como $J'(u_n) \to 0$ e (u_n) é limitada, temos

$$o_n(1) = J'(u_n^+)(-u_n^-) + J'(-u_n^-)(-u_n^-) = ||-u_n^-||^p,$$

de modo que

$$||-u_n^-|| \to 0.$$

Pela continuidade de J e J' conseguimos

$$J(-u_n^-) \to 0 \quad \text{e} \quad J'(-u_n^-) \to 0,$$

de modo que

$$J(u_n^+) \to c^* \quad \text{e} \quad J'(u_n^+) \to 0.$$

Isto nos permite considerar sequências (PS) não negativas a partir de agora, isto é, dada (u_n), uma sequência (PS), podemos considerar que $u_n(x) \geq 0$ q.s em $\mathbb{R}^N$, para todo n, ou simplesmente,

$$u_n \geq 0 \text{ para todo } n. \tag{2.20}$$

Lema 2.2.4 *Suponha* (V_{11}), (f_{11}), (f_{12}) *e* (f_{14}). *Então o funcional* J *satisfaz a condição de Palais e Smale, isto é, toda sequência* (PS) *possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Tomando (u_n), uma sequência (PS), temos sua limitação, pelo Lema 2.2.3. Isso e a reflexividade do espaço E (veja A.1.4) nos garantem que existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Assim, é suficiente mostrar que $||u_n|| \to ||u||$. Como já sugerido na seção anterior, dividimos esta tarefa nas quatro afirmações abaixo.

Afirmação 1 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x, u_n) u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x, u) u dx.$

Afirmação 2 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x, u_n) u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x, u) u dx.$

Afirmação 3 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*} |u_n|^{p-2} u_n u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*} |u|^p dx.$

Afirmação 4 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u|^p dx.$

Vamos assumir as afirmações por enquanto e prosseguir com a demonstração do lema.

Uma vez que $J'(u_n)u_n \to 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n dx = o_n(1).$$

Passando o limite na equação anterior e usando a Afirmação 1 obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n||^p = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x,u)udx. \tag{2.21}$$

Como $J'(u_n)u \to 0$, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u + V|x|^{-ap^*}|u_n|^{p-2}u_n u dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x,u_n)udx = o_n(1).$$

Passando o limite na equação anterior e usando as Afirmações 2, 3 e 4, conseguimos

$$||u||^p = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V|x|^{-ap^*}|u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x,u)udx. \tag{2.22}$$

Usando as equações (2.21) e (2.22), temos

$$||u_n|| \to ||u||,$$

e o Lema fica provado. ■

Passamos agora à demonstração das Afirmações. Para tanto, a cada $\epsilon > 0$ dado, escolhemos um r satisfazendo as duas seguintes condições:

1. $max \left\{ \int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*}dx, \int_{B_{2r}^c} V|x|^{-ap^*}|u|^p dx \right\} \le \epsilon.$
2. $\eta = \eta_r \in \mathcal{C}_0^\infty(B_r^c)$ é tal que $\eta \equiv 1$ em B_{2r}^c e $0 \le \eta \le 1$, $|\nabla \eta| \le \frac{2}{r^d}$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

sendo u o ponto de convergência fraca da sequência u_n considerada e d dado na definição de p^*, o expoente crítico de Hardy e Sobolev. Observe que a condição 1 segue pela integrabilidade de $|x|^{-ap^*}|u|^{p^*}$ e $V|x|^{-ap^*}|u|^p$. Note que, quando uma dessas condições vale para algum r_0 então ela vale para todo $r \ge r_0$. Assim, podemos escolher um r que satisfaça ambas as condições.

Observação 2.2.1 *Daqui em diante vamos considerar a função g definida em (2.11) com $\overline{r} = r$, isto é, $\overline{r}$ é o r escolhido de modo a satisfazer as condições 1. e 2. acima. Do* *crescimento de g e da escolha de r concluímos:*

1. $g(x,t) = f(t)$ *e* $G(x,t) = F(t)$ *em* B_r.

2. $|x|^{-ap^*}g(x,t) \leq \frac{V}{k}|x|^{-ap^*}|t|^{p-2}t$ *e* $|x|^{-ap^*}G(x,t) \leq \frac{V}{pk}|x|^{-ap^*}|t|^p$ *em* B_r^c.

3. $\displaystyle\int_{B_{2r}^c} |x|^{-ap^*}g(x,u)udx \leq \frac{1}{k}\int_{B_{2r}^c} V|x|^{-ap^*}|u|^p dx < \epsilon.$

Repetimos os enunciados das Afirmações para a conveniência do leitor.

Afirmação 1 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}g(x,u_n)u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}g(x,u)udx.$

Demonstração.

Caso 1 $\displaystyle\int_{B_{2r}} |x|^{-ap^*}g(x,u_n)u_n dx \to \int_{B_{2r}} |x|^{-ap^*}g(x,u)udx$

Do Lema (A.1.2) temos $\mathcal{D}_a^{1,p}(B_{2r}) = W_a^{1,p}(B_{2r})$. Assim, $E(B_{2r}) \subset W_a^{1,p}(B_{2r})$ e, pelo usual Teorema de imersão de Sobolev, (veja A.3.5), temos $E(B_{2r})$ imerso compactamente em $L_a^q(B_{2r})$, para todo $q \in (p,p^*)$. Em particular, temos $E(B_{2r})$ imerso compactamente em $L_a^{\overline{p}}(B_{2r})$, com $\overline{p}$ dado em (f_{12}). Logo, para $u_n \rightharpoonup u$ em $E(B_{2r})$, temos $u_n \to u$ em $L_a^{\overline{p}}(B_{2r})$, de modo que

$$|x|^{\frac{-ap^*}{\overline{p}}}u_n \to |x|^{\frac{-ap^*}{\overline{p}}}u \text{ em } L^{\overline{p}}(B_{2r}).$$

Pelo Teorema A.3.4 temos que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.s. em } B_{2r}$$

e que

$$\text{existe } h \in L^{\overline{p}}(B_{2r}) : \left||x|^{\frac{-ap^*}{\overline{p}}}u_n(x)\right| \leq h(x), \text{ q.s. em } B_{2r}, \text{ para todo } n.$$

Assim, podemos concluir que

$$|x|^{-ap^*}g(x,u_n(x))u_n(x) \to |x|^{-ap^*}g(x,u(x))u(x), \text{ q.s. em } B_{2r}$$

e que

$$|x|^{-ap^*}g(x,u_n)u_n \leq |x|^{-ap^*}f(u_n)u_n \leq c|x|^{-ap^*}|u_n|^{\overline{p}} \leq c\left||x|^{\frac{-ap^*}{\overline{p}}}u_n\right|^{\overline{p}} \leq c|h|^{\overline{p}}.$$

Com isso e o Teorema da convergência dominada (veja A.3.3) temos

$$\int_{B_{2r}} u_n g(x, u_n) dx \to \int_{B_{2r}} ug(x, u) dx.$$

Caso 2 $\displaystyle\int_{B_{2r}^c} u_n g(x, u_n) dx \to \int_{B_{2r}^c} ug(x, u) dx$

Quando integrando em B_{2r}^c, não temos a imersão compacta de $E(B_{2r}^c)$ em $L_a^{\overline{p}}(B_{2r}^c)$. Assim, primeiro estimamos $\displaystyle\int_{B_{2r}^c} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx$, usando a função corte η definida acima. Como (u_n) é limitada temos que (ηu_n) é limitada também e podemos dizer que $J'(u_n)(\eta u_n) \to 0$, isto é,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + V|x|^{-ap^*}|u_n|^{p-2}u_n \eta u_n dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}\eta g(x, u_n) u_n dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Uma vez que $\eta \equiv 0$ in B_r, a equação acima vale em B_r^c. Acrescentando a isto que $|x|^{-ap^*}g(x,t) \leq \frac{V}{k}|x|^{-ap^*}|t|^{p-2}t$, para $x \in B_r^c$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p) dx + \int_{B_r^c} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n (\nabla \eta) u_n dx \\
&= \int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p) + |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n (\nabla \eta) u_n dx \\
&= \int_{B_r^c} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + V|x|^{-ap^*}|u_n|^{p-2}u_n \eta u_n dx \\
&= \int_{B_r^c} \eta |x|^{-ap} g(x, u_n) u_n dx + o_n(1) \\
&\leq \int_{B_r^c} \eta \frac{V}{k}|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Da desigualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p) dx \\
&\leq \int_{B_r^c} \eta \frac{V}{k}|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx - \int_{B_r^c} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n (\nabla \eta) u_n dx + o_n(1)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Usando o crescimento da função η, dado em sua definição, e a não negatividade da função $\eta|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r^c} \eta \frac{V}{k}|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx - \int_{B_r^c} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n(\nabla \eta)u_n dx + o_n(1)\\
&\leq \int_{B_r^c} \eta \frac{V}{k}|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx + \int_{B_r^c} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}|\nabla \eta| dx + o_n(1)\\
&\leq \frac{1}{k}\int_{B_r^c} \eta V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx + \frac{1}{k}\int_{B_r^c} \eta|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p dx\\
&\quad + \int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}|\nabla \eta| dx\\
&\quad + \int_{B_{2r}^c} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}|\nabla \eta| dx + o_n(1)\\
&\leq \frac{1}{k}\int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p)dx\\
&\quad + \frac{2}{r^d}\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1} dx + o_n(1).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Por (2.23) e (2.24) conseguimos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p)dx\\
&\leq \frac{1}{k}\int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p)dx\\
&\quad + \frac{2}{r^d}\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1} dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{k}\right)\int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p)dx\\
&\leq \frac{2}{r^d}\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1} dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}&\int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p)dx \\ &\leq \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{2}{r^d}\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}dx + o_n(1).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Como a sequência (u_n) é limitada em E, temos

$$\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p dx \leq \int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx \leq ||u_n|| \leq c,$$

para todo n.

Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade acima e a convergência forte de (u_n) em $L^p_{\frac{a}{p}}(B_{2r} \setminus B_r)$, temos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}dx \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{\frac{-ap}{p'}}|\nabla u_n|^{p-1}|x|^{-a}|u_n|dx \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} \left(|x|^{\frac{-ap}{p'}}|\nabla u_n|^{p-1}\right)^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} (|x|^a|u_n|)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} c\left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c\left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{2.26}$$

Usando a desigualdade de Hölder com os duais $\frac{p^*}{p}$ e $\frac{N}{dp}$ e lembrando que $|B_{2r} \setminus B_r| \leq |B_{2r}| \leq \omega_N(2r)^N$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} \left(|x|^{-ap}|u|^p\right)^{\frac{p^*}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} 1^{\frac{N}{dp}} dx\right)^{\frac{dp}{N}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} |B_{2r} \setminus B_r|^{\frac{d}{N}} \qquad (2.27)\\
&\leq \left(\omega_N(2r)^N\right)^{\frac{d}{N}} \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \omega_N^{\frac{d}{N}}(2r)^d \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades (2.25), (2.26) e (2.27) temos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_{B_{2r}^c} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_r^c} \eta(|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p) dx \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \left[\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{2}{r^d}\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1} dx + o_n(1)\right] \\
&\leq \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{2}{r^d}\limsup_{n\to\infty}\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u_n||\nabla u_n|^{p-1} dx \\
&\leq \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{2}{r^d} C \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{2}{r^d}\omega_N^{\frac{d}{N}}(2r)^d \left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq c\left(\int_{B_{2r}\setminus B_r} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Usando esta última desigualdade podemos dizer que, dado $\epsilon > 0$, pela escolha de r, temos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx\\ &\leq c\left(\int_{B_{2r}\setminus B_r}|x|^{-ap^*}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\leq \epsilon,\end{aligned}$$

isto é,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx \leq \epsilon. \tag{2.28}$$

Como definimos o problema auxiliar colocando o crescimento da função g de tal forma que sua integral pudesse ser comparada com a norma de u no complementar de uma conveniente bola, podemos estimar as convergências relacionadas a g com a poderosa ferramenta dada pela equação anterior e é isso que faremos nas próximas desigualdades. Usando o crescimento de g, temos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap^*}g(x,u_n)u_n dx\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{k}\int_{B_{2r}^c}V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{k}\int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p + V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Com isto e a Observação 2.2.1, temos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap^*}g(x,u_n)u_n dx - \int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap^*}g(x,u)u dx\right|\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\left|\int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap^*}g(x,u_n)u_n dx\right| + \limsup_{n\to\infty}\left|\int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap^*}g(x,u)u dx\right|\\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

Do caso 1, temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap^*}g(x,u_n)u_n dx - \int_{B_{2r}^c}|x|^{-ap^*}g(x,u)u dx\right| \leq \epsilon.$$

Combinando os Casos 1 e 2, temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap^*}g(x,u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap^*}g(x,u)u dx\right| \leq \epsilon,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x,u_n)u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x,u)u dx,$$

e a Afirmação 1 está demonstrada. ■

Afirmação 2 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x,u_n)u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*} g(x,u)u dx.$

Demonstração. Esta demonstração é análoga à demonstração da Afirmação 1. ■

Afirmação 3 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*} |u_n|^{p-2}u_n u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*} |u|^p dx.$

Demonstração. Defina $w_n = V^{\frac{1}{p'}}|x|^{\frac{-ap^*}{p'}}|u_n|^{p-2}u_n$. Uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ temos que $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$, de modo que $w_n(x) \to w(x) := V^{\frac{1}{p'}}|x|^{\frac{-ap^*}{p'}}|u|^{p-2}u$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| V^{\frac{1}{p'}}|x|^{\frac{-ap^*}{p'}}|u_n|^{p-2}u_n \right|^{p'} dx = \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u_n|^p dx \leq ||u_n||^p < c,$$

de modo que (w_n) é uma sequência limitada em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Assim, usando o Teorema A.3.6, concluímos que

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } L^{p'}(\mathbb{R}^N).$$

Definindo $h = V^{\frac{1}{p}}|x|^{\frac{-ap^*}{p}}u$, temos $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_n h dx \to \int_{\mathbb{R}^N} wh dx,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u_n|^{p-2}u_n u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^p dx,$$

o que completa a demonstração da Afirmação 3. ■

Afirmação 4 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx.$

Demonstração. Tomando $u_n \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : |x|^{-a}v \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ e } |x|^{-a}\nabla v \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$ (veja A.1.1), definindo $w_n = |x|^{-a(p-1)}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n$ e considerando a seguinte desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| |x|^{-a(p-1)} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \right|^{p'} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u_n|^p dx \leq ||u_n||^p < c,$$

temos que (w_n) é uma sequência limitada em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$.

Por outro lado, do fato de (u_n) ser sequência (PS), temos $u_n \rightharpoonup u$ em E e $J'(u_n) \to 0$. Logo (u_n) satisfaz as hipóteses do Lema A.3.3, de onde concluímos que

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^N,$$

o que nos dá

$$w_n \to w = |x|^{-a(p-1)} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Como w também está em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, a sequência (w_n) satisfaz as hipóteses do Teorema A.3.6, donde concluímos que $w_n \rightharpoonup w$ em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Ainda considerando o espaço $\mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ podemos dizer que $h = |x|^{-a} \nabla u$ está em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_n h dx \to \int_{\mathbb{R}^N} w h dx,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u|^p dx,$$

o que completa a demonstração da Afirmação 4. ■

Agora podemos combinar os resultados obtidos para garantir a existência de $u \in E$, solução não negativa de energia crítica para o problema (PA), que é o objetivo desta seção. Observe que, usando os Lemas 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 e o Teorema do Passo da Montanha (veja A.3.1), concluímos que existe (u_n), uma sequência (PS), e $u \in E$ tais que $||u_n|| \to ||u||$, ou ainda, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Com isso e a continuidade de J' e J temos

$$J'(u) = J'(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} J'(u_n) = 0$$

e

$$J(u) = J(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = c^*.$$

Assim, vemos que u é solução de energia crítica para (PA).

Para ver sua não negatividade, observe que, uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ temos que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, de (2.20) temos que $u_n(x) \geq 0$ q.s. em $\mathbb{R}^N$, para todo n, de modo que

$$u(x) \geq 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Como $J(u) = c^* > 0$ temos $u \not\equiv 0$, de modo que u é uma solução não trivial, não negativa e com energia crítica para (PA).

2.3 Prova do Teorema 1.1.1

Depois de conseguirmos mostrar a existência de uma solução para o problema (PA), na seção anterior, queremos agora mostrar que esta solução é também solução do problema $(P1)$. Olhando a definição de g é suficiente mostrar que, dada uma solução de (PA), temos

$$f(u) \leq \frac{V}{k}|u|^{p-2}u, \text{ para todo } x \in B_r^c,$$

pois, neste caso, teremos $g(x,u) = f(u)$ e u é solução de $(P1)$.

Para mostrarmos a desigualdade acima usaremos principalmente a hipótese (V_{12}) e uma estimativa pontual para solução de energia crítica do problema (PA), o que é feito no Lema 2.3.4. Para isso, porém, precisamos de uma estimativa em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, que é obtida pelos três Lemas iniciais desta seção.

