



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Douglas Toseto Marçal de Oliveira

ESTUDO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS EM
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO
AUTÔNOMAS

São José do Rio Preto
2014

Douglas Toseto Marçal de Oliveira

Estudo de Órbitas Periódicas em Equações Diferenciais Não
Autônomas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Luci Any Francisco Roberto

São José do Rio Preto
2014

Oliveira, Douglas Toseto Marçal de.

Estudo de orbitas periódicas em equações diferenciais não autônomas / Douglas Toseto Marçal de Oliveira. -- São José do Rio Preto, 2014
98 f. : il.

Orientador: Luci Any Francisco Roberto

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Soluções periódicas. 4. Método da média (Equações diferenciais) I. Roberto, Luci Any Francisco. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Douglas Toseto Marçal de Oliveira

Estudo de Órbitas Periódicas em Equações Diferenciais Não
Autônomas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Luci Any Francisco Roberto
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Coorientadora

Prof^a. Dr^a. Ana Cristina Mereu
Professor Adjunto
UFSCAR - Sorocaba

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 14 de março de 2014.

Agradecimentos

Agradeço a todos que direta ou indiretamente me apoiaram para que eu chegasse até aqui. Em particular agradeço:

Aos meus professores, em especial à minha orientadora Prof^a. Dr^a. Luci Any, por todo auxílio e paciência frente às minhas dificuldades.

Aos meus familiares, em particular aos meus pais, por toda ajuda e apoio que me deram durante os últimos anos.

Aos meus amigos, Henrique, Saulo, Makswell, Rondinele, Anderson, Christian, Marcela, Lucas, Letícia, André e Mateus que sempre estão lá por mim, para me animar, ouvir meus problemas e me fazer esquecer deles temporariamente.

À minha noiva, Gabriela Oliveira da Silva, por ser meu porto seguro, aquela que está sempre comigo, não importando os momentos, e que me fez não desistir frente às dificuldades.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho temos por objetivo estudar o número de ciclos limites de uma equação diferencial que persistem por pequenas perturbações de um parâmetro ε suficientemente pequeno. Para tanto, estudamos o método proposto por B. Coll, A. Gasull e R. Prohens, que se baseia no estudo das equações variacionais, a Teoria da Média de primeira ordem em sua forma padrão, e uma variação dessa teoria que utiliza o Teorema de Redução de Lyapunov-Schmidt. E foram feitas aplicações de cada método.

Palavras-chave: soluções periódicas, *averaging method*, sistemas dinâmicos.

Abstract

In this work our goal is to study the number of limit cycles of a differential equation that remain after a small perturbation of a small parameter ε . For that, we study a method proposed by B. Coll, A. Gasull and R. Prohens, which is based on the study of variational equations, the averaging theory of first order, and a variation of this theory that uses the Lyapunov-Schmidt reduction Theorem. We apply these results to several families of differential equations.

Palavras-chave: periodic solutions, averaging method, dynamical systems.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	12
1.1 Equações diferenciais ordinárias	12
1.1.1 Existência e unicidade de soluções	14
1.1.2 Equações diferenciais lineares	17
1.1.3 Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes	20
1.1.4 Equações diferenciais lineares no plano	21
1.1.5 Equações diferenciais autônomas	24
1.1.6 Conjugação e equivalência de sistemas diferenciais	26
1.1.7 Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos	28
1.1.8 Estrutura local das órbitas periódicas	29
1.1.9 Estabilidade de Lyapunov	31
1.1.10 Equação variacional	34
1.1.11 Teoria de Floquet	35
1.2 Mudanças de coordenadas	42
1.3 Resultante de polinômios	46
2 Métodos para encontrar quotas inferiores de ciclos limites	47
2.1 Teoria da média padrão de primeira ordem	47
2.2 Método via estudo de equações variacionais	58
2.3 Método via Redução de Lyapunov-Schmidt	65
3 Aplicações	70
3.1 Aplicações do método via equação variacional	70
3.1.1 Sistemas autônomos	70
3.1.2 Sistemas não-autônomos	80
3.2 Aplicações do método via Redução de Lyapunov-Schmidt	88
3.3 Aplicação da Teoria da Média	92

Cap. 0

Sumário **7**

Bibliografia

97

Introdução

Os primórdios da teoria dos sistemas dinâmicos datam no século XVI, nos trabalhos de mecânica celeste de Johannes Kepler e na modelagem matemática através da formalização da mecânica clássica de Isaac Newton. Um marco nos estudos das equações diferenciais é a obra *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, publicada em três volumes entre 1892 e 1899 pelo matemático francês Henri Poincaré, considerado um dos criadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos. Tal obra introduziu muitos dos aspectos do estudo qualitativo das equações diferenciais permitindo estudar propriedades das soluções de uma equação diferencial, como estabilidade e periodicidade, sem ser necessário resolver explicitamente a equação diferencial. Nessa publicação surge, pela primeira vez, a noção de ciclo limite.

Hoje, muitas vezes motivado por aplicações práticas na física, engenharia ou biologia, o estudo das propriedades dos ciclos limites, como sua existência ou não, e o número de ciclos limites de um sistema, se tornou um tema recorrente.

Nesse trabalho, apresentamos alguns métodos para quantificar o número de ciclos limites que persistem após pequenas perturbações em um sistema de equações diferenciais. Estudamos um método proposto por B. Coll, A. Gasull e R. Prohens em [3] onde são definidas funções convenientes tais que para cada zero simples de tais funções, temos um ciclo limite associado. Estudamos também a Teoria da Média padrão de primeira ordem, conhecido como Método do *Averaging* de primeira ordem, onde também é definida uma função, denominada de função média, tal que para cada zero simples da função, que é um ponto singular de uma equação diferencial, existe um ciclo limite do problema original. Além disso, a estabilidade do ponto singular é preservada pelo ciclo limite. E, por último, estudamos uma variação da Teoria da Média, que é apresentada por A. Buicã, J. Françoise e J. Llibre [2].

A presente dissertação está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 1 abordamos os conceitos básicos do estudo das equações diferenciais ordinárias, sua definição, o Teorema de Existência e Unicidade de soluções, a caracterização dos sistemas lineares e alguns tópicos que são usados nos resultados do segundo capítulo, como Estabilidade de Lyapunov e Teoria de Floquet.

No Capítulo 2 apresentamos os resultados principais dos métodos estudados para

se obter quotas inferiores de ciclos limites. Na seção 2.1 consideramos uma equação diferencial com valor inicial da forma

$$\begin{aligned}x' &= \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon) \\x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{1}$$

onde $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ é T -periódica e ε é um parâmetro suficientemente pequeno. Definimos a função média de f como

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.\tag{2}$$

O Método da Média de primeira ordem nos diz que, sob certas condições, cada zero simples da função média (2) temos uma solução T -periódica de (1) associada.

Os outros dois métodos, que comentamos a seguir, podem ser aplicados em equações diferenciais que possuem um termo que não multiplica o parâmetro ε .

Na Seção 2.2 apresentamos o método proposto em [3], onde consideramos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dr}{dt} = f(t, r, \varepsilon) = f_0(t, r) + \sum_{i=1}^m f_i(t, r) \varepsilon^i + O(\varepsilon^{m+1}),\tag{3}$$

onde $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, cada $f_i : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função real, suave e T -periódica na variável t , para cada $i = 0, \dots, m$, e ε é um parâmetro suficientemente pequeno. Assumimos que a equação não-perturbada

$$\frac{dr}{dt} = f_0(t, r); \quad t \in [0, T], \quad r \in \mathbb{R}^d.\tag{4}$$

possui um aberto contínuo de soluções T -periódicas. Para determinar quais soluções de (4) permanecem como soluções de (3) para $\varepsilon \neq 0$ definimos, a partir do conhecimento explícito da equação não-perturbada (4), funções $M_i(\rho)$ tais que cada zero simples dá origem a uma solução periódica de (3). Por exemplo, a expressão de $M_1(\rho)$ é dada por

$$M_1(\rho) = \int_0^T (D_\rho \varphi_0(t, \rho))^{-1} f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) dt,$$

onde φ_0 é solução da equação não-perturbada (4). Neste método, quando $f_0(t, r) \equiv 0$ temos exatamente o método da média da seção (2.1).

Na seção 2.3 estudamos o método proposto em [2], ou seja, consideramos uma equação diferencial da forma

$$x'(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon),\tag{5}$$

onde ε é um parâmetro suficientemente pequeno, $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $R : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ são funções de classe \mathcal{C}^2 , T -periódicas na variável t , $F_0(t, x)$ é não-nula em $\mathbb{R} \times \Omega$ e Ω é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Definimos então uma função

$$f_1(\alpha) = \Pi \int_0^T Y_\alpha^{-1}(t) F_1(t, x_\alpha(t)) dt, \quad (6)$$

onde x_α é uma solução T -periódica da equação

$$x'(t) = F_0(t, x), \quad (7)$$

$Y_\alpha(t)$ é a matriz fundamental da equação

$$y' = P(t, z)y, \quad (8)$$

onde $P(t, z) = D_x F_0(t, x(t, z, 0))$, e Π é a projeção de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^k , $k \leq n$. Então, sob certas condições em $Y_\alpha^{-1}(0) - Y_\alpha^{-1}(T)$, para cada zero simples de (6) existe uma solução T -periódica da equação diferencial (5).

Para finalizar, no Capítulo 3 exibimos alguns exemplos e aplicações dos métodos trabalhados no Capítulo 2. Aplicamos o método proposto em [3], que denominamos Método via estudo de Equações Variacionais, em sistemas autônomos e não-autônomos, em particular no sistema planar

$$\begin{cases} x' = -y + x^2/2 + \varepsilon P(x, y), \\ y' = x + xy/2 + \varepsilon Q(x, y), \end{cases} \quad (9)$$

onde P e Q são polinômios quadráticos, e concluímos que esse sistema tem pelo menos dois ciclos limites. No sistema (9) também tentamos aplicar o Método da Média. Para escrever (9) na forma (1) usamos coordenadas polares, mas neste caso a função média é identicamente nula. Aplicamos a mudança de coordenadas do Teorema 1.2.1, e novamente a função média de primeira ordem é identicamente nula.

O método apresentado por Buicã, Françoise e Llibre em [2], o qual vamos nos referir por Método via Redução de Lyapunov-Schmidt, é aplicado na equação

$$x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x''), \quad (10)$$

para $\mu \neq 0$, onde as variáveis x e t e os parâmetros μ e ε são reais, ε é suficientemente pequeno, a função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe \mathcal{C}^2 e Ω é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^3 .

Como aplicações do Método da Média consideramos a equação (10) com $\mu = 0$ e concluímos que (10) tem um ciclo limite. Aplicamos o mesmo método no sistema diferencial planar

$$\begin{cases} x' = -y + x^2 + \varepsilon p(x, y) \\ y' = x + xy + \varepsilon q(x, y), \end{cases} \quad (11)$$

onde $p(x, y) = a_1y - a_3x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6y^2$ e $q(x, y) = a_1y + a_2x^2 + a_4xy - a_2y^2$. Para escrever (11) na forma (1) aplicamos a mudança de variável do Teorema 1.2.1, e concluimos que esse sistema tem no máximo dois ciclos limites. Para o sistema (11) também aplicamos o Método via estudo de Equações Variacionais depois de realizar a mudança de coordenadas polar, e, sob certas considerações particulares, concluimos e esse sistema possui dois ciclos limites.

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo é dedicado à apresentação dos conceitos básicos da Teoria Qualitativa das equações diferenciais ordinárias desde a definição do que é uma equação diferencial ordinária até alguns resultados. Diversos resultados foram apenas enunciados, mas as demonstrações podem ser encontradas nas referências bibliográficas. Para este capítulo utilizamos como bibliografia os livros [4],[10], [11], [12] e [13].

1.1 Equações diferenciais ordinárias

Uma equação diferencial ordinária (ou EDO) é uma equação que envolve as derivadas de uma função real desconhecida. As EDO's são usadas para descrever relações envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. As equações diferenciais evoluíram dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral, descobertos por Newton e Leibnitz, e elaborados no século XVII para resolver problemas motivados por considerações vindas da física ou da geometria. A partir daí, a procura e análise de soluções se tornou uma finalidade própria.

Nesta seção apresentamos a definição formal das equações diferenciais ordinárias e resultados básicos associados à teoria qualitativa das EDOs.

Uma equação diferencial ordinária pode ser escrita na sua forma geral

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

onde $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^r . A variável real t é chamada de variável independente e a variável x é chamada de variável dependente, pois depende de t .

Dizemos que $x(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde I é um intervalo, é uma solução de (1.1) se $x(t)$ tem derivadas até ordem n e satisfaz a equação (1.1).

A equação diferencial (1.1) é dita ordinária, pois envolve apenas derivadas com relação a uma única variável independente t .

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, U um aberto. Um campo de vetores de classe \mathcal{C}^r é uma função $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $r \geq 1$, $r = \infty$ ou $r = \omega$ (isto é, o campo de vetores X é analítico).

