Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Carlos Benjamin de Lyra e a Topologia Algébrica no Brasil

Thiago Taglialatela Lima Cobra

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador
Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre

2014

TERMO DE APROVAÇÃO

Thiago Taglialatela Lima Cobra

CARLOS BENJAMIN DE LYRA E A TOPOLOGIA ALGÉBRICA NO BRASIL

Tese APROVADA como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Câmpus de Rio Claro, pela seguinte comissão examinadora:

Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre
Orientador

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Unesp – Rio Claro/SP

Prof. Dr. Edson de Oliveira
Centro Universitário Central Paulista – São Carlos/SP

Profa. Dra. Mariana Feiteiro Cavalari Silva
Universidade Federal de Itajubá – Itajubá/MG

Profa. Dra. Rosa Lucia Sverzut Baroni
Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Unesp – Rio Claro/SP

Rio Claro, 26 de Maio de 2014

À memória de meu querido avô, Dirceu Nogueira Cobra, e de Maria Ivone de Souza, carinhosamente guardados em nossas memórias.

Agradecimentos

A todos meus familiares que de alguma forma apoiaram e incentivaram a realização dos estudos que culminaram na produção deste trabalho. Especialmente aos meus pais Renata e José, cujo apoio e incentivo em todos os sentidos me levaram ao ingresso e à conclusão dos cursos de Graduação, Mestrado e Doutorado.

Ao meu marido, companheiro e amigo Thiago de Souza Lima Cobra, pelo apoio incondicional, pela ajuda paciente e pela compreensão, não medindo esforços para que esta etapa pudesse ser concluída com êxito.

Ao meu orientador Sergio Roberto Nobre, pela amizade, pela orientação compreensiva e paciente e por toda confiança depositada em mim.

Ao amigo Edson de Oliveira, meu eterno professor, que de forma paternal tem me acompanhado, ajudado e incentivado desde meus estudos em nível de Graduação, e também, pela grande contribuição à realização dessa pesquisa.

Às professoras Alice Kimie Miwa Libardi e Mariana Feiteiro Cavalari Silva pelo apoio, incentivo e discussões sobre este projeto.

Aos amigos Eliete Both, Geisiane dos Santos, Gislene Bessa, Inajara de Moraes, Luciana Bertholdi, Mauro Viegas, Polyanna Costa, Suzi Marconato e Tatiana Viegas pelo incentivo e pela convivência fraterna.

Aos entrevistados nesta pesquisa por sua prontidão: Carlos Alberto Barbosa Dantas, Daciberg Lima Golçalves, Jorge Lacerda de Lyra, Leda Lacerda de Lyra e Sylvia Lacerda de Lyra.

Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE–Unesp–Rio Claro/SP), pela simpatia e eficiência com que sempre me ajudaram.

Aos Departamentos de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística (IME–USP) e do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC–USP), especialmente à Lhais Visentin, pelas informações e documentos concedidos.

À memória do professor Gilberto Francisco Loibel, relevante educador e pesquisador e uma figura humana especial, o qual embora se encontre em outra dimensão, está sempre presente em constantes lembranças. Nosso merecido reconhecimento!

Àqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que este projeto pudesse se concluir.

E, acima de tudo, a Deus, que sempre tem me concedido força para superar os obstáculos.

É preciso força pra sonhar
e perceber que a estrada
vai além do que se vê.

Marcelo Camelo

Resumo

Este trabalho buscou contemplar três objetivos principais: investigar o início da pesquisa em Topologia Algébrica no Brasil, a trajetória do professor e pesquisador Carlos Benjamin de Lyra (1927 - 1974) e seu legado acadêmico. Inicialmente, apresentamos o surgimento da Topologia em termos mundiais. Em seguida, falamos sobre o início da pesquisa em Topologia Algébrica no Brasil, para tanto, trazemos um breve histórico do curso de Matemática na criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (USP). Neste contexto, destacamos o papel desempenhado por Lyra nessa Universidade e sua contribuição para o início da pesquisa em Topologia Algébrica no Brasil, além da influência científica que exerceu sobre estudantes de sua época. Apresentamos uma biografia de nosso pesquisado, na qual constam detalhes sobre sua criação, suas mudanças e viagens ao exterior e o que o levou a escolher a Matemática e, posteriormente, a Topologia Algébrica como campos de atuação. Por fim, fazemos uma análise comentada de sua obra "Introdução à Topologia Algébrica", que serviu de texto para um curso ministrado por ele no "Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática", em 1957.

Palavras-chave: História da Matemática no Brasil, História da Topologia Algébrica no Brasil, Surgimento da Topologia, Carlos Benjamin de Lyra.

Abstract

This work concerns three main areas: the investigation of the early research on Algebraic Topology in Brazil, the life of the educator and researcher Carlos Benjamin de Lyra (1927 - 1974), and his academic legacy. Initially, we present the beginning of Topology in the world. Next, we present the beginning of research on algebraic topology in Brazil. To this end, we show a brief history of Mathematics course in the creation of the Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras of the Universidade de São Paulo (USP). In this context, we point out the relevant work of Lyra in this University and his contribution to the beginning of research in algebraic topology in Brazil, besides the scientific influence exerted over students of his day. We present a biography of Lyra including details about his life, which is changed by trips abroad and what led him to choose Mathematics and subsequently the Algebraic Topology as a field of work. Finally, we make a commented analysis of his work "Introdução à Topologia Algébrica", which served as a text book for a course taught by him in the "Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática", in 1957.

Keywords: History of Mathematics in Brazil, History of Algebraic Topology in Brazil, Emergence of Topology, Carlos Benjamin de Lyra.

Sumário

Introdução **10**

1 O Surgimento da Topologia no Mundo **16**

1.1 Topologia: primeiros passos 16

1.2 Pesquisadores notáveis no desenvolvimento da Topologia 20

2 A Topologia Algébrica no Brasil **30**

2.1 O curso de Matemática na criação da FFCL 30

2.2 A pesquisa em Topologia Algébrica 34

3 Carlos B. de Lyra: vida pessoal e acadêmica **37**

3.1 Família e viagem ao exterior 37

3.2 O retorno ao Brasil 40

3.3 Viagem para a França e Casamento 41

3.4 Vida acadêmica 43

4 Carlos B. de Lyra: influência e produção científica **49**

4.1 Influência Científica de Lyra 49

4.2 Gilberto Francisco Loibel 50

4.2.1 Dados biográficos do professor Loibel 52

4.3 Daciberg Lima Gonçalves 55

4.3.1 Dados biográficos do professor Daciberg 56

4.4 Produção Científica de Lyra 59

4.4.1 *A Note on Zorn's Theorem*, 1949 62

4.4.2 *Minimal Complexes and Maps*, 1952 64

4.4.3 Introdução à Topologia Algébrica, 1957 66

4.4.4 *On the homotopy type of a factor space*, 1958 68

4.4.5 Sobre os espaços de mesmo tipo de homotopia que o dos poliedros, 1958;
On spaces of the same homotopy type as polyhedra,1960 70

4.4.6 *On circles bundles over complex projective spaces*, 1959 74

4.4.7 Teoria das Superfícies de Riemann, 1957-58 76

4.4.8 Método de Whitehead na teoria da homotopia, 1963 78

4.4.9 *On a conjecture in homotopy theory*, 1965
Sobre uma conjectura na teoria da homotopia, 1965 79
4.4.10 H-equivalência de grupos topológicos, 1968 83
4.4.11 Grupo fundamental e revestimentos, 1969 86
4.4.12 Caracterização dos SHM-morfismos para grupos topológicos, 1975 88
4.4.13 *SHM-maps of CW-groups*, 1976 90
4.5 Referências bibliográficas utilizadas por Lyra 94

5 Análise comentada da obra "Introdução à Topologia Algébrica" 98
5.1 Introdução à Topologia Algébrica 104

Considerações Finais 118

Referências Bibliográficas 120
Documentos e Obras Consultadas 120
Entrevistas 124

Introdução

Após a conclusão, em 2010, do programa de Mestrado em Matemática (iniciado em 2009 junto ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista – IGCE–UNESP, Rio Claro/SP), na área de Topologia Algébrica – campo da Matemática que estuda os espaços topológicos tendo a Álgebra como ferramenta – despertou-se o interesse em desenvolver um estudo acerca da História da Topologia Algébrica. Uma ampla pesquisa sobre o assunto direcionou nossa investigação à construção da História da Topologia, em termos internacionais. Contudo, isso não permitia desenvolver um material com o teor de originalidade desejado. Diante disso, o foco foi direcionado para a História da Topologia Algébrica em nosso país. Com isso pudemos constatar a existência de lacunas, as quais diversos pesquisadores têm tentado preencher com o desenvolvimento de pesquisas acadêmicas sobre o desenvolvimento da Matemática no Brasil e suas principais personagens.

Nesse embalo, em combinação com o conhecimento básico em Topologia Algébrica adquirido durante o Mestrado, decidimos partir para uma investigação acerca do surgimento das bases desse campo matemático no Brasil. Foi por meio dela que identificamos a destacada atuação do professor e pesquisador Carlos Benjamin de Lyra (1927 - 1974) no desenvolvimento da Matemática brasileira, particularmente da Topologia Algébrica. Diante disso, fomos levados às seguintes indagações: como se iniciou o desenvolvimento da pesquisa em Topologia Algébrica no Brasil? Qual a relevância das obras de Lyra nesse desenvolvimento? Que influência exerceu na formação de novos pesquisadores? Qual a repercussão de seus trabalhos junto à comunidade matemática? A pretensão em dar respostas a esses questionamentos foi o fator determinante no sentido escolhido para o desenvolvimento desta pesquisa.

Assim, o escopo do presente trabalho de doutoramento é analisar o contexto que influenciou a trajetória pessoal e acadêmica do professor Carlos Benjamin de Lyra e, além disso, analisar parte de sua produção acadêmica, identificando peculiaridades e sua influência no desenvolvimento da Topologia Algébrica no Brasil. À luz dos fatos e considerações sobre a evolução do pensamento matemático brasileiro e observando a escassez de trabalhos que permitissem realizar a análise acima evidenciada, realizamos uma investigação histórica e reunimos suas publicações acadêmicas, identificando suas particularidades, bem como trabalhos e materiais tais como estudos de obras, biografias, resumos e documentos atinentes à vida pessoal e acadêmica relacionados ao referido professor com o propósito principal de responder às questões acima, que motivaram esta pesquisa. Paralelamente a essa busca, reunimos documentos que descrevem o contexto matemático brasileiro, desde 1930, principalmente aqueles que relacionam a Topologia Algébrica com a carreira científica de Lyra. Ressaltemos que tivemos a preocupação de identificar as influências de outras culturas sobre Lyra, uma vez que ele passou temporadas fora do Brasil.

Carlos Benjamin de Lyra nasceu em Recife-PE, em 23 de novembro de 1927. Com o falecimento do pai e o segundo casamento de sua mãe, a nova família se mudou para os Estados Unidos. Nessa época, Lyra tinha oito anos de idade e, naturalmente, passou a frequentar escolas americanas. No período de 1939 a 1945, cursou a escola secundária na *Iona High School*, *New Rochelle* (*New York*); em 1951, após formar-se com distinção em Matemática na FFCL da USP, viajou à França para participar dos seminários de Cartan sobre Espaços Fibrados e assistir, já em 1953, às palestras de Hurewicz sobre homotopia no *Collège de France*. Para tanto, buscamos informações em documentos históricos, livros, artigos, trabalhos científicos, em sítios de programas de pós-graduação e em trabalhos acadêmicos que versam sobre a História da Matemática no Brasil. Ademais, coletamos junto aos departamentos de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística (IME – USP, São Paulo/SP) e do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC – USP, São Carlos/SP) dados da trajetória acadêmica de Lyra e de alguns de seus alunos e pares. Além da pesquisa e da investigação documental, mantivemos contato e realizamos entrevistas com topólogos que com ele conviveram, os quais possuem bastante conhecimento do legado de Lyra, e assim, forneceram muitas informações acerca do mesmo, principalmente, da relevância de suas obras. Ainda, relatos importantes sobre a sua vida pessoal foram obtidos em entrevistas realizadas com sua esposa Leda Lacerda de Lyra e seus filhos Sylvia e Jorge Lacerda de Lyra.

De posse dos dados coletados, iniciamos a elaboração do texto. Durante tal processo, foram feitas cinco exposições com discussão. A primeira apresentação aconteceu em 2011 durante a coleta de dados no “6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática” (São João del-Rei/MG). A segunda foi a apresentação e discussão, em 2012, do projeto de pesquisa que originou este trabalho, durante a “Atividade Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática” (PPGEM–Unesp, Rio Claro/SP). A terceira ocorreu em 2012, durante o processamento dos dados, no “13º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia”, realizado nas dependências da Universidade de São Paulo (USP, São Paulo/SP). As duas últimas apresentações, ambas realizadas em 2013, aconteceram na “Jornada da Pós-Graduação” do PPGEM.

As discussões e sugestões oferecidas foram ferramentas bastante esclarecedoras e contribuíram significativamente para o amadurecimento e a conclusão desta pesquisa.

Em virtude do significante valor matemático e histórico das produções de Lyra, decidimos, além da investigação efetuada, incluir neste trabalho a análise matemática comentada de uma delas. Apesar da importância de toda a sua obra, optamos pela apreciação da "Introdução à Topologia Algébrica", texto que serviu de base para o curso por ele ministrado no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado em julho de 1957. Avaliada nos tempos atuais, ao lado de importantes publicações existentes, essa obra pode ser considerada como um texto possuidor de conteúdos abrangentes e ricos em informações. O fato relevante sobre o material, o qual motivou nossa escolha, é que, segundo declarações do professor Loibel[1], trata-se do primeiro material em Topologia Algébrica escrito em português. O estudo apresentado no texto versa sobre a homologia simplicial para poliedros. Observemos que, historicamente, os poliedros foram estudados inicialmente na Topologia Algébrica; eles têm definição geométrica simples e intuitiva por meio de colagem de simplexos. Conforme Croom (1978), "*além de serem facilmente visualizados os poliedros são suficientemente gerais para serem usados em aplicações*" (tradução nossa). Devemos destacar a série de aplicações que Lyra apresenta no escrito; além do cálculo de grupos de homologia de diversas superfícies, é demonstrado o famoso Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz.

Dessa maneira, a pesquisa está ligada à História da Matemática no Brasil, vindo ao encontro das pesquisas como as de Trivisoli (2008) que faz uma abordagem sobre a Sociedade Matemática de São Paulo, as de Calabria (2010), que traz considerações a respeito do 1º Colóquio Brasileiro de Matemática e apresenta uma breve biografia de seus participantes, e as de Cavalari (2012), que apresenta a trajetória acadêmica do professor Chaim Samuel Hönig.

Durante nossas inquirições, pudemos perceber o quão proeminente foi o desempenho do professor Lyra no contexto matemático nacional. Em depoimento para uma mesa-redonda sobre o 1º Colóquio Brasileiro de Matemática, a professora Elza Gomide afirma que Lyra foi um pesquisador de grande relevo, com produções de textos muito importantes, tendo, dessa forma, fornecido uma inquestionável contribuição para o desenvolvimento da Matemática, particularmente da Topologia, no Brasil (GOMIDE, 2008). Foi um matemático muito versátil ao abordar em seus estudos, além da teoria de homologia, diversos outros temas, principalmente da Topologia Algébrica, tais como: homotopia, fibrados, superfícies de Riemann e obstrução. Segundo considerou a comissão julgadora do Concurso de Professor Adjunto da USP, Lyra teve "*uma carreira científica universitária, sob todos os pontos-de-vista altamente meritória*". A comissão

[1] Em entrevista a nós concedida em 2012.

emitiu, ainda, o seguinte parecer: "*chama a atenção a seriedade e coerência dos trabalhos do candidato numa área reconhecidamente difícil como Topologia Algébrica*" (Univ. de São Paulo, 1980). Gomide (2008) também assevera:

> O Lyra teve muitas habilidades. Com essas atitudes de interesse pela matemática que ele tinha revelado já tão cedo, trabalhou na difusão da ciência brasileira, ajudando em todos os ramos. (p.93)

Com efeito, Hilton (1974) afirma:

> O fato de que ele [Lyra] foi eleito para a Academia Brasileira de Ciências com uma unanimidade sem precedentes, mostrou como seus colegas de todas as áreas da ciência apreciavam suas muitas e grandiosas qualidades e sua enorme atividade em nome da comunidade científica no Brasil. (p.122 – tradução nossa).

O estudioso em questão foi um dos ativistas do movimento acadêmico na Universidade de São Paulo tendo se dedicado, dentre outras, na definição da carreira universitária na USP, na Associação dos Auxiliares de Ensino da USP, que desenharam a carreira acadêmica dentro da Universidade de São Paulo; na organização de uma Associação de Docentes da USP (como representante da mesma, participou dos trabalhos que conduziram à criação da FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Univ. de São Paulo, 1980); na elaboração do Regulamento de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo - IME–USP (Univ. de São Paulo, 1980); no preparo da documentação para o reconhecimento dos Programas de Mestrado e Doutorado do IME–USP. Ademais, foi um dos idealizadores do Colóquio Brasileiro de Matemática, tendo ministrado um curso no primeiro deles e coordenado a comissão organizadora do segundo. Ainda, conforme Gomide (2008, p.94), "*sem dúvida, ele teve uma atuação destacada em todos os Colóquios de que participou e em tudo que se desenhou a partir de então*".

Quanto à sua trajetória acadêmica, mesmo antes de ingressar, em 1947, no Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras (FFCL) da USP, era considerado um aluno com conhecimentos proeminentes em Matemática, fato que talvez se justifique quando observamos que Lyra, quando residiu com a família nos EUA, teve contato frequente com o célebre pesquisador Richard Courant[2] (1888 - 1972) em viagens de trem[3]. Foi um aluno brilhante e obteve licenciatura em 1950. Nesse mesmo

[2]Courant foi um matemático alemão judeu que fora aos EUA para fugir da Alemanha nazista. (GOMIDE, 2008, p.93)

[3]Ambos residiam no subúrbio e utilizavam o meio transporte todos os dias para se locomover até *New York*.

ano, manifestou interesse pela Topologia Algébrica ao assistir a um curso sobre Teoria da Homologia Simplicial, ministrado pelo professor Cândido Lima da Silva Dias, que retornara há pouco tempo dos Estados Unidos após estudar o assunto com Cartan e Spanier. Em dezembro de 1958, sob a orientação do professor Cândido Dias, defendeu o trabalho de doutoramento "Sobre espaços do mesmo tipo de homotopia que o dos poliedros", sendo aprovado com distinção. Em 1954, foi contratado como Auxiliar de Ensino junto à cadeira de Análise Matemática da FFCL – USP, desenvolveu uma brilhante carreira na instituição, que culminou com a sua promoção a Professor Adjunto em 1974. Sua carreira teve muitos degraus, contudo não conseguiu chegar ao topo da carreira porque faleceu muito cedo, após atingir o penúltimo nível da carreira acadêmica, que posteriormente deixou de existir, antes do título de "Professor Titular".

Para cumprir os objetivos aqui apresentados, o texto organiza-se da forma exposta a seguir:

O capítulo 1 apresenta como se deu o surgimento, em termos mundiais, da área de pesquisa denominada Topologia, desde os primeiros problemas que posteriormente foram categorizados nesta área, destacando os matemáticos proeminentes no desenvolvimento e estabelecimento da mesma. Destacamos ainda nesse cenário, o surgimento da Topologia Algébrica como uma das subdivisões da Topologia.

No capítulo 2, com o propósito de apresentar o surgimento da pesquisa em Topologia Algébrica no Brasil, tecemos comentários acerca da criação do curso de Matemática na fundação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP).

O terceiro capítulo é destinado a uma biografia de Carlos Benjamin de Lyra, com considerações a respeito de sua vida pessoal, desde a infância, passando pelo período em que residiu nos EUA, seu retorno ao Brasil e o desenvolvimento de sua vida acadêmica desde então.

O capítulo 4 é dedicado à influência científica que Lyra exerceu sobre estudantes que se dedicaram à pesquisa em Topologia Algébrica e que se tornaram grandes expoentes na área em nosso país. Apresentamos a produção acadêmica de nosso pesquisado, trazendo particularidades de suas obras, como, por exemplo, seus trabalhos de Doutorado e de Livre Docência, que serviram de ponto de partida para novas pesquisas. Concluímos o capítulo listando todas as referências bibliográficas utilizadas por Lyra em seus trabalhos.

O quinto e último capítulo traz uma análise comentada da obra "Introdução à

Topologia Algébrica", produzida por Lyra que serviu de texto para um curso ministrado por ele no "Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática", realizado em 1957, na cidade mineira de Poços de Caldas.

1 O Surgimento da Topologia no Mundo

A Topologia é um ramo da Matemática que pode ser dividido em três subáreas: Topologia Algébrica, Topologia Diferencial e Topologia Geométrica. De acordo com Katz (1998, p.814), a Topologia pode ser entendida como a parte da Geometria que se preocupa com as propriedades das figuras que são invariantes diante de transformações contínuas, bijetoras cujas inversas também são contínuas. Em termos mundiais, a Topologia Geral teve grande avanço após a publicação, em 1914, do livro de Felix Hausdorff (1868 - 1942) intitulado *Grundzüge der Mengenlehre* (cujo título pode ser traduzido como "Fundamentos da Teoria dos Conjuntos"). Apesar disso, é importante não perder de vista que as ideias publicadas por Hausdorff já eram conhecidas e utilizadas por Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), desde 1895:

> Topologia, por muitos anos, tem sido considerado um dos mais excitantes e influentes campos de pesquisa em Matemática Moderna. Apesar de suas origens serem remetidas há várias centenas de anos, foi Poincaré quem, tomando emprestada uma expressão usada por Möbius, "deu asas à topologia" em uma clássica série de artigos [Analysis Situs] publicada na virada do século. (JAMES, 1999 - tradução nossa).

Poincaré, por sua vez, objetivava alicerçar as ideias intuitivas de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866). Segundo Boyer e Merzbach (2011, p.570), a Topologia teria surgido no século XX como um tema que unifica quase toda a Matemática. A afirmação anterior se concretiza quando O'Connor e Robertson (1996) observam que as ideias topológicas estão presentes na maioria das subáreas da Matemática Moderna, complementam ainda que, historicamente, temos vários problemas (hoje categorizados em Topologia) provenientes de áreas como Geometria, Análise e Análise Funcional.

1.1 Topologia: primeiros passos

Um problema que talvez tenha sido o primeiro resultado topológico é o famoso "Problema das pontes de Königsberg", sendo diversas as teorias sobre seu surgimento.

Königsberg foi uma cidade da Prússia, região que corresponde ao que conhecemos hoje como a cidade de Kaliningrado na Rússia. O problema se baseava na geografia da cidade, que era atravessada por um rio sobre o qual existiam sete pontes, como ilustra a Figura 1.1[1].

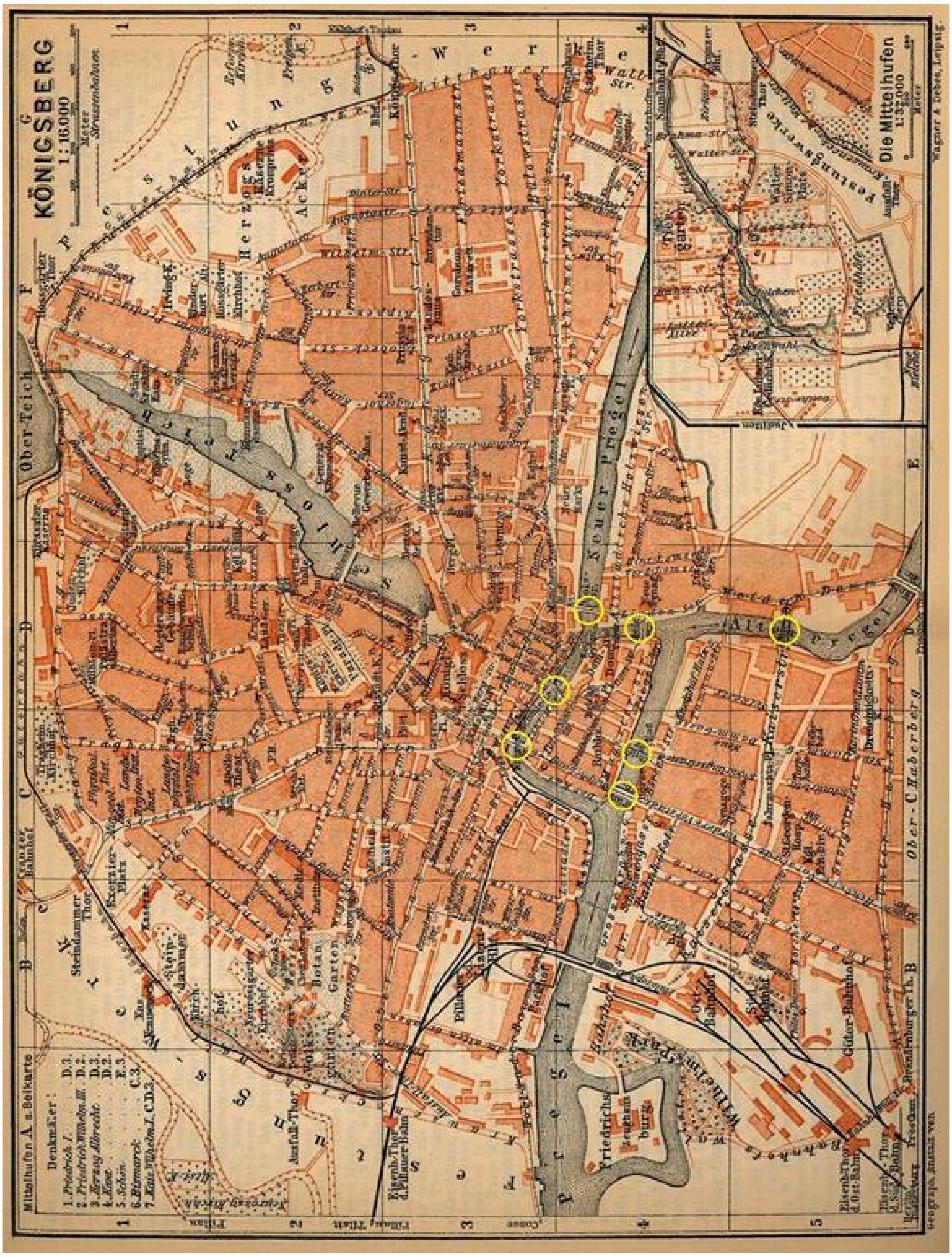


Figura 1.1: *Mapa da antiga Königsberg - Prússia (datado de 1910)*

[1]Fonte: http://mapas.owje.com/maps/10161_mapa -de-kaliningrado-konigsberg-rusia-1910.html

Na referida figura, as pontes são indicadas através de pequenas circunferências. A questão estava em descobrir se era possível fazer um passeio pela cidade de forma a atravessar uma única vez cada uma das sete pontes. O primeiro a fazer uma demonstração de que o problema era impossível foi o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), Figura 1.2, em 1736.

Figura 1.2: Leonhard Euler

Para entender como Euler resolveu o problema, vamos inicialmente interpretá-lo como no diagrama ilustrado pela Figura 1.3. Ele usou a notação AB para representar a travessia da área A para a área B, analogamente usou BA para representar a ligação de B com A, CD para a ligação entre C e D, e assim sucessivamente para cada um dos casos em que há ligação (ponte) entre duas áreas do diagrama.

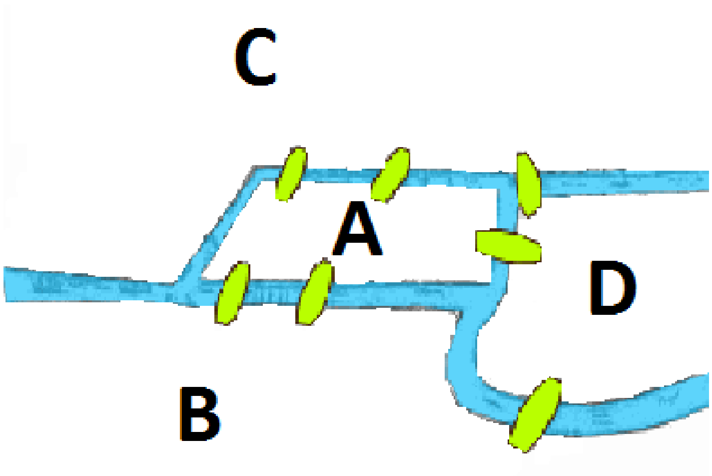


Figura 1.3: *Diagrama das pontes de Könignsberg*

Devemos agora definir o que entendemos por um caminho. Se saímos da área D para a área A e seguimos para a área C, temos um caminho denotado por DAC. Atentemos para o fato de que a posição de cada letra no caminho não é comutativa. Após observar que para representar n travessias é necessário utilizar $n + 1$ letras na representação do caminho, Euler percebeu que, para atravessar as sete pontes, precisaria de um caminho com oito letras. Ao observar o diagrama, como existem duas pontes ligando A e B, é indispensável que tais letras figurem lado a lado no caminho duas vezes. O mesmo acontece com A e C. As letras C e D deverão figurar apenas uma vez, assim como

B e D. Euler ainda observou que se o número n de pontes que dão acesso a uma determinada área é ímpar, então a sequência que representa o caminho deverá ter $\frac{n+1}{2}$ letras que designam áreas, caso o problema seja admissível.

Suponhamos que o problema tenha solução e o dividamos em partes, analisando cada área separadamente com as pontes que dão acesso a ela. Cinco delas dão acesso à área A, logo A deve aparecer $\frac{5+1}{2} = 3$ vezes na sequência que representa o caminho. Analogamente B, C e D devem aparecer, cada uma, duas vezes. Dessa forma, é necessário que tenhamos um caminho com $3(A)+2(B)+2(C)+2(D) = 9$ letras. Contradição, uma vez que, como observado anteriormente, o caminho para esse problema deveria ser representado por oito letras. Com isso, Euler demonstrou que o problema não possui solução.

Esta questão também pode ser atacada através da Teoria dos Grafos. O diagrama das Pontes de Königsberg na linguagem dos grafos se caracteriza como na Figura 1.4.

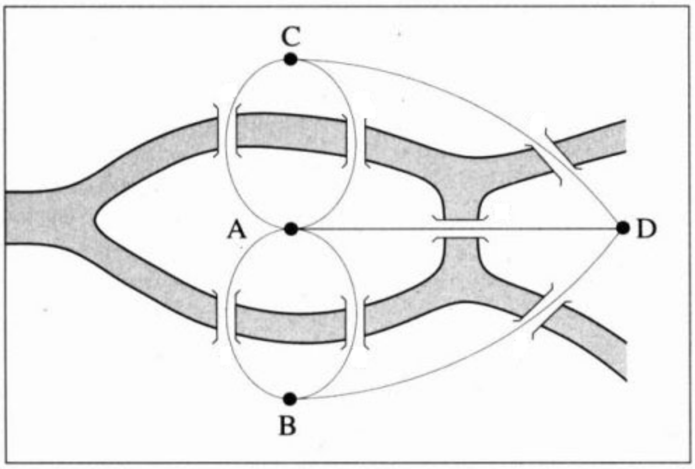


Figura 1.4: *Grafo relacionado ao Problema das Pontes de Königsberg*

Nessa linha, apresentamos em seguida, de maneira breve, uma solução do problema.

Definição 1.1 (Vértice)**.** *A cada um dos pontos nos quais se unem os caminhos, chamamos vértice do grafo. Designamos tais vértices pela mesma letra que nomeia a área a ele pertencente.*

Definição 1.2 (Grau de um vértice)**.** *O grau de um vértice é dado pelo número de caminhos que chegam a ele. Se um vértice recebe um número ímpar de caminhos, dizemos que seu grau é ímpar, e se um vértice recebe um número par de caminhos, dizemos que seu grau é par.*

Proposição 1.3. *Um grafo possui solução (admite um "Passeio de Euler") se todos seus vértices têm grau par ou possui exatamente dois vértices com grau ímpar.*[2]

[2]Uma demonstração da proposição 1.3 é apresentada por Costa (2011, p.26).

No caso do nosso problema, percebemos que o grafo possui quatro vértices com grau ímpar, logo ele não admite solução.

Em 1752, após uma publicação admitindo que não poderia provar a famosa fórmula para poliedros $v-e+f=2$, em que v é o número de vértices, e o número de arestas e f o número de faces, Euler publicou um segundo artigo no qual fazia uma demonstração para a fórmula assumindo que os poliedros eram convexos, de forma que uma linha reta que liga dois pontos sempre está no interior do poliedro. A partir de tal fórmula, em 1813, o matemático suíço Antoine-Jean Lhuilier (1750 - 1840) demonstrou que a fórmula de Euler não estava correta para "poliedros com buracos" e apresentou o primeiro invariante topológico conhecido. Considerando g o número de buracos no poliedro, Lhuilier provou que $v-e+f=2-2g$ (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996).

Apresentamos alguns dos principais pesquisadores que contribuíram para a construção da Topologia em termos mundiais.