Lema 2.3.1 *Toda solução u de energia crítica para (PA) satisfaz a estimativa*

$$||u||^p \leq \frac{pk\overline{c}}{p-1}.$$

Demonstração. Uma vez que u é de energia crítica temos $J(u) = c^*$. Por (2.16), $c^* \leq \overline{c}$ e pela demonstração do Lema 2.2.3, em que usamos (f_{14}), temos

$$\frac{(p-1)}{pk}||u||^p \leq J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u = c^* \leq \overline{c}.$$

Deste modo, concluímos

$$||u||^p \leq \frac{pk\bar{c}}{p-1}.$$

■

Observação 2.3.1 *A constante* $\frac{pk\bar{c}}{p-1}$ *depende somente de* V_∞*,* θ *e* f*. Assim, ela não depende do valor* r *usado nos cálculos das estimativas.*

Lema 2.3.2 *Seja* h *tal que* $|x|^{-ap^*}|h|^q$ *é integrável, com* $dpq > N$ *e* d *dado na definição de* p^**. Considere* $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, e* $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *funções contínuas e não negativas tais que* $|H(x,s)| \leq h(x)|s|^{p-1}$*, para todo* $s > 0$*. Seja* $v \in E$ *uma solução fraca do Problema Auxiliar 2, dado por:*

$$(PA2) \qquad \mathcal{L}_{ap}v + b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}v = |x|^{-ap^*}H(x,v), \ \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Então, existe uma constante $M = M(q, ||h||_{L^q_a(\mathbb{R}^N)}) > 0$ *tal que*

$$||v||_{L^\infty(B_1^c)} \leq M|| \ |x|^{-a}v||_{L^{p^*}(B_1^c)}.$$

Demonstração. Dados $m \in \mathbb{N}$ e $\beta > 1$, defina $A_m = \{x \in \mathbb{R}^N : |v|^{\beta-1} \leq m\}$, $B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m$ e

$$v_m = \begin{cases} v|v|^{p(\beta-1)}, & \text{em } A_m \\ m^p v, & \text{em } B_m. \end{cases}$$

Assim, temos

$$\nabla v_m = \begin{cases} (p\beta - p + 1)|v|^{p(\beta-1)}\nabla v, & \text{em } A_m \\ m^p \nabla v, & \text{em } B_m. \end{cases}$$

Então, $v_m \in E$ e, usando-a como função teste em $(PA2)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m + b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}v v_m dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}H(x,v)v_m dx. \qquad (2.29)$$

Pela definição de v_m em cada um dos domínios A_m e B_m, conseguimos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m dx \\ &= \int_{A_m} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v (p\beta - p + 1)|v|^{p(\beta-1)}\nabla v dx + \int_{B_m} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v m^p \nabla v dx \\ &= (p\beta - p + 1)\int_{A_m} |x|^{-ap}|v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p dx + m^p \int_{B_m} |x|^{-ap}|\nabla v|^p dx, \end{aligned} \qquad (2.30)$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vv_m dx \\
&= \int_{A_m} b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vv|v|^{p(\beta-1)}dx + \int_{B_m} b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vm^p vdx \\
&= \int_{A_m} b|x|^{-ap^*}|v|^{p\beta}dx + m^p\int_{B_m} b|x|^{-ap^*}|v|^p dx > 0.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Da equação (2.30) temos

$$(p\beta - p + 1)\int_{A_m} |x|^{-ap}|v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_m dx$$

e da equação (2.31) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vv_m dx > 0,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&\int_{A_m} |x|^{-ap}|v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p dx \\
&\leq (p\beta - p + 1)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_m dx \\
&\leq (p\beta - p + 1)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_m + b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vv_m dx.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Colocando

$$w_m = \begin{cases} v|v|^{\beta-1}, & \text{em } A_m \\ mv, & \text{em } B_m \end{cases}$$

temos

$$\nabla w_m = \begin{cases} \beta|v|^{\beta-1}\nabla v, & \text{em } A_m \\ m\nabla v, & \text{em } B_m, \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla w_m|^p dx \\
&= \int_{A_m} |x|^{-ap}|\beta|v|^{\beta-1}\nabla v|^p dx + \int_{B_m} |x|^{-ap}|m\nabla v|^p dx \\
&= \beta^p\int_{A_m} |x|^{-ap}|v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p dx + m^p\int_{B_m} |x|^{-ap}|\nabla v|^p dx.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Agora, considerando (2.31), concluímos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} b|x|^{-ap^*}|w_m|^p dx \\
&= \int_{A_m} b|x|^{-ap^*}|v|^{p\beta} dx \ + m^p \int_{B_m} b|x|^{-ap^*}|v|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2} v v_m dx.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Usando (2.34), (2.30) e (2.33), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla w_m|^p + b|x|^{-ap^*}|w_m|^p dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m + b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2} v v_m dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla w_m|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} b|x|^{-ap^*}|w_m|^p dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m dx - \int_{\mathbb{R}^N} b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2} v v_m dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla w_m|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m dx \\
&= \beta^p \int_{A_m} |x|^{-ap}|v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p dx + m^p \int_{B_m} |x|^{-ap}|\nabla v|^p dx \\
&\quad -(p\beta - p + 1) \int_{A_m} |x|^{-ap}|v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p dx - m^p \int_{B_m} |x|^{-ap}|\nabla v|^p dx \\
&= (\beta^p - p\beta + p - 1) \int_{A_m} |x|^{-ap}|v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p dx.
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Combinando (2.35), (2.32) e (2.29) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla w_m|^p + b|x|^{-ap^*}|w_m|^p dx \\
&= (\beta^p - p\beta + p - 1)\int_{A_m} |x|^{-ap}|v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_m + b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vv_m dx \\
&\leq \frac{\beta^p - p\beta + p - 1}{p\beta - p + 1}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_m + b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vv_m dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_m + b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vv_m dx \\
&= (\frac{\beta^p - p\beta + p - 1}{p\beta - p + 1} + 1)\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_m + b|x|^{-ap^*}|v|^{p-2}vv_m dx \\
&= \frac{\beta^p}{p\beta - p + 1}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}H(x,v)v_m dx \leq \beta^p\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}H(x,v)v_m dx.
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Seja S definido como a melhor constante para a desigualdade (2.5)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} dx \leq S\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx,$$

para todo $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Para obter a desigualdade abaixo, usamos os seguintes argumentos: $|v|^{p^*\beta} = |w_m|^{p^*}$ em A_m, a definição de S, a positividade da função $b|x|^{-ap^*}|w_m|^p$, a equação (2.36), a limitação de H e $|v|^{p-1}v_m \leq |v|^{p\beta}$ em $\mathbb{R}^N$, nesta ordem.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{A_m}|x|^{-ap^*}|v|^{p^*\beta}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} &= \left(\int_{A_m}|x|^{-ap^*}|w_m|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap^*}|w_m|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\\
&\leq S\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla w_m|^p dx\\
&\leq S\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla w_m|^p + b|x|^{-ap^*}|w_m|^p dx \qquad (2.37)\\
&\leq S\beta^p\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}H(x,v)v_m dx\\
&\leq S\beta^p\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|x|^{-ap^*}|v|^{p-1}v_m dx\\
&\leq S\beta^p\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|x|^{-ap^*}|v|^{p\beta}dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$ temos que $A_m \to \mathbb{R}^N$ e, usando o Teorema da convergência monótona (veja A.3.2) junto com a desigualdade acima, conseguimos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap^*}|v|^{p^*\beta}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq S\beta^p\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|x|^{-ap^*}|v|^{p\beta}dx. \qquad (2.38)$$

Como $dpq > N$, temos que $\sigma = \frac{N}{q'(N-dp)} > 1$. Deste modo, podemos considerar $\beta = \sigma^j$, com $j = 1, 2, 3, ...$ Usando estes valores de β na desigualdade (2.38) e também a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|\,|x|^{-\frac{a}{\sigma^j}}v\,\|_{p^*\sigma^j}^{p\sigma^j} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||x|^{-\frac{a}{\sigma^j}}v\right|^{p^*\sigma^j}dx\right)^{\frac{p\sigma^j}{p^*\sigma^j}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{ap^*}v^{p^*\sigma^j}dx\right)^{\frac{p\sigma^j}{p^*\sigma^j}}\\
&\leq S\sigma^{jp}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|x|^{-ap^*}|v|^{p\sigma^j}dx\\
&= S\sigma^{jp}\textstyle\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-a(p^*-p\sigma)}h(x)|x|^{-ap\sigma}|v|^{p\sigma^j}dx\\
&\leq S\sigma^{jp}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||x|^{-a(p^*-p\sigma)}h(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||x|^{-ap\sigma}|v|^{p\sigma^j}\right|^{q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}}\\
&\leq S\sigma^{jp}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap^*}|h(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||x|^{-\frac{a}{\sigma^{j-1}}}|v|\right|^{p\sigma^j q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}}\\
&\leq M_0\sigma^{jp}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||x|^{-\frac{a}{\sigma^{j-1}}}|v|\right|^{p\sigma^j q'}dx\right)^{\frac{p\sigma^j}{p\sigma^j q'}} \leq M_0\sigma^{jp}\|\,|x|^{-\frac{a}{\sigma^{j-1}}}v\,\|_{p\sigma^j q'}^{p\sigma^j},
\end{aligned}$$

sendo $M_0 = S\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|h(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = ||h||_{L^q_a(\mathbb{R}^N)}$. Observe que M_0 é independente de j. Assim, para todo $j = 1, 2, 3, ...$, temos

$$|| \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v \, ||_{p^*\sigma^j} \leq \left(M_0 \sigma^{jp} || \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^{j-1}}} v \, ||^{p\sigma^j}_{p\sigma^j q'}\right)^{\frac{1}{p\sigma^j}} \leq M_0^{\frac{1}{p\sigma^j}} \sigma^{\frac{j}{\sigma^j}} || \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^{j-1}}} v \, ||_{p\sigma^j q'} \quad (2.39)$$

Para $j = 1$ e $j = 2$ temos $p\sigma q' = p^*$ e $p\sigma^2 q' = p^*\sigma$. Aplicando isto em (2.39), temos

$$|| \, |x|^{-\frac{a}{\sigma}} v \, ||_{p^*\sigma} \leq M_0^{\frac{1}{p\sigma}} \sigma^{\frac{1}{\sigma}} || \, |x|^{-a} v \, ||_{p^*}$$

e

$$|| \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^2}} v \, ||_{p^*\sigma^2} \leq M_0^{\frac{1}{p\sigma^2}} \sigma^{\frac{2}{\sigma^2}} || \, |x|^{-\frac{a}{\sigma}} v \, ||_{p^*\sigma}.$$

Iterando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} || \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^2}} v \, ||_{p^*\sigma^2} &\leq M_0^{\frac{1}{p\sigma^2}} \sigma^{\frac{2}{\sigma^2}} || \, |x|^{-\frac{a}{\sigma}} v \, ||_{p^*\sigma} \\ &\leq M_0^{\frac{1}{p\sigma^2}} \sigma^{\frac{2}{\sigma^2}} M_0^{\frac{1}{p\sigma}} \sigma^{\frac{1}{\sigma}} || \, |x|^{-a} v \, ||_{p^*} \\ &\leq \sigma^{\frac{1}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^2}} M_0^{\frac{1}{p}(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2})} || \, |x|^{-a} v \, ||_{p^*}. \end{aligned}$$

Desse modo, para todo $j = 1, 2, 3, ...$, conseguimos

$$|| \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v \, ||_{p^*\sigma^j} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^2} + ... + \frac{j}{\sigma^j}} M_0^{\frac{1}{p}(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} + ... + \frac{1}{\sigma^j})} || \, |x|^{-a} v \, ||_{p^*}.$$

Como as séries acima convergem podemos tomar $M' := \sigma^{\frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}} M_0^{\frac{1}{p(\sigma-1)}}$ e obter que

$$|| \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v \, ||_{p^*\sigma^j} \leq M' || \, |x|^{-a} v \, ||_{p^*}. \quad (2.40)$$

para todo $j = 1, 2, 3, ...$ Em particular, temos

$$|| \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v \, ||_{L^{p^*\sigma^j}(B_1^c)} \leq M || \, |x|^{-a} v \, ||_{L^{p^*}(B_1^c)}.$$

Dado $-\infty < a \leq 0$, temos $|x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} \geq 1$ para todo $x \in B_1^c$, de modo que

$$\lim_{j \to \infty} || \, |x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v \, ||_{L^{p^*\sigma^j}(B_1^c)} \geq \lim_{j \to \infty} ||v||_{L^{p^*\sigma^j}(B_1^c)} = ||v||_{L^\infty(B_1^c)}. \quad (2.41)$$

Dado $0 < a < \frac{N-p}{p}$, para cada $j = 1, 2, 3, ...$ existe um r_j tal que $|x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in B^j := B_{r_j} \setminus B_1$ e $r_j \to \infty$ se $j \to \infty$. Defina

$$\chi_j = \chi_j(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in B^j, \\ 0, \text{ se } x \in B_1^c \setminus B^j, \end{cases}$$

Assim, podemos dizer que

$$
\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} ||\ |x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v\ ||_{L^{p^*\sigma^j}(B_1^c)} &= \lim_{j\to\infty}\left(\int_{B_1^c}\left||x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v\right|^{p^*\sigma^j} dx\right)^{\frac{1}{p^*\sigma^j}} \\
&= \lim_{j\to\infty}\left(\int_{B_1^c}\left|\chi_j|x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v\right|^{p^*\sigma^j} dx\right)^{\frac{1}{p^*\sigma^j}} \\
&+ \lim_{j\to\infty}\left(\int_{B_1^c}\left|(1-\chi_j)|x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v\right|^{p^*\sigma^j} dx\right)^{\frac{1}{p^*\sigma^j}} \\
&\geq \lim_{j\to\infty}\left(\int_{B_1^c}\left|\chi_j|x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v\right|^{p^*\sigma^j} dx\right)^{\frac{1}{p^*\sigma^j}} \\
&\geq \frac{1}{2}\lim_{j\to\infty}\left(\int_{B_1^c}|\chi_j v|^{p^*\sigma^j} dx\right)^{\frac{1}{p^*\sigma^j}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{j\to\infty}||\chi_j v||_{L^{p^*\sigma^j}(B_1^c)} \\
&= \frac{1}{2}||v||_{L^\infty(B_1^c)}.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Usando (2.41), (2.42) e (2.40) temos

$$\frac{1}{2}||v||_{L^\infty(B_1^c)} \leq \lim_{j\to\infty} ||\ |x|^{-\frac{a}{\sigma^j}} v\ ||_{L^{p^*\sigma^j}(B_1^c)} \leq M'||\ |x|^{-a}v\ ||_{p^*}.$$

Tomando $M = 2M'$ temos

$$||v||_{L^\infty(B_1^c)} \leq M||\ |x|^{-a}v\ ||_{p^*}.$$

Como σ depende de q, temos, pela definição de M, que $M = M(q, ||h||_{L^q_a(\mathbb{R}^N)}) > 0$, e o Lema fica demonstrado. ∎

Observação 2.3.2 *No Lema anterior, a constante M não depende do potencial b do problema $(PA2)$.*

Lema 2.3.3 *Existe uma constante $M_1 > 0$ tal que $||u||_\infty \leq M_1$, para toda u solução de energia crítica para (PA).*

Demonstração. Em primeiro lugar, mostraremos que, se u é solução de energia crítica para (PA) então u é solução fraca de $(PA2)$. Para isso, considere o r da definição de g e defina

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq r \text{ ou } f(u(x)) \leq \frac{V(x)}{k}|u(x)|^{p-2}u(x)\}$$

e

$$B = \mathbb{R}^N \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > r \text{ e } f(u(x)) > \frac{V(x)}{k}|u(x)|^{p-2}u(x)\}.$$

Defina também H e b por

$$H(x,t) = \begin{cases} f(t), & \text{em } A \\ 0, & \text{em } B, \end{cases} \quad \text{e} \quad b(x) = \begin{cases} V(x), & \text{em } A \\ \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x), & \text{em } B. \end{cases}$$

Das definições de g e H podemos dizer que $H(x,u) = g(x,u)$, em A, e $g(x,u) = \dfrac{V}{k}|u|^{p-2}u$, em B. Usando que $\mathbb{R}^N$ é a união disjunta de A e B e as definições acima, para um dado $\phi \in E$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + b|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}H(x,u)\phi dx \\
&= \int_A |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + b|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_A |x|^{-ap^*}H(x,u)\phi dx \\
&\quad \int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + b|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_B |x|^{-ap^*}H(x,u)\phi dx \\
&= \int_A |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_A |x|^{-ap^*}g(x,u)\phi dx \\
&\quad \int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + \left(1 - \frac{1}{k}\right) V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx \\
&= \int_A |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_A |x|^{-ap^*}g(x,u)\phi dx \\
&\quad \int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_B \frac{V}{k}|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx \\
&= \int_A |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_A |x|^{-ap^*}g(x,u)\phi dx \\
&\quad \int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_B |x|^{-ap^*}g(x,u)\phi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}g(x,u)\phi dx = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, u satisfaz,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + b|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u\phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}H(x,u)\phi dx,$$

para todo $\phi \in E$, isto é, u é solução fraca de $(PA2)$.

Das condições sobre f podemos encontrar $c > 0$ tal que $|f(s)| \leq c|s|^{\overline{p}-1}$, para todo $s > 0$, com $\overline{p} \in (p, p^*)$, dado em (f_{12}). Da definição de H segue que

$$|x|^{-ap^*}|H(x,u)| \leq |x|^{-ap^*}|f(u)| \leq c|x|^{-ap^*}|u|^{\overline{p}-1} \leq h(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-1},$$

com $h(x) = c|u|^{\overline{p}-p}$. Tomando $q = \frac{p^*}{\overline{p}-p}$, temos que $|x|^{-ap^*}|h|^q = |x|^{-ap^*}|u|^{p^*}$ é integrável, com $dpq > N$. Então u satisfaz as hipóteses do Lema 2.3.2, de onde conseguimos

$$||u||_\infty \leq M||\ |x|^{-a}u\ ||_{p^*}. \tag{2.43}$$

Usando a definição da constante S e o Lema 2.3.1, temos

$$\begin{aligned} ||\ |x|^{-a}u\ ||_{p^*} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left(S\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq (S||u||^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(S\tfrac{pk\overline{c}}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Combinando as equações (2.43) e (2.44), obtemos

$$||u||_\infty \leq M\left(S\frac{pk\overline{c}}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} := M_1,$$

e o Lema está demonstrado. ∎

Lema 2.3.4 *Considere r da definição de g e tome $R_0 \geq r$. Seja u uma solução não negativa, de energia crítica para (PA). Então, temos*

$$u(x) \leq ||u||_\infty R_0^{\frac{N-p}{p-1}}|x|^{-\frac{N-p(a+1)}{p-1}} \leq M_1 R_0^{\frac{N-p}{p-1}}|x|^{-\frac{N-p(a+1)}{p-1}},$$

para todo $x \in B_{R_0}^c$.

