

MARCOS SEITI SUZUKI

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS UTILIZANDO  
O SOFTWARE EXCEL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Projetos.

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva

Guaratinguetá

2014

S968a	<p>Suzuki, Marcos Seiti</p> <p>Análise de estruturas reticuladas utilizando o software excel pelo método dos elementos finitos/ Marcos Seiti Suzuki – Guaratinguetá, 2014. 141 f : il. Bibliografia: f. 86-87</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014. Orientador: Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva</p> <p>1. Vigas 2. Treliças (Construção civil) 3. Pórticos estruturais 4. Método dos elementos finitos I. Título</p> <p style="text-align: right;">CDU 624.072(043)</p>
-------	---

*MARCOS SEITI SUZUKI*

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA”

PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA  
ÁREA: PROJETOS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Edson Cocchieri Botelho  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. FERNANDO DE AZEVEDO SILVA  
Orientador/UNESP/FEG

  
Prof. Dr. MARCELO SAMPAIO MARTINS  
UNESP/FEG

  
Prof. Dr. JOSÉ CÉLIO DIAS  
UNIFEI

Agosto de 2014

## **DADOS CURRICULARES**

**MARCOS SEITI SUZUKI**

NASCIMENTO	05.03.1985 – SÃO PAULO / SP
FILIAÇÃO	Narumi Suzuki Adélia Shizue Ito Suzuki
2004/2012	Curso de Graduação Engenharia Mecânica - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista

de modo especial, aos meus pais pelo apoio e conselhos que contribuíram para meu progresso.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço Àquele que não possui nome, mas é conhecido por vários nomes,

à minha família pela paciência e apoio que me ajudou a chegar a este momento,

ao meu orientador, *Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva* pela ajuda, apoio e conselhos que foram fundamentais para realização deste trabalho,

a CAPES, pela concessão de uma bolsa de estudos,

a todos os professores desta conceituada instituição pelo compartilhamento de conhecimentos que se mostraram de grande valor e únicos,

a todos os funcionários da instituição,

às amigadas da faculdade

“Você não deve chorar por algo  
que você não é e nunca será.”

Howard Hughes

SUZUKI, M. S. **Análise de estruturas reticuladas utilizando o software Excel pelo método dos elementos finitos**. 2014. 141f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

## RESUMO

O uso do método dos elementos finitos é bem difundido por meio de softwares comerciais, porém o procedimento matemático muitas vezes passa despercebido pelos usuários. Os softwares utilizam o método principalmente em análises de estruturas sólidas, transferência de calor, fluidos e eletromagnetismo. Tais softwares são caros e muitas vezes não acessíveis a estudantes ou profissionais da área. Para usuários que precisam realizar uma análise de elementos estruturais como treliças e pórticos a aquisição deste tipo de software é inviável economicamente. Este trabalho desenvolveu uma rotina em *Visual Basic for Application* do Excel utilizando o referido método, capaz de realizar análises estruturais em treliças planas e espaciais, vigas planas e pórticos planos, tornando acessível a aqueles que querem analisar tais estruturas ou que querem conhecer melhor o método. O Microsoft Excel está presente na maioria dos computadores com o sistema operacional Microsoft Windows o que o viabiliza sua portabilidade entre computadores sem grandes dificuldades. A validação dos resultados foi feita por comparação dos resultados obtidos no software ANSYS.

**PALAVRAS-CHAVE:** Treliças. Vigas. Pórticos. Método dos elementos finitos. Programação VBA.



SUZUKI, M. S. **Analysis of reticulated structures using Excel software by the finite element method**. 2014. 141f. Monograph (Master Degree in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

### **ABSTRACT**

The use of the finite element method is well diffused through commercial software, but the mathematical procedure often goes unnoticed by users. The software uses the method in the analysis of solid structures, heat transfer fluids and electromagnetism. Such software is expensive frequently not accessible to students or professionals. For people who want to do an analysis of structural elements such as truss and frames to purchase this kind of software is uneconomical. This work developed a routine in Visual Basic for Application of Microsoft Excel using the finite element method, able to do analysis in space trusses, plane beams and plane frames, turning accessible one who want analyze such structures or those who want to know well the method. The Microsoft Excel has features matrix operations and various mathematical operations and any other operation or manipulation of data required it has programming in Visual Basic for Application. Excel is being on most computers with Microsoft Windows operating system enables what its portability between computers without bigger difficulties. For this a review of the finite element method and Excel features have been realized. Validation of results was done by comparing results obtained in ANSYS software.

**KEYWORDS:** Trusses. Beams. Frames. Finite Element Method. Programming in VBA.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geração de malha.....	22
Figura 2 – Tronco cônico.....	23
Figura 3 – Deslocamento nodal em função do comprimento $x$ .....	24
Figura 4 – Convergência dos elementos para solução exata. ....	24
Figura 5 – Tensão em função do comprimento $x$ . ....	25
Figura 6 – Elemento mola. ....	28
Figura 7 – Elemento barra elástica. ....	30
Figura 8 – (a) Treliça não ideal (b) Treliça ideal.....	35
Figura 9 – Treliça simples. ....	36
Figura 10 – Treliça rígida com geometria quadrilátera. ....	36
Figura 11 – Treliça espacial.....	36
Figura 12 – Junta esférica MERO. ....	37
Figura 13 – Junta em “cruzeta”. ....	37
Figura 14 – Junta com “ponta amassada”.....	37
Figura 15 – Estrutura do Pavilhão de Exposições Anhembi antes de ser erguido do solo.....	38
Figura 16 – Estrutura no sistema global XYZ.....	39
Figura 17 - Elemento no sistema local xyz. ....	39
Figura 18 – Ângulos diretores de um elemento.....	40
Figura 19 – Formulação do elemento viga.....	45
Figura 20 – Pórtico plano. ....	48
Figura 21 – Janela de código do Visual Basic.....	50
Figura 22 – Treliça desenhada no gráfico de dispersão com representação sem deformação (linha tracejada) e com deformação (linha verde).....	50
Figura 23 – Ferramenta FORMAS representando um pórtico e seus esforços. ....	51
Figura 24 – Tela dos dados iniciais. ....	54
Figura 25 - Representação gráfica da deformação via ANSYS. ....	55
Figura 26 – Treliça plana.....	56
Figura 27 – Informações do Exemplo 1 na planilha do Excel.....	57
Figura 28 – Representação gráfica da treliça do Exemplo 1. ....	57
Figura 29 – Matrizes geradas para solução do Exemplo 1.....	58
Figura 30 – Resultados do Exemplo 1.....	59
Figura 31 - Representação gráfica da deformação do Exemplo 1.....	59

Figura 32 – Deslocamentos nodais via ANSYS do Exemplo 1. ....	60
Figura 33 – Forças axiais e tensões normais em cada elemento via ANSYS do Exemplo 1... ..	60
Figura 34 – Reações dos nós via ANSYS do Exemplo 1.....	61
Figura 35 – Representação gráfica da deformação via ANSYS do Exemplo 1. ....	61
Figura 36 – Treliça espacial do Exemplo 2. ....	63
Figura 37 - Representação gráfica da treliça espacial do Exemplo 2.....	64
Figura 38 - Representação gráfica da deformação do Exemplo 2.....	65
Figura 39 - Representação gráfica da deformação via ANSYS do Exemplo 2. ....	65
Figura 40 – Treliça espacial do Exemplo 3. ....	67
Figura 41 - Representação gráfica da deformação do Exemplo 3.....	71
Figura 42 - Representação gráfica da deformação via ANSYS do Exemplo 3.....	71
Figura 43 – Dados para o caso de uma viga bi-apoiada com carregamentos distribuídos.....	72
Figura 44 – Dados do Exemplo 4 inseridos na planilha.....	73
Figura 45 – Gráfico gerado pelo botão PLOTAR. ....	73
Figura 46 – Matrizes de rigidez locais, de transformação e global de cada elemento. ....	74
Figura 47 – Planilha das matrizes de rigidez para solução do exemplo 4.....	74
Figura 48 – Solução nodal obtida na planilha (deslocamentos e reações). ....	75
Figura 49 – Dados utilizados e resultados apresentados no pós-processamento.....	76
Figura 50 – Resultados dos deslocamentos nodais via ANSYS.....	77
Figura 51 – Resultados dos deslocamentos de rotação via ANSYS. ....	77
Figura 52 – Reações nos nós via ANSYS. ....	78
Figura 53 – Tensões de flexão via ANSYS.....	78
Figura 54 – Pórtico plano. ....	79
Figura 55 – Pórtico do Exemplo 5 gerado pela planilha. ....	80
Figura 56 – Dados utilizados e resultados apresentados no pós-processamento.....	82

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Reações ANSYS e Planilha do Exemplo 1.....	62
Tabela 2 – Deslocamentos nodais ANSYS e Planilha do Exemplo 1.....	62
Tabela 3 – Forças e tensões normais ANSYS e Planilha do Exemplo 1.....	62
Tabela 4 – Dados do Exemplo 2.....	63
Tabela 5 - Dados do Exemplo 2. ....	63
Tabela 6 – Resultados do Exemplo 2 (reações nodais). ....	64
Tabela 7 – Resultados do Exemplo 2 (deslocamentos nodais).....	64
Tabela 8 - Resultados do Exemplo 2 (forças axiais e tensões normais).....	64
Tabela 9 - Resultados do Exemplo 3 (reações nodais).....	67
Tabela 10 - Resultados do Exemplo 3 (deslocamentos nodais). ....	68
Tabela 11 - Resultados do Exemplo 3 (forças axiais e tensões normais).....	69
Tabela 12 – Cargas concentradas nos nós. ....	72
Tabela 13 – Comparação dos resultados de deslocamento entre a planilha e o ANSYS (Exemplo 4).....	78
Tabela 14 - Comparação dos resultados das reações entre a planilha e o ANSYS (Exemplo 4). .....	79
Tabela 15 - Comparação das tensões de flexão encontrados pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 4).....	79
Tabela 16 - Comparação dos deslocamentos encontrados pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 5).....	80
Tabela 17 - Comparação das reações encontrados pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 5). .....	81
Tabela 18 - Comparação das tensões normais encontradas pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 5).....	83
Tabela 19 - Comparação das tensões de flexão encontradas pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 5).....	83

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Principais funções do Excel para cálculo matricial.....	49
Quadro 2 – Coordenadas do Exemplo 3.....	66
Quadro 3 – Elementos do Exemplo 3.....	66

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAD	- <i>Computer Aided Design</i>
CAE	- <i>Computer Aided Engineering</i>
MEF	- Método dos Elementos Finitos
VBA	- <i>Visual Basic for Applications</i>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	16
1.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	16
1.2	OBJETIVOS.....	17
1.3	JUSTIFICATIVAS.....	17
1.4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
1.5	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	21
<b>2</b>	<b>CONCEITOS TEÓRICOS DO MEF</b> .....	22
2.1	COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÕES EXATAS E SOLUÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS .....	22
<b>2.1.1</b>	<b>Procedimentos gerais para análise por elementos finitos</b> .....	25
2.2	MATRIZ DE RIGIDEZ, ELEMENTO TIPO MOLA E BARRA .....	26
2.3	ELEMENTO MOLA LINEAR.....	27
2.4	ELEMENTO BARRA.....	29
2.5	ENERGIA DE DEFORMAÇÃO E TEOREMA DE CASTIGLIANO .....	33
2.6	TRELIÇA .....	35
<b>2.6.1</b>	<b>Treliças planas e espaciais</b> .....	35
<b>2.6.2</b>	<b>Formulação do elemento finito para problemas de treliça espacial</b> .....	38
2.6.2.1	Sistema de coordenadas locais e globais .....	39
2.6.2.2	Matriz transformada .....	40
2.7	ELEMENTO VIGA .....	43
<b>2.7.1</b>	<b>Formulação do elemento viga plana</b> .....	44
<b>2.7.2</b>	<b>Pórtico plano</b> .....	48
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b> .....	49
3.1	RECURSOS DO EXCEL.....	49
3.2	EQUIPAMENTO E SOFTWARES.....	55
<b>4</b>	<b>APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS</b> .....	56
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b> .....	84
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	86
	<b>BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS</b> .....	88
	<b>APÊNDICE A</b> .....	91
A.1	USO DA PLANILHA .....	91
A.2	FÓRMULAS DA PLANILHA.....	96

A.3 CÓDIGOS FONTES .....	99
<b>APÊNDICE B</b> .....	109
<b>APÊNDICE C</b> .....	126



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O método dos elementos finitos (MEF) está presente e é amplamente utilizado em análises de engenharia. O MEF é empregado principalmente em análises de sólidos, estruturas, transferência de calor e fluidos. Certamente o MEF é utilizado em praticamente todos os campos da engenharia (BATHE, 1996).

Muitos softwares comerciais usufruem de métodos numéricos dos mais diversos, não somente o MEF. Mas o estudo teórico destes métodos, não confere aos usuários a habilidade de utilizar um software com tal método implementado. A teoria não pode ser ignorada, o engenheiro precisa entender tanto a natureza do método como a do fenômeno físico para que não sejam feitas escolhas erradas nas implementações computacionais. Felizmente os usuários de softwares com MEF não necessitam saber de todos os detalhes do método. O usuário de MEF precisa entender o problema físico, o comportamento do MEF, as limitações da teoria em que é baseado e ser capaz de avaliar os resultados para eventuais correções. A avaliação de resultados depende muito mais do conhecimento do fenômeno físico que do MEF (COOK, 1995).

A limitação da mente humana é tal que é incapaz de compreender a complexidade de um ambiente e recriá-la em uma única operação. O processo de subdividir o sistema em componentes ou “elementos” foi a maneira que os engenheiros, cientistas ou até mesmo economistas encontraram para entender o comportamento de todo um sistema a partir destes elementos de compreensão mais fácil (ZIENKIEWICZ, 2000).

A formulação dos elementos finitos treliça, viga e pórticos neste trabalho são conhecidos como MEF baseados nos deslocamentos que são, de acordo com Bathe (1996), extensão do método de deslocamento utilizada por muitos anos.

Para a realização deste trabalho de pesquisa foi feito um estudo do MEF para treliças, vigas planas e pórticos planos (métodos de formulação dos elementos e operações realizadas), aprofundamento do uso do software Excel e linguagem de programação do *Visual Basic for Application* (VBA), estudo do uso do software ANSYS para estes tipos de estruturas.

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho apresenta a aplicação dos conceitos de MEF na análise de estruturas reticuladas estáticas como treliças, vigas e pórticos por meio do software Excel e recursos de programação do VBA, facilitando o estudo destas estruturas e do MEF. E para validar os resultados analíticos é feito a comparação com os resultados numéricos obtidos do software ANSYS. O uso da planilha também visa facilitar o estudo teórico do MEF para aqueles que buscam este objetivo.

Foram desenvolvidos algoritmos em VBA para manipular os dados inseridos nas células do Excel e realizar a montagem das matrizes de rigidez e por fim apresentar os resultados.

Os dados de entrada considerados são:

- Coordenadas dos nós ou das extremidades de cada elemento,
- Esforços envolvidos nas estruturas,
- Restrições dos nós,
- Propriedades dos materiais envolvidos (módulo de elasticidade, área da seção do elemento, momento de inércia).

Os dados de saída obtidos são:

- Deslocamentos nodais,
- Reações nodais,
- Esforços, deformações e tensões normais em cada elemento,
- Tensões de flexão em cada elemento para o caso de vigas e pórticos.

Tais algoritmos podem ser revistos para serem utilizados em outras linguagens. Buscou-se o uso do Excel de forma que não exigisse muito esforço computacional.

## 1.3 JUSTIFICATIVAS

O MEF é bem difundido na análise estrutural mecânica, sendo a base para muitos softwares comerciais. O cálculo analítico por parte dos estudantes e engenheiros está limitado a estruturas simples e pequenas. Geralmente o cálculo manual é feito em estruturas planas simplificadas, para análises um pouco mais complexas geralmente utiliza-se ferramentas como MEF que tem como base operações matriciais. Operações com matrizes grandes (grande número de nós) exigem a utilização de microcomputadores.

O Excel está presente na maioria dos computadores pessoais, portanto a análise de problemas de engenharia proposta neste trabalho possui grande portabilidade entre computadores. O software possui recursos de cálculo matricial, recursos de programação por meio do VBA entre outras ferramentas que facilitam a implementação do MEF, além de ser uma solução econômica, ele facilita a compreensão básica do método, podendo ser visualizada cada etapa das operações.

Softwares comerciais muitas vezes não são acessíveis ou não são viáveis a estudantes e profissionais da área.

O conhecimento do MEF pelos usuários destes softwares comerciais não necessita ser muito aprofundado, mas é necessário um conhecimento mínimo que muitas vezes não é tão compreensível.

#### 1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Omer Kelesoglua e Mehmet Ulker (2005), descreve uma rotina para otimização com multi-objetivos de treliças espaciais por meio da ferramenta SOLVER do Excel. A otimização é uma parte importante no desenvolvimento dos projetos de engenharia, por meio da lógica fuzzy utilizada pela ferramenta SOLVER os autores mostram uma maneira de realizar otimizações com multi-objetivos por meio de um único parâmetro  $\lambda$  descrita por Rao (1992). O SOLVER é capaz de encontrar a maximização ou minimização de um parâmetro ou variável indicado pelo usuário, porém somente um único parâmetro pode ser analisado por vez. Os autores contornam esta limitação utilizando a formulação do parâmetro  $\lambda$  onde podem otimizar mais de uma função objetivo por meio de um único parâmetro. Para exemplificar seu uso foi utilizado a planilha Excel para cálculos de treliças espaciais. Foi montada (manualmente) na planilha matrizes de rigidez seguindo o MEF, ou de acordo com autor o método matricial do deslocamento, para a realização dos cálculos de deslocamento das treliças. Após a montagem destas matrizes buscou-se minimizar os valores do peso das barras e deslocamentos das treliças analisadas. Por ser duas funções objetivos utilizou-se a formulação de um único parâmetro  $\lambda$ , sendo esta a nova função objetivo para ser aceita no SOLVER. Os resultados obtidos no Excel foram condizentes com a proposta por Rao (1992).

Huseynov, S.T. (2013) descreve uma metodologia de programação orientada a objetos no VBA do Excel para estudantes de modelagem computacional. Para explicação é utilizado o

modelo matemático clássico de ecologia. O conhecimento e habilidade na programação é fundamental para a implementação de simulações computacionais. O autor cita as vantagens de se utilizar o VBA do Excel em relação a outros programas (como Maple, Matlab e Mathematica) capazes de realizar simulações numéricas muitas vezes de “forma mais poderosa”:

- Linguagem de programação é adequado aos padrões de software moderno (trabalha principalmente com linguagem de programação de orientada a objetos);
- As estruturas sintáticas de alguns dos principais elementos do VBA são iguais ou semelhantes às do Pascal (na verdade, em muitos casos, o VBA é superior);
- O software tem conexão natural com aplicativos do sistema operacional Windows e Microsoft Office tornando o software com um elevado grau de mobilidade e amplo espectro de funcionalidade;
- O software tem aplicações não somente para o uso econômico voltado para o ensino universitário, mas em algumas universidades de prestígio dos EUA esta linguagem de programação é utilizada no ensino da engenharia (por exemplo, na simulação de problemas de aerodinâmica e turbinas aeronáuticas);

O autor descreve as etapas na programação VBA sendo como:

1. Desenvolvimento de um programa VBA utilizando como base o método numérico escolhido;
2. Inserção dos dados a serem analisados nas células do Excel e execução do programa do VBA criada (leitura das células e cálculos);
3. Exibição dos valores em células determinadas obtidos pelos cálculos processados pelo programa VBA;
4. Automatização na construção de gráficos obtidos pelas etapas 3, por meio da programação VBA;
5. Preparação de relatório científico baseado nas etapas 3 e 4 em aplicativos do Office, por exemplo, Microsoft Word ou apresentações no Microsoft PowerPoint.

No restante do trabalho o autor exemplifica as etapas desenvolvendo um programa para simulação do modelo matemático ecológico clássico de Volterra-Lotka que utiliza um sistema de equações ordinárias não linear. De acordo com o autor a utilização desta técnica contribui na organização dos resultados de forma fácil e em conformidade a qualquer outro programa numérico e pode ser aplicado em problemas computacionais numéricos mais complexos que o apresentado no trabalho.

Kian Teh e Laurie Morgan (2005) descrevem a estratégia de ensino do MEF por meio do Excel para alunos de engenharia em final de curso. Os autores consideram o uso de softwares comerciais com MEF muito complexo para aqueles que estão iniciando o estudo do método e o uso de programação computacional é descartado, pois muitos alunos não possuem o conhecimento mínimo para programar. A estratégia adotada pelos autores foi a utilização da planilha de cálculo Excel que geralmente são acessíveis a todos estudantes. De acordo com os autores o Excel possibilita a visualização dos cálculos numéricos e o processamento de dados, o algoritmo utilizado na montagem da matriz de rigidez global, implementação das condições de contorno e a influência da malha na convergência da solução. No trabalho os autores exemplificam o uso da planilha por meio de um problema de treliça plana, demonstram as etapas da construção das matrizes locais e globais, as operações matriciais envolvidas e a obtenção da solução nodal sempre utilizando as ferramentas nativas do Excel. O MEF realiza muitas tarefas de manipulação de números o que se torna tedioso e propenso a erros, os autores perceberam que os alunos começaram compreender melhor o algoritmo do MEF ao utilizar o Excel. A utilização de softwares comerciais de elementos finitos não necessita que os alunos conheçam o MEF para encontrar a solução, a planilha auxilia na contextualização do método nos softwares comerciais. Ao tornar os alunos mais capacitados possibilitam que os próprios tomem iniciativa para a produção de programação de macros da planilha.

Dorian Luis Linero Segrera, Diego Alexander Garzón-Alvarado (2012) apresentam um software de código-aberto utilizando o MEF, denominado PEFiCA. O PEFiCA tem o objetivo de motivar e facilitar o estudo do MEF aplicados em problemas de mecânica dos sólidos e fluidos. O programa permite resolver a equação diferencial de campo de Poisson bidimensional, infiltração de água em solos permeáveis, distribuição de esforços cortantes, transferência de calor e vigas submetidas a torção. O programa também pode calcular o campo de tensões em problemas mecânicos elásticos lineares estáticos no estado plano de tensões e estado plano de deformações. A vantagem de se utilizar um software de código-aberto é a possibilidade do usuário implementar novas rotinas ao código, visualizar e acompanhar as etapas do MEF, diferentemente dos softwares comerciais que são uma “caixa-preta”. O software foi utilizado nas aulas ministradas pelos autores no programa de mestrado da instituição. O software foi desenvolvido em uma planilha do Excel onde são inseridos os dados, já as rotinas essenciais como o processamento e cálculo destes dados foram programadas no VBA. Um segundo software, executável, é utilizado para visualização gráfica dos resultados gerados pela planilha. O fato do PEFiCA possuir o código aberto os usuários podem implementar os próprios modelos

numéricos. O PEFiCA foi utilizado como uma ferramenta em mais de 7 trabalhos de graduação. O programa é distribuído gratuitamente sendo o único pré-requisito para o usuário possuir o Excel instalado.

Şimşek, M. e Yurtcu, H.H. (2013) investigaram a flexão e flambagem em nano-viga com gradação funcional. Utilizaram as teorias não-locais de viga de Timoshenko e Euller-Bernoulli. A dedução das equações das teorias não-locais se assemelham as teorias clássicas (locais) diferenciando somente na utilização de parâmetros não-locais, estes parâmetros são provenientes da interação entre os átomos e só são utilizados em estudos de estruturas em escala nanométrica. A gradação funcional produz uma alteração das propriedades ao longo da nano-viga os autores fazem a estimativa para os valores do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. A partir destas informações (parâmetro não local e efeito da gradação funcional) os autores desenvolvem equações matriciais para o cálculo do deslocamento e carga crítica de flambagem da nano-viga quando sujeita a esforços, baseando-se nas teorias de viga de Timoshenko e Euler-Bernoulli. Foram obtidos valores numéricos para o deslocamento da nano-viga quando submetido a uma carga distribuída e valores para carga crítica de flambagem, variou-se o parâmetro não-local, o efeito da gradação funcional e índice de esbeltez, para ambas teorias (Timoshenko e Euler-Bernoulli). Os autores concluíram que o efeito do parâmetro não-local apresenta importante influência nos resultados numéricos da nano-viga. Neste novo modelo de nano-viga proposto, os resultados numéricos de deslocamento foram maiores e as cargas críticas de flambagem foram menores que na teoria clássica (escala macro).

## 1.5 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O capítulo 1 apresenta uma introdução ao trabalho, justificativa, objetivos e uma revisão bibliográfica de trabalhos envolvendo MEF em estruturas reticuladas, programação VBA e Excel.

O capítulo 2 apresenta um resumo teórico envolvendo MEF com relação aos elementos do tipo barra, viga e viga com carga axial.

O capítulo 3 apresenta o uso dos elementos finitos na planilha Excel.

O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos na planilha de alguns problemas envolvendo treliças, vigas e pórticos, comparados aos resultados do software comercial ANSYS.

O capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 CONCEITOS TEÓRICOS DO MEF

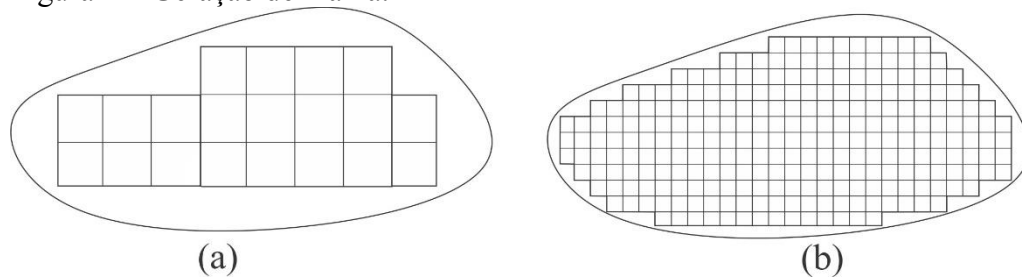
O MEF é um eficiente método numérico de resolução linear e não-linear de problemas reais em meios contínuos. Método muito difundido e utilizado para solução de elementos mecânicos, eletromagnéticos, fluidos e de transferência de calor.

Modernos softwares de análise de problemas de engenharia, conhecidos como CAE (*Computer Aided Engineering*), baseiam-se no MEF. Alguns exemplos destes softwares são o ANSYS, Nastran, Abaqus, Cosmos entre outros.

### 2.1 COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÕES EXATAS E SOLUÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS

O processo de representação do domínio por elementos finitos é conhecido como geração de malha (*meshing*) e o resultado desta geração de malhas de elementos finitos são as malhas de elementos finitos (*finite element mesh*). Geralmente, usa-se elementos que não possuem lados curvos o que torna impossível gerar uma malha de elementos que cubram todo o domínio conforme a Figura 1 (a).

Figura 1 – Geração de malha.

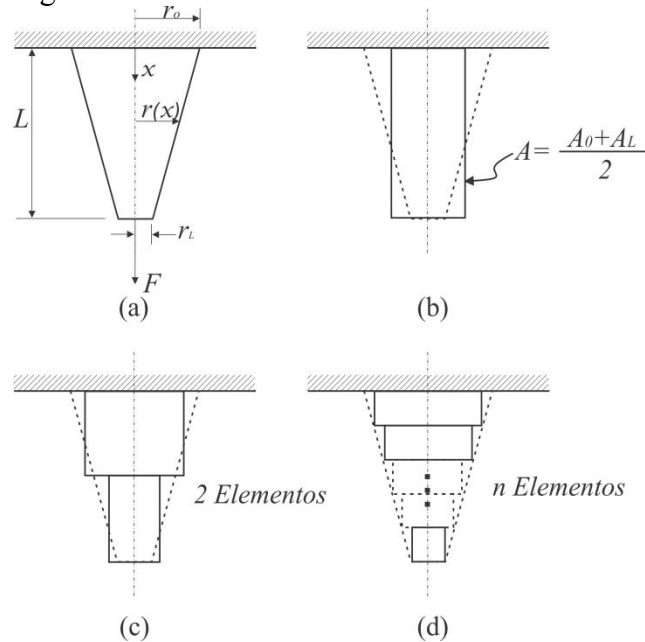


Fonte: Adaptado de HUTTON, 2004.

Ao diminuir o tamanho dos elementos e consequentemente aumentando sua quantidade, essa nova representação será capaz de abranger melhor o domínio conforme Figura 1 (b). Intuitivamente está sendo feito um refinamento (incremento) da malha de elemento finito e por consequência convergindo a solução para a solução exata.

Para exemplificar tal característica considere um tronco cônico sólido engastado em uma extremidade e sujeito a um carregamento axial na outra extremidade, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 – Tronco cônico.



Fonte: Adaptado de HUTTON, 2004.

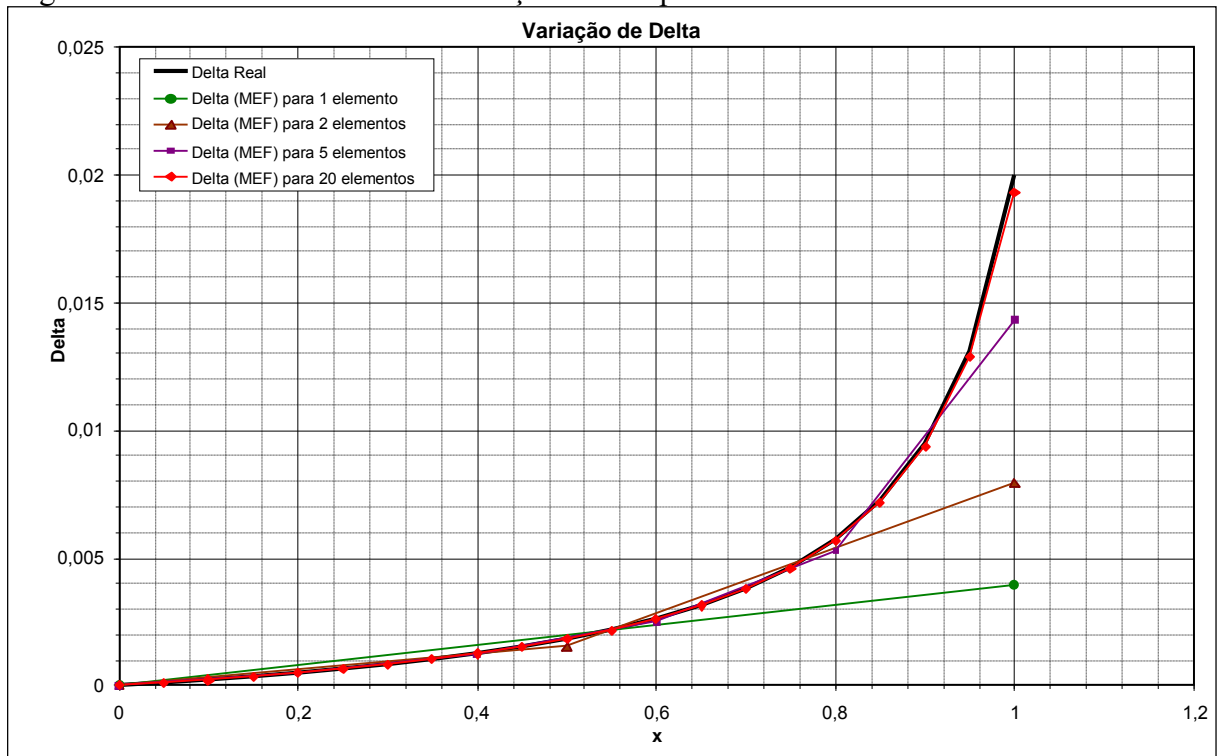
Foi considerado como elementos finitos barras cilíndricas de comprimentos iguais variando somente as áreas, conforme apresenta a Figura 2 (b). A seguir estão alguns gráficos (Figura 3, Figura 4 e Figura 5) apresentando o comportamento do sistema para a solução exata e para diferentes quantidades de elementos finitos empregados.

Para obtenção da solução exata é necessário realizar integração do raio ao longo do comprimento para encontrar o deslocamento. Obviamente para este problema a solução não é tão complexa, mas para problemas com geometria mais detalhada a solução exata é inviável. Os gráficos ilustram a eficiência e a precisão do MEF.

A Figura 3 apresenta o deslocamento real do tronco e dos elementos finitos ao longo do comprimento. Note que quanto maior o número de elementos finitos maiores a convergência para a curva da solução exata isso pode ser melhor visto na Figura 4. Na Figura 5 é possível perceber a descontinuidade existente no MEF para este problema, a tensão não é contínua como o deslocamento.

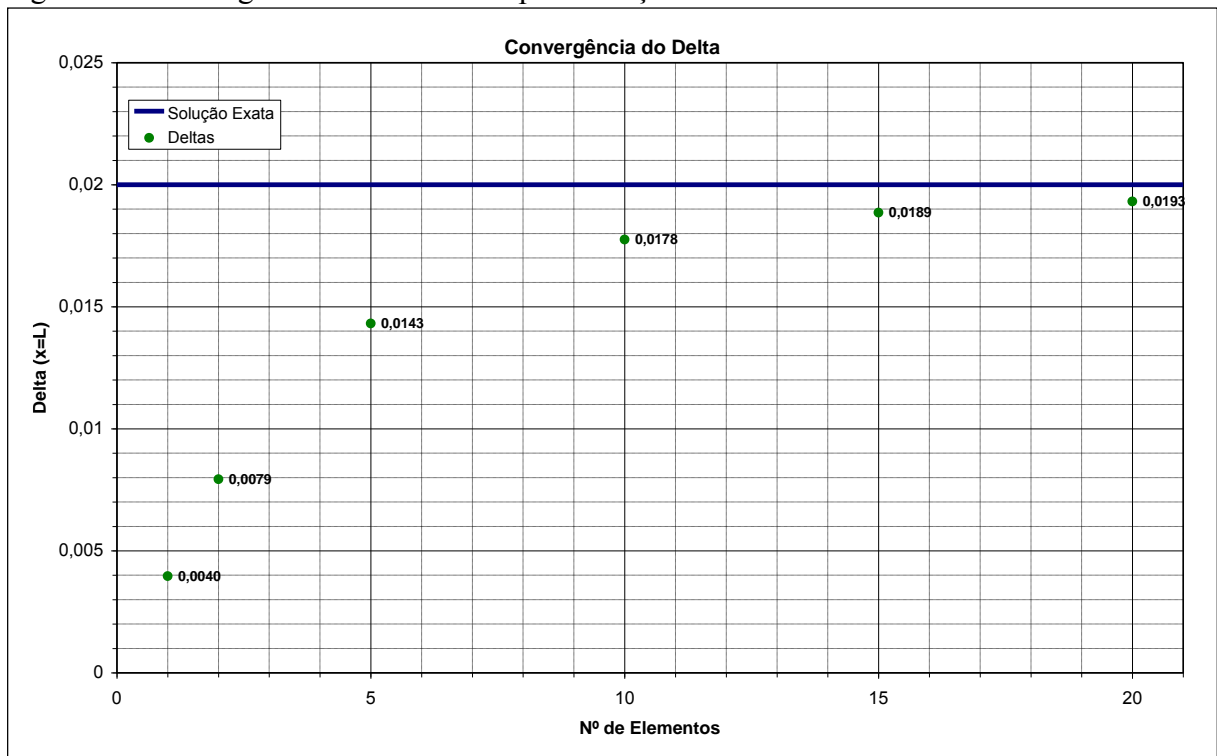


Figura 3 – Deslocamento nodal em função do comprimento  $x$ .



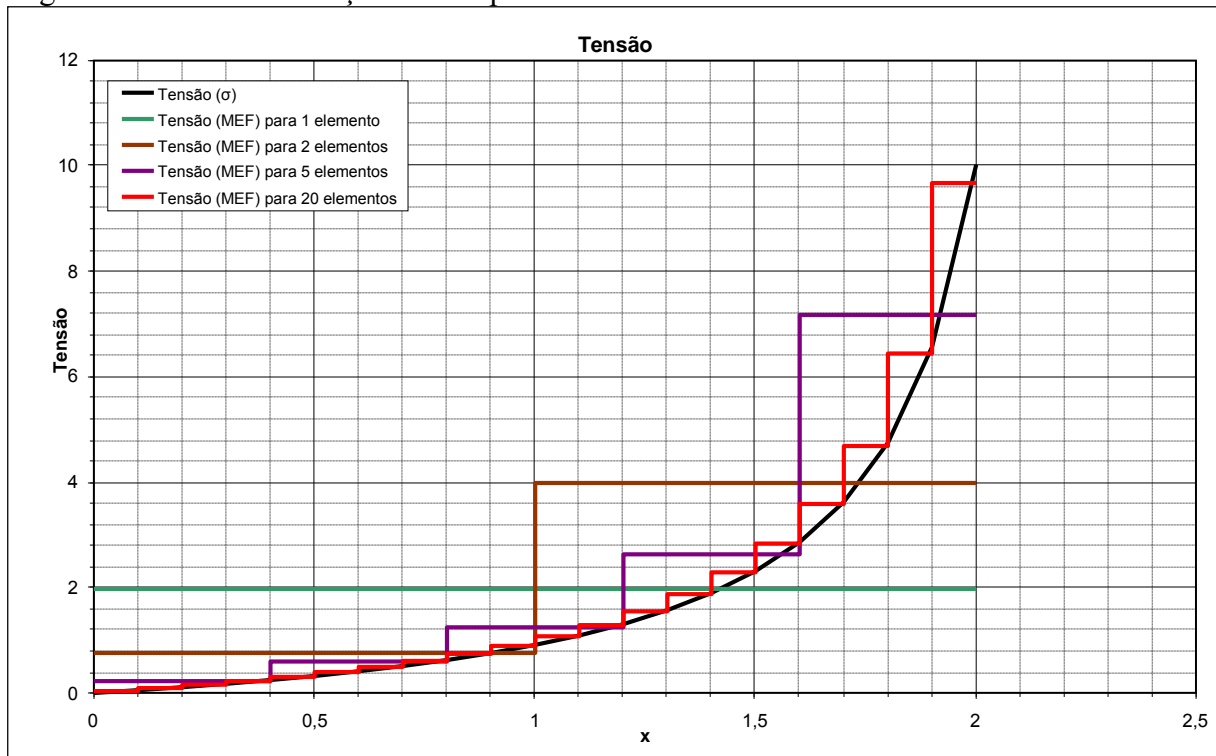
Fonte: Autoria própria.