1.2 Pesquisadores notáveis no desenvolvimento da Topologia

Caminhando pela História encontramos o alemão Johann Benedict Listing (1808 - 1882) (Figura 1.5) que, de acordo com O'Connor e Robertson (1996), foi o primeiro a utilizar a palavra "*Topologie*" (traduzida do alemão: Topologia) no primeiro texto sobre o assunto: *Vorstudien zur Topologie* (Estudos Preliminares sobre a Topologia - Figura 1.6), em 1847. Ele defendeu que era possível utilizar o termo *Topologie* no lugar do nome que Leibniz utilizava "*Geometria Situs*". Ainda acrescentou seu entendimento sobre o termo *Topologie* como as leis de conexão, de posição relativa no espaço e da sucessão de pontos, retas, superfícies *et cetera*, sem se preocupar com as questões relativas à medida e quantidade (LISTING, 1848, p.814). Apesar disso, o próprio Listing já havia feito uso de tal palavra em uma longa carta, em 1836, direcionada a um de seus antigos professores da escola Müller. O assunto foi tratado como "*Analysis Situs*" por vários anos

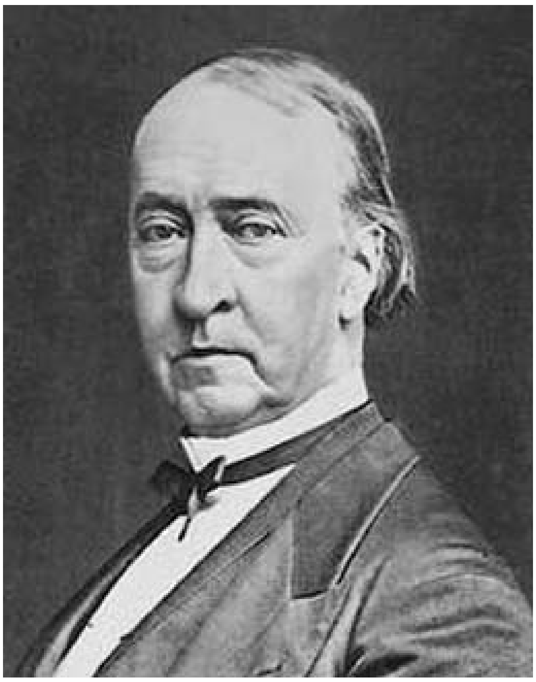
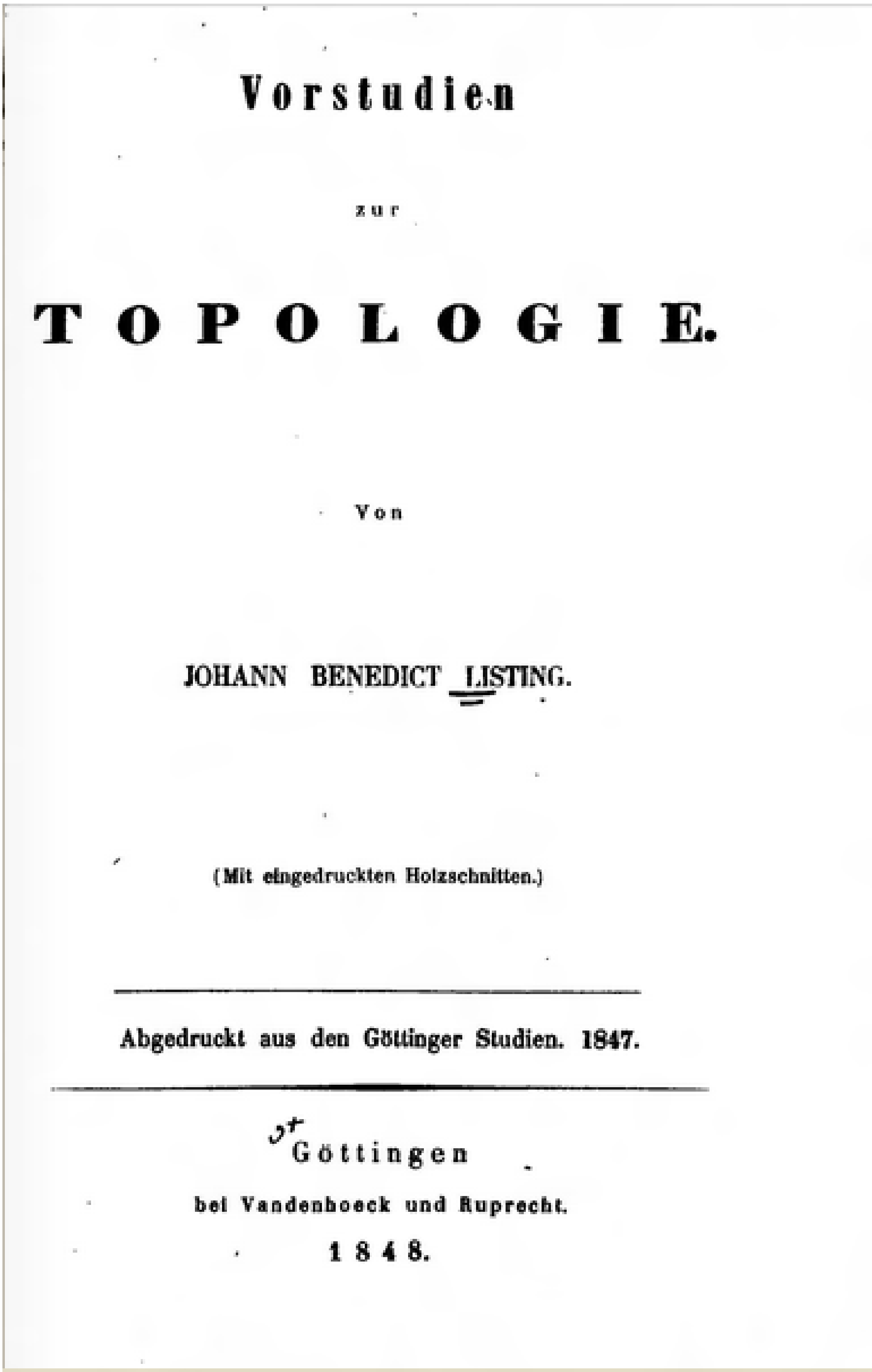


Figura 1.5: Johann Listing


Vorstudien

zur

TOPOLOGIE.

Von

JOHANN BENEDICT LISTING.

(Mit eingedruckten Holzschnitten.)

Abgedruckt aus den Göttinger Studien. 1847.

Göttingen

bei Vandenhoeck und Ruprecht.

1848.

Figura 1.6: *Capa de Vorstudien zur Topologie* e foi somente no final da década de 1920 que o matemático russo Solomon Lefschetz (1884 - 1972) utilizou a palavra inglesa "*Topology*".

August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), Figura 1.7, nasceu na Saxônia (atual Alemanha) e é responsável por um outro marco no desenvolvimento da Topologia: uma descrição, publicada em 1865, de uma superfície bidimensional com apenas um lado e não orientável que mais tarde ficaria conhecida como "Faixa de Möbius", ilustrada pela Figura 1.8[3]. A ideia usada por Möbius para traçar uma descrição de não orientabilidade da superfície por ele apresentada, consistia em tentar cobri-la com triângulos orientados, tendo descoberto que isso era impossível. Tal descoberta abriu campo para se pensar em propriedades mais gerais que ainda não haviam sido cogitadas.

Figura 1.7: August Möbius

O'Connor e Robertson (2000) destacam que Listing, em 1858, descobriu as propriedades da "Faixa de Möbius" quase que ao mesmo tempo e de forma independente de Möbius.

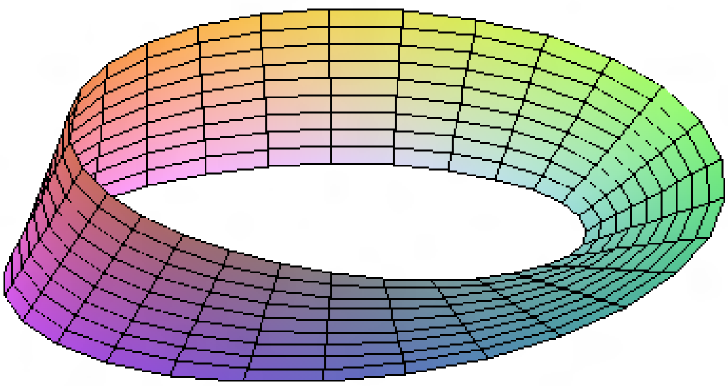


Figura 1.8: *Faixa de Möbius*

Analisando o início da Topologia fica claro que não podemos atribuir sua criação a apenas um homem. Apesar disso, é evidente que foi Poincaré (Figura 1.9), com a

[3]Construída com auxílio do software matemático Maple.

publicação de sua célebre série de artigos *Analisys Situs* em 1895, quem sistematizou e alicerçou as ideias intuitivas de Riemann[4].

Figura 1.9: *Jules H. Poincaré.*

A obra *Analysis Situs* (Figura 1.10), apresentava de forma rigorosa a ideia de conexidade e trazia consigo os conceitos de grupo fundamental e homotopia, a introdução do conceito de homologia e uma definição mais precisa dos números de Betti[5]. Como a obra *Analysis Situs* é um marco para a criação da Topologia Algébrica, O'Connor e Robertson (2003) afirmam que tal fato permite tratar Poincaré como fundador da Topologia Algébrica, que, em linhas gerais, pode ser entendida como o ramo da Topologia que estuda os espaços topológicos através de ferramentas da Álgebra.

[4]Em 1851, em seu trabalho de Doutorado que tratava da teoria das funções complexas utilizando conceitos topológicos, dando, dessa forma, pela primeira vez, um tratamento sistemático à Topologia.

[5]Mais informações sobre esses conceitos podem ser encontradas em Munkres (1975).

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ANALYSIS SITUS;

Par M. H. POINCARÉ.

INTRODUCTION.

La Géométrie à n dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de tout objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux.

Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir. C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles.

J. E. P., 2^e s. (C. n° 1). 1

Figura 1.10: *Primeira página da obra Analysis Situs (POINCARÉ, 1895)*

Enrico Betti (1823 - 1892), Figura 1.11, nascido em Pistoia, Toscana (hoje Itália), é muito conhecido por suas contribuições à Álgebra e à Topologia e, em 1871, publicou a definição do que hoje conhecemos por "números de Betti" (designação dada por Poincaré). Apesar dos estudos sobre Topologia Algébrica de Poincaré terem sido secundários, para que ele pudesse obter resultados para seu trabalho em Astronomia, foi ele quem permitiu um grande avanço à Topologia (um dos primeiros a contribuírem para a mesma) e despertou o interesse de vários matemáticos pela área.

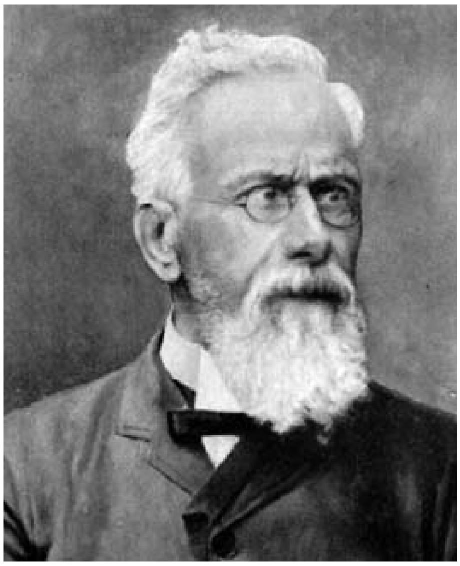


Figura 1.11: Enrico Betti

Figura 1.12: Maurice Fréchet

O matemático francês Maurice René Fréchet (1878 - 1973), Figura 1.12, mais do que introduzir os conceitos de "espaços métricos", foi capaz de estender o conceito de convergência no espaço euclidiano por meio de tal definição de espaço métrico. Fréchet fez grandes contribuições para a Topologia dos conjuntos discretos e fundou a "teoria de espaços abstratos".

Embora tenha sido introduzido por Fréchet, o termo espaço métrico é devido ao matemático Felix Hausdorff (1868 - 1942), Figura 1.13, nascido em Breslau, Alemanha (atual Wroclaw, Polônia). Tal matemático permitiu à Topologia um grande avanço em termos mundiais após a publicação, em 1914, do livro *Grundzüge der Mengenlehre* (Fundamentos da Teoria de Conjuntos), que foi a primeira publicação abrangente sobre esse assunto e que, além disso, trazia capítulos sobre

Figura 1.13: Felix Hausdorff

"teoria da medida" e Topologia. Katz (1998, p.818) afirma

> Foi Felix Hausdorff (1868 - 1942) quem conseguiu dar uma axiomatização completa da noção de um espaço topológico a partir de propriedades padrões de conjuntos dos números reais. Ele descreveu esta axiomatização em seu texto de 1914, Grundzüge der Mengenlehre [...]. (Tradução nossa).

A primeira parte do livro é uma exposição sistemática dos aspectos característicos da teoria dos conjuntos, na qual a natureza dos elementos não tem importância, ou seja, apenas as relações entre os elementos são importantes. Na segunda parte, é possível encontrar um desenvolvimento claro dos "espaços topológicos de Hausdorff" a partir de uma coleção de axiomas (BOYER; MERZBACH, 2011, p.570). James (1999) destaca que, para Hausdorff, um espaço topológico era entendido como um conjunto X de elementos x e vizinhanças U_x de x que satisfazem os seguintes axiomas:

i) *A cada ponto x corresponde pelo menos uma vizinhança U_x que contém o próprio ponto x;*

ii) *Se U_x e V_x são duas vizinhanças de um mesmo ponto x, então existe uma vizinhança W_x tal que W_x esteja contida em ambas, U_x e V_x;*

iii) *Se um ponto y pertence a U_x, então existe U_y contida em U_x;*

iv) *Para quaisquer dois pontos x e y existem U_x e V_y disjuntas.*

Segundo Boyer e Merzbach (2011, p.570), foi essa forma de definir as vizinhanças que permitiu a Hausdorff introduzir o conceito de continuidade.

Numa terminologia atual, temos:

Definição 1.4 (Topologia). *Seja K um conjunto não vazio. Definimos uma estrutura τ chamada topologia de K (ou sobre K) se τ atende às três propriedades:*

i) K e $\varnothing$ pertencem a K;

ii) A reunião qualquer de elementos de K é um elemento de K;

iii) A interseção finita de elementos de K é um elemento de K.

A estrutura τ pode ser entendida como uma família de subconjuntos abertos de K.

Definição 1.5 (Espaço topológico). *Na Definição 1.4 dizemos que o par (K, τ) é um espaço topológico. Geralmente, quando não há risco de confusão, o espaço topológico é referenciado com a indicação apenas do conjunto.*

Definição 1.6 (Espaço topológico de Hausdorff). *Um espaço topológico K é um espaço topológico de Hausdorff se para quaisquer elementos distintos x e y de K existem, contidas em K, vizinhanças disjuntas U_x e V_y de x e y, respectivamente, isto é, $U_x \cap V_y = \varnothing$.*

De acordo com Katz (1998, p.819), existiam três caminhos pelos quais se poderia basear uma teoria geral para espaços topológicos: as noções de distância, de vizinhança e de limite. Fréchet, por exemplo, utilizou os conceitos de distância e limite. Hausdorff percebeu que partindo da noção de distância, é possível definir as outras duas, enquanto que começando pela noção de vizinhança, só é possível definir limite. Em geral, contudo, não se podem inverter tais procedimentos. Apesar disso, o critério para a escolha, segundo Hausdorff (1914 *apud* KOESIER; MILL, 1999, p.214), é uma questão de gosto, e por isso ele decidiu começar com a ideia de vizinhança a partir da qual definiu espaço topológico.

Um segundo caminho pelo qual se desenvolveu a Topologia foi a generalização das ideias de convergência. Numa linguagem atual, podemos definir convergência da seguinte forma:

Definição 1.7. *Uma sequência infinita de pontos* $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ *de* X *é dita convergir para um ponto* x *de* X *se para toda vizinhança* U_x *existe um inteiro positivo* p *tal que* x_i *pertence a* U_x *para todo* $i > p$. *Notação:* $x_n \longrightarrow x$.

Para chegarmos nessa rigorosa definição, foi necessário percorrer um longo percurso, iniciado em 1817 com o padre tcheco Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 - 1848), Figura 1.14 (a), que desfez a associação entre convergência e sequência de números e associou convergência com qualquer subconjunto infinito limitado de números reais, e posteriormente com o matemático Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897), Figura 1.14 (b).

Figura 1.14: *(a) Bernard Bolzano (esquerda). (b) Karl Weierstrass(direita)*

Katz (1998, p.814) expõe que foi a partir dos estudos sobre números reais, do matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918), Figura 1.15, que houve um impulsionamento da Topologia Geral. Assim, o seu objetivo central era apresentar um contexto adequado generalizando tais propriedades dos números reais, como as propriedades de Bolzano-Weierstrass e de Heine-Borel[6]. Ambas proximamente relacionadas à importante e moderna noção de compacidade.

Figura 1.15: George Cantor

Cantor introduziu o conceito de "conjunto derivado" ou "conjunto de pontos limite", que depois passou a ser chamado "conjunto de pontos de acumulação"; também definiu subconjuntos fechados da reta real como subconjuntos contendo o conjunto derivado. Ainda, o conceito de conjunto aberto, também fundamental em Topologia, foi introduzido por esse matemático.

Em 1877, Weierstrass provou, numa sequência de palestras não publicadas, um teorema antes já abordado por Bolzano:

Definição 1.8 (Ponto de acumulação)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é dito um ponto de acumulação de X se em qualquer intervalo aberto centrado em p, existe pelo menos um elemento de X distinto de p.*

Teorema 1.9. *Um conjunto limitado contendo infinitos elementos possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Esse teorema garante a completude dos números reais. A demonstração deste resultado foi feita pelo próprio Bolzano, mas foi a obra de Weierstrass que o tornou familiar à comunidade matemática. Com sua demonstração, Weierstrass introduziu o importante conceito de vizinhança de um ponto.

Atualmente, nos cursos de Análise Matemática, é estudado um teorema que leva o nome de ambos, o "Teorema de Bolzano-Weierstrass". Na terminologia atual:

Definição 1.10 (Conjunto compacto)**.** *Um conjunto X é dito compacto se toda sequência (x_n) de X admite uma subsequência convergente $(x_{n_i}) \longrightarrow p$, onde $p \in X$.*

[6]Mais informações sobre estes pesquisadores são apresentadas por James (1999).

Teorema 1.11 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Um subconjunto X do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Ressaltamos, ainda, que Weierstrass normalmente não publicava suas ideias, mas elas foram difundidas por estudantes como Ferdinand Lindemann e Eduard Heine, que assistiram às suas aulas.

2 A Topologia Algébrica no Brasil

2.1 O curso de Matemática na criação da FFCL

No Brasil, um grande impulso ao desenvolvimento da Topologia ocorreu com a criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP – São Paulo/SP, que aconteceu, conforme apresenta Dias (1994, p.97), em 25 de janeiro de 1934, mesmo dia da criação da própria Universidade de São Paulo. O Professor Cândido Lima da Silva Dias assevera, sobre a importância da Criação da USP e da FFCL:

> [...] esse fato foi importantíssimo e não existe outro mais significativo na evolução científica brasileira. Está relacionado com a grande figura de seu criador - Armando de Salles Oliveira. Essa iniciativa foi inesperada. Eu era aluno da Escola Politécnica e, de vez em quando, ouvia falar sobre a viabilidade da fundação da USP. De repente, saiu o decreto constituindo a Universidade. E, dentro dela, uma novidade na vida acadêmica: a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. Tudo isso em consequência daquele ato governamental publicado em 25 de janeiro de 1934. [...] houve a decisão de enviar Teodoro Ramos à Europa – França, Alemanha e Itália – a fim de contratar professores para as disciplinas básicas da Faculdade de Filosofia. Como aconteceu isso em tão pouco tempo? Que outro fato tem um valor equivalente? Em resumo, a criação da USP e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras marcou o início de uma nova etapa na vida cultural do país. (DIAS, 1994, p.104)

Por ocasião de tal criação, foram contratados professores estrangeiros para que ministrassem as aulas. Um dos notórios professores foi Luigi Fantapiè (1901 - 1956), (Figura 2.1[1]), que teve papel fundamental na criação do curso de Matemática de nível superior. Dias (1994, p.100) destaca a respeito da importância da vinda de Fantapiè ao Brasil:

> A presença dos professores estrangeiros na fase pioneira da Faculdade de Filosofia foi decisiva, importante e renovadora. Fantapiè, por exemplo, introduziu no Brasil os cursos de Matemática, porque anteriormente, nas

[1]Fonte: <http://www.fantappie.it/>. Acesso em fez. 2014.

escolas politécnicas ou de engenharia, somente se ministrava a parte fundamental do Cálculo Infinitesimal. Fantapiè desenvolveu cursos inteiramente diferentes: teoria dos grupos, grupos contínuos, teoria dos números, formas diferenciais aplicadas à análise, análise tensorial (que se denominava, então, de cálculo absoluto, como ele dizia).

Segundo Dias (1994, p.98), Fantapiè, inicialmente, ministrou aulas de Cálculo Infinitesimal na Escola Politécnica (1934). Com a criação do curso de Matemática, um exame foi aplicado pelo próprio professor àqueles que gostariam de ingressar em tal curso, destacamos, dentre esses, Cândido Lima da Silva Dias[2] (1913 - 1998) (Figura 2.2[3]). Cinco foram os primeiros alunos a se formar, o que aconteceu em 1936 (a saber: Cândido Lima da Silva Dias, Fernando Furquim de Almeida, Carmello Damato, Francisco Antônio Lacaz Netto, Mário Schenberg e Julio Rabin) (CAVALARI, 2012, p.33). Fantapiè esteve responsável pelas Cátedras de Análise Matemática e de Geometria. Em 1936, veio ao Brasil o geômetra italiano Giácomo Albenese (1890 - 1948) (Figura 2.3[4]) que, então, assumiria a Cátedra de Geometria (LIMA, 2012).

Figura 2.1: Luigi Fantapiè

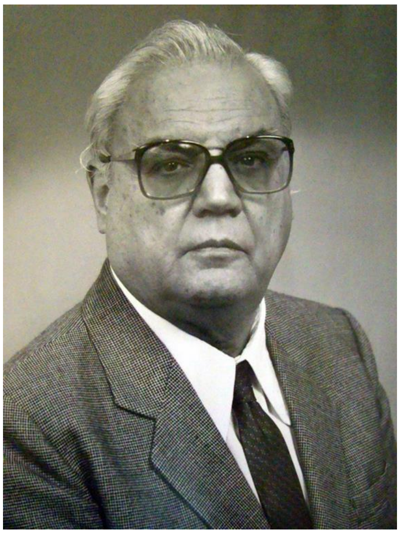


Figura 2.2: Cândido L. S. Dias

Com a eclosão da Segunda Guerra Mundial, em 1939, muitos dos professores estrangeiros regressaram aos seus países, incluindo Fantapiè, que, neste mesmo ano, retornou à Itália. Por essa razão, novos professores precisaram ser contratados, o que fez com que os departamentos precisassem absorver seus ex-alunos.

[2]Cândido havia ingressado na Escola Politécnica em 1932, seguindo os passos do pai, que era engenheiro e se formara lá. Por questões de vocação, Dias transferiu-se, sem que houvessem objeções por parte de seu pai, para a nova FFCL para cursar Matemática (DIAS, 1994, p.98).

[3]Fonte: <http://icmc.usp.br/Portal/conteudoDinamico.php?id_menu=946&id_menu_superior=329>. Acesso em fev. 2014.

[4]Fonte: (DIAS, 1994, p.101)

A Cátedra de Análise Matemática foi, em 1939, assumida por Omar Catunda[5] (1906 - 1986) (Figura 2.4), primeiro assistente de Fantapiè. Catunda havia se graduado em 1930 em Engenharia Civil pela Escola Politécnica de São Paulo. Como assistente, desenvolveu estudos na "Teoria dos Funcionais Analíticos" e, entre novembro de 1938 e março de 1939, desenvolveu estudos pós graduados em Roma[6] (SILVA, 2006, p.74). Em 1942, com o retorno de Albanese à Itália, a Cátedra de Geometria foi desdobrada em duas: a de Geometria Analítica, Descritiva e Projetiva e a de Complementos de Geometria a Geometria Superior, que ficaram, respectivamente, sob responsabilidade de Benedito Castrucci e Cândido Lima da Silva Dias – que havia sido nomeado segundo assistente de Fantapiè em 1932, quando tinha 23 anos[7]. Nesse mesmo ano, Dias concluiu seu doutoramento.

Figura 2.3: Giácomo Albasene

Cândido Dias dirigiu o Instituto de Ciências Matemática de São Carlos (ICMSC) da USP entre os anos de 1974 e 1978, período em que também se dedicou a lecionar na recém criada Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Mesmo após a aposentadoria, em 1978, continuou como docente na UFSCar. Em 1990, por motivos de uma lei federal, foi aposentado compulsoriamente em 1990.

Figura 2.4: Omar Catunda

Com a ascendência de Dias, em 1942, ao cargo de Catedrático[8], a vaga de auxiliar na Cátedra de Análise Matemática foi, então, atribuída a Edison Farah (1915 - 2006), que nela permaneceu até 1944. No ano de 1945,

[5]De acordo com Lima (2012), apesar de ter assumido a Cátedra em tal período, seu nome apenas deixou de constar como assistente após a realização de um concurso em 1944. Ainda, em 1939, Catunda foi nomeado chefe do Departamento de Matemática da FFCL.

[6]Catunda usufruiu de uma bolsa de estudos oferecida pelo governo Italiano, que foi conseguida por Fantapiè.

[7]Mais tarde, Cândido aperfeiçoou-se em Topologia nos EUA com Edwin Spanier e Henri Cartan.

[8]Dias destaca que não prestou concurso para livre-docência porque não havia grandes preocupações com isso naquela época, apenas em 1951 realizou o concurso para a Cátedra (DIAS, 1994, p.101).

assumiu como assistente a professora Elza Furtado Gomide (1925 - 2013) (Figura 2.5[9]).

Gomide ingressou no ensino superior em 1942, quando tinha apenas 16 anos, no curso de Física da FFCL da USP e, paralelamente a isso, cursou Bacharelado em Matemática, tendo obtido os títulos de graduada em Física e Matemática em 1944 e 1945, respectivamente (LIMA, 2012, p.441). Defendeu o Doutorado em 1950, sob orientação de Jean Frédéric Auguste Delsarte (1903 - 1968), tornando-se, então, a primeira mulher, em uma instituição brasileira, a receber o título de Doutora em Matemática. Em 1954, foi contratado para assumir o cargo de segundo auxiliar na Cátedra de Análise Matemática, para atuar ao lado de Gomide, o professor Carlos Benjamin de Lyra (1927 - 1974) (Figura 2.6). Ele regressara da França após assistir aos seminários de Cartan e às palestras de Hurewicz no *Collège de France*.

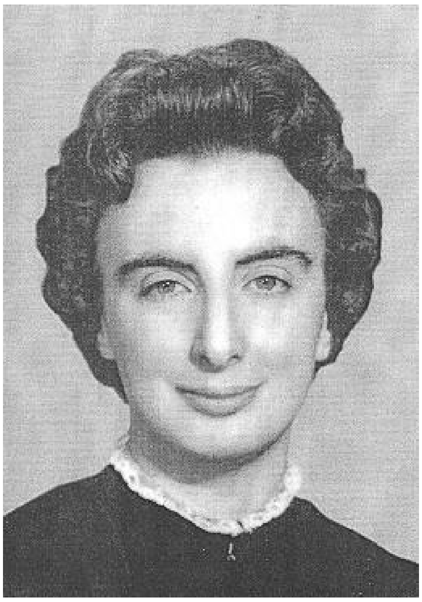


Figura 2.5: Elza F. Gomide

Nesse período, Gomide começou a questionar o oferecimento direto da disciplina Análise Matemática (sem um curso anterior de Cálculo), tendo, então, com o aval de Catunda, começado a direcionar a disciplina nesse sentido. O papel inicial do assistente era ministrar principalmente aulas de exercícios. Com a ida de Catunda aos EUA, Gomide e Lyra assumiram também algumas aulas teóricas, quando, de acordo com Lima (2012, p.134), Gomide passou a pensar em dar um direcionamento diferente à disciplina de Análise[10].

Figura 2.6: Carlos B. de Lyra

Segundo relatou Gomide, por ocasião de uma mesa redonda constituída para falar sobre as impressões do 1º Colóquio Brasileiro de Matemática (1º CBM - realizado em 1957 na cidade de Poços de Caldas/MG), foi grande a importância de Lyra para a Topologia, que, por sua vez, fora influenciado

[9]Fonte: (CAVALARI, 2012).

[10]Mais informações a respeito dessa reformulação podem ser encontradas em Lima (2012).

por Cândido Dias na escolha da Topologia Algébrica como campo de atuação. Nas palavras dela, "*talvez o Prof. Cândido tenha dado o primeiro curso de topologia algébrica no Brasil e esse curso teria influenciado muito o Lyra na escolha da carreira dele*" (GOMIDE, 2008, p.93). Devemos destacar que isso ocorreu em uma época em que não havia muito estudo sobre o tema no Brasil, de fato, percebemos isso no relato do professor Chaim Hönig (1926 -) (também participante da citada mesa redonda, organizador do 1º CBM) falando sobre uma conferência que havia proferido na reunião da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência realizada em Ouro Preto no ano de 1956[11]:

> Eu fiz uma conferência lá, e no fim da conferência, me fizeram um monte de perguntas sobre a chamada "matemática moderna" (topologia, álgebra etc.). Eu fiquei surpreso com esse interesse por essas áreas e, na volta, eu passei pelo Rio e falei com o Prof. Leopoldo Nachbin do interesse que havia e que eu achava interessante fazermos uma reunião de matemática, com certa duração - duas ou três semanas -, e que fossem dados cursos sobre essas disciplinas. E voltei pra São Paulo. O Prof. Nachbin imediatamente falou com o Prof. Couceiro no CNPq e cheguei em São Paulo e encontrei um telegrama informando que tinha sido aprovado 500 mil... (não sei qual a moeda da época) para o evento. Então a gente tocou as coisas pra frente.

2.2 A pesquisa em Topologia Algébrica

Um problema fundamental em Topologia é determinar quando dois espaços são homeomorfos, isto é, quando existe entre eles um homeomorfismo. Aliás, diversos pesquisadores da área colocam que as duas questões mais importantes em Topologia são as de extensão de funções e de classificação (por homeomorfismos ou por homotopias, por exemplo). Para a classificação por homeomorfismos, definimos uma relação de equivalência entre dois espaços topológicos X e Y por: X é equivalente a Y se, e somente se, são homeomorfos. Esse problema é atacado através de invariantes topológicos, que se caracterizam por propriedades que não se alteram por homeomorfismos. Um invariante topológico pode ser uma propriedade geométrica do espaço (conexão ou compacidade), um número associado a um espaço (característica de Euler), ou um sistema algébrico como um grupo, um anel ou um módulo (grupos fundamentais, de homotopia, de homologia e outros).

A "característica de Euler" ou "número de Euler" está ligada aos "números de Betti" de um espaço, assunto estudado pelo pesquisador italiano Achille Bassi (1907 - 1973).

[11] Quando se começou a idealizar o 1º Colóquio Brasileiro de Matemática.

Bassi, segundo D'Ambrosio (2008, p.78), após sua passagem por Princeton, que lhe possibilitou ter contato com o professor Solomon Lefschetz (1884 - 1972), levou "elementos modernos" à Matemática italiana, dentre os quais cita-se a Topologia Algébrica. Bassi foi contratado para atuar como geômetra na Faculdade Nacional de Filosofia - FNFi, juntamente com os analistas Gabrielle Mammana (1893 - 1942) e Alejandro Terracini, além do físico-matemático Luigi Sobrero. Com o advento da Segunda Guerra Mundial, os italianos regressaram ao seu país, porém Bassi foi obrigado a permanecer no Brasil em virtude de um mal súbito que acometera sua esposa (D'AMBROSIO, 2008, p.78). Dessa maneira, em meados da década de 1950, foi contratado para o Departamento de Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC - USP/São Carlos).

O Departamento de Matemática da EESC teve sua fundação em 1953. Em 1970, foi fundado dentro da EESC o Departamento de Ciências de Computação e Estatística, que, no ano seguinte, viria compor, juntamente com o Departamento de Matemática, o Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos (ICMSC), já desvinculado da EESC. Em 1998, por decisão da Congregação do ICMSC, o Instituto recebeu o nome atual: Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)[12].

Bassi foi o primeiro Professor Titular do Departamento de Matemática da EESC e o primeiro diretor do ICMC. Em sua homenagem, a Biblioteca do Instituto recebeu o seu nome. Na cátedra de Bassi, um dos assistentes era o professor Gilberto Francisco Loibel (1932 - 2013), um grande matemático que contribuiu imensamente para o desenvolvimento da Matemática, particularmente da Topologia, no Brasil. Esse fato pode ser observado, por exemplo, em sua vasta descendência científica. Em entrevista[13], Loibel informou que, apesar de ter sido formalmente orientando de Bassi uma vez que era assistente em sua Cátedra, teve como orientador não oficial o professor Carlos Benjamin de Lyra (1923 - 1974). Como pesquisador visitante na Universidade da Califórnia, em *Berkeley*, Loibel manteve contato com grandes pesquisadores em teoria de singularidades, os quais contribuíram para despertar o seu interesse pelo assunto. De volta ao Brasil, fundou o primeiro grupo de pesquisa nessa área e orientou um número expressivo de Mestrados e Doutorados em Teoria de Singularidades e em Topologia Algébrica e Diferencial.

Quanto às contribuições de Lyra para a Matemática, merece destaque o artigo "*Minimal Complexes and Maps*", publicado no Boletim da Sociedade de Matemática de

[12]Fontes: Histórico da criação da EESC <http://www.eesc.usp.br/portaleesc/index.php?option=com _content&view=article&id=33&Itemid=219> e Histórico da criação do ICMC <http://www.icmc.usp.br /Portal/conteudoDinamico.php?id_ menu=325&id_menu_superior=9>. Acesso: out 2012.

[13]Concedida a nós em 2012.

São Paulo em 1954. Nesse trabalho, ele responde negativamente ao clássico problema proposto por John Henry Constantine Whitehead (1904 - 1960), que havia questionado se um espaço dominado por um complexo finito poderia ter o mesmo tipo de homotopia que um complexo finito. Embora Charles Terence Clegg Wall[14] (1936 -) tenha desenvolvido uma teoria mais complexa de obstrução e tenha feito uma intensa formalização do assunto, os trabalhos de Lyra foram independentes aos de Wall, que veio os publicar no *Annals of Math*, datado de 1965 (Univ. de São Paulo, 1980)[15]. Na seção 4.4 será apresentada toda a produção acadêmica do Professor Lyra que está disponível na Biblioteca do IME da Universidade de São Paulo.

A Sala de Obras Raras "Benedito Castrucci" (parte da Biblioteca "Carlos Benjamin de Lyra", do Instituto de Matemática e Estatística (IME - USP/São Paulo)), dispõe de uma considerável coletânea com dados bio-bibliográficos de Lyra. Em 1974, ano de seu falecimento, foi dedicado à sua memória o quinto volume do Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, editorado por Peter Hilton (1923 - 2010) (amigo pessoal de Lyra). No editorial desse volume consta:

> Em vista da minha estreita associação com o professor Lyra, que remonta há muitos anos, fui convidado pelos professores Jacy Monteiro e Chaim Hönig para atuar como editor desta edição especial do Boletim dedicado à memória de Lyra. Estou honrado em ter sido considerado apto a executar essa tarefa ao meu falecido amigo. (HILTON, 1974, p.115 - tradução nossa).

Ainda sobre a citada biblioteca no IME, de acordo com seu ex-aluno e amigo, Carlos Alberto Barbosa Dantas[16], Lyra desenvolveu uma pesquisa, inclusive com o uso de revistas estrangeiras, para que o prédio da nova biblioteca pudesse favorecer a consulta e o estudo, dessa forma, tal pesquisa permitiu que essa biblioteca fosse pioneira, tendo sua estrutura física especialmente pensada e moldada como uma biblioteca, enquanto que as demais apenas aproveitavam espaços livres já existentes.

