

Roberto Artur Cornetti Silva
Rodolpho Vilhena de Moraes
Maria Cecília F. de P. S. Zanardi

Um estudo da Libração Laplaciana



UM ESTUDO
DA LIBRAÇÃO
LAPLACIANA

FUNDAÇÃO EDITORA DA UNESP

Presidente do Conselho Curador

Mário Sérgio Vasconcelos

Diretor-Presidente

José Castilho Marques Neto

Editor-Executivo

Jézio Hernani Bomfim Gutierre

Assessor Editorial

João Luís Ceccantini

Conselho Editorial Acadêmico

Alberto Tsuyoshi Ikeda

Áureo Busetto

Célia Aparecida Ferreira Tolentino

Eda Maria Góes

Elisabete Maniglia

Elisabeth Criscuolo Urbinati

Ildeberto Muniz de Almeida

Maria de Lourdes Ortiz Gandini Baldan

Nilson Ghirardello

Vicente Pleitez

Editores-Assistentes

Anderson Nobara

Jorge Pereira Filho

Leandro Rodrigues

ROBERTO ARTUR CORNETTI SILVA
RODOLPHO VILHENA DE MORAES
MARIA CECÍLIA FRANÇA
DE PAULA SANTOS ZANARDI

UM ESTUDO
DA LIBRAÇÃO
LAPLACIANA



© 2012 Editora UNESP

Direitos de publicação reservados à:
Fundação Editora da UNESP (FEU)

Praça da Sé, 108
01001-900 – São Paulo – SP
Tel.: (0xx11) 3242-7171
Fax: (0xx11) 3242-7172
www.editoraunesp.com.br
www.livraria.unesp.com.br
feu@editora.unesp.br

CIP – BRASIL. Catalogação na fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

S583e

Silva, Roberto Artur Cornetti

Um estudo da Libração Laplaciana / Roberto Artur Cornetti
Silva, Rodolpho Vilhena de Moraes, Maria Cecília França de
Paula Santos Zanardi. São Paulo: Editora Unesp, 2012.

Inclui bibliografia

ISBN 978-85-393-0377-9

1. Satélites naturais – Órbitas – Modelos matemáticos.
I. Vilhena de Moraes, Rodolpho. II. Zanardi, Maria Cecília
França de Paula Santos. III. Título.

12-9354

CDD: 521

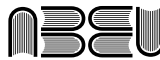
CDU: 521

Este livro é publicado pelo projeto *Edição de Textos de Docentes e Pós-Graduados da UNESP* – Pró-Reitoria de Pós-Graduação da UNESP (PROPG) / Fundação Editora da UNESP (FEU)

Editora afiliada:



Asociación de Editoriales Universitarias
de América Latina y el Caribe



Associação Brasileira de
Editoras Universitárias

AGRADECIMENTOS

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp) e ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) pela nossa formação acadêmica.

Aos colegas do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá da Unesp, *campus* de Guaratinguetá e aos membros do Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia da Unesp, pela consideração na realização deste trabalho.

À assessora administrativa I do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá da Unesp, *campus* de Guaratinguetá, Eliana Maris Ferraz Fornitano, pela amizade, eficiência e dedicação na execução deste trabalho.

*Aos mestres
Sylvio Ferraz Mello
e Wagner Sessin (in memoriam);
às nossas famílias e
aos alunos do campus de Guaratinguetá*

SUMÁRIO

Introdução 11

- 1 Características do problema 17
- 2 Influências das comensurabilidades e da variação do Ângulo Crítico Laplaciano 27
- 3 Novas características do movimento 43
- 4 Sistema Auxiliar de Hori 67
- 5 Hamiltoniana e Geratriz da Transformação do Método de Hori 91
- 6 Influências das principais perturbações de ordens superiores 101
- 7 Contribuição da Geratriz da Transformação 121
- 8 Características do movimento 141

Conclusão 159

Referências bibliográficas 163

Apêndice A 165

Apêndice B 205

Apêndice C 227

INTRODUÇÃO

Este trabalho estuda as variações de longo período do movimento plano, ao redor de um corpo central, de quatro corpos menores de massas comparáveis, satisfazendo:

- i) os períodos orbitais dos três primeiros satélites são aproximadamente comensuráveis nas razões 4:2:1.
- ii) estão sujeitos às influências da Libração Laplaciana através de suas correspondentes características:
 - a) Comensurabilidade Laplaciana
 - b) Variação do Ângulo Crítico Laplaciano em torno de um ponto de equilíbrio conhecido.
 - c) Conceito de Equilíbrio Instantâneo introduzido por Henrard (1983), em torno da Condição do Equilíbrio de Laplace.

Seu primeiro objetivo consiste na caracterização de uma nova Hamiltoniana sob as influências das Comensurabilidades e Libração Laplaciana, cujo núcleo seja integrável e representativo do principal comportamento do movimento. Esse requisito básico de De Sitter (1925) para o estudo de um problema ressonante conduz ao seu segundo objetivo, que consiste na construção de uma solução intermediária do movimento mais próxima da realidade do que as órbitas keplerianas.

A descrição que se segue define os capítulos e apêndices com respeito às ideias adotadas neste estudo.

A partir da referência original Marsden (1966), no capítulo 1 são introduzidos os elementos característicos do movimento, as influências a serem consideradas e as ideias básicas de desenvolvimento.

No capítulo 2 é discutida uma extensão de Silva (1986) de modo a definir uma nova Hamiltoniana, que descreva as equações do movimento sob as influências das comensurabilidades e variação do ângulo crítico laplaciano. Em realidade, tal transformação canônica decorre da composição de três outras transformações canônicas definidas sob as condições impostas pelas influências que se seguem:

- i) Comensurabilidades 2:1 e variação do Ângulo Crítico Laplaciano. A correspondente transformação tem por objetivo a caracterização das variáveis canônicas associadas com as comensurabilidades 2:1 e variação do ângulo crítico laplaciano, em torno dos valores de referência definidos para as condições de ressonâncias exatas. Ressalte-se a introdução de um Parâmetro Característico do Movimento posteriormente definido através da condição de o Ângulo Crítico Laplaciano ser uma variação em torno de um ponto de equilíbrio conhecido.
- ii) Integral Primeira de Sessin e Henrard. Essa transformação é introduzida de modo a caracterizar tal elemento como uma das novas variáveis canônicas, com conseqüente diminuição no número de variáveis a serem discutidas neste estudo.
- iii) Comensurabilidade laplaciana e variação do Ângulo Crítico Laplaciano. A correspondente transformação define as variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano sob as condições impostas pelas influências da comensurabilidade laplaciana e da variação do ângulo crítico laplaciano. Ressalte-se a introdução de uma função característica do movimento posteriormente definida através da identificação de um vínculo válido numa conveniente vizinhança, em torno da qual o principal comportamento do movimento se verifica.

No capítulo 3 são estudadas novas condições em torno das quais o movimento é definido. Tomando por referência as ideias básicas de Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito ao Método de Hori (1966) e a solução do seu correspondente sistema auxiliar, este estudo de um núcleo principal do movimento, sob condições similares as dos satélites galileanos de Júpiter, conduz à identificação de:

- i) Uma Variação Característica do Movimento que define o principal comportamento da parte forçada do movimento, em torno de seu correspondente ponto de equilíbrio.
- ii) As componentes das excentricidades forçadas e livres.
- iii) Novas variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano.

A introdução de uma nova Hamiltoniana descreve as equações do movimento, em termos de novas variáveis canônicas definidas sob as correspondentes condições impostas pelo principal comportamento do movimento.

Uma análise dessas novas variáveis canônicas identifica o movimento nas vizinhanças de um conceito similar ao do Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983), bem como sugere a definição da Função Característica do Movimento de modo a satisfazer um vínculo imposto por tal conceito. Sob a condição do Equilíbrio Instantâneo Similar, o movimento é definido numa conveniente vizinhança sob a influência do correspondente vínculo, de modo a caracterizar as excentricidades forçadas através de funções de variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano, que estão definidas em torno de seus correspondentes valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace. Ressalte-se nessa vizinhança a independência das demais variáveis com respeito a tais influências. Em razão das suas características locais, as influências do vínculo e dos valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace serão discutidas posteriormente através das ideias básicas do Método de Hori sobre:

- i) A solução do novo Sistema Auxiliar de Hori associado com o núcleo principal da nova Hamiltoniana.

- ii) A solução do Sistema de Equações Variacionais associado com as correspondentes influências das perturbações de ordens superiores com respeito à primeira solução.

No capítulo 4 o Método de Hori é novamente aplicado sob a condição de que as variáveis canônicas originais, independentes das influências acima discutidas, preservam as mesmas características das correspondentes novas variáveis canônicas numa conveniente vizinhança. Em outras palavras, essas variáveis originais permanecem invariantes sob tal Transformação de Hori numa conveniente vizinhança.

Nesse capítulo é estudada a solução do novo Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento, o qual é definido a partir do núcleo principal da nova Hamiltoniana. Este estudo se completa com a identificação das principais influências do Equilíbrio Instantâneo Similar sobre a referida solução, de modo a caracterizar os principais comportamentos dos valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace e do vínculo imposto por tal conceito. Tal vínculo é aqui identificado a partir das ideias básicas do Método de Hori, de modo a definir as características de uma constante em excesso de contribuição nula para a solução do Sistema Auxiliar de Hori, mas cuja influência é essencial para o estudo das influências das perturbações de ordens superiores sobre a referida solução. Em particular, ressalte-se a importância de tal influência para a identificação das características das variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano, bem como a restrição imposta pela condição do Equilíbrio de Laplace sobre a vizinhança do Equilíbrio Instantâneo Similar.

As principais componentes da nova Hamiltoniana e da Geratriz da Transformação associadas com o Método de Hori (1966) são discutidas no capítulo 5 na conveniente vizinhança sob a influência da condição do Equilíbrio de Laplace. Um núcleo das principais perturbações de ordens superiores com respeito à solução do correspondente Sistema Auxiliar de Hori, bem como um núcleo principal da Geratriz da Transformação completam tal identificação.

No capítulo 6 são estudados os principais comportamentos das constantes e do parâmetro de integração da solução do Sistema Auxiliar de Hori com respeito à variável tempo. Este estudo é desenvolvido tomando por referências o núcleo das principais perturbações de ordens superiores, o sistema de equações variacionais associado com o Sistema Auxiliar de Hori (Sessin, 1983) e características similares às dos Satélites Galileanos de Júpiter. Ressalte-se das influências do Equilíbrio Instantâneo Similar que seu correspondente vínculo caracteriza o valor de uma constante de integração que define a amplitude do ângulo crítico laplaciano.

Tomando em consideração uma característica do movimento sugerida pelas influências das comensurabilidades, no capítulo 7 são discutidas as principais contribuições da Geratriz da Transformação para elementos característicos do movimento, através de seus correspondentes parênteses de Poisson (Sessin, 1983) das equações de Hori (1966) dos respectivos elementos originais. Ressalte-se que tal característica auxiliar é essencial para a eliminação da contribuição linear da variável tempo na expressão dos parênteses em questão. Este estudo se completa com a identificação dos principais comportamentos das variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano, as quais estão definidas em torno de valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace.

No capítulo 8 são avaliados os principais comportamentos das variáveis canônicas utilizadas neste estudo, de modo a permitir a caracterização de uma solução intermediária do movimento definida pela solução do correspondente Sistema Auxiliar de Hori, sob as principais influências das perturbações de ordens superiores. Os resultados obtidos são também apresentados em termos dos elementos característicos do movimento.

Este estudo se completa com três Apêndices.

No Apêndice A são apresentados os elementos utilizados nas definições das Hamiltonianas auxiliares e dos desenvolvimentos de identificação de características do movimento.

No Apêndice B são definidos os elementos que permitem a caracterização de uma solução intermediária do movimento, de modo a levar em consideração as influências das Comensurabilidades, Variação do Ângulo Crítico Laplaciano e Equilíbrio Instantâneo Similar.

Objetivando uma avaliação dos resultados discutidos, no Apêndice C é efetuada uma aplicação deste estudo ao movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter, visto que tal movimento satisfaz as características do problema em questão quando negligenciamos as influências de:

- i) Inclinações
- ii) Sol, outros planetas e satélites
- iii) Efeito de marés
- iv) Comensurabilidade 3:7 entre o terceiro e quarto satélites.

Este estudo é desenvolvido tomando por referência dados originais de Sato (1986) e Nasa (2007), de modo a permitir uma comparação dos resultados decorrentes deste modelo com resultados conhecidos.

1

CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

Este trabalho estuda um movimento plano, ao redor de um corpo central, de quatro corpos menores de massas comparáveis sujeitos às seguintes condições:

- i) A única força que age entre eles é a atração gravitacional.
- ii) Os períodos orbitais dos três primeiros satélites são aproximadamente comensuráveis nas razões 4:2:1.
- iii) A existência de um ângulo crítico associado com uma terceira comensurabilidade, a qual é definida pela diferença das comensurabilidades 2:1.
- iv) Conceito de Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983), que define o movimento numa conveniente vizinhança em torno da condição do Equilíbrio de Laplace, onde os comportamentos das excentricidades forçadas dos três primeiros satélites podem ser descritos por funções das correspondentes variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano.

Em realidade, esse movimento caracteriza uma aproximação plana do movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter, cujas equações podem ser obtidas diretamente da referência original Marsden (1966). Neste estudo é assumido que tal aproximação preserva as

mesmas denominações, ordens de grandeza e características dos elementos do conhecido movimento, entre as quais ressaltamos:

- i) A existência de uma integral primeira denominada de Integral Primeira de Sessin e Henrard.
- ii) O conceito de Libração Laplaciana associado com a influência da terceira comensurabilidade (denominada Comensurabilidade Laplaciana) e o correspondente ângulo crítico (denominado Ângulo Crítico Laplaciano), o qual é uma variação em torno de um ponto de equilíbrio conhecido.

1.1 Equações originais do movimento

O movimento é inicialmente descrito a partir de Marsden (1966) através de um sistema canônico de oito graus de liberdade, cuja correspondente hamiltoniana satisfaz:

- i) É independente de termos de curto período.
- ii) Nas variáveis angulares contém apenas os ângulos críticos relacionados com as comensurabilidades 2:1.
- iii) Seu desenvolvimento é truncado na primeira potência das massas perturbadoras e na segunda potência das excentricidades.
- iv) Inclui o efeito de achatamento do corpo central.
- v) É definida sob a convenção astronômica de sinal.

$$\frac{d}{dt}(X_j, P_j) = \frac{\partial F^*}{\partial(\theta_j, Q_j)} \quad j=1,2,3,4 \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta_j, Q_j) = -\frac{\partial F^*}{\partial(X_j, P_j)}$$

onde:

$$F^* = F_0^*(X_j) + F_1^*(X_j, P_j, \theta_i, Q_j) \quad (1.2)$$

$i=1,2; \quad j=1,2,3,4$

com:

$$\begin{aligned}
 F_0^* &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^4 \frac{c_q}{L_q^2} \\
 F_1^* &= \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^4 n_q \cdot L_q \cdot K'_p \left\{ F(p, q, 0) + F(p, q, 1) \left[\frac{P_p^2 + Q_p^2}{L_p} + \frac{P_q^2 + Q_q^2}{L_q} \right] + \right. \\
 &+ F(p, q, 2) \left. \frac{[P_p \cdot P_q + Q_p \cdot Q_q]}{\sqrt{L_p \cdot L_q}} \right\} + \frac{J_2 \cdot R_0^2}{4} \sum_{q=1}^4 n_q \cdot L_q \cdot a_q^{-2} \left[2 + 3 \cdot \frac{[P_q^2 + Q_q^2]}{L_q} \right] + \\
 &- 2 \sum_{\substack{p=1 \\ q=p+1}}^2 n_q \cdot \alpha_{pq} \cdot L_q^{1/2} \cdot K_p [P_q \cdot \cos \theta_p + Q_q \cdot \sen \theta_p] + \\
 &+ \sum_{\substack{p=1 \\ q=p+1}}^2 n_q \cdot L_q \cdot K'_p \left\{ \frac{F(p, q, 3)}{\sqrt{L_p}} [P_p \cdot \cos \theta_p + Q_p \cdot \sen \theta_p] + \right. \\
 &+ \frac{F(p, q, 4)}{\sqrt{L_q}} [P_q \cdot \cos \theta_p + Q_q \cdot \sen \theta_p] + \\
 &+ \frac{F(p, q, 5)}{L_p} [(P_p^2 - Q_p^2) \cdot \cos 2\theta_p + 2P_p Q_p \cdot \sen 2\theta_p] + \\
 &+ \frac{F(p, q, 6)}{\sqrt{L_p \cdot L_q}} [(P_p \cdot P_q - Q_p \cdot Q_q) \cdot \cos 2\theta_p + (P_p \cdot Q_q + P_q \cdot Q_p) \cdot \sen 2\theta_p] + \\
 &\left. + \frac{F(p, q, 7)}{L_q} [(P_q^2 - Q_q^2) \cdot \cos 2\theta_p + 2P_q Q_q \cdot \sen 2\theta_p] \right\}
 \end{aligned}$$

As variáveis X_j , P_j e suas conjugadas canônicas θ_j , Q_j são definidas por:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= L_1 & \theta_1 &= \lambda_1 - 2\lambda_2 \\
 X_2 &= L_2 + 2L_1 & \theta_2 &= \lambda_2 - 2\lambda_3 \\
 X_3 &= L_3 + 2L_2 + 4L_1 & \theta_3 &= \lambda_3 \\
 X_4 &= L_4 & \theta_4 &= \lambda_4 \\
 P_j &= \sqrt{-2Y_j} \cdot \cos \bar{w}_j & Q_j &= -\sqrt{-2Y_j} \cdot \sen \bar{w}_j
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

cujos elementos modificados de Delaunay se escrevem:

$$L_p = m'_p \sqrt{\mu_p \cdot a_p} \qquad Y_p = L_p \left[\sqrt{1 - e_p^2} - 1 \right] \quad (1.4)$$

Ressalte-se que tais elementos do Satélite p:

- a_p : semieixo maior
- e_p : excentricidade
- λ_p : longitude média
- \bar{w}_p : longitude do pericentro

são elementos osculadores médios sobre os argumentos de curto período.

As constantes envolvidas na definição de F^* são dadas por:

$$\begin{aligned} m'_q &= m_q \cdot \frac{\sum_{p=0}^{q-1} m_p}{\sum_{p=0}^q m_p} \\ c_q &= \mu_q^2 \cdot m_q'^3 \\ \mu_q &= g^* \cdot \frac{m_0 \cdot m_q}{m_q'} \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde:

- m_0 : massa do corpo central ($m_0 = 1$)
- m_p : massa do $p^{\text{ésimo}}$ satélite.
- g^* : constante de gravitação

Os pequenos parâmetros presentes em F^* são definidos por:

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{m_p}{\sum_{q=0}^p m_q} = o(\varepsilon) \\ K'_p &= \frac{m_p}{m_0} = m_p = o(\varepsilon) \\ \frac{J_2 R_0^2}{4a_q^2} &= o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde:

J_2 : fator de achatamento do corpo central

R_0 : raio equatorial do corpo central

ε : pequeno parâmetro de referência

Os elementos característicos α_{pq} e n_q são dados por:

$$\begin{aligned}\alpha_{pq} &= \frac{a_p}{a_q} \\ n_q &= -\frac{\partial F_0^*}{\partial L_q}\end{aligned}\tag{1.7}$$

A identificação da Hamiltoniana F^* se completa com os coeficientes $F(p, q, i)$, os quais são funções dos coeficientes de Laplace $b_{1/2}^{(j)}(\alpha_{pq})$ caracterizadas por:

$$\begin{aligned}F(p, q, 0) &= \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)}(\alpha_{pq}) \\ F(p, q, 1) &= \frac{1}{2}(D^2 + D)b_{1/2}^{(0)}(\alpha_{pq}) \\ F(p, q, 2) &= \frac{1}{4}(2 - D - D^2)b_{1/2}^{(1)}(\alpha_{pq}) \\ F(p, q, 3) &= -\frac{1}{2}(4 + D)b_{1/2}^{(2)}(\alpha_{pq}) \\ F(p, q, 4) &= \frac{1}{2}(3 + D)b_{1/2}^{(1)}(\alpha_{pq}) \\ F(p, q, 5) &= \frac{1}{8}(44 + 13D + D^2)b_{1/2}^{(4)}(\alpha_{pq}) \\ F(p, q, 6) &= -\frac{1}{4}(42 + 13D + D^2)b_{1/2}^{(3)}(\alpha_{pq}) \\ F(p, q, 7) &= \frac{1}{8}(38 + 13D + D^2)b_{1/2}^{(2)}(\alpha_{pq})\end{aligned}\tag{1.8}$$

cujos operadores D^k são definidos por:

$$\begin{aligned}D &= \alpha_{pq} \cdot \frac{d}{d\alpha_{pq}} \\ D^2 &= \alpha_{pq}^2 \cdot \frac{d^2}{d\alpha_{pq}^2} + \alpha_{pq} \cdot \frac{d}{d\alpha_{pq}}\end{aligned}\tag{1.9}$$

É conveniente observar de Murray (1986) que tal desenvolvimento de F^* , em termos dos coeficientes de Laplace, é válido para excentricidades orbitais pequenas.

1.2 Características do movimento

A primeira característica a ser levada em consideração diz respeito à variável θ_j ($j = 3, 4$), a qual, sendo ignorável, permite concluir que sua correspondente conjugada canônica X_j ($j = 3, 4$) satisfaz:

$$X_j = \text{const} \quad (j = 3, 4) \quad (1.10)$$

Tais elementos serão aqui fixados, de modo a reduzir o problema ao estudo do sistema canônico de 6 graus de liberdade

$$\frac{d}{dt}(X_i, P_j) = \frac{\partial F^*}{\partial(\theta_i, Q_j)} \quad i=1,2; \quad j=1,2,3,4 \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta_i, Q_j) = -\frac{\partial F^*}{\partial(X_i, P_j)}$$

sujeito às influências das comensurabilidades 2:1, Libração Laplaciana e Equilíbrio Instantâneo.

Com respeito a tais influências, é assumido neste estudo que as ordens de grandeza de seus elementos nas vizinhanças das ressonâncias exatas são estabelecidas de acordo com Ferraz-Mello (1985) por:

- i) Comensurabilidades 2:1

$$|n_i - 2n_{i+1}| = 0(\varepsilon^{2/3}) \quad i=1,2 \quad (1.12)$$

- ii) Comensurabilidade Laplaciana

$$n = n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0(\varepsilon) \quad (1.13)$$

- iii) Variação do Ângulo Crítico Laplaciano em torno do ponto de equilíbrio 2ℓ .

$$\theta_1 - \theta_2 - 2\ell = 0(\varepsilon^{2/3}) \quad (1.14)$$

Este estudo também leva em consideração as influências de:

- i) Integral Primeira de Sessin e Henrard, caracterizada a partir das equações (1.2) e (1.11) através da expressão:

$$X_1 + X_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 P_j^2 + Q_j^2 = const \quad (1.15)$$

a qual restringe os campos de variações dos elementos X_i .

- ii) Conceito de Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983), a ser discutido a partir de características decorrentes do principal comportamento do movimento, imposto pelas influências das comensurabilidades, variação do ângulo crítico laplaciano e condição do Equilíbrio de Laplace.

1.3 Características do desenvolvimento

O estudo em si compreende três etapas distintas de desenvolvimento:

1 Caracterização das equações do movimento sob as influências das comensurabilidades e variação do ângulo crítico laplaciano.

Essa etapa é desenvolvida recorrendo-se a transformações canônicas com variáveis apropriadas, de modo que a hamiltoniana resultante seja definida com respeito às condições impostas pelas influências consideradas. Neste estudo algumas condições decorrem de características conhecidas, outras são aqui identificadas através das ideias básicas de Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito ao Método de Hori (1966). Entre as novas características ressaltem-se as influências do Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983), as quais são discutidas a partir da solução de um Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento. Embora o Método de Hori seja comumente aplicado para a definição de uma transformação canônica com uma integral primeira conhecida, aqui ele também é utilizado

com o objetivo de identificar outras características do movimento tomando por referência suas idéias básicas:

- i) As novas variáveis canônicas introduzidas pelo método são definidas nas vizinhanças das correspondentes variáveis canônicas originais.
- ii) Os principais comportamentos dessas novas variáveis são definidos pela solução do Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento.

O fato de a definição da nova hamiltoniana levar em consideração as influências das comensurabilidades pode permitir a identificação de um núcleo mais representativo do principal comportamento do movimento, bem como de um núcleo das principais perturbações de ordens superiores com respeito às características definidas pelo núcleo principal. O processo envolve vários rearranjos de termos de ordens superiores nas definições das componentes da nova hamiltoniana, com eventuais contribuições para a integridade dos correspondentes núcleos.

Em particular, é conveniente ressaltar para este estudo que a identificação das influências da comensurabilidade laplaciana sobre as equações do movimento requer a introdução de dois elementos dependentes de características próprias do movimento:

- i) Parâmetro Característico do Movimento.
- ii) Função Característica do Movimento.

Suas identificações são discutidas somente após as identificações das correspondentes características do movimento.

2 Caracterização de uma solução intermediária

Essa etapa é desenvolvida recorrendo-se às ideias básicas decorrentes de Hori (1966), Henrard (1983), Sessin (1983) e Sessin e Ferraz-Mello (1984). Ela requer como condições essenciais que:

- 1) O núcleo principal da nova hamiltoniana caracterize a definição de um sistema auxiliar de Hori, que seja integrável

com respeito ao parâmetro de integração de Hori e representativo do principal comportamento do movimento.

- 2) O núcleo das principais perturbações de ordens superiores defina o principal comportamento do sistema de equações variacionais de Lagrange associado com o método de Hori (Sessin, 1983). Em acréscimo, ele deve ser integrável com respeito a variável tempo e representativo das principais características impostas pelas influências das comensurabilidades.
- 3) As influências do Equilíbrio Instantâneo sejam tomadas em consideração sobre as soluções dos correspondentes sistemas dos itens anteriores.

A ideia básica do Método de Hori, de que suas novas variáveis preservam os principais comportamentos das correspondentes variáveis canônicas originais, pode ser utilizada na definição de uma solução intermediária do movimento. Tal solução é definida pela primeira aproximação da Equação de Hori através da solução do correspondente sistema auxiliar de Hori, sob as influências das principais perturbações de ordens superiores. Ressalte-se para uma solução mais refinada a inclusão da contribuição de um núcleo principal da geratriz da transformação através da segunda aproximação das correspondentes equações de Hori de seus elementos.

3 Viabilidade da solução proposta com respeito a um movimento conhecido

Tendo em vista que a referência original Marsden (1966) tem por objetivo o estudo dos Satélites Galileanos de Júpiter, uma aplicação do modelo desenvolvido pode ser efetuada objetivando uma avaliação das representatividades dos núcleos através da identificação das características dos elementos deste conhecido movimento.

2

INFLUÊNCIAS DAS COMENSURABILIDADES E DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO CRÍTICO LAPLACIANO

A caracterização das equações do movimento sob tais influências constitui uma extensão de Silva (1986), que tem por objetivo satisfazer o requisito básico de De Sitter (1925) para o estudo desse problema ressonante. Tal requisito requer a definição de uma Hamiltoniana nas vizinhanças das condições impostas por características essenciais do movimento, objetivando a identificação de um núcleo integrável representativo do principal comportamento do movimento. Neste estudo a nova Hamiltoniana decorre da composição de sucessivas transformações canônicas, que são definidas nas vizinhanças das condições impostas pelas respectivas influências tomadas em consideração.

Três novos elementos, com respeito à referência original Silva (1986) são neste estudo introduzidos:

- i) a influência do 4° satélite;
- ii) um parâmetro auxiliar associado ao movimento, cujas características são definidas pelas influências da comensurabilidade laplaciana e da condição do ângulo crítico laplaciano ser uma variação em torno de um ponto de equilíbrio conhecido. Tal elemento é aqui denominado Parâmetro Característico do Movimento;

- iii) um elemento denominado Função Característica do Movimento neste estudo introduzido com o objetivo de completar a identificação da influência da comensurabilidade laplaciana sobre o movimento. Tal função contribui para a preservação da ordem de grandeza de uma variável auxiliar. Ressalte-se a incompleta definição de tal elemento, visto que suas características decorrem do principal comportamento do movimento e da influência do Equilíbrio Instantâneo a serem discutidos no capítulo 3, onde a referida definição será completada.

Este estudo é concluído com a identificação do ângulo crítico laplaciano e de sua correspondente variável métrica sob a influência da comensurabilidade laplaciana.

2.1 Influências das comensurabilidades 2:1 e da variação do Ângulo Crítico Laplaciano

De modo a tomar em consideração as influências das comensurabilidades 2:1, primeiramente introduzimos uma transformação linear das ações nas vizinhanças das ressonâncias exatas.

$$X_i = X_{i0} + x_i^* \quad i = 1, 2$$

onde:

- i) X_{i0} ($i = 1, 2$) são as raízes do sistema de equações

$$\left. \frac{\partial F_o^*}{\partial X_i} \right|_{X_i=X_{i0}} = 0 \quad i = 1, 2$$

- ii) tomando por referência Ferraz-Mello (1985) assumimos:

$$\frac{x_i^*}{X_{i0}} = O(\epsilon^{2/3})$$

Ressalte-se que tal transformação, exceto pelas ordens de grandeza dos elementos x_i^* , não permite um melhor conhecimento das variações de tais elementos, a não ser aquela caracterizada pela integral de Sessin e Henrard (1.15).

$$x_1^* + x_2^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 P_j^2 + Q_j^2 = const.$$

Visto que outra característica do movimento é a variação do Ângulo Crítico Laplaciano, devemos procurar uma nova transformação canônica de modo a utilizar tal informação na definição de uma nova Hamiltoniana, que também leve em consideração as influências das comensurabilidades.

Observando que uma transformação:

$$(X_i, \theta_i) \rightarrow (x_i^*, \alpha_i^*) \quad i=1,2$$

com

$$\alpha_i^* = \theta_i + \text{função arbitrária de } x_k^* (k \neq i),$$

também é canônica, escolhemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \theta_1 - (1+S) \frac{x_2^*}{X_{10}} \\ \alpha_2^* &= \theta_2 - (1-S) \frac{x_1^*}{X_{10}} \end{aligned}$$

onde S é o parâmetro característico do movimento, a ser posteriormente identificado através da influência da comensurabilidade laplaciana na Seção [2.4].

De modo a tomar em consideração a característica conhecida, note primeiramente do fato de $\theta_1 - \theta_2$ ser uma variação em torno do ponto de equilíbrio 2ℓ que $\alpha_1^* - \alpha_2^*$ também é uma variação do mesmo tipo. Nesse caso, tal condição será empregada de modo a permitir a expansão da correspondente hamiltoniana em torno do ponto de equilíbrio 2ℓ através da transformação canônica (Silva, 1986)

$$(x_i^*, \alpha_i^*) \rightarrow (x_i, \alpha_i)$$

definida por:

$$\begin{aligned}x_1^* &= x_1 + X_{10} \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \ell \right] \\ \alpha_1^* &= \alpha_1 \\ x_2^* &= x_2 - X_{10} \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \ell \right] \\ \alpha_2^* &= \alpha_2\end{aligned}$$

Neste estudo a transformação canônica resultante da composição das transformações anteriores:

$$(X_i, \theta_i) \rightarrow (x_i, \alpha_i)$$

será utilizada para caracterizar a definição de uma nova Hamiltoniana sob as influências das comensurabilidades 2:1 e variação do Ângulo Crítico Laplaciano em torno do ponto de equilíbrio 2ℓ . Tal transformação se escreve:

$$\begin{aligned}X_1 &= X_{10} + x_1 + X_{10} \cdot (\beta - \beta_0) \\ \theta_1 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \ell + (1+S) \frac{x_2}{X_{10}} - S(\beta - \beta_0) \\ X_2 &= X_{20} + x_2 - X_{10} \cdot (\beta - \beta_0) \\ \theta_2 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \ell + (1-S) \frac{x_1}{X_{10}} - S(\beta - \beta_0)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde:

i) tomando por referência Ferraz-Mello (1985), assumimos:

$$\begin{aligned}a) \quad & \frac{x_i}{X_{i0}} = 0(\varepsilon^{2/3}) \\ b) \quad & \beta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \ell = 0(\varepsilon^{2/3}) \\ c) \quad & \frac{P_j}{\sqrt{L_{j0}}}, \frac{Q_j}{\sqrt{L_{j0}}} = 0(\varepsilon^{1/3})\end{aligned}$$

ii) X_{i_0} ($i = 1, 2$) é a solução do sistema:

$$\left. \frac{\partial F_0^*}{\partial X_i} \right|_{X_i=X_{i_0}} = 0$$

iii) $\theta_1 - \theta_2 = 2\ell \Leftrightarrow x_i = 0 \quad i=1, 2, \quad \beta = \beta_0$ (2.2)

onde β_0 é o correspondente valor de referência, em torno do qual a variação β é definida, satisfazendo

$$\beta_0 = 0(\varepsilon)$$

Tal elemento será posteriormente especificado na Seção [2.3].

- iv) $L_{\rho 0}$ são os valores dos elementos L_ρ para as condições de ressonâncias exatas.
- v) Os elementos X_{i_0} ($i = 1, 2$) e $L_{\rho 0}$ ($\rho = 1, 2, 3, 4$) são apresentados na Tabela 1 do Apêndice B.

Ressalte-se de (1.3) e (1.10) que:

$$L_4 = L_{40} = X_4 = const. \quad (2.3)$$

A nova Hamiltoniana

$$K^* = \sum_{m=0}^5 K_m^*(x_i, P_j, \alpha_i, Q_j) \quad (2.4)$$

é obtida a partir da expansão da Hamiltoniana original F^* (1.2) nas vizinhanças dos valores de ressonâncias exatas ($x_i = 0, \beta = \beta_0$), tomando por referências Sessin e Ferraz-Mello (1984) e Silva (1986). Tal Hamiltoniana é apresentada no Apêndice A-1.

2.2 Influência da Integral Primeira de Sessin e Henrard

Este estudo leva em consideração o fato de que os modelos integráveis estudados por Sessin (1981) e Henrard (1983), para as perturbações mútuas de respectivamente 2 e 3 corpos, possuem

uma integral primeira conhecida. Tal elemento (1.15), descrito em termos das variáveis (2.1) por:

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 P_j^2 + Q_j^2 = \text{const.}$$

delimita as variações dos elementos x_i .

A caracterização de tal influência sobre a definição de uma nova Hamiltoniana pode ser obtida através da transformação canônica:

$$(x_i, P_j, \alpha_i, Q_j) \rightarrow (u_i, h_j, U_i, k_j) \quad i=1,2; j=1,2,3,4$$

dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 h_j^2 + k_j^2 \\ \alpha_1 &= U_1 + U_2 + \frac{1}{4X_{10}} \sum_{j=1}^4 h_j^2 + k_j^2 \\ x_2 &= \frac{u_1 - u_2}{2} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 h_j^2 + k_j^2 \\ \alpha_2 &= U_1 - U_2 + \frac{1}{4X_{10}} \sum_{j=1}^4 h_j^2 + k_j^2 \\ P_j &= h_j \cdot \cos\left(U_1 + \frac{u_1}{2X_{10}}\right) - k_j \sin\left(U_1 + \frac{u_1}{2X_{10}}\right) \\ Q_j &= h_j \cdot \sin\left(U_1 + \frac{u_1}{2X_{10}}\right) + k_j \cos\left(U_1 + \frac{u_1}{2X_{10}}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{u_i}{X_{i0}} = 0 \quad (\varepsilon^{2/3}) \\ \text{ii)} \quad & \frac{h_j}{\sqrt{L_{j0}}}, \frac{k_j}{\sqrt{L_{j0}}} = 0 \quad (\varepsilon^{1/3}) \end{aligned}$$

Sob tal transformação o ângulo:

$$\beta_p = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - (-1)^p \ell$$

é incorporado nas definições dos elementos h_j, k_j , tornando a variável U_1 ignorável. Consequentemente segue-se que sua conjugada canônica satisfaz:

$$u_1 = const. \tag{2.6}$$

caracterizando assim a integral primeira de Sessin e Henrard como uma das novas variáveis canônicas.

A nova Hamiltoniana

$$G^* = \sum_{m=0}^5 G_m^*(u_i, h_j, U_i, k_j) \quad i=1,2; j=1,2,3,4 \tag{2.7}$$

é obtida a partir da Hamiltoniana K^* (2.4), com novo rearranjo de termos de ordens superiores, de modo a também levar em consideração a ordem de grandeza do valor de referência β_0 . Tal elemento é apresentado no Apêndice A-2, independentemente da influência do valor de referência β_0 para a ordem de grandeza neste estudo considerada.

2.3 Influências da comensurabilidade laplaciana e da variação do Ângulo Crítico Laplaciano

A ação da comensurabilidade laplaciana sobre as variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano define a correspondente variável angular U_2 como sendo uma variação em torno do ponto de equilíbrio ℓ , ao mesmo tempo que sua conjugada canônica u_2 é definida nas vizinhanças de um correspondente valor de referência. Tal valor de referência, bem como a correspondente variação do elemento u_2 em torno desse valor podem ser identificados através de uma aplicação do Teorema de Função Implícita à expressão da comensurabilidade laplaciana n (1.13). Analogamente a Silva (1986) observamos que:

$$u_2 = -2X_{10}(\beta - \beta_0) + 2X_{10} \sum_{i=1} g(i,0)Z^i + 2X_{10} \sum_{i=0} \sum_{j=1} g(i,j)Z^i.n^{*j} \tag{2.8}$$

de modo a identificar os correspondentes elementos por:

$$u_{20} = -2X_{10}\beta + 2X_{10} \sum_{i=1} g(i,0)Z^i = 0(\varepsilon^{2/3}) \cdot X_{10}$$

$$\Delta u_{20} = 2X_{10}\beta_0 + 2X_{10} \sum_{i=0} \sum_{j=1} g(i,j)Z^i n^{*j} \leq 0(\varepsilon) \cdot X_{10}$$

onde:

i) $\beta = U_2 - \ell = 0(\varepsilon^{2/3})$

é uma variação em torno de 0.

ii) $Z = \frac{1}{X_{10}} \left[u_1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 h_j^2 + k_j^2 \right] = 0(\varepsilon^{2/3})$

iii) $n^* = \frac{n}{n_{20}} = 0(\varepsilon)$

com n_{20} sendo o valor do movimento médio do segundo satélite para as condições de ressonâncias exatas.

iv) os coeficientes $g(i,j)$ são apresentados na Tabela 3 do Apêndice B.

De modo a levar em consideração tais influências sobre a definição de uma nova Hamiltoniana, recorreremos a uma transformação canônica dependente de uma função característica do movimento, neste estudo introduzida objetivando satisfazer a condição imposta pela comensurabilidade laplaciana sobre a variação do elemento u_2 , em torno do correspondente valor de referência. Tal transformação

$$(u_i, h_j, U_i, k_j) \rightarrow (u_i^*, h_j^*, U_i^*, k_j^*) \quad i=1,2; \quad j=1,2,3,4$$

é definida analogamente a Silva (1986) por:

$$u_1 = u_1^*$$

$$U_1 = U_1^*$$

$$u_2 = u_{20}^* + u_2^* - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 h_j^{*2} + k_j^{*2} + X_{20} f(U_2^*) \tag{2.9}$$

$$U_2 = \ell + U_2^*$$

$$h_j = h_j^* \cdot \cos U_2^* - k_j^* \cdot \sin U_2^*$$

$$k_j = h_j^* \cdot \sin U_2^* + k_j^* \cdot \cos U_2^*$$

onde:

$$i) \frac{u_i^*}{X_{i0}}, U_2^* = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$ii) \frac{h_j^*}{\sqrt{L_{j0}}}, \frac{k_j^*}{\sqrt{L_{j0}}} = 0(\varepsilon^{1/3})$$

iii) u_{20}^* é um valor de referência definido nas vizinhanças de (2-8) através da equação

$$\left. \frac{dU_2}{dt} \right|_{u_2=u_{20}^*} = 0$$

de modo a satisfazer a condição do Ângulo Crítico Laplaciano ser uma variação em torno do ponto do equilíbrio 2ℓ .

Tal elemento é definido analogamente a Silva (1986) por:

$$u_{20}^* = -2X_{10}\beta + 2X_{10} \sum_{i=1} g(i,0)Z^i + X_{20}\psi \quad (2.10)$$

com:

$$\psi = \frac{4\varepsilon G(2)}{n_{20}X_{20}} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) [g(0,1) + g(1,1)Z + \dots] = 0(\varepsilon)$$

cujo coeficiente $G(2)$ é definido na Tabela 4 do Apêndice B.

Ressalte-se de (2.8), (2.9) e (2.10) que:

$$u_2 = u_{20} + X_{20}\psi + X_{20}Z^* \quad (2.11)$$

onde

$$Z^* = \frac{1}{X_{20}} \left[u_2^* + X_{20}f(U_2^*) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 h_j^{*2} + k_j^{*2} \right] \quad (2.12)$$

permite observar que a variável auxiliar Z^* é definida, na particular vizinhança onde a equação (2.8) se verifica, em torno do valor de referência

$$2 \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \beta_0$$

de modo a levar em consideração as características da variação Δu_{20} e satisfazer a condição *iii*) acima estabelecida. Conseqüentemente neste estudo, segue-se de (2.12) que

$$Z^* = 0(\varepsilon) \quad (2.13)$$

Ressalte-se para uma melhor compreensão da equação (2.11) que no movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter encontramos:

$$\begin{aligned} \psi &= 0(\varepsilon) \quad | \quad \psi > 0 \\ |g(i, j)| &\leq 0(\varepsilon^{1/3}) \\ Z &= 0(\varepsilon^{2/3}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Note também que o fato de o movimento estar definido nas vizinhanças da condição do Equilíbrio de Laplace

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\ell$$

requer levar em consideração os correspondentes valores de referência, em torno dos quais as novas variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano estão definidas:

$$\begin{aligned} u_2^* \Big|_{t=t_L} &= u_2^0 \\ U_2^* \Big|_{t=t_L} &= U_2^0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde t_L é o tempo de ocorrência da referida condição.

Neste caso recorrendo às equações (2.1), (2.5) e (2.3) observamos que:

$$\beta = U_2^*$$

é uma variação em torno do valor de referência β_0 tal que:

$$\beta_0 = U_2^0$$

De modo a preservar a influência da Comensurabilidade Laplaciana é assumido nesse estudo que o elemento β_0 é definido por:

$$\beta_0 = U_2^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \left\langle Z^* \right\rangle_{\text{sec}} = 0(\varepsilon) \quad (2.16)$$

de modo a identificar de (2.11):

$$u_2 = -2X_{10}(U_2^* - U_2^0) + 2X_{10} \sum_{i=1} g(i,0)Z^i + X_{20}\psi + X_{20} \langle Z^* \rangle_{per} \quad (2.17)$$

na conveniente vizinhança onde o movimento é definido.

Com respeito à contribuição da função característica do movimento é assumido que

$$f(U_2^*) = 0(\varepsilon^{2/3}), \quad f \in C_1 \quad (2.18)$$

de modo a assegurar a validade da condição (2.13) sobre a variável auxiliar Z^* (2.12). Note de (2.9) que:

$$\frac{u_2^*}{X_{20}} = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$\frac{h_j^*}{\sqrt{L_{j0}}}, \frac{k_j^*}{\sqrt{L_{j0}}} = 0(\varepsilon^{1/3})$$

não necessariamente são suficientes para satisfazer tal condição.

Em acréscimo, a completa definição desse elemento $f(U_2^*)$ depende de características do movimento e do conceito de Equilíbrio Instantâneo. Tais características serão discutidas no capítulo 3, visto dependerem da identificação das influências do principal comportamento do movimento.

Este estudo se completa a seguir com a identificação do parâmetro característico do movimento S (2.1).

2.4 Parâmetro característico do movimento

A identificação de tal elemento é aqui discutida tomando em consideração:

- i) a condição do Ângulo Crítico Laplaciano ser uma Libração em torno do ponto de equilíbrio 2ℓ .
- ii) As condições (2.16) e (2.17).

Para este estudo, note primeiramente de (2.1) e (2.5) que a expressão

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\ell + SZ - \frac{u_2}{X_{10}}$$

reescrita convenientemente na forma:

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\ell + 2[U_2^* - U_2^0] - \frac{1}{X_{10}}[u_2 + 2X_{10}(U_2^* - U_2^0)] + SZ \quad (2.19)$$

caracteriza tal ângulo em termos de três distintas contribuições:

- i) $U_2^* - U_2^0$ é a contribuição angular decorrente da variação U_2^* sob a condição (2.16)
- ii) $\frac{1}{X_{10}}[u_2 + 2X_{10}(U_2^* - U_2^0)]$ é a contribuição decorrente da influência (2.17) da Comensurabilidade Laplaciana.
- iii) SZ é a contribuição associada ao parâmetro S.

Como o movimento é definido nas vizinhanças da condição do Equilíbrio de Laplace

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\ell$$

tal requisito é neste estudo satisfeito assumindo que o parâmetro característico S é aqui definido por uma estimativa através da equação:

$$S\langle Z \rangle_{\text{sec}} = 2 \sum_{i=1} g(i,0) \langle Z^i \rangle_{\text{sec}} + \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \langle \psi \rangle_{\text{sec}} \quad (2.20)$$

Sob condições similares as dos Satélites Galileanos de Júpiter:

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle_{\text{sec}} &= 0(\varepsilon^{2/3}) & \langle \psi \rangle_{\text{sec}} &= 0(\varepsilon) \\ \langle Z \rangle_{\text{per}} &= 0(\varepsilon) & \langle \psi \rangle_{\text{per}} &= 0(\varepsilon^{4/3}) \end{aligned}$$

recorrendo ao elemento auxiliar:

$$\begin{aligned} \chi = S \cdot \langle Z \rangle_{\text{per}} - 2 \sum_{i=2} g(i,0) \langle Z^i \rangle_{\text{per}} - \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \langle \psi \rangle_{\text{per}} \\ - \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \langle Z^* \rangle_{\text{per}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

satisfazendo

$$\chi < 0(\varepsilon)$$

segue-se das equações (2.17) e (2.19) que o ângulo crítico laplaciano e a correspondente variável métrica u_2 se escrevem sob a influência da comensurabilidade laplaciana através das expressões:

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_2 &= 2\ell + 2[U_2^* - U_2^0] + \chi \\ u_2 &= -2X_{10}[U_2^* - U_2^0] + S.X_{10}.Z - X_{10}.\chi \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde:

i) $U_2^0 = \beta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \left\langle Z^* \right\rangle_{\text{sec}} = 0(\varepsilon)$

ii) S é definido pela equação (2.20) e χ pela equação (2.21)

iii) ressalte-se, sob tais definições de β_0 e S , a possibilidade de ocorrência de um erro da ordem de χ para a condição do Equilíbrio de Laplace.

2.5 Equações do movimento

Este estudo se completa com a determinação da nova Hamiltoniana H^* a partir da Hamiltoniana G^* (2.7), nas vizinhanças da condição

$$u_2 = u_{20}^*$$

com novo rearranjo de termos de ordens superiores.

Não obstante a dificuldade inerente a introdução de variáveis canônicas apropriadas, que levem em consideração as influências das comensurabilidades, esse processo permite um aperfeiçoamento de cada componente da nova Hamiltoniana em termos de características essenciais do movimento, bem como produz vários rearranjos de termos de ordens superiores que podem contribuir com a identificação de:

- i) um núcleo integrável que seja representativo da realidade do principal comportamento do movimento.
- ii) um núcleo integrável das principais perturbações de ordens superiores com respeito as características definidas pelo núcleo principal.

Objetivando satisfazer tais requisitos, o estudo até aqui desenvolvido descreve o movimento em questão através do sistema canônico.

$$\frac{d}{dt}(u_i^*, h_j^*) = \frac{\partial H^*}{\partial(U_i^*, k_j^*)}$$

$$i=1,2; j=1,2,3,4 \tag{2.23}$$

$$\frac{d}{dt}(U_i^*, h_j^*) = -\frac{\partial H^*}{\partial(u_i^*, h_j^*)}$$

cuja nova Hamiltoniana H^* é definida por:

$$H^* = \sum_{m=0}^5 H_m^*(u_i^*, h_j^*, U_i^*, k_j^*) \tag{2.24}$$

onde o índice m caracteriza a ordem de grandeza da componente H_m^* , com respeito a potência inteira m da raiz cúbica do pequeno parâmetro ε :

$$H_0^* = H(0,0)$$

$$H_1^* = H_2^* = 0$$

$$H_3^* = \varepsilon.H(3,0)$$

$$H_4^* = H(4,0)Z^2 + \varepsilon \sum_{\substack{p=1 \\ q=p+1}}^2 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \left\{ \frac{H(p,q,3,0)}{\sqrt{L_{p0}}} [h_p^* \cdot \cos g_p^* - k_p^* (-1)^p \text{sen } g_p^*] \right.$$

$$\left. + \frac{H(p,q,4,0)}{\sqrt{L_{q0}}} [h_q^* \cdot \cos g_p^* - k_q^* (-1)^p \text{sen } g_p^*] \right\}$$

$$H_5^* = \varepsilon H(5,0)Z + H(5,1)Z^{*2} + \varepsilon \sum_{q=1}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} . H(q,1,0) \frac{[h_q^{*2} + k_q^{*2}]}{L_{q0}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \cdot H(p, q, 2, 0) \frac{[h_p^* h_q^* + k_p^* k_q^*]}{\sqrt{L_{p0} L_{q0}}} + \\
 & + \varepsilon \sum_{\substack{p=1 \\ q=p+1}}^2 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \left\{ \frac{H(p, q, 5, 0)}{L_{p0}} \left[(h_p^{*2} - k_p^{*2}) \cos 2g_p^* - 2h_p^* k_p^* (-1)^p \cdot \text{sen } 2g_p^* \right] + \right. \\
 & + \frac{H(p, q, 6, 0)}{\sqrt{L_{p0} L_{q0}}} \left[(h_p^* h_q^* - k_p^* k_q^*) \cos 2g_p^* - (h_p^* k_q^* + h_q^* k_p^*) (-1)^p \cdot \text{sen } 2g_p^* \right] + \\
 & \left. + \frac{H(p, q, 7, 0)}{L_{q0}} \left[(h_q^{*2} - k_q^{*2}) \cos 2g_p^* - 2h_q^* k_q^* (-1)^p \cdot \text{sen } 2g_p^* \right] \right\} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

onde:

$$i) \quad Z = \frac{1}{X_{10}} \left[u_1^* - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 h_j^{*2} + k_j^{*2} \right] = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$ii) \quad g_p^* = \ell + (-1)^p \cdot U_2^*$$

iii) U_2^* é uma variação em torno de U_2^0 satisfazendo

$$U_2^* = \beta = 0(\varepsilon^{2/3})$$

iv) os coeficientes de H^* são definidos na Tabela 4 do Apêndice B.

$$v) \quad Z^* = \frac{1}{X_{20}} \left[u_2^* + X_{20} f(U_2^*) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 h_j^{*2} + k_j^{*2} \right] = 0(\varepsilon)$$

é a variável auxiliar discutida na seção anterior, cujas características são definidas pela influência da comensurabilidade laplaciana. Ressalte-se que a contribuição de tal elemento é de ordem superior com respeito a componente principal H_4^* .

2.6 Influências do equilíbrio instantâneo

De modo a completar o estudo das influências das comensurabilidades sobre as equações do movimento, torna-se necessário levar em consideração as influências do Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983). Tal conceito se caracteriza por definir o movi-

mento numa particular vizinhança associada com a condição do Equilíbrio de Laplace, onde as componentes das excentricidades forçadas dos três primeiros Satélites são descritas por funções das correspondentes variáveis canônicas associadas com o ângulo crítico laplaciano (u_2^*, U_2^*) .

O primeiro passo para tal estudo requer a identificação do principal comportamento do movimento, bem como de suas influências sobre as equações do movimento. Tal identificação é discutida no capítulo 3, tomando por referências as características da componente principal H_4^* e as ideias básicas de Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito ao Método de Hori (1966). Essas novas influências mostram que o movimento é definido em torno de uma particular vizinhança, onde o conceito de Equilíbrio Instantâneo é definido. Como consequência natural da restrição imposta por tal vizinhança segue-se a existência de um correspondente vínculo, o qual constitui um requisito básico para a identificação das características da função $f(U_2^*)$ e da variável auxiliar Z^* discutidas na Seção [2.3]. Este estudo também discute os valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace, em torno dos quais estão definidas as variáveis canônicas associadas com o ângulo crítico laplaciano (u_2^*, U_2^*) .

As características do vínculo imposto pelo Equilíbrio Instantâneo, bem como dos valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace serão estudadas nos capítulos que se seguem tomando por referência as ideias básicas do Método de Hori (1966) sobre a solução de um Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento, bem como sobre a correspondente solução do sistema variacional de Lagrange associado com o Método de Hori (Sessin, 1983).

3

NOVAS CARACTERÍSTICAS DO MOVIMENTO

Sob a condição de que as influências das comensurabilidades são suficientes para assegurar a representatividade do principal comportamento do movimento através da componente principal H_4^* (2.24), a solução de um correspondente Sistema Auxiliar de Hori é aqui utilizada objetivando obter uma melhor compreensão a respeito das variáveis canônicas originais. Este estudo é desenvolvido tomando por referência as ideias básicas do Método de Hori (1966):

- i) as novas variáveis canônicas introduzidas pelo método são definidas nas vizinhanças das correspondentes variáveis canônicas originais.
- ii) os principais comportamentos dessas novas variáveis são caracterizados pela solução do Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento.

O estudo desse núcleo principal do movimento conduz à identificação de variáveis canônicas apropriadas, que caracterizam os principais comportamentos das componentes livres e forçadas das excentricidades, bem como define as variáveis canônicas associadas com o ângulo crítico laplaciano em termos desses novos elementos. A definição de uma nova Hamiltoniana sob tais influências do principal comportamento do movimento é obtida recorrendo-se

a uma transformação canônica dependente de uma variação característica do movimento. Essa variação, genericamente definida com respeito às variáveis canônicas apropriadas, permite a caracterização do movimento nas vizinhanças do conceito de Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983). Ressaltem-se como consequências naturais de tal formulação as características que se seguem:

- i) A delimitação da região do espaço de fase onde tal conceito é definido.
- ii) A existência de um vínculo imposto por tal conceito e sua influência sobre as novas variáveis numa particular vizinhança decorrente de uma aplicação do Teorema de Função Implícita.
- iii) A complementação da definição da função $f(U_2^*)$ introduzida em (2.9), de modo a levar em consideração as características do vínculo em questão.
- iv) A caracterização da variável auxiliar Z^* (2.25) sob tais influências do Equilíbrio Instantâneo.

Este estudo também discute os valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace, em torno da qual o conceito de Equilíbrio Instantâneo é definido.

3.1 Sistema Auxiliar de Hori de identificação

O Método de Hori (1966) introduz uma transformação canônica

$$(u_i^*, h_j^*, U_i^*, k_j^*) \rightarrow (u'_i, h'_j, U'_i, k'_j)$$

tal que um elemento genérico f é caracterizado através da equação

$$f = f' + \frac{1}{1!} \{f', S'\} + \frac{1}{2!} \{\{f', S'\}, S'\} + \dots \quad (3.1)$$

onde:

- i) $f = f(u_i^*, h_j^*, U_i^*, k_j^*)$
- ii) $f' = f(u'_i, h'_j, U'_i, k'_j)$
- iii) S' é a geratriz da transformação

Sob a condição de que a contribuição da geratriz S' é uma perturbação de ordem superior com respeito à ordem de grandeza do elemento f' , tal método se caracteriza por definir as novas variáveis nas vizinhanças das correspondentes variáveis canônicas originais. Em primeira aproximação segue-se que:

$$\begin{aligned} u_i^* &= u'_i & U_i^* &= U'_i \\ h_j^* &= h'_j & k_j^* &= k'_j \end{aligned} \quad (3.2)$$

bem como

$$f = f' \quad (3.3)$$

Essa ideia básica de Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito ao Método de Hori será a seguir utilizada na identificação dos principais comportamentos dos elementos originais.

Como requisito para sua aplicação tal método requer o conhecimento da solução do seu correspondente sistema auxiliar.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(u'_i, h'_j) &= \frac{\partial F'_0}{\partial(U'_i, k'_j)} & i=1,2; j=1,2,3,4 \\ \frac{d}{d\tau}(U'_i, k'_j) &= -\frac{\partial F'_0}{\partial(u'_i, h'_j)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde:

- i) τ é o parâmetro de integração de Hori.
- ii) a Hamiltoniana auxiliar F'_0 tem suas características definidas pelo núcleo principal da Hamiltoniana original.

$$F'_0 = F_0(u'_i, h'_j, U'_i, k'_j)$$

- iii) sua solução com respeito ao parâmetro τ define o principal comportamento da referida solução com respeito à variável tempo, sob a condição de que a contribuição das perturbações de ordens superiores para a equação variacional do parâmetro de Hori (Sessin, 1983) seja uma perturbação de ordem superior com respeito a variável tempo.

Não obstante suas características possam contribuir para a identificação dos principais comportamentos de suas variáveis, o Méto-

do de Hori (1966) tem por regra geral a definição do novo sistema canônico.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u'_i, h'_j) &= \frac{\partial F'}{\partial(U'_i, k'_j)} \\ \frac{d}{dt}(U'_i, k'_j) &= -\frac{\partial F'}{\partial(u'_i, h'_j)} \end{aligned} \quad i=1,2; j=1,2,3,4 \quad (3.5)$$

onde:

$$F' = \sum_{m=0} F'_m$$

é a nova Hamiltoniana, cujo núcleo principal F'_0 caracteriza a integral primeira de Hori gerada pelo método.

Como as novas variáveis canônicas introduzidas pelo método são definidas nas vizinhanças das correspondentes variáveis canônicas originais, usaremos as características dessas novas variáveis para obter um melhor conhecimento a respeito das correspondentes variáveis originais. Por outro lado, como o Sistema Auxiliar de Hori define o principal comportamento das novas variáveis, faremos uso das características de sua solução na identificação de tais elementos.

Para o problema em questão consideremos o núcleo principal da nova Hamiltoniana definido de (2.24) e (3.4) por:

$$\begin{aligned} F'_4 = H_4^*(u'_i, h'_j, U'_i, k'_j) &= H(4,0)Z'^2 + \varepsilon \sum_{j=1}^3 \frac{C_{j1}}{\sqrt{L_{j0}}} [h'_j \cdot \cos(\ell - U'_2) + \\ &k'_j \cdot \sin(\ell - U'_2)] + \frac{C_{j2}}{\sqrt{L_{j0}}} [h'_j \cdot \cos(\ell + U'_2) - k'_j \cdot \sin(\ell + U'_2)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde:

- i) $\frac{u'_i}{X_{i0}}, U'_2 = 0(\varepsilon^{2/3})$
- ii) $\frac{h'_j}{\sqrt{L_{j0}}}, \frac{k'_j}{\sqrt{L_{j0}}} = 0(\varepsilon^{1/3})$
- iii) $Z' = \frac{1}{X_{10}} \left[u'_1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 h_j'^2 + k_j'^2 \right] = 0(\varepsilon^{2/3})$

iv) os coeficientes C_{jk} são definidos na Tabela 5 do Apêndice B.