Figura 4 – Convergência dos elementos para solução exata.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5 – Tensão em função do comprimento x.



Fonte: Autoria própria.

O refinamento para este problema poderia ser feito com mais de 20 elementos, porém é necessário o usuário compreender as necessidades exigidas para cada projeto, dependerá também da experiência e conhecimento teórico de cada usuário. Lembrando que quanto maior o refinamento maior será o uso de capacidade e tempo computacional além do custo maior com mão-de-obra, de acordo com o projeto analisado esse refinamento não se faz necessário, ficando a critério do usuário saber a prioridade.

### 2.1.1 Procedimentos gerais para análise por elementos finitos

As etapas descritas a seguir, de acordo com Moaveni (2003) e Hutton (2004), são seguidas para o uso do MEF, mesmo os softwares comerciais seguem tais passos apesar de às vezes não estarem tão evidentes. As etapas são:

**Fase de Pré-Processamento** descreve e define o problema, nesta fase inclui:

- Criar e discretizar o domínio em elementos finitos, ou seja, dividir o problema em nós e elementos, conhecido também como geração de malhas;
- Usar uma função que descreva o fenômeno físico do comportamento de um elemento;

- Desenvolver equações para o elemento;
- Montar a matriz global de rigidez;
- Aplicar as condições de contorno, condições iniciais e carregamentos;
- Definir propriedades dos elementos;
- Citando uma máxima da computação, “*garbage in, garbage out*” em português “*entra lixo, sai lixo*”. Esta fase é a mais importante, se o problema for definido errado não é esperada uma solução correta.

### **Fase de Solução**

Achar a solução das equações lineares ou não-lineares desse modo obtendo os resultados nodais, por exemplo os valores de deslocamento nos diferentes nós (no caso de problemas estruturais) ou as diferentes temperaturas nos nós (no caso de problemas de transferência de calor).

### **Pós-processamento**

Obter outras informações, como tensões principais, fluxo de calor, modelos dinâmicos animados, modelos coloridos, etc.

Caberá ao usuário saber se a solução está satisfatória e condizente com a teoria já conhecida.

## **2.2 MATRIZ DE RIGIDEZ, ELEMENTO TIPO MOLA E BARRA**

O cálculo matricial é a forma pela qual o MEF trabalha. E por essa razão foi adotado e popularizou-se no meio computacional. A matriz de rigidez é a matriz de maior importância dentro do método. É nela que estão embutidas as principais informações para a solução do problema, como tipo de elemento finito usado, geometria, propriedade dos materiais, conexão entre os elementos, ou seja, a matriz de rigidez traduz o comportamento do sistema. Conforme o estímulo externo atuante sobre o sistema a ser analisado, a matriz de rigidez indicará como o sistema reagirá. Os estímulos externos são diversos, para cada tipo de problema pode ser empregado um ou mais tipos, alguns exemplos são: carregamento, força, fluxo de calor, etc.

O uso do termo rigidez é bem apropriado, pois a matriz indicará também o quanto é difícil ou fácil tirar o sistema de seu estado inicial, pode-se comparar a matriz de rigidez ao módulo

de rigidez da mola, quanto maior seu valor mais difícil é para comprimi-la ou tracioná-la e quanto menor o valor mais fácil é para deformá-la.

O uso da mola nestas analogias não é uma coincidência, ela é utilizada como forma comparativa nos estudos mais básicos de MEF e resistência dos materiais.

Na análise de estruturas reticuladas anteriores a popularização e o grande desenvolvimento do MEF o método do deslocamento, também conhecido como método da rigidez (GERE e WEAVER, 1965), era utilizado nestas análises. De acordo com Bathe (1996) o MEF é extensão deste método, portanto o estudo de MEF em estruturas reticuladas baseia-se neste método.

As estruturas reticuladas podem se dividir em seis categorias: vigas, treliças planas, treliças espaciais pórticos planos, pórticos espaciais e grelhas (GERE e WEAVER, 1965). As duas últimas categorias não são exploradas neste trabalho mas abordagem teórica não difere muito do pórtico plano. O pórtico plano possui seus carregamentos no mesmo plano que o contem enquanto a grelha o carregamento é normal a este plano, enquanto o pórtico plano possui mais graus de liberdade que a estrutura plana.

### 2.3 ELEMENTO MOLA LINEAR

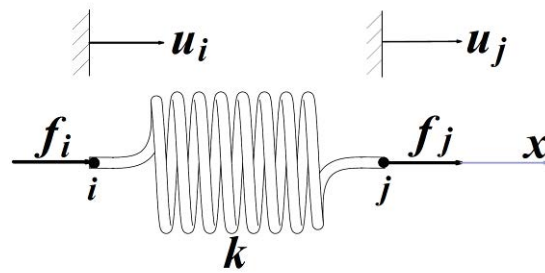
Este é o elemento mais simples e mais utilizado para introdução do estudo do MEF.

A mola linear (Figura 6) como um mero dispositivo mecânico é capaz de suportar somente esforços axiais, e sua deformação, quando submetido a tração ou compressão, é diretamente proporcional a força aplicada, representada pela equação (1).

$$F = k\delta \quad (1)$$

Onde  $F$  é a força,  $k$  é a constante de proporcionalidade conhecida como constante de rigidez da mola e  $\delta$  é a deformação da mola.

Figura 6 – Elemento mola.



Fonte: Adaptado de HUTTON, 2004.

A formulação do elemento mola é feito por meio direto, sem necessidade de demonstração matemáticas ou cálculos complexos.

Os elementos conectam-se pelos nós  $i$  e  $j$  estes podem sofrer deslocamento  $u_i$  e  $u_j$  causadas pelas forças  $f_i$  e  $f_j$  respectivamente. Por conveniência é arbitrado a direção do eixo coordenado  $x$  coincidente com a deformação axial do elemento. Por enquanto será tratado somente o sistema de coordenadas unidimensional.

As equações (2), (3) e (6) descrevem o comportamento do sistema:

$$\delta = u_j - u_i \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$f = k\delta = k(u_j - u_i) \quad (3)$$

Com o sistema no equilíbrio tem-se  $f_i + f_j = 0 \Leftrightarrow f_i = -f_j$ , reescrevendo a equação (3) em termos das forças nodais:

$$f_i = -k(u_j - u_i) \quad (4)$$

$$f_j = k(u_j - u_i) \quad (5)$$

As equações (4) e (5) formam um sistema de equações, que escritas na forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (6)$$

De forma simplificada será expressa como:

$$[k_e]\{u\} = \{f\} \quad (7)$$

Onde,

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (8)$$

Onde  $[k_e]$  representa a matriz de rigidez do sistema,  $\{u\}$  é o vetor com os deslocamentos nodais e  $\{f\}$  é o vetor com as forças nodais do elemento.

A matriz de rigidez (8) é de ordem  $2 \times 2$  significa que o elemento possui 2 deslocamentos nodais ou 2 graus de liberdade. Um sistema ou elemento que possui N graus de liberdade corresponderá a uma matriz de rigidez quadrada de ordem  $N \times N$ .

Esta foi a representação de um único elemento e para os casos em que é feita a representação de um elemento isoladamente do resto do sistema usa-se os termos “sistema local” ou “do elemento”. Por exemplo,  $[k_e]$  é a matriz de rigidez do elemento ou matriz de rigidez no sistema local, isso ocorre também com o sistema de coordenadas existirá um sistema de coordenadas local para cada elemento.

A solução do problema reduz-se a um simples cálculo matricial do tipo:

$$\{u\} = [k_e]^{-1} \{f\} \quad (9)$$

O elemento mola formulado isoladamente não possui solução, seria necessário a restrição do seu movimento em um dos nós ou conectado a outro elemento de um sistema maior. Ao tentar resolver este sistema matricial será encontrado um sistema linear compatível indeterminado. Como é necessário obter uma solução em específico é preciso restringir o movimento em um ou mais nós. Essas restrições são as chamadas condições de contorno.

Até o momento foi analisado o elemento individualmente do sistema global. Porém para encontrar a solução do sistema global é necessário relacionar o elemento a outro, para isso é necessário montar o sistema de equações matricial global que é chamado de sistema global.

## 2.4 ELEMENTO BARRA

O elemento barra também conhecida como barra, Spar, Link ou Truss (treliça) é muito similar a mola, porém possui uma formulação mais geral, também possui mais aplicações, como estruturas treliçadas bidimensionais e tridimensionais. Suporta somente esforços axiais como o elemento mola.

Para fazer a formulação deste elemento finito é necessário realizar algumas considerações:

- A barra é reta;
- O material obedece a lei de Hooke;

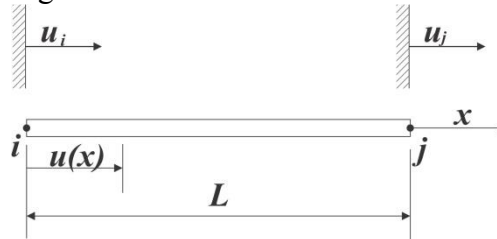
- As forças aplicadas ocorrem somente nas suas extremidades;
- Sofre somente esforços axiais. Torção, momento e flexão não são transmitidos ao longo dos elementos devido suas conexões. Para isso ocorrer consideram-se os elementos conectados por pinos ou juntas esféricas, permitindo a rotação dos elementos em torno do nó.

A formulação a seguir é apresentada por Hutton (2004).

A Figura 7 representa uma barra de comprimento  $L$ , o deslocamento axial é coincidente a coordenada  $x$ . Os nós 1 e 2 localizados nas extremidades e o deslocamento ao longo da barra é descrito por uma função  $u(x)$ , o nó 1 está engastado e não sofre deslocamento. A função nos nós 1 e 2 satisfazem  $u_i(x=0)=0$  e  $u_j(x=L)=1$ . Esta é uma função contínua  $u(x)$  que pode ser expressa em termos de  $u_i$  e  $u_j$  e considerando a existência das funções de interpolação  $N_i(x)$  e  $N_j(x)$  encontra-se a função (10).

$$u(x) = N_i(x)u_i + N_j(x)u_j \quad (10)$$

Figura 7 – Elemento barra elástica.



Fonte: Adaptado de HUTTON, 2004.

Para encontrar as funções de interpolação serão usados os seguintes valores de contorno:

$$u(x=0) = u_i \quad u(x=L) = u_j \quad (11)$$

Usando as equações (10) e (11) encontra-se as seguintes condições de contorno que precisam satisfazer as funções de interpolação.

$$N_i(0) = 1 \quad N_j(0) = 0 \quad (12)$$

$$N_i(L) = 0 \quad N_j(L) = 1 \quad (13)$$

Por se tratar de um elemento com 2 graus de liberdade pode-se usar um polinômio linear para descrever cada função de interpolação:

$$N_i(x) = a_0 + a_1x \quad (14)$$

$$N_j(x) = b_0 + b_1x \quad (15)$$

Aplicando as condições (12) e (13) nas funções (14) e (15) encontra-se:

$$N_i(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (16)$$

$$N_j(x) = \frac{x}{L} \quad (17)$$

A função  $u(x)$  reescrita ficará:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j \quad (18)$$

Na forma matricial:

$$u(x) = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (19)$$

A partir dos conceitos de resistência dos materiais, uma barra de seção  $A$ , comprimento  $L$  e sob um carregamento  $F$  a variação  $\delta$  de seu comprimento é dado por:

$$\int d\delta = \int_0^L \frac{F}{AE} dx \quad (20)$$

Considerando o elemento com seção constante o  $\delta$  será:

$$\delta = \frac{FL}{AE} \quad (21)$$

Onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material. A constante de rigidez da mola equivalente será:

$$k = \frac{\delta}{F} = \frac{AE}{L} \quad (22)$$



Geralmente é usado a deformação específica normal  $\varepsilon$  do material nos cálculos de resistências dos materiais, como a formulação trabalha com deslocamento é necessário relacionar a deformação com o deslocamento. Considerando a barra elástica com uma deformação uniaxial sabe-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (23)$$

Aplicando (18) em (23):

$$\varepsilon_x = \frac{u_j - u_i}{L} \quad (24)$$

A tensão normal, pela lei de Hooke, é dada por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(\frac{u_j - u_i}{L}\right) \quad (25)$$

A força axial é:

$$F = \sigma_x A = \frac{AE}{L}(u_j - u_i) \quad (26)$$

Considerando as forças nodais  $f_i$  e  $f_j$  em equilíbrio  $f_i + f_j = 0$ , através de (26) tem-se:

$$f_i = -\frac{AE}{L}(u_j - u_i) \quad (27)$$

$$f_j = \frac{AE}{L}(u_j - u_i) \quad (28)$$

Expressando o sistema formado por (27) e (28) na forma matricial:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (29)$$

A matriz de rigidez é dada por:

$$[k_e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

## 2.5 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO E TEOREMA DE CASTIGLIANO

Outra forma de se obter a formulação de que envolve deslocamento dos nós é através do uso da Energia de Deformação combinado com o Teorema de Castigliano (HUTTON, 2004). O trabalho mecânico de deformação  $W$  de um ponto 1 ao ponto 2 é dado por:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (31)$$

Onde:

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (32)$$

Reescrevendo (32):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \vec{i} + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy \vec{j} + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \vec{k} \quad (33)$$

Considerando um elemento só com deformação uniaxial,  $F=k\delta$  o trabalho mecânico para uma única direção é dado por:

$$W = \int_0^{\delta} k\delta \, d\delta \quad (34)$$

$$W = \frac{1}{2} k\delta^2 \quad (35)$$

Aplicando (22) em (35):

$$W = \frac{1}{2} \frac{AE}{L} \delta^2 \quad (36)$$

Aplicando (21) em (35):

$$W = \frac{1}{2} \frac{AE}{L} \left( \frac{FL}{AE} \right)^2 \quad (37)$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon V \quad (38)$$

Onde  $V$  é o volume deformado da barra e  $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$  é a energia de deformação por unidade de volume  $u_e$ . A energia de deformação por unidade de volume é dada por:

$$u_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (39)$$

A energia de deformação  $U$  é dada por:

$$U = \sum_{i=1}^n W_i \quad (40)$$

No caso uniaxial com uma única carga sendo aplicada:

$$U = W = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon V \quad (41)$$

O teorema de Castigliano afirma que a derivada parcial da energia de deformação em relação ao deslocamento do nó  $i$  é igual a força aplicada neste nó:

$$f_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (42)$$

Combinando as equações (24), (25) e (39):

$$U = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x V = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 AL = \frac{1}{2} E \left( \frac{u_j - u_i}{L} \right)^2 AL = \frac{AE}{2L} (u_j^2 - 2u_i u_j + u_i^2) \quad (43)$$

Aplicando o Teorema de Castigliano em relação a cada nó:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = f_i = -\frac{AE}{L} (u_j - u_i) \quad (44)$$

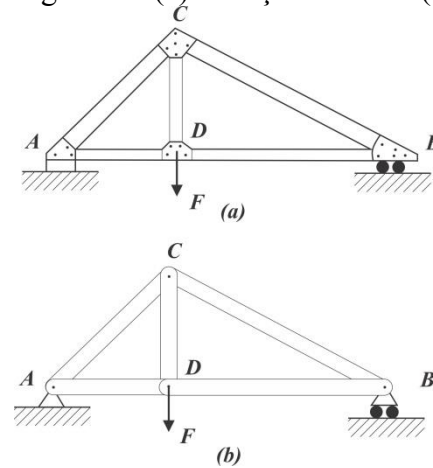
$$\frac{\partial U}{\partial \delta_j} = f_j = \frac{AE}{L} (u_j - u_i) \quad (45)$$

É possível notar que as equações (44) e (45) são iguais a (27) e (28).

## 2.6 TRELIÇA

Segundo Beer e Johnston Júnior (1980) a treliça é um tipo de estrutura da engenharia comumente empregada em construção de prédios e pontes onde se busca uma solução ao mesmo tempo prática, econômica e estética. Uma treliça ideal consiste de barras retas conectadas e articuladas nas juntas. Conectadas somente nas extremidades, sendo assim, nenhuma barra é contínua após uma junta, como apresenta a Figura 8 (b) diferentemente da Figura 8 (a) em que o segmento AB é constituído de uma única barra.

Figura 8 – (a) Treliça não ideal (b) Treliça ideal.



Fonte: Adaptado de BEER, 1980.

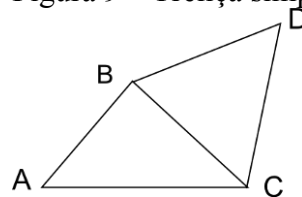
As cargas nas treliças são aplicadas nas juntas, raramente são aplicadas ao longo das barras, pois suas barras são delgadas e não resistem tais esforços. As juntas para efeito didático são consideradas pinadas e articuladas. Desta forma os únicos esforços suportados pelas treliças são os esforços axiais. Na análise dessas estruturas geralmente ignora-se o peso da estrutura, pois a carga aplicada geralmente é muito maior.

### 2.6.1 Treliças planas e espaciais

As treliças planas ou bidimensionais são estruturas treliçadas em que todos seus elementos podem ser representados num mesmo plano. Mas quando as barras são unidas de forma a construir uma configuração tridimensional denomina-se a estrutura como treliça espacial.

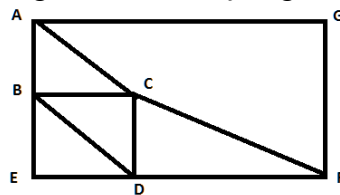
A treliça triangular é a treliça rígida mais elementar e a partir dela pode-se construir treliças rígidas maiores, para isto basta adicionar mais duas barras a treliça triangular ligadas em diferentes nós existentes e interligadas a um novo nó conforme Figura 9. O processo pode ser repetido diversas vezes e sempre obterá uma treliça rígida. Treliças constituídas desta forma são conhecidas como treliças simples. Mas nem sempre as treliças simples são constituídas por formas triangulares. Como apresenta a Figura 10 a treliça é rígida e construída adicionado duas barras e não é constituído somente de geometria triangular.

Figura 9 – Treliça simples.



Fonte: Adaptado de BEER, 1980.

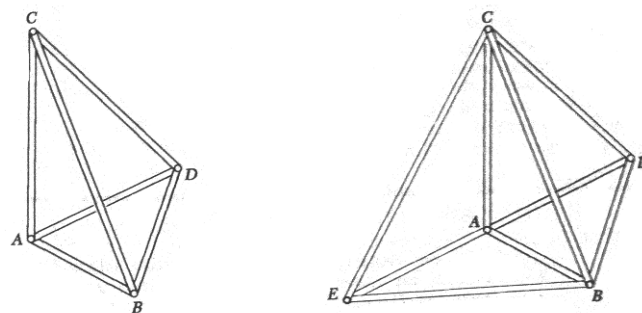
Figura 10 – Treliça rígida com geometria quadrilátera.



Fonte: Adaptado de BEER, 1980.

A forma mais elementar dentre as treliças espaciais é formada por 6 barras e 4 nós formando assim um tetraedro. Adicionando mais três barras a treliça tetraédrica pode-se obter uma estrutura rígida maior como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Treliça espacial.



Fonte: BEER, 1980 p. 227.

O uso da de estruturas espaciais, em especial as treliças, é muito recente, sua primeira aplicação comercial ocorreu na década de 30 pela indústria alemã MERO. Na década de 60

surgem outras empresas europeias e americanas que utilizaram também essas estruturas espaciais.

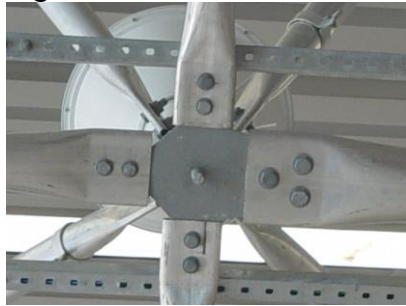
As formas mais comuns para conectar os elementos são apresentadas nas Figura 12, Figura 13 e Figura 14.

Figura 12 – Junta esférica MERO.



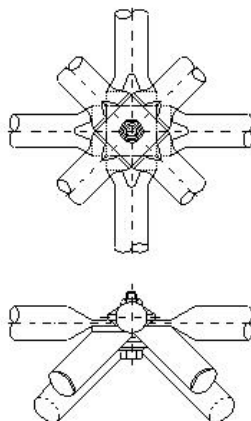
Fonte: <http://www.metalica.com.br>

Figura 13 – Junta em “cruzeta”.



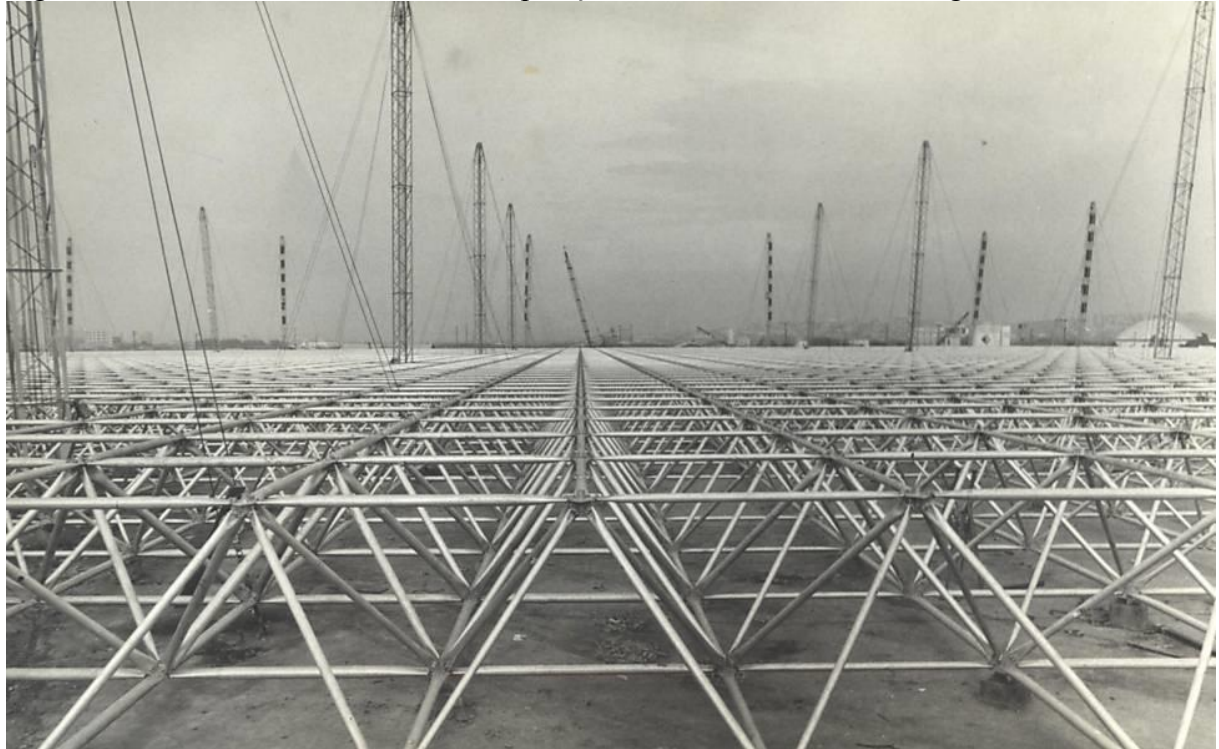
Fonte: : <http://www.metalica.com.br>

Figura 14 – Junta com “ponta amassada”.



Fonte: <http://www.metalica.com.br>

Figura 15 – Estrutura do Pavilhão de Exposições Anhembi antes de ser erguido do solo.



Fonte: <http://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/14303-anhembi>

Para que as cargas aplicadas nas estruturas concentrem-se nos nós os tipos de conexões mais apropriadas e mais condizente com a teoria, são as representadas na Figura 12 e Figura 13. Porém a forma mais utilizada é a apresentada na Figura 14 por serem as mais econômicas, este tipo de conexão impede a rotação em torno dos nós causando esforços como torção, momento e flexão, além não terem uma boa estética.

Um grande marco no uso de estrutural espacial no Brasil foi a construção da cobertura do Pavilhão de Exposições Anhembi (Figura 15).

### 2.6.2 Formulação do elemento finito para problemas de treliça espacial

O elemento finito a ser utilizado é a barra elástica, já descrita e formulada na seção 2.4. Porém, até o momento foram apresentadas coordenadas unidimensionais para formular os elementos, agora que será apresentada a estrutura tipo treliça usando MEF faz-se necessário o uso das coordenadas bidimensionais e tridimensionais. O elemento finito para a coordenada tridimensional pode ser utilizado como um elemento unidimensional ou bidimensional, portanto a formulação apresentada será somente para o caso tridimensional.

### 2.6.2.1 Sistema de coordenadas locais e globais

É comum na modelagem em CAD (*Computer Aided Design*) trabalhar com sistema de coordenadas locais e globais, principalmente em desenhos tridimensionais no intuito de facilitar o modelamento.

Figura 16 – Estrutura no sistema global XYZ.

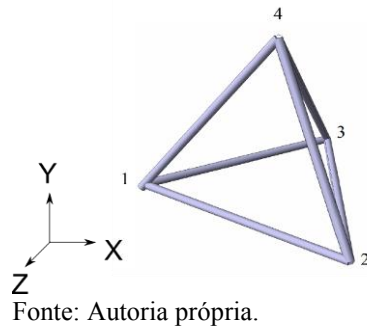
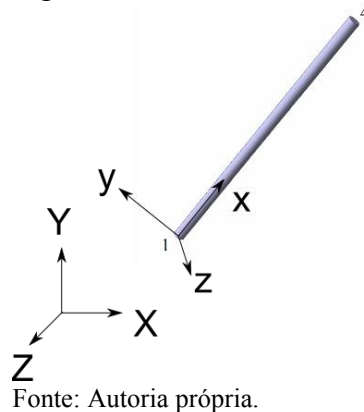


Figura 17 - Elemento no sistema local xyz.



Na Figura 16 é apresentada uma estrutura no sistema de coordenadas global XYZ (com letras maiúsculas). Isolando a barra formada pelos nós 1 e 4 foi arbitrado um sistema de coordenadas local xyz (letras minúsculas conforme Figura 17) para facilitar a formulação do elemento finito, onde a origem das coordenadas é coincidente com o nó 1 e o eixo  $x$  coincidente com eixo axial da barra. O elemento finito será exatamente o mesmo que a barra elástica já apresentada. O sistema de equações matricial será a (46) exatamente igual a (29).

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

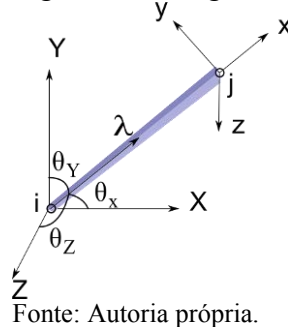


É possível realizar esse mesmo processo para todas as outras barras e obter um sistema de coordenadas locais para cada elemento e um sistema de equações matriciais para cada elemento. Porém para montar o sistema global é necessário converter cada sistema de coordenadas local no sistema de coordenadas global. Essa conversão é feita pela matriz transformada.

### 2.6.2.2 Matriz transformada

Na Figura 18 é exibida uma barra de comprimento  $L$  com sistema de coordenadas global e local,  $\lambda$  é um vetor unitário com mesma direção da barra,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$  são os ângulos formados por  $\lambda$  em relação ao sistema global (estes ângulos também são conhecidos como ângulos diretores),  $i$  e  $j$  são os nós da barra.

Figura 18 – Ângulos diretores de um elemento.



Os elementos finitos são definidos no sistema de coordenadas pelos nós. As coordenadas dos nós  $i$  e  $j$  respectivamente são  $(X_i, Y_i, Z_i)$  e  $(X_j, Y_j, Z_j)$ . O comprimento  $L$  do vetor formado pelos nós  $i$  e  $j$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (47)$$

O vetor unitário  $\lambda$  é definido por:

$$\lambda = \frac{1}{L} [(X_j - X_i)\vec{i} + (Y_j - Y_i)\vec{j} + (Z_j - Z_i)\vec{k}] = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k} \quad (48)$$

Onde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são os vetores unitários do sistema de coordenadas globais com mesma direção de X, Y e Z respectivamente. Portanto:

$$\cos \theta_X = \lambda \cdot \vec{i} = \frac{(X_j - X_i)}{L} = C_X \quad (49)$$

$$\cos \theta_Y = \lambda \cdot \vec{j} = \frac{(Y_j - Y_i)}{L} = C_Y \quad (50)$$

$$\cos \theta_Z = \lambda \cdot \vec{k} = \frac{(Z_j - Z_i)}{L} = C_Z \quad (51)$$

As equações acima são conhecidas como cossenos diretores.

Considerando  $u_i$  e  $u_j$  deslocamentos nodais no sistema de coordenadas local, com a mesma direção de  $x$  do sistema de coordenadas local. Em termos de cosseno diretor  $u_i$  e  $u_j$  são:

$$u_i = U_{Xi} \cos \theta_X + U_{Yi} \cos \theta_Y + U_{Zi} \cos \theta_Z \quad (52)$$

$$u_j = U_{Xj} \cos \theta_X + U_{Yj} \cos \theta_Y + U_{Zj} \cos \theta_Z \quad (53)$$

Na forma matricial (52) e (53):

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \\ U_{Xj} \\ U_{Yj} \\ U_{Zj} \end{Bmatrix} \quad (54)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z \end{bmatrix} \quad (55)$$

A matriz [T] é a matriz transformada, que converte o vetor deslocamento do sistema de coordenadas local para o global.

Fazendo as devidas substituições de (55) e (30) em (29):

$$k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \\ U_{Xj} \\ U_{Yj} \\ U_{Zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (56)$$

Multiplicando ambos os lados do sistema das equações pela transposta da matriz T, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_X & 0 \\ \cos \theta_Y & 0 \\ \cos \theta_Z & 0 \\ 0 & \cos \theta_X \\ 0 & \cos \theta_Y \\ 0 & \cos \theta_Z \end{bmatrix} k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \\ U_{Xj} \\ U_{Yj} \\ U_{Zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_X & 0 \\ \cos \theta_Y & 0 \\ \cos \theta_Z & 0 \\ 0 & \cos \theta_X \\ 0 & \cos \theta_Y \\ 0 & \cos \theta_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (57)$$

$$[T]^T k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \\ U_{Xj} \\ U_{Yj} \\ U_{Zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \cos \theta_X \\ f_i \cos \theta_Y \\ f_i \cos \theta_Z \\ f_j \cos \theta_X \\ f_j \cos \theta_Y \\ f_j \cos \theta_Z \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Sabe-se que:

$$F_{Xi} = f_i \cos \theta_X \quad (59)$$

$$F_{Yi} = f_i \cos \theta_Y \quad (60)$$

$$F_{Zi} = f_i \cos \theta_Z \quad (61)$$

$$F_{Xj} = f_j \cos \theta_X \quad (62)$$

$$F_{Yj} = f_j \cos \theta_Y \quad (63)$$

$$F_{Zj} = f_j \cos \theta_Z \quad (64)$$

Onde  $F_{Xi}$ ,  $F_{Yi}$  e  $F_{Zi}$  são as forças do nó  $i$  nos sistemas de coordenadas globais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  respectivamente, e  $F_{Xj}$ ,  $F_{Yj}$  e  $F_{Zj}$  são as forças no nó  $j$  em nos sistemas de coordenadas globais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  respectivamente.

Fazendo as devidas substituições na equação (57):

$$[T]^T k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \\ U_{Xj} \\ U_{Yj} \\ U_{Zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Zi} \\ F_{Xj} \\ F_{Yj} \\ F_{Zj} \end{Bmatrix} \quad (65)$$

A matriz de rigidez global após a multiplicação pela matriz T e transposta de T, será:

$$[T]^T k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [T] = k_e \begin{bmatrix} C_X^2 & C_X C_Y & C_X C_Z & -C_X^2 & -C_X C_Y & -C_X C_Z \\ C_X C_Y & C_Y^2 & C_Y C_Z & -C_X C_Y & -C_Y^2 & -C_Y C_Z \\ C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 & -C_X C_Z & -C_Y C_Z & -C_Z^2 \\ -C_X^2 & -C_X C_Y & -C_X C_Z & C_X^2 & C_X C_Y & C_X C_Z \\ -C_X C_Y & -C_Y^2 & -C_Y C_Z & C_X C_Y & C_Y^2 & C_Y C_Z \\ -C_X C_Z & -C_Y C_Z & -C_Z^2 & C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 \end{bmatrix} = [K_e] \quad (66)$$

O sistema de equações lineares de um elemento finito barra elástica no sistema global será:

$$k_e \begin{bmatrix} C_X^2 & C_X C_Y & C_X C_Z & -C_X^2 & -C_X C_Y & -C_X C_Z \\ C_X C_Y & C_Y^2 & C_Y C_Z & -C_X C_Y & -C_Y^2 & -C_Y C_Z \\ C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 & -C_X C_Z & -C_Y C_Z & -C_Z^2 \\ -C_X^2 & -C_X C_Y & -C_X C_Z & C_X^2 & C_X C_Y & C_X C_Z \\ -C_X C_Y & -C_Y^2 & -C_Y C_Z & C_X C_Y & C_Y^2 & C_Y C_Z \\ -C_X C_Z & -C_Y C_Z & -C_Z^2 & C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \\ U_{Xj} \\ U_{Yj} \\ U_{Zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Zi} \\ F_{Xj} \\ F_{Yj} \\ F_{Zj} \end{Bmatrix} \quad (67)$$

A matriz de rigidez agora está maior. Ela indica 6 graus de liberdade por elemento, cada nó pode se deslocar em três direções.

## 2.7 ELEMENTO VIGA

Será feito a formulação do elemento viga por método direto.

### 2.7.1 Formulação do elemento viga plana

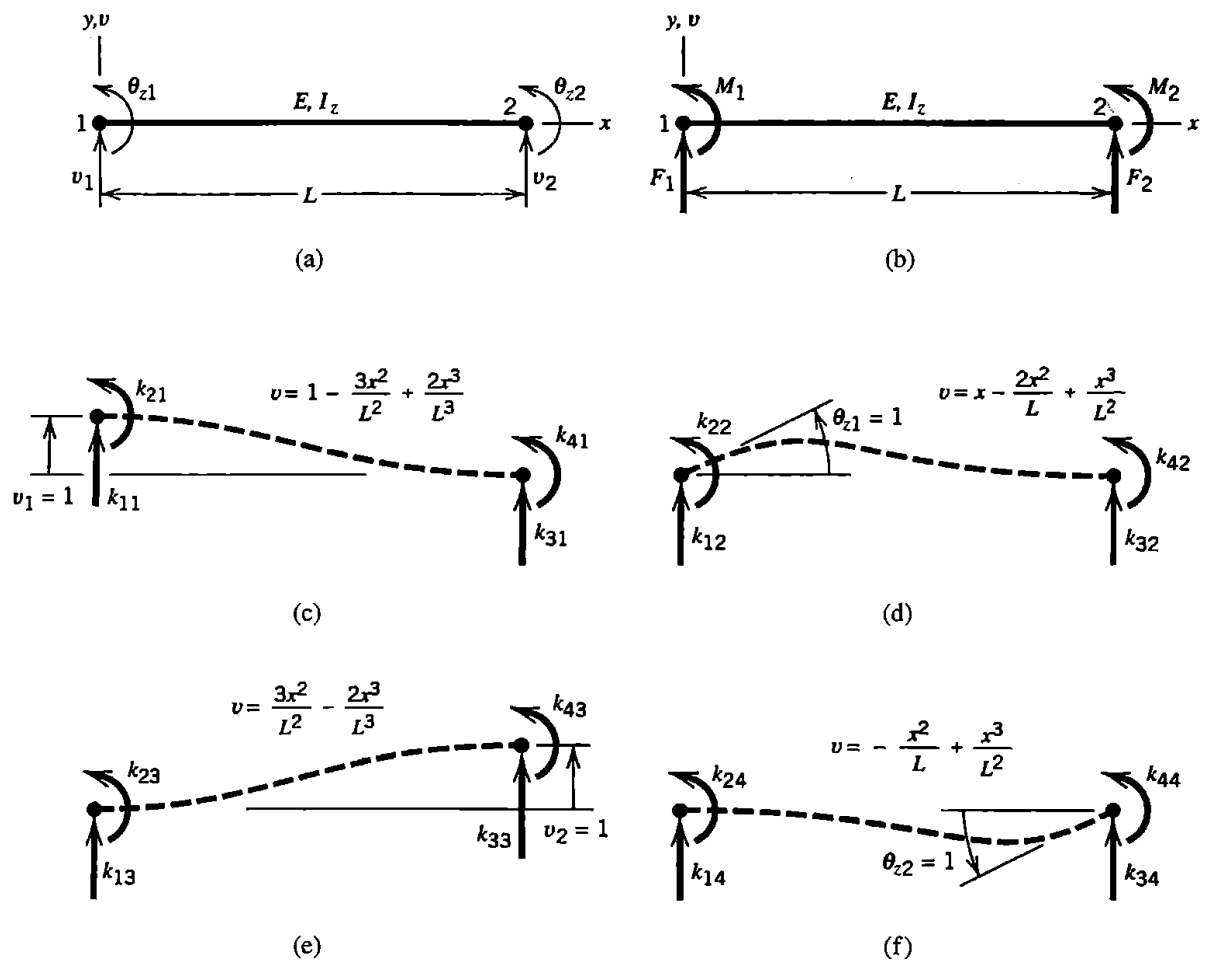
O elemento viga plana apresenta esforço cortante e momento fletor. Este elemento possui dois nós por elemento e cada nó possui dois graus de liberdade.

A Figura 19 apresenta o elemento viga plana com os graus de liberdade em cada nó, carregamentos envolvidos, possíveis deslocamentos (translação e rotação) e equações de deslocamento de acordo com a teoria da viga (formalmente conhecida como teoria da viga Euler-Bernoulli). A deformação cisalhante transversa é descrita pela teoria de viga de Timoshenko mais utilizada em análises de vibração (COOK, 1995).

De acordo com AZEVEDO (2003) a formulação do elemento finito por Euler-Bernoulli de uma viga considera-se que as secções se mantêm planas e normais ao eixo da barra após a deformação, deste modo não é considerada a deformação devida ao corte. Este trabalho utilizou a formulação por Euler-Bernoulli.

A Figura 19 (a) descreve o elemento viga no plano xy e seus graus de liberdade nodal; a Figura 19 (b) carregamentos associados com os respectivos graus de liberdade nodal; e a Figura 19 (c-f) as linhas são o deslocamento devido a flexão associada com a atividade em torno de cada grau de liberdade, as equações para  $v=v(x)$  são obtidas pela teoria elementar da viga.