[14]Bastante conhecido como "C. T. C. Wall".
[15]Falaremos sobre tais obras na Seção 4.4.
[16]Em entrevista concedida a nós em 2012.

3 Carlos B. de Lyra: vida pessoal e acadêmica

3.1 Família e viagem ao exterior

Carlos Benjamin de Lyra, nascido em 23 de novembro de 1927, na cidade de Recife-PE, teve uma família peculiar. Paternalmente, descendia de uma família de usineiros, embora o próprio pai, Carlos de Lyra Filho, Figura 3.1, fosse um jornalista que gozava de alta posição social como diretor e proprietário do jornal "Diário de Pernambuco". A mãe, Elizabeth Lau de Lyra, segunda esposa de Carlos, Figuras 3.1 e 3.2, era de origem alemã e viera ao Brasil juntamente com sua família, que também tinha envolvimento com negócios relativos à produção de açúcar. Elizabeth deu a Carlos dois herdeiros, além de outros, frutos da união com sua primeira esposa.

Figura 3.1: *Carlos de Lyra Filho e Elizabeth Lau de Lyra*

Figura 3.2: *Elizabeth e Carlos Benjamin de Lyra*

O casamento entre Carlos e Elizabeth foi arranjado justamente por essa proximidade nos negócios, conta a neta do casal Sylvia de Lyra[1], que ressalta também que a permissão foi dada pelo fato de ambas as famílias serem católicas. Ainda nas palavras de Sylvia, após o falecimento de Carlos, Elizabeth casou-se novamente com um corretor da Bolsa de Valores da *Wall Street*, o americano Paul Nortz. Novamente um casamento permitido pela proximidade religiosa entre ambos. Com o novo casamento – provavelmente em 1936 – Elizabeth mudou-se para os EUA com Paul levando seus dois filhos, Lyra (que então tinha 8 anos) e o caçula, George, Figura 3.3.

Lyra naturalmente passou a frequentar escolas americanas. Um fato curioso, relatado pelo filho Jorge de Lyra[2], foi o episódio no qual o pai, durante uma aula, numa escola católica na qual estudou, mencionou não ser adepto dos pensamentos religiosos do professor que o instruía na ocasião. O professor, por esse motivo, proferiu palavras de humilhação a Lyra. Mas o episódio não ficou sem resposta. O padrasto Paul com-

[1]Em entrevista concedida a nós em 2012.
[2]Em entrevista concedida a nós em 2012.

Figura 3.3: *Carlos Benjamin de Lyra (à direita) e o irmão caçula George*

pareceu posteriormente à escola e exigiu que ela se retificasse, sob a alegação de que uma instituição desse tipo, num estado laico, não poderia ter tido tal postura. Lyra sempre foi um bom aluno e, após frequentar a *Iona High School*[3] em New Rochelle (New York), entre os anos 1939 e 1945, formou-se obtendo o conceito final *summa cum laude*[4].

De acordo com o amigo Peter Hilton (1974, p.115), foi por volta dos 15 anos de idade que Lyra teve contato com o célebre pesquisador matemático fundador do *Institute of New York University*, Richard Courant (1888 - 1972), durante viagens frequentes de trem do subúrbio, onde residiam, para *New York*. Conjecturamos que Courant tenha percebido o potencial de Lyra e, em razão disso, tenha o levado a conhecer mais intimamente a Matemática.

[3]Uma escola para rapazes que, ainda hoje, desenvolve suas atividades. Página eletrônica da Instituição: <http://www.ionaprep.org/>.

[4]Com honraria máxima.

3.2 O retorno ao Brasil

Após o término do *High School*, segundo a filha Sylvia[5], Lyra deveria, caso optasse pela cidadania americana, servir ao Exército dos EUA, e assim poderia dar continuidade aos seus estudos em nível superior (uma vez que já teria sido aceito por renomadas universidades americanas, dentre as quais destaca-se a *Yale University*). De acordo com seu filho, Jorge Lacerda de Lyra[6], a sua relação com Brasil, que era bastante forte, o fazia desejar um retorno. Isso realmente aconteceu em novembro de 1945, após o fim da Segunda Guerra Mundial e antes de completar dezoito anos, o que aconteceria no dia 23 do mesmo mês.

Após optar pela cidadania brasileira, Lyra conseguiu um certificado de alistamento militar[7]. Inicialmente, ele foi levado para a antiga propriedade da família, em Pernambuco, onde ficou sob tutela do irmão (paterno) mais velho, Christiano de Lyra, e, posteriormente, a São Paulo, onde viveu com um advogado amigo da família, chamado Manuel Tavares[8].

Na capital paulista, Lyra começou a frequentar, no ano de 1946, as aulas na antiga Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), onde conheceu os matemáticos franceses André Weil (1906 - 1998) e Jean Dieudonné (1906 - 1992). No ano seguinte, ingressou no curso de Graduação em Matemática da FFCL, onde teve aulas com o professor Cândido Lima da Silva Dias (1913 - 1998), na disciplina Topologia Algébrica. Com isso, teve despertado um grande interesse pela área da Matemática tratada por Cândido, que o levou a escolher a Topologia Algébrica como subárea de pesquisa. Em seu trabalho de Doutoramento, defendido em 1958, cujo orientador foi o próprio Cândido, ele afirma:

> [...] desejamos expressar ao prof. Candido Lima da Silva Dias, o nosso reconhecimento pela maneira como incentivou e acompanhou este trabalho. Lembramos com prazer ter sido um curso seu, ministrado em 1950, que despertou em nós o interesse pela Topologia Algébrica.

Terminou sua Graduação em 1950, foi considerado como um aluno brilhante.

[5]Em entrevista concedida a nós em 2012.
[6]Em entrevista concedida a nós em 2012.
[7]Em entrevista, Sylvia relatou que Lyra não se alistou de fato, apenas conseguiu o certificado.
[8]Nesse período, também residiu na casa de Manuel o jovem carioca Jorge Leal Ferreira que estudava Física.

3.3 Viagem para a França e Casamento

Em 1951, Lyra (Figura 3.4) foi para a França cursar o que talvez possamos chamar de Pós-Graduação. Lá, participou dos seminários do matemático francês Henri Paul Cartan (1904 - 2008) sobre espaços fibrados e, também, em 1953, assistiu às palestras do matemático russo Witold Hurewicz (1904 - 1956), no *Collège de France* sobre homotopia. É interessante destacar que Hurewicz fez grandes contribuições para a Topologia Algébrica, principalmente acerca de grupos de homotopia de graus elevados, pois foi o contato com esse pesquisador que o levou a estudar a teoria de Borsuk para espaços ANR[9] os quais, posteriormente, vieram a ser objetivos de seu trabalho de Doutoramento intitulado "Sobre os espaços de mesmo tipo de homotopia que o dos poliedros".

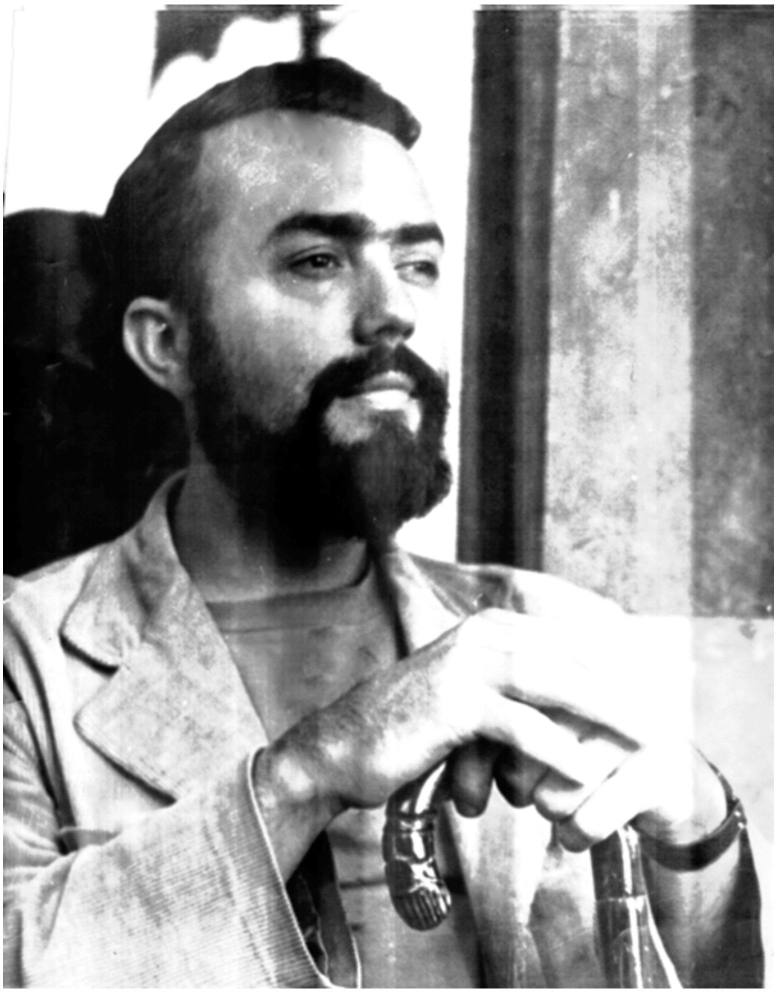


Figura 3.4: *Carlos Benjamin de Lyra*

Nesse mesmo período em que esteve na França, Lyra conheceu a carioca Leda Lacerda, Figura 3.5, que, após graduar-se em Física na Faculdade Nacional de Filosofia,

[9]Uma definição para *absolute neighborhood retract* (ANR) pode ser encontrada em (MUNKRES, 1975, p.221)

embarcara para Europa com o intuito de desenvolver estudos em um Instituto europeu de Física. Nessa estadia na Europa, o casal uniu-se e passou a viver no *Hotel des Grands Hommes*, em Paris (Figura 3.6).

Figura 3.5: *Carlos Benjamin de Lyra e Leda Lacerda de Lyra (Paris)*

Figura 3.6: *Hotel des Grands Hommes, Paris*

Em 1953, grávida do primeiro filho, Leda voltou ao Brasil, pouco tempo depois, Lyra a seguiu. No Brasil, o casal comemorou o casamento na casa de um amigo, o artista plástico Maurício Segall. O primeiro filho nasceu em 1954 e deveria receber o nome George, em homenagem ao irmão mais novo de Lyra, conforme relata o próprio filho Jorge[10]. Contudo, por um mal entendido, o menino recebeu o nome Jorge Lacerda de Lyra (em homenagem ao amigo Jorge Leal Ferreira, que viveu com Lyra na casa de Manuel Tavares). Em 1956, nasceu o segundo filho do casal, Sylvia Lacerda de Lyra, e em 1958, o terceiro e último, Eduardo Lacerda de Lyra, Figura 3.7. Jorge e Sylvia formaram-se na USP de São Paulo em Física e Sociologia, respectivamente. Eduardo faleceu aos doze anos de idade em um trágico acidente em uma praia.

Figura 3.7: *Sylvia, Eduardo e Jorge (filhos de Leda e Lyra)*

3.4 Vida acadêmica

Em 1954, como já citado, Lyra foi contratado pela FFCL para, juntamente com a professora Elza Gomide, exercer o cargo de Professor Auxiliar junto à Cátedra de Análise Matemática que estava sob regência do Professor Omar Catunda[11]. Lyra ocupou esse cargo até 1958.

Em 1952, o CNPq criou o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) no Rio de Janeiro. Silva (2004) explica que as atividades foram iniciadas com Lélio Gama (1892 - 1981) (Diretor do Observatório Nacional) como Diretor, Leopoldo Nachbin (1922 - 1993) (Professor do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF) e Maurício

[10]Em entrevista concedida a nós em 2012.

[11]Que foi um dos cinco primeiros Catedráticos brasileiros de Matemática. A saber, os outros quatro foram Cândido Lima da Silva Dias, Fernando Furquim de Almeida, Edison Farah e Benedito Castrucci (SILVA, 2000, p.9).

Matos Peixoto (1921 -) (Professor da Escola de Engenharia da Universidade do Brasil) como Pesquisadores Titulares e Paulo Ribenboim (1928 -) (Professor da Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil) e Luiz Henrique Jacy Monteiro (1921 - 1975) (FFCL - USP) como Pesquisadores Assistentes. A estada de Jacy Monteiro como pesquisador no IMPA durou pouco tempo, de forma que foi, então, substituído por Lyra, embora, conforme Silva (2004), sua estada no IMPA também não tenha sido duradoura.

Sob influência do professor visitante da USP, o alemão Alexander Grothendieck (1928 -), Lyra foi introduzido na teoria da cohomologia com valores em feixes, ampliando sua atuação na área da Topologia. Grothendieck influenciou também, dentre outros, Chaim Hönig e José de Barros Neto na área de Análise Funcional. Em uma carta a Lélio Gama, ele teria dito que estava recebendo colaboração de Grothendieck e Cândido Dias e que precisava de resultados de Topologia Algébrica em suas pesquisas (SILVA, 2004, p.44). Em 1956, também manifestou interesse por operações cohomológicas e sistemas Postnikov após participar do *International Symposium on Algebraic Topology*, realizado na Cidade do México. Nesse mesmo ano, Lyra passou a organizar um seminário semanal sobre Topologia Algébrica, objetivando que fossem discutidos os tópicos mais importantes da área. Segundo Lima (2012, p.443), participaram de tais seminários, além de professores, discentes que futuramente viriam compor o quadro docente de diversas universidades no país. Destaca ainda:

> A iniciativa de Lyra de realizar estes seminários foi bastante importante porque, por meio dela, muitos professores estrangeiros foram convidados para virem ao Brasil e darem cursos e palestras (LIMA, 2012, p.443)

Entre 1957 e 1958 realizou a pesquisa da qual resultou sua trabalho de Doutoramento, defendida no final de 1958, que teve como banca examinadora seu orientador Cândido Lima da Silva Dias e os professores Leopoldo Nachbin, Chaim Samuel Hönig, Edison Farah e Omar Catunda. Em 1959, ministrou no IMPA a "Conferência sobre os espaços do mesmo tipo de homotopia".

No ano de 1961, juntamente com sua esposa e filhos, Lyra foi para New Jersey, onde visitou, com bolsa da *Rockfeller Foundation*, o *Institute for Advanced Studies* de Princeton. Lá, continuando sua pesquisa, participou dos seminários de Norman Earl Steenrod (1910 - 1971), quando ampliou seus conhecimentos sobre operações cohomológicas e, com orientação de John Willard Milnor (1931 -), desenvolveu estudos em Topologia Diferencial.

A fotografia apresentada pela Figura 3.8 foi tirada por ocasião do Concurso de Livre-Docência de Gilberto Loibel, da qual Lyra compôs a Banca Examinadora. Na fotografia, aparecem da esquerda para a direita Lyra, Cândido Dias, Gilberto Loibel, Chaim Hönig e Nelson Onuchic (1926 - 1999).

Figura 3.8: *Banca de Livre-Docência de Gilberto F. Loibel*

Em 1965, Lyra também participou da Comissão Examinadora de Doutorado[12] de Mário Tourasse Teixeira (1925 - 1993), presidida por Edison Farah, ao lado de Newton Carneiro Affonso da Costa (1929 -), Artibano Micali (? - 2011) e Benedito Castrucci.

De acordo com os entrevistados[13] Carlos Alberto Barbosa Dantas, Jorge e Sylvia de Lyra e Gilberto Loibel, deve-se destacar o grande interesse político de nosso pesquisado. Tal interesse talvez justifique seu grande desejo de retornar ao Brasil depois de terminar o *High School* nos EUA. Após o retorno, chegou a fazer parte de um dos partidos socialistas. Carlos Dantas afirma que, enquanto aluno e depois colega, aprendeu muito com Lyra.

Tecemos tais considerações neste ponto, pois elas são importantes quando observamos que, apesar da bolsa concedida pela *Rockfeller Foundation* ter duração de dois

[12]Título do trabalho: $M-$Álgebras.
[13]Entrevistas concedidas a nós em 2012.

anos, sua decisão de regressar ao Brasil se deu na metade desse tempo. Um dos motivos teria sido a notícia sobre uma herança que recebeu pela venda da antiga propriedade da família em Pernambuco. Porém, a esposa Leda[14] revela que a principal razão era a insegurança e talvez o medo de não ter seu regresso permitido ao país. Medo esse que se repetia a cada viagem ao exterior. Tal sentimento foi tão forte que a viagem feita a *Princeton* foi a última vez que ele saiu do país.

Após regressar ao Brasil, Leda ainda relata que ele não quis mais viver na antiga casa da família, que por ocasião estava alugada. Dessa maneira, fazendo uso da herança recebida, Carlos decidiu adquirir um novo imóvel, o qual era situado em São Paulo, na Vila Mariana, e que possuía aproximadamente seiscentos metros quadrados de área construída, divididos em três pavimentos (Figura 3.9[15]). Nas palavras de Leda, essa foi "a casa do professor Lyra", talvez pelo fato de se assemelhar com a grandiosa residência na qual vivera em Pernambuco com os pais durante parte de sua infância. Apesar de ainda possuir tal imóvel, nos dias atuais a família não mais reside nele.

Figura 3.9: *Casa de Lyra na Vila Mariana, São Paulo*

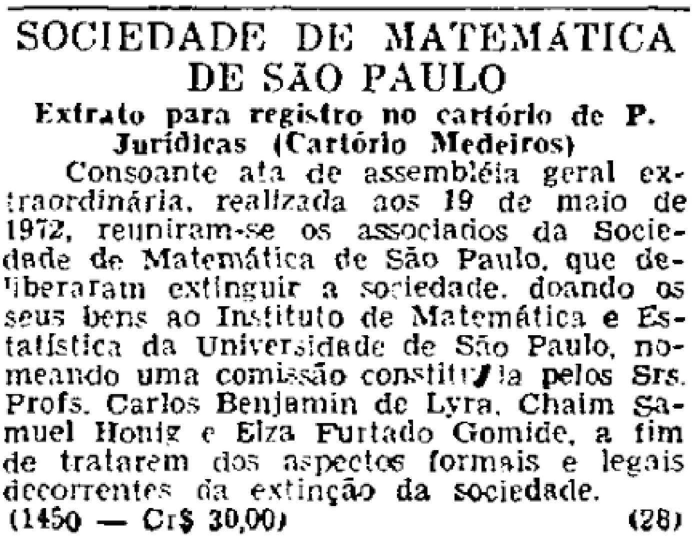
No ano de 1963, foi conduzido como responsável pela regência do curso noturno na Cadeira de Análise Matemática do Departamento de Matemática da USP (Univ. de São Paulo, 1980), posição que ocupou até 1970. Devemos destacar o grande empenho que houve nesse período, por um grupo de acadêmicos, o qual teve como uma das figuras centrais o professor Lyra. Tal empenho culminou com a criação do Instituto

[14] Em entrevista concedida a nós em 2012.

[15] As duas fotografias apresentadas têm data mais recente e foram fornecidas pela filha de Lyra, Sylvia. A casa, apesar de ainda pertencer à família, teve parte da fachada descaracterizada pelos atuais moradores.

de Matemática e Estatística (IME) da USP em janeiro de 1970. Nesse mesmo ano, o referido estudioso foi para o IME e teve seu contrato prorrogado até 1972. A partir de 1972, foi, então, contratado como Professor Colaborador em Regime de Dedicação Exclusiva na Instituição.

No ano de 1966, Lyra presidiu a Sociedade de Matemática de São Paulo (Univ. de São Paulo, 1980), a qual, na época de sua extinção, teve uma nota publicada no Diário Oficial do Estado de São Paulo (Figura 3.10).


SOCIEDADE DE MATEMÁTICA DE SÃO PAULO

Extrato para registro no cartório de P. Jurídicas (Cartório Medeiros)

Consoante ata de assembléia geral extraordinária, realizada aos 19 de maio de 1972, reuniram-se os associados da Sociedade de Matemática de São Paulo, que deliberaram extinguir a sociedade, doando os seus bens ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, nomeando uma comissão constituída pelos Srs. Profs. Carlos Benjamin de Lyra, Chaim Samuel Honig e Elza Furtado Gomide, a fim de tratarem dos aspectos formais e legais decorrentes da extinção da sociedade.

(1450 — Cr$ 30,00) (28)

Figura 3.10: *Diário Oficial (SP) de 28 de junho de 1972*

A Sociedade supracitada fora dissolvida para a criação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), em 1969, da qual Lyra foi um dos fundadores, ele foi eleito um dos quatro conselheiros cujos mandatos duraram até 1972. Os outros conselheiros eleitos foram Elon Lages Lima (IMPA), José Ubyrajara Alves (UFC) e Maurício Matos Peixoto(IMPA). A diretoria da SBM tinha Chaim Samuel Hönig como Presidente, Renzo Angelo Antonio Piccinini como Secretário Geral e Alberto de Carvalho Peixoto Azevedo[16] como tesoureiro. Com a partida de Piccinini ao exterior, o cargo de Secretário Geral foi ocupado por Lyra, deixando vago um dos cargos de conselheiro. Em 1971, por ocasião do 8º CBM, foram eleitos novos presidente, secretário geral, tesoureiro e Conselho Diretor composto por cinco membros (Lyra, cujo mandato expiraria em um ano e outros quatro com mandatos de dois anos) (SBM, 1970).

Em 1968, após a elaboração e defesa do trabalho intitulado "H-Equivalência de grupos topológicos", obteve o Título de Livre-Docente na Cadeira de Complementos de Geometria e Geometria Superior pela FFCL. No ano de 1970, e também em 1972, Lyra foi eleito representante da categoria dos Livre-Docentes junto à Congregação do

[16]Fonte: Histórico da fundação da SBM: <http://www.sbm.org.br/quemsomos_fundacao.asp>.

IME por dois mandatos consecutivos, além de membro do Conselho do Instituto de Pesquisas Matemáticas da USP. No mês de maio de 1970, foi indicado pelo CNPq como professor conferencista. Quatro anos depois, em 1974, preparou e entregou seu Memorial para o concurso de Professor Adjunto do IME. Gilberto Loibel[17] destaca que Lyra deveria tê-lo feito muito antes. Reconhece ainda, que Lyra muito se empenhava e se dedicava ao que fazia, entretanto sem se importar muito com formalidades, daí a demora para entregar o documento. Após efetuá-la, foi hospitalizado e, por tal motivo, houve uma convocação para que o concurso fosse feito com urgência. Loibel esteve presente na comissão que o aprovou como Professor Adjunto do IME em 1974.

Segundo Sylvia e Jorge[18], os homens da família Lyra tinham pouca expectativa de vida, o que se confirma com a morte do pai e de um se seus irmãos. Curiosamente, por isso, Lyra costumava dizer aos amigos que morreria cedo, assim aconteceu. Com 46 anos, em 1974, depois de se sentir mal e permanecer internado por quatro dias, os médicos diagnosticaram um tumor cerebral. Em seguida, consoante o relato de Leda, seu marido voltou para casa com a condição de que teria que voltar ao hospital três dias depois. Isso apenas lhe deu tempo de terminar um artigo que ainda estava em seu escritório e que lá deixou. Após esse episódio, Lyra veio a óbito, e o artigo que deixara pronto foi levado por Peter Hilton à Inglaterra, tendo publicação solicitada. Identificamos tal trabalho sob o título *SHM-maps of CW-groups* (falaremos mais a respeito dessa publicação na Seção 4.4.13).

[17] Em entrevista concedida a nós em 2012.
[18] Em entrevistas concedidas a nós em 2012.

4 Carlos B. de Lyra: influência e produção científica

Durante sua vida acadêmica, Lyra desenvolveu importantes trabalhos, que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática em nosso país e que, muitas vezes, serviram como ponto de partida para novas pesquisas. Além disso, não se pode ignorar também a contribuição feita por Lyra à Topologia Algébrica no que concerne ao fato de nosso pesquisado ter sido uma espécie de modelo a estudantes, assim influenciando provavelmente alguns deles a seguir no campo de pesquisa da Matemática, especialmente em Topologia Algébrica. Podemos verificar tais afirmações em vários pontos dos depoimentos de Carlos Dantas, Loibel e Daciberg[1].

4.1 Influência Científica de Lyra

O professor Lyra, de acordo com declarações de Loibel[2] e de nossas inferências ao analisar sua trajetória acadêmica, foi um homem extremamente dedicado ao seu trabalho (pesquisa e docência) em Matemática. Apesar disso, não mantinha preocupações, como já destacamos, com formalidades, como exemplo, sua tardia inscrição em um concurso para Professor Adjunto. Nesse ponto, é interessante destacar que oficialmente não conhecemos nenhum orientado de Pós-Graduação, o que reflete no fato de que Lyra não possui "descendência acadêmica"[3] formal. Dessa forma, nos limitaremos a apresentar os nomes de dois pesquisadores que, declaradamente, foram fortemente influenciados por Lyra na escolha de suas carreiras acadêmicas: os professores Daciberg Lima Gonçalves e Gilberto Francisco Loibel.

De acordo com Hilton (1974, p.120), entre 1962 e 1973, Lyra influenciou enormemente o desenvolvimento da Matemática brasileira através da vinda de vários matemáticos estrangeiros ao Brasil, a seu convite, para atuarem como professores visitan-

[1]Em entrevistas concedidas a nós em 2012.

[2]Em entrevista concedida a nós em 2012.

[3]Uma definição completa sobre o termo pode ser encontrada em (COONCE, s.d) e (CAVALARI, 2012, p.23).

tes ou tomar parte dos seminários semanais idealizados pelo próprio Lyra. Dentre eles, destacam-se Benson Brown (pesquisou sobre a teoria da homotopia), Peter Hilton (*Cornell University* – tratou sobre a teoria geral de cohomologia e K-teoria), Liulevicius e Robert Wells (*California University*), John Hubbuck (*Oxford University* – K-teoria para espaços de Hopf) e U. Sutter. Hilton ainda destaca que a influência de Lyra não se restringiu à Topologia Algébrica e cita a vinda do professor Alfredo J. Rodrigues a São Paulo para ensinar Álgebra. Lyra esteve ainda em papel destacado em vários acontecimentos importantes no Brasil, dentre eles, citamos sua participação no comitê que elaborou a proposta para a Reforma Universitária, tendo sido, posteriormente, um promotor entusiástico e incansável da reforma[4] (HILTON, 1974, p.120).

Loibel destacou que o sistema em vigência na época apenas permitia que o Professor Auxiliar de certa Cátedra fosse orientado (ao menos de modo oficial) pelo Professor responsável por tal Cátedra (o Catedrático). Loibel era auxiliar de Achille Bassi, contudo, afirma que seu grande mentor foi Carlos Benjamin de Lyra e, ainda, completa que aprendeu mais com ele do que com qualquer outra pessoa ou em qualquer outro curso feito, mesmo no exterior. O professor Daciberg[5], quando questionado se teria sido influenciado por Lyra, respondeu afirmativamente e deixou claro em suas palavras a relação mentor/aluno bastante forte que mantiveram. Tanto Loibel quanto Daciberg se tornaram grandes expoentes na área de Matemática no Brasil, especialmente em Topologia Algébrica. Destaque também deve ser dado a outros dois alunos de Lyra, Nelo Allan e Renzo Piccinini, que se tornaram matemáticos proeminentes.

4.2 Gilberto Francisco Loibel

Gilberto Francisco Loibel, Figura 4.1, nasceu na cidade de São Paulo/SP, em 24 de maio de 1932. Desenvolveu seus estudos primários e parte dos secundários na Alemanha. Após esse período, em razão da Segunda Guerra Mundial, seus pais decidiram retornar ao Brasil, onde Loibel pode concluir seus estudos secundários na cidade de Jundiaí/SP. Após prestar concurso vestibular para o curso de Matemática da FFCL, no qual foi aprovado em primeiro lugar, iniciou a Graduação em 1952; obteve o título de bacharel quatro anos depois, em 1955. (SILVA, 2006, p.79); (TAFARREL, 2013).

Logo após o término dos estudos em nível de Graduação, em 1956, Loibel[6] iniciou atividade como Instrutor na Cadeira de Geometria na EESC. No mesmo ano, começou a assistir (até 1959) aos Seminários de Pós-Graduação ministrados por Carlos Benja-

[4]Um dos resultados de tal reforma foi a criação do Instituto de Matemática e Estatística (IME–USP).

[5]Em entrevista concedida a nós em 2012.

[6]Segundo informações concedidas a nós pela Seção de Pós-Graduação do ICMC em 2012.

min de Lyra na FFCL e também aos seminários de Geometria Algébrica proferidos pelo professor Jacy Monteiro. Segundo Loibel[7], foi através dos seminários ministrados por Lyra que ele optou por focar seus estudos na área de Topologia Algébrica. Essa escolha ocorreu, segundo relata, primeiro devido à forma como Lyra preparava suas aulas, com esmero e atenção, mas também pela forma contagiante com que ensinava. Após completar oitenta anos, avaliou que nunca aprendeu tanto quanto nos referidos seminários.

Loibel também participou dos seminários oferecidos por Achille Bassi, Ubaldo Richard (1915 - 2004) e Jorés Cecconi (1917 -) na EESC. Em 1959, com o trabalho intitulado "Sobre Quase-Grupos Topológicos e Espaços com Multiplicação", conquistou o título de Doutor em Ciências (Matemática) outorgado pela EESC. Embora Achille Bassi figure oficialmente como seu orientador nos documentos, uma vez que era o Catedrático, afirma categoricamente que, na verdade, foi orientado pelo professor Lyra.

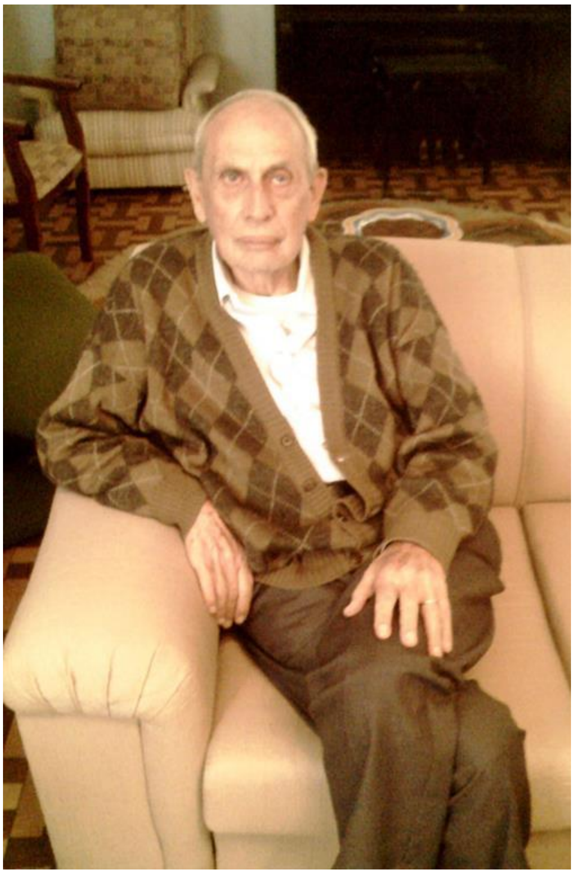


Figura 4.1: Gilberto Francisco Loibel durante entrevista concedida a nós em 2012

Entre as décadas de 1950 e 1960, Loibel casou-se; seu interesse pela área era tão significativo que incentivou a esposa, Izette Alves Coelho Loibel, a se formar em Matemática[8]. Teve quatro filhos, Sabina (já falecida), André, Selene e Tadeu, além de três netos. De acordo com Tafarrel (2013), Loibel era um apaixonado pela música clássica e, por essa razão, ia frequentemente a São Paulo assistir aos concertos da Orquestra Sinfônica do Estado de São Paulo (Osesp).

Em 1969, foi realizada a sétima edição do Colóquio Brasileiro de Matemática. Como coordenador do evento, Loibel presidiu a sessão que fundou, em 24 de julho, a Soci-

[7]Em entrevista concedida a nós em 2012.

[8]Izette obteve o grau de Mestre em Matemática em 25 de novembro de 1970, junto ao ICMSC (atual ICMC), com a dissertação "Curvas Planas e Aplicações Excelentes" orientada pelo próprio marido.

edade Brasileira de Matemática (SBM)[9]. O estudioso sofria de problemas cardíacos (TAFARREL, 2013) e faleceu em 13 de novembro de 2013, na cidade de São Paulo após ter passado por uma cirurgia.

Temos registro da orientação feita por Loibel de nove trabalhos em curso de aperfeiçoamento realizados entre 1962 e 1979. Também, no período de 1966 a 1973, orientou onze alunos com bolsa de Iniciação Científica. Em se tratando de Pós-Graduação *stricto sensu*, de acordo com informações colhidas em Azevedo; Silva (s/d), Loibel orientou vinte Dissertações de Mestrado e oito de Doutorado.

4.2.1 Dados biográficos do professor Loibel

Apresentamos a seguir dados biográficos do professor Loibel, os quais estão cronologicamente organizados:

- 1932 - Nascimento (São Paulo/SP);
- 1952 - Início da Graduação;
- 1955 - Término da Graduação;
- 1956 - Instrutor na Cadeira de Geometria na EESC;
- 1956 - Início dos estudos em nível de Pós-Graduação;
- 1957 - Participação no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática;
- 1959 - Obtenção do grau de Doutor em Ciências (Matemática);
- 1959 - Apresentação de trabalho no 2º Colóquio Brasileiro de Matemática;
- 1960 - Professor Assistente Doutor na Cadeira de Geometria da EESC;
- 1960 (até 1962) - Professor Visitante na *University of California*;
- 1962 (até 1965) - Chefe do Departamento de Matemática da EESC;
- 1965 (até 1966) - Professor Visitante na *Universidad Central de Venezuela*;
- 1967 - Membro da Congregação da EESC[10];

[9]Fonte: Ata da sessão de fundação da Sociedade Brasileira de Matemática, realizada em 24 de Julho de 1969, durante o 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, em Poços de Caldas, MG.

[10]Participou, neste ano, de uma Comissão que estudou a regulamentação do Programa de Pós-Graduação da própria EESC e, posteriormente, do ICMSC.