Demonstração. Considere $v(x) = M_1 R_0^{\frac{N-p}{p-1}}|x|^{-\frac{N-p(a+1)}{p-1}}$. Pelo Lema 2.3.3 temos $||u||_\infty \leq M_1$. Como $R_0 > 1$, para $|x| = R_0$ temos

$$\begin{aligned} u(x) &\leq ||u||_\infty \leq M_1 \leq M_1 R_0^{\frac{pa}{p-1}} \\ &= M_1 R_0^{\frac{N-p}{p-1}} R_0^{-\frac{N-p(a+1)}{N-1}} \\ &= M_1 R_0^{\frac{N-p}{p-1}} |x|^{-\frac{N-p(a+1)}{N-1}} \\ &= v(x), \end{aligned}$$

de modo que $u \leq v$, para $|x| = R_0$. Portanto $(u-v)^+ = 0$, em $|x| = R_0$, e a função dada por

$$w = \begin{cases} 0, & |x| < R_0 \\ (u-v)^+, & |x| \geq R_0 \end{cases}$$

é tal que $w \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $w \in E$, porque $u, v \in E$. Agora, vamos mostrar que $(u-v)^+ = 0$, em $|x| \geq R_0$. Tomando w como função teste, usando as condições de crescimento de g, $k > 1$ e a não negatividade de V e da solução u para (PA) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u) w dx - \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2} u w dx \\ &= \int_{B_{R_0}^c} g(x,u) w dx - \int_{B_{R_0}^c} V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2} u w dx \\ &\leq \left(\tfrac{1}{k} - 1\right) \int_{B_{R_0}^c} V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2} u w dx \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Usando a forma radial do operador $\mathcal{L}_{ap} v$, (veja [27, 50]), temos que

$$-\mathrm{div}(|x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, \text{ em } B_{R_0}^c.$$

Esta equação, tomada na forma fraca, nos dá

$$\int_{B_{R_0}^c} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla \phi dx = 0, \quad \text{para todo } \phi \in E.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w dx = \int_{B_{R_0}^c} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w dx = 0. \tag{2.46}$$

Colocando $A = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geq R_0 \text{ e } u(x) > v(x)\}$ e $B = \mathbb{R}^N \setminus A$, temos

$$w = \begin{cases} u - v, & \text{em } A \\ 0, & \text{em } B \end{cases}$$

Visando simplificar o modo de expressar alguns cálculos futuros, a partir de agora usamos a notação $\varphi = [|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v]\,[\nabla u - \nabla v]$ e lembramos que $\varphi \geq 0$, pela desigualdade de Tolksdorf (A.4.1). Usando (2.45) e (2.46), obtemos, para todo $1 < p < N$, que

$$\begin{aligned}\int_A |x|^{-ap}\varphi dx &= \int_A |x|^{-ap}\left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right][\nabla u - \nabla v]\,dx \\ &= \int_A \left[\ |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\ \right]\nabla w dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w dx \\ &\leq 0.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Combinando (2.47) com $\varphi \geq 0$ temos

$$\int_A |x|^{-ap}\varphi dx = 0. \tag{2.48}$$

Considere $2 \leq p < N$. Usando a desigualdade de Tolksdorf (A.4.1) e a equação (2.48), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla w|^p dx &= \int_A |x|^{-ap}|\nabla u - \nabla v|^p dx \\ &\leq c\int_A |x|^{-ap}\left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right][\nabla u - \nabla v]\,dx \\ &= c\int_A |x|^{-ap}\varphi dx \\ &= 0.\end{aligned} \tag{2.49}$$

No caso $1 < p < 2$, além dos argumentos usados acima, também usamos a desigualdade de Hölder com os duais $\dfrac{2}{p}$ e $\dfrac{2}{2-p}$. Tentando simplificar um pouco a notação, chamamos $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = \frac{2-p}{p}$ e observamos que $\alpha + \beta = 1$. Também lembramos que a desigualdade de Tolksdorf nos dá

$$\begin{aligned}|\nabla u - \nabla v|^2 &\leq c\,[|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v]\,[\nabla u - \nabla v]\,(|\nabla u| + |\nabla v|)^{2-p} \\ &= c\varphi\,(|\nabla u| + |\nabla v|)^{2-p}.\end{aligned}$$

Com isso, a desigualdade de Hölder e a equação (2.48) conseguimos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla w|^p dx &= \int_A |x|^{-ap}|\nabla w|^p dx = \int_A |x|^{-ap}\left(|\nabla u - \nabla v|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&\leq \int_A |x|^{-ap}\left(c\varphi\left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{2-p}\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&\leq c\int_A |x|^{-ap}\varphi^{\frac{p}{2}}\left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{\frac{(2-p)p}{2}} dx \\
&\leq c\int_A |x|^{-ap\alpha}\varphi^{\frac{p}{2}}|x|^{-ap\beta}\left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{\frac{(2-p)p}{2}} dx \\
&\leq c\left[\int_A \left||x|^{-ap\alpha}\varphi^{\frac{p}{2}}\right|^{\frac{2}{p}} dx\right]^{\frac{p}{2}}\left[\int_A \left||x|^{-ap\beta}\left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{\frac{(2-p)p}{2}}\right|^{\frac{2}{2-p}} dx\right]^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leq c\left[\int_A |x|^{-ap}|\varphi| dx\right]^{\frac{p}{2}}\left[\int_A |x|^{-ap}\left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^p dx\right]^{\frac{2-p}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Combinando a desigualdade anterior com (2.49) concluímos

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla w|^p dx \leq 0, \quad \text{para todo } \ 1 < p < N.
$$

Logo, w é constante em $\mathbb{R}^N$. Como $w = 0$ em A temos

$$
w = 0, \ \text{ em } \mathbb{R}^N,
$$

o que implica $(u - v)^+ = 0$, em $|x| \geq R_0$. Disto, concluímos que

$$
u \leq v, \quad \text{em } \mathbb{R}^N,
$$

e o Lema está provado. ∎

Agora estamos em condição de demonstrar o Teorema 1.1.1 e para o conforto do leitor reapresentamos o seu enunciado.

Teorema 1.1.1 Suponha que V e f satisfaçam, respectivamente, (V_{11}), (V_{12}), (f_{11}), (f_{12}), (f_{13}) e (f_{14}). Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, c_0) > 0$ tal que o problema

$(P1)$ tem uma solução não negativa de energia crítica, para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$, sendo V_∞ o máximo de f no fecho de B_1. Além disso suponha que

$(f_{12})'$ Existe $c > 0$ tal que $ap^* = p(a+1) - c$ e

$$p < \overline{p} < \min\{\frac{Np}{N-p};\ p + \frac{cp}{N-p(a+1)}\}.$$

Então a solução é positiva.

Demonstração. Como vimos no começo desta seção, para a demonstração deste teorema, é suficiente mostrarmos que, para toda solução u de (PA), temos

$$f(u) \leq \frac{V}{k}|u|^{p-2}u, \quad \text{em} \quad B_r^c.$$

Por (2.1) temos que existe $c > 0$ tal que $|sf(s)| \leq c|s|^{p^*}$, o que nos dá

$$\frac{f(u)}{|u|^{p-2}u} \leq \frac{|uf(u)|}{|u|^p} \leq \frac{c|u|^{p^*}}{|u|^p} \leq c|u|^{\frac{dp^2}{N-dp}}.$$

Note que a hipótese (V_{12}) vale para todo $R_0 > r_1$. Portanto, para $R_0 = r > r_1$ podemos usar (V_{12}) e o Lema 2.3.4. Assim, para cada x em B_r^c, e $\Lambda^* = kcM_1^{\frac{P^2}{N-p}}R_0^{\frac{p^2}{p-1}}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{f(u)}{|u|^{p-2}u} &\leq c|u|^{\frac{dp^2}{N-dp}} \leq c\left|M_1 R_0^{\frac{N-p}{p-1}}|x|^{-\frac{N-p(a+1)}{p-1}}\right|^{\frac{dp^2}{N-dp}} \\ &= cM_1^{\frac{P^2}{N-p}}R_0^{\frac{p^2}{p-1}}\frac{V}{V|x|^{\frac{dp^2[N-p(a+1)]}{(N-dp)(p-1)}}} = \frac{\Lambda^*}{k}\frac{V}{V|x|^{\frac{dp^2[N-p(a+1)]}{(N-dp)(p-1)}}} \leq \frac{\Lambda^*}{\Lambda}\frac{V}{k}.\end{aligned}$$

Tomando $\Lambda^* \leq \Lambda$ segue que $\dfrac{f(u)}{|u|^{p-2}u} \leq \dfrac{V}{k}$, para todo x em B_r^c, o que nos dá

$$f(u) \leq \frac{V}{k}|u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad B_r^c.$$

Assim, mostramos que o problema $(P1)$ possui uma solução u não negativa de energia crítica. Considerando $(f_{12})'$ podemos mostrar a positividade de u do seguinte modo.

Tome $\epsilon > 0$ fixo e seja $A_\epsilon = B_R \setminus B_\epsilon$. Usando [44, Theorem 3.1] temos que

$$u \in L^\infty \cap C^{0,\alpha}_{loc}(B_R)$$

e por [64, Theorem 1] conseguimos

$$u \in C^{1,\alpha}(A_\epsilon).$$

Aplicando [59, Theorem 8.1] temos que

$$u > 0 \text{ em } \ A_\epsilon.$$

Arguindo como em [52, Theorem 2.1] conseguimos

$$u > 0 \text{ em } \ B_R.$$

Finalmente, fazendo $R \to \infty$ temos

$$u > 0 \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

■

Capítulo 3

Solução para o problema $(P2)$

Neste Capítulo apresentaremos uma solução não trivial, não negativa e de energia mínima para o problema $(P2)$, termo que será definido no começo da terceira seção. Além disso, mostraremos uma outra condição sobre $\overline{p}$, dado em (f_{22}), com a qual teremos a positividade da solução.

3.1 Resultados preliminares

Para o conforto do leitor reapresentamos aqui tanto o problema $(P2)$ como as hipóteses sobre V, K e f.

$$(P2) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_{ap}u + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}u = K(x)|x|^{-ap^*}f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $N \geq 3$, $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$ e $p^* := p^*(a, e) = \frac{Np}{N-dp}$.

Supomos que $V, K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções positivas contínuas satisfazendo:

$$(K_{20}) \qquad V(x), K(x) > 0, \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } K \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L_a^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L_a^1(\mathbb{R}^N).$$

$$(K_{21}) \qquad K/V \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

$$(K_{22}) \qquad \text{Existe } \alpha \in (p, p^*), \text{ tal que } \lim_{|x|\to\infty} \frac{K(x)}{V(x)^{\frac{p^*-\alpha}{p^*-p}}} = 0.$$

Usamos a notação $(V,K) \in \mathcal{H}_1$ para expressar que V e K satisfazem (K_{20}) e (K_{21}). Uma hipótese alternativa é considerar V e K satisfazendo (K_{20}) e (K_{22}), para o que usamos a notação $(V,K) \in \mathcal{H}_2$.

Supomos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz as condições abaixo, com $1 < p < N$ e $p^* := p^*(a,e) = \frac{Np}{N-dp}$.

(f_{21})
$$\limsup_{s\to 0} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} = 0.$$

(f_{22})
$$\text{Existe } \overline{p} \in (p,p^*), \text{ tal que } \limsup_{s\to\infty} \frac{sf(s)}{s^{\overline{p}}} = 0.$$

(f_{23})
$$f(s) = 0, \text{ para todo } s \leq 0.$$

(f_{24})
$$\limsup_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^p} = \infty.$$

(f_{25})
$$s^{-(p-1)}f(s) \text{ é uma função crescente em } s \in (0,\infty).$$

Observação 3.1.1 *Das condições sobre f temos que existem valores $c > 0$ tais que*

$$0 \leq sf(s) \leq c|s|^{p^*}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

$$0 \leq sf(s) \leq c|s|^{\overline{p}}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ com } \overline{p} \text{ dado em } (f_{22}). \tag{3.2}$$

Como desejamos encontrar uma solução para o problema $(P2)$ com métodos variacionais, consideramos o seu funcional de Euler e Lagrange:

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(u)dx, \tag{3.3}$$

sendo $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Seguindo as mesmas idéias da introdução do Capítulo anterior, consideramos o espaço E, dado por

$$E = \left\{ u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^p dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Das hipóteses sobre f, segue que J é C^1 com derivada de Gâteaux dada por

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V(x)|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}f(u)vdx,$$

para todos $u, v \in E$.

Lema 3.1.1 *Suponha* (K_{20}), (f_{21}), (f_{22}) *e* (f_{24}). *Então o funcional* J *satisfaz a geometria do passo da montanha, a saber:*

1. Existem $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $J(u) \geq \alpha$, *para* $||u|| = \rho$.

2. Existe $e \in E$ *tal que* $||e|| > \rho$ *e* $J(e) \leq 0$.

Demonstração.

Passo 1: Usando (3.1) temos que existe $c > 0$ tal que

$$F(s) \leq c|s|^{p^*}, \text{ para todo } s > 0,$$

o que, junto com (K_{20}), nos dá

$$K(x)|x|^{-ap^*}F(s) \leq c|x|^{-ap^*}|s|^{p^*}, \text{ para todo } s > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Para os parâmetros $N \geq 3$, $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$, $a \leq e \leq a+1$, $d = 1 + a - e$ e $p^* := p^*(a, e) = \frac{Np}{N-dp}$ temos a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|u|^{p*}dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.5}$$

(veja [26]). Assim, por (3.4) e (3.5) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(u)dx &\leq c \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*}dx \\ &\leq c \left(S \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx \right)^{\frac{p^*}{p}} \\ &\leq c||u||^{p^*}. \end{aligned}$$

Portanto $J(u) \geq \frac{1}{p}||u||^p - c||u||^{p^*} = \frac{1}{p}\rho^p - c\rho^{p^*} := \alpha > 0$ para $||u|| = \rho$, suficientemente pequeno.

Passo 2: De (f_{24}) segue que, para todo $M > 0$, existe $s_M > 0$, tal que

$$F(s) \geq Ms^p, \quad \text{para todo} \quad s > s_M.$$

Combinando (f_{21}) e (f_{25}) temos $F(s) > 0$, para todo $s > 0$. Assim, existe $0 < C_M < \infty$ tal que $C_M = \sup\limits_{0 \leq s \leq s_M} f(s)$. Então, conseguimos

$$F(s) \geq Ms^p - C_M, \quad \text{para todo} \quad s > 0. \tag{3.6}$$

Fixando $u \in E$ e usando (3.6) e (K_{20}) vemos que

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{1}{p}||tu||^p - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(tu)dx \\ &\leq \frac{1}{p}||tu||^p - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}[M(tu)^p - C_M]dx \\ &\leq t^p\left[\frac{||u||^p}{p} - M\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}u^p dx\right] + C_M\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}dx. \\ &\leq t^p\left[\frac{||u||^p}{p} - M\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}u^p dx\right] + c. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tomando M suficientemente grande vemos que $J(tu) \to -\infty$ as $t \to \infty$, o que finaliza a prova. ■

Definição 3.1.1 *Dizemos que uma sequência (u_n) é uma sequência de Cerami, abreviadamente sequência (C), para um funcional Φ de classe C^1 se (u_n) satisfaz*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad (1 + ||u_n||)\Phi'(u_n) \to 0.$$

O Lema acima garante que J satisfaz a geometria do passo da montanha (veja A.3.1). Usando [61, Theorem 3.4] concluímos que existe (u_n), uma sequência (C) for J, isto é,

$$J(u_n) \to c^* \quad \text{e} \quad (1 + ||u_n||)J'(u_n) \to 0,$$

sendo

$$c^* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0, \text{ e } \gamma(1) = e, \text{ com } J(e) < 0\}.$$

Agora veremos que podemos considerar sequências (C) não negativas. Dada (u_n), uma sequência (C), temos que $(1 + ||u_n||)J'(u_n) \to 0$ de modo que, para a sequência limitada $\frac{-u_n^-}{||-u_n^-||}$, temos

$$(1 + ||u_n||)J'(u_n)(\frac{-u_n^-}{||-u_n^-||}) < \epsilon.$$

Assim,

$$J'(u_n)(-u_n^-) \leq \epsilon\frac{||-u_n^-||}{1+||u_n||} \leq \epsilon\frac{||u_n||}{1+||u_n||} \leq \epsilon, \tag{3.8}$$

ou ainda

$$J'(u_n)(-u_n^-) = o_n(1).$$

Dessa forma, temos

$$o_n(1) = J'(u_n)(-u_n^-) = J'(u_n^+)(-u_n^-) + J'(-u_n^-)(-u_n^-) = ||-u_n^-||^p,$$

de modo que

$$||-u_n^-|| \to 0.$$

Pela continuidade de J e J' segue

$$J(-u_n^-) \to 0 \quad \text{e} \quad J'(-u_n^-) \to 0,$$

de modo que

$$J(u_n^+) \to c^* \quad \text{e} \quad (1 + ||u_n^+||)J'(u_n^+) \to 0.$$

Assim, dada (u_n), uma sequência (C) podemos considerar que $u_n(x) \geq 0$ q.s em $\mathbb{R}^N$, para todo n, ou simplesmente,

$$u_n \geq 0 \text{ para todo } n. \tag{3.9}$$

3.2 Resultados de compacidade

Nesta seção provamos alguns resultados que nos ajudarão a contornar o problema da perda de compacidade na imersão de Sobolev no espaço $\mathbb{R}^N$. Nestes resultados fica ainda mais claro o papel do crescimento dos potenciais para a obtenção de estimativas que garantirão convergências fortes. Começamos com a seguinte proposição, que tem uma desigualdade do tipo Hardy.

Proposição 3.2.1 *1. Supondo $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ temos E imerso compactamente em $L^q_{K,a}(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in (p, p^*)$. 2. Supondo $(V, K) \in \mathcal{H}_2$ temos E imerso compactamente em $L^\alpha_{K,a}(\mathbb{R}^N)$, com α dado em (K_{22}).*

Demonstração.

Parte 1. Supomos $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ e $v_n \rightharpoonup v$ para mostrar que $v_n \to v$ em $L^q_{K,a}(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (p, p^*)$. Para as estimativas abaixo fixamos $q \in (p, p^*)$.

Dado $\epsilon > 0$, como $p < q$ podemos encontrar $c, s_0 > 0$ tal que

$$|s|^q \leq \epsilon |s|^p, \text{ para } 0 \leq s \leq s_0,$$

de modo que, usando (K_{21}), temos

$$K(x)|x|^{-ap^*}|s|^q \leq \epsilon c V(x)|x|^{-ap^*}|s|^p, \text{ para } 0 \leq s \leq s_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N.$$

Dado $\epsilon > 0$, como $q < p^*$ podemos encontrar $s_1 > 1$ tal que

$$|s|^q \leq \epsilon |s|^{p^*}, \text{ para } s \geq s_1,$$

de modo que, usando (K_{20}), temos

$$K(x)|x|^{-ap^*}|s|^q \leq \epsilon c |x|^{-ap^*}|s|^{p^*}, \text{ para } s \geq s_1 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N.$$

Pela continuidade das funções envolvidas vemos que existe $c > 0$ tal que,

$$K(x)|x|^{-ap^*}|s|^q \leq c K(x)|x|^{-ap^*}\chi_{[s_0,s_1]}(|s|)|s|^{p^*}, \text{ para } s_0 \leq s \leq s_1 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, para um dado $\epsilon > 0$ vemos que existem $c > 0$ e $0 < s_0 < s_1$ tais que

$$\begin{aligned} K(x)|x|^{-ap^*}|s|^q &\leq \epsilon c \left(V(x)|x|^{-ap^*}|s|^p + |x|^{-ap^*}|s|^{p^*} \right) \\ &\quad + c K(x)|x|^{-ap^*}\chi_{[s_0,s_1]}(|s|)|s|^{p^*}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

para todo $s \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Para $u \in E$ a desigualdade (3.10) nos dá

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|u|^q dx &\leq \epsilon c \left(\int_{B_{r_1}^c} V(x)|x|^{-ap^*}|u|^p dx + \int_{B_{r_1}^c} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*} dx \right) \\ &+c \int_{B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*} \chi_{[s_0,s_1]}(|u|)|u|^{p^*} dx \qquad (3.11) \\ &\leq \epsilon c Q(u) + c \int_{A \cap B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*} dx,\end{aligned}$$

sendo

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|x|^{-ap^*}|u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*} dx \qquad (3.12)$$

e $A = \{x \in \mathbb{R}^N : s_0 \leq |u(x)| \leq s_1\}$.

Como $v_n \rightharpoonup v$ em E, temos (v_n) limitada em E. Assim, temos $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^p dx \leq c$, para todo n. Por (3.5), temos $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|v_n|^{p^*} dx \leq c$, para todo n, de modo que

$$Q(v_n) \leq c, \text{ para todo } n. \qquad (3.13)$$

Nos referiremos à desigualdade (3.13) dizendo "a limitação de $(Q(v_n))$".