O sistema dinâmico (3.4) gerado por F'_4 é completamente integrável de maneira análoga a Silva (1986):

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_{10} \\ U'_1 &= U_{10} + 2 \int \xi . dM \\ u'_2 &= u_{20} + X_{10} \xi \\ U'_2 &= U_{20} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{h'_j}{\sqrt{L_{j0}}} &= \frac{S_{j1}}{\varepsilon} [H . \text{sen}(\ell - U'_2) + K . \text{cos}(\ell - U'_2)] + \frac{S_{j2}}{\varepsilon} [-H . \text{sen}(\ell + U'_2) + K . \text{cos}(\ell + U'_2)] + \\ &\rho_{20} \cdot [M_{j1} . \text{sen}(U'_1 + \phi_{20}) + M_{j2} . \text{sen}(U'_1 + \phi_{20} + \eta_j)] + \\ &\rho_{30} \cdot [N_{j1} . \text{sen}(U'_1 + \phi_{30}) + N_{j2} . \text{sen}(U'_1 + \phi_{30} + \eta_j)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{k'_j}{\sqrt{L_{j0}}} &= \frac{S_{j1}}{\varepsilon} [-H . \text{cos}(\ell - U'_2) + K . \text{sen}(\ell - U'_2)] - \frac{S_{j2}}{\varepsilon} [H . \text{cos}(\ell + U'_2) + K . \text{sen}(\ell + U'_2)] + \\ &\rho_{20} \cdot [M_{j1} . \text{cos}(U'_1 + \phi_{20}) + M_{j2} . \text{cos}(U'_1 + \phi_{20} + \eta_j)] + \\ &\rho_{30} \cdot [N_{j1} . \text{cos}(U'_1 + \phi_{30}) + N_{j2} . \text{cos}(U'_1 + \phi_{30} + \eta_j)] \end{aligned}$$

$$\frac{h'_4}{\sqrt{L_{40}}} = \rho_{40} . \text{sen}(U'_1 + \phi_{40})$$

$$\frac{k'_4}{\sqrt{L_{40}}} = \rho_{40} . \text{cos}(U'_1 + \phi_{40})$$

onde:

i) os elementos auxiliares de Sessin e Ferraz-Mello (1984) são definidos por:

$$\begin{aligned} M &= \frac{H(4,0)}{X_{10}} (\tau - \tau_0) \\ \xi &= -Z' \\ E &= \frac{F'_4}{H(4,0)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{(-1)^n \varepsilon}{H(4,0)} \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{C_{j1}}{\sqrt{L_{j0}}} \left[h'_j \cdot \text{sen}(\ell - U'_2) - k'_j \cdot \text{cos}(\ell - U'_2) \right] + \\
 &\quad - \frac{C_{j2}}{\sqrt{L_{j0}}} \left[h'_j \cdot \text{sen}(\ell + U'_2) + k'_j \cdot \text{cos}(\ell + U'_2) \right] \\
 K &= \frac{(-1)^n \varepsilon}{H(4,0)} \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{C_{j1}}{\sqrt{L_{j0}}} \left[h'_j \cdot \text{cos}(\ell - U'_2) + k'_j \cdot \text{sen}(\ell - U'_2) \right] + \\
 &\quad \frac{C_{j2}}{\sqrt{L_{j0}}} \left[h'_j \cdot \text{cos}(\ell + U'_2) - k'_j \cdot \text{sen}(\ell + U'_2) \right]
 \end{aligned}$$

onde $\ell = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2}$ para $n = 0$ ou $n = 1$.

- ii) E e G são respectivamente as integrais de Hori e G-Sessin com respeito ao parâmetro de integração de Hori.

$$\begin{aligned}
 E &= \xi^2 + K \\
 G &= -\xi + \frac{1}{2D} [H^2 + K^2]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde:

$$D = \frac{\varepsilon^2}{H^2(4,0)} \sum_{j=1}^3 \left[C_{j1}^2 + 2C_{j1} \cdot C_{j2} \cdot \text{cos} 2\ell + C_{j2}^2 \right] \begin{pmatrix} X_{10} \\ L_{j0} \end{pmatrix}$$

Ressalte-se do Método de Hori (1966) que E também é uma integral primeira com respeito a variável tempo.

- iii) as constantes de integração independentes são:

$$E, \tau_0, u_{i0}, U_{i0}, \rho_{j0}, \phi_{j0} \quad (i = 1, 2; \quad j = 2, 3, 4) \tag{3.10}$$

- iv) constante em excesso

$$G \tag{3.11}$$

- v) os coeficientes S_{jk}, M_{jk}, N_{jk} e os ângulos η_k são definidos no Apêndice A-3.

- vi) o parâmetro auxiliar de integração M é caracterizado por SESSIN (1981) através da integral

$$M = \int \frac{d\xi}{\sqrt{-P(\xi)}} \tag{3.12}$$

onde:

$$P(\xi) = \xi^4 - 2E\xi^2 - 2D\xi + (E^2 - 2DG)$$

e cuja correspondente região de integração é identificada a partir de Sessin e Ferraz-Mello (1984). Tal referência também discute as soluções de seu correspondente sistema auxiliar:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dM} &= H & \frac{dU'_1}{dM} &= 2\xi \\ \frac{dH}{dM} &= D + 2\xi K & \frac{dK}{dM} &= -2\xi H \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$E = \xi^2 + K$$

Assumindo-se condições similares as dos Satélites Galileanos de Júpiter, entre as quais ressaltamos:

$$2\ell = (-1)^{n+1} \pi \tag{3.14}$$

pode ser observado (ver Apêndice C) que as principais características do movimento estão associadas com a região II do plano (E,G) de Sessin e Ferraz-Mello (1984), onde librações e circulações harmônicas estão definidas. Entre tais características (ver Apêndice C) ressalte-se:

- i) H é uma variação em torno de O.
- ii) K é uma variação sempre negativa.

Levando tais características e equação (3.14) em (3.7), segue-se que os principais comportamentos das novas variáveis canônicas são identificados por:

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_{10} \\ U'_1 &= U_{10} + 2 \int \xi \cdot dM \\ u'_2 &= u_{20} + X_{10} \xi \\ U'_2 &= U_{20} \\ h'_j &= \gamma_{j0} \cdot \sqrt{2u'_2 + 2(X_{10} \cdot G - u_{20})} \cdot \cos(U'_2 - \phi') + \sum_{m=1}^3 E_{jm} \cdot h''_m \\ & \hspace{15em} j = 1, 2, 3 \\ k'_j &= -\gamma_{j0} \cdot \sqrt{2u'_2 + 2(X_{10} \cdot G - u_{20})} \cdot \text{sen}(U'_2 - \phi') + \sum_{m=1}^3 E_{jm} \cdot k''_m \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$h'_4 = \rho_{40} \cdot \sqrt{L_{40}} \cdot \text{sen}(U'_1 + \phi_{40})$$

$$k'_4 = \rho_{40} \cdot \sqrt{L_{40}} \cdot \text{cos}(U'_1 + \phi_{40})$$

onde:

$$i) \quad \gamma_{j0} = -S_j \cdot \sqrt{\frac{D}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{L_{j0}}{X_{10}} \right)} \quad (3.16)$$

com:

$$S_j = \frac{\varepsilon^2}{D.H(4,0)} \cdot [C_{j1} - C_{j2}] \cdot \left(\frac{X_{10}}{L_{j0}} \right)$$

satisfazendo:

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0}^2 = 1 \quad (3.17)$$

$$ii) \quad \phi' = \cot^{-1} \left(\frac{H}{K} \right) \quad (3.18)$$

é uma variação característica do movimento em torno do ponto de equilíbrio.

$$\phi^0 = \ell = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} \quad \text{para } n = 0 \text{ ou } n = 1 \quad (3.19)$$

iii) os coeficientes E_{jm} satisfazem:

$$E_{jm} = \begin{cases} 0 & j = m \\ -E_{mj} & j \neq m \end{cases} \quad (3.20)$$

com:

$$E_{12} = \gamma_{30} \quad E_{13} = -\gamma_{20} \quad E_{23} = \gamma_{10}$$

iv) os elementos h''_m e k''_m são caracterizados por:

$$\frac{h''_j}{\sqrt{L_{j0}}} = R'_{j1} \cdot \rho_{20} \cdot \text{sen}(U'_1 + \phi_{20}) + R'_{j2} \rho_{30} \cdot \text{sen}(U'_1 + \phi_{30}) \quad (3.21)$$

$$\frac{k''_j}{\sqrt{L_{j0}}} = R'_{j1} \cdot \rho_{20} \cdot \text{cos}(U'_1 + \phi_{20}) + R'_{j2} \rho_{30} \cdot \text{cos}(U'_1 + \phi_{30})$$

cujos coeficientes R'_{jk} são apresentados no Apêndice A-3.

Ressalte-se que tais elementos satisfazem:

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot h_j'' = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot k_j'' = 0 \quad (3.22)$$

o que poderá justificar a insuficiência de um estudo das contribuições das perturbações de ordens superiores para os correspondentes elementos originais.

- v) os elementos que caracterizam as contribuições das componentes forçadas das excentricidades satisfazem.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot h_j' &= \sqrt{2u_2' + 2(X_{10} \cdot G - u_{20})} \cdot \cos(U_2' - \phi') \\ \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot k_j' &= -\sqrt{2u_2' + 2(X_{10} \cdot G - u_{20})} \cdot \sen(U_2' - \phi') \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde:

- a) u_2' é definida nas vizinhanças de u_2^* .
 b) U_2' é uma variação em torno de U_2^0 , definida nas vizinhanças de U_2^* e satisfazendo:

$$U_2' = 0(\varepsilon^{2/3}) \quad (3.24)$$

- vi) os elementos que caracterizam as contribuições das excentricidades livres de um modo geral se escrevem:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[h_m'' - \gamma_{m0} \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} h_s'' \right) \right] \\ \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[k_m'' - \gamma_{m0} \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} k_s'' \right) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Tomando por referência as ideias básicas do Método de Hori, as características identificadas sugerem a definição de uma nova transformação canônica de modo a preservar os principais comportamentos das componentes das excentricidades, bem como identificar os comportamentos das variáveis canônicas associadas com o ângulo crítico laplaciano sob tais influências. Ressalte-se de Henrard (1983) que um movimento com características similares às dos Satélites Galileanos de Júpiter está sujeito às influências do Equilíbrio Instantâneo. O fato de tal conceito requerer que as variáveis canônicas associadas com o ângulo crítico laplaciano estejam definidas numa

vizinhança conveniente da condição do Equilíbrio de Laplace sugere que as características locais impostas pelas influências consideradas sejam essenciais para o estudo em questão. Em acréscimo, ressalte-se também de [2.3] que tais características locais decorrem das influências da comensurabilidade laplaciana sobre o movimento.

Em outras palavras a formulação que se segue tem por objetivo complementar a condição básica de De Sitter (1925) para a definição de uma solução intermediária do movimento, de modo a levar em consideração as influências do principal comportamento do movimento sobre os novos elementos que o descrevem.

3.2 Influências do principal comportamento do movimento

A caracterização de uma nova Hamiltoniana sob as influências do principal comportamento do movimento pode ser obtida através da transformação canônica.

$$(u_i^*, h_j^*, U_i^*, k_j^*) \rightarrow (v_i, p_j, V_i, q_j)$$

definida por:

$$u_1^* = v_1$$

$$U_1^* = V_1$$

$$u_2^* = 2\sqrt{X_{20}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p_j \cdot \text{sen } \phi - q_j \cdot \text{cos } \phi]$$

$$U_2^* = \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p_j \cdot \text{cos } \phi + q_j \cdot \text{sen } \phi]$$

$$h_j^* = \gamma_{j0} \sqrt{-2v_2} \cos(V_2 - \phi) + \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[p_m - \gamma_{m0} \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} p_s \right) \right] \quad (3.26)$$

$j = 1, 2, 3$

$$k_j^* = -\gamma_{j0} \sqrt{-2v_2} \text{sen}(V_2 - \phi) + \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[q_m - \gamma_{m0} \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} q_s \right) \right]$$

$$h_4^* = p_4$$

$$k_4^* = q_4$$

onde:

- i) (v_1, V_1) preservam as características de (u_1^*, U_1^*)
- ii) os elementos que definem a parte forçada das excentricidades se escrevem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot h_j^* &= \sqrt{-2v_2} \cos(V_2 - \phi) \\ \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot k_j^* &= -\sqrt{-2v_2} \operatorname{sen}(V_2 - \phi) \end{aligned} \quad (3.27)$$

tal que:

- a) v_2 é definido de modo a satisfazer condição similar observada para os Satélites Galileanos de Júpiter.

$$\frac{v_2}{X_{20}} = 0(\varepsilon) \quad | \quad v_2 < 0 \quad (3.28)$$

- b) V_2 é uma variação em torno de U_2^0 , definida nas vizinhanças de U_2^* tal que:

$$V_2 = 0(\varepsilon^{2/3}) \quad (3.29)$$

- iii) os elementos que definem a parte livre das excentricidades satisfazem:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[p_m - \gamma_{m0} \left(\sum_{i=1}^3 \gamma_{i0} p_i \right) \right] \\ \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[q_m - \gamma_{m0} \left(\sum_{i=1}^3 \gamma_{i0} q_i \right) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde:

$$\frac{p_j}{\sqrt{X_{20}}}, \frac{q_j}{\sqrt{X_{20}}} = 0(\varepsilon^{2/3})$$

de modo a satisfazer as ordens de grandeza das variáveis canônicas associadas com o ângulo crítico laplaciano (u_2^*, U_2^*) .

- iv) ϕ é uma variação característica do movimento, genericamente definida por

$$\phi = \phi(X) \quad (3.31)$$

com auxílio de elemento auxiliar

$$\alpha = \phi - V_2 + \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p_j \cos \phi + q_j \operatorname{sen} \phi] \quad (3.32)$$

de modo a satisfazer:

a) ϕ é definida em torno do ponto de equilíbrio

$$\phi^0 = \ell = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} \text{ para } n = 0 \text{ ou } n = 1.$$

b) ϕ é assumida inversível tal que:

$$\frac{d\phi}{dX} = 0(\varepsilon^{1/3}) \quad (3.33)$$

$$\text{c) } X = \frac{1}{4X_{20}} \left[v_2 + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j \right)^2 \right] \right]$$

d) as características de α são definidas através dos elementos característicos de Sessin e Ferraz-Mello associados ao movimento.

Como principal resultado deste estudo, segue-se que o movimento é definido em torno de uma particular vizinhança, cujas características são aqui estabelecidas a partir das condições impostas pelo principal comportamento.

Essa conveniente vizinhança é definida em torno da condição

$$\alpha = \ell$$

de modo a impor sobre os elementos associados com o Ângulo Crítico Laplaciano a influência de um correspondente vínculo.

Para tal identificação note especialmente que, como a nova variável V_2' é definida nas vizinhanças da variável original U_2^* , as equações (3.26) e (3.32) caracterizam o movimento em torno da condição:

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi(X) \\ V_2' \Big|_{\alpha=\phi} &= U_2^* \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para continuar essa identificação torna-se necessário levar em consideração a função característica $f(U_2^*)$ (2.9). A arbitrariedade de tal função é agora levantada assumindo neste estudo que $f(U_2^*)$ é aqui definida de modo a satisfazer a equação:

$$v_2 \Big|_{\alpha=\phi} + u_2^* + X_{20} \cdot f(U_2^*) = v_{20}^* \tag{3.35}$$

onde

$$v_{20}^* = 0$$

é um vínculo de contribuição nula em (3.34). Consequentemente segue-se que a conjugada v_2 é dada por:

$$v_2 \Big|_{\alpha=\phi} = v_{20}^* - u_2^* - X_{20} \cdot f(U_2^*) \tag{3.36}$$

na referida vizinhança.

Outra consequência natural de tal definição consiste na influência de tal vínculo sobre o movimento. Para isso, com auxílio de (3.31), note-se da aplicação do Teorema da Função Implícita a equação (3.34) a expressão resultante:

$$v_2 \Big|_{\alpha=\phi} = -\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j \right)^2 \right]_{\alpha=\phi} + 4X_{20} \phi^{-1}(\alpha) \tag{3.36'}$$

Da equivalência das equações (3.36) e (3.36'):

$$v_{20}^* = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j \right)^2 \right]_{\alpha=\phi} - \mathfrak{F}(\alpha, u_2^*, U_2^*) = 0 \tag{3.37}$$

observamos a possibilidade de que tal vínculo defina as características do elemento

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j \right)^2 \right]_{\alpha=\phi} \tag{3.38}$$

na conveniente vizinhança (3.34).

Notando de (3.26) a relação

$$\left(\frac{u_2^*}{4X_{20}} \right)^2 + U_2^{*2} = \frac{1}{4X_{20}} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j \right)^2 \right] \tag{3.39}$$

segue-se na conveniente vizinhança (3.34) que tal elemento define as características das variáveis canônicas (u_2^*, V_2^*) através da expressão:

$$\left(\frac{u_2^*}{4X_{20}}\right)^2 + U_2^{*2} = \frac{1}{4X_{20}} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j\right)^2 \right]_{\alpha=\phi} \quad (3.40)$$

Um terceiro resultado natural deste estudo também mostra de (3.21), (3.32), (3.36) e (3.40) que o elemento

$$\phi = \phi(X)$$

pode ser descrito por uma função das variáveis canônicas (u_2^*, V_2^*)

$$\phi = \phi(v_{20}^*, u_2^*, U_2^*) \quad (3.41)$$

na conveniente vizinhança (3.34).

Desse modo podemos concluir que o movimento em estudo é definido em torno de uma conveniente vizinhança

$$\alpha = \phi \quad (3.42)$$

onde:

$$v_2|_{\alpha=\phi} = v_{20}^* - u_2^* - X_{20} f(U_2^*)$$

$$V_2|_{\alpha=\phi} = U_2^*$$

$$\phi = \phi(v_{20}^*, u_2^*, U_2^*)$$

cujo vínculo

$$v_{20}^* = 0$$

define as características do elemento

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j\right)^2 \right]_{\alpha=\phi}$$

Este estudo se completa observando que a variável auxiliar Z^* definida de (2.25) e (3.26) por:

$$Z^* = \frac{1}{X_{20}} \left[v_2 + u_2^* + X_{20} f(U_2^*) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \left[p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right) \right]^2 + \left[q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right) \right]^2 \right] \quad (3.43)$$

está sujeita a influência do vínculo (3.35), de modo a caracterizar seu principal comportamento através da expressão:

$$Z^* = -\frac{1}{2X_{20}} \sum_{j=1}^4 \left[p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right) \right]^2 + \left[q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right) \right]^2 \quad (3.44)$$

satisfazendo de (2.13): $Z^* = 0(\varepsilon)$.

3.3 Influências do equilíbrio instantâneo similar

O principal resultado da Seção [3.2] sugere que o movimento conveniente na vizinhança (3.42) seja definido nas vizinhanças do conceito de Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983).

Para tal identificação, note primeiramente de (3.26) que as componentes forçadas dos satélites

$$\begin{aligned} h_{jF}^* &= \gamma_{j0} \sqrt{-2v_2} \cos(V_2 - \phi) \\ k_{jF}^* &= -\gamma_{j0} \sqrt{-2v_2} \sen(V_2 - \phi) \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3$$

são independentes das correspondentes contribuições livres

$$\begin{aligned} h_{jL}^* &= \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[p_m - \gamma_{m,0} \cdot \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} p_s \right) \right] \\ k_{jL}^* &= \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[q_m - \gamma_{m,0} \cdot \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} q_s \right) \right] \end{aligned}$$

bem como podem ser definidas por funções das variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano na conveniente vizinhança (3.42)

$$\begin{aligned} h_{jF}^* \Big|_{\alpha=\phi} &= h_{jF}^*(u_2^*, U_2^*) \\ k_{jF}^* \Big|_{\alpha=\phi} &= k_{jF}^*(u_2^*, U_2^*) \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3$$

A correspondente independência dos elementos v_1 , V_1 , $p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right)$, $q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right)$ com respeito a tais influências da conveniente vizinhança (3.42), tais características das excentricidades forçadas e o fato de as variáveis canônicas (u_2^*, V_2^*) serem definidas em torno de valores de referência, estabelecidos sob a condição do Equilíbrio de Laplace, mostra que o movimento na conveniente vizinhança (3.42) apresenta características similares às do conceito de Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983). Essas similaridades numa conveniente vizinhança justificam aqui a denominação empregada, bem como caracterizam o principal comportamento do movimento sob a condição:

$$\alpha = \phi$$

Ressalte-se também que o fato de ϕ ser uma variação característica em torno do ponto de equilíbrio

$$\phi^0 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} \text{ onde } n = 0 \text{ ou } n = 1$$

sugere que a parte forçada do movimento na data considerada esteja definido nas vizinhanças de

$$\alpha = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} = \ell \text{ onde } n = 0 \text{ ou } n = 1$$

de modo a identificar duas possíveis orientações para o estudo em questão.

Para a determinação da orientação da parte forçada do movimento da data considerada, note de (1.3), (2.9) e (3.27) que as características dos elementos $\sqrt{-2v_2}$ e α na conveniente vizinhança são definidos através das expressões:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} h_j &= \sqrt{-2v_2} \cdot \cos \alpha \\ \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} h_j &= \sqrt{-2v_2} \cdot \sen \alpha\end{aligned}\tag{3.45}$$

onde:

$$\begin{aligned}h_j &= \sqrt{-2Y_j} \cdot \cos \left(V_1 + \bar{w}_j + \frac{v_1}{2X_{10}} \right) \\ k_j &= -\sqrt{-2Y_j} \cdot \sen \left(V_1 + \bar{w}_j + \frac{v_1}{2X_{10}} \right)\end{aligned}$$

Se a parte forçada do movimento é definida sob uma orientação definida pelos elementos

$$V_1, \alpha, \bar{w}_4$$

então uma mudança de orientação pode ser obtida através dos elementos

$$\pi + V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$$

A possibilidade de se definir o movimento sob uma dessas orientações requer posterior identificação das características das contribuições livres no estudo em questão.

É conveniente ressaltar que, em realidade, a origem do ângulo α decorre do fato de o Ângulo Crítico Laplaciano ser uma variação em torno do ponto de equilíbrio

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\ell$$

e das características conhecidas do movimento (Sinclair, 1975):

- i) $\theta_1 + \bar{w}_1$ é uma variação em torno de 0.
- ii) $\theta_2 + \bar{w}_2$ é uma variação em torno de 0.

Consequentemente, note que:

- i) $V_1 + \bar{w}_1 = \theta_1 + \bar{w}_1 - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ é uma variação em torno de $-\ell$.
- ii) $V_1 + \bar{w}_2 = \theta_2 + \bar{w}_2 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ é uma variação em torno de ℓ .

Sob a condição de que:

$$\gamma_{10} \cdot e_1 - \gamma_{20} \cdot e_2 > \gamma_{30} \cdot e_3$$

para o movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter, recorrendo aos elementos h_j e k_j e aos coeficientes característicos γ_{j0} , segue-se que:

- i) $\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot h_j$ é uma variação em torno de 0.
- ii) $\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot k_j$ é uma variação sempre negativa ou positiva conforme a orientação do movimento.

Da definição do ângulo

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot k_j}{\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot h_j} \right)$$

observamos que α é uma variação em torno do ponto de equilíbrio ℓ , corroborando assim a identificação sugerida pelo estudo anterior.

3.4 Influências da condição do equilíbrio de Laplace

O fato de este estudo ser definido em torno da condição do Equilíbrio de Laplace

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\ell$$

implica de (3.26) que a variação característica ϕ seja definida em torno do ponto de equilíbrio

$$\phi^0 = \ell$$

Como o principal comportamento do movimento é definido na conveniente vizinhança (3.42)

$$\alpha = \phi$$

segue-se neste estudo que uma influência da condição da libração do Equilíbrio de Laplace se caracteriza por definir tal vizinhança em torno do ponto de equilíbrio

$$\alpha = \ell$$

Uma segunda influência está associada com os valores de referência

$$\begin{aligned} u_2^* \Big|_{t=t_L} &= u_2^0 \\ U_2^* \Big|_{t=t_L} &= U_2^0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

em torno dos quais as variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano (u_2^*, U_2^*) estão definidas.

Com respeito ao valor U_2^0 note de (2.2) e da influência (2.17) da Comensurabilidade Laplaciana a estimativa dada por:

$$U_2^0 = \beta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \langle Z^* \rangle_{\text{sec}} \tag{3.47}$$

Como o movimento é definido em torno da conveniente vizinhança (3.42), segue-se que a estimativa do valor u_2^0 , pode ser obtida recorrendo-se à equação (3.40):

$$\left(\frac{u_2^*}{4X_{20}} \right)^2 + U_2^{*2} = \frac{1}{4X_{20}} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j \right)^2 \right]_{\alpha=\phi}$$

que define as principais características das correspondentes variáveis (u_2^*, U_2^*) através do elemento de referência

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right)^2 \right]_{\alpha=\phi}$$

cujas características podem ser definidas pelo vínculo (3.37).

Neste estudo a indeterminação do valor u_2^0 é levantada pela condição

$$u_2^0 > 0 \tag{3.48}$$

de modo a satisfazer a referida equação.

3.5 Equações do movimento

Este estudo se completa com a determinação das novas equações do movimento sob as influências do principal comportamento. A partir da Hamiltoniana original H^* (2.24) e da nova transformação canônica (3.26), o movimento em questão é definido nas vizinhanças do Equilíbrio Instantâneo Similar através do sistema canônico.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_i, p_j) &= \frac{\partial H /}{\partial (V_i, q_j)} & i=1,2; & \quad j=1,2,3,4 \\ \frac{d}{dt}(V_i, q_j) &= -\frac{\partial H /}{\partial (v_i, p_j)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

cuja Hamiltoniana transformada se escreve:

$$H / = \sum_{m=0}^5 H_m(v_i, p_j, V_i, q_j) \quad (3.50)$$

onde o índice m define a ordem de grandeza da componente H_m com respeito a potência m da raiz cúbica do pequeno parâmetro ε .

$$H_0 = A(0,0)$$

$$H_1 = H_2 = 0$$

$$H_3 = A(3,0)$$

$$\begin{aligned} H_4 &= A(4,0)Z^2 + (-1)^n A(4,0) \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \sqrt{-2v_2} \operatorname{sen} \alpha \\ H_5 &= A(5,0)Z + A(5,1)v_2 + A(5,2)v_2 \cos 2\alpha + A(5,3)Z^{*2} + & (3-51) \\ &+ (-1)^n \sqrt{-2v_2} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot A(5, j, 0) \left[p_j^* \cdot \cos(V_2 - \phi) - q_j^* \cdot \operatorname{sen}(V_2 - \phi) \right] + \\ &+ (-1)^n \sqrt{-2v_2} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot A(5, j, 1) \left[p_j^* \cdot \cos(2\alpha + V_2 - \phi) - q_j^* \cdot \operatorname{sen}(2\alpha + V_2 - \phi) \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot A(5, j, 1, 0) \left[p_j^{*2} + q_j^{*2} \right] + \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^4 n_{j0} \cdot A(5, i, j, 2, 0) \left[p_i^* \cdot p_j^* + q_i^* \cdot q_j^* \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^3 n_{j0} \cdot A(5, j, 1, 1) \left[(p_j^{*2} - q_j^{*2}) \cos 2(\alpha + V_2 - \phi) - 2p_j^* \cdot q_j^* \cdot \operatorname{sen} 2(\alpha + V_2 - \phi) \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^3 n_{j0} \cdot A(5, i, j, 2, 1) \left[(p_i^* \cdot p_j^* - q_i^* \cdot q_j^*) \cos 2(\alpha + V_2 - \phi) - (p_i^* \cdot q_j^* + p_j^* \cdot q_i^*) \right. \\ &\left. \operatorname{sen} 2(\alpha + V_2 - \phi) \right] \end{aligned}$$

onde:

$$\text{i) } Z = \frac{1}{X_{10}} \left[v_1 + v_2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 p_j^{*2} + q_j^{*2} \right]$$

$$\text{ii) } p_j^* = p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p_m \right)$$

$$q_j^* = q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q_m \right)$$

com

$$\gamma_{40} = 0$$

$$\text{iii) } \alpha = \phi - V_2 + \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p_j \cdot \cos \phi + q_j \cdot \sin \phi] \quad (3.52)$$

iv) $\phi = \phi(X)$ é uma variação característica do movimento em torno do ponto de equilíbrio

$$\phi^0 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} \text{ onde } n = 0 \text{ ou } n = 1$$

com

$$X = \frac{1}{4X_{20}} \left[v_2 + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot p_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot q_j \right)^2 \right] \right]$$

Ressalte-se que ϕ é assumida inversível tal que

$$\frac{d\phi}{dX} = 0(\varepsilon^{1/3})$$

$$\text{v) } \frac{v_1}{X_{10}}, Z, V_2, \frac{p_j}{\sqrt{X_{20}}}, \frac{q_j}{\sqrt{X_{20}}} = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$\frac{v_2}{X_{20}}, X, Z^* = 0(\varepsilon)$$

vi) os coeficientes da Hamiltoniana $H/$ são definidos na Tabela 6 do Apêndice B.

Sob as condições do Equilíbrio Instantâneo Similar, o movimento é definido pelo sistema canônico (3.49) na conveniente vizinhança (3.34)

$$\alpha = \phi$$

sob as influências do seu correspondente vínculo (3.37) e dos valores de referência (3.46) associados com a condição do Equilíbrio de Laplace, de modo a caracterizar o principal comportamento da variável auxiliar original Z^* (2.25) através da equação:

$$Z^* = -\frac{1}{2X_{20}} \sum_{j=1}^4 \left[p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right) \right]^2 + \left[q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right) \right]^2 \quad (3.53)$$

Note também de (3.42) que tal estudo condiciona o comportamento da variável canônica v_2 à influência do vínculo (3.37).

3.6 Solução intermediária do movimento

O Método de Hori (1966) será a seguir aplicado, objetivando a identificação de uma solução intermediária do movimento, que leve em consideração as influências discutidas sobre as novas variáveis canônicas

$$(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) \quad (3.54)$$

definidas pelo método.

O primeiro passo deste estudo requer a identificação das características dessas novas variáveis canônicas através da determinação do novo Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento. Como tal movimento está sujeito às influências do Equilíbrio Instantâneo Similar, sua solução deve levar em consideração as correspondentes características impostas por esse conceito, de modo a identificar os principais comportamentos de seu correspondente vínculo (3.37) e dos valores de referência (3.46). Essa identificação é aqui discutida tomando por referência as ideias básicas de Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito ao Método de Hori (1966).

O segundo passo do método requer a caracterização das principais componentes da nova Hamiltoniana e da correspondente geratriz da transformação. Com respeito à nova Hamiltoniana, este estudo se preocupa com a integral primeira de Hori e a componente de ordem superior consecutiva. Essa segunda componente é em-

pregada na definição de um núcleo integrável das principais perturbações de ordens superiores com respeito as características da solução do Sistema Auxiliar de Hori associado. Esse núcleo é utilizado na identificação dos principais comportamentos das constantes de integração e do parâmetro de Hori com respeito a variável tempo, através do estudo das equações variacionais de Lagrange associadas com o método de Hori (Sessin, 1983).

Em relação à geratriz da transformação, é discutida a componente de ordem menor, com o objetivo de uma identificação de um núcleo principal da geratriz. Esse núcleo tem por objetivo caracterizar o principal comportamento da contribuição da geratriz para os elementos do movimento, cujas correspondentes equações de Hori requeiram uma melhor precisão com respeito a variável tempo. Tal estudo é aqui desenvolvido tomando por referência Sessin (1983) através da segunda aproximação da correspondente equação de Hori do elemento considerado.

Esses requisitos para a identificação de uma solução intermediária do movimento serão discutidos nos capítulos que se seguem de acordo com as ideias básicas do método de Hori (1966).

4

SISTEMA AUXILIAR DE HORI

O Método de Hori (1966) é aqui empregado na definição de uma transformação canônica numa conveniente vizinhança

$$(v_i, V_i, p_j, q_j) \rightarrow (v'_i, V'_i, p'_j, q'_j) \quad (4.1)$$

satisfazendo as condições:

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 \\ p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right) &= p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p'_m \right) \\ V_1 &= V'_1 \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right) &= q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q'_m \right) \end{aligned}$$

de modo a assegurar a independência desses elementos com respeito as influências do vínculo do Equilíbrio Instantâneo Similar.

O primeiro passo para a aplicação do Método de Hori (1966) consiste em obter a solução de seu correspondente sistema auxiliar, objetivando a identificação das principais características de suas correspondentes variáveis canônicas.

Este estudo leva em consideração as influências do Equilíbrio Instantâneo Similar sobre a solução do Sistema Auxiliar de Hori, de

modo a caracterizar o principal comportamento do vínculo imposto por tal conceito, bem como dos valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace. Uma caracterização dos elementos auxiliares de Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito às influências decorrentes de tal conceito é também discutida.

4.1 Solução do Sistema Auxiliar de Hori

O Sistema Auxiliar de Hori, que caracteriza o principal comportamento do movimento, é definido a partir do Método de Hori (1966) por:

$$\frac{d}{d\tau}(v'_i, p'_j) = \frac{\partial H'_4}{\partial(V'_i, q'_j)} \quad i=1,2; \quad j=1,2,3,4 \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{d\tau}(V'_i, q'_j) = \frac{-\partial H'_4}{\partial(v'_i, p'_j)}$$

onde:

- i) (v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) são as novas variáveis canônicas que definem os principais comportamentos das correspondentes variáveis canônicas originais (v_i, p_j, V_i, q_j)
- ii) τ é o parâmetro de integração de Hori
- iii) $H'_4 = H_4(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) = A(4,0)Z'^2 + A(4,0)\sqrt{\frac{D}{X_{10}}}\sqrt{-2v'_2} \cdot \text{sen } \alpha'$

com:

$$Z' = \frac{1}{X_{10}} \left[v'_1 + v'_2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \left[p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p'_m \right) \right]^2 + \left[q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q'_m \right) \right]^2 \right]$$

$$\alpha' = \phi' - V'_2 + \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \left[p'_j \cdot \cos \phi' + q'_j \text{sen } \phi' \right]$$

$\phi' = \phi(X')$ é uma variação em torno de $\phi^0 = \ell$ tal que:

$$\frac{d\phi'}{dX'} = 0(\varepsilon^{1/3})$$

$$X' = \frac{1}{4X_{20}} \left[v'_2 + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right] \right]$$

satisfazendo:

$$a) \quad Z', \quad \frac{v'_1}{X_{10}}, V'_2, \frac{p'_j}{\sqrt{X_{20}}}, \frac{q'_j}{\sqrt{X_{20}}} = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$b) \quad \frac{v'_2}{X_{20}}, \quad X' = 0(\varepsilon)$$

$$c) \quad \gamma_{40} = 0$$

Esse sistema é aqui discutido tomando em consideração as ideias básicas do Método de Hori, as quais requerem que suas variáveis canônicas preservem as principais características das correspondentes variáveis canônicas originais. Sob tal condição, o conceito de Equilíbrio Instantâneo Similar impõe sobre o sistema de Hori as características que se seguem:

- i) sua solução é definida nas vizinhanças da condição (3.34), a qual é caracterizada através da condição:

$$\alpha' = \phi' \quad (4.3)$$

que, por sua vez, define o vínculo:

$$v'_{20} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]_{\alpha'=\phi'} - \mathfrak{T}'|_{\alpha'=\phi'} = 0 \quad (4.4)$$

que caracteriza o principal comportamento do correspondente vínculo original (3.37).

- ii) a variável canônica v'_2 está sujeita a influência do vínculo (4.4), de modo a preservar a influência do vínculo (3.37) sobre a correspondente variável original v_2 .

Introduzindo o elemento auxiliar de integração:

$$M = \frac{A(4,0)}{X_{10}} (\tau - \tau_0) \quad (4.5)$$

onde τ_0 é uma constante de integração, segue-se que o sistema (4.2) se escreve:

$$\begin{aligned} \frac{dv'_1}{dM} &= 0 \\ \frac{dV'_1}{dM} &= -2Z' \\ \frac{dv'_2}{dM} &= -\sqrt{DX_{10}} \sqrt{-2v'_2} \cdot \cos \alpha' \\ \frac{dV'_2}{dM} &= -2Z' + \sqrt{\frac{D \cdot X_{10}}{-2v'_2}} \cdot \text{sen} \alpha' + \frac{d\phi'}{dM} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp'_j}{dM} &= -2Z' \left[q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} \cdot q'_s \right) \right] - \gamma_{j0} \left[\frac{dv'_2}{dM} \cdot \frac{\text{sen} \phi'}{2\sqrt{X_{20}}} + \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} \cdot q'_s \right) \cdot \frac{d\phi'}{dM} \right] \\ \frac{dq'_j}{dM} &= 2Z' \left[p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} \cdot p'_s \right) \right] + \gamma_{j0} \left[\frac{dv'_2}{dM} \cdot \frac{\cos \phi'}{2\sqrt{X_{20}}} + \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_{s0} \cdot p'_s \right) \cdot \frac{d\phi'}{dM} \right] \end{aligned}$$

Com respeito à sua solução, note primeiramente que:

$$v'_1 = v_{10} \quad (4.7)$$

onde v_{10} é uma constante de integração.

Para se obter os elementos p'_j e q'_j , consideremos suas combinações:

$$\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m, \quad \sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m,$$

com correspondentes equações:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dM} \left[\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right] &= -\frac{dv'_2}{dM} \cdot \frac{\text{sen} \phi'}{2\sqrt{X_{20}}} - \left[\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right] \frac{d\phi'}{dM} \\ \frac{d}{dM} \left[\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right] &= \frac{dv'_2}{dM} \cdot \frac{\cos \phi'}{2\sqrt{X_{20}}} + \left[\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right] \frac{d\phi'}{dM} \end{aligned}$$

cujas soluções se escrevem:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m &= -\frac{v'_2}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \text{sen } \phi' + 2\sqrt{X_{20}} \cdot \Gamma_0 \cdot \text{cos}(\phi' + \phi_0) \\ \sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m &= \frac{v'_2}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \text{cos } \phi' + 2\sqrt{X_{20}} \cdot \Gamma_0 \cdot \text{sen}(\phi' + \phi_0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde Γ_0, ϕ_0 são constantes de integração.

Levando tais elementos (4.8) em (4.6) segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dM} \left[p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) \right] &= \frac{dV'_1}{dM} \left[q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) \right] \\ \frac{d}{dM} \left[q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) \right] &= -\frac{dV'_1}{dM} \left[p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) \right] \end{aligned}$$

de modo a obter:

$$\begin{aligned} p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) &= \sqrt{X_{10}} \cdot \rho_{j0} \cdot \text{sen}(V'_1 + \phi_{j0}) \\ q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) &= \sqrt{X_{10}} \cdot \rho_{j0} \cdot \text{cos}(V'_1 + \phi_{j0}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\rho_{j0}, \phi_{j0} (j=1,2,3)$: são constantes de integração satisfazendo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot \text{sen } \phi_{j0} &= 0 \\ \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot \text{cos } \phi_{j0} &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ressalte-se também de (4.8) e (4.9) os elementos auxiliares:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot q'_j \right)^2 - \sum_{j=1}^3 p_j'^2 + q_j'^2 &= -X_{10} \sum_{j=1}^3 \rho_{j0}^2 \\ \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot q'_j \right)^2 &= 4X_{20} \Gamma_0^2 + 2v'_2 \Gamma_0 \text{sen } \phi_0 + \frac{v_2'^2}{4X_{20}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

posteriormente utilizados neste estudo.

Com respeito ao 4° satélite de (4.6) encontramos:

$$\begin{aligned} p'_4 &= \sqrt{X_{10}} \cdot \rho_{40} \cdot \text{sen}(V'_1 + \phi_{40}) \\ q'_4 &= \sqrt{X_{10}} \cdot \rho_{40} \cdot \text{cos}(V'_1 + \phi_{40}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde ρ_{40} , ϕ_{40} são constantes de integração.

A determinação das outras variáveis do sistema requer a introdução dos elementos auxiliares de Sessin e Ferraz-Mello (1984), aqui definidos com o auxílio de (4.2), (4.11) e (4.12) por:

$$\begin{aligned} \xi &= -Z' = -\frac{1}{X_{10}} \left[v'_1 + v'_2 - \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \right] \\ H &= \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \cdot \sqrt{-2v'_2} \cos \alpha' \\ K &= \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \cdot \sqrt{-2v'_2} \text{sen} \alpha' \\ E &= \frac{H'_4}{A(4,0)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

O correspondente sistema auxiliar se escreve:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dM} &= H & \frac{dV'_1}{dM} &= 2\xi \\ \frac{dH}{dM} &= D + 2\xi K & \frac{dK}{dM} &= -2\xi H \end{aligned} \quad (4.14)$$

cujas respectivas integrais primeiras de Hori e Sessin são dadas por:

$$\begin{aligned} E &= \xi^2 + K \\ G &= -\xi + \frac{1}{2D} (H^2 + K^2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Note de (4.7), (4.13) e (4.15) que a integral G-Sessin caracteriza uma constante em excesso definida por:

$$G = \frac{1}{X_{10}} \left[v_{10} - \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \right] \quad (4.16)$$

O elemento auxiliar ξ , caracterizado pela equação:

$$\frac{d\xi}{dM} = \pm \sqrt{-P(\xi)} \quad (4.17)$$

onde:

$$P(\xi) = \xi^4 - 2E\xi^2 - 2D\xi + (E^2 - 2DG)$$

é definido através da integral

$$M = \int \frac{d\xi}{\sqrt{-P(\xi)}} \quad (4.18)$$

cuja região de integração é identificada através do Modelo de Sessin e Ferraz-Mello (1984).

Ressalte-se que ξ e os elementos H , K , V_1' e v_2' definidos de (4.6), (4.13), (4.14) e (4.15) por:

$$\begin{aligned} H &= \frac{d\xi}{dM} \\ K &= E - \xi^2 \\ \frac{dV_1'}{dM} &= 2\xi \\ v_2' &= -X_{10}(\xi + G) \end{aligned} \quad (4.19)$$

tem por característica comum o fato de serem definidos em termos das constantes de integração E e G e do parâmetro M .

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(E, G, M) \\ H &= H(E, G, M) \\ K &= K(E, G, M) \\ V_1' &= V_{10} + V_1'(E, G, M) \\ v_2' &= v_2'(E, G, M) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Embora tais elementos auxiliares de Sessin e Ferraz-Mello definam as características da Solução do Sistema Auxiliar de Hori, suas expressões não levam em consideração as influências do vínculo v_{20}' sobre tais elementos, de modo a não permitir um estudo completo das influências das perturbações de ordens superiores sobre a referida solução.

Com respeito a tal vínculo, note primeiramente das equações (4.6) e (4.13) que:

$$\frac{dv_2'}{dM} = -X_{10}H \quad (4.21)$$

Tomando em consideração a relação auxiliar decorrente de (4.14)

$$H = \frac{1}{2D} \frac{d}{dM} (H^2 + K^2)$$

segue-se que:

$$v'_2 = v_{20} - \frac{X_{10}}{2D} (H^2 + K^2)$$

onde v_{20} é uma constante de integração. Substituindo em tal expressão a integral G-Sessin (4.15) e comparando o resultado obtido com a expressão do elemento ξ (4.13) encontramos:

$$v'_2 = v_{20} - X_{10} (\xi + G) \quad (4.22)$$

onde

$$v_{20} = 0$$

caracteriza a possível influência do vínculo (4.4) sobre a referida variável, de modo a preservar a influência do vínculo (3.37) sobre a correspondente variável canônica original v_2 .

Ressalte-se de (4.13) que os elementos ξ, H, K , definidos por (4.20) a partir do sistema auxiliar (4.14), não levam em consideração a possível influência do vínculo (4.4) através da variável canônica v'_2 .

A dificuldade inerente à integração da correspondente conjugada canônica V'_2 é neste estudo levantada a partir do elemento α' (4.2) e da equação (4.8) através da expressão:

$$V'_2 = \Gamma_0 \cos \phi_0 + \phi' - \alpha' \quad (4.23)$$

de modo a identificar

$$V'_2 = \Gamma_0 \cos \phi_0 \quad (4.24)$$

sob a condição (4.3).

Com respeito à identificação das características da variável canônica V'_1 , note primeiramente de (4.6) que a equação:

$$\frac{dV'_1}{dM} = -2Z'$$

caracteriza o caso particular da equação

$$\frac{d}{dM} \left[V_1 - \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \left[p'_j \cdot \cos \phi' + q'_j \cdot \sin \phi' \right] \right] = 2\xi$$

cujas solução em termos do elemento α' (4.2), se escreve:

$$V_1 - V_2 = V_{10} + 2 \int \xi dM - \phi' + \alpha' \quad (4.25)$$

onde V_{10} é uma constante de integração, de modo a identificar

$$V_1 - V_2 = V_{10} + 2 \int \xi dM$$

sob a influência da condição (4.3).

Essas influências da condição (4.3) sobre as variáveis V_1 , V_2 e a influência do vínculo (4.4) através da variável v'_2 caracterizam neste estudo as influências do Equilíbrio Instantâneo sobre os elementos auxiliares de Sessin e Ferraz-Mello.

Objetivando uma melhor compreensão dos resultados obtidos, reescrevemos a solução do Sistema Auxiliar de Hori (4.6), sob as influências do Equilíbrio Instantâneo Similar, como se segue:

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_{10} \\ V'_1 &= V_{10} + V'_2 + 2 \int \xi dM - \phi' + \alpha' \\ v'_2 &= v_{20} - X_{10} (\xi + G) \\ V'_2 &= \Gamma_0 \cos \varphi_0 + \phi' - \alpha' \\ p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) &= \sqrt{X_{10}} \cdot \rho_{j0} \cdot \sin(V'_1 + \phi_{j0}) \\ q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) &= \sqrt{X_{10}} \cdot \rho_{j0} \cdot \cos(V'_1 + \phi_{j0}) \\ \sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m &= -\frac{v'_2}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \sin \phi' + 2\sqrt{X_{20}} \Gamma_0 \cos(\phi' + \phi_0) \\ \sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m &= \frac{v'_2}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \cos \phi' + 2\sqrt{X_{20}} \Gamma_0 \sin(\phi' + \phi_0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde:

i) as constantes de integração independentes são

$$E, \tau_0, v_{10}, V_{10}, \Gamma_0, \phi_0, \rho_{j0}, \phi_{j0} \quad (j = 1, 3, 4)$$

ii) as constantes de integração em excesso satisfazem

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot \rho_{j0} \operatorname{sen} \phi_{j0} = 0$$

$$(j = 2)$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot \rho_{j0} \cos \phi_{j0} = 0$$

$$v_{20} = 0$$

$$G = \frac{1}{X_{10}} \left(v_{10} - \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \right)$$

iii) tal solução é definida na particular vizinhança

$$\alpha' = \phi'$$

sob a influência do correspondente vínculo.

$$v'_{20} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]_{\alpha'=\phi'} - \mathfrak{S}'_{\alpha'=\phi'} = 0$$

o qual caracteriza o elemento de referência

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]_{\alpha'=\phi'}$$

De modo a completar a identificação de tal solução é necessário caracterizar os elementos ξ, H, K, V'_1 tomando por referência modelo de identificação de Sessin e Ferraz-Mello (1984) como se segue.

4.2 Elementos característicos de Sessin e Ferraz-Mello

A determinação de tais elementos inicialmente requer a identificação da região de integração associada com a equação (4.18). Para tal, note dos capítulos anteriores que as variáveis canônicas originais (v_i, V_i) e o ângulo auxiliar α se escrevem em termos dos elementos originais através das expressões:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 3(L_1 - L_{10}) + (L_2 - L_{20}) - \sum_{j=1}^4 Y_j \\
 V_1 &= \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{1}{2X_{10}} \left[(3+S)(L_{10} - L_1) + (1+S)(L_{20} - L_2) + \sum_{j=1}^4 Y_j \right] \\
 \theta_i &= \lambda_i - 2\lambda_{i+1} \\
 v_2 &= -\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} e_{j0} \sqrt{L_{j0}} \cos \chi_j^* \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} e_{j0} \sqrt{L_{j0}} \text{sen} \chi_j^* \right)^2 \right] \\
 V_2 &= \phi + \cot^{-1} W^* \\
 \alpha &= \beta - \cot^{-1} W^*
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \beta &= \beta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} - \ell + \frac{1}{2X_{10}} \left[(1+3S)(L_{10} - L_1) + (1+S)(L_{20} - L_2) \right] \\
 \text{ii)} \quad \sum_{j=1}^4 Y_j &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 e_{j0}^2 \cdot L_{j0} \quad \text{com } e_{j0} = \sqrt{\frac{-2Y_j}{L_{j0}}} \\
 \text{iii)} \quad \chi_j^* &= \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \bar{w}_j + \beta - \beta_0 + \frac{S}{2X_{10}} \left[(L_{10} - L_1) + (L_{20} - L_2) \right] \\
 \text{iv)} \quad W^* &= -\frac{\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot h_j^*}{\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot k_j^*}
 \end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned}
 h_j^* &= e_{j0} \cdot \sqrt{L_{j0}} \cdot \cos \chi_j^* \\
 k_j^* &= -e_{j0} \cdot \sqrt{L_{j0}} \cdot \text{sen} \chi_j^*
 \end{aligned}$$

Note também que o fato do principal comportamento do movimento ser definido sob a condição:

$$\alpha = \phi$$

sugere de (3.45) estimativas mais apropriadas dadas por:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot h_j &= \sqrt{-2v_2} \cdot \cos \alpha \\ \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot k_j &= \sqrt{-2v_2} \cdot \sen \alpha \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde

$$\begin{aligned} h_j &= \sqrt{-2Y_j} \cdot \cos \left(V_1 + \bar{w}_j + \frac{v_1}{2X_{10}} \right) \\ k_j &= -\sqrt{-2Y_j} \cdot \sen \left(V_1 + \bar{w}_j + \frac{v_1}{2X_{10}} \right) \end{aligned}$$

com

$$V_1 + \frac{v_1}{2X_{10}} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{S}{2X_{10}} \left[(L_{10} - L_1) + (L_{20} - L_2) \right]$$

Ressalte-se que se uma orientação da contribuição forçada é caracterizada pelos elementos V_1, α, \bar{w}_4 então a orientação contrária é definida pelos elementos $\pi + V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$.

Tomando por referência as ideias básicas de Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito ao Método de Hori (1966), de (4.13) e (4.14) segue-se em primeira aproximação para uma data considerada que:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{X_{10}} \left[v_1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 e_{j0}^2 \cdot L_{j0} \right] \\ H &= (-1)^n \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \cdot \sqrt{-2v_2} \cdot \cos \alpha \\ K &= (-1)^n \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \cdot \sqrt{-2v_2} \cdot \sen \alpha \\ E &= \xi^2 + K \\ G &= \frac{1}{X_{10}} \left[v_1 - v_2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 e_{j0}^2 \cdot L_{j0} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde ressaltamos o elemento auxiliar:

$$v_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 e_{j0}^2 \cdot L_{j0} = \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2$$

bem como os elementos $\sqrt{-2v_2}$ e α definidos por (4.28).

Assumindo que o movimento apresenta características similares as do movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter e recorrendo a seus elementos médios numa data conhecida (Sato, 1986) podemos identificar suas características associadas com a região II do plano (E,G) de Sessin e Ferraz-Mello (1984), onde librações e circulações harmônicas estão definidas. Nesse caso, recorrendo ao Apêndice A-4 e a Tabela 7 do Apêndice B encontramos a solução do sistema auxiliar (4.14) descrita por funções das constantes de integração E, G e do parâmetro M, definidas na conveniente vizinhança (4.3):

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{j=0} \xi(j) \cdot \cos jV \\ H &= \sum_{j=1} H(j) \cdot \sen jV \\ K &= \sum_{j=0} K(j) \cdot \cos jV \\ V_1' &= V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + V_1(0)V + \sum_{j=1} V_1(j) \sen jV \\ v_2' &= \sum_{j=0} v_2(j) \cdot \cos jV \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde

$$V = V(0)M$$

Este estudo também identifica o elemento auxiliar α' definido de (4.13), sob a condição (4.3), por:

$$\alpha' = \cot^{-1} \left(\frac{H}{K} \right) \tag{4.31}$$

cujo correspondente elemento:

$$\cos \alpha' = \sum_{m=1} \eta(m,1) \cdot \sen mV \tag{4.32}$$

tem seus coeficientes apresentados na Tabela 7 do Apêndice B.

Ressalte-se neste estudo que tais elementos auxiliares não levam em consideração a possível influência do vínculo (4.4), o qual está associado com as características da constante em excesso v_{20} da variável canônica v'_2 (4.22). Note também que tal constante em excesso pode ser definida por uma função das independentes constantes de integração (4.26), de modo que a condição

$$v_{20} = 0$$

define a natureza do vínculo (4.4) de acordo com as ideias básicas do Método de Hori, o qual pode caracterizar o principal comportamento do vínculo original (3.37) sobre o movimento. Embora a contribuição de tal vínculo não afete a solução (4.26) do Sistema Auxiliar de Hori, ela pode ser essencial para a contribuição dos elementos auxiliares no estudo das influências das perturbações de ordens superiores sobre a referida solução.

Consequentemente torna-se necessário um aperfeiçoamento dos desenvolvimentos (4.30), de modo a levar em consideração a influência do vínculo associado. Esse aperfeiçoamento é a seguir discutido, tomando em consideração as ideias básicas do Método de Hori, as características da variável v'_2 e a influência do vínculo (4.4) sobre a referida variável.

Ressalte-se que tal aperfeiçoamento para os elementos característicos $v'_2, \xi, H, K, v'_2 \cos 2\alpha'$ não será estendido para os elementos angulares V'_1 e V , os quais serão assumidos independentes de tal influência. Note de (4.30) que:

$$\begin{aligned} V &= V(E, G, M) \\ V'_1 &= V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + V'_1(E, G, M) \end{aligned} \quad (4.33)$$

estão sujeitos apenas à condição (4.3):

$$\alpha' = \phi'$$

4.3 Influências do vínculo do equilíbrio instantâneo similar sobre a solução do Sistema Auxiliar de Hori

Este estudo é desenvolvido tomando em consideração as ideias básicas do Método de Hori (1966), as quais requerem que as novas variáveis canônicas preservem as principais características das correspondentes variáveis canônicas originais. Sob tal condição, o Equilíbrio Instantâneo Similar impõe sobre a solução do Sistema Auxiliar de Hori e as variáveis canônicas originais associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano as seguintes características:

- i) a solução (4.26) do sistema auxiliar de Hori é definida na particular vizinhança

$$\alpha' = \phi' \tag{4.34}$$

a qual caracteriza o vínculo:

$$v'_{20} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]_{\alpha'=\phi'} - \mathfrak{I}'_{\alpha=\phi'} = 0 \tag{4.35}$$

que define o principal comportamento do correspondente vínculo original (3.37). Note que tal vínculo identifica o elemento de referência

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]_{\alpha'=\phi'} \tag{4.36}$$

em torno do qual é definido o elemento

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]$$

- ii) a influência do vínculo (3.37) sobre a variável original v_2 (3.42) é preservada pela correspondente variável canônica v'_2 (4.22)

$$v'_2 = v_{20} - X_{10}(\xi + G) \tag{4.37}$$

através da constante em excesso

$$v_{20} = 0$$

cujas características definem o vínculo (4.35) através da condição:

$$v_{20} = v'_{20}$$

- iii) as variáveis canônicas originais associadas com o ângulo crítico laplaciano (u_2^*, U_2^*) são definidas em torno dos valores de referência (3.46) associados com a condição do Equilíbrio de Laplace, cujos principais comportamentos são avaliados por:

$$\begin{aligned} u_2^* \Big|_{t=t_L} &= u_2^0 > 0 \\ U_2^* \Big|_{t=t_L} &= U_2^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \langle Z^* \rangle_{\text{sec}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

de modo a satisfazer

$$\left(\frac{u_2^*}{4X_{20}} \right)^2 + U_2^{*2} = \frac{1}{4X_{20}} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]_{\alpha'=\phi'}$$

para a ordem de grandeza considerada.

Este estudo das influências do Equilíbrio Instantâneo Similar sobre a solução do Sistema Auxiliar de Hori requer como condição essencial a identificação da natureza de seu correspondente vínculo (4.35) através das características da constante em excesso v_{20} . Tal identificação é aqui discutida tomando por referências dois diferentes caminhos. O primeiro caminho caracteriza parcialmente a natureza da constante em excesso v_{20} levando em consideração o elemento de referência (4.36) definido pelo vínculo (4.35). O segundo caminho caracteriza parcialmente a natureza da constante v_{20} , tomando em consideração duas expressões da variável v'_2 e a contribuição nula da referida constante. Uma comparação dos

resultados obtidos identifica a natureza da constante em excesso v_{20} , de modo a permitir a caracterização do vínculo (4.35) e de seu correspondente elemento de referência (4.36). Ressalte-se uma hipótese adicional sobre o elemento de referência de modo a levantar uma indeterminação decorrente de tal identificação.

Objetivando a identificação da constante em excesso v_{20} sob a influência do Equilíbrio Instantâneo Similar, note primeiramente das equações (4.30) e (4.37) que a variável canônica v'_2 se escreve:

$$v'_2 = v_{20} + \sum_{j=0} v_2(j) \cos jV \tag{4.39}$$

onde:

$$\begin{aligned} v_2(0) &= -X_{10} [\xi(0) + G] \\ v_2(j) &= -X_{10} \xi(j) \end{aligned}$$

cujos coeficientes $\xi(j)$ são independentes da influência da constante em excesso v_{20} .

O segundo passo é obtido tomando em consideração as características do correspondente elemento definido em torno do elemento de referência (4.36). Nesse caso encontramos de (4.11) e (4.39) que:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right] = \sum_{k=0} L_k \cdot \cos kV \tag{4.40}$$

onde:

- i) L_k são funções das independentes constantes de integração (4.26) satisfazendo:

$$L_{k+1} < L_k \tag{4.41}$$

- ii) em particular note que:

$$L_0 = 2X_{20} \Gamma_0^2 + v_2(0) \cdot \Gamma_0 \text{ sen } \phi_0 + \frac{L_{00}}{8X_{20}} = 0 \left(\varepsilon^{4/3} \right) \cdot X_{20} \tag{4.42}$$

com:

$$L_{00} = v_2^2(0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1} v_2^2(k) = 0 \left(\varepsilon^2 \right) \cdot X_{20}^2 \tag{4.43}$$

Tais características nos levam a assumir neste estudo que o principal comportamento do elemento de referência (4.36) é definido por :

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]_{\alpha'=\phi'} = 2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} + \gamma_0 \quad (4.44)$$

onde γ_0 é uma constante a ser posteriormente especificada.

Como natural consequência de tal formulação segue-se que a influência do Equilíbrio Instantâneo Similar sobre a constante em excesso v_{20} pode ser sugerida através da expressão:

$$v_{20} = 2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} - T_0 = 0 \quad (4.45)$$

onde T_0 é uma outra constante a ser especificada, de modo a assegurar a validade do vínculo (4.35). Tal resultado (4.45) caracteriza a primeira identificação parcial da constante em excesso v_{20} .

A segunda abordagem toma em consideração as características da variável canônica v'_2 . Note primeiramente de (4.6) que

$$\frac{dv'_2}{dM} = -\sqrt{DX_{10}} \cdot \sqrt{-2v'_2} \cdot \cos \alpha'$$

permite escrever:

$$\frac{d}{dM} \left[\sqrt{-2v'_2} \right] = \sqrt{DX_{10}} \cdot \cos \alpha'$$

Como o elemento α' (4.31) é assumido independente da constante v_{20} , recorrendo a (4.32) podemos integrar tal equação de modo a obter:

$$\sqrt{-2v'_2} = v_0 + \sum_{k=1} C(k) \cdot \cos kV \quad (4.46)$$

onde:

- i) os coeficientes $C(k)$ são funções das constantes de integração E, G, que são apresentados na Tabela 8 do Apêndice B.

ii) v_0 é uma outra constante em excesso a ser associada com a influência da constante v_{20} .

