

Leonardo Pereira Costa da Cruz

**Ciclos Limite em Sistemas Lineares
por Partes Apresentando dois
Focos Virtuais**

Leonardo Pereira Costa da Cruz

Ciclos Limite em Sistemas Lineares por Partes Apresentando Dois Focos
Virtuais

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

São José do Rio Preto
2013

Leonardo Pereira Costa da Cruz

Ciclos Limite em Sistemas Lineares por Partes Apresentando Dois Focos
Virtuais

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi-Orientador
Livre-docente do Depto. de Matemática
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin,
Doutor, do Depto. de Matemática
UNESP- Ilha Solteira

Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins
Doutor, do Depto. de Matemática
UNICAMP - Campinas

São José do Rio Preto, 28 de fevereiro de 2014.

Aos meus pais,
Jailson e Mirna,
dedico.

Agradecimentos

Primeiramente meus agradecimentos vai para Deus e não poderia ser diferente, pela saúde, sabedoria e por colocou pessoas especiais ao meu caminho. Além de Deus, gostaria de agradecer em especial.

Ao Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi pela valiosa e atenciosa orientação durante a graduação e mestrado, a cada reunião sempre muito produtiva, as muitas duvidas esclarecidas sempre de maneira minuciosa. Ao termino de cada reunião o pensamento de gratidão pela contribuição para esse e outros trabalhos.

Ao Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa pela contribuição de coorientador e aos demais professores do Departamento de Matemática e do Departamento de computação-DCCE do IBILCE pela formação acadêmica e consideração para com os alunos.

À Banca Examinadora, por terem aceito o meu convite.

Aos meus queridos pais Jailson e Mirna pela maravilhosa estrutura familiar, repleta de bons exemplos, carinho e amor.

À minha linda irmã Natalia e aos meus familiares pela companhia fundamental e essencial.

Aos meus amigos da faculdade: Luiz Fernando, Rafael Rocha, Makswell Seyiti, Pedro Benedini, Tiago Tiburcio, Rafaella Martins, Ana Maria, Monisse Alves, Giane Rampasso e Mariana Delfino, pelo companheirismo e o tempo de estudo juntos.

Aos meus demais amigos que ajudaram de alguma forma, dando força no dia-a-dia para superar as dificuldades.

À Cnpq, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos os que de alguma forma contribuíram para a realização desse sonho, meus sinceros agradecimentos e que todos realizem seus sonhos.

Resumo

Neste trabalho estudamos sistemas planares lineares por partes em duas zonas. Uma reta passando pela origem separa o plano em duas zonas. Em cada zona consideramos um sistema linear, não necessariamente com singularidade na origem. Essa classe de sistemas possui doze parâmetros. A referência principal para esse trabalho é o artigo [6] de E. Freire, E. Ponce e F. Torres. Utilizando uma mudança de variáveis adequada, o caso particular foco-foco é reduzido para apenas cinco parâmetros. O principal objetivo é caracterizar o número de ciclos limite em função dos cinco parâmetros do sistema. A principal técnica utilizada para o estudo é a aplicação de primeiro retorno de Poincaré. Para o caso em que o sistema não possui deslize na reta de separação a conclusão é que o sistema tem no máximo um ciclo limite. Para o caso com deslize, e considerando que os focos são virtuais, a conclusão é que o sistema tem no máximo dois ciclos limite.

Abstract

In this work we study planar piecewise linear systems in two zones. A straight line through the origin separates the plane into two zones. In each zone we consider a linear system, not necessarily with singularity at the origin. This class system has twelve parameters. The main reference for this work is the paper [6] E. Freire, E. Ponce and F. Torres. Using an appropriate change of coordinates, the particular focus-focus case is reduced to just five parameters. The main goal is to characterize the number of limit cycles in terms of the five parameters of the system. The main technique used for the study is the Poincaré first return map. For the case where the system has no sliding on the line of separation the conclusion is that the system has at most one limit cycle. For the case with sliding motion, and considering that the foci are virtual, the conclusion is that the system has at most two limit cycles.

Sumário

Introdução	11
1 Conceitos Preliminares	12
1.1 Sistema planar suave por partes e conjuntos de Filippov	12
1.2 Forma canônica e resultados gerais dos sistemas PSP	16
1.3 Caso foco-foco sem pontos de equilíbrio nos semi-planos	24
2 Aplicação de Poincaré e a Solução Explícita do Sistema	26
2.1 Aplicação de Poincaré	26
3 Análise da Aplicação de Poincaré e Seus Resultados	46
3.1 Resultados auxiliares	46
3.2 Órbitas periódicas transversais sem conjunto de deslize	50
3.3 Órbitas periódicas transversais com conjunto de deslize	57
3.4 Comentário final	72
Bibliografia	74

Introdução

Estudar a existência e o número de ciclos limite é um dos principais problemas na teoria qualitativa de equações diferenciais planares [11]. Esses problemas permanecem considerando os sistemas planares suaves por partes, usado muitas das vezes para modelar uma grande variedade de sistemas físicos e dispositivos tecnológicos. Tanto a engenharia quanto as ciências aplicadas tem dado uma atenção considerável para essa classe de sistemas nos últimos anos [2],[3],[9] e [14]. O caso de sistemas lineares planares suaves por partes contínuos com duas regiões separadas por uma linha reta, é a configuração mais simples possível em sistemas suaves por partes. Essa família de sistemas foi estudada em um trabalho anterior [5], onde, em particular, foi estabelecida a existência de no máximo um ciclo limite. Como mencionado no recente trabalho de Huan e Yang [7], o estudo dos sistemas lineares planares suaves por partes descontínuos é uma tarefa difícil, devido à falta de uma forma canônica que possa lidar com uma classe suficientemente ampla de sistemas, em contraste com o que pode ser feito para o caso contínuo. De fato, apenas os casos muito particulares são cuidadosamente analisados na literatura disponível. Por exemplo, em [8], os dois sistemas em ambos os lados da descontinuidade são lineares simultaneamente em forma canônica de Jordan real do tipo foco, o que é uma situação não genérica; em [7], os dois sistemas lineares envolvidos compartilham o mesmo ponto de equilíbrio; em [12], considera-se apenas sistemas de Liénard sem pontos de equilíbrios real e sem conjunto de deslize; em [15], estudou-se o caso sela-sela, apresentou-se casos em que existem pelo menos dois ciclos limite e exibiu-se algumas regiões de parâmetros onde existem dois ciclos limite; em [16], investiga-se o número de ciclos limite para o caso nó-nó, particularmente, prova-se a existência de pelo menos dois ciclos limite e descreve-se algumas regiões de parâmetros onde existem exatamente dois ciclos limite, e em [1],[13] quando é permitido que os focos são reais, podemos obter até três ciclos limite.

Conceitos Preliminares

1.1 Sistema planar suave por partes e conjuntos de Filippov

A princípio considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x$ de classe C^∞ , tome também o conjunto dado por $\Sigma = f^{-1}(0) = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(X) = 0\}$ e defina o “Sistema Planar Suave por Partes” da seguinte forma.

Dados os semi-planos

$$S^- = \{X = (x, y) : x < 0\}, \quad S^+ = \{X = (x, y) : x > 0\},$$

a reta $x = 0$ representa a linha de descontinuidade do sistema a ser estudado que será dado por:

$$\dot{X} = F(X) = \begin{cases} F^+ = (F_1^+(X), F_2^+(X))^T = A^+X + b^+, & \text{se } X \in S^+, \\ F^- = (F_1^-(X), F_2^-(X))^T = A^-X + b^-, & \text{se } X \in S^-, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $X = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, $A^+ = (a_{ij}^+)$ e $A^- = (a_{ij}^-)$ matrizes constantes 2×2 , $b^+ = (b_1^+, b_2^+)^T$ e $b^- = (b_1^-, b_2^-)^T$ vetores constantes de \mathbb{R}^2 . Logo, temos dois sistemas que totaliza em doze parâmetros, e que será denotado por Sistema **PSP**. Além disso, assumiremos que o sistema (1.1) não é contínuo sobre a linha de descontinuidade, isto é, consideramos a seguinte condição

$$A^+ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + b^+ \neq A^- \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + b^-.$$

Caso contrário, o sistema (1.1) torna-se contínuo e foi estudado exaustivamente em [5], em que foi demonstrado que apenas quatro parâmetros são necessários pra estudá-lo, mas esse não será o nosso enfoque.

Além dessa condição, também impomos a condição adicional que $|a_{12}^+| + |a_{12}^-| \neq 0$, pois caso contrário a x -componente de F dependerá apenas da variável x , assim a órbita não poderá

cruzar qualquer linha dada por $x = cte$ duas vezes em sentido opostos. Para mostrar essa afirmação basta observar que considerando $|a_{12}^+| + |a_{12}^-| = 0$, segue que

$$Ff = \langle F, \nabla f \rangle = a_{11}^\pm x + a_{12}^\pm y + b_1^\pm = a_{11}^\pm x + b_1^\pm, \quad \text{onde } \nabla f(X) = (1, 0),$$

nessas condições para $x = cte$ temos $Ff = cte$. Logo, segue a afirmação.

Embora ambas as funções F^+ e F^- estejam bem definidas nos semi-planos de \mathbb{R}^2 , o campo de vetores F em (1.1) não está explicitamente definido quando $x = 0$, que é a região de descontinuidade. Assim uma solução para os sistemas descontínuos necessita ser esclarecida. Claramente, uma órbita é bem definida ao mesmo tempo que se desenvolve sem tocar o eixo- y . No entanto, devemos adotar um critério para definir as órbitas que chegam a linha de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y) : x = 0\}$. Para isso, vamos adotar o campo vetorial de Filippov, mas antes veremos algumas definições.

Definição 1.1.1 Dizemos que um ponto $(0, y) \in \Sigma$ é costura, se satisfaz $F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) > 0$. O conjunto dos pontos de costura será denotado por:

$$\Sigma^c = \{(0, y) : F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) > 0\}.$$

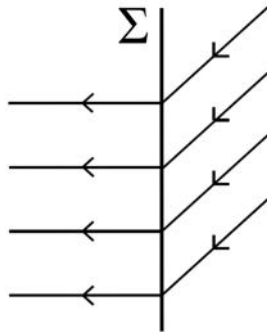


Figura 1.1.1: Região de costura.

Definição 1.1.2 Dizemos que um ponto $(0, y) \in \Sigma$ é atrator, se satisfaz $F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) < 0$ com $F_1^+(0, y) < 0$ e $F_1^-(0, y) > 0$. O conjunto dos pontos atratores será denotado por:

$$\Sigma^a = \{(0, y) : F_1^+(0, y) < 0 \text{ e } F_1^-(0, y) > 0\}.$$

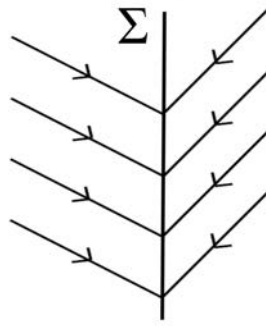


Figura 1.1.2: Região atrator.

Definição 1.1.3 Dizemos que um ponto $(0, y) \in \Sigma$ é de escape, se satisfaz $F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) < 0$ com $F_1^+(0, y) > 0$ e $F_1^-(0, y) < 0$. O conjunto dos pontos de escape será denotado por:

$$\Sigma^e = \{(0, y) : F_1^+(0, y) > 0 \text{ e } F_1^-(0, y) < 0\}.$$

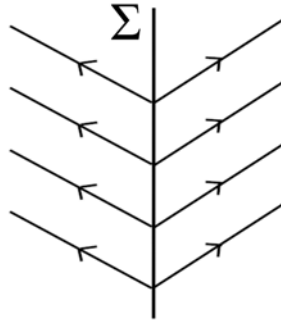


Figura 1.1.3: Região de escape.

Diremos que o conjunto é de deslize, quando for atrator ou escape e denotaremos esse conjunto por Σ^d .

Após definir o conjunto atrator e escape em Σ , iremos definir o campo de Filippov ao longo desses conjuntos que irá satisfazer a equação:

$$\dot{X} = \lambda F^-(X) + (1 - \lambda)F^+(X), \text{ com } X \in \Sigma^d, \quad (1.2)$$

onde λ é selecionado de tal forma que o campo de vetores acima é tangente a Σ , isto é,

$$\lambda F_1^-(X) + (1 - \lambda)F_1^+(X) = 0, \text{ com } X \in \Sigma^d \quad (1.3)$$

então,

$$\lambda = \lambda(y) = \frac{F_1^+(X)}{F_1^+(X) - F_1^-(X)}, \text{ com } X \in \Sigma^d \quad (1.4)$$

dai, segue que o campo de Filippov é dado pela solução de tal equação:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = g(y) = \frac{F_1^+(X)F_2^-(X) - F_1^-(X)F_2^+(X)}{F_1^+(X) - F_1^-(X)} \quad \text{com } X \in \Sigma^d. \quad (1.5)$$

Definição 1.1.4 *Dado um ponto $X \in \Sigma$ dizemos que X é um ponto de tangência na fronteira, quando $|F_1^+(X)| + |F_1^-(X)| \neq 0$ e $F_1^+(X)F_1^-(X) = 0$.*

Assumindo que $X \in \Sigma$ é um ponto de tangência com $F_1^+(X) = 0$. Quando a órbita do campo vetorial F^+ passando por X no tempo $t = t_X$ permanece na região $x > 0$ ($x < 0$) para $|t - t_X|$ pequeno, dizemos que X é chamado de ponto de tangencia visível (invisível). Analogamente, definimos para o campo F^- .

Ainda mais, analisando quando $F_1^+(X) = F_1^-(X) = 0$ com $X \in \Sigma$, podemos ter três casos distintos:

- Ambos os campos são tangentes na fronteira.
- Um campo é tangente e o outro é ponto equilíbrio de fronteira.
- Ambos os campos tem ponto equilíbrio de fronteira.

No primeiro caso dizemos que X é um ponto de dupla tangência. E se esse ponto tem uma tangência visível e outra invisível ele se comporta como um ponto regular quando tem o mesmo sentido. Agora, se ambos são tangência visível ou invisível iremos ampliar a definição de campo de Filippov e considerar que nesse ponto de dupla tangencia considera-se que $g(X) = 0$ com $X = (0, y) \in \Sigma^d$. De maneira similar consideramos $g(X) = 0$ quando $X = (0, y)$ é ponto de equilíbrio de fronteira para ambos os campos F^- e F^+ .

Definição 1.1.5 *Dizemos que um ponto $X = (0, y) \in \Sigma^d$ é um pseudoequilíbrio de (1.1) quando $g(0, y) = 0$.*

Observação 1.1.1 *Considerando $X = (0, y)$ um pseudoequilíbrio, temos que*

$$\dot{y} = g(y) = \frac{F_1^+(X)F_2^-(X) - F_1^-(X)F_2^+(X)}{F_1^+(X) - F_1^-(X)} = 0, \quad \text{com } X \in \Sigma^d,$$

e isso equivalente a

$$\det[F^+(X), F^-(X)] = \begin{vmatrix} F_1^+(X) & F_1^-(X) \\ F_2^+(X) & F_2^-(X) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{com } X \in \Sigma^d$$

ou seja, temos que $F^+(X)$ e $F^-(X)$ são linearmente dependentes.

Nessas condições, um ponto pseudoequilíbrio na região atrator de fronteira com $g'(0, y) < 0$ é chamado de pseudonó estável, e é pseudosela para $g'(0, y) > 0$. Similarmente, o pseudoequilíbrio da região de escape de fronteira com $g'(0, y) > 0$ é chamado pseudonó instável, e pseudosela para $g'(0, y) < 0$.

1.2 Forma canônica e resultados gerais dos sistemas PSP

Uma vez que nosso objetivo é estudar fenômenos em sistemas descontínuos, iremos olhar para possíveis órbitas periódicas não totalmente contidos em S^- ou S^+ . Estas órbitas serão de um dos dois tipos seguintes, dependendo da natureza dos seus pontos no eixo- y , ou seja, na fronteira. Se a órbita periódica tem pontos em Σ^d , então ela vai ser chamada de órbita periódica de deslize. Caso contrário, falamos de órbita periódica transversal, cujo estudo constitui o principal objetivo da nossa análise.

Assim, como estamos interessados em órbitas periódicas transversais, será importante determinar o conjunto dos pontos de costura Σ^c no eixo- y , que é determinada quando

$$F_1^+(0, y)F_1^-(0, y) = (a_{12}^+y + b_1^+)(a_{12}^-y + b_1^-) \quad (1.6)$$

é positivo. Além disso, vemos que esse conjunto é disposto de maneiras diferentes dependendo dos parâmetros:

- Se $a_{12}^-a_{12}^+ = 0$ é fácil ver que o conjunto de costura é um intervalo aberto ilimitado do eixo- y .
- Se $a_{12}^-a_{12}^+ < 0$ é fácil ver que o conjunto de costura é um intervalo aberto limitado do eixo- y ou o conjunto vazio.
- Se $a_{12}^-a_{12}^+ > 0$ é fácil ver que o conjunto de costura são dois intervalos abertos ilimitados do eixo- y ou todo o eixo- y .



Figura 1.2.1: Região de costura no caso $a_{12}^-a_{12}^+ > 0$.

Observe que nos dois primeiros casos, a componente x de ambos os campos de vetores na região de costura possui o mesmo sinal, ou seja, a órbita que sai de um ponto dessa região nunca retorna para o mesmo ponto. Assim, para esses casos não existem orbitas periódicas daí, o nosso interesse será em estudar o caso em que $a_{12}^- a_{12}^+ > 0$, caso esse que permite a existência de órbitas periódicas.

Nesse instante daremos um importante passo que irá facilitar o nosso estudo, através de uma mudança de variáveis usando um homeomorfismo h , de tal forma que mantemos invariante a fronteira Σ e seus respectivos conjuntos atrator e escape de fronteira, os semi-planos S^- e S^+ e óbvio a linearidade do sistema. Observe, que a grande vantagem dessa mudança está na redução no número de parâmetros, reduzindo de doze para sete parâmetros.

Proposição 1.2.1 (*Forma Canônica de Liénard para Sistemas PSP*): *Assuma que $a_{12}^- a_{12}^+ > 0$ no sistema (1.1). Assim, o homeomorfismo $\bar{X} = h(X)$ que fará a mudança de coordenadas é dado por:*

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^- & -a_{12}^- \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix} \quad \text{se } X \in S^- \cup \Sigma, \quad (1.7)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{a_{12}^+} \begin{pmatrix} a_{12}^- & 0 \\ a_{12}^- a_{22}^+ & -a_{12}^- a_{12}^+ \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix} \quad \text{se } X \in S^+. \quad (1.8)$$

A mudança acima transforma (1.1) na forma canônica

$$\dot{\bar{X}} = G^-(\bar{X}) = \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \bar{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix} \quad \text{se } \bar{X} \in S^-, \quad (1.9)$$

$$\dot{\bar{X}} = G^+(\bar{X}) = \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \bar{X} - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix} \quad \text{se } \bar{X} \in S^+,$$

onde $a^- = a_{12}^- b_2^- - a_{22}^- b_1^-$, $a^+ = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} (a_{12}^+ b_2^+ - a_{22}^+ b_1^+)$, $b = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} b_1^+ - b_1^-$ e T^-, T^+, D^-, D^+ são os traços e determinantes das matrizes dadas no sistema (1.1).

Demonstração: Mostraremos aqui apenas os passos para a mudança de coordenadas aplicada no campo vetorial contido em S^+ , pois de maneira análoga, se mostra a mudança para S^- . Como é preciso manter a equivalência após a mudança, assumimos em ambos os lados da fronteira que o novo tempo é $T = I^+ t$ e $T = I^- t$ satisfazendo a condição $I^+ I^- > 0$. Assim, sem perda de generalidade considere $I^+ = I^- = 1$, logo $\frac{dt}{dT} = 1$. Além disso, como de (1.8) temos

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} x, \\ \bar{y} = \frac{a_{12}^- a_{22}^+}{a_{12}^+} x - \frac{a_{12}^- a_{12}^+}{a_{12}^+} y - b_1^-, \end{cases}$$

segue que

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} \dot{x}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{a_{12}^- a_{22}^+}{a_{12}^+} \dot{x} - \frac{a_{12}^- a_{12}^+}{a_{12}^+} \dot{y}. \end{cases}$$

Por consequência

$$\frac{d\bar{x}}{dT} = \frac{d\bar{x}}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} \dot{x} = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} (a_{11}^+ x + a_{12}^+ y + b_1^+), \quad (1.10)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dT} = \frac{d\bar{y}}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{a_{12}^- a_{22}^+}{a_{12}^+} \dot{x} - \frac{a_{12}^- a_{12}^+}{a_{12}^+} \dot{y} = \frac{a_{12}^- a_{22}^+}{a_{12}^+} (a_{11}^+ x + a_{12}^+ y + b_1^+) - \frac{a_{12}^- a_{12}^+}{a_{12}^+} (a_{21}^+ x + a_{22}^+ y + b_2^+). \quad (1.11)$$

Além disso, como

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}^+} \begin{pmatrix} a_{12}^- & 0 \\ a_{12}^- a_{22}^+ & -a_{12}^- a_{12}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix},$$

obtemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-a_{12}^+}{(a_{12}^-)^2} \begin{pmatrix} -a_{12}^- & 0 \\ -a_{12}^- a_{22}^+ & a_{12}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} + b_1^- \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Logo, considerando (1.12) e substituindo em (1.10) e (1.11) chegaremos que:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dT} = (a_{11}^+ + a_{22}^+) \bar{x} - \bar{y} + \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} b_1^+ - b_1^-, \\ \frac{d\bar{y}}{dT} = (a_{11}^+ a_{22}^+ - a_{12}^+ a_{21}^+) \bar{x} - \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} (a_{12}^+ b_2^+ - a_{22}^+ b_1^+). \end{cases}$$

Portando, segue que

$$\dot{\bar{X}} = G^+(\bar{X}) = \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \bar{X} - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix} \quad \text{se } \bar{X} \in S^+,$$

de maneira análoga se mostra que:

$$\dot{\bar{X}} = G^-(\bar{X}) = \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \bar{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix} \quad \text{se } \bar{X} \in S^-.$$

Ainda mais, aplicando o homeomorfismo em Σ veremos que a análise dos pontos de tangência e pseudoequilíbrios do nosso novo sistema segue das igualdades

$$G_1^+(h(0, y)) = (a_{12}^- y + b_1^- + b) = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} F_1^+(0, y), \quad G_1^-(h(0, y)) = (a_{12}^- y + b_1^-) = F_1^-(0, y),$$

e como assumimos $a_{12}^- a_{12}^+ > 0$ é fácil ver que os conjuntos Σ^d e Σ^c são invariantes. Basta ver que $G_1^+(h(0, y)) G_1^-(h(0, y))$ possui o mesmo sinal de $F_1^+(0, y) F_1^-(0, y)$. ■

Observação 1.2.1 *A forma canônica acima dada em (1.9) é invariante pela mudança de variável $(x, y, t) \rightarrow (x, -y, -t)$, simultaneamente com a mudança dos parâmetros*

$$(D^+, D^-, T^+, T^-, a^+, a^-, b) \rightarrow (D^+, D^-, -T^+, -T^-, a^+, a^-, -b).$$

Essa observação acima diz que dado uma solução para o sistema inicial, continua sendo solução para o sistema após a mudança de variável. Assim, iremos assumir daqui em diante que no sistema dado por (1.9) a constante $b \geq 0$ sem perder a generalidade.