Ao campo de vetores X podemos associar uma equação diferencial da forma

$$x' = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

onde x' é a derivada com relação à variável independente. Reciprocamente, dada uma EDO da forma (1.2) podemos associar um campo de vetores em \mathbb{R}^n .

As soluções de (1.2) são aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow U$, I um intervalo, tais que $\frac{d\varphi}{dt} = X(\varphi(t))$, para todo $t \in I$, ou seja, $\varphi(t)$ satisfaz (1.2).

As soluções de (1.2) são chamadas *curvas integrais*, *trajetórias*, ou *órbitas*.

Um ponto $x_0 \in U$ é chamado de *ponto singular*, ou *ponto de equilíbrio*, se $X(x_0) = 0$, e *ponto regular* se $X(x_0) \neq 0$.

Se x_0 é ponto singular então a curva $\varphi(t) = x_0$, para $t \in (-\infty, \infty)$, é uma solução de (1.2), pois $\frac{d\varphi}{dt}(t) = 0 = X(x_0) = X(\varphi(t))$.

Uma curva integral $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de X chama-se máxima se para toda curva integral de X , $\psi : J \rightarrow U$ temos que $J \subset I$ e $\varphi|_J = \psi$.

A equação (1.2) admite a seguinte interpretação geométrica: φ é uma curva integral de X se, e somente se, o vetor tangente $\varphi'(t)$ em $\varphi(t)$ coincide com o valor que X assume em $\varphi(t)$, ou seja, $X(\varphi(t))$. Veja a figura 1.1.

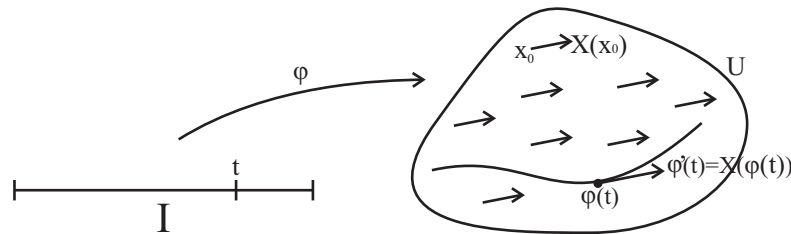


Figura 1.1. Curva integral

Uma EDO do tipo (1.2) é chamada de equação diferencial autônoma, pois não depende explicitamente de t .

As equações da forma

$$x' = f(t, x), \tag{1.3}$$

onde $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto, é de classe \mathcal{C}^r , são chamadas não-autônomas.

1.1.1 Existência e unicidade de soluções

Apresentamos a seguir o teorema que é o pilar da teoria das equações diferenciais ordinárias, o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções. Este resultado nos garante quando uma equação diferencial ordinária com uma condição inicial tem uma única solução.

Consideramos a EDO com condição inicial, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde $(t_0, x_0) \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto, f de classe C^r e $r \geq 1$. Chamamos (1.4) de problema de valor inicial (PVI).

Uma solução deste problema é uma aplicação $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^r , tal que

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)), e \\ \varphi(t_0) = x_0, \end{cases}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo contendo t_0 , $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$.

Antes de demonstrar o resultado sobre existência e unicidade de soluções de (1.4), conhecido como Teorema de Picard, apresentamos definições e alguns resultados de análise. As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em [12].

Definição 1.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Dizemos que $f(t, x)$ é Lipschitz na segunda variável se existe uma constante $k \geq 0$ tal que $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$, para todo $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$.*

Lema 1.1.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é um aberto e convexo, e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e continuamente diferenciável na variável x , tal que $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \leq K$, para uma constante positiva k , então f é Lipschitz em Ω .*

Definição 1.1.2. *Seja X um espaço métrico completo e $d(x, y)$ a distância de x a y . Dizemos que $T : X \rightarrow X$ é uma contração se existe $0 \leq c < 1$ tal que para todo ponto $x, y \in X$ tem-se $d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$.*

O resultado a seguir garante que uma contração de um espaço métrico nele mesmo tem um único ponto fixo. Este resultado é conhecido como Teorema do Ponto Fixo.

Teorema 1.1.1. *Seja $T : X \rightarrow X$ uma contração. Então*

- a) T possui um único ponto fixo (isto é, um ponto tal que $T(p) = p$),
 b) p é um atrator, isto é, para todo $x \in X$, $T^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$.

Corolário 1.1.1. *Suponhamos que $T : X \rightarrow X$ é um operador tal que T^m é uma contração, para um certo $m \in \mathbb{N}$. Então:*

- a) *Existe um único ponto fixo p para T ,*
 b) *p é um atrator.*

Observamos que $\varphi : I_{x_0} \rightarrow U$ é uma solução de $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0$, onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e Ω é um aberto com $\Omega \subset \mathbb{R} \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se, e somente se, $\varphi(t)$ satisfaz

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Teorema 1.1.2. *(Teorema de Picard):*

Consideramos o PVI

$$\begin{cases} x' &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω é da forma $\Omega = I_a \times B_b$ com $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$. Se f é contínua e Lipschitz na 2ª variável em Ω com constante de Lipschitz K , e $|f| \leq M$ em Ω , e então o PVI (1.5) possui uma única solução $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$, $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ um intervalo, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Demonstração. Aplicamos o Corolário 1.1.1.

Seja $X = \{\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b \text{ contínuas}\}$. Consideramos em X a métrica dada por

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Consideramos o operador T definidos em X da seguinte forma, para $\varphi \in X$,

$$T(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R},$$

$$T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Temos que $T(\varphi) \in X$. De fato, $T(\varphi)(t)$ é contínua em I_α e

$$|T(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b,$$

ou seja, $T(\varphi)(t) \in B_b$. Logo, T é uma aplicação de X em X .

Para aplicar o Corolário 1.1.1 falta verificar que para algum m , T^m é uma contração.

De fato, sejam $\psi_1, \psi_2 \in X$. Temos

$$|T^m(\psi_1)(t) - T^m(\psi_2)(t)| \leq \frac{K^m}{m!} d(\psi_1, \psi_2) |t - t_0|^m. \quad (1.6)$$

Para mostrar que T^m é uma contração utilizamos indução em m . Quando $m = 0$ é imediato. Suponhamos que (1.6) vale para $m = n$ e provamos que vale para $m = n + 1$.

$$\begin{aligned} |T^{m+1}(\psi_1)(t) - T^{m+1}(\psi_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, T^m(\psi_1))(s) - f(s, T^m(\psi_2)(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, T^m(\psi_1)(s)) - f(s, T^m(\psi_2)(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t K |T^m(\psi_1)(s) - T^m(\psi_2)(s)| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t K \left(\frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(\psi_1, \psi_2) \right) ds \\ &= \frac{K^{m+1}}{m!} d(\psi_1, \psi_2) \int_{t_0}^t |t - t_0|^m ds \\ &= \frac{K^{m+1}}{(m+1)!} d(\psi_1, \psi_2) |t - t_0|^{m+1}. \end{aligned}$$

Notamos que $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{K^m \alpha^m}{m!}$ é uma série convergente, onde K é a constante de

Lipschitz da função f , pois pelo teste da razão $\left| \frac{\frac{K^{m+1} \alpha^{m+1}}{(m+1)!}}{\frac{K^m \alpha^m}{m!}} \right| = \frac{K \alpha}{m+1} < 1$. Segue da Análise, que a sequência dos termos dessa série convergem para zero. Portanto, para um m suficientemente grande temos $\frac{K^m \alpha^m}{m!} < 1$. Com isso, concluímos que T^m é uma contração. Segue do Corolário 1.1.1 que existe $\varphi \in X$ um ponto fixo de T , ou seja,

$$T(\varphi) = \varphi,$$

o que implica

$$T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds = \varphi(t).$$

Isto prova o Teorema de Picard. □

A seguir definimos solução máxima de uma equação diferencial e apresentamos um teorema que trata de propriedades das soluções.

Definição 1.1.3. Chama-se *solução máxima* de

$$x' = f(t, x) \quad (1.7)$$

a toda solução φ definida num intervalo I , denominado *intervalo máximo* de φ , tal que se ψ é outra solução no intervalo J com $J \supseteq I$ e $\varphi = \psi|_I$, então $I = J$. Em outras palavras, φ é máxima se não admite nenhuma extensão que também é solução de (1.7).

Teorema 1.1.3. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ ou $k = \omega$ (ou seja, f é analítica), onde Ω é um aberto.

a) (*Existência de soluções máximas*): Para cada $(r_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega$ existe um intervalo I_{x_0} aberto onde está definida a única solução máxima φ_{x_0} da equação diferencial $x' = f(t, x, \lambda)$ tal que $\varphi_x(0) = x_0$.

b) (*Propriedade de grupo*): Se $y = \varphi_x(t)$ e $t \in I_x$ então $I_y = I_x - t = \{u - t; u \in I_x\}$ e $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$, $\forall s \in I_y$.

c) (*Regularidade com relação às condições iniciais*): O conjunto $D = \{(t, r, x, \lambda); (r, x, \lambda) \in \Omega \text{ e } t \in I_x\}$ é aberto em $\mathbb{R} \times \Omega$ e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \Omega$ dada por $\varphi(t, r, x, \lambda) = \varphi_x(t)$ é de classe C^k (mesma regularidade de f). Além disso, satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, r, x, \lambda) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \lambda) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, r, x, \lambda).$$

1.1.2 Equações diferenciais lineares

No conjunto das equações diferenciais, a classe mais simples é a das equações lineares, a qual é possível explorar bem as propriedades de suas soluções e, no caso de coeficientes constantes, é possível resolvê-las.

Consideramos a equação diferencial

$$x' = A(t)x + b(t), \quad (1.8)$$

onde $A : I \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é uma função matriz e $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetor, ambas contínuas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

A equação diferencial (1.8) chama-se *equação diferencial linear*. Se $b \equiv 0$ então dizemos que (1.8) é homogênea.

O resultado a seguir segue do Teorema de Picard.

Teorema 1.1.4. Para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ de (1.8) definida em I tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Escrevendo (1.8) na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Assim, (1.8) é um sistema de n equações diferenciais

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t). \end{cases} \quad (1.10)$$

Proposição 1.1.1. Sejam $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ soluções da equação homogênea

$$x' = A(t)x, \quad (1.11)$$

onde $A(t)$ é contínua em $I \subset \mathbb{R}$.

a) Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $y = a\varphi + b\psi$ também é solução de (1.11).

b) Se $\varphi(s) = 0$ para algum $s \in I$, então $\varphi(t) \equiv 0$ em I .

Sejam $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $S \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ o espaço das soluções da equação $x' = A(t)x$.

Corolário 1.1.2. S é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ de dimensão n .

Demonstração. A parte a) da proposição anterior mostra que S é subespaço vetorial de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Definimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varepsilon_s : S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi &\mapsto \varphi(s). \end{aligned}$$

Esta aplicação é linear, pois $\varepsilon_s(a\varphi + b\psi) = a\varphi(s) + b\psi(s) = a\varepsilon_s(\varphi) + b\varepsilon_s(\psi)$. Além disso, ε_s é um isomorfismo, pois $\varepsilon_s(\varphi(t, s, x_0)) = \varphi(s, s, x_0) = x_0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pela parte b) da Proposição (1.1.1) temos $\ker\{\varepsilon_s\} = \{0\}$. Portanto, o Teorema do Núcleo e da Imagem garante que $\dim S = n$. \square

Notamos que se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de \mathbb{R}^n , então $\{\varphi_1(t, s, v_1), \dots, \varphi_n(t, s, v_n)\}$ forma uma base para S , isto é, toda solução de $x' = A(t)x$ se expressa de maneira única como combinação linear de $\varphi_1(t, s, v_1), \dots, \varphi_n(t, s, v_n)$.

Equações do tipo

$$M' = A(t)M \quad (1.12)$$

são chamadas equações matriciais lineares homogêneas, onde $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $M = (x_{ij})$, com norma $|M| = \sup |x_{ij}|$.

Temos que (1.12) é equivalente ao sistema

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Observamos que, $\Phi(t)$ é solução de (1.12) se, e somente se, para todo $1 \leq j \leq n$, a j -ésima coluna $\Phi_j(t)$ de $\Phi(t)$ é solução da equação homogênea $x' = A(t)x$. Podemos então aplicar o Teorema de Picard para garantir a existência e unicidade de soluções num intervalo I que passam por $(t_0, M_0) \in I \times M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

A seguir definimos a matriz fundamental de soluções de uma equação matricial e apresentamos uma proposição que a caracteriza.