Figura 19 – Formulação do elemento viga



Fonte: COOK, 1995.

Está sendo desconsiderada os carregamentos e deslocamentos na direção axial para construção da matriz de rigidez do elemento. A matriz de rigidez para o elemento viga plana será 4x4. A coluna  $j$  da matriz pode ser encontrada associando-a com os carregamentos nodais com o valor unitário do grau de liberdade  $j$  e os demais deslocamentos o valor zero, no vetor deslocamento. A obtenção de  $v_1$  calcula-se o carregamento nodal correspondente a Figura 19 - c. Os carregamentos serão chamados de  $k_{11}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{31}$ , e  $k_{41}$  que serão respectivamente os valores da linha 1, 2, 3 e 4 na coluna 1 da matriz de rigidez  $[k]$ . Os deslocamentos e carregamentos estão indicados no mesmo sentido e direção e arbitrados positivos. Para obter  $k_{11}$  e  $k_{21}$ , considerando a Figura 19 – c, utiliza-se equações elementares da teoria de viga, esta é considerada uma viga em balanço fixada no nó 2 e no nó 1 possui uma força  $k_{11}$  e momento  $k_{21}$  no qual  $v_1=1$  e  $\theta_{z1}=0$  (COOK 1995).

Então:

$$v_1 = 1: \quad \frac{k_{11}L^3}{3EI_z} - \frac{k_{21}L^2}{2EI_z} = 1 \quad (68)$$

$$\theta_1 = 0: \quad \frac{k_{11}L^2}{2EI_z} + \frac{k_{21}L}{EI_z} = 0 \quad (69)$$

Resolvendo as equações (70) e (71) encontra-se:

$$k_{11} = \frac{12EI_z}{L^3} \quad (70)$$

$$k_{21} = \frac{6EI_z}{L^2} \quad (71)$$

Conhecendo  $k_{11}$  e  $k_{22}$  pode-se encontrar  $k_{31}$  e  $k_{42}$ . Somando as forças na direção  $y$  e momentos em torno do nó 2, tem-se:

$$k_{11} + k_{31} = 0 \quad (72)$$

$$k_{21} + k_{41} - k_{11}L = 0 \quad (73)$$

Combinando as equações (70) e (71) com (72) e (73) encontra-se:

$$k_{31} = -\frac{12EI_z}{L^3} \quad (74)$$

$$k_{41} = \frac{6EI_z}{L^2} \quad (75)$$

De modo análogo para as outras situações da Figura 19 tem-se a matriz de rigidez para o elemento viga.

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (76)$$

O sistema de equações do elemento finito viga plana é:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^3} & \frac{4EI_z}{L^2} & -\frac{6EI_z}{L^3} & \frac{2EI_z}{L^2} \\ \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^3} & \frac{2EI_z}{L^2} & -\frac{6EI_z}{L^3} & \frac{4EI_z}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (77)$$

Considerando uma viga com esforços e deslocamentos axiais tem-se uma combinação das equações (46) com (77) tem-se o sistema de equações para o elemento finito viga plana com esforços axiais:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{v1} \\ m_1 \\ f_{u2} \\ f_{v2} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (78)$$

Os valores  $f_{u1}$ ,  $f_{u2}$ ,  $u_1$  e  $u_2$  são esforços e deslocamentos axiais nos respectivos nós, já  $f_{v1}$ ,  $f_{v2}$ ,  $v_1$  e  $v_2$  são esforços e deslocamentos transversais nos respectivos nós.

O elemento viga foi formulado para um sistema local, em casos que o elemento se encontra em posição diferente do alinhamento axial com o eixo x, do sistema de coordenada xy, utiliza-se uma matriz de transformação [T], análogo ao que ocorreu com elemento treliça.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_y & \cos \theta_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta_y & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

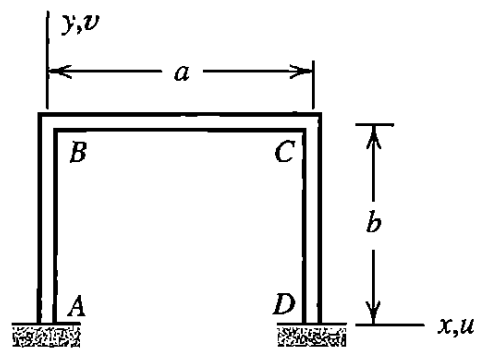
$$[K] = [T]^T [k] [T] \quad (80)$$



### 2.7.2 Pórtico plano

De acordo com Hutton (2004) quando elementos viga plana com esforços axiais estão conectados por juntas não articuladas (portanto oferecem uma resistência a flexão) e os elementos não estão colineares, estas estruturas são denominadas pórticos planos (Figura 20).

Figura 20 – Pórtico plano.



Fonte: COOK, 1995.

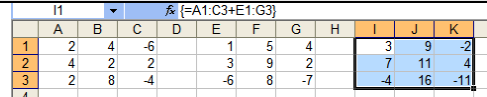
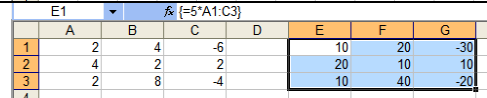
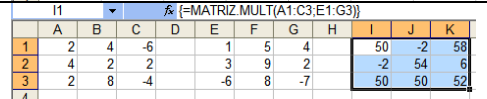
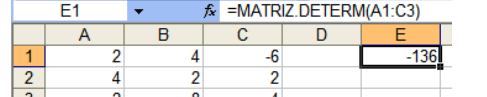
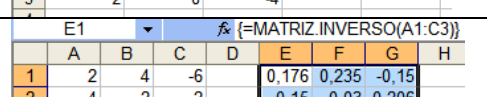
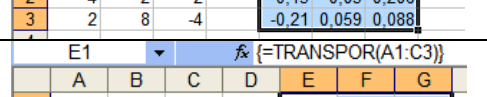
### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

#### 3.1 RECURSOS DO EXCEL

O Excel é capaz de trabalhar com matrizes e realiza algumas operações matriciais como: inversão de matriz, determinante, transposta, soma, produto escalar de um número e multiplicação de matrizes. Isto torna o Excel um software capacitado para o uso do MEF.

Cada linha e coluna das células do Excel podem ser consideradas linhas e colunas de uma matriz. O Quadro 1 apresenta algumas operações que podem ser feitas no Excel em português.

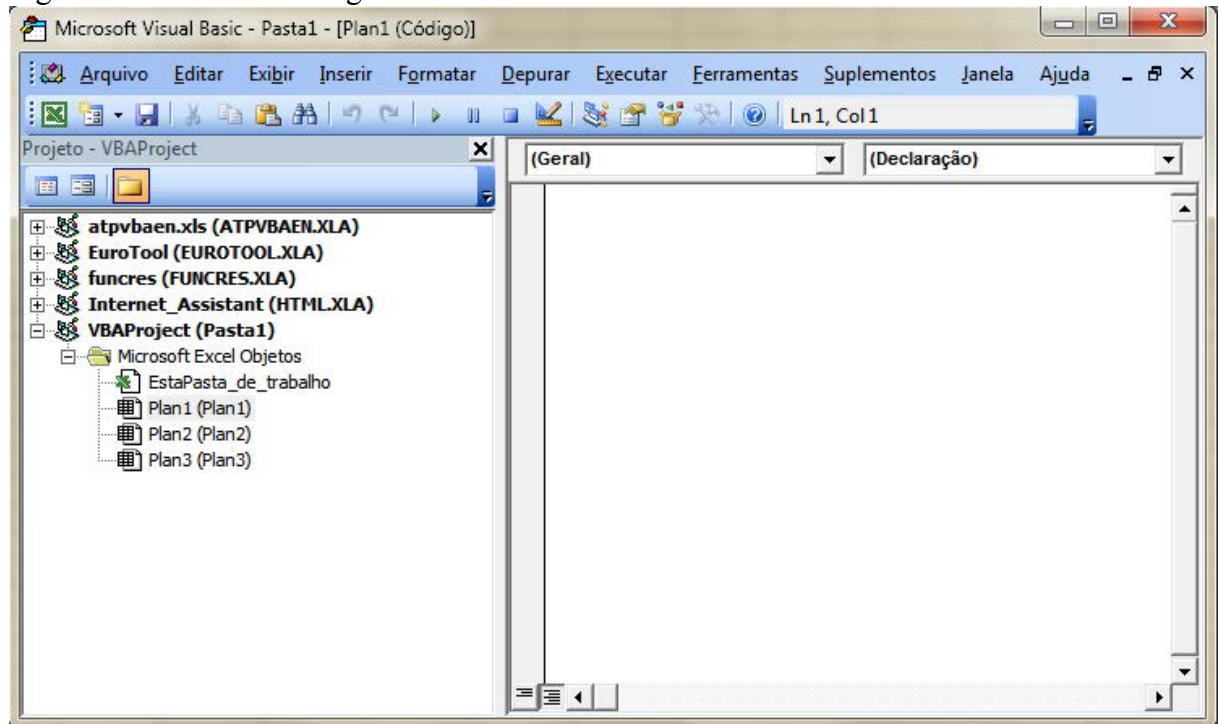
Quadro 1 – Principais funções do Excel para cálculo matricial.

Operação	Barra de fórmulas	Exemplo
Soma	=Células1+Células2	
Produto Escalar	=Escalar*Células	
Produto Matricial	=MATRIZ.MULT(Células1;Células2)	
Determinante	=MATRIZ.DETERM(Células)	
Matriz Inversa	=MATRIZ.INVERSO(Células)	
Transposta	=TRANSPOR(Células)	

Como pôde ser visto no capítulo 2 a matriz de rigidez da treliça espacial, para um único elemento em três dimensões com dois nós, exige uma matriz de rigidez global de ordem 6x6. Para um caso onde existem 4 nós a matriz global exigida seria da ordem 3\*nósx3\*nós ou 12x12. Escrever manualmente estas matrizes e modificá-las caso necessário é totalmente inviável, demorada e muito suscetível a erros por parte do usuário, para casos deste tipo onde uma tarefa repetitiva é exigida o Excel tem uma excelente ferramenta o VBA, que permite a criação de macros. Macro é um pequeno programa onde realiza tarefas pré-estabelecidas, ela pode ser personalizada e otimizada caso o usuário conheça a linguagem de programação nativa. A linguagem de programação usada é o VBA, baseado no *Visual Basic* esta linguagem é voltada,

como o próprio nome diz, para aplicações, está presente em vários softwares e em quase todos os aplicativos do Microsoft Office. O ambiente de programação VBA está representado na Figura 21.

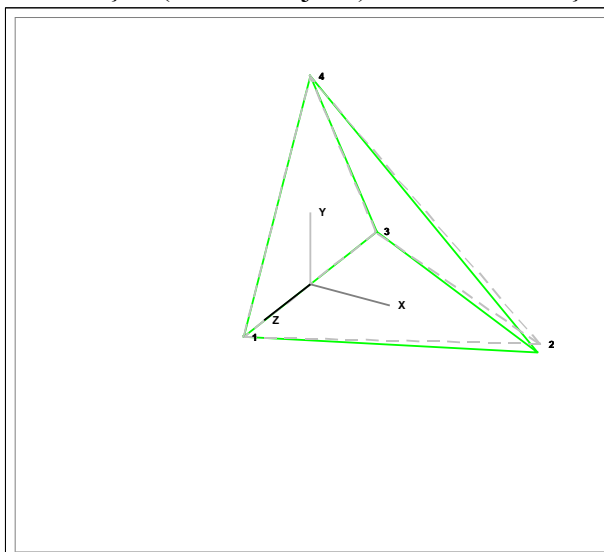
Figura 21 – Janela de código do Visual Basic



Fonte: Autoria própria.

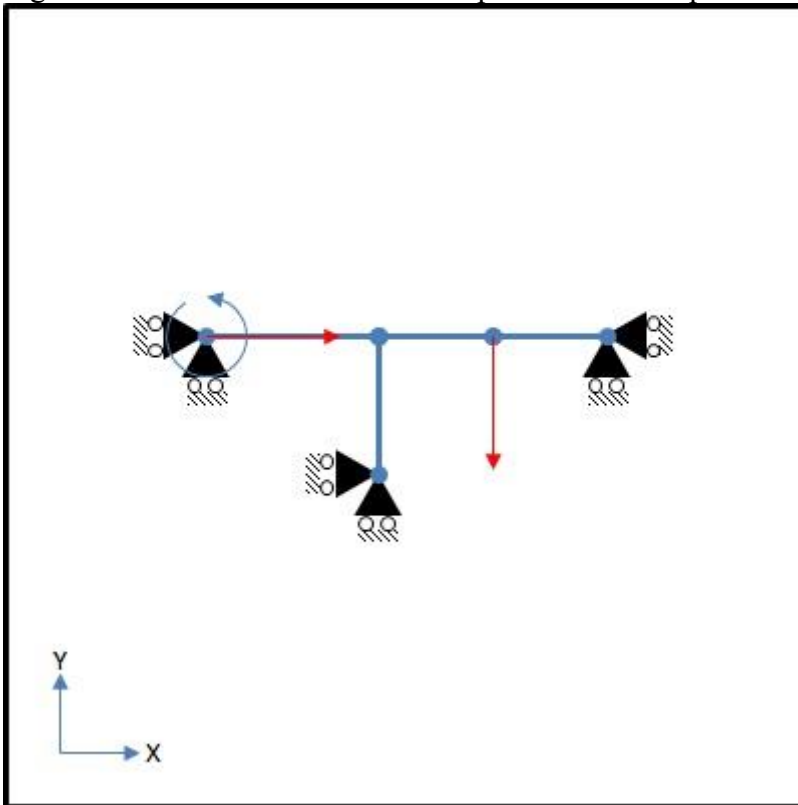
O Excel apresenta alguns recursos visuais como o gráfico (Figura 22) e o FORMAS (Figura 23).

Figura 22 – Treliça desenhada no gráfico de dispersão com representação sem deformação (linha tracejada) e com deformação (linha verde).



Fonte: Autoria própria.

Figura 23 – Ferramenta FORMAS representando um pórtico e seus esforços.



Fonte: Autoria própria.

As versões do Excel anteriores a versão 2007 (conhecida também como versão 14.0) são incapazes de calcular matrizes inversas maiores que 52x52 através da função “Matriz.Inverso” do Excel (<http://support.microsoft.com/kb/166342>). Para contornar por meio do VBA é possível utilizar e criar um algoritmo para inversão de matrizes quando se utiliza versões do Excel anteriores a 14.0. O código desenvolvido é o Código Fonte 1.

#### Código Fonte 1 - Inversão de Matriz.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
```

```
Dim antes As Variant
antes = Now
```

```
Dim i As Long
Dim j As Long
Dim k As Long
Dim a As Double
Dim celulas As Variant
Dim ordem As Integer
Dim matriz() As Variant
Dim inversa() As Double
```

```
'O comando abaixo exibe um InputBox para selecionar a matriz a ser invertida e armazena na variável celulas
Set celulas = Application.InputBox("Selecione as células da matriz a ser invertida?","Inversa", Type:=8)
```

```
'verifica o tamanho da matriz e se a célula é quadrada
If celulas.Columns.Count = celulas.Rows.Count Then
    ordem = celulas.Columns.Count 'ordem da matriz
```

```

Else
    MsgBox "A matriz não é quadrada."
    Exit Sub
End If

ReDim matriz(ordem, ordem)
ReDim inversa(ordem, ordem)
matriz = celulas.Value2 'Armazena os valores de celulas num array

Application.ScreenUpdating = False 'Este comando desativa a atualização da tela
Application.Calculation = xlManual 'Este comando desativa o cálculo automático das células
Application.EnableEvents = False 'Este comando desativa os eventos do Excel

'laço de repetição que cria uma matriz identidade e armazena na variável inversa
For i = 1 To ordem
    For j = 1 To ordem
        If i = j Then
            inversa(i, j) = 1
        Else
            inversa(i, j) = 0
        End If
    Next j
Next i

'laço de repetição para fazer a triangulação inferior da matriz
For k = 1 To ordem
    If matriz(k, k) <> 0 Then
        For i = k To ordem
            If matriz(i, k) <> 0 And matriz(i, k) <> 1 Then
                a = matriz(i, k)
                For j = 1 To ordem
                    matriz(i, j) = matriz(i, j) / a
                    inversa(i, j) = inversa(i, j) / a
                Next j
            End If
        Next i
        For i = k + 1 To ordem
            If matriz(i, k) <> 0 Then
                For j = 1 To ordem
                    matriz(i, j) = matriz(i, j) - matriz(k, j)
                    inversa(i, j) = inversa(i, j) - inversa(k, j)
                Next j
            End If
        Next i
    Else
        MsgBox "Não existe Matriz Inversa."
        Exit Sub
    End If
Next k

'laço de repetição para fazer a triangulação superior da matriz
For k = 1 To ordem - 1
    For i = 1 To ordem - 1 - k
        If matriz(i, ordem - k) <> 0 Then
            a = matriz(i, ordem - k)
            For j = 1 To ordem
                matriz(i, j) = matriz(i, j) - a * matriz(ordem - k, j)
                inversa(i, j) = inversa(i, j) - a * inversa(ordem - k, j)
            Next j
        End If
    Next i
Next k

'limpa as informações da planilha Plan2
Worksheets("Plan2").Cells.Clear

'laço de repetição que transcreve a matriz para a planilha Plan2
For i = 1 To ordem
    For j = 1 To ordem
        Worksheets("Plan2").Cells(i, j) = inversa(i, j)
    Next j

```

```
Next i
Application.EnableEvents = True
Application.Calculation = xlAutomatic
Application.ScreenUpdating = True

MsgBox "Cálculo concluído. Tempo para achar a solução foi de " & Minute(Now - antes) & ":" & Second(_
Now - antes)

End Sub
```

Após todo o conhecimento desenvolvido o resultado final é a planilha representada na Figura 24, que irá calcular treliças espaciais e planas. Algumas células estão ocultas para facilitar a visualização das informações.

Figura 24 – Tela dos dados iniciais.

The screenshot shows a software interface for data entry. On the left, there is a control panel with the following sections:

- CONTROLES:** Includes buttons for 'SOLUÇÃO' and 'PLOTAR'.
- TRANSLAÇÃO:** Input fields for X (100), Y (102), and Z (100), each with left and right arrow buttons.
- ROTAÇÃO:** Input fields for X (0), Y (0), and Z (0), each with left and right arrow buttons.
- ZOOM:** Input fields for 'Tela' (300) and 'XYZ' (32), each with left and right arrow buttons.
- Other fields:** 'Nº de elementos' (0) and 'Nº de nós' (0).

The main workspace is a large grid with the following columns:

- Nós:** Columns 1 through 30, shaded grey.
- Fz, Fy, Fx:** Columns for force components.
- Uz, Uy, Ux:** Columns for displacement components.
- Elementos:** Column 31, shaded light grey.
- Nó, X, Y, Z:** Columns for node coordinates.
- Área, Modulo f, Comprimento L:** Columns for element properties.
- AL, AM, k:** Columns for additional parameters.

At the bottom, there is a toolbar with buttons for 'Dados', 'Matriz', 'Resultado', and a zoom icon.

Fonte: Autoria própria.

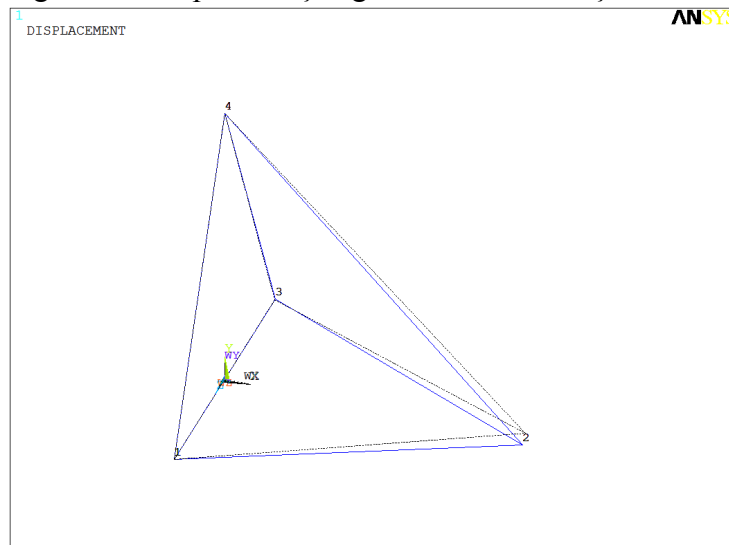
As informações são adicionadas ou modificadas nas células de cor branca. As células cinza já possuem fórmulas, para automatizar o modelamento da treliça.

### 3.2 EQUIPAMENTO E SOFTWARES

O computador utilizado para o desenvolvimento destas planilhas possui um processador Intel i5 com 1.6 GHz, 4Gb de memória RAM, o sistema operacional é o *Microsoft Windows 7* como Excel 2013 instalado (última versão lançada até o presente momento da realização deste trabalho).

A validação de resultados foi feita comparando-os com o software comercial ANSYS Figura 25. Os elementos do ANSYS utilizados foram LINK180 para comparação da treliça plana e espacial e o BEAM3 para comparação da viga e pórtico. Este é um software já consagrado por usuários do MEF.

Figura 25 - Representação gráfica da deformação via ANSYS.



Fonte: Autoria própria.



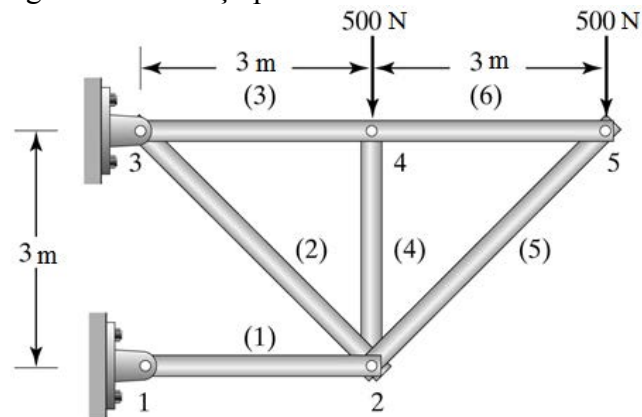
#### 4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Para demonstrar o funcionamento da planilha são apresentados alguns exemplos, e é feita uma comparação dos resultados obtidos com o software comercial ANSYS.

##### Exemplo 1.

A Figura 26 apresenta uma treliça plana de suporte de sacada. Suas dimensões e os carregamentos empregados são exibidas na Figura 25, todos os elementos possuem a área da seção transversal de  $0,0008 \text{ m}^2$  e módulo de elasticidade  $E=210 \text{ GPa}$ .

Figura 26 – Treliça plana.



Fonte: Adaptado de MOAVENI, 2003.

A planilha não é capaz de considerar as unidades dimensionais dos dados, portanto, elas têm que ser compatíveis.

Transcrevendo as informações na planilha ela ficará conforme Figura 27.

Figura 27 – Informações do Exemplo 1 na planilha do Excel.

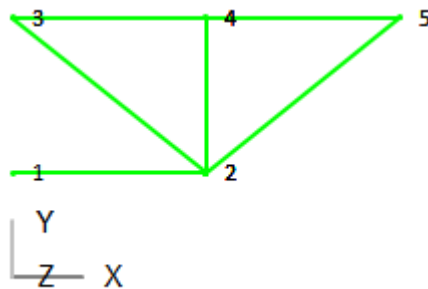
CONTROLES										Dados de Nodos e Elementos																
SOLUÇÃO PLOTAR										Nós	x	y	z	Fx	Fy	Fz	UX	UY	UZ	Elementos	Nó i	Nó j	Área	Modulo E	Comprimento L	k
TRANSLAÇÃO X: 100, Y: 102, Z: 100 ROTACÃO X: 0, Y: 0, Z: 0 ZOOM Treliça: 300, XYZ: 32 Nº de elementos: 6, Nº de nós: 5										Nó 1	0	0	0				0	0	0	Elemento 1	1	2	8,00E-04	2,10E+11	3	56000000
										Nó 2	3	0	0							Elemento 2	2	3	8,00E-04	2,10E+11	4,242640687	39597980
										Nó 3	0	3	0				0	0	0	Elemento 3	2	4	8,00E-04	2,10E+11	3	56000000
										Nó 4	3	3	0		-500					Elemento 4	2	5	8,00E-04	2,10E+11	4,242640687	39597980
										Nó 5	6	3	0		-500					Elemento 5	3	4	8,00E-04	2,10E+11	3	56000000
																				Elemento 6	4	5	8,00E-04	2,10E+11	3	56000000

Fonte: Autoria própria.

Para aplicar as condições de contorno basta digitar 0 (zero) abaixo das colunas UX, UY e UZ nos nós e direções em que há restrição de movimento. Neste caso, uma treliça plana a movimentação dos nós na direção Z são restringidos.

Para verificar se a treliça está conforme representada na Figura 26 clique em “PLOTAR”. Será exibido um gráfico conforme a Figura 28.

Figura 28 – Representação gráfica da treliça do Exemplo 1.



Fonte: Autoria própria.

As informações foram inseridas corretamente, agora basta clicar em “Solução”. Na aba “Matriz” serão exibidas as matrizes envolvidas para realizar os cálculos da solução, conforme Figura 29.



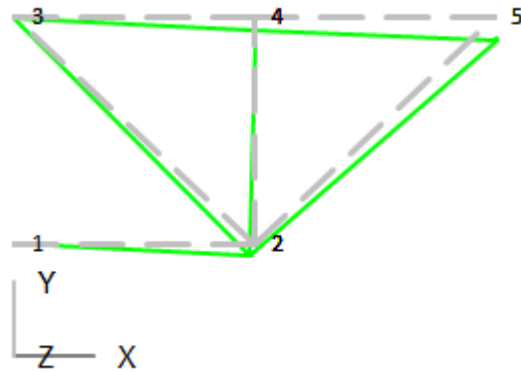
Figura 30 – Resultados do Exemplo 1.

CONTROLE																	
PLOTAR																	
TRANSLAÇÃO																	
X	Y	Z															
92	109	100															
ROTAÇÃO																	
X	Y	Z															
330	30	0															
ZOOM																	
Geral	39																
XYZ	25																
Deform.	0,02																
Nós	UX	UY	UZ	FX	FY	FZ	Elementos	Nó i	Nó j	Area	Modulo E	Comprimento L	k	Deslocamento	Deformação	Força Axial	Tensão Normal
1	0	0	0	1500	0	0	1	1	2	0,0008	2,1E+11	3	56000000	-2,67857E-05	-8,92857E-06	-1500	-1875000
2	-2,67857E-05	-7,7E-05	0	0	0	0	2	2	3	0,0008	2,1E+11	4,242640687	39597980	3,57143E-05	8,41794E-06	1414,213562	1767766,953
3	0	0	0	-1500	1000	0	3	2	4	0,0008	2,1E+11	3	56000000	-8,92857E-06	-2,97619E-06	-500	-625000
4	8,92857E-06	-8,9E-05	0	0	9,09495E-13	0	4	2	5	0,0008	2,1E+11	4,242640687	39597980	-1,78571E-05	-4,20897E-06	-707,1067812	-83383,4785
5	1,78571E-05	-0,00015	0	0	0	0	5	3	4	0,0008	2,1E+11	3	56000000	8,92857E-06	2,97619E-06	500	625000
6							6	4	5	0,0008	2,1E+11	3	56000000	8,92857E-06	2,97619E-06	500	625000

Fonte: Autoria própria.

Para ter uma visualização aproximada de como será a deformação da estrutura clique em “Plotar”. Será exibido um gráfico conforme a Figura 31.

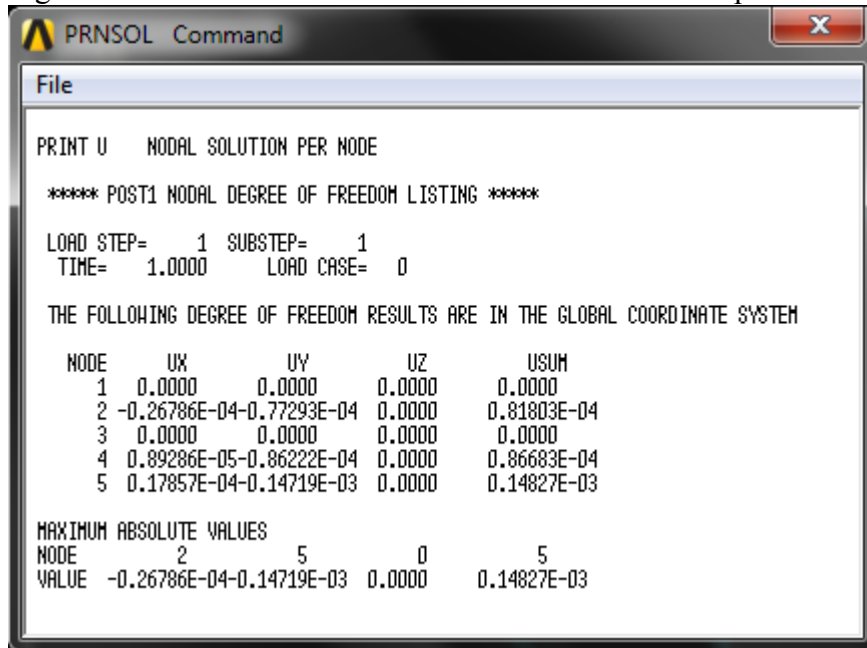
Figura 31 - Representação gráfica da deformação do Exemplo 1.



Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 32, 33 e 34 são apresentados os resultados obtidos via ANSYS.

Figura 32 – Deslocamentos nodais via ANSYS do Exemplo 1.

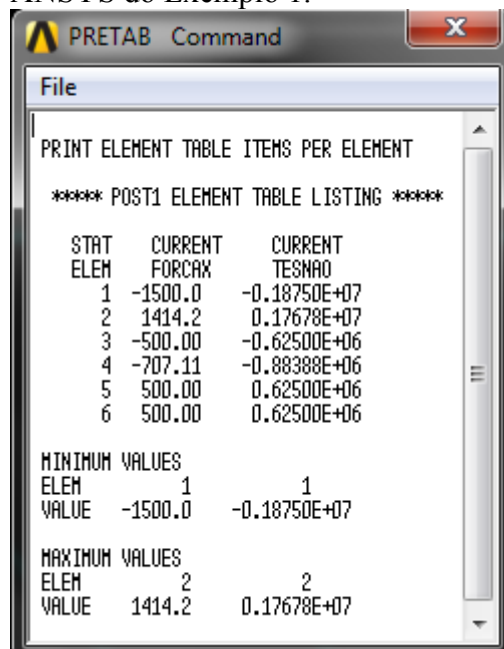


```

PRNSOL Command
File
PRINT U  NODAL SOLUTION PER NODE
**** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING ****
LOAD STEP= 1  SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000  LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM
NODE      UX          UY          UZ          USUM
1  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
2 -0.26786E-04-0.77293E-04  0.0000  0.81803E-04
3  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
4  0.89286E-05-0.86222E-04  0.0000  0.86683E-04
5  0.17857E-04-0.14719E-03  0.0000  0.14827E-03
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      2          5          0          5
VALUE -0.26786E-04-0.14719E-03  0.0000  0.14827E-03
  
```

Fonte: Autoria própria.

Figura 33 – Forças axiais e tensões normais em cada elemento via ANSYS do Exemplo 1.



```

PRETAB Command
File
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT
**** POST1 ELEMENT TABLE LISTING ****
STAT      CURRENT      CURRENT
ELEM      FORCAX      TESNAO
1  -1500.0  -0.18750E+07
2  1414.2  0.17678E+07
3  -500.00  -0.62500E+06
4  -707.11  -0.88388E+06
5  500.00  0.62500E+06
6  500.00  0.62500E+06
MINIMUM VALUES
ELEM      1          1
VALUE -1500.0  -0.18750E+07
MAXIMUM VALUES
ELEM      2          2
VALUE 1414.2  0.17678E+07
  
```

Fonte: Autoria própria.

Figura 34 – Reações dos nós via ANSYS do Exemplo 1.

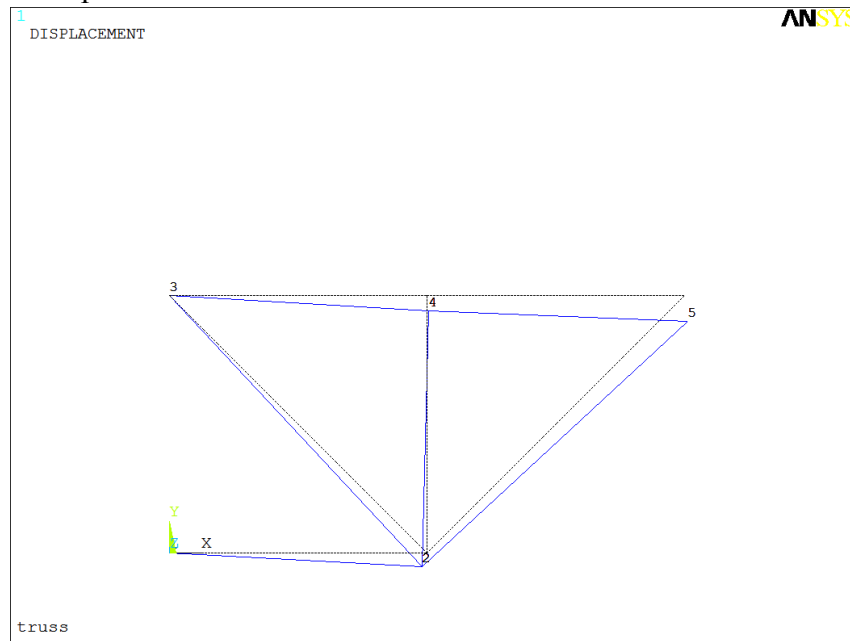
```