Como consequência de (4.46) segue-se que a variável canônica v'_2 pode também ser caracterizada através da expressão:

$$v'_2 = \sum_{j=0} v'_2(j) \cdot \cos jV \tag{4.47}$$

cujos coeficientes $v'_2(j)$ são apresentados na Tabela 8 do Apêndice B, sujeitos a influência da constante v_{20} através da constante v_0 . Em particular, note que:

$$v'_2(0) = - \left[\frac{v_0^2}{2} + \frac{9}{4} \frac{D}{V^2(0)} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left(1 - \frac{d^*}{3} \right) X_{10} \right] \tag{4.48}$$

onde:

i)
$$\frac{D}{V^2(0)} = \frac{\xi^* d^*}{3} \left[1 + f^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{11}{12} d^* \right) \right]$$

ii) Os elementos característicos ξ^* , d^* , f são apresentados na Tabela 7 do Apêndice B como funções das constantes de integração E,G.

Comparando-se as expressões (4.39) e (4.47), que caracterizam a mesma variável v'_2 , segue-se que uma segunda identificação parcial da constante em excesso v_{20} é definida através da expressão:

$$v_{20} = v'_2(0) - v_2(0) = 0 \tag{4.49}$$

bem como os demais coeficientes necessariamente satisfazem:

$$v'_2(j) = v_2(j) \quad j = 1, 2, \dots \tag{4.50}$$

Note que os coeficientes $v'_2(j)$ são descritos em termos das constantes de integração E,G e v_0 , ao passo que os coeficientes $v_2(j)$ são definidos apenas em termos das constantes de integração E,G.

Como v_0 é uma constante em excesso, sob condição similar à dos Satélites Galileanos de Júpiter.

$$v_2(0) < 0$$

assumimos para a identificação do coeficiente $v'_2(0)$ (4.48) que:

$$\frac{v_0^2}{2} = -v_2(0) - \theta_0 \tag{4.51}$$

onde θ_0 é uma outra constante em excesso tal que:

$$|\theta_0| < -v_2(0)$$

Substituindo (4.51) em (4.48) encontramos

$$v'_2(0) = v_2(0) + \theta_0 - \frac{3}{4} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10}$$

de modo a caracterizar a segunda identificação parcial da constante em excesso v_{20} (4.49) através da expressão:

$$v_{20} = \theta_0 - \frac{3}{4} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} = 0 \tag{4.52}$$

Como consequência natural da equivalência das equações (4.45) e (4.52), com respeito a constante em excesso v_{20} , segue-se que as correspondentes constantes em excesso θ_0 e T_0 podem ser caracterizadas por:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} + \gamma_0 \\ T_0 &= \frac{3}{4} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} - \gamma_0 \end{aligned} \tag{4.53}$$

de modo a identificar o vínculo (4.35) por:

$$v_{20} = 2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} + \gamma_0 - \frac{3}{4} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} = 0 \tag{4.54}$$

bem como o correspondente valor de referência (4.36)

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q'_j \right)^2 \right]_{\alpha'=\phi'} = \frac{3}{4} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} \tag{4.55}$$

Sob tal identificação, note que a constante em excesso v_0 (4.51) se escreve:

$$\frac{v_0^2}{2} = -v_2(0) - 2X_{20}\Gamma_0^2 - v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen}\phi_0 - \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} - \gamma_0 \quad (4.56)$$

a qual permite a identificação dos coeficientes $v'_2(j)$ da variável canônica v'_2 (4.27), de modo a tomar em consideração a influência do vínculo do Equilíbrio Instantâneo Similar.

Para completar essa identificação torna-se necessário especificar a constante γ_0 associada com o elemento de referência (4.44). Tomando em consideração a hipótese de contribuição de ordem superior com respeito ao principal comportamento do elemento, segue-se que a constante γ_0 é definida pela estimativa:

$$\gamma_0 = 0 \quad (4.57)$$

de modo a definir os principais comportamentos da constante v_0 (4.56) e do vínculo (4.54) através das expressões:

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{2} &= -v_2(0) - 2X_{20}\Gamma_0^2 - v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen}\phi_0 - \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} \\ v_{20} &= 2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen}\phi_0 + \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} - \frac{3}{4}\left(\frac{\xi^*}{d^*}\right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3}\right] X_{10} = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Em acréscimo, torna-se necessário levar em consideração tal influência sobre os elementos característicos dependentes da variável v'_2 . Recorrendo a (4.47), note de (4.13), (4.15), (4.16) e (4.21) que:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{v'_2}{X_{10}} - G \\ H &= -\frac{1}{X_{10}} \frac{dv'_2}{dM} \\ K &= E - \xi^2 \\ v'_2 \cdot \cos 2\alpha' &= -\frac{X_{10}}{2D} [H^2 - K^2] \end{aligned}$$

caracterizam os novos desenvolvimentos.

$$\begin{aligned}
 \xi &= \sum_{j=0} \xi'(j) \cdot \cos jV \\
 H &= \sum_{j=1} H'(j) \cdot \sin jV \\
 K &= \sum_{j=0} K'(j) \cdot \cos jV \\
 v'_2 \cdot \cos 2\alpha' &= \sum_{j=0} W'(j) \cos jV
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

onde:

- i) os correspondentes coeficientes são definidos por funções das constantes de integração E, G, v_0 e são apresentadas na Tabela 8 do Apêndice B e Apêndice A-5.
- ii) os coeficientes $\xi'(j), H'(j), K'(j)$ preservam os mesmos valores dos correspondentes coeficientes definidos por (4.30).
- iii) o elemento auxiliar $v'_2 \cos 2\alpha'$ é aqui introduzido com o objetivo de facilitar posterior determinação da nova Hamiltoniana definida pelo Método de Hori.

O estudo das influências do vínculo do Equilíbrio Instantâneo Similar se completa com a caracterização do principal comportamento da variável auxiliar Z^* (3.44) através do correspondente elemento

$$Z^{*'} = -\frac{1}{2X_{20}} \sum_{j=1}^4 \left[p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p'_m \right) \right]^2 + \left[q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q'_m \right) \right]^2$$

que em termos dos elementos da solução (4.26) se escreve:

$$Z^{*'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \tag{4.60}$$

Note da influência da comensurabilidade laplaciana que tal elemento é caracterizado sob a influência do correspondente vínculo.

4.4 Influências da condição do equilíbrio de Laplace

De modo a completar a identificação nas características do principal comportamento do movimento, torna-se necessário levar em consideração a influência da condição do Equilíbrio de Laplace, em torno da qual o conceito de Equilíbrio Instantâneo Similar é definido.

Sob tal influência, segue-se neste estudo que o movimento é definido em torno da conveniente vizinhança (4.3).

$$\alpha' = \phi' \text{ com } \phi' = \ell \quad (4.61)$$

sob a influência do vínculo (4.58) na restrita vizinhança:

Outro resultado decorrente de tal formulação mostra das equações (4.38) e (4.55) que os principais comportamentos das variáveis canônicas originais associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano são caracterizados pela equação:

$$\left(\frac{u_2^*}{4X_{20}} \right)^2 + U_2^{*2} = \frac{3}{8} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) \cdot f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \quad (4.62)$$

em torno dos correspondentes valores de referência (4.38), associados com a condição do Equilíbrio de Laplace.

5

HAMILTONIANA E GERATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO DO MÉTODO DE HORI

Não obstante suas outras características neste estudo discutidas, a aplicação do Método de Hori (1966) tem por regra geral a definição de uma transformação canônica

$$(v_i, p_j, V_i, q_j) \rightarrow (v'_i, p'_j, V'_i, q'_j)$$

através de suas correspondentes equações e solução de seu sistema auxiliar.

Sob a notação:

- i) Hamiltoniana original

$$H = H_4 + H_5 + \dots$$

- ii) Geratriz da Transformação

$$S' = S_4 + S_5 + \dots \quad (5.1)$$

- iii) Hamiltoniana transformada

$$H' = H'_4 + H'_5 + \dots$$

suas equações para as componentes de ordens menores se escrevem

$$\begin{aligned} H'_4 &= H_4 \\ H'_5 &= H_5 + \{H_4, S_4\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

com correspondentes soluções dadas por:

$$\begin{aligned} H'_4 &= H_4(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) \\ H'_5 &= \left\langle H_5(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) \right\rangle_{\text{sec}} \\ S_4 &= \int \left\langle H_5(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) \right\rangle_{\text{per}} dt \end{aligned} \quad (5.3)$$

Tomando em consideração tais características do método, o estudo de que se segue tem por objetivo a identificação dos elementos:

- i) Integral Primeira de Hori
- ii) Núcleo das Principais Perturbações de Ordens Superiores com respeito à solução do Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento.
- iii) Núcleo Principal da Geratriz da Transformação.

5.1 Hamiltoniana transformada

A principal componente da nova Hamiltoniana H' é a integral primeira de Hori, a qual é definida diretamente de (3.51) e (4.3) por:

$$H'_4 = A(4,0)Z'^2 + A(4,0)\sqrt{\frac{D}{X_{10}}}\cdot\sqrt{-2v'_2}\cdot\text{sen}\alpha' \quad (5.4)$$

onde:

- i) $Z' = \frac{1}{X_{10}} \left[v'_1 + v'_2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \left[p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p'_m \right) \right]^2 + \left[q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q'_m \right) \right]^2 \right]$
- ii) $\alpha' = \phi' - V'_2 + \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} (p'_j \cdot \cos\phi' + q'_j \cdot \text{sen}\phi')$
- iii) $\phi' = \phi(X')$ é uma variação em torno de $\phi^0 = \ell$ tal que:

$$\frac{d\phi}{dX'} = O(\varepsilon^{1/3})$$

$$\text{iv) } X' = \frac{1}{4X_{20}} \left[v'_2 + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot p'_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot q'_j \right)^2 \right] \right]$$

Para se obter a componente H'_5 é necessário identificar a parte secular de $H_5(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j)$ com respeito ao parâmetro de integração de Hori. Nesse caso recorrendo às equações (3.51), (4.13) e (4.26) segue-se primeiramente que:

$$\begin{aligned} H_5(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) &= A(5,0) \cdot G + \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] v'_2 + A(5,2) v'_2 \cos 2\alpha' \\ &+ A(5,3) Z'^{*2} + \frac{X_{10}}{\sqrt{D}} H \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot [A(5, j, 0) + A(5, j, 1)] \rho_{j0} \cdot \text{sen} [V'_1 + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] + \\ &+ \frac{X_{10}}{\sqrt{D}} \cdot K \cdot \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot [A(5, j, 0) - A(5, j, 1)] \rho_{j0} \cdot \cos [V'_1 + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] + \\ &+ X_{10} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot A(5, j, 1, 0) \rho_{j0}^2 + X_{10} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^4 n_{j0} \cdot A(5, i, j, 2, 0) \rho_{i0} \cdot \rho_{j0} \cdot \cos(\phi_{i0} - \phi_{j0}) + \\ &- X_{10} \sum_{j=1}^3 n_{j0} \cdot A(5, j, 1, 1) \rho_{j0}^2 \cdot \cos 2[V'_1 + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] + \\ &- X_{10} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^3 n_{j0} \cdot A(5, i, j, 2, 1) \rho_{i0} \cdot \rho_{j0} \cdot \cos [2V'_1 + \phi_{i0} + \phi_{j0} - 2\Gamma_0 \cos \phi_0] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Levando (4.47) e (4.60) em (5.5) e substituindo o resultado obtido em (5.3) segue-se que a componente H'_5 é descrita em termos das constantes de integração da solução (4.26) através da expressão:

$$\begin{aligned} H'_5 = \langle H_5(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) \rangle_{\text{sec}} &= A(5,0) \cdot G + \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] v'_2(0) + \\ &+ A(5,2) \cdot W'(0) + A(5,3) Z'^{*2} + X_{10} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot A(5, j, 1, 0) \rho_{j0}^2 + \\ &+ X_{10} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^4 n_{j0} \cdot A(5, i, j, 2, 0) \rho_{i0} \cdot \rho_{j0} \cdot \cos(\phi_{i0} - \phi_{j0}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad G &= \frac{1}{X_{10}} \left[v_{10} - \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \right] \\
 \text{ii)} \quad Z^{*'} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

iii) os coeficientes $v'_2(0)$ e $W'(0)$ são definidos na Tabela 8 do Apêndice B.

Tal solução pode ser descrita em termos das novas variáveis (v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) recorrendo-se as expressões das constantes de integração, as quais são definidas pela solução (4.26) do Sistema Auxiliar de Hori. Neste estudo tal identificação não se faz necessária, visto que as influências das perturbações de ordens superiores serão discutidas através das equações variacionais de Lagrange associadas com o Método de Hori (Sessin, 1983).

5.2 Geratriz da Transformação

Para a componente S_4 da Geratriz da Transformação, de (4.47), (4.58), (5.3) e (5.5) podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_4}{d\tau} &= \langle H_5(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) \rangle_{per} = \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] \sum_{j=1} v'_2(j) \cdot \cos jV + \\
 &+ A(5,2) \cdot \sum_{j=1} W'(j) \cdot \cos jV + H \frac{X_{10}}{\sqrt{D}} \sum_{j=1}^4 n_{j0} [A(5, j, 0) + A(5, j, 1)] \rho_{j0} \cdot \text{sen} [V'_1 + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] + \\
 &+ K \frac{X_{10}}{\sqrt{D}} \sum_{j=1}^4 n_{j0} [A(5, j, 0) - A(5, j, 1)] \cdot \rho_{j0} \cdot \cos [V'_1 + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] + \\
 &- X_{10} \sum_{j=1}^3 n_{j0} \cdot A(5, j, 1, 1) \rho_{j0}^2 \cdot \cos 2 [V'_1 + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] + \\
 &- X_{10} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^4 n_{j0} \cdot A(5, i, j, 2, 1) \rho_{i0} \cdot \rho_{j0} \cdot \cos [2V'_1 + \phi_{i0} + \phi_{j0} - 2\Gamma_0 \cos \phi_0]
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde:

i) $A(5,4,1) = 0$

ii) $H = \sum_{j=1} H'(j) \cdot \text{sen } jV$

$K = \sum_{j=0} K'(j) \cdot \text{cos } jV$

cujos coeficientes $H'(j), K'(j)$ são definidos na Tabela 8 do Apêndice B sob as influências do Equilíbrio Instantâneo Similar.

iii) $V_1' = V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + V_1(0)V + \sum_{j=1} V_1(j) \cdot \text{sen } jV$
 $V = V(0)M$

cujos coeficientes $V_1(j)$ e $V(0)$ são independentes da influência do vínculo do Equilíbrio Instantâneo Similar e definidos na Tabela 8 do Apêndice B. Ressalte-se para o elemento V_1' que:

$$\langle V_1' \rangle_{per} = \sum_{j=1} V_1(j) \text{sen } jV = 0 \left(\varepsilon^{2/3} \right)$$

Para a ordem de grandeza adotada neste estudo, o principal comportamento da componente S_4 se escreve diretamente de (5.8) por:

$$\begin{aligned}
 S_4 = & \frac{X_{10}}{A(4,0)} \cdot \frac{1}{V(0)} \left\{ \sum_{k=1} \frac{1}{k} \left[\left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] \cdot v_2'(k) + A(5,2)W'(k) \right] \text{sen } kV + \right. \\
 & + \frac{X_{10}}{\sqrt{D}} \cdot \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot \left[\frac{K'(0)}{V_1(0)} [A(5, j, 0) - A(5, j, 1)] \cdot \text{sen} [V_1' + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1} \left\{ \left[\frac{K'(k)}{V_1(0) + k} [A(5, j, 0) - A(5, j, 1)] \cdot - \frac{H'(k)}{V_1(0) + k} [A(5, j, 0) + A(5, j, 1)] \right] \right. \\
 & \cdot \text{sen} [V_1' + kV + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] + \\
 & \left. \left[\frac{K'(k)}{V_1(0) - k} [A(5, j, 0) - A(5, j, 1)] \cdot + \frac{H'(k)}{V_1(0) - k} [A(5, j, 0) + A(5, j, 1)] \right] \right. \\
 & \left. \cdot \text{sen} [V_1' - kV + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] \right\} + \\
 & - \frac{X_{10}}{2V_1(0)} \sum_{j=1}^3 n_{j0} \cdot \rho_{j0}^2 \cdot A(5, j, 1, 1) \cdot \text{sen} 2[V_1' + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] \left[+ \right. \\
 & \left. - \frac{X_{10}}{2V_1(0)} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^3 n_{j0} \cdot \rho_{i0} \cdot \rho_{j0} \cdot A(5, i, j, 2, 1) \cdot \text{sen} [2V_1' + \phi_{i0} + \phi_{j0} - 2\Gamma_0 \cos \phi_0] \right\} \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

5.3 Núcleos das principais perturbações de ordens superiores

Objetivando uma avaliação das contribuições das principais perturbações de ordens superiores sobre a solução (4.26) do Sistema Auxiliar de Hori, este estudo requer a caracterização de um núcleo principal de tais perturbações que possa definir o principal comportamento do sistema de Equações Variacionais de Lagrange associadas com o Método de Hori (Sessin, 1983).

Tendo em vista que a componente de menor ordem superior H'_5 é definida sob as influências do principal comportamento do movimento, tal núcleo é aqui definido por:

$$R = H'_5 \quad (5.10)$$

o que pode contribuir para uma identificação mais efetiva dos principais comportamentos das constantes e do parâmetro de integração de Hori com respeito à variável tempo.

Com respeito à identificação das principais contribuições de ordens superiores para as variáveis canônicas originais, note de (3.1) que o principal comportamento do elemento genérico f

$$f = f' + \{f', S'\} \dots$$

caracteriza a contribuição da geratriz S' através do parêntese de Poisson $\{f', S'\}$.

Visto que a componente de menor ordem superior S_4 é neste estudo definida sob as influências do principal comportamento do movimento, suas características serão aqui utilizadas na definição de um núcleo representativo S_0 , que possa permitir uma avaliação da principal contribuição da geratriz para o elemento f através da expressão:

$$f = f' + \{f', S_0\} \dots \quad (5.11)$$

O parêntese de Poisson $\{f', S_0\}$ é neste estudo definido por Sessin (1983) em termos das constantes e do parâmetro de integração da solução do sistema auxiliar de Hori associado ao movimento.

Para a ordem de grandeza adotada, tal núcleo S_0 é definido de S_4 (5.9) por:

$$S_0 = \frac{1}{V(0)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S(0,k) \cdot \text{sen } kV + \right. \\ \left. + X_{10} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot S(j,k) \cdot \text{sen} [V'_1 + kV + \phi_{j0} - \Gamma_0 \cos \phi_0] \right\} \quad (5.12)$$

onde:

i) $V'_1 = V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + V_1(0)V + \langle V'_1 \rangle_{per}$

ii) $S(0,k) = \frac{1}{k} \frac{X_{10}}{A(4,0)} \left\{ \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] v'_2(k) + A(5,2) \cdot W'(k) \right\}$

$$S(j,k) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{X_{10}}{A(4,0)} \left[\frac{K'(-k)}{V_1(0)+k} [A(5,j,0) - A(5,j,1)] + \frac{H'(-k)}{V_1(0)+k} [A(5,j,0) + A(5,j,1)] \right] & k < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{X_{10}}{A(4,0)} \frac{K'(0)}{V_1(0)} \cdot [A(5,j,0) - A(5,j,1)] & k = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{X_{10}}{A(4,0)} \left[\frac{K'(k)}{V_1(0)+k} [A(5,j,0) - A(5,j,1)] - \frac{H'(k)}{V_1(0)+k} [A(5,j,0) + A(5,j,1)] \right] & k > 0 \end{cases}$$

cujos valores são definidos no Apêndice A-6.

As contribuições dos núcleos R e S_0 para os elementos do movimento são discutidas a seguir, de modo a levar em consideração as influências do Equilíbrio Instantâneo Similar na conveniente vizinhança (4.61):

$$\alpha' = \phi' \text{ com } \alpha' = \ell$$

sujeito à influência do vínculo (4.58).

Sob tais condições, as variáveis são definidas de (4.26) por:

$$\begin{aligned}
 v'_1 &= v_{10} \\
 V'_1 &= V_{10} + V'_2 + 2 \int \xi dM \\
 v'_2 &= -X_{10} (\xi + G) = \sum_{j=0} v'_2(j) \cos jV \\
 V'_2 &= \Gamma_0 \cos \phi_0 \\
 p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) &= \sqrt{X_{10}} \cdot \rho_{j0} \cdot \text{sen}(V'_1 + \phi_{j0}) \\
 q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) &= \sqrt{X_{10}} \cdot \rho_{j0} \cdot \text{cos}(V'_1 + \phi_{j0}) \\
 \sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m &= -\frac{v'_2}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \text{sen} \phi' + 2\sqrt{X_{20}} \Gamma_0 \text{cos}(\phi' + \phi_0) \\
 \sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m &= \frac{v'_2}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \text{cos} \phi' + 2\sqrt{X_{20}} \Gamma_0 \text{sen}(\phi' + \phi_0)
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Nesse caso as componentes H'_4 e H'_5 preservam suas características definidas pelas equações (5.4) e (5.6), porém o núcleo S_0 da geratriz da transformação é aqui definido pelo principal comportamento de (5.12).

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{1}{V(0)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S(0,k) \cdot \text{sen} kV + \right. \\
 &\quad \left. + X_{10} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot S(j,k) \cdot \text{sen} [V'_1 + kV + \phi_{j0}] \right\}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

negligenciando-se a contribuição de ordem superior devido ao elemento $\Gamma_0 \cos \phi_0$.

É conveniente ressaltar que o conceito de Equilíbrio Instantâneo Similar também requer a independência das contribuições livres e forçadas das excentricidades, bem como a independência das variáveis canônicas v'_1, V'_1, p'_j, q'_j com respeito as suas influências. Tais

requisitos são aqui assumidos pela condição de que a transformação canônica de Hori.

$$(v_i, V_i, p_j, q_j) \rightarrow (v'_i, V'_i, p'_j, q'_j)$$

necessariamente satisfaz na conveniente vizinhança (4.61):

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 & V_1 &= V'_1 \\ p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right) &= p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p'_m \right) & q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right) &= q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q'_m \right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Consequentemente segue-se que tais elementos devem permanecer invariantes sob tal transformação.

6

INFLUÊNCIAS DAS PRINCIPAIS PERTURBAÇÕES DE ORDENS SUPERIORES

O estudo de tais influências sobre a solução do Sistema Auxiliar de Hori (4.26) é desenvolvido através das equações variacionais de Lagrange associadas com o Método de Hori, as quais são definidas de Sessin (1983) por:

$$\begin{aligned} \frac{dC_\mu}{dt} &= \sum_{g=1}^{2n-2} \{C_\mu, C_g\} \frac{\partial R}{\partial C_g} \quad \mu = 1, 2, \dots, 2n-2 \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{dM}{d\tau} + \{M, E\} \frac{\partial R}{\partial E} + \sum_{g=1}^{2n-2} \{M, C_g\} \frac{\partial R}{\partial C_g} \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde:

- i) $C_\mu (\mu = 1, 2, \dots, 2n-2)$ são as independentes constantes de integração da solução (4.26) do Sistema Auxiliar de Hori
- ii) E é a integral primeira de Hori (4.13)
- iii) $M = M(\tau - \tau_0)$ é o parâmetro auxiliar de integração (4.5), onde τ_0 é outra constante de integração independente.
- iv) $\{C_\mu, C_g\}$ é o parêntese de Poisson entre as constantes de integração C_μ e C_g .
- v) $R = \sum_{m=5} H'_m$ é a contribuição das perturbações de ordens superiores definida por:

$$R = R(E, C_\mu)$$

Para identificar os principais comportamentos das constantes de integração e do parâmetro de Hori com respeito à variável tempo, é assumido que o principal comportamento do sistema variacional (6.1) é definido pelo núcleo das principais perturbações de ordens superiores (5.10)

$$R = H'_5 \quad (6.2)$$

Em acréscimo a tal formulação, como o movimento é definido sob a condição do Equilíbrio Instantâneo Similar, torna-se necessário levar em consideração suas correspondentes influências:

- i) a influência da condição (4.61);
- ii) o vínculo (4.54) imposto ao movimento;
- iii) os valores de referência (4.38) associados com a condição do Equilíbrio de Laplace.

Ressalte-se também a hipótese adicional de que o movimento apresenta características similares as dos Satélites Galileanos de Júpiter.

6.1 Características do movimento

O primeiro passo deste estudo requer a identificação das constantes de integração e do parâmetro de Hori, a partir da solução (4.26) do Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento.

$$\begin{aligned}
 v_{10} &= v'_1 \\
 V_{10} &= V'_1 - V'_2 - 2 \int \xi dM \\
 \Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 &= -\frac{v'_2}{4X_{20}} - \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p'_j \operatorname{sen} \phi' - q'_j \cdot \cos \phi'] \\
 \Gamma_0 \cos \phi_0 &= \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p'_j \cos \phi' + q'_j \cdot \operatorname{sen} \phi'] \quad (6.3) \\
 \sqrt{X_{10}} \rho_{j0} \cdot \operatorname{sen} (V'_1 + \phi_{j0}) &= p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) \\
 \sqrt{X_{10}} \rho_{j0} \cdot \cos (V'_1 + \phi_{j0}) &= q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right)
 \end{aligned}$$

cujos elementos auxiliares se escrevem:

$$\xi = -\frac{1}{X_{10}} \left[v'_1 + v'_2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \left[p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) \right]^2 + \left[q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) \right]^2 \right]$$

$$H = \sqrt{-P(\xi)}$$

$$M = \int \frac{d\xi}{\sqrt{-P(\xi)}} = \frac{A(4,0)}{X_{10}} (\tau - \tau_0)$$

$$E = \frac{H'_4}{A(4,0)} \quad (6.4)$$

$$H'_4 = A(4,0)\xi^2 + A(4,0) \cdot \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \cdot \sqrt{-2v'_2} \operatorname{sen} \alpha'$$

$$\alpha' = \phi' - V'_2 + \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \left[p'_j \cos \phi' + q'_j \operatorname{sen} \phi' \right]$$

$\phi' = \phi(X')$ é uma variação característica do movimento, em torno de

$$\phi^0 = \ell$$

satisfazendo:

$$\frac{d\phi}{dX'} = 0 \left(\varepsilon^{1/3} \right)$$

$$X' = \frac{1}{4X_{20}} \left[v'_2 + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right)^2 \right] \right]$$

onde:

1. (v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) são as variáveis canônicas definidas pelo Método de Hori
2. constantes de integração independentes

$$E, \tau_0, v_{10}, V_{10}, \Gamma_0, \phi_0, \rho_{j0}, \phi_{j0} \quad (j=1,3,4) \quad (6.5)$$

3. constantes de integração em excesso

$$G, \rho_{20}, \phi_{20}, v_0 \quad (6.6)$$

satisfazendo:

$$G = \frac{1}{X_{10}} \left[v_{10} - \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \right]$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \rho_{j0} \cdot \text{sen} \phi_{j0} = 0 \tag{6.7}$$

$$(j=2)$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \rho_{j0} \cdot \text{cos} \phi_{j0} = 0$$

$$\frac{v_0^2}{2} = -v_2(0) - 2X_{20}\Gamma_0^2 - v_2(0) \cdot \Gamma_0 \cdot \text{sen} \phi_0 - \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}}$$

cujo coeficiente $v_2(0)$ é uma função das constantes de integração E,G, o qual é definido na Tabela 7 do Apêndice B.

$$4. \gamma_{40} = 0 \tag{6.8}$$

A segunda característica do movimento a ser utilizada é o seu núcleo das principais perturbações de ordens superiores com respeito a solução do Sistema Auxiliar de Hori, o qual é definido de (5.6) e (6.2) por:

$$R = A(5,0)G + \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] v_2'(0) + A(5,2)W'(0) + A(5,3)Z^{*2} +$$

$$X_{10} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot A(5,j,1,0) \rho_{j0}^2 + X_{10} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^4 n_{j0} A(5,i,j,2,0) \rho_{i0} \cdot \rho_{j0} \cdot \text{cos}(\phi_{i0} - \phi_{j0})$$

$$\tag{6.9}$$

onde:

- i) os coeficientes $v_2'(0)$ e $W'(0)$ são funções das constantes de integração E,G e v_0 , os quais são apresentados na Tabela 8 do Apêndice B.

- ii)
$$Z^{*'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \tag{6.10}$$

define o principal comportamento da variável auxiliar original Z^* (3.44).

A terceira característica requerida diz respeito às demais influências do Equilíbrio Instantâneo Similar impostas sobre a solução do Sistema Auxiliar de Hori e as variáveis canônicas originais associadas com o ângulo crítico laplaciano:

- i) o vínculo (4.54) imposto pela condição (4.34)

$$\alpha' = \phi' \quad (6.11)$$

e definido por:

$$2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \sin \phi_0 + \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} = 0 \quad (6.12)$$

onde:

- a) os elementos característicos ξ^* , d^* , f e $v_2(0)$ são funções das constantes de integração E e G , os quais são apresentados na Tabela 7 do Apêndice B.
- b) os valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace tem seus principais comportamentos avaliados de (4.38) e (4.59) por:

$$\begin{aligned} u_2^* \Big|_{t=t_L} &= u_2^0 > 0 \\ U_2^* \Big|_{t=t_L} &= U_2^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \langle Z^* \rangle_{SEC} \end{aligned} \quad (6.13)$$

satisfazendo a equação:

$$\left(\frac{u_2^*}{4X_{20}} \right)^2 + U_2^{*2} = \frac{3}{8} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) \cdot f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] \cdot \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right)$$

6.2 Equações variacionais de Lagrange

De modo a identificar tais equações, note das equações (6.3) e (6.6) e da definição do parêntese de Poisson

$$\{C_\mu, C_g\} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial C_\mu}{\partial v'_i} \cdot \frac{\partial C_g}{\partial V'_i} - \frac{\partial C_\mu}{\partial V'_i} \cdot \frac{\partial C_g}{\partial v'_i} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial C_\mu}{\partial p'_j} \cdot \frac{\partial C_g}{\partial q'_j} - \frac{\partial C_\mu}{\partial q'_j} \cdot \frac{\partial C_g}{\partial p'_j} \quad (6.14)$$

que os correspondentes parênteses se escrevem:

$$\begin{aligned}
 \{M, E\} &= \frac{1}{X_{10}} \\
 \{v_{10}, V_{10}\} &= 1 \\
 \{v_{10}, \phi_{j0}\} &= -1 \quad j=1,2,3,4 \\
 \{V_{10}, \Gamma_0\} &= \frac{1}{4X_{20}} \left[-\text{sen}\phi_0 + \frac{d\phi}{dX'} \cdot \frac{v'_2}{4X_{20}} \cdot \cos\phi_0 \right] \\
 \{V_{10}, \phi_0\} &= -\frac{1}{4X_{20}} \left[\frac{\cos\phi_0}{\Gamma_0} + \frac{d\phi}{dX'} \cdot \left[1 + \frac{v'_2}{4X_{20}} \cdot \frac{\text{sen}\phi_0}{\Gamma_0} \right] \right] \\
 \{\Gamma_0, \phi_0\} &= \frac{1}{4X_{20}\Gamma_0} \\
 \{\rho_{j0}, \rho_{k0}\} &= -\frac{\gamma_{j0} \cdot \gamma_{k0}}{X_{10}} \cdot \text{sen}(\phi_{j0} - \phi_{k0}) \quad j, k=1,2,3 \\
 \{\rho_{j0}, \phi_{k0}\} &= \begin{cases} \frac{-1 + \gamma_{k0}^2}{X_{10} \rho_{k0}} & j=k \\ \frac{\gamma_{j0} \cdot \gamma_{k0}}{X_{10} \cdot \rho_{k0}} \cdot \cos(\phi_{j0} - \phi_{k0}) & j \neq k \end{cases} \quad j, k=1,2,3 \\
 \{\rho_{40}, \phi_{40}\} &= -\frac{1}{X_{10} \rho_{40}} \\
 \{\phi_{j0}, \phi_{k0}\} &= \frac{\gamma_{j0} \cdot \gamma_{k0}}{X_{10} \cdot \rho_{j0} \cdot \rho_{k0}} \cdot \text{sen}(\phi_{j0} - \phi_{k0}) \quad j, k=1,2,3
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ressalte-se para tais elementos a indeterminação da derivada

$$\frac{d\phi}{dX'} = 0(\varepsilon^{1/3})$$

cuja contribuição será discutida posteriormente com respeito as ordens de grandeza dos elementos em estudo.

Tomando em consideração a relação auxiliar decorrente de (6.7):

$$\rho_{20}^2 = \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right)^2 \rho_{10}^2 + \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right)^2 \rho_{30}^2 + 2 \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right) \rho_{10} \cdot \rho_{30} \cdot \cos(\phi_{10} - \phi_{30})$$

segue-se de (6.9) que o núcleo R se escreve em termos das constantes de integração independentes por:

$$\begin{aligned}
 R = & A(5,0)G + \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] v_2'(0) + A(5,2) \cdot W'(0) + A(5,3) [Z^{*'}]^2 + \\
 & + A^*(1,1)\rho_{10}^2 + A^*(3,3)\rho_{30}^2 + A^*(4,4)\rho_{40}^2 + A^*(1,3)\rho_{10}\rho_{30} \cdot \cos(\phi_{10} - \phi_{30}) + \\
 & + A^*(1,4)\rho_{10}\rho_{40} \cdot \cos(\phi_{10} - \phi_{40}) + A^*(3,4)\rho_{30}\rho_{40} \cdot \cos(\phi_{30} - \phi_{40})
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{1}{X_{10}} \left\{ v_{10} - \frac{X_{10}}{2} \left[\left[1 + \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right)^2 \right] \rho_{10}^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left[1 + \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right)^2 \right] \rho_{30}^2 + \rho_{40}^2 + 2 \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right) \rho_{10}\rho_{30} \cos(\phi_{10} - \phi_{30}) \right] \right\} \\
 Z^{*'} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \left[\left[1 + \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right)^2 \right] \rho_{10}^2 + \right. \\
 & \left. + \left[1 + \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right)^2 \right] \rho_{30}^2 + \rho_{40}^2 + 2 \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right) \rho_{10}\rho_{30} \cos(\phi_{10} - \phi_{30}) \right]
 \end{aligned}$$

Os coeficientes $A^*(i, j)$ são apresentados na Tabela 9 do Apêndice B.

Uma análise deste núcleo (6.16) leva-nos à identificação de distintas contribuições:

1 Contribuição forçada

$$R_F = R_F(E, G, \Gamma_0, \phi_0) = A(5,0)G + \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] v_2'(0) + A(5,2)W'(0)$$

Recorrendo as relações auxiliares decorrentes de (6.15) e (6.16):

$$\sum_{j=1}^4 \{v_{10}, \phi_{j0}\} \frac{\partial G}{\partial \phi_{j0}} = 0$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \{\rho_{m0}, \rho_{j0}\} \frac{\partial G}{\partial \rho_{j0}} + \{\rho_{m0}, \phi_{j0}\} \frac{\partial G}{\partial \phi_{j0}} = 0 \quad m=1,3,4$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \{\phi_{m0}, \rho_{j0}\} \frac{\partial G}{\partial \rho_{j0}} + \{\phi_{m0}, \phi_{j0}\} \frac{\partial G}{\partial \phi_{j0}} = 0$$

segue-se que R_F contribui somente para as equações variacionais dos elementos:

- V_{10} através da integral G-Sessin e da constante em excesso v_0 .
- Γ_0 e ϕ_0 através da constante de integração v_0 .
- M através da integral de Hori E .

2 Contribuição livre

$$R_L = R_L(\rho_{j0}, \phi_{j0}) = A(5,3) [Z^{*}]^2 + A^*(1,1) \rho_{10}^2 + A^*(3,3) \rho_{30}^2 +$$

$$+ A^*(4,4) \rho_{40}^2 + A^*(1,3) \rho_{10} \rho_{30} \cdot \cos(\phi_{10} - \phi_{30}) +$$

$$+ A^*(1,4) \rho_{10} \rho_{40} \cdot \cos(\phi_{10} - \phi_{40}) + A^*(3,4) \rho_{30} \rho_{40} \cdot \cos(\phi_{30} - \phi_{40})$$

Para tal núcleo, a relação auxiliar

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \{v_{10}, \phi_{j0}\} \frac{\partial R_L}{\partial \phi_{j0}} = 0$$

mostra que R_L tem contribuições para as equações variacionais dos elementos ρ_{m0} e ϕ_{m0} .

Como consequência dessa identificação, de (6.15) e (6.16) segue-se que o correspondente sistema variacional (6.1) se escreve:

$$\frac{dv_{10}}{dt} = 0$$

$$\frac{dV_{10}}{dt} = \{V_{10}, v_{10}\} \frac{\partial R_F}{\partial v_{10}} + \{V_{10}, \Gamma_0\} \frac{\partial R_F}{\partial \Gamma_0} + \{V_{10}, \phi_0\} \frac{\partial R_F}{\partial \phi_0} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Gamma_0}{dt} &= \{\Gamma_0, \phi_0\} \frac{\partial R_F}{\partial \phi_0} \\
 \frac{d\phi_0}{dt} &= \{\phi_0, \Gamma_0\} \frac{\partial R_F}{\partial \Gamma_0} \\
 \frac{dM}{dt} &= \frac{dM}{d\tau} + \{M, E\} \frac{\partial R_F}{\partial E} \\
 \frac{d\rho_{m0}}{dt} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \{\rho_{m0}, \rho_{j0}\} \frac{\partial R_L}{\partial \rho_{j0}} + \{\rho_{m0}, \phi_{j0}\} \frac{\partial R_L}{\partial \phi_{j0}} \\
 \frac{d\phi_{m0}}{dt} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \{\phi_{m0}, \rho_{j0}\} \frac{\partial R_L}{\partial \rho_{j0}} + \{\phi_{m0}, \phi_{j0}\} \frac{\partial R_L}{\partial \phi_{j0}}
 \end{aligned}$$

O estudo a seguir permite identificar um desacoplamento das equações dos elementos ρ_{m0} e ϕ_{m0} das equações dos demais elementos, de modo que a solução de (6.17) pode ser obtida a partir das soluções de dois sistemas: Sistema livre e Sistema forçado.

6.3 Sistema variacional livre

O sistema de equações variacionais dos elementos ρ_{m0} e ϕ_{m0} se escreve diretamente das equações (6.15), (6.16) e (6.17) por:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_{10}}{dt} &= P(1,3) \cdot \rho_{30} \cdot \text{sen}(\phi_{10} - \phi_{30}) + P(1,4) \cdot \rho_{40} \cdot \text{sen}(\phi_{10} - \phi_{40}) \\
 \frac{d\phi_{10}}{dt} &= P(1,1) + P(1,3) \left(\frac{\rho_{30}}{\rho_{10}} \right) \cos(\phi_{10} - \phi_{30}) + P(1,4) \left(\frac{\rho_{40}}{\rho_{10}} \right) \cos(\phi_{10} - \phi_{40}) \\
 \frac{d\rho_{30}}{dt} &= -P(3,1) \cdot \rho_{10} \cdot \text{sen}(\phi_{10} - \phi_{30}) + P(3,4) \cdot \rho_{40} \cdot \text{sen}(\phi_{30} - \phi_{40}) \\
 \frac{d\phi_{30}}{dt} &= P(3,3) + P(3,1) \left(\frac{\rho_{10}}{\rho_{30}} \right) \cos(\phi_{10} - \phi_{30}) + P(3,4) \left(\frac{\rho_{40}}{\rho_{30}} \right) \cos(\phi_{30} - \phi_{40}) \\
 \frac{d\rho_{40}}{dt} &= -P(4,1) \cdot \rho_{10} \cdot \text{sen}(\phi_{10} - \phi_{40}) - P(4,3) \cdot \rho_{30} \cdot \text{sen}(\phi_{30} - \phi_{40}) \\
 \frac{d\phi_{40}}{dt} &= P(4,4) + P(4,1) \left(\frac{\rho_{10}}{\rho_{40}} \right) \cos(\phi_{10} - \phi_{40}) + P(4,3) \left(\frac{\rho_{30}}{\rho_{40}} \right) \cos(\phi_{30} - \phi_{40})
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

cujos correspondentes coeficientes $P(i, j)$ são definidos na Tabela 9 do Apêndice B.

Recorrendo novamente à relação auxiliar:

$$\rho_{20}^2 = \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}}\right)^2 \rho_{10}^2 + \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}}\right)^2 \rho_{30}^2 + 2 \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}}\right) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}}\right) \rho_{10} \rho_{30} \cdot \cos(\phi_{10} - \phi_{30})$$

e às equações (6.18), segue-se que uma importante característica deste sistema satisfaz:

$$\sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 = \text{constante} \tag{6.19}$$

de modo a identificar que o elemento auxiliar Z^{*} (6.10) e os coeficientes $P(j, j)$ também são constantes com respeito a variável tempo.

Para a determinação dos elementos ρ_{m0} e ϕ_{m0} , introduzimos os elementos auxiliares:

$$\begin{aligned} p_{j0} &= \rho_{j0} \cdot \cos \phi_{j0} \\ q_{j0} &= \rho_{j0} \cdot \sen \phi_{j0} \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{6.20}$$

satisfazendo de (6.7) as relações:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_{j0} &= 0 \\ \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_{j0} &= 0 \end{aligned} \tag{6.21}$$

e cujas correspondentes equações se escrevem:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{10}}{dt} &= -P(1,1) \cdot q_{10} - P(1,3) \cdot q_{30} - P(1,4) \cdot q_{40} \\ \frac{dq_{10}}{dt} &= P(1,1) \cdot p_{10} + P(1,3) \cdot p_{30} + P(1,4) \cdot p_{40} \\ \frac{dp_{30}}{dt} &= -P(3,1) \cdot q_{10} - P(3,3) \cdot q_{30} - P(3,4) \cdot q_{40} \\ \frac{dq_{30}}{dt} &= P(3,1) \cdot p_{10} + P(3,3) \cdot p_{30} + P(3,4) \cdot p_{40} \\ \frac{dp_{40}}{dt} &= -P(4,1) \cdot q_{10} - P(4,3) \cdot q_{30} - P(4,4) \cdot q_{40} \\ \frac{dq_{40}}{dt} &= P(4,1) \cdot p_{10} + P(4,3) \cdot p_{30} + P(4,4) \cdot p_{40} \end{aligned} \tag{6.22}$$

Seu correspondente polinômio característico se escreve:

$$P(\lambda) = \lambda^6 + A\lambda^4 + B\lambda^2 + C \quad (6.23)$$

onde:

$$A = P^2(1,1) + P^2(3,3) + P^2(4,4) + 2P(1,3).P(3,1) + 2P(1,4).P(4,1) + 2P(3,4).P(4,3)$$

$$B = [P(1,1).P(3,3) - P(1,3).P(3,1)]^2 + [P(1,1).P(4,4) - P(1,4).P(4,1)]^2 +$$

$$[P(3,3).P(4,4) - P(3,4).P(4,3)]^2 + 2[P(1,1).P(4,3) - P(1,3).P(4,1)].$$

$$. [P(1,1).P(3,4) - P(1,4).P(3,1)] + 2[P(1,3).P(3,4) - P(1,4).P(3,3)].$$

$$. [P(3,1).P(4,3) - P(3,3).P(4,1)] + 2[P(1,3).P(4,4) - P(1,4).P(4,3)].$$

$$. [P(3,1).P(4,4) - P(3,4).P(4,1)]$$

$$C = \nabla^2$$

$$\text{com } \nabla = \begin{vmatrix} P(1,1) & P(1,3) & P(1,4) \\ P(3,1) & P(3,3) & P(3,4) \\ P(4,1) & P(4,3) & P(4,4) \end{vmatrix}$$

Sob condições similares as do movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter podemos observar que:

$$p < 0, \quad D^* < 0 \quad (6.24)$$

onde:

$$2q = \frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{3}AB + C$$

$$3p = B - \frac{A^2}{3}$$

$$D^* = q^2 + p^3$$

cuja correspondente equação transformada:

$$\begin{aligned} & y^3 + 3py + 2q = 0 \\ \text{com} \quad & y = \lambda^2 + \frac{A}{3} \mid A > 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

admite três raízes reais distintas:

$$y_1 = -2r \cdot \cos \frac{\varphi}{3}$$

$$y_2 = 2r \cdot \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right)$$

$$y_3 = 2r \cdot \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right)$$

tais que:

$$\frac{A}{3} - y_k > 0$$

com

$$\cos \varphi = \frac{q}{r^3}$$

$$r = \pm \sqrt[3]{p}$$

sendo o sinal de r definido pelo sinal de q .

Nesse caso a equação:

$$P(\lambda) = 0$$

admite as raízes imaginárias puras:

$$\lambda_{1,2} = \pm Jw_1$$

$$\lambda_{3,4} = \pm Jw_2$$

$$\lambda_{5,6} = \pm Jw_3$$
(6.26)

onde

$$w_k = \sqrt{\frac{A}{3} - y_k}$$

de modo a caracterizar a solução do sistema (6.18) por:

$$p_{j0} = \sum_{k=1}^3 A_{k0}^* \cdot P(j,1,k) \text{sen} \left[w_k (t - t_0) + \varphi_{k0}^* \right]$$

$$q_{j0} = \sum_{k=1}^3 A_{k0}^* \cdot Q(j,1,k) \text{cos} \left[w_k (t - t_0) + \varphi_{k0}^* \right]$$

onde:

- i) A_{k0}^*, φ_{k0}^* ($k=1,2,3$) são constantes de integração com respeito à variável tempo.
- ii) Os coeficientes $P(j,1,k)$ e $Q(j,1,k)$ são apresentados na Tabela 10 do Apêndice B.
- iii) Os elementos p_{20}, q_{20} são obtidos diretamente de (6.21) e (6.28).

Ressalte-se também das características dos Satélites Galileanos de Júpiter que os coeficientes $P(j,1,k)$ e $Q(j,1,k)$ têm seus principais comportamentos satisfazendo as condições:

$$P(j,1,k) = Q(j,1,k) \quad (6.27)$$

de modo a definir os elementos p_{j0}, q_{j0} em 1ª aproximação pelas expressões:

$$\begin{aligned} p_{j0} &= \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{sen} \left[w_k (t - t_0) + \varphi_{k0}^* \right] \\ q_{j0} &= \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{cos} \left[w_k (t - t_0) + \varphi_{k0}^* \right] \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde:

$$C_j^k = Q(j,1,k) \cdot A_{k0}^*$$

Para facilitar a determinação dos elementos p_{j0}, q_{j0} numa data considerada, note inicialmente de (3.26) e (3.27) os sistemas auxiliares:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_j &= \frac{u_2^*}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \text{sen} \phi + 2\sqrt{X_{20}} \cdot U_2^* \cos \phi \\ \sum_{m=1}^3 E_{jm} p_m &= h_j^* - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} h_m^* \right) \\ \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_j &= -\frac{u_2^*}{2\sqrt{X_{20}}} \cdot \text{cos} \phi + 2\sqrt{X_{20}} \cdot U_2^* \text{sen} \phi \\ \sum_{m=1}^3 E_{jm} q_m &= k_j^* - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} k_m^* \right) \end{aligned}$$

que caracterizam as relações auxiliares:

$$p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right) = - \sum_{m=1}^3 E_{jm} h_m^* \quad j=1,2,3$$

$$q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right) = - \sum_{m=1}^3 E_{jm} k_m^*$$

Observando a solução (4.26) que:

$$p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p'_m \right) = \sqrt{X_{10}} [p_{j0} \cdot \text{sen } V'_1 + q_{j0} \cdot \text{cos } V'_1] \quad j=1,2,3$$

$$q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q'_m \right) = \sqrt{X_{10}} [p_{j0} \cdot \text{cos } V'_1 - q_{j0} \cdot \text{sen } V'_1]$$

da condição de invariância sobre os elementos p'_j, q'_j, V'_1 e da equiva-
lência das expressões acima, segue-se que:

$$p_{j0} = - \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[\frac{h_m^*}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \text{sen } V_1 + \frac{k_m^*}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \text{cos } V_1 \right] \quad j=1,2,3$$

$$q_{j0} = - \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[\frac{h_m^*}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \text{cos } V_1 - \frac{k_m^*}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \text{sen } V_1 \right]$$

Com respeito aos elementos p_{40} e q_{40} das equações (3.26) e (4.26) encontramos:

$$p_{40} = \frac{h_4^*}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \text{sen } V_1 + \frac{k_4^*}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \text{cos } V_1$$

$$q_{40} = \frac{h_4^*}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \text{cos } V_1 - \frac{k_4^*}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \text{sen } V_1$$

Recorrendo às estimativas (4.27)

$$h_j^* = e_{j0} \sqrt{L_{j0}} \cdot \text{cos}(V_1 + \bar{w}_j)$$

$$k_j^* = -e_{j0} \sqrt{L_{j0}} \cdot \text{sen}(V_1 + \bar{w}_j)$$

segue-se que os elementos procurados podem ser avaliados na data considerada pelas estimativas:

$$\begin{aligned}
 p_{j0} &= \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[\sqrt{\frac{L_{m0}}{X_{10}}} \cdot e_{m0} \cdot \text{sen} \bar{w}_m \right] \\
 q_{j0} &= - \sum_{m=1}^3 E_{jm} \left[\sqrt{\frac{L_{m0}}{X_{10}}} \cdot e_{m0} \cdot \text{cos} \bar{w}_m \right] \\
 p_{40} &= - \sqrt{\frac{L_{40}}{X_{10}}} \cdot e_{40} \cdot \text{sen} \bar{w}_4 \\
 q_{40} &= \sqrt{\frac{L_{40}}{X_{10}}} \cdot e_{40} \cdot \text{cos} \bar{w}_4
 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} j=1,2,3 \\ (6.29) \end{array}$$

com:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_{j0} &= 0 \\
 \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_{j0} &= 0
 \end{aligned}$$

6.4 Sistema variacional forçado

Para a caracterização de tal sistema, note primeiramente de (6.16) e Tabela 8 do Apêndice B, as relações auxiliares que definem as derivadas da componente forçada R_F

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_F}{\partial v_{10}} &= \frac{1}{X_{10}} \cdot \frac{\partial R_F}{\partial G} \\
 \frac{\partial R_F}{\partial G} &= -V(1,0) + L \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \left[\Gamma_0 \text{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \\
 \frac{\partial R_F}{\partial \Gamma_0} &= L \cdot \left[4X_{20} \Gamma_0 + v_2(0) \cdot \text{sen} \phi_0 \right] \\
 \frac{\partial R_F}{\partial \phi_0} &= L \cdot \left[v_2(0) \cdot \Gamma_0 \text{cos} \phi_0 \right] \\
 \frac{\partial R_F}{\partial E} &= X_{10} \cdot \left[M(0,0) - \frac{A(4,0)}{X_{10}} \right] + L \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \left[\Gamma_0 \text{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right]
 \end{aligned}$$

cujos correspondentes coeficientes $V(1,0)$, $M(0,0)$ e L são definidos na Tabela 9 do Apêndice B.

Levando tais elementos e (6.15) em (6.17), encontramos o sistema forçado dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{10}}{dt} &= 0 \\ \frac{dV_{10}}{dt} &= V(1,0) - L \left[1 + \frac{\partial v_2(0)}{\partial v_{10}} \right] \cdot \left[\Gamma_0 \text{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] + L \frac{d\phi}{dX'} \frac{\langle v'_2 \rangle_{PER}}{4X_{20}} (\Gamma_0 \cos \phi_0) \\ \frac{d\Gamma_0}{dt} &= L \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \cos \phi_0 \\ \frac{d\phi_0}{dt} &= -L \left[1 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \frac{\text{sen} \phi_0}{\Gamma_0} \right] \\ \frac{dM}{dt} &= M(0,0) + \frac{L}{X_{10}} \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \left(\Gamma_0 \text{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right) \end{aligned} \tag{6.30}$$

cuja indeterminação da derivada $\frac{d\phi}{dX'}$ é aqui levantada pela condição de que o termo

$$\frac{d\phi}{dX'} \frac{\langle v'_2 \rangle_{PER}}{4X_{20}} (\Gamma_0 \cos \phi_0)$$

seja de ordem superior. Ressalte-se para um movimento de características similares ao dos Satélites Galileanos de Júpiter que:

$$\begin{aligned} \frac{\langle v'_2 \rangle_{PER}}{4X_{20}} &< 0(\varepsilon) \\ (\Gamma_0 \cos \phi_0) &= 0 \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \right) \end{aligned}$$

Uma característica importante desse sistema é:

$$v_{10} = v_{10}^* \tag{6.31}$$

onde v_{10}^* é uma constante de integração em relação a variável tempo, de modo a identificar de (6.7) e (6.19) que a integral G-Sessin satisfaz:

$$G = \frac{1}{X_{10}} \left[v_{10} - \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \right] = \text{constante} \quad (6.32)$$

com respeito à variável tempo.

Como principal conclusão de (6.19) e (6.32), segue-se neste estudo que qualquer função dos elementos E, G, Z^* também será constante em relação ao tempo. Tal resultado se verifica para:

- i) Elementos característicos ξ^*, d^*, f da Tabela 7 do Apêndice B.
- ii) Valores de referência u_2^0, U_2^0 (6.13) associados com a condição do Equilíbrio de Laplace.
- iii) Elemento característico do vínculo (6.12).

$$2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}} = \text{constante} \quad (6.33)$$

Para a determinação dos elementos Γ_0 e ϕ_0 , note primeiramente de (6.30) que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0] &= 0 \\ \frac{d}{dt} [\Gamma_0 \cos \phi_0] &= L \left[\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \end{aligned} \quad (6.34)$$

de modo a identificar da 1ª equação que:

$$2X_{20}\Gamma_0^2 + v_2(0)\Gamma_0 \cos \phi_0 = \Gamma_0^* \quad (6.35)$$

onde Γ_0^* é uma constante de integração com respeito ao tempo.

Tal resultado ratifica equação (6.33), de modo a identificar de (6.12):

$$\Gamma_0^* = \frac{3}{4} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} - \frac{v_2(0)^2}{8X_{20}} \quad (6.36)$$

Com respeito ao elemento ϕ_0 , primeiramente resolvemos a EQ (6.35) obtendo:

$$\Gamma_0 = \frac{v_2(0)}{4X_{20}\theta^*} \left[-\theta^* \operatorname{sen} \phi_0 \pm \sqrt{1 - \theta^{*2} \cdot \cos^2 \phi_0} \right] \quad (6.37)$$

onde:

$$\theta^* = \frac{v_2(0)}{\sqrt{8X_{20}\Gamma_0^* + v_2^2(0)}} = 0\left(\varepsilon^{1/3}\right)$$

para um movimento similar ao dos Satélites Galileanos de Júpiter.

Levando (6.37) em (6.30):

$$\frac{d\phi_0}{dt} = -L \left[1 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \cdot \frac{\text{sen}\phi_0}{\Gamma_0} \right]$$

segue-se que:

$$\frac{d\phi_0}{dt} + \frac{\frac{d}{dt}[\theta^* \cos\phi_0]}{\sqrt{1-\theta^{*2} \cos^2\phi_0}} = -L$$

cuja solução para $\Gamma_0 > 0$ se escreve:

$$\phi_0 + \arcsen[\theta^* \cos\phi_0] = \phi_0^* + n_0(t-t_0) \tag{6.38}$$

onde:

- i) $n_0 = -L$
- ii) t_0 é o tempo de referência na data considerada
- iii) ϕ_0^* é uma constante de integração em relação ao tempo.

Objetivando expressões mais práticas para os elementos Γ_0 e ϕ_0 , introduzimos o elemento auxiliar

$$\theta_0 = \frac{v_2(0)}{\sqrt{8X_{20}\Gamma_0^*}} = 0\left(\varepsilon^{1/3}\right) \tag{6.39}$$

de modo a obter de (6.38) os desenvolvimentos:

$$\begin{aligned} \text{sen}\phi_0 &= \left[-\frac{\theta_0}{2} - \frac{15}{16}\theta_0^3\right] + \left[1 - \frac{3}{8}\theta_0^2\right] \text{sen}\left[n_0(t-t_0) + \phi_0^*\right] + \left[-\theta_0 + \frac{3}{2}\theta_0^3\right] \\ \text{cos}2\left[n_0(t-t_0) + \phi_0^*\right] &- \frac{3}{8}\theta_0^2 \text{sen}3\left[n_0(t-t_0) + \phi_0^*\right] - \frac{\theta_0^3}{16} \text{cos}4\left[n_0(t-t_0) + \phi_0^*\right] \dots \\ \text{cos}\phi_0 &= \left[1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right] \cdot \text{cos}\left[n_0(t-t_0) + \phi_0^*\right] + \left[\frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{8}\theta_0^3\right] \text{sen}2\left[n_0(t-t_0) + \phi_0^*\right] + \\ &-\frac{3}{8}\theta_0^2 \cdot \text{cos}3\left[n_0(t-t_0) + \phi_0^*\right] - \frac{5}{16}\theta_0^3 \text{sen}4\left[n_0(t-t_0) + \phi_0^*\right] + \dots \end{aligned}$$

Levando tais desenvolvimentos em (6.37) e (6.38) encontramos os elementos Γ_0 e ϕ_0 caracterizados pelas expressões:

$$\begin{aligned} \phi_0 = & \phi_0^* + n_0(t-t_0) + \left[-\theta_0 + \frac{5}{8}\theta_0^3 \right] \cos \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] - \frac{\theta_0^2}{2} \cdot \text{sen} 2 \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] + \\ & \frac{5}{12}\theta_0^3 \cos 3 \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = & \sqrt{\frac{\Gamma_0^*}{2X_{20}}} \left\{ \left[1 + \frac{3}{4}\theta_0^2 \right] + \left[-\theta_0 + \frac{\theta_0^3}{8} \right] \cdot \text{sen} \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] + \frac{\theta_0^2}{4} \right. \\ & \left. \cos 2 \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] + \frac{\theta_0^3}{8} \text{sen} 3 \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

bem como os elementos auxiliares:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 \text{sen} \phi_0 = & \sqrt{\frac{\Gamma_0^*}{2X_{20}}} \left\{ \left[-\theta_0 - \frac{9}{8}\theta_0^3 \right] + \left[1 + \frac{\theta_0^2}{2} \right] \cdot \text{sen} \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] + \theta_0^3 \right. \\ & \left. \cos 2 \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] - \frac{3}{8}\theta_0^3 \cos 4 \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] \dots \right\} \\ \Gamma_0 \cos \phi_0 = & \sqrt{\frac{\Gamma_0^*}{2X_{20}}} \left\{ \left[1 + \frac{\theta_0^2}{2} \right] \cdot \cos \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] \dots \right\} \end{aligned} \quad (6.42)$$

A integração do sistema forçado se completa com a determinação dos elementos V_{10} e M . Recorrendo a (6.30) e (6.34) encontramos:

$$V_{10} = V_{10}^* + V(1,0)(t-t_0) - \left[1 + \frac{\partial v_2(0)}{\partial v_{10}} \right] \Gamma_0 \cos \phi_0 + \dots \quad (6.43)$$

$$M = M(0,0)(t-t_0^*) + \frac{1}{X_{10}} \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \cdot \Gamma_0 \cos \phi_0$$

i) V_{10}^* e t_0^* são constantes de integração em relação ao tempo;

$$\text{ii) } \frac{\partial v_2(0)}{\partial v_{10}} = -1 + \frac{d^*}{2} - \frac{d^{*2}}{6} + \dots;$$

$$\text{iii) } \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} = X_{10} \left(\frac{\xi^*}{E} \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}d^* - \frac{d^{*2}}{4} + \dots \right]$$

- iv) ressalte-se para a equação do elemento V_{10} a hipótese de contribuição de ordem superior do termo associado com a derivada $\frac{d\phi}{dX'}$.

O fato de o núcleo das principais perturbações de ordens superiores ser definido sob as influências do principal comportamento do movimento e a correspondente solução do Sistema Variacional levar em consideração as influências do Equilíbrio Instantâneo Similar conduz a resultados mais significativos das características do movimento.