Usando (K_{20}) podemos escolher $r_2 \geq r_1$ tal que

$$\int_{A_n \cap B_{r_2}^c} K(x)|x|^{-ap^*} dx \leq \epsilon, \quad \text{para todo } n. \qquad (3.14)$$

Das desigualdades (3.11), (3.13) e (3.14) conseguimos

$$\int_{B_{r_2}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx \leq \epsilon, \quad \text{para todo } n. \qquad (3.15)$$

Considerando o caso particular em que $v_n = v$, para todo n, vemos que (3.15) nos permite escolher um $r_3 \geq r_2$ tal que

$$\int_{B_{r_3}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|v|^q dx \leq \epsilon. \qquad (3.16)$$

Assim, de (3.15) e (3.16) conseguimos

$$\left| \int_{B_{r_3}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx - \int_{B_{r_3}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|v|^q dx \right| \leq \epsilon. \qquad (3.17)$$

Pelo Lema A.1.2 temos que $\mathcal{D}_a^{1,p}(B_{r_3}) = W_a^{1,p}(B_{r_3})$, de modo que $E(B_{r_3}) \subset W_a^{1,p}(B_{r_3})$. Pelo usual teorema de imersão de Sobolev (veja A.3.5) temos que $E(B_{r_3})$ está imerso compactamente em $L_a^q(B_{r_3})$, com $q \in (p, p^*)$. Assim, se $v_n \rightharpoonup v$ em $E(B_{r_3})$, temos

$$v_n \to v \text{ em } L_a^q(B_{r_3}).$$

isto é,

$$|x|^{\frac{-ap^*}{q}} v_n \to |x|^{\frac{-ap^*}{q}} v \text{ em } L^q(B_{r_3}).$$

Pelo Teorema A.3.4 temos que

$$|x|^{\frac{-ap^*}{q}} v_n(x) \to |x|^{\frac{-ap^*}{q}} v(x) \text{ q.s. em } B_{r_3}$$

e que

$$\text{existe } h \in L^q(B_{r_3}) \text{ tal que } \left| |x|^{\frac{-ap^*}{q}} v_n(x) \right| \leq h(x) \text{ q.s. em } B_{r_3}, \text{ para todo } n.$$

Com isso e (K_{20}), conseguimos que

$$K(x)|x|^{-ap^*} v_n(x) \to K(x)|x|^{-ap^*} v(x) \text{ q.s. em } B_{r_3}$$

e que

$$K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q \leq c \left| |x|^{\frac{-ap^*}{q}} v_n \right|^q \leq c|h|^q \text{ q.s. em } B_{r_3}, \text{ para todo } n.$$

Usando o Teorema da convergência Dominada (veja A.3.3) temos que

$$\left| \int_{B_{r_3}} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx - \int_{B_{r_3}} K(x)|x|^{-ap^*}|v|^q dx \right| \leq \epsilon. \tag{3.18}$$

Usando (3.17) e (3.18) conseguimos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}|v|^q dx \right| \leq \epsilon,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}|v|^q dx.$$

Assim, E está imerso compactamente em $L_{K,a}^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in (p, p^*)$.

Parte 2. Supomos $(V,K) \in \mathcal{H}_2$ e $v_n \rightharpoonup v$ para mostrar que $v_n \to v$ em $L^{\alpha}_{K,a}(\mathbb{R}^N)$, com α dado em (K_{22}).

Para um fixado $x \in \mathbb{R}^N$, a função de $s > 0$ dada por $g(s) = V(x)s^{p-\alpha} + s^{p^*-\alpha}$, tem um valor mínimo dado por

$$m_\alpha V(x)^{\frac{p^*-\alpha}{p^*-p}}, \quad \text{com} \quad m_\alpha = \left(\frac{p^*-p}{p^*-\alpha}\right)\left(\frac{\alpha-p}{p^*-2}\right)^{\frac{p-\alpha}{p^*-p}}.$$

Com isso, conseguimos

$$m_\alpha V(x)^{\frac{p^*-\alpha}{p^*-p}} \leq V(x)|s|^{p-\alpha} + |s|^{p^*-\alpha}, \text{ para } s \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ e } x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.19}$$

Para um dado $\epsilon > 0$, e usando (K_{22}) concluímos que existe um $r_1 > 1$ tal que

$$K(x)|x|^{-ap^*} \leq \epsilon m_\alpha |x|^{-ap^*} V(x)^{\frac{p^*-\alpha}{p^*-p}}, \quad \text{para} \quad |x| \geq r_1. \tag{3.20}$$

Assim, de (3.19) e (3.20), para um dado $\epsilon > 0$ temos

$$K(x)|x|^{-ap^*}|s|^\alpha \leq \epsilon\left(V(x)|x|^{-ap^*}|s|^p + |x|^{-ap^*}|s|^{p^*}\right), \text{ para } s \in \mathbb{R} \text{ e } |x| \geq r_1.$$

Isso, junto com a limitação de $(Q(v_n))$, produz

$$\begin{aligned} \int_{B^c_{r_1}} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^\alpha dx &\leq \epsilon\left(\int_{B^c_{r_1}} V(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^p dx + \int_{B^c_{r_1}} |x|^{-ap^*}|v_n|^{p^*} dx\right) \\ &\leq \epsilon Q(v_n) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{B^c_{r_1}} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^\alpha dx \leq \epsilon, \text{ para todo } n. \tag{3.21}$$

Considerando o caso particular em que $v_n = v$, para todo n, vemos que (3.21) nos permite escolher $r_2 \geq r_1$ tal que

$$\int_{B^c_{r_2}} K(x)|x|^{-ap^*}|v|^\alpha dx \leq \epsilon, \quad \text{para todo } n.$$

Assim, procedendo exatamente como na parte 1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^\alpha dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}|v|^\alpha dx.$$

Logo, E está imerso compactamente em $L^{\alpha}_{K,a}(\mathbb{R}^N)$, com α dado em (K_{22}). ■

Lema 3.2.1 *Suponha* (f_{21}), (f_{22}) *e* $(V,K) \in \mathcal{H}_1$ *ou* $(V,K) \in \mathcal{H}_2$. *Seja* (v_n) *uma sequencia tal que* $v_n \rightharpoonup v$ *em* E. *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}G(v_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}G(v)dx,$$

para $G(v_n) = F(v_n), G(v_n) = f(v_n)v_n$ *e* $G(v_n) = f(v_n)v$.

Demonstração.

Parte 1. Assumimos $(V,K) \in \mathcal{H}_1$, fixamos $q \in (p, p^*)$ e começamos com o caso $G(v_n) = F(v_n)$.

Dado $\epsilon > 0$, de (f_{21}) podemos encontrar $s_0 > 0$ tal que

$$F(s) \leq \epsilon|s|^p, \quad \text{para} \;\; 0 \leq s \leq s_0,$$

de modo que, usando (K_{21}) temos

$$K(x)|x|^{-ap^*}F(s) \leq \epsilon c V(x)|x|^{-ap^*}|s|^p, \quad \text{para} \;\; 0 \leq s \leq s_0 \;\; \text{e} \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Dado $\epsilon > 0$, de (f_{22}) podemos encontrar $s_1 > s_0$ tal que

$$F(s) \leq \epsilon|s|^{p^*}, \quad \text{para} \;\; s \geq s_1,$$

de modo que, usando (K_{20}) temos

$$K(x)|x|^{-ap^*}F(s) \leq \epsilon c|x|^{-ap^*}|s|^{p^*}, \quad \text{para} \;\; s \geq s_1 \;\; \text{e} \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Pela continuidade de f, vemos que existe $c > 0$ tal que

$$K(x)|x|^{-ap^*}F(s) \leq cK(x)|x|^{-ap^*}|s|^q, \quad \text{para} \;\; s_0 \leq s \leq s_1 \;\; \text{e} \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $c > 0$ tal que

$$K(x)|x|^{-ap^*}F(s) \leq \epsilon c\left(V(x)|x|^{-ap^*}|s|^p + |x|^{-ap^*}|s|^{p^*}\right) + cK(x)|x|^{-ap^*}|s|^q, \tag{3.22}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Usando a desigualdade anterior e a limitação de $(Q(v_n))$ temos,

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v_n)dx &\leq \int_{B_{r_1}^c} \epsilon c(V(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^p + |x|^{-ap^*}|v_n|^{p^*})dx \\ &\quad + c\int_{B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx \\ &\leq \epsilon c Q(v_n) + c\int_{B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx \\ &\leq \epsilon c + c\int_{B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx.\end{aligned} \tag{3.23}$$

para todo n e $r_1 > 0$. Da Proposição 3.2.1 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}|v|^q dx,$$

para todo $q \in (p, p^*)$. Assim, podemos tomar $r_2 \geq r_1$ para o qual temos

$$\int_{B_{r_2}^c} K(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^q dx \leq \epsilon, \text{ para todo } n,$$

o que, junto com (3.23), nos dá

$$\int_{B_{r_2}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v_n)dx \leq \epsilon, \text{ para todo } n. \tag{3.24}$$

Considerando o caso particular em que $v_n = v$, para todo n, vemos que (3.24) nos permite escolher $r_3 \geq r_2$ tal que

$$\int_{B_{r_3}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v)dx \leq \epsilon, \text{ para todo } n. \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25) segue que

$$\left|\int_{B_{r_3}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v_n)dx - \int_{B_{r_3}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v)dx\right| \leq \epsilon. \tag{3.26}$$

Por (3.2) e os argumentos usados após (3.17) temos

$$\left|\int_{B_{r_3}} K(x)|x|^{-ap^*}F(v_n)dx - \int_{B_{r_3}} K(x)|x|^{-ap^*}F(v)dx\right| \leq \epsilon,$$

que, junto com a equação (3.26), nos dá

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} F(v_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} F(v)dx.$$

Os outros casos são completamente análogos. Para o caso $G(v_n) = f(v_n)v$ é suficiente notar que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $v \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Parte 2. Assumimos $(V, K) \in \mathcal{H}_2$ e começamos com o caso $G(v_n) = F(v_n)$.

Dado $\epsilon > 0$, de (f_{21}) podemos escolher $s_0 > 0$ tal que

$$F(s) \leq |s|^\alpha, \text{ para todo } 0 \leq s \leq s_0, \tag{3.27}$$

com $\alpha \in (p, p^*)$ dado em (K_{22}). Usando (3.19) e (3.20) vemos que existe $r_1 > 1$ tal que

$$K(x)|x|^{-ap^*} \leq V(x)|s|^{p-\alpha} + |s|^{p^*-\alpha}, \text{ para } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } |x| \geq r_1,$$

o que, junto com (3.27), nos dá

$$K(x)|x|^{-ap^*} F(s) \leq \epsilon c(V(x)|x|^{-ap^*}|s|^p + |x|^{-ap^*}|s|^{p^*}), \tag{3.28}$$

para $0 \leq s \leq s_0$ e $|x| \geq r_1$.

Dado $\epsilon > 0$, de (f_{22}) podemos escolher $s_1 > s_0$ tal que

$$\frac{F(s)}{V(x)|s|^p + |s|^{p^*}} \leq \frac{F(s)}{|s|^{p^*}} \leq c\epsilon,$$

para $s \geq s_1$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Com isso e (K_{20}) podemos dizer que

$$K(x)|x|^{-ap^*} F(s) \leq c\epsilon(V(x)|x|^{-ap^*}|s|^p + |x|^{-ap^*}|s|^{p^*}) \tag{3.29}$$

para $s \geq s_1$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

De (3.28) e de (3.29) segue que

$$K(x)|x|^{-ap^*} F(s) \leq \epsilon c(V(x)|x|^{-ap^*}|s|^p + |x|^{-ap^*}|s|^{p^*}), \tag{3.30}$$

para $s \in \mathcal{I} = \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s \leq s_0 \text{ ou } s \geq s_1\}$ e $|x| \geq r_1$.

Usando (3.30), a limitação de $(Q(v_n))$, a continuidade de F e definindo $A_n = \{x \in \mathbb{R}^N : s_0 \leq |v_n(x)| \leq s_1\}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v_n)dx &= \int_{A_n^c \cap B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v_n)dx \\
&\quad + \int_{A_n \cap B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v_n)dx \\
&\leq \int_{A_n^c \cap B_{r_1}^c} \epsilon c \left(V(x)|x|^{-ap^*}|v_n|^p + |x|^{-ap^*}|v_n|^{p^*}\right) dx \\
&\quad + c\int_{A_n \cap B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}dx \\
&\leq \epsilon c Q(v_n) + c\int_{A_n \cap B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}dx \\
&\leq \epsilon + c\int_{A_n \cap B_{r_1}^c} K(x)|x|^{-ap^*}dx,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

para todo n. De (K_{20}) podemos escolher $r_2 \geq r_1$ tal que

$$\int_{A_n \cap B_{r_2}^c} K(x)|x|^{-ap^*}dx \leq \epsilon, \quad \text{para todo } n. \tag{3.32}$$

Usando (3.31) e (3.32) temos

$$\int_{B_{r_2}^c} K(x)|x|^{-ap^*}F(v_n)dx \leq \epsilon, \quad \text{para todo } n. \tag{3.33}$$

A partir de agora, seguindo os mesmos passos dados depois de (3.24), chegamos ao nosso objetivo.

Os outros casos são completamente análogos. Para o caso $G(v_n) = f(v_n)v$ é suficiente notar que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $v \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

■

Lema 3.2.2 *Suponha* $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ *ou* $(V, K) \in \mathcal{H}_2$ *e* (f_{21}), (f_{22}), (f_{24}) *e* (f_{25}). *Se* (u_n) *é uma sequência* (C) *para* J *então* (u_n) *é limitada.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que

$$||u_n|| \to \infty. \tag{3.34}$$

Por (3.7) podemos tomar $t_n \geq 0$ tal que

$$J(t_n u_n) = \max_{t \geq 0} J(tu_n).$$

Além disso, $t_n \in [0,1]$ pois, como podemos escolher M suficientemente grande, (3.34) e (3.7) nos garantem que $t_n \leq 1$, para n suficientemente grande.

Mostramos agora que a sequência $(J(t_n u_n))$ é limitada superiormente. Para $t_n = 0$, temos $(J(t_n u_n)) = (J(0))$ e, para $t_n = 1$, $(J(t_n u_n)) = (J(u_n))$. Em ambos os casos temos a limitação, uma vez que $J(u_n) \to c^*$. Assim, podemos assumir $t_n \in (0,1)$. Como $J'(t_n u_n)t_n u_n = 0$ temos

$$\begin{aligned} pJ(t_n u_n) &= pJ(t_n u_n) - J'(t_n u_n)t_n u_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}[-pF(t_n u_n) + f(t_n u_n)t_n u_n]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} H(t_n u_n)dx, \end{aligned} \tag{3.35}$$

sendo $H(s) = -pF(s) + sf(s)$, para todo $s > 0$. De (f_{25}), H é uma função crescente e, de (3.9), temos $u_n \geq 0$, para todo n. Logo

$$\begin{aligned} pJ(t_n u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} H(t_n u_n)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} H(u_n)dx \\ &= pJ(u_n) - J'(u_n)u_n = pJ(u_n) + o_n(1). \end{aligned}$$

Assim, $(J(t_n u_n))$ é limitada superiormente, uma vez que $J(u_n) \to c^*$, isto é,

$$J(t_n u_n) \leq c, \quad \text{para todo } n. \tag{3.36}$$

Vamos mostrar que (3.34) contradiz (3.36). Para este propósito consideramos $w_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$. Como (w_n) é limitada, pela reflexividade de E (A.1.4), existe $w \in E$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ em E.

Afirmamos que $w = 0$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Faremos esta demonstração depois deste Lema. Prosseguindo com a prova do Lema, notamos que, para $B > 0$ e n suficientemente grande temos $\dfrac{B}{||u_n||} \in [0,1]$. Então

$$\begin{aligned} J(t_n u_n) &= \max_{t\geq 0} J(tu_n) \geq J(\frac{B}{||u_n||}u_n) = J(Bw_n) \\ &= \frac{1}{p}||Bw_n||^p - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(Bw_n)dx \\ &= \frac{B^p}{p} - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(Bw_n)dx. \end{aligned}$$

Como $w_n \rightharpoonup 0$, pelo Lema 3.2.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(Bw_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(0)dx = 0. \tag{3.37}$$

Assim

$$\limsup_{n\to\infty} J(t_n u_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{B^p}{p} - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(Bw_n)dx\right) = \frac{B^p}{p},$$

para todo $B > 0$, de modo que $(J(t_n u_n))$ é ilimitada superiormente, o que contradiz a equação (3.36). Assim, (u_n) é limitada em E. ■

Prova da Afirmação: Primeiramente consideramos que (u_n) é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então, $w_n(x) = \dfrac{u_n(x)}{||u_n||} \leq \dfrac{c}{||u_n||} \to 0$, q.s. em $\mathbb{R}^N$, uma vez que $||u_n|| \to \infty$. Da imersão compacta de E em $L^q_{K,a}(\mathbb{R}^N)$, temos $w_n(x) \to w(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Assim,

$$w \equiv 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Agora, considere que existe uma subsequência, renomeada por (u_n), ilimitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e defina $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : u_n(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^N : w_n(x) \neq 0\}$.

Como $J(u_n) \to c^*$, temos

$$\frac{1}{p}||u_n||^p - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)dx = c^* + o_n(1),$$

isto é,

$$\frac{1}{p}||u_n||^p - \int_{\Omega} K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)dx = c^* + o_n(1),$$

de modo que

$$o_n(1) + \frac{1}{p} = \int_{\Omega} \frac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{||u_n||^p}dx = \int_{\Omega} \frac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p dx. \tag{3.38}$$

Dado $\tau > 0$ segue de (f_{24}) que existe $M > 0$ tal que $\dfrac{F(s)}{|s|^p} \geq \tau$ para $|s| \geq M$. Defina ψ_n e χ_n as funções características para $\{u_n \leq M\} = \{x \in \Omega : 0 \leq u_n(x) \leq M\}$ e $\{u_n > M\} = \{x \in \Omega : u_n(x) > M\}$, respectivamente. Aplicando isto à equação (3.38), temos

$$\begin{aligned}
o_n(1) + \frac{1}{p} \quad &\geq \int_{\{u_n \leq M\}} \frac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p dx \\
&+\tau \int_{\{u_n > M\}} K(x)|x|^{-ap^*}|w_n|^p dx \\
&= \int_{\Omega} \psi_n(x)\frac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p dx \\
&+\tau \int_{\Omega} \chi_n(x)K(x)|x|^{-ap^*}|w_n|^p dx.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Sejam Ω^- e Ω^+ os conjuntos limites dos conjuntos $\{u_n \leq M\}$ e $\{u_n > M\}$, respectivamente. Usando o mesmo argumento do primeiro parágrafo desta prova, temos $w_n(x) \to 0$ em $\{u_n \leq M\}$, de modo que

$$w \equiv 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega^-.$$

Além disso, $K(x)|x|^{-ap^*}\dfrac{F(u_n)}{|u_n|^p}$ é limitada em $\{u_n \leq M\}$, para todo n. De fato, quando $u_n(x) \to 0$ usamos (K_{20}) e (f_{21}) para conseguir a conclusão. Quando $0 < \epsilon \leq u_n(x) \leq M$, usamos a continuidade de F e (K_{20}). Assim, dessa limitação uniforme em relação a n concluímos que $K(x)|x|^{-ap^*}\dfrac{F(u_n)}{|u_n|^p}$ é limitada em Ω^-.