PRRSOL Command
File
PRINT F REACTION SOLUTIONS PER NODE
**** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING ****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM
NODE FX FY FZ
1 1500.0 0.0000 0.0000
3 -1500.0 1000.0 0.0000
TOTAL VALUES
VALUE -0.45475E-12 1000.0 0.0000
  
```

Fonte: Autoria própria.

A Figura 35 apresenta uma imagem para facilitar a visualização da deformação.

Figura 35 – Representação gráfica da deformação via ANSYS do Exemplo 1.



Fonte: Autoria própria.

Para efeito de comparação as Tabelas 1, 2 e 3 apresentam os resultados obtidos pelo ANSYS e pela planilha e suas variações percentuais.

Tabela 1 – Reações ANSYS e Planilha do Exemplo 1.

Nós	ANSYS – Reações			Planilha – Reações			Variações (%)		
	FX	FY	FZ	FX	FZ	FZ	FX	FY	FZ
1	1500,0	0,0000	0,0000	1500,00	0,00	0,00	0	0	0
2	-	-	-	0,00	0,00	0,00	0	0	0
3	-1500,0	1000,0	0,0000	-1500,00	1000,00	0,00	0	0	0
4	-	-	-	0,00	0,00	0,00	0	0	0
5	-	-	-	0,00	0,00	0,00	0	0	0

Tabela 2 – Deslocamentos nodais ANSYS e Planilha do Exemplo 1.

Nós	ANSYS			Planilha			Variações (%)		
	UX	UY	UZ	UX	UY	UZ	UX	UY	UZ
1	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0E+00	0	0	0
2	-2,6786E-05	-7,7293E-05	0,0E+00	-2,6786E-05	-7,7293E-05	0,0E+00	0	0	0
3	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0E+00	0	0	0
4	8,9286E-06	-8,6222E-05	0,0E+00	8,9286E-06	-8,6222E-05	0,0E+00	0	0	0
5	1,7857E-05	-1,4719E-04	0,0E+00	1,7857E-05	-1,4719E-04	0,0E+00	0	0	0

Tabela 3 – Forças e tensões normais ANSYS e Planilha do Exemplo 1.

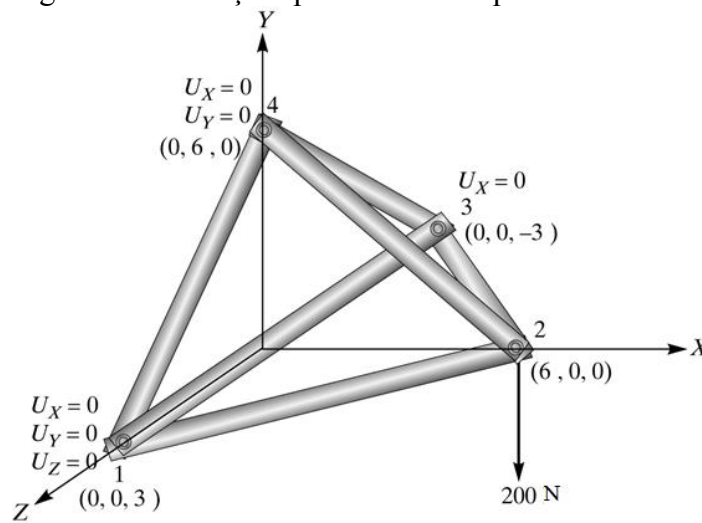
Elementos	ANSYS		Planilha		Variações (%)	
	Força Axial	Tensão Normal	Força Axial	Tensão Normal	Força Axial	Tensão Normal
1	-1500,00	-1875000,00	-1500,00	-1875000,00	0	0
2	1414,21	1767766,95	1414,21	1767766,95	0	0
3	-500,00	-625000,00	500,00	-625000,00	0	0
4	-707,11	-883883,48	-707,11	-883883,48	0	0
5	500,00	625000,00	-500,00	625000,00	0	0
6	500,00	625000,00	500,00	625000,00	0	0

## Exemplo 2.

Este exemplo apresenta a análise de uma treliça espacial.

A treliça espacial conforme a Figura 36 é submetida uma carga de 200 N no nó 2, seu módulo de elasticidade é de  $E=70$  GPa e área da seção de  $0,000156$  m<sup>2</sup>. Deseja-se obter a deflexão no nó 2.

Figura 36 – Treliça espacial do Exemplo 2.



Fonte: Adaptado de MOAVENI, 2003.

Digitar as informações fornecidas nas células correspondentes conforme as Tabela 4 e Tabela 5.

Tabela 4 – Dados do Exemplo 2.

Nós	X	Y	Z	FX	FY	FZ	UX	UY	UZ
1	0	0	3				0	0	0
2	6	0	0		-200				
3	0	0	-3				0		
4	0	6	0				0	0	

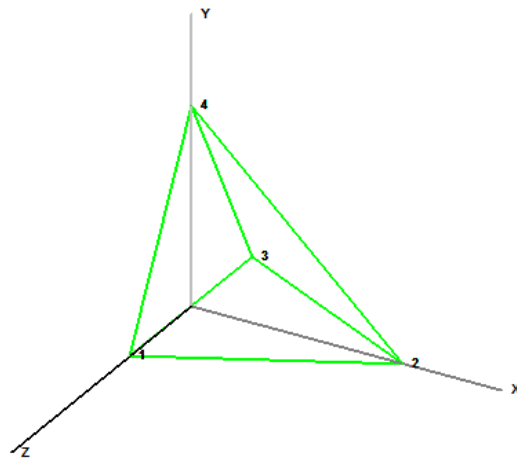
Tabela 5 - Dados do Exemplo 2.

Elementos	Nó i	Nó j	Área	Módulo E
1	1	2	1,56E-4	70E+9
2	2	3	1,56 E-4	70E+9
3	3	1	1,56 E-4	70E+9
4	1	4	1,56 E-4	70E+9
5	2	4	1,56 E-4	70E+9
6	3	4	1,56 E-4	70E+9

“Plotar” o gráfico para verificar se os elementos estão corretamente conectados.



Figura 37 - Representação gráfica da treliça espacial do Exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Os resultados obtidos na planilha e no ANSYS e suas respectivas variações percentuais são apresentados nas Tabelas 6, 7 e 8.

Tabela 6 – Resultados do Exemplo 2 (reações nodais).

Nós	ANSYS – Reações			Planilha – Reações			Variações (%)		
	FX	FY	FZ	FX	FY	FZ	FX	FY	FZ
1	100,00	0,00	0,00	100	0	0	0	0	0
2	-	-	-	-3,6E-15	0	0	0	0	0
3	100,00	-	-	100	0	-1,4E-14	0	0	0
4	-200,00	200	-	-200	200	0	0	0	0

Tabela 7 – Resultados do Exemplo 2 (deslocamentos nodais).

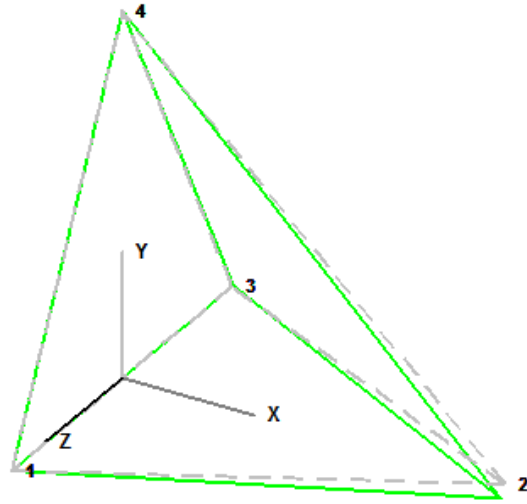
Nós	ANSYS – Reações			Planilha – Reações			Variações (%)		
	UX	UY	UZ	UX	UY	UZ	UX	UY	UZ
1	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0	0	0
2	-8,3656E-05	-3,9447E-04	-1,3736E-05	-8,3656E-05	-3,9447E-04	-1,3736E-05	0	0	0
3	0,0000E+00	1,3736E-05	-2,7473E-05	0,0000E+00	1,3736E-05	-2,7473E-05	0	0	0
4	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0	0	0

Tabela 8 - Resultados do Exemplo 2 (forças axiais e tensões normais).

Elementos	ANSYS		Planilha		Variações (%)	
	Força Axial	Tensão Normal	Força Axial	Tensão Normal	Força Axial	Tensão Normal
1	-111,80	-716688,45	-111,80	-716688,45	0	0
2	-111,80	-716688,45	-111,80	-716688,45	0	0
3	50,00	320512,82	50,00	320512,82	0	0
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0	0
5	282,84	1813094,31	282,84	1813094,31	0	0
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0	0

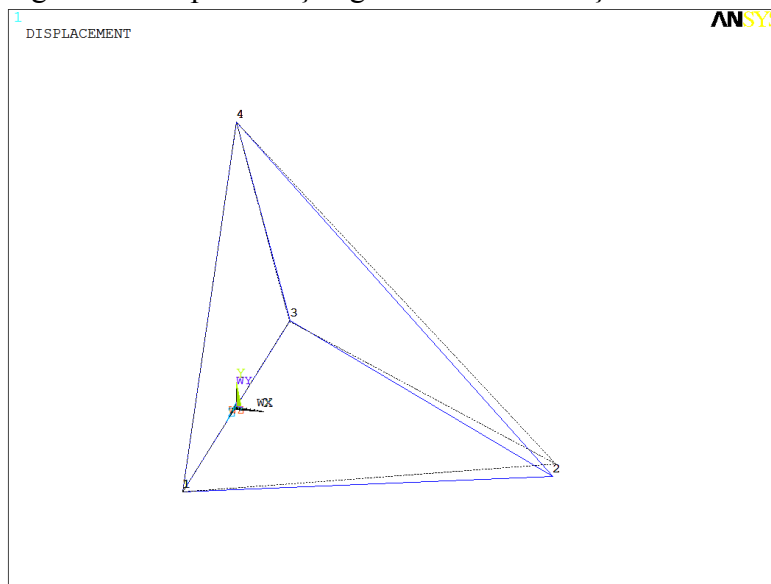
A representação gráfica da deformação é apresentada na Figura 38.

Figura 38 - Representação gráfica da deformação do Exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Figura 39 - Representação gráfica da deformação via ANSYS do Exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Neste exemplo surgiram alguns valores diferentes entre a planilha e o ANSYS, nos nós 2 e 3, as reações na planilha foram  $F_X = -3,6E-15$  N e  $F_Z = -1,4E-14$  N, respectivamente. Mas considerando estes valores são muito próximos dos valores obtidos no ANSYS (zero) pode-se dizer que não existe divergência.

O exemplo seguinte testa a capacidade da planilha calcular matrizes inversas maiores que  $52 \times 52$ , um limitante no Excel 2003 e versões anteriores.

### Exemplo 3.

As coordenadas da treliça espacial estão descritas no Quadro 2, os elementos são descritos no Quadro 3.

Quadro 2 – Coordenadas do Exemplo 3.

Nós	X	Y	Z	Nós	X	Y	Z
Nó 1	0	0	0	Nó 17	288	0	0
Nó 2	0	0	72	Nó 18	288	0	72
Nó 3	0	72	72	Nó 19	288	72	72
Nó 4	0	72	0	Nó 20	288	72	0
Nó 5	72	0	0	Nó 21	360	0	0
Nó 6	72	0	72	Nó 22	360	0	72
Nó 7	72	72	72	Nó 23	360	72	72
Nó 8	72	72	0	Nó 24	360	72	0
Nó 9	144	0	0	Nó 25	432	0	0
Nó 10	144	0	72	Nó 26	432	0	72
Nó 11	144	72	72	Nó 27	432	72	72
Nó 12	144	72	0	Nó 28	432	72	0
Nó 13	216	0	0	Nó 29	504	0	0
Nó 14	216	0	72	Nó 30	504	0	72
Nó 15	216	72	72	Nó 31	504	72	72
Nó 16	216	72	0	Nó 32	504	72	0

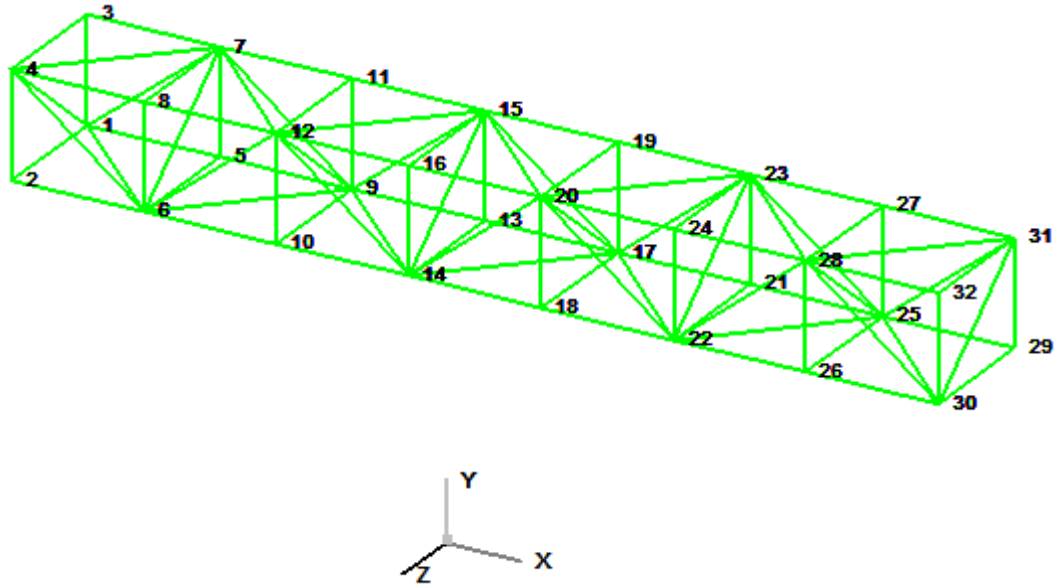
Quadro 3 – Elementos do Exemplo 3.

Elementos	Nó i	Nó j	Elementos	Nó i	Nó j	Elementos	Nó i	Nó j	Elementos	Nó i	Nó j
Elemento 1	1	2	Elemento 25	25	26	Elemento 49	12	16	Elemento 73	22	27
Elemento 2	2	3	Elemento 26	26	27	Elemento 50	16	20	Elemento 74	27	30
Elemento 3	3	4	Elemento 27	27	28	Elemento 51	20	24	Elemento 75	1	6
Elemento 4	4	1	Elemento 28	28	25	Elemento 52	24	28	Elemento 76	6	9
Elemento 5	5	6	Elemento 29	29	30	Elemento 53	28	32	Elemento 77	9	14
Elemento 6	6	7	Elemento 30	30	31	Elemento 54	3	7	Elemento 78	14	17
Elemento 7	7	8	Elemento 31	31	32	Elemento 55	7	11	Elemento 79	17	22
Elemento 8	8	5	Elemento 32	32	29	Elemento 56	11	15	Elemento 80	22	25
Elemento 9	9	10	Elemento 33	1	5	Elemento 57	15	19	Elemento 81	25	30
Elemento 10	10	11	Elemento 34	5	9	Elemento 58	19	23	Elemento 82	3	8
Elemento 11	11	12	Elemento 35	9	13	Elemento 59	23	27	Elemento 83	8	11
Elemento 12	12	9	Elemento 36	13	17	Elemento 60	27	31	Elemento 84	11	16
Elemento 13	13	14	Elemento 37	17	21	Elemento 61	1	8	Elemento 85	16	19
Elemento 14	14	15	Elemento 38	21	25	Elemento 62	8	9	Elemento 86	19	24
Elemento 15	15	16	Elemento 39	25	29	Elemento 63	9	16	Elemento 87	24	27
Elemento 16	16	13	Elemento 40	2	6	Elemento 64	16	17	Elemento 88	27	32
Elemento 17	17	18	Elemento 41	6	10	Elemento 65	17	24	Elemento 89	1	3
Elemento 18	18	19	Elemento 42	10	14	Elemento 66	24	25	Elemento 90	6	8
Elemento 19	19	20	Elemento 43	14	18	Elemento 67	25	32	Elemento 91	9	11
Elemento 20	20	17	Elemento 44	18	22	Elemento 68	3	6	Elemento 92	14	16
Elemento 21	21	22	Elemento 45	22	26	Elemento 69	6	11	Elemento 93	17	19
Elemento 22	22	23	Elemento 46	26	30	Elemento 70	11	14	Elemento 94	22	24
Elemento 23	23	24	Elemento 47	4	8	Elemento 71	14	19	Elemento 95	25	27
Elemento 24	24	21	Elemento 48	8	12	Elemento 72	19	22	Elemento 96	30	32

Nos nós 1, 2, 3 e 4 têm restrição nas três direções. Nos nós 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27 e 28 são submetidos a um carregamento  $F_Y = -250$  N. O módulo de elasticidade dos elementos é  $E = 70$  GPa e área da seção de  $0,0008$  m<sup>2</sup>.

A estrutura analisada é apresentada na Figura 40.

Figura 40 – Treliça espacial do Exemplo 3.



Fonte: Autoria própria.

Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 9, 10 e 11.

Tabela 9 - Resultados do Exemplo 3 (reações nodais).

Nós	ANSYS			Planilha			Variações (%)		
	FX	FY	FZ	FX	FY	FZ	FX	FY	FZ
1	5250	1500	1,26E-11	5250	1500	1,4552E-11	0	0	0
2	5250	0	0	5250	0	0	0	0	0
3	-5250	1500	-6,91E-12	-5250	1500	-1,5461E-11	0	0	0
4	-5250	0	0	-5250	0	0	0	0	0
5	-	-	-	0	0	0	0	0	0
6	-	-	-	3,63798E-12	0	1,5916E-12	0	0	0
7	-	-	-	0	1,819E-12	0	0	0	0
8	-	-	-	3,63798E-12	1,819E-12	9,0949E-13	0	0	0
9	-	-	-	-1,0914E-11	1,0914E-11	1,819E-12	0	0	0
10	-	-	-	-3,638E-12	0	0	0	0	0
11	-	-	-	2,50111E-12	-7,276E-12	-2,9559E-12	0	0	0
12	-	-	-	0	-3,638E-12	0	0	0	0
13	-	-	-	0	0	0	0	0	0
14	-	-	-	-3,638E-12	3,638E-11	-2,5011E-12	0	0	0
15	-	-	-	5,45697E-12	7,276E-12	0	0	0	0
16	-	-	-	1,45519E-11	-1,4552E-11	1,6371E-11	0	0	0
17	-	-	-	-1,4552E-11	1,4552E-11	-5,457E-12	0	0	0
18	-	-	-	1,81899E-12	0	1,819E-12	0	0	0
19	-	-	-	3,63798E-12	1,4552E-11	-1,819E-12	0	0	0
20	-	-	-	-1,0914E-11	1,4552E-11	2,7285E-12	0	0	0
21	-	-	-	-1,819E-12	0	0	0	0	0
22	-	-	-	2,91038E-11	4,3656E-11	-6,3665E-12	0	0	0
23	-	-	-	-1,819E-12	-1,4552E-11	0	0	0	0
24	-	-	-	2,00089E-11	-2,1828E-11	2,4102E-11	0	0	0

Tabela 9 - Resultados do Exemplo 3 (reações nodais).

25	-	-	-	-7,276E-12	7,276E-11	-7,7307E-12	0	0	0
26	-	-	-	-5,457E-12	0	-9,0949E-13	0	0	0
27	-	-	-	1,13687E-11	1,4552E-10	7,7307E-12	0	0	0
28	-	-	-	1,81899E-12	-1,4552E-11	-9,0949E-13	0	0	0
29	-	-	-	-1,819E-12	0	0	0	0	0
30	-	-	-	-4,5475E-12	-7,9581E-11	-1,5007E-11	0	0	0
31	-	-	-	1,81899E-12	0	0	0	0	0
32	-	-	-	-4,5475E-13	-4,5475E-13	9,0949E-12	0	0	0

Tabela 10 - Resultados do Exemplo 3 (deslocamentos nodais).

Nós	ANSYS			Planilha			Variações (%)		
	UX	UY	UZ	UX	UY	UZ	UX	UY	UZ
1	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0	0	0
2	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0	0	0
3	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0	0	0
4	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0	0	0
5	-6,6964E-05	-1,6951E-04	9,3750E-05	-6,6964E-05	-1,6951E-04	9,3750E-05	0	0	0
6	-9,3750E-05	-1,6951E-04	9,3750E-05	-9,3750E-05	-1,6951E-04	9,3750E-05	0	0	0
7	6,6964E-05	-1,7398E-04	9,3750E-05	6,6964E-05	-1,7398E-04	9,3750E-05	0	0	0
8	9,3750E-05	-1,6951E-04	9,3750E-05	9,3750E-05	-1,6951E-04	9,3750E-05	0	0	0
9	-1,3393E-04	-4,6032E-04	5,3571E-05	-1,3393E-04	-4,6032E-04	5,3571E-05	0	0	0
10	-1,3839E-04	-4,6032E-04	5,3571E-05	-1,3839E-04	-4,6032E-04	5,3571E-05	0	0	0
11	1,3393E-04	-4,6032E-04	5,3571E-05	1,3393E-04	-4,6032E-04	5,3571E-05	0	0	0
12	1,3839E-04	-4,6479E-04	5,3571E-05	1,3839E-04	-4,6479E-04	5,3571E-05	0	0	0
13	-1,6071E-04	-8,2780E-04	1,0268E-04	-1,6071E-04	-8,2780E-04	1,0268E-04	0	0	0
14	-1,8304E-04	-8,2780E-04	1,0268E-04	-1,8304E-04	-8,2780E-04	1,0268E-04	0	0	0
15	1,6071E-04	-8,3226E-04	1,0268E-04	1,6071E-04	-8,3226E-04	1,0268E-04	0	0	0
16	1,8304E-04	-8,2780E-04	1,0268E-04	1,8304E-04	-8,2780E-04	1,0268E-04	0	0	0
17	-1,8750E-04	-1,2362E-03	9,8214E-05	-1,8750E-04	-1,2362E-03	9,8214E-05	0	0	0
18	-1,9643E-04	-1,2362E-03	9,8214E-05	-1,9643E-04	-1,2362E-03	9,8214E-05	0	0	0
19	1,8750E-04	-1,2362E-03	9,8214E-05	1,8750E-04	-1,2362E-03	9,8214E-05	0	0	0
20	1,9643E-04	-1,2407E-03	9,8214E-05	1,9643E-04	-1,2407E-03	9,8214E-05	0	0	0
21	-1,9196E-04	-1,6588E-03	1,2054E-04	-1,9196E-04	-1,6588E-03	1,2054E-04	0	0	0
22	-2,0982E-04	-1,6588E-03	1,2054E-04	-2,0982E-04	-1,6588E-03	1,2054E-04	0	0	0
23	1,9196E-04	-1,6633E-03	1,2054E-04	1,9196E-04	-1,6633E-03	1,2054E-04	0	0	0
24	2,0982E-04	-1,6588E-03	1,2054E-04	2,0982E-04	-1,6588E-03	1,2054E-04	0	0	0
25	-1,9643E-04	-2,0777E-03	1,3393E-04	-1,9643E-04	-2,0777E-03	1,3393E-04	0	0	0
26	-2,0982E-04	-2,0777E-03	1,3393E-04	-2,0982E-04	-2,0777E-03	1,3393E-04	0	0	0
27	1,9643E-04	-2,0777E-03	1,3393E-04	1,9643E-04	-2,0777E-03	1,3393E-04	0	0	0
28	2,0982E-04	-2,0821E-03	1,3393E-04	2,0982E-04	-2,0821E-03	1,3393E-04	0	0	0
29	-1,9643E-04	-2,4839E-03	1,4732E-04	-1,9643E-04	-2,4839E-03	1,4732E-04	0	0	0
30	-2,0982E-04	-2,4839E-03	1,4732E-04	-2,0982E-04	-2,4839E-03	1,4732E-04	0	0	0
31	1,9643E-04	-2,4839E-03	1,4732E-04	1,9643E-04	-2,4839E-03	1,4732E-04	0	0	0
32	2,0982E-04	-2,4839E-03	1,4732E-04	2,0982E-04	-2,4839E-03	1,4732E-04	0	0	0

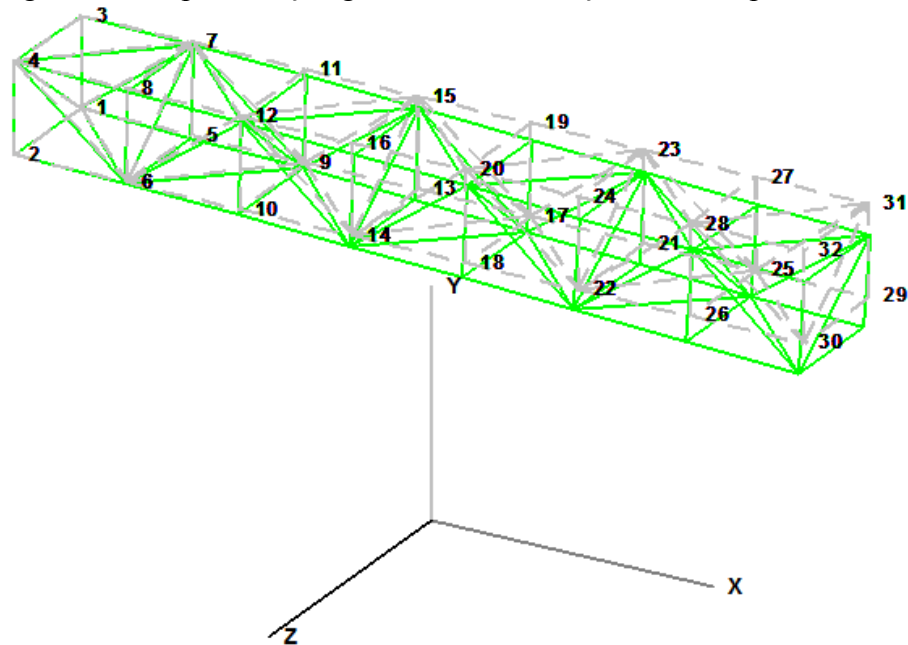
Tabela 11 - Resultados do Exemplo 3 (forças axiais e tensões normais).

Elementos	ANSYS		Planilha		Variações (%)	
	Força Axial	Tensão Normal	Força Axial	Tensão Normal	Força Axial	Tensão Normal
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	-250	-312500	-250	-312500	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	-9,48677E-10	0	-9,48677E-10	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	-1,42302E-09	0	-1,42302E-09	0	0
12	-250	-312500	-250	-312500	0	0
13	0	-9,48677E-10	0	-9,48677E-10	0	0
14	-250	-312500	-250	-312500	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	9,48677E-10	1,0216E-12	9,48677E-10	0	0
18	0	-1,51788E-08	0	-1,51788E-08	0	0
19	0	-1,89735E-09	-2,043E-12	-1,89735E-09	0	0
20	-250	-312500	-250	-312500	0	0
21	0	0	0	0	0	0
22	-250	-312500	-250	-312500	0	0
23	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0
25	0	1,89735E-09	-1,022E-12	1,89735E-09	0	0
26	0	0	0	0	0	0
27	0	0	1,0216E-12	0	0	0
28	-250	-312500	-250	-312500	0	0
29	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0
33	-3750	-4687500	-3750	-4687500	0	0
34	-3750	-4687500	-3750	-4687500	0	0
35	-1500	-1875000	-1500	-1875000	0	0
36	-1500	-1875000	-1500	-1875000	0	0
37	-250	-312500	-250	-312500	0	0
38	-250	-312500	-250	-312500	0	0
39	0	-5,69206E-09	-2,043E-12	-5,69206E-09	0	0
40	-5250	-6562500	-5250	-6562500	0	0
41	-2500	-3125000	-2500	-3125000	0	0
42	-2500	-3125000	-2500	-3125000	0	0
43	-750	-937500	-750	-937500	0	0
44	-750	-937500	-750	-937500	0	0
45	-1,15E-11	6,07153E-08	-7,56E-11	6,07153E-08	0	0
46	-2,07E-11	7,39968E-08	-6,947E-11	7,39968E-08	0	0
47	5250	6562500	5250	6562500	0	0
48	2500	3125000	2500	3125000	0	0
49	2500	3125000	2500	3125000	0	0
50	750	937500	750	937500	0	0
51	750	937500	750	937500	0	0
52	6,90E-12	-7,39968E-08	5,1078E-11	-7,39968E-08	0	0
53	6,90E-12	-6,83047E-08	4,9035E-11	-6,83047E-08	0	0
54	3750	4687500	3750	4687500	0	0
55	3750	4687500	3750	4687500	0	0

Tabela 11 - Resultados do Exemplo 3 (forças axiais e tensões normais).

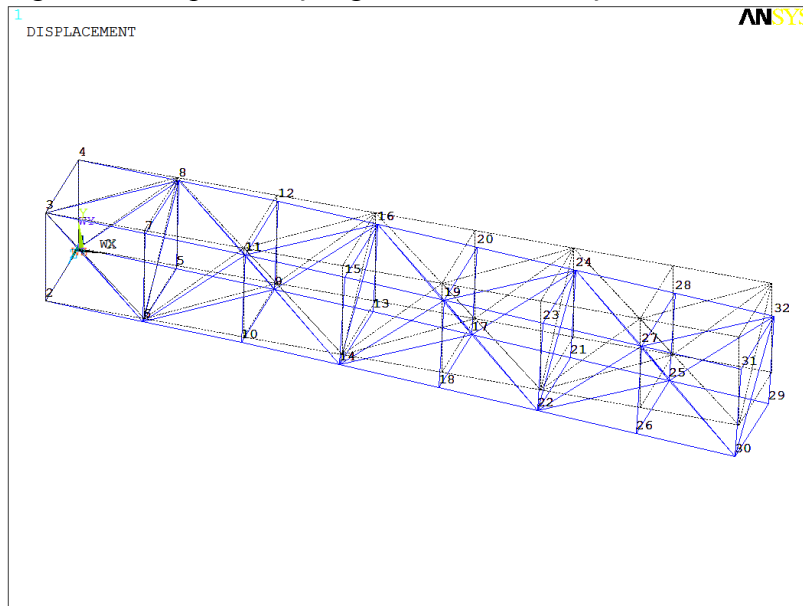
56	1500	1875000	1500	1875000	0	0
57	1500	1875000	1500	1875000	0	0
58	250	312500	250	312500	0	0
59	250	312500	250	312500	0	0
60	0	1,89735E-09	2,0431E-12	1,89735E-09	0	0
61	-2121,3	-2651650,429	-2121,3203	-2651650,429	0	0
62	1767,8	2209708,691	1767,76695	2209708,691	0	0
63	-1414,2	-1767766,953	-1414,2136	-1767766,953	0	0
64	1060,7	1325825,215	1060,66017	1325825,215	0	0
65	-707,11	-883883,4765	-707,10678	-883883,4765	0	0
66	353,55	441941,7382	353,553391	441941,7382	0	0
67	-9,19E-12	6,43983E-08	-4,912E-11	6,43983E-08	0	0
68	2121,3	2651650,429	2121,32034	2651650,429	0	0
69	-1767,8	-2209708,691	-1767,767	-2209708,691	0	0
70	1414,2	1767766,953	1414,21356	1767766,953	0	0
71	-1060,7	-1325825,215	-1060,6602	-1325825,215	0	0
72	707,11	883883,4765	707,106781	883883,4765	0	0
73	-353,55	-441941,7382	-353,55339	-441941,7382	0	0
74	9,19E-12	-1,04647E-07	1,2569E-10	-1,04647E-07	0	0
75	-1,78E-11	8,04979E-09	-2,023E-11	8,04979E-09	0	0
76	1,41E-11	-1,84474E-08	2,1309E-11	-1,84474E-08	0	0
77	-1,26E-11	2,14661E-08	-1,932E-11	2,14661E-08	0	0
78	5,17E-12	-3,36666E-08	2,7066E-11	-3,36666E-08	0	0
79	-1,72E-12	1,86151E-08	-1,941E-11	1,86151E-08	0	0
80	-6,90E-12	0	2,7088E-11	0	0	0
81	4,60E-12	-2,47363E-08	-4,086E-11	-2,47363E-08	0	0
82	-9,77E-12	-2,28077E-08	-2,167E-11	-2,28077E-08	0	0
83	7,76E-12	2,11307E-08	2,2935E-11	2,11307E-08	0	0
84	-8,04E-12	-1,8112E-08	-2,257E-11	-1,8112E-08	0	0
85	4,02E-12	0	1,3296E-11	0	0	0
86	-7,47E-12	-3,35408E-09	-9,21E-12	-3,35408E-09	0	0
87	6,90E-12	1,03976E-08	4,1084E-12	1,03976E-08	0	0
88	5,75E-13	1,03976E-08	-2,451E-11	1,03976E-08	0	0
89	0	0	0	0	0	0
90	2,30E-12	5,69206E-09	0	5,69206E-09	0	0
91	4,88E-12	-3,0832E-09	-3,065E-12	-3,0832E-09	0	0
92	4,60E-12	1,09098E-08	-1,124E-11	1,09098E-08	0	0
93	-5,17E-12	3,79471E-09	2,5539E-12	3,79471E-09	0	0
94	1,84E-11	-1,99222E-08	-2,094E-11	-1,99222E-08	0	0
95	1,15E-11	-2,56143E-08	2,1453E-11	-2,56143E-08	0	0
96	-1,38E-11	-1,23328E-08	3,1668E-11	-1,23328E-08	0	0

Figura 41 - Representação gráfica da deformação do Exemplo 3.



Fonte: Autoria própria.

Figura 42 - Representação gráfica da deformação via ANSYS do Exemplo 3.



Fonte: Autoria própria.

Os resultados deste exemplo foram bem próximos entre os softwares, sofreu variações mínimas da ordem de  $10^{-10}$  ou menores nas tensões, cargas axiais e reações, que podem ser ignoradas.

Tanto no ANSYS como na planilha surgiram valores extremamente pequenos que deveriam ser zero. Essas variações extremamente pequenas podem ser explicadas pela imprecisão dos pontos flutuantes.



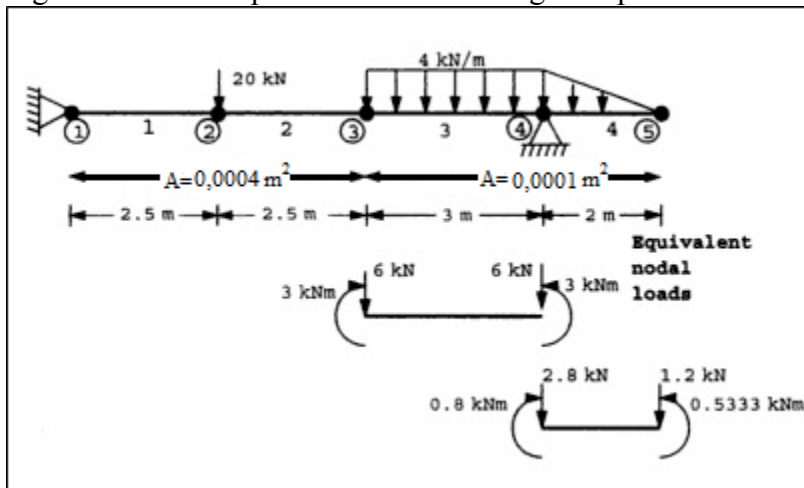
#### Exemplo 4.

Este exemplo e o seguinte abordaram o uso da planilha para o caso de vigas e pórticos.

As propriedades dos materiais são  $E= 69 \text{ GPa}$ , seção quadrada  $0,02 \text{ m} \times 0,02 \text{ m}$  para as vigas 1 e 2 e  $0,01 \text{ m} \times 0,01 \text{ m}$  para as vigas 3 e 4.

A planilha é incapaz ainda de realizar inserção de cargas distribuídas, por isto é preciso encontrar as cargas concentradas equivalente nos nós (Figura 43). Por exemplo, analisando somente a viga 3 em equilíbrio, os carregamentos equivalentes nos nós para permanecer a viga estática necessária são de  $6 \text{ kN}$  e  $3 \text{ kNm}$  conforme a Figura 43.

Figura 43 – Dados para o caso de uma viga bi- apoiada com carregamentos distribuídos.



Fonte: Adaptado de GRIFFITHS, 2004, p.124.

Para achar as cargas resultantes nos nós é feito uma superposição dos valores. Portanto, as cargas concentradas em cada nó é:

Tabela 12 – Cargas concentradas nos nós.

Nó	FY	MZ
1	-	-
2	-20.000	0
3	-6.000	-3.000
4	-8.800	2.200
5	-1.200	533,3

A Figura 44 representa os dados inseridos na planilha.

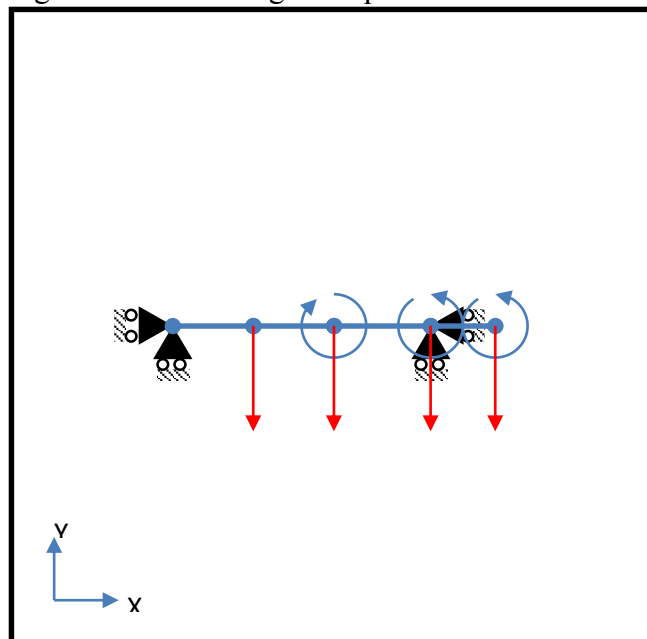
Figura 44 – Dados do Exemplo 4 inseridos na planilha.

Nós	x	y	fx	vy	mz	UX	UY	Teta Z	Elementos	Nó i	Nó j	Area	Modulo E	Iz	Comprimento L	EIz	EA/L
Nó 1	0	0				0	0		Elemento 1	1	2	4,00E-04	6,90E+10	1,33E-08	2,5	9,20E+02	1,10E+07
Nó 2	2,5	0		-2,00E+04					Elemento 2	2	3	4,00E-04	6,90E+10	1,33E-08	2,5	9,20E+02	1,10E+07
Nó 3	5	0		-6,00E+03	-3,00E+03				Elemento 3	3	4	1,00E-04	6,90E+10	8,33E-10	3	5,75E+01	2,30E+06
Nó 4	8	0		-8,80E+03	2,20E+03	0	0		Elemento 4	4	5	1,00E-04	6,90E+10	8,33E-10	2	5,75E+01	3,45E+06
Nó 5	10	0		-1,20E+03	5,33E+02												

Fonte: Autoria própria.

A Figura 45 representa o desenho da estrutura juntamente com os carregamentos.

Figura 45 – Gráfico gerado pelo botão PLOTAR.



Fonte: Autoria própria.

Os dados gerados ao apertar o botão SOLUÇÃO são as matrizes de rigidez de cada elemento (Figura 46), matriz de rigidez global (Figura 47), solução nodal de deslocamento e reações nodais (Figura 48) e o pós-processamento (Figura 49).



Figura 48 – Solução nodal obtida na planilha (deslocamentos e reações).

Nós	UX	UY	TetaZ	FX	FY	MZ
1	0	0	-297,052108	0	15666,6625	-1,74623E-10
2	0	-698,283965	-243,836542	0	2,91038E-10	-1,89175E-10
3	0	-1187,10242	-152,124628	0	-8,00355E-11	2,18279E-11
4	0	0	673,9609154	0	20333,3375	-2,18279E-11
5	0	1310,819222	650,7713502	0	7,27596E-12	-1,15961E-11

Fonte: Autoria própria.

A Figura 49 apresenta os dados utilizados no pós-processamento para calcular os esforços, tensões normais e de flexão locais de cada elemento em relação a seus nós. A coluna *y* é digitado pelo próprio usuário, este representa a distância da linha neutra da barra até o ponto em que se deseja calcular o valor das tensões de flexão, a planilha considera as seções das barras simétricas em relação a linha neutra.

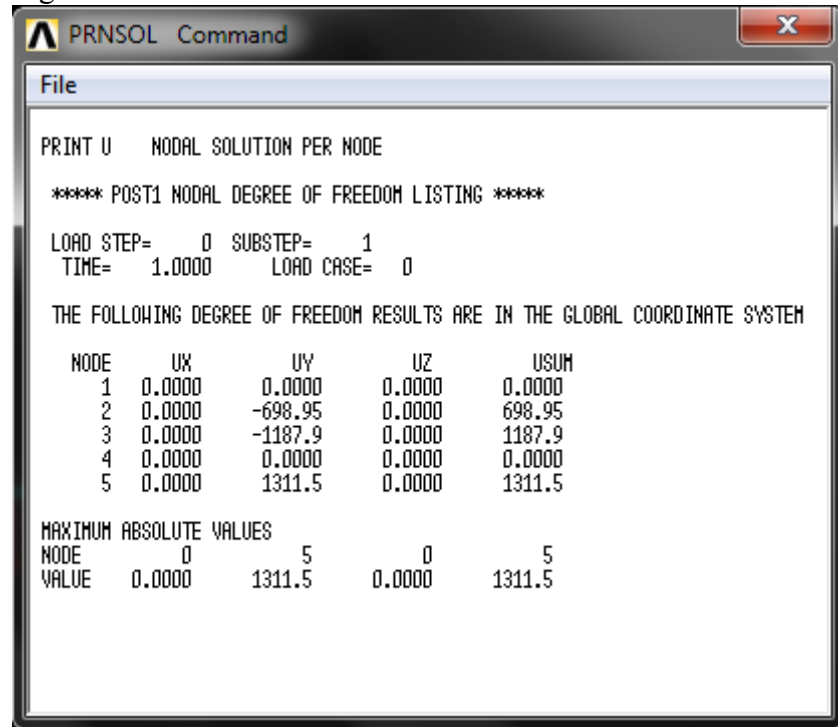
Figura 49 – Dados utilizados e resultados apresentados no pós-processamento.

Elementos	Nó i	Nó j	Área	Modulo E	Comprimento L	lz	fxi	fvi	mzi	fxj	fvi	mzi	Tn,j	Tn,j	Tfy+j	Tfy+j	Tfy-j	v	
1	1	2	4,00E-04	6,90E+10	2,50E+00	1,33E-08	0,00E+00	1,57E+04	-1,75E-10	0,00E+00	-1,57E+00	3,92E+04	0,00E+00	0,00E+00	-1,31E-04	-2,94E+10	1,31E-04	2,94E+10	1,00E-02
2	2	3	4,00E-04	6,90E+10	2,50E+00	1,33E-08	0,00E+00	-4,33E+03	-3,92E+04	0,00E+00	4,33E+00	2,83E+04	0,00E+00	0,00E+00	-2,94E+10	-2,12E+10	2,94E+10	2,12E+10	1,00E-02
3	3	4	1,00E-04	6,90E+10	3,00E+00	8,33E-10	0,00E+00	-1,03E+04	-3,13E+04	0,00E+00	1,03E+00	3,33E+04	0,00E+00	0,00E+00	-1,88E+11	-2,00E+09	1,88E+11	2,00E+09	5,00E-03
4	4	5	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	0,00E+00	1,20E+03	1,87E+03	0,00E+00	-1,20E+00	5,33E+03	0,00E+00	0,00E+00	1,12E+10	-3,20E+09	-1,12E+10	3,20E+09	5,00E-03

Fonte: Autoria própria.

Os resultados obtidos via ANSYS estão representados nas Figuras 50, 51, 52 e 53.

Figura 50 – Resultados dos deslocamentos nodais via ANSYS.

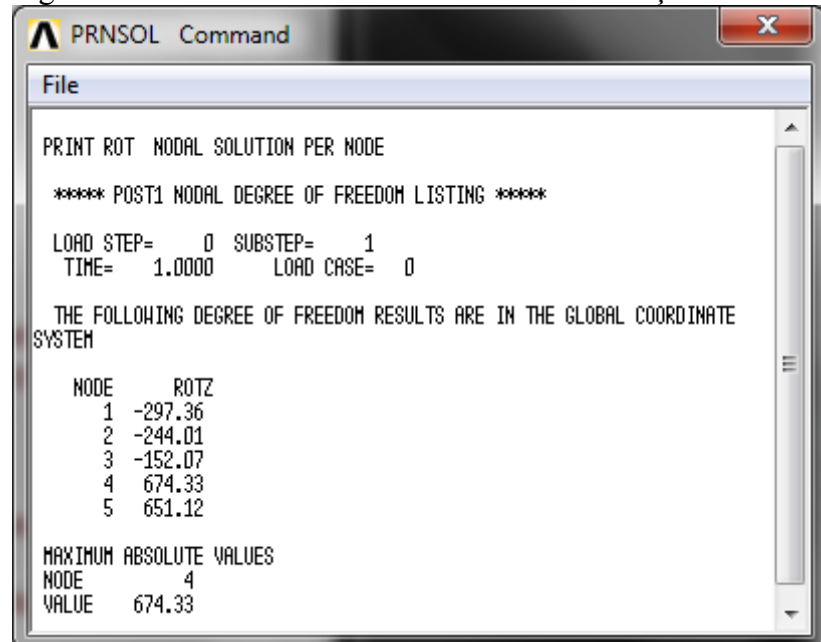