Já considerando o sistema (1.9) segue que o conjunto de deslize é dado analisando:

$$G_1^- G_1^+ = y(y - b) < 0.$$

Assim, quando $b \geq 0$ obtemos o conjunto de deslize que é

$$\Sigma^d = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < b\}, \quad (1.13)$$

que se restringe à origem quando $b = 0$. Quando $b > 0$, podemos aplicar o método de (1.5) para se obter o campo de Filippov, dado por

$$\dot{x} = 0, \dot{y} = \frac{a^- - a^+}{b} y - a^- \quad \text{com } 0 < y < b. \quad (1.14)$$

Além disso, temos que o conjunto de costura é dado por:

$$\Sigma^c = \{(x, y) : x = 0, y < 0\} \cup \{(x, y) : x = 0, y > b\}.$$

Com relação aos pontos de tangência e pseudoequilíbrio do sistema dado por (1.9), daremos alguns resultados a seguir.

Proposição 1.2.2 *Para o sistema (1.9) tem-se os seguintes resultados:*

1. *Se $a^- \neq 0$, então a origem é um ponto de tangência a esquerda visível para $a^- < 0$ e invisível para $a^- > 0$. E se $a^- = 0$, então a origem é um ponto de equilíbrio.*
2. *Se $a^+ \neq 0$, então $(0, b)$ é um ponto de tangência a direita visível para $a^+ > 0$ e invisível para $a^+ < 0$. E se $a^+ = 0$, então o ponto $(0, b)$ é um ponto de equilíbrio.*
3. *Se $b = 0$ e $a^+ a^- \neq 0$, então a origem é um duplo ponto de tangência, que se comporta como ponto regular para $a^+ a^- > 0$ e se comporta com pseudoequilíbrio para $a^+ a^- < 0$, de fato, a origem é um pseudofoco se $a^+ < 0 < a^-$ e pseudosela se $a^- < 0 < a^+$.*
4. *Para $b > 0$, em relação aos possíveis pseudoequilíbrios no conjunto de deslize, segue que:*
 - (a) *Se $a^+ = a^- = 0$, então todos os pontos de deslize são pontos de pseudoequilíbrio.*

- (b) Se $a^+a^- < 0$, então o ponto $(0, \frac{a^-b}{a^- - a^+})$ é o único ponto pseudoequilíbrio, sendo pseudosela para $a^- < 0$ e pseudonó instável para $a^- > 0$.
- (c) Se $a^+a^- \geq 0$ com $a^+ + a^- \neq 0$, então não temos pontos de pseudoequilíbrio no conjunto de deslize.

Demonstração:

1. A princípio tem-se

$$G^-f = \langle (T^-x - y, D^-x - a^-), (1, 0) \rangle = T^-x - y,$$

dai segue $G^-f(0, 0) = 0$. Além disso, tem-se

$$(G^-)^2f = ((T^-)^2 - D^-)x - T^-y + a^-,$$

assim $(G^-)^2f(0, 0) = a^-$. Logo, segue que quando $a^- < 0$ a origem é uma tangência visível e invisível para $a^- > 0$. E quando $a^- = 0$ é fácil ver que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema.

2. Segue de maneira análogo ao primeiro item.
3. Seja $a^+a^- > 0$ dai, para esse caso tem-se a^\pm possui o mesmo sinal, isso implica que a tangência é visível de um lado e invisível no outro, tem-se também que na origem os vetores de ambos os campos tem o mesmo sentido. Por outro lado quando $a^+a^- < 0$, tem-se a^\pm possui sinal oposto. Dai, caso $a^- < 0 < a^+$ obtemos duas tangências visíveis, logo temos a pseudosela.

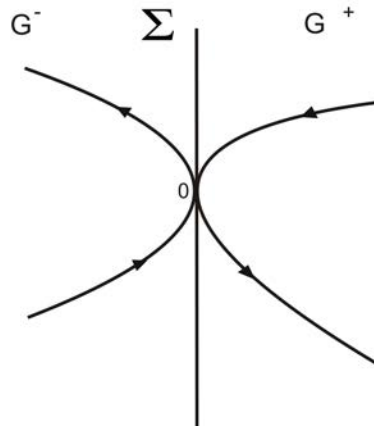


Figura 1.2.2: Pseudosela quando $a^- < 0 < a^+$.

Já se $a^+ < 0 < a^-$ obtemos o pseudofoco.

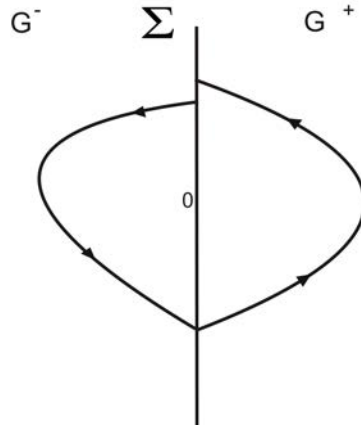


Figura 1.2.3: Pseudofoco quando $a^+ < 0 < a^-$.

4. (a) Como o sistema de Filippov é dado por

$$\dot{x} = 0, \dot{y} = \frac{a^- - a^+}{b}y - a^- \quad \text{com } 0 < y < b, \quad (1.15)$$

segue o resultado.

- (b) Considere novamente o sistema de Filippov, faça $\dot{y} = \frac{a^- - a^+}{b}y - a^- = 0$ e isole y . Assim, obtemos que o único ponto de equilíbrio é $(0, \frac{a^- b}{a^- - a^+})$. Além disso, quando $a^- < 0$ implica que $a^+ > 0$ segue que tem-se duas tangências visíveis. Logo, o nosso ponto de pseudoequilíbrio encontrado é uma pseudosela. De maneira similar, mostra que quando $a^- > 0$ tem-se pseudonó.
- (c) Considerando o possível ponto de pseudoequilíbrio $(0, \frac{a^- b}{a^- - a^+})$ nas condições da hipótese é fácil ver que $\frac{a^- b}{a^- - a^+}$ não pertence ao intervalo $0 < y < b$. Portanto, segue o resultado. ■

Com relação a possíveis pontos de equilíbrio do sistema (1.9) nos conjuntos abertos S^- e S^+ apresentaremos a seguir o seguinte resultado.

Proposição 1.2.3 1. O sistema (1.9) tem ponto de equilíbrio no semi-plano esquerdo quando $a^- D^- < 0$, e não tem ponto de equilíbrio no semi-plano esquerdo quando $a^- D^- > 0$. Similarmente, tem ponto de equilíbrio no semi-plano direito quando $a^+ D^+ > 0$, e não tem quando $a^+ D^+ < 0$.

2. Se $D^- = 0$, então o sistema (1.9) não tem pontos de equilíbrio no semi-plano esquerdo quando $a^- \neq 0$, e tem a semi-reta $y = T^-x$, $x < 0$ de pontos de equilíbrio, quando

$a^- = 0$. Similarmente, se $D^+ = 0$, então o sistema (1.9) não tem pontos de equilíbrio no semi-plano direito quando $a^+ \neq 0$, e tem a semi-reta $y = T^+x - b$, $x > 0$ de pontos de equilíbrio, quando $a^+ = 0$.

Demonstração:

1. Segue de imediato considerando o sistema (1.9) e a definição de ponto de equilíbrio.
2. Tome o sistema do semi-plano esquerdo

$$\begin{cases} \dot{x} = T^-x - y = 0, \\ \dot{y} = D^-x - a^- = 0. \end{cases}$$

Observe que quando $D^- = 0$ e $a^- \neq 0$, é imediato que não temos pontos de equilíbrio, e além disso, quando $a^- = 0$ segue que temos a semi-reta $y = T^-x$, $x < 0$ de pontos de equilíbrio. Analogamente, se mostra o resultado para o sistema no semi-plano direito. ■

A seguir apresentaremos uma condição necessária para a existência de órbita periódica transversal para o sistema (1.9). Para a demonstração, usaremos fortemente o Teorema de Green.

- Γ^- : Órbita em S^-
- Γ^+ : Órbita em S^+
- L^- : Seguimento orientado $[y, y+h]$
- L^+ : Seguimento orientado $[y+h, y]$
- σ^- : Área da região limitada por $\Gamma^- \cup L^-$
- σ^+ : Área da região limitada por $\Gamma^+ \cup L^+$
- Γ : Órbita periódica $\Gamma^- \cup \Gamma^+$

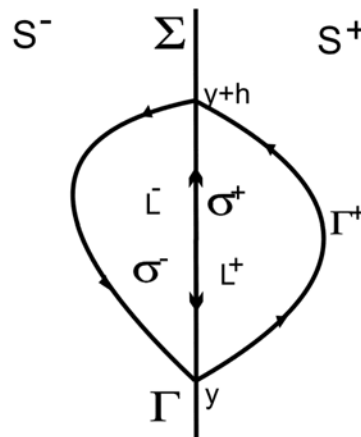


Figura 1.2.4: Órbita periódica transversal.

Proposição 1.2.4 Se o sistema (1.9) tem órbita periódica transversal Γ que cruza $x = 0$ nos pontos $(0, y)$ e $(0, y + h)$ onde $h > 0$, então

$$T^- \sigma^- + T^+ \sigma^+ + bh = 0.$$

Demonstração: Considere um sistema qualquer dado por: $\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$ temos pelo

Teorema de Green que

$$\oint Pdx + Qdy = \int \int_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Agora, particularmente assumindo o sistema (1.9) segue que o seu campo perpendicular é dado por

$$(G^-)^\perp = \begin{pmatrix} P^- \\ Q^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D^-x + a^- \\ T^-x - y \end{pmatrix},$$

$$(G^+)^\perp = \begin{pmatrix} P^+ \\ Q^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D^+x + a^+ \\ T^+x - y + b \end{pmatrix}.$$

Assim, aplicando o Teorema de Green ao sistema perpendicular de (1.9), obtemos que

$$\oint_{\Gamma^- \cup L^-} (G^-)^\perp dr = \int \int_{\sigma^-} T^- dx dy = T^- \sigma^-,$$

$$\oint_{\Gamma^+ \cup L^+} (G^+)^\perp dr = \int \int_{\sigma^+} T^+ dx dy = T^+ \sigma^+.$$

Além disso, observe que

$$\int_{\Gamma^-} (G^-)^\perp dr = \int_{t_0}^{t_1} (G^-)^\perp(t) \cdot (G^-)(t) dt = 0 \quad e \quad \int_{\Gamma^+} (G^+)^\perp dr = 0.$$

Daí, por consequência segue

$$\oint_{\Gamma^- \cup L^-} (G^-)^\perp dr = \int_{L^-} (G^-)^\perp dr = \int_{y_L}^{y_L+h} Pdx + Qdy \stackrel{x=0}{=} \int_{y_L}^{y_L+h} -y dy,$$

e

$$\oint_{\Gamma^+ \cup L^+} (G^+)^\perp dr = \int_{L^+} (G^+)^\perp dr = \int_{y_L+h}^{y_L} Pdx + Qdy \stackrel{x=0}{=} \int_{y_L+h}^{y_L} (-y + b) dy.$$

Logo, obtemos

$$T^- \sigma^- + T^+ \sigma^+ = \int_{y_L}^{y_L+h} -y dy + \int_{y_L+h}^{y_L} (-y + b) dy = \int_{y_L}^{y_L+h} -b dy = -bh,$$

Portanto, temos

$$T^- \sigma^- + T^+ \sigma^+ + bh = 0.$$

■

1.3 Caso foco-foco sem pontos de equilíbrio nos semi-planos

Prosseguindo com o nosso estudo, iremos de agora em diante considerar um caso particular do nosso sistema (1.9), assumindo a dinâmica de um foco em ambos os semi-planos, daí admitimos que $T^2 - 4D < 0$ para ambos os sistemas nos semi-planos. Além disso, veremos que uma grande vantagem com essa restrição é a redução de parâmetros do sistema (1.9) de sete para cinco.

Proposição 1.3.1 (*Redução da forma Liénard no caso foco-foco*). *Assumindo $T^\pm = 2\alpha^\pm$, $D^\pm = (\alpha^\pm)^2 + (\omega^\pm)^2$ com $\omega^\pm > 0$ na forma canônica (1.9), de modo que os autovalores são $\lambda^\pm = \alpha^\pm \pm i\omega^\pm$, introduzindo os parâmetros*

$$\gamma_d = \frac{\alpha^+}{\omega^+}, \gamma_e = \frac{\alpha^-}{\omega^-}, a_d = \frac{a^+}{\omega^+}, a_e = \frac{a^-}{\omega^-}.$$

Então através da mudança de variável

$$(x, y, z) \longrightarrow (\omega(x)x, y, \omega(x)t), \quad \text{onde } \omega(x) = \begin{cases} \omega^-, & \text{se } x < 0, \\ \omega^+, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

transforma-se a forma canônica de (1.9) na forma

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2\gamma_e & -1 \\ 1 + \gamma_e^2 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 0 \\ a_e \end{pmatrix} \quad \text{se } X \in S^-, \tag{1.16}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2\gamma_d & -1 \\ 1 + \gamma_d^2 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} -b \\ a_d \end{pmatrix} \quad \text{se } X \in S^+.$$

Demonstração:

Chame de $X = \omega(x)x$, $Y = y$ e $T = \omega(x)t$. Assim, segue $\frac{dt}{dT} = \frac{1}{\omega(x)}$ e usando a regra da cadeia tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dT} = \omega(x)\dot{x} \frac{1}{\omega(x)} = \dot{x}, \\ \dot{Y} &= \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dT} = \dot{y} \frac{1}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Daí, substituindo o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\alpha^-x - y, \\ \dot{y} = ((\alpha^-)^2 + (\omega^-)^2)x - a^-, \end{cases} \quad \text{se } X \in S^-$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\alpha^+x - y + b, \\ \dot{y} = ((\alpha^+)^2 + (\omega^+)^2)x - a^+, \end{cases} \quad \text{se } X \in S^+$$

e as novas variáveis $x = \frac{X}{\omega(x)}$ e $y = Y$, obtemos que

$$\begin{cases} \dot{X} = 2\alpha^- \frac{X}{\omega^-} - Y, \\ \dot{Y} = \frac{1}{\omega^-} [((\alpha^-)^2 + (\omega^-)^2) \frac{X}{\omega^-} - a^-], \end{cases} \quad \text{se } X \in S^-$$

$$\begin{cases} \dot{X} = 2\alpha^+ \frac{X}{\omega^+} - Y + b, \\ \dot{Y} = \frac{1}{\omega^+} [((\alpha^+)^2 + (\omega^+)^2) \frac{X}{\omega^+} - a^+]. \end{cases} \quad \text{se } X \in S^+$$

Logo, simplificando esses sistemas e introduzindo os parâmetros dados, segue o resultado.

■

Agora em diante, considerando a dinâmica do nosso sistema (1.16) e levando em conta que o nosso objetivo são as órbitas periódicas transversais assumimos que $a_d \leq 0 \leq a_e$, pois nessas condições segue da *Proposição 1.2.3* que não tem ponto de equilíbrio nos semi-planos S^- e S^+ , isto é, o sistema não tem ponto de equilíbrio real. Além disso, observe que na origem e no ponto $(0, b)$ estão as tangências e de acordo com a *Proposição 1.2.2* estas são invisíveis ou também podem ser equilíbrios na fronteira.

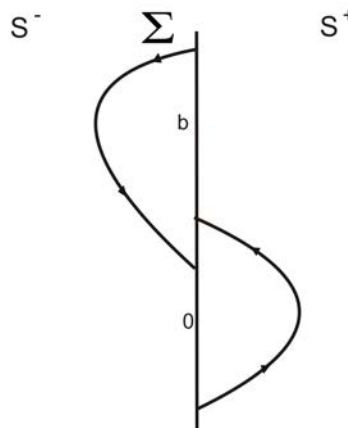


Figura 1.3.1: Caso foco-foco com tangências invisível.

Aplicação de Poincaré e a Solução Explícita do Sistema

2.1 Aplicação de Poincaré

A aplicação de Poincaré ou aplicação de primeiro retorno é uma ferramenta usada para estudar a estabilidade e bifurcação de órbitas periódicas, definida por Henri Poincaré em 1881, denotaremos por P . A ideia da aplicação de Poincaré é simples: Seja Γ uma órbita periódica do sistema

$$\dot{x} = f(x),$$

passando pelo ponto x_0 e Σ uma seção transversal a Γ em x_0 , então para um ponto $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de x_0 , considere a solução do sistema acima passando por x no tempo $t = 0$, assim pelo “Teorema da Dependência Contínua das Condições Iniciais” a solução vai chegar em Σ num ponto $P(x)$ próximo de x_0 ; veja a Figura 2.1.1. A aplicação $x \rightarrow P(x)$ é chamada de aplicação de Poincaré.

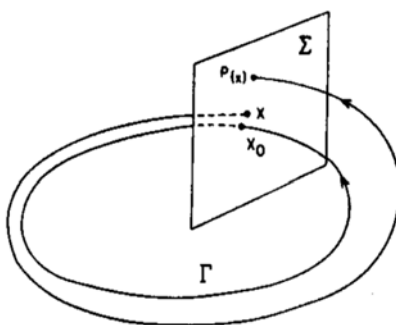


Figura 2.1.1: Aplicação de Poincaré.

O procedimento usado para encontrar a aplicação de Poincaré aqui será um pouco diferente, pelo simples fato do nosso sistema ser descontínuo. Primeiramente considere como sendo a seção transversal a reta de descontinuidade $x = 0$ (que é a fronteira Σ), o próximo passo é olhar para a solução do sistema em S^- que passa pelo ponto $(0, y_0)$ da descontinuidade $x = 0$, e com $y_0 > 0$. Dai, seja $\psi(t) = (x(t), y(t))$ a solução do sistema em S^- , da solução precisamos encontrar o menor tempo $t^- > 0$ que satisfaz $x(t^-) = 0$, assim, obtemos o ponto de retorno na descontinuidade $x = 0$ que denotaremos por $\psi(t^-) = (x(t^-), y(t^-)) = (0, y_1)$. Logo, temos $y_1 = P_e(y_0)$, que denominamos de primeiro retorno da trajetória pelo ponto $(0, y_0)$ do sistema em S^- , a Σ . E de maneira análoga definimos $y_2 = P_d(y_1)$.

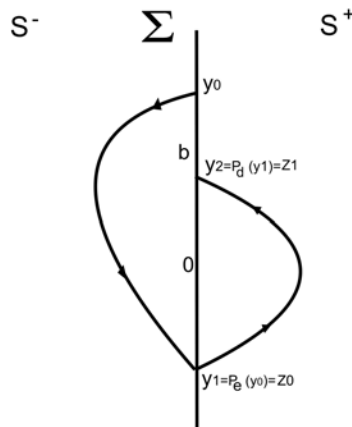


Figura 2.1.2: Aplicação de Poincaré do sistema descontínuo.

Dessa forma, considerando y_1 e y_2 definimos o primeiro retorno completo como sendo $P = P_d \circ P_e$. Os pontos fixos de P correspondem as órbitas periódicas do sistema (1.16), e os pontos fixos isolados os ciclos limite. Além disso, dado um ponto fixo y_0 de P tal que $|P'(y_0)| > 1$, o ciclo limite correspondente é dito, ciclo limite repulsor. Caso contrário se $|P'(y_0)| < 1$, o ciclo limite correspondente é dito, ciclo limite atrator.

No entanto, para calcular a aplicação de Poincaré vamos precisar da solução explícita do sistema, e para isso, observe antes que dado um sistema linear na forma geral

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

sabemos que $x_1 = -A^{-1}b$ quando $\det A \neq 0$ é único ponto de equilíbrio do sistema. Além disso, fazendo a mudança de coordenadas $y = x - x_1$ obtemos,

$$\dot{y} = \dot{x} = Ax + b = Ax - Ax_1 + (Ax_1 + b) = A(x - x_1) = Ay$$

um novo sistema linear sem o termo independente

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay, \\ x(0) = x_0 - x_1. \end{cases}$$

Dado uma matriz A , sabemos também que $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$. Logo, é fácil ver que a solução para o sistema acima é dada por $y(t) = e^{At}(x_0 - x_1)$, ou seja, a solução do sistema na forma geral será dada por $x(t) = e^{At}(x_0 - x_1) + x_1$.

Segue que dado o sistema

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ 1 + \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

iremos calcular a sua solução. Mas antes observe a semelhança com os sistemas em S^+ e S^- , onde a única diferença se encontra no sistema em S^- onde a constante $b = 0$. Assim, assuma primeiramente as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) o ponto de equilíbrio dado por:

$$\bar{x} = \frac{a}{1 + \gamma^2}, \quad \bar{y} = \frac{2\gamma a}{1 + \gamma^2} + b.$$

Prosseguindo, tome a matriz que denotaremos por:

$$A = \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ 1 + \gamma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

observe que a matriz A , possui a seguinte matriz de mudança de base obtida usando a parte real e imaginária dos autovetores

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\gamma & -1 \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz mudança de base leva a forma canônica de Jordan fazendo

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix},$$

assim, segue que o exponencial da matriz B é dada

$$e^{Bt} = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

e daí, obtemos o exponencial da matriz A que era o nosso objetivo

$$e^{At} = P^{-1}e^{Bt}P = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(t) + \gamma \sin(t) & -\sin(t) \\ (1 + \gamma^2) \sin(t) & \cos(t) - \gamma \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução do nosso sistema passando por (x_0, y_0) é dado por:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(t) + \gamma \sin(t) & -\sin(t) \\ (1 + \gamma^2) \sin(t) & \cos(t) - \gamma \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - \bar{x} \\ y_0 - \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Substituindo o ponto de equilíbrio (\bar{x}, \bar{y}) onde $\bar{x} = \frac{a}{1+\gamma^2}$ e $\bar{y} = \frac{2\gamma a}{1+\gamma^2} + b$ na nossa solução obtemos:

$$\begin{cases} x(t) = e^{t\gamma} \left(\sin(t) \left(\frac{a\gamma}{\gamma^2+1} + b + x_0\gamma - y_0 \right) + \cos(t) \left(x_0 - \frac{a}{\gamma^2+1} \right) \right) + \frac{a}{\gamma^2+1}, \\ y(t) = e^{t\gamma} \left(\left(-\frac{2a\gamma}{\gamma^2+1} - b + y_0 \right) (\cos(t) - \gamma \sin(t)) + \sin(t) (-a + x_0\gamma^2 + x_0) \right) + \frac{2a\gamma}{\gamma^2+1} + b, \end{cases}$$

Logo, as soluções dos campos em S^+ passando pela condição inicial $(0, z_0)$ onde $z_0 < b$, e em S^- passando por $(0, y_0)$ onde $y_0 > 0$, são respectivamente dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = e^{t\gamma_d} \left(\sin(t) \left(\frac{a_d\gamma_d}{\gamma_d^2+1} + b - z_0 \right) + \cos(t) \left(-\frac{a_d}{\gamma_d^2+1} \right) \right) + \frac{a_d}{\gamma_d^2+1}, \\ y(t) = e^{t\gamma_d} \left(\left(-\frac{2a_d\gamma_d}{\gamma_d^2+1} - b + z_0 \right) (\cos(t) - \gamma_d \sin(t)) - \sin(t)a_d \right) + \frac{2a_d\gamma_d}{\gamma_d^2+1} + b, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{t\gamma_e} \left(\sin(t) \left(\frac{a_e\gamma_e}{\gamma_e^2+1} - y_0 \right) + \cos(t) \left(-\frac{a_e}{\gamma_e^2+1} \right) \right) + \frac{a_e}{\gamma_e^2+1}, \\ y(t) = e^{t\gamma_e} \left(\left(-\frac{2a_e\gamma_e}{\gamma_e^2+1} + y_0 \right) (\cos(t) - \gamma_e \sin(t)) - \sin(t)a_e \right) + \frac{2a_e\gamma_e}{\gamma_e^2+1}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Observe que pelo fato da origem no sistema em S^- ser um ponto de equilíbrio de fronteira, ou uma tangência invisível, segue que $P_e(0) = 0$, dessa forma para determinar P_e vamos dividir a análise em casos.