Uma vez que $w_n(x) \to 0$ q.s. em Ω^- e $\dfrac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{|u_n|^p}$ é limitada em Ω^- concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p = 0, \;\; \text{em} \;\; \Omega^-, \tag{3.40}$$

de modo que

$$\limsup_{n\to\infty} \psi_n(x)\frac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p = 0, \;\; \text{em} \;\; \Omega. \tag{3.41}$$

Usando (3.41) e o Lema de Fatou (A.3.1) em (3.39), conseguimos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p} &\geq \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \psi_n(x)\frac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p dx + \limsup_{n\to\infty}\tau\int_\Omega \chi_n(x)K(x)|x|^{-ap^*}|w_n|^p dx\\
&\geq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty}\psi_n(x)\frac{K(x)|x|^{-ap^*}F(u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p dx + \int_\Omega \limsup_{n\to\infty}\tau\chi_n(x)K(x)|x|^{-ap^*}|w_n|^p d\\
&\geq \tau\int_{\Omega^+} K(x)|x|^{-ap^*}|w|^p dx.
\end{aligned}
$$

Assim, temos

$$
\frac{1}{p} \geq \tau\int_{\Omega^+} K(x)|x|^{-ap^*}|w|^p dx, \quad \text{para todo} \quad \tau > 0,
$$

de modo que

$$
\int_{\Omega^+} K(x)|x|^{-ap^*}|w|^p dx = 0.
$$

Como $K(x) > 0$, q.s. em $\mathbb{R}^N$, concluímos que

$$
w \equiv 0 \quad \text{q.s. em} \quad \Omega^+,
$$

o que completa a prova. ■

3.3 Prova do Teorema 1.2.1

Antes da prova deste Teorema apresentamos a definição de solução de energia mínima para o problema $(P2)$ e lhe damos uma caracterização, além de enunciar duas Afirmações.

Definição 3.3.1 *Uma solução u para $(P2)$ é dita de energia mínima se*

$$
J(u) = \inf\{J(v) : v \textit{ é solução de } (P2) \textit{ e } v \neq 0\}.
$$

Uma condição necessária para que v seja solução de $(P2)$ é que $J'(v)v = 0$. Com esta condição definimos a chamada variedade de Nehari por

$$
\mathcal{N} = \{v \in E \setminus \{0\} : J'(v)v = 0\}.
$$

Claramente, se u é solução de $(P2)$ com

$$J(u) = \inf_{\mathcal{N}}\{J(v)\}$$

então u é solução de energia mínima.

Uma vez que $s^{-(p-1)}f(s)$ é uma função crescente em $(0,\infty)$ podemos seguir as ideias em [67, Chapter 4] e concluir que

$$\inf_{\mathcal{N}}\{J(v)\} = \inf_{v\in E, v\neq 0}\max_{t\in[0,1]} J(tv) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = c^*,$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0, \text{ e } \gamma(1) = e, \text{ com } J(e) < 0\}.$$

Dessa forma, dada u solução de $(P2)$, temos

$$\text{se } J(u) = c^* \text{ então } u \text{ é solução de energia mínima.} \tag{3.42}$$

Fazemos as seguintes Afirmações que serão usadas na prova do Teorema.

Afirmação 1: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx.$

Afirmação 2: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|x|^{-ap^*}|u_n|^{p-2}u_n u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|x|^{-ap^*}|u|^p dx.$

Estas Afirmações são exatamente as mesmas Afirmações 3 e 4 do Capítulo anterior e estão sob as mesmas hipóteses. Dessa forma suas provas são as mesmas.

Agora estamos em condição de provar o Teorema 1.2.1 e, para o conforto do leitor, reapresentamos o seu enunciado.

Teorema 1.2.1 Suponha (f_{21}), (f_{22}), (f_{23}), (f_{24}), (f_{25}) e $(V,K) \in \mathcal{H}_1$ ou $(V,K) \in \mathcal{H}_2$. Então, o problema $(P2)$ tem uma solução não trivial, não negativa e de energia mínima. Além disso suponha que

$(f_{12})'$ Existe $c > 0$ tal que $ap^* = p(a+1) - c$ e

$$p \ < \ \overline{p} \ < \ \min\{\frac{Np}{N-p}; \ \ p + \frac{cp}{N-p(a+1)}\}.$$

Então a solução é positiva. No caso não singular ($a = 0$) podemos trocar (f_{22}) por

$(f_{22})'$
$$\limsup_{s\to\infty} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} = 0$$

e obter o mesmo resultado. Também aqui temos a positividade da solução se p^* satisfizer a condição $(f_{12})'$.

Demonstração. O Lema 3.1.1 nos dá a existência de (u_n), uma sequência (C) para J e, pelo Lema 3.2.2, temos a sua limitação. Pela reflexividade de E, existe $u \in E$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u.$$

Pelo mesmo argumento de (3.8) temos que $J'(u_n)u_n = o_n(1)$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||^p = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(x,u_n)u_n dx.$$

Pelo Lema 3.2.1 conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} f(u_n)u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} f(u)udx,$$

de modo que

$$||u_n||^p \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} f(u)udx. \tag{3.43}$$

Como $J'(u_n)u = o_n(1)$, temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u + V(x)|x|^{-ap^*}|u_n|^{p-2}u_n u dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} f(u_n)udx = o_n(1). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Passando o limite em (3.44), usando as afirmações acima e o Lema 3.2.1, temos

$$||u||^p = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} f(u)udx,$$

que, junto com (3.43), nos dá

$$||u_n||^p \to ||u||^p,$$

de modo que temos a convergência

$$u_n \to u \ \text{ em } \ E.$$

Pela continuidade de J e J' temos

$$J(u) = c^* \ \text{ e } \ J'(u) = 0.$$

Usando (3.42) concluimos que

$$u \text{ é solução de energia mínima para } (P2).$$

Como $J(u) = c_* > 0$ temos

$$u \not\equiv 0.$$

Uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ podemos dizer que $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, por (3.9), temos $u_n(x) \geq 0$, q.s em $\mathbb{R}^N$, para todo n, de modo que

$$u(x) \geq 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Reunindo os dados podemos dizer que u é uma solução não trivial, não negativa e de energia mínima para $(P2)$. Considerando $(f_{22})'$ podemos mostrar a positividade de u do seguinte modo.

Tome $\epsilon > 0$ fixo e seja $A_\epsilon = B_R \setminus B_\epsilon$. Usando [44, Theorem 3.1] podemos ver que

$$u \in L^\infty \cap C^{0,\alpha}_{loc}(B_R)$$

e por [64, Theorem 1] conseguimos

$$u \in C^{1,\alpha}(A_\epsilon).$$

Aplicando [59, Theorem 8.1] temos

$$u > 0 \text{ em } \ A_\epsilon.$$

Arguindo como em [52, Theorem 2.1] conseguimos

$$u > 0 \text{ em } \ B_R.$$

Finalmente, fazendo $R \to \infty$ concluimos que

$$u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

No caso não singular ($a = 0$), considerando $(f_{22})'$, podemos usar o Lema de Strauss (A.3.2) para as convergências em domínios limitados, colocando $P(s) = F(s)$ e $Q(s) = |s|^{p^*}$. As demais estimativas seguem normalmente.

Capítulo 4

Solução para o problema $(P3)$

Neste capítulo apresentamos uma solução não trivial de energia mínima para o problema $(P3)$, conceito que será definido na terceira seção.

4.1 Resultados preliminares

Para o conforto do leitor reapresentamos aqui tanto o problema $(P3)$ quanto as condições sobre f, V e K.

$$(P3) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + V(x)u = K(x)f(u), \text{ em } R^N, \\ u \neq 0, \text{ em } R^N, \quad u \in \mathcal{D}^{2,2}(R^N), \end{cases}$$

com $N \geq 5$.

Supomos $V, K : R^N \to R$ funções contínuas positivas satisfazendo:

$$(K_{30}) \qquad V(x),\ K(x) > 0 \text{ em } R^N \text{ e } K \in L^\infty(R^N) \cap L^1(R^N).$$

$$(K_{31}) \qquad K/V \in L^\infty(R^N).$$

$$(K_{32}) \qquad \text{Existe } \alpha \in (2, 2_*),\ \text{com } 2_* = \frac{4N}{N-4},\ \text{tal que } \lim_{|x|\to\infty} \frac{K(x)}{V(x)^{\frac{2_*-\alpha}{2_*-2}}} = 0.$$

Usamos a notação $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ para expressar que V e K satisfazem (K_{30}) e (K_{31}). Uma hipótese alternativa é considerar V e K satisfazendo (K_{30}) e (K_{32}), para o que usamos a notação $(V, K) \in \mathcal{H}_2$.

Supomos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo:

(f_{31})
$$\limsup_{s\to 0} \frac{sf(s)}{s^{2_*}} = 0.$$

(f_{32})
$$\limsup_{s\to \infty} \frac{sf(s)}{s^{2_*}} = 0.$$

(f_{33})
$$f(s) = 0, \text{ para todo } s \leq 0.$$

(f_{34})
$$\limsup_{s\to \infty} \frac{F(s)}{s^{2}} = \infty.$$

(f_{35})
$$s^{-1}f(s) \text{ é uma função não decrescente em } s \in (0, \infty).$$

Observação 4.1.1 *As condições sobre f acarretam que*

$$\textit{Existe } c > 0 \textit{ tal que } 0 \leq sf(s) \leq c|s|^{2_*}, \quad \textit{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Com o objetivo de estudar o problema $(P3)$ com abordagem variacional e seguindo as mesmas ideias da Seção 1 do Capítulo 2, consideramos o funcional de Euler e Lagrange

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + V(x)u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u), \tag{4.2}$$

definido no espaço E, dado por

$$E = E(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} Vu^2 < \infty \right\},$$

com a norma

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + V(x)u^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aqui $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Das hipóteses sobre f, segue pelo Lema A.2.1, que J é C^1 com derivada de Gâteaux dada por

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \Delta v + V(x)uv - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v, \quad u, v \in E.$$

Lema 4.1.1 *Assuma as condiçoes (K_{30}), (f_{31}), (f_{32}) e (f_{34}). Então o funcional J satisfaz a geometria do passo da montanha, a saber,*

1. Existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $J(u) \geq \alpha$, para $||u|| = \rho$.

2. Existe $e \in E$ tal que $||e|| > \rho$ e $J(e) \leq 0$.

Demonstração.

Passo 1. Usando (K_{30}), a condição de crescimento da função f, dada em (4.1) e a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_*}dx\right)^{\frac{1}{2_*}} \leq S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.3}$$

(veja A.4.1), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)dx \leq c\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_*}dx \leq c\left(S\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx\right)^{\frac{2_*}{2}} \leq c||u||^{2_*}. \tag{4.4}$$

Portanto,

$$J(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - c||u||^{2_*},$$

de modo que $J(u) \geq \alpha := \frac{1}{2}\rho^2 - c\rho^{2_*} > 0$, para $||u|| = \rho$, suficientemente pequeno.

Passo 2. De (f_{34}) segue que, para todo $M > 0$, existe $s_M > 0$, tal que

$$F(s) \geq Ms^2, \quad \text{para todo} \quad s > s_M.$$

Definindo $C_M = \sup\limits_{0\leq s\leq s_M} F(s)$ temos $0 < C_M < \infty$. Assim temos

$$F(s) \geq Ms^2 - C_M, \quad \text{para todo} \quad s \geq 0. \tag{4.5}$$

Fixado $0 \not\equiv u \in E$ e usando (4.5) e (K_{30}) obtemos

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{1}{2}||tu||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(tu)dx \\ &\leq \frac{1}{2}||tu||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)[M(tu)^2 - C_M]dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}||tu||^2 - Mt^2\int_{\mathbb{R}^N} K(x)u^2dx - C_M\int_{\mathbb{R}^N} K(x)dx \\ &\leq t^2\left[\frac{||u||^2}{2} - M\int_{\mathbb{R}^N} K(x)u^2\right] + c. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Tomando M suficientemente grande, $J(tu) \to -\infty$ as $t \to \infty$, o que finaliza a prova. ∎

Definição 4.1.1 *Dizemos que uma sequência (u_n) é uma sequência de Cerami, abreviadamente sequência (C), para um funcional Φ de classe C^1 se (u_n) satisfaz*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad (1 + ||u_n||)\Phi'(u_n) \to 0.$$

O Lema acima garante que J satisfaz a geometria do passo da montanha (veja A.3.1). Usando [61, Theorem 3.4] concluímos que existe (u_n), uma sequência (C) for J, isto é,

$$J(u_n) \to c_* \quad \text{e} \quad (1 + ||u_n||)J'(u_n) \to 0,$$

sendo

$$c_* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \text{ e } \gamma(1) = e, \text{ com } J(e) < 0\}.$$

4.2 Resultados de compacidade

Nesta seção faremos alguns resultados que nos ajudarão a contornar o problema da perda de compacidade na imersão de Sobolev no espaço $\mathbb{R}^N$. Nestes resultados fica ainda mais claro a contribuição do tipo de crescimento dos potenciais para a obtenção de estimativas que garantirão convergências fortes. Começamos com a seguinte proposição, que tem uma desigualdade do tipo Hardy.

Proposição 4.2.1 *1. Supondo $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ temos E imerso compactamente em $L^q_K(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in (2, 2_*)$. 2. Supondo $(V, K) \in \mathcal{H}_2$ temos E imerso compactamente em $L^\alpha_K(\mathbb{R}^N)$, com α dado em (K_{32}).*

Demonstração.

Parte 1. Supomos $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ e $v_n \rightharpoonup v$ para mostrar que $v_n \to v$ em $L^q_K(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (2, 2^*)$. Para as estimativas abaixo fixamos $q \in (2, 2_*)$.

Dado $\epsilon > 0$, como $p < q$ podemos encontrar $c, s_0 > 0$ tal que

$$|s|^q \leq \epsilon |s|^2, \text{ para } 0 \leq s \leq s_0, \tag{4.7}$$

de modo que, usando (K_{31}), temos

$$K(x)|s|^q \leq \epsilon c V(x)|s|^2, \text{ para } 0 \leq s \leq s_0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N.$$

Dado $\epsilon > 0$, de $K \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e por $q < 2_*$, podemos tomar $s_1 > 0$ tal que

$$K(x)|s|^q \leq \epsilon c|s|^{2_*}, \quad \text{para} \quad s \geq s_1 \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Pela continuidade das funções envolvidas vemos que existe $c > 0$ tal que

$$K(x)|s|^q \leq cK(x)\chi_{[s_0,s_1]}(|s|)|s|^{2_*}, \quad \text{para} \;\; s_0 \leq s \leq s_1 \;\; \text{e} \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, fixado $q \in (2, 2_*)$ e dado $\epsilon > 0$, existem $c > 0$ e $0 < s_0 < s_1$ tais que

$$K(x)|s|^q \leq \epsilon c \left(V(x)|s|^2 + |s|^{2_*}\right) + cK(x)\chi_{[s_0,s_1]}(|s|)|s|^{2_*}. \tag{4.8}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Para um dado $r_1 > 0$ e $u \in E$, a partir de (4.8) vemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_1}^c} K(x)|u|^q dx \;\; &\leq \epsilon c \left(\int_{B_{r_1}^c} V(x)u^2 dx + \int_{B_{r_1}^c} |u|^{2_*} dx \right) \\ &\quad + c \int_{B_{r_1}^c} K(x)\chi_{[s_0,s_1]}(|u|)|u|^{2_*} dx \\ &\leq \epsilon c Q(u) + c \int_{A \cap B_{r_1}^c} K(x) dx,\end{aligned} \tag{4.9}$$

sendo

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_*} dx \tag{4.10}$$

e $A = \{x \in \mathbb{R}^N : s_0 \leq |u(x)| \leq s_1\}$.

Uma vez que $v_n \rightharpoonup v$ em E, a sequência (v_n) é limitada em E. Então, $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2 dx \leq c$, para todo n. Usando (4.3) também obtemos $\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_*} dx \leq c$, para todo n, de modo que

$$Q(v_n) \leq c, \;\; \text{para todo } n. \tag{4.11}$$

De agora em diante vamos nos referir à desigualdade (4.11) como a "limitação de $(Q(v_n))$".

De (K_{30}) podemos tomar $r_2 > 0$ tal que

$$\int_{A_n \cap B_{r_2}^c} K(x) dx \leq \epsilon, \tag{4.12}$$

sendo $A_n = \{x \in \mathbb{R}^N : s_0 \leq |u_n(x)| \leq s_1\}$. Das desigualdades (4.9), (4.11) e (4.12) temos

$$\int_{B_{r_2}^c} K(x)|v_n|^q dx \leq \epsilon, \;\; \text{para todo } n. \tag{4.13}$$

Considerando o caso particular no qual $v_n = v$, para todo n, vemos que (4.13) nos permite escolher um $r_3 \geq r_2$ tal que

$$\int_{B_{r_3}^c} K(x)|v|^q dx \leq \epsilon, \tag{4.14}$$

que, junto com (4.13), nos dá

$$\left| \int_{B_{r_3}^c} K(x)|v_n|^q dx - \int_{B_{r_3}^c} K(x)|v|^q dx \right| \leq \epsilon. \tag{4.15}$$

Pelo Lema A.1.3 temos que $\mathcal{D}^{2,2}(B_{r_2}) = \mathcal{H}^2(B_{r_2})$. Assim, $E(B_{r_2}) \subset \mathcal{H}^2(B_{r_2})$, K é uma função contínua e $q \in (2, 2_*)$. Desse modo, segue da usual imersão de Sobolev (A.3.5) e do Teorema da Convergência Dominada (A.3.3) que

$$\left| \int_{B_{r_3}} K(x)|v_n|^q dx - \int_{B_{r_3}} K(x)|v|^q dx \right| \leq \epsilon. \tag{4.16}$$

De (4.15) e (4.16) obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^q dx \right| \leq \epsilon,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n|^q dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^q dx,$$

de modo que E está imerso compactamente em $L^q_K(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in (2, 2_*)$.

Parte 2. Supomos $(V, K) \in \mathcal{H}_2$ e $v_n \rightharpoonup v$ para mostrar que $v_n \to v$ em $L^\alpha_K(\mathbb{R}^N)$ com α dado em (K_{32}).