```

PRNSOL Command
File
PRINT U  NODAL SOLUTION PER NODE
**** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING ****
LOAD STEP=  0  SUBSTEP=  1
TIME=  1.0000  LOAD CASE=  0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM
  NODE      UX          UY          UZ          USUM
   1  0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
   2  0.0000   -698.95    0.0000    698.95
   3  0.0000  -1187.9    0.0000   1187.9
   4  0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
   5  0.0000   1311.5    0.0000   1311.5
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      0          5          0          5
VALUE  0.0000    1311.5    0.0000    1311.5
  
```

Fonte: Autoria própria.

Figura 51 – Resultados dos deslocamentos de rotação via ANSYS.

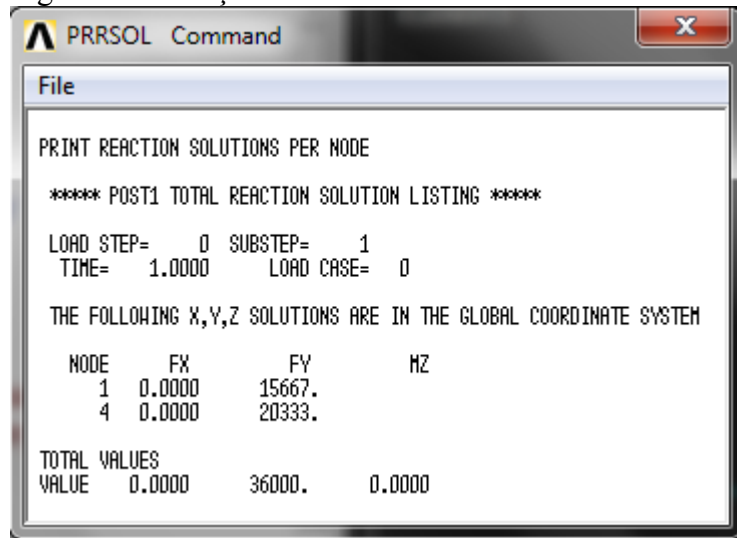


```

PRNSOL Command
File
PRINT ROT  NODAL SOLUTION PER NODE
**** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING ****
LOAD STEP=  0  SUBSTEP=  1
TIME=  1.0000  LOAD CASE=  0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE
SYSTEM
  NODE      ROTZ
   1  -297.36
   2  -244.01
   3  -152.07
   4   674.33
   5   651.12
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE      4
VALUE   674.33
  
```

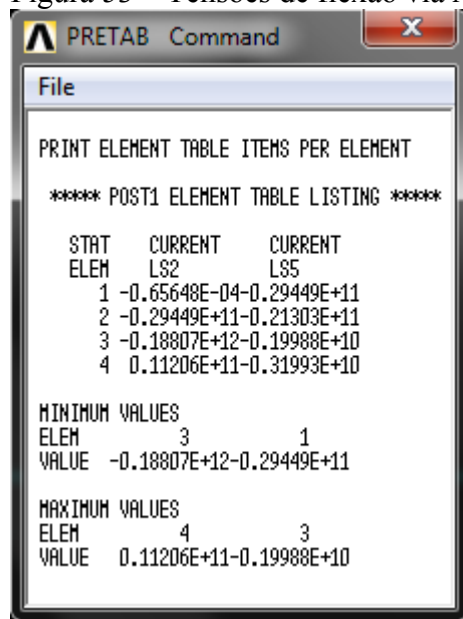
Fonte: Autoria própria.

Figura 52 – Reações nos nós via ANSYS.



Fonte: Autoria própria.

Figura 53 – Tensões de flexão via ANSYS.



Fonte: Autoria própria.

As Tabelas 13, 14 e 15 apresentam os resultados obtidos e suas variações.

Tabela 13 – Comparação dos resultados de deslocamento entre a planilha e o ANSYS (Exemplo 4).

Nós	Planilha			ANSYS			Variações (%)		
	UX	UY	UTetaZ	UX	UY	ROTZ	UX	UY	UTetaZ
1	0	0	-297,05	0	0,00	-297,36	0	0	0,1043
2	0	-698,28	-243,83	0	-698,95	-244,01	0	0,0959	0,0738
3	0	-1187,10	-152,12	0	-1187,90	-152,07	0	0,0673	-0,0329
4	0	0	673,96	0	0,00	674,33	0	0	0,0549
5	0	1310,81	650,77	0	1311,50	651,12	0	0,0526	0,0538

Tabela 14 - Comparação dos resultados das reações entre a planilha e o ANSYS (Exemplo 4).

Nós	Planilha			ANSYS			Variações (%)		
	FX	FY	MZ	FX	FY	MZ	FX	FY	MZ
1	0	15666,6625	5,82077E-11	0	15667	-	0,00	0,0022	0,00
2	0	-3,63798E-12	-2,18279E-11	-	-	-	0,00	0,00	0,00
3	0	-7,27596E-12	-2,18279E-11	-	-	-	0,00	0,00	0,00
4	0	20333,3375	3,63798E-11	0	20333	-	0,00	-0,0017	0,00
5	0	-1,45519E-11	3,20597E-11	-	-	-	0,00	0,00	0,00

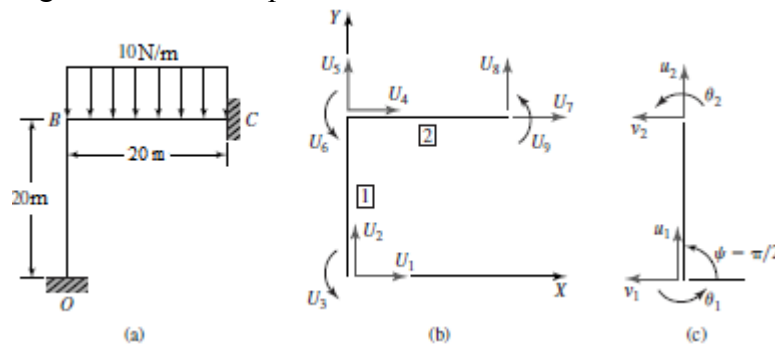
Tabela 15 - Comparação das tensões de flexão encontrados pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 4).

Nós	Planilha		ANSYS		Variação (%)	
	Tensão Flexão y+ nó i	Tensão Flexão y+ nó j	Tensão Flexão y+ nó i	Tensão Flexão y+ nó j	Tensão Flexão y+ nó i	Tensão Flexão y+ nó j
1	-1,31E-04	-2,94E+10	-6,56E-05	-2,94E+10	-9,95E+01	2,51E-01
2	-2,94E+10	-2,12E+10	-2,94E+10	-2,13E+10	2,51E-01	2,49E-01
3	-1,88E+11	-2,00E+09	-1,88E+11	-2,00E+09	3,73E-02	-5,00E-02
4	1,12E+10	-3,20E+09	1,12E+10	-3,20E+09	5,18E-02	-1,56E-02
5	-1,31E-04	-2,94E+10	-6,56E-05	-2,94E+10	-9,95E+01	2,51E-01

### Exemplo 5.

A Figura 54 apresenta um pórtico plano formado por duas vigas quadradas com propriedades iguais com seção de 0,01 m x 0,01 m, módulo de elasticidade 69 GPa. Carregamento conforme indicado na Figura 54. Possui engastamento nos pontos O e C.

Figura 54 – Pórtico plano.



Fonte: HUTTON, 2004, p. 117.

As cargas equivalentes concentradas nos nós são:  $FX_B=0$ ,  $FY_B=-100N$ ,  $MZ_B=-333,33$  Nm,  $FX_C=0$ ,  $FY_C=-100$  N e  $MZ_C=333,33$  Nm.

A representação gráfica da estrutura pela planilha está apresentada na Figura 55.

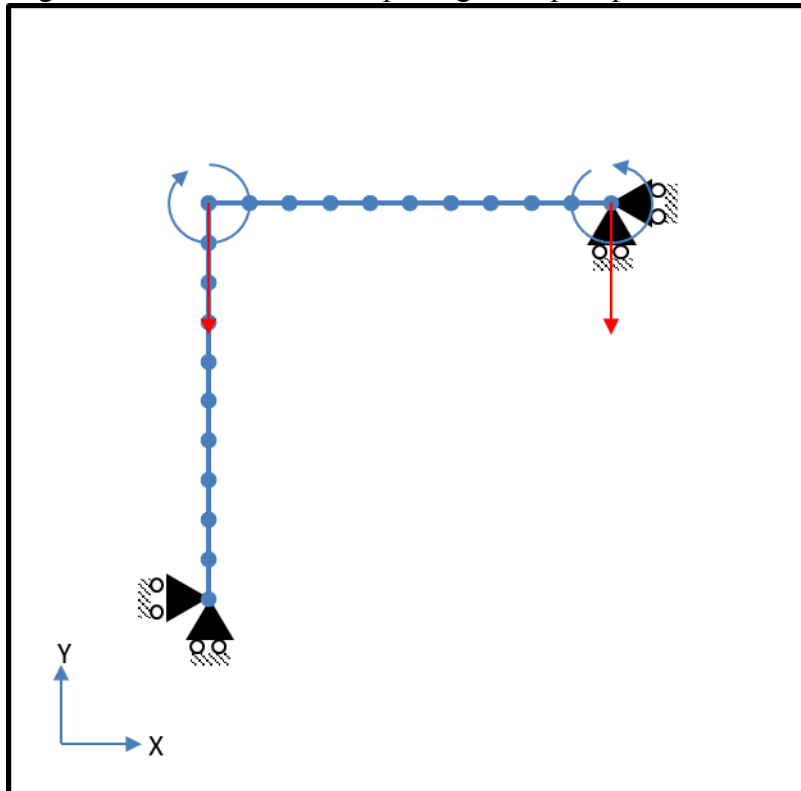


Neste exemplo cada viga da estrutura foi dividida na planilha e no ANSYS em 10 elementos (geração de malha).

Os resultados obtidos pela planilha estão apresentados na Figura 56.

As Tabelas 15, 17, 18 e 19 apresentam as variações percentuais dos resultados encontrados pelo ANSYS e pela planilha.

Figura 55 – Pórtico do Exemplo 5 gerado pela planilha.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 16 - Comparação dos deslocamentos encontrados pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 5).

Nós	Planilha			Referência			Variações (%)		
	UX	UY	UTetaZ	UX	UY	ROTZ	UX	UY	UTetaZ
1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00	0,00	0,00
2	3,62E-05	-2,54E-04	-1,45E+01	3,62E-05	-2,54E-04	-1,45E+01	0,00	0,00	0,00
3	-2,61E+00	-2,54E-05	2,46E+00	-2,61E+00	-2,54E-05	2,46E+00	0,00	0,00	0,00
4	-9,28E+00	-5,07E-05	4,06E+00	-9,28E+00	-5,07E-05	4,06E+00	0,00	0,00	0,00
5	-1,83E+01	-7,61E-05	4,78E+00	-1,83E+01	-7,61E-05	4,78E+00	0,00	0,00	0,00
6	-2,78E+01	-1,01E-04	4,64E+00	-2,78E+01	-1,01E-04	4,64E+00	0,00	0,00	0,00
7	-3,62E+01	-1,27E-04	3,62E+00	-3,62E+01	-1,27E-04	3,62E+00	0,00	0,00	0,00
8	-4,17E+01	-1,52E-04	1,74E+00	-4,17E+01	-1,52E-04	1,74E+00	0,00	0,00	0,00
9	-4,26E+01	-1,78E-04	-1,01E+00	-4,26E+01	-1,78E-04	-1,01E+00	0,00	0,00	0,00
10	-3,71E+01	-2,03E-04	-4,64E+00	-3,71E+01	-2,03E-04	-4,64E+00	0,00	0,00	0,00
11	-2,35E+01	-2,28E-04	-9,13E+00	-2,35E+01	-2,28E-04	-9,13E+00	0,00	0,00	0,00
12	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00	0,00	0,00
13	3,26E-05	-2,35E+01	-9,13E+00	3,26E-05	-2,35E+01	-9,13E+00	0,00	0,00	0,00



Figura 56 – Dados utilizados e resultados apresentados no pós-processamento.

Elementos	Nó i	Área	Modulo E	Comprimento L	lz	fxi	fyi	mzi	fxj	fyj	mzj	In_i	In_j	Tfy+i	Tfy+j	Tfy-i	Tfy-j	y
1	4	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	-8,33E+01	-8,75E+01	1,25E+01	5,83E+01	-8,75E+05	-8,75E+05	-5,00E+08	-3,50E+08	5,00E+08	3,50E+08	5,00E-03
2	4	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	-5,83E+01	-8,75E+01	1,25E+01	3,33E+01	-8,75E+05	-8,75E+05	-3,50E+08	-2,00E+08	3,50E+08	2,00E+08	5,00E-03
3	5	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	-3,33E+01	-8,75E+01	1,25E+01	8,33E+00	-8,75E+05	-8,75E+05	-2,00E+08	-5,00E+07	2,00E+08	5,00E+07	5,00E-03
4	6	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	-8,33E+00	-8,75E+01	1,25E+01	-1,67E+01	-8,75E+05	-8,75E+05	-5,00E+07	1,00E+08	5,00E+07	-1,00E+08	5,00E-03
5	7	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	1,67E+01	-8,75E+01	1,25E+01	4,17E+01	-8,75E+05	-8,75E+05	1,00E+08	2,50E+08	-1,00E+08	-2,50E+08	5,00E-03
6	8	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	4,17E+01	-8,75E+01	1,25E+01	-6,67E+01	-8,75E+05	-8,75E+05	2,50E+08	4,00E+08	-2,50E+08	-4,00E+08	5,00E-03
7	9	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	6,67E+01	-8,75E+01	1,25E+01	-9,17E+01	-8,75E+05	-8,75E+05	4,00E+08	5,50E+08	-4,00E+08	-5,50E+08	5,00E-03
8	10	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	9,17E+01	-8,75E+01	1,25E+01	-1,17E+02	-8,75E+05	-8,75E+05	5,50E+08	7,00E+08	-5,50E+08	-7,00E+08	5,00E-03
9	11	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	1,17E+02	-8,75E+01	1,25E+01	-1,42E+02	-8,75E+05	-8,75E+05	7,00E+08	8,50E+08	-7,00E+08	-8,50E+08	5,00E-03
10	12	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	8,75E+01	-1,25E+01	1,42E+02	-8,75E+01	1,25E+01	-1,67E+02	-8,75E+05	-8,75E+05	8,50E+08	1,00E+09	-8,50E+08	-1,00E+09	5,00E-03
11	2	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	-1,67E+02	-1,25E+01	1,25E+01	1,42E+02	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,00E+09	-8,50E+08	1,00E+09	8,50E+08	5,00E-03
12	13	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	-1,42E+02	-1,25E+01	1,25E+01	1,17E+02	-1,25E+05	-1,25E+05	-8,50E+08	-7,00E+08	8,50E+08	7,00E+08	5,00E-03
13	14	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	-1,17E+02	-1,25E+01	1,25E+01	9,17E+01	-1,25E+05	-1,25E+05	-7,00E+08	-5,50E+08	7,00E+08	5,50E+08	5,00E-03
14	15	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	-9,17E+01	-1,25E+01	1,25E+01	6,67E+01	-1,25E+05	-1,25E+05	-5,50E+08	-4,00E+08	5,50E+08	4,00E+08	5,00E-03
15	16	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	-6,67E+01	-1,25E+01	1,25E+01	4,17E+01	-1,25E+05	-1,25E+05	-4,00E+08	-2,50E+08	4,00E+08	2,50E+08	5,00E-03
16	17	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	-4,17E+01	-1,25E+01	1,25E+01	1,67E+01	-1,25E+05	-1,25E+05	-2,50E+08	-1,00E+08	2,50E+08	1,00E+08	5,00E-03
17	18	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	-1,67E+01	-1,25E+01	1,25E+01	-8,33E+00	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,00E+08	5,00E+07	1,00E+08	-5,00E+07	5,00E-03
18	19	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	8,33E+00	-1,25E+01	1,25E+01	-3,33E+01	-1,25E+05	-1,25E+05	5,00E+07	2,00E+08	-5,00E+07	-2,00E+08	5,00E-03
19	20	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	-3,33E+01	-1,25E+01	1,25E+01	-5,83E+01	-1,25E+05	-1,25E+05	2,00E+08	3,50E+08	-2,00E+08	-3,50E+08	5,00E-03
20	21	1,00E-04	6,90E+10	2,00E+00	8,33E-10	1,25E+01	-1,25E+01	5,83E+01	-1,25E+01	1,25E+01	-8,33E+01	-1,25E+05	-1,25E+05	-3,50E+08	-5,00E+08	3,50E+08	5,00E+08	5,00E-03

Fonte: Autoria própria.

Tabela 18 - Comparação das tensões normais encontradas pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 5).

Nós	Planilha		ANSYS		Variações (%)	
	Tensão Normal nó i	Tensão Normal nó j	Tensão Normal nó i	Tensão Normal nó j	Tensão Normal nó i	Tensão Normal nó j
1	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
2	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
3	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
4	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
5	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
6	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
7	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
8	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
9	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
10	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-8,75E+05	-1,26E-06	-1,26E-06
11	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
12	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
13	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
14	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
15	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
16	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
17	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
18	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
19	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05
20	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	-1,25E+05	1,08E-05	1,08E-05

Tabela 19 - Comparação das tensões de flexão encontradas pela planilha e pelo ANSYS (Exemplo 5).

Nós	Planilha		ANSYS		Variações (%)	
	Tensão Flexão y+ nó i	Tensão Flexão y+ nó j	Tensão Flexão y+ nó i	Tensão Flexão y+ nó j	Tensão Flexão y+ nó i	Tensão Flexão y+ nó j
1	-5,00E+08	-3,50E+08	-5,00E+08	-3,50E+08	-3,09E-05	-3,96E-05
2	-3,50E+08	-2,00E+08	-3,50E+08	-2,00E+08	-3,96E-05	-6,11E-05
3	-2,00E+08	-5,00E+07	-2,00E+08	-5,00E+07	-6,11E-05	-3,21E-05
4	-5,00E+07	1,00E+08	-5,00E+07	1,00E+08	-3,21E-05	-1,02E-05
5	1,00E+08	2,50E+08	1,00E+08	2,50E+08	-1,02E-05	-5,06E-05
6	2,50E+08	4,00E+08	2,50E+08	4,00E+08	-5,06E-05	-3,57E-05
7	4,00E+08	5,50E+08	4,00E+08	5,50E+08	-3,57E-05	-4,71E-05
8	5,50E+08	7,00E+08	5,50E+08	7,00E+08	-4,71E-05	-3,93E-05
9	7,00E+08	8,50E+08	7,00E+08	8,50E+08	-3,93E-05	-3,43E-05
10	8,50E+08	1,00E+09	8,50E+08	1,00E+09	-3,43E-05	-1,07E-05
11	-1,00E+09	-8,50E+08	-1,00E+09	-8,50E+08	-9,25E-06	-4,46E-05
12	-8,50E+08	-7,00E+08	-8,50E+08	-7,00E+08	-4,46E-05	-3,80E-05
13	-7,00E+08	-5,50E+08	-7,00E+08	-5,50E+08	-3,80E-05	-4,60E-05
14	-5,50E+08	-4,00E+08	-5,50E+08	-4,00E+08	-4,60E-05	-3,49E-05
15	-4,00E+08	-2,50E+08	-4,00E+08	-2,50E+08	-3,49E-05	-5,06E-05
16	-2,50E+08	-1,00E+08	-2,50E+08	-1,00E+08	-5,06E-05	-1,32E-05
17	-1,00E+08	5,00E+07	-1,00E+08	5,00E+07	-1,32E-05	-4,01E-05
18	5,00E+07	2,00E+08	5,00E+07	2,00E+08	-4,01E-05	-5,66E-05
19	2,00E+08	3,50E+08	2,00E+08	3,50E+08	-5,66E-05	-3,61E-05
20	3,50E+08	5,00E+08	3,50E+08	5,00E+08	-3,61E-05	-4,79E-05

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A planilha Excel está presente em grande parte dos computadores e é uma ferramenta muito utilizada pelos engenheiros para problemas simples do cotidiano com soluções rápidas. Para problemas mais complexos geralmente recorrem a softwares específicos. Com os recursos de programação VBA este software amplia o seu campo de uso, inclusive para resoluções de problemas complexos e muito específicos de certas áreas das ciências exatas. Com a implementação do MEF na planilha foi possível viabilizar o uso para outros usuários que não possuem acesso a softwares CAE.

É possível realizar manualmente a montagem das matrizes no Excel para analisar as estruturas, porém em casos como da Figura 40 que possui muitos nós e elementos a montagem é demorada e suscetível a erros por parte do usuário, com o uso do VBA a utilização do método é facilitada reduzindo-se erros e agilizando a análise.

As variações percentuais apresentadas nas Tabelas 13, 14, 15, 18 e 19 foram ocasionadas pela representação numérica com 4 casas decimais por parte do ANSYS. Já a planilha pode apresentar até 15 casas decimais.

As Tabelas 6, 9, 11 e 14 apresentaram alguns valores na ordem de grandeza de  $10^{-10}$  ou menores, estes valores podem ser considerados zeros, pois são imprecisões ocasionadas pelo cálculo dos pontos flutuantes. No caso dos valores dos nós 1 e 5 da Tabela 15 também ocorre a imprecisão devido os pontos flutuantes, estes valores também são zero. Geralmente para evitar erros de interpretação destes valores os softwares de simulação numérica truncam o número.

A Tabela 16 apresenta valores incoerentes com a realidade, como deslocamentos acima de 40 m, este é um deslocamento maior que o comprimento da viga da estrutura. Como a teoria de MEF empregado baseia-se em sistemas lineares e sem critério de falha pré-determinado, a planilha ou o ANSYS não irá alertar o usuário sobre esta incoerência.

As soluções obtidas foram condizentes com as teorias clássicas das estruturas reticuladas analisadas e validadas pelo uso do software comercial ANSYS baseado no método dos elementos finitos.

A programação das planilhas com VBA para a análise de treliças e vigas apresentaram algumas semelhanças entre si, as mais relevantes são:

- Uso de cossenos diretores;
- Treliças espaciais e pórticos planos possuem três graus de liberdade e a montagem da matriz de rigidez são semelhantes;

- Uso de matriz inversa, em casos de matrizes muito grandes, na qual o Excel é incapaz de inverter, usou-se uma rotina utilizando a eliminação de Gauss para inverter.

Essas semelhanças reduziram o tempo de elaboração das planilhas.

Algumas das rotinas programadas no VBA podem ser utilizadas em outras linguagens de programação, pois o VBA tem características em comum com a maioria das linguagens.

A implementação do MEF na planilha Excel proporcionou uma compreensão maior dos detalhes envolvidos no método.

Algumas vantagens no uso da planilha com MEF implementado para análise de estruturas reticuladas são:

- Análise e otimização das estruturas reticuladas de maneira facilitada.
- O uso do Excel já é conhecido por maioria dos usuários da plataforma Windows, não necessitando aprofundamento do conhecimento para sua utilização.
- Fácil portabilidade, já que muitos dos computadores possuem o Excel.
- A planilha pode ser adequada conforme a necessidade do usuário, desde que possua conhecimento no Excel e no VBA.
- Pode-se realizar a programação em VBA com código aberto, possibilitando melhorias da planilha e a comprovação do uso do MEF, ou seja, não é uma caixa preta.
- Solução de problemas complexos inviáveis de serem resolvido analiticamente, principalmente para estruturas com muitos elementos envolvidos ou espaciais.
- É uma solução mais econômica que softwares comerciais como o ANSYS.
- De ponto de vista didático a planilha facilita o estudo das estruturas reticuladas e do MEF.

Algumas sugestões para trabalhos futuros são:

- Implementação de outros elementos finitos no Excel, como por exemplo elemento triangular e sólido.
- Implementação do MEF para solução de problemas não-lineares em estruturas reticuladas no Excel.
- Uso da ferramenta SOLVER para otimização das estruturas apresentadas neste trabalho.

## REFERÊNCIAS

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos finitos**. Porto: Universidade do Porto, 2003.

BEER, F. P.; JOHNSTON JÚNIOR, E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros: estática**. 3.ed. São Paulo. McGraw-Hill, 1980. v.1, 460p.

BATHE, K.J. **Finite element procedures in engineering analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1996.

BARROSO, P. A. B.; **Aplicação de Malhas Espaciais na Arquitetura**. Technica Consultoria e Projetos Industriais. Disponível em: <<http://www.metallica.com.br/>>. Acesso em: 29 jun. 2014.

COOK, R.D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis**, New York, J. Wiley, 1995.

FOTO ilustríssima, **A estrutura no solo do Anhembi**. Disponível em: <<http://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/14303-anhembi>>. Acesso em: 15 jun. 2014.

GERE, J.; WEAVER Jr., W. **Análise de Estruturas reticuladas**. Ed. Guanabara, Rio de Janeiro, 1987. 443p.

GRIFFITHS, D.V., SMITH, I. M., **Programming the Finite Element Method**, 4th ed, John Wiley and Sons, New York, 2004.

HUSEYNOV, S. T. Methodology of laboratory workshops on computer modeling with programming in Microsoft Excel Visual Basic for applications. **2013 7th International Conference on Application of Information and Communication Technologies**. IEEE, out. 2013.

HUTTON, D. V.; **Fundamentals of Finite Element Analysis**. 1st ed. New York McGraw-Hill, 2004. 494p.

KELESOGLU, O.; ULKER, M., Multi-objective fuzzy optimization of space trusses by Ms-Excel. **Advances in Engineering Software**, v. 36, n. 8, p. 549–553, ago. 2005.

LINERO, D.; GARZÓN-ALVARADO, D., Enseñanza del método de los elementos finitos en ingeniería civil y mecánica utilizando el programa de computador a código abierto PEFiCA. **Revista Educación en Ingeniería**, v. 7, n. 14, p. 35–46, 2012.

MOAVENI, S.; **Finite Element Analysis – Theory and Application with Ansys**. 2nd ed. New Jersey. Prentice Hall, 2003. 822p.

ŞİMŞEK, M.; YURTCU, H. H. Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory. **Composite Structures**, v. 97, p. 378–386, mar. 2013.

TEH, K.; MORGAN, L. The Application of EXCEL in Teaching Finite Element Analysis to Final Year Engineering Students. [s.d.].

ZIENKIEWICZ, O. C.; Taylor, R. L., **The finite element method**. 5th ed. Vols1, Butterworth-Heinemann, 2000.

**Descrição das limitações de trabalho com matrizes no Excel**. Suporte do Microsoft. Disponível em: <<http://support.microsoft.com/kb/166342>>. Acesso em: 5 jan. 2012.



**BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS**

BEER, F. P.; JOHNSTON JÚNIOR, E. R. **Resistência dos Materiais**. 2.ed. São Paulo. McGraw-Hill, 1989. 664p.

ABRAHAM, R.; ERWIG, M. UCheck: A spreadsheet type checker for end users. **Journal of Visual Languages & Computing**, v. 18, n. 1, p. 71–95, fev. 2007.

CUEVA-ZEPEDA, A.; AVALOS-GARCÍA, J. The role of a connectivity matrix in the assemblage process of the finite element method. **Advances in Engineering Software**, v. 37, n. 11, p. 721–727, nov. 2006.

DANIEL, W. J. T. Integration of rule-based and procedural code to obtain flexible engineering software. **Advances in Engineering Software (1978)**, v. 10, n. 2, p. 72–76, abr. 1988.

MA, H. M.; GAO, X.-L.; REDDY, J. N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. **Journal of The Mechanics and Physics of Solids**, v. 56, n. 12, p. 3379–3391, 2008.

MA, H. M.; GAO, X.-L.; REDDY, J. N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. **Journal of The Mechanics and Physics of Solids**, v. 56, n. 12, p. 3379–3391, 2008.

OPPENHEIMER, D. M.; **Excel VBA Performance Coding Best Practices**. Excel Blog. Disponível em: <<http://blogs.office.com/b/microsoftexcel/archive/2009/03/12/excel-vba-performance-coding-best-practices.aspx>>. Acesso em: 5 jan. 2012.

ORTÚZAR, J. M.; SAMARTÍN, A. Some consistent finite element formulations of 1-D beam models: a comparative study. **Advances in Engineering Software**, v. 29, n. 7-9, p. 667–678, ago. 1998.

PATZÁK, B.; BITTNAR, Z. Design of object oriented finite element code. **Advances in Engineering Software**, v. 32, n. 10-11, p. 759–767, out. 2001.

PHONGTHANAPANICH, S.; DECHAUMPHAI, P. EasyFEM—An object-oriented graphics interface finite element/finite volume software. **Advances in Engineering Software**, v. 37, n. 12, p. 797–804, dez. 2006.

RONEN, B.; PALLEY, M. A.; LUCAS, H. C. Spreadsheet analysis and design. **Communications of the ACM**, v. 32, n. 1, p. 84–93, 1 fev. 1989.

SORIANO, H. L.; Método de Elementos finitos em Análise de Estruturas. 1.ed. São Paulo. Edusp, 2003. 608p.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P.; **Álgebra Linear**. 2.ed. São Paulo. McGraw-Hill, 1990. 583p.

WHITE, I. .; MORGAN, K.; LEWIS, R. . Efficient calculation of finite element stiffness matrices. **Advances in Engineering Software (1978)**, v. 3, n. 2, p. 77–83, abr. 1981.

Ajuda do Microsoft Visual Basic. Disponível em: <F1> no editor do Visual Basic. Acesso em: 5 maio 2014.

**3D Projection**. Disponível em: < [http://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_projection](http://en.wikipedia.org/wiki/3D_projection)>. Acesso em: 30 nov. 2011.

**Histórico**. Histórico das Treliças Espaciais. Curso de Arquitetura e Urbanismo. Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <[http://www.arq.ufsc.br/arq5661/trabalhos\\_2003-2/trelicas/historico.htm](http://www.arq.ufsc.br/arq5661/trabalhos_2003-2/trelicas/historico.htm)>. Acesso em: 10 abr. 2011.

**Orthographic Projection.** Disponível em:  
<[http://en.wikipedia.org/wiki/Orthographic\\_projection\\_\(geometry\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Orthographic_projection_(geometry))>. Acesso em: 30 nov.  
2011.

## APÊNDICE A

Neste apêndice será apresentada a planilha criada para realizar os cálculos do capítulo 4, as fórmulas usadas na planilha e os códigos fonte do VBA.

Facilitando a sua reprodução e compreensão.

### A.1 USO DA PLANILHA

As planilhas foram separadas em três abas:

Dados, onde são inseridos os dados iniciais do problema.

Matriz, onde são geradas as matrizes para solução do problema.

Resultado, onde se apresentado os resultados do problema.

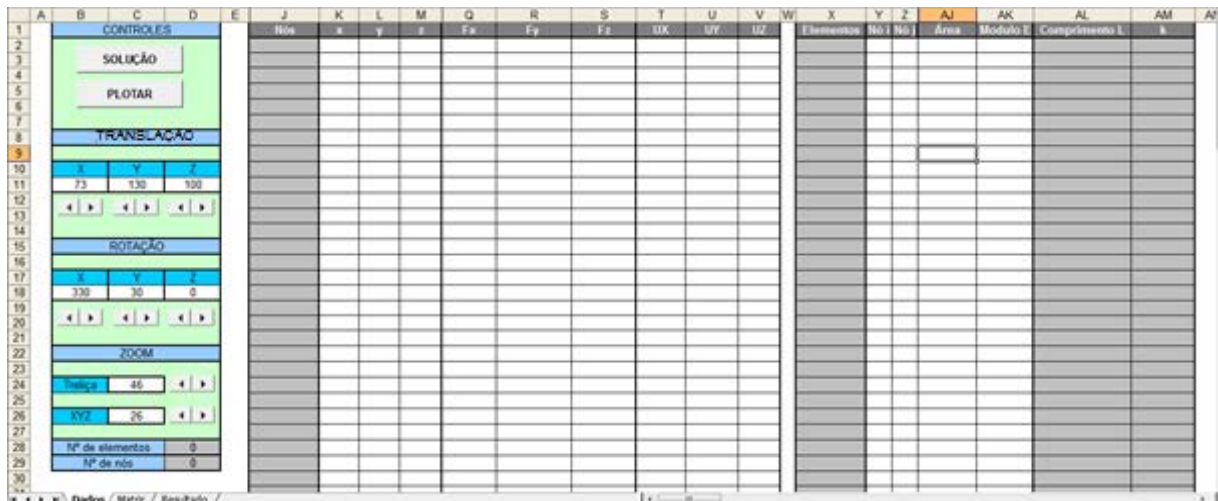


Figura A.1 – Planilha de dados.

Na planilha de Dados são inseridas as informações do problema.

Nas células brancas são inseridos os dados e nas células cinza já possuem fórmulas, e não podem ser modificadas.

Os passos para definir o problema são:

1º Passo: Inserir as coordenadas x, y e z dos nós da treliça (colunas K, L e M) conforme Figura A.2.

Nós	x	y	z	Fx	Fy	Fz	UX	UY	UZ
Nó 1	0	0	0						
Nó 2	0	0	10						
Nó 3	0	10	0						
Nó 4	0	10	10						
Nó 5	10	0	0						
Nó 6	10	0	10						
Nó 7	10	10	0						
Nó 8	10	10	10						
Nó 9	20	0	0						
Nó 10	20	0	10						
Nó 11	20	10	0						
Nó 12	20	10	10						
Nó 13	30	0	0						
Nó 14	30	0	10						
Nó 15	30	10	0						
Nó 16	30	10	10						
Nó 17	40	0	0						
Nó 18	40	0	10						
Nó 19	40	10	0						
Nó 20	40	10	10						
Nó 21	50	0	0						
Nó 22	50	0	10						
Nó 23	50	10	0						
Nó 24	50	10	10						
Nó 25	60	0	0						
Nó 26	60	0	10						
Nó 27	60	10	0						
Nó 28	60	10	10						
Nó 29	70	0	0						
Nó 30	70	0	10						
Nó 31	70	10	0						
Nó 32	70	10	10						

Figura A.2 – Coordenadas.

2º Passo: Informar os nós de cada elemento barra da treliça (coluna Y e Z) conforme Figura A.3.

Elementos	N1	N2	Área	Modulo E	Comprimento L	k
Elemento 1	1	2			10,00	
Elemento 2	1	3			10,00	
Elemento 3	2	4			10,00	
Elemento 4	3	4			10,00	
Elemento 5	1	5			10,00	
Elemento 6	2	6			10,00	
Elemento 7	4	8			10,00	
Elemento 8	3	7			10,00	
Elemento 9	6	8			10,00	
Elemento 10	6	5			10,00	
Elemento 11	5	7			10,00	
Elemento 12	7	8			10,00	
Elemento 13	8	12			10,00	
Elemento 14	7	11			10,00	
Elemento 15	6	10			10,00	
Elemento 16	5	9			10,00	
Elemento 17	9	10			10,00	
Elemento 18	9	11			10,00	
Elemento 19	10	12			10,00	
Elemento 20	11	12			10,00	
Elemento 21	9	13			10,00	
Elemento 22	10	14			10,00	
Elemento 23	11	15			10,00	
Elemento 24	12	16			10,00	
Elemento 25	13	17			10,00	
Elemento 26	14	18			10,00	
Elemento 27	15	19			10,00	
Elemento 28	16	20			10,00	
Elemento 29	13	14			10,00	
Elemento 30	14	16			10,00	
Elemento 31	15	16			10,00	
Elemento 32	13	15			10,00	
Elemento 33	17	18			10,00	

Figura A.3 – Nós dos Elementos.

3º Passo: Aperte no botão “Plotar”, será gerado um gráfico, conforme Figura A.4.

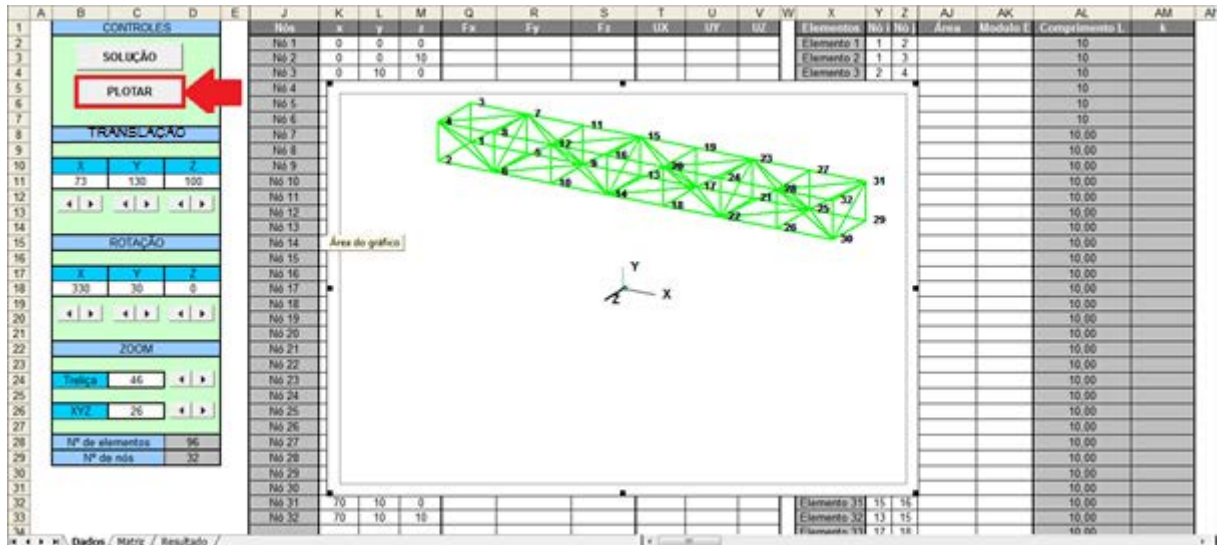


Figura A.4 – Gráfico da Treliça.

4º Passo: Caso necessário translade, rotacione ou de zoom para visualizar melhor o gráfico, modificando as células destacadas na Figura A.5.

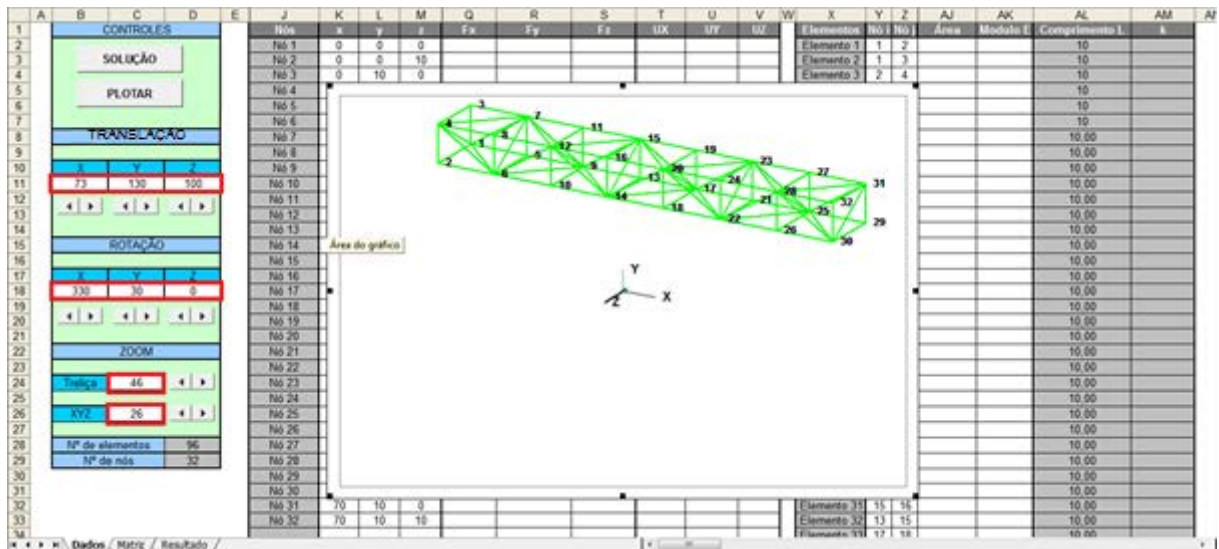


Figura A.5 – Transladar, Rotacionar e Zoom.

5º Passo: Verifique se o gráfico está conforme desejado, caso não esteja repita os passos 1 ao 4 até que fique correto.

6º Passo: Termine de inserir as outras informações, as áreas das secções dos elementos (coluna AJ), os módulos de elasticidade (coluna AK), as cargas aplicadas nos nós (colunas Q, R e S) e os nós que estão travados inserindo zero (colunas T, U e V). Para problemas bidimensionais ou unidimensionais é preciso travar o sistema de coordenadas que não são usados inserindo zero nas colunas T, U ou V.

Nó	x	y	z	Fx	Fy	Fz	UX	UY	UZ
Nó 1	0	0	0				0	0	0
Nó 2	0	0	10				0	0	0
Nó 3	0	10	0		-250				
Nó 4	0	10	10		-250				
Nó 5	10	0	0						
Nó 6	10	0	10						
Nó 7	10	10	0		-250				
Nó 8	10	10	10		-250				
Nó 9	20	0	0						
Nó 10	20	0	10						
Nó 11	20	10	0		-250				
Nó 12	20	10	10		-250				
Nó 13	30	0	0						
Nó 14	30	0	10						
Nó 15	30	10	0		-250				
Nó 16	30	10	10		-250				
Nó 17	40	0	0						
Nó 18	40	0	10						
Nó 19	40	10	0		-250				
Nó 20	40	10	10		-250				
Nó 21	50	0	0						
Nó 22	50	0	10						
Nó 23	50	10	0		-250				
Nó 24	50	10	10		-250				
Nó 25	60	0	0						
Nó 26	60	0	10						
Nó 27	60	10	0		-250				
Nó 28	60	10	10		-250				
Nó 29	70	0	0				0	0	0
Nó 30	70	0	10				0	0	0
Nó 31	70	10	0		-250				
Nó 32	70	10	10		-250				

Figura A.6 – Outras informações.

7º Passo: Aperte o botão “Solução”. Será gerada a solução do problema.

Nó	x	y	z	Fx	Fy	Fz	UX	UY	UZ
Nó 1	0	0	0				0	0	0
Nó 2	0	0	10				0	0	0
Nó 3	0	10	0		-250				
Nó 4	0	10	10		-250				
Nó 5	10	0	0						
Nó 6	10	0	10						
Nó 7	10	10	0		-250				
Nó 8	10	10	10		-250				
Nó 9	20	0	0						
Nó 10	20	0	10						
Nó 11	20	10	0		-250				
Nó 12	20	10	10		-250				
Nó 13	30	0	0						
Nó 14	30	0	10						
Nó 15	30	10	0		-250				
Nó 16	30	10	10		-250				
Nó 17	40	0	0						
Nó 18	40	0	10						
Nó 19	40	10	0		-250				
Nó 20	40	10	10		-250				
Nó 21	50	0	0						
Nó 22	50	0	10						
Nó 23	50	10	0		-250				
Nó 24	50	10	10		-250				
Nó 25	60	0	0						
Nó 26	60	0	10						
Nó 27	60	10	0		-250				
Nó 28	60	10	10		-250				
Nó 29	70	0	0				0	0	0
Nó 30	70	0	10				0	0	0
Nó 31	70	10	0		-250				
Nó 32	70	10	10		-250				

Figura A.7 – Solução.

8º Passo: Abra a aba “Resultado”. Será exibido os deslocamentos nos nós (colunas O, P e Q), reações nos nós (colunas W, X e Y), deslocamentos dos elementos (coluna AN), deformação dos elementos (coluna AO), a força axial dos elementos (coluna AP) e tensão normal dos elementos (coluna AQ).





Uma observação a ser feita é que todos os valores inseridos e gerados não possuem unidades, fica sob responsabilidade do usuário passar as informações com os valores no formato adequado. Por exemplo, se o problema estiver definido no sistema internacional (SI) todos os valores deverão estar no formato compatíveis, as distâncias e comprimentos em metros [m], módulo de elasticidade em Pascal [kg.m/s<sup>2</sup>/m<sup>2</sup>], forças em Newton [kg.m/s<sup>2</sup>] e as áreas em metros quadrados [m<sup>2</sup>].

A aba “Matriz” também é gerada quando o botão “Solução” é apertado. Nesta planilha conterá as matrizes usadas para os cálculos da solução.

Figura A.10 – Matrizes.

São geradas quatro matrizes destacadas nas cores laranja, verde, amarelo e azul.

A matriz em laranja é a matriz de rigidez sem condição de contorno.

A matriz verde é a matriz de rigidez com as condições de contorno aplicadas.

A matriz amarela é a inversa da matriz verde.

A matriz azul é a matriz usada para multiplicar o vetor das forças.

## A.2 FÓRMULAS DA PLANILHA

Neste trabalho, sempre que possível, usou os recursos padrões do Excel para automatizar os cálculos para solução dos problemas. Algumas células da planilha “Dados” foram ocultadas para facilitar a visualização das informações. Neste tópico serão apresentadas as formulas que estão ocultas, para facilitar sua reprodução.

No Quadro A.1 são apresentadas as fórmulas das células D28 e D29.

Quadro A.1 – Células Número de elementos e Numero de nós

	D
28	=CONT.SE(X:X;">0")
29	=CONT.SE(J:J;">0")

As colunas G, H, I e N possuem as células para realizar a projeção para “Plotar” a treliça. As colunas O e P apresentará as coordenadas para projeção. As fórmulas e valores das colunas N, O e P são geradas pelo botão “Plotar”.

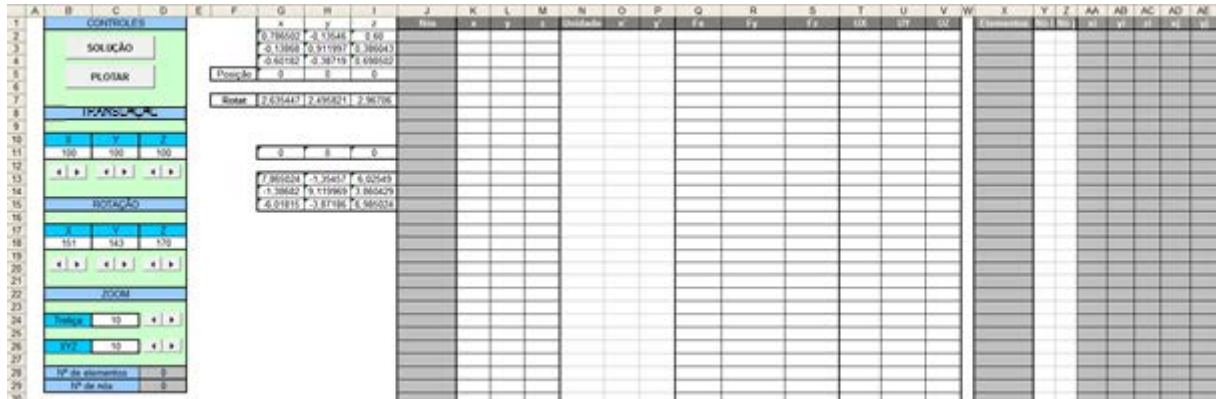


Figura A.11 – Células ocultas.

Quadro A.2 – Fórmulas colunas G, H e I.

	G	H	I
2	=COS(H7)*COS(I7)	=-COS(G7)*SEN(I7)+SEN(G7)*SEN(H7)*COS(I7)	=SEN(G7)*SEN(I7)+COS(G7)*SEN(H7)*COS(I7)
3	=COS(H7)*SEN(I7)	=COS(G7)*COS(I7)+SEN(I7)*SEN(G7)*SEN(H7)	=-COS(I7)*SEN(G7)+COS(G7)*SEN(H7)*SEN(I7)
4	=-SEN(H7)	=SEN(G7)*COS(H7)	=COS(H7)*COS(G7)
5	=MATRIZ.MULT(G11:I11;G2:I4)	=MATRIZ.MULT(G11:I11;G2:I4)	=MATRIZ.MULT(G11:I11;G2:I4)
6			
7	=B18*PI()/180	=C18*PI()/180	=D18*PI()/180
8			
9			
10			
11	=B11-100	=C11-100	=D11-100
12			
13	=G2*\$C\$26	=H2*\$C\$26	=I2*\$C\$26
14	=G3*\$C\$26	=H3*\$C\$26	=I3*\$C\$26
15	=G4*\$C\$26	=H4*\$C\$26	=I4*\$C\$26

As colunas AA até AF são as coordenadas dos nós do elemento. As colunas AG até AI apresentará os valores dos cossenos dos ângulos dos elementos em relação a X, Y e Z. As colunas AN a AS são as coordenadas para “Plotar” a treliça.

	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS
	UY	UZ		Elementos	Nó i	Nó j	xi	yi	zi	xj	yj	zj	CosX	CosY	CosZ	Área	Modulo E	Comprimento L	k	x1	y1	xj	yj		
1																									
2																									
3																									0
4																									0
5																									7,865024
6																									-1,386816
7																									9,119969
8																									-6,01815
9																									-3,871862
10																									
11																									
12																									
13																									
14																									
15																									
16																									
17																									
18																									
19																									
20																									
21																									
22																									
23																									
24																									
25																									
26																									
27																									
28																									
29																									
30																									
31																									

Figura A.12 – Células ocultas.

Os termos em destaque em negrito nas fórmulas a seguir serão os únicos valores a mudarem em cada célula. Utilize o recurso de “auto-preenchimento” para completar as linhas abaixo.

Quadro A.3 – Fórmulas coluna X.

	X
2	=SE(E(Y2<>"";Z2<>"");1;"")
3	=SE(E(Y3<>"";Z3<>"");X2+1;"")

Quadro A.4 – Fórmulas coluna AA, AB e AC.

	AA	AB	AC
2	=SE(\$Y2<>"";PROCV(\$Y2;\$J\$2:\$M\$500;2);"")	=SE(\$Y2<>"";PROCV(\$Y2;\$J\$2:\$M\$500;3);"")	=SE(\$Y2<>"";PROCV(\$Y2;\$J\$2:\$M\$500;4);"")

Quadro A.5 – Fórmulas coluna AD, AE e AF.

	AD	AE	AF
2	=SE(\$Z2<>"";PROCV(\$Z2;\$J\$2:\$M\$500;2);"")	=SE(\$Z2<>"";PROCV(\$Z2;\$J\$2:\$M\$500;3);"")	=SE(\$Z2<>"";PROCV(\$Z2;\$J\$2:\$M\$500;4);"")

Quadro A.6 – Fórmulas coluna AG, AH e AI.

	AG	AH	AI
2	=SE(\$X2<>"";(AD2-AA2)/\$AL2;"")	=SE(\$X2<>"";(AE2-AB2)/\$AL2;"")	=SE(\$X2<>"";(AF2-AC2)/\$AL2;"")

Quadro A.7 – Fórmulas coluna AJ e AK.

	AJ	AK
2	=SE(\$X2<>"";RAIZ((AA2-AD2)^2+(AB2-AE2)^2+(AC2-AF2)^2);"")	=SE(AJ2<>0;AK2*AJ2/AL2;"")

Quadro A.8 – Fórmulas coluna AN e AO.

	AN	AO
2	=SE(\$Y2<>"";PROCV(\$Y2;\$J\$2:\$R\$500;6);"")	=SE(\$Y2<>"";PROCV(\$Y2;\$J\$2:\$P\$500;7);"")

Quadro A.9 – Fórmulas coluna AP e AQ.

	AP	AQ
2	=SE(\$Z2<>"";PROCV(\$Z2;\$J\$2:\$P\$500;6);"")	=SE(\$Z2<>"";PROCV(\$Z2;\$J\$2:\$P\$500;7);"")

Quadro A.10 – Fórmulas coluna AR e AS.

	AR	AS
2	=MATRIZ.MULT({0.0.0;1.0.0;0.1.0;0.0.1};G13:I15)	=MATRIZ.MULT({0.0.0;1.0.0;0.1.0;0.0.1};G13:I15)
3	=MATRIZ.MULT({0.0.0;1.0.0;0.1.0;0.0.1};G13:I15)	=MATRIZ.MULT({0.0.0;1.0.0;0.1.0;0.0.1};G13:I15)
4	=MATRIZ.MULT({0.0.0;1.0.0;0.1.0;0.0.1};G13:I15)	=MATRIZ.MULT({0.0.0;1.0.0;0.1.0;0.0.1};G13:I15)
5	=MATRIZ.MULT({0.0.0;1.0.0;0.1.0;0.0.1};G13:I15)	=MATRIZ.MULT({0.0.0;1.0.0;0.1.0;0.0.1};G13:I15)

### A.3 CÓDIGOS FONTES

O código fonte a seguir está na planilha de “Dados”.

#### Código Fonte A.1 – Planilha Dados