Se $a_e = 0$, a solução em (2.2) simplifica e é dado por:

$$\begin{cases} x(t) = e^{t\gamma_e} (-\sin(t)y_0), \\ y(t) = e^{t\gamma_e} (y_0(\cos(t) - \gamma_e \sin(t))), \end{cases} ,$$

nesse caso a origem é um ponto de equilíbrio de fronteira. Daí, segue que o tempo de retorno é $t^- = \pi$. Logo, substituindo na solução acima obtemos

$$\begin{cases} x(\pi) = 0, \\ y(\pi) = -e^{\pi\gamma_e} y_0, \end{cases}$$

ou seja,

$$y_1 = P_e(y_0) = -e^{\pi\gamma_e} y_0, \quad \text{para } y_0 > 0. \quad (2.3)$$

Se $a_e > 0$, definiremos a função auxiliar $\varphi_\gamma(t) = 1 - e^{\gamma t}(\cos(t) - \gamma \sin(t))$. Esta função ajudará a simplificar os nossos cálculos mais adiante, ela possui as seguintes propriedades de simetria

$$\varphi_{-\gamma}(-t) = \varphi_\gamma(t), \quad \varphi_{-\gamma}(t) = \varphi_\gamma(-t), \quad \text{para todo } \gamma, t \in \mathbb{R}.$$

Nesse caso, a origem é um ponto de tangência invisível à esquerda, além disso, não temos explicitamente o tempo de retorno t^- , mas sabemos que existe. Assim, seja $t^- \neq 0$ tal que

$$x(t^-) = e^{t^- \gamma_e} \left(\sin(t^-) \left(\frac{a_e \gamma_e}{\gamma_e^2 + 1} - y_0 \right) + \cos(t^-) \left(-\frac{a_e}{\gamma_e^2 + 1} \right) \right) + \frac{a_e}{\gamma_e^2 + 1} = 0$$

segue isolando y_0 que:

$$y_0 = \frac{a_e}{1 + \gamma_e^2} \frac{e^{-\gamma_e t^-} \varphi_{\gamma_e}(t^-)}{\sin(t^-)}. \quad (2.4)$$

Agora, substituindo y_0 encontrado na componente

$$y(t) = e^{t \gamma_e} \left(\left(-\frac{2a_e \gamma_e}{\gamma_e^2 + 1} + y_0 \right) (\cos(t) - \gamma_e \sin(t)) - \sin(t) a_e \right) + \frac{2a_e \gamma_e}{\gamma_e^2 + 1},$$

chegaremos em $y(t^-) = y_1 = P_e(y_0)$ dado por:

$$y_1 = -\frac{a_e}{1 + \gamma_e^2} \frac{e^{\gamma_e t^-} \varphi_{-\gamma_e}(t^-)}{\sin(t^-)}. \quad (2.5)$$

Diretamente das fórmulas (2.4) e (2.5) é fácil calcular as duas primeiras derivadas da aplicação P_e , quando $a_e \gamma_e \neq 0$, para isso calcule $\frac{dy_1}{dt}$ e $\frac{dy_0}{dt}$. Que possui as seguintes expressões:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{a_e \csc^2(t^-) \left(-\gamma_e e^{t^- \gamma_e} \sin(t^-) + e^{t^- \gamma_e} \cos(t^-) - 1 \right)}{\gamma_e^2 + 1}$$

$$\frac{dy_0}{dt} = -\frac{a_e e^{-t^- \gamma_e} \csc^2(t^-) \left(-e^{t^- \gamma_e} + \gamma_e \sin(t^-) + \cos(t^-) \right)}{\gamma_e^2 + 1}.$$

Segue que

$$P'_e(y_0) = \frac{\frac{dy_1}{dt}}{\frac{dy_0}{dt}}$$

e além disso, calculamos $\frac{P'_e(y_0)}{dt}$, para obter

$$P''_e(y_0) = \frac{\frac{P'_e(y_0)}{dt}}{\frac{dy_0}{dt}}.$$

Dai, as expressões são dadas por:

$$P'_e(y_0) = -\frac{\varphi_{\gamma_e}(t^-)}{\varphi_{-\gamma_e}(t^-)} = \frac{y_0}{P_e(y_0)} e^{2\gamma_e t^-} < 0, \quad (2.6)$$

$$P_e''(y_0) = \frac{2a_e^2}{1 + \gamma_e^2} \frac{\sinh(\gamma_e t^-) - \gamma_e \sin(t^-)}{P_e^3(y_0)} e^{3\gamma_e t^-}. \quad (2.7)$$

Dando continuidade, agora considere o campo no semi-plano S^+ , dessa vez o ponto $(0, b)$ é um ponto de equilíbrio de fronteira ou uma tangência invisível, segue que $P_d(b) = b$, dessa forma para determinar P_d também vamos dividir a análise em casos.

Se $a_d = 0$, o nosso sistema (2.1) se simplifica e é dado por

$$\begin{cases} x(t) = e^{t\gamma_d} (\sin(t) (b - z_0)), \\ y(t) = e^{t\gamma_d} ((z_0 - b) (\cos(t) - \gamma_d \sin(t))) + b, \end{cases}$$

nesse caso temos que $(0, b)$ é um ponto de equilíbrio de fronteira. Daí, temos também que o tempo de retorno é $t^+ = \pi$. Logo, substituindo na solução acima obtemos

$$\begin{cases} x(\pi) = 0, \\ y(\pi) = -e^{\pi\gamma_d} z_0 + (1 + e^{\gamma_d \pi})b, \end{cases}$$

ou seja,

$$z_1 = P_d(z_0) = -e^{\pi\gamma_d} z_0 + (1 + e^{\gamma_d \pi})b, \quad \text{para } z_0 < b. \quad (2.8)$$

Se $a_d < 0$, temos que $(0, b)$ é um ponto de tangência invisível a direita, além disso, não temos também explicitamente o tempo de retorno t^+ , mas sabemos que existe. Assim, seja $t^+ \neq 0$ tal que

$$x(t^+) = e^{t^+\gamma_d} \left(\sin(t^+) \left(\frac{a_d \gamma_d}{\gamma_d^2 + 1} + b - z_0 \right) + \cos(t^+) \left(-\frac{a_d}{\gamma_d^2 + 1} \right) \right) + \frac{a_d}{\gamma_d^2 + 1} = 0.$$

Segue que isolando z_0 obtemos que:

$$z_0 = b + \frac{a_d}{1 + \gamma_d^2} \frac{e^{-\gamma_d t^+} \varphi_{\gamma_d}(t^+)}{\sin(t^+)}. \quad (2.9)$$

Daí, fazendo o mesmo processo do campo S^- , ou seja, substituindo z_0 encontrado na segunda componente na solução (2.1) obtemos $y(t^+) = z_1 = P_d(z_0)$ dado por:

$$z_1 = b - \frac{a_d}{1 + \gamma_d^2} \frac{e^{\gamma_d t^+} \varphi_{-\gamma_d}(t^+)}{\sin(t^+)}. \quad (2.10)$$

De maneira análoga ao caso de P_e podemos também, calcular diretamente das formulas (2.9) e (2.10) as duas primeiras derivadas da aplicação P_d , quando $a_d \gamma_d \neq 0$, para isso, ache $\frac{dz_1}{dt}$ e $\frac{dz_0}{dt}$. Observe que possuem as mesmas estruturas de $\frac{dy_1}{dt}$ e $\frac{dy_0}{dt}$ a menos das características particulares (γ, t, a) de ambos os campos, pois o que diferencia z_0, z_1 de y_0, y_1 são suas características particulares e a constante b . Logo, segue que

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{a_d \csc^2(t^+) \left(-\gamma_d e^{t^+ \gamma_d} \sin(t^+) + e^{t^+ \gamma_d} \cos(t^+) - 1 \right)}{\gamma_d^2 + 1}$$

$$\frac{dz_0}{dt} = -\frac{a_d e^{-t^+ \gamma_d} \csc^2(t^+) \left(-e^{t^+ \gamma_d} + \gamma_d \sin(t^+) + \cos(t^+) \right)}{\gamma_d^2 + 1}.$$

Assim, analogamente

$$P'_d(z_0) = \frac{\frac{dz_1}{dt}}{\frac{dz_0}{dt}}$$

além disso, calculando $\frac{P'_d(z_0)}{\frac{dz_0}{dt}}$, obtemos também

$$P''_d(z_0) = \frac{\frac{P'_d(z_0)}{\frac{dz_0}{dt}}}{\frac{dz_0}{dt}}.$$

Daí, obtemos que

$$P'_d(z_0) = \frac{z_0 - b}{P_d(z_0) - b} e^{2\gamma_d t^+} < 0, \quad (2.11)$$

$$P''_d(z_0) = \frac{2a_d^2}{1 + \gamma_d^2} \frac{\sinh(\gamma_d t^+) - \gamma_d \sin(t^+)}{(P_d^3(y_0) - b)} e^{3\gamma_d t^+}. \quad (2.12)$$

Finalmente, podemos definir a aplicação de Poincaré, que será a composição dada por $P = P_d \circ P_e$. Assim, achar os pontos fixos de P vai ser equivalente a encontrar as nossas órbitas periódicas transversais. Além disso, observe que os parâmetros período t^- e t^+ pertencem ao intervalo $(0, \pi)$, veremos em diante algumas resultados relacionados as aplicações P_e , P_d e P .

Proposição 2.1.1 *Assuma que $a_e \geq 0$ no sistema (1.16). Então segue os seguintes resultados:*

1. Se $a_e \gamma_e = 0$, então $P_e(y) = -e^{\gamma_e \pi} y$ para todo $y \geq 0$.
2. Se $a_e > 0$, então a aplicação de Poincaré a esquerda P_e dada em (2.4) e (2.5) é bem definida para todo $y \geq 0$, com $t \in (0, \pi)$; em particular temos $P_e(0) = 0$. Assim, as quatro primeiras derivadas no ponto $y = 0$ são

$$P'_e(0) = -1, \quad P''_e(0) = -\frac{8\gamma_e}{3a_e}, \quad P'''_e(0) = -\frac{32\gamma_e^2}{3a_e^2}, \quad P_e^{IV}(0) = -32\gamma_e \frac{79\gamma_e^2 - 9}{45a_e^3}. \quad (2.13)$$

3. Se $a_e > 0$ e $\gamma_e \neq 0$, então para todo $y \geq 0$, segue que

$$P'_e(y) < 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} P'_e(y) = -1, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} P'_e(y) = -e^{\gamma_e \pi}, \quad \text{sign} P''_e(y) = -\text{sign}(\gamma_e),$$

e a aplicação P_e tem como assíntota A_e dada por

$$A_e = -e^{\gamma_e \pi} y + \frac{2a_e \gamma_e}{1 + \gamma_e^2} (1 + e^{\gamma_e \pi})$$

com $\text{sign}(A_e(y) - P_e(y)) = \text{sing}(\gamma_e)$.

Demonstração:

1. Temos os seguintes casos:

Caso $\gamma_e = 0$, segue pela forma de $\gamma_e = \frac{\alpha^-}{\omega^-}$, onde α e ω são parte real e imaginária do autovalor respectivamente, que $\alpha^- = 0$. Concluimos que o ponto de equilíbrio do campo S^- é um centro global linear. Logo, segue pela simetria do centro que $P_e(y) = -y$. Veja Figura 2.1.3.

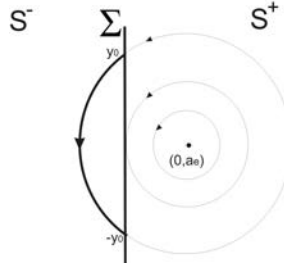


Figura 2.1.3: Centro linear global do campo S^- .

Caso $a_e = 0$, segue direto da equação (2.3). Portanto, segue o resultado.

2. Primeiramente considere a solução do sistema em S^- , dado por

$$\begin{cases} x(t) = e^{t\gamma_e} \left(\sin(t) \left(\frac{a_e \gamma_e}{\gamma_e^2 + 1} - y_0 \right) + \cos(t) \left(-\frac{a_e}{\gamma_e^2 + 1} \right) \right) + \frac{a_e}{\gamma_e^2 + 1}, \\ y(t) = e^{t\gamma_e} \left(\left(-\frac{2a_e \gamma_e}{\gamma_e^2 + 1} + y_0 \right) (\cos(t) - \gamma_e \sin(t)) - \sin(t) a_e \right) + \frac{2a_e \gamma_e}{\gamma_e^2 + 1}. \end{cases}$$

Queremos as derivadas em $y = 0$. Vamos escrever ϵ no lugar de y_0 . Assim, temos que

$$x(t) = e^{t\gamma_e} \left(\sin(t) \left(\frac{a_e \gamma_e}{\gamma_e^2 + 1} - \epsilon \right) + \cos(t) \left(-\frac{a_e}{\gamma_e^2 + 1} \right) \right) + \frac{a_e}{\gamma_e^2 + 1}.$$

Calculando a série de potência em t de $x(t)$ até a 7ª ordem obtemos

$$\begin{cases} x(t) = -\epsilon t + \frac{1}{2}(a_e - 2\gamma_e \epsilon) t^2 + \frac{1}{6}(2a_e \gamma_e - 3\gamma_e^2 \epsilon + \epsilon) t^3 + \frac{1}{24}(3a_e \gamma_e^2 - a_e - 4\gamma_e^3 \epsilon + 4\gamma_e \epsilon) t^4 \\ + \frac{1}{120}(4a_e \gamma_e^3 - 4a_e \gamma_e - 5\gamma_e^4 \epsilon + 10\gamma_e^2 \epsilon - \epsilon) t^5 \\ + \frac{1}{720}(5a_e \gamma_e^4 - 10a_e \gamma_e^2 + a_e - 6\gamma_e^5 \epsilon + 20\gamma_e^3 \epsilon - 6\gamma_e \epsilon) t^6 \\ + \frac{1}{5040}(6a_e \gamma_e^5 - 20a_e \gamma_e^3 + 6a_e \gamma_e - 7\gamma_e^6 \epsilon + 35\gamma_e^4 \epsilon - 21\gamma_e^2 \epsilon + \epsilon) t^7. \end{cases}$$

Observe que o período t^- depende da condição inicial, ou seja, depende de ϵ . Dai, considere um $t^-(\epsilon)$ dado por

$$t^-(\epsilon) = b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3 + b_4\epsilon^4 + b_5\epsilon^5 + b_6\epsilon^6$$

dessa forma, substituindo $t^-(\epsilon)$ na série $x(t)$ e isolando os termos em potência ϵ obtemos

$$x(\epsilon) = \left(\frac{a_e b_1^2}{2} - b_1 \right) \epsilon^2 + \left(\frac{1}{3} a_e b_1^3 \gamma_e + a b_1 b_2 - b_1^2 \gamma_e - b_2 \right) \epsilon^3 + \frac{1}{24} (3 a_e b_1^4 \gamma_e^2 - a_e b_1^4 + 24 a_e b_1^2 b_2 \gamma_e + 24 a_e b_1 b_3 + 12 a_e b_2^2 - 12 b_1^3 \gamma_e^2 + 4 b_1^3 - 48 b_1 b_2 \gamma_e - 24 b_3) \epsilon^4 + \dots$$

como estamos a procura de t^- de tal forma que $x(\epsilon) = 0$, igualando a zero o termo que acompanha a potência de ϵ^2 , obtemos as soluções

$$b_1 = 0 \quad \text{ou} \quad b_1 = \frac{2}{a_e},$$

tomando a segunda opção e substituindo em $x(\epsilon)$ obtemos

$$x(\epsilon) = \left(b_2 - \frac{4\gamma_e}{3a_e^2} \right) \epsilon^3 + \left(-\frac{2\gamma_e^2}{a_e^3} + \frac{2}{3a_e^3} + \frac{a_e b_2^2}{2} + b_3 \right) \epsilon^4 + \left(-\frac{8\gamma_e^3}{5a_e^4} + \frac{8\gamma_e}{5a_e^4} - \frac{2b_2\gamma_e^2}{a_e^2} + \frac{2b_2}{3a_e^2} + a_e b_2 b_3 + b_2^2 \gamma_e + b_4 \right) \epsilon^5 + \dots$$

De maneira análoga, igualando o termo que acompanha a potência ϵ^3 a zero obtemos a solução

$$b_2 = \frac{4\gamma_e}{3a_e^2},$$

substituindo em $x(\epsilon)$, teremos que o termo que acompanha a potência de ϵ^4 vai depender apenas de b_3 e assim obtemos também o termo $b_3 = \frac{2(5\gamma_e^2 - 3)}{9a_e^3}$. Prosseguindo dessa forma obtemos

$$b_4 = \frac{8(17\gamma_e^3 - 27\gamma_e)}{135a_e^4}, \quad b_5 = \frac{2(193\gamma_e^4 - 558\gamma_e^2 + 81)}{405a_e^5}, \quad b_6 = \frac{4(131\gamma_e^5 - 586\gamma_e^3 + 243\gamma_e)}{567a_e^6}.$$

Portanto, o nosso período t^- é dado por

$$t^- = \frac{2}{a_e} \epsilon + \frac{4\gamma_e}{3a_e^2} \epsilon^2 + \frac{2(5\gamma_e^2 - 3)}{9a_e^3} \epsilon^3 + \frac{8(17\gamma_e^3 - 27\gamma_e)}{135a_e^4} \epsilon^4 + \dots$$

$$\frac{2(193\gamma_e^4 - 558\gamma_e^2 + 81)}{405a_e^5}\epsilon^5 + \frac{4(131\gamma_e^5 - 586\gamma_e^3 + 243\gamma_e)}{567a_e^6}\epsilon^6,$$

No entanto, considerando a componente $y(t)$ da solução

$$y(t) = e^{t\gamma_e} \left(\left(-\frac{2a_e\gamma_e}{\gamma_e^2 + 1} + \epsilon \right) (\cos(t) - \gamma_e \sin(t)) - \sin(t)a_e \right) + \frac{2a_e\gamma_e}{\gamma_e^2 + 1}$$

desenvolvendo em série e substituindo o nosso período encontrado t^- obtemos

$$y(\epsilon) = -\epsilon - \frac{4\gamma_e\epsilon^2}{3a_e} - \frac{16\gamma_e^2\epsilon^3}{9a_e^2} - \frac{4(79\gamma_e^3 - 9\gamma_e)\epsilon^4}{135a_e^3} + \dots$$

logo, segue o resultado.

3. A justificativa de que $P'_e(y) < 0$ segue de imediato (2.6). Já as outras afirmações não seguem tão imediatas.

Temos

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'_e(y) = \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} -\frac{\varphi_{\gamma_e}(t^-)}{\varphi_{-\gamma_e}(t^-)} = \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} -\frac{1 - e^{\gamma_e t^-} (\cos(t^-) - \gamma_e \sin(t^-))}{1 - e^{-\gamma_e t^-} (\cos(t^-) + \gamma_e \sin(t^-))}.$$

Observe que quando $y_0 \rightarrow 0^+$ temos que $t^- \rightarrow 0^+$, ou seja,

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'_e(y) = \lim_{t^- \rightarrow 0^+} P'_e(y).$$

Daí, calculando

$$\lim_{t^- \rightarrow 0^+} -\frac{1 - e^{\gamma_e t^-} (\cos(t^-) - \gamma_e \sin(t^-))}{1 - e^{-\gamma_e t^-} (\cos(t^-) + \gamma_e \sin(t^-))} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{t^- \rightarrow 0^+} -e^{2\gamma_e t^-} = -1.$$

Assim, segue que

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} P'_e(y) = -1.$$

E por outro lado, quando $y_0 \rightarrow +\infty$ segue $t^- \rightarrow \pi$, assim vemos

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'_e(y) = \lim_{t^- \rightarrow \pi} P'_e(y),$$

dai

$$\lim_{t^- \rightarrow \pi} P'_e(y) = \lim_{t^- \rightarrow \pi} -\frac{1 - e^{\gamma_e t^-} (\cos(t^-) - \gamma_e \sin(t^-))}{1 - e^{-\gamma_e t^-} (\cos(t^-) + \gamma_e \sin(t^-))} = -\frac{1 + e^{\gamma_e \pi}}{1 + e^{-\gamma_e \pi}} = -e^{\gamma_e \pi}.$$

Portanto, temos que

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} P'_e(y) = -e^{\gamma_e \pi}.$$

Assumindo (2.7) temos que $\text{sign}P''_e(y) = -\text{sign}(\sinh(\gamma_e t) - \gamma_e \sin(t))$. Assim, seja $h(t) = \sinh(\gamma_e t) - \gamma_e \sin(t)$. Fazendo sem perda de generalidade $\gamma_e > 0$, devemos mostrar que para todo $t \in (0, \pi)$ segue $h(t) > 0$.

De fato, vendo que $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ e $h'''(0) > 0$, pois $h'''(t) = \gamma_e^3 \cosh(\gamma_e t) + \gamma_e \cos(t)$. Além disso, observe que $h'''(t) > 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$, pois nesse intervalo $\cos(t) \geq 0$. Logo, isso implica que $h''(t)$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2}]$ e como $h''(0) = 0$ temos $h''(t) > 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Assim, de maneira análoga vemos que $h'(t) > 0$ e $h(t) > 0$ em $(0, \frac{\pi}{2}]$. Já a análise no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ é mais simples já que temos $\sinh(\gamma_e t)$ e $-\gamma_e \sin(t)$ são crescentes no dado intervalo, pois $\gamma_e > 0$, ou seja, concluimos que $h(t)$ é crescente também em $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Enfim, como $h(0) = 0$ podemos concluir que $h(t)$ é crescente em $(0, \pi)$, assim segue $h(t) > 0$ para todo $(0, \pi)$ e de maneira análoga provamos quando $\gamma_e < 0$. Portanto, concluimos que $\text{sign}P''_e(y) = -\text{sign}\gamma_e$.