Fixado $x \in \mathbb{R}^N$, a função de $s > 0$ dada por $g(s) = V(x)s^{2-\alpha} + s^{2_*-\alpha}$, tem um valor mínimo dado por

$$m_\alpha V(x)^{\frac{2_*-\alpha}{2_*-2}}, \quad \text{com} \quad m_\alpha = \left(\frac{2_* - 2}{2_* - \alpha}\right)\left(\frac{\alpha - 2}{2_* - 2}\right)^{\frac{2-\alpha}{2_*-2}}.$$

Com isso conseguimos

$$m_\alpha V(x)^{\frac{2_*-\alpha}{2_*-2}} \leq V(x)|s|^{2-\alpha} + |s|^{2_*-\alpha}, \quad \text{para } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.17}$$

De (K_{32}), para um dado $\epsilon > 0$, existe $r_1 > 0$, tal que

$$K(x) \leq \epsilon m_\alpha V(x)^{\frac{2_*-\alpha}{2_*-2}}, \quad \text{para} \quad |x| \geq r_1. \tag{4.18}$$

Por (4.17) e (4.18) temos

$$K(x) \leq \epsilon(V(x)|s|^{2-\alpha} + |s|^{2_*-\alpha}), \quad \text{para } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } |x| \geq r_1,$$

de modo que

$$K(x)|s|^\alpha \leq \epsilon(V(x)|s|^2 + |s|^{2_*}), \quad \text{para } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } |x| \geq r_1.$$

Isso e a limitação de $(Q(v_n))$ produzem

$$\int_{B_{r_1}^c} K(x)|v_n|^\alpha dx \leq \int_{B_{r_1}^c} \epsilon \left(V(x)|v_n|^2 + |v_n|^{2_*}\right) dx \leq \epsilon Q(v_n) \leq \epsilon. \tag{4.19}$$

Considerando o caso em que $v_n = v$ para todo n, vemos que (4.19) nos permite escolher $r_2 \geq r_1$ tal que

$$\int_{B_{r_2}^c} K(x)|v|^\alpha dx \leq \epsilon. \tag{4.20}$$

Procedendo como na parte anterior, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n|^\alpha dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^\alpha dx \right| \leq \epsilon,$$

de modo que E está imerso compactamente em $L_K^\alpha(\mathbb{R}^N)$, com α dado na hipótese (K_{32}).

■

Lema 4.2.1 *Suponha* $(V, K) \in \mathcal{H}_1$ *ou* $(V, K) \in \mathcal{H}_2$, (f_{31}) *e* (f_{32}). *Seja* (v_n) *uma sequência tal que* $v_n \rightharpoonup v$ *em* E. *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)G(v_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)G(v)dx,$$

para $G(v_n) = F(v_n)$, $G(v_n) = f(v_n)v_n$ *e* $G(v_n) = f(v_n)v$.

Demonstração.

Parte 1. Supomos $(V, K) \in \mathcal{H}_1$, fixamos $q \in (2, 2_*)$ e começamos com o caso $G(v_n) = F(v_n)$.

Dado $\epsilon > 0$, de (f_{31}) e (K_{31}), concluímos que existe $s_0 > 0$ tal que

$$K(x)F(s) \leq \epsilon c V(x)|s|^2, \quad \text{para} \;\; 0 \leq s \leq s_0 \;\; \text{e} \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Dado $\epsilon > 0$, de (f_{32}) e (K_{30}), podemos tomar $s_1 > 0$ tal que

$$K(x)F(s) \leq \epsilon c|s|^{2^*}, \quad \text{para} \;\; s \geq s_1 \;\; \text{e} \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Pela continuidade das funções envolvidas vemos que existe $c > 0$ tal que

$$K(x)F(s) \leq cK(x)|s|^q, \quad \text{para} \;\; s_0 \leq s \leq s_1 \;\; \text{e} \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $c > 0$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$K(x)F(s) \leq \epsilon c \left(V(x)|s|^2 + |s|^{2_*}\right) + cK(x)|s|^q.$$

Com esta desigualdade e a limitação de $(Q(v_n))$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_1}^c} K(x)F(v_n)dx \;\; &\leq \int_{B_{r_1}^c} \epsilon c(V(x)|v_n|^2 + |v_n|^{2_*})dx + \int_{B_{r_1}^c} K(x)|v_n|^q dx \\ &\leq \epsilon c Q(v_n) + \int_{B_{r_1}^c} K(x)|v_n|^q dx \qquad (4.21) \\ &\leq \epsilon c + \int_{B_{r_1}^c} K(x)|v_n|^q dx, \end{aligned}$$

para todo n e $r_1 > 0$. Da Proposição 4.2.1 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n|^q dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^q dx, \quad \text{para todo} \;\; q \in (2, 2_*), \tag{4.22}$$

de modo que podemos tomar $r_1 > 0$ para o qual temos

$$\int_{B_{r_1}^c} K(x)|v_n|^q dx \leq \epsilon, \;\text{para todo}\; n.$$

Isto, junto com (4.21), nos dá

$$\int_{B_{r_1}^c} K(x)F(v_n)dx \leq \epsilon, \;\text{para todo}\; n. \tag{4.23}$$

Considerando o caso particular no qual $v_n = v$, para todo n, segue de (4.23) que podemos escolher $r_2 \geq r_1$ tal que

$$\int_{B_{r_2}^c} K(x)F(v)dx \leq \epsilon. \tag{4.24}$$

De (4.23) e (4.24) segue que

$$\left| \int_{B_{r_2}^c} K(x)F(v_n)dx - \int_{B_{r_2}^c} K(x)F(v)dx \right| \le \epsilon. \tag{4.25}$$

Da condição de crescimento de F temos $F(v_n)/|v_n|^{2_*} \to 0$, se $v_n \to \infty$. Uma vez que $v_n \rightharpoonup v$, temos $v_n \to v$ em $L^{2_*}(B_{r_2})$, de modo que $\sup_n \int_{B_{r_2}} |v_n|^{2_*}dx < \infty$. Além do mais, $v_n \to v$ q.s. em B_{r_2} e, da continuidade de F, temos $F(v_n) \to F(v)$ a.e. em B_{r_2}. Assim, podemos usar o Lema de Strauss (veja A.3.2) e obter

$$\left| \int_{B_{r_2}} K(x)F(v_n)dx - \int_{B_{r_2}} K(x)F(v)dx \right| \le \epsilon. \tag{4.26}$$

Portanto, das equações (4.25) e (4.26), temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(v_n)dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(v)dx \right| \le \epsilon,$$

o que finaliza a prova.

Os outros casos são completamente análogos. Para o caso $G(v_n) = f(v_n)v$ é suficiente observar que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $v \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$.

Parte 2. Supomos $(V, K) \in \mathcal{H}_2$ e começamos com o caso $G(v_n) = F(v_n)$.

Exatamente como na Parte 2 da Proposição 4.2.1 podemos dizer que, para um dado $\epsilon > 0$, de (K_{32}), existe um $r_1 > 0$, tal que

$$K(x) \le \epsilon(V(x)|s|^{2-\alpha} + |s|^{2_*-\alpha}), \quad \text{para } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } |x| \ge r_1. \tag{4.27}$$

Então, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $|x| \ge r_1$, temos

$$K(x)F(s) \le \epsilon\left(V(x)F(s)|s|^{2-\alpha} + F(s)|s|^{2_*-\alpha}\right). \tag{4.28}$$

De (f_{31}), como $\alpha < 2_*$, para um dado $\epsilon > 0$, existe $s_0 > 0$ tal que

$$F(s) \le c|s|^\alpha, \quad \text{para } \ 0 \le s \le s_0,$$

o que, junto com (4.28), produz

$$K(x)F(s) \le \epsilon(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}), \quad \text{para } \ 0 \le s \le s_0 \ \text{ e } \ |x| \ge r_1. \tag{4.29}$$

De (f_{32}) e (K_{30}), para um dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $s_1 > s_0 > 0$ tais que

$$\frac{K(x)F(s)}{(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*})} \leq c\frac{F(s)}{|s|^{2^*}} \leq c\epsilon, \quad \text{para} \quad s \geq s_1 \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

de modo que

$$K(x)F(s) \leq \epsilon c(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}), \quad \text{para } s \geq s_1 \quad \text{e } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.30}$$

Assim, de (4.29) e (4.30) temos

$$K(x)F(s) \leq \epsilon c(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}), \quad \text{para } s \in \mathcal{I} \quad \text{e } |x| \geq r_1, \tag{4.31}$$

sendo $\mathcal{I} = \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s \leq s_0 \text{ ou } s \geq s_1\}$.

Usando (4.31), limitação de $(Q(v_n))$ e $A_n = \{x \in \mathbb{R}^N : s_0 \leq |v_n(x)| \leq s_1\}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_1}^c} K(x)F(v_n)dx &\leq \int_{B_{r_1}^c \cap A_n^c} K(x)F(v_n)dx + \int_{B_{r_1}^c \cap A_n} K(x)F(v_n)dx \\
&\leq \int_{B_{r_1}^c \cap A_n^c} \epsilon c(V(x)|v_n|^2 + |v_n|^{2_*})dx + c\int_{B_{r_1}^c \cap A_n} K(x)dx \\
&\leq c\epsilon Q(v_n) + c\int_{B_{r_1}^c \cap A_n} K(x)dx \\
&\leq c\epsilon + c\int_{B_{r_1}^c \cap A_n} K(x)dx,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

para todo n. De (K_{30}) podemos tomar $r_2 \geq r_1$ tal que

$$\int_{B_{r_2}^c \cap A_n} K(x)dx \leq \epsilon, \quad \text{para todo } n. \tag{4.33}$$

Então, de (4.32) e (4.33), obtemos

$$\int_{B_{r_2}^c} K(x)F(v_n)dx \leq c\epsilon, \quad \text{para todo } n. \tag{4.34}$$

De agora em diante, seguindo os mesmos passos dados depois de (4.23), concluímos a prova da parte 2.

Os outros casos são completamente análogos. Para o caso $G(v_n) = f(v_n)v$ é suficiente observar que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $v \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 4.2.2 *Suponha* $(V, K) \in \mathcal{K}$ *e* (f_{31}), (f_{32}), (f_{33}), (f_{34}) *e* (f_{35}). *Se* (u_n) *é uma sequência* (C) *para* J *então* (u_n) *é limitada.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que

$$||u_n|| \to \infty. \tag{4.35}$$

Por (4.6) podemos tomar $t_n \geq 0$ tal que

$$J(t_n u_n) = \max_{t \geq 0} J(t u_n).$$

Além disso, $t_n \in [0, 1]$ pois, como podemos escolher M suficientemente grande, (4.35) e (4.6) nos garantem que $t_n \leq 1$, para n suficientemente grande.

Mostramos agora que a sequência $(J(t_n u_n))$ é limitada superiormente. Para $t_n = 0$, temos $(J(t_n u_n)) = (J(0))$ e, para $t_n = 1$, $(J(t_n u_n)) = (J(u_n))$. Em ambos os casos temos a limitação, uma vez que $J(u_n) \to c_*$. Assim, podemos assumir $t_n \in (0, 1)$. Como $J'(t_n u_n) t_n u_n = 0$ temos

$$\begin{aligned} 2J(t_n u_n) &= 2J(t_n u_n) - J'(t_n u_n) t_n u_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \left[-2F(t_n u_n) + f(t_n u_n) t_n u_n\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x) H(t_n u_n) dx, \end{aligned} \tag{4.36}$$

sendo $H(s) = -2F(s) + sf(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Defina $\Gamma^- = \{x \in \mathbb{R}^N : u_n(x) \leq 0\}$ e $\Gamma^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : u_n(x) > 0\}$. De (f_{35}), H é uma função não decrescente em $(0, \infty)$ e temos

$$
\begin{aligned}
2J(t_n u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)H(t_n u_n)dx \\
&= \int_{\Gamma^-} K(x)H(t_n u_n)dx + \int_{\Gamma^+} K(x)H(t_n u_n)dx \\
&= \int_{\Gamma^+} K(x)H(t_n u_n)dx \\
&\leq \int_{\Gamma^+} K(x)H(u_n)dx \\
&= \int_{\Gamma^-} K(x)H(u_n)dx + \int_{\Gamma^+} K(x)H(u_n)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)H(u_n)dx \\
&\leq 2J(u_n) - J'(u_n)u_n = 2J(u_n) + o_n(1),
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

de modo que $(J(t_n u_n))$ é limitada superiormente, uma vez que $J(u_n) \to c_*$, isto é,

$$
J(t_n u_n) \leq c, \quad \text{para todo} \;\; n. \tag{4.38}
$$

Vamos mostrar que (4.35) contradiz (4.38). Para este propósito consideramos $w_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$. Como (w_n) é limitada, pela relexividade de E (A.1.4), existe $w \in E$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ em E.

Afirmamos que $w = 0$ q.s. em $\mathbb{R}^N$ e faremos sua prova após o término da prova deste Lema.

Prosseguindo com a prova do lema, notamos que, para $B > 0$ e n suficientemente grande, temos que $\dfrac{B}{||u_n||} \in [0, 1]$. Então

$$
\begin{aligned}
J(t_n u_n) &= \max_{t \geq 0} J(t u_n) \geq J(\frac{B}{||u_n||} u_n) = J(B w_n) \\
&= \frac{1}{2}||B w_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(B w_n)dx \\
&= \frac{B^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(B w_n)dx.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $w_n \rightharpoonup 0$, do Lema 4.2.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(Bw_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(0)dx = 0.$$

Assim, para todo $B > 0$, obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} J(t_n u_n) \geq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{B^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(Bw_n)dx \right) = \frac{B^2}{2}.$$

Então, $(J(t_n u_n))$ é ilimitada superiormente, o que contradiz a equação (4.38). Portanto, a sequência (u_n) é limitada.

Prova da Afirmação. Em primeiro lugar consideramos a sequência (u_n) limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então $w_n(x) = \dfrac{u_n(x)}{||u_n||} \leq \dfrac{c}{||u_n||} \to 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, uma vez que $||u_n|| \to \infty$. Da imersão compacta de E em $L^q_K(\mathbb{R}^N)$, temos $w_n(x) \to w(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Assim,

$$w \equiv 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Agora, consideramos que existe uma subsequência, renomeada por (u_n), ilimitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e definimos $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : u_n(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^N : w_n(x) \neq 0\}$.

Uma vez que $J(u_n) \to c_*$, temos

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u_n)dx = c + o_n(1),$$

isto é,

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_{\Omega} K(x)F(u_n)dx = c + o_n(1),$$

de modo que

$$o_n(1) + \frac{1}{2} = \int_{\Omega} \frac{K(x)F(u_n)}{||u_n||^2}dx = \int_{\Omega} \frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 dx. \tag{4.39}$$

De (f_{34}), vemos que, dado $\tau > 0$, existe $M > 0$ tal que $\dfrac{F(s)}{s^2} \geq \tau$, para $s \geq M$. Definimos ψ_n e χ_n, as funções características para $\{u_n \leq M\} = \{x \in \Omega : 0 < u_n(x) \leq M\}$ e $\{u_n > M\} = \{x \in \Omega : u_n(x) > M\}$, respectivamente. Aplicando isto na equação (4.39), temos

$$\begin{aligned}
o_n(1) + \frac{1}{2} &= \int_\Omega \frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 dx \\
&= \int_\Omega \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 dx + \int_\Omega \chi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 dx \qquad (4.40) \\
&\geq \int_\Omega \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 dx + \tau \int_\Omega \chi_n(x)K(x)|w_n|^2 dx
\end{aligned}$$

Sejam Ω^- e Ω^+ os conjuntos limites de $\{u_n \leq M\}$ e $\{u_n > M\}$, respectivamente. Usando o mesmo argumento do primeiro parágrafo desta prova temos $w_n(x) \to 0$ em $\{u_n \leq M\}$, de modo que

$$w \equiv 0 \ \text{ em } \ \Omega^-.$$

Além disso, $\dfrac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}$ é limitada em $\{u_n \leq M\}$, para todo n. De fato, se $u_n(x) \to 0$, usamos (f_{31}) e (K_{30}) para chegar a conclusão. Se $0 < \epsilon \leq u_n(x) \leq M$, usamos a continuidade de F e (K_{30}). Assim, dessa limitação uniforme em relação a n concluímos que $\dfrac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}$ é limitada em Ω^-.

Uma vez que $w_n(x) \to 0$ q.s. em Ω^- e $\dfrac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}$ é limitada em Ω^- concluímos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 = 0, \ \text{ em } \Omega^-, \qquad (4.41)$$

de modo que

$$\liminf_{n\to\infty} \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 = 0, \ \text{ em } \Omega. \qquad (4.42)$$

Usando (4.42) e o Lema de Fatou (A.3.1) em (4.40), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 dx + \liminf_{n\to\infty} \tau \int_\Omega \chi_n(x)K(x)|w_n|^2 dx \\
&\geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 dx + \tau \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \chi_n(x)K(x)|w_n|^2 dx \\
&\geq \tau \int_{\Omega^+} K(x)|w|^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\frac{1}{2} \geq \tau \int_{\Omega^+} K(x)|w|^2 dx, \quad \text{para todo} \quad \tau > 0,$$

de modo que

$$\int_{\Omega^+} K(x)|w|^2 dx = 0.$$

Como $K(x) > 0$ q.s. em $\mathbb{R}^N$, concluímos que

$$w \equiv 0 \quad \text{em} \quad \Omega^+,$$

o que completa a prova. ■

4.3 Prova do Teorema 1.3.1

Antes da prova deste Teorema apresentamos a definição de solução de energia mínima para o problema $(P3)$ e lhe damos uma caracterização.

Definição 4.3.1 *Uma solução u para $(P2)$ é dita de energia mínima se*

$$J(u) = \inf\{J(v) : v \textit{ é solução de } (P2) \textit{ e } v \neq 0\}.$$

Uma condição necessária para que v seja solução de $(P3)$ é que $J'(v)v = 0$. Com esta condição definimos a chamada variedade de Nehari por

$$\mathcal{N} = \{v \in E \setminus \{0\} : J'(v)v = 0\}.$$

Claramente, se u é solução de $(P3)$ com

$$J(u) = \inf_{\mathcal{N}}\{J(v)\}$$

então u é solução de energia mínima.