7

CONTRIBUIÇÃO DA GERATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO

Como apresentado anteriormente, o Método de Hori (1966) caracteriza um elemento nas variáveis canônicas originais

$$f = f(v_i, p_j, V_i, q_j)$$

através de sua correspondente Equação de Hori.

$$f = f' + \frac{1}{1!} \{f', S'\} + \frac{1}{2!} \{\{f', S'\}, S'\} + \dots$$

onde:

- i) $f' = f(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j)$
- ii) (v'_i, p'_j, V'_i, q'_j) são as novas variáveis canônicas definidas pelo método
- iii) $\{f', S'\}$ é o parêntese de Poisson entre o elemento f' e a Geratriz da Transformação S' .

No caso em que a contribuição $\{f', S'\}$ é uma perturbação com respeito à ordem de grandeza definida pelo elemento f' , tal condição conduz à ideia básica adotada neste estudo de que o principal comportamento do elemento original f pode ser avaliado pela 1ª aproximação de sua Equação de Hori.

$$f = f'$$

Se uma melhor avaliação do campo de variação do elemento f se faz necessária, é conveniente caracterizar seu principal comportamento através da 2ª aproximação de sua Equação de Hori

$$f = f' + \{f', S'\} \tag{7.1}$$

O principal comportamento dessa 2ª aproximação será aqui tomado em consideração no estudo da contribuição do núcleo principal S_0 (5.14) da Geratriz da Transformação S' através da expressão:

$$f = f' + \{f', S_0\}$$

com o objetivo de permitir uma melhor avaliação de:

- i) parâmetro característico do movimento.
- ii) variável auxiliar Z^*
- iii) semieixos maiores dos Satélites.
- iv) excentricidades forçadas dos Satélites.

Ressalte-se neste estudo que os elementos

$$v_1, V_1, p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} P_m \right), q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} Q_m \right)$$

permanecem invariantes sob tal transformação de Hori, devido à independência de tais elementos, na conveniente vizinhança (4.61) com respeito à influência do vínculo (4.58) do Equilíbrio Instantâneo Similar.

A contribuição do parêntese $\{f', S'\}$ é neste estudo avaliada tomando por referência Sessin (1983) através da expressão:

$$\begin{aligned} \{f', S'\} = & \{E, M\} \left[\frac{\partial S'}{\partial M} \cdot \frac{\partial f'}{\partial E} - \frac{\partial S'}{\partial E} \cdot \frac{\partial f'}{\partial M} \right] + \sum_{u=1}^{2n-2} \{C_u, M\} \cdot \\ & \left[\frac{\partial S'}{\partial M} \cdot \frac{\partial f'}{\partial C_u} - \frac{\partial S'}{\partial C_u} \cdot \frac{\partial f'}{\partial M} \right] + \sum_{u, \varphi=1}^{2n-2} \{C_\varphi, C_u\} \frac{\partial S'}{\partial C_u} \cdot \frac{\partial f'}{\partial C_\varphi} \end{aligned} \tag{7.2}$$

onde:

- i) $f' = f'(E, C_u, M)$
- ii) $S' = S_0(E, C_u, M)$

- iii) E é a integral primeira de Hori (4.15)
- iv) $C_u (u=1,2,\dots,2n-2)$ são as constantes de integração independentes da solução do sistema auxiliar de Hori (4.26)
- v) M é o parâmetro auxiliar de integração (4.5)

Ressalte-se neste estudo uma hipótese essencial sugerida pela própria expressão (7.2) do parêntese, bem como pelas influências das comensurabilidades sobre o movimento, a ser tomada em consideração na eliminação da contribuição linear da variável tempo através do parâmetro M , de modo a assegurar que a contribuição do parêntese $\{f', S_0\}$ seja limitada.

7.1 Características auxiliares de desenvolvimento

Para o estudo em questão são considerados as constantes e os parâmetros de integração associados com a solução do Sistema Auxiliar de Hori (4.26):

- i) constantes de integração independentes

$$E, \tau_0, v_{10}, V_{10}, \Gamma_0, \phi_0, \rho_{j0}, \phi_{j0} \quad (j=1,3,4)$$

- ii) constantes em excesso

$$G, \rho_{20}, \phi_{20}, v_0$$

onde:

$$G = \frac{1}{X_{10}} \left[v_{10} - \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 \right] \tag{7.3}$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \rho_{j0} \cdot \cos \phi_{j0} = 0$$

$$(j=2)$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \rho_{j0} \cdot \sen \phi_{j0} = 0$$

$$\frac{v_0^2}{2} = -v_2(0) - 2X_{20}\Gamma_0^2 - v_2(0) \cdot \Gamma_0 \cdot \sen \phi_0 - \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}}$$

com $v_2(0)$ definido por uma função das constantes de integração E, G .

Ressalte-se neste estudo a utilização dessas constantes em excesso visto facilitar determinação do parêntese $\{f', S_0\}$

iii) Parâmetros Auxiliares de Integração

$$M = \frac{A(4,0)}{X_{10}}(\tau - \tau_0)$$

$$V = V(0)M$$

com $V(0)$ definido por uma função das constantes E e G .

iv) Os parênteses $\{C_\mu, C_\phi\}$ e $\{M, C_\mu\}$ são definidos pela equação (6.15), para os quais ressaltamos as relações auxiliares:

$$\sum_{S=1}^3 \{\rho_{m0}, \rho_{s0}\} \cdot \rho_{s0} = 0$$

$$\sum_{S=1}^4 \{\phi_{m0}, \rho_{s0}\} \cdot \rho_{s0} = \frac{1}{X_{10}} \tag{7.4}$$

Com respeito à contribuição da geratriz S' encontramos seu correspondente núcleo principal S_0 definido por (5.14). Adotando-se a convenção para $C_\mu = E, G, v_0$ dada por:

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial C_\mu}\right) = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial C_\mu} \left[\frac{S(0,u)}{V(0)} \right] \text{sen } uV +$$

$$+ X_{10} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot \frac{\partial}{\partial C_\mu} \left[\frac{S(j,u)}{V(0)} \right] \text{sen} [V_1' + uV + \phi_{j0}] \tag{7.5}$$

encontramos suas correspondentes derivadas avaliadas por:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial E}\right) - \frac{1}{v_0} \left[1 + \Gamma_0 \text{sen } \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \cdot \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0}\right) \right] +$$

$$+ V \left[\frac{\partial V_1(0)}{\partial E} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} + \frac{1}{V(0)} \cdot \frac{\partial V(0)}{\partial E} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V} \right]$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial G} = \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial G}\right) - \frac{1}{v_0} \left[1 + \Gamma_0 \text{sen } \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \cdot \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0}\right) \right] +$$

$$+ V \left[\frac{\partial V_1(0)}{\partial G} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} + \frac{1}{V(0)} \cdot \frac{\partial V(0)}{\partial G} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S_0}{\partial \Gamma_0} &= -\frac{1}{v_0} \left[4X_{20}\Gamma_0 + v_2(0)\text{sen}\phi_0 \right] \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \\
 \frac{\partial S_0}{\partial \phi_0} &= -\frac{1}{v_0} \left[v_2(0)\Gamma_0 \cdot \cos\phi_0 \right] \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \\
 \frac{\partial S_0}{\partial M} &= V(0) \frac{\partial S_0}{\partial V} \\
 \frac{\partial S_0}{\partial v_{10}} &= \frac{1}{X_{10}} \frac{\partial S_0}{\partial G} \\
 \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} &= \sum_{j=1}^4 \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{j0}} \\
 \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{j0}} &= X_{10} \sum_{u=-\infty}^{\infty} n_{j0} \left[\frac{S(j,u)}{V(0)} \right] \cdot \text{sen} \left[V'_1 + uV + \phi_{j0} \right] - \rho_{j0} \frac{\partial S_0}{\partial G} \\
 \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{j0}} &= X_{10} \sum_{u=-\infty}^{\infty} n_{j0} \cdot \rho_{j0} \left[\frac{S(j,u)}{V(0)} \right] \cdot \cos \left[V'_1 + uV + \phi_{j0} \right]
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Introduzindo a notação auxiliar:

$$S^*(s,u) = \frac{S(s,u)}{V(0)} \tag{7.7}$$

$$C^*(m,s) = \begin{cases} -1 + \gamma_{m0}^2 & m = s \\ \gamma_{m0} \cdot \gamma_{s0} & m \neq s \end{cases}$$

encontramos as seguintes relações auxiliares:

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^4 \{v_{10}, \phi_{s0}\} \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{s0}} &= -\frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \\
 \sum_{j=1}^4 \sum_{u=1}^4 \{\rho_{j0}, \phi_{u0}\} \rho_{j0} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{u0}} &= -\frac{1}{X_{10}} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \\
 \sum_{j=1}^{u-1} \sum_{u=2}^3 \{\rho_{j0}, \rho_{u0}\} \left[\rho_{j0} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{u0}} - \rho_{u0} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{j0}} \right] &= 0 \\
 \sum_{S=1}^3 \{\rho_{m0}, \rho_{s0}\} \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{s0}} &= -\sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^3 n_{s0} \cdot C^*(m,s) \cdot S^*(s,u) \cdot \text{sen}(\phi_{m0} - \phi_{s0}) \\
 &\cdot \text{sen} \left[V'_1 + uV + \phi_{s0} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{S=1}^3 \{ \rho_{m_0}, \phi_{s_0} \} \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{s_0}} &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^3 n_{s_0} \cdot C^*(m, s) \cdot S^*(s, u) \cdot \cos(\phi_{m_0} - \phi_{s_0}) \cdot \\
 &\cdot \cos[V'_1 + uV + \phi_{s_0}] \\
 \sum_{S=1}^3 \{ \phi_{m_0}, \phi_{s_0} \} \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{s_0}} &= -\frac{1}{\rho_{m_0}} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^3 n_{s_0} \cdot C^*(m, s) \cdot S^*(s, u) \cdot \text{sen}(\phi_{m_0} - \phi_{s_0}) \cdot \\
 &\cdot \cos[V'_1 + uV + \phi_{s_0}] \\
 \frac{\partial S_0}{\partial v_{10}} + \sum_{S=1}^3 \{ \phi_{m_0}, \rho_{s_0} \} \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{s_0}} &= -\frac{1}{\rho_{m_0}} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^3 n_{s_0} \cdot C^*(m, s) \cdot S^*(s, u) \cdot \cos(\phi_{m_0} - \phi_{s_0}) \cdot \\
 &\cdot \text{sen}[V'_1 + uV + \phi_{s_0}] \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

onde deve ser observado que cada derivada $\frac{\partial S_0}{\partial \rho_{j_0}}, \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{j_0}}$ deve aqui ser interpretada como se os elementos ρ_{j_0}, ϕ_{j_0} fossem independentes.

7.2 Parêntese $\{f', S_0\}$

Este estudo é aqui desenvolvido para os elementos que definem as contribuições de ordens superiores das excentricidades forçadas e dos semieixos dos Satélites e das variáveis canônicas associadas com o ângulo crítico laplaciano.

Recorrendo-se às equações (6.15) e (7.2), de um modo geral a contribuição de um elemento f' é definida através da expressão:

$$\begin{aligned}
 \{f', S_0\} &= \{E, M\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial M} \cdot \frac{\partial f'}{\partial E} - \frac{\partial S_0}{\partial E} \cdot \frac{\partial f'}{\partial M} \right] + \\
 &+ \{v_{10}, V_{10}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial v_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial v_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V_{10}} \right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \{v_{10}, \varphi_{j_0}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_{j_0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial v_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial v_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_{j_0}} \right] + \\
 &+ \{V_{10}, \Gamma_{10}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \Gamma_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \Gamma_{10}} \right] + \{V_{10}, \phi_0\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_0} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_0} \right] + \\
 &+ \{\Gamma_{10}, \phi_0\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_0} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \Gamma_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial \Gamma_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_0} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \{\rho_{10}, \rho_{30}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \rho_{30}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{30}} \right] + \\
 & + \sum_{\substack{j=1 \\ j, u \neq 2}}^4 \sum_{u=1}^4 \{\rho_{j0}, \phi_{u0}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_{u0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{j0}} - \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{j0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_{u0}} \right] + \\
 & + \{\phi_{10}, \phi_{30}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_{30}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_{30}} \right]
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

De modo a evitar a natural dificuldade de se escrever o núcleo S_0 em termos das constantes de integração independentes, com o auxílio das características de S_0 (5.14) e da integral G-Sessin (4.6), pode ser observado que tal parêntese para o elemento $f'(E, G, v_0, M)$ é mais facilmente calculado através da expressão equivalente:

$$\begin{aligned}
 \{f', S_0\} & = \{E, M\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial M} \cdot \frac{\partial f'}{\partial E} - \frac{\partial S_0}{\partial E} \cdot \frac{\partial f'}{\partial M} \right] + \\
 & + \{v_{10}, V_{10}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial v_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial v_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V_{10}} \right] + \sum_{j=1}^4 \{v_{10}, \phi_{j0}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_{j0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial v_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial v_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_{j0}} \right] + \\
 & + \{V_{10}, \Gamma_0\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \Gamma_0} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \Gamma_0} \right] + \{V_{10}, \phi_0\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_0} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V_{10}} - \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_0} \right] + \\
 & + \{\Gamma_0, \phi_0\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_0} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \Gamma_0} - \frac{\partial S_0}{\partial \Gamma_0} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_0} \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{k=2}^3 \{\rho_{j0}, \rho_{k0}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \rho_{k0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{j0}} - \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{j0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{k0}} \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \{\rho_{j0}, \phi_{k0}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_{k0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{j0}} - \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{j0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_{k0}} \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{k=2}^3 \{\phi_{j0}, \phi_{k0}\} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_{k0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_{j0}} - \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{j0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_{k0}} \right]
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

onde deve ser ressaltado que cada derivada $\frac{\partial S_0}{\partial \rho_{j_0}}, \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{j_0}}, \frac{\partial f'}{\partial \rho_{j_0}}, \frac{\partial f'}{\partial \phi_{j_0}}$ deve aqui ser interpretada como se os elementos ρ_{j_0}, ϕ_{j_0} fossem independentes.

7.2.1 $f' = f'(E, G, v_0, M)$

Com respeito ao elemento

$$f' = \sum_{u=0} f(u) \cos uV \tag{7.11}$$

onde

$$f(u) = f_u(E, G, v_0)$$

note que suas correspondentes contribuições, sob a notação:

$$\left(\frac{\partial f'}{\partial C_\mu} \right) = \sum_{u=0} \frac{\partial f(u)}{\partial C_\mu} \cos uV \quad C_\mu = E, G, v_0 \tag{7.12}$$

se escrevem:

$$\frac{\partial f'}{\partial E} = \left[\left(\frac{\partial f'}{\partial E} \right) - \frac{1}{v_0} \left[1 + \Gamma_0 \text{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right] + \frac{V}{V(0)} \cdot \frac{\partial V(0)}{\partial E} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial M} = V(0) \cdot \frac{\partial f'}{\partial V}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial v_{10}} = \frac{1}{X_{10}} \left[\left(\frac{\partial f'}{\partial G} \right) - \frac{1}{v_0} \left[1 + \Gamma_0 \text{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) + \frac{V}{V(0)} \cdot \frac{\partial V(0)}{\partial G} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} \right]$$

$$\frac{\partial f'}{\partial \Gamma_0} = -\frac{1}{v_0} \left[4X_{20}\Gamma_0 + v_2(0)\text{sen} \phi_0 \right] \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right)$$

$$\frac{\partial f'}{\partial \phi_0} = -\frac{1}{v_0} \left[v_2(0)\Gamma_0 \cos \phi_0 \right] \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'}{\partial \rho_{j_0}} = & -\rho_{j_0} \left[\left(\frac{\partial f'}{\partial G} \right) - \frac{1}{v_0} \left[1 + \Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{V}{V(0)} \cdot \frac{\partial V(0)}{\partial G} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} \right] \end{aligned} \quad (7.13)$$

de modo a identificar com o auxílio de (6.15) e (7.8) as relações auxiliares:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{u-1} \sum_{u=2}^3 \{ \rho_{j_0}, \rho_{u_0} \} & \left[\frac{\partial S_0}{\partial \rho_{u_0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{j_0}} - \frac{\partial S_0}{\partial \rho_{j_0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{u_0}} \right] = 0 \\ \sum_{j=1}^4 \{ v_{1_0}, \phi_{j_0} \} & \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{j_0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial v_{1_0}} + \sum_{j=1}^4 \sum_{u=1}^4 \{ \rho_{j_0}, \phi_{u_0} \} \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{u_0}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \rho_{j_0}} = 0 \\ \left[\{ V_{1_0}, \Gamma_0 \} \frac{\partial f'}{\partial \Gamma_0} + \{ V_{1_0}, \phi_0 \} \frac{\partial f'}{\partial \phi_0} \right] & \frac{\partial S_0}{\partial V_{1_0}} - \{ \Gamma_0, \phi_0 \} \left[\frac{\partial S_0}{\partial \phi_0} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \Gamma_0} - \frac{\partial S_0}{\partial \Gamma_0} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \phi_0} \right] = \\ = -\frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) & \frac{\partial S_0}{\partial V_{1_0}} \left[\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} - \frac{d\phi}{dX'} \cdot \frac{\langle v'_2 \rangle_{PER}}{4X_{20}} \left[\Gamma_0 \cos \phi_0 \right] \right] \\ \{ v_{1_0}, V_{1_0} \} \frac{\partial S_0}{\partial V_{1_0}} \frac{\partial f'}{\partial v_{1_0}} = \frac{1}{X_{10}} \frac{\partial S_0}{\partial V_{1_0}} & \left[\left[\left(\frac{\partial f'}{\partial G} \right) - \frac{1}{v_0} \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right] + \right. \\ -\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) & \left. \left[\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] + \frac{V}{V(0)} \cdot \frac{\partial V(0)}{\partial G} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} \right] \\ \{ E, M \} \left[\frac{\partial S_0}{\partial M} \frac{\partial f'}{\partial E} - \frac{\partial S_0}{\partial E} \frac{\partial f'}{\partial M} \right] = \frac{V(0)}{X_{10}} & \left\{ \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial E} \right) \frac{\partial f'}{\partial V} - \frac{\partial S_0}{\partial V} \left(\frac{\partial f'}{\partial E} \right) \right] + \right. \\ -\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \frac{\partial f'}{\partial V} - \frac{\partial S_0}{\partial V} \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right] & - \frac{1}{v_0} \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \left[\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right]. \\ \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \frac{\partial f'}{\partial V} - \frac{\partial S_0}{\partial V} \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right] & + V \cdot \frac{\partial V_1(0)}{\partial E} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{1_0}} \frac{\partial f'}{\partial V} \left. \right\} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Levando (7.14) em (7.10), segue-se que o elemento procurado se escreve:

$$\begin{aligned}
 \{f', S_0\} = & \frac{V(0)}{X_{10}} \left\{ \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial E} \right) \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} - \frac{\partial S_0}{\partial V} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial E} \right) \right] - \frac{1}{v_0} \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial S_0}{\partial V} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right] + \frac{1}{V(0)} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \left[\left(\frac{\partial f'}{\partial G} \right) - \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right] \right\} + \\
 & - \frac{1}{v_0} \left[\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \left\{ \frac{V(0)}{X_{10}} \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} - \frac{\partial S_0}{\partial V} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right] + \right. \\
 & \left. \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \left[1 + \frac{1}{X_{10}} \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \right] \right\} + \\
 & \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \left[\Gamma_0 \cos \phi_0 \right] \frac{\langle v_2' \rangle_{PER}}{4X_{20}} \cdot \frac{d\phi}{dX'} + \\
 & + V \cdot \frac{V(0)}{X_{10}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \left[\frac{\partial V_1(0)}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial G} \left[\frac{1}{V(0)} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Uma análise das características dos coeficientes das derivadas de f' e S_0 e do parâmetro M (6.32) mostra para tal parêntese uma contribuição linear na variável tempo decorrente apenas da contribuição linear em M do elemento V . Note que tais coeficientes são constantes na variável tempo visto dependerem das constantes de integração E, G e v_0 .

Sob a hipótese de que a contribuição de tal parêntese é limitada no tempo, segue-se que as influências das comensurabilidades impõem sobre o movimento a condição:

$$\frac{\partial}{\partial E} [V_1(0)] = \frac{\partial}{\partial G} \left[\frac{1}{V(0)} \right] \tag{7.16}$$

Para a ordem de grandeza adotada neste estudo, note que tal possibilidade também é sugerida pelas características dos coeficientes $V_1(0)$ e $V(0)$, as quais são avaliadas a partir da Tabela 7 do Apêndice B por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial E}[V_1(0)] &= \frac{d^*}{E} \left[\frac{1}{4} - \frac{19}{48} d^* \dots \right] \\ \frac{\partial}{\partial G} \left[\frac{1}{V(0)} \right] &= \frac{d^*}{E} \left[\frac{1}{4} - \frac{37}{96} d^* \dots \right]\end{aligned}\tag{7.17}$$

Assumindo a validade de (7.16) para o movimento em questão, e recorrendo às condições similares dos Satélites Galileanos de Júpiter:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 \sin \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} &= \frac{1}{L} \frac{d}{dt} (\Gamma_0 \cos \phi_0) = 0(\varepsilon^{2/3}) \\ \Gamma_0 \cos \phi_0 &= 0(\varepsilon^{2/3}) \\ \frac{\langle v_2' \rangle_{PER}}{4X_{20}} &< 0(\varepsilon)\end{aligned}\tag{7.18}$$

segue-se para a ordem de grandeza adotada que o principal comportamento do parêntese é avaliado através da expressão:

$$\begin{aligned}\{f', S_0\} &= \frac{V(0)}{X_{10}} \left\{ \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial E} \right) \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} - \frac{\partial S_0}{\partial V} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial E} \right) \right] - \frac{1}{v_0} \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \cdot \frac{\partial f'}{\partial V} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial S_0}{\partial V} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right] \right\} + \frac{1}{X_{10}} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \left[\left(\frac{\partial f'}{\partial G} \right) - \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \cdot \left(\frac{\partial f'}{\partial v_0} \right) \right]\end{aligned}\tag{7.19}$$

onde ressaltamos a eliminação da indeterminação da derivada $\frac{d\phi}{dX'}$ visto tratar-se de uma contribuição de ordem superior para o estudo em questão.

7.2.2 $f' = f'(\Gamma_0, \phi_0)$

Os correspondentes elementos são avaliados a partir de (6.15) e (7.10) por:

$$\begin{aligned} \{\Gamma_0, S_0\} &= \frac{\text{sen } \phi_0}{4X_{20}} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} - \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \left[\frac{v_2(0)}{4X_{20}} \cos \phi_0 \right] - \frac{1}{4X_{20}} \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \\ &\left[\frac{v'_2}{4X_{20}} \cdot \cos \phi_0 \right] \cdot \frac{d\phi}{dX'} \\ \{\phi_0, S_0\} &= \frac{\cos \phi_0}{4X_{20}\Gamma_0} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} + \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \left[1 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \cdot \frac{\text{sen } \phi_0}{\Gamma_0} \right] + \\ &\frac{1}{4X_{20}} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \left[1 + \frac{v'_2}{4X_{20}} \cdot \frac{\text{sen } \phi_0}{\Gamma_0} \right] \cdot \frac{d\phi}{dX'} \\ \{\Gamma_0 \cos \phi_0, S_0\} &= -\frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \left[\Gamma_0 \text{sen } \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] - \frac{1}{4X_{20}} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \\ &\left[\Gamma_0 \text{sen } \phi_0 + \frac{v'_2}{4X_{20}} \right] \cdot \frac{d\phi}{dX'} \\ \{\Gamma_0 \text{sen } \phi_0, S_0\} &= \frac{1}{4X_{20}} \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} + \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) \left[\Gamma_0 \cos \phi_0 \right] + \frac{1}{4X_{20}} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \cdot \\ &\left[\Gamma_0 \cos \phi_0 \right] \cdot \frac{d\phi}{dX'} \end{aligned} \tag{7.20}$$

Ressaltem-se de uma análise das ordens de grandezas dos elementos as estimativas:

$$\{\Gamma_0 \cos \phi_0, S_0\} < 0(\varepsilon), \quad \{\Gamma_0 \text{sen } \phi_0, S_0\} < 0(\varepsilon)$$

caracterizando contribuições de ordens superiores para o estudo do principal comportamento das variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano (u_2^*, U_2^*) , que satisfazem:

$$\frac{u_2^*}{X_{20}} = 0(\varepsilon^{2/3}), \quad U_2^* = 0(\varepsilon^{2/3})$$

7.2.3 $f' = v_{10}, G$

Para tais elementos de (4.26) e (7.19) encontramos:

$$\begin{aligned} \{v_{10}, S_0\} &= \{v_{10}, V_{10}\} \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} + \sum_{s=1}^4 \{v_{10}, \phi_{s0}\} \frac{\partial S_0}{\partial \phi_{s0}} = 0 \\ \{G, S_0\} &= \frac{1}{X_{10}} \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \end{aligned} \quad (7.21)$$

7.3 Parênteses dos elementos característicos do movimento

7.3.1 Excentricidades forçadas

A identificação do principal comportamento do parêntese $\{f', S_0\}$, cujo elemento

$$f' = \sqrt{\frac{-2v'_2}{X_{10}}}$$

está associado com as características principais das excentricidades forçadas, é obtida diretamente de (7.19) recorrendo-se às derivadas de f' e S_0 apresentadas no Apêndice A-5. Tal elemento se escreve:

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{\frac{-2v'_2}{X_{10}}}, S_0 \right\} &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C(m, 0) \cdot \cos mV + \right. \\ &\left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} C(m, j) \cdot \cos [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\} \end{aligned} \quad (7.22)$$

onde:

V'_1 é definido pelo seu principal comportamento:

$$V'_1 = V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + V_1(0)V$$

Os principais coeficientes $C(m, k)$ são definidos no Apêndice A-7.

7.3.2 Semieixos maiores

Analogamente ao item anterior, segue-se que:

$$\left\{ \frac{v'_2}{X_{10}}, S_0 \right\} = \xi^* \cdot d^* \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} D(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot D(m,j) \cdot \cos [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\} \quad (7.23)$$

onde:

- i) V'_1 é definido pelo seu principal comportamento.
- ii) os principais coeficientes $D(m, k)$ são definidos no Apêndice A-7.
- iii) Ressalte-se para tal elemento que:

$$\left\{ \frac{v'_2}{X_{10}}, S_0 \right\} = 0(\varepsilon) \quad (7.24)$$

Observando de (4.13) e (4.16) o elemento característico

$$Z' = G + \frac{v'_2}{X_{10}} \quad (7.25)$$

que define os comportamentos das variáveis métricas associadas com os semieixos maiores dos Satélites, de (7.21) e (7.23) segue-se que tal elemento tem seu principal comportamento avaliado por:

$$\left\{ Z', S_0 \right\} = \xi^* \cdot d^* \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} E(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot E(m,j) \cdot \cos [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\} \quad (7.26)$$

onde:

- i) V'_1 é definido pelo seu principal comportamento.
- ii) os principais coeficientes $E(m, k)$ são definidos no Apêndice A-7.
- iii) Ressalte-se para tal elemento que:

$$\left\{ Z', S_0 \right\} = 0(\varepsilon) \quad (7.27)$$

7.3.3 Elemento característico α'

O parêntese de tal elemento é aqui avaliado com o auxílio de (4.31)

$$\cot \alpha' = \frac{H}{K} \quad (7.28)$$

de modo a levar em consideração a influência do vínculo (4.58) sobre os elementos H e K , definidos no Apêndice A-5.

Calculando-se o correspondente parêntese observamos que:

$$\{\alpha', S_0\} = \frac{\text{sen}^2 \alpha'}{K} [\cot \alpha' \{K, S_0\} - \{H, S_0\}] \quad (7.29)$$

Como o movimento é definido na conveniente vizinhança (4.61)

$$\phi^0 = \ell \text{ onde } \ell = (-1)^n \frac{\pi}{2} \text{ com } n = 0 \text{ ou } n = 1 \quad (7.30)$$

segue-se que o principal comportamento de tal parêntese é avaliado pela expressão

$$\{\alpha', S_0\}_{\phi=\ell} = -\frac{1}{K} \{H, S_0\} \quad (7.31)$$

Recorrendo ao Apêndice A-7 encontramos tal elemento definido por:

$$\{\alpha', S_0\}_{\phi=\ell} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(m, 0) \cdot \text{sen } mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot \alpha(m, j) \cdot \text{sen} [V_1' + mV + \phi_{j0}] \quad (7.32)$$

cujos correspondentes coeficientes $\alpha(m, k)$ são apresentados no Apêndice A-7.

7.3.4 Variáveis canônicas originais associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano

Tais variáveis, definidas de (3.26) em torno dos valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace por:

$$u_2^* = 2\sqrt{X_{20}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p_j \cdot \text{sen } \phi - q_j \cdot \text{cos } \phi]$$

$$U_2^* = \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p_j \cdot \text{cos } \phi + q_j \cdot \text{sen } \phi]$$

têm seus principais comportamentos caracterizados a partir da solução (4.26) e da primeira aproximação da Equação de Hori através dos elementos:

$$u_2^* = 2\sqrt{X_{20}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p'_j \cdot \text{sen } \phi' - q'_j \cdot \text{cos } \phi'] = -v'_2 - 4X_{20}\Gamma_0 \text{sen } \phi_0$$

$$U_2^* = \frac{1}{2\sqrt{X_{20}}} \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} [p'_j \cdot \text{cos } \phi' + q'_j \cdot \text{sen } \phi'] = \Gamma_0 \text{cos } \phi_0$$
(7.33)

Recorrendo-se à equação (6.42) na Seção [6.3], segue-se para a ordem de grandeza adotada que tais elementos são avaliados pelas estimativas:

$$u_2^* = -\langle v'_2 \rangle_{PER} - u_0^0 \left\{ \text{sen} [n_0(t-t_0) + \phi_0^*] - \theta_0^3 \left[\frac{9}{8} - \text{cos} 2 [n_0(t-t_0) + \phi_0^*] + \frac{3}{8} \cdot \text{cos} 4 [n_0(t-t_0) + \phi_0^*] \right] \dots \right\}$$

$$U_2^* = \frac{u_0^0}{4X_{20}} \left\{ \text{cos} [n_0(t-t_0) + \phi_0^*] \dots \right\}$$
(7.34)

onde:

- i) $\langle v'_2 \rangle_{PER} = v'_2 - v'_2(0)$ é definido na Tabela 8 do Apêndice B;
- ii) $\theta_0 = \frac{v_2(0)}{\sqrt{8X_{20}\Gamma_0^*}} = 0(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$;
- iii) $u_0^0 = \sqrt{8X_{20}\Gamma_0^*} \cdot \sqrt{1 + \theta_0^2} \left| \frac{u_0^0}{X_{20}} = 0(\varepsilon^{\frac{2}{3}}) \right.$

Em termos dos elementos característicos ξ^*, d^*, f de (6.36) pode ser observado que tal elemento é avaliado por:

$$u_0^0 = f \sqrt{6 \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} X_{20}} \quad (7.35)$$

É conveniente ressaltar de (6.13) que as variáveis canônicas (u_2^*, U_2^*) são definidas em torno dos valores de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace:

$$\begin{aligned} u_2^* \Big|_{t=t_L} &= u_2^0 > 0 \\ U_2^* \Big|_{t=t_L} &= U_2^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \langle Z^* \rangle_{SEC} \end{aligned} \quad (7.36)$$

satisfazendo a equação:

$$\left(\frac{u_2^*}{4X_{20}} \right)^2 + U_2^{*2} = \frac{3}{8} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] \cdot f^2 \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \quad (7.37)$$

Outro resultado deste estudo mostra de (5.13) e (7.33) que o principal comportamento da variável canônica V_2' , na conveniente vizinhança (4.61) é definido por:

$$V_2' = U_2^* \quad (7.38)$$

7.3.5 Variável auxiliar $Z^{*'}$

Tal elemento, definido de (6.10) por:

$$Z^{*'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2$$

se escreve de (6.7) por:

$$Z^{*'} = \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \left[G - \frac{v_{10}}{X_{10}} \right]$$

de modo a definir seu correspondente parêntese, a partir de (7.21), por:

$$\left\{ Z^{*'}, S_0 \right\} = \frac{1}{X_{20}} \frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} \quad (7.39)$$

7.4 Elementos característicos do movimento

O principal comportamento de um elemento original f é aqui definido pela segunda aproximação de sua correspondente Equação de Hori.

$$f = f' + \{f', S_0\} \tag{7.40}$$

tomando em consideração as características de:

- i) f' definida pela solução (4.26) do sistema auxiliar de Hori;
- ii) contribuição do parêntese $\{f', S_0\}$ decorrente da geratriz da transformação;
- iii) influências das principais perturbações de ordens superiores definidas pela solução do sistema variacional.

Para os elementos originais associados com as variáveis métricas, dos Apêndices A-6 e A-7 e Seções [6.3] e [7.3] encontramos seus principais comportamentos definidos pelas expressões:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} &= \sum_{m=0}^{\infty} R^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 R^*(m,k) \cdot \text{sen} [V'_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*] \\ \frac{v_2}{X_{10}} &= \sum_{m=0}^{\infty} W^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 W^*(m,k) \cdot \text{sen} [V'_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*] \\ Z &= \sum_{m=0}^{\infty} Z^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Z^*(m,k) \cdot \text{sen} [V'_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*] \\ Z^* &= Z^{**}(0,0) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Z^{**}(m,k) \cdot \text{sen} [V'_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*] \end{aligned} \tag{7.41}$$

cujos correspondentes coeficientes são apresentados na Tabela 11 do Apêndice B.

Com respeito ao elemento α , note primeiramente de (7.32) e (7.40) que seu principal comportamento é neste estudo avaliado por:

$$\alpha = \alpha' \Big|_{\phi'=\ell} + \{\alpha', S_0\}_{\phi'=\ell}$$

na conveniente vizinhança (4.61).

Recorrendo-se ao Apêndice A-7, segue-se que:

$$\alpha = \ell + (-1)^n \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^*(m,0) \cdot \text{sen} mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \alpha^*(m,k) \cdot \cos [V'_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*] \right] \quad (7.42)$$

cujos correspondentes $\alpha^*(m,k)$ são também definidos na Tabela 11 do Apêndice B.

Ressalte-se que os elementos característicos das excentricidades forçadas na conveniente vizinhança (3.42)

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cos \alpha, \quad \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \text{sen} \alpha$$

podem ser obtidos recorrendo-se às equações (7.41) e (7.42).

Em relação aos elementos invariantes com respeito ao núcleo S_0 da Geratriz da Transformação, observamos de (4.1)

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 & V_1 &= V'_1 \\ p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p_m \right) &= p'_j - \gamma'_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} p'_m \right), & q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q_m \right) &= q'_j - \gamma'_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} q'_m \right) \end{aligned} \quad (7.43)$$

tais que esses elementos são definidos pela equação (5.13) na conveniente vizinhança (4.61), de modo a assegurar suas independências das influências do vínculo (4.58) associado com o Equilíbrio Instantâneo Similar.

Ressalte-se também de (7.38) que o principal comportamento da variável canônica V'_2 , na conveniente vizinhança (4.61) é definido pela estimativa:

$$V'_2 = U_2^* \quad (7.44)$$

O conjunto de resultados aqui apresentados leva à identificação do principal comportamento do movimento, a ser discutido no próximo capítulo.

8

CARACTERÍSTICAS DO MOVIMENTO

O estudo que se segue tem por objetivo avaliar o principal comportamento de cada conjunto de variáveis canônicas neste estudo utilizadas, de modo a permitir a identificação dos elementos característicos do movimento que possam contribuir para a definição de uma correspondente solução intermediária. Tais características são aqui discutidas a partir das novas variáveis do Método de Hori (1966) cujos principais comportamentos, decorrentes das influências das comensurabilidades e do conceito de Equilíbrio Instantâneo Similar, são definidos pela solução do correspondente Sistema Auxiliar de Hori sob as influências das principais perturbações de ordens superiores.

Essas novas variáveis e os elementos característicos associados com as principais contribuições decorrentes da geratriz da transformação identificam os principais comportamentos dos correspondentes elementos originais. A partir desse resultado os demais conjuntos de variáveis canônicas são identificados através de suas correspondentes transformações até a obtenção dos elementos característicos do movimento.

8.1 Perturbações de ordens superiores

Esse primeiro passo toma em consideração os principais comportamentos das constantes e do parâmetro de integração da solução do Sistema Auxiliar de Hori com respeito à variável tempo. Tais características, decorrentes das Seções [6.3], [6.4] e [7.3], se escrevem:

$$\begin{aligned}
 v_{10} &= v_{10}^* \\
 V_{10} &= V_{10}^* + V(1,0)(t-t_0) - \left[1 + \frac{\partial v_2(0)}{\partial v_{10}} \right] [\Gamma_0 \cos \phi_0] \\
 \Gamma_0 &= \sqrt{\frac{\Gamma_0^*}{2X_{20}}} \left\{ \left[1 + \frac{3}{4}\theta_0^2 \right] + \left[-\theta_0 + \frac{\theta_0^3}{8} \right] \text{sen} [n_0(t-t_0) + \phi_0^*] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\theta_0^2}{4} \cos 2[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] + \frac{\theta_0^3}{8} \text{sen} 3[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] \dots \right\} \tag{8.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_0 &= \phi_0^* + n_0(t-t_0) + \left[-\theta_0 + \frac{5}{8}\theta_0^3 \right] \cos [n_0(t-t_0) + \phi_0^*] - \\
 &\quad - \frac{\theta_0^2}{2} \text{sen} 2[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] + \frac{5}{12}\theta_0^3 \cos 3[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] \dots
 \end{aligned}$$

$$p_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{sen} [w_k(t-t_0) + \phi_{k0}^*] \tag{j=1,2,3,4}$$

$$q_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \cos [w_k(t-t_0) + \phi_{k0}^*]$$

$$M = M(0,0)(t-t_0^*) + \frac{1}{X_{10}} \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \cdot [\Gamma_0 \cos \phi_0]$$

onde:

- i) $E, v_{10}, V_{10}, \Gamma_0, \phi_0, \rho_{j0}, \phi_{j0}$ são constantes de integração com respeito ao parâmetro auxiliar de integração de Hori M.

Ressalte-se que E é a integral primeira gerada pelo Método de Hori, a qual é definida na Seção [8.2].

$$\begin{aligned}
 p_{j0} &= \rho_{j0} \cdot \cos \phi_{j0} \\
 q_{j0} &= \rho_{j0} \cdot \text{sen} \phi_{j0}
 \end{aligned}
 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

satisfazendo

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} p_{j0} &= 0 \\
 \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} q_{j0} &= 0
 \end{aligned}$$

cujos coeficientes γ_{j0} são definidos na Tabela 6 do Apêndice B.

iii) t_0 é o tempo de referência na data considerada.

iv) $C_j^k = Q(j, 1, k) \cdot A_{k0}^*$
 cujos coeficientes $Q(j, 1, k)$ são definidos na Tabela 10 do Apêndice B.

v) $E, t_0^*, v_{10}^*, V_{10}^*, \Gamma_0^*, \phi_0^*, A_{k0}^*, \varphi_{k0}^*$ são constantes de integração com respeito à variável tempo, tais que Γ_0^* e ϕ_0^* são caracterizadas pelas influências do Equilíbrio Instantâneo Similar através da estimativa:

$$\Gamma_0^* = \frac{3}{4} \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) f^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} - \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}}$$

e das condições (7.36):

$$\begin{aligned}
 u_2^* \Big|_{t=t_L} &= u_2^0 > 0 & \left| \frac{u_2^0}{X_{20}} \right| &= 0 \left(\varepsilon^{2/3} \right) \\
 U_2^* \Big|_{t=t_L} &= U_2^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \langle Z^* \rangle_{SEC} & \left| U_2^0 \right| &= 0(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

onde t_L é o tempo de ocorrência da condição do Equilíbrio de Laplace.

vi) Os elementos X_{i0} ($i = 1, 2$) são constantes definidas na Tabela 1 do Apêndice B.

vii) Os elementos característicos ξ^*, d^*, f são definidos na Tabela 7 do Apêndice B por funções das integrais primeiras de Hori e Sessin (E, G).

Ressalte-se que a integral G-Sessin neste estudo também é uma constante com respeito à variável tempo dada por:

$$G = \frac{1}{X_{10}} \left[v_{10} - \frac{X_{10}}{2} \sum_{j=1}^4 p_{j0}^2 + q_{j0}^2 \right]$$

viii) Note das equações (7.35), (7.37) e (7.41) que os valores de referência u_2^0 e U_2^0 satisfazem:

$$U_2^0 = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 p_{j0}^2 + q_{j0}^2$$

$$u_2^0 = u_0^0 \sqrt{1 - \left(\frac{4X_{20} U_2^0}{u_0^0} \right)^2}$$

$$u_0^0 = f \sqrt{6 \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} X_{20}}$$

ix) Os elementos w_k ($k = 1, 2, 3$) são constantes características do movimento definidas pela equação (6.26) e identificados na Seção [8.5].

$$\begin{aligned} \text{x) } \Gamma_0 \text{ sen } \phi_0 = & \sqrt{\frac{\Gamma_0^*}{2X_{20}}} \left\{ \left[-\theta_0 - \frac{9}{8} \theta_0^3 \right] + \left[1 + \frac{\theta_0^2}{2} \right] \text{sen} \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] \right. \\ & \left. + \theta_0^3 \text{cos} 2 \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] - \frac{3}{8} \theta_0^3 \text{cos} 4 \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\Gamma_0 \text{ cos } \phi_0 = \sqrt{\frac{\Gamma_0^*}{2X_{20}}} \left[1 + \frac{\theta_0^2}{2} \right] \text{cos} \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] \dots$$

xi) os coeficientes $V(1,0)$ e $M(0,0)$ são constantes características do movimento definidas na Tabela 9 do Apêndice B.

$$\text{xii) } v_2(0) = -X_{10} \left[G + \xi^* \left[1 + f^2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{d^*}{4} \right) \right] \right]$$

$$\frac{\partial v_2(0)}{\partial v_{10}} = -1 + \frac{d^*}{2} - \frac{d^{*2}}{6} + \dots$$

$$\frac{\partial v_2(0)}{\partial E} = X_{10} \left(\frac{\xi^*}{E} \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} d^* - \frac{d^{*2}}{4} + \dots \right]$$

$$\theta_0 = \frac{v_2(0)}{\sqrt{8X_{20}\Gamma_0}} = 0(\varepsilon^{1/3})$$

$$\text{xiii) } n_0 = - \left\{ \frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) - A(5,2) \left[1 - 9 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left(1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9} d^{*2} \right) \right] \right\}$$

cujos coeficientes A(5,j) são definidos na Tabela 6 do Apêndice B.

8.2 Variáveis canônicas do Método de Hori

O segundo passo toma em consideração os principais comportamentos das variáveis canônicas

$$(v'_i, p'_j, V'_i, q'_j)$$

os quais são definidos pela solução (5.13) do Sistema Auxiliar de Hori sob as influências do Equilíbrio Instantâneo Similar. Tais elementos se escrevem:

$$v'_1 = v_{10}$$

$$V'_1 = V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + V_1(0)V + \sum_{j=1} V_1(j) \cdot \text{sen } j \cdot V$$

$$v'_2 = -X_{10} [\xi + G]$$

$$V'_2 = \Gamma_0 \cos \phi_0$$

$$p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) = \sqrt{X_{10}} [p_{j0} \cdot \text{sen } V'_1 + q_{j0} \cdot \cos V'_1]$$

$$q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) = \sqrt{X_{10}} \left[p_{j0} \cdot \cos V'_1 - q_{j0} \cdot \text{sen } V'_1 \right]$$

$$\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m = 2\sqrt{X_{20}} \cdot \left[\left[\Gamma_0 \cos \phi_0 \right] \cdot \cos \alpha' - \left[\Gamma_0 \text{sen } \phi_0 + \frac{v'_2}{4X_{20}} \right] \cdot \text{sen } \alpha' \right]$$

$$\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m = 2\sqrt{X_{20}} \cdot \left[\left[\Gamma_0 \text{sen } \phi_0 + \frac{v'_2}{4X_{20}} \right] \cdot \cos \alpha' + \left[\Gamma_0 \cos \phi_0 \right] \cdot \text{sen } \alpha' \right]$$

$$V = V(0)M \tag{8.2}$$

onde:

- i) E é a integral primeira gerada pelo Método de Hori.

$$E = \xi^2 + K$$

cujos elementos ξ e K são definidos na Tabela 8 do Apêndice B.

- ii) $\gamma_{40} = 0$
- iii) os coeficientes $V_1(j)$, $V(0)$ são definidos na Tabela 7 do Apêndice B
- iv) $\alpha' = \ell$ na conveniente vizinhança (4.61)

$$\ell = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ para } n = 0 \text{ ou } n = 1$$

8.3 Variáveis canônicas decorrentes do principal comportamento do movimento

Esse passo identifica os principais comportamentos das variáveis canônicas originais

$$(v_i, p_j, V_i, q_j)$$

cujas características decorrem das correspondentes variáveis canônicas do Método de Hori. Tal identificação é aqui definida recorrendo-se as ideias básicas do método através da correspondente Equação de Hori de cada elemento, sob as influências do Equilíbrio

Instantâneo Similar. Tais elementos, a partir do capítulo 7, se escrevem na conveniente vizinhança (3.42):

$$\alpha = \phi$$

através das estimativas:

$$v_1 = v_{10}$$

$$V_1 = V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + V_1(0)V + \sum_{m=1}^{\infty} V_1(m) \text{sen} mV$$

$$v_2 = X_{10} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} W^*(m,0) \cdot \cos mV + \right. \\ \left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 W^*(m,k) \cdot \text{sen} \left[V_1 + mV - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^* \right] \right\}$$

$$V_2 = \frac{u_0^0}{4X_{20}} \cdot \cos \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right]$$

$$p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{i=1}^3 \gamma_{i0} \cdot p_i \right) = \sqrt{X_{10}} \sum_{k=1}^3 C_j^k \cos \left[V_1 - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^* \right]$$

$$q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{i=1}^3 \gamma_{i0} \cdot q_i \right) = -\sqrt{X_{10}} \sum_{k=1}^3 C_j^k \text{sen} \left[V_1 - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^* \right]$$

$$\sum_{i=1}^3 \gamma_{i0} \cdot p_i = -2\sqrt{X_{20}} \cdot \left[\Gamma_0 \text{sen} \phi_0 + \frac{v_2'}{4X_{20}} \right] \text{sen} \ell$$

$$\sum_{i=1}^3 \gamma_{i0} \cdot q_i = 2\sqrt{X_{20}} \cdot \left[\Gamma_0 \cos \phi_0 \right] \text{sen} \ell$$

$$\alpha = \ell + (-1)^n \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^*(m,0) \cdot \text{sen} mV + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \alpha^*(m,k) \cdot \cos \left[V_1 + mV - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^* \right] \right\} \quad (8.3)$$

onde:

- i) o elemento α é definido pela equação (7.42) e Tabela 11 do Apêndice B;
- ii) os coeficientes $W^*(m,k)$ são definidos na Tabela 11 do Apêndice B;

iii) $\gamma_{40} = 0$;

iv) ressalte-se que os elementos $\sum_{i=1}^3 \gamma_{i0} \cdot p_i$ e $\sum_{i=1}^3 \gamma_{i0} \cdot q_i$ são aqui definidos pela 1ª Aproximação de suas correspondentes equações de Hori.

Os demais elementos foram definidos nas Seções anteriores deste Capítulo.

8.4 Variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano

Esse passo identifica os principais comportamentos das variáveis canônicas originais na conveniente vizinhança (3.42).

$$(u_i^*, h_j^*, U_i^*, k_j^*)$$

cujas variáveis associadas com o ângulo crítico laplaciano (u_2^*, U_2^*) são definidas em torno dos valores associados com a condição do Equilíbrio de Laplace:

$$u_2^0 = u_0^0 \sqrt{1 - \left(\frac{4X_{20}U_2^0}{u_0^0} \right)^2}$$

$$U_2^0 = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 p_{j0}^2 + q_{j0}^2$$

$$u_0^0 = f \sqrt{6 \left(\frac{\xi^*}{d^*} \right) \left[1 - \frac{d^*}{3} \right] X_{10} X_{20}}$$

Recorrendo a equação (3.26) e Seções [7.3] e [7.4], tais elementos se escrevem:

$$u_1^* = v_1$$

$$U_1^* = V_1$$

$$u_2^* = -\langle v_2' \rangle_{PER} - u_0^0 \left\{ \text{sen} \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] - \theta_0^3 \left[\frac{9}{8} - \cos 2 \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{8} \cos 4 \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] \dots \dots \left. \right\} \\
 U_2^* & = \frac{u_0^0}{4X_{20}} \cos \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] \dots \\
 \frac{h_m^*}{\sqrt{X_{10}}} & = \gamma_{m0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos (U_2^* - \alpha) + \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k) \cdot \cos \left[U_1^* - w_k (t - t_0) - \phi_{k0}^* \right] \\
 \frac{k_m^*}{\sqrt{X_{10}}} & = -\gamma_{m0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} (U_2^* - \alpha) - \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k) \cdot \text{sen} \left[U_1^* - w_k (t - t_0) - \phi_{k0}^* \right]
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

onde:

$$\text{i) } H^*(m, 0, k) = \sum_{s=1}^3 E_{ms} \cdot C_s^k \quad m = 1, 2, 3$$

$$H^*(4, 0, k) = C_4^k$$

$$\text{ii) } E_{ms} = \begin{cases} 0 & m = s \\ -E_{sm} & m \neq s \end{cases}$$

com:

$$E_{12} = \gamma_{30} \quad E_{13} = -\gamma_{20} \quad E_{23} = \gamma_{10}$$

iii) γ_{m0} são definidos na Tabela 6 do Apêndice B, com $\gamma_{40} = 0$

iv) o elemento v_2' é definido na Tabela 8 do Apêndice B

v) os elementos $\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$ e α são definidos na Tabela 11 do Apêndice B.

8.5 Variáveis canônicas associadas com a Integral Primeira de Sessin e Henrard

Esse passo caracteriza os principais comportamentos das variáveis canônicas originais

$$(u_i, h_j, U_i, k_j)$$

de modo a levar em consideração a influência da comensurabilidade laplaciana através do parâmetro característico do movimento S.

Recorrendo a equação (2.9) e Seção [2.4], tais elementos se escrevem:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= v_1 \\
 U_1 &= V_1 \\
 u_2 &= -2X_{10} \cdot [U_2^* - U_2^0] + S \cdot X_{10} \cdot Z - X_{10} \cdot \chi \\
 U_2 &= \ell + U_2^* \tag{8.5} \\
 \frac{h_j}{\sqrt{X_{10}}} &= \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos \alpha^* + \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cdot \cos [V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*] \\
 \frac{k_j}{\sqrt{X_{10}}} &= \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} \alpha^* - \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cdot \text{sen} [V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]
 \end{aligned}$$

onde:

- i) o parâmetro característico S é definido pela equação (2.20);
- ii) o elemento χ é definido pela equação (2.21);
- iii) $\gamma_{40} = 0$;
- iv) a contribuição de ordem superior do termo $\Gamma_0 \cos \phi_0$ é negligenciada para o elemento $V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*$

$$\text{Note que: } \Gamma_0 \cos \phi_0 = 0 \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \right);$$

- v) o elemento Z é definido na Tabela 11 do Apêndice B;
- vi) o ângulo α é aqui substituído pela notação α^* , justificada como se segue.

Ressalte-se da equação (4.28) e das expressões (3.45) dos elementos h_j e k_j que, se numa data considerada o movimento dos três primeiros Satélites é definido sob uma orientação caracterizada pelos elementos V_1, α, \bar{w}_4 então a orientação oposta é caracterizada pelos elementos $\Pi + V_1, \Pi + \alpha, -\bar{w}_4$, de modo a preservar as correspondentes excentricidades e longitudes dos pericentros dos três primeiros Satélites.

Comparativamente ao elemento real numa data qualquer:

$$V_{1R} = V_{1REAL} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

deve ser observado neste estudo que, quando calculado pelo modelo a partir da data original, o ângulo crítico V_1 na data qualquer satisfaz uma das possibilidades:

$$V_1 = V_{1R} \text{ ou } V_1 = \pi + V_{1R}$$

De modo a satisfazer tais características observadas e completar a identificação da orientação do movimento, definida pelos elementos V_1, α, \bar{w}_4 na data original ($V_1 = V_{1R}$), é assumido neste estudo que:

- i) se $V_1 = V_{1R}$ na data qualquer então o movimento preserva a mesma orientação, definida com o auxílio do elemento $\alpha^* = \alpha$, com α definido a partir da data original, e a orientação \bar{w}_4 ;
- ii) se $V_1 = \pi + V_{1R}$ na data qualquer então o movimento troca de orientação, definida com o auxílio do elemento $\alpha^* = \pi + \alpha$, com α definido a partir da data original, e a orientação $-\bar{w}_4$.

Ressalte-se que os elementos característicos forçados:

$$V_1, V, \sqrt{-\frac{2v_2}{X_{10}}}, \alpha$$

numa data considerada não se alteram sob uma mudança de orientação do ângulo \bar{w}_4 , bem como as correspondentes contribuições livres.

$$\pm \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k)_{sen}^{\cos} \left[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^* \right] \quad m = 1, 2, 3$$

Na determinação de qualquer elemento do movimento é assumido na definição do ângulo

$$V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*$$

que o elemento característico w_k (6.26) necessariamente satisfaz

$$w_k < 0 \quad k = 1, 2, 3$$

qualquer que seja a orientação, exceto com respeito as contribuições livres do 4°. Satélite onde devemos observar:

- i) $w_k < 0$ sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 .
- ii) $w_k > 0$ sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$.

8.6 Variáveis canônicas originais

Este último passo identifica os principais comportamentos das variáveis originais decorrentes de Marsden (1966).

$$(X_i, P_j, \theta_i, Q_j)$$

de modo a levar em consideração as influências das comensurabilidades 2:1 e variação do Ângulo Crítico Laplaciano.

Recorrendo às Seções [2.1] e [2.2], tais elementos se escrevem na conveniente vizinhança (3.42):

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{10} \left[1 + \frac{(1+S)}{2} \cdot Z - \frac{1}{2} \chi \right] \\ \theta_1 &= U_1 + U_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{u_1}{X_{10}} - S^2 \cdot Z \right] + \frac{(1+S)}{2} \chi - \beta_0 \\ X_2 &= X_{10} \left[\left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) + \frac{(1-S)}{2} \cdot Z + \frac{1}{2} \chi \right] \\ \theta_2 &= U_1 - U_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{u_1}{X_{10}} - S^2 \cdot Z \right] - \frac{(1-S)}{2} \chi + \beta_0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_j}{\sqrt{X_{10}}} &= \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos \left[\alpha^* + U_1 + \frac{u_1}{2X_{10}} \right] + \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k) \cdot \cos \left[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^* \right] \\ \frac{Q_j}{\sqrt{X_{10}}} &= \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} \left[\alpha^* + U_1 + \frac{u_1}{2X_{10}} \right] + \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k) \cdot \text{sen} \left[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^* \right] \end{aligned}$$

onde a contribuição de ordem superior do termo $\frac{u_1}{2X_{10}}$ para o elemento $w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^*$ é aqui negligenciada.

8.7 Elementos característicos do movimento

Os resultados discutidos neste estudo serão aqui utilizados para a identificação dos elementos orbitais, objetivando a caracterização de uma solução intermediária do movimento na conveniente vizinhança (3.42).

8.7.1 Semieixos maiores

De modo a identificar seus principais comportamentos, note primeiramente de (1.3) que as variáveis canônicas originais são definidas em termos dos elementos modificados de Delaunay por:

$$\begin{aligned} X_1 &= L_1 \\ X_2 &= L_2 + 2L_1 \\ X_3 &= L_3 + 2L_2 + 4L_1 \\ X_4 &= L_4 \end{aligned}$$

onde $X_j (j = 3, 4)$ são constantes de integração fixadas.

Introduzindo os elementos auxiliares L_{p0} , que são definidos para as condições de ressonâncias exatas na Tabela 1 do Apêndice B, com o auxílio de (8.6) encontramos as relações:

$$\frac{L_p}{L_{p0}} = 1 + \ell(p) \left(\frac{X_{10}}{L_{p0}} \right) Z + m(p) \cdot \chi \quad (8.7)$$

onde:

p	$\ell(p)$	$m(p)$
1	$\frac{1+S}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$-\frac{(1+3S)}{2}$	$\frac{3}{2} \left(\frac{X_{10}}{L_{20}} \right)$
3	$-(1-S)$	$-\left(\frac{X_{10}}{L_{30}} \right)$

Tomando em consideração a definição do elemento L_p (1.4)

$$L_p = m'_p \cdot \sqrt{\mu_p \cdot a_p}$$

segue-se que o semieixo maior do satélite p ($p = 1, 2, 3$) é avaliado através da expressão:

$$a_p = a_{p0} \left(\frac{L_p}{L_{p0}} \right)^2 \tag{8.8}$$

onde a_{p0} é o valor do semieixo maior do satélite p para as condições de ressonâncias exatas.

Com respeito ao 4° satélite, ressalte-se neste estudo que:

$$a_4 = a_{40} = \frac{1}{\mu_4} \left(\frac{L_4}{m'_4} \right)^2 = \text{const}$$

8.7.2 Ângulos críticos

Os ângulos críticos relacionados com as comensurabilidades 2:1 são caracterizados diretamente de (1.3) por:

$$\theta_i = \lambda_i - 2\lambda_{i+1} \quad i = 1, 2$$

Seus principais comportamentos se escrevem diretamente de (8.6) através da expressão:

$$\theta_i = U_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{u_1}{X_{10}} - S^2 \cdot Z \right] + (-1)^{i+1} \cdot U_2 + \frac{1}{2} \left[S + (-1)^{i+1} \right] \cdot \chi + (-1)^i U_2^0 \tag{8.9}$$

Em particular note que o Ângulo Crítico Laplaciano tem seu principal comportamento avaliado de (2.22) por:

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\ell + 2 \left[U_2^* - U_2^0 \right] + \chi \tag{8.10}$$

Ressalte-se na identificação do elemento θ_i através da equação (8.9) que:

$$U_2 = \ell + U_2^*$$

onde ℓ é caracterizado pela orientação α na qual o movimento é definido para $V_1 = V_{1R}$.