Agora, para justificar que $A_e(y)$ é assíntota de $P_e(y)$ mostraremos que

$$\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} (P_e(y) - A_e(y)) = 0.$$

De fato, considerando a equivalência dos limite, calcularemos para $t^- \rightarrow \pi$, segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t^- \rightarrow \pi} (P_e(y) - A_e(y)) \stackrel{De(2.5)}{=} \\ \lim_{t^- \rightarrow \pi} -\frac{a_e}{1+\gamma_e^2} \frac{e^{\gamma_e \pi} \varphi_{-\gamma_e}(t^-)}{\sin(t)} - (-e^{\gamma_e \pi} y + \frac{2a_e \gamma_e}{1+\gamma_e^2} (1 + e^{\gamma_e \pi})) = \\ \lim_{t^- \rightarrow \pi} -\frac{a_e}{1+\gamma_e^2} \frac{e^{\gamma_e \pi} (1 - e^{\gamma_e t^-} (\cos(t) + \gamma_e \sin(t^-)))}{\sin(t^-)} \\ + e^{\gamma_e \pi} \left(\frac{a_e}{1+\gamma_e^2} \frac{e^{-\gamma_e t^-} (1 - e^{\gamma_e t^-} (\cos(t^-) - \gamma_e \sin(t^-)))}{\sin(t^-)} \right) - \frac{2a_e \gamma_e}{1+\gamma_e^2} (1 + e^{\gamma_e \pi}) \stackrel{L'Hospital}{=} \\ \lim_{t^- \rightarrow \pi} \frac{-a_e \gamma_e e^{\gamma_e t^-} + a_e (-\sin(t^-) + \gamma_e \cos(t^-)) - \gamma_e a_e e^{\gamma_e (\pi - t^-)} - a_e e^{\gamma_e \pi} (-\sin(t^-) - \gamma_e \cos(t^-))}{\cos(t^-) (1 + \gamma_e^2)} \\ - \frac{2a_e \gamma_e}{1+\gamma_e^2} (1 + e^{\gamma_e \pi}) = \frac{2a_e \gamma_e}{1+\gamma_e^2} (1 + e^{\gamma_e \pi}) - \frac{2a_e \gamma_e}{1+\gamma_e^2} (1 + e^{\gamma_e \pi}) = 0. \end{array} \right.$$

Graficamente em torno da origem, a aplicação P_e observando as derivadas na origem e além disso considerando também que P_e é decrescente. É dado por

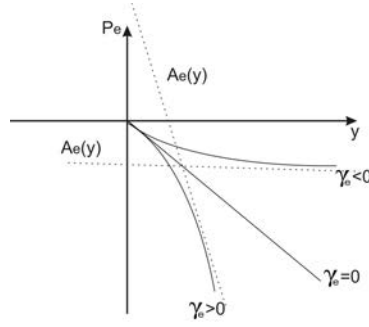


Figura 2.1.4: Aplicação P_e e sua assíntota A_e .

enfim, temos que $\text{sign}(A_e(y) - P_e(y)) = \text{sing}(\gamma_e)$. ■

Veremos adiante as mesmas propriedades da *Proposição 2.1.1* mas dessa vez para a aplicação de Poincaré a direita, além disso a demonstração será muito semelhante.

Proposição 2.1.2 *Assuma que $a_d \leq 0$ no sistema (1.16). Então segue os seguintes resultados:*

1. Se $a_d \gamma_d = 0$, então $P_d(y) = -e^{\gamma_d \pi} y + (1 + e^{\gamma_d \pi}) b$ para todo $y \leq b$.
2. Se $a_d < 0$, então a aplicação de Poincaré a direita P_d dado em (2.9) e (2.10) é bem definida para todo $y \leq b$, com $t \in (0, \pi)$; em particular temos $P_d(b) = b$. Assim, as quatro primeiras derivadas no ponto $y = b$ são

$$P'_d(b) = -1, \quad P''_d(b) = -\frac{8\gamma_d}{3a_d}, \quad P'''_d(b) = -\frac{32\gamma_d^2}{3a_d^2}, \quad P_d^{IV}(b) = -32\gamma_d \frac{79\gamma_d^2 - 9}{45a_d^3}. \quad (2.14)$$

3. Se $a_d < 0$ e $\gamma_d \neq 0$, então para todo $y \leq b$, segue que

$$P'_d(y) < 0, \quad \lim_{y \rightarrow b^-} P'_d(y) = -1, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} P'_d(y) = -e^{\gamma_d \pi}, \quad \text{sign} P''_d(y) = \text{sign} \gamma_d,$$

e a aplicação P_d^{-1} tem como assíntota A_d^{-1} dada por

$$A_d^{-1} = -e^{\gamma_d \pi} y + (1 + e^{-\gamma_d \pi}) \left(b + \frac{2a_d \gamma_d}{1 + \gamma_d^2} \right)$$

com $\text{sign}(P_d^{-1}(y) - A_d^{-1}(y)) = \text{sing}(\gamma_d)$.

Demonstração:

1. De maneira análoga à *Proposição 2.1.1 (1)* também dividimos a análise nos casos:

Caso $\gamma_d = 0$, segue que $\alpha^+ = 0$. Assim, também temos que o ponto de equilíbrio do campo S^+ é um centro global linear. Dai, pela simetria segue $P_d(y) = -y + 2b$. Veja a Figura 2.1.5.

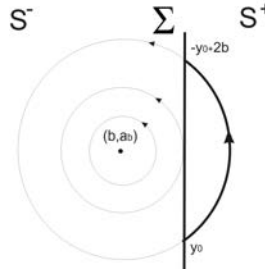


Figura 2.1.5: Centro Linear Global do Campo S^+ .

Caso $a_d = 0$, segue diretamente da equação (2.8).

2. Considerando a solução do sistema em S^+ e dessa vez também de maneira análoga ao processo da *Proposição 2.1.1 (2)* mas agora calculando P_d em torno de b , ou seja, basta trocar a condição inicial z_0 por $\epsilon + b$. De tal forma que a aplicação P_d é dado por

$$P_d(\epsilon) = P_d(b) + P'_d(b)(\epsilon + b) + P''_d(b)(\epsilon + b)^2 + \dots,$$

como se sabe que $P_e \leq 0$, daí o domínio de P_d também é menor ou igual a zero, pois essa é uma condição necessária para obter a aplicação de Poincaré. Observe que quando $\epsilon = -b$ temos $P_d(-b) = P_d(b) = b$. Assim, aplicando o processo análogo ao da *Proposição 2.1.1 (b)* obtemos as quatro primeiras derivadas em torno de b .

3. Que $P'_d(y) < 0$ segue de imediato (2.11). Já as outras afirmações não seguem tão imediatas. Outra vez de (2.11) temos que

$$P'_d(y) = \frac{y - b}{P_d(y) - b} e^{2\gamma_d t^+} = -\frac{\varphi_{\gamma_d}(t^+)}{\varphi_{-\gamma_d}(t^+)},$$

e além disso, se $y \rightarrow b^-$ temos $t^+ \rightarrow 0^-$. Dai, basta calcular o limite

$$\lim_{t^+ \rightarrow 0^-} -\frac{\varphi_{\gamma_d}(t^+)}{\varphi_{-\gamma_d}(t^+)} = -\frac{\gamma_d^2 + 1}{\gamma_d^2 + 1} = -1,$$

isso é possível aplicando três vezes a regra de L'Hospital. Assim, segue

$$\lim_{y \rightarrow b^-} P'_d(y) = -1.$$

Temos também que, se $y \rightarrow -\infty$ temos $t^+ \rightarrow \pi$. Assim, obtemos que

$$\lim_{t^+ \rightarrow \pi} -\frac{\varphi_{\gamma_d}(t^+)}{\varphi_{-\gamma_d}(t^+)} = -\frac{(1 + e^{\gamma_d \pi})}{(1 + e^{-\gamma_d \pi})} = -e^{\gamma_d \pi}.$$

Logo, segue

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} P_d'(y) = -e^{\gamma_d \pi}.$$

Considerando a equação (2.12) temos que $\text{sign}P_d''(y) = \text{sign}(\sinh(\gamma_d t) - \gamma_d \sin(t))$ e na *Proposição 2.1.1 (3)* já vimos que no intervalo $(0, \pi)$ segue $\text{sign}(\sinh(\gamma_d t) - \gamma_d \sin(t)) = \text{sing}\gamma_d$. Enfim, podemos concluir $\text{sign}P_d''(y) = \text{sing}\gamma_d$.

Assumindo (2.10) e (2.9). Segue que, a justificativa de que P_d^{-1} tem assíntota A_d^{-1} pode ser mostrado fazendo a mudança $P_d^{-1}(z_1) = z_0$ que implica $z_1 = P_d(z_0)$. O coeficiente angular da assíntota é calculado da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} \frac{P_d^{-1}(z_1)}{z_1} = \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \frac{z_0}{P_d(z_0)} = \lim_{t^+ \rightarrow \pi} \frac{z_0}{z_1} = \\ \lim_{t^+ \rightarrow \pi} \frac{b(1+\gamma_d^2)\sin(t^+) + a_d e^{-\gamma_d t^+} \varphi_{\gamma_d}(t^+)}{b(1+\gamma_d^2)\sin(t^+) - a_d e^{\gamma_d t^+} \varphi_{-\gamma_d}(t^+)} = \\ -e^{-2\gamma_d \pi} \frac{1+e^{\gamma_d \pi}}{1+e^{-\gamma_d \pi}} = -e^{-2\gamma_d \pi} e^{\gamma_d \pi} = -e^{-\gamma_d \pi}. \end{array} \right.$$

Já, o termo independente é encontrado da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} P_d^{-1}(z_1) - (-e^{-\gamma_d \pi})z_1 = \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} z_0 + e^{-\gamma_d \pi} P_d(z_0) = \lim_{t^+ \rightarrow \pi} z_0 + e^{-\gamma_d \pi} z_1 = \\ \lim_{t^+ \rightarrow \pi} b + \frac{a_d}{1+\gamma_d^2} \frac{e^{-\gamma_d t^+} \varphi_{\gamma_d}(t^+)}{\sin(t^+)} + e^{-\gamma_d \pi} \left(b - \frac{a_d}{1+\gamma_d^2} \frac{e^{\gamma_d t^+} \varphi_{-\gamma_d}(t^+)}{\sin(t^+)} \right) \stackrel{L'Hospital}{=} \\ (e^{-\gamma_d \pi} + 1) \left(b + \frac{2a_d \gamma_d}{1+\gamma_d^2} \right). \end{array} \right.$$

Graficamente obtemos algo como

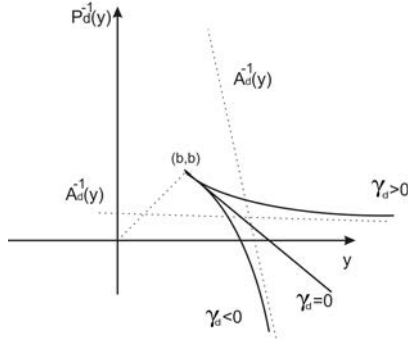


Figura 2.1.6: Aplicação P_d^{-1} e sua assíntota A_d^{-1} .

Enfim, temos que $\text{sign}(P_d^{-1}(y) - A_d^{-1}(y)) = \text{sing}(\gamma_d)$.



Em seguida, como consequência dos resultados anteriores, enumeramos algumas propriedades da aplicação de Poincaré completa.

Proposição 2.1.3 (*Propriedades da aplicação completa de Poincaré*) Assuma que $a_d \leq 0 \leq a_e$ no sistema (1.16). Então segue os seguintes resultados:

1. A aplicação de Poincaré é definida para $y \geq 0$.
2. Se $a_e \gamma_e = a_d \gamma_d = 0$, então a aplicação de Poincaré denotada por P é dada por

$$P(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi} y + (1 + e^{\gamma_d \pi}) b.$$

3. Para todo $y \geq 0$, a derivada da aplicação de Poincaré é dada por

$$P'(y) = \frac{y}{P_e(y)} \frac{P_e(y) - b}{P(y) - b} e^{2(\gamma_d t^+ + \gamma_e t^-)}$$

e satisfaz

$$\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi}.$$

4. Se $b = 0$ e $a_d < 0 < a_e$, então as três primeiras derivadas da aplicação de Poincaré na origem são:

$$P'(0) = 1, \quad P''(0) = \frac{8}{3} \left(\frac{\gamma_e}{a_e} - \frac{\gamma_d}{a_d} \right), \quad P'''(0) = \frac{3}{2} (P''(0))^2.$$

Quando $a_d \gamma_e = a_e \gamma_d$, então $P''(0) = P'''(0) = 0$, e $P^{IV}(0)$ é dado por

$$P^{IV}(0) = -\frac{32\gamma_d(\gamma_d - \gamma_e)(\gamma_d + \gamma_e)}{5a_d^3\gamma_e^2}.$$

5. Se $a_d < 0 < a_e$ e $\gamma_e = -\gamma_d \neq 0$, então

$$P_d \left[b - \frac{a_d}{a_e} P_e(y) \right] = b - \frac{a_d}{a_e} y. \quad (2.15)$$

E além disso, se adicionarmos, $a_d = -a_e$ e $b = 0$, então $P(y) = y$, e temos em torno da origem um centro não-linear global.

6. Se $a_d < 0$ e $a_e = 0$, então $\text{sign} P''(y) = \text{sign} \gamma_d$. Se, além disso adicionar, $b = 0$, temos $P'(0) = e^{\gamma_e \pi}$.
7. Se $a_e > 0$ e $a_d = 0$, então $\text{sign} P''(y) = \text{sign} \gamma_e$. Se, além disso adicionar, $b = 0$, temos $P'(0) = e^{\gamma_d \pi}$.

Demonstração:

1. É imediato pela forma como foi definido P_e .
2. Nessas condições da hipótese temos da *Proposição 2.1.1 (1)* e *Proposição 2.1.2 (1)* que $P_e(y) = -e^{\gamma_e \pi} y$ e $P_d(z) = -e^{\gamma_d \pi} z + (1 + e^{\gamma_d \pi})b$ respectivamente. Logo, considerando a composição obtemos $P(y) = P_d \circ P_e(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi} y + (1 + e^{\gamma_d \pi})b$.
3. De (2.6), $P'_e(y) = \frac{y}{P_e(y)} e^{2\gamma_e t^-}$ e de (2.11), $P'_d(z) = \frac{z-b}{P_d(z)-b} e^{2\gamma_d t^+}$. Assim, sabendo que dado $P(y) = P_d \circ P_e(y)$ implica que $P'(y) = (P'_d \circ P_e) \cdot P'_e(y)$. Portanto, substituindo as equações (2.6) e (2.11) obtemos

$$P'(y) = \frac{P_e(y) - b}{P_d(P_e(y)) - b} e^{2\gamma_d t^+} \frac{y}{P_e(y)} e^{2\gamma_e t^-} = \frac{y}{P_e(y)} \frac{P_e(y) - b}{P(y) - b} e^{2(\gamma_d t^+ + \gamma_e t^-)}.$$

Além disso, decorre da *Proposição 2.1.1(3)* e *Proposição 2.1.2(3)* que $\lim_{y \rightarrow \infty} P'_e(y) = -e^{\gamma_e \pi}$ e $\lim_{y \rightarrow -\infty} P'_d(y) = -e^{\gamma_d \pi}$ respectivamente. Assim, segue que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} P'_d(P_e(y)) \cdot P'_e(y) = e^{(\gamma_e + \gamma_d)\pi}.$$

4. Considerando as *Proposição 2.1.1 (2)* e *Proposição 2.1.2 (2)* temos que em torno da origem a série é dada por

$$P_e(\epsilon) = -\epsilon - \frac{8\gamma_e}{6a_e} \epsilon^2 - \frac{32\gamma_e^2}{18a_e^2} \epsilon^3 - 32\gamma_e \frac{79\gamma_e^2 - 9}{1080a_e^3} \epsilon^4 + \dots$$

$$P_d(\epsilon) = -\epsilon - \frac{8\gamma_d}{6a_d} \epsilon^2 - \frac{32\gamma_d^2}{18a_d^2} \epsilon^3 - 32\gamma_d \frac{79\gamma_d^2 - 9}{1080a_d^3} \epsilon^4 + \dots$$

Assim, fazendo a composição e considerando os termos das potências em ϵ temos

$$\begin{aligned} P(\epsilon) &= P_d \circ P_e(\epsilon) = -\left(-\epsilon - \frac{8\gamma_e}{6a_e} \epsilon^2 - \frac{32\gamma_e^2}{18a_e^2} \epsilon^3 - 32\gamma_e \frac{79\gamma_e^2 - 9}{1080a_e^3} \epsilon^4 + \dots\right) \\ &\quad - \frac{8\gamma_d}{6a_d} \left(-\epsilon - \frac{8\gamma_e}{6a_e} \epsilon^2 - \frac{32\gamma_e^2}{18a_e^2} \epsilon^3 - 32\gamma_e \frac{79\gamma_e^2 - 9}{1080a_e^3} \epsilon^4 + \dots\right)^2 \\ &\quad - \frac{32\gamma_d^2}{18a_d^2} \left(-\epsilon - \frac{8\gamma_e}{6a_e} \epsilon^2 - \frac{32\gamma_e^2}{18a_e^2} \epsilon^3 - 32\gamma_e \frac{79\gamma_e^2 - 9}{1080a_e^3} \epsilon^4 + \dots\right)^3 \\ &\quad - 32\gamma_d \frac{79\gamma_d^2 - 9}{1080a_d^3} \left(-\epsilon - \frac{8\gamma_e}{6a_e} \epsilon^2 - \frac{32\gamma_e^2}{18a_e^2} \epsilon^3 - 32\gamma_e \frac{79\gamma_e^2 - 9}{1080a_e^3} \epsilon^4 + \dots\right)^4 + \dots \end{aligned}$$

E daí, segue que

$$P(\epsilon) = \epsilon + \frac{8}{6} \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_e} - \frac{\gamma_d}{\gamma_d} \right) \epsilon^2 + \left(\frac{32\gamma_e^2}{18a_e^2} - 2 \left(\frac{64\gamma_d\gamma_e}{36a_d a_e} \right) + \frac{32\gamma_d^2}{18a_d^2} \right) \epsilon^3 + \\ (32\gamma_e \frac{79\gamma_e^2 - 9}{1080a_e^3} - 2 \left(\frac{8\gamma_d}{6a_d} \right) \left(\frac{32\gamma_e^2}{18a_e^2} \right) + 3 \left(\frac{32\gamma_d^2}{18a_d^2} \right) \left(\frac{8\gamma_e}{6a_e} \right) + 32\gamma_d \frac{79\gamma_d^2 - 9}{1080a_d^3}) \epsilon^4 + \dots$$

simplicando obtemos

$$P(\epsilon) = \epsilon + \frac{8}{6} \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_e} - \frac{\gamma_d}{\gamma_d} \right) \epsilon^2 + \frac{3}{12} \left(\frac{8}{6} \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_e} - \frac{\gamma_d}{\gamma_d} \right) \right) + \dots$$

e além disso, observe que quando $a_e = \frac{a_d\gamma_e}{\gamma_d}$ temos $P''(0) = P'''(0) = 0$ e se substituir no termo que acompanha a potência ϵ^4 obtemos

$$-\frac{32\gamma_d(\gamma_d - \gamma_e)(\gamma_d + \gamma_e)}{24(5a_d^3\gamma_e^2)}.$$

Portanto, multiplicando cada termo das potências por seus respectivos fatoriais, segue o resultado.

5. Assumindo primeiramente as fórmulas (2.4), (2.5), (2.9) e (2.10), chame de

$$\bar{z}_0 = b - \frac{a_d}{a_e} P_e(y) \stackrel{(2.5)}{=} b - \frac{a_d}{a_e} \left(-\frac{a_e}{1 + \gamma_e^2} \frac{e^{\gamma_e t^-} \varphi_{-\gamma_e}(t^-)}{\sin t^-} \right) \stackrel{\gamma_e = -\gamma_d}{=} b + \frac{a_d}{1 + \gamma_d^2} \frac{e^{-\gamma_d t^-} \varphi_{\gamma_d}(t^-)}{\sin t^-}.$$

Assim, considerando que $\phi^+(t, z) = (x^+(t, z), y^+(t, z))$ a solução do sistema (1.16) em S^+ , decorre por (2.9) que $x^+(t^-, \bar{z}_0) = 0$, logo temos que $P_d(\bar{z}_0) = y^+(t^-, \bar{z}_0)$ que por (2.10) tem o seguinte formato

$$P_d(\bar{z}_0) = b - \frac{a_d}{1 + \gamma_d^2} \frac{e^{\gamma_d t^-} \varphi_{-\gamma_d}(t^-)}{\sin t^-} \stackrel{\gamma_e = -\gamma_d}{=} b - \frac{a_d}{a_e} \left(\frac{a_e}{1 + \gamma_e^2} \frac{e^{-\gamma_e t^-} \varphi_{\gamma_e}(t^-)}{\sin t^-} \right) = b - \frac{a_d}{a_e} y.$$

Portando, obtemos o resultado, para $\gamma_d = -\gamma_e \neq 0$ temos

$$P_d[b - \frac{a_d}{a_e} P_e(y)] = b - \frac{a_d}{a_e} y.$$

6. Dado $P(y) = P_d \circ P_e(y)$ obtemos

$$P''(y) = (P_d'' \circ P_e(y))(P_e'(y))^2 + (P_d' \circ P_e(y))P_e''(y),$$

e como da *Proposição 2.1.1(1)* quando $a_e = 0$ a aplicação de Poincaré é dada por $P_e(y) = -e^{\gamma_e \pi} y$ segue que $P_e''(y) = 0$, além disso, da *Proposição 2.1.1(3)* temos que $\text{sign} P_d''(y) =$

$\text{sing}\gamma_d$, isso implica $\text{sing}P''(y) = \text{sing}P'_d(y)$, logo segue $\text{sing}P''(y) = \text{sing}\gamma_d$.

De *Proposição 2.1.1(2)* sabemos que $P'_d(0) = -1$, e como nessas condições $P'_e(y) = -e^{\gamma_e\pi}$. Enfim, temos

$$P'(0) = (P'_d \circ P_e(0)).P'_e(0) = e^{\gamma_e\pi}.$$

7. A demonstração desse item é análogo ao anterior. ■

Observação 2.1.1 *Considerando $a_d < 0 < a_e$, para o caso em que $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e \neq 0$ temos $\text{sign}P''(0) = \text{sign}(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e)$. Já para o caso em que $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e = 0$ e $\gamma_d\gamma_e < 0$, temos $\text{sign}P^{IV}(0) = \text{sign}(\gamma_d + \gamma_e)$, de fato, segue imediato da *Proposição 2.1.3(4)*.*

Em seguida apresentaremos uma tabela de simetrias da forma canônica (1.16).