Definição 1.1.4. *Uma matriz $\Phi(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas formam uma base do espaço de soluções de $x' = A(t)x$ é chamada de matriz fundamental de soluções.*

Proposição 1.1.2. *Sejam $\Phi(t)$ e $\psi(t)$ matrizes soluções da equação matricial $M' = A(t)M$, sendo $\Phi(t)$ fundamental. Então existe uma única matriz C de ordem $n \times n$ constante tal que $\psi(t) = \Phi(t)C$, para todo $t \in I$. Mais ainda, C é não-singular se, e somente se, $\psi(t)$ é fundamental.*

Observamos que, se $\Phi : I \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é solução da equação matricial $M' = A(t)M$, então Φ é fundamental se as seguintes condições se verificam:

- i) $\det[\Phi(t)] \neq 0$, para todo $t \in I$, pois as colunas de Φ devem ser linearmente independentes,
- ii) $\Phi(t_0) = \Phi_0$ é tal que $\det \Phi_0 \neq 0$,
- iii) As colunas de Φ são base para o espaço vetorial das soluções de $x' = A(t)x$.

A Proposição 1.1.3 nos dá a forma da solução de uma equação linear da forma (1.8) a partir do conhecimento da solução da equação diferencial homogênea associada.

Proposição 1.1.3. *Seja $\Phi(t)$ uma matriz fundamental de $x' = A(t)x$, então a solução de $x' = A(t)x + b(t)$, $\varphi(t, t_0, x_0)$, tal que $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ é dada por*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \right].$$

Em particular, $\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$ é a solução no caso homogêneo.

Teorema 1.1.5. *(Fórmula de Liouville) Seja $\Phi(t)$ uma solução da equação matricial $u' = A(t)u$, onde $A(t)$ é contínua em $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então existe $\tilde{I} \subset I$ tal que $\det \Phi(t) : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial $y' = \text{tr}(A(t))y$, onde $y \in \mathbb{R}$, $t \in \tilde{I}$ e $\text{tr}(A(t)) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$ (traço de $A(t) = [a_{ij}(t)]$). Em outras palavras,*

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}.$$

1.1.3 Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Consideramos a equação diferencial linear

$$x' = Ax + b(t), \tag{1.13}$$

com $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz com entradas constantes, $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Se $b \equiv 0$ dizemos que (1.13) é uma equação linear homogênea com coeficientes constantes $x' = Ax$.

A matriz fundamental de uma equação da forma (1.13) satisfaz algumas propriedades que apresentamos a seguir.

Proposição 1.1.4. *Seja $\Phi(t)$ a matriz fundamental da equação (1.13) tal que $\Phi(0) = Id$, então:*

- a) $\Phi'(t) = A\Phi(t)$,
- b) $\Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s)$,
- c) $[\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t)$,
- d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!}$ converge uniformemente para $\Phi(t)$ em todo compacto de \mathbb{R} .

Definição 1.1.5. *Definimos a exponencial da matriz A por $\Phi(1)$ e denotamos: $e^A = \Phi(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$.*

Notamos que $\Phi(t) = e^{tA}$ é a matriz fundamental de $x' = Ax$. Além disso, $\Phi(t+s) = e^{(t+s)A}$ implica que $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

A seguir apresentamos um estudo mais detalhado das equações lineares com coeficientes constantes no plano.

1.1.4 Equações diferenciais lineares no plano

Consideramos a equação diferenciável com coeficientes constantes

$$x' = Ax \quad (1.14)$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×2 real com $\det A \neq 0$ e $x = (x_1, x_2)$. Podemos reescrever (1.14) da forma

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}.$$

A condição $\det A \neq 0$ é equivalente a dizer que a origem $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ é o único ponto singular de (1.14).

O polinômio característico associado à matriz A é $p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A$, onde $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$. Seus autovalores são

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr}(A) + \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det A}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(A) - \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det A}}{2},$$

cujos autovetores correspondentes denotamos por v_1 e v_2 , respectivamente.

Apresentamos a expressão das soluções do sistema (1.14), que variam de acordo com os autovalores e autovetores da matriz A . Esse tópico é melhor detalhado na Seção 4 do Capítulo 3 em [12], e na Seção 1.5 de [13]. Temos os seguintes casos:

a) Os autovalores λ_1, λ_2 são reais e distintos. Nesse caso A é diagonalizável, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ e a solução da equação (1.14) é dada por

$$\varphi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2,$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes determinadas pela condição inicial.

Denotemos por E_1 e E_2 os subespaços determinados por v_1 e v_2 , respectivamente. Vamos considerar os subcasos:

Se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, então toda trajetória tende a 0 quando $t \rightarrow \infty$, exceto a origem, que permanece fixa, e toda trajetória tende a ∞ quando $t \rightarrow -\infty$. Se $C_1 = 0$ as soluções são semirretas de E_2 , e se $C_2 = 0$ então as soluções são semirretas de E_1 . A figura abaixo ilustra o comportamento das trajetórias, onde as setas indicam o

sentido do percurso com t crescente. Neste caso, o ponto singular é chamado de *nó atrator*, ou *nó estável*. Veja Figura 1.2.

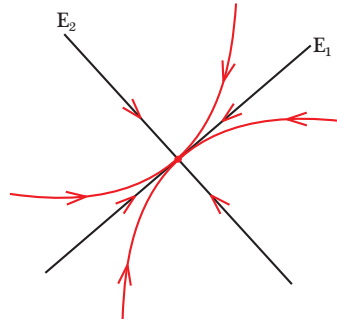


Figura 1.2. Nó atrator, ou estável

Se $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, então o comportamento das soluções é similar ao caso anterior, mas com os sentidos das órbitas invertidos. Aqui, o ponto singular é chamado de *nó repulsor*, ou *nó instável*. Veja a Figura 1.3.

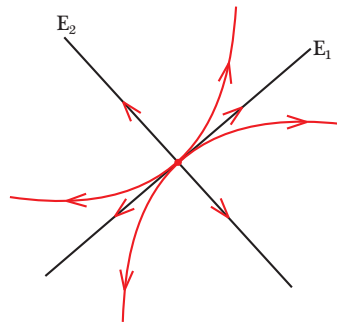


Figura 1.3. Nó repulsor, ou instável

Se $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$, então as trajetórias que passam por pontos de E_1 (onde temos $C_2 = 0$) ou de E_2 ($C_1 = 0$), permanecem nessa reta e tendem para 0 quando $t \rightarrow \infty$, ou quando $t \rightarrow -\infty$, respectivamente. Se $C_1, C_2 \neq 0$, as soluções tendem para ∞ quando $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. Nesse caso, chamamos o ponto singular de *sela*. Veja Figura 1.4.

b) Os autovalores são complexos e conjugados, ou seja, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$. A solução da equação (1.14) é dada por $\varphi(t) = e^{\alpha t}[C_1(\cos(\beta t)v_1 - \text{sen}(\beta t)v_2) + C_2(\text{sen}(\beta t)v_1 + \cos(\beta t)v_2)]$.

Se $\alpha = 0$, então todas as soluções, exceto o ponto singular, são elipses. Neste caso, dizemos que o ponto de equilíbrio é um *centro*. Ver Figura 1.5.

Se $\alpha < 0$, todas as soluções tendem para 0 espiralando em torno da origem quando $t \rightarrow \infty$. Dizemos que o ponto singular é um *foco atrator*. Ver Figura 1.6.

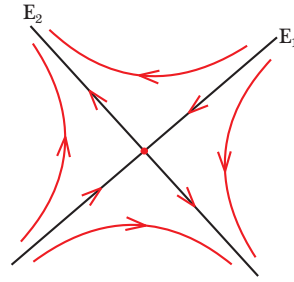


Figura 1.4. Sela

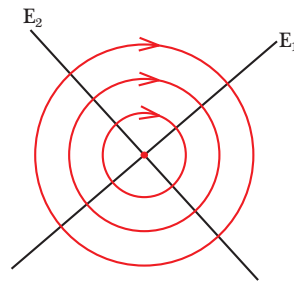


Figura 1.5. Centro

Se $\alpha > 0$, as soluções tentem para 0 espiralando em torno da origem quando $t \rightarrow -\infty$. Dizemos que o ponto singular é um *foco repulsor*. Ver Figura 1.7.

c) Os autovalores são reais e iguais, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Vamos considerar os subcasos:

Se λ tem autovetores v_1 e v_2 linearmente independentes, então toda solução de (1.14) pode ser escrita como

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(C_1v_1 + C_2v_2).$$

Portanto, todas as trajetórias, exceto o ponto singular, são semirretas. Neste caso, o ponto singular é um *nó estrelado estável ou instável*, conforme λ é positivo ou negativo. Ver Figura 1.8.

Agora, se temos apenas um vetor v associado ao autovalor λ , então a expressão da solução de (1.14) é dada por

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}[(C_1 + tC_2)v_1 + C_2v_2].$$

As órbitas que passam por pontos de E_1 (quando $C_2 = 0$), exceto o ponto singular, são semirretas contidas em E_1 . Para as outras órbitas, quando $C_2 \neq 0$, a sua reta tangente tende a E_1 quando $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, pois

$$\frac{C_2e^{\lambda t}}{(C_1 + tC_2)e^{\lambda t}} = \frac{1}{\frac{C_1}{C_2} + t} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty \text{ ou } -\infty.$$

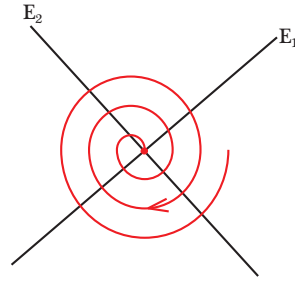


Figura 1.6. Foco atrator

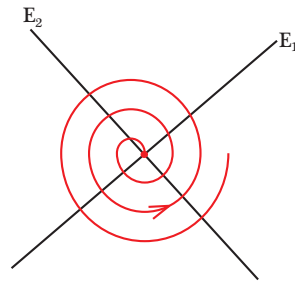


Figura 1.7. Foco repulsor

Se $\lambda < 0$ (respectivamente, $\lambda > 0$), toda trajetória tende a 0 quando $t \rightarrow \infty$ (respectivamente, quando $t \rightarrow -\infty$). O ponto singular é dito *nó impróprio atrator* e *nó impróprio repulsor*, respectivamente. Veja Figura 1.9.

1.1.5 Equações diferenciais autônomas

Consideramos a equação diferencial autônoma

$$x' = X(x)$$

onde $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aberto, é um campo de vetores de classe \mathcal{C}^k , $1 \leq k \leq \infty$ ou $k = \omega$.

Definição 1.1.6. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^r é dita um *fluxo* \mathcal{C}^r se:

- i) $\varphi(0, x) = x$,
- ii) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$; $t, s \in \mathbb{R}$.

Quando $\varphi : D \rightarrow \Omega$ onde D é dado pelo Teorema 1.1.3, dizemos que o *fluxo* é gerado por X .

Se $I_x = \mathbb{R}$, o *fluxo* gerado por X é um *fluxo* \mathcal{C}^r em Ω . Se $I_x \neq \mathbb{R}$, o *fluxo* gerado por X é chamado *fluxo local*.

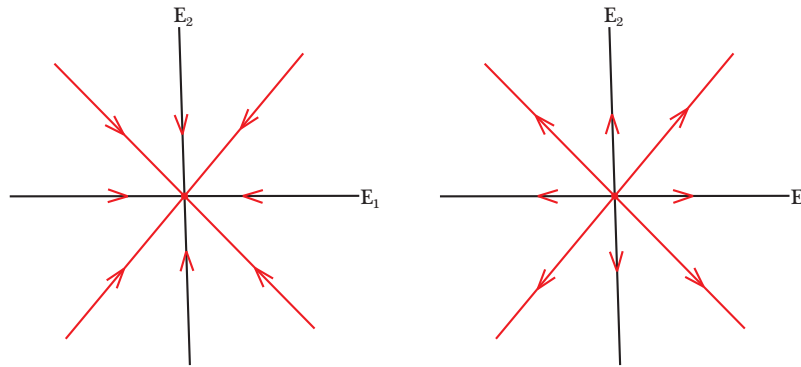


Figura 1.8. Nó estrelado estável (quando $\lambda < 0$) e instável (quando $\lambda > 0$), respectivamente

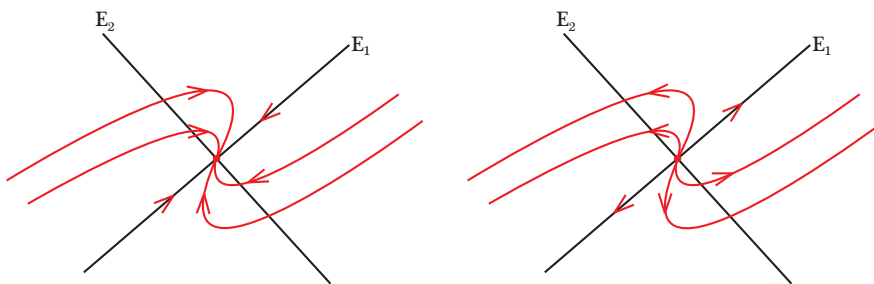


Figura 1.9. Nó impróprio atrator (quando $\lambda < 0$) e repulsor (quando $\lambda > 0$), respectivamente

Notamos que o item b) do Teorema 1.1.3 define um homeomorfismo do grupo aditivo dos reais no grupo dos difeomorfismos de classe \mathcal{C}^r em Ω munido da operação composição. Tal homeomorfismo é dado por $t \mapsto \varphi_t$, e pelo item b) temos, para $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, que $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ e $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$.