Note que, sob a orientação V_1 , $\pi + \alpha$, $-\bar{w}_4$, para o modelo observamos:

$$\theta_{i\text{MODELO}} = \pi + \theta_i \quad i = 1, 2$$

8.7.3 Excentricidades

Para a identificação dos principais comportamentos das excentricidades, note primeiramente de (1.3) e (2.5) que as variáveis canônicas h_p e k_p se escrevem:

$$\begin{aligned} h_p &= \sqrt{-2Y_p} \cdot \cos \beta_p^* \\ k_p &= -\sqrt{-2Y_p} \cdot \text{sen} \beta_p^* \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} Y_p &= L_p \left[\sqrt{1 - e_p^2} - 1 \right] \\ \beta_p^* &= \frac{u_1}{2X_{10}} + U_1 + \bar{w}_p \end{aligned}$$

Recorrendo às expressões de tais elementos, definidas da equação (8.5) por:

$$\begin{aligned} \frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}} &= \gamma_{p0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos \alpha^* + \sum_{k=1}^3 H^*(p, 0, k) \cdot \cos \left[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^* \right] \\ \frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}} &= \gamma_{p0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} \alpha^* - \sum_{k=1}^3 H^*(p, 0, k) \cdot \text{sen} \left[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^* \right] \end{aligned} \quad (8.11)$$

observamos que a excentricidade forçada tem sua estimativa definida pelas componentes:

$$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}} \right)_F = \gamma_{p0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos \alpha^* \quad \text{e} \quad \left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}} \right)_F = \gamma_{p0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} \alpha^* \quad (8.12)$$

ao passo que a excentricidade livre tem sua estimativa definida pelas componentes:

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}} \right)_L &= \sum_{k=1}^3 H^*(p,0,k) \cdot \cos \left[V_1 - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^* \right] \text{ e} \\ \left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}} \right)_L &= -\sum_{k=1}^3 H^*(p,0,k) \cdot \text{sen} \left[V_1 - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^* \right] \end{aligned} \quad (8.13)$$

Em particular para o 4º Satélite, note das equações (4.28) e (8.5) as componentes:

$$\begin{aligned} \sqrt{-2Y_4} \cdot \cos \bar{w}_4 &= \sum_{k=1}^3 H^*(4,0,k) \cdot \cos \left[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^* - \frac{u_1}{2X_{10}} \right] \\ \sqrt{-2Y_4} \cdot \text{sen} \bar{w}_4 &= -\sum_{k=1}^3 H^*(4,0,k) \cdot \text{sen} \left[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^* - \frac{u_1}{2X_{10}} \right] \end{aligned} \quad (8.14)$$

de modo a identificar, com o auxílio de (1.4) a estimativa:

$$\begin{aligned} e_{4L}^2 &= \left(\frac{X_{10}}{L_{40}} \right) \left\{ \left[\sum_{k=1}^3 H^*(4,0,k) \cdot \cos \left[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^* - \frac{u_1}{2X_{10}} \right] \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{k=1}^3 H^*(4,0,k) \cdot \text{sen} \left[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^* - \frac{u_1}{2X_{10}} \right] \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (8.15)$$

8.7.4 Longitudes dos pericentros

Tais elementos podem ser obtidos diretamente das definições dos elementos h_p e k_p e das componentes (8.11) através da expressão:

$$\bar{w}_p = -\varphi_p - U_1 - \frac{u_1}{2X_{10}} \quad (8.16)$$

onde:

$$\varphi_p = tg^{-1} \left(\frac{k_p}{h_p} \right)$$

Ressalte-se para o movimento definido sob orientação oposta V_1 , $\pi + \alpha$, $-\bar{w}_4$ a mudança de orientação na definição da longitude do pericentro do 4º Satélite, caracterizada de (8.4) através da expressão:

$$\bar{w}_4 = -\arctg \left[\frac{\sum_{k=1}^3 H^*(4,0,k) \cdot \text{sen} \left[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^* - \frac{u_1}{2X_{10}} \right]}{\sum_{k=1}^3 H^*(4,0,k) \cdot \text{cos} \left[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^* - \frac{u_1}{2X_{10}} \right]} \right] \quad (8.17)$$

CONCLUSÃO

Os resultados discutidos neste estudo apresentam as ideias básicas de Sessin (1983) e Sessin e Ferraz-Mello (1984), decorrentes do Método de Hori (1966), como ferramentas auxiliares na investigação de características essenciais impostas pelas comensurabilidades 2:1. Tomando em consideração as referências básicas Marsden (1966), Henrard (1983) e Ferraz-Mello (1985), este estudo abre a possibilidade de definição de uma solução intermediária, de modo a satisfazer a condição básica de De Sitter (1925) para esse problema ressonante.

Sua primeira contribuição mostra que o processo de sucessivas transformações canônicas associadas com as influências das comensurabilidades em geral produz várias reordenações de termos de ordens superiores que podem contribuir para uma caracterização mais efetiva da Hamiltoniana resultante. Sob tais influências, suas componentes são mais representativas da realidade do problema e podem melhor contribuir para a definição de um núcleo principal integrável, a ser utilizado na identificação do principal comportamento do movimento.

Uma segunda contribuição é a identificação de novas influências das comensurabilidades a partir das características da solução de um Sistema Auxiliar de Hori associado ao movimento. Toman-

do por referência as ideias básicas de Sessin e Ferraz-Mello (1984), tal estudo conduz à caracterização dos principais comportamentos de correspondentes variáveis canônicas sob influências similares as do conceito de Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983).

Neste estudo tal conceito também impõe a existência de um vínculo, decorrente da limitação imposta sobre o movimento pela região onde tal conceito é definido. Como resultado é apresentada uma Hamiltoniana definida nas vizinhanças de tal conceito, cujo núcleo principal também leva em consideração as influências do principal comportamento do movimento. Ressalte-se neste estudo sua dependência com respeito a uma variação característica do movimento, ao vínculo e aos elementos de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace.

Uma terceira contribuição diz respeito ao estudo da solução do Sistema Auxiliar de Hori associado ao novo núcleo principal do movimento, bem como a caracterização das influências do Equilíbrio Instantâneo sobre os elementos de tal solução. Como resultados são apresentados as principais características do vínculo associado, bem como dos elementos de referência associados com a condição do Equilíbrio de Laplace. A identificação de um núcleo das principais perturbações de ordens superiores com respeito à referida solução, bem como de um núcleo principal da Geratriz de Transformação completam essa aplicação do Método de Hori (1966).

Tomando por referência Sessin (1993), uma avaliação das principais contribuições de ordens superiores é desenvolvida, de modo a caracterizar os principais comportamentos dos elementos com respeito a variável tempo. Como resultado é apresentado o parâmetro característico do movimento, o qual define a influência da comensurabilidade laplaciana sobre os elementos do movimento. Este estudo também mostra que as influências do Equilíbrio Instantâneo Similar caracterizam o principal comportamento da amplitude, bem como da fase do Ângulo Crítico Laplaciano. Como consequência natural das influências das comensurabilidades também é sugerida a existência de uma possível relação entre cons-

tantes características do movimento, a qual é essencial para a eliminação da contribuição linear da variável tempo nas expressões dos parênteses de Poisson entre o núcleo principal da Geratriz da Transformação e os elementos do movimento.

Como resultado final são apresentadas as principais características dos elementos orbitais, as quais podem contribuir para a construção de órbitas intermediárias mais efetivas que as conhecidas órbitas keplerianas.

Tendo em vista que a referência original Marsden (1966) foi desenvolvida objetivando o estudo dos Satélites Galileanos de Júpiter, uma aplicação desse modelo pode ser efetuada para a identificação dos principais comportamentos de elementos desse movimento. Este estudo é desenvolvido no Apêndice C, objetivando uma comparação de suas características com resultados conhecidos de outros autores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DE SITTER, W. New Mathematical Theory of Jupiter's Satellites. *Leiden Annals*, Leiden, v.12, part 3, 1925.
- FERRAZ-MELLO, S. Resonance in Regular Variables. *Celes. Mech.*, Dordrecht, v.35, p.205-21, 1985.
- HENRARD, J. Orbital evolution of the Galilean Satellites: the Conservative Model. In: FERRAZ-MELLO, S.; NACOZY, P. (Ed.) *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*. São Paulo: Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo, 1983. p.233-41.
- HORI, G. I. Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables. *Publ. Astron. Soc. Japan.*, Tokio, v.18, p.287-96, 1966.
- LIESKE, J. H. Galilean Satellite Ephemerides E5. *Astron. Astrophys.*, Berlin, Suppl. ser. v.129, p.205-17, 1998.
- MARSDEN, B. G. The Motions of the Galilean Satellites of Jupiter. 1966, 189p. Thesis (Doctor of Philosophy) – Faculty of the Graduated School, Yale University. New Haven, 1966.
- MURRAY, C. D. Structure of the 2:1 and 3:2 Jovian Resonances. *Icarus*, New York, v.65, p.70-82, 1986.
- NASA. Solar System Dynamics. Portal. Disponível em: <<http://ssd.PL.NASA.gov/?sat.element>>. Acesso em: 25 jan. 2007.
- SATO, M. *Métodos de média numérica, analítica e semi-numérica para sistema de satélites naturais*. 1986, 118p. Tese (Doutorado em Astronomia) – Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1986.

- SESSIN, W. *Estudo de um sistema de dois planetas com períodos comensuráveis na razão 2:1*. 1981, 218p. Tese (Doutorado em Astronomia) – Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1981.
- _____. Lagrange Variational Equations from Hori's Method for Canonical Systems. *Celes. Mech.*, Dordrecht, v.29, p.360-6, 1983.
- SESSIN, W.; FERRAZ-ELLO, S. Motion of Two Planets with Periods Commensurable in the Ratio 2:1 – Solutions of the Hori Auxiliary System. *Celes. Mech.*, Dordrecht, v.32, p.307-32, 1984.
- SILVA, R. A. C. *Estudo de um sistema de três satélites com períodos comensuráveis nas razões 4:2:1*. 1986, 165p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico Aeroespacial. São José dos Campos, 1986.
- SINCLAIR, A. T. The Orbital Resonance amongst the Galilean Satellites of Jupiter. *Celes. Mech.*, Dordrecht, v.12, p.89-96, 1975.

APÊNDICE A

ELEMENTOS AUXILIARES DE DESENVOLVIMENTO

A-1 Influências das comensurabilidades 2:1 e da variação do Ângulo Crítico Laplaciano

As variáveis auxiliares são definidas por:

$$Z = \frac{1}{X_{10}} [x_1 + x_2] = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$z = \frac{1}{X_{20}} [x_1 - x_2 + 2X_{10}(\beta - \beta_0)] = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$\beta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \ell = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$\beta_p = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - (-1)^p \ell$$

A correspondente Hamiltoniana (2.4) é definida por:

$$K^* = \sum_{m=0}^5 K_m^*(x_i, P_j, \alpha_i, Q_j) \quad i=1,2; \quad j=1,2,3,4$$

cujo índice m define a ordem de grandeza da componente K_m^* com respeito a potência m da raiz cúbica do pequeno parâmetro ε .

$$K_0^* = k(0,0) + \frac{1}{2} \frac{c_4}{L_{40}^2}$$

$$K_1^* = K_2^* = 0$$

$$K_3^* = \varepsilon \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \cdot k(p,q,0,0) + 2\varepsilon \sum_{q=1}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \cdot \mathcal{G}_q$$

$$K_4^* = \sum_{j=0}^2 k(2,j) \cdot Z^{2-j} \cdot z^j + \varepsilon \sum_{\substack{p=1 \\ q=p+1}}^2 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \left\{ \frac{k(p,q,3,0)}{\sqrt{L_{p0}}} [P_p \cdot \cos \beta_p + Q_p \cdot \sin \beta_p] \right. \\ \left. + \frac{k(p,q,4,0)}{\sqrt{L_{q0}}} [P_q \cdot \cos \beta_p + Q_q \cdot \sin \beta_p] \right\}$$

$$K_5^* = \varepsilon \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^3 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \left[\sum_{j=0}^1 k(p,q,0,j+1) \cdot Z^{1-j} \cdot z^j \right] +$$

$$-6\varepsilon \sum_{q=1}^3 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \cdot \mathcal{G}_q \left[(2\gamma_q - \varepsilon_q) \cdot Z + \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \cdot \varepsilon_q \cdot z \right] +$$

$$+ \varepsilon \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \cdot \left\{ k(p,q,1,0) \left[\frac{P_p^2 + Q_p^2}{L_{p0}} + \frac{P_q^2 + Q_q^2}{L_{q0}} \right] + \right.$$

$$\left. + k(p,q,2,0) \left[\frac{P_p \cdot P_q + Q_p \cdot Q_q}{\sqrt{L_{p0} \cdot L_{q0}}} \right] \right\} + 2\varepsilon \sum_{q=1}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \cdot \mathcal{G}_q \cdot \frac{[P_q^2 + Q_q^2]}{L_{q0}} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\substack{p=1 \\ q=p+1}}^2 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \left\{ \frac{k(p,q,5,0)}{L_{p0}} [(P_p^2 - Q_p^2) \cdot \cos 2\beta_p + 2P_p Q_p \cdot \sin 2\beta_p] + \right.$$

$$\left. + \frac{k(p,q,6,0)}{\sqrt{L_{p0} \cdot L_{q0}}} [(P_p P_q - Q_p \cdot Q_q) \cdot \cos 2\beta_p + (P_p Q_q + P_q \cdot Q_p) \cdot \sin 2\beta_p] + \right.$$

$$\left. + \frac{k(p,q,7,0)}{L_{q0}} [(P_q^2 - Q_q^2) \cdot \cos 2\beta_p + 2P_q Q_q \cdot \sin 2\beta_p] \right\}$$

onde:

- i) Os elementos $L_{p0}, \gamma_q, \varepsilon_q, \vartheta_q$ são definidos na Tabela 1 do Apêndice B.
- ii) O elemento c_q é definido pela equação (1.5).
- iii) Os coeficientes $k(i,j)$ e $k(p,q,i,j)$ são definidos na Tabela 4 do Apêndice B, em termos de elementos auxiliares apresentados nas Tabelas 1 e 2 do mesmo Apêndice.
- iv) As constantes $X_{i0}(i = 1,2)$ são apresentadas na Tabela 1 do Apêndice B.
- v) 2ℓ é o ponto de equilíbrio, em torno do qual está definido o Ângulo Crítico Laplaciano.

A-2 Influência da Integral Primeira de Sessin e Henrard

As variáveis auxiliares são definidas por:

$$Z = \frac{1}{X_{10}} \left[u_1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 h_j^2 + k_j^2 \right] = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$z = \frac{1}{X_{20}} [u_2 + 2X_{10} \cdot \beta] = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$\beta = U_2 - \ell = 0(\varepsilon^{2/3})$$

A correspondente Hamiltoniana (2.7) é definida por:

$$G^* = \sum_{m=0}^5 G_m^*(u_i, h_j, U_i, k_j) \quad i = 1,2; \quad j = 1,2,3,4$$

cujo índice m define a ordem de grandeza da componente G_m^* com respeito a potência m da raiz cúbica do pequeno parâmetro ε .

$$G_m^* = K_m^* \quad m = 0,1,2,3$$

$$G_4^* = \sum_{j=0}^2 k(2,j) \cdot Z^{2-j} \cdot z^j + \varepsilon \sum_{\substack{p=1 \\ q=p+1}}^2 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \left\{ \frac{k(p,q,3,0)}{\sqrt{L_{p0}}} [h_p \cdot \cos \ell - k_p \cdot (-1)^p \cdot \text{sen } \ell] \right. \\ \left. + \frac{k(p,q,4,0)}{\sqrt{L_{q0}}} [h_q \cdot \cos \ell - k_q \cdot (-1)^p \cdot \text{sen } \ell] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 G_5^* &= \varepsilon \sum_{j=0}^1 G(j+1).Z^{1-j}.z^j + \varepsilon \sum_{q=1}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} G(q,0) \frac{[h_q^2 + k_q^2]}{L_{q0}} + \\
 &+ \varepsilon \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} .k(p,q,2,0) \frac{[h_p .h_q + k_p .k_q]}{\sqrt{L_{p0} .L_{q0}}} + \\
 &+ \varepsilon \sum_{\substack{p=1 \\ q=p+1}}^2 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \left\{ \frac{k(p,q,5,0)}{L_{p0}} \left[(h_p^2 - k_p^2) .\cos 2\ell - 2h_p k_p .(-1)^p \sen 2\ell \right] + \right. \\
 &+ \frac{k(p,q,6,0)}{\sqrt{L_{p0} .L_{q0}}} \left[(h_p h_q - k_p .k_q) .\cos 2\ell - (h_p k_q + h_q .k_p) (-1)^p \sen 2\ell \right] + \\
 &\left. + \frac{k(p,q,7,0)}{L_{q0}} \left[(h_q^2 - k_q^2) .\cos 2\ell - 2h_q k_q .(-1)^p \sen 2\ell \right] \right\}
 \end{aligned}$$

cujos correspondentes coeficientes são definidos na Tabela 4 do Apêndice B.

A-3 Elementos característicos da solução do Sistema Auxiliar de Hori de identificação

$$S_{ij} = \frac{\varepsilon^2}{D.H(4,0)} .C_{ij} \cdot \left(\frac{X_{10}}{L_{j0}} \right)$$

$$M_{11} = -\frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} .C_{11} .C_{21}$$

$$M_{21} = \frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} \cdot \left[C_{11}^2 + C_{32}^2 \cdot \left(\frac{X_{10}}{L_{30}} \right) \right]$$

$$M_{31} = -\frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} .C_{22} .C_{32} \cdot \left(\frac{X_{10}}{L_{30}} \right)$$

$$M_{12} = -\frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} .C_{11} .C_{22}$$

$$M_{22} = 0$$

$$M_{32} = -\frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} \cdot C_{21} \cdot C_{32} \cdot \left(\frac{X_{10}}{L_{30}} \right)$$

$$N_{11} = -\frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} \cdot C_{11} \cdot C_{21} \cdot \left(\frac{C_{22}}{C_{32}} \right) \cdot \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right)$$

$$N_{21} = \frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} \cdot C_{11}^2 \cdot \left(\frac{C_{22}}{C_{32}} \right) \cdot \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right)$$

$$N_{31} = \frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} \cdot \left\{ C_{11}^2 + [C_{21}^2 + 2C_{21}C_{22} \cdot \cos 2\ell] \left(\frac{X_{10}}{L_{20}} \right) \right\}$$

$$N_{12} = -\frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} \cdot C_{11} \cdot \left[C_{22} \cdot \left(\frac{C_{22}}{C_{32}} \right) \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right) + C_{32} \right]$$

$$N_{22} = -\frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} \cdot C_{21} \cdot C_{32} \cdot \left(\frac{X_{10}}{L_{20}} \right)$$

$$N_{32} = -\frac{\varepsilon^2}{D.H^2(4,0)} \cdot C_{21} \cdot C_{22} \cdot \left(\frac{X_{10}}{L_{20}} \right)$$

$$\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3 = -2\ell$$

$$R'_{11} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D}} \cdot \frac{C_{32}}{H(4,0)} \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{30}}}$$

$$R'_{21} = 0$$

$$R'_{31} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D}} \cdot \frac{C_{11}}{H(4,0)} \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{30}}}$$

$$R'_{12} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D}} \cdot \frac{C_{21}}{H(4,0)} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}}$$

$$R'_{22} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D}} \cdot \frac{C_{11}}{H(4,0)} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}}$$

$$R'_{32} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D}} \cdot \frac{C_{11}}{H(4,0)} \cdot \left(\frac{C_{22}}{C_{32}} \right) \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}}$$

onde:

- i) o coeficiente $H(4,0)$ é definido na Tabela 4 do Apêndice B.
- ii) os elementos D e C_{ij} são definidos na Tabela 5 do Apêndice B.

A-4 Elementos característicos de Sessin e Ferraz-Mello

Os elementos característicos de Sessin e Ferraz-Mello são definidos a partir da orientação $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ pelo Sistema Auxiliar:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dM} &= H & \frac{dV'_1}{dM} &= 2\xi \\ \frac{dH}{dM} &= D + 2\xi K & \frac{dK}{dM} &= -2\xi H \end{aligned}$$

cujas integrais primeiras de Horri e Sessin se escrevem:

$$\begin{aligned} E &= \xi^2 + K \\ G &= -\xi + \frac{1}{2D}(H^2 + K^2) \end{aligned}$$

O elemento característico ξ é definido de Sessin (1981) através da equação:

$$M = \int \frac{d\xi}{\sqrt{-P(\xi)}}$$

onde:

- i) $P(\xi) = \xi^4 - 2E\xi^2 - 2D\xi + (E^2 - 2DG)$
- ii) a região de integração correspondente é identificada através do modelo de Sessin e Ferraz-Mello (1984).

Sob condições similares as dos Satélites Galileanos de Júpiter, pode ser observado do Apêndice C que as características do movimento estão associadas com a região II do plano (E,G), onde

librações e circulações harmônicas estão definidas. Nessa região a equação

$$P(\xi)=0$$

tem duas raízes reais simples ξ_1, ξ_2 e duas raízes complexas ξ_3, ξ_4 . A solução da equação de ξ é periódica e definida no intervalo $\xi_2 \leq \xi \leq \xi_1$ por:

$$\xi = \xi_0 \cdot \frac{\left[1 - a \cdot \text{cn} \left(\frac{M}{g} \right) \right]}{\left[1 - b \cdot \text{cn} \left(\frac{M}{g} \right) \right]}$$

onde :

i) $\text{cn} \left(\frac{M}{g} \right)$ é uma função elíptica de Jacobi de módulo k^2 .

ii) $\xi_0 = \frac{B\xi_1 + A\xi_2}{A+B}$

$$a = \frac{B\xi_1 - A\xi_2}{B\xi_1 + A\xi_2}$$

$$b = \frac{A-B}{A+B}$$

iii) $\xi_3 = \rho_1 + J\rho_2$

$$\xi_4 = \rho_1 - J\rho_2$$

$$A^2 = (\xi_1 - \rho_1)^2 + \rho_2^2$$

$$B^2 = (\xi_2 - \rho_1)^2 + \rho_2^2$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{AB}}$$

$$J = \sqrt{-1}$$

$$k^2 = \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 - (A-B)^2}{4AB}$$

A dificuldade de se trabalhar com função elíptica é levantada através de sua expansão em Série de Fourier Trigonométrica, recorrendo-se aos elementos auxiliares:

i) Variável Auxiliar:

$$V = V(0)M$$

onde

$$V(0) = \frac{c}{g} \quad \text{com} \quad c = 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5}{64}k^4 + \dots$$

ii) Estimativas decorrentes de características similares as dos Satélites Galileanos de Júpiter:

$$\xi_0, a, b = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$E, k^2 = 0(\varepsilon^{4/3})$$

$$g = 0(\varepsilon^{-2/3})$$

Sob tais condições, os elementos característicos de Sessin e Ferraz-Mello se escrevem diretamente de Silva (1986) através das expressões:

$$\xi = \sum_{j=0} \xi(j) \cdot \cos jV$$

$$\xi(0) = \xi_0 \left\{ 1 + b(a+b) \left[\frac{1}{2} - \frac{k^2}{16} + \frac{3}{8}b^2 \dots \right] \dots \right\}$$

$$\xi(1) = -\xi_0(a+b) \left\{ 1 - \frac{k^2}{16} + \frac{3}{4}b^2 - \frac{9}{256}k^4 - \frac{3}{32}k^2b^2 + \frac{5}{8}b^4 + \dots \right\}$$

$$\xi(2) = \xi_0(a+b) \cdot b \left\{ \frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} + \dots \right\}$$

$$\xi(3) = -\xi_0(a+b) \left\{ \frac{k^2}{16} + \frac{b^2}{4} + \frac{k^4}{32} + \frac{3}{64}k^2b^2 + \frac{5}{16}b^4 + \dots \right\}$$

$$\xi(4) = \xi_0(a+b) \cdot b \left\{ \frac{k^2}{16} + \frac{b^2}{8} + \dots \right\}$$

$$H = \sum_{j=1} H(j) \cdot \sin jV$$

$$H(1) = \frac{\xi_0(a+b)}{g} \left\{ 1 - \frac{5}{16}k^2 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{25}{256}k^4 - \frac{9}{32}k^2b^2 + \frac{5}{8}b^4 + \dots \right\}$$

$$H(2) = -\frac{\xi_0(a+b) \cdot b}{g} \left\{ 1 - \frac{k^2}{4} + b^2 + \dots \right\}$$

$$H(3) = \frac{\xi_0(a+b)}{g} \left\{ \frac{3}{16}k^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{3}{64}k^4 - \frac{3}{64}k^2b^2 + \frac{15}{16}b^4 + \dots \right\}$$

$$H(4) = -\frac{\xi_0(a+b)b}{g} \left\{ \frac{k^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \dots \right\}$$

$$K = \sum_{j=0} K(j) \cdot \cos jV$$

$$K(0) = E - \xi_0^2 \left\{ 1 + \frac{a^2}{2} + 2ab + \frac{3}{2}b^2 - \frac{k^2}{16}(a+b)(a+3b) + \frac{9}{8}a^2b^2 + 3ab^3 + \frac{15}{8}b^4 + \dots \right\}$$

$$K(1) = \xi_0^2(a+b) \left\{ 2 + \frac{3}{2}ab + 3b^2 - \frac{k^2}{8} - \frac{3}{16}k^2b(a+2b) - \frac{3}{128}k^4 + \frac{5}{2}ab^3 + \frac{15}{4}b^4 + \dots \right\}$$

$$K(2) = -\xi_0^2(a+b) \left\{ \frac{a}{2} + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}ab^2 + \frac{5}{2}b^3 + \dots \right\}$$

$$K(3) = \xi_0^2(a+b) \left\{ \frac{k^2}{8} + \frac{ab}{2} + b^2 + \frac{k^4}{16} + \frac{3}{32}k^2b(a+2b) + \frac{5}{4}ab^3 + \frac{15}{8}b^4 + \dots \right\}$$

$$K(4) = -\xi_0^2(a+b) \left\{ \frac{k^2}{16}(a+3b) + \frac{3}{8}ab^2 + \frac{5}{8}b^3 + \dots \right\}$$

$$V_1' = V_{10} + V_1(0)V + \sum_{j=1} V_1(j) \cdot \text{sen } jV$$

$$V_1(0) = \frac{2g\xi_0}{c} \left\{ 1 + b(a+2b) \left[\frac{1}{2} - \frac{k^2}{16} + \frac{3}{8}b^2 + \dots \right] \right\}$$

$$V_1(1) = -\frac{2g\xi_0}{c}(a+b) \left\{ 1 - \frac{k^2}{16} + \frac{3}{4}b^2 + \dots \right\}$$

$$V_1(2) = \frac{2g\xi_0}{c}(a+b) \left\{ \frac{b}{4} + \frac{b^3}{4} + \dots \right\}$$

$$V_1(3) = -\frac{2g\xi_0}{c}(a+b) \left\{ \frac{k^2}{48} + \frac{b^2}{12} + \dots \right\}$$

$$V = V(0)M$$

$$V(0) = \frac{1}{g} \left\{ 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5}{64} k^4 \dots \right\}$$

Tais coeficientes são funções das constantes de integração E e G , através dos elementos ξ_0, a, b, g, k^2 , pouco apropriadas para o estudo das perturbações de ordens superiores. Essa nova dificuldade pode ser contornada com o auxílio desses próprios desenvolvimentos e da integral G-Sessin, de modo a obter desenvolvimentos mais práticos dados em termos de novos elementos característicos ξ^*, d^*, f , os quais são definidos a seguir. Essa caracterização é desenvolvida por Silva (1986), de modo a obter os principais comportamentos dos elementos auxiliares avaliados por:

$$\xi_0 = \xi^* \left\{ 1 + f^2 \left[-1 + \frac{d^*}{2} + \dots \right] \dots \right\}$$

$$a = f \left\{ \frac{1}{2} + \frac{d^*}{6} + \dots \right\}$$

$$b = f \left\{ \frac{1}{2} - \frac{d^*}{6} + \dots \right\}$$

$$g = \frac{1}{2\xi^*} \left\{ 1 - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{72} - \frac{d^{*3}}{432} + \dots + f^2 \left[\frac{3}{4} - \frac{65}{96} d^* \right] \dots \right\}$$

$$k^2 = f^2 \left\{ \frac{d^*}{12} \right\}$$

Levando tais elementos nas expressões dos coeficientes dos elementos de Sessin e Ferraz-Mello encontramos desenvolvimentos mais práticos que são definidos como se segue.

$$\psi^* = \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{27}}{4} \frac{D}{\sqrt{E^3}} \right]$$

$$\xi^* = 2\sqrt{\frac{E}{3}} \cdot \cos \frac{\psi^*}{3},$$

$$\xi^* = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$d^* = \frac{3D}{4E\xi^* + 3D}, \quad d^* = 0(\varepsilon^{1/3})$$

$$f^2 = \frac{2}{3}d^* \left\{ 1 + \frac{G}{\xi^*} - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{18} - \frac{d^{*3}}{54} \dots \right\}, \quad f = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$E = \xi^{*2} \left\{ 1 - \frac{2}{3}d^* - \frac{2}{9}d^{*2} - \frac{10}{27}d^{*2} \dots \right\}, \quad E = 0(\varepsilon^{4/3})$$

$$\xi = \sum_{j=0} \xi(j) \cdot \cos jV$$

$$\xi(0) = \xi^* \left\{ 1 + f^2 \left[-\frac{3}{4} + \frac{d^*}{4} \right] \dots \right\}$$

$$\xi(1) = -\xi^* f \left\{ 1 + f^2 \left[-\frac{13}{16} + \frac{13}{64}d^* \right] \dots \right\}$$

$$\xi(2) = \xi^* f^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{d^*}{12} \dots \right\}$$

$$\xi(3) = -\xi^* f^3 \left\{ \frac{1}{16} - \frac{7}{192}d^* \dots \right\}$$

$$H = \sum_{j=1} H(j) \cdot \text{sen } jV$$

$$H(1) = 2\xi^{*2} f \left\{ 1 + \frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{24} + \dots + f^2 \left[-\frac{25}{16} + \frac{25}{64}d^* \right] \dots \right\}$$

$$H(2) = -2\xi^{*2} f^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{d^*}{12} \dots \right\}$$

$$H(3) = 2\xi^{*2} f^3 \left\{ \frac{3}{16} - \frac{9}{64}d^* \dots \right\}$$

$$K = \sum_{j=0} K(j) \cdot \cos jV$$

$$K(0) = E - \xi^{*2} \left\{ 1 + f^2 \left[-1 + \frac{d^*}{3} \right] \dots \right\} = -\frac{2}{3}\xi^{*2}d^* \left\{ 1 + \frac{d^*}{3} + \frac{5}{9}d^{*2} \right\}$$

$$K(1) = \xi^{*2} f \left\{ 2 + f^2 \left[-\frac{23}{8} + \frac{29}{96}d^* \right] \dots \right\}$$

$$K(2) = -\xi^{*2} f^2 \left\{ 1 - \frac{d^*}{6} \dots \right\}$$

$$K(3) = \xi^{*2} f^3 \left\{ \frac{3}{8} - \frac{5}{32} d^* \dots \right\}$$

$$V_1' = V_{10} + V_1(0)V + \sum_{j=1} V_1(j) \cdot \text{sen } jV$$

$$V_1(0) = 1 - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{72} - \frac{d^{*3}}{432} + f^2 \left[-\frac{5}{16} d^* \right]$$

$$V_1(1) = -f \left\{ 1 - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{72} - \frac{d^{*3}}{432} + f^2 \left[-\frac{1}{6} - \frac{67}{192} d^* \right] \dots \right\}$$

$$V_1(2) = f^2 \left\{ \frac{1}{8} - \frac{d^*}{16} \dots \right\}$$

$$V_1(3) = -f^3 \left\{ \frac{1}{48} - \frac{d^*}{64} \dots \right\}$$

$$V = V(0)M$$

$$V(0) = 2\xi^* \left\{ 1 + \frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{24} + \frac{5}{432} d^{*3} + \dots + f^2 \left[-\frac{3}{4} + \frac{13}{32} d^* \right] \dots \right\}$$

$$\phi' = \ell + \sum_{m=1} \eta(m,0) \text{sen } mV$$

$$\eta(1,0) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[3 - \frac{d^*}{2} - \frac{11}{8} d^{*2} \dots \right]$$

$$\eta(2,0) = \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{9}{2} - \frac{15}{4} d^* - \frac{49}{16} d^{*2} \dots \right]$$

$$\eta(3,0) = \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[9 - \frac{45}{4} d^* - \frac{111}{16} d^{*2} + \frac{1053}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$\cos \phi' = \sum_{m=1} \eta(m,1) \text{sen } mV$$

$$\eta(1,1) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[3 - \frac{d^*}{2} - \frac{11}{8} d^{*2} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$\eta(2,1) = \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[\frac{9}{2} - \frac{15}{4}d^* - \frac{49}{16}d^{*2} - \frac{81}{8}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right]$$

$$\eta(3,1) = \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left[\frac{81}{8} - \frac{189}{16}d^* - \frac{537}{64}d^{*2} + \frac{6075}{128}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right]$$

A-5 Elementos auxiliares de desenvolvimento definidos sob as influências do equilíbrio instantâneo similar

Para tal estudo os correspondentes elementos originais tem seus valores descritos em termos dos elementos característicos ξ^*, d^*, f através das expressões:

$$\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} = \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{8}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right]$$

$$\frac{\sqrt{D}}{V(0)} = \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left[\frac{1}{2} - \frac{d^*}{12} - \frac{d^{*2}}{144} \dots \right]$$

$$\frac{D}{V^2(0)} = \frac{\xi^* d^*}{3} \left\{ 1 + f^2 \left[\frac{3}{2} - \frac{11}{12}d^* \dots \right] \dots \right\}$$

$$E = \xi^{*2} \left[1 - \frac{2}{3}d^* - \frac{2}{9}d^{*2} \right]$$

$$E\xi^* d^* = \frac{3}{4}D[1-d^*]$$

$$\frac{d\xi^*}{dE} = \frac{\xi^*}{2E} [1-d^*]$$

$$\frac{dd^*}{dE} = -\frac{3}{2}\left(\frac{d^*}{E}\right) \left[1 - \frac{4}{3}d^* + \frac{d^{*2}}{3} + \dots \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{1}{2Ef} \left\{ d^* \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3}d^* - \frac{2}{27}d^{*2} \dots \right] + f^2 \left[-2 + \frac{5}{3}d^* \dots \right] \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial G} = \frac{d^*}{3f\xi^*}$$

$$\frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right] = \frac{1}{\sqrt{D}} \left[1 - \frac{5}{6}d^* + \frac{d^{*2}}{6} - \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \left[1 + \Gamma_0 \text{sen}\phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial G} \left[\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right] = \frac{\xi^*}{\sqrt{D}} \left[2 - d^* + \frac{d^{*2}}{3} - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \left[1 + \Gamma_0 \text{sen}\phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{f}{d^*} \right] = \frac{1}{Ef} \left[\frac{1}{6} - \frac{d^*}{9} - \frac{d^{*2}}{27} \dots \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial G} \left[\frac{f}{d^*} \right] = \frac{1}{3f\xi^*}$$

Ressalte-se que a influência do vínculo do Equilíbrio Instantâneo Similar é definida através das características da constante de integração v_0 (4.58).

i) Elemento $\sqrt{-\frac{2v'_2}{X_{10}}}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{-\frac{2v'_2}{X_{10}}} &= \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} - 3 \left(\frac{f}{d^*} \right) \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left\{ \left[1 - \frac{d^*}{6} - \frac{11}{24}d^{*2} - \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos V + \right. \\ &+ \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[\frac{3}{4} - \frac{5}{8}d^* - \frac{49}{96}d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 2V + \\ &\left. + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{9}{8} - \frac{21}{16}d^* - \frac{179}{192}d^{*2} + \frac{675}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 3V \dots \right\} \end{aligned}$$

Tal elemento e suas derivadas são avaliadas em termos dos elementos característicos ξ^*, d^*, f através das expressões:

$$\begin{aligned} \sqrt{-\frac{2v'_2}{X_{10}}} &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{3}{2} + \frac{d^*}{2} + \frac{2}{3}d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos V + \right. \\ &+ \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[-\frac{9}{8} + \frac{9}{8}d^* + \frac{5}{8}d^{*2} + \frac{81}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 2V + \\ &\left. + \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[-\frac{27}{16} + \frac{9}{4}d^* + \frac{35}{32}d^{*2} - \frac{2025}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial E} \left[\sqrt{-\frac{2v'_2}{X_{10}}} \right] \right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \left\{ \left[1 - \frac{5}{6}d^* + \frac{d^{*2}}{6} - \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{d^*}{f} \right) \left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{27}d^{*2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos V + \left[-\frac{1}{2} + \frac{d^*}{3} + \frac{7}{18}d^{*2} + \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{9}{8} + \frac{9}{8}d^* + \frac{53}{48}d^{*2} + \frac{1125}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \right\}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_0} \left[\sqrt{-\frac{2v'_2}{X_{10}}} \right] \right) = \frac{1}{\sqrt{X_{10}}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial G} \left[\sqrt{-\frac{2v'_2}{X_{10}}} \right] \right) = \frac{\xi^*}{\sqrt{D}} \left\{ \left[2 - d^* + \frac{d^{*2}}{3} - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{d^*}{f} \right) \left[-\frac{2}{3} + \frac{8}{27}d^{*2} + \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos V + \left[-1 + \frac{2}{3}d^* + \frac{7}{9}d^{*2} + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{9}{4} + \frac{9}{4}d^* + \frac{53}{24}d^{*2} + \frac{1125}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[\sqrt{-\frac{2v'_2}{X_{10}}} \right] = \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left\{ \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[\frac{3}{2} - \frac{d^*}{2} - \frac{2}{3}d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \text{sen} V + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{9}{4} - \frac{9}{4}d^* - \frac{5}{4}d^{*2} - \frac{81}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \text{sen} 2V + \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[\frac{81}{16} - \frac{27}{4}d^* - \frac{105}{32}d^{*2} + \frac{6075}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \text{sen} 3V + \dots \right\}$$

ii) Elemento $\frac{v'_2}{X_{10}}$.

$$\frac{v'_2}{X_{10}} = \sum_{j=0} v'_2(j) \cos jV$$

$$v'_2(0) = - \left[\frac{v_0^2}{2X_{10}} + \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \frac{D}{V^2(0)} \left[1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9}d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
 v'_2(1) &= 3 \left(\frac{f}{d^*} \right) \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left\{ \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \left[1 - \frac{d^*}{6} - \frac{11}{24} d^{*2} - \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4} d^* - \frac{3}{4} d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right\} \\
 v'_2(2) &= 3 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left\{ \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \left[\frac{3}{4} - \frac{5}{8} d^* - \frac{49}{96} d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{4} \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left[1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9} d^{*2} \dots \right] \right\} \\
 v'_2(3) &= 3 \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left\{ \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \left[\frac{9}{8} - \frac{21}{16} d^* - \frac{179}{192} d^{*2} - \frac{675}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4} d^* - \frac{3}{4} d^{*2} - \frac{81}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Tal elemento e suas derivadas são avaliadas em termos dos elementos característicos ξ^*, d^*, f através das expressões:

$$\begin{aligned}
 \frac{v'_2}{X_{10}} &= -\xi^* \cdot d^* \left\{ \left[\frac{1}{6} + \frac{d^*}{18} + \frac{d^{*2}}{54} + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \dots \right] - \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} + \dots \right] \cos V + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{d^*}{4} - \frac{d^{*2}}{12} \right] \cos 2V - \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[\frac{d^{*2}}{48} + \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \right\} \\
 \left(\frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{v'_2}{X_{10}} \right] \right) &= \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[\left[-\frac{3}{4} + \frac{d^*}{2} + \frac{5}{36} d^{*2} + \frac{27}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \left[\Gamma_0 \cdot \text{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \right] + \left(\frac{d^*}{f} \right) \left[\frac{1}{6} - \frac{2}{27} d^{*2} + \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos V + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{d^*}{12} + \frac{d^{*2}}{36} + \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[\frac{d^{*2}}{96} + \frac{2691}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial G} \left[\frac{v'_2}{X_{10}} \right] \right) &= \left[\left[-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}d^* + \frac{5}{18}d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right. \\ &+ \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \left[\Gamma_0 \cdot \text{sen}\phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] + \left(\frac{d^*}{f} \right) \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{27}d^{*2} + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos V + \\ &+ \left[-\frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{18} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[\frac{d^{*2}}{48} + \frac{2691}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 3V \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} \left[\frac{v'_2}{X_{10}} \right] \right) &= \frac{1}{\xi^*} \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \left\{ \left[-\frac{1}{2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right. \\ &+ \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[\frac{3}{2} - \frac{d^*}{2} - \frac{2}{3}d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos V + \\ &+ \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{9}{8} - \frac{9}{8}d^* - \frac{5}{8}d^{*2} - \frac{81}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 2V + \\ &+ \left. \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[\frac{27}{16} - \frac{9}{4}d^* - \frac{35}{32}d^{*2} + \frac{2025}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 3V + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{v'_2}{X_{10}} \right] &= \xi^* \cdot d^* \left\{ \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-1 + \frac{4}{9} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \text{sen}V + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{d^*}{2} - \frac{d^{*2}}{6} \right] \text{sen}2V + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[-1 - \frac{4455}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \text{sen}3V + \dots \right\} \end{aligned}$$

iii) Elemento $W' = \frac{v'_2}{X_{10}} \cdot \cos 2\alpha'$

$$W' = \sum_{j=0} W'(j) \cos jV$$

$$\begin{aligned} W'(0) &= \frac{v_0^2}{X_{10}} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{9}{2} - \frac{3}{2}d^* - 4d^{*2} \right] \right] + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \\ &\cdot \frac{D}{V^2(0)} \left[\frac{1}{2} - \frac{d^*}{6} - \frac{4}{9}d^{*2} - \frac{99}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3\left(\frac{f}{d^*}\right)^4 \cdot \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \left[\frac{81}{8} - \frac{189}{16} d^* - \frac{405}{64} d^{*2} + \frac{243}{32} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \\
 W'(1) = & \frac{v_0^2}{X_{10}} \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left[-\frac{27}{2} + \frac{27}{2} d^* + \frac{27}{4} d^{*2} \right] + 3\left(\frac{f}{d^*}\right) \cdot \\
 & \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left[-1 + \frac{d^*}{6} + \frac{11}{24} d^{*2} + \frac{45}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \\
 & + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \cdot \frac{D}{V^2(0)} \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4} d^* - \frac{3}{4} d^{*2} - \frac{243}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \\
 W'(2) = & \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left\{ \frac{v_0^2}{X_{10}} \left[\frac{9}{2} - \frac{3}{2} d^* - 4d^{*2} - \frac{81}{2} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \right. \\
 & + 3 \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \left[-\frac{3}{4} + \frac{5}{8} d^* + \frac{49}{36} d^{*2} + \frac{135}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \\
 & \left. + \frac{9}{2} \frac{D}{V^2(0)} \left[\frac{1}{2} - \frac{d^*}{6} - \frac{4}{9} d^{*2} \right] \right\} \\
 W'(3) = & \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left\{ \frac{v_0^2}{X_{10}} \left[\frac{27}{2} - \frac{27}{2} d^* - \frac{27}{4} d^{*2} - \frac{729}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + 3 \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right. \\
 & \left. \left[-\frac{45}{8} + \frac{57}{16} d^* + \frac{1295}{192} d^{*2} + \frac{9099}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{9}{2} \frac{D}{V^2(0)} \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4} d^* - \frac{3}{4} d^{*2} + \frac{27}{32} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Tal elemento e suas derivadas são avaliadas em termos dos elementos característicos ξ^*, d^*, f através das expressões:

$$\begin{aligned}
 W' = & \xi^* \cdot d^* \left\{ \left[\frac{1}{6} + \frac{d^*}{18} + \frac{d^{*2}}{54} \right] - \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} \right] \right\} \cos V + \\
 & + \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{d^*}{4} - \frac{17}{12} d^{*2} - \frac{27}{4} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*}\right)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{3}{2}d^* + \frac{131}{48}d^{*2} + \frac{8289}{128}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \} \\
 \left(\frac{\partial W'}{\partial E} \right) &= \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[\left[\frac{1}{4} - \frac{d^*}{2} + \frac{11}{36}d^{*2} - \frac{99}{32}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left[1 - 9\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9}d^{*2} \right] \right] \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial E} \cdot \left[\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \right] + \\
 & \left(\frac{d^*}{f} \right) \left[-\frac{1}{6} + \frac{2}{27}d^{*2} - \frac{3}{4}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos V + \left[\frac{1}{2} + \frac{d^*}{12} - \frac{17}{36}d^{*2} + \frac{27}{16}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \\
 \cos 2V &+ \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{3}{4}d^* + \frac{131}{96}d^{*2} + \frac{14463}{256}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \} \\
 \left(\frac{\partial W'}{\partial G} \right) &= \left\{ \left[\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}d^* + \frac{11}{18}d^{*2} - \frac{99}{16}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left[1 - 9\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9}d^{*2} \right] \right] \cdot \frac{\partial v_2(0)}{\partial G} \cdot \left[\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{v_2(0)}{4X_{20}} \right] \right] + \left(\frac{d^*}{f} \right) \\
 & \left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{27}d^{*2} - \frac{3}{2}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos V + \left[1 + \frac{d^*}{6} - \frac{17}{18}d^{*2} + \frac{27}{8}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \\
 \cos 2V &+ \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{3}{2}d^* + \frac{131}{48}d^{*2} + \frac{14463}{128}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \} \\
 \left(\frac{\partial W'}{\partial v_0} \right) &= \frac{1}{\xi^*} \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{27}{8}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \right. \\
 & + \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{3}{2} + \frac{d^*}{2} + \frac{2}{3}d^{*2} - \frac{81}{16}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos V + \\
 & + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{27}{8} - \frac{3}{8}d^* - \frac{27}{8}d^{*2} + \frac{405}{32}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \\
 & \left. \left[\frac{81}{16} - \frac{27}{4}d^* - \frac{349}{96}d^{*2} + \frac{5211}{256}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos 3V + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W'}{\partial V} = & \xi^* d^* \left\{ \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} \right] \text{sen} V + \right. \\ & + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[-3 - \frac{d^*}{2} + \frac{17}{6} d^{*2} + \frac{27}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \text{sen} 2V + \\ & \left. + \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[\frac{9}{2} d^* - \frac{131}{16} d^{*2} - \frac{24867}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \text{sen} 3V \dots \right\} \end{aligned}$$

iv) Elemento $H = \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \sqrt{-2v'_2} \cdot \cos \alpha'$

$$H = \sum_{j=1} H'(j) \text{sen} jk$$

$$\begin{aligned} H'(1) = & 3\sqrt{D} \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \left[1 - \frac{d^*}{6} - \frac{11}{24} d^{*2} - \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{3\sqrt{D}}{2V(0)} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4} d^* - \frac{3}{4} d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'(2) = & 3\sqrt{D} \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \left[\frac{3}{2} - \frac{5}{4} d^* - \frac{49}{48} d^{*2} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{3\sqrt{D}}{2V(0)} \left[1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9} d^{*2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'(3) = & 3\sqrt{D} \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left\{ \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \left[\frac{27}{8} - \frac{63}{16} d^* - \frac{179}{64} d^{*2} + \frac{2025}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{3\sqrt{D}}{2V(0)} \left[\frac{9}{4} - \frac{9}{4} d^* - \frac{9}{4} d^{*2} - \frac{243}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

Tal elemento e suas derivadas são avaliadas em termos dos elementos característicos ξ^*, d^*, f através das expressões:

$$\begin{aligned} H = & 2\xi^{*2} \cdot d^* \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[1 + \frac{d^*}{6} - \frac{29}{72} d^{*2} \dots \right] \text{sen} V + \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{d^*}{2} + \frac{d^{*2}}{12} \right] \right. \\ & \left. \text{sen} 2V + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{d^{*2}}{16} + \frac{4455}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \text{sen} 3V + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial E}\right) = \left(\frac{d^*}{f}\right) \left[\frac{1}{3} + \frac{d^*}{18} - \frac{29}{216} d^{*2} + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \text{sen} V + \left[-\frac{d^*}{3} + \frac{d^{*2}}{18} + \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \\ \cdot \text{sen} 2V + \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[\frac{d^{*2}}{16} + \frac{8073}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \text{sen} 3V + \dots$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial v_0}\right) = \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \left\{ \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[3 - \frac{d^*}{2} - \frac{11}{8} d^{*2} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \text{sen} V + \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right. \\ \left[\frac{9}{2} - \frac{15}{4} d^* - \frac{49}{16} d^{*2} - \frac{81}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \text{sen} 2V + \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \\ \left. \left[\frac{81}{8} - \frac{189}{64} d^* - \frac{537}{64} d^{*2} + \frac{6075}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \text{sen} 3V + \dots \right\}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial G}\right) = \xi^* \left\{ \left(\frac{d^*}{f}\right) \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{9} d^* - \frac{29}{108} d^{*2} + 3 \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \text{sen} V + \right. \\ \left. + \left[-\frac{2}{3} d^* + \frac{1}{9} d^{*2} + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \text{sen} 2V + \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[\frac{d^{*2}}{8} + \frac{8073}{64} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \text{sen} 3V + \dots \right\}$$

$$\frac{\partial H}{\partial V} = 2\xi^{*2} d^* \left\{ \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[1 + \frac{d^*}{6} - \frac{29}{72} d^{*2} \right] \cos V + \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[-d^* + \frac{d^{*2}}{6} \right] \cdot \cos 2V + \right. \\ \left. + \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left[\frac{3}{16} d^{*2} + \frac{13365}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \right\}$$

v) Elemento $K = \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \sqrt{-2v_2} \cdot \text{sen} \alpha'$

$$K = \sum_{j=0} K'(j) \cos jV$$

$$K'(0) = E - G^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right)^4 + \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right)^2 \left[G - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^2 \right. \\ \left. \left[\frac{3}{2} - \frac{d^*}{2} - \frac{4}{3} d^{*2} - \frac{81}{32} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \right] + \frac{27}{2} \left(\frac{f}{d^*}\right)^4 \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^3$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{9}{8} - \frac{21}{16}d^* - \frac{93}{64}d^{*2} \right] + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \cdot G. \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^2 \cdot \left[1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9}d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \\
& - \frac{81}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^4 \cdot \left[\frac{3}{8} - \frac{d^*}{4} - \frac{5}{8}d^{*2} - \frac{9}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \\
K'(1) = & 3 \left(\frac{f}{d^*} \right) \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right) \left[1 - \frac{d^*}{6} - \frac{11}{24}d^{*2} - \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \\
& \cdot \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^2 \left[\frac{9}{4} - \frac{9}{4}d^* - \frac{9}{4}d^{*2} - \frac{81}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \frac{27}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \\
& \cdot \frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^3 \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{4}d^* - \frac{31}{16}d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - 6 \left(\frac{f}{d^*} \right) \cdot G. \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right) \\
& \cdot \left[1 - \frac{d^*}{6} - \frac{11}{24}d^{*2} - \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \cdot G. \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^2 \\
& \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}d^* - \frac{3}{2}d^{*2} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - \frac{81}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^5 \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^4 \\
& \left[\frac{9}{8} - \frac{3}{2}d^* - \frac{7}{4}d^{*2} - \frac{219}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \\
K'(2) = & 3 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right) \left[\frac{3}{4} - \frac{5}{8}d^* - \frac{49}{96}d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \\
& \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^2 \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{d^*}{2} - \frac{4}{3}d^{*2} \right] + \frac{27}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^4 \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right) \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^3 \\
& \cdot \left[\frac{9}{4} - \frac{21}{8}d^* - \frac{93}{32}d^{*2} - \frac{513}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - 6 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \cdot G. \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right) \\
& \cdot \left[\frac{3}{4} - \frac{5}{8}d^* - \frac{49}{96}d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \cdot G. \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^2 \cdot \left[1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9}d^{*2} \right] \\
& - \frac{81}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^4 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{d^*}{3} - \frac{5}{6}d^{*2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K'(3) = & 3 \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right)^3 \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right) \left[\frac{9}{8} - \frac{21}{16} d^* - \frac{179}{32} d^{*2} + \frac{675}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \\
 & - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^2 \cdot \left[\frac{9}{4} - \frac{9}{4} d^* - \frac{9}{4} d^{*2} - \frac{243}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \frac{27}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \\
 & \left(\frac{v_0}{\sqrt{X_{10}}} \right) \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^3 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{d^*}{4} - \frac{31}{48} d^{*2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - 6 \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \cdot G \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right) \\
 & \cdot \left[\frac{9}{8} - \frac{21}{16} d^* - \frac{179}{192} d^{*2} + \frac{675}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \cdot G \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^2 \\
 & \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} d^* - \frac{3}{2} d^{*2} - \frac{81}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - \frac{81}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^5 \cdot \left(\frac{\sqrt{D}}{V(0)} \right)^4 \\
 & \left[\frac{9}{8} - \frac{3}{2} d^* - \frac{7}{4} d^{*2} - \frac{297}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Tal elemento e suas derivadas são avaliados em termos dos elementos característicos ξ^*, d^*, f através das expressões:

$$\begin{aligned}
 K = & -\frac{2}{3} \xi^{*2} d^* \left\{ \left[1 + \frac{d^*}{3} + \frac{19}{36} d^{*2} \right] - \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[3 - \frac{4}{3} d^{*2} \right] \right. \\
 \cos V = & \left. + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{3}{2} d^* - \frac{d^{*2}}{4} \right] \cos 2V - \left(\frac{f}{d^*} \right) \right. \\
 & \left. \left[\frac{27}{16} d^* + d^{*2} + \frac{4455}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cos 3V + \dots \right\} \\
 \left(\frac{\partial K}{\partial E} \right) = & \left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{6} d^* + \frac{5}{18} d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \\
 & + \left(\frac{d^*}{f} \right) \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{27} d^{*2} + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos V + \left[\frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{18} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 2V + \\
 & + \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[\frac{d^{*2}}{3} + \frac{2691}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial K}{\partial v_0}\right) &= \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \left\{ \left[-1 - \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[3 - \frac{4}{3} d^{*2} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos V + \right. \\ &+ \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[\frac{9}{4} - \frac{21}{8} d^* - d^{*2} - \frac{81}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \\ &\left. \left[\frac{27}{8} - 3d^* - \frac{53}{16} d^{*2} + \frac{2025}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \right\} \\ \left(\frac{\partial K}{\partial G}\right) &= \xi^* \left\{ \left[-1 + d^* - \frac{2}{9} d^{*2} + \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \right. \\ &+ \left(\frac{d^*}{f}\right) \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{18} d^{*2} + \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos V + \left[-\frac{2}{3} d^* + \frac{d^{*2}}{9} + \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 2V + \\ &+ \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[\frac{3}{8} d^* + \frac{d^{*2}}{24} + \frac{2691}{64} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos 3V + \dots \left. \right\} \\ \frac{\partial K}{\partial V} &= 2\xi^* d^* \left\{ \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[-1 + \frac{4}{9} d^{*2} \right] \cdot \text{sen} V + \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[d^* - \frac{d^{*2}}{6} \right] \text{sen} 2V + \right. \\ &+ \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left[-\frac{27}{16} d^* - d^{*2} - \frac{4455}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \text{sen} 3V + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

vi) Elemento ξ .

$$\xi = -G - \frac{v_2'}{X_{10}}$$

Tal elemento e suas derivadas são avaliados em termos dos elementos característicos ξ^*, d^*, f , através das expressões:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^* \left\{ 1 + d^* \left[\left(\frac{f}{d^*}\right) \left[-1 + \frac{4}{9} d^{*2} \right] \cos V + \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[\frac{d^*}{4} - \frac{d^{*2}}{12} \right] \cos 2V + \right. \right. \\ &+ \left.\left. \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left[-\frac{d^{*2}}{48} - \frac{513}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos 3V + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial E}\right) &= \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[\frac{3}{4} - \frac{d^*}{6} - \frac{5}{96} d^{*2} - \frac{27}{32} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \right. \\ &+ \left(\frac{d^*}{f}\right) \left[-\frac{1}{6} + \frac{2}{27} d^{*2} - \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos V + \\ &+ \left[\frac{d^*}{12} - \frac{d^{*2}}{36} - \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[-\frac{d^{*2}}{96} - \frac{2691}{256} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v_0}\right) &= \frac{1}{\xi^*} \sqrt{\frac{D}{X_{10}}} \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \right. \\ &+ \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[-\frac{3}{2} + \frac{d^*}{2} + \frac{2}{3} d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos V + \\ &+ \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[-\frac{9}{8} + \frac{9}{8} d^* + \frac{5}{8} d^{*2} + \frac{81}{32} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 2V + \\ &+ \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left[-\frac{27}{16} + \frac{9}{4} d^* + \frac{35}{32} d^{*2} + \frac{2025}{256} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 3V + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial G}\right) &= \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} d^* - \frac{5}{18} d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] + \\ &+ \left(\frac{d^*}{f}\right) \left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{27} d^{*2} - \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos V + \\ &+ \left[\frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{18} - \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \cos 2V + \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[-\frac{d^{*2}}{48} - \frac{2691}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cos 3V + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial V} &= \xi^* d^* \left\{ \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} \right] \text{sen} V + \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left[-\frac{d^*}{2} + \frac{d^{*2}}{6} \right] \text{sen} 2V + \right. \\ &+ \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left[\frac{d^{*2}}{16} + \frac{4455}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot \text{sen} 3V + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

A-6 Geratriz da Transformação

Para os valores dos elementos a seguir serão utilizados os elementos auxiliares:

$$b_1 = \frac{X_{10}}{A(4,0)} \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right]$$

$$b_2 = \frac{X_{10}}{A(4,0)} [A(5,2)]$$

$$A(j) = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{X_{10}}{A(4,0)} A(5,j,0)$$

$$B(j) = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{X_{10}}{A(4,0)} A(5,j,1)$$

Núcleo Principal da Geratriz da Transformação

Valores dos coeficientes $S(m,k)$ do núcleo S_0 (5.12).

$$S(0,1) = \xi^{*2} \cdot f \left\{ \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} \right] \cdot [b_1 - b_2] \right\}$$

$$S(0,2) = \xi^{*2} \cdot f \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{d^*}{8} + \frac{d^{*2}}{24} \right] \cdot b_1 + \left[\frac{3}{4} + \frac{d^*}{8} - \frac{17}{24} d^{*2} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\}$$

$$S(0,3) = \xi^{*2} \cdot f \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{144} + \frac{495}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_1 + \left[-\frac{d^*}{2} + \frac{131}{144} d^{*2} + \frac{2763}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\}$$

$$S(j,-3) = \xi^{*2} \cdot f \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[-\frac{9}{32} d^* - \frac{67}{384} d^{*2} - \frac{1485}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A(j) + \right.$$

$$\left. \left[\frac{9}{32} d^* + \frac{95}{768} d^{*2} - \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$S(j,-2) = \xi^{*2} \cdot f \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[d^* - \frac{d^{*2}}{3} \right] A(j)$$

$$S(j,-1) = \xi^{*2} \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-12 + \frac{21}{4} d^{*2} \right] \cdot A(j) - \left[d^* + \frac{d^{*2}}{6} \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 S(j,0) &= \xi^{*2} \cdot d^* \cdot \left[-\frac{2}{3} - \frac{4}{9}d^* - \frac{d^{*2}}{2} \right] [A(j) - B(j)] \\
 S(j,1) &= \xi^{*2} \cdot f \cdot \left\{ \left[-\frac{d^*}{12} - \frac{d^{*2}}{36} \right] \cdot A(j) - \left[1 + \frac{d^*}{6} - \frac{29}{72}d^{*2} \right] \cdot B(j) \right\} \\
 S(j,2) &= \xi^{*2} \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[\frac{d^*}{3} - \frac{d^{*2}}{27} \right] \cdot B(j) \\
 S(j,3) &= \xi^{*2} \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \cdot \left\{ \left[\frac{3}{64}d^* + \frac{113}{1536}d^{*2} - \frac{1485}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. \cdot A(j) - \left[\frac{9}{64}d^* + \frac{161}{1536}d^{*2} + \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}
 \end{aligned}$$