Π_1	Π_2	Π_3
$x \rightarrow x$	$x \rightarrow -x$	$x \rightarrow -x$
$y \rightarrow -y$	$y \rightarrow y + b$	$y \rightarrow -y - b$
$t \rightarrow -t$	$t \rightarrow -t$	$t \rightarrow t$
$\gamma_e \rightarrow -\gamma_e$	$\gamma_e \rightarrow -\gamma_d$	$\gamma_e \rightarrow \gamma_d$
$\gamma_d \rightarrow -\gamma_d$	$\gamma_d \rightarrow -\gamma_e$	$\gamma_d \rightarrow \gamma_e$
$a_e \rightarrow a_e$	$a_e \rightarrow -a_d$	$a_e \rightarrow -a_d$
$a_d \rightarrow a_d$	$a_d \rightarrow -a_e$	$a_d \rightarrow -a_e$
$b \rightarrow -b$	$b \rightarrow -b$	$b \rightarrow b$

Tabela 2.1.1: Simetrias do sistema (1.16).

A importância da *Tabela 2.1.1* acima se concretizará mais adiante nas demonstrações dos próximos resultados. Nesse momento a preocupação será em mostrar a veracidade da nossa *Tabela 2.1.1* e como obtê-la.

Tome $\Pi_1 : (x, y, t) \rightarrow (x, -y, -t)$. Dai, chame $X = x$, $Y = -y$ e $T = -t$, decorre que $\frac{dt}{dT} = -1$, logo do sistema (1.16) dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma_e & -1 \\ 1 + \gamma_e^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_e \end{pmatrix} \quad \text{se } (x, y) \in S^-,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma_d & -1 \\ 1 + \gamma_d^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ a_d \end{pmatrix} \quad \text{se } (x, y) \in S^+,$$

e considerado que o novo sistema satisfaz a relação

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dT} = -\dot{x} \quad e \quad \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dT} = \dot{y},$$

obtemos o novo sistema dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma_e & -1 \\ 1 + \gamma_e^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_e \end{pmatrix} \quad se \quad (X, Y) \in S^-,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma_d & -1 \\ 1 + \gamma_d^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ a_d \end{pmatrix} \quad se \quad (X, Y) \in S^+.$$

Análogamente, obtemos as outras simetrias, observe que nas mudanças Π_2 e Π_3 temos que os sistemas mudam de lado, ou seja, S^+ vai para S^- e vice versa.

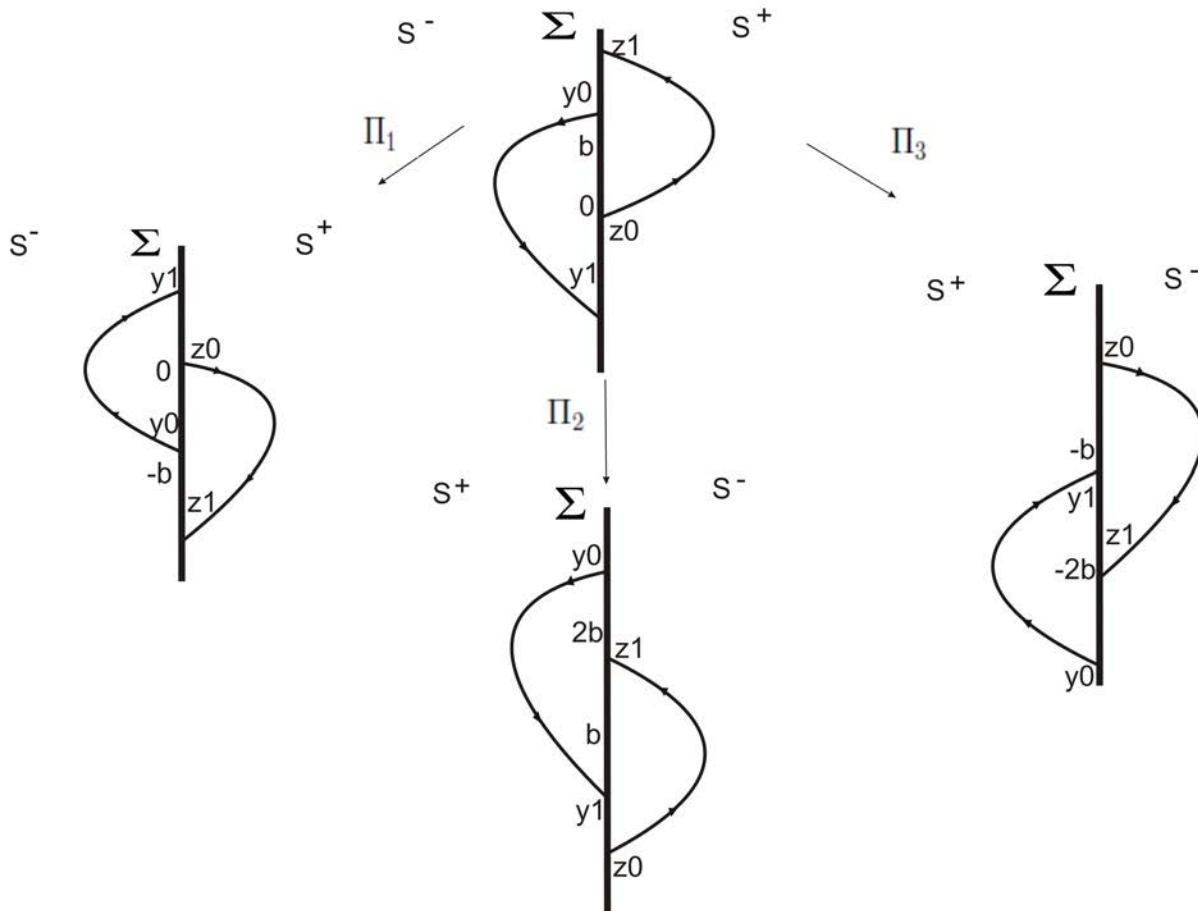


Figura 2.1.7: Diagrama das simetrias da Tabela 2.1.1.

Observe que a forma canônica dada em (1.16) é invariante sob as transformações mostradas na Tabela 2.1.1, ou seja, o comportamento topológico é idêntico. Podemos observar também

que cada uma das transformações é a composta entre outras duas. Daí, se adicionarmos a transformação identidade Π_0 , teremos um grupo de transformações invariante. Assim, podemos usar as simetrias acima para reduzir o número de casos diferentes a serem usados nas provas dos teoremas adiante. Por exemplo, quando $b \neq 0$, basta estudar o caso em que $b > 0$ pois caso contrário aplicamos a simetria Π_1 ou Π_2 e vice versa. Ainda mais, basta considerar os três casos $a_d < 0 < a_e$, $a_d = a_e = 0$ e $a_d < 0$, $a_e = 0$ porque o caso restante $a_d = 0$, $a_e > 0$ pode ser transformado no último caso pela simetria Π_3 .

Análise da Aplicação de Poincaré e Seus Resultados

Após obter algumas propriedades da aplicação de Poincaré veremos de agora em diante os resultados extraídos das Proposições do *Capítulo 2*. Analisaremos a estabilidade da origem, apresentaremos resultados do sistema com e sem região de deslize. Impomos condições sobre os parâmetros dados no sistema (1.16) e analisaremos a existência e inexistência de órbita periódica transversal. Provaremos que o número máximo de órbitas periódicas do sistema (1.16) sem a região de deslize é um e com a região de deslize veremos um caso em que temos no mínimo duas órbitas periódicas transversal.

3.1 Resultados auxiliares

Apresentaremos alguns resultados que nos auxiliarão na justificativa de um resultado da próxima seção. Alguns teoremas a seguir não terão demonstração, veja [10], para as demonstrações completa.

Definição 3.1.1 Chamamos de equação diferencial de Liénard, a equação dada por

$$\ddot{x} - f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (3.1)$$

com $x \in [a, b]$ e $-\infty < a < 0 < b < \infty$. Considerando f e g descontínuas em $x = 0$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < 0 \\ f_2(x) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x < 0 \\ g_2(x) & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde f_1, g_1 são C^1 em $[a, 0]$ e f_2, g_2 são C^1 em $[0, b]$.

Usando a forma planar clássica de Liénard obtemos o equivalente sistema diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) - y, \\ \dot{y} = g(x), \end{cases} \quad \text{com} \quad F(x) = \int_0^x f(s)ds. \quad (3.3)$$

Definimos o sistema descontínuo, o seguinte campo de vetores associado ao sistema (3.3)

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x) & \text{se } x \leq 0, \\ X_2(x) & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{onde} \quad X_i(x) = \begin{pmatrix} F_i(x) - y \\ g_i(x) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

com $x = (x, y)^T$.

Sobre o sistema acima impomos algumas hipóteses para restringí-lo e para que se torne de acordo com o nosso interesse.

- **H1:**(exclui o caso de pseudosela) Impomos que $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x < 0, \\ g_2(x) & \text{se } x > 0, \end{cases}$ satisfaz, $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$, ou seja, com essa condição excluimos o caso de tangência visível na origem em (3.4). Justificamos, analisando que $Xf = F(x) - y$, assim $Xf(0, 0) = 0$ e $X^2f = -g(x)$. Logo, quando $x > 0$ e $x < 0$ segue respectivamente que pela condição imposta temos $X^2f < 0$ e $X^2f > 0$.

- **H2:**(satisfazer a condição necessária de existência de órbita periódica transversal) Impomos que $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < 0, \\ f_2(x) & \text{se } x > 0, \end{cases}$ satisfaz, $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$. Justificamos, considerando a *Proposição 1.2.4* que possui a seguinte condição necessária $T^- \sigma^- + T^+ \sigma^+ + bh = 0$, analisando o caso $b = 0$, temos $\sigma^\pm > 0$, pois são áreas. Assim, a condição só será satisfeita para $T^- T^+ < 0$ ou para $T^- = T^+ = 0$. Decorre, da prova da *Proposição 1.2.4* ao usar o teorema de Green no sistema (3.4) no lugar de T^- e T^+ teremos f_1 e f_2 . Ou seja, para satisfazer a condição necessária devemos ter $f_1 f_2 < 0$. Logo, segue um motivo pela qual impomos essa condição.

Agora, considerando a hipótese *H2*, a forma $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ e chamando de $p = p(x) = F(x)$, daí isso implica que $p'(x) = f(x)$, e por *H2* segue que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, como $\text{sign}(p'(x)) = \text{sign}(x)$ para $x \neq 0$, segue que a função $p(x)$ tem inversa para $x \neq 0$. Assim, defina a inversa F^{-1} dada por

$$x_1 : [0, F(a)] \rightarrow [a, 0], \quad \text{tal que } F(x_1(p)) = p,$$

$$x_2 : [0, F(b)] \rightarrow [0, b], \quad \text{tal que } F(x_2(p)) = p.$$

Assim, tome a função auxiliar dada por

$$h_i(p) = \frac{g(x_i(p))}{f(x_i(p))} \quad \text{onde } i = 1, 2. \quad (3.5)$$

- **H3:** Assumindo que existem os dois limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{p \rightarrow 0^+} h_1(p) = l_1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{p \rightarrow 0^+} h_2(p) = l_2;$$

satisfazendo $0 \leq l_2 \leq l_1 < \infty$, então temos $h_2(p) < h_1(p)$ para $p > 0$ e suficientemente pequeno.

Teorema 3.1.1 *Se f e g são como em (3.2) com f_i e g_i de classe C^1 em $[a, 0]$ e $[0, b]$ respectivamente, para $i = 1, 2$. Suponha que F e h_i são definidos como em (3.3) e (3.5) e assuma as hipóteses $H1 - H3$. Se o sistema (3.3) tem órbita periódica transversal em $a < x < b$, então as equações*

$$F(x_1) = F(x_2), \quad \frac{g(x_1)}{f(x_1)} = \frac{g(x_2)}{f(x_2)} \quad (3.6)$$

tem pelo menos uma solução $(x_1, x_2) = (s_1, s_2)$ com $a < s_1 < 0 < s_2 < b$ ou equivalentemente existe pelo menos uma solução $p \in (0, F(a)) \cap (0, F(b))$ para a equação $h_1(p) = h_2(p)$.

Teorema 3.1.2 *Nas condições do Teorema 3.1.1, assumindo que o sistema (3.6) tem exatamente uma solução $(x_1, x_2) = (s_1, s_2)$ com $a < s_1 < 0 < s_2 < b$, ou equivalente tem exatamente uma solução $\hat{p} \in (0, F(a)) \cap (0, F(b))$ para a equação $h_1(p) = h_2(p)$. Se o sistema tem órbita periódica transversal, e se a função positiva*

$$\alpha(x) = \frac{g(x)}{f(x)F(x)},$$

é crescente para $x \in (a, 0)$, ou equivalentemente a função positiva

$$\frac{h_1(p)}{p},$$

é decrescente para $p \in (0, F(a))$, então o sistema tem no máximo uma órbita periódica transversal em $a < x < b$ e além disso é estável.

Teorema 3.1.3 *Considere o sistema diferencial linear por partes de Liénard:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & -1 \\ d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad \text{se } x < 0,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{se } x \geq 0,$$

tal que $t_1 < 0$, $d_1 > 0$, $a_1 < 0$, $t_2 > 0$, $d_2 > 0$, $a_2 > 0$. Então, segue os resultados:

1. *Se $\frac{a_2}{t_2} < \frac{a_1}{t_1}$ e tem órbita periódica transversal, então $\frac{d_2}{t_2^2} > \frac{d_1}{t_1^2}$ e a órbita periódica transversal é um ciclo limite estável e é único.*

2. Se $\frac{a_1}{t_1} < \frac{a_2}{t_2}$ e tem órbita periódica transversal, então $\frac{d_1}{t_1^2} > \frac{d_2}{t_2^2}$ e a órbita periódica transversal é um ciclo limite instável e é único.
3. Se $\frac{a_1}{t_1} = \frac{a_2}{t_2}$, então o sistema não tem órbita periódica para $\frac{d_2}{t_2^2} < \frac{d_1}{t_1^2}$ e tem um centro na origem para $\frac{d_1}{t_1^2} = \frac{d_2}{t_2^2}$.

Demonstração: Primeiramente analisaremos se as hipóteses $H1 - H3$ são satisfeitas. Do sistema dado, temos

$$\begin{cases} F(x) = t_1x, \\ f(x) = t_1, \\ g(x) = d_1x + a_1, \end{cases} \quad \text{para } x < 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} F(x) = t_2x, \\ f(x) = t_2, \\ g(x) = d_2x + a_2, \end{cases} \quad \text{para } x > 0.$$

Daí, $H1$ e $H2$ são satisfeita, e segue de imediato, pois é fácil ver que

$$\begin{cases} xf(x) = xt_1 > 0, & x < 0 \\ xf(x) = xt_2 > 0, & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} xg(x) = x(d_1x + a_1) > 0, & x < 0 \\ xg(x) = x(d_2x + a_2) > 0, & x > 0. \end{cases}$$

Agora, usando a função h_i para analisar a hipótese $H3$, segue

$$h_1(p) = \frac{g_1(x_1(p))}{f_1(x_1(p))} = \frac{d_1x_1(p) + a_1}{t_1} = \frac{d_1p}{t_1^2} + \frac{a_1}{t_1} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} h_1(p) = \frac{a_1}{t_1},$$

$$h_2(p) = \frac{g_2(x_2(p))}{f_2(x_2(p))} = \frac{d_2x_2(p) + a_2}{t_2} = \frac{d_2p}{t_2^2} + \frac{a_2}{t_2} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} h_2(p) = \frac{a_2}{t_2}.$$

1. Da hipótese temos $\frac{a_2}{t_2} < \frac{a_1}{t_1}$, que é equivalente a $l_2 < l_1$. Assim, pelo teorema da conservação do sinal vai existir p suficientemente pequeno tal que $h_1(p) < h_2(p)$. Logo, temos que as hipóteses $H1 - H3$ são satisfeitas, além disso, como temos uma órbita periódica transversal, segue do *Teorema 3.1.1* que

$$h_1(p) = h_2(p) \Leftrightarrow \left(\frac{d_1}{t_1^2} - \frac{d_2}{t_2^2} \right) p = \frac{a_2}{t_2} - \frac{a_1}{t_1},$$

tem ao menos uma solução, mas como $p > 0$, observe que isso só é possível quando

$$\left(\frac{d_1}{t_1^2} - \frac{d_2}{t_2^2} \right) \left(\frac{a_2}{t_2} - \frac{a_1}{t_1} \right) > 0,$$

ou seja, para $\frac{d_2}{t_2^2} > \frac{d_1}{t_1^2}$. Agora, da análise da função

$$\frac{h_1(p)}{p} = \frac{1}{p} \left(\frac{d_1}{t_1^2} p + \frac{a_1}{t_1} \right) = \frac{a_1}{t_1 p} + \frac{d_1}{t_1^2},$$

podemos observar que a medida que p cresce a função $\frac{h_1(p)}{p}$ decresce. Portanto, segue do *Teorema 3.1.2* que a órbita periódica transversal é única e estável.

2. A justificativa é semelhante ao 1º item bastando fazer a mudança $(x, y, t) \rightarrow (-x, y, -t)$, pois fazendo essa mudança obtemos que

$$t_1 \rightarrow -t_2, \quad t_2 \rightarrow -t_1, \quad a_1 \rightarrow -a_2 \quad e \quad a_2 \rightarrow -a_1.$$

Assim, após a mudança obtemos uma órbita periódica estável. Dai, com a mudança leva $t \rightarrow -t$, podemos concluir que a órbita periódica transversal no sistema inicial é instável.

3. Da hipótese temos $\frac{a_2}{t_2} = \frac{a_1}{t_1}$, que é equivalente a $l_2 = l_1$, assim para $\frac{d_2}{t_2^2} < \frac{d_1}{t_1^2}$ temos satisfeito a condição $H3$, pois temos $h_2(p) < h_1(p)$ para $p > 0$. Assim, do *Teorema 3.1.1* como

$$h_2(p) - h_1(p) = \left(\frac{d_2}{t_2^2} - \frac{d_1}{t_1^2} \right) p = 0,$$

não possui solução, podemos concluir que o sistema não tem órbita periódica transversal. Já para o caso em que $\left(\frac{d_2}{t_2^2} - \frac{d_1}{t_1^2} \right) = 0$, temos que todo $p > 0$ é solução da equação acima, e daí, do *Teorema 11.3* em [4] concluimos o resultado. ■

3.2 Órbitas periódicas transversais sem conjunto de deslize

Teorema 3.2.1 (*Estabilidade da origem sem conjunto de deslize*). *Assuma $b = 0$ e $a_d \leq 0 \leq a_e$ no sistema (1.16), segue:*

1. *A origem é assintoticamente estável para $a_e \gamma_d < a_d \gamma_e$ e instável para $a_e \gamma_d > a_d \gamma_e$.*
2. *Se $a_e \gamma_d = a_d \gamma_e$, então a origem é assintoticamente instável para $\gamma_d + \gamma_e > 0$, assintoticamente estável para $\gamma_d + \gamma_e < 0$, e um centro global para $\gamma_d + \gamma_e = 0$.*

Demonstração:

1. A princípio temos que o caso em que $a_d = a_e = 0$ não satisfaz as hipóteses para esse item, assim segue os casos. Se $a_d < 0 < a_e$ e $a_e \gamma_d < a_d \gamma_e$, decorre daí que $\frac{\gamma_e}{a_e} - \frac{\gamma_d}{a_d} < 0$, como consequência da *Proposição 2.1.3(4)* temos $P'(0) = 1$ e $P''(0) = \frac{8}{3} \left(\frac{\gamma_e}{a_e} - \frac{\gamma_d}{a_d} \right)$, ou seja, $P''(0) < 0$. Isso quer dizer que próximo da origem a aplicação de Poincaré se aproxima de uma parábola com concavidade para baixo e tangente a reta identidade.

Se $a_d < 0$ e $a_e = 0$, assim segue da hipótese $a_e\gamma_d < a_d\gamma_e$ que $0 < a_d\gamma_e$, ou seja, $\gamma_e < 0$. Já considerando a *Proposição 2.1.3(6)* decorre que $P'(0) = e^{\gamma_e\pi} < 1$.

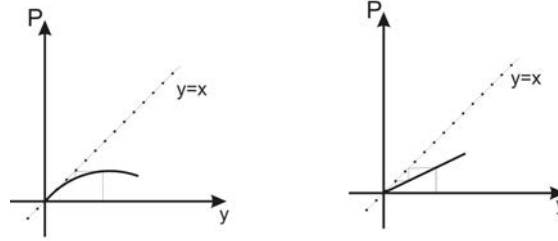


Figura 3.1.1: A origem assintoticamente estável.

Quando $a_e\gamma_d > a_d\gamma_e$ a prova segue os mesmos passos anterior, ou usando a simetria Π_1 a prova se reduz ao caso anterior, mas para esse caso a origem é instável.

2. Para o caso $a_e\gamma_d = a_d\gamma_e = 0$, temos nessas condições da *Proposição 2.1.3(2)* que a aplicação de Poincaré é dado por $P(y) = e^{(\gamma_d+\gamma_e)\pi}y$ pois $b = 0$, que implica que $P'(y) = e^{(\gamma_d+\gamma_e)\pi}$. Logo, para esse caso segue o resultado, pois para $\gamma_d + \gamma_e > 0$, $\gamma_d + \gamma_e < 0$ é óbvio a origem é assintoticamente instável e estável respectivamente, já para $\gamma_d + \gamma_e = 0$ como $P(0) = 0$ e $P'(y) = 1$, mas as derivadas de ordem superior são zero. Assim, a série da aplicação de Poincaré é $P(y) = y$, decorre daí que a origem é um centro global. Agora para o caso $a_e\gamma_d = a_d\gamma_e \neq 0$, cabe apenas a análise, se $a_d < 0 < a_e$ decorre que $\gamma_d\gamma_e < 0$ e pela *Proposição 2.1.3(4)* temos $P'(0) = 1$, $P''(0) = P'''(0) = 0$, mas para a quarta derivada

$$P^{IV}(0) = -\frac{32\gamma_d(\gamma_d - \gamma_e)(\gamma_d + \gamma_e)}{5a_d^3\gamma_e^2},$$

segue a análise, como $\gamma_d\gamma_e < 0$ decorre que $\gamma_d(\gamma_d - \gamma_e) > 0$, daí observe que $\text{sing}P^{IV}(0) = \text{sign}(\gamma_d + \gamma_e)$. Portanto, para a análise quando $\gamma_d + \gamma_e \neq 0$ é óbvio, já quando $\gamma_d + \gamma_e = 0$ temos $a_d = -a_e$. Enfim, usando a *Proposição 2.1.3 (5)* obtemos que $P(y) = y$, logo a origem é um centro global. ■

Observação 3.2.1 Se $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1$, então existe um \bar{y} grande o suficiente tal que $P(\bar{y}) < \bar{y}$. De fato, chamando de $L = \lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1$ segue daí que podemos assumir que existe um y^* tal que para $y > y^*$ temos

$$\frac{dP}{dy} < \frac{1+L}{2} = \bar{L} < 1,$$

para isso, basta observar que

$$\frac{dP}{dy} - \frac{L}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\frac{dP}{dy} - L}{2} < \frac{1}{2},$$

dai para y grande o suficiente temos $2\frac{dP}{dy} - L \rightarrow L < 1$, disso temos a justificativa da inequação acima. Assim, caso $P(y^*) < y^*$ já temos o resultado. Mas, caso contrário, vamos tomar $\bar{y} > y^*$ e aplicando o Teorema do Valor Médio obtemos

$$P(\bar{y}) - P(y^*) = P'(y_o)(\bar{y} - y^*) < \bar{L}(\bar{y} - y^*) \quad \text{para } y_o \in (y^*, \bar{y}),$$

pois $\frac{dP}{dy} < \bar{L}$ quando $y > y^*$. Agora, subtraindo \bar{y} em ambos os lado da inequação segue que

$$P(\bar{y}) - \bar{y} < -\bar{y} + P(y^*) + \bar{L}\bar{y} - \bar{L}y^*,$$

ou seja, temos

$$P(\bar{y}) - \bar{y} < P(y^*) - \bar{L}y^* - (1 - \bar{L})\bar{y}.$$

Portando, para \bar{y} suficientemente grande temos que

$$P(\bar{y}) - \bar{y} < 0 \Leftrightarrow P(\bar{y}) < \bar{y}.$$

Antes dos próximos resultados, observe primeiro que $P(0) = 0$. Mais do que isso, se o sistema (1.16) tem órbita periódica transversal, segue que a aplicação de Poincaré possui um ponto fixo \bar{y} , ou seja, $P(\bar{y}) = \bar{y}$, e daí podemos pelo Teorema do Valor Médio assumir que existe um ponto $\xi \in (0, \bar{y})$ tal que $P'(\xi) = 1$.