Definição 1.1.7. O conjunto $\sigma_p = \{\varphi(t, p); t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de X pelo ponto p , chama-se órbita de X pelo ponto p .

Observamos que, $q \in \sigma_p$ se, e somente se, $\sigma_q = \sigma_p$. De fato, se $q \in \sigma_p$, então $q = \varphi(t_1, p)$ e $\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p)$, e $I_p - t_1 = I_q$. Portanto, temos que duas órbitas de X ou coincidem ou são disjuntas. Assim, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

- a) imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R} ,
- b) um ponto (ponto singular),
- c) difeomorfa a um círculo (órbita fechada),

correspondendo cada caso a uma das alternativas do Teorema 1.1.6.

Teorema 1.1.6. *Se φ é uma solução máxima de*

$$\begin{cases} x' &= X(x), \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

em I_{x_0} , verifica-se apenas uma das seguintes alternativas:

- a) φ é 1-1,
- b) $I_{x_0} = \mathbb{R}$ e φ é constante,
- c) $I_{x_0} = \mathbb{R}$ e φ é periódica, isto é, existe $\tau > 0$ tal que $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ se $\|t_2 - t_1\| < \tau$.

Definição 1.1.8. *O conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, munido da decomposição em órbitas de X , chama-se retrato de fase de X . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo. Os pontos singulares são munidos da orientação trivial.*

1.1.6 Conjugação e equivalência de sistemas diferenciais

Um dos objetivos em contextos matemáticos é saber quando dois objetos com mesma estrutura preservam propriedades que estão relacionadas com tal estrutura. Dentro do mundo dos sistemas dinâmicos este objetivo também surge. Os elementos a serem preservados são as órbitas ou soluções. É neste contexto que surge a conjugação entre sistemas dinâmicos.

A seguir, consideramos X_1 e X_2 campos de vetores definidos nos abertos Ω_1 e Ω_2 do \mathbb{R}^n , respectivamente.

Definição 1.1.9. *Dizemos que X_1 é topologicamente equivalente a X_2 quando existe um homeomorfismo $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ que leva órbitas de X_1 em órbitas de X_2 preservando a orientação. Mais precisamente, sejam $p \in \Omega_1$ e $\Gamma^1(p)$ a órbita orientada de X_1 passando por p , então $h(\Gamma^1(p)) = \Gamma^2(h(p))$ é a órbita orientada de X_2 passando por $h(p)$. Se h for um difeomorfismo de classe C^r , então dizemos que X_1 é C^r -equivalente a X_2 .*

Essa definição estabelece uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de \mathbb{R}^n . O homeomorfismo h é chamado de equivalência topológica, ou de equivalência C^r caso seja um difeomorfismo de classe C^r , entre X_1 e X_2 .

Definição 1.1.10. *Sejam $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que X_1*

é topologicamente conjugado (respectivamente, C^r -conjugado) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo C^r) $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$, para todo $(t, x) \in D_1$. O homeomorfismo h chama-se conjugação topológica (C^r -conjugação, respectivamente) entre X_1 e X_2 .

A relação de conjugação é também uma relação de equivalência entre campos definidos no \mathbb{R}^n . Notamos que a conjugação preserva o tempo.

Uma equivalência h entre X_1 e X_2 leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Se h for uma conjugação, então o período também é preservado.

Lema 1.1.2. *Sejam $X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos de vetores C^r , $r \geq 1$, definidos nos abertos $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$. E seja $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ um difeomorfismo C^r . Então h é uma conjugação entre X_1 e X_2 se, e somente se, $Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p))$, para todo $p \in \Omega_1$.*

O Teorema do Fluxo Tubular que veremos a seguir garante que qualquer campo X de classe C^r é localmente conjugado, numa vizinhança de um ponto regular, ao campo $Y = (1, 0, \dots, 0)$.

Definição 1.1.11. *Sejam $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ também aberto. Uma aplicação diferenciável de classe C^r $f : A \rightarrow \Omega$ chama-se seção transversal local de X (de classe C^r) quando, para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e o espaço vetorial gerado por $X(f(a))$ são uma decomposição em soma direta do \mathbb{R}^n .*

Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, diz-se que Σ é uma seção transversal de X .

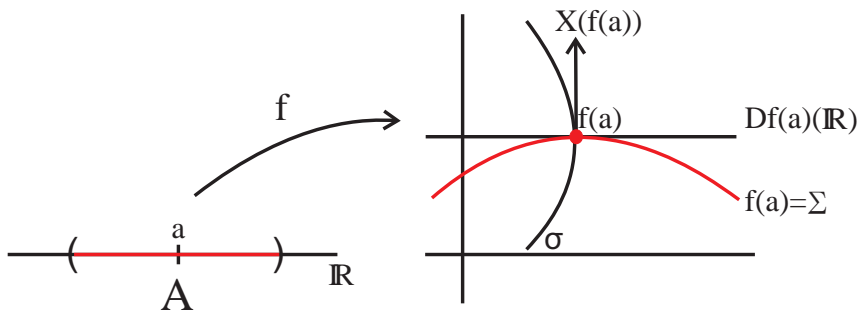


Figura 1.10. Esquema de uma seção transversal quando $n=2$

Teorema 1.1.7. (Teorema do Fluxo Tubular): Sejam $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores \mathcal{C}^r , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $p \in \Omega$ um ponto regular de X e $f : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \Sigma = f(A) \subset \Omega$ uma seção transversal local de X de classe \mathcal{C}^r com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança V de p em Ω e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe \mathcal{C}^r , onde $\varepsilon > 0$ e $B = B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que

a) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$,

b) h é uma \mathcal{C}^r -conjugação entre $X|_V$ e o campo $Y = (Y_1, \dots, Y_n) = (1, 0, \dots, 0)$.

Demonstração. Seja $\varphi : D \rightarrow \Omega$ o fluxo de X . Seja $F : D_A \rightarrow \Omega$, onde $D_A = \{(t, u); (t, f(u)) \in D\}$, definida por $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$. Observamos que F aplica linhas paralelas em órbitas de X . Vamos mostrar que F é um difeomorfismo local na vizinhança da origem $0 = (0, \tilde{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Pelo Teorema da Função Inversa, é suficiente provar que $DF(0)$ é um isomorfismo.

Temos

$$D_1F(0) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, f(0)) \right|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p)$$

e $D_jF(0) = D_{j-1}f(\tilde{0})$ para todo $j = 2, \dots, n$, pois $\varphi(0, f(u)) = f(u)$ para todo $u \in A$. Portanto, os vetores $D_jF(0)$, $j = 1, \dots, n$ geram \mathbb{R}^n e $DF(0)$ é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Função Inversa, existem $\varepsilon > 0$ e uma bola B em \mathbb{R}^{n-1} com centro na origem 0 tais que $F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$. Seja $h = (F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B})^{-1}$. Então $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, pois $F(0, u) = f(u) \in \Sigma$ para todo $u \in B$. Isso prova o item a). Por outro lado, h^{-1} conjugua X e Y :

$$\begin{aligned} DH^{-1}(t, u) \cdot Y(t, u) &= DF(t, u) \cdot (1, 0, \dots, 0) = D_1F(t, u) = \\ &= X(\varphi(t, f(u))) = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)), \end{aligned}$$

para todo $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$, o que conclui a demonstração. □

1.1.7 Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos

Seja p um ponto regular de um campo de vetores X de classe \mathcal{C}^r . O teorema do Fluxo Tubular nos garante que existe uma vizinhança V de p tal que X_V é \mathcal{C}^r -conjugado a $Y = (1, 0, \dots, 0)$. Consequentemente, dois campos X e W são

C^r -conjugados em torno de seus pontos regulares. Podemos então considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo de vetores na vizinhança de pontos regulares, uma vez que existe apenas uma classe de conjugação diferenciável local, a do campo $Y \equiv (1, 0, \dots, 0)$.

Veremos agora um resultado sobre conjugação em torno dos chamados pontos singulares de um campo de vetores X .

Definição 1.1.12. *Um ponto singular p de um campo vetorial X de classe C^r , $r \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores de $DX(p)$ tem parte real diferente de zero.*

O número de autovalores de $DX(p)$ com parte real menor que zero chama-se índice de estabilidade de X em p .

O teorema a seguir nos diz que um campo de vetores é localmente topologicamente conjugado à sua parte linear em torno dos pontos singulares hiperbólicos. Sua demonstração pode ser encontrada em [11].

Teorema 1.1.8. *(Teorema de Hartman-Grobman): Sejam $X : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 e p um ponto singular hiperbólico de X . Então existem vizinhanças V de p em Ω_1 e W de 0 em \mathbb{R}^n tais que $X|_V$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_W$.*

1.1.8 Estrutura local das órbitas periódicas

A aplicação de Poincaré é um difeomorfismo que está associado a uma órbita fechada γ e que descreve o comportamento do campo numa vizinhança de γ .

Seja $\gamma = \{\varphi(t, p); 0 \leq t \leq \tau\}$ uma órbita periódica de período τ de um campo de vetores X , C^r , $r \leq 1$ ou $r = \omega$, definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seja Σ uma seção transversal de X pelo ponto p . Devido a continuidade do fluxo φ de X , para todo ponto $q \in \Sigma$ próximo de p , a trajetória $\varphi(t, q)$ permanece próxima a γ , com t variando em um intervalo fixado. Define-se a aplicação de Poincaré $\pi(q)$ como o primeiro ponto onde a órbita $\varphi(t, q)$ intercepta Σ (notemos que sempre existe $\pi(q)$ devido a dependência contínuas das soluções com relação às condições iniciais).

Seja Σ_0 o domínio de π , então é claro que $p \in \Sigma_0$ e $\pi(p) = p$.

Muitas propriedades de X perto de γ se refletem em π . Por exemplo, as órbitas periódicas de X vizinhas de γ correspondem aos pontos periódicos de π , que são os pontos $q_0 \in \Sigma_0$ para os quais $\pi^n(q) = q$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ com $n \geq 1$, ou então o comportamento assintótico das órbitas de X perto de γ que também é descrito por π .

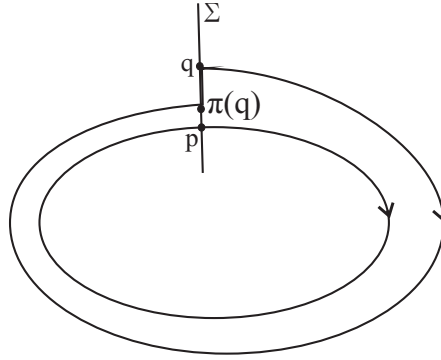


Figura 1.11. Aplicação de Poincaré

Proposição 1.1.5. *Seja φ um fluxo de classe C^r , $r \geq 1$. Então a aplicação de Poincaré $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ é um difeomorfismo de classe C^r sobre sua imagem.*

Definição 1.1.13. *A órbita fechada γ é um atrator periódico (ou, dizemos que, γ é orbitalmente estável) quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo q numa vizinhança de γ .*

Definição 1.1.14. *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 , onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é aberto. Uma órbita periódica γ de X é dita um ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita periódica de X em V .*

Proposição 1.1.6. *Com as notações da Definição 1.1.14, existem apenas os seguintes tipos de ciclos limites.*

- a) *Estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V$.*
- b) *Instável, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in V$.*
- c) *Semi-estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para $q \in V \cap Ext(\gamma)$, e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para $q \in V \cap Int(\gamma)$, ou o contrário, onde $Ext(\gamma)$ denota a componente conexa ilimitada de $\mathbb{R}^2 - \gamma$ e $Int(\gamma)$ denota a componente conexa limitada de $\mathbb{R}^2 - \gamma$.*

Demonstração. Seja Σ uma seção transversal a X em $p \in \gamma$ e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a aplicação de Poincaré associada a Σ . Suponha que Σ está orientada como na Figura 1.12.

Dado $q \in \Sigma_0 \cap Ext(\gamma)$ então $\pi(q) > q$ ou $\pi(q) < q$, pois γ é ciclo limite. Vamos supor que $\pi(q) > q$. Considere a região A limitada por γ , pelo arco trajetória $\widehat{q\pi(q)}$ e pelo segmento $\overline{q\pi(q)} \in \Sigma$. Veja Figura 1.13.