Valores das derivadas do Núcleo S_0 .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S_0}{\partial V} &= \frac{X_{10}}{V(0)} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} M(m,0) \cdot \cos mV \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot M(m,j) \cdot \cos [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\} \\
 M(1,0) &= \xi^* \cdot f \cdot \left\{ \left[1 - \frac{4}{9}d^{*2} \right] \cdot [b_1 - b_2] \right\} \\
 M(2,0) &= \xi^* \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right) \cdot \left\{ \left[-\frac{d^*}{4} + \frac{d^{*2}}{12} \right] \cdot b_1 + \left[\frac{3}{2} + \frac{d^*}{4} - \frac{17}{12}d^{*2} - \frac{27}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\} \\
 M(3,0) &= \xi^* \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \cdot \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{48} + \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{3}{2}d^* + \frac{131}{48}d^{*2} + \frac{8289}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\} \\
 M(-3,j) &= \xi^{*2} \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \cdot \left\{ \left[\frac{9}{16}d^* + \frac{19}{48}d^{*2} + \frac{1485}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A(j) - \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{9}{16}d^* + \frac{13}{48}d^{*2} - \frac{1485}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}
 \end{aligned}$$

$$M(-2, j) = \xi^{*2} \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-d^* + \frac{d^{*2}}{6} \right] A(j)$$

$$M(-1, j) = \xi^{*2} \cdot f \cdot \left\{ \left[2 + \frac{d^*}{6} - \frac{61}{72} d^{*2} \right] \cdot A(j) + \left[\frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{24} \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$M(0, j) = \xi^{*2} \cdot d^* \cdot \left[-\frac{2}{3} - \frac{2}{9} d^* - \frac{19}{54} d^{*2} \right] \cdot [A(j) - B(j)]$$

$$M(1, j) = \xi^{*2} \cdot f \cdot \left\{ \left[-\frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{24} \right] A(j) - \left[2 + \frac{d^*}{6} - \frac{61}{72} d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$M(2, j) = \xi^{*2} \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[d^* - \frac{d^{*2}}{6} \right] B(j)$$

$$M(3, j) = \xi^{*2} \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \cdot \left\{ \left[\frac{9}{16} d^* + \frac{13}{48} d^{*2} - \frac{1485}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \right.$$

$$\left. A(j) - \left[\frac{9}{16} d^* + \frac{19}{48} d^{*2} + \frac{1485}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial E} \right) = \frac{X_{10}}{V(0)} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} N(m, 0) \cdot \text{sen} mV + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot N(m, j) \cdot \text{sen} [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\}$$

$$N(1, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{d^*}{f} \right) \left[\frac{1}{6} - \frac{2}{27} d^{*2} + \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot [b_1 - b_2]$$

$$N(2, 0) = \frac{1}{\xi^*} \cdot \left\{ \left[-\frac{d^*}{24} + \frac{d^{*2}}{72} + \frac{9}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_1 + \left[\frac{1}{4} + \frac{d^*}{24} - \frac{17}{72} d^{*2} + \frac{27}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\}$$

$$N(3, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \cdot \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{288} + \frac{897}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_1 + \left[-\frac{d^*}{4} + \frac{131}{288} d^{*2} + \frac{4821}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\}$$

$$N(-3, j) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \cdot \left\{ \left[-\frac{19}{192} d^{*2} - \frac{2691}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A(j) + \left[\frac{13}{192} d^{*2} - \frac{2691}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$N(-2, j) = \left\{ \left[\frac{d^*}{12} - \frac{11}{144} d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . A(j) + \left[\frac{d^*}{4} - \frac{d^{*2}}{24} - \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . B(j) \right\}$$

$$N(-1, j) = \frac{1}{f} \left\{ \left[-2 + \frac{7}{8} d^{*2} - 9 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . A(j) + \left[-\frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{36} \right] . B(j) \right\}$$

$$N(0, j) = \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} d^* + \frac{19}{48} d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . [A(j) - B(j)]$$

$$N(1, j) = \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[-\frac{d^*}{72} - \frac{d^{*2}}{216} \right] . A(j) + \left[-\frac{1}{6} - \frac{d^*}{36} - \frac{29}{432} d^{*2} - \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . B(j) \right\}$$

$$N(2, j) = \left\{ \left[\frac{d^*}{12} + \frac{d^{*2}}{216} - \frac{3}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . A(j) + \left[\frac{d^*}{36} - \frac{11}{648} d^{*2} - \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . B(j) \right\}$$

$$N(3, j) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{13}{384} d^{*2} - \frac{2691}{512} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . A(j) + \left[-\frac{19}{384} d^{*2} - \frac{2691}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . B(j) \right\}$$

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right) = \frac{\sqrt{DX_{10}}}{V(0)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} P(m, 0) . senmV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} . \rho_{j0} . P(m, j) . sen[V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\}$$

$$P(1, 0) = \frac{1}{\xi^*} . \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{3}{2} - \frac{d^*}{2} - \frac{2}{3} d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . b_1 + \right. \\ \left. + \left[-\frac{3}{2} + \frac{d^*}{2} + \frac{2}{3} d^{*2} - \frac{81}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . b_2 \right\}$$

$$P(2, 0) = \frac{1}{\xi^*} . \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[\frac{9}{16} - \frac{9}{16} d^* - \frac{5}{16} d^{*2} - \frac{81}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . b_1 + \right. \\ \left. \left[\frac{27}{16} - \frac{3}{16} d^* - \frac{27}{16} d^{*2} + \frac{405}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . b_2 \right\}$$

$$P(3, 0) = \frac{1}{\xi^*} . \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left\{ \left[\frac{9}{16} - \frac{3}{4} d^* - \frac{35}{96} d^{*2} + \frac{675}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] . b_1 + \right.$$

$$\left[\frac{27}{16} - \frac{9}{4}d^* - \frac{349}{288}d^{*2} + \frac{1737}{256}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot b_2 \left\{ \right.$$

$$P(-3,j) = \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left\{ \left[-\frac{27}{8} + \frac{453}{256}d^* + \frac{2869}{1024}d^{*2} - \frac{22275}{512}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot A(j) + \right.$$

$$\left. \left[-\frac{27}{16} + \frac{33}{256}d^* + \frac{1301}{1024}d^{*2} - \frac{10125}{512}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$P(-2,j) = \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left\{ \left[-\frac{27}{8} + \frac{15}{4}d^* + \frac{93}{64}d^{*2} + \frac{243}{32}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot A(j) + \right.$$

$$\left. \left[-\frac{9}{8} + \frac{3}{4}d^* + \frac{59}{64}d^{*2} + \frac{81}{32}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$P(-1,j) = \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[-18 + 3d^* + \frac{65}{8}d^{*2} + \frac{81}{4}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot A(j) + \left[\frac{3}{2}d^* \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$P(0,j) = \left[-1 - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{24} - \frac{9}{4}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot [A(j) - B(j)]$$

$$P(1,j) = \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[\frac{d^*}{8} + \frac{d^{*2}}{48} \right] \cdot A(j) + \left[-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}d^{*2} + \frac{27}{16}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$P(2,j) = \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left\{ \left[-\frac{3}{8} + \frac{d^*}{6} + \frac{17}{48}d^{*2} + \frac{27}{32}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot A(j) + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{9}{8} + d^* + \frac{77}{96}d^{*2} + \frac{81}{32}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$P(3,j) = \left(\frac{f}{d^*}\right)^3 \left\{ \left[-\frac{27}{32} - \frac{21}{512}d^* + \frac{2599}{4096}d^{*2} - \frac{10125}{1024}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot A(j) + \right.$$

$$\left. \left[-\frac{27}{16} + \frac{345}{512}d^* + \frac{6083}{4096}d^{*2} - \frac{22275}{1024}\left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot B(j) \right\}$$

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial G}\right) = X_{10} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} Q(m,0).senmV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot Q(m,j).sen[V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\}$$

$$Q(1,0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{d^*}{f}\right) \left\{ \left[\frac{1}{6} - \frac{d^*}{36} - \frac{11}{144} d^{*2} + \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] (b_1 - b_2) \right\}$$

$$Q(2,0) = \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[-\frac{d^*}{4} + \frac{d^{*2}}{48} + \frac{9}{32} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] b_1 + \left[\frac{1}{4} - \frac{35}{144} d^{*2} + \frac{27}{32} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$Q(3,0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{288} + \frac{897}{256} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] b_1 + \left[-\frac{d^*}{4} + \frac{143}{288} d^{*2} + \frac{4821}{256} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$Q(-3,j) = \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[-\frac{3}{64} d^* - \frac{7}{768} d^{*2} - \frac{2691}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{3}{64} d^* - \frac{17}{768} d^{*2} - \frac{2691}{256} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$Q(-2,j) = \left[\frac{d^*}{3} - \frac{d^{*2}}{6} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j)$$

$$Q(-1,j) = \left(\frac{1}{f}\right) \left\{ \left[-2 + \frac{d^*}{3} + \frac{59}{72} d^{*2} - \frac{153}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{36} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$Q(0,j) = \left[-\frac{1}{2} + \frac{d^*}{2} - \frac{5}{18} d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] [A(j) - B(j)]$$

$$Q(1,j) = \left(\frac{d^*}{f}\right) \left\{ \left[-\frac{d^*}{72} - \frac{9}{32} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{1}{6} + \frac{31}{432} d^{*2} - \frac{51}{64} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$Q(2,j) = \left[-\frac{3}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^*}{9} - \frac{7}{162} d^{*2} - \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j)$$

$$Q(3,j) = \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[\frac{3}{128}d^* - \frac{d^{*2}}{768} - \frac{2691}{512} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) - \left[\frac{3}{128}d^* + \frac{11}{768}d^{*2} + \frac{2691}{256} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial V_{10}} = X_{10} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot T(m,j) \cdot \cos[V_1' + mV + \phi_{j0}]$$

$$T(-3,j) = \xi^* \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left\{ - \left[\frac{9}{64}d^* + \frac{49}{768}d^{*2} + \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{9}{64}d^* + \frac{59}{1536}d^{*2} - \frac{1485}{256} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$T(-2,j) = \xi^* \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[\frac{d^*}{4} - \frac{d^{*2}}{4} \right] A(j)$$

$$T(-1,j) = \xi^* \cdot \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[-6 + d^* + \frac{65}{24}d^{*2} \right] A(j) + \left[-\frac{d^*}{2} - \frac{5}{72}d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$T(0,j) = \xi^* \cdot d^* \left[-\frac{1}{3} - \frac{d^*}{6} - \frac{5}{24}d^{*2} \right] [A(j) - B(j)]$$

$$T(1,j) = \xi^* \cdot f \cdot \left\{ \left[-\frac{d^*}{24} - \frac{d^{*2}}{144} \right] A(j) + \left[-\frac{1}{2} + \frac{7}{36}d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$T(2,j) = \xi^* \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*}\right) \left[\frac{d^*}{6} - \frac{5}{108}d^{*2} \right] B(j)$$

$$T(3,j) = \xi^* \cdot f \cdot \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \left\{ \left[\frac{9}{128}d^* + \frac{77}{3072}d^{*2} - \frac{1485}{512} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{9}{128}d^* + \frac{125}{3072}d^{*2} + \frac{1485}{256} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j) \right\}$$

A-7 Parênteses de Poisson dos elementos característicos

i) Elemento $\sqrt{\frac{-2v'_2}{X_{10}}}$

$$\left\{ \sqrt{\frac{-2v'_2}{X_{10}}}, S_0 \right\} = \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot C(m,j) \cdot \cos [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\}$$

$$C(0,0) = \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[\frac{1}{4} - \frac{d^*}{12} - \frac{2}{9}d^{*2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_1 + \left[-\frac{1}{4} + \frac{d^*}{12} + \frac{2}{9}d^{*2} - \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\}$$

$$C(1,0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{9}{8} + \frac{21}{16}d^* + \frac{211}{192}d^{*2} + \frac{675}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_1 + \left[\frac{3}{2} - \frac{41}{32}d^* - \frac{53}{32}d^{*2} - \frac{405}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\}$$

$$C(2,0) = \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[-\frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_1 + \left[-\frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\}$$

$$C(3,0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{192} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_1 + \left[-\frac{5}{32}d^* + \frac{5}{96}d^{*2} - \frac{27}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot b_2 \right\}$$

$$C(-3,j) = \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{5}{64}d^{*2} - \frac{567}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^{*2}}{6} \right] B(j) \right\}$$

$$C(-2,j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-\frac{d^*}{8} + \frac{5}{48}d^{*2} - \frac{27}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^*}{8} - \frac{d^{*2}}{288} \right] B(j) \right\}$$

$$C(-1,j) = \frac{1}{f} \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{72} - 18 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^{*2}}{72} \right] B(j) \right\}$$

$$C(0,j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[3 - d^* - \frac{5}{2}d^{*2} + \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{149}{288}d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$C(1,j) = \frac{1}{f} \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{72} + \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^{*2}}{72} \right] B(j) \right\}$$

$$C(2,j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{48} + \frac{243}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^{*2}}{48} \right] B(j) \right\}$$

$$C(3,j) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{3}{64} d^* - \frac{41}{2304} d^{*2} + \frac{135}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{305}{2304} d^{*2} + \frac{27}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

ii) Elemento $\frac{v'_2}{X_{10}}$

$$\left\{ \frac{v'_2}{X_{10}}, S_0 \right\} = \xi^* d^* \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} D(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot D(m,j) \cdot \cos [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\}$$

$$D(0,0) = \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[-\frac{1}{6} + \frac{4}{27} d^{*2} - \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot [b_1 - b_2] \right\}$$

$$D(1,0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{5}{4} - \frac{19}{24} d^* - \frac{d^{*2}}{2} - \frac{135}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_1 + \left[-\frac{3}{2} + \frac{11}{16} d^* + \frac{5}{6} d^{*2} + \frac{31}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$D(2,0) = \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[-\frac{1}{12} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_1 + \left[\frac{47}{24} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$D(3,0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{27}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_1 + \left[\frac{63}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$D(-3,j) = \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{81}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^{*2}}{8} \right] B(j) \right\}$$

$$D(-2,j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{36} \right] A(j) + \left[-\frac{17}{432} d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$D(-1,j) = \frac{1}{f} \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{108} + 15 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^{*2}}{108} \right] B(j) \right\}$$

$$D(0,j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-2 + \frac{2}{3}d^* + \frac{19}{9}d^{*2} - 27 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{161}{432}d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$D(1,j) = \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[-\frac{d^*}{108} - \frac{7}{1296}d^{*2} + \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^*}{108} + \frac{7}{1296}d^{*2} - 2 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$D(2,j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[\frac{5}{144}d^{*2} - \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{5}{144}d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$D(3,j) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{d^*}{24} + \frac{d^{*2}}{432} - \frac{29}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^*}{24} + \frac{103}{864}d^{*2} - \frac{905}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

iii) Elemento Z'

$$\{Z', S_0\} = \xi^* \cdot d^* \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} E(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot E(m,j) \cdot \cos [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\}$$

$$E(m,0) = D(m,0) \quad m = 0, 1, 2, 3$$

$$E(m,j) = D(m,j) \quad m = -3, -2$$

$$E(-1,j) = \left(\frac{1}{f} \right) \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{108} + 9 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^{*2}}{108} \right] B(j) \right\}$$

$$E(0,j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-2 + \frac{d^*}{3} + \frac{35}{18}d^{*2} \right] A(j) + \left[\frac{d^*}{3} - \frac{89}{432}d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$E(1,j) = \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[-\frac{d^*}{108} - \frac{7}{1296}d^{*2} + \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^*}{108} + \frac{7}{1296}d^{*2} - \frac{5}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$E(m,j) = D(m,j) \quad m = 2, 3$$

iv) Elemento H

$$\{H, S_0\} = \xi^* d^* \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} H^+(m, 0) \cdot \text{sen} mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot H^+(m, j) \cdot \text{sen} [V_1' + mV + \phi_{j0}] \right\}$$

$$H^+(1, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{d^*}{4} - \frac{d^{*2}}{24} - \frac{153}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_1 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2} - \frac{d^*}{6} - \frac{29}{48} d^{*2} + \frac{405}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$H^+(2, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[-\frac{5}{18} d^{*2} - 48 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_1 + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{3}{4} d^* + \frac{2}{3} d^{*2} + \frac{1257}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$H^+(3, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left\{ \left[\frac{-81}{32} \right] b_1 + \left[\frac{117}{32} d^* \right] b_2 \right\}$$

$$H^+(-3, j) = \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{12} + \frac{81}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^{*2}}{4} \right] B(j) \right\}$$

$$H^+(-2, j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[\frac{37}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 d^* \right] A(j) + \left[-\frac{5}{216} d^{*2} - \frac{39}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 d^* \right] B(j) \right\}$$

$$H^+(-1, j) = \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[\frac{d^*}{54} + \frac{d^{*2}}{72} - \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^*}{54} - \frac{d^{*2}}{72} + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$H^+(0, j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-4 + \frac{121}{36} d^{*2} - 57 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{2}{3} d^* - \frac{53}{216} d^{*2} - 3 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$H^+(1, j) = \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[-\frac{d^*}{54} - \frac{d^{*2}}{72} + \frac{5}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^*}{54} + \frac{d^{*2}}{72} + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$H^+(2, j) = \left[\frac{d^*}{36} + \frac{d^{*2}}{54} - \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{35}{216} d^{*2} \right] B(j)$$

$$H^+(3, j) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{d^*}{12} + \frac{d^{*2}}{54} - \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^*}{12} - \frac{d^{*2}}{54} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

v) Elemento K

$$\{K, S_0\} = \xi^* d^* \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} K^+(m, 0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot K^+(m, j) \cdot \cos [V'_1 + mV + \phi_{j0}] \right\}$$

$$K^+(0, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left[-\frac{1}{3} + \frac{8}{27} d^{*2} - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot [b_1 - b_2]$$

$$K^+(1, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{3}{2} - \frac{13}{12} d^* - \frac{37}{36} d^{*2} - \frac{117}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_1 + \right.$$

$$\left. + \left[-2 + \frac{13}{12} d^* + \frac{61}{36} d^{*2} - \frac{63}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$K^+(2, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[-\frac{37}{32} d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_1 + \left[\frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 + \frac{13}{12} d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$K^+(3, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{2}{3} d^* - \frac{63}{32} d^{*2} - \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_1 + \left[\frac{2}{3} d^* + \frac{117}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$K^+(-3, j) = \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{35}{48} d^{*2} - \frac{81}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{3}{16} d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$K^+(-2, j) = \frac{1}{d^*} \cdot \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{9} + \frac{27}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{41}{216} d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$K^+(-1, j) = \frac{1}{f} \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{54} + 18 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^{*2}}{54} \right] B(j) \right\}$$

$$K^+(0, j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-4 + \frac{32}{9} d^{*2} - \frac{189}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{17}{216} d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$K^+(1, j) = \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[\frac{d^*}{54} - \frac{d^{*2}}{72} + \frac{23}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^*}{54} + \frac{d^{*2}}{72} - \frac{3}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$K^+(2, j) = \left[\frac{d^*}{6} + \frac{2}{27} d^{*2} - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{d^*}{6} - \frac{2}{9} d^{*2} + \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B(j)$$

$$K^+(3, j) = \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[\frac{d^*}{48} + \frac{103}{864} d^{*2} - \frac{9}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \right. \\ \left. + \left[\frac{23}{48} d^* - \frac{31}{864} d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j) \right\}$$

vi) Elemento α'

$$\{\alpha', S_0\}_{\phi'=\ell} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(m, 0) \cdot \text{sen} mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot \rho_{j0} \cdot \alpha(m, j) \cdot \text{sen} [V'_1 + mV + \phi_{j0}]$$

$$\alpha(1, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[\frac{3}{8} d^* - \frac{3}{16} d^{*2} + \frac{189}{64} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] b_1 + \right. \\ \left. + \left[\frac{3}{4} - \frac{d^*}{2} + \frac{65}{96} d^{*2} + \frac{135}{64} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$\alpha(2, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left\{ \left[\frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] \cdot [b_1 - b_2] \right\}$$

$$\alpha(3, 0) = \frac{1}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[\frac{405}{64} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] b_1 + \left[-\frac{81}{64} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] b_2 \right\}$$

$$\alpha(-3, j) = \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*}\right) \left\{ \left[-\frac{3}{16} d^{*2} - \frac{567}{16} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{9}{16} d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$\alpha(-2, j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{12} - 27 \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{17}{144} d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

$$\alpha(-1, j) = \frac{1}{f} \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{36} \right] A(j) + \left[-\frac{d^{*2}}{36} \right] B(j) \right\}$$

$$\alpha(0, j) = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-6 + 2d^* + \frac{181}{8} d^{*2} - 72 \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] A(j) + \right. \\ \left. + \left[-d^* - \frac{5}{144} d^{*2} - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*}\right)^2 \right] B(j) \right\}$$

$$\alpha(1,j) = \frac{1}{f} \cdot \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{36} - 15 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^{*2}}{36} \right] B(j) \right\}$$

$$\alpha(2,j) = \frac{1}{d^*} \cdot \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{24} - \frac{81}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[\frac{d^{*2}}{12} \right] B(j) \right\}$$

$$\alpha(3,j) = \frac{1}{d^*} \cdot \left(\frac{f}{d^*} \right) \cdot \left\{ \left[\frac{3}{8} d^{*2} - 81 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A(j) + \left[-\frac{5}{16} d^{*2} \right] B(j) \right\}$$

APÊNDICE B

ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS DA SOLUÇÃO

Os elementos auxiliares definidos para as condições de ressonâncias exatas se escrevem:

$$a_{p0} = \frac{1}{\mu_p} \left(\frac{L_{p0}}{m_p} \right)^2$$

$$\alpha_{pq}^0 = \frac{\mu_q \cdot m_q'^2}{\mu_p \cdot m_p'^2} \left(\frac{L_{p0}}{L_{q0}} \right)^2$$

$$n_{q0} = \frac{c_q}{L_{q0}^3}$$

$$g_q = \frac{1}{4} \left(\frac{J_2}{\varepsilon} \right) \left(\frac{R_0}{a_{q0}} \right)^2$$

$$A_k^j = A_k^{(j)}(\alpha_{pq}^0) = \frac{\alpha_{pq}^k}{k!} \cdot \frac{d^k}{d\alpha_{pq}^k} \left[b_{1/2}^{(j)}(\alpha_{pq}) \right]_{\alpha_{pq} = \alpha_{pq}^0}$$

onde:

- i) L_{p0} e a_{p0} são respectivamente os valores dos elementos L_p e a_p para as condições de ressonâncias exatas.
- ii) As constantes μ_p, m_p', c_q -são definidas por (1.5).
- iii) R_0 é o raio equatorial do corpo central.
- iv) J_2 é o fator de achatamento do corpo central.
- v) $b_{1/2}^{(j)}(\alpha_{pq})$ é o coeficiente de Laplace associado ao elemento α_{pq} .
- vi) ε é o pequeno parâmetro convencionado.

Tabela 1 – Elementos característicos definidos para as condições de ressonâncias exatas

p	X_{p0} X_3	L_{p0} X_3	γ_p	ϵ_p
1	$\frac{\sqrt[3]{c_1}}{\Delta}$	$\frac{\sqrt[3]{c_1}}{\Delta}$	1	1
2	$\frac{2\sqrt[3]{c_1} + \sqrt[3]{2c_2}}{\Delta}$	$\frac{\sqrt[3]{2c_2}}{\Delta}$	$-2\left(\frac{X_{10}}{L_{20}}\right)$	$-3\left(\frac{X_{10}}{L_{20}}\right)$
3	1	$\frac{\sqrt[3]{4c_3}}{\Delta}$	—	$2\left(\frac{X_{10}}{L_{30}}\right)$

onde:

$$\Delta = 4\sqrt[3]{c_1} + 2\sqrt[3]{2c_2} + \sqrt[3]{4c_3}$$

Ressalte-se para o 4º satélite que:

$$L_4 = L_{40} = m'_4 \sqrt{\mu_4 \cdot a_4} = const$$

Tabela 2 – Coeficientes auxiliares das hamiltonianas

$$c(p, q, 0, 0) = \frac{1}{2} A_0^0$$

$$c(p, q, 0, 1) = A_1^0$$

$$c(p, q, 0, 2) = -[A_0^0 + A_1^0]$$

$$c(p, q, 1, 0) = \frac{1}{4} [A_1^0 + A_2^0]$$

$$c(p, q, 2, 0) = \frac{1}{2} [A_0^1 - A_1^1 - A_2^1]$$

$$c(p, q, 3, 0) = -\frac{1}{2} [4A_0^2 + A_1^2]$$

$$c(p, q, 4, 0) = \frac{1}{2} [3A_0^1 + A_1^1] - 2\alpha_{pq}^0 \left(\frac{K_p}{K'_p} \right)$$

$$c(p, q, 5, 0) = \frac{1}{4} [22A_0^4 + 7A_1^4 + A_2^4]$$

$$c(p, q, 6, 0) = -\frac{1}{2} [21A_0^3 + 7A_1^3 + A_2^3]$$

$$c(p, q, 7, 0) = \frac{1}{4} [19A_0^2 + 7A_1^2 + A_2^2]$$

Tabela 3 – Coeficientes da influência da comensurabilidade laplaciana

O elemento auxiliar $L(i, j)$ é definido por:

$$L(i, j) = -\frac{N(i, i + j)}{N(0, 1)}$$

com:

$$N(j, k) = (-1)^k \binom{k+2}{2} \binom{k}{j} \sum_{q=1}^3 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \cdot \gamma_q^j \cdot \varepsilon_q^{k-j+1} \quad (j \leq k)$$

$$g(0, 0) = 0$$

$$g(1, 0) = \frac{1}{2} + L(1, 0)$$

$$g(2, 0) = L(2, 0) + L(1, 0) [L(1, 1) + L(1, 0) \cdot L(0, 2)]$$

$$g(3, 0) = L(3, 0) + L(2, 0) [L(1, 1) + 2L(1, 0) \cdot L(0, 2)] + L(1, 0) \cdot [L(2, 1) + L^2(1, 1)] + L^2(1, 0) [L(1, 2) + 2L(1, 1) \cdot L(0, 2)] + L^3(1, 0) [L(0, 3) + 2L^2(0, 2)]$$

$$g(0, 1) = \frac{n_{20} \cdot X_{10}}{N(0, 1)}$$

$$g(1, 1) = g(0, 1) [L(1, 1) + 2L(1, 0) \cdot L(0, 2)]$$

$$g(2, 1) = g(0, 1) \{L(2, 1) + L^2(1, 1) + 2L(2, 0) \cdot L(0, 2) + 2L(1, 0) [L(1, 2) + 3L(1, 1) \cdot L(0, 2)] + 3L^2(1, 0) [L(0, 3) + 2L^2(0, 2)]\}$$

$$g(0, 2) = g^2(0, 1) \cdot L(0, 2)$$

$$g(1, 2) = g^2(0, 1) \{L(1, 2) + 3L(0, 2) \cdot L(1, 1) + 3L(1, 0) [L(0, 3) + 2L^2(0, 2)]\}$$

$$g(0, 3) = g^3(0, 1) [L(0, 3) + 2L^2(0, 2)]$$

Tabela 4 – Coeficientes da Hamiltoniana H^*

Os elementos auxiliares são definidos por:

$$d = 2 \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \cdot g(1, 0)$$

$$k(r, j) = \frac{(-1)^r}{2^{r+1}} (r+1) \cdot \binom{r}{j} \cdot \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right)^j \sum_{q=1}^3 \frac{c_q}{L_{q0}^2} (2\gamma_q - \varepsilon_q)^{r-j} \cdot \varepsilon_q^j$$

$$k(p, q, r, 0) = \left(\frac{K'_p}{\varepsilon} \right) c(p, q, r, 0)$$

$$k(p, q, r, 1) = \left(\frac{K'_p}{2\varepsilon} \right) \sum_{j=0}^1 c(p, q, r, j+1) \cdot (2\gamma_p - \varepsilon_p)^{1-j} \cdot (2\gamma_q - \varepsilon_q)^j$$

$$k(p, q, r, 2) = \left(\frac{K'_p}{2\varepsilon} \right) \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \sum_{j=0}^1 c(p, q, r, j+1) \varepsilon_p^{1-j} \cdot \varepsilon_q^j$$

$$G(1) = \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^3 \frac{c_q}{L_{q0}^2} k(p, q, 0, 1) - 6 \sum_{q=1}^3 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \mathfrak{G}_q \cdot (2\gamma_q - \varepsilon_q)$$

$$G(2) = \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^3 \frac{c_q}{L_{q0}^2} k(p, q, 0, 2) - 6 \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right) \sum_{q=1}^3 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \mathfrak{G}_q \cdot \varepsilon_q$$

$$G(q, 0) = H(q, 1, 0)$$

Os coeficientes da Hamiltoniana H^* (2.24) são dados por:

$$H(0, 0) = k(0, 0) + \frac{1}{2} \frac{c_4}{L_{40}^2}$$

$$H(3, 0) = \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{q=2}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} k(p, q, 0, 0) + 2 \sum_{q=1}^4 \frac{c_q}{L_{q0}^2} \mathfrak{G}_q$$

$$H(4, 0) = \sum_{j=0}^2 k(2, j) \cdot d^j$$

$$H(5, 0) = \sum_{j=0}^1 G(j+1) \cdot d^j$$

$$H(5, 1) = k(2, 2)$$

$$H(1, 1, 0) = \frac{1}{2} \left[k(1, 2, 1, 0) \cdot \left(\frac{L_{20}}{L_{10}} \right) + \frac{1}{2} k(1, 3, 1, 0) \cdot \left(\frac{L_{30}}{L_{10}} \right) + 2 \left(\frac{n_{40}}{n_{10}} \right) k(1, 4, 1, 0) \cdot \left(\frac{L_{40}}{L_{10}} \right) \right] + 3\mathfrak{G}_1$$

$$H(2, 1, 0) = k(1, 2, 1, 0) + \frac{1}{2} k(2, 3, 1, 0) \cdot \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right) + \left(\frac{n_{40}}{n_{20}} \right) k(2, 4, 1, 0) \cdot \left(\frac{L_{40}}{L_{20}} \right) + 3\mathfrak{G}_2$$

$$H(3, 1, 0) = k(1, 3, 1, 0) + k(2, 3, 1, 0) + \left(\frac{n_{40}}{n_{30}} \right) k(3, 4, 1, 0) \cdot \left(\frac{L_{40}}{L_{30}} \right) + 3\mathfrak{G}_3$$

$$H(4, 1, 0) = k(1, 4, 1, 0) + k(2, 4, 1, 0) + k(3, 4, 1, 0) + 3\mathfrak{G}_4$$

$$H(p, q, s, 0) = k(p, q, s, 0) \quad s = 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Tabela 5 – Coeficientes da Hamiltoniana do Sistema Auxiliar de Hori de identificação

p	C_{p1}	C_{p2}
1	$\frac{c_2}{L_{20}^2} \cdot H(1,2,3,0)$	—
2	$\frac{c_2}{L_{20}^2} \cdot H(1,2,4,0)$	$\frac{c_3}{L_{30}^2} \cdot H(2,3,3,0)$
3	—	$\frac{c_3}{L_{30}^2} \cdot H(2,3,4,0)$

O elemento característico D (3.9) é definido por:

$$D = \frac{\varepsilon^2}{H^2(4,0)} \cdot \sum_{j=1}^3 [C_{j1}^2 + 2C_{j1} \cdot C_{j2} \cdot \cos 2\ell + C_{j2}^2] \cdot \left(\frac{X_{10}}{L_{j0}} \right)$$

Tabela 6 – Coeficientes da Hamiltoniana $H /$

Os elementos auxiliares n_{j0} e γ_{j0} são dados por:

$$n_{j0} = \frac{c_j}{L_{j0}^3}$$

$$\gamma_{j0} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{D}} \left[\frac{C_{j1} - C_{j2}}{H(4,0)} \right] \cdot \sqrt{\frac{X_{10}}{L_{j0}}}$$

Os coeficientes da Hamiltoniana $H /$ (3.51) se escrevem:

$$A(0,0) = H(0,0)$$

$$A(3,0) = \varepsilon \cdot H(3,0)$$

$$A(4,0) = H(4,0)$$

$$A(5,0) = \varepsilon \cdot H(5,0)$$

$$A(5,1) = -2\varepsilon \left[\sum_{j=1}^3 n_{j0} \cdot \gamma_{j0}^2 \cdot H(j,1,0) + \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^3 n_{j0} \cdot \gamma_{i0} \cdot \gamma_{j0} \cdot \sqrt{\frac{L_{j0}}{L_{i0}}} \cdot H(i, j, 2, 0) \right]$$

$$A(5,2) = 2\varepsilon \sum_{j=i+1}^2 n_{j0} \cdot \left[\gamma_{i0}^2 \left(\frac{L_{j0}}{L_{i0}} \right) H(i, j, 5, 0) + \gamma_{i0} \cdot \gamma_{j0} \cdot \sqrt{\frac{L_{j0}}{L_{i0}}} \cdot H(i, j, 6, 0) + \gamma_{j0}^2 \cdot H(i, j, 7, 0) \right]$$

$$A(5,3) = H(5,1)$$

$$A(5,1,0) = \frac{\varepsilon}{4} \left\{ 2\gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot [H(3,1,0) - 2H(2,1,0)] - 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} \right.$$

$$\left. H(1,2,2,0) + \gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{10}}} \cdot H(1,3,2,0) + (\gamma_{20}^2 - \gamma_{30}^2) \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} \cdot H(2,3,2,0) \right\}$$

$$A(5,2,0) = \frac{\varepsilon}{2} \left\{ 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot [4H(1,1,0) - H(3,1,0)] + 2\gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} \right.$$

$$\left. H(1,2,2,0) + (\gamma_{30}^2 - \gamma_{10}^2) \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{10}}} \cdot H(1,3,2,0) - \gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} \cdot H(2,3,2,0) \right\}$$

$$A(5,3,0) = \varepsilon \left\{ 4\gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \cdot [H(2,1,0) - 2H(1,1,0)] + 2(\gamma_{10}^2 - \gamma_{20}^2) \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} \right.$$

$$\left. H(1,2,2,0) - \gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{10}}} \cdot H(1,3,2,0) + \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} \cdot H(2,3,2,0) \right\}$$

$$A(5,4,0) = \varepsilon \sum_{i=1}^4 \gamma_{i0} \cdot \sqrt{\frac{L_{40}}{L_{i0}}} \cdot H(i, 4, 2, 0)$$

$$A(5,1,1,0) = \frac{\varepsilon}{4} \left\{ 2\gamma_{30}^2 H(2,1,0) + \gamma_{20}^2 H(3,1,0) - \gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} \cdot H(2,3,2,0) \right\}$$

$$A(5,2,1,0) = \frac{\varepsilon}{2} \left\{ 4\gamma_{30}^2 H(1,1,0) + \gamma_{10}^2 H(3,1,0) - \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{10}}} \cdot H(1,3,2,0) \right\}$$

$$A(5,3,1,0) = 2\varepsilon \left\{ 2\gamma_{20}^2 H(1,1,0) + \gamma_{10}^2 H(2,1,0) - \gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} \cdot H(1,2,2,0) \right\}$$

$$A(5,4,1,0) = \varepsilon H(4,1,0)$$

$$A(5,1,2,2,0) = \frac{\varepsilon}{2} \left\{ -2\gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \cdot H(3,1,0) - 2\gamma_{30}^2 \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} \cdot H(1,2,2,0) + \right.$$

$$\left. + \gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{10}}} \cdot H(1,3,2,0) + \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} \cdot H(2,3,2,0) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 A(5,1,3,2,0) &= \varepsilon \left\{ -4\gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot H(2,1,0) + 2\gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} \cdot H(1,2,2,0) + \right. \\
 &\quad \left. -\gamma_{20}^2 \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{10}}} H(1,3,2,0) + \gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,2,0) \right\} \\
 A(5,1,4,2,0) &= \varepsilon \left\{ -\gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{40}}{L_{20}}} H(2,4,2,0) + \gamma_{20} \cdot \sqrt{\frac{L_{40}}{L_{30}}} H(3,4,2,0) \right\} \\
 A(5,2,3,2,0) &= \varepsilon \left\{ -8\gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot H(1,1,0) + 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} \cdot H(1,2,2,0) + \right. \\
 &\quad \left. +\gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{10}}} H(1,3,2,0) - \gamma_{10}^2 \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,2,0) \right\} \\
 A(5,2,4,2,0) &= \varepsilon \left\{ \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{40}}{L_{10}}} H(1,4,2,0) - \gamma_{10} \cdot \sqrt{\frac{L_{40}}{L_{30}}} H(3,4,2,0) \right\} \\
 A(5,3,4,2,0) &= \varepsilon \left\{ -\gamma_{20} \cdot \sqrt{\frac{L_{40}}{L_{10}}} H(1,4,2,0) + \gamma_{10} \cdot \sqrt{\frac{L_{40}}{L_{20}}} H(2,4,2,0) \right\} \\
 A(5,1,1) &= -\frac{\varepsilon}{4} \left\{ 2\gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot \left[2H(1,2,7,0) + \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right) H(2,3,5,0) - 2H(2,3,7,0) \right] + \right. \\
 &\quad \left. 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} H(1,2,6,0) + (\gamma_{30}^2 - \gamma_{20}^2) \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,6,0) \right\} \\
 A(5,2,1) &= -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ 4\gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot \left[H(2,3,7,0) - \left(\frac{L_{20}}{L_{10}} \right) H(1,2,5,0) \right] - 2\gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} H(1,2,6,0) + \gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,6,0) \right\} \\
 A(5,3,1) &= -\varepsilon \left\{ 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \cdot \left[2 \left(\frac{L_{20}}{L_{10}} \right) H(1,2,5,0) - 2H(1,2,7,0) - \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right) H(2,3,5,0) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2(\gamma_{20}^2 - \gamma_{10}^2) \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} H(1,2,6,0) - \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,6,0) \right\} \\
 A(5,1,1,1) &= \frac{\varepsilon}{4} \left\{ -\gamma_{30}^2 \left[2H(1,2,7,0) + \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right) H(2,3,5,0) \right] - \gamma_{20}^2 H(2,3,7,0) + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \cdot \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,6,0) \right\}
 \end{aligned}$$

$$A(5,2,1,1) = -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ 2\gamma_{30}^2 \left(\frac{L_{20}}{L_{10}} \right) H(1,2,5,0) + \gamma_{10}^2 \cdot H(2,3,7,0) \right\}$$

$$A(5,3,1,1) = \varepsilon \left\{ -2\gamma_{20}^2 \left(\frac{L_{20}}{L_{10}} \right) H(1,2,5,0) - \gamma_{10}^2 \cdot \left[2H(1,2,7,0) + \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right) H(2,3,5,0) \right] + 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} H(1,2,6,0) \right\}$$

$$A(5,1,2,2,1) = \frac{\varepsilon}{2} \left\{ 2\gamma_{30}^2 \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} H(1,2,6,0) + 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \cdot H(2,3,7,0) - \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,6,0) \right\}$$

$$A(5,1,3,2,1) = \varepsilon \left\{ 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \left[2H(1,2,7,0) + \left(\frac{L_{30}}{L_{20}} \right) H(2,3,5,0) \right] - 2\gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} H(1,2,6,0) - \gamma_{10} \cdot \gamma_{20} \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,6,0) \right\}$$

$$A(5,2,3,2,1) = \varepsilon \left\{ 4\gamma_{20} \cdot \gamma_{30} \left(\frac{L_{20}}{L_{10}} \right) H(1,2,5,0) - 2\gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \sqrt{\frac{L_{20}}{L_{10}}} H(1,2,6,0) + \gamma_{10}^2 \sqrt{\frac{L_{30}}{L_{20}}} H(2,3,6,0) \right\}$$

Ressalte-se para tais coeficientes a validade das relações que se seguem:

$$\sum_{j=1}^3 n_{j0} \cdot A(5, j, k) \cdot \gamma_{j0} = 0 \quad k=0,1$$

$$\sum_{j=1}^3 n_{j0} \cdot A(5, j, 1, k) \cdot \gamma_{j0}^2 + \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{j=2}^3 n_{j0} \cdot A(5, i, j, 2, k) \cdot \gamma_{i0} \gamma_{j0} = 0 \quad k=0,1$$

$$2n_{10} \cdot A(5,1,1,k) \cdot \gamma_{10} + n_{20} \cdot A(5,1,2,2,k) \cdot \gamma_{20} + n_{30} \cdot A(5,1,3,2,k) \cdot \gamma_{30} = 0 \quad k=0,1$$

$$2n_{20} \cdot A(5,2,1,k) \cdot \gamma_{20} + n_{20} \cdot A(5,1,2,2,k) \cdot \gamma_{10} + n_{30} \cdot A(5,2,3,2,k) \cdot \gamma_{30} = 0 \quad k=0,1$$

$$2n_{30} \cdot A(5,3,1,k) \cdot \gamma_{30} + n_{30} \cdot A(5,1,3,2,k) \cdot \gamma_{10} + n_{30} \cdot A(5,2,3,2,k) \cdot \gamma_{20} = 0 \quad k=0,1$$

$$\sum_{j=1}^3 A(5, j, 4, 2, 0) \cdot \gamma_{j0} = 0$$

Tabela 7 – Elementos característicos de Sessin e Ferraz-Mello definidos sob a condição $\alpha' = \phi'$

Os elementos auxiliares são definidos por:

$$\psi^* = \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{27} D}{4 \sqrt{E^3}} \right]$$

$$\xi^* = 2\sqrt{\frac{E}{3}} \cdot \cos \frac{\psi^*}{3}, \quad \xi^* = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$d^* = \frac{3D}{4E\xi^* + 3D}, \quad d^* = 0(\varepsilon^{1/3})$$

$$f^2 = \frac{2}{3}d^* \left\{ 1 + \frac{G}{\xi^*} - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{18} - \frac{d^{*3}}{54} \dots \right\}, \quad f = 0(\varepsilon^{2/3})$$

$$E = \xi^{*2} \left\{ 1 - \frac{2}{3}d^* - \frac{2}{9}d^{*2} - \frac{10}{27}d^{*3} \dots \right\}, \quad E = 0(\varepsilon^{4/3})$$

Tais elementos têm seus principais comportamentos avaliados por:

$$\xi = \sum_{j=0} \xi(j) \cdot \cos jV$$

$$\xi(0) = \xi^* \left\{ 1 + f^2 \left[-\frac{3}{4} + \frac{d^*}{4} \right] \right\}$$

$$\xi(1) = -\xi^* f \left\{ 1 + f^2 \left[-\frac{13}{16} + \frac{13}{64}d^* \right] \right\}$$

$$\xi(2) = \xi^* f^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{d^*}{12} \dots \right\}$$

$$\xi(3) = -\xi^* f^3 \left\{ \frac{1}{16} - \frac{7d^*}{192} \dots \right\}$$

$$H = \sum_{j=1} H(j) \cdot \text{sen} jV$$

$$H(1) = 2\xi^{*2} f \left\{ 1 + \frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{24} + \dots + f^2 \left[-\frac{25}{16} + \frac{25}{64}d^* \right] \dots \right\}$$

$$H(2) = -2\xi^{*2} f^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{d^*}{12} \dots \right\}$$

$$H(3) = 2\xi^{*2} f^3 \left\{ \frac{3}{16} - \frac{9}{64}d^* \dots \right\}$$

$$K = \sum_{j=0} K(j) \cdot \cos jV$$

$$K(0) = E - \xi^{*2} \left\{ 1 + f^2 \left[-1 + \frac{d^*}{3} \right] \dots \right\}$$

$$K(1) = \xi^{*2} f \left\{ 2 + f^2 \left[-\frac{23}{8} + \frac{29}{96} d^* \right] \dots \right\}$$

$$K(2) = -\xi^{*2} f^2 \left\{ 1 - \frac{d^*}{6} \dots \right\}$$

$$K(3) = \xi^{*2} f^3 \left\{ \frac{3}{8} - \frac{5}{32} d^* \dots \right\}$$

$$V_1' = V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + V_1(0) + \sum_{j=1} V_1(j) \cdot \text{sen} jV$$

$$V_1(0) = 1 - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{72} - \frac{d^{*3}}{432} + f^2 \left[-\frac{5}{16} d^* \right]$$

$$V_1(1) = -f \left\{ 1 - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{72} - \frac{d^{*3}}{432} + f^2 \left[-\frac{1}{6} - \frac{67}{192} d^* \right] \dots \right\}$$

$$V_1(2) = f^2 \left\{ \frac{1}{8} - \frac{d^*}{16} \dots \right\}$$

$$V_1(3) = -f^3 \left\{ \frac{1}{48} - \frac{d^*}{64} \dots \right\}$$

$$V = V(0)M$$

$$V(0) = 2\xi^* \left[1 + \frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{24} + \frac{5}{432} d^{*3} + f^2 \left[-\frac{3}{4} + \frac{13}{32} d^* \right] \dots \right]$$

$$v_2' = \sum_{j=0} v_2(j) \cos jV$$

$$v_2(0) = -X_{10} [\xi(0) + G]$$

$$v_2(j) = -X_{10} [\xi(j)]$$

$$\cos \alpha' = \sum_{j=1} \eta(j,1) \text{sen} jV$$

$$\eta(1,1) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[3 - \frac{d^*}{2} - \frac{11}{8} d^{*2} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$\eta(2,1) = \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{9}{2} - \frac{15}{4} d^* - \frac{49}{16} d^{*2} - \frac{81}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$\eta(3,1) = \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[\frac{81}{8} - \frac{189}{8} d^* - \frac{537}{64} d^{*2} + \frac{6075}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

Tabela 8 – Elementos característicos de Sessin e Ferraz-Mello definidos sob as influências do equilíbrio instantâneo similar

Tais elementos são originalmente definidos no Apêndice A-5 em termos do elemento auxiliar v_0 definido por:

$$\frac{v_0^2}{2} = -v_2(0) - 2X_{20}\Gamma_0^2 - v_2(0)\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 - \frac{v_2^2(0)}{8X_{20}}$$

onde:

$$v_2(0) = -X_{10} [\xi(0) + G]$$

é uma função das constantes de integração E e G .

Em termos dos elementos característicos ξ^* , d^* e f , suas expressões se escrevem:

$$\sqrt{\frac{-2v'_2}{X_{10}}} = \sum_{j=0} C(j) \cdot \cos jV$$

$$C(0) = \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$C(1) = \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{3}{2} + \frac{d^*}{2} + \frac{2}{3} d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$C(2) = \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[-\frac{9}{8} + \frac{9}{8} d^* + \frac{5}{8} d^{*2} + \frac{81}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$C(3) = \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[-\frac{27}{16} + \frac{9}{4} d^* + \frac{35}{32} d^{*2} - \frac{2025}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$\frac{v'_2}{X_{10}} = \sum_{j=0} v'_2(j) \cdot \cos jV$$

$$v'_2(0) = -\xi^* d^* \left[\frac{1}{6} + \frac{d^*}{18} + \frac{d^{*2}}{54} + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$v'_2(1) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} \right]$$

$$v'_2(2) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[-\frac{d^*}{4} + \frac{d^{*2}}{12} \right]$$

$$v'_2(3) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[\frac{d^{*2}}{48} + \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$\xi = \sum_{j=0} \xi'(j) \cdot \cos jV$$

$$\xi'(0) = \xi^*$$

$$\xi'(1) = \xi^* \cdot f \cdot \left[-1 + \frac{4}{9} d^{*2} \right]$$

$$\xi'(2) = \xi^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[\frac{d^*}{4} - \frac{d^{*2}}{12} \right]$$

$$\xi'(3) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[-\frac{d^{*2}}{48} - \frac{513}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$H = \sum_{j=1} H'(j) \cdot \text{sen } jV$$

$$H'(1) = 2\xi^{*2} d^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[1 + \frac{d^*}{6} - \frac{29}{72} d^{*2} \right]$$

$$H'(2) = 2\xi^{*2} d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[-\frac{d^*}{2} + \frac{d^{*2}}{12} \right]$$

$$H'(3) = 2\xi^{*2} d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[\frac{d^{*2}}{16} + \frac{4455}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$K = \sum_{j=0} K'(j) \cdot \cos jV$$

$$K'(0) = -\frac{2}{3} \xi^{*2} d^* \left[1 + \frac{d^*}{3} + \frac{19}{36} d^{*2} \right]$$

$$K'(1) = 2\xi^{*2} d^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} \right]$$

$$K'(2) = 2\xi^{*2} d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[-\frac{d^*}{2} + \frac{d^{*2}}{12} \right]$$

$$K'(3) = 2\xi^{*2} d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[\frac{9}{16} d^* + \frac{d^{*2}}{3} + \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$W' = \frac{v'_2}{X_{10}} \cdot \cos 2\alpha' = \sum_{j=0} W'(j) \cos jV$$

$$W'(0) = \xi^* d^* \left[\frac{1}{6} + \frac{d^*}{18} + \frac{1}{54} d^{*2} \dots \right]$$

$$W'(1) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-1 + \frac{4}{9} d^{*2} \right]$$

$$W'(2) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{d^*}{4} - \frac{17}{12} d^{*2} - \frac{27}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$W'(3) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left[-\frac{3}{2} d^* + \frac{131}{48} d^{*2} + \frac{8289}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$V'_1 = V_{10} + \Gamma_0 \cos \varphi_0 + V_1(0)V + \sum_{j=1} V_1(j) \text{sen} jV$$

$$V_1(0) = 1 - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{72} - \frac{d^{*3}}{432} + f^2 \left[-\frac{5}{16} d^* \right]$$

$$V_1(1) = -f \left[1 - \frac{d^*}{6} - \frac{d^{*2}}{72} - \frac{d^{*3}}{432} \right]$$

$$V_1(2) = f^2 \left[\frac{1}{8} - \frac{d^*}{16} \right]$$

$$V_1(3) = -f^3 \left[\frac{1}{48} - \frac{d^*}{64} \right]$$

$$V = V(0)M$$

$$V(0) = 2\xi^* \left[1 + \frac{d^*}{6} + \frac{d^{*2}}{24} + \frac{5}{432} d^{*3} + f^2 \left[-\frac{3}{4} + \frac{13}{32} d^* \right] \dots \right]$$

Tabela 9 – Coeficientes das equações variacionais dos sistemas livre e forçado

i) Coeficientes do Núcleo Variacional Livre

$$A^*(1,1) = X_{10} \left[n_{10} \cdot A(5,1,1,0) + n_{20} \cdot A(5,2,1,0) \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right)^2 - n_{20} \cdot A(5,1,2,2,0) \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right) \right]$$

$$A^*(1,3) = X_{10} \left[n_{30} \cdot A(5,1,3,2,0) + 2n_{20} \cdot A(5,2,1,0) \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right) - n_{20} \cdot A(5,1,2,2,0) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right) - n_{30} \cdot A(5,2,3,2,0) \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right) \right]$$

$$A^*(1,4) = X_{10} \left[n_{40} \cdot A(5,1,4,2,0) - n_{40} \cdot A(5,2,4,2,0) \left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}} \right) \right]$$

$$A^*(3,3) = X_{10} \left[n_{30} \cdot A(5,3,1,0) + n_{20} \cdot A(5,2,1,0) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right)^2 - n_{30} \cdot A(5,2,3,2,0) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right) \right]$$

$$A^*(3,4) = X_{10} \left[n_{40} \cdot A(5,3,4,2,0) - n_{40} \cdot A(5,2,4,2,0) \left(\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}} \right) \right]$$

$$A^*(4,4) = X_{10} [n_{40} \cdot A(5,4,1,0)]$$

ii) Coeficientes do Sistema Variacional Livre

O elemento auxiliar Z^{**} é definido de (6.10) por:

$$Z^{**} = -\frac{1}{2} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 = \text{const.}$$

$$P(1,1) = \frac{1}{X_{10}} \left[2A^*(1,1) \cdot [1 - \gamma_{10}^2] - A^*(1,3) \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \right] - 2 \frac{A(5,3)}{X_{20}} \cdot Z^{**}$$

$$P(1,3) = \frac{1}{X_{10}} \left[-2A^*(3,3) \cdot \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} + A^*(1,3) [1 - \gamma_{10}^2] \right]$$

$$P(1,4) = \frac{1}{X_{10}} \left[A^*(1,4) \cdot [1 - \gamma_{10}^2] - A^*(3,4) \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \right]$$

$$P(3,1) = \frac{1}{X_{10}} \left[-2A^*(1,1) \cdot \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} + [1 - \gamma_{30}^2] \cdot A^*(1,3) \right]$$

$$P(3,3) = \frac{1}{X_{10}} \left[2A^*(3,3) \cdot [1 - \gamma_{30}^2] - A^*(1,3) \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} \right] - 2 \frac{A(5,3)}{X_{20}} \cdot Z^{**}$$

$$P(3,4) = \frac{1}{X_{10}} \left[-A^*(1,4) \cdot \gamma_{10} \cdot \gamma_{30} + [1 - \gamma_{30}^2] A^*(3,4) \right]$$

$$P(4,1) = \frac{1}{X_{10}} [A^*(1,4)]$$

$$P(4,3) = \frac{1}{X_{10}} [A^*(3,4)]$$

$$P(4,4) = \frac{1}{X_{10}} [2A^*(4,4)] - 2 \frac{A(5,3)}{X_{20}} \cdot Z^{**}$$

iii) Coeficientes do Sistema Variacional Forçado

$$V(1,0) = \frac{A(5,0)}{X_{10}} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} d^* - \frac{5}{18} d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] +$$

$$A(5,1) \left[\frac{3}{2} - \frac{2}{3} d^* - \frac{5}{18} d^{*2} - \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] +$$

$$-A(5,2) \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} d^* + \frac{11}{18} d^{*2} - \frac{99}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$M(0,0) = \frac{A(4,0)}{X_{10}} + \frac{1}{\xi^*} \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right] \left[-\frac{3}{4} + \frac{d^*}{2} + \frac{5}{36} d^{*2} + \frac{27}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{[A(5,2)]}{\xi^*} \left[\frac{1}{4} - \frac{d^*}{2} + \frac{11}{36} d^{*2} - \frac{99}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right]$$

$$L = \frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) - A(5,2) \left[1 - 9 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[1 - \frac{d^*}{3} - \frac{8}{9} d^{*2} \dots \right] \right]$$

$$\frac{\partial v_2(0)}{\partial v_{10}} = -1 + \frac{d^*}{2} - \frac{d^{*2}}{6} + \dots$$

$$\frac{\partial v_2(0)}{\partial E} = \frac{X_{10}}{\xi^*} \left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{12} d^* - \frac{d^{*2}}{12} + \dots \right]$$

Tabela 10 – Coeficientes da solução do sistema variacional livre

Os elementos auxiliares são definidos por:

$$B(j,k) = -[P(1,k).P(j,1) + P(3,k).P(j,3) + P(4,k).P(j,4)]$$

$$\Delta_k = w_k^4 + [B(3,3) + B(4,4)]w_k^2 + [B(3,3).B(4,4) - B(3,4).B(4,3)]$$

cujo elemento w_k é definido por (6.26).