Teorema 3.2.2 (*Sistema sem conjunto de deslize*). *Assumindo no sistema (1.16) a condição $b = 0$ e $a_d \leq 0 \leq a_e$, segue:*

1. Se $\gamma_d + \gamma_e = 0$, então temos um centro global não-linear em torno da origem quando $a_e\gamma_d = a_d\gamma_e$, e não temos órbita periódica transversal quando $a_e\gamma_d \neq a_d\gamma_e$.
2. Se $\gamma_d + \gamma_e \neq 0$ e $\gamma_d\gamma_e \geq 0$, então não tem órbita periódica transversal.
3. Se $\gamma_d + \gamma_e \neq 0$ e $\gamma_d\gamma_e < 0$, então quando $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) < 0$ temos uma única órbita periódica transversal, que é estável para $\gamma_d + \gamma_e < 0$ e instável para $\gamma_d + \gamma_e > 0$. Além disso, quando $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) \geq 0$ não temos órbita periódica transversal.

Demonstração:

1. Caso $a_e\gamma_d = a_d\gamma_e = 0$, segue de imediato da Proposição 2.1.3(2) considerando as hipóteses $\gamma_d + \gamma_e = 0$ e $b = 0$ que $P(y) = y$ para todo $y \geq 0$, e daí segue que a origem é um centro global.

Agora, caso $a_e\gamma_d = a_d\gamma_e \neq 0$, segue pela hipótese $\gamma_e = -\gamma_d \neq 0$ e daí para esse caso temos que $a_e = -a_d \neq 0$, pois em qualquer dos outros casos caímos no caso anterior.

- (a) Se $a_d < 0 < a_e$, e assim com $a_e\gamma_d = a_d\gamma_e$ e $\gamma_e + \gamma_d = 0$, já foi visto que $a_e = -a_d$, daí pela *Proposição 2.1.3(5)* temos que $P(y) = y$ para todo $y \geq 0$.

Já para $a_e\gamma_d \neq a_d\gamma_e$, como $\gamma_e + \gamma_d = 0$, segue que $a_d \neq -a_e$. Assim, considere a constante $0 < K = -\frac{a_e}{a_d} \neq 1$. Prosseguindo, por absurdo assuma que existe uma órbita periódica transversal, ou seja, existe \bar{y} tal que $P_d(P_e(\bar{y})) = \bar{y}$, e pela *Proposição 2.1.3(5)* obtemos

$$P_d(KP_e(\bar{y})) = K\bar{y} \Rightarrow P_e(\bar{y}) = \frac{1}{K}P_d^{-1}(K\bar{y}) = P_d^{-1}(\bar{y}),$$

pois $P_d(P_e(\bar{y})) = \bar{y}$.

Assume a função $h(y) = P_d^{-1}(Ky) - KP_d^{-1}$ para todo $y \geq 0$. Daí, observe que $h(0) = h(\bar{y}) = 0$, e assim pelo teorema da valor médio, existe $\xi \in (0, \bar{y})$ tal que $h'(\xi) = 0$, ou seja, $K[(P_d^{-1})'(K\xi) - (P_d^{-1})'(\xi)] = 0$. Que é um absurdo, porque $(P_d^{-1})'$ é monótona, isso devido ao fato $\text{sign}P_d''(y) = \text{sign}\gamma_d$ da *Proposição 2.1.2(3)*. Portanto, o sistema nessas condições não possui órbita periódica transversal.

- (b) Se $a_d < 0$ e $a_e = 0$, com $a_e\gamma_d \neq a_d\gamma_e$ segue da *Proposição 2.1.3 (3) e (6)* que $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = 1$, pois $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi}$. Além disso, temos $\text{sing}P''(y) = \text{sing}\gamma_d$ e que $P'(0) = e^{\gamma_e\pi}$. Logo, sem perda de generalidade podemos assumir que $\gamma_d < 0$ e $\gamma_e > 0$ (caso contrário basta aplicar a simetria Π_1).

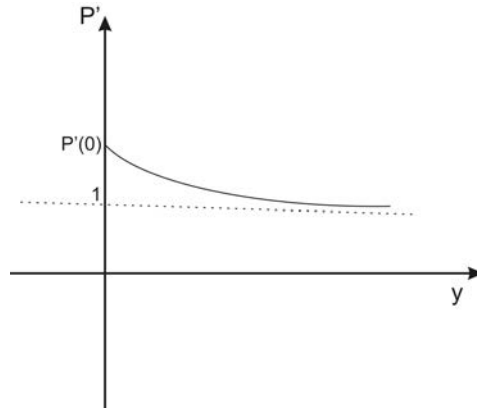


Figura 3.1.2: Comportamento de P' para o caso acima.

Daí, segue que P' é decrescente com $P'(y) > 1$ para todo $y \geq 0$, ou seja, não existe ponto ξ tal que $P'(\xi) = 1$. Portanto, o sistema não tem órbita periódica transversal.

2. Primeiramente observe que o sistema (1.16) é um caso particular do sistema (1.9), assim podemos aplicar a *Proposição 1.2.4*, como o traço $T^+ = 2\gamma_d$ e $T^- = 2\gamma_e$, segue considerando a hipótese $\gamma_d\gamma_e \geq 0$ que a condição necessária nunca é satisfeita, ou seja, não temos órbita periódica transversal.

3. Da hipótese temos $\gamma_d + \gamma_e \neq 0$ e $\gamma_d\gamma_e < 0$, daí obtemos os seguintes casos:

$$\begin{cases} \gamma_d + \gamma_e < 0 \text{ e } (\gamma_d > 0, \gamma_e < 0), & (I) \\ \gamma_d + \gamma_e < 0 \text{ e } (\gamma_d < 0, \gamma_e > 0), & (II) \\ \gamma_d + \gamma_e > 0 \text{ e } (\gamma_d > 0, \gamma_e < 0), & (III) \\ \gamma_d + \gamma_e > 0 \text{ e } (\gamma_d < 0, \gamma_e > 0). & (VI) \end{cases}$$

No entanto, pela simetria da *Tabela 2.1.1*(Π_1) basta fazer a análise dos casos (I) e (III), pois é equivalente a analisar dos casos (I), (IV) e (II), (III).

- Seja $a_d < 0 < a_e$, e assumamos o caso (I), decorre que $\gamma_d + \gamma_e < 0$ e pela *Proposição 2.1.3(3)* temos que $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi}$, ou seja, nessas condições temos $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1$ e assim da *Observação 3.2.1* existe y suficientemente grande tal que $P(y) < y$. Assumindo a *Proposição 2.1.3(4)* sabemos que $P'(0) = 1$ e $\text{sign}P''(0) = \text{sign}(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e)$. Assim, segue os casos
 - a) Se $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e > 0$, temos $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) < 0$, ou seja, $\text{sign}P''(0) > 0$. Logo, temos ao menos uma órbita periódica transversal, e um número ímpar de órbitas periódicas.

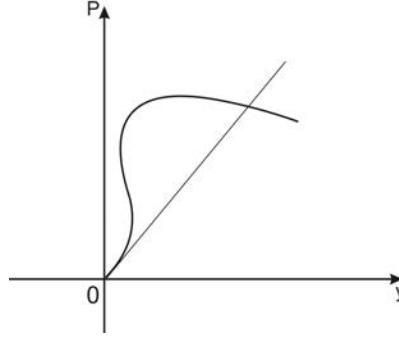


Figura 3.1.3: Aproximação do comportamento de P para o caso a).

- b) Se $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e = 0$, temos $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) = 0$, assumindo a *Observação 2.1.1* segue $P''(0) = P'''(0) = 0$ e $\text{sign}P^{IV}(0) = \text{sign}(\gamma_d + \gamma_e)$, ou seja, $\text{sign}P^{IV}(0) < 0$.
- c) Se $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e < 0$, assim temos $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) > 0$, e além disso temos $\text{sign}P''(0) < 0$.

Logo, nesses casos *b*) e *c*) se tiver órbita periódica transversal, tem um número par.

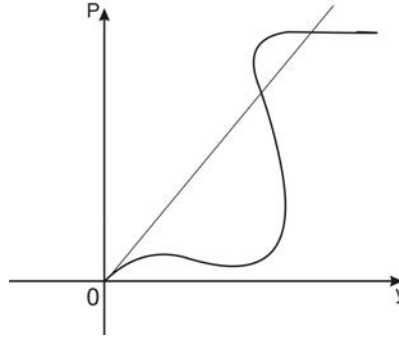


Figura 3.1.3: Uma possibilidade para a aproximação do comportamento de P para o caso *b*) e *c*), sabendo que esse não será a aproximação correta para esse resultado.

Prosseguindo, mostraremos agora que para $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e < 0$ existe uma única órbita periódica transversal estável, já para $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e \geq 0$ não existe órbita periódica transversal. Assumindo o *Teorema 3.1.3* iremos aplicá-lo ao nosso sistema de interesse (1.16) dado por:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\gamma_e & -1 \\ 1 + \gamma_e^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_e \end{pmatrix} \quad \text{se } x < 0, \\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\gamma_d & -1 \\ 1 + \gamma_d^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_d \end{pmatrix} \quad \text{se } x \geq 0. \end{aligned}$$

A hipótese do *Teorema 3.1.3* é satisfeita para o nosso caso em análise, pois de (I) temos $\gamma_d > 0$ e $\gamma_e < 0$, e assim segue

$$t_1 = 2\gamma_e < 0, \quad d_1 = 1 + \gamma_e^2 > 0, \quad a_1 = -a_e < 0, \quad t_2 = 2\gamma_d > 0, \quad d_2 = 1 + \gamma_d^2 > 0, \quad a_2 = -a_d > 0.$$

Segue do *Teorema 3.1.3(1)* que uma das hipóteses é dada por $\frac{a_2}{t_2} < \frac{a_1}{t_1}$. Dai, substituindo os equivalentes do nosso sistema em questão segue

$$\frac{a_2}{t_2} < \frac{a_1}{t_1} \Leftrightarrow \frac{-a_d}{2\gamma_d} < \frac{-a_e}{2\gamma_e} \Leftrightarrow \frac{a_d}{\gamma_d} > \frac{a_e}{\gamma_e} \Leftrightarrow a_e\gamma_d - a_d\gamma_e > 0.$$

Assim, temos $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) < 0$. No entanto já vimos que nessas condições existe ao menos uma órbita periódica transversal, logo podemos concluir pelo *Teorema 3.1.3(1)* que ela é única e estável.

Agora, do *Teorema 3.1.3(2)* temos que uma das hipóteses é dada por $\frac{a_2}{t_2} > \frac{a_1}{t_1}$, novamente substituindo os equivalentes do nosso sistema de estudo obtemos $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e < 0$, assim

segue $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) > 0$, no entanto vimos que nessas condições não temos a certeza da existência de órbita periódica transversal. Assim, analisando a condição necessária dada por $\frac{d_1}{t_1^2} > \frac{d_2}{t_2^2}$. Obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{t_1^2} > \frac{d_2}{t_2^2} &\Leftrightarrow \frac{1 + \gamma_e^2}{(2\gamma_e)^2} > \frac{1 + \gamma_d^2}{(2\gamma_d)^2} \Leftrightarrow \frac{1 + \gamma_e^2}{\gamma_e^2} - \frac{1 + \gamma_d^2}{\gamma_d^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(1 + \gamma_e^2)\gamma_d^2 - (1 + \gamma_d^2)\gamma_e^2}{\gamma_e^2\gamma_d^2} > 0 \Leftrightarrow \gamma_d^2 - \gamma_e^2 > 0. \end{aligned}$$

Mas, por outro lado temos de (I) que $\gamma_d + \gamma_e < 0$ e $\gamma_d > 0$, $\gamma_e < 0$, e por consequência

$$-\gamma_d > \gamma_e \Rightarrow \gamma_d^2 < \gamma_e^2 \Rightarrow \gamma_d^2 - \gamma_e^2 < 0.$$

Portando, a condição necessária não é satisfeita, assim não temos órbita periódica para $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e < 0$.

Agora, do Teorema 3.1.3(3) a hipótese é $\frac{a_2}{t_2} = \frac{a_1}{t_1}$, daí obtemos $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e = 0$, assim temos $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) = 0$, também vimos que nessas condições não temos a certeza de órbita periódica transversal, novamente da análise da condição necessária segue que devemos ter

$$\frac{d_1}{t_1^2} = \frac{d_2}{t_2^2} \Leftrightarrow \frac{1 + \gamma_e^2}{(2\gamma_e)^2} = \frac{1 + \gamma_d^2}{(2\gamma_d)^2} \Leftrightarrow \gamma_d^2 - \gamma_e^2 = 0.$$

Mas, já vimos que para (I) temos $\gamma_d^2 - \gamma_e^2 < 0$, portanto segue do Teorema 3.1.3(3) que não temos órbita periódica transversal.

- Seja $a_d < 0$ e $a_e = 0$. Observe que $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e \Leftrightarrow -a_d\gamma_e \neq 0$ sempre. Enfatizado novamente que estamos em (I), temos $(\gamma_d + \gamma_e)(-a_d\gamma_e) < 0$, ou seja, $-a_d\gamma_e > 0$, assim como $\gamma_e > 0$ obtemos $\gamma_d < 0$. Assim, assumindo a Proposição 2.1.3(6) temos que $P'(0) = e^{\gamma_e\pi} > 1$ e além disso $\text{sign}P''(y) = \text{sign}(\gamma_d)$, ou seja, $P''(y) < 0$ para todo $y > 0$. Logo, concluímos que P' é decrescente, e como $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1$. Assim, novamente da Observação 3.2.1 existe um y^* tal que $P(y^*) < y^*$. Daí, vai existir um único \bar{y} tal que $P(\bar{y}) = \bar{y}$, e além disso é fácil ver que $P'(\bar{y}) < 1$, ou seja, existe uma única órbita periódica transversal estável.

Já para $(\gamma_d + \gamma_e)(-a_d\gamma_e) > 0$, segue que $-a_d\gamma_e < 0$, assim como $\gamma_e < 0$ obtemos $\gamma_d > 0$. Assim, assumindo novamente a Proposição 2.1.3(6) temos que $P'(0) < 1$ e além disso $P''(y) > 0$ para todo $y > 0$. Logo, segue que P' é crescente, e como

$$P'(0) < P'(y) < \lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1,$$

não existe \bar{y} tal que $P'(\bar{y}) = 1$, portanto não temos órbita periódica transversal.

- Seja $a_d = a_e = 0$, assim temos $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) = 0$, e além disso $a_d\gamma_e = a_e\gamma_d = 0$ e nesse caso assumindo *Proposição 2.1.3(2)* segue que $P(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi}y < y$. Portanto, não temos órbita periódica transversal.

Por fim, a justificativa do caso (*III*) se obtêm seguindo o caminho análogo ao caso (*I*), a menos de alguns detalhes, pois como $\gamma_d + \gamma_e > 0$ teremos graficamente algo como na *Figura 3.1.4*, além disso, observe também considerando \bar{y} o ponto fixo teremos $P'(\bar{y}) > 1$, ou seja, a nossa órbita periódica transversal é instável.

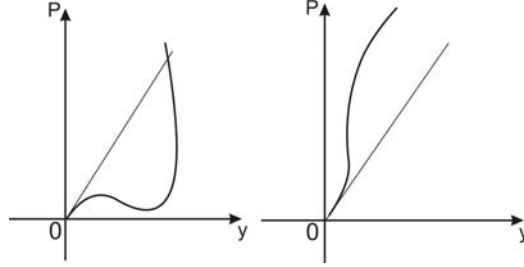


Figura 3.1.4: Aproximação do comportamento de P para o caso (*III*). Onde, do lado esquerdo temos o comportamento para $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e < 0$ e do lado direito para $a_e\gamma_d - a_d\gamma_e \geq 0$.

■

3.3 Órbitas periódicas transversais com conjunto de deslize

Observe que a aplicação de Poincaré da esquerda não depende de b , já a aplicação do lado direito P_d e P_d^{-1} dependem linearmente do parâmetro b . Sabendo da dependência do parâmetro b , a partir de (2.8) e (2.9), vemos que

$$P_d^{-1}(y; b) = b + P_d^{-1}(y - b; 0), \quad (3.7)$$

obtido a partir da mudança, $y \rightarrow y - b$, assim ficamos com um sistema à direita com $b = 0$, mas uma translação com b para manter a mesma órbita.

De fato, de (2.8) temos para $a_d = 0$ que $P_d(y; b) = -e^{\pi\gamma_a}y + (1 + e^{\gamma_a\pi})b$, com $y < b$. O que implica que a sua inversa $P_d^{-1}(y; b) = -e^{-\pi\gamma_a}y + (e^{-\gamma_a\pi+1})b$, com $y > b$. Assim, como $b + P_d^{-1}(y - b; 0) = -e^{-\pi\gamma_a}y + (e^{-\gamma_a\pi+1})b$, segue a igualdade. Já, para $a_d < 0$, fazendo a mudança $y \rightarrow y - b$ no sistema a direita, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma_d & -1 \\ 1 + \gamma_d^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_d \end{pmatrix} \quad \text{se } (X, Y) \in S^+,$$

observe que esse sistema tem a mesma forma que o sistema da esquerda, ou seja, da mesma forma que obtemos (2.4), obtemos

$$P_d^{-1}(y - b; 0) = \frac{a_d}{1 + \gamma_d^2} \frac{e^{-\gamma_d t^+} \varphi_{\gamma_d}(t^+)}{\sin(t^+)},$$

e daí, considerando (2.9), temos $P_d^{-1}(y; b) = b + \frac{a_d}{1 + \gamma_d^2} \frac{e^{-\gamma_d t^+} \varphi_{\gamma_d}(t^+)}{\sin(t^+)}$. Portanto, obtemos a igualdade dada por $P_d^{-1}(y; b) = b + P_d^{-1}(y - b; 0)$.

Além disso, note que sabendo (3.7), é fácil ver que o gráfico de $P_d^{-1}(y; b)$ é dado pelo gráfico $P_d^{-1}(y; 0)$ mais uma translação com o parâmetro b . Para isso, observe que por (3.7) segue

$$(y + b, P_d^{-1}(y; 0) + b) = (y + b, P_d^{-1}(y + b; b)),$$

ou seja, a última coordenada pertence ao gráfico de $P_d^{-1}(y; b)$. Veja, *Figura 3.2.1*.

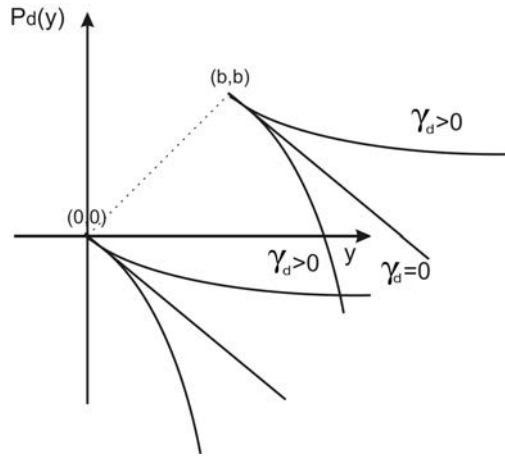


Figura 3.2.1: A aplicação P_d^{-1} para $b > 0$ que depende do parâmetro γ_d , obtida pela translação de P_d^{-1} para $b = 0$ que também depende de γ_d .

Se \bar{y} é um ponto fixo da aplicação de Poincaré P , então temos $P(\bar{y}) = P_d(P_e(\bar{y}); b) = \bar{y}$, que implica em $P_e(\bar{y}) = P_d^{-1}(\bar{y}; b)$.

Daí, temos que a existência de órbitas periódicas transversais é equivalente a existência de zeros para a função dada por:

$$\Psi_b(y) = P_d^{-1}(y; b) - P_e(y) = b + P_d^{-1}(y - b; 0) - P_e(y), \quad \text{para } y \geq b, \quad (3.8)$$

usando (3.7).

Observação 3.3.1 *Assuma que $\Psi_b(y) \neq 0$ para $b \geq 0$ e $y \geq b$, então segue que $\Psi_b(y)(P(y) -$*

$y) > 0$. Assim, explicitando $\Psi_b(y) > 0$, ou seja, $P_d^{-1}(y; b) > P_e(y)$ se, e somente se $P(y) > y$. De fato, considerando que P_d^{-1} é decrescente, segue o resultado

$$P(y) > y \Leftrightarrow P_d(P_e(y); b) > y \Leftrightarrow P_e(y) < P_d^{-1}(y; b) \Leftrightarrow \Psi_b(y) > 0.$$

Analogamente, temos que $\Psi_b(y) < 0$ se, e somente se $P(y) < y$.

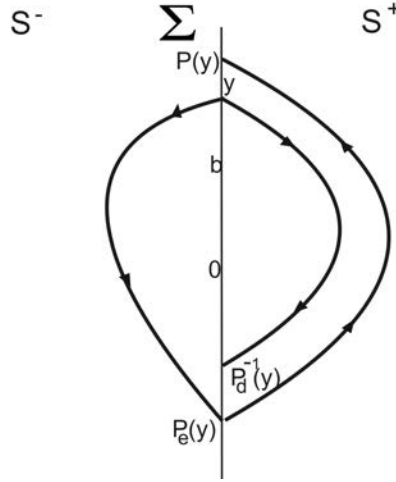


Figura 3.2.2: Se $\Psi_b(y) > 0$, então temos $P(y) - y > 0$.