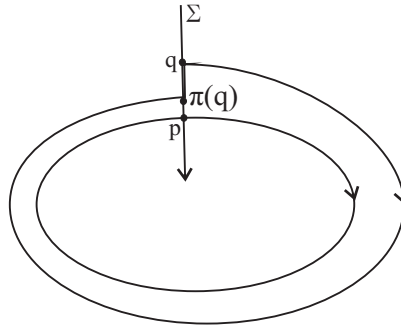


Figura 1.12. Σ é uma seção transversal de X

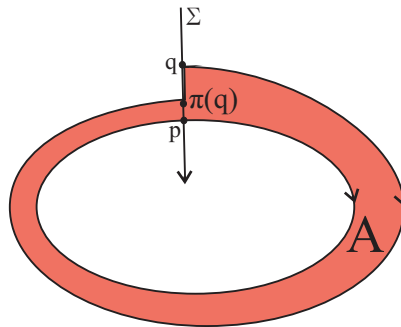


Figura 1.13. Região A

Notamos que dado $x \in A$, $\varphi(t, x) \in A$ para todo $t \geq 0$, isto é, A é positivamente invariante pelo campo X . Assim, $\varphi(t, x)$ intercepta Σ em uma sequência estritamente crescente de pontos x_n , $x_n \rightarrow p$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$, para todo $q \in A$.

Se $\pi(q) < q$ temos que a região A é negativamente invariante, isto é, dado $x \in A$, $\varphi(t, x) \in A$ para todo $t \leq 0$. Então $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$.

De modo análogo, se $q \in \Sigma_0 \cap \text{Ext}(\gamma)$ temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ se $\pi(q) < q$, e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ se $\pi(q) > q$.

Combinando todas as possibilidades conclui-se a demonstração. □

1.1.9 Estabilidade de Lyapunov

Nessa seção definimos o conceito de estabilidade de Lyapunov e de estabilidade assintótica de um fluxo associado a uma equação diferencial, e enunciamos os Critérios de Lyapunov para que uma solução seja estável ou assintoticamente estável. Para mais detalhes ver [4] e [13].

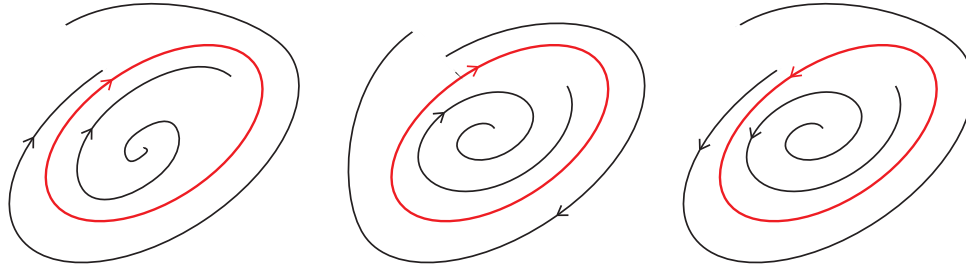


Figura 1.14. Ciclo Limite Estável, Instável e Semi-Instável, respectivamente

Consideramos a equação diferencial

$$x' = f(t, x), \tag{1.16}$$

sendo f de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 1.1.15. *Seja $\varphi(t)$ uma solução da equação (1.16) com $\varphi(0) = x_0$ e suponhamos que seu intervalo maximal é $I_{x_0} = \mathbb{R}$.*

Dizemos que φ é estável (no sentido de Lyapunov) se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|y_0 - x_0| < \delta$ então $|\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$, onde $\psi(t)$ é a solução com $\psi(0) = y_0$.

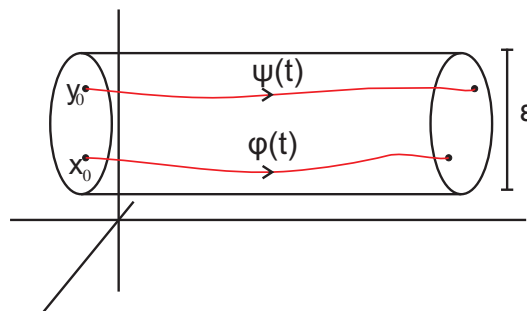


Figura 1.15. Estabilidade no sentido de Lyapunov

Dizemos que φ é assintoticamente estável se, além de ser estável, existe um δ_1 tal que se $|y_0 - x_0| < \delta_1$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$.

Consideramos agora a equação diferencial autônoma

$$x' = X(x) \tag{1.17}$$

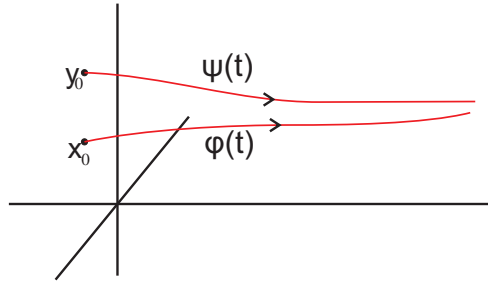


Figura 1.16. Estabilidade assintótica

onde $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores e seja $x_0 \in \Omega$ um ponto singular de X . Consideramos $\varphi(t, x)$ o fluxo associado a X .

Definição 1.1.16. Dizemos que x_0 é estável se para toda vizinhança $\Omega_1 \subset \Omega$ de x_0 existe uma vizinhança $\Omega_2 \subset \Omega_1$ tal que para todo $y_0 \in \Omega_2$ tem-se que $\varphi(t, y_0) \in \Omega_1$, para todo $t \geq 0$.

Dizemos que x_0 é assintoticamente estável se, além de ser estável, existe uma vizinhança $\Omega_1 \subset \Omega$ de x_0 tal que para todo $y_0 \in \Omega_1$ tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, y_0) - x_0| = 0$.

Proposição 1.1.7. (1º Critério de Lyapunov) Se todos os autovalores da matriz $A = DX(x_0)$ tem parte real negativa, então x_0 é assintoticamente estável.

Para o 2º Critério de Lyapunov precisamos antes definir função de Lyapunov.

Definição 1.1.17. Seja $L : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável onde U_1 é uma vizinhança de x_0 . Dizemos que L é uma função de Lyapunov se

- i) $L(x_0) = 0$ e $L(x) > L(x_0)$ para todo $x \in U_1 - \{x_0\}$,
- ii) $L'(x) = \frac{\partial}{\partial t} (L(\varphi(t, x)))|_{t=0} = \langle \nabla L(x), X(x) \rangle \leq 0$ para todo $x \in U_1$. Se $L'(x) < 0$ para todo $x \in U_1 - \{x_0\}$, dizemos então que L é uma função de Lyapunov estrita.

Teorema 1.1.9. (2º Critério de Lyapunov) Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe \mathcal{C}^1 , onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, e $x_0 \in U$ um ponto singular.

- i) Se existe uma função de Lyapunov $L : U \rightarrow \mathbb{R}$, então x_0 é estável.
- ii) Se existe uma função de Lyapunov estrita $L : U \rightarrow \mathbb{R}$, então x_0 é assintoticamente estável.

1.1.10 Equação variacional

Consideramos um sistema autônomo

$$x' = X(x), \quad (1.18)$$

onde X é uma função de classe \mathcal{C}^1 . Seja $\varphi(t, x)$ o fluxo do sistema (1.18). Temos que φ é uma função em ambas variáveis t e x , e sabemos que φ é contínua na variável x e diferenciável na variável t , uma vez que $t \mapsto \varphi(t, x)$ é a curva integral de x . De fato, temos que φ é também diferenciável na variável x .

Teorema 1.1.10. *Consideramos o sistema (1.18). Então, o fluxo $\varphi(t, x)$ desse sistema é uma função de classe \mathcal{C}^1 , ou seja, $\partial\varphi/\partial t$ e $\partial\varphi/\partial x$ existem e são contínuas em t e x .*

Notamos que podemos computar $\partial\varphi/\partial t$ para qualquer valor de t , quando conhecermos a solução passando por x_0 . Temos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x_0) = X(\varphi(t, x_0)).$$

E,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, x_0) = D\varphi_t(x_0)$$

onde $D\varphi_t$ é o Jacobiano da função $x \rightarrow \varphi_t(x)$. Para computar $\partial\varphi/\partial x$, contudo, pode ser necessário conhecer a solução passando por x_0 e também por todas as condições iniciais próximas, uma vez que precisamos computar as derivadas parciais de várias componentes de φ_t . Entretanto, podemos contornar essa dificuldade ao introduzir a equação variacional ao longo da solução que passa por x_0 .

Seja $x(t)$ uma solução particular do sistema (1.18) definida para t em algum intervalo $J = [\alpha, \beta]$. Fixamos $t_0 \in J$ e tomamos $x(t_0) = x_0$. Para cada $t \in J$ seja

$$A(t) = DX_{x(t)}$$

onde $DX_{x(t)}$ denota a matriz Jacobiana de X no ponto $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Como X é de classe \mathcal{C}^1 , $A(t) = DX_{x(t)}$ é uma família de matrizes $n \times n$ contínuas. Consideramos a equação diferencial linear não-autônoma

$$u' = A(t)u.$$

Essa equação é conhecida como *equação variacional* ao longo da solução $x(t)$. Sabemos que essa equação variacional possui uma solução definida em todo J para toda condição inicial $u(t_0) = u_0$.

A importância dessa equação é que, se $u(t)$ é uma solução da equação variacional que satisfaz $u(t_0) = u_0$, então a função

$$t \rightarrow x(t) + u(t)$$

é uma boa aproximação da solução $y(t)$ da equação autônoma (1.18) com valor inicial $y(t_0) = x_0 + u_0$, onde u_0 é suficientemente pequeno.

Proposição 1.1.8. *Consideramos o sistema $x' = X(x)$, onde X é uma função de classe \mathcal{C}^1 . Suponhamos que*

- i) $x(t)$ é uma solução de $x' = X(x)$ definida para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e satisfaz $x(t_0) = x_0$,*
- ii) $u(t)$ é a solução da equação variacional ao longo de $x(t)$ que satisfaz $u(t_0) = u_0$,*
- iii) $y(t)$ é a solução de $x' = X(x)$ que satisfaz $y(t_0) = x_0 + u_0$.*

Então,

$$\lim_{u_0 \rightarrow 0} \frac{|y(t) - (x(t) + u(t))|}{|u_0|}$$

converge uniformemente para 0 em $t \in [\alpha, \beta]$.

Para mais detalhes veja [15].

1.1.11 Teoria de Floquet

Nesta seção estudamos a Teoria de Floquet. Tal teoria foi desenvolvida para sistemas lineares homogêneos cuja matriz dos coeficientes é T -periódica, ou seja, esta teoria estuda os sistemas de equações diferenciais lineares homogêneos da forma

$$x' = A(t)x, \tag{1.19}$$

onde $x = x(t)$ é um vetor função em \mathbb{R}^n e $A(t)$ é uma função $n \times n$ cujas entradas são contínuas e T -periódicas para todo $t \in \mathbb{R}$. O teorema principal dessa seção, o Teorema de Floquet, nos dá a forma canônica para cada matriz fundamental de soluções. Esse resultado será usado para mostrar que existe uma mudança de coordenadas periódica que depende do tempo que transforma o sistema (1.19) em um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes.

Algumas demonstrações não apresentamos aqui, mas estas podem ser encontradas em [4]. Outra referência para Teoria de Floquet é o livro [10]. O teorema de Floquet é um corolário do seguinte resultado sobre a extensão da aplicação exponencial.

Teorema 1.1.11. *Se C é uma matriz $n \times n$ não-singular, então existe uma matriz B $n \times n$, possivelmente complexa, tal que $e^B = C$. Se C é uma matriz $n \times n$ real e não-singular, então existe uma matriz real B tal que $e^B = C^2$.*

Teorema 1.1.12. *(Teorema de Floquet) Se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental de soluções do sistema T -periódico (1.19), então, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Além disso, para cada matriz B possivelmente complexa tal que

$$e^{TB} = \Phi^{-1}(0)\Phi(T),$$

existe uma função matricial T -periódica possivelmente complexa $t \rightarrow P(t)$ tal que $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mais ainda, existe uma matriz real R e uma função matricial $2T$ -periódica $t \rightarrow Q(t)$ tal que $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Uma vez que a função $t \rightarrow A(t)$ é T -periódica, ela está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema 1.1.6, todas as soluções do sistema estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definimos $\Psi(t) := \Phi(t+T)$. Então Ψ é uma matriz fundamental. De fato, temos que

$$\Psi'(t) = \Phi'(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Psi(t),$$

como queríamos.

Definimos $C := \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ e notamos que C é não-singular, já que $\Phi(t)$ é matriz fundamental.

A função matricial $t \rightarrow \Phi(t)C$ é a matriz solução do sistema linear (1.19) com valor inicial $\Phi(0)C = \Psi(0)$. Pela unicidade de soluções, $\Psi(t) = \Phi(t)C$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, temos que

$$\begin{aligned}\Phi(t+T) &= \Phi(t)C = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Psi(0) \\ \Phi(t+2T) &= \Phi((t+T)+T) = \Phi(t+T)C = \Phi(t)C^2.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.1.11, existe uma matriz B , possivelmente complexa, tal que

$$e^{TB} = C.$$

Também, existe uma matriz real R tal que

$$e^{2TR} = C^2.$$

Se $P(t) := \Phi(t)e^{-tB}$ e $Q(t) := \Phi(t)e^{-tR}$, então

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \Phi(t+T)e^{-TB}e^{-tB} = \Phi(t)Ce^{-TB}e^{-tB} = \Phi(t)e^{-tB} = P(t) \\ Q(t+2T) &= \Phi(t+2T)e^{-2TR}e^{-tR} = \Phi(t)C^2e^{-2TR}e^{-tR} = \Phi(t)e^{-tR} = Q(t). \end{aligned}$$

Portanto, temos $P(t+T) = P(t)$, $Q(t+T) = Q(t)$, e $\Phi(t) = P(t)e^{tB} = Q(t)e^{tR}$, como queríamos.