Os coeficientes (6.27) são avaliados por:

$$P(j,1,k) = -\frac{1}{w_k} \left\{ P(j,1) + \frac{P(j,3)}{\Delta_k} [-B(3,1)w_k^2 + [B(3,4).B(4,1) - B(3,1).B(4,4)]] + \right.$$

$$\left. + \frac{P(j,4)}{\Delta_k} [-B(4,1)w_k^2 + [B(3,1).B(4,3) - B(3,3).B(4,1)]] \right\}$$

$$Q(j,1,k) = -\frac{1}{w_k^2} \left\{ B(j,1) + \frac{B(j,3)}{\Delta_k} [-B(3,1)w_k^2 + [B(3,4).B(4,1) - B(3,1).B(4,4)]] + \right.$$

$$\left. + \frac{B(j,4)}{\Delta_k} [-B(4,1)w_k^2 + [B(3,1).B(4,3) - B(3,3).B(4,1)]] \right\}$$

Ressalte-se para os Satélites Galileanos de Júpiter que os valores de tais coeficientes satisfazem:

$$P(j,1,k) = Q(j,1,k)$$

onde:

$$Q(1,1,k) = +1$$

$$Q(3,1,k) = + \frac{1}{\Delta_k} \left[-B(3,1)w_k^2 + [B(3,4).B(4,1) - B(3,1).B(4,4)] \right]$$

$$Q(4,1,k) = + \frac{1}{\Delta_k} \left[-B(4,1)w_k^2 + [B(3,1).B(4,3) - B(3,3).B(4,1)] \right]$$

Tabela 11 – Principais comportamentos dos elementos característicos do movimento

Os elementos auxiliares são definidos por:

$$b_1 = \frac{X_{10}}{A(4,0)} \left[\frac{A(5,0)}{X_{10}} + A(5,1) \right]$$

$$b_2 = \frac{X_{10}}{A(4,0)} [A(5,2)]$$

$$A^*(k) = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \frac{X_{10}}{A(4,0)} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot C_j^k A(5, j, 0)$$

$$B^*(k) = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \frac{X_{10}}{A(4,0)} \sum_{j=1}^4 n_{j0} \cdot C_j^k A(5, j, 1)$$

i) Elemento $\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = \sum_{m=0}^{\infty} R^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 R^*(m,k) \cdot \text{sen} [V_1 + mV - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$$R^*(0,0) = \frac{\sqrt{D}}{\xi^{*2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{4} - \frac{d^*}{12} - \frac{2}{9} d^{*2} + \frac{9}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \frac{b_1}{\xi^{*2}} + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{1}{4} + \frac{d^*}{12} + \frac{2}{9} d^{*2} - \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{b_2}{\xi^{*2}} \right\}$$

$$R^*(1,0) = \frac{\sqrt{D}}{\xi^{*2}} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{3}{2} + \frac{d^*}{2} + \frac{2}{3} d^{*2} + \frac{27}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{9}{8} + \frac{21}{16} d^* + \frac{211}{192} d^{*2} + \frac{675}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \frac{b_1}{\xi^{*2}} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{3}{2} - \frac{41}{32} d^* - \frac{53}{32} d^{*2} - \frac{405}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{b_2}{\xi^{*2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 R^*(2,0) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[-\frac{9}{8} + \frac{9}{8}d^* + \frac{5}{8}d^{*2} + \frac{81}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] - \frac{9}{8} \frac{1}{\xi^*} (b_1 + b_2) \right\} \\
 R^*(3,0) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left[-\frac{27}{16} + \frac{9}{4}d^* + \frac{35}{32}d^{*2} - \frac{2025}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \right. \\
 &+ \left. \left[-\frac{d^{*2}}{192} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \frac{b_1}{\xi^*} + \left[-\frac{5}{32}d^* + \frac{5}{96}d^{*2} - \frac{27}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{b_2}{\xi^*} \right\} \\
 R^*(-3,k) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{5}{64}d^{*2} + \frac{567}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{d^{*2}}{6} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 R^*(-2,k) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \frac{1}{d^*} \left\{ \left[\frac{d^*}{8} - \frac{5}{48}d^{*2} + \frac{27}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{d^*}{8} + \frac{d^{*2}}{288} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 R^*(-1,k) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \frac{1}{d^*} \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{72} + 18 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^{*2}}{72} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 R^*(0,k) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-3 + d^* + \frac{5}{2}d^{*2} - \frac{27}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{149}{288}d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 R^*(1,k) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \frac{1}{d^*} \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{72} - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^{*2}}{72} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 R^*(2,k) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{48} - \frac{243}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^{*2}}{48} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 R^*(3,k) &= \frac{\sqrt{D}}{\xi^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{3}{64}d^* + \frac{41}{2304}d^{*2} - \frac{135}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \right. \\
 &+ \left. \left[-\frac{305}{2304}d^{*2} - \frac{27}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B^*(k) \right\}
 \end{aligned}$$

ii) Elemento $\frac{v_2}{X_{10}}$

$$\frac{v_2}{X_{10}} = \sum_{m=0}^{\infty} W^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 W^*(m,k) \cdot \text{sen} \left[V_1' + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^* \right]$$

$$W^*(0,0) = \xi^* d^* \left\{ - \left[\frac{1}{6} + \frac{d^*}{18} + \frac{d^{*2}}{54} + \frac{3}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \left[-\frac{1}{6} + \frac{4}{27} d^{*2} - \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \frac{b_1}{\xi^*} + \left[\frac{1}{6} - \frac{4}{27} d^{*2} + \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{b_2}{\xi^*} \right\}$$

$$W^*(1,0) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} \right] + \left[\frac{5}{4} - \frac{19}{24} d^* - \frac{d^{*2}}{2} - \frac{135}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{b_1}{\xi^*} + \left[-\frac{3}{2} + \frac{11}{16} d^* + \frac{5}{6} d^{*2} + \frac{31}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{b_2}{\xi^*} \right\}$$

$$W^*(2,0) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[-\frac{d^*}{4} + \frac{d^{*2}}{12} \right] + \left[-\frac{1}{12} \right] \frac{b_1}{\xi^*} + \left[\frac{47}{24} \right] \frac{b_2}{\xi^*} \right\}$$

$$W^*(3,0) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left\{ \left[\frac{d^*}{48} + \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \left[-\frac{27}{64} \right] \frac{b_1}{\xi^*} + \left[\frac{63}{64} \right] \frac{b_2}{\xi^*} \right\}$$

$$W^*(-3,k) = \xi^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{81}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^{*2}}{8} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$W^*(-2,k) = \xi^* \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{36} \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{17}{432} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$W^*(-1,k) = \xi^* \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{108} - 15 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{d^{*2}}{108} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$W^*(0,k) = \xi^* \left\{ \left[2 - \frac{2}{3} d^* - \frac{19}{9} d^{*2} + 27 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{161}{432} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$W^*(1,k) = \xi^* d^* \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[\frac{d^*}{108} + \frac{7}{1296} d^{*2} - \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{d^*}{108} - \frac{7}{1296} d^{*2} + 2 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$W^*(2,k) = \xi^* \left\{ \left[-\frac{5}{144} d^{*2} + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{5}{144} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$W^*(3,k) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{d^*}{24} - \frac{d^{*2}}{432} + \frac{29}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^*}{24} - \frac{103}{864} d^{*2} + \frac{965}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

iii) Elemento Z

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} Z^*(m,0) \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Z^*(m,k) \cdot \text{sen} \left[V_1' + mV - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^* \right]$$

$$Z^*(0,0) = \xi^* \left\{ -1 + d^* \left[-\frac{1}{6} + \frac{4}{27} d^{*2} - \frac{9}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{1}{\xi^*} (b_1 - b_2) \right\}$$

$$Z^*(1,0) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[1 - \frac{4}{9} d^{*2} \right] + \left[\frac{5}{4} - \frac{19}{24} d^* - \frac{d^{*2}}{2} - \frac{135}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{b_1}{\xi^*} + \left[-\frac{3}{2} + \frac{11}{16} d^* + \frac{5}{6} d^{*2} + \frac{31}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \frac{b_2}{\xi^*} \right\}$$

$$Z^*(2,0) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[-\frac{d^*}{4} + \frac{d^{*2}}{12} \right] + \left[-\frac{1}{12} \right] \frac{b_1}{\xi^*} + \left[\frac{47}{24} \right] \frac{b_2}{\xi^*} \right\}$$

$$Z^*(3,0) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{48} + \frac{513}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] + \left[-\frac{27}{64} \right] \frac{b_1}{\xi^*} + \left[\frac{63}{64} \right] \frac{b_2}{\xi^*} \right\}$$

$$Z^*(-3,k) = \xi^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{81}{8} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^{*2}}{8} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^*(-2,k) = \xi^* \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{36} \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{17}{432} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^*(-1,k) = \xi^* \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{108} - 9 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{d^{*2}}{108} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^*(0,k) = \xi^* \left\{ \left[2 - \frac{d^*}{3} - \frac{35}{18} d^{*2} \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{d^*}{3} + \frac{89}{432} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^*(1,k) = \xi^* d^* \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[\frac{d^*}{108} + \frac{7}{1296} d^{*2} - \frac{3}{4} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{d^*}{108} - \frac{7}{1296} d^{*2} + \frac{5}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^*(2,k) = \xi^* \left\{ \left[-\frac{5}{144} d^{*2} + \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{5}{144} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^*(3,k) = \xi^* d^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{d^*}{24} - \frac{d^{*2}}{432} + \frac{29}{32} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^*}{24} - \frac{103}{864} d^{*2} + \frac{965}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

iv) Elemento Z^*

$$Z^* = Z^{**}(0,0) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Z^{**}(m,k) \cdot \text{sen} [V_1 + mV - u_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$$Z^{**}(0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \sum_{j=1}^4 \rho_{j0}^2 = \text{const.}$$

$$Z^{**}(-3,k) = \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \xi^* f \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[\frac{9}{64} d^* + \frac{49}{768} d^{*2} + \frac{1485}{128} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \right. \\ \left. - \left[\frac{9}{64} d^* + \frac{59}{1536} d^{*2} - \frac{1485}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^{**}(-2,k) = \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \xi^* f \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{d^*}{4} + \frac{d^{*2}}{4} \right] \cdot A^*(k)$$

$$Z^{**}(-1,k) = \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \xi^* \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[6 - d^* - \frac{65}{24} d^{*2} \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^*}{2} + \frac{5}{72} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^{**}(0,k) = \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \xi^* d^* \left[\frac{1}{3} + \frac{d^*}{6} + \frac{5}{24} d^{*2} \right] \cdot [A^*(k) - B^*(k)]$$

$$Z^{**}(1,k) = \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \xi^* f \left\{ \left[\frac{d^*}{24} + \frac{d^{*2}}{144} \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{1}{2} - \frac{7}{36} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}$$

$$Z^{**}(2,k) = \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \xi^* f \left(\frac{f}{d^*} \right) \left[-\frac{d^*}{6} + \frac{5}{108} d^{*2} \right] \cdot B^*(k)$$

$$Z^{**}(3,k) = \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \xi^* f \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ - \left[\frac{9}{128} d^* + \frac{77}{3072} d^{*2} - \frac{1485}{512} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] A^*(k) + \right. \\ \left. \left[\frac{9}{128} d^* + \frac{125}{3072} d^{*2} + \frac{1485}{256} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] B^*(k) \right\}$$

v) Elemento α

$$\alpha = \ell + (-1)^n \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^*(m,0) \text{sen} mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \alpha^*(m,k) \cdot \text{cos} [V_1 + mV - u_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*] \right]$$

$$\alpha^*(1,0) = \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{3}{8} d^* - \frac{3}{16} d^{*2} + \frac{189}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \frac{b_1}{\xi^*} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{3}{4} \frac{d^*}{2} + \frac{65}{96} d^{*2} + \frac{135}{64} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot \frac{b_2}{\xi^*} \Big\} \\
 \alpha^*(2,0) & = \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \left\{ \left[\frac{27}{8} \right] \cdot \frac{b_1}{\xi^*} + \left[-\frac{27}{8} \right] \cdot \frac{b_2}{\xi^*} \right\} \\
 \alpha^*(3,0) & = \left(\frac{f}{d^*} \right)^3 \left\{ \left[\frac{405}{64} \right] \cdot \frac{b_1}{\xi^*} + \left[-\frac{81}{64} \right] \cdot \frac{b_2}{\xi^*} \right\} \\
 \alpha^*(-3,k) & = \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[-\frac{3}{16} d^{*2} - \frac{567}{16} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{9}{16} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 \alpha^*(-2,k) & = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{12} - 27 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{17}{144} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 \alpha^*(-1,k) & = \frac{1}{d^*} \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[\frac{d^{*2}}{36} \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{d^{*2}}{36} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 \alpha^*(0,k) & = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-6 + 2d^* + \frac{181}{8} d^{*2} - 72 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \right. \\
 & \left. + \left[-d^* - \frac{5}{144} d^{*2} - \frac{9}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 \alpha^*(1,k) & = \frac{1}{d^*} \left(\frac{d^*}{f} \right) \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{36} - 15 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^{*2}}{36} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 \alpha^*(2,k) & = \frac{1}{d^*} \left\{ \left[-\frac{d^{*2}}{24} - \frac{81}{2} \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[\frac{d^{*2}}{12} \right] \cdot B^*(k) \right\} \\
 \alpha^*(3,k) & = \frac{1}{d^*} \left(\frac{f}{d^*} \right) \left\{ \left[\frac{3}{8} d^{*2} - 81 \left(\frac{f}{d^*} \right)^2 \right] \cdot A^*(k) + \left[-\frac{5}{16} d^{*2} \right] \cdot B^*(k) \right\}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE C

APLICAÇÃO AO MOVIMENTO DOS SATÉLITES GALILEANOS DE JÚPITER

Não obstante o caráter de primeira aproximação, o estudo desenvolvido é aqui aplicado ao movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter, objetivando sua validação como um núcleo principal de tal movimento.

A utilização da referência Sato (1986) nas determinações dos coeficientes das Hamiltonianas e das características forçadas do movimento é neste estudo justificada por permitir a identificação de boas estimativas para os valores das integrais de Hori e G-Sessin na data considerada. O mesmo não se verifica para a referência Nasa (2007), visto que os semieixos maiores dos Satélites negligenciam as contribuições das dezena e unidade de quilômetros em seus correspondentes valores.

Com respeito às características livres do movimento, a referência Nasa (2007) permite a identificação de boas estimativas para as amplitudes e fases do Sistema Variacional Livre. A justificativa para o não uso da referência Sato (1986) é discutida na Seção [4.2] deste Apêndice.

1 Referência Sato (1986)

1 Elementos dos Satélites Galileanos de Júpiter

Este estudo toma por referência os elementos osculadores médios na data 28/4/1973 a 0^h T.E., os quais são definidos por Sato (1986) com respeito a um sistema jovicêntrico, cujo plano fundamental é o plano do Equador de Júpiter.

$$t_0 : J.E.D. 2.441.800,5$$

$$g^* m_0 : 9,4590265.10^{17} km^3 / dia^2$$

$$R_0 : 0,71420.10^5 km$$

$$J_2 : 1,48485.10^{-2}$$

p	m_p $10^{-6}m_0$	a_p $10^5 km$	e_p 10^{-3}	λ_p rad	ϖ_p rad
1	44,97	4,22059	4,0859	0,01729	0,96576
2	25,29	6,71315	9,4353	3,62718	4,08759
3	79,88	10,70700	0,6988	3,86046	2,16118
4	45,04	18,83282	7,5904	2,11143	5,85091

2 Elementos característicos definidos para as condições de ressonâncias exatas

Tabela 1

p	X_{p0} X_3	L_{p0} X_3	a_{p0} $10^5 km$	n_{p0} rad/dia
1	0,1214069	0,1214069	4,23177	3,53304
2	0,3288370	0,0860232	6,71748	1,76652
3	1	0,3423262	10,66353	0,88326
4	0,2565164	0,2565164	18,83282	0,37632

3 Coeficientes auxiliares das Hamiltonianas

Elementos Auxiliares de Desenvolvimento.

$p-q$	α_{pi}^0	A_0^0	A_0^1	A_0^2	A_0^3	A_0^4
1-2	0,6299624	2,26026	0,75680	0,36527	0,19386	0,10754
1-3	0,3968457	2,08658	0,42289	0,12677	0,04205	0,01460
1-4	0,2247024	2,02600	0,22909	-	-	-
2-3	0,6299491	2,26094	0,75677	0,36525	0,19383	0,10750
2-4	0,3566903	2,06861	0,37520	-	-	-
3-4	0,5662207	2,19777	0,65221	-	-	-
$p-q$		A_1^0	A_1^1	A_1^2	A_1^3	A_1^4
1-2		0,69667	1,10594	0,91959	0,68793	0,49160
1-3		0,19081	0,48084	-	-	-
1-4		0,05351	0,23816	-	-	-
2-3		0,69667	1,10595	0,91962	0,68800	0,49174
2-4		0,14840	0,41607	-	-	-
3-4		0,49340	0,87146	-	-	-
$p-q$		A_2^0	A_2^1	A_2^2	A_2^3	A_2^4
1-2		0,85350	0,80194	0,99584	1,04484	0,97345
1-3		0,13525	0,10041	-	-	-
1-4		0,02995	0,01422	-	-	-
2-3		0,85348	0,80190	0,99577	1,04465	0,97310
2-4		0,09830	0,06755	-	-	-
3-4		0,50451	0,45537	-	-	-

Tabela 2

$p-q$	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
$c(p,q,0,0)$	1,13068	1,04329	1,01300	1,13017	1,03430	1,09888
$c(p,q,0,1)$	0,69666	0,19081	-	0,69667	-	-
$c(p,q,0,2)$	-2,95702	-2,27789	-	-2,95701	-	-
$c(p,q,1,0)$	0,38754	0,08157	0,02086	0,38753	0,06167	0,24947
$c(p,q,2,0)$	-0,57533	-0,07918	-0,01164	-0,57554	-0,05421	-0,33731
$c(p,q,3,0)$	-1,19033	-	-	-1,19033	-	-
$c(p,q,4,0)$	0,42829	-	-	0,42832	-	-
$c(p,q,5,0)$	1,69513	-	-	1,69514	-	-
$c(p,q,6,0)$	-4,96570	-	-	-4,96564	-	-
$c(p,q,7,0)$	3,59327	-	-	3,59318	-	-

4 Coeficientes da influência da comensurabilidade laplaciana

Elementos Auxiliares de Desenvolvimento.

$$\begin{aligned}
 N(0,1) &= -46,233757 n_{20} X_{10} & L(0,0) &= 0 \\
 N(1,1) &= -31,403893 n_{20} X_{10} & L(1,0) &= -0,6992416 \\
 N(0,2) &= -307,66021 n_{20} X_{10} & L(1,1) &= -8,7866216 \\
 N(1,2) &= -406,23853 n_{20} X_{10} & L(2,0) &= -2,8423569 \\
 N(2,2) &= -131,41284 n_{20} X_{10} & L(0,2) &= -6,6544497
 \end{aligned}$$

Tabela 3

$$\begin{aligned}
 g(0,0) &= 0 \\
 g(0,1) &= -0,0216292 \\
 g(1,0) &= -0,1792416 \\
 g(1,1) &= -0,0054795 \\
 g(2,0) &= 0,0597242
 \end{aligned}$$

5 Coeficientes da Hamiltoniana H*

Elementos Auxiliares de Desenvolvimento.

$$\begin{aligned}
 k(0,0) &= 2,05919 n_{20} X_{10} \\
 k(2,0) &= 1,5452372 n_{20} X_{10} \\
 k(2,1) &= 11,2229095 n_{20} X_{10} \\
 k(2,2) &= 42,3978463 n_{20} X_{10}
 \end{aligned}$$

$p - q$	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
$k(p, q, 0, 0)$	1,01647	0,93833	0,91117	0,57164	0,53379	1,75713
$k(p, q, 0, 1)$	2,19003	0,81223	-	0,28174	-	-
$k(p, q, 0, 2)$	16,09883	-1,73515	-	-2,11022	-	-
$k(p, q, 1, 0)$	0,34855	0,07331	0,01892	0,19601	0,03147	0,40454
$k(p, q, 2, 0)$	-0,51763	-0,07121	-0,01059	-0,29110	-0,02770	-0,54872
$k(p, q, 3, 0)$	-1,07058	-	-	-0,60205	-	-
$k(p, q, 4, 0)$	0,38520	-	-	0,21664	-	-
$k(p, q, 5, 0)$	1,52459	-	-	0,85740	-	-
$k(p, q, 6, 0)$	-4,46615	-	-	-2,51162	-	-
$k(p, q, 7, 0)$	3,23178	-	-	1,81743	-	-

$$\begin{aligned}
 G(1) &= -15,24869 n_{20} X_{10} \\
 G(2) &= -27,24439 n_{20} X_{10}
 \end{aligned}$$

Tabela 4

$$H(0,0) = 2,28424 n_{20} X_{10}$$

$$H(3,0) = 14,97593 n_{20} X_{10}$$

$$H(4,0) = 0,802548 n_{20} X_{10}$$

$$H(5,0) = -11,64286 n_{20} X_{10}$$

$$H(5,1) = 42,39784 n_{20} X_{10}$$

$$H(1,1,0) = 6,52348$$

$$H(2,1,0) = 3,27620$$

$$H(3,1,0) = 1,39756$$

$$H(4,1,0) = 0,77524$$

$p - q$	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
$H(p, q, 2, 0)$	-0,51763	-0,07121	-0,01040	-0,29110	-0,02741	-0,53888
$H(p, q, 3, 0)$	-1,07058	-	-	-0,60205	-	-
$H(p, q, 4, 0)$	0,38520	-	-	0,21664	-	-
$H(p, q, 5, 0)$	1,52459	-	-	0,85740	-	-
$H(p, q, 6, 0)$	-4,46015	-	-	-2,51162	-	-
$H(p, q, 7, 0)$	3,23178	-	-	1,81743	-	-

6 Coeficientes da Hamiltoniana do Sistema Auxiliar de Hori

Tabela 5

p	$\frac{C_{p1}}{H(4,0)}$	$\frac{C_{p2}}{H(4,0)}$
1	-0,9451927	-
2	0,3400851	-1,057617
3	-	0,3805699

$$D = 3,7018333 \epsilon^2 \text{ com } \epsilon = 5.10^{-5}$$

7 Coeficientes da Hamiltoniana $H /$

Elementos Característicos de Desenvolvimento:

p	γ_{p0}
1	0,4912574
2	-0,8630126
3	0,1177944
4	–

Tabela 6

$$A(0,0) = 2,28424 n_{20} X_{10}$$

$$A(3,0) = 14,97593 n_{20} X_{10} \varepsilon$$

$$A(4,0) = 0,802548 n_{20} X_{10}$$

$$A(5,0) = -11,64282 n_{20} X_{10} \varepsilon$$

$$A(5,1) = -11,61847 n_{20} \varepsilon$$

$$A(5,2) = 11,59886 n_{20} \varepsilon$$

$$A(5,3) = 42,39784 n_{20} X_{10}$$

	$j = 0$ ε	$j = 1$ ε
$A(5,1,j)$	0,18118	-0,48955
$A(5,2,j)$	1,36390	-0,76526
$A(5,3,j)$	16,96266	-3,04629
$A(5,4,j)$	-0,02156	–
$A(5,1,1,j)$	0,26819	-0,24532
$A(5,2,1,j)$	0,35313	-0,23429
$A(5,3,1,j)$	20,64636	-0,80474
$A(5,4,1,j)$	0,77524	–
$A(5,1,2,2,j)$	0,58783	-0,67771
$A(5,1,3,2,j)$	-0,33449	-1,74558
$A(5,1,4,2,j)$	0,40815	–
$A(5,2,3,2,j)$	5,44572	-1,21333
$A(5,2,4,2,j)$	0,22736	–
$A(5,3,4,2,j)$	-0,03637	–

8 Solução do Sistema Auxiliar de Sessin e Ferraz-Mello

Esta identificação inicialmente requer a caracterização da região de integração da equação (4.17), tomando por referência modelo de Sessin e Ferraz-Mello (1984); estimativas (4.2) e os elementos osculadores médios na data considerada.

Observando de Sato (1986) que na data considerada o valor

$$\theta_1 - \theta_2 + 180^\circ = -5'53''$$

não corresponde a realidade do ângulo crítico laplaciano, assumiremos por estimativas dos elementos V_1, α, χ_j^* (4.27) e (4.28), as expressões:

$$V_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\alpha = -\cot^{-1} W^*$$

$$\chi_j^* = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \bar{w}_j$$

negligenciando para tais elementos as contribuições de ordens superiores ($O(\varepsilon^{2/3})$) associadas com a variação β e o parâmetro característico do movimento S .

i) Elementos Auxiliares da Data Considerada.

p	θ_p	χ_p^*	L_p X_3	$h_p^* / \sqrt{X_{10}}$ 10^{-3}	$k_p^* / \sqrt{X_{10}}$ 10^{-3}
1	-414 ^o ,65	-269 ^o ,27	0,1212464	-0,0520	-4,0855
2	-234 ^o ,55	-90 ^o ,40	0,0859954	-0,0554	7,9420
3	221 ^o ,18	-200 ^o ,77	0,3430233	-1,0972	-0,4161
4	120 ^o ,97	10 ^o ,62	0,2565164	10,8442	-2,0333

$$v_1 = -4,0935 \cdot 10^{-3} X_{10}$$

$$v_2 = -3,97 \cdot 10^{-5} X_{10}$$

$$W^* = -0,0120062$$

$$V_1 = -324^o,60$$

$$\sum_{j=1}^4 Y_j = -1,014 \cdot 10^{-4} X_{10}$$

$$\alpha = -90^o,69$$

- ii) Elementos de Sessin e Ferraz-Mello na Data Considerada.
Recorrendo-se a equação (4.29) encontramos:

$$\xi = 4,1949.10^{-3}$$

$$G = -4,1553.10^{-3}$$

$$H = -1,029.10^{-8}$$

$$K = -85,717.10^{-8}$$

de modo a caracterizar a integral primeira de Hori por:

$$E = 16,7407.10^{-6}$$

A identificação da região de integração também requer a determinação do elemento auxiliar:

$$E_3 = \frac{G^2}{3} - \frac{1}{3} \left\{ \sqrt[3]{\frac{27}{2} f^*(0) + \frac{3}{2} \sqrt{-3\Delta_E}} + \sqrt[3]{\frac{27}{2} f^*(0) - \frac{3}{2} \sqrt{-3\Delta_E}} \right\}$$

onde:

$$\Delta_E = 8D \left[G^3 - \frac{27}{32} D \right]^3$$

$$f^*(0) = - \left[\frac{2}{27} G^6 - \frac{5}{4} DG^3 - \frac{27}{64} D^2 \right]$$

Nesse caso encontramos:

$$E_3 = 16,7138.10^{-6}$$

de modo a concluir de Sessin e Ferraz-Mello (1984) que a condição:

$$E_3 < E < G^2$$

caracteriza como região de integração de (4.17) à região II do plano (E,G), na qual é discutida a solução apresentada no Apêndice A-4.

Como para a ordem de grandeza adotada neste estudo de (6.4) encontramos que as integrais de Hori e G-Sessin também são constantes na variável tempo, segue-se que tais elementos são avaliados por:

$$E = 16,7407 \cdot 10^{-6}$$

$$G = -4,1553 \cdot 10^{-3}$$

iii) Solução do Sistema Auxiliar de Sessin e Ferraz-Mello sob as Influências do Equilíbrio Instantâneo Similar.

Recorrendo a Tabela 7 do Apêndice B encontramos os elementos característicos:

$$\xi^* = 4,2233 \cdot 10^{-3}$$

$$d^* = 0,0893975$$

$$f = 6,6952 \cdot 10^{-3}$$

de modo a avaliarmos, a partir da Tabela 8 do Apêndice B os correspondentes elementos de Sessin e Ferraz-Mello através das estimativas:

$$\xi = 4,2233 \cdot 10^{-3} - 2,8175 \cdot 10^{-5} \cdot \cos V + 0,4591 \cdot 10^{-7} \cos 2V - 3,5916 \cdot 10^{-9} \cos 3V + \dots$$

$$H = 0,2416 \cdot 10^{-6} \operatorname{sen} V - 0,7876 \cdot 10^{-9} \operatorname{sen} 2V + 0,2622 \cdot 10^{-9} \operatorname{sen} 3V + \dots$$

$$K = -1,0992 \cdot 10^{-6} + 0,2379 \cdot 10^{-6} \cdot \cos V - 0,7876 \cdot 10^{-9} \cos 2V + 1,5810 \cdot 10^{-9} \cos 3V + \dots$$

$$V_1' = V_{10} + \Gamma_0 \cos \phi_0 + 0,9849864V - 6,5946 \cdot 10^{-3} \operatorname{sen} V + 5,3527 \cdot 10^{-6} \operatorname{sen} 2V - 5,8332 \cdot 10^{-9} \operatorname{sen} 3V + \dots$$

$$V = 8,575064 \cdot 10^{-3} M$$

$$v_2' = 10^{-5} X_{10} \{-6,8033 + 2,8175 \cdot \cos V - 0,0046 \cos 2V + 0,0010 \cdot \cos 3V + \dots\}$$

iv) Variáveis Canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano.

Outro resultado essencial, obtido com o auxílio dos elementos característicos ξ^* , d^* , f mostra de (6.13) a identificação da equação:

$$\left(\frac{u_2^*}{4X_{20}} \right)^2 + U_2^{*2} = [0,5333 \cdot 10^{-3}]^2$$

que define os principais comportamentos das correspondentes variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano.

9 Características do Sistema Variacional Livre

Tal estudo é aqui desenvolvido recorrendo-se a Seção [6.3] e Tabelas 9 e 10 do Apêndice B.

i) Coeficientes do Núcleo Variacional Livre

$$A^*(1,1)=0,98541 \quad [n_{20} \cdot \varepsilon \cdot X_{10}]$$

$$A^*(1,3)=1,51781 \quad [n_{20} \cdot \varepsilon \cdot X_{10}]$$

$$A^*(1,4)=0,11451 \quad [n_{20} \cdot \varepsilon \cdot X_{10}]$$

$$A^*(3,3)=10,70141 \quad [n_{20} \cdot \varepsilon \cdot X_{10}]$$

$$A^*(3,4)=-0,00114 \quad [n_{20} \cdot \varepsilon \cdot X_{10}]$$

$$A^*(4,4)=0,16515 \quad [n_{20} \cdot \varepsilon \cdot X_{10}]$$

ii) Coeficientes do Sistema Variacional Livre

Para a determinação de tais elementos, note primeiramente de (6.29) as estimativas:

j	$p_{j0} [10^{-3}]$	$q_{j0} [10^{-3}]$
1	0,0824	1,1110
2	0,0830	0,5947
3	0,2644	-0,2764
4	4,6226	10,0180

de modo a identificar de (6.10), (6.19) e (6.20) que o elemento

$$Z^{*'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{X_{10}}{X_{20}} \right) \sum_{j=1}^4 p_{j0}^2 + q_{j0}^2 = \text{constante}$$

é avaliado na data considerada pela estimativa:

$$Z^{*'} = -0,4559\varepsilon$$

Ressalte-se para a referência Nasa (2007) a estimativa:

$$Z^* = -0,4593\epsilon$$

Recorrendo-se a Tabela 9 do Apêndice B encontramos:

$$P(1,1)=15,68003 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$P(3,1)=1,38271 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$P(4,1)=0,11451 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$P(1,3)=-0,08701 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$P(3,3)=35,29071 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$P(4,3)=-0,00114 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$P(1,4)=0,08694 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$P(3,4)=-0,00775 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$P(4,4)=14,60300 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

iii) Polinômio Característico do Sistema Variacional Livre

Recorrendo-se a equação (6.23) e aos coeficientes $P(i,j)$ temos:

$$P(\lambda) = \lambda^6 + 1704,3254 \cdot \lambda^4 + 624325,72 \cdot \lambda^2 + 65320793$$

de modo a identificar os correspondentes elementos característicos ω_k (6.26) pelas estimativas:

$$w_1 = \pm 35,284574 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$w_2 = \pm 14,593914 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

$$w_3 = \pm 15,695283 \quad [n_{20} \cdot \epsilon]$$

iv) Coeficientes da Solução do Sistema Variacional Livre

Recorrendo a Tabela 10 do Apêndice B encontramos os elementos auxiliares:

$$B(1,1) = -245,75394 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

$$B(3,1) = -70,47691 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

$$B(4,1) = -3,46613 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

$$B(1,3) = 4,43506 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

$$B(3,3) = -1245,3139 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

$$B(4,3) = 0,06684 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

$$B(1,4) = -2,63347 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

$$B(3,4) = 0,26646 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

$$B(4,4) = -213,25758 \quad [n_{20}^2 \cdot \varepsilon^2]$$

de modo a identificar, sob a condição $\omega_k < 0$, as estimativas:

$$P(1,1,1) = 0,99991 \quad Q(1,1,1) = 0,99986$$

$$P(1,1,2) = 0,99973 \quad Q(1,1,2) = 0,99943$$

$$P(1,1,3) = 1,00000 \quad Q(1,1,3) = 1,00000$$

$$P(3,1,1) = -225,2577 \quad Q(3,1,1) = -225,2577$$

$$P(3,1,2) = -0,07150 \quad Q(3,1,2) = -0,07149$$

$$P(3,1,3) = -0,07052 \quad Q(3,1,3) = -0,07052$$

$$P(4,1,1) = 0,01795 \quad Q(4,1,1) = 0,01795$$

$$P(4,1,2) = -12,61054 \quad Q(4,1,2) = -12,61054$$

$$P(4,1,3) = 0,10490 \quad Q(4,1,3) = 0,10490$$

Tais resultados confirmam numericamente a propriedade:

$$P(j,1,k)=Q(j,1,k)$$

decorrente da eliminação das constantes em excesso na Solução do Sistema Variacional Livre, bem como a validade das expressões simplificadas para o cálculo dos coeficientes $Q(j, 1, k)$, sugeridas pela Tabela 9 do Apêndice B.

$Q(j, 1, k)$	$j = 1$	$j = 3$	$j = 4$
$k = 1$	1	-225,2577	0,01795
$k = 2$	1	-0,07151	-12,61054
$k = 3$	1	-0,07052	0,10490

Ressalte-se o fato de se trabalhar numericamente tais características devido à inviabilidade de se discuti-las analiticamente.

v) Solução do Sistema Variacional Livre

Tal solução se escreve diretamente de (6.28) por:

$$p_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{sen} \left[w_k (t - t_0) + \varphi_{k0}^* \right]$$

$$q_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{cos} \left[w_k (t - t_0) + \varphi_{k0}^* \right]$$

onde:

i) $C_j^k = Q(j,1,k) \cdot A_{k0}^*$

ii)

k	$\omega_k(10^{-3})$ rad/ dia
1	$\pm 3,1165$
2	$\pm 1,2890$
3	$\pm 1,3863$

iii) A_{k0}^* e φ_{k0}^* são constantes de integração do movimento, a serem avaliadas posteriormente com o auxílio da referência Nasa (2007).

10 Características do Sistema Variacional Forçado

Tais elementos são aqui identificados recorrendo-se a Seção [6.4] e a Tabela 9 do Apêndice B.

i) Coeficientes do Sistema Variacional Forçado

$$V(1,0) = -26,35324 \quad [n_{20} \cdot \varepsilon]$$

$$M(0,0) = 1,8041787$$

$$L = -34,29625 \quad [n_{20} \cdot \varepsilon]$$

$$\frac{\partial v_2(0)}{\partial v_{10}} = -0,9566332$$

$$\frac{\partial v_2(0)}{\partial E} = -109,72865 \cdot X_{10}$$

ii) Solução do Sistema Variacional Forçado

Recorrendo as equações (6.36) e (6.39) e a Tabela 8 do Apêndice B encontramos os elementos característicos:

$$v_2(0) = -6,8033 \cdot 10^{-5} X_{10}$$

$$\Gamma_0^* = 1,5406 \cdot 10^{-6} \cdot X_{10}$$

$$\theta_0 = -0,0117746$$

de modo a identificar tal solução, através da Seção [6.4] e Item [8] do Apêndice C, pelas estimativas:

$$v_{10} = v_{10}^* = -4,0935 \cdot 10^{-3} X_{10}$$

$$V_{10} = V_{10}^* - 0,23277 \cdot 10^{-2} (t - t_0) - 0,0433668 \Gamma_0 \cos \phi_0$$

$$\Gamma_0 = 0,5333 \cdot 10^{-3} \left[1,0001 + 0,0117 \operatorname{sen} \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] \dots \right]$$

$$\phi_0 = \phi_0^* + n_0 (t - t_0) + 1 \cdot 10^{-2} \left[1,17756 \cos \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] - \right.$$

$$\left. 0,00693 \operatorname{sen} \left[2 \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] \right] - 0,00007 \cos \left[3 \left[n_0 (t - t_0) + \phi_0^* \right] \right] \dots \right]$$

$$M = 1,8041787 (t - t_0^*) - 109,72865 \Gamma_0 \cos \phi_0$$

onde:

$$\Gamma_0 \operatorname{sen} \phi_0 = 0,5333.10^{-3} \left[0,0117 + \operatorname{sen} \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] \dots \right]$$

$$\Gamma_0 \cos \phi_0 = 0,5333.10^{-3} \left[\cos \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] \dots \right]$$

com:

$$n_0 = 3,0293.10^{-3} \text{ rad / dia}$$

iii) Valores de Referência para Condição de Equilíbrio de Laplace

Outro resultado essencial mostra do elemento Z^* que:

$$\langle Z^* \rangle_{SEC} = -2,2795.10^{-5}$$

de modo a identificar os valores de referência (6.13) pelas estimativas:

$$u_2^0 = 5,7689.10^{-3} X_{10}$$

$$U_2^0 = -0,0311.10^{-3}$$

iv) Solução do Sistema Auxiliar de Sessin e Ferraz-Mello sob as Influências do Equilíbrio Instantâneo Similar

Tal solução, parcialmente identificada no Item [8] pelas estimativas:

$$\xi = 4,2233.10^{-3} - 2,8175.10^{-5} \cos V + 0,4591.10^{-7} \cos 2V - 3,5916.10^{-9} \cos 3V + \dots$$

$$H = 0,2416.10^{-6} \operatorname{sen} V - 0,7876.10^{-9} \operatorname{sen} 2V + 0,2622.10^{-9} \operatorname{sen} 3V + \dots$$

$$K = -1,0992.10^{-6} + 0,2379.10^{-6} \cos V - 0,7876.10^{-9} \cos 2V + 1,5810.10^{-9} \cos 3V + \dots$$

$$v_2' = 10^{-5} \cdot X_{10} \left[-6,8033 + 2,8175 \cos V - 0,0046 \cos 2V + 0,0010 \cos 3V + \dots \right]$$

pode agora ser completada com a identificação dos elementos V e V_1' , recorrendo-se a Solução do Sistema Variacional Forçado.

Nesse caso encontramos as estimativas:

$$V = n_v(t - t_0^*) - 0,9409341 \cdot \Gamma_0 \cdot \cos \phi_0$$

$$V_1' = V_{10}^* + n_{10}(t - t_0^*) + 0,0298259 \cdot \Gamma_0 \cdot \cos \phi_0 - 6,5946 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen} V + 5,3527 \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen} 2V + \dots$$

onde:

- i) $n_v = 1,54709 \cdot 10^{-2}$ rad / dia.
- ii) $n_{10} = 1,29109 \cdot 10^{-2}$ rad / dia.
- iii) t_0^* é uma constante de integração do movimento, a ser posteriormente avaliada com o auxílio da referência NASA (2007).

v) Elementos Característicos do Movimento

Para tais elementos, definidos na Tabela 11 do Apêndice B, encontramos os elementos auxiliares:

$$\frac{b_1}{\xi^*} = -0,3431475 \qquad \frac{b_2}{\xi^*} = 0,1711049$$

$$A^*(k) = 0,2346718 \cdot C_1^k + 0,8832896 \cdot C_2^k + 5,4926832 \cdot C_3^k - 0,0029745 \cdot C_4^k$$

$$B^*(k) = -0,6340852 \cdot C_1^k - 0,4955981 \cdot C_2^k - 0,9864193 \cdot C_3^k$$

de modo a identificar seus correspondentes coeficientes pelas estimativas:

$$(1) \quad \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$$

$$R^*(0,0) = 8,6469 \cdot 10^{-3}$$

$$R^*(1,0) = -1,4946 \cdot 10^{-3}$$

$$R^*(2,0) = -0,1037.10^{-3}$$

$$R^*(3,0) = -0,0078.10^{-3}$$

$$R^*(-3,k) = 10^{-2} \cdot [0,38049.A^*(k) - 0,00254.B^*(k)]$$

$$R^*(-2,k) = 10^{-2} \cdot [2,19288.A^*(k) - 0,28403.B^*(k)]$$

$$R^*(-1,k) = 10^{-2} \cdot [34,31115.A^*(k) + 0,03776.B^*(k)]$$

$$R^*(0,k) = 10^{-2} \cdot [-74,13569.A^*(k) - 0,10535.B^*(k)]$$

$$R^*(1,k) = 10^{-2} \cdot [-8,62501.A^*(k) + 0,03776.B^*(k)]$$

$$R^*(2,k) = 10^{-2} \cdot [-2,17477.A^*(k) + 0,00424.B^*(k)]$$

$$R^*(3,k) = 10^{-2} \cdot [-0,00330.A^*(k) - 0,00058.B^*(k)]$$

$$(2) \quad \alpha$$

$$\alpha^*(1,0) = 0,0080103$$

$$\alpha^*(2,0) = -0,0097348$$

$$\alpha^*(3,0) = -0,0010031$$

$$\alpha^*(-3,k) = -0,1677705.A^*(k) + 0,0037660.B^*(k)$$

$$\alpha^*(-2,k) = -1,6865606.A^*(k) - 0,0105539.B^*(k)$$

$$\alpha^*(-1,k) = 0,0331577 \cdot [A^*(k) - B^*(k)]$$

$$\alpha^*(0,k) = -67,610716.A^*(k) - 1,2854397.B^*(k)$$

$$\alpha^*(1,k) = -12,599396.A^*(k) + 0,0331577.B^*(k)$$

$$\alpha^*(2,k) = -2,5447406.A^*(k) + 0,0074498.B^*(k)$$

$$\alpha^*(3,k) = -0,3780953.A^*(k) - 0,0020922.B^*(k)$$

$$(3) \quad \frac{v_2}{X_{10}}$$

$$W^*(0,0) = -3,5453 \cdot 10^{-5}$$

$$W^*(1,0) = 1,0101 \cdot 10^{-5}$$

$$W^*(2,0) = 0,0724 \cdot 10^{-5}$$

$$W^*(3,0) = 0,0060 \cdot 10^{-5}$$

$$W^*(-3,k) = 10^{-3} [0,01796 \cdot A^*(k) + 0,00032 \cdot B^*(k)]$$

$$W^*(-2,k) = 10^{-3} [-0,00094 \cdot A^*(k) + 0,00133 \cdot B^*(k)]$$

$$W^*(-1,k) = 10^{-3} [-4,74024 \cdot A^*(k) - 0,00417 \cdot B^*(k)]$$

$$W^*(0,k) = 10^{-3} [8,76322 \cdot A^*(k) + 0,01258 \cdot B^*(k)]$$

$$W^*(1,k) = 10^{-3} [-0,01682 \cdot A^*(k) + 0,05216 \cdot B^*(k)]$$

$$W^*(2,k) = 10^{-3} [0,02252 \cdot A^*(k) + 0,00117 \cdot B^*(k)]$$

$$W^*(3,k) = 10^{-3} [0,00004 \cdot A^*(k) + 0,00068 \cdot B^*(k)]$$

$$(4) \quad Z$$

$$Z^*(0,0) = -4,1887 \cdot 10^{-3}$$

$$Z^*(1,0) = 0,0101 \cdot 10^{-3}$$

$$Z^*(2,0) = 0,0007 \cdot 10^{-3}$$

$$Z^*(3,0) = 0,0001 \cdot 10^{-3}$$

$$Z^*(-3,k) = 10^{-3} [0,01796 \cdot A^*(k) + 0,00032 \cdot B^*(k)]$$

$$Z^*(-2,k) = 10^{-3} [-0,00094 \cdot A^*(k) + 0,00133 \cdot B^*(k)]$$

$$Z^*(-1,k) = 10^{-3} [-2,84248 \cdot A^*(k) - 0,00417 \cdot B^*(k)]$$

$$Z^*(0,k)=10^{-3} [8,25512.A^*(k)-0,11890.B^*(k)]$$

$$Z^*(1,k)=10^{-3} [-0,01682.A^*(k)+0,06630.B^*(k)]$$

$$Z^*(2,k)=10^{-3} [0,02252.A^*(k)+0,00117.B^*(k)]$$

$$Z^*(3,k)=10^{-3} [0,00004.A^*(k)+0,00068.B^*(k)]$$

(5) Z^*

$$Z^{**}(0,0)=-2,2795.10^{-5}$$

$$Z^{**}(-3,k)=10^{-6} [0,0046.A^*(k)+0,0012.B^*(k)]$$

$$Z^{**}(-2,k)=10^{-6} [-0,0159.A^*(k)]$$

$$Z^{**}(-1,k)=10^{-3} [0,6877.A^*(k)+0,0053.B^*(k)]$$

$$Z^{**}(0,k)=10^{-3} .(0,0488)[A^*(k)-B^*(k)]$$

$$Z^{**}(1,k)=10^{-6} [0,0395.A^*(k)+5,2035.B^*(k)]$$

$$Z^{**}(2,k)=10^{-6} [-0,0114B^*(k)]$$

$$Z^{**}(3,k)=10^{-6} [0,0005.A^*(k)+0,0023.B^*(k)]$$

(6) ψ

$$\psi = \frac{4.\varepsilon.G(2)}{n_{20} \cdot X_{20}} [g(0,1)+g(1,1)Z]$$

$$\langle \psi \rangle_{SEC} = 10^{-5} [1,6065+0,4070.\langle Z \rangle_{SEC}] \Rightarrow \langle \psi \rangle_{SEC} = 1,6048.10^{-5}$$

$$\langle \psi \rangle_{PER} = 10^{-5} [0,4070.\langle Z \rangle_{PER}]$$

(7) Parâmetro Característico do Movimento

Tal elemento, definido de (2.20) por:

$$[S-2g(1,0)].\langle Z \rangle_{SEC} = 2g(2,0).\langle Z^2 \rangle_{SEC} + \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right).\langle \psi \rangle_{SEC} + \dots$$

tem suas características definidas, com o auxílio dos coeficientes $g(i,j)$, através da expressão:

$$[S+0,3584532].\langle Z \rangle_{SEC} = 0,1194484.\langle Z^2 \rangle_{SEC} + 2,7085524.\langle \psi \rangle_{SEC} + \dots$$

Recorrendo aos resultados anteriores segue-se a estimativa:

$$S = -0,3693607$$

(8) χ

Tal elemento definido de (2.21) por:

$$\chi = [S-2g(1,0)].\langle Z \rangle_{PER} - 2 \sum_{i=2}^{\infty} g(i,0).\langle Z^i \rangle_{PER} - \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right).\langle \psi \rangle_{PER} - \left(\frac{X_{20}}{X_{10}} \right).\langle Z^* \rangle_{PER}$$

em termos dos resultados anteriores se escreve:

$$\chi = \sum_{m=1}^{\infty} \chi^*(m,0).\cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \chi^*(m,k).\text{sen}[V'_1 + m.V - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^*]$$

$$\chi^*(1,0) = -0,0100.10^{-5}$$

$$\chi^*(2,0) = -0,0007.10^{-5}$$

$$\chi^*(3,0) = -0,0001.10^{-5}$$

$$\chi^*(-3,k) = 10^{-3} [-0,00019.A^*(k) - 0,00001.B^*(k)]$$

$$\chi^*(-2,k) = 10^{-3} [0,00005.A^*(k) - 0,00001.B^*(k)]$$

$$\chi^*(-1,k) = 10^{-3} [-1,83448.A^*(k) - 0,01431.B^*(k)]$$

$$\chi^*(0,k)=10^{-3} \left[-0,21405.A^*(k)+0,13336.B^*(k) \right]$$

$$\chi^*(1,k)=10^{-3} \left[0,00006.A^*(k)-0,01475.B^*(k) \right]$$

$$\chi^*(2,k)=10^{-3} \left[-0,00027.A^*(k)+0,00002.B^*(k) \right]$$

$$\chi^*(3,k)=10^{-3} \left[-0,00001.B^*(k) \right]$$

Os elementos auxiliares $A^*(k)$ e $B^*(k)$ serão posteriormente avaliados recorrendo-se a referência Nasa (2007), de modo a permitir a completa identificação destes elementos característicos.

2 Referência Nasa (2007)

Nasa – Solar System Dynamics

Data: 1997, Jan, 16:00 T.T.

Sistema: I.C.R.F.

t_0 : JED 2450 464

1 Elementos dos Satélites Galileanos de Júpiter

p	a_p [km]	e_p [10^{-3}]	M_p [$^\circ$]	Ω_p [$^\circ$]	π_p [$^\circ$]	λ_p [$^\circ$]	\bar{w}_p [$^\circ$]
1	421800	4,1	342,021	43,997	84,129	470,147	128,126
2	671100	9,4	171,016	219,106	88,970	479,092	308,076
3	1070400	1,3	317,540	63,552	192,417	573,503	255,968
4	1882700	7,4	181,408	298,348	52,643	532,895	351,491

2 Orientação do Movimento

Como condição essencial deste estudo, o modelo inicialmente requer a identificação de uma orientação do movimento na data de referência, sujeita à condição de que a frequência característica livre satisfaça:

$$w_k < 0, \quad k=1,2,3$$

em oposição aos elementos característicos ressonantes (n_{10}, n_v, n_0) assumidos positivos.

O primeiro passo para tal identificação requer a determinação das características do ângulo crítico:

$$V_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

com respeito ao movimento real.

Nesse caso segue-se da referência que:

$$\theta_1 = -488^\circ,037 \quad \theta_2 = -667^\circ,926$$

de modo a identificar na data considerada:

$$V_1 = 142^\circ,019$$

Tomando em consideração o movimento real, a partir da referência Lieske (E_s) observamos na orientação Nasa (2007):

$$\theta_{1REAL} = -485^\circ,978 \quad \theta_{2REAL} = -666^\circ,113$$

de modo a identificar:

$$V_{1REAL} = 143^\circ,955$$

Como o ângulo V_1 do modelo é definido nas vizinhanças da condição:

$$V_1 = V_{1REAL}$$

é assumido neste estudo que o movimento na data considerada é definido sob uma orientação caracterizada pelos elementos:

$$V_1, \alpha, \bar{w}_4$$

não obstante os elementos característicos do movimento:

$$V_1, V, \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}, \alpha, \pm \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k)_{sen}^{\cos} [V_1 - w_k(t - t_0) - \phi_{k0}^*] \quad (j=1, 2, 3)$$

sejam assumidos independentes da orientação do ângulo \bar{w}_4 . Em outras palavras, tais elementos preservam seus correspondentes

valores na data considerada, quer o movimento seja definido sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 ou $V_1, \alpha, -\bar{w}_4$.

De modo a completar tal noção de orientação, note neste estudo que o fato do ângulo crítico V_1 poder ser definido nas vizinhanças da condição:

$$V_1 = \pi + V_{1REAL}$$

também requer que o movimento seja definido sob uma correspondente orientação, aqui denominada de orientação oposta.

Nesse caso, note das equações (3.45) e (8.5):

$$h_j = \sqrt{-2Y_j} \cdot \cos(V_1 + \bar{w}_j + \frac{v_1}{2X_{10}})$$

$$k_j = -\sqrt{-2Y_j} \cdot \text{sen}(V_1 + \bar{w}_j + \frac{v_1}{2X_{10}})$$

$$\frac{h_j}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos \alpha + \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cdot \cos[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$j=1,2,3$

$$\frac{k_j}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} \alpha - \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cdot \text{sen}[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

que as componentes h_j e k_j preservam as características das excentricidades e longitudes dos pericentros dos três primeiros satélites se tais elementos são definidos por:

$$\frac{h_j}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos(\pi + \alpha) + \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cdot \cos[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$j=1,2,3$

$$\frac{k_j}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen}(\pi + \alpha) - \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cdot \text{sen}[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

Consequentemente no caso:

$$V_1 = \pi + V_{1REAL}$$

é assumido neste estudo que o movimento na data considerada é definido sob a orientação oposta caracterizada pelos elementos:

$$V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$$

não obstante os elementos característicos do movimento:

$$V_1, V, \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}, \alpha, \pm \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k)_{sen}^{\cos} [V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*] \quad (j=1, 2, 3)$$

sejam assumidos independentes da orientação do ângulo $-\bar{w}_4$. Em outras palavras, tais elementos preservam seus correspondentes valores na data considerada, quer o movimento seja definido sob orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$ ou $V_1, \pi + \alpha, \bar{w}_4$.

De modo a uniformizar as expressões dos elementos h_j e k_j sob esse conceito de orientação do movimento, segue-se neste estudo que tais componentes são doravante caracterizadas através das expressões:

$$\frac{h_j}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos \alpha^* + \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cdot \cos [V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*] \quad j=1, 2, 3$$

$$\frac{k_j}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{j0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} \alpha^* - \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cdot \text{sen} [V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

onde:

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha & \text{orientação } V_1, \alpha, \bar{w}_4 \quad (V_1 = V_{1REAL}) \\ \pi + \alpha & \text{orientação } V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4 \quad (V_1 = \pi + V_{1REAL}) \end{cases}$$

De modo a completar tal identificação, torna-se necessário especificar as características do 4º satélite. Em relação às suas componentes livres ($\gamma_{40} = 0$).

$$\frac{h_4}{\sqrt{X_{10}}} = \sum_{k=1}^3 H^*(4, 0, k) \cdot \cos [V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$$\frac{k_4}{\sqrt{X_{10}}} = - \sum_{k=1}^3 H^*(4, 0, k) \cdot \text{sen} [V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

deve ser observado sua dependência com respeito a orientação considerada do ângulo \bar{w}_4 , de modo que na definição do ângulo:

$$V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*$$

é assumido para tais elementos que:

- i) $w_k < 0$ orientação \bar{w}_4
- ii) $w_k > 0$ orientação $-\bar{w}_4$

bem como os elementos característicos $H^*(4, 0, k)$ e φ_{k0}^* são estabelecidos sob a correspondente orientação através da Solução do Sistema Variacional Livre.

Tal possibilidade de se estudar o movimento é discutida na Seção [5.1] deste Apêndice, tomando-se em consideração as características do movimento na data considerada.

3 Solução do Sistema Variacional Livre

3.1 Elementos p_{j0} e q_{j0} na data

Tais elementos definidos de (6.29) por:

$$p_{j0} = \sum_{m=1}^3 E_{jm} \cdot \sqrt{\frac{L_{m0}}{X_{10}}} \cdot e_{m0} \cdot \text{sen} \bar{w}_m$$

$$q_{j0} = - \sum_{m=1}^3 E_{jm} \cdot \sqrt{\frac{L_{m0}}{X_{10}}} \cdot e_{m0} \cdot \text{cos} \bar{w}_m$$

$$p_{40} = - \sqrt{\frac{L_{40}}{X_{10}}} \cdot e_{40} \cdot \text{sen} \bar{w}_4$$

$$q_{40} = \sqrt{\frac{L_{40}}{X_{10}}} \cdot e_{40} \cdot \text{cos} \bar{w}_4$$

são avaliados, a partir dos elementos \bar{w}_j ($j=1,2,3,4$), pelas estimativas:

j	$p_{j0} (10^{-3})$	$q_{j0} (10^{-3})$
1	-2,5614	-0,1181
2	-1,4204	-0,0381
3	0,2764	0,2126
4	1,5916	10,6380

Tais elementos definem as características da orientação V_1, α, \bar{w}_4 .

Com respeito a orientação oposta $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$, tais elementos p_{j0} e q_{j0} , avaliados a partir dos elementos \bar{w}_j ($j=1,2,3$) e $-\bar{w}_4$, permanecem inalterados com exceção de:

$$p_{40} = -1,5916$$

3.2 Constantes de Integração

Na data considerada, tais elementos são definidos por:

$$p_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{sen} \varphi_{k0}^*$$

$$q_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{cos} \varphi_{k0}^*$$

com:

$$C_j^k = Q(j, 1, k) \cdot A^*(k, 0)$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot p_{j0} = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \cdot q_{j0} = 0$$

Recorrendo-se aos resultados anteriores, seguem-se as estimativas:

k	$A_{k0}^* (10^{-3})$	$\varphi_{k0}^* [^\circ]$
1	0,0009983 (0,0009987)	205,175 (205,232)
2	0,8502696 (0,8440260)	189,908 (172,919)
3	2,5198468 (2,7607432)	-73,388 (-74,874)

Ressalte-se a notação dos elementos sem parênteses para a orientação \bar{w}_4 , e dos elementos entre parênteses para a orientação $-\bar{w}_4$.

3.3 Solução do Sistema Variacional Livre

De (6.28) encontramos:

$$p_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{sen}[w_k \cdot (t - t_0) + \varphi_{k0}^*]$$

$$q_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{cos}[w_k \cdot (t - t_0) + \varphi_{k0}^*]$$

cujos correspondentes coeficientes C_j^k são avaliados por:

$C_j^k [10^{-3}]$	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4
k = 1	0,00100 (0,00100)	-0,03012 (-0,03013)	-0,22487 (-0,22496)	0,00002 (0,00002)
k = 2	0,85027 (0,84403)	0,47570 (0,47221)	-0,06080 (-0,06036)	-10,72236 (-10,63436)
k = 3	2,51985 (2,76074)	1,41014 (1,54495)	-0,17770 (-0,19469)	0,26433 (0,28960)

3.4 Coeficientes das Componentes Livres das Excentricidades

Tais elementos, definidos de (8.4) por:

$$H^*(j, 0, k) = \sum_{m=1}^3 E_{jm} \cdot C_m^k$$

$j = 1, 2, 3$

$$H^*(4, 0, k) = C_4^k$$

são avaliados, com auxílio dos resultados anteriores, pelas estimativas:

$H^*(m, 0, k) [10^{-3}]$	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
k = 1	-0,1976 (-0,1977)	-0,1106 (-0,1106)	0,0139 (0,0139)	- (-)
k = 2	0,0036 (0,0035)	-0,1300 (-0,1291)	-0,9675 (-0,9604)	-10,7224 (-10,6436)
k = 3	0,0128 (0,0140)	-0,3841 (-0,4208)	-2,8674 (-3,1415)	0,2643 (0,2896)

Ressalte-se a notação dos elementos sem parênteses para a orientação \bar{w}_4 , e dos elementos entre parênteses para a orientação $-\bar{w}_4$.

4 Elementos Característicos do Movimento

Recorrendo-se aos elementos auxiliares:

$$A^*(k) = 0,2346718.C_1^k + 0,8832896.C_2^k + 5,4926832.C_3^k - 0,0029745.C_4^k$$

$$B^*(k) = -0,6340852.C_1^k - 0,4955981.C_2^k - 0,9864199.C_3^k$$

encontramos as estimativas:

k	$A^*(k) [10^{-3}]$	$B^*(k) [10^{-3}]$
1	-1,2615 (-1,2620)	0,2361 (0,2362)
2	0,3176 (0,3153)	-0,7149 (-0,7097)
3	0,8601 (0,9425)	-2,1216 (-2,3242)

de modo a identificar:

$$i) \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$$

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = \sum_{m=0}^{\infty} R^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 R^*(m,k) \cdot \text{sen}[V_1 + mV - w_k \cdot (t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$$R^*(0,0) = 8,6469 \cdot 10^{-3}$$

$$R^*(1,0) = -1,4946 \cdot 10^{-3}$$

$$R^*(2,0) = -0,1037 \cdot 10^{-3}$$

$$R^*(3,0) = -0,0078 \cdot 10^{-3}$$

$R^*(m,k) [10^{-3}]$	k = 1	k = 2	k = 3
m = -3	-0,0048 (-0,0048)	0,0012 (0,0012)	0,0033 (0,0036)
m = -2	-0,0283 (-0,0283)	0,0090 (0,0089)	0,0249 (0,0273)
m = -1	-0,4327 (-0,4329)	0,1096 (0,1079)	0,2943 (0,3225)
m = 0	0,9350 (0,9353)	-0,2347 (-0,2330)	-0,6354 (-0,6963)
m = 1	0,1089 (0,1089)	-0,0277 (-0,0275)	-0,0750 (-0,0822)
m = 2	0,0274 (0,0275)	-0,0069 (-0,0069)	-0,0184 (-0,0206)

ii) α

$$\alpha = \ell + (-1)^n \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^*(m,0) \cdot \text{sen} mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \alpha^*(m,k) \cdot \cos[V_1 + mV - w_k \cdot (t - t_0) - \phi_{k0}^*] \right]$$

$$\alpha^*(1,0) = 0,0080103$$

$$\alpha^*(2,0) = -0,0097343$$

$$\alpha^*(3,0) = -0,0010032$$

$\alpha^*(m,k)$	k = 1	k = 2	k = 3
m = -3	0,0002125 (0,0002126)	-0,0000560 (-0,0000556)	-0,0001523 (-0,0001669)
m = -2	0,0021251 (0,0021260)	-0,0005281 (-0,0005243)	-0,0014282 (-0,0015651)
m = -1	-0,0000497 (-0,0000497)	0,0000342 (0,0000340)	0,0000989 (0,0001083)
m = 0	0,0849874 (0,0850211)	-0,0205542 (-0,0204053)	-0,0554248 (-0,0607355)
m = 1	0,0159020 (0,0159083)	-0,0040253 (-0,0039961)	-0,0109071 (-0,0119520)
m = 2	0,0032120 (0,0032132)	-0,0008135 (-0,0008077)	-0,0022045 (-0,0024157)
m = 3	0,0004765 (0,0004767)	-0,0001186 (-0,0001177)	-0,0003208 (-0,0003515)

iii) $\frac{v_2}{X_{10}}$

$$\frac{v_2}{X_{10}} = \sum_{m=0}^{\infty} W^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 W^*(m,k) \cdot \text{sen}[V_1 + mV - w_k \cdot (t - t_0) - \phi_{k0}^*]$$

$$W^*(0,0) = -3,5453 \cdot 10^{-5}$$

$$W^*(1,0) = 1,0101 \cdot 10^{-5}$$

$$W^*(2,0) = 0,0724 \cdot 10^{-5}$$

$$W^*(3,0) = 0,0060 \cdot 10^{-5}$$

$W^*(m,k) [10^{-5}]$	k = 1	k = 2	k = 3
m = -3	-0,0023 (-0,0023)	0,0005 (0,0005)	0,0015 (0,0016)
m = -2	0,0002 (0,0002)	-0,0001 (-0,0001)	-0,0004 (-0,0004)
m = -1	0,5979 (0,5981)	-0,1503 (-0,1482)	-0,4068 (-0,4458)
m = 0	-1,1052 (-1,1056)	0,2774 (0,2754)	0,7511 (0,8230)
m = 1	0,0034 (0,0034)	-0,0043 (-0,0042)	-0,0125 (-0,0137)
m = 2	-0,0032 (-0,0032)	0,0007 (0,0007)	0,0019 (0,0021)
m = 3	- (-)	- (-)	-0,0001 (-0,0001)

iv) Z

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} Z^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Z^*(m,k) \cdot \text{sen}[V_1 + mV - w_k \cdot (t - t_0) - \phi_{k0}^*]$$

$$Z^*(0,0) = -4,1887 \cdot 10^{-3}$$

$$Z^*(1,0) = 0,0101 \cdot 10^{-3}$$

$$Z^*(2,0) = 0,0007 \cdot 10^{-3}$$

$$Z^*(3,0) = 0,0001 \cdot 10^{-3}$$

$Z^*(m,k) [10^{-5}]$	k = 1	k = 2	k = 3
m = -3	-0,0023 (-0,0023)	0,0005 (0,0005)	0,0015 (0,0016)
m = -2	0,0002 (0,0002)	-0,0001 (-0,0001)	-0,0004 (-0,0004)
m = -1	0,3585 (0,3586)	-0,0900 (-0,0893)	-0,2436 (-0,2669)
m = 0	-1,0442 (-1,0446)	0,2707 (0,2687)	0,7352 (0,8057)
m = 1	0,0037 (0,0037)	-0,0053 (-0,0052)	-0,0155 (-0,0170)
m = 2	-0,0032 (-0,0032)	0,0007 (0,0007)	0,0019 (0,0021)
m = 3	- (-)	- (-)	-0,0001 (-0,0001)

v) Z^*

$$Z^* = Z^{**}(0,0) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Z^{**}(m,k) \cdot \text{sen}[V_1 + mV - w_k \cdot (t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$$Z^{**}(0,0) = -2,2795 \cdot 10^{-5}$$

$Z^{**}(m,k) [10^{-5}]$	k = 1	k = 2	k = 3
m = -1	-0,0866 (-0,0867)	0,0215 (0,0213)	0,0580 (0,0636)
m = 0	-0,0073 (-0,0073)	0,0050 (0,0050)	0,0146 (0,0159)
m = 1	0,0001 (0,0001)	-0,0004 (-0,0004)	-0,0011 (-0,0012)

vi) χ

$$\chi = \sum_{m=1}^{\infty} \chi^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \chi^*(m,k) \cdot \text{sen}[V_1 + mV - w_k \cdot (t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$$\chi^*(1,0) = -0,0100 \cdot 10^{-5}$$

$$\chi^*(2,0) = -0,0007 \cdot 10^{-5}$$

$$\chi^*(3,0) = -0,0001 \cdot 10^{-5}$$

$\chi^*(m,k) [10^{-5}]$	k = 1	k = 2	k = 3
m = -1	0,2311 (0,2312)	-0,0572 (-0,0568)	-0,1547 (-0,1690)
m = 0	0,0301 (0,0302)	-0,0163 (-0,0162)	-0,0467 (-0,0512)
m = 1	-0,0004 (-0,0004)	0,0011 (0,0010)	0,0031 (0,0034)

5 Solução do Sistema Variacional Forçado

5.1 Preservação dos elementos característicos na data com respeito à orientação

i) Elemento V_1

Tal elemento foi identificado anteriormente na Seção [2.1] através da estimativa:

$$V_1 = 142^\circ,019$$

definida nas vizinhanças da condição:

$$V_1 = V_{1REAL}$$

de modo a caracterizar o movimento na data considerada sob a orientação:

$$V_1, \alpha, \bar{w}_4$$

ii) Estimativas dos Elementos $\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$ e α

Recorrendo a referência na data:

p	$\bar{w}_p [^\circ]$	$V_1 + \bar{w}_p [^\circ]$	γ_{p0}	$e_{p0} [10^{-3}]$
1	128,126	270,179	0,4912574	4,1
2	308,076	90,095	-0,8630126	9,4
3	255,969	37,988	0,1177944	1,3

seguem-se os elementos h_p e k_p , definidos de (4.27) pelas estimativas:

$$\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}} = e_{p0} \cdot \sqrt{\frac{L_{p0}}{X_{10}}} \cos(V_1 + \bar{w}_p)$$

$$\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}} = -e_{p0} \cdot \sqrt{\frac{L_{p0}}{X_{10}}} \text{sen}(V_1 + \bar{w}_p)$$

avaliados por:

p	$\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}(10^{-3})$	$\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}(10^{-3})$
1	0,0128	4,1000
2	-0,0131	-7,9125
3	1,7204	-1,3436

de modo a identificar os elementos auxiliares:

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \frac{h_j}{\sqrt{X_{10}}} = 0,22025 \cdot 10^{-3}$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \frac{k_j}{\sqrt{X_{10}}} = 8,68447 \cdot 10^{-3}$$

Os elementos procurados, definidos de (4.28) e (8.5) por:

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \frac{h_j}{\sqrt{X_{10}}} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \frac{k_j}{\sqrt{X_{10}}} \right)^2}$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \frac{h_j}{\sqrt{X_{10}}} = \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{cos} \alpha^*$$

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{j0} \frac{k_j}{\sqrt{X_{10}}} = \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} \alpha^*$$

na data considerada são avaliados pelas estimativas:

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 8,6872 \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha^* = \alpha = 88,547^\circ$$

de modo a identificar que o movimento nesta data é definido sob a orientação:

$$V_1, \alpha, \bar{w}_4$$

onde:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - X$$

iii) Preservação dos Elementos Característicos sob as Orientações

Sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 , dos elementos de identificação na data:

k	$\varphi_{k0}^* [^\circ]$	$V_1 - \varphi_{k0}^* [^\circ]$
1	205,175	-63,156
2	189,908	-47,889
3	-73,388	215,407

e das correspondentes expressões dos elementos $\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$ e α , seguem-se as estimativas:

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot [8,3549 - 1,3936 \cdot \cos V - 0,1083 \cdot \cos 2V - 0,0063 \cdot \cos 3V + \dots$$

$$+ 0,4535 \cdot \text{sen} V + 0,0498 \cdot \text{sen} 2V + 0,0041 \cdot \text{sen} 3V + \dots]$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - [0,0697686 + 0,0132913 \cdot \cos V + 0,0044713 \cdot \cos 2V + 0,0005796 \cdot \cos 3V + \dots$$

$$+ 0,0128548 \cdot \text{sen} V - 0,0094260 \cdot \text{sen} 2V - 0,0009116 \cdot \text{sen} 3V \dots]$$

Sob uma orientação $V_1, \alpha, -\bar{w}_4$, dos elementos de identificação na data:

k	$\varphi_{k0}^* [^\circ]$	$V_1 - \varphi_{k0}^* [^\circ]$
1	205,232	-63,213
2	172,919	-30,900
3	-74,874	216,893

e das correspondentes expressões dos elementos $\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$ e α , seguem-se as estimativas:

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 10^{-3} [8,3497 - 1,3910 \cdot \cos V - 0,1080 \cdot \cos 2V - 0,0063 \cdot \cos 3V + \dots + 0,4517 \cdot \text{sen} V + 0,0498 \cdot \text{sen} 2V + 0,0041 \cdot \text{sen} 3V + \dots]$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - [0,0693815 + 0,0132195 \cdot \cos V + 0,004447 \cdot \cos 2V + 0,0005766 \cdot \cos 3V + \dots + 0,0129461 \cdot \text{sen} V - 0,0094199 \cdot \text{sen} 2V - 0,0009101 \cdot \text{sen} 3V \dots]$$

Tomando por referência os valores estimados:

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 8,6872 \cdot 10^{-3} \text{ e } \alpha = 88^\circ,542$$

encontramos por melhor estimativa do parâmetro V na data considerada:

$$V = -117^\circ,320$$

de modo a identificar:

	V_1, α, \bar{w}_4	$V_1, \alpha, -\bar{w}_4$
$\sqrt{\frac{-v_2}{X_{10}}} \cdot (10^{-3})$	8,6893	8,6843
α	87º,570	87º,594

Tais resultados sugerem a possibilidade de preservação dos elementos característicos associados com a contribuição forçada:

$$V_1, V, \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}, \alpha$$

qualquer que seja a orientação do ângulo \bar{w}_4 .