Prosseguindo na obtenção das propriedades de $\Psi_b(y) = P_d^{-1}(y; b) - P_e(y)$, segue que as suas derivadas são:

$$\Psi'_b(y) = (P_d^{-1})'(y; b) - P'_e(y) = \frac{1}{(P'_d \circ P_d^{-1})(y; b)} - P'_e(y), \quad (3.9)$$

considerando o fato que a derivada de $P_d^{-1}(y; b)$ é obtida fazendo

$$P_d(P_d^{-1}(y)) = y \Rightarrow (P'_d \circ P_d^{-1})(y)(P_d^{-1}(y))' = 1 \Rightarrow (P_d^{-1})' = \frac{1}{(P'_d \circ P_d^{-1})(y; b)}.$$

Além disso, segue pela regra do quociente que

$$\Psi''_b(y) = -\frac{(P''_d \circ P_d^{-1})(y; b)}{(P'_d \circ P_d^{-1})^3(y; b)} - P''_e(y). \quad (3.10)$$

Considerando o caso onde $b = 0$, primeiramente note que $\Psi_0(0) = 0$. Além disso, prosseguindo se $a_d < 0 < a_e$, segue das formulas (3.9), (3.10) e das *Proposição 2.1.1(2)* e *2.1.2(2)* que a primeira e segunda derivada de Ψ_0 na origem são dadas por:

$$\Psi'_0(0) = 0, \Psi''_0(0) = -\frac{8(a_e \gamma_d - a_d \gamma_e)}{3a_d a_e}. \quad (3.11)$$

De fato, primeiramente temos da *Proposição 2.1.1(2)* e *2.1.2(2)* que $P'_e(0) = -1, P''_e(0) = -\frac{8\gamma_e}{3a_e}$,

$P'_d(b) = -1$ e $P''_d(b) = -\frac{8\gamma_d}{3a_d}$, assim segue das fórmulas (3.9) e (3.10) que

$$\Psi'_0(0) = 1 - 1 = 0 \quad e \quad \Psi''_0(0) = -\frac{-\frac{8\gamma_d}{3a_d}}{(-1)^3} + \frac{8\gamma_e}{3a_e} = -\frac{8(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e)}{3a_da_e}.$$

Dando continuidade no objetivo em encontrar as propriedades de $\Psi_b(y)$ definida em (3.8) temos:

Lema 3.3.1 *Para o sistema (1.16) com $a_d \leq 0 \leq a_e$ e $b > 0$, segue:*

1. Se $\Psi_b(\bar{y}) = 0$, então $P(\bar{y}) = \bar{y}$, e em \bar{y} temos uma órbita periódica transversal estável quando $\Psi'_b(\bar{y}) < 0$, e instável quando $\Psi'_b(\bar{y}) > 0$.
2. A função Ψ_b satisfaz a inequação $\Psi_b(y) > b + \Psi_0(y)$ para todo $y \geq b$.

Demonstração:

1. A primeira afirmação segue de imediato. De fato

$$\Psi_b(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow P_d^{-1}(\bar{y}; b) - P_e(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow P_d(P_e(\bar{y}); b) = \bar{y} \Leftrightarrow P(\bar{y}) = \bar{y}.$$

Além disso, como $P_d^{-1}(\bar{y}) = P_e(\bar{y})$, segue que a derivada da função Ψ_b dada em (3.9) reduz para:

$$\Psi'_b(\bar{y}) = \frac{1 - P'(\bar{y})}{P'_d(P_e(\bar{y}))},$$

pois

$$\Psi'_b(\bar{y}) = \frac{1}{P'_d(P_e(\bar{y}))} - P'_e(\bar{y}) = \frac{1 - P'_d(P_e(\bar{y}))P'_e(\bar{y})}{P'_d(P_e(\bar{y}))} = \frac{1 - P'(\bar{y})}{P'_d(P_e(\bar{y}))}.$$

E daí, como P_d é decrescente, segue que $P'_d(P_e(\bar{y})) < 0$, ou seja, quando $\Psi'_b(\bar{y}) < 0$ implica que $P'(\bar{y}) < 1$, além disso, observe que da *Proposição 2.1.3(3)* temos que $P'(y) > 0$ para todo $y \geq 0$. Portanto, segue que a órbita periódica transversal é estável. Analogamente, provamos que a órbita periódica transversal é instável para $\Psi'_b(\bar{y}) > 0$.

2. Considerando o fato de que a aplicação P_d^{-1} é decrescente, temos $P_d^{-1}(y-b; 0) > P_d^{-1}(y; 0)$. Logo, tomando (3.8) e a aplicação Ψ_b obtemos:

$$\Psi_b(y) = b + P_d^{-1}(y-b; 0) - P_e(y) > b + P_d^{-1}(y; 0) - P_e(y) = b + \Psi_0(y), \quad \text{para } y \geq b.$$

■

Lema 3.3.2 *Para o sistema (1.16) com $a_d \leq 0 \leq a_e$ segue:*

1. Se $\gamma_d + \gamma_e = 0$, então $\text{sign}\Psi_0(y) = \text{sign}(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e)$ para $y \geq 0$.

2. Se $\gamma_d + \gamma_e \neq 0, \gamma_d \gamma_e < 0$, e $(\gamma_d + \gamma_e)(a_e \gamma_d - a_d \gamma_e) \geq 0$, então para $y \geq 0$

$$\text{sign} \Psi_0(y) = \begin{cases} \text{sign}(a_e \gamma_d - a_d \gamma_e) & \text{para } a_e \gamma_d \neq a_d \gamma_e, \\ \text{sign}(\gamma_d + \gamma_e) & \text{para } a_e \gamma_d = a_d \gamma_e. \end{cases}$$

Demonstração:

1. Nas condições da hipótese em que $\gamma_d + \gamma_e = 0$ e $b = 0$, vamos considerar os casos.

(a) Se $a_e \gamma_d - a_d \gamma_e = 0$, segue do *Teorema 3.1.2(1)* que a origem tem um centro não-linear global, isto é, temos que $P(y) = y$ para todo $y \geq 0$. Equivalentemente, obtemos que

$$P_d(P_e(y); 0) = y \Leftrightarrow P_d^{-1}(y; 0) - P_e(y) = 0 \Leftrightarrow \Psi_0(y) = 0,$$

assim, $\Psi_0(y)$ também é zero.

(b) Se $a_e \gamma_d - a_d \gamma_e \neq 0$, nessas condições também do *Teorema 3.1.2(1)* segue que não tem órbita periódica transversal, por consequência $P(y) \neq y$ para todo $y \geq 0$, e além disso pela *Observação 3.2.1* implica em $\Psi_0(y) \neq 0$ ambos válido para todo $y \geq 0$. Agora, considerando (3.11) temos $\Psi'_0(0) = 0, \Psi''_0(0) = -\frac{8(a_e \gamma_d - a_d \gamma_e)}{3a_d a_e}$, isso implica que $\text{sign} \Psi''_0(0) = \text{sign}(a_e \gamma_d - a_d \gamma_e)$. Daí, suponha sem perda de generalidade que $a_e \gamma_d - a_d \gamma_e > 0$, ou seja, que $\Psi''_0(0) > 0$, assim como $\Psi'_0(0) = 0$ segue pelo Teorema da Conservação do Sinal, que existe $\delta > 0$ tal que $\Psi_0(y) > 0$ para $y \in [0, \delta)$. E daí, por consequência da *Observação 3.2.1* segue que $P(y) > y$ para $y \in [0, \delta)$, mas não temos órbita periódica transversal, ou seja, temos $P(y) > y$ para todo $y \geq 0$. Logo, segue que $\Psi_0(y) > 0$ para todo $y \geq 0$, portanto $\text{sign} \Psi_0(y) = \text{sign}(a_e \gamma_d - a_d \gamma_e)$ para $y \geq 0$.

2. Considerando a hipótese, segue pelo *Teorema 3.1.2(3)* que nessas condições não existe órbita periódica transversal, ou seja, $P(y) \neq y$ para todo $y \geq 0$. Continuando, pela *Observação 3.2.1*, temos que $\text{sign}(P(y) - y) = \text{sign} \Psi_0(y)$, além disso, da *Observação 2.1.1*, para $a_d < 0 < a_e$, temos que

$$\begin{cases} \text{sign} P''(0) = \text{sign}(a_e \gamma_d - a_d \gamma_e) & \text{para } a_e \gamma_d \neq a_d \gamma_e, \\ \text{sign} P^{IV}(0) = \text{sign}(\gamma_d + \gamma_e) & \text{para } a_e \gamma_d = a_d \gamma_e. \end{cases} \quad (3.12)$$

Daí, sem perda de generalidade, tome $\text{sign}(P(y) - y) > 0$ para todo $y \geq 0$, que vai implicar que $\text{sign} \Psi_0(y) > 0$ para todo $y \geq 0$. Logo, de (3.12) devemos mostrar que $\text{sign} P''(0) > 0$ quando $a_e \gamma_d \neq a_d \gamma_e$. Suponha por absurdo que $\text{sign} P''(0) < 0$, assim como $P'(0) = 1$ e $P(0) = 0$, vai existir $\delta > 0$ tal que $P(y) < y$ para $y \in [0, \delta)$. Absurdo, pois nessas condições existiria um \bar{y} tal que $P(\bar{y}) = \bar{y}$, ou seja, existira uma órbita periódica transversal. De

maneira análoga, se mostra para o caso em que assumimos $\text{sign}(P(y) - y) < 0$ para todo $y \geq 0$. Portanto, podemos concluir que

$$\text{sign}\Psi_0(y) = \text{sign}(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e) \quad \text{para } a_e\gamma_d \neq a_d\gamma_e.$$

Além disso, usando o mesmo raciocínio mas desta vez ao invés do $\text{sign}P''(0)$ usar o $\text{sign}P^{IV}(0)$ para provar por absurdo, concluiremos que

$$\text{sign}\Psi_0(y) = \text{sign}(\gamma_d + \gamma_e) \quad \text{para } a_e\gamma_d = a_d\gamma_e.$$

Agora, para o caso $a_d = a_e = 0$, nos devemos mostrar que $\text{sign}\Psi_0(y) = \text{sign}(\gamma_d + \gamma_e)$, daí sem perda de generalidade, suponha novamente que $\text{sign}(P(y) - y) > 0$ para todo $y \geq 0$, ou seja, $\text{sign}\Psi_0(y) > 0$ para todo $y \geq 0$. Prosseguindo, considere a *Proposição 2.1.3(2)* temos $P(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi}y$, pois $b = 0$. Logo, segue que $\gamma_d + \gamma_e > 0$, pois caso contrário teríamos que $P(y) < y$ para todo $y \geq 0$, um absurdo.

Já para o caso $a_d < 0$ e $a_e = 0$, devemos mostrar que $\text{sign}\Psi_0(y) = \text{sign}(-a_d\gamma_e)$. Considere mais uma vez, sem perda de generalidade que $\text{sign}(P(y) - y) > 0$ para todo $y \geq 0$, ou seja, $\text{sign}\Psi_0(y) > 0$ para todo $y \geq 0$. Assim, sabendo a *Proposição 2.1.3(6)* temos $P'(0) = e^{\gamma_e\pi}$. Daí, suponhamos que $\text{sign}(-a_d\gamma_e) < 0$, como $a_d < 0$ segue que $\gamma_e < 0$. No entanto, como $P(0) = 0$ e pelo fato de $\gamma_e < 0$ ter que $P'(0) < 1$, segue pelo mesmo argumento acima que existirá uma vizinhança de tal forma que $P(y) < y$ para y nessa vizinhança, absurdo. ■

Teorema 3.3.1 (*Sistema com conjunto de deslize*) *Assuma a condição $a_d \leq 0 \leq a_e$, $b > 0$ no sistema (1.16), segue:*

1. *Se $\gamma_d\gamma_e \geq 0$, então não existe órbita periódica transversal para $\gamma_d + \gamma_e \geq 0$, e para $\gamma_d + \gamma_e < 0$ existe uma única órbita periódica transversal estável.*
2. *Se $\gamma_d\gamma_e < 0$, considere os subcasos:*

(a) *Se $\gamma_d + \gamma_e \geq 0$ e $a_e\gamma_d \geq a_d\gamma_e$, então não existe órbita periódica transversal.*

(b) *Se $\gamma_d + \gamma_e = 0$, $a_e\gamma_d < a_d\gamma_e$ e definindo o valor*

$$b_\infty = 2(a_e + a_d)\frac{\gamma_e}{1 + \gamma_e^2} = -2(a_e + a_d)\frac{\gamma_d}{1 + \gamma_d^2},$$

então $b_\infty > 0$, existe uma única órbita periódica transversal para $0 < b < b_\infty$ e não existe órbita periódica transversal para $b \geq b_\infty$.

- (c) Se $\gamma_d + \gamma_e > 0$ e $a_e\gamma_d < a_d\gamma_e$, então existe pelo menos duas órbitas periódicas transversais para b suficientemente pequeno, e não existe órbita periódica transversal para b suficientemente grande. Além disso, se adicionarmos $a_e a_d = 0$ com $a_d + a_e \neq 0$, vai existir um valor b_{SN} tal que (1.16) existe exatamente duas órbitas periódicas transversais hiperbólicas para $0 < b < b_{SN}$, uma única para $b = b_{SN}$, e não existe órbita periódica transversal para $b > b_{SN}$.
- (d) Se $\gamma_d + \gamma_e < 0$, então sempre existe órbita periódica transversal. Além disso, se adicionar $a_d a_e = 0$, então a órbita periódica transversal é única.

Demonstração:

1. Como $\gamma_d \gamma_e \geq 0$, segue que

i) Se $\gamma_d + \gamma_e \geq 0$, temos $\gamma_d \geq 0$, $\gamma_e \geq 0$. Assim, do sistema (1.16) os traços das matrizes em S^- e S^+ são respectivamente $T^- = 2\gamma_e \geq 0$ e $T^+ = 2\gamma_d \geq 0$. Dai, assumindo *Proposição 1.2.4* concluímos que a condição necessária pra existência da órbita periódica transversal não é satisfeita.

ii) Se $\gamma_d + \gamma_e < 0$, temos $\gamma_d \leq 0$, $\gamma_e < 0$ ou $\gamma_d < 0$, $\gamma_e \leq 0$. Assim, da *Proposição 2.1.1(3)* e *2.1.2(3)* para o primeiro caso obtemos que $P'_e(y) < 0$, $P''_e(y) \geq 0$ para todo $y > 0$, pois $\text{sign}P''_e(y) = -\text{sign}\gamma_d$, e $P'_d(y) < 0$, $P''_d(y) \leq 0$ para todo $y > 0$, pois $\text{sign}P''_d(y) = \text{sign}\gamma_e$. No entanto, como a primeira e segunda derivadas da aplicação de Poincaré são

$$P' = (P'_d \circ P_e).P'_e, \quad P'' = (P''_d \circ P_e)(P'_e)^2 + (P'_d \circ P_e).P''_e,$$

é fácil ver que $P'(y) > 0$ e $P''(y) < 0$ para todo $y > 0$, em ambos os casos. Além disso, como

$$P(0) > b \quad e \quad \lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1,$$

temos que

$$P(0) = P_d(P_e(0); b) = P_d(0; b) = P_d(0) > b \quad e \quad \lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi}.$$

Concluímos da *Observação 3.2.1* e pela concavidade da aplicação P que vai existir um único ponto \bar{y} onde $P(\bar{y}) = \bar{y}$ e $P'(\bar{y}) < 1$, isso é, temos uma única órbita periódica transversal estável.

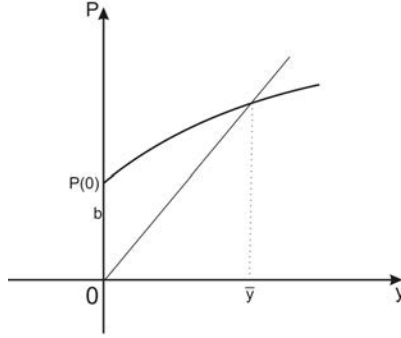


Figura 3.2.3: A aplicação P para o Teorema 3.3.1(1)-ii.

2. Assumindo a hipótese $\gamma_d \gamma_e < 0$, segue que

- (a) Como $\gamma_d + \gamma_e \geq 0$ e $a_e \gamma_d - a_d \gamma_e \geq 0$, segue do Lema 3.3.2(2) que $\Psi_0(y) \geq 0$ para todo $y \geq 0$. Além disso, temos pelo Lema 3.3.1(2) que $\Psi_b(y) > b + \Psi_0(y)$ para todo $y \geq b$, daí pelo fato de $\Psi_0(y) \geq 0$ para todo $y \geq 0$ obtemos que

$$\Psi_b(y) \geq b > 0 \text{ para todo } y \geq b.$$

Logo, finalmente concluímos que não existe órbita periódica transversal pelo simples fato de $\Psi_b(y)$ não possuir zero para todo $y \geq b$.

- (b) Como $\gamma_d = -\gamma_e \neq 0$, pois da hipótese temos $\gamma_d + \gamma_e = 0$ e $\gamma_d \gamma_e < 0$. Assim, do fato que

$$a_e \gamma_d - a_d \gamma_e < 0 \stackrel{\gamma_d = -\gamma_e}{\Rightarrow} a_e \gamma_d + a_d \gamma_d < 0 \Rightarrow \gamma_d (a_d + a_e) < 0,$$

daí obtemos que $b_\infty > 0$.

i) Se $a_d < 0 < a_e$, afirmamos que o sistema (1.16) tem no máximo uma órbita periódica transversal. De fato, assumamos o contrário, que o sistema tem pelo menos duas órbitas periódicas transversais. Assim, a aplicação de Poincaré possui dois pontos fixos \bar{y}_1 e \bar{y}_2 . Agora, seja $k = \frac{a_d}{a_e}$. Das hipóteses obtemos que $k < -1$.

Pois, como $\gamma_d \gamma_e < 0$, $\gamma_d = -\gamma_e \neq 0$ e assumimos sem perda de generalidade que $\gamma_d > 0$ e $\gamma_e < 0$, devido ao fato que caso contrário podemos aplicar a simetria Π_3 da Tabela 2.1.1. Segue, que

$$a_e \gamma_d < a_d \gamma_e \Rightarrow \gamma_d < \frac{a_d}{a_e} \gamma_e \stackrel{\gamma_d = -\gamma_e}{\Rightarrow} -\gamma_e < \frac{a_d}{a_e} \gamma_e \Rightarrow k < -1.$$

Agora, tomando a formula (2.15) dada por

$$P_d[b - \frac{a_d}{a_e}P_e(y)] = b - \frac{a_d}{a_e}y,$$

segue que

$$b - kP_e(\bar{y}_i) = P_d^{-1}(b - k\bar{y}_i) \stackrel{P_e(\bar{y})=P_d^{-1}(\bar{y})}{=} b - kP_d^{-1}(\bar{y}_i) \text{ onde } i = 1, 2.$$

Assim, defina a função

$$h(y) = P_d^{-1}(b - ky) - b + kP_d^{-1}(y) \text{ para } y > b.$$

Observe que $h(\bar{y}_1) = h(\bar{y}_2) = 0$, e segue do Teorema do Valor Médio que existe $\xi \in (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ de tal forma que

$$h'(\xi) = -k[(P_d^{-1})'(b - k\xi) - (P_d^{-1})'(\xi)] = 0,$$

mas isso é impossível porque além de $K \neq 0$ sempre, temos que $(P_d^{-1})'$ é monótono devido ao fato que da Proposição 2.1.2(3) temos $\text{sign}P_d''(y) = \text{sign}\gamma_d \neq 0$. Enfim, concluímos que o sistema possui no máximo uma órbita periódica transversal, isso é, encontramos um máximo de órbitas periódicas que o sistema possui. Agora provaremos em quais condições existe e não existe a órbita periódica transversal. Como assumimos sem perda de generalidade que $\gamma_d = -\gamma_e > 0$, obtemos da Proposição 2.1.1(3) e 2.1.2(3) que $\text{sing}(A_e(y) - P_e(y)) = \text{sing}(\gamma_e)$ e que $\text{sing}(P_d^{-1}(y) - A_d^{-1}(y)) = \text{sing}(\gamma_d)$ respectivamente. Logo, temos

$$P_e(y) > A_e(y) \text{ e } P_d^{-1}(y) > A_d^{-1}(y).$$

Além disso, temos

$$A_d^{-1}(y) - A_e(y) = (1 + e^{\gamma_e\pi})(b - b_\infty), \quad (3.13)$$

pois

$$\begin{cases} A_d^{-1}(y) - A_e(y) = -e^{-\gamma_d\pi}y + (1 + e^{-\gamma_d\pi})(b + \frac{2a_d\gamma_d}{1+\gamma_d^2}) - (-e^{\gamma_e\pi}y + \frac{2a_e\gamma_e}{1+\gamma_e^2}(1 + e^{\gamma_e\pi})) \\ = (1 + e^{\gamma_e\pi})(b - 2(a_e + a_d)\frac{\gamma_e}{1+\gamma_e^2}) = (1 + e^{\gamma_e\pi})(b - b_\infty). \end{cases}$$

Assim, para $0 < b < b_\infty$, segue de (3.13) que $A_d^{-1}(y) < A_e(y)$, assim como $P_e(y) > A_e(y)$ obtemos que

$$A_d^{-1}(y) < A_e(y) < P_e(y).$$

Daí, pela característica das curvas assintóticas e como $P_d^{-1}(y) > A_d^{-1}(y)$ temos para

y suficientemente grande que

$$A_d^{-1}(y) < P_d^{-1}(y) < A_e(y) < P_e(y) \text{ para } y \gg 1,$$

pois P_d^{-1} se aproxima tanto quanto se queira de A_d^{-1} para y grande, isto é,

$$\Psi_b(y) = P_d^{-1}(y) - P_e(y) < 0 \text{ para } y \gg 1.$$

Ainda, como $\Psi_b(b) = P_d^{-1}(b) - P_e(b) = -P_e(b) > 0$, obtemos que o sistema possui ao menos uma órbita periódica transversal, mas como provamos pela propriedade da função h que temos no máximo uma órbita periódica transversal, concluímos que a órbita periódica transversal é única. Além disso, a órbita periódica transversal é estável devido ao fato que a função Ψ_b é decrescente na vizinhança do seu zero, ou seja, dado \bar{y} tal que $\Psi_b(\bar{y}) = 0$, vai existir ϵ tal que $\Psi'_b(y) < 0$ para $y \in (\bar{y} - \epsilon, \bar{y} + \epsilon)$, logo do *Lema 3.3.1(1)* a estabilidade.