□

A representação $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ no Teorema de Floquet é chamada *forma normal de Floquet* para a matriz fundamental $\Phi(t)$. Usamos essa forma normal para estudar a estabilidade da solução zero de sistemas lineares homogêneos periódicos.

Consideramos a matriz fundamental de soluções Φ para o sistema periódico (1.19) e um vetor $v \in \mathbb{R}^n$. O *vetor solução* do sistema iniciando no tempo $t = \tau$ com condição inicial $x(\tau) = v$ é dado por

$$t \mapsto \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)v.$$

Se o vetor inicial é movido para frente por um período do sistema, então novamente obtemos um vetor em \mathbb{R}^n dado por $\Phi(T+\tau)\Phi^{-1}(\tau)v$. O operador

$$v \mapsto \Phi(T+\tau)\Phi^{-1}(\tau)v$$

é chamado *operador monodromia*.

Os autovalores do operador monodromia são chamados *multiplicadores característicos* ou *multiplicadores de Floquet* do sistema homogêneo periódico.

A próxima proposição diz que os multiplicadores característicos são números complexos diferentes de zero inerentes ao sistema periódico, ou seja, eles não dependem da escolha da matriz fundamental ou do tempo inicial.

Proposição 1.1.9. *As seguintes afirmações são válidas para o sistema homogêneo linear periódico (1.19):*

i) Todo operador monodromia é invertível. Em particular, cada multiplicador característico é não-nulo.

ii) Se M_1 e M_2 são operadores monodromia, então eles possuem os mesmos autovalores. Em particular, existem exatamente n multiplicadores característicos, contando multiplicidade.

Demonstração. O item i) segue da definição.

Para demonstrar o item ii), consideramos a matriz fundamental principal $\Phi(t)$ em $t = 0$.

Se $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental, então $\Psi(t) = \Phi(t)\Psi(0)$. Além disso, pelo Teorema de Floquet,

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Consideramos o operador monodromia \mathcal{M} dado por

$$v \mapsto \Psi(T + \tau)\Psi^{-1}(\tau)v$$

e notamos que

$$\begin{aligned} \Psi(T + \tau)\Psi^{-1}(\tau) &= \Phi(T + \tau)\Psi(0)\Psi^{-1}(0)\Phi^{-1}(\tau) \\ &= \Phi(T + \tau)\Phi^{-1}(\tau) \\ &= \Phi(\tau)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)\Phi^{-1}(\tau) \\ &= \Phi(\tau)\Phi(T)\Phi^{-1}(\tau). \end{aligned}$$

Em particular, os autovalores do operador $\Phi(T)$ são os mesmos autovalores do operador monodromia \mathcal{M} . Portanto, todos operadores monodromia possuem os mesmos autovalores. \square

Como $\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$, alguns autores definem multiplicadores característicos como os autovalores de matrizes definidas por $C = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ onde $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental. Contudo, ambas definições dão os mesmos multiplicadores característicos. Para isto, temos que mostrar que os autovalores de $C = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ coincidem com os autovalores de $D = \Phi(T + \tau)\Phi^{-1}(\tau)$. Ou seja, basta verificar que C e D são semelhantes. Pela forma normal de Floquet temos $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ e $\Phi(0) = P(0) = P(T)$. Além disso, temos que

$$\Phi^{-1}(0)\Phi(T) = e^{TB}.$$

Também, usando a forma normal de Floquet,

$$\Phi(T)\Phi^{-1}(0) = P(T)e^{TB}\Phi^{-1}(0) = \Phi(0)e^{TB}\Phi^{-1}(0) = \Phi(0)(\Phi^{-1}(0)\Phi(T))\Phi^{-1}(0),$$

e portanto $\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ tem os mesmos autovalores que o operador monodromia dado por

$$v \mapsto \Phi(T)\Phi^{-1}(0)v.$$

Voltando para a forma normal de Floquet $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ o operador monodromia

$$v \mapsto \Phi(T + \tau)\Phi^{-1}(\tau)v$$

nós temos que

$$\Phi(T + \tau)\Phi^{-1}(\tau) = P(\tau)e^{TB}P^{-1}(\tau).$$

Portanto, os multiplicadores característicos do sistema (1.19) são os autovalores de e^{TB} .

Um número complexo μ tal que $e^{\mu t} = p$, para p um multiplicador característico do sistema (1.19), é chamado *expoente característico* ou *expoente de Floquet*.

Notamos que se $e^{\mu T} = p$, então $\mu + 2\pi ik/T$ também é um expoente característico para cada inteiro k .

Portanto, embora os multiplicadores característicos sejam únicos, os expoentes característicos não são.

Vamos supor que a matriz fundamental do sistema (1.19) é representada na forma normal de Floquet por $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$. Vimos que os multiplicadores característicos do sistema (1.19) são os autovalores de e^{TB} . Contudo, os expoentes característicos não mencionam os autovalores de B . Seriam os autovalores de B expoentes característicos?

Essa questão é respondida de forma afirmativa no próximo teorema:

Teorema 1.1.13. *Se A é uma matriz $n \times n$ e se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A repetidos de acordo com sua multiplicidade algébrica, então $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ são os autovalores de A^k e $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ são os autovalores de e^A .*

Demonstração. Provamos por indução sobre n .

Temos que o teorema é válido para matrizes 1×1 . Suponhamos que o resultado é válido para toda matriz $(n-1) \times (n-1)$.

Defina $\lambda := \lambda_1$, e seja $v \neq 0$ o autovetor correspondente tal que $Av = \lambda v$. Além disso, seja e_1, \dots, e_n a base usual de \mathbb{C}^n . Existe uma matriz $n \times n$ não-singular S tal que $Sv = e_1$.

Portanto,

$$Av = \lambda v \Rightarrow AS^{-1}e_1 = \lambda S^{-1}e_1 \Rightarrow SAS^{-1}e_1 = \lambda e_1,$$

e daí segue que SAS^{-1} tem uma forma de bloco

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

A matriz SA^kS^{-1} tem a mesma forma, mas com blocos diagonais λ^k e \tilde{A}^k . Temos que os autovalores dessa matriz são λ^k juntamente com os autovalores de \tilde{A}^k . Por indução, os autovalores de \tilde{A}^k são as k -ésimas potências dos autovalores de \tilde{A} . Isso prova que se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são autovalores de A , então $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ são autovalores de A^k .

Usando a série de potências que definem o exponencial, vemos que $e^{SAS^{-1}}$ tem a forma de bloco, com diagonais e^λ e $e^{\tilde{A}}$,

$$e^{SAS^{-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (SAS^{-1})^i = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \lambda^i & * \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \tilde{A}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & * \\ 0 & e^{\tilde{A}} \end{pmatrix}.$$

Temos que os autovalores dessa matriz bloco são e^λ juntamente com os autovalores de $e^{\tilde{A}}$. Novamente usando indução, segue que os autovalores de $e^{\tilde{A}}$ são $e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$. Portanto, os autovalores de $e^{SAS^{-1}}$ são $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. \square

O Teorema 1.1.13 é um exemplo de um teorema de aplicação espectral. Se denotamos por $\sigma(A)$ o espectro da matriz A , ou seja, o conjunto de todos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda I - A$ é não-invertível, então, para nossa matriz de dimensão finita, $\sigma(A)$ coincide com o conjunto dos autovalores de A . O Teorema 1.1.13 pode ser reescrito como: $e^{\sigma(A)} = \sigma(e^A)$.

O próximo resultado usa a teoria de Floquet para mostrar que o sistema diferencial 1.19 é equivalente a um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes. Esse resultado mostra que a estabilidade da solução zero geralmente pode ser determinado pelos multiplicadores característicos.

Teorema 1.1.14. *Existe uma mudança de coordenadas que depende do tempo $2T$ -periódica, $x = Q(t)y$, que transforma o sistema periódico (1.19) em um sistema linear real com coeficientes constantes.*

i) Se todos os multiplicadores característicos do sistema periódico (1.19) tem módulo menor que um, ou, equivalentemente, se todos os expoentes característicos tem parte real negativa, então a solução zero é assintoticamente estável.

ii) Se todos os multiplicadores característicos do sistema periódico (1.19) tem módulo menor ou igual a um; ou, equivalentemente, se todos expoentes característicos tem parte real não-positiva, e se a multiplicidade algébrica é igual a multiplicidade geométrica de cada multiplicador característico com módulo um; ou, equivalentemente, se a multiplicidade algébrica é igual a multiplicidade geométrica de cada expoente característico com parte real igual a zero, então a solução zero é estável no sentido de Lyapunov.

iii) Se ao menos um multiplicador característico do sistema periódico (1.19) tem módulo maior que um; ou, equivalentemente, se um expoente característico tem parte real positiva, então a solução zero é instável.

Demonstração. Inicialmente vamos demonstrar que (1.19) pode ser transformado em um sistema com coeficientes constantes. Utilizando a forma normal de Floquet temos que existe uma matriz real R e uma matriz real $2T$ -periódica $Q(t)$ tal que a matriz fundamental principal $\Phi(t)$ do sistema é representada por

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tR}.$$

Além disso, existe uma matriz complexa B e uma matriz T -periódica $P(t)$ tal que

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}.$$

Os multiplicadores característicos são os autovalores de e^{TB} . Usando o fato de que $\Phi(0)$ é a matriz identidade, temos que

$$\Phi(2T) = e^{2TR} = e^{2TB},$$

e, em particular,

$$(e^{TB})^2 = e^{2TR}.$$

Pelo Teorema 1.1.13, os autovalores de e^{2TR} são o quadrado dos multiplicadores característicos. Assumindo as hipóteses de i), todos multiplicadores têm módulo menor que um. Portanto, aplicando novamente o Teorema 1.1.13, todos autovalores da matriz real R tem parte real negativa.

Consideramos a mudança de variáveis $x = Q(t)y$. Substituindo em (1.19)

$$A(t)x = Q'(t)y + Q(t)y'$$

ou, equivalentemente,

$$Q(t)y' = (A(t)Q(t) - Q'(t))y$$

e

$$y' = Q^{-1}(t)(A(t)Q(t) - Q'(t))y.$$

Além disso, usando a forma normal de Floquet $Q(t) = \Phi(t)e^{-tR}$ e derivando com relação a t

$$\begin{aligned} Q'(t) &= A(t)\Phi(t)e^{-tR} + \Phi(t)e^{-tR}(-R) \\ &= A(t)Q(t) - Q(t)R. \end{aligned}$$

Daí segue que

$$y' = Q^{-1}(t)(Q(t)R)y = Ry.$$

Pelo Critério de Lyapunov, a solução zero de $y' = Ry$ é assintoticamente estável. Usando o fato de que $Q(t)$ é periódica, e portanto é limitada, e a relação $x = Q(t)y$, a solução zero de $x' = A(t)x$ é também assintoticamente estável.

Notamos que a solução geral de $y' = Ry$ é da forma $\phi(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$, onde λ_i é um autovalor de R , v_i é o autovetor associado, para todo $i = 1, \dots, n$, e as c_i s são constantes definidas pela condição inicial.

Se algum autovalor tem parte real positiva, então $|\phi(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, ou seja, a solução é instável. E, se todos os autovalores possuem parte real não-positiva, então cada termo da soma em $\phi(t)$ é limitado. Assim, $\phi(t)$ é estável no sentido de Lyapunov, mas não é assintoticamente estável. \square

1.2 Mudanças de coordenadas

Em geral, uma equação diferencial não está na forma para aplicar um dos métodos que apresentamos no Capítulo 2. O que precisamos, principalmente, é da periodicidade das funções na variável independente. No caso planar, em geral utilizamos mudança de coordenadas polares (r, θ) e em seguida consideramos como variável independente a variável associada ao ângulo θ . Porém, com a mudança de coordenadas polar o sistema nas novas coordenadas pode não estar na forma padrão para aplicarmos o Método da Média de primeira ordem, por isso Buicã e Llibre consideram uma outra mudança de coordenadas em [1] que relaciona o ângulo das coordenadas polares com os níveis de energia. Esta mudança também transforma

uma classe de sistema de equações diferenciais na forma padrão para se aplicar o Método da Média.

Consideramos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.20)$$

onde P e Q são polinômios em x e y com coeficientes reais.

Primeiramente definimos integral primeira e fator integrante. Mais informações podem ser encontradas em [6].