Uma vez que $s^{-1}f(s)$ é uma função crescente em $(0, \infty)$ podemos seguir as ideias em [67, Chapter 4] e concluir que

$$\inf_{\mathcal{N}}\{J(v)\} = \inf_{v \in E, v \neq 0} \max_{t \in [0,1]} J(tv) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) = c_*,$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \text{ e } \gamma(1) = e, \text{ com } J(e) < 0\}.$$

Dessa forma, dada u solução de $(P3)$, podemos ver que

$$\text{se } J(u) = c_* \text{ então } u \text{ é solução de energia mínima.} \tag{4.43}$$

Seja (u_n) a sequência (C) dada pelo Lema 4.1.1. Do Lema 4.2.2, (u_n) é limitada. Pela reflexividade de E, (A.1.4), existe $u \in E$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad E.$$

Dada (u_n), uma sequência (C), temos que $(1 + ||u_n||)J'(u_n) \to 0$ de modo que, para a sequência limitada $\dfrac{u_n}{||u_n||}$, temos

$$(1 + ||u_n||)J'(u_n)\frac{u_n}{||u_n||} < \epsilon.$$

Assim, conseguimos

$$J'(u_n)u_n \leq \epsilon \frac{||u_n||}{1 + ||u_n||} \leq \epsilon,$$

ou ainda

$$J'(u_n)u_n = o_n(1).$$

Assim, conseguimos

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u_n)u_n dx.$$

Do Lema 4.2.1 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u_n)u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)udx,$$

de modo que

$$||u_n||^2 \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)udx. \tag{4.44}$$

Uma vez que $J'(u_n)u = o_n(1)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u_n \Delta u + V(x)u_n u dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u_n)udx = o_n(1). \tag{4.45}$$

Note que $\phi(u_n) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u_n \Delta u + V(x) u_n u dx$ define um funcional linear contínuo no espaço E. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u_n \Delta u + V(x) u_n u dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + V(x) u^2 dx = ||u||^2.$$

Usando isto, a Proposição 4.2.1 e passando o limite em (4.45), obtemos

$$||u||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u) u dx, \tag{4.46}$$

o que, junto com a equação (4.44) nos dá

$$||u_n||^2 \to ||u||^2,$$

de modo que temos a convergência

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad E.$$

Pela continuidade de J e J' temos

$$J(u) = c_* \quad \text{e} \quad J'(u) = 0,$$

de modo que, por (4.43),

$$u \text{ é uma solução de energia mínima para } (P3).$$

Como $J(u) = c_* > 0$ temos $u \not\equiv 0$, isto é,

$$u \text{ é uma solução não trivial e de energia mínima para } (P3).$$

Apêndice A

A.1 Propriedades dos espaços

Lema A.1.1 *$\mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em relação à norma*

$$|u| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. A prova segue as mesmas ideias usadas para o espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Veja [21]. ■

Lema A.1.2 *Seja B uma bola em $\mathbb{R}^N$. Então $\mathcal{D}_a^{1,p}(B) = W_a^{1,p}(B)$.*

Demonstração. A prova segue as mesmas ideias usadas para o espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Veja [21]. ■

Lema A.1.3 *Seja B uma bola em $\mathbb{R}^N$. Então $\mathcal{D}^{2,2}(B) = \mathcal{H}^2(B)$*

Demonstração. Sejam $||\Delta u||_{2;B}$ e $||u||_{2,2;B}$ as normas de Δu em $L^2(B)$ e de u em $W^{2,2}(B)$, respectivamente. Temos $\mathcal{D}^{2,2}(B) = \{u \in L^{2_*}(B) : \Delta u \in L^2(B)\} = \{u \in L^{2_*}(B) : ||\Delta u||_{2;B} < \infty\}$ e $\mathcal{H}^2(B) = \{u : ||u||_{2,2;B} < \infty\}$. De [42, Lemma 9.17] concluímos que $||\Delta u||_{2;B}$ é equivalente a $||u||_{2,2;B}$, de modo que $\mathcal{D}^{2,2}(B) = \mathcal{H}^2(B)$. ■

Lema A.1.4 *Os espaços $\mathcal{D}_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ são reflexivos.*

Demonstração. A prova deste fato segue as mesmas ideias usadas na demonstração do usual espaço de Sobolev. Veja [25, Proposition 9.1] ou [1, pg 46] ■

A.2 Operadores diferenciáveis

As definições e a proposição podem ser encontradas em [33, Section 7.7]. Seja E um espaço de Banach e E^* seu espaço dual.

Definição A.2.1 *Seja U um aberto em E e $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Dizemos que Φ é diferenciável a Fréchet em $x_0 \in U$, com derivada de Fréchet $\Phi'(x_0) \in E^*$ se*

$$\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)h + o(h),$$

em que $\dfrac{o(h)}{||h||} \to 0$ quando $h \to 0$. Além disso, dizemos que $\Phi \in C^1(U)$ se Φ', a derivada de Fréchet, existe e é contínua em U.

Definição A.2.2 *Suponha U um aberto em E e $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Dizemos que Φ é diferenciável a Gâteaux em $x_0 \in U$, com derivada de Gâteaux $grad\Phi(x_0) \in E^*$ se*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)}{t} = grad\Phi(x_0)h, \text{ para todo } h \in E.$$

Proposição A.2.1 *Se o operador $\Phi : E \to \mathbb{R}$ tem derivada de Gâteaux contínua em U então $\Phi \in C^1(U)$.*

Lema A.2.1 (Diferenciabilidade dos Funcionais) *1. O funcional J, definido em (3.3) é de classe C^1 com derivada de Gâteaux dada por*

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}f(u)vdx,$$

para todos u, v.

2. O funcional I, definido em (2.3) é de classe C^1 com derivada de Gâteaux dada por

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}f(u)vdx, \quad u, v \in E.$$

3. O funcional J, definido em (2.14) é de classe C^1 com derivada de Gâteaux dada por

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}g(x,u)vdx, \quad u,v \in E.$$

4. O funcional J, dado em (4.2) é C^1 com derivada de Gâteaux dada por

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\Delta v + V(x)uv - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v, \quad u,v \in E.$$

Demonstração. Defina em E os funcionais $\Phi_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx$, $\Phi_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^p dx$ e $\Phi_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}F(u)dx$, com $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

Em primeiro lugar vamos mostrar que $grad\Phi_3(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}f(u)vdx$. Para isso, definimos

$$g_t(x) = K(x)|x|^{-ap^*}\frac{[F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))]}{t},$$

com $t \in [0,1]$. Por (2.1) podemos ver que $f(s) \leq c|s|^{p^*-1}$ e, usando a desigualdade $(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r+b^r)$, (K_{30}) e o Teorema do Valor Médio temos que existe um $\theta \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned}
g_t(x) &= K(x)|x|^{-ap^*}\frac{[F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))]}{t} \\
&= K(x)|x|^{-ap^*}\frac{F'(u(x)+\theta tv(x))tv(x)}{t} \\
&= K(x)|x|^{-ap^*}f(u(x)+\theta tv(x))v(x) \\
&\leq c|x|^{-ap^*}|u(x)+\theta tv(x)|^{p^*-1}v(x) \\
&\leq c|x|^{-ap^*}(|u(x)|^{p^*-1} + |\theta tv(x)|^{p^*-1})v(x) \\
&\leq c|x|^{-ap^*}(|u(x)|^{p^*-1} + |v(x)|^{p^*-1})v(x) \\
&= c|x|^{-ap^*}|u(x)|^{p^*-1}v(x) + c|x|^{-ap^*}|v(x)|^{p^*}. \\
&:= h(x).
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Por (2.5) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|v|^{p^*} \leq \left(S\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v|^p\right)^{\frac{p^*}{p}} \leq c||v||^{p^*} < \infty. \tag{A.2}$$

Usando a desigualdade de Hölder, com os duais $\alpha = \dfrac{p^*}{p^*-1}$ e $\alpha' = p^*$ e a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg (2.5) temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*-1}|v|dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{-ap}{\alpha}}|u|^{p^*-1}|x|^{\frac{-ap}{\alpha'}}|v|dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||x|^{\frac{-ap^*}{\alpha}}|u|^{p^*-1}\right|^{\alpha} dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||x|^{\frac{-ap^*}{\alpha'}}|v|\right|^{\alpha'} dx\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{(p^*)'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap^*}|v|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq ||u||^{p^*-1}||v|| \leq \infty.
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

Por (A.2) e (A.3) podemos dizer que $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Usando o Teorema da Convergência Dominada (A.3.3) temos

$$
\begin{aligned}
grad\Phi_3(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_3(u+tv)-\Phi_3(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}\frac{[F(u+tv)-F(u)]}{t}dx \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}f(u+\theta tv)vdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} K(x)|x|^{-ap^*}f(u+\theta tv)vdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}f(u)vdx
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Logo $grad\Phi_3(u)v = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}f(u)vdx$. A desigualdade (A.3) mostra que $grad\Phi_3$ é um funcional contínuo em $\mathbb{R}^N$, de modo que, pela Proposição (A.2.1), concluimos que $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^N)$, com derivada de Fréchet dada por

$$\Phi_3'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*}f(u)vdx.$$

De modo completamente análogo mostramos que

$$grad\Phi_1(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla vdx,$$

$$grad\Phi_2(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx,$$

para todo $u, v \in E$, e que $grad\Phi_1, grad\Phi_2$ são de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$.

Logo,

$$\Phi_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx$$

e

$$\Phi_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} J'(u)v &= \Phi_1'(u)v + \Phi_2'(u)v - \Phi_3'(u)v \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V|x|^{-ap^*}|u|^{p-2}uvdx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|x|^{-ap^*} f(u)vdx, \end{aligned} \tag{A.5}$$

para todo $u, v \in E$.

Seguindo estes argumentos, mostramos, de modo completamente análogo, os outros resultados. ■

A.3 Resultados de convergência

Teorema A.3.1 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach e Φ um funcional C^1 definido em E. Suponha*

i) existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ da origem e uma constante positiva ρ tais que

$$\Phi(u) \geq \rho, \quad \text{para todo} \quad u \in \partial\mathcal{U},$$

ii)

$$\Phi(0) < \rho \quad \text{e} \quad \Phi(v) < \rho, \quad \text{para algum} \quad v \notin \mathcal{U}.$$

Usando $\mathcal{P}$ para denotar a classe de caminhos contínuos unindo 0 a v, defina

$$c = \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) \geq \rho.$$

Então existe uma sequência (u_n) em E tal que

$$\Phi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \Phi'(u_n) \to 0.$$

Veja [24, Theorem 2.2, pg 440].

Lema A.3.1 (Lema de Fatou) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *que satisfaz*

i) para todo n, $f_n(x) \geq 0$ *q.s. em* Ω*;*

ii) $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$.

Definimos $f(x) = \liminf_{n\to infty} f_n(x)$ *q.s. em* Ω*. Então* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x).$$

Veja [25, Lema 4.1, pg 90].

Lema A.3.2 (Lema de Strauss) *Sejam* $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções contínuas satisfazendo*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0, \text{ se } s \to 0.$$

Seja (u_n) *uma sequência de funções mensuráveis, com* $u_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, para todo* n*, tais que*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))|dx < \infty,$$

e

$$P(u_n(x)) \to v(x), \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N, \text{ se } n \to \infty.$$

Então, para todo B*, conjunto de Borel, limitado, tem-se*

$$\int_B |P(u_n(x)) - v(x)|dx \to 0, \text{ se } n \to \infty.$$

Demonstração. Veja [22, Theorem A.I, pg 338]. ∎

Teorema A.3.2 (Teorema da Convergência Monótona) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *que satisfazem*

i) $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$ *q.s. em* Ω,

ii) $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$.
Então $f_n(x)$ *converge q.s. em* Ω *para um limite finito, denotado por* $f(x)$*;* f *está em* $L^1(\Omega)$ *e* $||f_n - f||_{L^1_{(\Omega)}} \to 0$.

Veja [25, Teorema 4.1, pg 90].

Teorema A.3.3 (Teorema da Convergência Dominada, Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *que satisfaz*
i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.s. em* Ω.
ii) Existe uma função g *em* $L^1(\Omega)$ *tal que, para todo* n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.s. em* Ω.
Então f *está em* $L^1(\Omega)$ *e* $||f_n - f||_{L^1_{(\Omega)}} \to 0$.

Veja [25, Teorema 4.2, pg 90].

Teorema A.3.4 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio qualquer e sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que* $||f_n - f||_{L^p_{(\Omega)}} \to 0$. *Então existe uma subsequência, renomeada* (f_n), *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tais que*
i) $f_n(x) \to f(x)$, *q.s. em* $\mathbb{R}^N$.
ii) $|f_n(x)| \leq h(x)$, *q.s. em* $\mathbb{R}^N$ *e para todo* $n \in N$

Para a demonstração indicamos [25, Teorema 4.9, pg 94].

Teorema A.3.5 (Sobolev-Rellich-Kondrachov) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto e limitado satisfazendo a propriedade do cone,* $k \in N$ *e* $p \in [1, \infty)$. *Então a seguinte imersão é compacta para todo* $j \in N \setminus 0$.

$$Se\ k < \frac{N}{p}\ então\ W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ para\ todo\ q \in [1, \frac{Np}{N-kp}).$$

Obs. Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tem a propriedade do cone se existe um cone limitado $K \subset \mathbb{R}^N$ tal que todo $x \in \Omega$ é vertice de um cone K_x com $K_x \subset \Omega$ e K_x côngruo a K por um movimento rígido. Para maiores informações veja [13, Theorem A.4.9, pg 183].

Teorema A.3.6 (Teorema de Convergência Fraca) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ *tal que* $(||f_n||_p)$ *é limitada. Se* $f_n(x) \to f(x)$ *q.s. em* Ω *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $L^p(\Omega)$.

Para a demonstração indicamos [43, Theorem 13.44, pg 207].

O próximo Lema pode ser encontrado em [17, 39] e suas ideias vêm de [23, 41] quando o domínio é limitado e suave.

Lema A.3.3 (Convergência do Gradiente) *Sejam* E *o espaço dado em (2.6) e* J *o funcional dado em (2.14) ou (3.3). Seja* $(u_n) \subset E$ *uma sequência limitada tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* E *e* $J'(u_n) \to 0$. *Então, a menos de subsequência, temos* $\nabla u_n \to \nabla u$, *q.s. em* $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Primeiramente, consideramos o funcional J dado em (2.14). A outra demonstração é análoga.

Seja (u_n) uma sequência satisfazendo às hipóteses do Lema. Como $u_n \rightharpoonup u$ temos $u_n \to u$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Definindo $e_n = |x|^{-ap}(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot \nabla(u_n - u)$ temos $e_n \geq 0$, pelo Lema A.4.1. Dado $\epsilon > 0$, defina a função $\tau_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\tau_\epsilon(s) = \begin{cases} s, & se \;\; |s| \leq \epsilon \\ \frac{\epsilon s}{|s|}, & se \;\; |s| > \epsilon. \end{cases}$$

Considerando que $|\tau_\epsilon(s)| \leq |s|$ vemos que $\tau_\epsilon \in E$. Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} e_n dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap+a}(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)|x|^{-a}\nabla(u_n - u)dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||x|^{-ap+a}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||x|^{-a}\nabla(u_n - u)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a} |\nabla(u_n - u)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Aplicando a desigualdade $(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r)$ nas duas últimas integrais temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} dx \leq 2^{\frac{1}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}(|\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p)dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a} |\nabla(u_n - u)|^p dx \leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}(|\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p)dx.$$

Com isto e a limitação da sequência (u_n) em E, temos a limitação da sequência (e_n) in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Considere $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ tal que $supp\varphi \subset B_{m+1}$, $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi|_{B_m} \equiv 1$. Tomando $l > 0$ e definindo

$$\Omega_l = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| > l\} \quad \text{e} \quad \omega_l = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| \leq l\}$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx = \int_{\Omega_l} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx + \int_{\omega_l} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx. \tag{A.7}$$

Para estimar a integral à esquerda faremos uma sequência de passos.

Passo 1 Estimar sobre Ω_l.

Usando a desigualdade de Hölder e a limitação de (e_n) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_l} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx &\leq \left(\int_{\Omega_l} e_n dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_l} \varphi^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} e_n dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_l \cap B_{m+1}} \varphi^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq c\left(\int_{\Omega_l \cap B_{m+1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq c\left(\int_{\Omega_l \cap B_{m+1}} \frac{|u|}{l} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad \text{(A.8)} \\
&\leq c\left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p^*}}{l^{p^*}} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{B_{m+1}} dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq c l^{-\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

com c independente de l e de n.

Passo 2 Estimar sobre ω_l.

Definindo

$$\Omega_{n,\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x) - u(x)| \geq \epsilon\} \text{ e } \omega_{n,\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x) - u(x)| < \epsilon\}.$$

temos

$$\int_{\omega_l} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx = \int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx + \int_{\omega_l \cap \Omega_{n,\epsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx \qquad \text{(A.9)}$$

Passo 2.1 Estimar sobre $\omega_l \cap \Omega_{n,\epsilon}$.

Novamente, pela desigualdade de Hölder e a limitação de (e_n) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_l \cap \Omega_{n,\epsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx &\leq \left(\int_{\omega_l \cap \Omega_{n,\epsilon}} e_n dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\omega_l \cap \Omega_{n,\epsilon}} \varphi^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq c\left(\int_{\omega_l \cap \Omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} \varphi^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq c|\Omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}|^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

Como $|B_{m+1}| < \infty$ e $u_n \to u$ q.s. em $\mathbb{R}^N$, temos que $(u_n|_{B_{m+1}})$ converge, na medida, para u. Então, existe $n_0 \in N$ tal que

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^N : |u_n(x) - u(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cap B_{m+1}\right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } \ n \geq n_0.$$

Então

$$|\Omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}| < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0,$$

e temos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\omega_l \cap \Omega_{n,\epsilon}} e_n^{\frac{1}{p}} dx \leq c\epsilon^{\frac{p-1}{p}}. \tag{A.10}$$

Passo 2.2 Estimar sobre $\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon}$.

Pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx &= \int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx \\ &\leq \left(\int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} \varphi e_n dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} \varphi \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq c \left(\int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} \varphi e_n dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Porém,

$$\begin{aligned} \int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} \varphi e_n dx &= \int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) \varphi dx \\ &\quad - \int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u) \varphi dx \\ &= \int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \tau_\epsilon (u_n - u) \varphi dx \\ &\quad - \int_{\omega_l \cap \omega_{n,\epsilon} \cap B_{m+1}} |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \tau_\epsilon (u_n - u) \varphi dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \tau_\epsilon (u_n - u) \varphi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \tau_\epsilon (u_n - u) \varphi dx. \end{aligned}$$

o que, junto com (A.11), nos dá

$$\begin{aligned} c \left(\int_{\omega_l \cap \ \omega_{n,\epsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx \right)^p &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \tau_\epsilon (u_n - u) \varphi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \tau_\epsilon (u_n - u) \varphi dx. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Passo 2.2.1 Estimar a segunda integral do lado direito de (A.12).

Observe que o funcional H definido em E, por

$$H(w) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla w \varphi dx$$

é limitado e, como $u_n \rightharpoonup u$, temos.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \tau_\epsilon(u_n - u)\varphi dx = H(u_n - u) \to 0. \tag{A.13}$$

Passo 2.2.2 Estimar a primeira integral do lado direito de (A.12).

Observe que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla \tau_\epsilon(u_n - u)\varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(\tau_\epsilon(u_n - u)\varphi) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla \varphi \ \tau_\epsilon(u_n - u) dx \end{aligned} \tag{A.14}$$

Passo 2.2.2.1 Estimar a segunda integral do lado direito de (A.14).

Usando a desigualdade de Hölder, a limitação de (u_n), em E, e $\tau_\epsilon \leq \epsilon$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla \varphi \ \tau_\epsilon(u_n - u) dx \right| &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla \varphi| dx \\ &\leq \epsilon ||\nabla u_n||_p^{p-1} ||\nabla \varphi||_p \\ &\leq c\epsilon. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Passo 2.2.2.1 Estimar a primeira integral do lado direito de (A.14).