```
Private Sub Plotar_Click()
    If Cells(28, 4) = 0 Or Cells(29, 4) = 0 Then
        Exit Sub
    End If

    Dim antes As Variant
    antes = Now
    Dim i As Integer, coluna As Integer, no As Integer
    Dim newchart As Object
    Application.ScreenUpdating = False
    Application.EnableEvents = False
    coluna = Cells.Find(what:="Unidade").Column

    Range(Cells(2, coluna), Cells(65536, coluna + 2)).Clear
    If Cells(29, 4) <> 0 Then
        no = Cells(29, 4)
    Else
        no = 1
    End If
    Range(Cells(2, coluna), Cells(no + 1, coluna)).FormulaR1C1 = "1"
    Range(Cells(2, coluna + 1), Cells(no + 1, coluna + 2)).FormulaArray = "=MMULT(R2C11:R" & no + 1 & "C_" & coluna & ",R2C7:R5C9)*R24C3/10"

    Set newchart = Charts.Add
    newchart.Visible = False
    newchart.ChartType = xlXYScatterLines
    newchart.HasLegend = False

    i = 2
    Do While Cells(i, 24).Value <> ""
        newchart.SeriesCollection.NewSeries
        newchart.SeriesCollection(i - 1).XValues = "(Dados!R" & i & "C40,Dados!R" & i & "C42)"
        newchart.SeriesCollection(i - 1).Values = "(Dados!R" & i & "C41,Dados!R" & i & "C43)"

        newchart.SeriesCollection(i - 1).ApplyDataLabels
        newchart.SeriesCollection(i - 1).DataLabels.Font.ColorIndex = 1
        newchart.SeriesCollection(i - 1).Points(1).DataLabel.Text = Cells(i, 25).Value
    Loop
End Sub
```

```

newchart.SeriesCollection(i - 1).Points(2).DataLabel.Text = Cells(i, 26).Value
newchart.SeriesCollection(i - 1).Points(1).DataLabel.Font.FontStyle = "Negrito"
newchart.SeriesCollection(i - 1).Points(1).DataLabel.Font.Size = 9
newchart.SeriesCollection(i - 1).Points(2).DataLabel.Font.FontStyle = "Negrito"
newchart.SeriesCollection(i - 1).Points(2).DataLabel.Font.Size = 9
With newchart.SeriesCollection(i - 1)
  With .Border
    .ColorIndex = 4
    .Weight = xlMedium
    .LineStyle = xlContinuous
  End With
  .MarkerSize = 2
  .MarkerBackgroundColorIndex = 4
  .MarkerForegroundColorIndex = 4
  .MarkerStyle = xlCircle
End With
i = i + 1
Loop

newchart.SeriesCollection.NewSeries
newchart.SeriesCollection.NewSeries
newchart.SeriesCollection.NewSeries

With newchart.SeriesCollection(i - 1)
  .Name = "=" & "X" & ""
  .XValues = "=" & (Dados!R2C44,Dados!R3C44) & ""
  .Values = "=" & (Dados!R2C45,Dados!R3C45) & ""
  .ApplyDataLabels AutoText:=True, ShowSeriesName:=True
  With .Border
    .ColorIndex = 16
    .Weight = xlMedium
    .LineStyle = xlContinuous
  End With
  .MarkerStyle = xlNone
  With .DataLabels.Font
    .Name = "Arial"
    .FontStyle = "Negrito"
    .Size = 11
    .ColorIndex = 1
  End With
  .Points(2).DataLabel.Text = "X"
  .Points(1).DataLabel.Delete
End With

With newchart.SeriesCollection(i)
  .Name = "=" & "Y" & ""
  .XValues = "=" & (Dados!R2C44,Dados!R4C44) & ""
  .Values = "=" & (Dados!R2C45,Dados!R4C45) & ""
  With .Border
    .ColorIndex = 15
    .Weight = xlMedium
    .LineStyle = xlContinuous
  End With
  .MarkerStyle = xlNone
  .ApplyDataLabels AutoText:=True, ShowSeriesName:=True
  With .DataLabels.Font
    .Name = "Arial"
    .FontStyle = "Negrito"
    .Size = 11
    .ColorIndex = 1
  End With
  .Points(2).DataLabel.Text = "Y"
  .Points(1).DataLabel.Delete
End With

With newchart.SeriesCollection(i + 1)
  .Name = "=" & "Z" & ""
  .XValues = "=" & (Dados!R2C44,Dados!R5C44) & ""
  .Values = "=" & (Dados!R2C45,Dados!R5C45) & ""
  With .Border
    .ColorIndex = 1
    .Weight = xlMedium
    .LineStyle = xlContinuous
  End With
  .MarkerStyle = xlNone
  .ApplyDataLabels AutoText:=True, ShowSeriesName:=True
  With .DataLabels.Font
    .Name = "Arial"
    .FontStyle = "Negrito"
    .Size = 11
    .ColorIndex = 1
  End With

```

```

.Points(2).DataLabel.Text = "Z"
.Points(1).DataLabel.Delete
End With
newchart.PlotArea.Interior.ColorIndex = xlNone
With newchart.Axes(xlValue)
.MinimumScale = -200
.MaximumScale = 200
.HasMajorGridlines = False
End With
With newchart.Axes(xlCategory)
.MinimumScale = -200
.MaximumScale = 200
.HasMajorGridlines = False
End With
With newchart
.HasAxis(xlCategory, xlPrimary) = False
.HasAxis(xlValue, xlPrimary) = False
End With

Application.ScreenUpdating = True
newchart.Visible = True
Application.EnableEvents = True
newchart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Dados"
MsgBox "Cálculo concluído. Tempo para achar a solução foi de " & Minute(Now - antes) & ":"_
& Second(Now - antes)

End Sub

Private Sub Solucao_Click() 'Botão gera a matriz e principais cálculos e rotinas

If Cells(28, 4) = 0 Or Cells(29, 4) = 0 Then
Exit Sub
End If

Dim antes As Variant
antes = Now
Application.Calculation = xlManual
Application.EnableEvents = False
Worksheets("Matriz").Cells.Delete Shift:=xlUp 'Apaga toda a planilha Matriz

'Criação de variáveis
Dim matriz() As String
Dim inversa() As Variant
Dim contorno() As Variant
Dim k As Double
Dim a As Integer
Dim b As Integer
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim l As Integer
Dim n As Integer
Dim no As Integer
Dim elemento As Integer
Dim r As Integer
Dim c1 As Integer
Dim c2 As Integer
Dim c3 As Integer
Dim c As Integer
Dim d As Integer
Dim ColUX As Integer

elemento = Cells(28, 4)
no = Cells(29, 4)

ReDim matriz(3 * no - 1, 3 * no - 1)

'coloca em todos os campos do array matriz o sinal =
For i = 0 To 3 * no - 1
For j = 0 To 3 * no - 1
matriz(i, j) = "="
Next j
Next i

c1 = Cells.Find(what:="k").Column 'coluna onde está k

'Loop para montar a matriz de rigidez
For n = 1 To elemento
k = Cells(n + 1, Cells.Find(what:="k").Column).Value 'VALOR DE K DO ELEMENTO N
i = Cells(n + 1, Cells.Find(what:="Nó i").Column).Value 'no i
j = Cells(n + 1, Cells.Find(what:="Nó j").Column).Value 'no j
r = n + 1 'linha da célula do elemento

```

```

For a = 0 To 2
  For b = 0 To 2
    c2 = Cells.Find(what:="CosZ").Column - a
    c3 = Cells.Find(what:="CosZ").Column - b
    matriz(3 * i - a - 1, 3 * i - b - 1) = matriz(3 * i - a - 1, 3 * i - b - 1) & "+Dados!R" & r & "C" & c1 &_
    "*Dados!R" & r & "C" & c2 & "*Dados!R" & r & "C" & c3
    matriz(3 * i - a - 1, 3 * j - b - 1) = matriz(3 * i - a - 1, 3 * j - b - 1) & "-Dados!R" & r & "C" & c1 &_
    "*Dados!R" & r & "C" & c2 & "*Dados!R" & r & "C" & c3
    matriz(3 * j - a - 1, 3 * i - b - 1) = matriz(3 * j - a - 1, 3 * i - b - 1) & "-Dados!R" & r & "C" & c1 &_
    "*Dados!R" & r & "C" & c2 & "*Dados!R" & r & "C" & c3
    matriz(3 * j - a - 1, 3 * j - b - 1) = matriz(3 * j - a - 1, 3 * j - b - 1) & "+Dados!R" & r & "C" & c1 &_
    "*Dados!R" & r & "C" & c2 & "*Dados!R" & r & "C" & c3

  Next b
Next a
Next n

'Loop para colocar zeros nas matrizes vazias
For i = 0 To 3 * no - 1
  For j = 0 To 3 * no - 1
    If matriz(i, j) = "" Then
      matriz(i, j) = 0
    End If
  Next j
Next i

'Transcreve o array matriz para a planilha matriz
For i = 1 To 3 * no
  For j = 1 To 3 * no
    Worksheets("Matriz").Cells(i, j).FormulaR1C1 = matriz(i - 1, j - 1)
  Next j
Next i

'aplica condição de contorno
ColUX = Cells.Find(what:="UX").Column
For i = 1 To 3 * no
  For j = 1 To 3 * no
    If i = j Then
      matriz(i - 1, j - 1) = "=IF(AND(Dados!R" & (i - 1) \ 3 + 2 & "C" & (ColUX + (j - 1) Mod 3) &_
      "=0,Dados!R" & (i - 1) \ 3 + 2 & "C" & (ColUX + (j - 1) Mod 3) & "<>""""),1,R[-" & (3 * no + 1) & "]C)"
    Else
      matriz(i - 1, j - 1) = "=IF(OR(and(Dados!R" & (i - 1) \ 3 + 2 & "C" & (ColUX + (i - 1) Mod 3) &_
      "=0,Dados!R" & (i - 1) \ 3 + 2 & "C" & (ColUX + (i - 1) Mod 3) & "<>""""),and(Dados!R" & (j - 1) \ 3 + 2_
      & "C" & (ColUX + (j - 1) Mod 3) & "=0,Dados!R" & (j - 1) \ 3 + 2 & "C" & (ColUX + (j - 1) Mod 3) &_
      "<>""""),0,R[-" & (3 * no + 1) & "]C)"
    End If
  Next j
Next i

'transcreve matriz condição de contorno
For i = 1 To 3 * no
  For j = 1 To 3 * no
    Worksheets("Matriz").Cells(3 * no + i + 1, j).FormulaR1C1 = matriz(i - 1, j - 1)
  Next j
Next i

Range(Cells(1, 46), Cells(3 * no, 3 * no + 46)).Font.ColorIndex = 2

'verifica a versão do Excel e escreve a inversa na planilha Matriz
Dim versao As Integer
versao = Application.Version

With Worksheets("Matriz")
If no <= 17 Or versao >= 120 Then
  .Range(.Cells(6 * no + 3, 1), .Cells(9 * no + 2, 3 * no)).FormulaArray = "=MINVERSE(R" & 3 * no + 2_
  & "C1:R" & 6 * no + 1 & "C" & 3 * no & ")" 'cria matriz inversa da matriz condição de contorno
Else
  'calcula matriz inversa da matriz de contorno
  ReDim inversa(3 * no - 1, 3 * no - 1)
  ReDim contorno(3 * no - 1, 3 * no - 1)

  For i = 0 To 3 * no - 1
    For j = 0 To 3 * no - 1
      contorno(i, j) = Worksheets("Matriz").Cells(i + 3 * no + 2, j + 1)
      If i = j Then
        inversa(i, j) = 1
      Else
        inversa(i, j) = 0
      End If
    Next j
  Next i

```

```

Next i
For l = 0 To 3 * no - 1
  For i = l To 3 * no - 1
    If contorno(i, l) <> 0 And contorno(i, l) <> 1 Then
      k = contorno(i, l)
      For j = 0 To 3 * no - 1
        contorno(i, j) = contorno(i, j) / k
        inversa(i, j) = inversa(i, j) / k
      Next j
    End If
  Next i
  For i = l + 1 To 3 * no - 1
    If contorno(i, l) <> 0 Then
      For j = 0 To 3 * no - 1
        contorno(i, j) = contorno(i, j) - contorno(l, j)
        inversa(i, j) = inversa(i, j) - inversa(l, j)
      Next j
    End If
  Next i
Next l
For l = 0 To 3 * no - 2
  For i = 0 To 3 * no - 2 - l
    If contorno(i, 3 * no - 1 - l) <> 0 Then
      k = contorno(i, 3 * no - 1 - l)
      For j = 0 To 3 * no - 1
        contorno(i, j) = contorno(i, j) - k * contorno(3 * no - 1 - l, j)
        inversa(i, j) = inversa(i, j) - k * inversa(3 * no - 1 - l, j)
      Next j
    End If
  Next i
Next l
'transcreve a matriz inversa
For i = 1 To 3 * no
  For j = 1 To 3 * no
    Worksheets("Matriz").Cells(i + 6 * no + 2, j) = inversa(i - 1, j - 1)
  Next j
Next i
MsgBox "A função MATRIZ.INVERSO não calcula inversa de matrizes maiores que 52x52 no Excel_
Versão" & Application.Version & ". Um modo alternativo será usado."
End If
End With

For i = 1 To 3 * no
  For j = 1 To 3 * no
    If i = j Then
      Worksheets("Matriz").Cells(i + 9 * no + 3, j) = "=IF(AND(Dados!R" & (i - 1) \ 3 + 2 & "C" & (ColUX_
+ (j - 1) Mod 3) & "=0,Dados!R" & (i - 1) \ 3 + 2 & "C" & (ColUX + (j - 1) Mod 3) & "<>""""),0,R[-" & (3 * _
no + 1) & "]C)"
    Else
      Worksheets("Matriz").Cells(i + 9 * no + 3, j) = "=R[-" & (3 * no + 1) & "]C"
    End If
  Next j
Next i

'Formatação da planilha matriz
With Worksheets("Matriz")
  With .Range(.Cells(1, 1), .Cells(3 * no, 3 * no))
    .Interior.ColorIndex = 40
    .Borders(xlInsideVertical).LineStyle = xlContinuous
    .Borders(xlInsideHorizontal).LineStyle = xlContinuous
  End With

  With .Range(.Cells(3 * no + 2, 1), .Cells(6 * no + 1, 3 * no))
    .Interior.ColorIndex = 35
    .Borders(xlInsideVertical).LineStyle = xlContinuous
    .Borders(xlInsideHorizontal).LineStyle = xlContinuous
  End With

  With .Range(.Cells(6 * no + 3, 1), .Cells(9 * no + 2, 3 * no))
    .Interior.ColorIndex = 36
    .Borders(xlInsideVertical).LineStyle = xlContinuous
    .Borders(xlInsideHorizontal).LineStyle = xlContinuous
  End With

  With .Range(.Cells(9 * no + 4, 1), .Cells(12 * no + 3, 3 * no))
    .Interior.ColorIndex = 37
    .Borders(xlInsideVertical).LineStyle = xlContinuous
    .Borders(xlInsideHorizontal).LineStyle = xlContinuous
  End With

.Rows("1:9").Insert Shift:=xlDown
.Range("B2").FormulaR1C1 = "Legenda"

```



```

.Range("C4:E4").Merge
.Range("C5:E5").Merge
.Range("C6:E6").Merge
.Range("B4").Interior.ColorIndex = 40
.Range("B5").Interior.ColorIndex = 35
.Range("B6").Interior.ColorIndex = 36
.Range("B7").Interior.ColorIndex = 37
.Range("C4").FormulaR1C1 = "Matriz Rigidez"
.Range("C5").FormulaR1C1 = "Matriz Condição de Contorno"
.Range("C6").FormulaR1C1 = "Matriz Inversa da Matriz Condição de Contorno"
.Range("C7").FormulaR1C1 = "Matriz Final"

With .Range("A1:F8")
    .Borders(xlEdgeLeft).Weight = xlMedium
    .Borders(xlEdgeTop).Weight = xlMedium
    .Borders(xlEdgeBottom).Weight = xlMedium
    .Borders(xlEdgeRight).Weight = xlMedium
End With
End With

'formatação da planilha resultado
With Worksheets("Resultado")
    .Range("J:BA").Clear
    .Cells.HorizontalAlignment = xlCenter

    With .Range(.Cells(1, 10), .Cells(3 * no + 1, 13))
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .Borders(xlEdgeLeft).Weight = xlMedium
        .Borders(xlEdgeTop).Weight = xlMedium
        .Borders(xlEdgeBottom).Weight = xlMedium
        .Borders(xlEdgeRight).Weight = xlMedium
    End With

    With .Range(.Cells(1, 14), .Cells(no + 1, 25))
        .Borders.LineStyle = xlContinuous
        .Borders(xlEdgeLeft).Weight = xlMedium
        .Borders(xlEdgeTop).Weight = xlMedium
        .Borders(xlEdgeBottom).Weight = xlMedium
        .Borders(xlEdgeRight).Weight = xlMedium
    End With

    .Range(.Cells(1, 14), .Cells(no + 1, 14)).Borders(xlEdgeRight).Weight = xlMedium
    .Range(.Cells(1, 23), .Cells(no + 1, 23)).Borders(xlEdgeLeft).Weight = xlMedium
    .Range(.Cells(1, 18), .Cells(no + 1, 18)).Borders(xlEdgeRight).Weight = xlMedium
    .Range(.Cells(1, 14), .Cells(1, 20)).Borders(xlEdgeBottom).Weight = xlMedium
    .Range(.Cells(1, 10), .Cells(1, 20)).Borders(xlEdgeBottom).Weight = xlMedium
    .Range(.Cells(2, 10), .Cells(4, 13)).Borders(xlEdgeBottom).Weight = xlMedium
    .Range(.Cells(2, 10), .Cells(4, 13)).AutoFill Destination:=.Range(.Cells(2, 10), .Cells(3 * no, 13))

    .Range("J1").FormulaR1C1 = "Nós"
    .Range("K1").FormulaR1C1 = "Carregamento"
    .Range("L1").FormulaR1C1 = "Deslocamento"
    .Range("M1").FormulaR1C1 = "Reações"
    .Range("N1").FormulaR1C1 = "Nós"
    .Range("O1").FormulaR1C1 = "UX"
    .Range("P1").FormulaR1C1 = "UY"
    .Range("Q1").FormulaR1C1 = "UZ"
    .Range("R1").FormulaR1C1 = "Zeros"
    .Range("S1").FormulaR1C1 = "UX'"
    .Range("T1").FormulaR1C1 = "UY'"
    .Range("U1").FormulaR1C1 = "X'"
    .Range("V1").FormulaR1C1 = "Y'"
    .Range("W1").FormulaR1C1 = "FX"
    .Range("X1").FormulaR1C1 = "FY"
    .Range("Y1").FormulaR1C1 = "FZ"
    .Range("AH1").FormulaR1C1 = "UXi"
    .Range("AI1").FormulaR1C1 = "UYi"
    .Range("AJ1").FormulaR1C1 = "UZi"
    .Range("AK1").FormulaR1C1 = "UXj"
    .Range("AL1").FormulaR1C1 = "UYj"
    .Range("AM1").FormulaR1C1 = "UZj"
    .Range("AN1").FormulaR1C1 = "Deslocamento"
    .Range("AO1").FormulaR1C1 = "Deformação"
    .Range("AP1").FormulaR1C1 = "Força Axial"
    .Range("AQ1").FormulaR1C1 = "Tensão Normal"

    'Vetores deslocamento, Reações e coordenadas para plotar
    .Range(.Cells(2, 12), .Cells(3 * no + 1, 12)).FormulaArray = "=MMULT(Matriz!R" & 9 * no + 13 & "C1:R" & 12 * no + 12 & "C" & 3 * no & ",R2C11:R" & 3 * no + 1 & "C11)"
    .Range(.Cells(2, 13), .Cells(3 * no + 1, 13)).FormulaArray = "=MMULT(Matriz!R10C1:R" & 3 * no + 9 & "C" & 3 * no & ",R2C12:R" & 3 * no + 1 & "C12)-R2C11:R" & 3 * no + 1 & "C11"
    .Range(.Cells(2, 19), .Cells(no + 1, 20)).FormulaArray = "=MMULT(R2C15:R" & no + 1 &

```

```

"C18*10000*R25C3+Dados!R2C11:R" & no + 1 & "C14,R2C7:R5C9)"
.Range(.Cells(2, 21), .Cells(no + 1, 22)).FormulaArray = "=MMULT(Dados!R2C11:R" & no + 1 & _
"C14,R2C7:R5C9)"

'Escreve coluna Nós, UX, UY, UZ, FX, FY, FZ, Carregamento no nós
For i = 1 To no
.Cells(3 * i - 1, 10).FormulaR1C1 = "X" & i
.Cells(3 * i, 10).FormulaR1C1 = "Y" & i
.Cells(3 * i + 1, 10).FormulaR1C1 = "Z" & i
.Cells(i + 1, 14) = i
.Range(.Cells(i + 1, 15), .Cells(i + 1, 17)).FormulaArray = "=TRANSPOSE(R" & 3 * i - 1 & "C12:R" & _
3 * i + 1 & "C12)"
.Cells(i + 1, 18) = 0
.Range(.Cells(i + 1, 23), .Cells(i + 1, 25)).FormulaArray = "=TRANSPOSE(R" & 3 * i - 1 & "C13:R" & _
3 * i + 1 & "C13)"
.Cells(3 * i - 1, 11).FormulaR1C1 = "=Dados!R" & i + 1 & "C" & _
Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="FX").Column
.Cells(3 * i, 11).FormulaR1C1 = "=Dados!R" & i + 1 & "C" & _
Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="FY").Column
.Cells(3 * i + 1, 11).FormulaR1C1 = "=Dados!R" & i + 1 & "C" & _
Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="FZ").Column
Next i