Definição 1.2.1. Dizemos que o sistema (1.20) é integrável num subconjunto aberto U de \mathbb{R}^2 se existe uma função analítica e não-constante $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de integral primeira do sistema em U , que é constante ao longo de todas soluções $(x(t), y(t))$ do sistema (1.20) contidas em U , ou seja, $H(x(t), y(t)) = C$, C uma constante, para todos valores de t tais que $(x(t), y(t))$ está definido e contido em U .

Equivalentemente, H é uma integral primeira se $XH = PH_x + QH_y \equiv 0$ em U , ou $DH(p) \cdot X(p) = 0$ e $DH(p) \neq 0$ para todo $p \in U$, onde $X = (P, Q)$ é o campo de vetores associado ao sistema (1.20).

Definição 1.2.2. Seja U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 e seja $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica e não identicamente nula em U . A função μ é um fator integrante do sistema (1.20) em U se uma das seguintes condições é satisfeita:

$$i) \frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = -\frac{\partial(\mu Q)}{\partial y},$$

$$ii) \operatorname{div}(\mu P, \mu Q) = 0,$$

$$iii) X\mu = -\mu \operatorname{div}(P, Q).$$

A integral primeira H associada ao fator integrante μ é dada por

$$H(x, y) = \int \mu(x, y)P(x, y)dy + h(x), \quad (1.21)$$

onde h é escolhida tal que $\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu Q$.

Na Definição 1.2.2, $\operatorname{div}(X)$ é o divergente do campo de vetores X definido por

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

É fácil ver que as afirmações *i*), *ii*), e *iii*) são equivalentes. Se H é uma integral primeira associada a um fator integrante, então

$$x' = \mu P = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = \mu Q = \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (1.22)$$

Por outro lado, dada a integral primeira H do sistema (1.20) sempre podemos encontrar o fator integrante μ tal que (1.22) é válido.

Consideramos que o sistema de equações diferenciais (1.20) tem um contínuo de órbitas periódicas em torno do ponto singular (0,0). Seja

$$\Gamma_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; H(x, y) = h, h_c < h < h_s\},$$

onde H é uma integral primeira do sistema (1.20), h_c é o nível crítico de H correspondente ao centro (0,0) e h_s denota o valor de H para o qual o anel periódico termina. Sem perda de generalidade podemos supor que $h_s > h_c \geq 0$. Denotamos por $\mu = \mu(x, y)$ o fator integrante do sistema (1.20) correspondente à integral primeira H .

Tomamos uma perturbação do sistema (1.20) da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = P(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon) \\ y' = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (1.23)$$

onde $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Teorema 1.2.1. *Suponhamos que o sistema de equações diferenciais (1.20) tem um contínuo de órbitas periódicas em torno do ponto singular (0,0) e que*

$$x \cdot Q(x, y) - y \cdot P(x, y) \neq 0 \quad (1.24)$$

para todo (x, y) no anel periódico.

Seja $\rho : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua tal que

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2, \quad (1.25)$$

para todo $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ e todo $\varphi \in [0, 2\pi)$. Então a equação que descreve a dependência entre a raiz quadrada da energia $R = \sqrt{h}$ e o ângulo φ para o sistema (1.23) é

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu (x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)}, \quad (1.26)$$

onde $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

Tomamos $\varepsilon_f > 0$ suficientemente pequeno e $D = \bigcup_{h_c^* < h < h_s^*} \Gamma_h$, onde $h_c < h_{c^*} < h_{s^*} < h_s$ são fixados arbitrariamente, porém próximos de h_c e h_s , respectivamente. O campo de vetores da equação (1.26) está bem definido e é contínuo em $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ e 2π -periódico com respeito a φ .

Demonstração. Usamos as relações

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -\mu P, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \mu Q, \end{aligned} \tag{1.27}$$

que provém da definição de integral primeira e de fator integrante. Definimos a função

$$G(r, R, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - R^2,$$

em todo ponto (r, φ) do anel periódico (que é um conjunto aberto) e para cada $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$, onde (r, φ) denota coordenadas polares. Usando as relações (1.27) temos que

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial H}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\mu(x, y)}{r} (Q(x, y)x - P(x, y)y),$$

onde $x = r \cos \varphi$ e $y = r \sin \varphi$. Para cada (r_0, φ_0) no anel periódico, existe um R_0 tal que $G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0$. Assumindo (1.24) então $\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \varphi_0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança W_0 de (R_0, φ_0) e uma função contínua $\rho = \rho(R, \varphi)$ definida nessa vizinhança tal que a relação (1.25) vale. Conseqüentemente, essa função está bem definida em todo domínio $(\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi)$ e satisfaz (1.25).

A dependência entre a raiz quadrada da energia e o tempo é dada por $R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}$, e entre o ângulo φ e o tempo é dada por $\varphi(t) = \arctan \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)$, sempre que $(x(t), y(t)) \in \Gamma_h$, $t \in \mathbb{R}$. Derivando essas igualdades temos

$$\begin{aligned} R'(t) &= \frac{1}{2H(x(t), y(t))^{1/2}} \left(\frac{\partial H}{\partial t}(x(t), y(t)) \right) = \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2R} (\mu Q(P + \varepsilon p) - \mu P(Q + \varepsilon q)) = \frac{1}{2R} \varepsilon \mu (Qp - Pq), \\ \varphi'(t) &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{y'x - yx'}{x^2} \right) = \frac{(Q + \varepsilon q)x - (P + \varepsilon p)y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(Qx - Py) + \varepsilon(qx - py)}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Considerando φ como a variável independente obtemos a equação (1.26):

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)}.$$

A condição (1.24) implica que o campo de vetores de (1.26) está bem definido em $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ para ε_f suficientemente pequeno, e tal equação é 2π -periódica em φ . \square

Apresentamos na seção 3.3 um exemplo onde aplicamos a mudança de variável do Teorema 1.2.1.

1.3 Resultante de polinômios

No capítulo 2 esse conceito é usado para, de uma maneira simples, estudarmos se as raízes de um polinômio são simples ou não. Para mais detalhes ver [8].

Sejam P e Q dois polinômios sobre o domínio de integridade \mathcal{R} com espaço quociente K , e seja \overline{K} o fecho algébrico de K .

Definição 1.3.1. *Sejam $P(x) = a(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m)$ e $Q(x) = b(x - \beta_1) \dots (x - \beta_n)$ a decomposição de P e Q em \overline{K} . Então, o resultante de P e Q , denotado por $R(P, Q)$, é dado por*

$$R(P, Q) = a^n \cdot Q(\alpha_1) \dots Q(\alpha_m) = (-1)^{m \cdot n} \cdot b^m \cdot P(\beta_1) \dots P(\beta_n),$$

ou equivalentemente

$$R(P, Q) = a^n \cdot b^m \cdot \prod_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}} (\alpha_i - \beta_j).$$

Notamos que o resultante se anula se, e somente se, os polinômios possuem uma raiz em comum.

Podemos também denotar o resultante por: $R(P(x), Q(x))$ ou $Res(P(x), Q(x))$.

Quando temos mais de uma variável, podemos calcular o resultante em relação a uma das variáveis e então denotamos o resultante entre os polinômios P e Q em relação a x por $R(P, Q, x)$.

Proposição 1.3.1. *Temos que o resultante entre três polinômios A_1 , A_2 e A_3 é dado por $R(A_1, A_2, A_3) = R(A_1, A_3) \cdot R(A_2, A_3)$.*

Capítulo 2

Métodos para encontrar quotas inferiores de ciclos limites

Neste capítulo consideramos algumas classes de equações diferenciais e apresentamos métodos para controlar as órbitas periódicas que persistem para uma família de equações diferenciais perturbadas.

Um dos métodos é apresentado por Coll, Gasull e Prohens em [3] e estuda sistemas de equações diferenciais não autônomas no cilindro $(t, r) \in S^1 \times \mathbb{R}^d$ com um parâmetro de perturbação ε que possuem um aberto de órbitas periódicas. Para esse caso, a partir da equação variacional obtemos sucessivas funções cujos zeros simples da primeira não identicamente nula controla as órbitas periódicas que persistem do sistema de equações diferenciais não-perturbado quando $\varepsilon = 0$.

Os outros métodos estão associados com a Teoria da Média. Em particular, também consiste em encontrar zeros simples de certas funções que vão garantir a persistência de órbitas periódicas do sistema não-perturbado. Neste caso, apresentamos a Teoria da Média padrão de primeira ordem e uma variação dessa teoria, que pode ser aplicada a equações do mesmo tipo das que surgem em [3].

2.1 Teoria da média padrão de primeira ordem

Nessa seção estudamos resultados da Teoria da Média padrão de primeira ordem, a qual consiste de um método para determinar condições suficientes para a existência e estabilidade de soluções periódicas de equações diferenciais que contém um parâmetro pequeno ε . A ideia da Teoria da Média originou-se no século XVIII e foi formulada por Lagrange em seu estudo sobre o problema gravitacional dos três corpos como uma perturbação do problema de dois corpos.

Iniciamos apresentando alguns resultados que utilizamos na demonstração do teorema principal da Teoria da Média de primeira ordem. As demonstrações destes resultados preliminares podem ser encontrados em [7].

Primeiramente vamos precisar da definição de *escala de tempo* e de *função ordem*.

Definição 2.1.1. Uma função $\delta(\varepsilon)$ contínua e positiva em $(0, \varepsilon_0]$ e que possui a propriedade de que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)$ existe enquanto que $\delta(\varepsilon)$ é monotonicamente decrescente conforme ε tende a zero é chamada de *função ordem*.

Definição 2.1.2. Consideramos a função vetorial $f : I \times D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas variáveis $(t, x, \varepsilon) \in I \times D \times (0, \varepsilon_0]$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que

a) $f(t, x, \varepsilon)$ é $O(\delta(\varepsilon))$ se existe uma constante k tal que $\|f\| \leq k\delta(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ com $\delta(\varepsilon)$ uma função ordem (aqui $\|\cdot\|$ é a norma do sup).

b) $f(t, x, \varepsilon)$ é $o(\delta(\varepsilon))$ se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|f\|}{\delta(\varepsilon)} = 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Definição 2.1.3. Consideramos a função vetor f como na Definição 2.1.2, e as funções ordem $\delta_1(\varepsilon)$ e $\delta_2(\varepsilon)$. $f(t, x, \varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon))$ conforme $\varepsilon \rightarrow 0$ na escala de tempo $1/\delta_2(\varepsilon)$ se a estimativa é válida para $x \in D$, $0 < \delta_2(\varepsilon)t < C$ com C uma constante independente de ε . A definição para o caso $f(t, x, \varepsilon) = o(\delta_1(\varepsilon))$ é análoga.

Teorema 2.1.1. Consideramos o problema de valor inicial

$$x' = f_0(t, x) + \varepsilon f_1(t, x) + \dots + \varepsilon^m f_m(t, x) + \varepsilon^{m+1} R(t, x, \varepsilon)$$

com $x(t_0) = \eta$ e $|t - t_0| \leq h$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Assumimos que nesse domínio temos:

a) $f_i(t, x)$, $i = 0, \dots, m$ contínua nas variáveis t e x , e $(m + i - 1)$ -vezes continuamente diferenciável,

b) $R(t, x, \varepsilon)$ é contínua em t , x e ε , e Lipschitz-contínua na variável x .

Então, é possível obter x_0, x_1, \dots, x_m funções tais que $x_0(t_0) = \eta$, $x_i(t_0) = 0$, $i = 0, \dots, m$ e uma aproximação

$$\|x(t) - (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^m x_m(t))\| = O(\varepsilon^{m+1})$$

na escala de tempo 1.

Teorema 2.1.2. *Consideramos o sistema em \mathbb{R}^n*

$$x' = A(t)x + f(t, x) \quad (2.1)$$

com $A(t)$ uma matriz função contínua e T -periódica, e a função $f(t, x)$ contínua nas variáveis t e x , e Lipschitz-contínua na variável x para $t \in \mathbb{R}$, com x numa vizinhança de $x = 0$. Além disso, temos $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0$, uniformemente em t (essa última condição implica também que $x = 0$ é solução de (2.1)).

Se as partes reais dos expoentes característicos do sistema periódico linear

$$y' = A(t)y$$

são negativas, a solução $x = 0$ do sistema (2.1) é estável e a atração é exponencial numa vizinhança de $x = 0$.

Teorema 2.1.3. *Consideramos o sistema em \mathbb{R}^n*

$$x' = Ax + B(t)x + f(t, x) \quad (2.2)$$

onde $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, A é uma matriz $n \times n$ com pelo menos um autovalor com parte real positiva, $B(t)$ é uma matriz função contínua $n \times n$ com a propriedade $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$ e a função $f(t, x)$ é contínua nas variáveis t e x , e Lipschitz-contínua na variável x numa vizinhança de $x = 0$. Se além disso temos $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0$ uniformemente em t , a solução $x = 0$ do sistema (2.2) é instável.

A seguir apresentamos o Teorema da Média de primeira ordem. Iniciamos descrevendo o tipo de sistema onde podemos aplicar tal teorema.