- 1969 - Coordenou o 7º Colóquio Brasileiro de Matemática. Durante o evento, presidiu a Sessão Solene que fundou a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM);
- 1969 - Defesa do trabalho de Doutorado do primeiro orientado de Doutorado de Loibel, Mario Rameh Saab (Título: "Sobre Aplicações de S em S com Certas Anteimagens Dadas" - Área: Topologia Diferencial);
- 1970 (até 1976) - Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática da EESC da USP;
- 1971 - Obtenção do grau de Livre-Docente pela EESC[11];
- 1971 (até 1976) - Coordenador do Pós-Graduação em Matemática da EESC;
- 1971 - Membro do Conselho do Departamento de Matemática do ICMSC[12];
- 1971 (até 1973) - Tesoureiro da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM;
- 1979 (até 1980) - Coordenador regional da 1ª e da 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática;
- 1982 (até 1986) - Vice-Diretor do ICMSC;
- 1986 - Aposentou-se como Professor Titular do ICMSC[13].
- 1988 - Coordenador da 11ª Olimpíada Brasileira de Matemática;
- 1990 - Coordenador da Área de Concentração em Fundamentos da Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do IGCE/Unesp/Rio Claro;
- 2013 - Falecimento (São Paulo/SP).

Por ocasião de seu aniversário de oitenta anos, foi realizado em sua homenagem o "Encontro de Topologia e Singularidades"[14] no ICMC nos dias 12 e 13 de junho de 2012 (Figura 4.2). O evento foi organizado através da união de esforços do próprio ICMC e da Unesp/Rio Claro, com apoio do CNPq e da Capes.

[11] Com o trabalho "Sobre Aplicações Diferenciáveis com Certas Anteimagens Dadas".
[12] Que fora criado em 1971.
[13] Que em 1998 foi rebatizado como ICMC.
[14] Página do evento <http://www.icmc.usp.br/~topsing/>. Acesso out 2012.

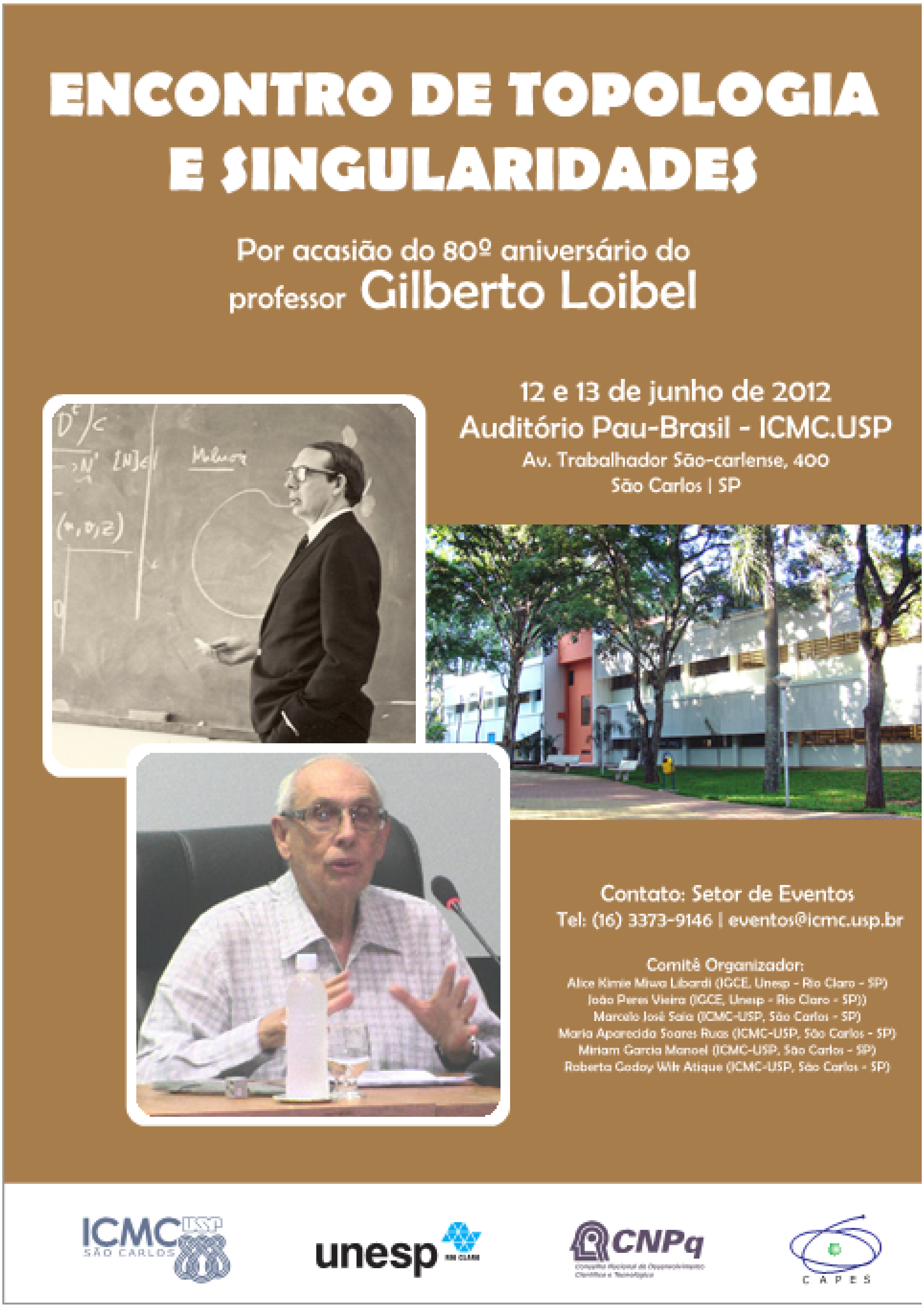


Figura 4.2: *Pôster de divulgação do "Encontro de Topologia e Singularidades" - 2012*

4.3 Daciberg Lima Gonçalves

Daciberg nasceu em 1949 e, após cursar o Ensino Básico no estado do Ceará[15], mudou-se para a cidade de São Paulo, em 1968, mesmo ano em que iniciou seus estudos em nível de Graduação na USP, no qual foi admitido por meio de concurso vestibular. Obteve, então, o título de Bacharel em Matemática em 1970 e, três anos depois, em 1973, o de Bacharel em Engenharia Elétrica. Logo após terminar o Bacharelado em Matemática, iniciou o Mestrado na mesma área, também pela USP – São Paulo.

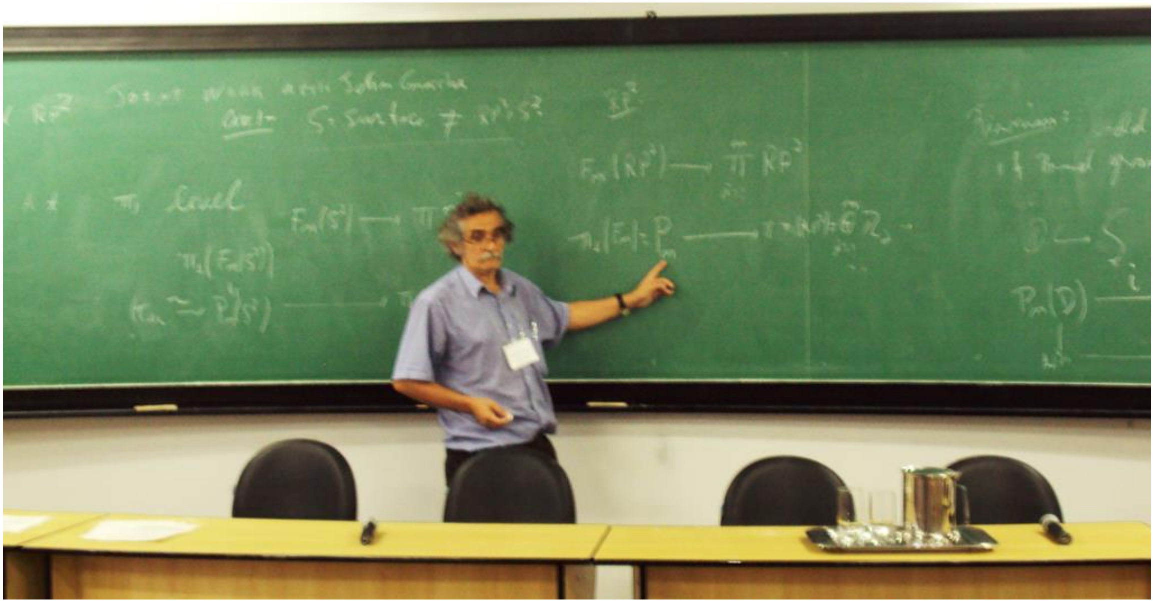


Figura 4.3: *Daciberg durante o "VIII Encontro Regional de Topologia" - 2011*

Com relação ao Mestrado, apesar da orientação oficial ser do Professor Edgar Harle, afirma "*já no período do último ano do mestrado, participei de todas as atividades lideradas pelo Professor Lyra*". O grau de Mestre seria conquistado em 1972 com uma Dissertação intitulada "Subvariedades críticas não degeneradas". Afirma que, em face ao exposto, foi Lyra quem o influenciou a escolher a Topologia Algébrica como campo de pesquisa e complementa:

> [Lyra] foi quem me deu toda a assistência, orientação e contatos para que eu pudesse ir fazer o Doutorado no exterior. Durante este período final de Mestrado e minha ida ao exterior, o professor Lyra teve como convidados os Professores Hilton, John Hubback, Ulrich Suter. Finalmente entre o Professor Lyra e o Professor Hilton acabou surgindo a sugestão de trabalhar com o topólogo John Harper, onde se conclui o meu Doutorado.

[15] Informado por Daciberg em entrevista concedida a nós em 2012.

Daciberg recebeu o Título de Doutor em 1977 pela *University of Rochester* com o trabalho intitulado "*Mod-2 homotopy associative finite H-space*". Em 1983, obteve o grau de Livre-Docente com a pesquisa "Espaços e fibrações C-nilpotentes", e no ano de 1977, iniciou suas atividades docentes como Professor Assistente Doutor no IME. Em 1983, tornou-se Professor Livre-Docente; em 1986, Professor Associado e, em 1999, passou ao cargo que ocupa até os dias atuais, Professor Titular. Registrou até fevereiro de 2014 a orientação concluída de quatro Dissertações de Mestrado e nove de Doutorado, além de duas coorientações de Doutoramento e outras três orientações de Doutorado em andamento[16].

A Figura 4.4[17] é uma fotografia feita no "VII Encontro Regional de Topologia" da mesa de abertura, composta (da esquerda para a direita) pelos professores Daciberg Lima Gonçalves (IME-USP) (homenageado), Edson de Oliveira (UNICEP) (primeiro descendente científico de Daciberg), Gilberto Francisco Loibel, Pedro Luiz Queiroz Pergher (UFSCar), Ketty Abaroa de Rezende (IMECC-Unicamp) e Alice Kimie Miwa Libardi (IGCE-Unesp).

Figura 4.4: *VII Encontro Regional de Topologia*

4.3.1 Dados biográficos do professor Daciberg

Apresentamos a seguir dados biográficos do professor Daciberg, os quais estão cronologicamente organizados:

[16]Dados obtidos junto à Plataforma Lattes. <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4788952Y3>. Acesso: fev. 2014.

[17]Fonte: <http://www.ime.usp.br/~viiert/imagens/viiert_I-017.jpg>

- 1949 - Nascimento;
- 1968 - Mudou-se para São Paulo;
- 1968 (até 1970) - Bacharelado em Matemática;
- 1968 (até 1973) - Graduação em Engenharia;
- 1971 (até 1972) - Mestrado em Matemática;
- 1973 (até 1977) - Doutorado em Matemática;
- 1977 - Professor Assistente Doutor no IME;
- 1982 (até 1983) - Vice-Coordenador da Comissão de Pós-Graduação;
- 1983 - Obtenção do grau de Livre-Docente;
- 1983 - Professor Livre-Docente no IME;
- 1986 - Professor Associado no IME;
- 1987 - Defesa do trabalho de doutoramento do primeiro descendente científico de Daciberg, Edson de Oliveira (Título: "Teorema de Nielsen para coincidência e algumas aplicações" - Área: Topologia Algébrica)
- 1988 (até 1994) - Chefe do Departamento de Matemática;
- 1994 (até 1996) - Representante do IME junto ao Conselho Universitário;
- 1995 (até 1997) - Representante dos Professores Associados junto à Congregação;
- 1998 (até 2001) - Membro representante do Departamento de Matemática junto à Comissão de Pós-Graduação;
- 1999 (atual) - Professor Titular no IME;
- 2001 (até 2003) - Membro da Congregação do IME
- 2001 (até 2004) - Representante do Departamento de Matemática na Comissão de Pesquisa;

Tendo em vista sua grande contribuição à Matemática brasileira, bem como o fato de ser visto por muitos pesquisadores da área como uma das figuras mais representativas da Topologia no Brasil, foi realizado, em homenagem ao seu sexagésimo aniversário, o "VII Encontro Regional de Topologia" (Figura 4.5). O evento ocorreu no *"Maresias Beach Hotel"* na cidade paulista de São Sebastião, com união de esforços da USP, Unesp, UFSCar e UNICAMP, e com apoio da FAPESP, CAPES, CNPq e INC Mat.

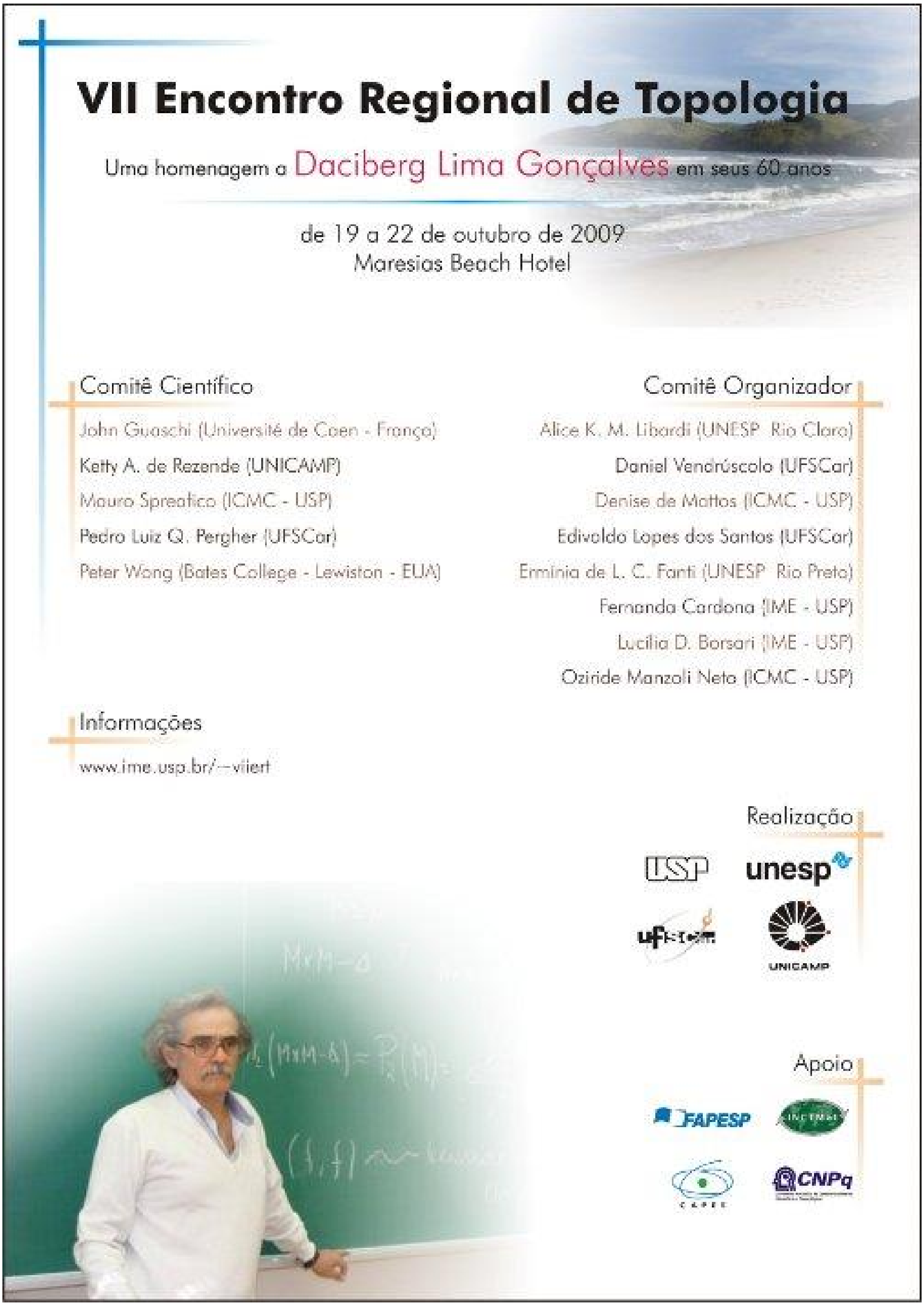


Figura 4.5: *Pôster de divulgação do "VII Encontro Regional de Topologia" - 2009*

4.4 Produção Científica de Lyra

Na Seção "Trabalhos Científicos", volume 1, da Coletânea com dados bio-bibliográficos de Lyra, disponível na Biblioteca do IME (Univ. de São Paulo, 1980), lê-se:

> Chama a atenção a serenidade e a coerência dos trabalhos do candidato [Lyra] numa área reconhecidamente difícil como a Topologia Algébrica. Em particular, devem ser mencionados sua Tese de Doutorado e sua Tese de Livre-Docência. **Estes trabalhos tiveram reconhecimento internacional e serviram de ponto de partida para as novas pesquisas** [...] [Grifo nosso.]

O texto ainda complementa sobre a sua atuação no desenvolvimento da Matemática no Brasil:

> Ênfase especial deve ser dada à dedicação do candidato [Lyra] a todos os problemas que afetam o desenvolvimento da Matemática no Brasil. Esta dedicação tem produzido resultados notórios, tanto no âmbito de sua instituição, quanto no âmbito universitário, ou estadual (FAPESP) e até na esfera nacional (Colóquios de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, Assessoria ao BNDE etc.).

Antes de tratarmos sobre a sua obra, é interessante destacar alguns pontos de sua criação e de sua formação. Apesar de ter nascido em Pernambuco, teve "*uma educação alemã*", assim caracterizada por seu filho Jorge[18], uma vez que essa era a nacionalidade da mãe. Nesse período, não sofreu influências diretas de instituições de ensino dada a boa situação econômica da família, que contratou um tutor para lhe ministrar aulas em sua residência.

Este estilo de vida seria alterado com o segundo casamento de sua mãe, que culminou com a mudança da nova família para os EUA – provavelmente em 1936 – quando tinha 8 anos. Após sua preparação nas escolas americanas, com o término do *High School*, Lyra voltou ao Brasil. É evidente a sua criação em uma diversidade de culturas, o que talvez tenha lhe atribuído o caráter universalista. Isso fica ainda mais claro quando observamos suas viagens para o exterior após a Graduação.

As considerações anteriores são importantes quando nosso objetivo é falar sobre a produção acadêmica do professor Lyra. Uma menção bastante interessante e incomum, sobretudo para a época, é o fato de boa parte de sua obra acadêmica ter sido escrita em português, mesmo sendo introduzido desde muito jovem na língua alemã e, depois,

[18]Em entrevista concedida a nós em 2012.

ter vivido vários anos utilizando a língua inglesa. Uma curiosidade, citada por Leda[19], é que justamente pelos motivos indicados, seu marido não tinha um domínio completo da língua portuguesa para a escrita. Era a própria esposa quem, muitas vezes, revisava seu texto e fazia as correções necessárias, fato perceptível em muitos trabalhos nos quais Lyra agradece o empenho de Leda por contribuir nesse sentido.

Segundo o professor Loibel[20], a literatura brasileira na área de Matemática, especialmente em Topologia, era inexistente. O professor ainda destaca que para que se pudesse realizar estudos nessa área era necessário que o candidato possuísse bastante habilidade com idiomas estrangeiros, especialmente o alemão. O texto base escrito por Lyra, "Introdução à Topologia Algébrica", para um curso por ele ministrado no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática[21] (CBM), talvez seja o início da literatura em Topologia Algébrica em língua portuguesa[22]. De acordo com Silva (2004, p.50), Georges Henri Reeb (Universidade de Grenoble) se correspondeu com o Diretor do IMPA com considerações à respeito do 1º CBM, ressaltando que "[...] *os cursos proferidos em Poços de Caldas parecem-me constituir um instrumento de trabalho inequivocamente fundamental e notável* [...]".

Levando em conta o fato de que a literatura em Topologia Algébrica fosse apenas estrangeira, assim como a dificuldade e a complexidade do campo, considerado inclusive por pesquisadores da época: "[...] *numa área reconhecidamente difícil como a Topologia Algébrica.*" (Univ. de São Paulo, 1980), e, ainda, os relatos de Loibel, inferimos que Lyra possa ser o grande responsável pela disseminação e pelo incentivo ao estudo, principalmente dos estudantes, no campo da Topologia Algébrica.

Destacamos que essa influência foi, principalmente, em São Paulo. Conhecemos pesquisadores cariocas que trabalharam com Topologia Algébrica, dentre os quais podemos citar Elon Lages Lima, que efetivou seu Doutoramento na Universidade de Chicago, sob orientação de Edwin Henry Spanier (1921 - 1996), com o trabalho intitulado "*Duality and Postinikov Invariants*", citado por Jean Dieudonnè no livro "*History of Algebraic Topology*" (SILVA, 2004). Dessa forma, sobretudo na década de 1960, o pesquisador carioca trouxe contribuições para a pesquisa em Topologia Algébrica no Brasil com estudos desenvolvidos de forma independente ao que ocorria em São Paulo. Ainda assim, o pioneirismo de Lyra é mantido, uma vez que isso se deu após os seus primeiros estudos.

A seguir, elencaremos as obras de Lyra disponíveis na já citada Coletânea que

[19]Em entrevista concedida a nós em 2012.

[20]Em entrevista concedida a nós em 2012.

[21]Sobre o qual falaremos mais adiante.

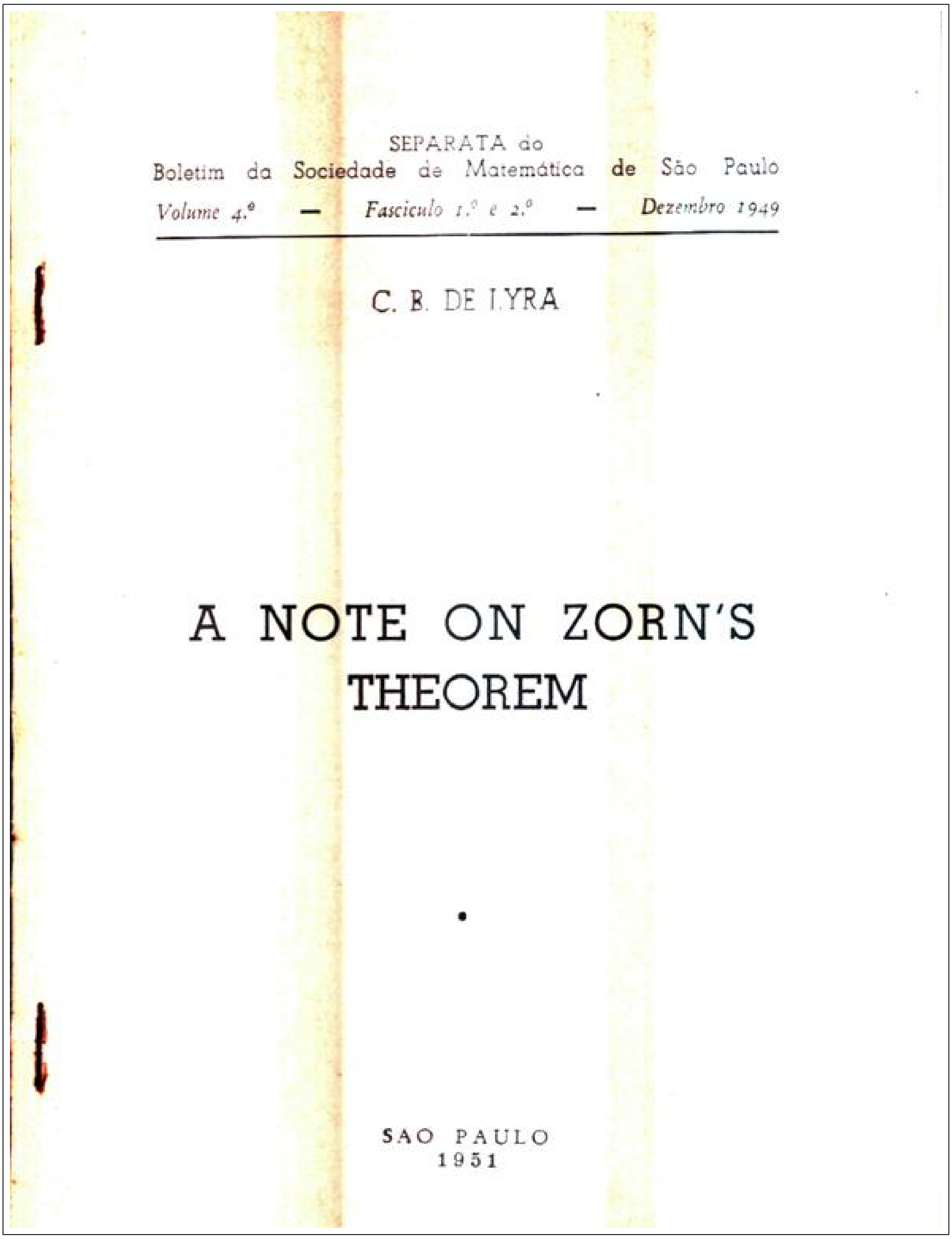
[22]Loibel destaca que em Portugal também não havia nada escrito nesse sentido.

reúne seus dados bio-bibliográficos[23] com algumas considerações a respeito das mesmas, baseando-nos em informações apresentadas na própria Coletânea. Quando possível, indicaremos suas particularidades, como comentários pessoais que ele constantemente fazia a respeito da bibliografia indicada em textos preparados para os cursos que ministraria. Ainda, apresentaremos, quando houver possibilidade, as referências bibliográficas e obras consultadas no estudo e elaboração de seus trabalhos e, por fim, trazemos um banco de dados composto de tais referências.

É importante salientar que o objetivo desta apresentação é apenas de situar o leitor quanto aos estudos publicados pelo nosso pesquisado. Apesar de ser interessante, uma análise matemática ou um estudo criterioso de cada um dos trabalhos elaborados e publicados por ele adquiriria proporções demasiado extensas. Dessa forma, nos limitaremos a tecer apenas breves comentários sobre cada uma das obras e, na Seção 5, faremos um estudo mais detalhado sobre a obra "Introdução à Topologia Algébrica", base do curso com mesmo nome ministrado por Lyra no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática em 1957.

[23](Univ. de São Paulo, 1980.).

4.4.1 *A Note on Zorn's Theorem*, 1949


SEPARATA do
Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo
Volume 4.º — Fasciculo 1.º e 2.º — Dezembro 1949

C. B. DE LYRA

A NOTE ON ZORN'S THEOREM

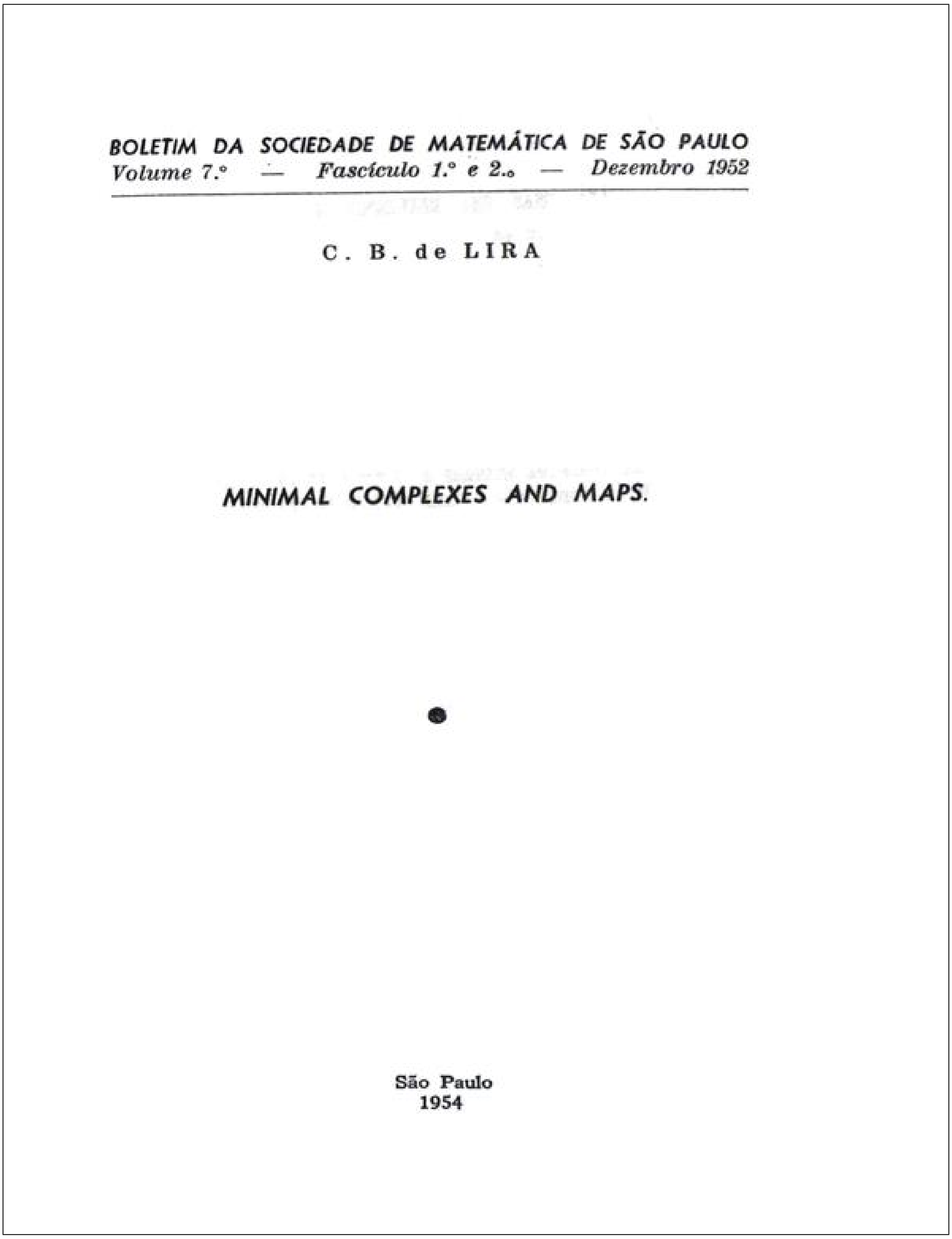
SAO PAULO
1951

A obra apresenta uma demonstração de que o Axioma da Escolha é uma implicação do Teorema de Zorn. O trabalho surgiu como resultado de alguns estudos desenvolvidos por Lyra em 1950, por ocasião de seu último ano de Graduação na FFCL (Univ. de São Paulo, 1980).

Referências Bibliográficas do trabalho:

- Bourbaki, N. *Théorie des Ensembles.* (fasc. rés.).
- Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo
  - Farah, E. (v. 1, p.19-34).

4.4.2 *Minimal Complexes and Maps*, 1952



BOLETIM DA SOCIEDADE DE MATEMÁTICA DE SÃO PAULO
Volume 7.° — Fascículo 1.° e 2.° — Dezembro 1952

C. B. de LIRA

MINIMAL COMPLEXES AND MAPS.

São Paulo
1954

A obra financiada pelo Conselho Nacional de Pesquisa aplica a técnica de complexos minimais desenvolvida por Samuel Eilenberg (1913 - 1998) e Joseph Abraham Zilber, que pode ser utilizada em problemas que envolvem a relação entre homotopia e homologia. Tal teoria é aplicada para provar o seguinte teorema:

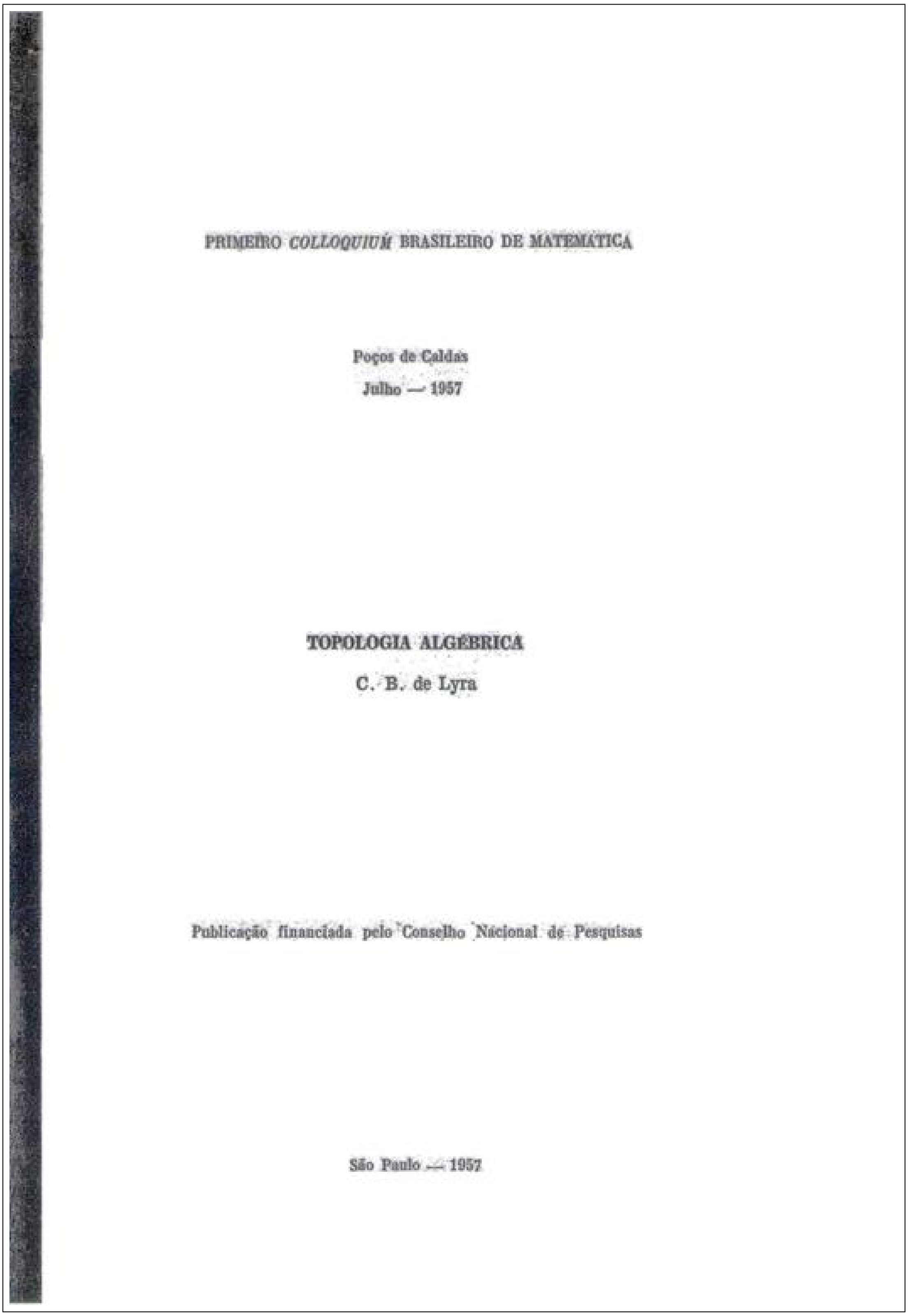
> *Se X e Y são espaços conexos por caminhos, n um inteiro positivo, f : $X \longrightarrow Y$ uma aplicação induzindo os isomorfismos $f_0 : \Pi_k(X) \approx \Pi_k(Y)$ para $k \leq n$, e se $\Pi_k(Y) = 0$ para $k > n$, então o complexo minimal de Y é determinado pelo de X e inteiro n; mais precisamente, $M(Y)$ é obtida identificando no complexo minimal $M(X)$, dois cubos de dimensão maior que n se eles têm as mesmas faces $n-$dimensionais.* (Tradução nossa).