Com respeito as correspondentes contribuições livres dos três primeiros satélites, note que tais elementos também preservam seus valores na data considerada, qualquer que seja a orientação do ângulo \bar{w}_4 .

$$\sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \cos[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

j	V_1, α, \bar{w}_4	$V_1, \alpha, -\bar{w}_4$
1	-0,0972	-0,0973
2	0,1760	0,1759
3	1,6946	1,6946

$$-\sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \text{sen}[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

j	V_1, α, \bar{w}_4	$V_1, \alpha, -\bar{w}_4$
1	-0,1662	-0,1663
2	-0,4176	-0,4176
3	-2,3666	-2,3667

Como consequência natural desta investigação é assumido neste estudo que os valores dos elementos característicos na data considerada:

$$V_1, V, \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}, \alpha, \pm \sum_{k=1}^3 H^*(j, 0, k) \text{sen}[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*] (j=1, 2, 3)$$

se preservam qualquer que seja a orientação do ângulo \bar{w}_4 .

Com respeito a identificação do movimento sob a orientação oposta $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$, note da Seção [2.2] que tal possibilidade se verifica se V_1 é definido nas vizinhanças da condição:

$$V_1 = \pi + V_{1REAL}$$

Não obstante a mudança de orientação do ângulo \bar{w}_4 , seus elementos característicos podem ser obtidos diretamente das definições dos correspondentes elementos sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, \bar{w}_4$, visto que seus valores se preservam sob tal orientação.

Esse conceito de orientação do movimento na data considerada se completa com a identificação da contribuição livre do 4º satélite, a qual necessariamente requer levar em consideração as características de orientação do ângulo \bar{w}_4 , sob a qual o movimento esteja realmente definido. Suas correspondentes excentricidade e longitude do pericentro são caracterizadas pelas equações (8.15) e (8.17), sob a condição de que os elementos característicos $w_k, H^*(4, 0, k)$ e ϕ_{k0}^* são estabelecidos sob a correspondente orientação \bar{w}_4 ou $-\bar{w}_4$ através da Solução do Sistema Variacional Livre associado e do requisito:

$$\begin{array}{ll} w_k < 0 & \text{orientação } \bar{w}_4 \\ w_k > 0 & \text{orientação } -\bar{w}_4 \end{array}$$

em oposição ou não a orientação dos elementos característicos ressonantes (n_{10}, n_v, n_0) assumida positiva.

5.2 Parâmetro de Integração de Hori

Tal elemento é definido diretamente dos elementos de Sessin e Ferraz-Mello e da Solução do Sistema Variacional Forçado por:

$$V = n_v(t - t_0^*) - 0,5018 \cdot 10^{-3} \cos[n_0(t - t_0) + \phi_0^*]$$

Recorrendo a estimativa

$$V = -117^\circ, 320$$

segue-se na data considerada que a constante de integração t_0^* é avaliada por:

$$t_0^* = t_0 + 132,3530 - 0,0324349 \cdot \cos \phi_0^*$$

Levando tal resultado na expressão do elemento original V , segue-se que o parâmetro de integração de Hori é definido neste estudo por:

$$V = -117^\circ,320 + n_v(t - t_0) + 0,5018 \cdot 10^{-3} [\cos \phi_0^* - \cos[n_0(t - t_0) + \phi_0^*]]$$

onde:

- i) $n_v = 1,54709 \cdot 10^{-2}$ rad/dia
- ii) ϕ_0^* é a constante de integração associada com o Ângulo Crítico Laplaciano.

5.3 Variáveis Canônicas Associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano

Tais elementos são definidos de (7.34) pelas estimativas:

$$u_2^* = -\langle v_2' \rangle_{PER} - u_0^0 \{ \text{sen}[n_0(t - t_0) + \phi_0^*] - \theta_0 \left[\frac{9}{8} - \cos 2[n_0(t - t_0) + \phi_0^*] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{8} \cos 4[n_0(t - t_0) + \phi_0^*] \dots \dots \right\} \\ U_2^* = \frac{u_0^0}{4 \cdot X_{20}} \cdot \cos[n_0(t - t_0) + \phi_0^*] \dots$$

em torno dos valores de referência:

$$u_2^* \Big|_{t=t_L} = u_2^0 = 0,998298 \cdot u_0^0 \\ U_2^* \Big|_{t=t_L} = U_2^0 = -0,0311 \cdot 10^{-3}$$

onde

$$\theta_0 = -0,0117746 \\ u_0^0 = 5,7786 \cdot 10^{-3} \cdot X_{10} \\ n_0 = 3,03 \cdot 10^{-3} \text{ rad / dia}$$

Tomando tais equações e seus correspondentes valores de referência, observamos que tais requisitos são satisfeitos pelas estimativas:

$$n_0(t_L - t_0) + \phi_0^* = -93^\circ,343 \quad (*)$$

$$u_2^0 = -\langle v_2' \rangle_{PER} |_{t=t_L} + 0,9982942 \cdot u_0^0$$

Recorrendo também ao elemento $\langle v_2' \rangle_{PER}$, identificado no Item [8], segue-se a equação:

$$0,0040 \cdot \cos^3 V - 0,0092 \cos^2 V + 2,8145 \cos V + 0,0068 \dots |_{t=t_L} = 0$$

de modo a obter na data considerada:

$$V |_{t=t_L} = 90^\circ,139$$

Nesse caso da expressão do elemento V encontramos:

$$V |_{t_L} = -117^\circ,318 + n_v(t_L - t_0) + 0^\circ,029 \cdot \cos \phi_0^*$$

que justamente com a equação (*), permite identificar as estimativas da constante de integração ϕ_0^* e do tempo de ocorrência da condição do Equilíbrio de Laplace t_L por:

$$\phi_0^* = 226^\circ,022$$

$$t_L = t_0 + 234,064$$

Ressalte-se sob tal identificação um erro da ordem de:

$$X = 0'',496$$

para o Ângulo Crítico Laplaciano na data considerada.

Tal resultado leva a completa identificação do parâmetro de integração de Hori através da equação:

$$V = -117^\circ,340 + n_v(t - t_0) - 0,5018 \cdot 10^{-3} \cdot \cos[n_0(t - t_0) + \phi_0^*]$$

onde:

- i) $n_v = 1,54709 \cdot 10^{-2}$ rad/dia
- ii) $n_0 = 3,03 \cdot 10^{-3}$ rad / dia
- iii) $\phi_0^* = 226^\circ,022$

5.4 Ângulo Crítico V_1'

Recorrendo aos elementos de Sessin e Ferraz-Mello e a Solução do Sistema Variacional Forçado encontramos:

$$V_1' = V_{10}^* + n_{10} \cdot (t - t_0^*) + 0,0159 \cdot 10^{-3} \cdot \cos[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*] - 6,5946 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen} V + 5,3527 \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen} 2V + \dots$$

de modo a identificar, com auxílio dos resultados anteriores, a estimativa na data considerada:

$$V_{10}^* = 239^\circ,607$$

Reescrevendo novamente o elemento V_1' , segue-se a estimativa:

$$V_1' = 141^\circ,684 + n_{10} \cdot (t - t_0) + 0,0159 \cdot 10^{-3} \cdot \cos[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*] - 6,5946 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen} V + 5,3527 \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen} 2V + \dots$$

3 Características do modelo para o movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter

Para facilitar posteriores identificações, reescrevemos os resultados obtidos nas Seções [1] e [2] como se segue.

1 Solução do Sistema Variacional

As constantes de integração e o parâmetro de integração de Hori, da solução do sistema auxiliar de Hori associado ao movimento, são definidos em relação a variável tempo pelas estimativas:

$$v_{10} = -4,0935 \cdot 10^{-3} \cdot X_{10}$$

$$V_{10} = 240^\circ,176 - 0,23277 \cdot 10^{-2} \cdot (t - t_0) - 0,0231 \cdot 10^{-3} \cdot \cos[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*]$$

$$\Gamma_0 = 0,5333 \cdot 10^{-3} \cdot [1,0001 + 0,0117 \cdot \text{sen}[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*] \dots]$$

$$\phi_0 = 226^\circ,022 + n_0 \cdot (t - t_0) + 1 \cdot 10^{-2} \cdot [1,17756 \cdot \cos[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*] -$$

$$0,00693 \cdot \text{sen} 2 \cdot [n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*] - 0,00007 \cdot \cos 3 \cdot [n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*]]$$

$$p_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{sen}[w_k \cdot (t - t_0) + \phi_{k0}^*]$$

$$q_{j0} = \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \cos[w_k \cdot (t - t_0) + \phi_{k0}^*]$$

$$M = -238,82908 + 1,8041787 \cdot (t - t_0) - 0,0585183 \cdot \cos[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*]$$

$$\Gamma_0 \text{sen} \phi_0 = 0,5333 \cdot 10^{-3} \cdot [0,0117 + \text{sen}[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*] \dots]$$

$$\Gamma_0 \cos \phi_0 = 0,5333 \cdot 10^{-3} \cdot [\cos[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*]]$$

onde:

- i) $n_0 = 3,03 \cdot 10^{-3}$ rad / dia
- ii) $\phi_0^* = 226^\circ,022$
- iii) Na data considerada

$$t_0: \text{JED } 2.450.464$$

o movimento é definido sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 pelas características:

k	$\omega_k [10^{-3}]$	ϕ_{k0}^*
1	- 3,1165	205°,175
2	- 1,2890	189°,908
3	- 1,3863	-73°,388

$C_j^k [10^{-3}]$	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4
k = 1	0,0010	-0,0301	-0,2249	-
k = 2	0,8503	0,4757	-0,0608	-10,7224
k = 3	2,5198	1,4101	-0,1777	0,2643

Ressalte-se que se o movimento é definido sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$ numa data qualquer, então as características desta orientação para as contribuições livres do 4º satélite são definidas por:

k	$w_k [10^{-3}]$	φ_{k0}^*	$C_4^k [10^{-3}]$
1	3,1165	205°,232	–
2	1,2890	172°,919	-10,6436
3	1,3863	-74°,874	0,2896

Ressalte-se também, sob tal orientação, a preservação dos valores dos elementos característicos do movimento na data considerada definidos sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, \bar{w}_4$.

2 Solução do Sistema Auxiliar de Sessin e Ferraz-Mello

Das estimativas das integrais primeiras de Hori e G-Sessin:

$$E = 16,7407.10^{-6}$$

$$G = -4,1553.10^{-3}$$

seguem-se os elementos característicos:

$$\xi^* = 4,2233.10^{-3}$$

$$d^* = 0,0893975$$

$$f = 6,6952.10^{-3}$$

que identificam a solução do sistema auxiliar de Sessin e Ferraz-Mello por:

$$\xi = 4,2233.10^{-3} - 0,0282.10^{-3} \cdot \cos V + 0,0459.10^{-6} \cdot \cos 2V + \dots$$

$$H = 0,2416.10^{-6} \cdot \text{sen} V - 0,7876.10^{-9} \cdot \text{sen} 2V + \dots$$

$$K = -1,0992.10^{-6} + 0,2379.10^{-6} \cdot \cos V - 0,7876.10^{-9} \cdot \cos 2V + \dots$$

$$V_1' = 141^\circ,684 + n_{10}(t - t_0) + 0,0159.10^{-3} \cdot \cos[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*] - 6,5946.10^{-3} \cdot \text{sen} V + 5,3527.10^{-6} \cdot \text{sen} 2V + \dots$$

$$V = -117^\circ,340 + n_v \cdot (t - t_0) - 0,5018.10^{-3} \cdot \cos[n_0 \cdot (t - t_0) + \phi_0^*] + \dots$$

onde:

- i) $n_{10} = 1,29109.10^{-2}$ rad/dia
- ii) $n_v = 1,54709.10^{-2}$ rad/dia
- iii) Ressalte-se para tal solução que as características dos elementos H e K são aqui estabelecidas sob a condição:

$$\ell = -\frac{\pi}{2}$$

a partir da referência Sato (1986).

3 Variáveis canônicas do Método de Hori

Tais variáveis têm seus principais comportamentos definidos pela solução do sistema auxiliar de Hori na conveniente vizinhança:

$$\alpha' = \phi' = \ell$$

sob a influência do correspondente vínculo do Equilíbrio Instantâneo Similar.

Dos resultados anteriores encontramos suas estimativas dadas por:

$$v'_1 = -4,0935.10^{-3} X_{10}$$

$$V'_1 = 141^0,684 + n_{10}(t-t_0) + 0,0159.10^{-3} \cdot \cos[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] - 6,5946.10^{-3} \text{sen} V + 5,3527.10^{-6} \cdot \text{sen} 2V + \dots$$

$$v'_2 = 10^{-5} X_{10} [-6,8033 + 2,8175 \cdot \cos V - 0,0046 \cdot \cos 2V + 0,0010 \cdot \cos 3V + \dots]$$

$$V'_2 = 0,5333.10^{-3} \cos[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] \dots$$

$$p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) = \sqrt{X_{10}} \cdot \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \cos[V'_1 - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^*]$$

$$q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) = -\sqrt{X_{10}} \cdot \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{sen}[V'_1 - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^*]$$

$$\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m = 10^{-3} \sqrt{X_{10}} \cdot [-1,7554 \cdot \text{sen}[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] - 0,0086 \cos V \dots] \cdot \text{sen} \ell.$$

$$\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m = 10^{-3} \sqrt{X_{10}} [1,7554 \cdot \cos[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] \dots] \text{sen} \ell$$

onde:

$$i) \quad \ell = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad n = 0 \text{ ou } n = 1$$

4 Variáveis canônicas associadas com o principal comportamento do movimento

Tais variáveis são definidas pelo Equilíbrio Instantâneo Similar na conveniente vizinhança

$$\alpha = \phi$$

sob a influência de seu correspondente vínculo e sujeitas a condição de invariância com respeito à transformação de Hori:

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 & V_1 &= V'_1 \\ p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p_m \right) &= p'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p'_m \right) \\ q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q_m \right) &= q'_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q'_m \right) \end{aligned}$$

Dos resultados anteriores e equação (8.3) encontramos:

$$v_1 = -4,0935 \cdot 10^{-3} X_{10}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= 141^0,684 + n_{10}(t-t_0) + 0,0159 \cdot 10^{-3} \cdot \cos[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] - 6,5946 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen} V \\ &+ 5,3527 \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen} 2V + \dots \end{aligned}$$

$$v_2 = X_{10} \left[\sum_{m=0}^{\infty} W^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 W^*(m,k) \cdot \text{sen}[V_1 + mV - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^*] \right]$$

$$V_2 = 0,5333 \cdot 10^{-3} \cdot \cos[n_0(t-t_0) + \phi_0^*]$$

$$p_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p_m \right) = \sqrt{X_{10}} \cdot \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \cos[V_1 - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^*]$$

$$q_j - \gamma_{j0} \left(\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q_m \right) = -\sqrt{X_{10}} \cdot \sum_{k=1}^3 C_j^k \cdot \text{sen}[V_1 - w_k(t-t_0) - \phi_{k0}^*]$$

$$\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot p_m = 10^{-3} \sqrt{X_{10}} \left[-1,7554 \cdot \text{sen}[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] - 0,0086 \cos V \dots \right] \cdot \text{sen} \ell.$$

$$\sum_{m=1}^3 \gamma_{m0} \cdot q_m = 10^{-3} \sqrt{X_{10}} \left[1,7554 \cdot \cos[n_0(t-t_0) + \phi_0^*] \dots \right] \cdot \text{sen} \ell$$

onde:

- i) Os coeficientes $W^*(m,k)$ são definidos no Item [2.3]

5 Variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano

Essas variáveis são definidas na conveniente vizinhança

$$\alpha = \phi$$

onde as variáveis canônicas associadas com o Ângulo Crítico Laplaciano tem seus principais comportamentos definidos pela equação:

$$\left(\frac{u_2^*}{4.X_{20}} \right)^2 + U_2^{*2} = [0,5333.10^{-3}]^2$$

Recorrendo à equação (8.4) e resultados anteriores, seguem-se as estimativas:

$$u_1^* = v_1$$

$$U_1^* = V_1$$

$$u_2^* = -5,5787.10^{-3}.X_{10}[\text{sen}[n_0(t-t_0)+\phi_0^*]+0,0049.\text{cos}V+\dots]$$

$$U_2^* = 0,5333.10^{-3}.\text{cos}[n_0(t-t_0)+\phi_0^*]\dots$$

$$\frac{h_m^*}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{m0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}.\text{cos}(U_2^* - \alpha) + \sum_{k=1}^3 H^*(m,0,k).\text{cos}[U_1^* - w_k.(t-t_0) - \phi_{k0}^*]$$

$$\frac{k_m^*}{\sqrt{X_{10}}} = -\gamma_{m0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}.\text{sen}(U_2^* - \alpha) - \sum_{k=1}^3 H^*(m,0,k).\text{sen}[U_1^* - w_k.(t-t_0) - \phi_{k0}^*]$$

onde:

i)

m	γ_{m0}
1	0,4912574
2	-0,8630126
3	0,1177944
4	0

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} &= \sum_{m=0}^{\infty} R^*(m,0) \cdot \cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 R^*(m,k) \cdot \text{sen}[V_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*] \\
 \alpha &= \ell + (-1)^n \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^*(m,0) \cdot \text{sen} mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \alpha^*(m,k) \cdot \cos[V_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*] \right\}
 \end{aligned}$$

cujos coeficientes $R^*(m,s)$ e $\alpha^*(m,s)$ são definidos no Item [2.3] sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 .

iii) Na data considerada

$$t_0 : JED.2450.464$$

o movimento é definido sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 , cujos correspondentes coeficientes $H^*(m,0,k)$ são avaliados por:

$H^*(m,0,k)[10^{-3}]$	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
k = 1	-0,1976	-0,1106	0,0139	–
k = 2	0,0036	-0,1300	-0,9675	-10,7224
k = 3	0,0128	-0,3841	-2,8674	0,2643

Ressalte-se para o movimento definido sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$ os correspondentes coeficientes para o 4º satélite:

k	$H^*(4,0,k)[10^{-3}]$
1	–
2	-10,6434
3	0,2896

6 Variáveis canônicas associadas com a Integral Primeira de Sessin e Henrard

Essa identificação caracteriza os principais comportamentos das variáveis canônicas

$$(u_i, h_j, U_i, k_j)$$

de modo a levar em consideração as influências da Comensurabilidade Laplaciana, do Parâmetro Característico do Movimento e do Equilíbrio Instantâneo Similar.

Recorrendo à equação (8.5) e resultados anteriores, encontramos suas estimativas dadas por:

$$u_1 = v_1$$

$$U_1 = V_1$$

$$u_2 = -1,0666.10^{-3}.X_{10} \left[-0,0583 + \cos \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] \dots \right] + X_{10}SZ - X_{10}\chi$$

$$U_2 = \ell + 0,5333.10^{-3}.\cos \left[n_0(t-t_0) + \phi_0^* \right] \dots$$

$$\frac{h_m}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{m0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} .\cos \alpha^* + \sum_{k=1}^3 H^*(m,0,k) .\cos [U_1 - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$$\frac{k_m}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{m0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} .\sen \alpha^* - \sum_{k=1}^3 H^*(m,0,k) .\sen [U_1 - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

onde:

i) $S = -0,3693607$

ii) $Z = \sum_{m=0}^{\infty} Z^*(m,0) .\cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 Z^*(m,k) .\sen [U_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*]$

$$\chi = \sum_{m=1}^{\infty} \chi^*(m,0) .\cos mV + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \chi^*(m,k) .\sen [U_1 + mV - w_k(t-t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

cujos coeficientes $Z^*(m,s)$ e $\chi^*(m,s)$ são definidos no Item [2.3] sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 .

$$\text{iii) } \alpha^* = \begin{cases} \alpha & \text{orientação } V_1, \alpha, \bar{w}_4 \quad (V_1 = V_{1REAL}) \\ \pi + \alpha & \text{orientação } V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4 \quad (V_1 = \pi + V_{1REAL}) \end{cases}$$

7 Variáveis canônicas originais

Esse passo identifica os principais comportamentos das variáveis canônicas

$$(X_i, P_j, \theta_i, Q_j)$$

de modo a levar em consideração as influências das Comensurabilidades 2:1 e Variação do Ângulo Crítico Laplaciano.

Dos resultados anteriores e equação (8.6), seguem-se as estimativas:

$$X_1 = X_{10} \left[1 + 0,3153197 \cdot Z - \frac{\chi}{2} \right]$$

$$\theta_1 = U_1 + U_2 + [-2,0157 \cdot 10^{-3} - 0,0682137 \cdot Z + 0,3153197 \cdot \chi]$$

$$X_2 = X_{10} \left[2,7085528 + 0,6846804 \cdot Z + \frac{\chi}{2} \right]$$

$$\theta_2 = U_1 - U_2 + [-2,0157 \cdot 10^{-3} - 0,0682137 \cdot Z - 0,6846804 \cdot \chi]$$

$$\frac{P_j}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{j_0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos\left(\alpha^* + U_1 + \frac{u_1}{2 \cdot X_{10}}\right) + \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k) \cdot \cos[w_k(t - t_0) + \varphi_{k0}^*]$$

$$\frac{Q_j}{\sqrt{X_{10}}} = \gamma_{j_0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen}\left(\alpha^* + U_1 + \frac{u_1}{2 \cdot X_{10}}\right) + \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k) \cdot \text{sen}[w_k(t - t_0) + \varphi_{k0}^*]$$

8 Elementos característicos do movimento

8.1 Semieixos maiores

Tais elementos são definidos de (7.7) e (8.8) por:

$$a_p = a_{p0} \left(\frac{L_p}{L_{p0}} \right)^2 \quad p = 1, 2, 3$$

onde:

$$\frac{L_p}{L_{p0}} = 1 + \left(\frac{X_{10}}{L_{p0}} \right) \cdot \ell(p) \cdot Z - m(p) \cdot \frac{\chi}{2}$$

Em termos da influência do Parâmetro Característico do Movimento são avaliados por:

$$\frac{L_1}{L_{10}} = 1 + 0,3153197 \cdot Z - 0,5 \cdot \chi$$

$$\frac{L_2}{L_{20}} = 1 + 0,0762696 \cdot Z + 2,1169911 \cdot \chi$$

$$\frac{L_3}{L_{30}} = 1 - 0,4856475 \cdot Z - 0,3546527 \cdot \chi$$

com:

Sato (1986)	Nasa (2007)
$a_{10} = 4,23158.10^5 km$	$a_{10} = 4,22968.10^5 km$
$a_{20} = 6,71748.10^5 km$	$a_{20} = 6,71446.10^5 km$
$a_{30} = 10,66353.10^5 km$	$a_{30} = 10,65873.10^5 km$
$a_{40} = 18,83282.10^5 km$	$a_{40} = 18,82700.10^5 km$

Ressalte-se para o modelo que:

$$a_4 = a_{40}$$

8.2 Ângulos críticos

Tais elementos podem ser avaliados da equação (8.7) por:

$$\theta_i = V_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{v_1}{X_{10}} - S^2 \cdot Z \right] + (-1)^{i+1} [U_2 - U_2^0] + \frac{1}{2} [S + (-1)^{i+1}] \cdot \chi$$

$$i = 1, 2$$

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\ell + 2[U_2^* - U_2^0] + \chi$$

onde:

i) $\frac{v_1}{X_{10}} = -4,0935.10^{-3}$

ii) $S = -0,3693607$

iii) $U_2^0 = -0,0311.10^{-3}$

iv) $U_2 = \ell + U_2^*$

onde ℓ é caracterizado pela orientação α , na qual o movimento é definido para $V_1 = V_{1REAL}$

8.3 Excentricidades

Esses elementos podem ser avaliados de (1.3), (2.5) e (4.27) através das estimativas:

$$e_{m0} = \sqrt{\frac{X_{10}}{L_{m0}}} \cdot \sqrt{\left(\frac{h_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)^2 + \left(\frac{k_m}{X_{10}} \right)^2}$$

cujas componentes (8.11):

$$\frac{h_m}{\sqrt{X_{10}}} = \left(\frac{h_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)_F + \left(\frac{h_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)_L$$

$$\frac{k_m}{\sqrt{X_{10}}} = \left(\frac{k_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)_F + \left(\frac{k_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)_L$$

identificam as componentes forçadas (8.12)

$$\left(\frac{h_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)_F = \gamma_{m0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \cos \alpha^*$$

$$\left(\frac{k_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)_F = \gamma_{m0} \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} \cdot \text{sen} \alpha^*$$

$m = 1, 2, 3$

e as componentes livres (8.13)

$$\left(\frac{h_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)_L = \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k) \cdot \cos[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$$\left(\frac{k_m}{\sqrt{X_{10}}} \right)_L = -\sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k) \cdot \text{sen}[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*]$$

$m = 1, 2, 3, 4$

Em particular, resalte-se de (8.15) a estimativa para o 4° satélite:

$$e_{40}^2 = \left(\frac{X_{10}}{L_{40}} \right) \left\{ \left[\sum_{k=1}^3 H^*(4, 0, k) \cdot \cos[w_k(t - t_0) + \varphi_{k0}^*] \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^3 H^*(4, 0, k) \cdot \text{sen}[w_k(t - t_0) + \varphi_{k0}^*] \right]^2 \right\}$$

de modo a levar em consideração o requisito da orientação do movimento na data considerada com respeito a tal satélite.

8.4 Longitudes dos pericentros

Tais elementos podem ser avaliados diretamente de (8.16) através das estimativas:

$$\bar{w}_p = -\varphi_p - U_1 - \frac{u_1}{2.X_{10}} \quad p = 1, 2, 3$$

onde:

$$\varphi_p = \arctg\left(\frac{k_p}{h_p}\right)$$

Em particular, resalte-se de (8.17) a estimativa para o 4º satélite:

$$\bar{w}_4 = -\arctg\left[\frac{\sum_{k=1}^3 H^*(4,0,k) \cdot \text{sen}[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^*]}{\sum_{k=1}^3 H^*(4,0,k) \cdot \text{cos}[w_k(t-t_0) + \varphi_{k0}^*]}\right]$$

de modo a levar em consideração o requisito da orientação do movimento na data considerada, com respeito a tal satélite.

4 Viabilidade do modelo

O modelo é a seguir utilizado para verificação de características conhecidas do movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter, tomando por referência características básicas definidas por Lieske (E₅) e Nasa (2007).

Tal estudo é aqui desenvolvido a partir das estimativas:

$$V_1 = V_1|_{t_0} + n_{10} \cdot (t - t_0)$$

$$V = V|_{t_0} + n_v \cdot (t - t_0)$$

onde:

i) $V_1|_{t_0} = 142^\circ,019$ (Nasa)

$V|_{t_0} = -117^\circ,320$ (Modelo)

- ii) $n_{10} = 1,2906 \cdot 10^{-2} \text{ rad/dia } (E_5)$
 $n_0 = 3,03 \cdot 10^{-3} \text{ rad/dia } (E_5)$
 $n_v = 1,5471 \cdot 10^{-2} \text{ rad/dia (Modelo)}$

de modo a negligenciar as contribuições de ordens superiores para tais elementos.

4.1 Referência Nasa (2007)

$$t_0: \text{JED } 2.450.464$$

Referência: E_5

$$\theta_1 = -485^\circ,978$$

$$V_{1\text{REAL}} = 143^\circ,955$$

$$\theta_2 = -666^\circ,113$$

- i) Elementos Característicos do Movimento na Data

Os correspondentes elementos foram avaliados anteriormente na Seção [2] pelas estimativas:

$$V_1 |_{t_0} = 142^\circ,019$$

$$V |_{t_0} = -117^\circ,320$$

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 8,6872 \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha^* = \alpha = 88^\circ,542$$

- ii) Identificação de Orientação na Data

Dos elementos:

$$V_{1\text{REAL}} = 143^\circ,955$$

$$V_1 = 142^\circ,019$$

segue-se que V_1 é definido nas vizinhanças da condição:

$$V_1 = V_{1\text{REAL}}$$

de modo a identificar que o movimento na data considerada é definido sob a orientação:

$$V_1, \alpha, \bar{w}_4 \text{ com } \alpha = \frac{\pi}{2} - X$$

cujos correspondentes elementos auxiliares de identificação são definidos pelas estimativas:

k	$V_1 - \varphi_{k0}^*$
1	-63°,156
2	-47°,889
3	215°,407

iii) Componentes das Excentricidades e Longitudes dos Pericentros

Sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 , tais elementos são definidos pelas estimativas:

$p [10^{-3}]$	$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_F$	$\left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_F$	$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_L$	$\left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_L$	$\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}$	$\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}$
1	0,1086	4,2663	-0,0972	-0,1662	0,0114	4,1001
2	-0,1908	-7,4947	0,1760	-0,4176	-0,0148	-7,9123
3	0,0260	1,0230	1,6946	-2,3666	1,7206	-1,3436

Com respeito ao 4° satélite, recorrendo a Seção [3.8] seguem-se as estimativas:

$$e_4 = 7,3996 \cdot 10^{-3}$$

$$\langle \bar{w}_4 \rangle = 351^\circ,490$$

iv) Elementos Característicos do Modelo

Sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 encontramos as estimativas:

1 Elementos auxiliares na data

$$Z = -4,1878 \cdot 10^{-3} \qquad \langle Z \rangle_{PER} = 0,0009 \cdot 10^{-3}$$

$$\chi = 0,2248 \cdot 10^{-5} \qquad U_2^* = -0,3703 \cdot 10^{-3}$$

2 Semieixos maiores

$\langle a_p \rangle [10^5 \text{ km}]$	Modelo Sato	Modelo Nasa	Nasa (2007)
p = 1	4,22059	4,21872	4,21800
p = 2	6,71325	6,71022	6,71100
p = 3	10,70693	10,70207	10,70400
p = 4	18,83282	18,82700	18,82700

Ressalte-se a acentuada diferença de mais de duas centenas de quilômetros para os valores dos semieixos maiores, definidos pelo modelo com respeito às duas referências consideradas. Uma possível justificativa é o uso das coordenadas de Jacobi no desenvolvimento de Marsden (1966), acrescida da necessidade de maior precisão dos valores dos semieixos maiores, associados à referência Nasa (2007).

3 Ângulos críticos

	Modelo	NASA (2007)
θ_1	231°,899	231°,963
θ_2	51°,937	52°,072
$\theta_1 - \theta_2$	179°,961	179°,889
$\Delta(\theta_1 - \theta_2)$	-2'17"	-6'40"

4 Excentricidades

$\langle e_p \rangle [10^{-3}]$	Modelo	Nasa (2007)	$(e_p)_R$	$(e_p)_L$
p = 1	4,1001	4,1	4,2676	0,1925
p = 2	9,3998	9,4	8,9065	0,5384
p = 3	1,3000	1,3	0,6094	1,7167
p = 4	7,3996	7,4	–	7,3996

5 Longitude dos pericentros

$\langle \bar{w}_p \rangle$	Modelo	Nasa (2007)
p = 1	128°,260	128°,126
p = 2	308°,208	308°,076
p = 3	256°,087	255°,969
p = 4	351°,490	351°,491

4.2 Referência Sato (1986)

t : JED 2.441.800,5

t – t₀ : -8663,5 dias

Referência E_5

$$\theta_1 = -52^\circ,810$$

$$V_{IREAL} = -142^\circ,799$$

$$\theta_2 = 487^\circ,212$$

i) Elementos característicos do movimento na data

$$V_1 = 142^\circ,019 - 286^\circ,306 = -144^\circ,287$$

$$V = -117^\circ,320 - 119^\circ,526 = 123^\circ,154$$

ii) Identificação de orientação na data

Dos elementos:

$$V_{IREAL} = -142^\circ,799 \quad V_1 = -144^\circ,287$$

segue-se que V_1 é definido nas vizinhanças da condição:

$$V_1 = V_{IREAL}$$

de modo a preservar a orientação original nesta data:

$$V_1, \alpha, \bar{w}_4 \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - X$$

cujos correspondentes Elementos Auxiliares de Identificação são definidos pelas estimativas:

k	$V_1 - w_k(t - t_0) - \phi_{k0}^*$
1	$-96^\circ,346$
2	$105^\circ,969$
3	$-39^\circ,033$

iii) Elemento $\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$ na Data

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 10^{-3} \cdot [7,8922 - 1,2322 \cdot \cos V - 0,1049 \cdot \cos 2V - 0,0039 \cdot \cos 3V + \dots - 0,3090 \cdot \sin V - 0,0354 \cdot \sin 2V - 0,0028 \cdot \sin 3V + \dots]$$

$$V = 123^\circ,954 \Rightarrow \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 8,3777 \cdot 10^{-3}$$

iv) Elemento α na data

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - [-0,0467922 - 0,0090498 \cdot \cos V - 0,0030427 \cdot \cos 2V - 0,0003957 \cdot \cos 3V \dots + 0,0208359 \cdot \sin V - 0,0088686 \cdot \sin 2V - 0,0007867 \cdot \sin 3V \dots]$$

$$V = 123^\circ,954 \Rightarrow \alpha = 90^\circ,892$$

v) Componentes das excentricidades e longitudes dos pericentros

Sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 , seguem-se as estimativas:

$p [10^{-3}]$	$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_F$	$\left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_F$	$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_L$	$\left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_L$	$\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}$	$\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}$	$\langle \bar{w}_p \rangle$
1	-0,0641	4,1151	0,0907	-0,1918	-0,0334	3,9233	53°,919
2	0,1125	-7,2252	-0,2504	-0,2248	-0,1379	-7,4540	235°,467
3	-0,0154	0,9867	-1,9626	-0,8618	-1,9780	0,1249	328°,020

Com respeito ao 4º satélite, encontramos as estimativas:

$$e_4 = 7,5258 \cdot 10^{-3}$$

$$\langle \bar{w}_4 \rangle = 71^\circ,050$$

vi) Elementos característicos do modelo

Sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 , seguem-se as estimativas:

1 Elementos auxiliares na data

$$Z = -4,1828 \cdot 10^{-3} \quad \langle Z \rangle_{PER} = 0,0059 \cdot 10^{-3}$$

$$\chi = 0,2028 \cdot 10^{-5} \quad U_2^* = -0,5072 \cdot 10^{-3}$$

2 Semieixos maiores

$\langle a_p \rangle [10^5 \text{ km}]$	Modelo Sato	Modelo Nasa	Sato (1986)
p = 1	4,22060	4,21873	4,22059
p = 2	6,71325	6,71021	6,71315
p = 3	10,70688	10,70202	10,70700
p = 4	18,83282	18,82700	18,83282

3 Ângulos críticos

	Modelo	Sato (1986)
θ_1	-54°,415	-54°,65
θ_2	-234°,361	-234°,55
$\theta_1 - \theta_2$	179°,946	179°,900
$\Delta(\theta_1 - \theta_2)$	-3'14"	-6'

4 Excentricidades

$\langle e_p \rangle [10^{-3}]$	Modelo	Sato (1986)	$(e_p)_F$	$(e_p)_L$
p = 1	3,9234	4,0859	4,1156	0,2122
p = 2	8,8568	9,4353	8,5845	0,3998
p = 3	1,1803	0,6988	0,5877	1,2765
p = 4	7,5258	7,5904	–	7,5258

5 Longitude dos pericentros

Comparativamente à referência Sato (1986), cuja origem do Sistema de Referência é a origem do Equinócio β - 1950, observamos que as longitudes dos pericentros dos dois primeiros satélites:

	Modelo	Sato (1986)
$\langle \bar{w}_1 \rangle$	53°,919	55°,334
$\langle \bar{w}_2 \rangle$	235°,467	234°,302

identificam uma independência de tais elementos com respeito a origem do sistema considerado.

Para as longitudes dos pericentros dos 3° e 4° satélites, tomando por origem a origem do Equinócio β - 1950 para a referência Nasa (2007), observamos:

	Modelo	Sato (1986)
$\langle \bar{w}_3 \rangle$	228°,067	123°,826
$\langle \bar{w}_4 \rangle$	331°,217	335°,236

de modo a identificar uma significativa discrepância para o 3° satélite.

6 Comentário

As discrepâncias acima observadas podem ser justificadas recorrendo-se as Características Livres do Movimento definidas a partir da referência Sato (1986).

Tomando-se suas correspondentes longitudes dos pericentros $\langle \bar{w}_j \rangle$ ($j = 3, 4$), definidas a partir da origem da referência Nasa (2007) por:

$$\langle \bar{w}_j \rangle + \Omega_j$$

onde Ω_j é a longitude do nodo ascendente de Júpiter, segue-se para a orientação V_1, α, \bar{w}_4 as estimativas do Sistema Variacional Livre na correspondente data:

k	$A_{k0}^* (10^{-3})$	ϕ_{k0}^*
1	0,0010981	-41°,021
2	0,8559055	106°,338
3	2,7301636	-56°,935

de modo a identificar na data JED 2.450.464 (Nasa, 2007)

k	$A_{k0}^* (10^{-3})$		ϕ_{k0}^*	
	Modelo (Sato)	Nasa	Modelo (Sato)	Nasa
1	0,0010981	0,0009983	212°,005	205°,175
2	0,8559055	0,8502696	186°,501	189°,908
3	2,7301636	2,5198468	-25°,069	-73°,388

bem como os correspondentes elementos característicos nessa data:

p	$e_p (10^{-3})$		$\langle \bar{w}_p \rangle$	
	Modelo (Sato)	Nasa	Modelo (Sato)	Nasa
1	3,70	4,1	129°,367	128°,116
2	8,28	9,4	308°,317	308°,076
3	1,52	1,3	195°,367	255°,969
4	7,57	7,4	356°,354	351°,491

As discrepâncias observadas para as excentricidades e longitudes dos pericentros dos satélites são conseqüências naturais das discordâncias de valores das amplitudes A_{k0}^* e fases φ_{k0}^* com respeito as duas referências.

4.3 Referência Marsden (1966)

$$t : \text{JED } 2.433.282,4$$

$$t - t_0 : -17181,6 \text{ dias}$$

Referência: E_5

$$\theta_1 = 127^\circ,885$$

$$V_{1REAL} = 217^\circ,972$$

$$\theta_2 = 308^\circ,060$$

i) Elementos característicos do movimento na data

$$V_1 = 142^\circ,019 - 105^\circ,096 = 36^\circ,925$$

$$V = -117^\circ,320 - 110^\circ,166 = 132^\circ,515$$

ii) Identificação de orientação na data

Dos elementos:

$$V_{1REAL} = 217^\circ,972$$

$$V_1 = 36^\circ,925$$

segue-se que V_1 é definido nas vizinhanças da condição:

$$V_1 = \pi + V_{1REAL}$$

de modo a não preservar a orientação original V_1, α, \bar{w}_4 na data considerada.

Nessa data o movimento é definido sob a orientação oposta:

$$V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$$

não obstante seus correspondentes elementos característicos:

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}, \alpha, \sum_{k=1}^3 H^*(m, 0, k)_{sen}^{\cos} \left[V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^* \right] \quad (m = 1, 2, 3)$$

preservem os mesmos valores se o movimento é definido sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 , cujos Elementos Auxiliares de Identificação são definidos pelas estimativas:

k	$V_1 - w_k(t - t_0) - \varphi_{k0}^*$
1	$3^\circ, 764$
2	$18^\circ, 083$
3	$185^\circ, 589$

Ressalte-se, porém, para o 4º satélite sua dependência com respeito às características impostas sobre o movimento pelo elemento $-\bar{w}_4$ discutido na Seção [2.2].

iii) Elemento $\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$

Sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 , segue-se que:

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 10^{-3} \cdot [8,6974 - 1,5119 \cdot \cos V - 0,1037 \cdot \cos 2V - 0,0081 \cdot \cos 3V + \dots \\ + 0,7774 \cdot \sin V + 0,0836 \cdot \sin 2V + 0,0070 \cdot \sin 3V + \dots]$$

$$V = 132^\circ, 515 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 10,2157 \cdot 10^{-3}$$

iv) Elemento $\pi + \alpha$ na data

Sob a orientação V_1, α, \bar{w}_4 , encontramos:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - [0,1204265 + 0,0227809 \cdot \cos V + 0,0076657 \cdot \cos 2V + 0,0009924 \cdot \cos 3V \dots \\ + 0,0071512 \cdot \sin V - 0,0097927 \cdot \sin 2V - 0,0010175 \cdot \sin 3V \dots]$$

$$V = 132^\circ, 515 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 83^\circ, 150$$

Consequentemente segue-se sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$ que:

$$\alpha^* = \pi + \alpha = -96^\circ, 850$$

v) Componentes das excentricidades e longitudes dos pericentros

Sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$, segue-se que:

P [10 ⁻³]	$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_F$	$\left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_F$	$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_L$	$\left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_L$	$\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}$	$\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}$	$\langle \bar{w}_p \rangle$
1	-0,5985	-4,9827	-0,2065	0,0131	-0,8050	-4,9696	62°,396
2	1,0515	8,7534	0,1483	0,0103	1,1998	8,7637	240°,991
3	-0,1435	-1,1948	1,9480	0,0201	1,8045	-1,1747	356°,258

Com respeito ao 4º satélite, encontramos as estimativas:

$$e_4 = 7,1311 \cdot 10^{-3}$$

$$\langle -\bar{w}_4 \rangle = 163^\circ,532$$

vi) Elementos característicos do modelo

1 Elementos auxiliares na data

$$Z = -4,2000 \cdot 10^{-3} \quad \langle Z \rangle_{PER} = -0,0113 \cdot 10^{-3}$$

$$\chi = -0,2455 \cdot 10^{-5} \quad U_2^* = -0,2919 \cdot 10^{-3}$$

2 Semieixos maiores

$\langle a_p \rangle [10^5 \text{ km}]$	Modelo Sato	Modelo Nasa
p = 1	4,22058	4,21870
p = 2	6,71311	6,71007
p = 3	10,70710	10,70224
p = 4	18,83282	18,82700

3 Ângulos críticos

	Modelo	LIESKE E ₅
θ_1	126°,809	127°,885
θ_2	306°,839	308°,060
$\theta_1 - \theta_2$	179°,970	179°,825
$\Delta(\theta_1 - \theta_2)$	-1'48"	-10'30"

4 Excentricidades

$\langle e_p \rangle [10^{-3}]$	Modelo	$(e_p)_F$	$(e_p)_L$
p = 1	5,0344	5,0185	0,2069
p = 2	10,5083	10,4737	0,1766
p = 3	1,2823	0,7166	1,1601
p = 4	7,1311	–	7,1311

5 Longitude dos pericentros

Comparativamente à referência Marsden (1966), cuja origem do Sistema de Referência é a origem do Equinócio β - 1950, encontramos por estimativas das longitudes dos pericentros dos dois primeiros satélites:

	Modelo	Marsden (1966)
$\langle \bar{w}_1 \rangle$	62°,396	93°,50
$\langle \bar{w}_2 \rangle$	240°,991	198°,20

Sob a condição de independência de tais elementos com respeito à origem do sistema considerado, constatamos a necessidade de uma precisão mais refinada dos Elementos Característicos do Movimento na data considerada.

Para as longitudes dos pericentros do 3° e 4° satélites, tomando por origem a origem do Equinócio β - 1950 para a referência Nasa (2007), observamos:

	Modelo	Marsden (1966)
$\langle \bar{w}_3 \rangle$	256°,305	245°,80
$\langle \bar{w}_4 \rangle$	-63°,579	42°,80

de modo a identificar uma discrepância significativa para a longitude do pericentro do 4° satélite.

4.4 Características médias do movimento para a referência Lieske (E_5)

$$t : \text{JED } 2.443.000,5$$

$$t - t_0 : -7463,5 \text{ dias}$$

Referência: E_5

$$\theta_1 = -245^\circ,386$$

$$V_{\text{IREAL}} = -155^\circ,386$$

$$\theta_2 = -65^\circ,386$$

i) Elementos característicos do movimento na data

$$V_1 = 142^\circ,019 - 118^\circ,955 = 23^\circ,064$$

$$V = -117^\circ,320 - 135^\circ,818 = 106^\circ,862$$

ii) Identificação de orientação na data

Dos elementos:

$$V_{\text{IREAL}} = -155^\circ,386 \quad V_1 = 23^\circ,064$$

segue-se que V_1 é definido nas vizinhanças da condição:

$$V_1 = \pi + V_{\text{IREAL}}$$

de modo a não preservar a orientação original V_1, α, \bar{w}_4 na data considerada.

Nessa data o movimento é definido sob a orientação oposta:

$$V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$$

cujas características são essenciais para a identificação do 4º satélite, não obstante, os elementos característicos do movimento associados com os três primeiros satélites possam ser identificados diretamente da orientação V_1, α, \bar{w}_4 , cujos correspondentes Elementos Auxiliares de Identificação são definidos pelas estimativas:

k	$V_1 - w_k(t - t_0) - \phi_{k0}^*$
1	-74°,811
2	1°,945
3	223°,633

iii) Elemento $\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}}$ na data

$$\sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 10^{-3} \cdot [8,1750 - 1,3306 \cdot \cos V - 0,1072 \cdot \cos 2V - 0,0055 \cdot \cos 3V + \dots + 0,2720 \cdot \text{sen} V + 0,0300 \cdot \text{sen} 2V + 0,0025 \cdot \text{sen} 3V + \dots]$$

$$V = 106^\circ,862 \Rightarrow \sqrt{\frac{-2v_2}{X_{10}}} = 8,8878 \cdot 10^{-3}$$

iv) Elemento $\pi + \alpha$ na data

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - [0,0418397 + 0,0079873 \cdot \cos V + 0,0026868 \cdot \cos 2V + 0,0003484 \cdot \cos 3V \dots + 0,0159481 \cdot \text{sen} V - 0,0092114 \cdot \text{sen} 2V - 0,0008626 \cdot \text{sen} 3V \dots]$$

$$V = 106^\circ,862 \Rightarrow \alpha = 86^\circ,649$$

Consequentemente segue-se sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$ que:

$$\alpha^* = \pi + \alpha = -93^\circ,351$$

v) Componentes das excentricidades e longitudes dos pericentros

Sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$ segue-se que:

$P [10^{-3}]$	$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_F$	$\left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_F$	$\left(\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_L$	$\left(\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}\right)_L$	$\frac{h_p}{\sqrt{X_{10}}}$	$\frac{k_p}{\sqrt{X_{10}}}$	$\langle \bar{w}_p \rangle$
1	-0,2552	-4,3587	-0,0575	-0,1820	-0,3127	-4,5408	70°,995
2	0,4483	7,6572	0,1191	-0,3673	0,5674	7,2899	251°,507
3	-0,0612	-1,0451	1,1121	-1,9324	1,0509	-2,9775	47°,616

Com respeito ao 4° satélite, definido sob a orientação $V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4$, encontramos as estimativas:

$$e_4 = 7,2582 \cdot 10^{-3}$$

$$\langle -\bar{w}_4 \rangle = 160^\circ,224$$

vi) Elementos característicos do modelo

Ressalte-se nas Tabelas de Comparação, a seguir, que a referência Lieske (1998) define as reais características do movimento, enquanto o modelo identifica as características médias de correspondentes elementos.

1 Elementos auxiliares na data

$$Z = -4,1881 \cdot 10^{-3} \quad \langle Z \rangle_{PER} = 0,0006 \cdot 10^{-3}$$

$$\chi = -0,0708 \cdot 10^{-5} \quad U_2^* = 0,5247 \cdot 10^{-3}$$

2 Semieixos maiores

$\langle a_p \rangle$ [10^5 km]	Modelo Sato	Modelo Nasa	Lieske E ₅
p = 1	4,22060	4,21873	4,21769
p = 2	6,71317	6,71013	6,71078
p = 3	10,70696	10,70210	10,70427
p = 4	18,83282	18,82700	18,82758

3 Ângulos críticos

	Modelo	Lieske E ₅
θ_1	-247°,005	-245°,386
θ_2	-67°,069	-65°,386
$\theta_1 - \theta_2$	180°,064	180°
$\Delta(\theta_1 - \theta_2)$	-3'50"	—

4 Excentricidades

$\langle e_p \rangle [10^{-3}]$	Modelo	$(e_p)_F$	$(e_p)_L$
p = 1	4,5516	4,3662	0,1909
p = 2	8,6865	9,1123	0,4587
p = 3	1,8804	0,6235	1,3278
p = 4	7,2582	-	7,2582

5 Longitude dos pericentros

Comparativamente às referência Lieske (E_5), cuja origem do Sistema de Referência é a origem do Equinócio β - 1950, observamos que as longitudes dos pericentros dos dois primeiros satélites:

	Modelo	Lieske (E_5)
$\langle \bar{w}_1 \rangle$	70°,995	49°,247
$\langle \bar{w}_2 \rangle$	251°,507	255°,032

sob a condição de independência de tais elementos com respeito à origem do sistema considerado, identificam uma acentuada discordância para a longitude do pericentro do primeiro satélite.

Para as longitudes dos pericentros dos 3° e 4° satélites, tomando por origem a origem do Equinócio β - 1950 para a referência Nasa (2007), observamos:

	Modelo	Lieske (E_5)
$\langle \bar{w}_3 \rangle$	307°,663	307°,378
$\langle \bar{w}_4 \rangle$	299°,729	297°,305

5 Comentários finais

Objetivando satisfazer o requisito básico de De Sitter (1925) para o estudo de um problema ressonante, este trabalho se apresentou como uma contribuição investigativa de características do

movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter, tendo em vista a referência original da qual se origina (Marsden, 1966).

Esse processo de investigação, a partir das ideias básicas de Sessin (1983) e Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito ao Método de Hori (1966), abre a possibilidade de definição de uma solução intermediária do movimento, que certamente é mais próxima da realidade do que as órbitas keplerianas.

As características locais, decorrentes das influências das Comensurabilidades (Ferraz-Mello, 1985) e do Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983), conduzem a efetivos valores de referência e rígidas limitações dos campos de variações dos elementos do movimento. Como natural consequência constata-se a necessidade de uma precisão mais refinada dos dados da referência original, de modo a satisfazer a sensibilidade das Equações Variacionais dos correspondentes Sistemas Livre e Forçado.

Não obstante possa contribuir para o estudo de características do movimento dos Satélites Galileanos de Júpiter, este trabalho deixa em aberto outras investigações decorrentes de novas questões oriundas do próprio modelo:

- i) Necessidade de um estudo mais aprofundado das limitações impostas pelas características locais decorrentes do conceito de Equilíbrio Instantâneo (Henrard, 1983).
- ii) Aperfeiçoamento do modelo a partir de suas próprias características para um estudo mais refinado das contribuições de ordens superiores.
- iii) Interpretação da natureza física da Função Característica do Movimento associada à influência da Comensurabilidade Laplaciana.
- iv) Aperfeiçoamento da definição do Parâmetro Característico do Movimento com respeito a condição do Equilíbrio de Laplace.
- v) Interpretação da natureza física da condição de eliminação do termo misto de Poisson no estudo das contribuições de ordens superiores associadas com a geratriz da Transformação de Hori (1966).

vi) Investigação do conceito de orientação do movimento sob uma condição mais geral, definida pelas possibilidades

$$V_1, \alpha, \bar{w}_4; V_1, \alpha, -\bar{w}_4; V_1, \pi + \alpha, \bar{w}_4; V_1, \pi + \alpha, -\bar{w}_4.$$

Ainda que sujeito a tais necessidades de aprimoramento, este estudo apresenta entre suas contribuições a identificação de estimativas médias das características livres e forçadas do movimento, a partir das referências Sato (1986) e Nasa (2007). Em particular ressaltamos o principal comportamento do Ângulo Crítico Laplaciano.

Outro resultado importante, decorrente da aplicação do modelo em relação a Lieske (1998), abre a possibilidade de que, sob tais influências locais, os elementos médios de Marsden (1966) sejam boas estimativas dos correspondentes elementos do movimento na data considerada.

Outras observações poderiam ser inseridas neste contexto, mas certamente é necessário um conjunto mais completo de dados de uma única referência original, de modo a permitir uma melhor avaliação dos resultados de uma análise dos comportamentos dos correspondentes elementos característicos do movimento.

Como seu principal resultado, este trabalho corrobora as ideias básicas de Sessin (1983) e Sessin e Ferraz-Mello (1984) com respeito ao Método de Hori (1966) como sendo uma recomendável diretriz para se estabelecer condições necessárias para o requisito básico de De Sitter (1925) no estudo de um problema ressonante.

SOBRE O LIVRO

Formato: 14 x 21 cm
Mancha: 23,7 x 42,5 paicas
Tipologia: Horley Old Style 10,5/14
Papel: Off-set 75 g/m² (miolo)
Cartão Supremo 250 g/m² (capa)
1ª edição: 2012

EQUIPE DE REALIZAÇÃO

Coordenação Geral
Marcos Keith Takahashi

Foto de Capa

NASA – *Image of the Day Gallery: a composite of Jovian system*
Júpiter e seus satélites (de cima para baixo): Io, Europa, Ganimedes e Calisto.
Fonte: <http://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_592.html>

As quatro maiores luas de Júpiter – Io, Europa, Ganimedes e Calisto – são conhecidas como satélites galileanos, em homenagem ao físico e astrônomo italiano Galileo Galilei (1564-1642), que as descobriu em janeiro de 1610. As três luas mais internas – Io, Europa e Ganimedes – possuem uma característica intrigante observada pelo astrônomo e matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827): enquanto Io realiza quatro voltas ao redor de Júpiter, Europa realiza duas voltas e Ganimedes uma, o que define uma ressonância orbital na razão 4:2:1.

Utilizando técnicas modernas de teoria de perturbações baseadas em séries de Lie, os autores deste livro apresentam um detalhado estudo analítico para um modelo matemático que descreva a dinâmica dos satélites galileanos. Uma solução analítica é apresentada para as variações de longo período para o movimento plano ao redor de um corpo central massivo de quatro corpos menores de massas comparáveis, com a condição de os períodos orbitais dos três primeiros corpos serem aproximadamente comensuráveis na razão 4:2:1.

SANDRO DA SILVA FERNANDES

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos,

Roberto Artur Cornetti Silva é graduado em Engenharia Mecânica (1970) pela Faculdade de Engenharia (FEG) da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Unesp), campus de Guaratinguetá, e possui mestrado (1974) e doutorado (1986) em Matemática Aplicada pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). É professor-assistente do Departamento de Matemática da FEG/Unesp.

Rodolpho Vilhena de Moraes possui graduação em Matemática (1962) pela Universidade Mackenzie, mestrado em Matemática Aplicada (1969) e doutorado em Mecânica Orbital e Dinâmica do Vôo (1978) pelo ITA. Atualmente é professor visitante Nacional Sênior no Instituto de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal de São Paulo (ICT/Unifesp).

Maria Cecília França de Paula Santos Zanardi é graduada em Engenharia Mecânica (1978) pela FEG/Unesp e possui mestrado (1983) e doutorado (1993) em Engenharia Mecânica e Aeronáutica pelo ITA. É professora-adjunta do Departamento de Matemática da FEG/Unesp.



ISBN 978-85-393-0377-9