Agora, para $b > b_\infty$, segue de (3.13) que $A_e(y) < A_d^{-1}(y)$, e como $P_d^{-1}(y) > A_d^{-1}(y)$ obtemos que

$$A_e(y) < A_d^{-1}(y) < P_d^{-1}(y),$$

e pelo mesmo argumento anterior por $P_e(y) > A_e(y)$ e P_e ser assintótica a A_e , segue que

$$A_e(y) < P_e(y) < A_d^{-1}(y) < P_d^{-1}(y) \text{ para } y \gg 1,$$

ou seja, temos

$$\Psi_b(y) = P_d^{-1}(y) - P_e(y) > 0 \text{ para } y \gg 1.$$

Assim, o sistema (1.16) não tem órbita periódica transversal ou possui um número par de órbitas periódicas. No entanto, como já vimos que nessas condições temos no máximo uma órbita periódica, podemos concluir que não temos órbita periódica.

ii) Se $a_d < 0$ e $a_e = 0$, como $\gamma_d = -\gamma_e > 0$. Novamente usando a *Proposição 2.1.2(3)* sabemos que $\text{sign}(P_d^{-1}(y) - A_d^{-1}(y)) = \text{sign}(\gamma_d)$, ou seja, $A_d^{-1}(y) < P_d^{-1}(y)$. Além disso, veja agora que $A_d^{-1}(y) - P_e(y) = (1 + e^{\gamma_e \pi})(b - b_\infty)$, de fato dado

$$A_d^{-1}(y) - P_e(y) = -e^{-\gamma_d \pi} y + (1 + e^{-\gamma_d \pi}) \left(b + \frac{2a_d \gamma_d}{1 + \gamma_d^2} \right) - (-e^{\gamma_e \pi})$$

$$\stackrel{\gamma_d = -\gamma_e}{=} (1 + e^{\gamma_e \pi}) \left(b - \left(-\frac{2a_d \gamma_d}{1 + \gamma_d^2} \right) \right) = (1 + e^{\gamma_e \pi})(b - b_\infty).$$

Assim, para $0 < b < b_\infty$, segue que $A_d^{-1}(y) < P_e(y)$ logo, da propriedade da curva assintótica, obtemos a desigualdade

$$A_d^{-1}(y) < P_d^{-1}(y) < P_e(y) \text{ para } y \gg 1.$$

Isso implica que $\Psi_b(y) < 0$ para $y \gg 1$ e do fato $\Psi_b(b) > 0$, já podemos concluir que existe ao menos uma órbita periódica transversal, mas por outro lado, da *Proposição 2.1.3(6)* temos que $\text{sign}P''(y) = \text{sign}(\gamma_d)$, ou seja, $P''(y) > 0$ para todo $y > 0$. Portanto, a aplicação de Poincaré possui um único ponto fixo, que corresponde a única órbita periódica transversal que é estável.

Agora, para $b \geq b_\infty$, da mesma forma obtemos que

$$P_e(y) < A_d^{-1}(y) < P_d^{-1}(y) \text{ para } y \gg 1,$$

isto é, $\Psi_b(y) > 0$ para $y \gg 1$, assim pelo fato de $P''(y) > 0$ para todo $y > 0$, concluímos que o sistema (1.16) não possui órbita periódica transversal.

Observe que o caso $a_d = a_e = 0$ não se encaixa nas condições da hipótese.

- (c) Tendo em mãos as hipóteses, iremos a princípio aplicar o Teorema da Função Implícita em duas diferentes soluções da equação dada por:

$$\Psi_b(y) = b + P_d^{-1}(y)(y - b, 0) - P_e(y) = 0. \quad (3.14)$$

Sabemos pelo *Teorema 3.2.2(3)* que para $b = 0$ temos uma única órbita periódica transversal instável, pois $\gamma_d + \gamma_e > 0$. Assim, vai existir um valor $\bar{y} > 0$ de tal forma que o par ordenado $(b, y) = (0, \bar{y})$ satisfaz a equação (3.14). Além disso, pelo fato da instabilidade da órbita periódica do *Lema 3.3.1(1)* segue que $\Psi'_0(\bar{y}) > 0$ assim, aplicando o Teorema da Função Implícita vai existir uma função contínua $y = \delta(b)$ com $b \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$ para um dado $\epsilon_1 > 0$ e de tal forma que $\delta(0) = \bar{y}$ e $\Psi_b(\delta(b)) = 0$. Isto significa que existe órbita periódica transversal instável para $b \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$.

Temos também que o par ordenado $(b, y) = (0, 0)$ satisfaz a equação (3.14), só que $\Psi'_0(0) = 0$ e isso nos impossibilita de aplicarmos o Teorema da Função Implícita, e não podemos garantir a existencia de outra órbita periódica transversal. Assim, a maneira será derivar $\Psi_b(y)$ com relação a b :

$$\frac{\partial}{\partial b} \Psi_b(y) = 1 - (P_d^{-1})'(y - b, 0),$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial b} \Psi_b(y) \Big|_{(y,b)=(0,0)} = 1 - (-1) = 2,$$

pois $(P_d^{-1})'(0,0) = -1$. Logo, aplicando novamente o Teorema da Função Implícita vai existir uma função contínua $b = \eta(y)$ com $y \in (-\epsilon_2, \epsilon_2)$ para um dado $\epsilon_2 > 0$ e de tal forma que $\eta(0) = 0$ e $\Psi_{\eta(y)}(y) = 0$. Além disso, fazendo a análise local de $\eta(y)$, considerando primeiramente o caso $a_d < 0 < a_e$ temos que $\eta'(0) = 0$ e $\eta''(0) = \frac{8(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e)}{6a_da_e}$, com efeito:

$$\eta'(0) = -\frac{\Psi'_b(y)}{\frac{\partial \Psi_b(y)}{\partial b}} \Big|_{(y,b)=(0,0)} = 0, \text{ pois } \Psi'_0(0) = 0,$$

e

$$\eta''(0) = -\frac{\Psi''_b(y)}{\frac{\partial \Psi_b(y)}{\partial b}} \Big|_{(y,b)=(0,0)} = -\frac{\Psi''_0(0)}{\frac{\partial \Psi_0(0)}{\partial b}} = -\frac{-\frac{8(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e)}{3a_da_e}}{2} = \frac{8(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e)}{6a_da_e} > 0.$$

Agora, para o caso $a_d < 0$ e $a_e = 0$ temos que $0 < \eta'(0) < \frac{1}{2}$, veja adiante, a princípio observe que $\gamma_e < 0$, pois

$$a_e\gamma_d < a_d\gamma_e \stackrel{a_e=0}{\Rightarrow} 0 < a_d\gamma_e \stackrel{a_d<0}{\Rightarrow} \gamma_e < 0.$$

Assim, segue que

$$\eta'(0) = -\frac{\Psi'_b(y)}{\frac{\partial \Psi_b(y)}{\partial b}} = -\frac{(\frac{1}{P'_d(y)} - P'_e(y))}{2} \Big|_{(y,b)=(0,0)} = -\frac{(-1 + e^{\gamma_e\pi})}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{\gamma_e\pi}}{2}.$$

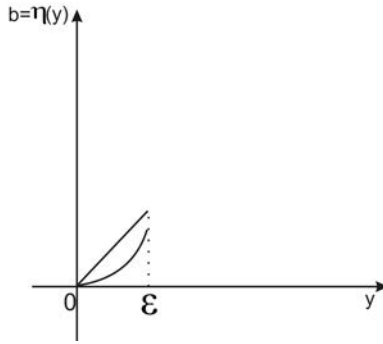


Figura 3.2.4: A aplicação η para os casos $(a_d < 0 < a_e)$ e $(a_d < 0 \text{ e } a_e = 0)$.

Logo, temos a existência de outra órbita periódica transversal para $b = \eta(y) > 0$ com y positivo e suficientemente pequeno.

Já, fazendo a análise da estabilidade veremos que essa órbita periódica transversal é estável, de fato. Se $a_d < 0 < a_e$, segue de (3.11) que $\Psi'_0(0) = 0$ e $\Psi''_0(0) < 0$, pois $\Psi''_0(0) = -\frac{8(a_e\gamma_d - a_d\gamma_e)}{3a_da_e}$. Agora, se $a_d < 0$ e $a_e = 0$, temos $\Psi'_0(0) < 0$, pois usando Proposição 2.1.1(1) e 2.1.2(2) obtemos $\Psi'_b(y) = \frac{1}{P'_d(y)} - P'_e(y) = -1 + e^{\gamma_e\pi}$ e como já vimos que nessas condições $\gamma_e < 0$ segue o resultado.

Daí, pelo Teorema da Conservação do Sinal e ainda mais como $\Psi'_b(y)$ depende linearmente de b segue que $\Psi'_b(y) < 0$ para $b > 0$ e suficientemente pequeno. Logo, por esse fato a órbita periódica transversal em análise é estável.

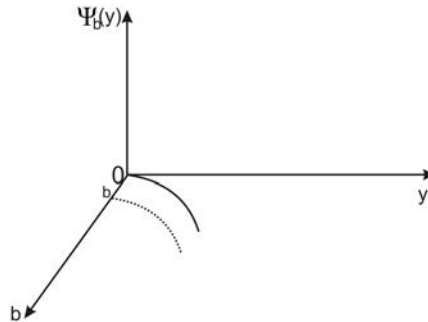


Figura 3.2.5: A aplicação $\Psi_0(y)$ e $\Psi_b(y)$ com $b \geq 0$, $y \geq 0$ e suficientemente pequeno.

Portanto, até esse momento justificamos a existência de duas órbitas periódicas transversais uma instável e outra estável. Mostraremos, ainda que para um dado b suficientemente grande não temos órbita periódica transversal, primeiramente considerando novamente o *Teorema 3.2.2(3)* e deduzindo que $\Psi_0(y) > 0$ para todo $y > \bar{y}$, pois nessas condições temos uma única órbita periódica transversal instável. Assim, tomando

$$b > \max_{y \in [0, \bar{y}]} |\Psi_0(y)|,$$

e ainda mais do *Lema 3.3.1(2)* temos que $\Psi_b(y) > b + \Psi_0(y)$ para todo $y \geq b$, assim é imediato que $\Psi_b(y) > 0$ para todo $y \geq b$. Portanto, concluímos que não existe órbita periódica transversal para b suficientemente grande.

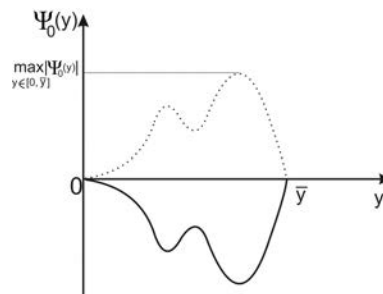


Figura 3.2.5: As aplicações $\Psi_0(y)$ e $|\Psi_0(y)|$ para $y \in [0, \bar{y}]$.

Ainda mais, agora acrescentando a condição $a_d a_e = 0$ com $a_d + a_e \neq 0$, segue da *Proposição 2.1.3(6) ou (7)* que a aplicação de Poincaré P possui convexidade definida. Logo, podemos concluir que a aplicação de Poincaré tem no máximo dois

pontos fixos. Além disso, concluímos também que como para b pequeno temos duas órbitas periódicas transversais e para b grande não temos nenhuma, irá existir com certeza um b_{SN} onde só teremos uma única órbita periódica transversal.

Um esboço da prova no caso $a_d < 0 < a_e$ é dado na *Figura 3.2.6*.

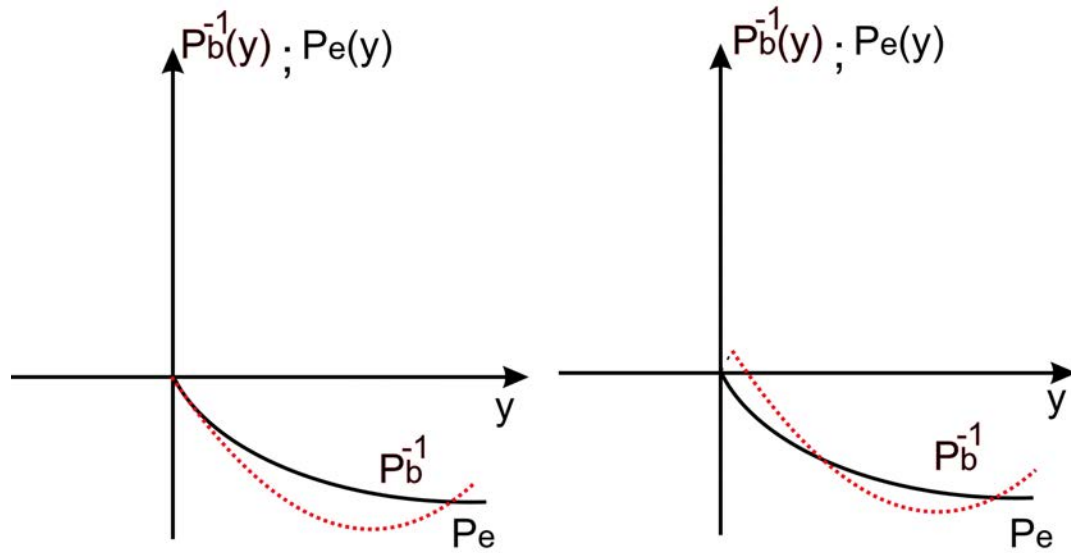


Figura 3.2.6: Bifurcação do número de órbitas periódica transversal para $b = 0$ (no lado esquerdo), $b > 0$ (no lado direito), ainda mais, a aplicação P_e com $\gamma_e < 0$ em traço sólido e P_d^{-1} com $\gamma_d > 0$ em traço tracejado.

Além disso, temos também um esboço da prova para o caso $a_d < 0$ e $a_e = 0$ na *Figura 3.2.7*.

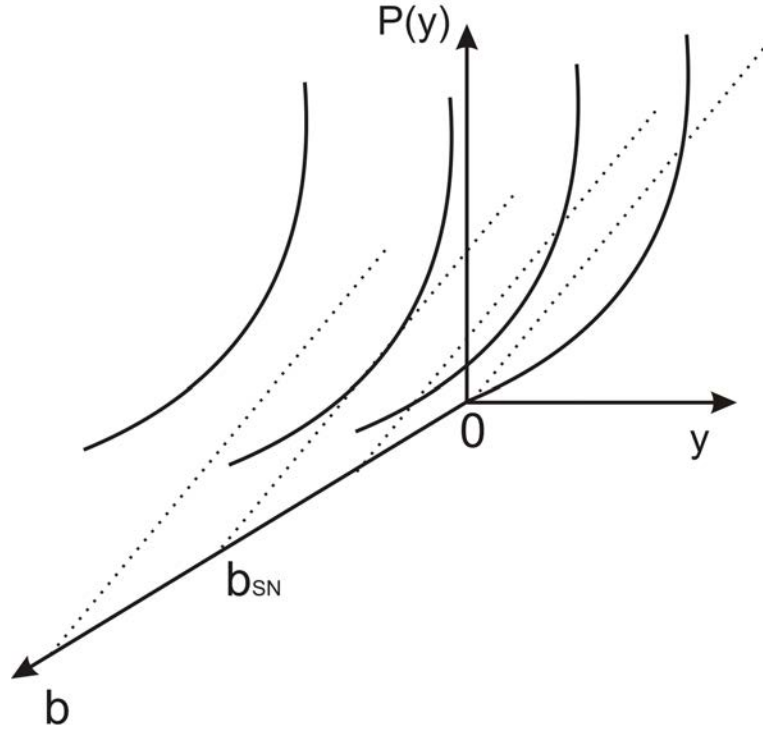


Figura 3.2.7: Bifurcação do número de órbitas periódicas transversais quando $b \geq 0$ varia e $a_d a_e = 0$, $a_d + a_e \neq 0$.

- (d) Por hipótese temos $\gamma_d + \gamma_e < 0$, isso pela *Proposição 2.1.3(3)* implica que $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1$. Assim, usando a *Observação 3.2.1* e o fato que $P(0) > b$, logo a aplicação de Poincaré tem pelo menos um ponto fixo \bar{y} onde $P'(\bar{y}) < 1$, ou seja, o sistema tem pelo menos uma órbita periódica transversal estável.

Agora, acrescentando a condição $a_d a_e = 0$, segue os casos. Se $a_d = a_e = 0$, decorre da *Proposição 2.1.3(2)* que a aplicação de Poincaré é dada por

$$P(y) = e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi} y + (1 + e^{\gamma_d \pi}) b,$$

e nesse caso a aplicação de Poincaré possui um único ponto fixo \bar{y} dado fazendo

$$P(\bar{y}) = \bar{y} \Rightarrow e^{(\gamma_d + \gamma_e)\pi} \bar{y} + (1 + e^{\gamma_d \pi}) b = \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1 + e^{\gamma_d \pi}}{1 - e^{-(\gamma_d + \gamma_e)\pi}} b > b.$$

Agora, se $a_d a_e = 0$ com $a_d + a_e \neq 0$, e assumindo que $a_d < 0$ e $a_e = 0$, pois caso contrário aplicamos a simetria Π_3 . Obtemos, daí que $\text{sign} \Psi_b''(y) = \text{sign} \gamma_d$. De fato, considerando

$$\Psi_d''(y) = -\frac{(P_d'' \circ P_d^{-1})(y; b)}{(P_d' \circ P_d^{-1})^3(y; b)} - P_e''(y),$$

segue da *Proposição 2.1.1(1)* que $P_e''(y) = 0$, da *Proposição 2.1.2(3)* que $(P_d' \circ$

$P_d^{-1})^3(y; b) < 0$, daí temos $\text{sign}\Psi_b''(y) = \text{sign}P_d''(y)$, que implica em $\text{sign}\Psi_b''(y) = \text{sign}\gamma_d$. Dando prosseguimento, vamos analisar dois casos que depende do sinal de γ_d .

Primeiramente considere o caso $\gamma_d < 0$, daí segue $\Psi_b''(y) < 0$ e obteremos que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \Psi_b'(y) = e^{-\gamma_d \pi} (-1 + e^{(\gamma_e + \gamma_d) \pi}) < 0, \quad (3.15)$$

pois novamente da *Proposição 2.1.1(1) e 2.1.2(3)* segue que $\lim_{y \rightarrow \infty} P_e'(y) = -e^{\gamma_e \pi}$ e $\lim_{y \rightarrow -\infty} P_d'(y) = -e^{\gamma_d \pi}$, assim justificamos considerando que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \Psi_b'(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{P_d'(P_e(y))} - P_e'(y) = -e^{-\gamma_d \pi} + e^{\gamma_e \pi} = e^{-\gamma_d \pi} (-1 + e^{(\gamma_e + \gamma_d) \pi}).$$

Assim, sabendo além disso que $\Psi_b(b) > 0$ e o fato da convexidade de $\Psi_b(y)$ bem definida, segue o resultado. Agora, para o caso $\gamma_d > 0$, temos $\Psi_b''(y) > 0$, assim segue que $\Psi_b'(y)$ é crescente, ou seja, decorre daí e de (3.15) que $\Psi_b'(y) < -e^{-\gamma_d \pi} + e^{\gamma_e} < 0$, logo segue o resultado. Veja *Figura 3.2.8*.

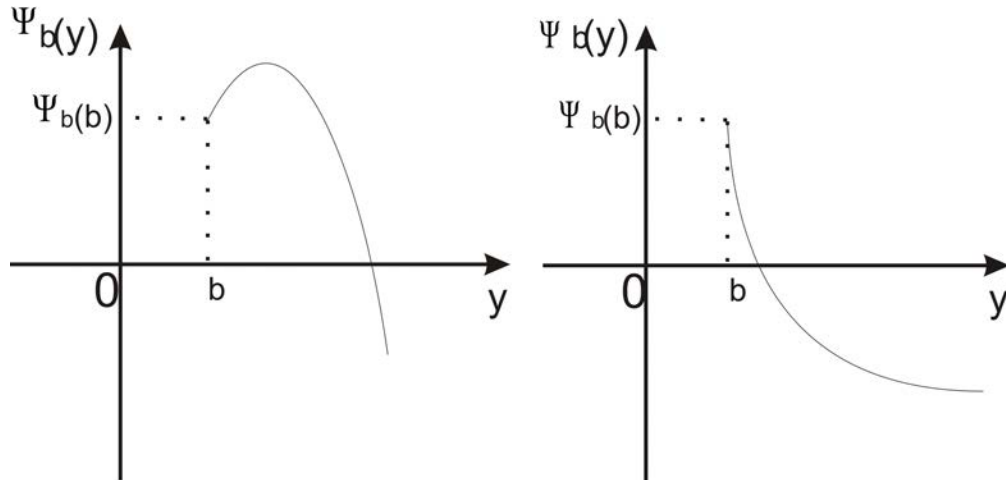


Figura 3.2.8: A unicidade da órbita periódica transversal quando $a_d a_e = 0$ com $a_d + a_e \neq 0$, com $\gamma_d < 0$ (lado esquerdo) e $\gamma_d > 0$ (lado direito).

■

3.4 Comentário final

Observamos que nesse trabalho foi tratado o caso em que temos um sistema linear por partes em duas zonas, possuindo um foco virtual em cada zona. Ao longo do trabalho foi demonstrado que o número máximo de ciclos limite encontrado para esse caso é dois, com a possibilidade da existência de mais. A título de curiosidade observamos que quando é permitido que os focos sejam reais, isto é, segundo nossa notação que $a_d > 0$ e $a_e < 0$, então podemos ter até 3 ciclos limite. Por exemplo ver [13] e [1]. Até onde sabemos, ainda não foram fornecidos exemplos em sistemas lineares por partes em duas zonas que possuam quatro ciclos limite.

Referências Bibliográficas

- [1] Buzzi, C., Pessoa, C. and Torregrosa, J. Piecewise linear perturbations of a linear center. *Discrete and Cont. Dyn. Sys.*, 33 (2013), no 9, 3915-3936.
- [2] B. Brogliato, Impacts in Mechanical Systems-Analysis and Modelling, in: Lecture Notes in Physics, vol. 551, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [3] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, P. Kowalczyk, Piecewise-smooth dynamical systems, in: Appl. Math. Sci. Series, vol. 163, London, 2008.
- [4] Jordan D W and Smith P 1999 Nonlinear Ordinary Differential Equations 3rd edn (Oxford: Oxford University Press)
- [5] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo, and F. Torres, Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 8 (1998), pp. 2073-2097.
- [6] E. Freire, E. Ponce, and F. Torres *Canonical Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems*, (2012), pp. 181-211.
- [7] S. Huan and X. Yang, On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, (2012).
- [8] M. Han and W. Zhang, On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems, *J. Differential Equations*, 248 (2010), pp. 2399-2416.
- [9] M. Kunze, M.M. Marques, *Impacts in Mechanical Systems*, Springer-Verlag, 2000.
- [10] J. Llibre, E. Ponce, and F. Torres, *On the existence and uniqueness of limit cycles in Liénard differential equations allowing discontinuities*, *Nonlinearity*, 21 (2008), pp. 2121-2142.
- [11] J. Li, Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*13(2003)47-106.
- [12] J. Llibre, E. Ponce, and F. Torres, On the existence and uniqueness of limit cycles in Liénard differential equations allowing discontinuities, *Nonlinearity*, 21 (2008), pp. 2121-2142.

- [13] Llibre, J., Teixeira, M.A. and Torregrosa, J. Lower bounds for the maximum number of limit cycles of discontinuous piecewise linear differential systems with a straight line of separation, *Int. J. of Bif. and Chaos*, 23 (2013), 1350066, 10 pp.
- [14] R.I. Leine, H. Nijmeijer, *Dynamics and Bifurcations in Non-Smooth Mechanical Systems*, Springer-Verlag, 2004.
- [15] S-Mei Huan, X-Song Yang, Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle-saddle dynamics, *Nonlinear Analysis* 92 (2013) 82-95
- [16] S-Mei Huan, X-Song Yang, On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node-node types, *J. Math. Anal. Appl.* 411 (2014) 340-353.