Tal resultado foi demonstrado durante a estadia de Lyra na França por ocasião dos Seminários de Cartan (Univ. de São Paulo, 1980).

Referências Bibliográficas do trabalho:

- Cartan, H. *Seminaire de Topologie Algébrique.* Paris (1948-49);
- Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton (1951);
- Eilenberg, S. Steenrod, N. *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton (1952);
- Annals of Mathematics
  - Eilenberg, S. *Singular Homology Theory.* (1944, v. 45, p.407-444);
  - Eilenberg, S. Zilber, J. A. *Semi-simplicial Complexes and Singular Homology Theory.* (1950, v. 51, p.499-513);
  - Serre, J. P. *Homologie Singulière des Espaces Fibrés.* (1951, v. 54, p.425-505);
- American Journal of Mathematics
  - Eilenberg, S. Mac Lane, S. *Acyclic Models.* (1953, v. 75, p.189-199).

4.4.3 Introdução à Topologia Algébrica, 1957



PRIMEIRO *COLLOQUIUM* BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Poços de Caldas
Julho — 1957

TOPOLOGIA ALGÉBRICA
C. B. de Lyra

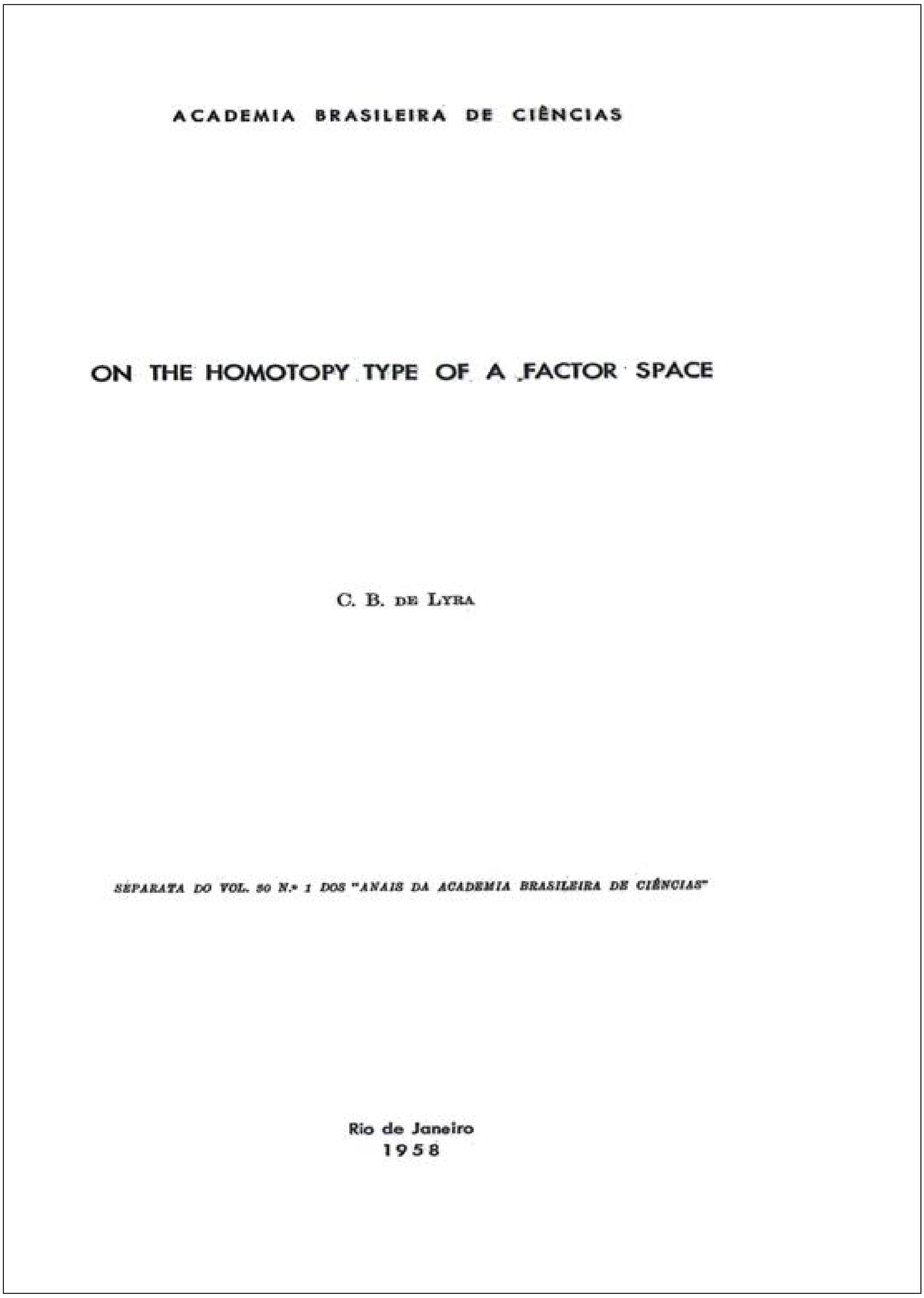
Publicação financiada pelo Conselho Nacional de Pesquisas

São Paulo — 1957

Material elaborado especificamente para o curso ministrado pelo próprio Lyra no Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado na cidade de Poços de Caldas/MG em julho de 1957, a partir de outros já proferidos anteriormente.

É utilizada a "teoria de homologia simplicial" para a introdução de conceitos básicos de Topologia Algébrica. Versam sobre "espaços afins", "simplexos e complexos", "subdivisão baricêntrica e aproximação simplicial", "grupos graduados com diferenciação", "grupos abelianos finitos" e "invariância de grupos de homologia". Apresentaremos mais detalhes a respeito desta obra na Seção 5.

4.4.4 *On the homotopy type of a factor space*, 1958



ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS

ON THE HOMOTOPY TYPE OF A FACTOR SPACE

C. B. DE LYRA

SEPARATA DO VOL. 30 N.º 1 DOS "ANAIS DA ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS"

Rio de Janeiro
1958

Dedicando-se fortemente aos estudos iniciados em Paris sobre espaços fibrados, Lyra elaborou este trabalho e sua continuação "*On circles bundles over complex projective spaces*"[24] (1959). A obra intenciona completar a demonstração de Borel, Eckmann e Samelson que, em 1949, provaram o resultado:

[24]Vide Seção 4.4.6.

> *O único fibrado localmente trivial possível de uma $m-$esfera S^m pelo toro T^s ocorre quando m é ímpar e $s = 1$, isto é, fibrados de esferas de dimensão ímpar por circunferências.* (Tradução nossa).

Ainda sobre tal demonstração, o autor complementa dizendo que a demonstração é feita

> [...] assumindo que o espaço quociente seja métrico separável. Os grupos de homotopia do espaço decomposição M podem ser facilmente calculados a partir de sequências exatas de homotopia. Usando resultados de Eilenberg e MacLane (1945), foram calculados os grupos de homologia de M. (Tradução nossa).

Para atingir seus objetivos, Lyra assume que o espaço decomposto M é de Hausdorff. Segue, então, que M é metrizável e tem uma base contável. Ele ainda demonstra um novo resultado:

> *Para qualquer fibrado localmente trivial da S^{2n+1} com circunferências como fibras tais que a decomposição de M é um espaço de Hausdorff, M é do mesmo tipo de homotopia do espaço projetivo complexo $P_n(C)$.* (Tradução nossa).

Referências Bibliográficas do trabalho:

- Bulletin of the American Mathematical Society
  - Borel, A. Eckmann, B. Samelson, H. (1949, v. 55, p.433-438);
  - Whitehead, J. H. C. (1948, v. 54, p.1139-1145);
- Fundamenta Mathematicae
  - Borsuk, K. (1948, v .21, p.91-98);
- Annals of Mathematics
  - Eilenberg, S. Mac Lane, S. (1945, v. 46, p.480-509);
  - Hurewicz, W. (1935, v. 36, p.194-197);
- Proceedings of the Japan Academy
  - Morita. Hanai. (1956, v. 32, p.10-15).

4.4.5 Sobre os espaços de mesmo tipo de homotopia que o dos poliedros, 1958; *On spaces of the same homotopy type as polyhedra*,1960

CARLOS B. DE LYRA

SÔBRE OS ESPAÇOS DE MESMO TIPO DE HOMOTOPIA QUE O DOS POLIEDROS

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para doutoramento em Ciências (Matemática).

São Paulo — 1958

Entre os anos de 1957 e 1958 e sob orientação do Professor Cândido Lima da Silva Dias, Lyra desenvolveu um trabalho que foi apresentado à FFCL para o seu Doutoramento em Ciências Matemáticas. A defesa teve como Banca Examinadora, além do orientador, os professores Leopoldo Nachbin, Chaim Samuel Hönig, Edson Farah e Omar Catunda. Após o término da Graduação, foi para a França, onde assistiu às palestras de Hurewicz; tal contato, como já dito, despertou nele o interesse pela teoria de Borsuk para espaços ANR, que foi objeto de estudo deste trabalho.

Lyra cita que um dos objetivos iniciais da Topologia Algébrica era construir uma teoria profunda sobre os invariantes topológicos dos espaços. Com o decorrer do tempo, observando a grande dificuldade em cumprir tal objetivo, ele passou a ser substituído por outro, em suas próprias palavras, "*mais modesto, embora ainda difícil*", que era o de classificar os espaços através dos invariantes homotópicos[25].

O principal resultado apresentado no trabalho é a caracterização de espaços simplesmente conexos e de espaços conexos por caminhos, uma vez que esses têm o mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito. Devemos destacar que um ANR compacto e simplesmente conexo tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo finito. Nesse trabalho, Lyra se utiliza da teoria dos ANR's, criada por Karol Borsuk. Contudo, justificando sua intenção de tornar os enunciados mais simples, acrescenta a exigência de que o espaço considerado seja conexo e, também, apresenta uma breve exposição sobre os resultados de Whitehead a respeito dos CW-complexos.

Não poderíamos deixar de citar aqui os agradecimentos feitos em seu trabalho de Doutoramento. Transcrevemos a seguir alguns trechos:

> [...] desejamos expressar ao prof. **Cândido Lima da Silva Dias**, o nosso reconhecimento pela maneira como incentivou e acompanhou este trabalho. Lembramos com prazer ter sido um curso seu, ministrado em 1950, que despertou em nós o interesse pela Topologia Algébrica. [grifo nosso]
>
> [...] ao prof. **Chaim S. Hönig** pelo seu valioso concurso e inúmeras discussões sobre assuntos tratados neste trabalho. [grifo nosso]
>
> [Ao] **prof. Azis Simão**, num assunto remoto às suas preocupações intelectuais, auxiliou-nos, em partes da redação original, a conseguir que obscuridade de expressão não concorresse para aumentar a dificuldade inerente ao assunto. [grifo nosso]

[25] Dizemos que uma aplicação f é homotópica a g, $f \sim g$, ($f, g : X \longrightarrow Y$ são contínuas, onde X e Y denotam espaços topológicos quaisquer) se f pode ser deformada continuamente em g, isto é, se existe uma aplicação contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$, $I = [0, 1]$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$ (COBRA, 2010, p.12).

> Este trabalho não teria sido terminado a tempo sem colaboração de **minha esposa, Leda Lyra**, que se incumbiu da execução datilográfica dos originais. [grifo nosso]

Lyra também agradece pelo apoio financeiro à pesquisa concedido pelo Conselho Nacional de Pesquisa.

Dois anos depois, 1960, foi publicado o artigo "*On spaces of the same homotopy type as polyhedra*", o qual trouxe os resultados obtidos em seu trabalho de Doutoramento. O reconhecimento do trabalho foi internacional, sendo citado inclusive na obra "*Theory of the Retracts*", de Karol Borsuk[26]. A seguir, o resumo publicado no periódico *Mathematical Reviews*, em outubro de 1960, elaborado por V. Gugenheim:

> Considerando as realizações do complexo singular de um espaço como JHC Whitehead e J. Milnor o autor demonstra alguns teoremas caracterizando espaços com o tipo de homotopia de um poliedro localmente finito ou finito; talvez o mais interessante seja o seguinte. Teorema: Seja X um espaço simplesmente conexo, conexo por caminhos, então as seguintes condições são equivalentes: (a) X tem o mesmo tipo de homotopia de um poliedro finito; (b) $X \in \alpha$ e os grupos $H_q(X)$ são finitamente gerados e se anulam a partir de uma certa dimensão; (c) $X \in \alpha$, os grupos $\pi_g(X)$ são finitamente gerados para todo $g \geq 0$, e ΔX é finito, (d) X é dominado por um poliedro finito. Aqui α denota a classe de espaços conexos por caminhos dominados por um CW-complexo ΔX a dimensão mínima do tal complexo dominante. (Tradução nossa).

Referências Bibliográficas do trabalho (Doutoramento):

- Bourbaki, N. *Topologie Générale*. Hermann. Paris.
- Eilenberg, S. Steenrod, N. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton. 1952.
- Hilton, P. J. *An Introduction to Homotopy Theory*. Cambridge Univ. Press. 1953.
- Hu, S. T. *Homotopy Theory*. 1950. (Mimeo. notes).
- Lefschetz, S. *Topics in Topology*. Princeton. 1942.
- Lefschetz, S. *Algebraic Topology*. AMSCP. 1942.
- Fundamenta Mathematicae

[26]Monogr. Matem. n.44, Warsaw, 1967, p.218.

  - Borsuk, K. *Uber eine Klasse von lokal susammenhängender. Räumen.* (1932, 19, p.220-242);
  - Borsuk, K. *Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte.* (1933, 21, p.91-98);
  - Borsuk, K. *Sur un espace compact localment contractile qui n'est pas um rétracte absolu de voisinage.* (1948, 35, p.175-180).

- Annals of Mathematics
  - Eilenberg, S. *Cohomology and continuous mappings.* (1940, 41, p.231-251);
  - Eilenberg, S. Zilber, J. A. *Semi-simplicial complexes and singular homology.* (1950, 51, p.499-513);
  - Giever, J. B. *On the equivalence of two singular homology theories.* (1950, 51, p.178-191).

- Bulletin of the American Mathematical Society
  - Fox, R. H. *On topologies for functions spaces.* (1945, 51, p.429-432).

- Arkiv för Matematik
  - Hanner, O. *Some theorems on absolute neighborhood retracts.* (1951, 1, 389-408).

- Proceedings London Mathematical Society
  - Hu, S. T. *Mappings of a normal space into an ANR.* (1948, 64, p.336-358);
  - Hu, S. T. *Cohomology and deformation retracts.* (1951, 2nd.S, 52, p.191-219).

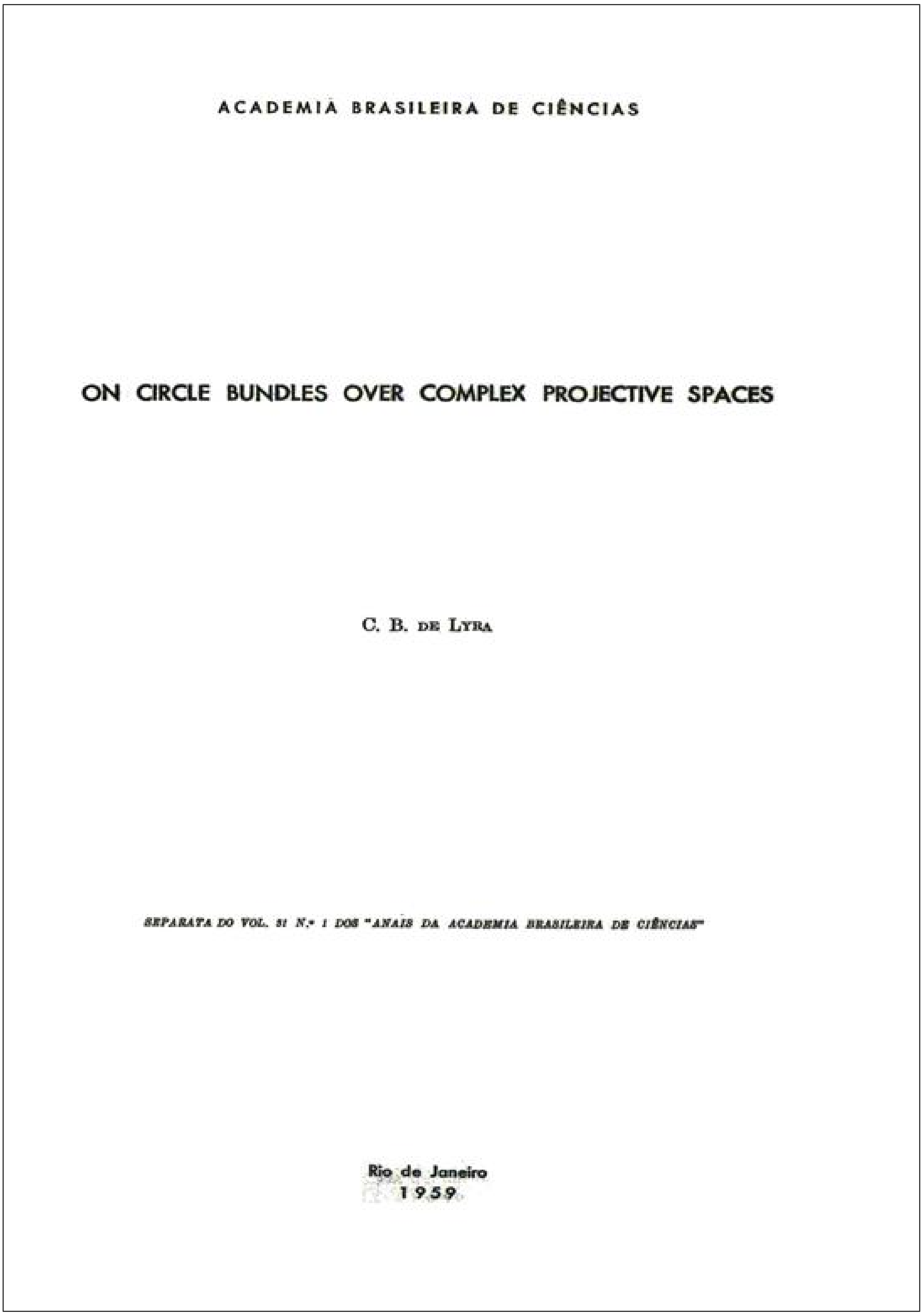
- Pacific Journal of Mathematics
  - Hu, S. T. *On the realizability of homotopy groups and their operations.* (1951, 1, p.583-602).

Referências Bibliográficas do artigo:

- Bachman, H. *Transfiniten Zahlen.* Berlin - Gotting - Heidelberg: Springer Verlag. 1955.

- Bernays, P. Fraenkel, A. A. *Axiomatic Set Theory.* Amsterdam: North-Holand Publishing Company. 1958.

4.4.6 *On circles bundles over complex projective spaces*, 1959



ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS

ON CIRCLE BUNDLES OVER COMPLEX PROJECTIVE SPACES

C. B. DE LYRA

SEPARATA DO VOL. 31 N.º 1 DOS "ANAIS DA ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS"

Rio de Janeiro
1959

Esse trabalho foi uma continuação dos estudos desenvolvidos por Lyra em Paris que também deram origem ao trabalho "*On the homotopy type of a factor space*"[27] (1958). Usando o Teorema da Classificação apresentado em "*The Topology of Fibre Bunbles*", de Steenrod, com fibrado principal $SO(2)$ sobre o espaço projetivo complexo

[27] Vide Seção 4.4.4.

$P_n(C)$, podemos descrever os possíveis fibrados da S^3 com fibra S^1 como espaço fibrado principal. São demonstrados os seguintes resultados:

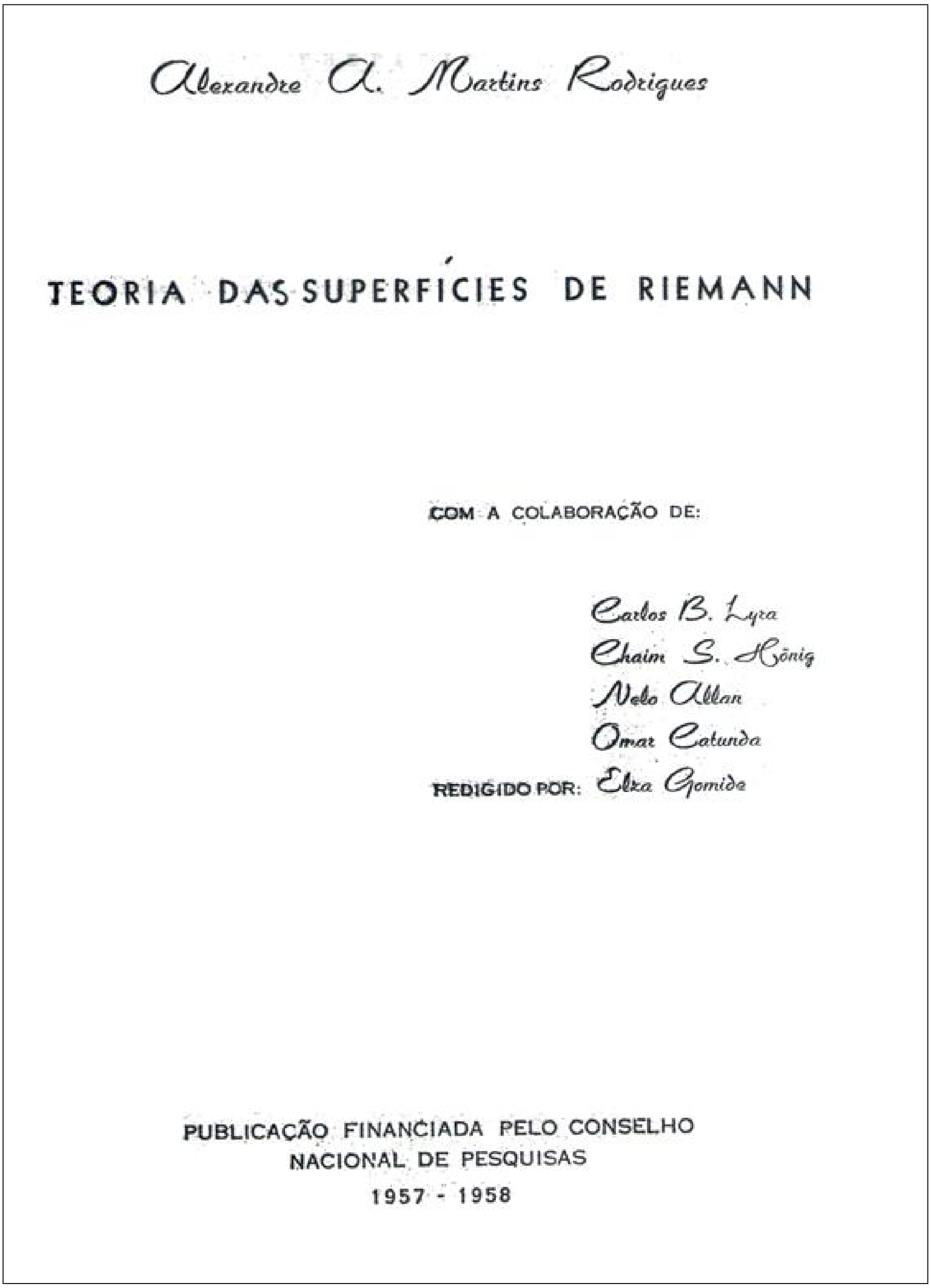
> **Lema:** *Considere uma aplicação qualquer* $f : P_n \longrightarrow Y$ *e seja* m_f *um inteiro definido por* $f_{\#\alpha} = m_f\beta$. *Então* $f \simeq g : P_n \longrightarrow Y$ *se, e somente se,* $m_f = m_g$. *A aplicação* $[f] \longrightarrow m_f$ *estabelece uma correspondência biunívoca entre as classes de homotopia das aplicações* $f : P_n \longrightarrow Y$ *e o conjunto dos inteiros* $\mathbb{Z}$. (Tradução nossa).

> **Proposição:** *Para qualquer fibrado localmente trivial da* S^3 *com fibra* S^1, *a decomposição* M *é homeomorfa a uma* $2-$*esfera; (2) para quaisquer dois fibrados principais da* S^3 *com estrutura de grupo* $SO(2)$, *existe um homeomorfismo* $S^3 \longrightarrow S^3$ *que é uma aplicação fibrada, levando uma fibra na outra.* (Tradução nossa).

Referências Bibliográficas do trabalho:

- Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton;
- Bulletin of the American Mathematical Society
  - Cairns, S. S. (1946, v. 52, p.545-571);
- Annals of Mathematics
  - Eilenberg, S. (1940, v. 41, p.331-351);
  - Hurewicz, W. (1935, v. 36, p.1494-197);
  - Steenrod, N. (1944, v. 45, p.294-311);
- Anais da Academia Brasileira de Ciências.
  - Lyra, C. B. de. (to appear);
- Proceedings of the American Mathematical Society
  - Young, G. S. (1950, v. 1, p.215-223);

4.4.7 Teoria das Superfícies de Riemann, 1957-58



Alexandre A. Martins Rodrigues

TEORIA DAS SUPERFÍCIES DE RIEMANN

COM A COLABORAÇÃO DE:

Carlos B. Lyra
Chaim S. Hönig
Nelo Allan
Omar Catunda

REDIGIDO POR: Elza Gomide

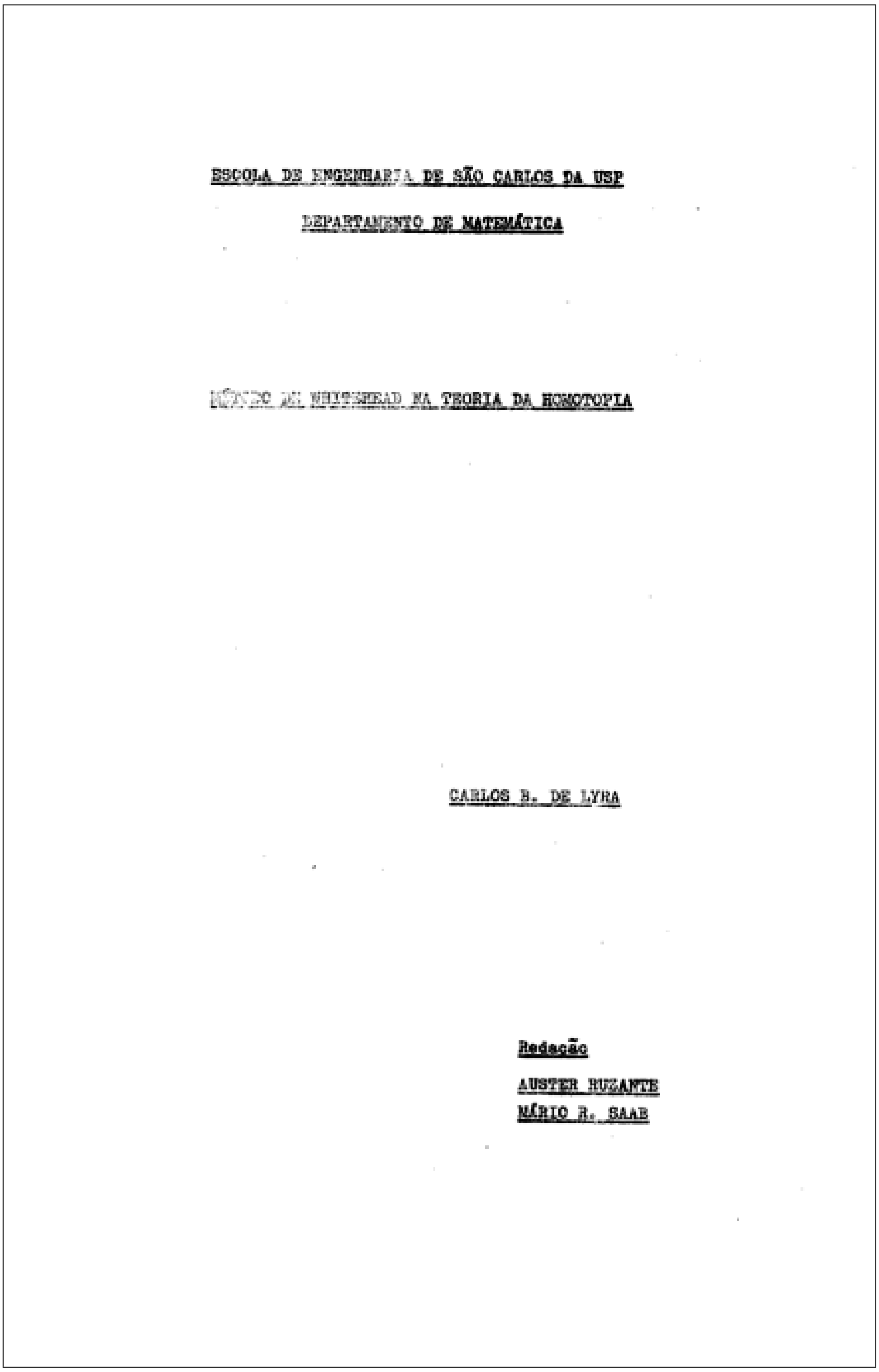
PUBLICAÇÃO FINANCIADA PELO CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
1957 - 1958

O material foi criado a partir das notas do seminário sobre superfícies de Riemann, organizado por Alexandre Augusto Martins Rodrigues (1930 -), na USP, entre 1957 e 1958. Foi redigido por Elza Gomide, exceto o capítulo sobre "Uniformização", cuja redação coube aos professores Omar Catunda e Nelo da Silva Allan. A produção contou ainda com o auxílio de Lyra (no capítulo II, "Espaços de Recobrimento") e de Chaim Hönig (nos capítulos "Topologia das Superfícies Compactas", "Matrizes de Riemann, Teorema de Riemann-Roch" e "Corpo das Funções Meromorfas sobre uma Superfícies de Riemann Compacta"). A obra tem caráter didático e objetivava difundir a teoria das superfícies de Riemann aos pesquisadores brasileiros.

Referências Bibliográficas do trabalho:

A publicação não apresenta referências.

4.4.8 Método de Whitehead na teoria da homotopia, 1963



ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS DA USP

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MÉTODO DE WHITEHEAD NA TEORIA DA HOMOTOPIA

CARLOS B. DE LYRA

Redação

AUSTER RUZANTE

MÁRIO R. SAAB

A obra composta por notas mimeografadas de um curso ministrado por Lyra no Departamento de Matemática da Escola de Engenharia de São Carlos (USP-São Carlos), em 1963, teve como redatores Auster Ruzante e Mário R. Saab. Ela trata sobre os métodos de Whitehead na teoria de homotopia, pressupondo conhecimentos sobre homologia singular.

4.4.9 *On a conjecture in homotopy theory*, 1965
Sobre uma conjectura na teoria da homotopia, 1965

ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS

On a Conjecture in Homotopy

C. B. DE LYRA

SEPARATA DO VOL. 37 N.º 2 DOS "ANAIS DA ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS"

Rio de Janeiro
1 9 6 5

SÔBRE UMA CONJETURA NA TEORIA DA HOMOTOPIA

C. B. DE LYRA

Um problema interessante na teoria da homotopia tem o seguinte enunciado: seja X um espaço dominado por um complexo finito P (isto é, existem aplicações $f: X \longrightarrow P$ e $g: P \longrightarrow X$ tais que $g \circ f \simeq 1$); nestas condições, tem X o tipo de homotopia de um complexo finito? No caso $\pi_1(X)=0$, a resposta é afirmativa [1]. No caso não-simplesmente conexo não será em geral verdade. Obtivemos os seguintes resultados.

Seja $\mathcal{C}_{fg}$ a classe dos espaços X tais que: i) $\pi_0(X)=0$; ii) $X \simeq$ um CW-complexo; iii) $\pi_1(X)$ é um grupo *finito*. Seja ΔX a menor dimensão dos CW-complexos dominando X e denotemos por $\Gamma(\pi)$ o grupo de classes de módulos projetivos sôbre o anel $Z\pi$ (Cf. [2]). Se $X \in \mathcal{C}_{fg}$ é $\Delta X < +\infty$, associamos a X de maneira unívoca um elemento $\lambda(X) \in \Gamma(\pi)$ tal que:

I) $\lambda(X)$ é um invariante do tipo de homotopia.

II) Se $X \in \mathcal{C}_{fg}, X \simeq$ complexo finito $\Leftrightarrow \lambda(X)=0$.

III) Se $u \in \Gamma(\pi)$, π um grupo finito e $n \geq 3$, então existe um complexo L seccionalmente finito tal que

$$\pi_1(L)=\pi, \quad \Delta L = n \quad \text{e} \quad \lambda(L)=u.$$

O teorema III), juntamente com um resultado de D. S. Rim [2] dá uma resposta negativa ao problema original; tal situação ocorre, por exemplo, quando $\pi = Z_{23}$: i. e. existe um CW-complexo X com $\pi_1(X) \simeq Z_{23}$ tal que X é dominado por um complexo finito mas não tem o tipo de homotopia de nenhum complexo finito.

A demonstração dêstes teoremas usa por um lado as técnicas de CW-complexos. Por outro lado o método que usamos para obter módulos projetivos, empregados na construção do invariante $\lambda(X)$, dependem dos métodos de Rim [2] para assegurar que tais módulos são projetivos. Daí a

Parte da pesquisa que resultou neste artigo foi desenvolvida durante o período em que Lyra esteve como professor visitante no *Institute for Advanced Study* de *Princeton*

(1960-1961) com bolsa da *Rockefeller Foundation*. Nela, ele referencia a questão levantada por Karol Borsuk (1905 - 1982), num congresso em *Amsterdam* em 1954, sobre descobrir se um ANR compacto de dimensão finita tem o mesmo tipo de homotopia de um poliedro finito (complementando que qualquer ANR compacto é dominado[28] por um poliedro finito). Neste trabalho, é complementada a pesquisa apresentada em "*On spaces of the same homotopy type as polyhedra*"[29] (1960). Diferente do anterior, Lyra passa a considerar também espaços não simplesmente conexos.