'Reproduz as colunas Elementos, Área, Módulo E, Comprimento L e K
.Cells(1, 27).FormulaR1C1 = "=Dados!RC" & Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="Elementos").Column
.Cells(1, 28).FormulaR1C1 = "=Dados!RC" & Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="Nó i").Column
.Cells(1, 29).FormulaR1C1 = "=Dados!RC" & Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="Nó j").Column
.Cells(1, 30).FormulaR1C1 = "=Dados!RC" & Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="Área").Column
.Cells(1, 31).FormulaR1C1 = "=Dados!RC" & Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="Modulo E").Column
.Cells(1, 32).FormulaR1C1 = "=Dados!RC" & Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="Comprimento L").Column
.Cells(1, 33).FormulaR1C1 = "=Dados!RC" & Worksheets("Dados").Cells.Find(what:="k").Column
.Range(.Cells(1, 27), .Cells(1, 33)).AutoFill Destination:=.Range(.Cells(1, 27), .Cells(elemento + 1, 33))

'Preenche as colunas dos deslocamentos nodais dos elementos
For i = 1 To elemento
.Cells(i + 1, 34).FormulaR1C1 = "=R" & 3 * Worksheets("Dados").Cells(i + 1, 25) - 1 & "C12"
.Cells(i + 1, 35).FormulaR1C1 = "=R" & 3 * Worksheets("Dados").Cells(i + 1, 25) & "C12"
.Cells(i + 1, 36).FormulaR1C1 = "=R" & 3 * Worksheets("Dados").Cells(i + 1, 25) + 1 & "C12"
.Cells(i + 1, 37).FormulaR1C1 = "=R" & 3 * Worksheets("Dados").Cells(i + 1, 26) - 1 & "C12"
.Cells(i + 1, 38).FormulaR1C1 = "=R" & 3 * Worksheets("Dados").Cells(i + 1, 26) & "C12"
.Cells(i + 1, 39).FormulaR1C1 = "=R" & 3 * Worksheets("Dados").Cells(i + 1, 26) + 1 & "C12"
Next i

'Preenche as celulas dos deslocamentos, deformação, forças axiais e tensão Normal
.Cells(2, 40).FormulaArray = "=MMULT((R[0]C37:R[0]C39-_
R[0]C34:R[0]C36),TRANSPOSE(Dados!R[0]C33:R[0]C35))"
.Cells(2, 41).FormulaR1C1 = "=RC40/RC32"
.Cells(2, 42).FormulaR1C1 = "=RC40*RC33"
.Cells(2, 43).FormulaR1C1 = "=RC41*RC31"
If elemento <> 1 Then
.Range(.Cells(2, 40), .Cells(2, 43)).AutoFill Destination:=.Range(.Cells(2, 40), .Cells(elemento + 1, 43))
End If
'Formatação
With .Range("AA1:AQ1")
.Font.ColorIndex = 2
.Interior.ColorIndex = 16
End With

With .Range("J1:Y1")
.Font.ColorIndex = 2
.Interior.ColorIndex = 16
End With

With .Range(.Cells(1, 27), .Cells(elemento + 1, 43))
.Borders.LineStyle = xlContinuous
.Borders(xlEdgeLeft).Weight = xlMedium
.Borders(xlEdgeTop).Weight = xlMedium
.Borders(xlEdgeBottom).Weight = xlMedium
.Borders(xlEdgeRight).Weight = xlMedium
End With
.Range(.Cells(1, 27), .Cells(1, 43)).Borders(xlEdgeBottom).Weight = xlMedium
.Range("AZ2:BA5").FormulaArray = "=MMULT({0,0,0;1,0,0;0,1,0;0,0,1},R13C7:R15C9)"
.Range("AR2").FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(Dados!RC25,R2C14:R" & no + 1 & "C20,6)"
.Range("AS2").FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(Dados!RC25,R2C14:R" & no + 1 & "C20,7)"
.Range("AT2").FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(Dados!RC26,R2C14:R" & no + 1 & "C20,6)"
.Range("AU2").FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(Dados!RC26,R2C14:R" & no + 1 & "C20,7)"
.Range("AV2").FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(Dados!RC25,R2C14:R" & no + 1 & "C22,8)"
.Range("AW2").FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(Dados!RC25,R2C14:R" & no + 1 & "C22,9)"
.Range("AX2").FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(Dados!RC26,R2C14:R" & no + 1 & "C22,8)"
.Range("AY2").FormulaR1C1 = "=VLOOKUP(Dados!RC26,R2C14:R" & no + 1 & "C22,9)"
If elemento <> 1 Then

```

```

.Range("AR2:AY2").AutoFill Destination:=.Range(.Cells(2, 44), .Cells(elemento + 1, 51))
End If
.Range(.Cells(2, 44), .Cells(elemento + 1, 53)).Font.ColorIndex = 2
.Range("AX2:BA5").Font.ColorIndex = 2
End With
Application.Calculation = xlAutomatic
Application.EnableEvents = True
MsgBox "Cálculo concluído. Tempo para achar a solução foi de " & Minute(Now - antes) & ":" &
Second(Now - antes)
End Sub

```

O código fonte a seguir está na planilha de “Resultado”.

### Código Fonte A.2 - Planilha Resultado

```

Private Sub CommandButton1_Click()

If Worksheets("Dados").Cells(28, 4) = 0 Or Worksheets("Dados").Cells(29, 4) = 0 Then
Exit Sub
End If

Dim antes As Variant
antes = DateTime.Now
Dim i As Integer, no As Integer, elemento As Integer
Dim newchart As Object
Application.ScreenUpdating = False

Cells(1, 1).Select
elemento = Worksheets("Dados").Cells(28, 4)
Set newchart = Charts.Add
newchart.Visible = False
newchart.ChartType = xlXYScatterLines

i = 2
Do While Cells(i, 44).Value <> ""
newchart.SeriesCollection.NewSeries
newchart.SeriesCollection(i - 1).XValues = "=" & (Resultado!R" & i & "C44,Resultado!R" & i & "C46)"
newchart.SeriesCollection(i - 1).Values = "=" & (Resultado!R" & i & "C45,Resultado!R" & i & "C47)"

With newchart.SeriesCollection(i - 1)
With .Border
.ColorIndex = 4
.Weight = xlMedium
.LineStyle = xlContinuous
End With
.MarkerSize = 2
.MarkerBackgroundColorIndex = 4
.MarkerForegroundColorIndex = 4
.MarkerStyle = xlCircle
End With
i = i + 1
Loop

i = 2
Do While Cells(i, 48).Value <> ""
newchart.SeriesCollection.NewSeries
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).XValues = "=" & (Resultado!R" & i & "C48,Resultado!R" & i & "C50)"
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).Values = "=" & (Resultado!R" & i & "C49,Resultado!R" & i & "C51)"

newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).ApplyDataLabels
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).DataLabels.Font.ColorIndex = 1
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).Points(1).DataLabel.Text = Worksheets("Dados").Cells(i, 25).Value
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).Points(2).DataLabel.Text = Worksheets("Dados").Cells(i, 26).Value
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).Points(1).DataLabel.Font.FontStyle = "Negrito"
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).Points(1).DataLabel.Font.Size = 9
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).Points(2).DataLabel.Font.FontStyle = "Negrito"
newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1).Points(2).DataLabel.Font.Size = 9

With newchart.SeriesCollection(i + elemento - 1)
With .Border
.ColorIndex = 15
.Weight = xlMedium
.LineStyle = xlContinuous
End With
.MarkerSize = 2
.MarkerBackgroundColorIndex = 15
.MarkerForegroundColorIndex = 15
.MarkerStyle = xlSquare
.Border.LineStyle = xlDash

```

```

End With
i = i + 1
Loop

newchart.HasLegend = False
newchart.PlotArea.Interior.ColorIndex = xlNone
With newchart.Axes(xlValue)
    .MinimumScale = -200
    .MaximumScale = 200
    .HasMajorGridlines = False
End With
With newchart.Axes(xlCategory)
    .MinimumScale = -200
    .MaximumScale = 200
    .HasMajorGridlines = False
End With
With newchart
    .HasAxis(xlCategory, xlPrimary) = False
    .HasAxis(xlValue, xlPrimary) = False
End With

newchart.SeriesCollection.NewSeries
newchart.SeriesCollection.NewSeries
newchart.SeriesCollection.NewSeries

With newchart.SeriesCollection(2 * elemento + 1)
    .Name = ""X""
    .XValues = "(Resultado!R2C52,Resultado!R3C52)"
    .Values = "(Resultado!R2C53,Resultado!R3C53)"
    .ApplyDataLabels AutoText:=True, ShowSeriesName:=True
    With .Border
        .ColorIndex = 16
        .Weight = xlMedium
        .LineStyle = xlContinuous
    End With
    .MarkerStyle = xlNone
    With .DataLabels.Font
        .Name = "Arial"
        .FontStyle = "Negrito"
        .Size = 11
        .ColorIndex = 1
    End With
    .Points(1).DataLabel.Delete
End With

With newchart.SeriesCollection(2 * elemento + 2)
    .Name = ""Y""
    .XValues = "(Resultado!R2C52,Resultado!R4C52)"
    .Values = "(Resultado!R2C53,Resultado!R4C53)"
    With .Border
        .ColorIndex = 15
        .Weight = xlMedium
        .LineStyle = xlContinuous
    End With
    .MarkerStyle = xlNone
    .ApplyDataLabels AutoText:=True, ShowSeriesName:=True
    With .DataLabels.Font
        .Name = "Arial"
        .FontStyle = "Negrito"
        .Size = 11
        .ColorIndex = 1
    End With
    .Points(1).DataLabel.Delete
End With

With newchart.SeriesCollection(2 * elemento + 3)
    .Name = ""Z""
    .XValues = "(Resultado!R2C52,Resultado!R5C52)"
    .Values = "(Resultado!R2C53,Resultado!R5C53)"
    With .Border
        .ColorIndex = 1
        .Weight = xlMedium
        .LineStyle = xlContinuous
    End With
    .MarkerStyle = xlNone
    .ApplyDataLabels AutoText:=True, ShowSeriesName:=True
    With .DataLabels.Font
        .Name = "Arial"
        .FontStyle = "Negrito"
        .Size = 11
        .ColorIndex = 1
    End With
End With

```

```
.Points(1).DataLabel.Delete  
End With  
  
newchart.Visible = True  
Application.EnableEvents = True  
newchart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Resultado"  
MsgBox "Cálculo concluído. Tempo para achar a solução foi de " & Minute(Now - antes) & ":" & Second(Now - antes)  
End Sub
```

## APÊNDICE B

### B.1 VBA NO EXCEL E ALGORITMOS

Como pôde ser visto no capítulo 2 a matriz de rigidez, para um único elemento em três dimensões com dois nós, exige uma matriz de rigidez global de ordem 6x6. Para um caso onde existem 4 nós a matriz global exigida seria da ordem  $3 \cdot \text{nós} \times 3 \cdot \text{nós}$  ou 12x12. Escrever manualmente estas matrizes e modificá-las caso necessário é totalmente inviável, demorada e muito suscetível a erros por parte do usuário, para casos deste tipo onde uma tarefa repetitiva é exigida o Excel tem uma excelente ferramenta o VBA. Que permite a criação de macros. Macro é um pequeno programa onde realiza tarefas pré-estabelecidas, ela pode ser personalizada e otimizada caso o usuário conheça a linguagem de programação nativa. A linguagem de programação usada é a *Microsoft Visual Basic for Applications* (VBA), baseado no *Visual Basic* esta linguagem é voltada, como o próprio nome diz, para aplicações, está presente em vários softwares e em quase todos os aplicativos do *Microsoft Office*.

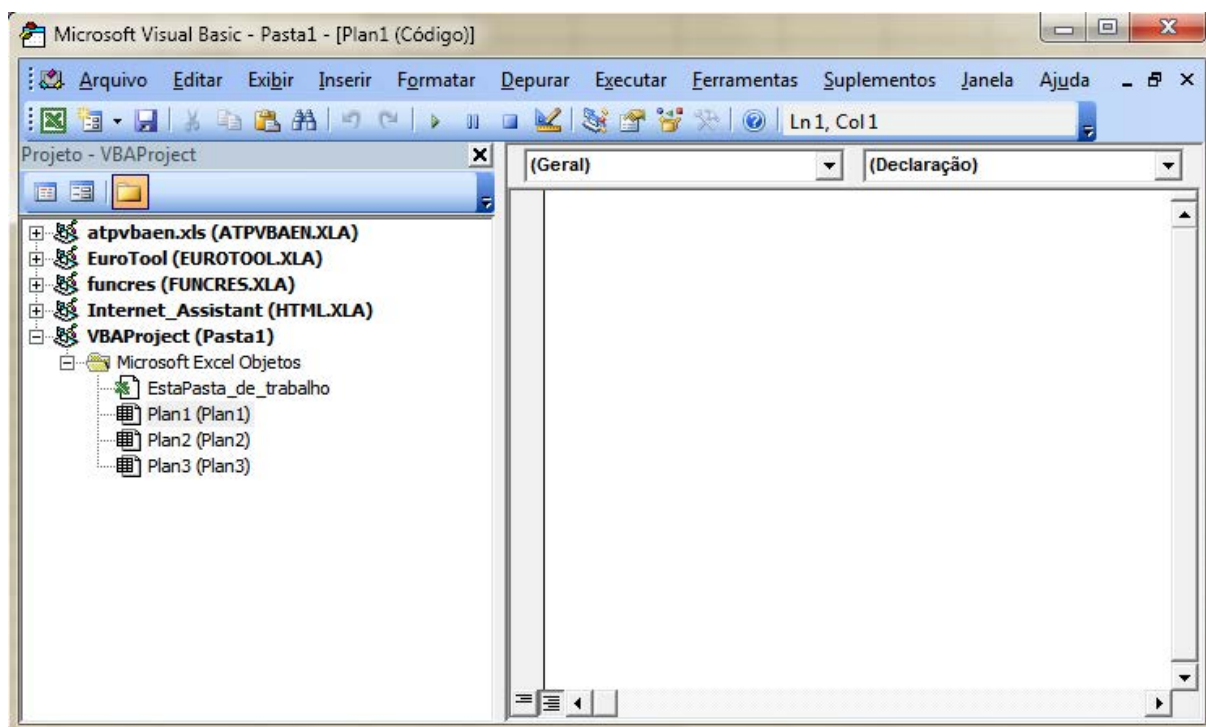


Figura B.1 – Janela de código do Visual Basic.

Para acessar o código fonte do macro basta acessar a sequência Ferramentas>Macros>Editor do Visual Basic ou apertar <Alt+F11>, abrirá uma janela conforme Figura B.1. Como o uso é frequente o ideal é deixar a barra do *Visual Basic* visível

na barra de ferramentas, além do botão para acessar o código fonte ele apresenta outros recursos conforme apresenta a Figura B.2.

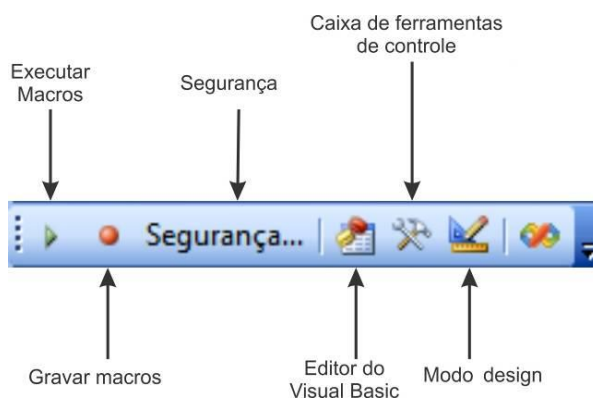


Figura B.2 – Barra de ferramentas do Visual Basic.

Executar macros: executa macros gravadas.

Gravar macros: grava um macro.

Segurança: modificar permissões e restrições do uso do macro.

Editor do Visual Basic: acessa o código fonte dos macros para serem editados.

Caixa de ferramentas de ferramentas de controle: abre a Caixa de ferramentas de controle,

Figura B.3



Figura B.3 – Caixa de ferramentas de controle.

Modo design: permite editar Ferramentas de Controle.

Na “Caixa de Ferramentas de Controle” é possível adicionar e editar controles padrões do *Microsoft Office* ou adicionar outros. Alguns desses controles são apresentados na Figura B.3, como a Caixa de Texto, Botão de comando, botão de opção entre outros. Estes controles facilitam o manuseio do software pelo usuário final.

Existem duas formas de criar macros pelo gravador de macros ou pelo *editor do Visual Basic* e programando diretamente nele.

### B1.1 Gravar uma Macro

Para gravar um macro aperte o botão para “Gravar Macros”.



Figura B.4 – “Grava Macros”.

Surgirá a janela para definir o nome do macro e outras informações.

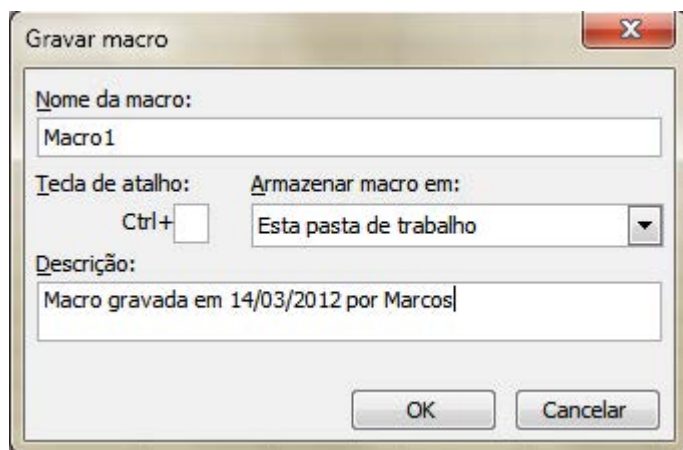


Figura B.5 – Janela Gravar Macro.

Aperte no “OK” a partir de agora todas as ações feita pelo usuário será gravada. Após a execução de todas as ações desejadas aperte no botão “Parar Gravação”:



Figura B.5 – Parar Gravação.

Para executar a macro gravado basta apertar o botão “Executar Macro”:



Figura B.6 – Executar Macro.

A janela para selecionar a macro surgirá, selecione a macro que será executar e aperte “OK”. O macro será executado conforme foi criada. Outras ações podem ser tomadas nesta janela como excluir um macro criado, editar e depurar.



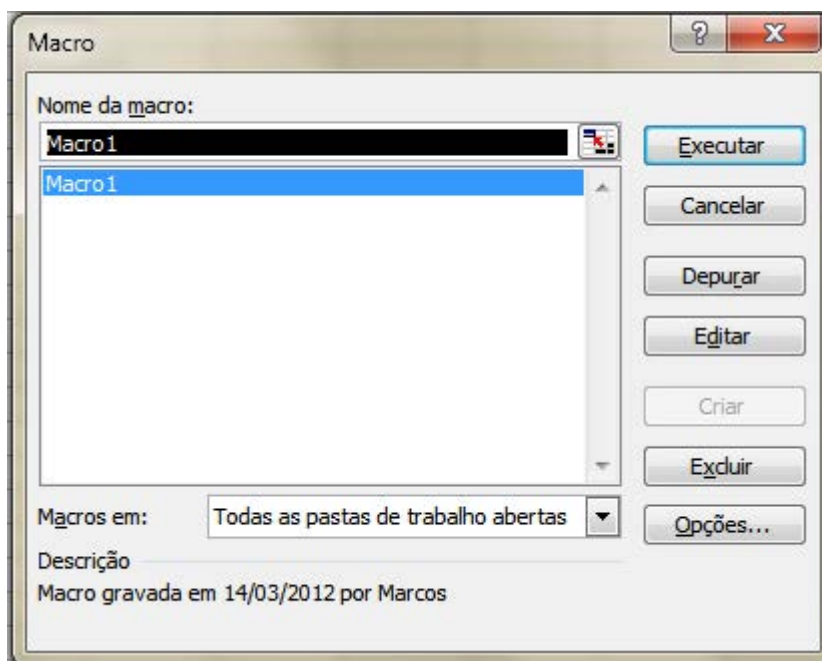


Figura B.7 – Janela Executar Macro.

Para acessar a programação do macro criado aperte a sequência <Alt+F11>. Surgirá a janela conforme a Figura B.8.

Na pequena janela de Projeto estão listados todos os projetos envolvidos. Na pasta “Módulos” estão as instruções geradas pelo método anterior “Gravar Macros”.

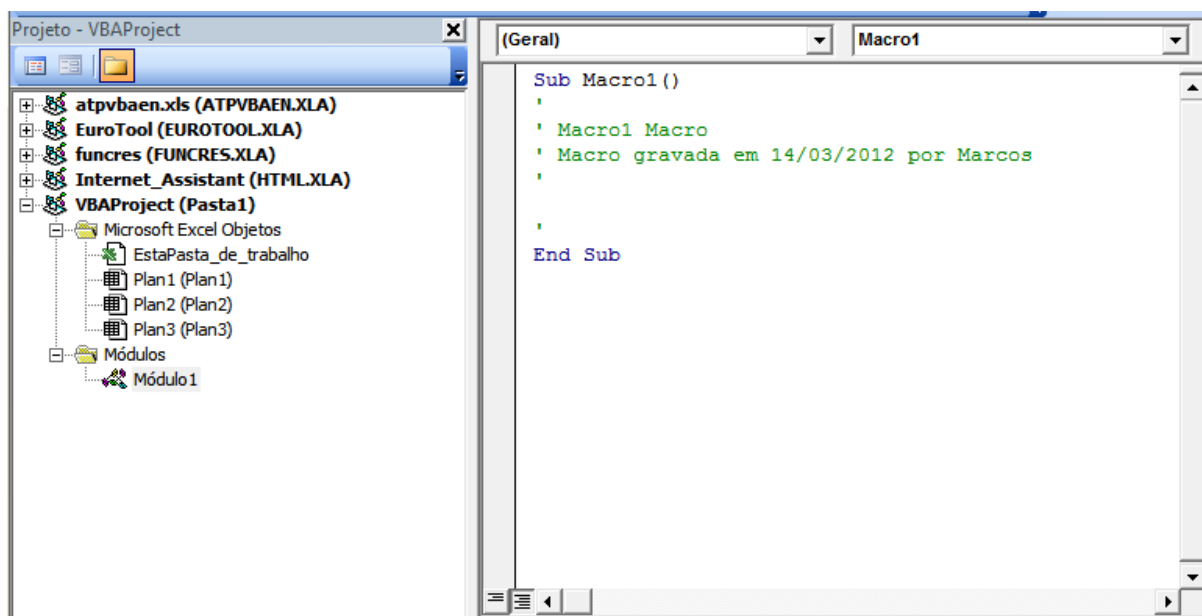


Figura B.8 – Módulo.

O código pode ser modificado conforme a vontade do desenvolvedor.

## B.1.2 Caixa de Ferramentas de Controle

Para aumentar a interatividade dos usuários com os macros o desenvolvedor poder utilizar Ferramentas de Controle como botões, caixas de texto, botão de opção, caixas de listagem, entre outros. Será apresentado como configurar os mais utilizados.

Para adicionar qualquer ferramenta de controle é necessário entrar no modo design, apertando o botão do “Modo Design”.



Figura B.9 – Modo Design.

Agora qualquer ferramenta de controle pode ser adicionada, excluída ou modificada. Para voltar ao modo normal basta apertar novamente no botão “Modo Design”.

Primeiramente será explicado o “Botão de Comando”

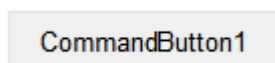


Figura B.10 – Botão de Comando.

O botão de comando quando acionado pelo usuário irá executar as instruções programadas pelo desenvolvedor.

Pode-se modificar algumas propriedades de cada Ferramenta de Controle apertando o botão “Propriedades”.



Figura B.11 – Propriedades.

Uma “Janela de Propriedades” surgirá.

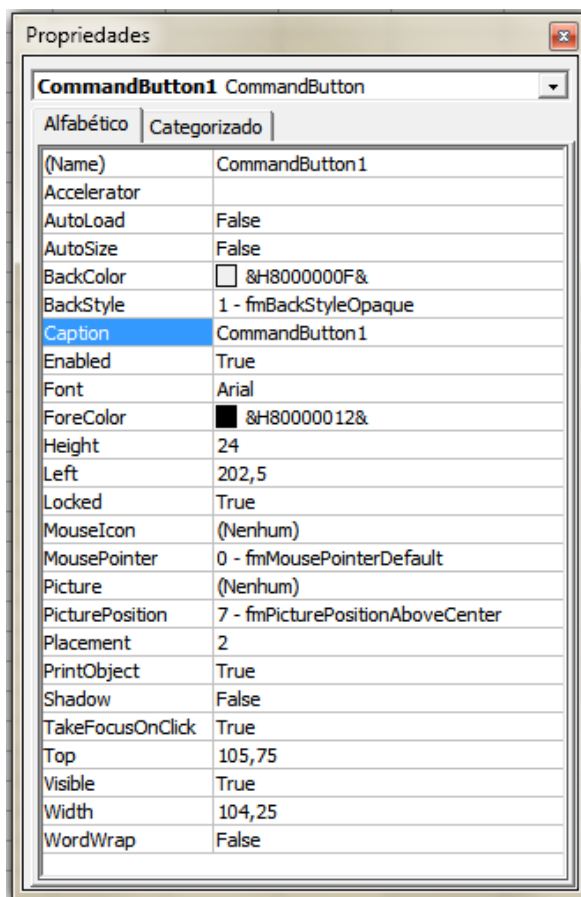


Figura B.12 – Janela de Propriedades.

Algumas das propriedades mais importantes são explicadas abaixo:

*(Name)* altera o nome da ferramenta de controle;

*Caption* altera valor exibido na ferramenta de controle;

*Enabled* deixa ativa ou desativa a ferramenta de controle;

*Height* designa altura da ferramenta de controle;

*Left* designa a distância da ferramenta de controle em pixels em relação a extrema esquerda da tela;

*Top* designa a distância da ferramenta de controle em pixels em relação ao topo da tela;

*Visible* torna a ferramenta de controle visível ou invisível na tela.

Ainda com o modo design ativado dando um duplo clique na ferramenta de controle é possível adicionar instruções a ele no *editor do Visual Basic*.

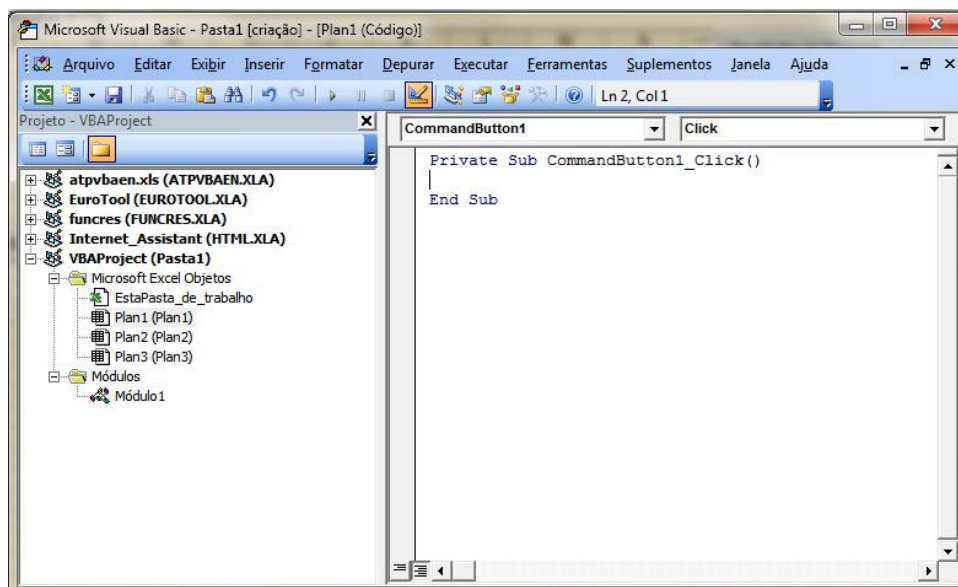


Figura B.13 – Editor Visual Basic para o Botão de Comando

No caso do Botão de Comando surgirão as seguintes linhas no editor:

```
Private Sub Command1_Click()
End Sub
```

A primeira linha apresenta o início das instruções do botão de comando, neste caso quando o usuário aperta o botão iniciará a execução das instruções abaixo dele.

E o *End Sub* informa o fim das instruções do botão de comando.

Ou seja, todas as instruções programadas pelo desenvolvedor que estiverem entre essas duas linhas serão executadas quando o usuário der um clique no botão de comando.

Outra Ferramenta de Controle interessante para ser usada no Excel é o Botão de Rotação.



Figura B.14 – Botão de Rotação

É possível associar os valores assumidos por ele com uma célula da planilha, para isso basta acessar a propriedade *LinkedCell* e informar qual célula será associada. Pode se alterar os valores máximos e mínimos alterando a propriedade *Max* e *Min*.

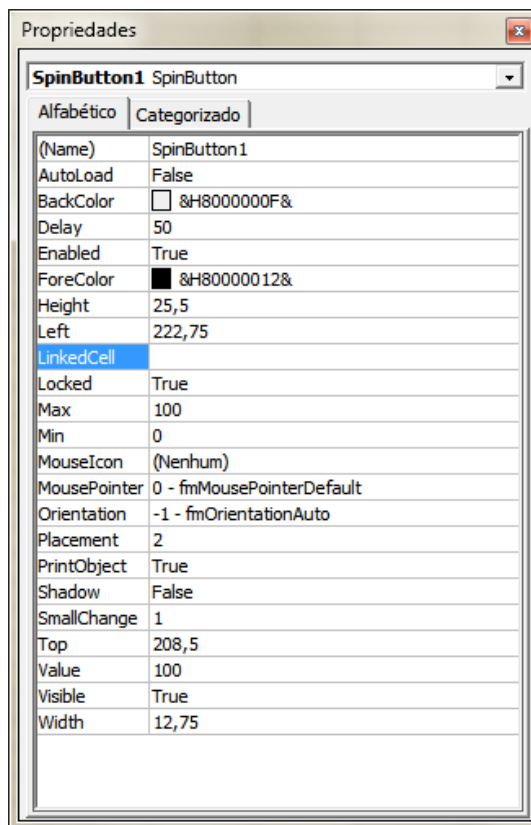


Figura B.15 – Janela de Propriedade do Botão de Rotação

### B.1.3 Declarando Variáveis

Como toda linguagem de programação o VBA trabalha com variáveis.

Para declarar uma variável na janela de código do *editor do Visual Basic* insira a instrução da seguinte forma:

*Dim* nomedavariavel *As* Tipo

Uma tradução livre para instrução acima seria, dimensione a **nomedavariavel** como *Tipo*. No lugar de **nomedavariavel** será colocado o nome da variável desejada e no lugar de *Tipo* será inserido o tipo de variável.

Os tipos de variáveis existentes no VBA são:

Quadro B.1 – Tipos de Variáveis (Fonte: Ajuda do Visual Basic)

Tipo de dados	Tamanho de armazenamento	Intervalo
Byte	1 byte	de 0 a 255
Boolean	2 bytes	True ou False
Integer	2 bytes	de -32.768 a 32.767
Long	4 bytes	de -2.147.483.648 a 2.147.483.647

(número inteiro longo)		
Single (vírgula flutuante de precisão simples)	4 bytes	de -3,402823E38 a -1,401298E-45 para valores negativos; de 1,401298E-45 a 3,402823E38 para valores positivos
Double (vírgula flutuante de dupla precisão)	8 bytes	de -1,79769313486231E308 a -4,94065645841247E-324 para valores negativos; de 4,94065645841247E-324 a 1,79769313486232E308 para valores positivos.
Currency (número inteiro em escala)	8 bytes	de -922.337.203.685.477,5808 a 922.337.203.685.477,5807
Decimal	14 bytes	+/-79.228.162.514.264.337.593.543.950.335 sem vírgula decimal; +/-7,9228162514264337593543950335 com 28 casas decimais à direita; o menor número diferente de zero é +/-0,00000000000000000000000000000001.
Date	8 bytes	De 1 de janeiro de 100 a 31 de dezembro de 9999
Objeto	4 bytes	Qualquer referência Object
String (comprimento variável)	10 bytes + comprimento da sequência	De 0 a aproximadamente 2 bilhões
String (comprimento fixo)	Comprimento da sequência	De 1 a aproximadamente 65.400
Variant (com números)	16 bytes	Qualquer valor numérico até o intervalo de um Double
Variant (com caracteres)	22 bytes + comprimento da sequência	O mesmo intervalo de String de comprimento variável
Definido pelo usuário (usando Type)	Número requerido por elementos	O intervalo de cada elemento é igual ao intervalo do seu tipo de dados.

Outras formas de declarar uma variável são:

*Dim intX As Integer, intY As Integer, intZ As Integer*

*Dim intX, intY, intZ As Integer*

#### B.1.4 Declarando Arrays ou Matrizes

Os *arrays* ou matrizes são declarados da mesma maneira que as variáveis, para declarar uma matriz com o tamanho de 11 linhas e 10 colunas capaz de armazenar texto é feita da seguinte forma:

*Dim nomedaarray(10,9) As String*

O tamanho da *array* é informado entre parênteses ao lado do nome da *array*. No caso acima as linhas iniciam em 0 e termina em 10 (11 linhas) e as colunas inicia em 0 e termina em 9 (10 colunas).

Para que um *array* comece com um índice diferente é usado a seguinte instrução:

*Dim nomedaarray(1 to 11, 1 to 10) As String*

A *array* acima continua com 11 linhas e 10 colunas, porém começam com o índice 1.

Ao longo da programação um *array* pode ser redimensionado caso necessário através da seguinte instrução:

*ReDim nomedaarray(12,5) As String*

### B.1.5 Estruturas de Controle

O VBA também dispõe de algumas estruturas de controle descritas no quadro a seguir:

Quadro B.2 – Estruturas de Controle

Controle	Uso
If -Then - Else	Testa uma condição e executa um determinado conjunto de instruções para um caso TRUE e outro conjunto de instruções para o caso FALSE.
For – Next	Executa uma determinada tarefa um determinado número de vezes.
Do While– Loop	Executa uma determinada tarefa enquanto que a avaliação de uma condição permaneça TRUE.
Do Until – Loop	Executa uma determinada tarefa enquanto que a avaliação de uma condição até que seja TRUE.
Select - Case	Seleciona um dos trechos de código mediante a avaliação de diversas condições.
For – Each – Next	Realiza uma determinada tarefa repetitiva em cada objeto de uma coleção ou em cada item de um <i>array</i> .

### B.1.6 Algoritmos

Os algoritmos a seguir facilitarão a compreensão do uso do VBA, as linhas dos códigos estão comentadas para facilitar a compreensão.

Para apresentar o potencial dos Macros será criado uma que seja capaz de “plotar” um desenho 3D simples tipo arame.

	A	B	C	D	E
1		x	y	z	
2		=COS(C7)*COS(D7)	=-COS(B7)*SEN(D7)+SEN(B7)*SEN(C7)*COS(D7)	=SEN(B7)*SEN(D7)+COS(B7)*SEN(C7)*COS(D7)	
3		=COS(C7)*SEN(D7)	=COS(B7)*COS(D7)+SEN(D7)*SEN(B7)*SEN(C7)	=-COS(D7)*SEN(B7)+COS(B7)*SEN(C7)*SEN(D7)	
4		=-SEN(C7)	=SEN(B7)*COS(C7)	=COS(D7)*COS(C7)	
5		=MATRIZ.MULT(B11:D11;B2:D4)	=MATRIZ.MULT(B11:D11;B2:D4)	=MATRIZ.MULT(B11:D11;B2:D4)	
6					
7	Rotat	=B8*PI()/180	=C8*PI()/180	=D8*PI()/180	
8		0	0	0	
9					
10					
11	Posição	0	0	0	
12					
13					
14					
15	Zoom	3			
16					
17					
18					

Figura B.16 – Fórmulas das Matrizes de rotação e translação e Zoom

	A	B	C	D	
1		x	y	z	
2		0,981627	0,049385	0,18	<b>Matriz rotação</b>
3		0	0,965926	-0,25882	<b>Vetor Translação=Matriz RotaçãoX Vetor Posição</b>
4		-0,19081	0,254064	0,981627	
5		-5,72427	7,621914	29,44882	
6					
7	Rotat	0,261799	0,191986	0	<b>Radianos=Ângulos*Pi()/180</b>
8		15	11	0	<b>Ângulos</b>
9					
10					
11	Posição	0	0	30	<b>Vetor Posição</b>
12					
13					
14					
15	Zoom	30			<b>Zoom</b>
16					

Figura B.17 – Matrizes de rotação e translação e Zoom

Primeiramente é preciso inserir as informações igual a Figura B.16. As células destacadas em vermelho, verde e amarelo são fórmulas da matriz de rotação, vetor de translação e ângulos em radianos respectivamente. A fórmula da matriz de rotação é obtida através do produto vetorial das matrizes de rotação. O vetor translação é obtido pelo produto vetorial entre a matriz de rotação e o vetor posição. As células destacadas em roxo são os ângulos de rotação em graus e as células destacadas em amarelos são os ângulos convertidos em radianos.

Em outra parte da planilha será digitada as coordenadas dos nós do desenho, conforme Figura B.18.



F	G	H	I	J
Nós	X	Y	Z	Unidade
1	0	0	0	1
2	0	0	10	1
3	0	10	0	1
4	0	10	10	1
5	10	0	0	1
6	10	0	10	1
7	10	10	0	1
8	10	10	10	1
9	20	0	0	1
10	20	0	10	1
11	20	10	0	1
12	20	10	10	1
13	30	0	0	1
14	30	0	10	1
15	30	10	0	1
16	30	10	10	1
17	40	0	0	1
18	40	0	10	1
19	40	10	0	1
20	40	10	10	1
21	50	0	0	1
22	50	0	10	1
23	50	10	0	1
24	50	10	10	1
25	60	0	0	1
26	60	0	10	1
27	60	10	0	1
28	60	10	10	1
29	70	0	0	1
30	70	0	10	1
31	70	10	0	1
32	70	10	10	1

Figura B.18 – Coordenadas do nó

A coluna J precisará conter valores iguais a 1, pois será multiplicada pela matriz de rotação e o vetor posição.

Para obter as coordenadas projetadas no plano ortogonal ao eixo Z, usa-se a função do Excel =MATRIZ.MULT(G2:J33;B2:D5)\*B15 e aplicando somente em duas colunas, só são necessárias as coordenadas X e Y. O resultado será conforme Figura B.19.

K	L
X'	Y'
-5,72427	7,621914
-7,63236	10,16255
-5,72427	17,28117
-7,63236	19,82181
4,092002	8,115764
2,183912	10,6564
4,092002	17,77502
2,183912	20,31566
13,90827	8,609614
12,00018	11,15025
13,90827	18,26887
12,00018	20,80951
23,72455	9,103464
21,81646	11,6441
23,72455	18,76272
21,81646	21,30336
33,54082	9,597314
31,63273	12,13795
33,54082	19,25657
31,63273	21,79721
43,35709	10,09116
41,449	12,6318
43,35709	19,75042
41,449	22,29106
53,17336	10,58501
51,26527	13,12565
53,17336	20,24427
51,26527	22,78491
62,98963	11,07886
61,08154	13,6195
62,98963	20,73812
61,08154	23,27876

Figura B.19 – Coordenadas projetadas no plano Z

Para conectar os pontos para formar o desenho digite as informações conforme Figura B.20 e B.21.

N	O	P
Elemento	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>
1	1	2
2	1	3
3	2	4
4	3	4
5	1	5
6	2	6
7	4	8
8	3	7
9	6	8
10	6	5
11	5	7
12	7	8
13	8	12
14	7	11
15	6	10
16	5	9
17	9	10
18	9	11
19	10	12
20	11	12
21	9	13
22	10	14
23	11	15
24	12	16
25	13	17
26	14	18
27	15	19
28	16	20
29	13	14
30	14	16
31	15	16
32	13	15
33	17	18
34	18	20
35	19	20
36	17	19
37	17	21
38	18	22
39	19	23
40	20	24
41	21	22
42	22	24
43	23	24
44	21	23
45	21	25
46	22	26
47	23	27
48	24	28

N	O	P
Elemento	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>
48	24	28
49	25	26
50	26	28
51	28	27
52	25	27
53	25	29
54	26	30
55	27	31
56	28	32
57	29	30
58	30	32
59	31	32
60	29	31
61	1	4
62	1	6
63	1	7
64	4	6
65	4	7
66	6	7
67	7	12
68	12	15
69	15	20
70	20	23
71	23	28
72	28	31
73	6	12
74	12	14
75	14	20
76	20	22
77	22	28
78	28	30
79	7	9
80	9	15
81	15	17
82	17	23
83	23	25
84	25	31
85	6	9
86	9	14
87	14	17
88	17	22
89	22	25
90	25	30
91	9	12
92	14	15
93	17	20
94	22	23
95	25	28
96	30	31

Figura B.20 – Elementos e nós      Figura B.21 - Elementos e nós

Para exibir as coordenadas de cada elemento use as funções =PROCV(O2;\$F\$2:\$L\$33;6), =PROCV(O2;\$F\$2:\$L\$33;7), =PROCV(P2;\$F\$2:\$L\$33;6) e =PROCV(P2;\$F\$2:\$L\$33;7) nas colunas Q, R, S e T e preencha o restante das linhas com o auto-preenchimento. O resultado será:

Q	R	S	T
X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	X <sub>j</sub>	Y <sub>j</sub>
-5,724269861	7,621914	-7,63236	10,16255
-5,724269861	7,621914	-5,72427	17,28117
-7,632359815	10,16255	-7,63236	19,82181
-5,724269861	17,28117	-7,63236	19,82181
-5,724269861	7,621914	4,092002	8,115764
-7,632359815	10,16255	2,183912	10,6564
-7,632359815	19,82181	2,183912	20,31566
-5,724269861	17,28117	4,092002	17,77502
2,183912019	10,6564	2,183912	20,31566
2,183912019	10,6564	4,092002	8,115764
4,092001973	8,115764	4,092002	17,77502
4,092001973	17,77502	2,183912	20,31566
2,183912019	20,31566	12,00018	20,80951
4,092001973	17,77502	13,90827	18,26887
2,183912019	10,6564	12,00018	11,15025
4,092001973	8,115764	13,90827	8,609614
13,90827381	8,609614	12,00018	11,15025
13,90827381	8,609614	13,90827	18,26887
12,00018385	11,15025	12,00018	20,80951
13,90827381	18,26887	12,00018	20,80951
13,90827381	8,609614	23,72455	9,103464
12,00018385	11,15025	21,81646	11,6441
13,90827381	18,26887	23,72455	18,76272
12,00018385	20,80951	21,81646	21,30336
23,72454564	9,103464	33,54082	9,597314
21,81645569	11,6441	31,63273	12,13795
23,72454564	18,76272	33,54082	19,25657
21,81645569	21,30336	31,63273	21,79721

Figura B.22 – Coordenadas dos elementos projetados no plano Z.

Adicione um botão, localizada na Caixa de ferramentas de controle. Com o modo design ativado clique com o botão direito no botão criado e selecione Propriedades. Em (*Name*) altere o nome do botão e em *Caption* altere o nome de exibição. Dê um duplo clique no botão para aparecer o *Editor do Visual Basic*. Entre as linhas “*Private Sub CommandButton1\_Click()*” e “*End Sub*” coloque o Código Fonte B.1.

### Código Fonte B.1 - Plotar