Pela definição de J temos

$$
\begin{aligned}
&J'(u_n)(\varphi\ \tau_\epsilon(u_n-u))\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla(\varphi\tau_\epsilon(u_n-u))dx\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap^*}V|u_n|^{p-2}u_n\varphi\tau_\epsilon(u_n-u)dx-\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)\varphi\tau_\epsilon(u_n-u)dx.
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

Pela limitação de $(\tau_\epsilon(u_n-u))$, podemos ver que $J'(u_n)(\varphi\tau_\epsilon(u_n-u))\to 0$. Usando as desigualdades (A.16) e de Hölder, $\tau_\epsilon\leq\epsilon$ e a continuidade de g, temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla(\tau_\epsilon(u_n-u)\varphi)dx\right|\\
&\leq|J'(u_n)(\varphi\ \tau_\epsilon(u_n-u))|+\left|\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap^*}V|u_n|^{p-2}u_n\varphi\tau_\epsilon(u_n-u)dx\right|\\
&\quad+\left|\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)\varphi\tau_\epsilon(u_n-u)dx\right|\\
&\leq o_n(1)+\epsilon\left(\int_{B_{m+1}}|x|^{-ap^*}V|u|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\epsilon\int_{B_{m+1}}\sup_{B_{m+1}}(g(x,u_n))dx\\
&\leq o_n(1)+c\epsilon.
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

Passo 3: Combinar as estimativas para conlcuir.

Passando o limite em (A.14) e usando (A.15) e (A.17), temos

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla\tau_\epsilon(u_n-u)\varphi dx\\
&=\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla(\tau_\epsilon(u_n-u)\varphi)dx\\
&\quad-\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla\varphi\ \tau_\epsilon(u_n-u)dx\\
&\leq\limsup_{n\to\infty}(c\epsilon+o_n(1))+\limsup_{n\to\infty}(c\epsilon)\leq c\epsilon.
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

Analogamente, tomando o limite em (A.12) e usando (A.13) e (A.18), conseguimos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} c\left(\int_{\omega_l\cap\ \omega_{n,\epsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx\right)^p &\leq \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla\tau_\epsilon(u_n-u)\varphi dx\\ &\quad -\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\tau_\epsilon(u_n-u)\varphi dx.\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(c\epsilon)\leq c\epsilon.\end{aligned}$$

de modo que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\omega_l\cap\ \omega_{n,\epsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} \leq c\epsilon. \tag{A.19}$$

Passando o limite em (A.9) e usando (A.10) e (A.19), temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\omega_l}\varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx &= \limsup_{n\to\infty}\int_{\omega_l\cap\omega_{n,\epsilon}}\varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx + \limsup_{n\to\infty}\int_{\omega_l\cap\Omega_{n,\epsilon}}\varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(c\epsilon^{\frac{p-1}{p}}) \qquad\qquad (A.20)\\ &\leq o(\epsilon).\end{aligned}$$

Applicando (A.8) e (A.20) em (A.7), temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx &= \limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega_l}\varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx + \limsup_{n\to\infty}\int_{\omega_l}\varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx.\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{c}{l^{\frac{p-1}{p}}}\right) + \limsup_{n\to\infty} o(\epsilon)\\ &\leq cl^{-\frac{p-1}{p}} + o(\epsilon).\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon\to 0$ e $l\to\infty$, conseguimos

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{B_m} e_n^{\frac{1}{p}} \leq \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi e_n^{\frac{1}{p}} = 0,$$

de modo que,

$$e_n^{\frac{1}{p}} \to 0 \text{ em } L^1(B_m).$$

Tomando $p>2$ e usando a desigualdade de Tolksdorf, temos

$$\int_{B_m} |\nabla u_n - \nabla u| \leq \int_{B_m} e_n^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Então,

$$\nabla u_n \to \nabla u, \text{ q.s. em } B_m.$$

If $1 < p < 2$, tomamos $s = \frac{p^2-p+2}{p^2} > 1$, $t = \frac{1}{sp} > 0$. Novamente pela desigualdade de Tolksdorf e de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_m} |\nabla u_n - \nabla u|^{2t} &\leq \int_{B_m} e_n^t (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{(2-p)t} \\
&\leq \left(\int_{B_m} e_n^{st} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{B_m} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{(2-p)ts}{s-1}} \right)^{\frac{s-1}{s}} \\
&\leq \left(\int_{B_m} e_n^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{B_m} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{(2-p)ts}{s-1}} \right)^{p} \to 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\nabla u_n - \nabla u|^{2t} \to 0 \text{ em } L^1(B_m).$$

Portanto,

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ em } (B_m),$$

a menos de subsequência. Então, usando o argumento da diagonal, temos

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

■

A.4 Resultados gerais

Teorema A.4.1 (Desigualdade de segunda ordem) *A constante $\overline{K}$ definida por*

$$\overline{K} = \inf\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 dx : u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_*} dx = 1\},$$

com $2_* = \frac{4N}{N-4}$, é um mínimo e é atingida somente por funções u_ϵ, definidas por

$$u_\epsilon(x) = \frac{[(N-4)(N-2)N(N+2)^2]^{\frac{N-4}{8}}}{(|x-x_0|^2+\epsilon)^{\frac{N-4}{2}}} \quad (x \in \mathbb{R}^N),$$

para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e qualquer $\epsilon > 0$.

Demonstração. Veja [38, Theorem 2.1]

Lema A.4.1 (Desigualdade de Tolksdorf) *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle .,. \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \right\rangle \geq \begin{cases} c_p \dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \\ c_p |x-y|^p, & \text{se } p \geq 2, \end{cases}$$

com c_p uma constante positiva.

Veja [41, Lema 4.1, pg 5709].

Lema A.4.2 *Se existe $\theta > p$ tal que $0 < \theta F(s) \leq s f(s)$, para todo $s > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$ então existe $c > 0$ tal que $F(s) \geq cs^\theta$ para todo $s > 0$.*

Demonstração. Da hipótese temos que

$$\frac{\theta}{s} \leq \frac{f(s)}{F(s)} = \frac{F'(s)}{F(s)}, \text{ para todo } s > 0.$$

Usando $lnx = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt$ vemos que existe $c > 0$ tal que

$$F(s) \geq cs^\theta, \text{ para todo } \ s \geq 1.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] ALVES, C. O.; MORAIS FILHO, D. C.; SOUTO, M. A. S. Radially symmetric solutions for a class of critical exponent elliptic problems in R^N. **Electronic Journal of Differential Equations**, San Marcos, v. 1996, n. 7, p. 1-12, 1996. Disponível em http://ejde.math.txstate.edu/.

[3] ALVES, C. O.; Do Ó, J. M. Positive solutions of a fourth order semilinear problem involving critical growth. **Advanced Nonlinear Studies**, San Antonio, v. 2, n. 4, p. 437-458, 2002.

[4] ALVES, C. O.; Do Ó, J. M.; MIYAGAKI, O. H. On perturbations of a class of a periodic m-Laplacian equation with critical growth. **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 45, p. 849-863, 2001.

[5] ALVES, C. O.; Do Ó, J. M.; MIYAGAKI, O. H. Nontrivial solutions for a class of semilinear biharmonic problems involving critical exponents. **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 46, p. 121-133, 2001.

[6] ALVES, C. O.; Do Ó, J. M.; MIYAGAKI, O. H. On a class of singular biharmonic problems involving critical exponents. **Journal of Mathematical Analisys and Applications**, Amsterdam, v. 277, p. 12-26, 2003.

[7] ALVES, C. O.; CARRIÃO, P. C.; MIYAGAKI, O. H. Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth. **Journal of Mathematical Analisys and Applications**, Amsterdam, v. 260, p. 133-146, 2001.

[8] ALVES, C. O.; SOARES, S. H. M. Existence and concentration of positive solutions for a class of gradient systems. **Nonlinear Differential Equations and Applications**, New York, v. 12, p. 437-457, 2005.

[9] ALVES, C. O.; SOARES, S. H. M. Multiplicity of positive solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations. **Advances in Differential Equations**, Florida, v. 15, n. 11/12, p. 1083-1102, 2010.

[10] ALVES, C. O.; SOUTO, M. A. S. Existence of solutions for a class of elliptic equations in R^N with vanishing potentials. **Journal of Differential Equations**, Philadelphia, v. 252, p. 5555-5568, 2012.

[11] ALVES, C. O.; SOUTO, M. A. S. Existence of solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity. **Journal of Differential Equations**, Philadelphia, v. 254, n. 10, p. 1977-1991, 2013.

[12] ALVES, C. O.; SOUTO, M. A. S.; MONTENEGRO, M. Existence of solution for two classes of elliptic problems in R^N with zero mass. **Journal of Differential Equations**, Philadelphia, v. 252, p. 5735-5750, 2012.

[13] AMBROSETTI, A.; ARCOYA, D. **An introduction to nonlinear functional analysis and elliptic problems**. Boston: Birkhäuser, 2011.

[14] AMBROSETTI, A.; FELLI, V.; MALCHIODI, A. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. **Journal of the European Mathematical Society**, Zürich, v. 7, p. 117-144, 2005.

[15] AMBROSETTI, A.; WANG, Z.-Q. Nonlinear Schrödinger equations with vanishing and decaying potentials. **Differential Integral Equations**, Florida, v. 18, n. 12, p. 1321-1332, 2005.

[16] ASSUNÇÃO, R. B.; CARRIÃO, P. C.; MIYAGAKI, O. H. Multiplicity results for equations with subcritical Hardy-Sobolev exponents and singularities on a half-space. **Matemática Comtemporânea**, Rio de Janeiro, v. 32, p. 1-13, 2007.

[17] ASSUNÇÃO, R. B.; CARRIÃO, P. C.; MIYAGAKI, O. H. Critical singular problems via concentration-compactness lemma. **Journal of Mathematical Analisys and Applications**, Amsterdam, v. 326, p. 137-154, 2007.

[18] BASTOS, W. D.; MIYAGAKI, O. H.; VIEIRA, R. S. Existence of solutions for a class of degenerate quasilinear equation in R^N with vanishing potentials. **Boundary Value Problems**, Heidelberg, n. 92, 2013. DOI:10.1186/1687-2770-2013-92.

[19] BARTSCH, T.; WANG, Z.-Q. Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on R^N. **Communications in Partial and Differential Equations**, New York, v. 20, p. 1725-1741, 1995.

[20] BENCI, V.; GRISANT, C. R.; MICHELETTI, A. M. Existence of solutions of nonlinear Schrödinger equations with $V(\infty) = 0$. **Progress in Nonlinear Differential Equations and Applycations**, New York, v. 66, p. 53-65, 2005.

[21] BEN-NAOUM, A. K.; TROESTLER, C.; WILLEM, M. Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains. **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 26, n. 4, p. 823-833, 1996.

[22] BERESTYCKI, H.; LIONS, P. L. Nonlinear scalar fields equation, I: Existence of a ground state. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, New York, v. 82, n. 4, p. 313-346, 1983.

[23] BOCCARDO, L.; MURAT, F. Almost everywhere convergence of the gradients fo solutions to elliptic and parabolic equations. **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 6, n. 19, p. 581-597, 1992.

[24] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Hoboken, v. 36, n. 4, p. 437-477, 1983.

[25] BREZIS, H. **Funcional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2010.

[26] CAFFARELLI, L.; KOHN, R.; NIRENBERG, L. First order interpolations inequalities with weights. **Compositio Mathematics**, New York, v. 53, n. 3, p. 259-275, 1984.

[27] CALZOLARI, E.; FILIPPUCCI, R.; PUCCI, P. Dead cores and bursts for p-Laplacian elliptic equations with weights. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, Springfield, 2007. Supplement volume, p. 1-10.

[28] CARRIÃO, P. C.; DEMARQUE, R.; MIYAGAKI, O. H. Nonlinear biharmonic problems with singular potentials. **Communications on Pure and Applied Analysis**, Springfield, (to appear).

[29] CATRINA, F.; WANG, Z.-Q. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence) and symmetry of extremal functions. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Hoboken, v. 54, n. 2, p. 229-258, 2001.

[30] CHABROWSKI, J.; Do Ó, J. M. *On some fourth order semilinear elliptic problems in R^N*, **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 49, p. 861-884, 2002.

[31] COSTA, D. G. On a class of elliptic systems in R^N. **Electronic Journal of Differential Equations**, San Marcos, v. 1994, n. 7, p. 1-14, 1994.

[32] COTI-ZELATI, V.; RABINOWITZ, P. H. Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on R^N. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Hoboken, v. 45, n. 10, p. 1217-1269, 1992.

[33] DEIMLING, K. Nonlinear functional analysis. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1985.

[34] DEL PINO, M.; FELMER, P. Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, New York, v. 4, p. 121-137, 1996.

[35] DEMARQUE, R.; MIYAGAKI, O. H. Radial solutions of inhomogeneous fourth order elliptic equations and weighted Sobolev embeddings. (to appear).

[36] DIAZ, J. I. Elliptic equations. In: ——. **Nonlinear partial differential equations and free boundaries**. Boston: Pitman, 1985, v. 1.

[37] DiBENEDETTO, E. $C^{1+\alpha}$ Local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 7, n.8, p. 827-850, 1983.

[38] EDMUNDS, D. E.; FORTUNATO, D.; JANNELLI, E. Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, New York, v. 112, p. 269-289, 1990.

[39] El HAMIDI, A.; RAKOTOSON, J. M. Compactness and quasilinear elliptics problems with critical exponents, dedicated to professor R. Temam

for his 65^{th} anniversary. **Differential and Integral Equations**, Florida, v. 18, p. 1201-1220, 2005.

[40] GAZZOLA, F.; GRUNAU, H.-C. Radial entire solutions for supercritical biharmonic equations. **Mathematische Annalen**, Heidelberg, v. 334, p. 905-936, 2006.

[41] GHOUSSOUB, N.; YUAN, C. Multiple solutions for quasi-linear partial differential equations involving the critical Sobolev and Hardy exponents. **Transactions of the American Mathematical Society**, Providence, v. 352, n. 12, p. 5703-5743, 2000.

[42] GILBARG, D.; TRUNDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1983.

[43] HEWITT, E.; STROMBERG, K. **Real and abstract analysis**. New York: Springer, 1975.

[44] ITURRIAGA, L. Existence and multiplicity results for some quasilinear elliptic equation with weights. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Philadelphia, v. 339, p. 1084-1102.

[45] KARPMAN, V. I. Influence of high-order dispersion on self-focusing. I: qualitative investigation. **Physics Letters A**, Philadelphia, v. 160, p. 531-537, 1991.

[46] KARPMAN, V. I. Stabilization of soliton instabilities by higher-order dispersion: fourth order nonlinear Schrödinger-type equations. **Physical Review E**, New York, v. 53, n. 2, p. 1336-1339.

[47] KARPMAN, V. I.; SHAGALOV, A. G. Stability of soliton described by nonlinear Schrödinger-type equations with higher-order dispersion. **Physica D**: nonlinear phenomena, Philadelphia, v. 144, p. 194-210, 2000.

[48] KRYSZEWSKI, W.; SZULKIN, A. Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation. **Advances in Differential Equations**, Florida, n. 3, p. 441-472, 1998.

[49] LYBEROPOULOS, A. N. Quasilinear scalar fiels equations with competing potentials. **Journal of Differential Equations**, Philadelphia, v. 251, p. 3624-3657.

[50] LINDQVIST, P. On the definition and properties of a p-superharmonic functions. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)**, Berlin, v. 365, p. 67-70, 1986.

[51] MIYAGAKI, O. H.; RODRIGUES, R. S. On positive solutions for a class of degenerate quasilinear elliptic positone-semipositone systems. **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 70, p. 99-116, 2009.

[52] MIYAGAKI, O. H.; RODRIGUES, R. S. On positive solutions for a class of singular quasilinear elliptic systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Philadelphia, v. 334, p. 818-833, 2007.

[53] MIYAGAKI, O. H.; SOUTO, M. A. S. Superlinear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition. **Journal of Differential Equations**, Philadelphia, v. 245, p. 3628-3638, 2008.

[54] NOUSSAIR, E. S.; SWANSON, C. A.; YANG, J. Quasilinear elliptic problems with critical exponents. **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 20, n. 3, p. 285-301, 1993.

[55] PANKOV, A. A.; PFLÜGER, K. On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential. **Nonlinear Analysis**: theory, methods & applications, Philadelphia, v. 33, p. 593-609, 1998.

[56] PANKOV, A. A. Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals. **Milan Journal of Mathematics**, New York, v. 73, p. 259-287, 2005.

[57] PAUSADER, B. The cubic fourth-order Schrödinger equation. **Journal of Functional Analysis**, Philadelphia, v. 256, p. 2473-2517, 2009.

[58] PIMENTA, M. T. O.; SOARES, S. H. M. Existence and concentration of solutions for a class of biharmonic equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Philadelphia, v. 390, p. 274-289, 2012.

[59] PUCCI, P.; SERRIN, J. The strong maximum principle revisited. **Journal of Differential Equations**, Philadelphia, v. 196, p. 1-66, 2004.

[60] RABINOWITZ, P. H. On a class of nonlinear Schrödinger equations. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, New York, v. 43, p. 270-291, 1992.

[61] SCHECHTER, M. **Minimax systems and critical points theory** Boston: Birkhäuser Boston, 2009.

[62] SHEN, Y.; WANG, Y. Multiple and sign-changing solutions for a class of semilinear biharmonic equation. **Journal of Differential Equations**, Philadelphia, v. 246, p. 3109-3125, 2009.

[63] SIRAKOV, B. Standing wave solutions of the nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$. **Annali di Matematica Pura ed Applicata** Heidelberg, v. 181, n. 1, p. 7383, 2002.

[64] TOLKSDORF, P. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. **Journal of Differential Equations**. Philadelphia, v. 51, p. 126-150, 1984.

[65] WANG, Z.-Q.; WILLEM, M. Singular minimization problems. **Journal of Differential Equations**, Philadelphia, v. 161, n. 2, p. 307-320, 2000.

[66] WANG, X.; ZENG, B. On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations with competing potential functions. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**. V. 28, n. 3, p. 633-655, 1997.

[67] WILLEN, M. **Minimax theorems**. Boston: Birkhäuser, 1996.

[68] YE, Y.; TANG, C.-L. Infinitely many solutions for fourth order elliptic equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Philadelphia, v. 394, p. 841-854, 2012.

[69] ZHU, X. P.; YANG, J. On the existence of nontrivial solution of a quasilinear elliptic boundary value problem for unbounded domains. **Acta Mathematica Scientia**, Philadelphia, v. 7, p. 341-359, 1987.

[70] ZHU, X. P.; YANG, J. The quasilinear elliptic equation on unbounded domain involving critical Sobolev exponent. **Journal of Partial Diffential Equations**, Pequim, v. 2, p. 53-64, 1989.