Se considerarmos X dominado por um poliedro finito, a questão que surge então é "X tem o mesmo tipo de homotopia que um poliedro finito?". Parte desse resposta já havia sido dada à comunidade científica em um artigo publicado no Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo de autoria do próprio Lyra. Em trabalho anterior, datado de 1960, demonstra que a afirmação é verdadeira caso X seja considerado simplesmente conexo. Nesse, novo trabalho complementa a resposta à questão levantada afirmando que se X **não** é simplesmente conexo, então a afirmativa é falsa. Por ocasião, o problema de se determinar se a conjectura feita era válida para ANR's compactos ficou em aberto.

De acordo com Hilton (1974, p.118), os resultados de Lyra foram obtidos de forma independente aos de C.T.C. Wall (1936 -) e tiveram precedência na publicação. A seguir, estão apresentados os resumos publicados no periódico *Mathematical Reviews*, em maio de 1967, por R. Brown (*On a conjecture in homotopy theory*) e, em dezembro do mesmo ano, por N. Stein (Sobre uma conjectura na teoria da homotopia):

> Seja X um espaço dominado por um CW-complexo finito. Seja $\Delta(X)$ a dimensão mínima de todos os CW-complexos finitos dominantes X. Uma questão em aberto até 1964 era se $\Delta(X) < \infty$ implicava que X era do tipo de homotopia de um complexo finito. Foi respondido negativamente por CTC Wall [Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 269-270; MR 28 #2549; Ann. of Math. Soc. (2) 81 (1965), 56-69; MR 30 #1515] sendo que este último artigo, provavelmente, continuará sendo referência deste tópico. Uma solução independente deste problema é dada no presente trabalho. Teorema 1: Seja X um espaço $0-$conexo com $\Delta(X)$ definido e $< \infty$. Seja $\pi = \pi_1(X)$ finito. Então, há um elemento $\lambda(X)$ dependente apenas do tipo de homotopia de X e X é do tipo de homotopia de um complexo finito se, e somente se, $\lambda(X) = 0$. Teorema 2: Dado um grupo finito π, $u \in \Gamma(\pi)$ e $n \geq 3$, existe um CW-complexo L seccionalmente finito tal que $\Delta(L) = n$, $\pi_1(L) = \pi$ e $\lambda(L) = u$. (Tradução nossa).

[28]Sejam X e Y espaços topológicos e aplicações $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ tais que $g \circ f \simeq 1_X$. Então X é dito dominado por Y.

[29]Vide Seção 4.4.5.

Dado um espaço X, que seja dominado por um complexo finito P, X tem o tipo de homotopia de um complexo finito? O autor já havia mostrado que isso é verdadeiro se X é simplesmente conexo [Bol. Soc. Mat. São Paulo, 12 (1957). 43-62 (1960), MR 22 #5970]. C. T. C. Wall [Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 269-270; MR #2549] estudou o problema quando X é um CW-complexo conexo. O autor assume que o complexo é finito e obtém resultados semelhantes aos de Wall. (Tradução nossa).

Referências Bibliográficas do trabalho:

- Hilton, P. J. (1953), *Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge Univ. Press.
- Milnor, J. (1963), *Morse Theory*, Princeton Univ. Press.
- Transactions of the American Mathematical Society
  - Dugungji, J. (1958, v. 89, p.408-420);
  - Eilenberg, S. (1947, v. 61, p.378 - 417);
  - Milnor, J. W. *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*. (1959, v. 90, p.272-280);
- Fundamenta Mathematicae
  - Eilenberg, S. (1939, v. 32, p.167-175);
- Annals of Mathematics
  - Eilenberg, S. and Ganea, T. (1957, v. 65, p.517-518);
  - Rim, D. S. *Modules over finite groups*. (1959, v. 69, p.700-712);
  - Serre, J. P. *Homologie Singulière des Espaces Fibrés*. (1951, v. 54, 425-505);
  - Whitehead, J. H. C. (1949b, v. 50, p.661-263);
- Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo
  - Lyra, C. B. de. *On spaces of the same homotopy type as polyhedra*. (1960, v. 12, p.43-62);
- Proceedings of the American Mathematical Society
  - Swan, R. G. (1960, v. 11, p.885-887);
- Bulletin of the American Mathematical Society
  - Wall, C. T. C. *An obstruction to finiteness of CW-complexes*. (1964, v. 70, p.269-270);
  - Whitehead, J. H. C. (1949a, v. 55, p.213-245).

4.4.10 H-equivalência de grupos topológicos, 1968

CARLOS B. DE LYRA

H-EQUIVALÊNCIA de GRUPOS TOPOLÓGICOS

Tese apresentada para concurso de Livre-docência da Cadeira de Complementos de Geometria e Geometria Superior, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO - 1968

Este foi o trabalho apresentado por Lyra ao concurso de Livre-Docente para a Cadeira de Complementos de Geometria e Geometria Superior da FFCL, concluída em 1968.

Como de costume, antes de tratar sobre os estudos, apresenta seus agradecimentos: ao professor Edwin Spanier, pela contribuição, à qual se refere como "*discussões esclarecedoras*"; e ao professor Elon Lages Lima, pelas "*valiosas trocas de ideias*". Ainda, são apresentados agradecimentos aos professores Cândido Lima da Silva Dias e Chaim Samuel Hönig, pelo incentivo. À esposa Leda, pelo trabalho de datilografia e ao amigo Maurício Segall, por ter proporcionado "*tranquilidade do seu refúgio serrano*", que lhe permitiu concluir o trabalho no tempo pretendido.

Os principais resultados apresentados no trabalho são os dois teoremas, transcritos a seguir:

Teorema B: *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ uma H-equivalência entre CW-grupos G e G'. Então os grupos G e G' são equivalentes no sentido de Milnor: existe um CW-grupo $\widetilde{G}$ e homomorfismos de grupo topológico $h : \widetilde{G} \longrightarrow G$ e $h' : \widetilde{G} \longrightarrow G'$ que são equivalências de homotopia.*

Teorema B': Sejam G e G' grupos topológicos cujos espaços subjacentes pertencem a W_{O}[30]. Se existe uma H-equivalência $\varphi : G \longrightarrow G'$, então G e G' são M-equivalentes.

Referências Bibliográficas do trabalho:

- Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton Univ. Press. 1951.
- Annals of Mathematics
  - Adams, J. F. *On the non-existence of elements of Hopf invariant one.* (1960, v. 72, p.20-104);
  - Huebach, W. *On the covering homotopy theorem.* (1955, v. 61, p.555-563);
  - Milnor, J. W. *Construction of universal bundles I.* (1956, v. 63, p.272-284);
  - Milnor, J. W. *Construction of universal bundles II.* (1956, v. 63, p.430-436);
  - Serre, J. P. *Homologie singulière des espaces fibrés.* (1951, v. 54, p.425-505);
- Illinois Journal of Mathematics

[30] W_{O} representa a classe dos espaços do mesmo tipo de homotopia que algum CW-complexo enumerável.

  - Dold, A. Lashof, R. *Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalence of bundles.* (1959, v. 3, p.285-305);

- Transactions of the American Mathematical Society

  - James, I. M. *Multiplications on spheres.* v. II. (1957, v. 84, p.545-558);

- Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo

  - Lyra, C. B. de. *On spaces of the same homotopy type as polyhedra.* (1957, v.12, p.43-62);

- Tohoku Mathematical Journal (2nd Ser.)

  - Miyazaki, H. *The paracompactness of CW-complexes.* (1952, v. 4, p.309-313);

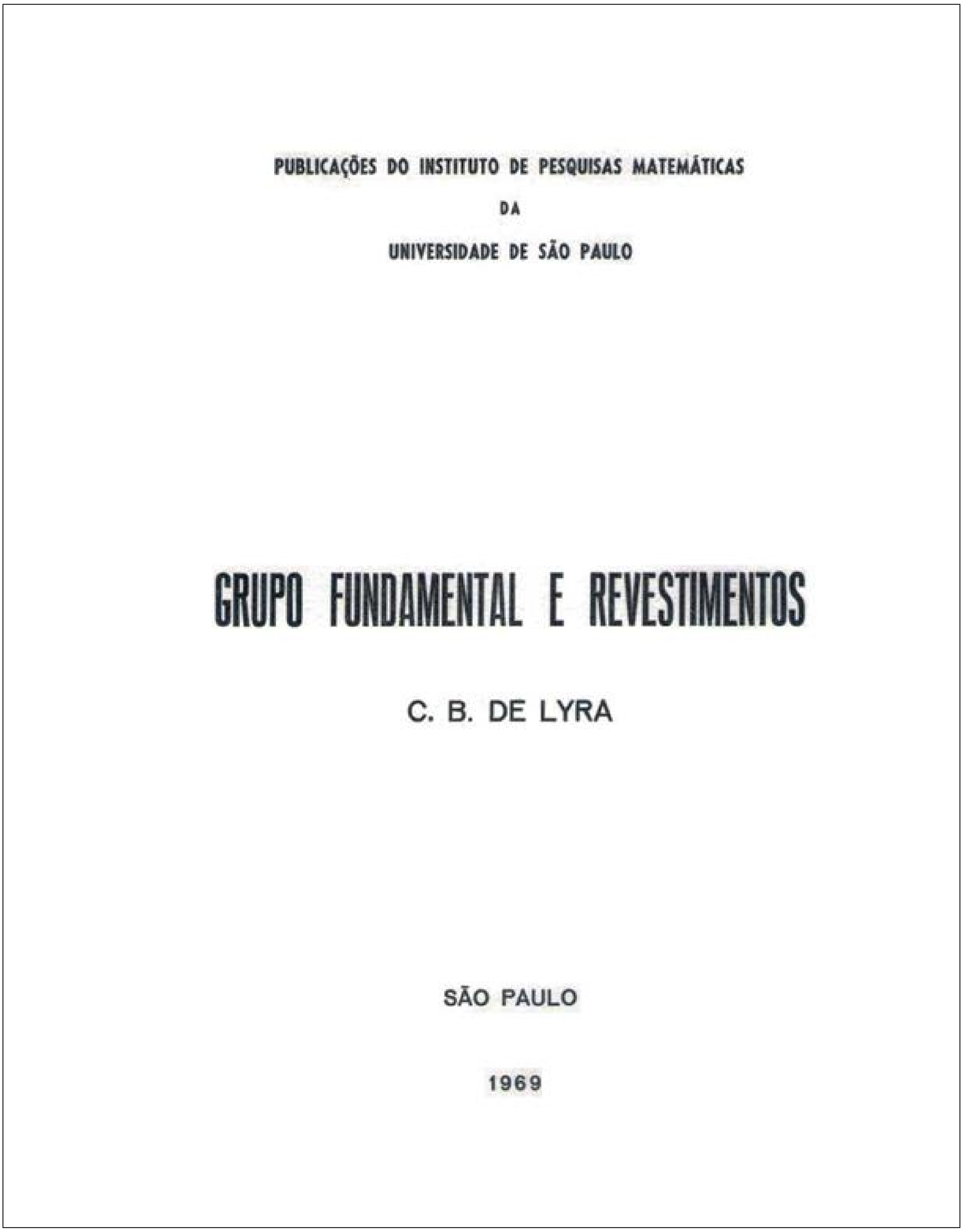
- Commentarii Mathematici Helvetici

  - Samelson, H. *Groups and spaces of loops.* (1954, v. 23, p.278-287);

- Quarterly Journal of Mathematics (2nd Ser.)

  - Slifker, J. F. *Exotic multiplications on* S^3. (1965, v. 16, p.322-359).

4.4.11 Grupo fundamental e revestimentos, 1969



PUBLICAÇÕES DO INSTITUTO DE PESQUISAS MATEMÁTICAS

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

GRUPO FUNDAMENTAL E REVESTIMENTOS

C. B. DE LYRA

SÃO PAULO

1969

Esta publicação serviu de texto para um curso que que ele ministrou no "7º Colóquio Brasileiro de Matemática". Seu conteúdo foi elaborado de maneira a ser acessível a alunos que já tivessem iniciado seus estudos em nível de Mestrado e também tivessem conhecimentos sobre teoria dos grupos e Topologia Geral.

No trabalho, constam agradecimentos especiais à professora Elza Gomide e ao professor Renzo Piccinini, pelas discussões que culminaram com a elaboração do material. Devemos destacar, mais uma vez, os agradecimentos que ele dedica à esposa Leda, pelo trabalho datilográfico e pelo encorajamento na preparação do manuscrito, sem os quais, segundo suas próprias palavras, não teria sido possível concluir as notas.

Os grandes objetivos do curso apontam para um estudo sobre as propriedades e aplicações do grupo fundamental e para um tratado acerca das categorias de revestimento de um determinado espaço que, particularmente, é uma aplicação de grupo fundamental.

Referências Bibliográficas do trabalho:

- Crowell, R. H. Fox, R. H. *Introduction to Knot Theory*. Ginn & Co. 1963.
- Massey, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Harcourt, Brace and World. 1965.
- Spanier, E. H. *Algebraic Topology*. McGrow-Hill Book Co. 1956.

São apresentadas, ainda, referências para aqueles que desejarem estudar mais sobre Topologia Geral e Teoria dos Grupos:

- Lima, E. L. *Topologia Geral*. Notas de Matemática. IMPA.
- Monteiro, L. H. J. *Elementos de Álgebra*. Capítulos 2 e 8. Ao Livro Técnico. 1969.
- Rotman, J. J. *The Theory of Groups*. Allyn & Bacon. 1965.

4.4.12 Caracterização dos SHM-morfismos para grupos topológicos, 1975

ANAIS
DA
ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS

Vol. 47 | RIO DE JANEIRO, 31 DE MARÇO DE 1975 | N.º 1

Caracterização dos SHM-Morfismos para Grupos Topológicos *

C. B. DE LYRA

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

Há cerca de quinze anos, M. Sugawara [77] ** introduziu a noção de aplicação *fortemente homotopicamente multiplicativa* (strongly homotopy-multiplicative, ou SHM) entre monóides topológicos associativos. Este conceito revelou-se ser a generalização adequada para a teoria da homotopia da noção de homomorfismo contínuo entre monóides ou entre grupos topológicos.

A teoria foi amplamente estudada por J. D. Stasheff [69], M. Fuchs [24], e outros. Foram esclarecidos pontos obscuros, inclusive em teorias clássicas. Por exemplo, se G e H são grupos de Lie e B_G, B_H são seus espaços classificadores universais, é bem conhecido que a todo homomorfismo $h:G\to H$ de grupos de Lie corresponde uma aplicação contínua induzida $B(h):B_G\to B_H$. M. Atiyah & F. Hirzebruch [6] observaram que pode haver funções $f: B_G\to B_H$ cuja classe de homotopia não contém aplicações $B(h)$. Esta falta de correspondência pode ser corrigida considerando-se também os SHM-morfismos $G\to H$.

Se G é um grupo topológico, seja $w(G) = (E_G, p, B_G)$ o fibrado principal universal de G obtido pela construção de Dold e Lashof; tem-se $G \subset E_G$. Dizemos que uma função contínua $\varphi:G\to G'$ tem a propriedade da *extensão fibrada* (EF) se: (1) $\varphi(e) \in$ componente conexa de e' em G'; (2) φ se estende a uma aplicação fibrada $\varphi_\infty:E_G\to E_{G'}$; (3) φ_∞ preserva a filtração natural da construção D.–L..

Ambos os homomorfismos contínuos e os SHM-morfismos tem a propriedade (EF). Desenvolvemos a teoria das (EF)-aplicações para CW-grupos usando técnicas bastante diversas da teoria dos SHM-morfismos. Na categoria dos CW-grupos, demonstramos os seguintes teoremas; maiores detalhes e as demonstrações aparecerão oportunamente.

Teorema 1. *Se $\varphi:G\to G'$ tem a propriedade (EF) e $\varphi' \simeq \varphi$, então φ' também tem a propriedade (EF).*

Teorema 2. *Se $\varphi:G\to G'$ tem a propriedade (EF) e é uma equivalência de homotopia, então qualquer inverso de homotopia $\psi:G'\to G$ de φ tem a propriedade (EF).*

Teorema 3. *Consideremos $\varphi:G\to G'$ contínua. Existe um CW-grupo G'' e homomorfismo contínuo $h:G''\to G$, que é equivalência de homotopia, e $\varphi:G\to G'$ tem a propriedade (EF) $\Longleftrightarrow$ existe homomorfismo contínuo $h':G''\to G'$ tal que $\varphi\circ h \simeq h'$.*

* Recebido em 11 de junho de 1974.

** As referências bibliográficas referem-se à bibliografia da monografia de James Stasheff, "H-spaces from a Homotopy Point of View", *Springer Lecture Notes*, N.º 161, (1970), onde se encontram também as definições dos conceitos clássicos que apenas citamos.

O texto é uma compilação em português dos resultados obtidos em *SHM-maps of CW-groups* de 1974, apresentando os cinco teoremas aqui elencados na citada publicação[31].

Referências Bibliográficas do trabalho:

A obra não apresenta referências.

[31]Vide Seção 4.4.13.

4.4.13 *SHM-maps of CW-groups*, 1976

SHM-MAPS OF CW-GROUPS

By C. B. DE LYRA†

[Received 17 January 1974: in revised form 28 December 1974]

1. Introduction

WE study countable CW-groups [**9**] from the homotopy viewpoint, that is, we regard groups as associative H-spaces provided with additional structure. To this end we define a wider class of maps, which include the continuous homomorphisms. Let G and G' be any topological groups. A map ϕ: $G \to G'$ will be said to *satisfy* FEP* if (1) ϕ takes the pathwise component of e, the unit element in G, into that of e', the unit element in G'; (2) ϕ extends to a fibre map ϕ_*: $\omega_G \to \omega_{G'}$ of the universal bundles, so as to preserve the natural filtrations of these bundles.

For general topological groups, regarded as associative H-spaces, the above class of maps contains the strongly homotopy multiplicative (SHM) maps in the sense of Sugawara [**15**]. For a broad class of topological groups, including Lie groups and countable CW-groups, it turns out that these two classes of maps coincide (see Theorem 3.2).

Certain preliminary results about vertical homotopies of principal bundle maps are established in §2; for these one exploits the contractibility of the total space. Proposition 2.5, in particular, is essential for comparing FEP*-maps (and so SHM-maps) with true homomorphisms in §5.

Section 3 is basically concerned with the equivalence between FEP*-maps and SHM-maps. We consider topological groups G which have the compactly generated topology and which are such that (G, e) is a neighborhood deformation retract pair [**11**]. We not only establish, for such groups, the equivalence of the properties FEP* and SHM; we also show that it is unnecessary to insist that the extension of ϕ: $G \to G'$ to the universal bundles be filtration-preserving (this apparently weaker condition is called the FEP-*property*). Our arguments establish the fact that every map homotopic to an SHM-map is again an SHM-map (Corollary 3.4).

† Professor de Lyra submitted an original version of this paper in January 1974. It was returned to him, along with substantial suggestions for revision by the referee, on March 15, 1974. Lyra very much welcomed the referee's suggestions for improvement, and was able to embark on a revised version in the beginning of June, 1974. Unfortunately he was stricken with cerebral haemorrhage and died, aged 46, on July 13, 1974, leaving behind rough drafts of early sections of the paper. Peter Hilton was in Brazil at the time of Lyra's death and undertook to write the revised version in accordance with the referee's suggestions and Lyra's notes. It is this version which we now publish. Peter Hilton has asked the editors to explain the circumstances and also to acknowledge his indebtedness to Professors Chaim Hönig and Elza Gomide for their invaluable assistance in collating the material left behind by their close friend Carlos de Lyra.

Quart. J. Math. Oxford (2), 27 (1976), 139–157

Antes de efetuar comentários sobre o conteúdo do artigo, existem fatos interessantes a se pontuar. Originalmente, Lyra escreveu o trabalho e o submeteu à apreciação do *The Quarterly Journal of Mathematics*, *Oxford*, em janeiro de 1974. Depois disso, o artigo lhe foi retornado com sugestões que foram acatadas. Contudo, conforme já mencionado, nesse meio tempo ele foi diagnosticado com um tumor cerebral, e com as idas e vindas ao hospital terminou o artigo e o deixou em seu escritório. Após seu falecimento, Peter Hilton, que na ocasião estava no Brasil, levou o artigo à Inglaterra e solicitou sua publicação, o que ocorreu em dezembro de 1974.

A sigla SHM é a abreviação usada para designar o conceito criado por Masao Sugawara de "*strongly homotopy-multiplicative*" (fortemente homotopicamente multiplicativa) entre monóides topológicos associativos. São apresentados, segundo a publicação de Lyra, "Caracterização dos SHM-morfismos para grupos topológicos" (1975) (Seção 4.4.12), dentre os resultados, alguns teoremas:

Teorema i: *Se $\varphi : G \longrightarrow G'$ goza da propriedade da extensão fibrada (EF), então φ' também goza da mesma propriedade.*

Teorema ii: *Se $\varphi : G \longrightarrow G'$ tem a propriedade EF e é uma equivalência homotópica, então qualquer inverso de homotopia $\psi : G' \longrightarrow G$ de φ tem a propriedade EF.*

Teorema iii: *Consideremos $\varphi : G \longrightarrow G'$ contínua. Existe um CW-grupo G'' e homomorfismo contínuo $h : G'' \longrightarrow G$, que é equivalência de homotopia, e $\varphi : G \longrightarrow G'$ tem a propriedade de EF se, e somente se, existe um homomorfismo contínuo $h' : G'' \longrightarrow G'$ tal que $\varphi \circ h \simeq h'$.*

Teorema iv: *Sejam X e Y complexos simpliciais conexos, localmente finitos, G_X, G_Y os CW-grupos associados a X e Y, respectivamente (pela contração inversa de Milnor). Então $X \simeq Y \iff$ existem homomorfismos contínuos $h : G_X \longrightarrow G_Y$, $h' : G_Y \longrightarrow G_X$ tais que $h'h \simeq 1$ e $hh' \simeq 1$.*

Teorema v: Sejam G, G' grupos topológicos. Então, $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um SHM-morfismo se, e somente se, φ satisfaz a propriedade EF.

A seguir, é apresentado o resumo publicado no periódico *Mathematical Reviews*, em outubro de 1977, escrito por Donald W. Kahan:

> [. . .] Considere a coleção enumerável de CW-grupos, ou seja, CW-espaços que são grupos topológicos, para os quais as aplicações básicas são celulares. Para esses dois grupos, podem-se considerar aplicações contínuas, ou homomorfismos contínuos, ou SHM-maps (strongly homotopy multiplicative maps), ou FEP-maps (preserva a componente da identidade e estende a uma aplicação fibrada do fibrado principal universal). Pouco mais restritivas são aquelas FEP-maps que preservam filtração proveniente da construção Dold-Lashof [A. Dold e R. Lashof , Illinois J. Math. 3 (1959), 285-305; MR 21 # 331] estes são os FEP*-maps. Sob condições gerais, o autor mostra que as noções de SHM e FEP são as mesmas e que FEP é equivalente a FEP*. O autor também apresenta um interessante teorema de inversão para uma SHM-map, que é uma equivalência de homotopia. Para as considerações finais, dá um exemplo interessante de um grupo, homotopicamente equivalente à S^3, para o qual existe uma quantidade pequena de homomorfismos contínuos da S^3 para este grupo. (Tradução nossa).

Referências Bibliográficas do trabalho:

- Hilton, P. *Homotopy Theory and Duality*. Gordon and Breach. 1965.
- Hubbuck, J. R. *Homotopy Homomorphisms of Lie Groups*. (to appear)
- Husemoller, D. *Fibre Bundles*. McGraw-Hill. 1966.
- Siebenmann, L. C. *Le fibré tangent*. Mimeographed notes. Paris, 1969.
- Stasheff, J. *H-Spaces from a Homotopy Point of View*. Springer Lecture Notes No. 161, 1970.
- Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press. 1951.
- Sullivan, D. *Geometric Topology I*. MIT, 1970. (Mimeographed notes).
- Illinois Journal of Mathematics
  - Dold, A.; Lashof, R. *Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalences of bundles*. (1959, v. 3, p.285-305);
- Annals of Mathematics
  - Dold, A. *Partitions of unity in the theory fibrations*. (1963, v. 78, p.223-255);
  - Huebsch, W. *On the covering homotopy theorem*. (1955, v. 61, p.555-563);
  - Milnor, J. W. *Construction of universal bundles I*. (1956, v. 63, p.272-284);

- Milnor, J. W. *Construction of universal bundles II.* (1956, v. 63, p.430-436);

- Mathematische Annalen
  - Fuchs, M. *Verallgemeinerte homotopie-homomorphismen und klassifizierende Räume.* (1965, v. 161, p.197-230);

- Transactions of the American Mathematical Society
  - Milnor, J. W. *On spaces having the homotopy type of a CW-complex.* (1959, v. 90, p.272-280);

- Bulletin of the American Mathematical Society
  - Rothenberg, M.; Steenrod, N. *The cohomology of classifying spaces of H-spaces.* (1965, v. 71, p.842-875);

- Memoirs of the College of Science (University of Kyoto)
  - Sugawara, M. *On the homotopy commutativity of groups and loop spaces.* (1960, v. 23, p.257-269).

4.5 Referências bibliográficas utilizadas por Lyra

As fontes de referências indicadas por Lyra resumem-se, basicamente, em periódicos, livros, notas de aula e um seminário. De acordo com pesquisadores da área de Topologia Algébrica, os periódicos usados por Lyra são de alta qualidade e os artigos citados são clássicos ainda hoje utilizados em pesquisas.

Seminários:

Seminaire de Topologie Algébrique: seminários proferidos por Henry Cartan em Paris entre 1948 e 1949.

Livros e notas de aula:

- Aleksandrov & Hopf *Topologie*, Springer 1935.
- Bachman, H. *Transfiniten Zahlen*. Berlin - Gotting - Heidelberg: Springer Verlag. 1955.
- Bernays, P. Fraenkel, A. A. *Axiomatic Set Theory*. Amsterdam: North-Holand Publishing Company. 1958.
- Bourbaki, N. *Topologie Générale*. Hermann. Paris.
- Bourbaki, N. *Théorie des Ensembles*. (fasc. rés.).
- Crowell, R. H. Fox, R. H. *Introduction to Knot Theory*. Ginn & Co. 1963.
- Eilenberg, S. Steenrod, N. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton. 1952.
- Hilton, P. J. *An Introduction to Homotopy Theory*. Cambridge Univ. Press. 1953.
- Hilton, P. *Homotopy Theory and duality*. Gordon and Breach. 1965.
- Hu, S. T. *Homotopy Theory*. 1950. (Mimeo. notes).
- Hubbuck, J. R. *Homotopy Homomorphisms of Lie Groups*. (to appear)
- Husemoller, D. *Fibre Bundles*. McGraw-Hill. 1966.
- S. Lefschetz *Introduction to Topology*, Princeton U.P.1949.
- S. Lefschetz *Algebraic Topology* (Colloquium Publ. of the American Math. Soc. 1942).
- Lefschetz, S. *Topics in Topology*. Princeton. 1942.
- Lefschetz, S. *Algebraic Topology*. AMSCP. 1942.
- Lima, E. L. *Topologia Geral*. Notas de Matemática. IMPA.
- Massey, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Harcourt, Brace and World. 1965.
- Milnor, J. (1963), *Morse Theory*, Princeton Princeton University Press.
- Monteiro, L. H. J. *Elementos de Álgebra*. Capítulos 2 e 8. Ao Livro Técnico. 1969.
- Patterson *Topology* (Oliver & Boid, 1956).
- L. Pontryagin *Foundations of Combinatorial Topology*,Greylock Press (1952);
- Rotman, J. J. *The Theory of Groups*. Allyn & Bacon. 1965.
- Seifort & Threlfall *Lehrbuck der Topologie* (1934) reimpresso por Chelsea Publ. 1947;

- Siebenmann, L. C. *Le fibré tangent.* Mimeographed notes. Paris, 1969.
- Spanier, E. H. *Algebraic Topology I*, notas mimeografadas da Univ. de Chicago.
- Spanier, E. H. *Algebraic Topology.* McGraw-Hill Book Co. 1956.
- Stasheff, J. *H-Spaces from a Homotopy Point of View.* Springer Lecture Notes No. 161, 1970.
- Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press. 1951.
- Sullivan, D. *Geometric Topology I.* MIT, 1970. (Mimeographed notes).

Periódicos:

Título do Periódico	**Artigos citados**
American Journal of Mathematics	1
Anais da Academia Brasileira de Ciências	1
Annals of Mathematics	17
Arkiv för Matematik	1
Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo	2
Bulletin of the American Mathematical Society	7
Commentarii Mathematici Helvetici	1
Fundamenta Mathematicae	5
Illinois Journal of Mathematics	1
Mathematische Annalen	1
Memoirs of the College of Science (University of Kyoto)	1
Pacific Journal of Mathematics	1
Proceedings London Mathematical Society	2
Proceedings of the American Mathematical Society	2
Proceedings of the Japan Academy	1
Quarterly Journal of Mathematics	1
Tohoku Mathematical Journal	1
Transactions of the American Mathematical Society	4

Listamos a seguir cada um dos artigos, bem como os respectivos periódicos nos quais foram publicados, conforme citação anterior.

- American Journal of Mathematics
  - Eilenberg, S. Mac Lane, S. *Acyclic Models.* (1953, v. 75, p.189-199).
- Anais da Academia Brasileira de Ciências.
  - Lyra, C. B. de. (to appear);
- Annals of Mathematics
  - Adams, J. F. *On the non-existence of elements of Hopf invariant one.* (1960, v. 72, p.20-104);
  - Dold, A. *Partitions of unity in the theory fibrations.* (1963, v. 78, p.223-255);
  - Eilenberg, S. *Singular Homology Theory.* (1944, v. 45, p.407-444);

  - Eilenberg, S. Zilber, J. A. *Semi-simplicial Complexes and Singular Homology Theory.* (1950, v. 51, p.499-513);
  - Eilenberg, S. Mac Lane, S. (1945, v. 46, p.480-509);
  - Eilenberg, S. (1940, v. 41, p.331-351);
  - Eilenberg, S. *Cohomology and continuous mappings.* (1940, 41, p. 231-251);
  - Eilenberg, S. and Ganea, T. (1957, v. 65, p.517-518);
  - Giever, J. B. *On the equivalence of two singular homology theories.* (1950, 51, p.178-191).
  - Huebach, W. *On the covering homotopy theorem.* (1955, v. 61, p.555-563);
  - Hurewicz, W. (1935, v. 36, p.194-197);
  - Milnor, J. W. *Construction of universal bundles I.* (1956, v. 63, p.272-284);
  - Milnor, J. W. *Construction of universal bundles II.* (1956, v. 63, p.430-436);
  - Rim, D. S. *Modules over finite groups.* (1959, v. 69, p.700-712);
  - Serre, J. P. *Homologie Singulière des Espaces Fibrés.* (1951, v. 54, p.425-505);
  - Steenrod, N. (1944, v. 45, p.294-311);
  - Whitehead, J. H. C. (1949b, v. 50, p.661-263);

- Arkiv för Matematik
  - Hanner, O. *Some theorems on absolute neighborhood retracts.* (1951, 1, 389-408).

- Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo
  - Farah, E. (v. 1, p.19-34).
  - Lyra, C. B. de. *On spaces of the same homotopy type as polyhedra.* (1960, v. 12, p. 43-62);

- Bulletin of the American Mathematical Society
  - Borel, A. Eckmann, B. Samelson, H. (1949, v. 55, p.433-438);
  - Cairns, S. S. (1946, v. 52, p.545-571);
  - Fox, R. H. *On topologies for functions spaces.* (1945, 51, p.429-432).
  - Rothenberg, M.; Steenrod, N. *The cohomology of classifying spaces of H-spaces.* (1965, v. 71, p.842-875);
  - Wall, C. T. C. *An obstruction to finiteness of CW-complexes.* (1964, v. 70, p.269-270).
  - Whitehead, J. H. C. (1949a, v. 55, p.213-245).
  - Whitehead, J. H. C. (1948, v. 54, p.1139-1145);

- Commentarii Mathematici Helvetici
  - Samelson, H. *Groups and spaces of loops.* (1954, v. 23, p.278-287);

- Fundamenta Mathematicae
  - Borsuk, K. (1948, v .21, p.91-98);
  - Borsuk, K. *Uber eine Klasse von lokal susammenhängender. Räumen.* (1932, 19, p.220-242);

- Borsuk, K. *Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte.* (1933, 21, p.91-98);
- Borsuk, K. *Sur un espace compact localment contractile qui n'est pas um rétracte absolu de voisinage.* (1948, 35, p.175-180).
- Eilenberg, S. (1939, v. 32, p.167-175);

• Illinois Journal of Mathematics

- Dold, A. Lashof, R. *Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalence of bundles.* (1959, v. 3, p.285-305);

• Mathematische Annalen

- Fuchs, M. *Verallgemeinerte homotopie-homomorphismen und klassifizierende Räume.* (1965, v. 161, p.197-230);

• Memoirs of the College of Science (University of Kyoto)

- Sugawara, M. *On the homotopy commutativity of groups and loop spaces.* (1960, v. 23, p.257-269).

• Pacific Journal of Mathematics

- Hu, S. T. *On the realizability of homotopy groups and their operations.* (1951, 1, p.583-602).

• Proceedings London Mathematical Society

- Hu, S. T. *Mappings of a normal space into an ANR.* (1948, 64, p.336-358);
- Hu, S. T. *Comhomology and deformation retracts.* (1951, 2nd.S, 52, p.191-219).

• Proceedings of the American Mathematical Society

- Young, G. S. (1950, v. 1, p.215-223);
- Swan, R. G. (1960, v. 11, p.885-887);

• Proceedings of the Japan Academy

- Morita. Hanai. (1956, v. 32, p.10-15).

• Quarterly Journal of Mathematics (2nd Ser.)

- Slifker, J. F. *Exotic multiplications on S^3.* (1965, v. 16, p.322-359).

• Tohoku Mathematical Journal (2nd Ser.)