```
Dim antes As Variant 'o comando Dim cria e dimensiona a variável
antes = DateTime.Now 'armazena a hora atuam na variável antes

Dim i As Integer

'os três comando abaixo deixam a execução da macro mais rápida
Application.ScreenUpdating = False 'desativa a atualização da tela
Application.EnableEvents = False 'desativa os eventos do Excel
Application.Calculation = xlManual 'deixa o cálculo das células no manual

Dim newchart As Object
Set newchart = Charts.Add 'cria um novo gráfico

newchart.Visible = False 'não deixa o gráfico visível deixa a macro mais rápido

newchart.ChartType = xlXYScatterLines 'gráfico tipo dispersão com linhas
newchart.HasLegend = False 'tira as legendas

'laço de repetição, executa os comando enquanto
'a célula indicada não está vazia
i = 2
Do While Cells(i, 15).Value <> ""

    newchart.SeriesCollection.NewSeries 'cria uma nova série de dados

    With newchart.SeriesCollection(i - 1)
        'insere a célula da coluna 17 e 19 nos valores de X
        .XValues = "=" & Plot!R & i & " & C17,Plot!R" & i & " & C19)"
        'insere a célula da coluna 18 e 20 nos valores de Y
        .Values = "=" & Plot!R & i & " & C18,Plot!R" & i & " & C20)"
        .ApplyDataLabels 'exibe os Rótulos dos pontos

        'os dois comando abaixo modifica o texto dos Rótulos
        .Points(1).DataLabel.Text = Worksheets("Plot").Cells(i, 15).Value
        .Points(2).DataLabel.Text = Worksheets("Plot").Cells(i, 16).Value

        'as linhas abaixo são formatação das linhas e pontos
        .DataLabels.Font.ColorIndex = 1
        .Points(1).DataLabel.Font.FontStyle = "Negrito"
        .Points(1).DataLabel.Font.Size = 11
        .Points(2).DataLabel.Font.FontStyle = "Negrito"
        .Points(2).DataLabel.Font.Size = 11
        .Border.ColorIndex = 4
        .MarkerBackgroundColorIndex = 4
        .MarkerForegroundColorIndex = 4
        .MarkerStyle = xlCircle
    End With
    i = i + 1
Loop

'as linhas abaixo formata o gráfico
newchart.PlotArea.Interior.ColorIndex = xlNone
With newchart.Axes(xlValue)
    .MinimumScale = -200
    .MaximumScale = 200
    .HasMajorGridlines = False
End With
With newchart.Axes(xlCategory)
    .MinimumScale = -200
    .MaximumScale = 200
    .HasMajorGridlines = False
End With
With newchart
    .HasAxis(xlCategory, xlPrimary) = False
    .HasAxis(xlValue, xlPrimary) = False
```

End With

'os três comandos abaixo reativa a atualização da tela,  
'eventos do Excel, o cálculo automático das células  
'e torna visível o gráfico

```
Application.ScreenUpdating = True
Application.EnableEvents = True
Application.Calculation = xlAutomatic
newchart.Visible = True
```

'coloca o gráfico na planilha Plot  
newchart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plot"

'altera a dimensão e posição do gráfico  
ChartObjects.Width = 620  
ChartObjects.Height = 620  
ChartObjects.Left = 200  
ChartObjects.Top = 0

'exibe uma caixa de mensagem exibindo o tempo de execução da macro  
MsgBox "Cálculo concluído. Tempo de execução foi de " & Minute(Now - antes) & ":" & Second(Now - antes)

Volte para planilha e desative o Modo design. Para executar a macro basta dar um clique no botão criado. O resultado será algo semelhante a Figura B.23. Pode-se melhorar a visualização do desenho basta alterar as células do ângulo de rotação, posição ou zoom. Manualmente seria possível construir o desenho, mas demoraria muito, pela macro demorou 6 segundos (dependerá das características de cada computador).

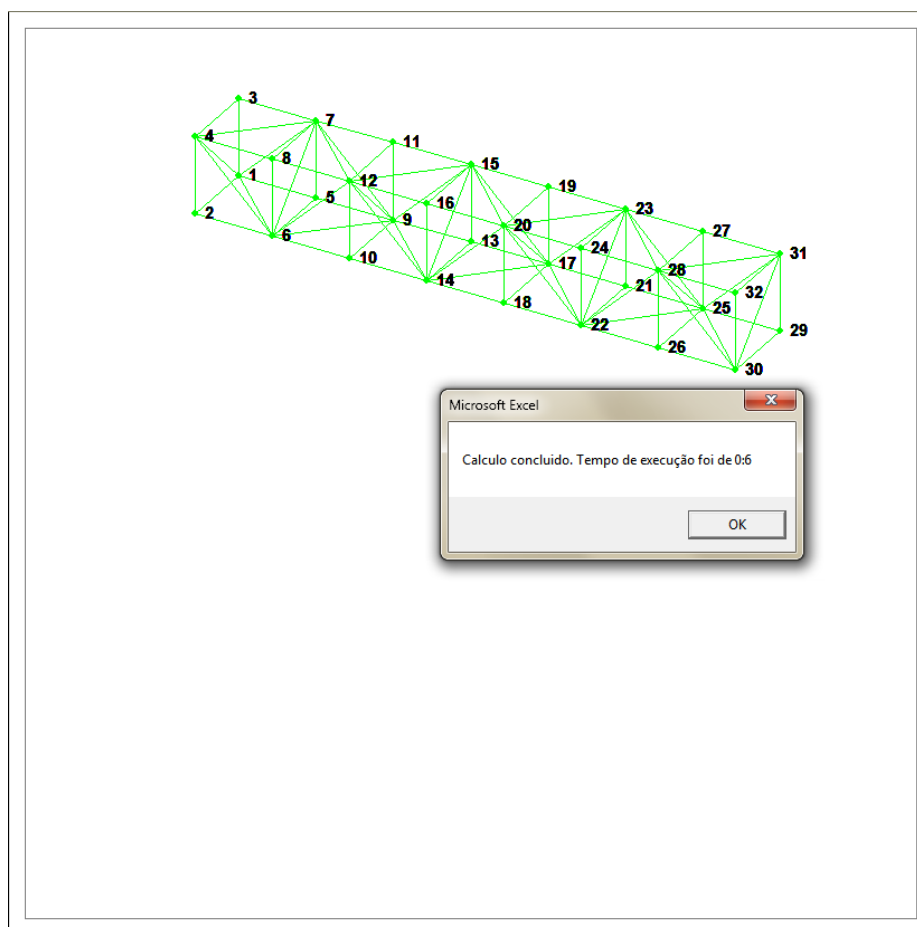


Figura B.23 – Representação gráfica no *Excel*.

As versões do Excel anteriores a versão 2007 (conhecida também como versão 14.0) são incapazes de calcular matrizes inversas maiores que 52x52 através da função “Matriz.Inverso” do Excel (<http://support.microsoft.com/kb/166342>). Para resolver este problema o Código Fonte B.2 é capaz de inverter as matrizes quadradas de qualquer tamanho. Usando as informações do apêndice C.5.2 para desenvolver o algoritmo.

Criando um botão para armazenar o código do macro, digite o Código Fonte B.2.

### Código Fonte B.2 – Inversão de Matriz

```
Private Sub CommandButton1_Click()

Dim antes As Variant
antes = Now

Dim i As Long
Dim j As Long
Dim k As Long
Dim a As Double
Dim celulas As Variant
Dim ordem As Integer
Dim matriz() As Variant
Dim inversa() As Double

'O comando abaixo exibe um InputBox para selecionar a matriz a ser invertida e armazena na variável celulas
Set celulas = Application.InputBox("Selecione as células da matriz a ser invertida?","Inversa", Type:=8)

'verifica o tamanho da matriz e se a célula é quadrada
If celulas.Columns.Count = celulas.Rows.Count Then
    ordem = celulas.Columns.Count 'ordem da matriz
Else
    MsgBox "A matriz não é quadrada."
    Exit Sub
End If

ReDim matriz(ordem, ordem)
ReDim inversa(ordem, ordem)
matriz = celulas.Value2 'Armazena os valores de celulas num array

Application.ScreenUpdating = False 'Este comando desativa a atualização da tela
Application.Calculation = xlManual 'Este comando desativa o cálculo automático das células
Application.EnableEvents = False 'Este comando desativa os eventos do Excel

'laço de repetição que cria uma matriz identidade e armazena na variável inversa
For i = 1 To ordem
    For j = 1 To ordem
        If i = j Then
            inversa(i, j) = 1
        Else
            inversa(i, j) = 0
        End If
    Next j
Next i

'laço de repetição para fazer a triangulação inferior da matriz
For k = 1 To ordem
    If matriz(k, k) <> 0 Then
        For i = k To ordem
            If matriz(i, k) <> 0 And matriz(i, k) <> 1 Then
                a = matriz(i, k)
                For j = 1 To ordem
                    matriz(i, j) = matriz(i, j) / a
                    inversa(i, j) = inversa(i, j) / a
                Next j
            End If
        Next i
        For i = k + 1 To ordem
            If matriz(i, k) <> 0 Then
                For j = 1 To ordem
                    matriz(i, j) = matriz(i, j) - matriz(k, j)
                    inversa(i, j) = inversa(i, j) - inversa(k, j)
                Next j
            End If
        End If
    End If
Next k
```

```

Next i
Else
    MsgBox "Não existe Matriz Inversa."
    Exit Sub
End If
Next k

'laço de repetição para fazer a triangulação superior da matriz
For k = 1 To ordem - 1
    For i = 1 To ordem - 1 - k
        If matriz(i, ordem - k) <> 0 Then
            a = matriz(i, ordem - k)
            For j = 1 To ordem
                matriz(i, j) = matriz(i, j) - a * matriz(ordem - k, j)
                inversa(i, j) = inversa(i, j) - a * inversa(ordem - k, j)
            Next j
        End If
    Next i
Next k

'limpa as informações da planilha Plan2
Worksheets("Plan2").Cells.Clear

'laço de repetição que transcreve a matriz para a planilha Plan2
For i = 1 To ordem
    For j = 1 To ordem
        Worksheets("Plan2").Cells(i, j) = inversa(i, j)
    Next j
Next i

Application.EnableEvents = True
Application.Calculation = xlAutomatic
Application.ScreenUpdating = True

MsgBox "Cálculo concluído. Tempo para achar a solução foi de " & Minute(Now - antes) & ":" & Second(_
Now - antes)

End Sub

```

Talvez o algoritmo mais importante para o MEF seja aquele que gera a matriz de rigidez global. O Código Fonte 2 é usado para gerar a matriz global no Excel.

### Código Fonte B.3 – Gerar Matriz de Rigidez Global

```

c1=Cells.Find(what:="k").Column 'coluna dos valores de k
'laço de repetição para geração da matriz de rigidez global
For n=1 To elemento
    i=Cells(n+1,Cells.Find(what:="Nó i").Column).Value 'no i
    j=Cells(n+1,Cells.Find(what:="Nó j").Column).Value 'no j
    r=n+1 'linha da célula do elemento n
    For a=0 To 2
        For b=0 To 2
            c2=Cells.Find(what:="CosZ").Column-a
            c3=Cells.Find(what:="CosZ").Column-b
            matriz(3*i-a-1,3 *i-b-1)=matriz(3*i-a-1,3*i-b-1)+Cells(r,c1)*Cells(r,c2)*Cells(r,c3)
            matriz(3*i-a-1,3*j-b-1)=matriz(3*i-a-1,3*j-b-1)-Cells(r,c1)*Cells(r,c2)*Cells(r,c3)
            matriz(3*j-a-1,3*i-b-1)=matriz(3*j-a-1,3*i-b-1)-Cells(r,c1)*Cells(r,c2)*Cells(r,c3)
            matriz(3*j-a-1,3*j-b-1)=matriz(3*j-a-1,3*j-b-1)+Cells(r,c1)*Cells(r,c2)*Cells(r,c3)
        Next b
    Next a
Next n

```

## APÊNDICE C

### C.1 ÁLGEBRA MATRICIAL e Excel

Neste apêndice será apresentado conceitos básicos de cálculo matricial, e como este trabalho propõe o uso do Excel com o MEF, será explicado, quando possível, o uso de matriz no Excel.

O uso de matriz é muito comum no meio computacional para resolver sistemas de equações lineares e realizar transformações lineares. A matriz é uma “tabela” bidimensional de ordem  $m \times n$  (m linhas e n colunas) e no caso unidimensional são chamados de vetor. Tanto a matriz quanto o vetor estão dentro de uma categoria chamada *array* na programação de computadores.

Os *array* mantêm elementos de dados de mesmo tipo, pode assumir dimensões maiores que a matriz (bidimensional), cada elemento possui uma posição dentro do *array*, e para acessar determinado elemento é necessário conhecer sua posição identificada por índices no caso das matrizes e vetores elas são representadas da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Figura C.1 – Matriz ordem mxn.

$$V = \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{matrix} \right\}$$

Figura C.2 – Vetor-coluna ordem m.

$$V = \{v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n\}$$

Figura C.3 – Vetor-linha ordem n.

## C.2 NOMENCLATURAS USADAS

Matriz quadrada são as matrizes de ordem  $n \times n$ .

Diagonal principal da matriz são todos os elementos  $a_{ij}$  da matriz quadrada onde  $i=j$ .

Diagonal secundária da matriz são todos os elementos  $a_{ij}$  da matriz quadrada de ordem  $n$  onde  $i+j=n+1$ .

Matriz identidade  $I_n$  são matrizes quadradas de ordem  $n \times n$  com a diagonal principal formada por elementos iguais a 1 e os outros elementos iguais a 0, conforme apresenta a Figura C.4.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Figura C.4 – Matriz Identidade.

A matriz identidade quando multiplicada por outra matriz de ordem compatível não altera a matriz, por exemplo,  $MI_n=M=I_mM$  sendo a matriz  $M$  de ordem  $m \times n$ .

Matriz inversa, a matriz  $A^{-1}$  é dita inversa de  $A$  quando o produto entre as matrizes resulta na matriz identidade ( $AA^{-1}=I$ ).

Seja  $A$  matriz de ordem  $m \times n$  com elementos  $a_{ij}$  a transposta  $A^t$  será de ordem  $n \times m$  e elementos  $a_{ji}$ , ou seja, os elementos da linha de  $A$  são as colunas de  $A^t$  e as colunas de  $A$  são as linhas de  $A^t$ , conforme apresenta Figura C.5.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{transposta}} A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Figura C.5 – Matriz Transposta.

Note que a diagonal principal, quando a matriz for quadrada, permanece inalterada.

Matriz simétrica ocorre quando  $A=A^t$ , portanto só ocorre em matrizes quadrada.



### C.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Multipliação por escalar é possível efetuar uma multiplicação de uma matriz por um número escalar real qualquer, para isso basta multiplicar todos os elementos da matriz pelo número. A divisão pode ser feita multiplicando o inverso do número escalar aos elementos da matriz. Porém nunca se deve dividir um número escalar por uma matriz. Veja a Figura C.6.

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Figura C.6 – Matriz multiplicada por escalar.

Adição e subtração entre matrizes são feitas somente entre matrizes de mesma ordem, considere  $A$  e  $B$ , ambas as matrizes, de ordem  $m \times n$  somando (ou subtraindo) os elementos de mesma posição. Ou seja,  $A \pm B = C$  onde os elementos  $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ . Veja o resultado na Figura C.6.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Figura C.6 – Adição e Subtração das matrizes.

Multipliação entre matrizes só pode ser feita se, e somente se, a matriz  $A$  de ordem  $m \times p$  multiplicar uma matriz  $B$  de ordem  $p \times n$ , a matriz resultante desta operação será a matriz  $C$  de ordem  $m \times n$  onde os elementos  $c_{ij}$  são dados pela equação C.1:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \quad (\text{C.1})$$

O resultado será conforme Figura C.7.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1p}b_{p2} & \dots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \dots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2p}b_{p2} & \dots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \dots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mp}b_{p1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mp}b_{p2} & \dots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \dots + a_{mp}b_{pn} \end{bmatrix}$$

Figura C.7 – Multiplicação entre matrizes.

#### C.4 SISTEMA DE EQUAÇÕES E MATRIZES

Os sistemas de equações são facilmente representados na forma matricial, e consequentemente podem ser manuseadas e resolvidas no computador.

Considere um sistema de equações genérica representada na Figura C.8:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Figura C.8 – Sistema de equações.

Para representar na forma de matriz o sistema de equações acima, uma matriz representará os coeficientes das equações mantendo sua posição na linha e na coluna correspondente, essa matriz irá multiplicar a matriz coluna (ou vetor) com as variáveis, essa multiplicação será igual à matriz coluna contendo os termos independentes. A aparência final do sistema de equações da Figura C.8 na forma de matriz será conforme Figura C.9.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Figura C.9 – Sistema equações na forma matricial.

Um dos pré-requisitos para que um sistema de equações linear tenha uma única solução é a quantidade de incógnitas ser igual à quantidade de equações, portanto as matrizes geralmente serão quadradas e terão ordem  $m \times n$  com  $m=n$ .

## C.5 SOLUÇÕES

De acordo com a Figura C.9 é possível obter a solução do sistema de equações linear simplesmente encontrando a inversa da matriz e multiplicando ao vetor com termos independentes.

Aqui será apresentado um método para obtenção da solução do sistema de equações matricial.

### C.5.1 Obtenção de Sistemas Equivalentes através de Operações Elementares

Dois sistemas são ditos equivalentes se um sistema de equações possui a mesma solução do outro. E é possível obter sistemas equivalentes realizando as seguintes operações elementares:

I – Permuta entre duas equações.

II – Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero.

III – Substituição de uma equação previamente multiplicada por número real diferente de zero e somada à outra equação.

E por meio do uso sucessivo e finito dessas operações elementares é possível chegar à solução do sistema.

#### Exemplo C.1

Veja a seguir um exemplo do procedimento.

Todas as operações são descritas indicando a linha que está sofrendo alteração e a operação que está sendo feita. Abaixo de cada linha está sendo multiplicada por um número para que todos os coeficientes de x sejam iguais a 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y - 6z = 10 \xrightarrow{L_1 \left( \frac{1}{2} \right)} \\ 4x + 2y + 2z = 16 \xrightarrow{L_2 \left( \frac{1}{4} \right)} \\ 2x + 8y - 4z = 24 \xrightarrow{L_3 \left( \frac{1}{2} \right)} \end{array} \right.$$

No caso de permuta entre linhas o procedimento é conforme apresentado a seguir. A linha 2 e 3 serão trocadas entre si.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 4 \\ x + 4y - 2z = 12 \end{cases} \xrightarrow{L_{23}}$$

Substituição de equações somada com outra equação é apresentada a seguir.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ x + 4y - 2z = 12 \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1} \\ x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 4 \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 0x + 2y + z = 7 \xrightarrow{L_2 \left(\frac{1}{2}\right)} \\ 0x - \frac{3y}{2} + \frac{7z}{2} = -1 \xrightarrow{L_3 \left(-\frac{2}{3}\right)} \end{cases} \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 0x + y + \frac{z}{2} = \frac{7}{2} \\ 0x + y - \frac{7z}{3} = -\frac{2}{3} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \end{cases} \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 0x + y + \frac{z}{2} = \frac{7}{2} \\ 0x + 0y - \frac{17z}{6} = -\frac{17}{6} \xrightarrow{L_3 \left(\frac{6}{17}\right)} \end{cases}$$

Note que abaixo da diagonal principal formaram-se zeros, até este ponto o processo é conhecido como *Eliminação de Gauss*.

Agora será realizado substituições por equações somadas com outra equação previamente multiplicada por um valor real, diferente de zero, para obter zeros acima da diagonal principal.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \xrightarrow{L_1 = L_1 + 3L_3} \\ 0x + y + \frac{z}{2} = \frac{7}{2} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_3 \left(\frac{1}{2}\right)} \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 0z = 8 \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2} \\ 0x + y + 0z = 3 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases} \begin{cases} x + 0y + 0z = 2 \\ 0x + y + 0z = 3 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases}$$

Note que o procedimento a ser seguido é zerar as variáveis abaixo da diagonal principal e depois zerar as variáveis acima da diagonal principal, o resultado será a matriz identidade.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Portanto a solução do sistema é o sistema equivalente representado pela matriz identidade que é obtida por meio do uso finito de operações elementares. Para facilitar a visualização geralmente o sistema de equações é representado usando uma matriz com os coeficientes e os termos independentes separadas por um traço vertical conforme a figura a seguir.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right] \xrightarrow{\text{operações elementares}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_m \end{array} \right]$$

Figura C.10 – Solução por meio de operações elementares.

### C.5.2 Inversão de matriz

Outra forma de obter a solução do sistema de equações pode ser através da inversa da matriz, como é apresentado na sequência a seguir.

$$[A]\{X\} = \{C\} \quad (\text{C.2})$$

$\Downarrow$

$$[A]^{-1}[A]\{X\} = [A]^{-1}\{C\} \quad (\text{C.4})$$

$\Downarrow$

$$[I]\{X\} = [A]^{-1}\{C\} \quad (\text{C.5})$$

Da mesma forma que uma sequência finita de operações elementares pode transformar uma matriz na matriz identidade, a matriz identidade pode ser transformada na matriz inversa usando essa mesma sequência de operações. Para facilitar visualmente o processo a matriz identidade é colocada do lado da matriz a ser invertida separada por um traço vertical. Conforme apresenta Figura C.11.

$$[A|I] \xrightarrow{\text{operações elementares}} [I|A^{-1}]$$

Figura C.11 – Obtenção de matriz inversa

### Exemplo C.2

Para exemplificar será usada a matriz do sistema do exemplo C.1.

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 10 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \end{cases} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1(\frac{1}{2}) \\ L_2(\frac{1}{4}) \\ L_3(\frac{1}{2}) \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{L_{23}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2(\frac{1}{2}) \\ L_3(-\frac{2}{3}) \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_3=L_3-L_2} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{6} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{array} \right] \\
 & & & & & \xrightarrow{L_3(-\frac{6}{17})} & \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{34} & \frac{1}{17} & \frac{3}{34} \end{array} \right] & \begin{array}{l} \xrightarrow{L_1=L_1+3L_3} \\ \xrightarrow{L_2=L_2-(\frac{1}{2})L_3} \end{array} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{4}{34} & \frac{3}{17} & \frac{9}{34} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{34} & -\frac{1}{34} & \frac{7}{34} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{34} & \frac{1}{17} & \frac{3}{34} \end{array} \right] \\
 & & & & & \xrightarrow{L_1=L_1-2L_2} & \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{34} & \frac{8}{34} & -\frac{5}{34} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{34} & -\frac{1}{34} & \frac{7}{34} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{34} & \frac{1}{17} & \frac{3}{34} \end{array} \right] & & & & & & 
 \end{array}$$

Para comprovar que esta é a matriz inversa, situado no lado direito do traço vertical, basta multiplicá-la pela matriz dos coeficientes. O resultado será a matriz identidade.

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{34} & \frac{8}{34} & -\frac{5}{34} \\ -\frac{5}{34} & -\frac{1}{34} & \frac{7}{34} \\ -\frac{7}{34} & \frac{1}{17} & \frac{3}{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema pode ser obtida usando a equação (C.5).

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{34} & \frac{8}{34} & -\frac{5}{34} \\ -\frac{5}{34} & -\frac{1}{34} & \frac{7}{34} \\ -\frac{7}{34} & \frac{1}{17} & \frac{3}{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 16 \\ 24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Existem casos em que a matriz não possui inversa, ou seja, o sistema não possui uma única solução ou simplesmente não possui solução. O sistema linear pode receber as seguintes classificações quanto à solução:

$$\text{Sistema Linear} \begin{cases} \begin{cases} \text{-Compatível} \\ \text{(possui solução)} \end{cases} \begin{cases} \text{-Determinado (possui uma solução)} \\ \text{-Indeterminado (possui mais de uma solução)} \end{cases} \\ \text{-Incompatível} \end{cases}$$

Para o caso do sistema linear compatível determinado existirá uma única solução, a matriz com os coeficientes será invertível. E a solução na forma matricial tem a seguinte aparência:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para o sistema linear compatível indeterminado existirá mais de uma solução, geralmente infinitas. Costuma ter menos equações que o número de variáveis, portanto não possui inversa. O resultado após a sequência de operações elementares terá a seguinte aparência:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para o sistema linear incompatível não existirá solução, portanto não terá inversa. Geralmente possui igualdades incoerentes. O resultado após a sequência de operações elementares terá a seguinte aparência:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

## C.6 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

As transformações lineares são funções que trabalham com espaços vetoriais, ou seja, são funções vetoriais. Seu uso é muito comum em softwares que trabalham com gráficos vetorizados como softwares CAD e jogos.

Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais, a transformada de  $V$  em  $W$  ou  $T:V \rightarrow W$  será dita uma transformação linear se as seguintes propriedades ocorrerem:

$$\text{I} - \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$\text{II} - \quad T(ku) = kT(u)$$

para  $\forall u, v \in V$  e  $\forall k \in R$ .

Na computação o uso das transformações lineares se dá através da forma matricial. A seguir algumas transformações mais utilizadas.

## C.6.1 Reflexões

### C.6.1.1 Reflexão em relação aos planos coordenados

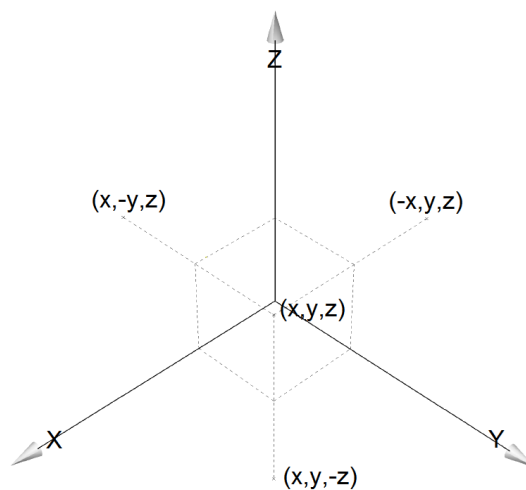


Figura C.11 – Reflexão do ponto  $(x,y,z)$  nos três planos.

A equação C.6 refere-se a reflexão ao plano XOY, equação C.7 ao plano XOZ e equação C.8 ao plano YOZ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.8})$$



## C.6.1.2 Reflexão em relação aos eixos coordenados

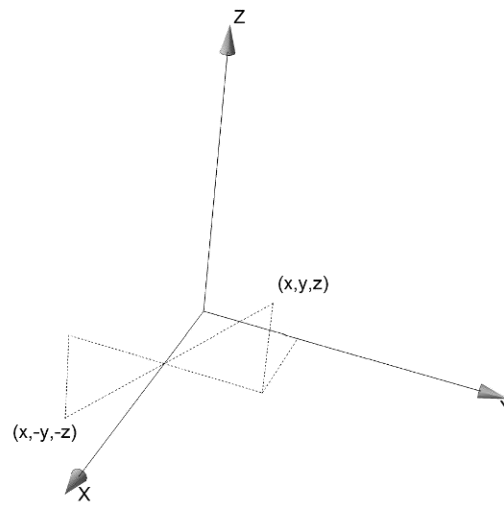


Figura C.12 – Reflexão ao eixo X.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

### C.6.1.3 Reflexão na origem

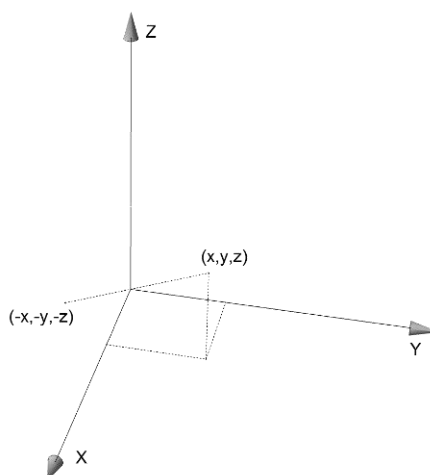


Figura C.13 – Reflexão na Origem.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

### C.6.2 Rotação

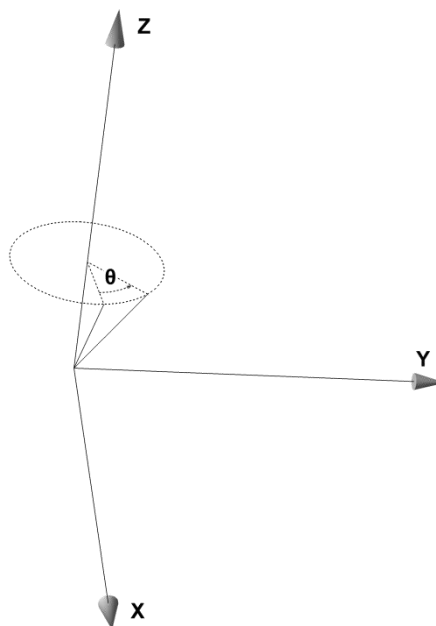


Figura C.14 – Rotação em torno do eixo Z.

As equações C.14, C.15 e C.16 representam rotação em torno do eixo z, y e x respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\text{sen} \theta_z & 0 \\ \text{sen} \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_x & 0 & -\text{sen} \theta_x \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta_x & 0 & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_y & -\text{sen} \theta_y \\ 0 & \text{sen} \theta_y & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

### C.6.3 Translação

A translação é feita conforme equação C.17 é necessário aumentar uma linha no vetor das coordenadas x, y e z devido ao tamanho da matriz transformação.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

Os  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  serão os valores somados às respectivas coordenadas.

Uma forma alternativa para translação é:

$$\{x \ y \ z \ 1\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

### C.6.4 Projeção

Esta transformação é mais utilizada para que elementos tridimensionais sejam exibidos no monitor, plotter, etc. A matriz transformação C.19 representa a projeção no plano  $z=0$ . Para projetar em outros planos basta usar a matriz identidade e substituir o valor 1 por zero no respectivo plano a ser projetado.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

A equação C.19 representa uma projeção paralela ortogonal. As linhas da vista da projeção são paralelas entre si e perpendicular ao plano de projeção.

Existem duas formas de projeção as paralelas e em perspectivas. Dentro dessas categorias existem subcategorias. Somente citando alguns tipos existem a isométrica, bi-métrica e tri-métrica essas estão na categoria projeções paralelas, as projeções perspectivas as linhas da projeção convergem para um ponto, conhecido como ponto de fuga.

### C.6.5 Escala

Transformações usando escalas são usadas para redução e aumento de objetos.

$$\begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

Outra forma de usar a escala é multiplicar o vetor por um valor escalar.

### C.7 USO DO EXCEL

Neste tópico será apresentado o uso do Excel para realizar cálculos matriciais.

Cada linha e coluna das células do Excel podem ser consideradas linhas e colunas de uma matriz. A Figura C.15 apresenta valores destacados no quadro vermelho e pode ser considerada uma matriz de ordem 3x3.

	A	B	C	D	E	F
1	2	4	-6			
2	4	2	2			
3	2	8	-4			
4						
5						
6						
7						

Figura C.15 – Matriz no Excel.

Serão apresentadas algumas operações que pode ser feita com matrizes.

De forma geral as operações com matrizes no Excel seguem os seguintes passos:

**1º Passo:** Seleccionar células vazias com a quantidade de linha e colunas da matriz resultante, conforme figura C.16.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	4	-6		1	5	4					
2	4	2	2		3	9	2					
3	2	8	-4		-6	8	-7					
4												
5												

Figura C.16 – 1º Passo para operação com matriz no Excel.

**2º Passo:** Digitar na barra de formulas a fórmula.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	4	-6		1	5	4		+E1:G3			
2	4	2	2		3	9	2					
3	2	8	-4		-6	8	-7					
4												

Figura C.17 – 2º Passo para operação com matriz no Excel.

**3º Passo:** Segurar os botões Ctrl+Shift e depois aperte Enter.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	4	-6		1	5	4		3	9	-2	
2	4	2	2		3	9	2		7	11	4	
3	2	8	-4		-6	8	-7		-4	16	-11	
4												
5												

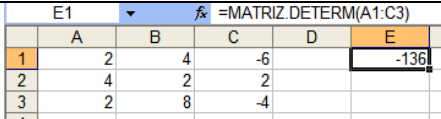
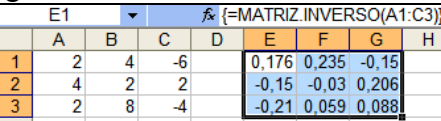
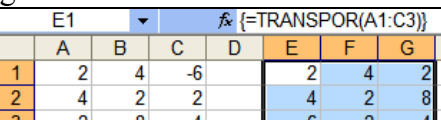
Figura C.18 – 3º Passo para operação com matriz no Excel.

Note a presença de chaves em torno da fórmula, na barra de formula, essa é a representação de matriz no Excel. Qualquer modificação na fórmula dessa nova matriz é preciso seleccionar todas as células envolvidas.

O quadro C.1 apresentará algumas operações que podem ser feitas no Excel em português.

Quadro C.1 – Principais funções do Excel para cálculo matricial

Operação	Barra de fórmulas	Exemplo
Soma	=Células1+Células2	<p>Figura C.19 – Soma no Excel.</p>
Produto Escalar	=Escalar*Células	<p>Figura C.20 – Escalar no Excel.</p>
Produto Matricial	=MATRIZ.MULT(Células1;Células2)	<p>Figura C.21 – Multiplicação no Excel.</p>

Determinante	=MATRIZ.DETERM(Células)	 <p>Figura C.22 – Determinante no Excel.</p>
Matriz Inversa	=MATRIZ.INVERSO(Células)	 <p>Figura C.24 – Matriz inversa no Excel.</p>
Transposta	=TRANSPOR(Células)	 <p>Figura C.25 – Transposta no Excel.</p>

O determinante é o único caso de operação com matriz que não necessita seguir os passos anteriores.