- Miyazaki, H. *The paracompactness of CW-complexes.* (1952, v. 4, p.309-313);

• Transactions of the American Mathematical Society

- Dugungji, J. (1958, v. 89, p.408-420);
- Eilenberg, S. (1947, v. 61, p.378 - 417);
- James, I. M. *Multiplications on spheres.* v. II. (1957, v. 84, p.545-558);
- Milnor, J. W. *On spaces having the homotopy type of a CW-complex.* (1959, v. 90, p.272-280);

Dessa forma, quanto às referências, temos 30 títulos categorizados em livros e notas de aula, 50 artigos divididos em 18 periódicos e os Seminários assistidos por Lyra ao final da Graduação em Paris.

5 Análise comentada da obra "Introdução à Topologia Algébrica"

Carlos Benjamin de Lyra foi um matemático universalista que trabalhou significativamente na difusão da ciência brasileira. Foi um proeminente pesquisador, com produção de textos muito importantes, fornecendo uma inquestionável contribuição para o desenvolvimento da Matemática, particularmente da Topologia Algébrica, no Brasil. De modo a confirmar essa importância, é pertinente expor os dizeres da comissão julgadora para o concurso de Professor Adjunto da USP, constituída pelos Professores doutores: Chaim Samuel Hönig (IME-USP), Edison Farah (IME-USP), Manfredo Perdigão do Carmo (IMPA-CNPq) e Gilberto Francisco Loibel (ICMSC-USP/São Carlos) que assim se manifestou em relação ao memorial apresentado pelo professor Lyra: "*uma carreira científica universitária, sob todos os pontos de vista, altamente meritória*". A comissão emitiu ainda o seguinte parecer: "*chama a atenção a serenidade e a coerência dos trabalhos do candidato numa área reconhecidamente difícil como a Topologia Algébrica*".

Apresentamos na Seção 4.4 as obras publicadas de Lyra, tecendo breves comentários a respeito delas. Faremos agora uma análise comentada acerca da obra "Introdução à Topologia Algébrica", que serviu de base para o curso ministrado no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática (julho de 1957). Analisada nos tempos atuais, ao lado de importantes publicações que hoje existem sobre o assunto, esta obra pode ser considerada um texto com conteúdo abrangente e rico de informações. Mais de 50 anos depois de publicada, ainda se constitui num texto atual. Um fato relevante a se destacar sobre o material é que se trata do primeiro texto em Topologia Algébrica em Língua Portuguesa[1]. A teoria de homologia simplicial adotada por Lyra no trabalho se aplica à categoria dos pares (X, A), em que X é um poliedro e A um subconjunto compacto de X que também é um poliedro. Intuitivamente, um poliedro é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ composto de vértices, segmentos de reta, triângulos e assim por diante (simplexos). Observemos que embora esses espaços constituam um caso bastante particular, servem como uma classe importante de espaços para questões mais gerais. Conforme Croom

[1]Declaração do Professor Loibel em entrevista concedida a nós em 2012.

(1978), "*além de serem facilmente visualizados, os poliedros são suficientemente gerais para serem usados em aplicações*" (Tradução nossa). Devemos destacar, entre a série de aplicações que Lyra apresenta no texto, o cálculo de grupos de homologia de diversas superfícies e a demonstração do famoso Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz. Ressaltamos aqui a importância de tal teorema, que deu origem a uma importante área de pesquisa: "Pontos Fixos de Aplicações", posteriormente generalizada para "Teoria de Coincidência de Aplicações". Nos dias de hoje, está em pleno desenvolvimento uma nova generalização da área, estudam-se problemas de pontos fixos e de coincidências de aplicações fibradas.

A Topologia Algébrica parte de um problema geométrico, o traduz em termos algébricos (grupos de homotopia, grupos de homologia, grupo fundamental), faz os cálculos utilizando resultados algébricos e, então, retorna para responder às questões geométricas iniciais. Na linguagem da teoria das categorias, dizemos que uma teoria de homologia é um functor covariante da categoria dos espaços topológicos na categoria de grupos abelianos. A teoria de homologia popularizou-se nas últimas quatro décadas com os estudos em Topologia Algébrica difundidos em níveis de Graduação e Pós-Graduação e incluindo pesquisas matemáticas.

A teoria de homologia pode ser vista como uma forma de associar uma sequência de grupos abelianos a uma certa categoria de espaços topológicos. Esses grupos são, portanto, chamados "grupos de homologia" dos espaços a que estão associados, sendo que se dois espaços são homeomorfos, então seus grupos de homologia são isomorfos.

Particularmente, Lyra utilizou no citado trabalho grupos de homologia para poliedros, que, segundo Munkres (1984, p.145), é a mais concreta das teorias de homologia e, historicamente, foi a primeira a surgir. Também, de acordo com o autor, "*mais tarde, várias definições generalizadas de homologia foram formuladas e aplicadas a espaços mais gerais*". Complementa, ainda, que "*essas várias teorias de homologia têm muitas características em comum, elas produzem os mesmos resultados da teoria de homologia simplicial na classe dos poliedros*".

Em 1945, as analogias dessas teorias de homologia levaram os matemáticos Samuel Eilenberg (1913-1998) e Norman Earl Steenrod (1910-1971) a axiomatizarem a noção da Teoria da Homologia:

> Eles formularam certas propriedades decisivas que essas teorias têm em comum e mostraram que essas propriedades caracterizam completamente os grupos de homologia na classe dos poliedros. (MUNKRES, 1984, p.145 - tradução nossa).

A prova de que tais axiomas caracterizam a homologia para poliedros pode ser encontrada no livro de Eilenberg e Steenrod, publicado em 1952[2].

São sete os axiomas que caracterizam uma teoria de homologia. Eles serão enunciados a seguir para classes admissíveis[3] de espaços.

Se $\mathcal{A}$ é uma classe admissível, uma teoria de homologia em $\mathcal{A}$ consiste de três funções:

a) Uma função H_p definida para cada inteiro p e cada par (X, A) em $\mathcal{A}$ levando valores num grupo abeliano;

b) Uma função que, para todo inteiro p, associa a cada função contínua $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ um homomorfismo:

$$(f_p)_* : H_p(X, A) \longrightarrow H_p(Y, B)$$

c) Uma função que, a todo inteiro p, associa para cada par (X, A) em $\mathcal{A}$ um homomorfismo:

$$(\partial_{A_*})_p : H_p(X, A) \longrightarrow H_{p-1}(A)$$

em que A denota o par $(A, \varnothing)$.

São requeridas dessas funções que satisfaçam os seguintes axiomas em que os pares de espaços considerados estão em $\mathcal{A}$.

Axioma 1: (Identidade)

Se $I : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ é a função identidade, então:

$$H_q(I) : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(X, A)$$

é a identidade de $H_q(X, A)$ para cada q.

Axioma 2: (Composição)

Se $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ e $g : (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ são aplicações na classe das funções admissíveis $\mathcal{A}$, então para cada inteiro q:

$$H_q(g\ f) = H_q(g)\ Hq(f) : Hq(X, A) \longrightarrow Hq(Z, C)$$

[2]EILENBERG, S.; STEENROD, N. E. **Foundations of Algebraic Topology**. New Jersey: Princeton Univ. Press, 1952.

[3]Uma classe admissível de espaços é uma classe $\mathcal{A}$ de pares (X, A) de espaços topológicos satisfazendo: (i) se (X, A) pertence a $\mathcal{A}$, então $(X, X), (X, \varnothing), (A, A)$ e $(A, \varnothing)$ também pertencem. (ii) Se (X, A) pertence a $\mathcal{A}$, o mesmo acontece com o par $(X \times I, A \times I)$. (iii) Existe um espaço P com um único ponto tal que $(P, \varnothing)$ está em $\mathcal{A}$.

Axioma 3: (Comutatividade)

Se $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ é contínua, então para cada inteiro q o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r, "\partial A"] \arrow[d, "H_q(f)"'] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "H_{q-1}(f|_A)"] \\
H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial B"'] & H_{q-1}(B)
\end{tikzcd}$$

em que $f|_A : A \longrightarrow B$ é a restrição de f.

Axioma 4: (da sequência exata)

Para todo par (X, A) se $i : A \longrightarrow X$ e $j : X \longrightarrow (X, A)$ são as aplicações inclusões, a sequência de grupos denominada sequência exata do par (X, A):

$$\ldots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_A} H_{q-1}(A) \xrightarrow{H_{q-1}(i)} H_q(X) \longrightarrow \ldots$$

é uma sequência exata, ou seja, Núcleo $H_q(j) = Im\ H_q(i)$, Núcleo $\partial_A = Im\ H_q(j)$, Núcleo $H_{q-1}(i) = Im\ \partial$ e assim, para todos os outros índices.

Axioma 5: (da homotopia)

Se $g, h : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ são homotópicas, então $H_q(g) = H_q(h) : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B)$ para cada inteiro q.

Axioma 6: (da excisão)

Se U é um aberto de X, tal que o fecho de U $(\overline{U})$ está contido no interior de A, então a inclusão $e : (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ induz para cada inteiro q um isomorfismo de grupos:

$$H_q(e) : H_q(X - U, A - U) \longrightarrow H_q(X, A)$$

Axioma 7: (da dimensão)

Se $P = \{p_0\}$ é um ponto, então $H_q(P) = 0$ para todo inteiro q diferente de zero.

Observemos que poderíamos modificar o axioma 7 escrevendo $H_0(P) \cong G$, onde G é um grupo abeliano fixado. Se assim fizermos, a teoria enunciada é chamada "homologia com coeficientes em G". Quando $G = \mathbb{Z}$, nos referimos apenas à "homologia", como acima.

De acordo com Munkres (1984, p.147), há um oitavo axioma adicional[4], que é necessário quando se lida com espaços não compactos.

Após a publicação da teoria da homologia por Eilenberg e Steenrod, diversas outras teorias parecidas foram criadas. Podemos citar, por exemplo, as teorias de cobordismo e a K-teoria na teoria dos espaços fibrados. De acordo com Munkres (1984, p.147):

> Embora criadas com um propósito totalmente diferentes das que levaram à criação dos grupos de homologia, elas possuem em comum várias propriedades formais com a homologia. Particularmente, elas satisfazem todos os axiomas de Eilenberg-Steenrod, exceto o axioma da dimensão. (Tradução nossa).

Uma outra teoria de homologia, mais "natural" que a simplicial, é a teoria da homologia singular. Ela se aplica a todos os pares (X, A) em que X é um espaço topológico com subespaço A, não necessariamente poliedros.

Conforme Munkres (1984, p.161), nessa teoria, o

> homomorfismo induzido por função contínua é definido diretamente e suas propriedades funtoriais são provadas facilmente; nesse caso não há necessidade do teorema de aproximação simplicial. A invariança topológica dos grupos de homologia segue naturalmente. (Tradução nossa).

Porém, destaca o autor: "*os grupos de homologia não são imediatamente computáveis*".

Devemos ressaltar que o teorema da aplicação simplicial assegura que uma aplicação contínua entre poliedros K e L pode ser aproximada por uma nova aplicação que leva cada simplexo de K em um simplexo de L, essencial para a indução de homomorfismos nos grupos de homologia.

Alternativamente, sendo os grupos de homologia simplicial e singular isomorfos[5] para poliedros, sempre podemos fazer uso da homologia simplicial quando necessitamos computar os grupos de homologia de certos espaços.

[4]**Axioma 8:** (suporte compacto) *Se* $\alpha \in H_p(X, A)$*, existe um par admissível* (X_0, A_0)*, com* X_0 *e* A_0 *compactos, tal que* α *está na imagem do homomorfismo* $H_p(X_0, A_0) \longrightarrow H_p(X, A)$ *induzido pela inclusão. Um par* (X_0, A_0) *com ambos* X_0 *e* A_0 *compactos é chamado de par compacto.*

[5]Munkres (1984) constrói um específico isomorfismo entre as teorias simplicial e singular.

Devemos observar que, além das duas teorias de homologia especificadas acima, existem outras, dentre as quais podemos citar: (i) os grupos de homologia para espaços métricos compactos definidos por Leopold Vietoris[6] em 1927; (ii) os grupos de homologia para espaços de Hausdorff compactos apresentadas por Eduard Čech[7] em 1932.

Embora a homologia simplicial seja efetivamente computável, muitas vezes, ela envolve cálculos bastante exaustivos, mesmo quando se consideram espaços simples, como o toro e a garrafa de Klein. Devemos observar que, em várias situações, as computações podem se reduzir a cálculos mais simples mediante o uso de argumentos geométricos utilizando, por exemplo, os CW-complexos introduzidos por JHC Whitehead num artigo de sua autoria em 1949[8].

Vale a pena ressaltar, mais uma vez, que os grupos de homologia calculados através de uma decomposição celular (por células[9]) são isomorfos aos calculados através de uma decomposição por simplexos. A incidência das células, bem como a orientação são definidas de maneira análoga ao estabelecido para simplexos.

De um modo geral, na homologia celular, para cada par (X, A), é associado um complexo de cadeias[10] $\Gamma(X, A)$, cujos grupos de homologia são os grupos de homologia singular do par (X, A); o $n-$ésimo grupo de cadeias $\Gamma_n(X, A)$ é um grupo abeliano livre, o qual tem na base um elemento correspondente a cada $n-$célula. A ideia da construção é devida a Eilenberg e Steenrod[11] quando axiomatizaram a noção de Teoria de Homologia, em 1945.

A utilização de poliedros na homologia, de acordo com Whitehead (1978), "*com certeza, proporciona um cenário mais adequado para o estudo da Topologia Algébrica*". Completa que "*isto é devido ao fato da simplicidade de sua estrutura, que permite descrições explícitas e elegantes das operações básicas da teoria, em termos combinató-*

[6]Definição dada no artigo "*Uber den höheren Zusammenhang Kompakten Raüme und eine Klasse von Zusammenhangstreuen abbildungen*" publicado pela Revista **Math Annalen**, n.97, p.454-472 (1927).

[7]Definição dada por Čech no artigo "*Theorie generale de l'homologie dans un espace quelconque*", publicado no **Fundamenta Mathematicae**, n.19, p.144-183 (1932).

[8]Whitehead, J. H. C. Combinatorial Homotopy I. **Bull. Amer. Math. Soc.** n.55, p.213-245 (1949).

[9]Uma $p-$célula é qualquer espaço homeomorfo ao conjunto dos pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ do espaço euclidiano $p-$dimensional tal que $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \leq 1$.

[10]Um complexo de cadeias é um grupo graduado $C = \{C_j\}_{j\in J}$ juntamente com um homomorfismo $\partial : C \longrightarrow C$ de grau 1 tal que $\partial\partial = 0$.

[11]EILENBERG, S.; STEENROD, N. E. **Foundations of Algebraic Topology**. New Jersey: Princeton Univ. Press, 1952.

rios, incluindo um algoritmo para calcular os grupos de homologia" (Tradução nossa). Devemos ressaltar que Lyra focou a teoria dos CW-complexos em alguns de seus trabalhos, dentre os quais podemos citar: *On a conjecture in homotopy theory* e *On spaces of the same homotopy type as polyhedra*.

5.1 Introdução à Topologia Algébrica

O texto apresentado por Lyra para o 1º Colóquio Brasileiro de Matemática traz uma introdução à Topologia Algébrica por intermédio da homologia simplicial para poliedros, que historicamente foram os espaços estudados inicialmente nessa área da Matemática. Observemos que a Topologia Algébrica teve sua origem quando matemáticos como Poincaré e Betti se dedicaram à construção de invariantes topológicos que permitissem uma classificação do tipo topológico dos espaços. Betti introduziu o grupo fundamental de um espaço topológico; e Poincaré, por outro lado, associou a cada espaço uma determinada sequência de grupos abelianos chamada seus grupos de homologia em que espaços homeomorfos possuem grupos de homologia isomorfos. Como comentado anteriormente, existem diversos modos de definir grupos de homologia, porém, todos levam aos mesmos resultados.

Lyra, na introdução do trabalho, escreve: "*o objetivo imediato é construir invariantes topológicos dos espaços trianguláveis (poliedros)*". Destaca, ainda, que as propriedades fundamentais da homologia foram conjecturadas por Poincaré há 60 anos - contados na época da elaboração do material, numa contagem atualizada há 116 anos. O firme estabelecimento da teoria se deve, em grande parte, à introdução por Luitzen Egbertus Jan Brouwer(1881 - 1966), há cerca de meio século (em 1957) - numa contagem atual, há mais de um século - da técnica de aproximação simplicial. Nas décadas seguintes, James Waddell Alexander (1888 - 1971) e Lefschetz elaboraram as linhas principais da teoria como se encontra hoje. Quanto à forma de exposição, o autor afirma:

> Tivemos a oportunidade de empregar aperfeiçoamentos recentes; assinalaria principalmente as seguintes fontes: as notas mimeografadas (M.281) de E. H. Spanier (Univ. de Chicago), o seminário H. Cartan (1948-49), e os livros de Eilenberg e Steenrod, Lefschetz, e Pontrjagyn. (LYRA, 1957).

O material traz na página 97 (última folha) o índice, transcrito a seguir:

Capítulo I Homologia Simplicial
§1. Espaços afins. ....p.
§2. Simplexo e complexo. ....p.
§3. Subdivisões baricêntricas e aproximação simplicial. ..p.
§4. Grupos graduados com diferenciação. ....p.
§5. Grupos abelianos de tipo finito. ....p.
§6. Homologia simplicial. ....p.
§7. Invariança dos grupos de homologia. ....p.

Capítulo II. Aplicações.
§8. N-circuitos. ....p.
§9. Cálculo de alguns grupos de homologia. ....p.
§10. Outras aplicações. ....p.
§11. Teorema do ponto fixo de Lefschetz. ....p.

Apêndice I. Coeficientes . ...p.

Apêndice II. Cohomologia. ....p.

O Capítulo I, dedicado à Homologia Simplicial, apresenta em seu parágrafo 1 o conceito e diversas propriedades de um espaço afim, constituindo-se numa generalização do espaço euclidiano, que compreende pontos, vetores e certas operações entre eles, tais como adição e multiplicação por um escalar, essencial no estudo dos simplexos, foco da seção seguinte do trabalho[12]. Esse parágrafo é encerrado com a Proposição 1.4[13], que estabelece um homeomorfismo entre um corpo convexo[14] no espaço afim com o disco $n-$dimensional B^n do $\mathbb{R}^n$, com o Corolário 1.5[15] acerca do homeomorfismo entre espaços convexos e com o exemplo:

> O tetraedro no $\mathbb{R}^3$ é um corpo convexo, portanto homeomorfo a B^3. Este homeomorfismo leva a superfície do tetraedro sôbre (sic) a esfera S^2; as imagens das faces serão "triângulos curvilíneos" sobre a esfera. (LYRA, 1957, p.7).

Simplexos e Complexos é o título do parágrafo 2. De acordo com Lyra:

> A classe de espaços que será definida a seguir (poliedros) é construída de maneira combinatória a partir de espaços extremamente simples, os simplexos. (LYRA, 1957, p.7).

[12]Maiores detalhes sobre os espaços afins podem ser obtidos em Rodrigues (1970, p.119).

[13]Proposição 1.4: Seja X um corpo convexo num espaço afim E' de dimensão n e seja Y sua fronteira. Então existe um homeomorfismo $X \longrightarrow B^n$ (sobre) que leva Y sobre S^{n-1}. Observamos que B^n é o disco $n-$dimensional do $\mathbb{R}^n$ e S^{n-1} a fronteira de B^n, isto é, a $(n-1)-$esfera.

[14]Um corpo convexo é um conjunto compacto e convexo M, de um espaço afim E, que possui um ponto contido em um aberto de E, contido em M.

[15]Corolário 1.5: Quaisquer dois corpos convexos de um espaço afim são homeomorfos.

Na verdade, os poliedros se originam, de uma maneira mais geral, de uma categoria estabelecida a partir dos simplexos[16], denominado complexo simplicial.

Uma coleção finita K de simplexos de um espaço afim é denominado um complexo (simplicial) geométrico se satisfaz às seguintes condições: i) Se A pertence a K e B é um subconjunto de A, então B pertence a K; ii) Se A e B são elementos quaisquer de K, então A e B são bem situados[17]. O espaço subjacente $|K| = \bigcup_{A \in K} A$ é chamado poliedro associado a K.

Devemos salientar que a terminologia "bem situados", utilizada por Lyra no trabalho, é usada de outra forma por outros autores. Por exemplo, Croom (1978) se refere a esses simplexos como "*properly joined*" (propriamente ligados ou interligados (Tradução nossa)).

Na página 10, é apresentada a definição de um complexo (simplicial) abstrato[18]; e, na página 11, é estabelecido que a todo complexo geométrico está associado um complexo abstrato bem definido.

Tendo introduzida a classe dos complexos abstratos, são consideradas, em seguida, as aplicações entre tais objetos compatíveis com a sua estrutura, como, por exemplo, as aplicações simpliciais. Dados dois complexos abstratos (K, W) e (K', W'), uma aplicação $f : K \longrightarrow K'$ é dita uma aplicação simplicial se as imagens dos simplexos de (K, W) são simplexos de (K', W').

A definição e as propriedades da realização geométrica de um complexo, apresentadas em seguida, têm grande importância nos resultados que são expostos no próximo parágrafo do texto. A realização geométrica de um complexo abstrato (K, W) é qualquer complexo geométrico S tal que o complexo abstrato associado a S seja isomorfo a (K, W). Na página 12, é instituída uma realização geométrica particular de um

[16]Um simplexo A de dimensão n num espaço afim é definido por um conjunto de pontos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ independentes e é constituído dos pontos $x = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ tais que $r_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$. Dizer que os pontos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são independentes significa que para cada x, a representação $x = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ é única.

[17]Dois simplexos A e B são bem situados se são disjuntos ou sua interseção é uma face comum de A e de B (uma face de um simplexo é um simplexo gerado por um subconjunto de seus vértices).

[18]Seja K um conjunto finito e W uma parte de K. Dizemos que o par (K, W) define uma estrutura de complexo abstrato se: i) para todo elemento k de K o subconjunto $\{k\}$ pertence a W; ii) se Y pertence a W e A está contido em Y então A pertence a W. Os elementos de K são os vértices e os elementos de W seus simplexos.

complexo abstrato, denominada realização canônica[19]; na Proposição 2.3[20], ainda na página 12, é demonstrado que os poliedros subjacentes de duas realizações geométricas são homeomorfos.

Na página 13, Lyra afirma que os poliedros considerados

> [...] como espaços subjacentes de complexos geométricos, estão realizados retilineamente em algum espaço afim. Como nos interessa a topologia, generalizamos a noção para abranger a ideia de "poliedro curvilíneo".

Para conseguir isso, é posta a definição de espaço triangulável, ou seja, aquele que é homeomorfo ao poliedro subjacente $|K|$ de um complexo geométrico K. Como ilustração, é tomado um $n-$simplexo A e K o conjunto de suas $n-$faces, $K \neq A$. Temos que $|K|$ é homeomorfo a S^{n-1} (a esfera $(n-1)-$dimensional), e este homeomorfismo estabelece uma triangulação da S^{n-1}.

Continuando, considera dois complexos geométricos K e L e uma aplicação $f : K^{[0]} \longrightarrow L^{[0]}$ em que $K^{[0]}$ e $L^{[0]}$ denotam os vértices de K e L, respectivamente, e define que f é simplicial se for aplicação simplicial do complexo abstrato associado a K no complexo abstrato associado a L. Ele afirma e justifica (página 14) que "*se f for simplicial, podemos prolongá-la linearmente sobre* $|K|$". Observa, também, que uma aplicação simplicial entre complexos geométricos é um caso particular de uma aplicação mais geral, a aplicação linear[21].

O parágrafo é encerrado com a Proposição 2.5[22], que apresenta condição para que uma aplicação definida nos vértices de um complexo geométrico, levando valores em outro complexo geométrico, possa ser prolongada a uma aplicação linear entre os espaços subjacentes aos dois poliedros.

No parágrafo 3, Lyra expõe sobre a subdivisão baricêntrica e a aproximação simplicial, técnica que permite aproximar funções contínuas entre poliedros por aplicações

[19]Se S é um complexo abstrato consideremos o subespaço formado pelos pontos $(r_{(i)_{i\in S}})$ que satisfazem às condições: i) $i|i \in S, r_i \neq 0$ é um simplexo de S; ii) $r_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$. O subespaço assim construído é chamado realização canônica de S e é um complexo geométrico isomorfo a S.

[20]Proposição 2.3: Duas realizações geométricas quaisquer de um complexo (simplicial) abstrato são homeomorfas.

[21]Sejam K_1 e K_2 complexos geométricos. A aplicação $f : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ é linear se $x = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$, então $f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(a_i)$, onde os a_i são vértices de K_1, mas os $f(a_i)$ não necessariamente são vértices de K_2.

[22]Proposição 2.5: Uma aplicação $f : K_1^{[0]} \longrightarrow K_2$ pode ser prolongada a uma aplicação linear $|K_1| \longrightarrow |K_2|$ se as imagens dos vértices de um simplexo qualquer de K_1 estiverem contidas em algum simplexo de K_2.

simpliciais entre os mesmos. Esse tipo de aplicação permite induzir homomorfismos nos complexos de cadeias desses poliedros e utilizá-los para definir homomorfismos nos grupos de homologia.

Notemos que, genericamente, nem toda aplicação contínua f entre dois poliedros K e L admite aproximação por uma função simplicial. Porém, se isso não acontece, é possível substituir f por uma aplicação simplicial g entre os dois poliedros, homotópica[23] a f. Para isso, é necessário usar o processo de subdivisão de um complexo simplicial K em simplexos menores pela construção de um novo complexo simplicial $K^{(1)}$ chamado subdivisão baricêntrica de K. Assim, podemos formar também $(K^{(1)})^{(1)} = K^{(2)}$ e, em geral, definimos a $r-$ésima subdivisão baricêntrica $K^{(r)} = (K^{(r-1)})^{(1)}$.

Lyra também introduz conceitos, resultados e caracterizações acerca da subdivisão de complexos simpliciais que são utilizados na demonstração da Proposição 3.20[24], página 31, resultado central da seção, que assegura para aplicações contínuas e homotópicas f e g, entre complexos geométricos, a existência de funções simpliciais contíguas[25] cujo conjunto de saída, para algum n, é a $n-$ésima subdivisão baricêntrica do domínio de f e g.

O parágrafo 4 trata da categoria dos grupos graduados[26] com diferenciação[27] (ou operador diferencial). Seja G um grupo graduado com diferenciação d, então, existe um subgrupo $Z(G)$, núcleo de d, e um subgrupo $B(G)$, imagem de G por d. Colocando $Z_n(G) = Z(G) \cap G_n$ e $B_n(G) = B(G) \cap G_n$ temos que cada n, $B_n(G) \subset Z_n(G)$ e, também, $Z(G) = \sum_n Z_n(G)$ e $B(G) = \sum_n B_n(G)$. Para cada n é definido o grupo $H_n(G)$ como o quociente de $Z_n(G)$ por $B_n(G)$ denominado grupo derivado de grau n de G (conhecido atualmente como $n-$ésimo grupo de homologia de G). Ainda, homomorfismos permitidos[28] entre grupos graduados G e G' levam ciclos de G (elementos

[23]Sejam X e Y dois espaços topológicos e f, g aplicações contínuas de X em Y. Dizemos que f é homotópica a g se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \longrightarrow Y$, sendo $I = [0, 1]$, tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$.

[24]Proposição 3.20: Sejam K e $\overline{K}$ complexos geométricos, f_0, f_1 aplicações contínuas de $|K|$ em $|\overline{K}|$ tais que f_0 e f_1 são homotópicas, então existe um inteiro $n \geq 0$ e aproximações simpliciais $\varphi_0, \varphi_1 : |K^{(n)}| \longrightarrow \overline{K}$ de f_0 e f_1, respectivamente, tais que φ_0 e φ_1 pertencem à mesma classe de contiguidade.

[25]Duas aplicações simpliciais $\varphi_1, \varphi_2 : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ são contíguas se para todo simplexo σ de K_1 de vértices $a_0, a_1, \ldots, a_r$, os vértices $\varphi_1(a_0), \ldots, \varphi_1(a_r), \varphi_2(a_0), \ldots, \varphi_2(a_r)$ pertencem a um mesmo simplexo. Essa terminologia também é utilizada por Spanier (1966, p.130), que estabelece diversas propriedades a respeito desse tipo de aplicação.

[26]Um grupo abeliano G é dito graduado se G é uma soma direta de uma família de subgrupos $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

[27]Um endomorfismo d de G em G é uma diferenciação (ou operador diferencial) se: i) para todo $n, d(G_n) \subset G_{n+r}$ em que r é um inteiro independente de n (grau de d); ii) $d(dx) = 0$ para todo $x \in G$.

[28]Um homomorfismo $\phi : G \longrightarrow G'$ que respeita a graduação $\phi(G_n) \subset G'_n$, para todo n inteiro e

$Z(G)$) em ciclos de G' e bordos de G (elementos de $B(G)$) em bordos de G' e, por conseguinte, induzem homomorfismos entre os grupos de homologia associados.

A seção é finalizada com um conceito apropriado de homotopia na categoria dos grupos graduados, mais especificamente, de aplicações algebricamente homotópicas[29], que induzem aplicações idênticas (Proposição 4.5[30]) nos grupos de homologia.

O parágrafo 5, denominado "Grupos abelianos de tipo finito" é dedicado aos resultados e propriedades da Álgebra, relativos à teoria dos grupos abelianos livres (somas diretas de grupos cíclicos infinitos). É encerrado com a Proposição 5.5[31] acerca da decomposição de um grupo abeliano de tipo finito (também dito finitamente gerado), isto é, grupos abelianos com sistemas finitos de geradores, como soma direta de um grupo livre com posto finito (grupo com base consistindo de um número finito de elementos) e de finitos grupos cíclicos de ordens finitas.

No parágrafo 6, "Homologia simplicial", Lyra retorna aos complexos abstratos, a partir dos quais são construídos grupos graduados e a derivação, que dão origem aos grupos de homologia. Para tanto, define dois complexos de cadeias a partir de um complexo abstrato K: i) o complexo $C(K)$ das cadeias orientadas[32] de K; ii) O complexo $\overline{C}(K)$ das cadeias ordenadas[33] de K. Introduz, ainda, os grupos de homologia de um par (K, L) em que K é um complexo arbitrário e L um subcomplexo de K, ou seja, um subconjunto de simplexos K que também forma um complexo. Como corolário da Proposição 4.2, seção 4 (página 37), extrai duas sequências exatas em homologia do par (K, L) geradas tanto pelos complexos orientados, como pelos complexos ordenados, os quais são de muita utilidade no cálculo dos grupos de homologia de certos espaços.

Nessa seção, o operador diferencial, designado pela letra grega ∂, entre os complexos de cadeias, é chamado de operador bordo. Os elementos x tais que $\partial x = 0$ são chamadas ciclos, e os elementos z tais que $z = \partial x$, bordos.

---

compatível com as diferenciações é denominado homomorfismo permitido.

[29]Sejam G e G' grupos graduados com diferencias e $f, g : G \longrightarrow G'$ aplicações permitidas. As aplicações f e g são algebricamente homotópicas se existe um endomorfismo $D : G \longrightarrow G'$ de grau r tal que $f - g = Dd + dD$.

[30]Proposição 4.5: se $f, g : G \longrightarrow G'$ são homomorfismos permitidos de G em G' tais que f e g são ditas algebricamente homotópicas, então $f_* = g_*$.

[31]Proposição 5.5: Todo grupo abeliano finitamente gerado é soma direta de um grupo livre de posto finito e de um número finito de grupos cíclicos de ordens finitas.

[32]Um $q-$simplexo orientado é uma sequência orientada de $(q + 1)$ vértices distintos em que dois simplexos com os mesmos vértices são equivalentes se diferem entre si por uma permutação par de seus vértices.

[33]Um $q-$simplexo ordenado é uma sequência de $(q + 1)$ vértices (não necessariamente distintos) de um mesmo simplexo K.

Continuando, observa:

> O complexo de cadeias $\overline{C}(K)$ definido a partir de um complexo abstrato K é útil para demonstrar certos resultados, mas pouco manejável para cálculos visto que para qualquer complexo não vazio, $\overline{C}(K)$ possui um número infinito de geradores. $C(K)$ por outro lado tem somente um número finito de geradores. Vamos mostrar em seguida que os grupos de homologia calculados a partir de um ou de outro dos complexos de cadeias são isomórficos. (sic) (LYRA, 1957, p.47)

A demonstração desse último fato mencionado é apresentada na Proposição 6.3, página 48. Antes, no Lema 6.2, é estabelecido que os grupos de homologia de um complexo definido por um conjunto $v_0, v_1, \ldots, v_q$, em dimensão maior que q (a partir das cadeias orientadas), é nulo, e, na dimensão zero, é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

O complexo $C(K)$ das cadeias orientadas é um grupo livre finitamente gerado e, portanto, os grupos de homologia $H(K)$ construídos a partir dessas cadeias, que são isomorfos aos grupos de homologia $\overline{H}(K)$, construído a partir das cadeias ordenadas, são grupos livres finitamente gerados. Logo, $H_q(K)$ se escreve como uma soma direta de $\mathbb{Z}^{r(q)}$ ($r(q)$ cópias do conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$) e de um número finito de grupos cíclicos de ordens finitas. O número $r(q)$ é chamado de número de Betti de K, em dimensão q.

Sendo K um complexo geométrico, $|K|$ o poliedro definido por K e $Ab(K)$ o complexo abstrato associado a K, o grupo de homologia de $|K|$ em dimensão q é definido por $H_q(|K|) = H_q(Ab(K))$. Observa que, em vista da definição:

> O grupo de homologia de um poliedro finito depende do complexo geométrico usado para definir o poliedro; não é pois uma definição intrínseca em termos da homologia de $|K|$, mas depende da decomposição simplicial (LYRA, 1957, p. 49).

Informa, ainda, que à frente será demonstrado:

> Os grupos de homologia são invariantes topológicos, não dependendo da decomposição simplicial do poliedro adotada. Se $|K|$ é um poliedro finito de dimensão n, $H_q(|K|)$ são grupos abelianos livres finitamente gerados, e $H_q(|K|) = 0$ para $q > n$. (LYRA, 1957, p. 49)

A soma alternada dos números de Betti é definida como a característica de Euler-Poincaré de K. A Proposição 6.4, página 50, mostra que a soma alternada dos números de $q-$simplexos de K coincide com o número de Betti.

Na observação da página 50, Lyra ressalta que, uma vez demonstrada a invariança topológica, dos grupos de homologia, a característica de Euler é igualmente um invariante topológico do poliedro $|K|$.

Em seguida, é visto que "*a decomposição de um poliedro em componentes conexas*[34] *é perfeitamente determinada pelo seu complexo abstrato associado; enfim, a decomposição em componentes encontra expressão em termos do grupo de homologia em dimensão zero*" (Lyra, p.51). A Proposição 6.7 (p.53) mostra que, se K é um complexo conexo, então $H_0(K)$ é isomorfo ao conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros. O Corolário 6.8 apresenta uma computação de $H_0(K)$ em termos das componentes conexas de K; se K é um complexo abstrato com p componentes, então $H_0(K)$ é a soma direta de $\mathbb{Z}$ (p vezes).

Finalizando a seção, é definido um complexo abstrato $\hat{K}$, chamado cone sobre K, e mostrado que $H_0(\hat{K}) \cong \mathbb{Z}$ e $H_q(\hat{K}) = 0$ para todo $q > 0$. Um complexo com tais grupos de homologia é denominado acíclico. Empregando a decomposição simplicial da $n-$esfera S^n, a partir do bordo de um $(n+1)-$simplexo, são obtidos na Proposição 6.11, página 56, os grupos de homologia da esfera S^n que são: $H_q(S^n) = 0$ para todo $q \neq 0$ e $H_0(S^n) = H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

O parágrafo 7 é dedicado à invariança dos grupos de homologia. É iniciado com algumas definições e resultados que levam às três conclusões expostas a seguir. A primeira delas diz respeito ao isomorfismo entre um complexo abstrato e sua $n-$ésima subdivisão baricêntrica (Corolário 7.5[35]). A segunda, Corolário 7.6[36], página 60, garante que aplicações simpliciais contíguas entre dois complexos induzem o mesmo homomorfismo nos grupos de homologia associados. A terceira, Corolário 7.7[37], página 61, aborda acerca de aplicações da mesma classe de contiguidade também induzirem homomorfismos idênticos em homologia.

Tais conclusões levam às seguintes propriedades do homomorfismo induzido: i) se f é a aplicação identidade do poliedro K, então a sua induzida em homologia é o homomorfismo identidade; ii) se $f : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ e $g : |K_2| \longrightarrow |K_3|$ são aplicações contínuas, a induzida $(g \circ f)_*$ em homologia, é a composta das induzidas g_* e f_*, ou seja, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Isso remete aos dois resultados que encerram a seção acerca da invariança topológica das homologias (Proposição 7.8[38], página 63) e das homotopias

[34]Seja K um complexo abstrato. Dizemos que K é conexo (no sentido combinatório) se for impossível representar K como uma reunião disjunta de dois simplexos não vazios de K. Se isso for possível, cada um desses simplexos é denominado componente conexa de K.

[35]Corolário 7.5: O complexo abstrato K e sua $n-$ésima subdivisão baricêntrica $K(n)$ tem grupos de homologia isomorfos.

[36]Sendo K_1 e K_2 complexos abstratos; Corolário 7.6: Se φ e ψ são aplicações simpliciais contíguas de K_1 em K_2, então as aplicações permitidas $\overline{\varphi}, \overline{\psi} : \overline{C}(K_1) \longrightarrow \overline{C}(K2)$ são algebricamente homotópicas, e, portanto, induzem o mesmo homomorfismo em homologia $\varphi_* = \psi_*$.

[37]Corolário 7.7: Se duas aplicações simpliciais pertencem à mesma classe de contiguidade, então elas são algebricamente homotópicas e induzem o mesmo homomorfismo em homologia.

[38]Proposição 7.8: Se $f : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ é um homomorfismo, então $f_* : (H_q)((|K_1| \approx H_q(|K_2|)$ para

(Proposição 7.10[39], página 63) dos poliedros.

O Capítulo II contém algumas aplicações que culminam no Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz. O parágrafo 8 do mesmo apresenta propriedades de um tipo especial de complexo simplicial denominado $n-$circuitos[40]. Croom (1978, p.30) chama esse complexo simplicial de pseudovariedade; como exemplo, são citadas as superfícies compactas trianguladas - esfera S^2, toro, plano projetivo etc., e a esfera S^n – com a triangulação definida pelo homomorfismo com o bordo de um $(n+1)-$simplexo. Lyra observa,

> [...] o fato de um circuito ser orientável ou não orientável, independe da orientação escolhida sobre o $n-$simplexo de partida σ_1^n. 2) Veremos lógo (sic) mais que não depende tampouco do simplexo do qual partimos, pois a orientabilidade será expressa por uma condição hom-ológica (sic). É pois uma propriedade do poliédro (sic), não dependendo mesmo da particular decomposição simplicial adotada. (p.68).

Uma condição homológica da orientabilidade é destacada na Proposição 8.2[41], em termos do anulamento ou não do $n-$ésimo grupo de homologia do $n-$circuito.

Variedades trianguladas dão origem a $n-$circuitos de um tipo especial que se denominam variedades combinatórias. O autor afirma que a importância das variedades combinatórias pode ser percebida em vista dos seguintes fatos:

> (a) Uma decomposição simplicial de uma superfície compacta dá origem a uma variedade combinatória, (b) por um teorema de S.S.Cairns e J.H.Whitehead, toda variedade diferenciável compacta pode ser triangulada segundo uma variedade combinatória. As variedades combinatórias foram primeiramente estudadas por Poincaré, que demonstrou para elas seu famoso teorema de dualidade; para uma variedade compacta orientável, há a seguinte relação entre seus números de Betti, $P_i = P_{i-1}$ para $0 \leq i \leq n$. (LYRA, 1957, p.70).

todo $q > 0$. Isto é, os grupos de homologia são invariantes topológicos do poliedro.

[39]Proposição 7.10: Os grupos de homologia são invariantes do tipo de homotopia.

[40]Um complexo geométrico K é dito um $n-$circuito se for um complexo de dimensão n tal que: a) cada $(n-1)-$simplexo A^{n-1} é face de dois e somente dois $n-$simplexos; b) dados dois $n-$simplexos A_1^n e A_k^n de K, existe uma sequência $A_1^n, A_1^{n-1}, A_2^n, A_2^{n-1}, \ldots, A_k^n, A_k^{n-1}$ tais que A_i^{n-1} é face de A_{i-1}^n e A_i^n; c) K é irredutível em relação às condições (a) e (b), isto é, não existe subcomplexo K' de K, $K \neq K'$, satisfazendo às condições (a) e (b).

[41]Proposição 8.2: Seja K um $n-$circuito. Então K é orientável ou não orientável, segundo $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$ ou $H_n(K) = 0$, respectivamente.

Lyra ainda informa que "*Recentemente* [na época da escrita do texto], *as variedades combinatórias voltaram de novo ser centro de interesse com os trabalhos de Milnor e Thom*".

O parágrafo 9 trata do cálculo de alguns grupos de homologia. É iniciado com a observação de que para computar grupos de homologia, é interessante obter complexos de cadeias, o mais simples possível, isto é, com número mínimo de geradores (p.71). Aborda também que "*a possibilidade de reduzir a subcomplexos de cadeias mais simples vai depender da estrutura geométrica do complexo* K" (p.71).

Seguindo, são apresentadas duas condições que permitem a redução de um complexo a subcomplexos mais simples. Com a utilização dos mesmos, Lyra apresenta os cálculos dos grupos de homologia: do toro, do plano projetivo, da superfície orientável de genus p e os grupos de homologia de uma superfície não orientável. Termina a seção observando na página 77 que, como toda superfície compacta é homeomorfa a uma esfera S^2, uma superfície orientável ou uma superfície não orientável; as superfícies compactas podem ser classificadas em termos de dois invariantes topológicos: a orientabilidade e a característica de Euler.

O parágrafo seguinte, denominado "Outras Aplicações", também é numerado com o mesmo algarismo usado anteriormente. Seja (X, A) um par triangulado[42] e Y um espaço triangulável qualquer. A primeira delas, indicada com a letra (A), se refere às condições homológicas necessárias para a extensão de uma aplicação $f : A \longrightarrow Y$, arbitrária, ou seja, a condição necessária para existência de uma aplicação $\overline{f} : X \longrightarrow Y$ tal que $\overline{f} \circ i = f$, onde $i : A \longrightarrow X$ é a inclusão. É mostrado que a condição necessária para a existência da extensão de f é que *núcleo* $i_* \subset$ *núcleo* f_*, em que i_* e f_* são os homomorfismos induzidos em homologia. São introduzidos dois exemplos, o primeiro deles mostra que se S_0^n e S_1^n são duas esferas e S_0^n é a fronteira do disco $(n+1)-$dimensional $D^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ qualquer aplicação $f : S_0^n \longrightarrow S_1^n$ não pode ser estendida a uma aplicação $\overline{f} : D^{n+1} \longrightarrow S_1^n$ se o grau[43] da aplicação f for diferente de zero; o segundo exemplo mostra que se S^1 é o equador de S^2 e T^2 é o toro bidimensional, então nenhum homeomorfismo f de S^1 sobre o meridiano de T^2 pode ser estendido a uma aplicação $f : S^2 \longrightarrow T^2$.

A segunda aplicação, referida como (B), versa sobre homeomorfismos entre espaços euclidianos. Usando a ideia de extensão, é mostrada na Proposição 9.1 (p.79) que:

[42] Um par (X, A) é chamado triangulado se existe um complexo geométrico K, um subcomplexo L de K e uma triangulação de X segundo L e uma aplicação contínua $t : |K| \longrightarrow X$.

[43] Seja $f : S_0^n \longrightarrow S_1^n$ uma aplicação contínua. Ela induz em homologia $f_* : H_n(S_0^n) \longrightarrow H_n(S_1^n)$. Como $H_n(S_0^n) \cong \mathbb{Z}$ e $H_n(S_1^n) \cong \mathbb{Z}$, com geradores u_0 e u_1, então $f_*(u_0) = d_{(f)} u_1$. O número inteiro $d_{(f)}$ denomina-se grau de f.

"*duas esferas ou dois espaços euclidianos são homeomorfos se, e somente, eles têm a mesma dimensão*". A aplicação C é intitulada "*Situação homológica de um retracto*". Considerando um par triangulado (X, A) em que A é um retrato[44] de X, é apresentada a seguinte decomposição da homologia de X : $H_q(X) \cong H_q(A) \oplus H_q(X, A)$. Como consequência, é estabelecido o Corolário 9.3: "*S^n não é um retrato de S^{n+1}*". E, como aplicação do corolário, é demonstrado o teorema do ponto fixo[45] de Brouwer, Proposição 9.4[46], página 80, referente à existência de pontos fixos para aplicações entre bolas (discos $(n+1)-$dimensionais).

A seção é encerrada com a observação de que o teorema do ponto fixo de Brouwer acarreta a não existência de uma retração $r : B^{n+1} \longrightarrow S^n$.

A seção 10 do capítulo II introduz o teorema do ponto fixo de Lefschetz, que Lyra, na página 81, considera: "*um dos belos resultados demonstrados dentro da homologia simplicial*". O nome do teorema foi dado em homenagem ao célebre matemático Solomon Lefschetz (1884 - 1972).

Dado um poliedro qualquer $|K|$, uma aplicação contínua $f : |K| \longrightarrow |K|$ nem sempre tem ponto fixo. O teorema de Lefschetz estabelece uma condição suficiente (não necessária) para que f admita um ponto fixo.

Devemos observar que o primeiro anúncio do Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz para uma classe restrita de poliedros se deu em 1923[47], mas os detalhes apareceram três anos depois[48]. Nesta altura do texto, Lyra (1957, p.81) informa: "*será conveniente usar pela primeira vez homologia com coeficientes num corpo (ver detalhes: Appendice I (sic)*". Ainda acrescenta: que as propriedades anteriores da homologia se verificam também para a homologia com coeficientes num corpo com pequenas mudanças óbvias. Por exemplo: se K é conexo $H_0(K, F) \cong F$ em vez de ser isomorfo a $\mathbb{Z}$. Os grupos $H_q(K, F)$ são, pois, invariantes topológicos do espaço $|K|$ (LYRA, 1957, p.82).

Em seguida, é definido o número de Lefschetz[49] $\Lambda(\varphi_*)$ de uma aplicação $\varphi : |K| \longrightarrow$

[44] Um espaço A é um retrato de X se existe uma aplicação contínua $r : A \longrightarrow X$, tal que $r(x) = x$, para todo $x \in A$.

[45] Um ponto $x \in A$ é um ponto fixo da aplicação $f : A \longrightarrow A$ se $f(x) = x$.

[46] Proposição 9.4: Para $n \geq 0$ a bola B^{n+1} tem a propriedade do ponto fixo, isto é, toda aplicação contínua $f : B^{n+1} \longrightarrow B^{n+1}$ tem pelo menos um ponto fixo.

[47] No artigo: LEFSCHETZ S. Continuous transformations of manifolds. **Proc. Nat. Acad. Sci., USA**. 9 (1923), p.90 - 93.

[48] No artigo: LEFSCHETZ S. Intersections and transformations of complexes and manifolds. **Trans. Amer. Math. Soc.**. 28 (1926), 1 -49.

[49] O número de Lefschetz $\Lambda(\varphi_*)$ de uma aplicação contínua $\varphi : |K| \longrightarrow |K|$ é definida como $\Lambda(\varphi_*) = \sum_q (-1)^q$traço φ, onde $\varphi_* : H_q(K, F) \longrightarrow H_q(K, F)$ e F é um corpo.

$|K|$, onde $|K|$ é um poliedro. É mostrada a Proposição 10.3 (Teorema de Lefschetz[50]), que estabelece a existência de pontos fixos para φ ao não anulamento de $\Lambda(\varphi_*)$.

Cabe notar que a existência de pontos fixos para aplicações de espaços compactos em si mesmos, em geral, não depende somente desses espaços, mas também da aplicação considerada. O caso de Brouwer, no qual o espaço é o disco $n-$dimensional D^n, é uma exceção. Esse fato foi precisamente expresso na fórmula descoberta por Lefschetz em 1926.

Continuando, é demonstrado que no caso de f ser uma deformação[51] (Lema 10.4, p.86), tem-se $\Lambda(\varphi_*) = X(K)$: o número de Lefschetz é igual à característica de Euler do complexo.

Encerrando a seção, são apresentadas consequências do teorema de Lefschetz. A primeira, Proposição 10.5, página 87, diz respeito a um poliedro contraível[52]: "*se* $|K|$ *é um poliedro contraível, então* $|K|$ *tem a propriedade do ponto fixo*[53]. Outras consequências: i) o plano projetivo tem a propriedade do ponto fixo ; ii) se Φ_p é uma superfície orientável de genus $p > 1$, então toda deformação de Φ_p tem ponto fixo; iii) (Proposição 10.6, p.89) Toda aplicação de $f : S^n \longrightarrow S^n$ de grau $d_{(f)} \neq \pm 1$ tem ponto fixo. Se n for par, toda aplicação f tal que $d_{(f)} \neq -1$ tem ponto fixo; se n for ímpar, toda aplicação f de grau $d_{(f)} \neq 1$ tem ponto fixo.

Numa última observação, ele afirma que "*é fácil mostrar que existem deformações sem ponto fixo*". Para justificar o fato, considera a esfera S^3 e lembra que toda deformação f da S^3 tem número de Lefschetz $\Lambda(f_*)$ nulo visto que $\Lambda(f_*) = \lambda(S^3) = 0$, onde $\lambda(S^3)$ é a característica de Euler. Agora, como S^3 admite uma estrutura de grupo de Lie, qualquer translação por um elemento diferente da unidade é uma deformação sem ponto fixo.

O material traz dois apêndices que, conforme Lyra (1957, p.89):

---

[50]Proposição 10.3 (Teorema de Lefschetz): Seja $f : |K| \longrightarrow |K|$ uma aplicação contínua de um poliedro $|K|$ em si próprio. Se o número de Lefschetz $\Lambda(\varphi_*)$ for diferente de zero, então f tem um ponto fixo.

[51]Uma aplicação contínua $f : |K| \longrightarrow |K|$ é chamada uma deformação se f é homotópica à identidade $I_{|K|}$.

[52]Um espaço X se diz contrátil se a aplicação identidade de X é homotópica a uma aplicação constante de algum ponto de X.

[53]Um espaço X tem a propriedade do ponto fixo se toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow X$ tem um ponto fixo.

> não é de dar demonstrações dos resultados citados, pois isto requereria todo um capitulo (sic). É simplesmente um catálogo dos resultados necessários: uma breve descrição dos produtos Tor e Ext, da formula (sic) de coeficiente universal, com uma aplicação na homologia.

Devemos ressaltar que os grupos de homologia com coeficientes arbitrários são determinados pelos grupos de homologia com coeficientes inteiros através do Teorema dos Coeficientes Universais para homologia. O mesmo acontece para os grupos de cohomologia com coeficientes arbitrários. As demonstrações desses dois teoremas são similares exceto na utilização dos funtores Tor e Ext[54]. Como exemplo, é apresentado o cálculo dos grupos de homologia do espaço projetivo P_2 com coeficiente em $\mathbb{Z}_2$ e observado que $H_2(P_2, \mathbb{Z}_2) \neq 0$ enquanto que $H_2(P_2, \mathbb{Z}) = 0$.

O Apêndice II trata dos grupos de cohomologia $H^q(K, G)$ de um complexo abstrato K, em que G é um grupo abeliano. De maneira similar ao feito para homologia, mostra-se que toda aplicação contínua $f : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ induz um homomorfismo bem determinado $f^* : H^q(K_2, G) \longrightarrow H^q(K_1, G)$, satisfazendo uma série de propriedades que são enunciadas por Lyra nas páginas 93 e 94. Exemplificando ele calcula a cohomologia da $n-$esfera. Encerra o Apêndice II, e também o texto, com algumas informações:

> Enquanto do ponto de vista aditivo a cohomologia nada nos diz de novo, visto ser determinada pela homologia, se tomarmos por outro lado, $G =$ um anel (por ex. o anel $\mathbb{Z}$), possue (sic) a cohomologia uma estrutura multiplicativa que é igualmente um invariante topológico. (p.94)

Ademais, Lyra diz que "*esta estrutura adiciona algo de novo pois estruturas multiplicativas distintas são compatíveis com a mesma estrutura aditiva; trata-se do produto "cup"* ", cuja definição ele apresenta na página 95. Ainda segundo o autor:

> Grande parte das pesquisas recentes tem sido em cohomologia devido a existência desta estrutura multiplicativa e de outras operações cohomológicas que podem ser definidas. Homologia, no entanto, é a teoria natural para usar juntamente com a teoria de homotopia. (p.95)

Complementa "*para muitos problemas, cohomologia é a linguagem natural para exprimir conceitos necessários. Como exemplo, podemos citar a teoria da obstrução e a extensão de aplicações*". Antes de finalizar o material, estabelece o o uso do Teorema de de Rham que "*a cohomologia a coeficientes reais de uma variedade pode ser calculada a partir de suas formas diferenciais munidas da usual estrutura de anel graduado com operador diferencial (p.96)*".

[54]Maiores detalhes acerca desses dois funtores se encontram no capítulo 7 de (MUNKRES, 1984).

No prefácio do texto, Lyra apresenta agradecimentos aos professores Alexandre A. Martins Rodrigues e Chaim Samuel Hönig "*que tendo lido a primeira redação dêste (sic) curso, fizeram valorosas sugestões*".

Quanto às referências bibliográficas, essas encontram-se inseridas com o título "Pequena Bibliografia", na página II, no início da obra logo após o Prefácio. Constam nela as seguintes obras, transcritas exatamente como apresentadas no texto:

(1) **E. H. Spanier:** "Algebraic Topology I", notas mimeografadas da Univ. de Chicago - definitivamente esgotadas. O prof. Spanier está preparando, a partir destas notas, um livro que muito promete

(2) **H. Cartan:** Séminaire 1948-49. êste pode ser obtido de Secretarist Mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris (V). (preço:1200 fr.)

(3) **L. Pontrjagyn:** "Foundations of Combinatorial Topology",Greylock Press (1952); bôa introdução cobrindo aproximadamente o mesmo caminho que o presente curso.

(4) **Eilenberg & Steenrod:** "Foundations of Algebraic Topology", Princeton Univ. Press (1952). O "approach" axiomático; difícil.

(5) **Seifert & Threlfall:** "Lehrbuck der Topologie" (1934) reimpresso por Chelsea Publ. 1947; existe tradução em espanhol. A melhor introdução entre os livros mais antigos.

(6) **S. Lefschetz:** "Introduction to Topology", Princeton U.P.1949. Excelente livro, mas de leitura não muito fácil. Contém ótima coleção de problemas.

(7) **S. Lefschetz:** "Algebraic Topology" (Colloquium Publ. of the American Math. Soc. 1942). Livro de leitura difícil, mas uma verdadeira mina de informações e ideias; um dos marcos fundamentais no desenvolvimento da Topologia Algébrica. Bibliografia bem completa até 1942.

(8) **Patterson:** "Topology" (Oliver & Boid, 1956). Excelente livrinho que dá bastante exemplos geométricos; ótimo para os que se iniciam não perderem de vista a espinha dorsal geométrica da Topologia Algébrica.

(9) **Aleksandrov & Hopf:** "Topologie", Springer 1935. Bem que algo antiquado na forma de apresentação, é um valioso livro que se mantém próximo ao conteúdo geométrico.

Uma pequena bibliografia dos principais artigos clássicos se encontra no livro de Lefschetz (6).

Considerações Finais

O presente trabalho de Doutoramento teve como objetivo investigar o início da pesquisa em Topologia Algébrica no Brasil, bem como apresentar uma biografia do professor e pesquisador Carlos Benjamin de Lyra, uma das principais personagens nesse processo. Além disso, buscou-se analisar a produção acadêmica do citado professor. Nesse sentido, alguns questionamentos nortearam este trabalho: como se iniciou o desenvolvimento da pesquisa em Topologia Algébrica no Brasil? Qual a relevância das obras de Lyra nesse desenvolvimento? Que influência exerceu na formação de novos pesquisadores? Qual a repercussão de seus trabalhos junto à comunidade matemática?

A Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (FFCL – USP) foi fundada em 1934 e para que lecionassem nela foram contratados professores estrangeiros, dentre os quais destacamos Luigi Fantapiè. Fantapiè foi o responsável pela estruturação do curso de Matemática. Cândido Lima da Silva Dias, que em 1932 havia ingressado na Escola Politécnica, transferiu-se para o recém criado curso de Matemática. Após concluir a Graduação aperfeiçoou-se em Topologia nos EUA com Cartan e Spanier. Inicialmente foi auxiliar na Cátedra de Análise Matemática, sob responsabilidade de Omar Catunda, em seguida, com o retorno dos professores estrangeiros a seus países, foi conduzido à regência da Cátedra de Complementos de Geometria e Geometria Superior. Dias ainda foi responsável, segundo Gomide (2008, p.93), pelo primeiro curso em Topologia Algébrica ministrado no Brasil, tendo sido um de seus alunos Carlos Benjamin de Lyra.

Lyra nasceu em Recife-PE. Após o falecimento do pai e novo casamento da mãe mudou-se com a nova família para os EUA. Lá, em viagens de trem, teve contato com o célebre matemático Richard Courant que o influenciou na escolha da Matemática como área de estudo. Após terminar os estudos secundários e retornar ao Brasil, que implicava numa escolha de nacionalidade, Lyra ingressou no curso de Matemática da FFCL. Dessa vez, influenciado por Cândido Dias, escolheu a Topologia Algébrica como campo de pesquisa. Após terminar a Graduação viajou à França para desenvolver estudos pós-graduados. Assistiu aos seminários de Cartan sobre espaços fibrados e às palestras de Hurewicz sobre homotopia que o levaram a estudar a Teoria de Borsuk, tornando-se este, posteriormente, foco de seu trabalho de Doutoramento. Após o retorno ao Brasil, foi contratado em 1954 para atuar como segundo auxiliar na Cátedra de Análise Matemática, ao lado de Elza Furtado Gomide. Ainda, em 1956, participou do *International Symposium on Algebraic Topology*, Cidade do México, e em 1961 visitou, com bolsa da *Rockfeller Foundation*, o *Institute for Advanced Studies* de Princeton. Tais fatos nos fazem inferir que talvez tenha sido por este contato com outras culturas que Lyra adquiriu um caráter universalista. Devemos observar que seus interesses e opiniões não se limitavam apenas à Matemática, mas a ciência, arte e cultura como um todo. Também, o contato com proeminentes pesquisadores estrangeiros possibilitou, mais tarde, a vinda de muitos deles ao Brasil, o que contribuiu de maneira considerável para o desenvolvimento da Matemática no país.

A obra de Lyra apresenta grande importância para a Matemática no Brasil. Especialmente citamos "Introdução à Topologia Algébrica", primeiro material didático sobre o tema publicado em língua portuguesa. Não podemos deixar de mencionar os trabalhos de Doutorado e de Livre Docência que serviram de ponto de partida para novas pesquisas. A importância de Lyra como educador ainda identifica-se no fato de ter influenciado estudantes na escolha de suas carreiras acadêmicas. Apesar de não possuir descendência científica, os proeminentes professores e pesquisadores Gilberto Francisco Loibel e Daciberg Lima Gonçalves, que possuem vasta descendência, indicam que foram fortemente influenciados por Lyra a prosseguir seus estudos na área de Topologia Algébrica.

Com este trabalho, esperamos, acima de tudo, contribuir com o banco de investigações biográficas de matemáticos importantes que atuaram no cenário brasileiro e, também, ajudar na escrita da História da Matemática brasileira, como o fez, por exemplo, Cavalari (2012) ao narrar em sua trabalho de doutoramento a trajetória acadêmica do Professor Chaim Samuel Hönig, que também atuou na USP por mais de quatro décadas, desenvolveu pesquisas relevantes e assumiu importantes atividades administrativas e de organização de sociedades e eventos matemáticos de destaque no Brasil. Justifica-se a escolha dessa abordagem no fato de que esse campo de investigações biográficas está aberto, visto que existe um grande número de matemáticos brasileiros brilhantes cujas trajetórias acadêmicas merecem ser narradas e registradas no rol daqueles que contribuíram com o desenvolvimento da pesquisa científica em nosso país.

O pioneirismo desta pesquisa se caracteriza pelo fato de ser a primeira a ter como objeto de estudo a Topologia Algébrica no Brasil, com a descrição biográfica de um ressaltante pesquisador matemático nesse campo, paralelamente ao levantamento e à análise matemática de sua obra com a identificação de sua influência em termos de conhecimento universal capaz de despertar o interesse em estudantes de sua época para a pesquisa nessa área.

Referências Bibliográficas

Documentos e Obras Consultadas

AZEVEDO, A. C. P.; SILVA, C. P. **Mestrados e Doutorados obtidos no Brasil entre 1942 e 2004**. s.d. Disponível em <http://www.sbhmat.com.br/matematica.pdf>. Acesso: out. 2012.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A history of Mathematics**. 3ed. New Jersey: Hoboken, 2011.

CALABRIA, A. R. **Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática: breve histórico e pequenas biografias de seus participantes**. 2010. 174f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2010.

CAVALARI, M. F. **As contribuições de Chaim Samuel Hönig para o desenvolvimento da Matemática brasileira**. 2012. 216f. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2012.

COBRA, T. T. **Sobre coincidências e pontos fixos de aplicações**. 2010. 63f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2010.

COONCE, H. **Mathematics Genealogy Project**. s.d. Disponível em <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>. Acesso: out. 2012.

COSTA, P. P. da **Teoria de Grafos e suas Aplicações**. 2011. 77f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2011.

CROOM, F. H. **Basic Concepts of Algebraic Topology**. New York: Spring–Verlag, 1978.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da Matemática no Brasil**. Rio de Janeiro: Vozes, 2008.

DIAS, C. L. S. Cândido Lima da Silva Dias: meio século como pesquisador. **Estudos Avançados**, n.22, v.8, p.97-105, 1994. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/ea/v8n22/08.pdf>. Acesso: fev. 2014.

GOMIDE, E. F. Depoimentos – Mesa-redonda: O Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática – 1957. *In.* TOLEDO, J. C. (Transcrição). **Revista Brasileira de História da Matemática**. n.15, v.8, p.87-104, 2008.

HILTON, P. Carlos Benjamin de Lyra. **Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática**, São Paulo, n.2, v.5, p.115-122, 1974.

JAMES, I. M. "Prefácio". *In.* JAMES, I. M. (Org) **History of Topology.** Amsterdam: Elsevier, 1999.

KATZ, V. J. **A history of Mathematics**: an introduction. New York: Addison–Wesley, 1998.

KOESIER, T.; MILL, J. V. By Their Fruits Ye Shall Know Them: Some Remarks on the Interaction of General Topology with Other Areas of Mathematics. *In.* JAMES, Ioan M. (Org). **History of Topology.** Amsterdam: Elsevier, 1999. p.199-239.

LIMA, G. L. de **A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo**: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994. 2012. 245f. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática) – Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2012.

LISTING, J. B. **Vorstudien Zur Topologie**. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1848.

LYRA, C. B. de. A note on Zorn's Theorem. **Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo**. São Paulo, v.4, dez. 1949.

———. Caracterização dos SHM-morfismos para grupos topológicos. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**. Rio de Janeiro, n.1, v.47, mar. 1975.

———. **Grupo fundamental e revestimentos**. 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, jul. 1969.

———. **H-equivalência de grupos topológicos**. Dissertação apresentada ao concurso de livre-docência da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, 1968.

———. **Introdução à Topologia Algébrica**. 1º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, jul. 1957.

———. **Método de Whitehead na teoria da homotopia**. São Carlos, Escola de Engenharia. 1963. Notas mimeografadas.

———. Minimal Complexes and Maps. **Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo**. São Paulo, v.7, dez. 1952.

———. On a conjecture in homotopy. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**. Rio de Janeiro, n.2, v.37, 1965.

———. On circles bundles over complex projective spaces. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**. Rio de Janeiro, n.1, v.31, 1959.

———. On spaces of the same homotopy type as polyhedra. **Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo**. São Paulo, v.12, dez. 1957.

———. On the homotopy type of a factor space. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**. Rio de Janeiro, n.1, v.30, 1958.

———. SHM-maps of CW-groups. **Quarterly Journal of Mathematics**. Oxford, n.27, v.2, p.139-157, 1976.

———. **Sobre os espaços de mesmo tipo de homotopia que o dos poliedros**. Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo para Doutoramento em Ciências (Matemática), 1958.

———. Sobre uma conjectura na teoria da homotopia. **Colóquio Brasileiro de Matemática**, 5º. Poços de Caldas, 1965.

MUNKRES, J. R. **Topology**: a first course. New Jersey: Prentice Hall, 1975.

MUNKRES, J. R. **Elements of Algebraic Topology**. New York: Addison–Wesley Publishing Company Inc, 1984.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **A history of Topology**. The MacTutor History of Mathematics archive. mai. 1996. Disponível em <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Topology_in_mathematics.html>. Acesso: jun. 2012.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Johann Benedict Listing**. The MacTutor Indexes of Biographies. set. 2000. Disponível em <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Listing.html>. Acesso: nov. 2012.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Jules Henri Poincaré**. The MacTutor Indexes of Biographies. out. 2003. Disponível em <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare.html>, Acesso: nov. 2012.

POINCARÉ, J. H. **Analysis Situs**. Journal de L'École Polytechinique. Paris, n. 11, p.1-121, 1895.

RODRIGUES, A. A. M. **Álgebra Linear e Geometria Euclidiana**. São Paulo: Nobel, 1970.

RODRIGUES, A. A. M. **Teoria das Superfícies de Riemann**. v.1. Conselho Nacional de Pesquisas. 1957 - 1958.

RODRIGUES, A. A. M. **Teoria das Superfícies de Riemann**. v.2. IMPA – Conselho Nacional de Pesquisas. 1963.

SILVA, C. M. S. da. A Construção de um Instituto de Pesquisas Matemáticas nos Trópicos – O IMPA. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro/SP, p.37-67. abr–set. 2004.

———. A Faculdade de Filosofia e Letras da USP e a formação de professores e Matemática. In. **Anais da 23ª Reunião Anual da ANPED**. Caxambu, 2000.

SILVA, C. P. sobre o índice e consolidação da pesquisa matemática no Brasil – Parte I. **Revista Brasileira de História da Matemática**. n.11, v.8, p.67-96, 2006.

SBM – SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. 8º Colóquio Brasileiro de Matemática: Notas e Informações. *In.* **Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática**. v.22, p.81-86, 1970. Disponível em <http://www.sbm.org.br/docs/boletim/v

ol22/v2-2-a10-1970.pdf>. Acesso: fev. 2014.

SPANIER, E. H. **Algebraic Topology**. New York: McGrow–Hill, 1966.

TAFARREL, A. Gilberto Francisco Loibel (1932–2013) – Trouxe ao Brasil a Teoria das Singularidades. **Jornal Folha de São Paulo**, São Paulo, 22 nov. 2013. Disponível em <http://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2013/11/1374945-gilberto-francisco-loibel-1932-2013- - -trouxe-ao-brasil-a-teoria-das-singularidades.shtml>. Acesso: fev. 2014.

TRIVIZOLI, L. M. **Sociedade de Matemática de São Paulo: Um Estudo Histórico Institucional**. 2008. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2008.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Coletânea das obras de Carlos Benjamin de Lyra**. São Paulo: IME–USP, 1980. 3 v.

WHITEHEAD, J. H. C. **Elements of homotopy theory**. New York: Springer Verlag, 1978.

Entrevistas

GONÇALVES, Daciberg L. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra por correio eletrônico entre 29 e 31 de Agosto de 2012.

GONÇALVES, Daciberg L. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra por correio eletrônico entre 22 e 26 de Outubro de 2012.

GONÇALVES, Daciberg L. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra por correio eletrônico entre 26 e 30 de Outubro de 2012.

DANTAS, Carlos A. B. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra em São Paulo em 04 de Julho de 2012. Duração aproximada de 30 minutos.

LOIBEL, Gilberto F. Entrevista realizada por ocasião do Encontro de Topologia e Singularidades. Disponível em <http://icmc-usp.blogspot.com.br/2012/05/entrevista-com-o-professor-gilberto.html>. Acesso: out. 2012.

LOIBEL, Gilberto F. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra em São Carlos em 01 de Agosto de 2012. Duração aproximada de 70 minutos.

LOIBEL, Gilberto F. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra por correio eletrônico entre 21 e 22 de outubro de 2012.

LYRA, Jorge L. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra em São Paulo em 05 de Julho de 2012. Duração aproximada de 50 minutos.

LYRA, Jorge L. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra por correio eletrônico entre 31 de outubro e 01 de novembro de 2012.

LYRA, Leda L.; LYRA, Sylvia L. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra em São Paulo em 06 de Julho de 2012. Duração aproximada de 90 minutos.

LYRA, Sylvia L. Entrevista realizada por Thiago T. L. Cobra por correio eletrônico entre 22 de outubro e 12 de novembro de 2012.