Consideramos o problema de valor inicial em \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assumimos que $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ é T -periódica na variável t e definimos

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt, \quad (2.4)$$

como a função média de f na variável t associada a (2.3). Tomamos o problema de valor inicial para a função média, que nos referimos por equação diferencial média,

$$\begin{aligned} y' &= \varepsilon f^0(y) \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A solução $y(t)$ de (2.5) está próxima da solução $x(t)$ do sistema (2.3) no seguinte sentido:

Teorema 2.1.4. *Consideramos os problemas de valor inicial (2.3) e (2.5) com $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$. Suponhamos que:*

a) *as funções $f, g, \partial f / \partial x$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M (que independe de ε) em $[0, \infty) \times D$,*

b) *g é Lipschitz-contínua na variável x para $x \in D$,*

c) *$f(t, x)$ é T -periódica na variável t com média $f^0(x)$, com T uma constante que independe de ε ,*

d) *$y(t)$ está contido num subconjunto do interior de D .*

Então, temos $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ na escala de tempo $1/\varepsilon$.

Demonstração. As condições a) e b) garantem a existência e unicidade de soluções dos problemas (2.3) e (2.5) na escala de tempo $1/\varepsilon$.

Definimos a função $u(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds$ e notamos que $u(0, x) = 0$. Temos que essa função $u(t, x)$ é limitada em $[0, \infty) \times D$, pois

$$\|u(t, x)\| = \left\| \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds \right\| \leq \left\| \int_0^t f(s, x) ds \right\| + \left\| \int_0^t f^0(x) ds \right\| \leq 2TM.$$

Vamos introduzir a transformação quase-identidade:

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t)), \quad (2.6)$$

que leva esse nome pois $x(t) - z(t) = O(\varepsilon)$ para $t \geq 0$ e $x, z \in D$.

A transformação (2.6) será usada para simplificar a expressão (2.3), num processo que também é chamado de normalização.

Derivando (2.6) com relação a t e substituindo em (2.3) temos,

$$x' = z' + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} z' = \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon). \quad (2.7)$$

Usando que $u(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(t, z) = f(t, z) - f^0(z)$, a equação (2.7) se escreve na forma:

$$z' + \varepsilon f(t, z) - \varepsilon f^0(z) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) z' = \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon).$$

Logo,

$$\left[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right] z' = \varepsilon f^0(z) + R(t, z, \varepsilon), \quad (2.8)$$

onde, $R(t, z, \varepsilon) = \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) - \varepsilon f(t, z)$.

Temos que $u(t, z)$ e $\frac{\partial u}{\partial z} = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial z}(s, z) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial z}(w, z) dw \right] ds$ são uniformemente limitadas, pois $\|u(t, z)\| \leq 2MT$, e $\frac{\partial f}{\partial z}$ é limitada por hipótese. Então, usando expansão em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ temos

$$\left[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right]^{-1} = I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^2), \quad t \geq 0, \quad z \in D \quad (2.9)$$

Como $f(t, z)$ é Lipschitz-contínua

$$\|f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)\| \leq L\varepsilon \|u(t, z)\| \leq L\varepsilon 2MT, \quad (2.10)$$

onde L é a constante de Lipschitz. Temos g limitada e usando (2.10) segue que para alguma constante positiva C que independe de ε ,

$$\|R(t, z, \varepsilon)\| = \|\varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - \varepsilon f(t, z) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 C, \quad t \geq 0, \quad z \in D. \quad (2.11)$$

Voltando à expressão (2.8) e usando (2.9) e (2.10) obtemos um problema de valor inicial

$$\begin{aligned} z' &= \left[I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^2) \right] (\varepsilon f^0(z) + R(t, z, \varepsilon)) \\ &= \varepsilon f^0(z) + R(t, z, \varepsilon) - \varepsilon^2 f^0(z) \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^3), \quad z(0) = x(0). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Consideramos uma reescala de tempo $\tau = \varepsilon t$ e a equação diferencial média (2.5) é transformada em

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{dy}{d\tau}(\tau/\varepsilon) \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{d\tau}(\tau/\varepsilon) \varepsilon = f^0(y(\tau/\varepsilon)) \varepsilon \quad (2.13)$$

e então

$$\frac{dy}{d\tau}(\tau/\varepsilon) = f^0(y(\tau/\varepsilon)). \quad (2.14)$$

Aplicando o Teorema 2.1.1 na equação (2.14) temos que

$$\begin{aligned} \|y(\tau/\varepsilon) - x_0(\tau/\varepsilon)\| &= O(\varepsilon), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \\ \|y(t) - x_0(t)\| &= O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq 1/\varepsilon, \end{aligned}$$

como $y' = \varepsilon f^0(y)$ e $z' = \varepsilon f^0(z) + O(\varepsilon^2)$ temos

$$\|z(t) - x_0(t)\| = O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq 1/\varepsilon.$$

Pela relação quase-identidade

$$\|x(t) - x_0(t)\| = O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq 1/\varepsilon.$$

O que mostra o resultado. □

Consideramos a equação (2.3) e assumimos que ambas funções $f(t, x)$ e $g(t, x, \varepsilon)$ são T -periódicas na variável t .

O Teorema a seguir mostra que sob certas condições, os pontos de equilíbrio da função média (2.4) dão origem a soluções T -periódicas da equação (2.3).

Teorema 2.1.5. *Consideramos a equação (2.3) e suponhamos que*

a) *as funções f , g , $\partial f/\partial x$, $\partial^2 f/\partial x^2$ e $\partial g/\partial x$ são definidas contínuas e limitadas por uma constante M (que independe de ε) em $[0, \infty) \times D$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;*

b) *f e g são T -periódicas na variável t (T independente de ε).*

Se p é um ponto singular da equação diferencial média (2.4) e

$$\det \left(\frac{\partial f^0}{\partial y}(y) \right)_{y=p} \neq 0, \tag{2.15}$$

então existe uma solução T -periódica $\phi(t, \varepsilon)$ da equação (2.3) que está próxima de p de forma que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t, \varepsilon) = p$.

Demonstração. Consideramos a função auxiliar

$$u(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds$$

e a transformação quase-identidade $x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t))$, como na demonstração do Teorema 2.1.4.

De maneira análoga ao feito na demonstração do Teorema 2.1.4, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|R(t, z, \varepsilon)\| &= \|\varepsilon[f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)] + \varepsilon^2 g(t, z, \varepsilon)\| \\ &\leq \varepsilon \|f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)\| + \varepsilon^2 \|g(t, z, \varepsilon)\| \\ &\leq \varepsilon^2 L_2 T M + \varepsilon^2 M := \varepsilon^2 C, \end{aligned}$$

que nos garante que $R = R(t, z, \varepsilon)$ é de ordem ε^2 . Daí, obtemos o seguinte sistema em z :

$$\begin{aligned} z' &= \varepsilon f^0(z) + \varepsilon [f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)] + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) \\ &\quad - \varepsilon^2 f^0(z) \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Denotamos $F(\varepsilon) = f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)$ e $G(\varepsilon) = g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)$. Suas séries de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ são, respectivamente, dadas por:

$$F(\varepsilon) = F(0) + \varepsilon \frac{dF}{d\varepsilon}(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2 F}{d\varepsilon^2}(0) + \dots = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) u(t, z) + O(\varepsilon^2), \quad (2.17)$$

e

$$G(\varepsilon) = G(0) + \varepsilon \frac{dG}{d\varepsilon}(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2 G}{d\varepsilon^2} + \dots = g(t, z, 0) + O(\varepsilon). \quad (2.18)$$

Substituímos (2.17) e (2.18) em (2.16) e reescrevemos o sistema em z da seguinte maneira

$$\begin{aligned} z' &= \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) u(t, z) + \varepsilon^2 g(t, z, 0) - \varepsilon^2 f^0(z) \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z}(t, z) u(t, z) + g(t, z, 0) - f^0(z) \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + O(1) \right) \\ &:= \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R^*(t, z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.19)$$

com $R^*(t, z, \varepsilon)$ continuamente diferenciável em z e T -periódica em t , pois, por hipótese, f e g são T -periódicas. Além disso, $u(t, z)$ também é T -periódica, pois

$$\begin{aligned} u(t+T, z) &= \int_0^{t+T} [f(s, z) - f^0(z)] ds \\ &= \int_0^t [f(s, z) - f^0(z)] ds + \int_t^{t+T} [f(s, z) - f^0(z)] ds \\ &= \int_0^t [f(s, z) - f^0(z)] ds + \left(\int_0^T f(s, z) ds - \int_0^T f^0(z) ds \right) \\ &= \int_0^t [f(s, z) - f^0(z)] ds + [f^0(z)T - f^0(z)T] = u(t, z). \end{aligned}$$

Portanto, uma solução T -periódica $z(t)$ do sistema (2.19) produz uma solução T -periódica $x(t)$ do sistema original (2.3). Por isso, a seguir procuramos soluções T -periódicas do sistema (2.19).

Integramos o sistema (2.19) na variável t e obtemos a seguinte solução integral

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t f^0(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R^*(s, z(s), \varepsilon) ds \quad (2.20)$$

Como para uma solução T -periódica $z(t)$ vale $z(t+T) = z(t)$, para todo $t \geq 0$, temos $z(T) = z(0)$ e pela equação (2.20) vale,

$$z(T) = z(0) + \varepsilon \int_0^T f^0(z(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^T R^*(s, z(s), \varepsilon)ds,$$

concluimos que

$$h(z(0), \varepsilon) = \int_0^T f^0(z(s))ds + \varepsilon \int_0^T R^*(s, z(s), \varepsilon)ds = 0. \quad (2.21)$$

Temos que encontrar z_ε tais que $z(T) - z_\varepsilon = 0$, ou equivalentemente, $h(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$.

Agora, para $\varepsilon = 0$ e $z(0) = p$ temos

$$h(p, 0) = 0.$$

Além disso,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial z}(z, 0) \right|_{z=p} = \left. \int_0^T \frac{\partial f^0}{\partial z}(z(s))ds \right|_{z=p}$$

e $\left| \frac{\partial f^0}{\partial z}(p) \right| \neq 0$, então para $z(s)$ próximo de p , $\left| \frac{\partial f^0}{\partial z}(z(s)) \right| \neq 0$ e $\left| \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) \right|_{z=p} \neq 0$. Daí, existe uma vizinhança V_0 de $\varepsilon = 0$ tal que para cada $\varepsilon \in V_0$, existe $z = z_\varepsilon$ tal que $h(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$. Assim, para cada $\varepsilon \in V_0$

$$z(t) = z_\varepsilon + \varepsilon \int_0^t f^0(z(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^t R^*(s, z(s), \varepsilon)ds$$

é uma solução T -periódica de (2.19).

Daí, pela transformação quase-identidade temos uma solução T -periódica do sistema original.

Considerando $z(0) = p$ temos, por (2.20), que $z(t) \rightarrow z(0) = p$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, considerando $z(t)$ uma solução T -periódica de (2.19), temos que existe uma solução $x(t)$ de (2.3) T -periódica, e pela relação quase-identidade conclui-se que $x(t) \rightarrow p$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com isso, finalizamos a demonstração. □

Uma questão que pode surgir é sobre a estabilidade desta solução encontrada no Teorema 2.1.5. O teorema a seguir nos garante que a estabilidade do ponto singular simples do sistema diferencial médio é preservada pela solução periódica associada a ele.

Teorema 2.1.6. *Consideramos a equação (2.3) e suponhamos que as condições do Teorema 2.1.5 estão satisfeitas. Se o ponto singular $y = p$ da equação diferencial média (2.5) é hiperbólico, então, para ε suficientemente pequeno, a solução periódica correspondente $\phi(t, \varepsilon)$ do sistema (2.3) é hiperbólica e tem o mesmo tipo de estabilidade que p .*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que todos os autovalores do ponto singular $y = p$ da equação diferencial média (2.5) possuem parte real negativa. Seja $\phi(t, \varepsilon)$ a solução periódica do sistema original (2.3). Consideramos a mudança de variável

$$x = z + \phi(t, \varepsilon), \tag{2.22}$$

e aplicamos no sistema (2.3)

$$\begin{aligned} z' &= \varepsilon f(t, z + \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon^2 g(t, z + \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) - \phi'(t, \varepsilon) \\ &= \varepsilon [f(t, z + \phi(t, \varepsilon)) - f(t, \phi(t, \varepsilon))] + \varepsilon^2 [g(t, z + \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) - g(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \end{aligned} \tag{2.23}$$

Denotamos por $f_1(z) = f(t, z + \phi(t, \varepsilon)) - f(t, \phi(t, \varepsilon))$ e $g_1(z) = g(t, z + \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) - g(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)$. Daí, expandindo f_1 e g_1 em série de Taylor com respeito a z em torno de $z = 0$ e truncando em ordem 2 de z os termos não-lineares, temos

$$f_1(z) = f_1(0) + z \frac{df_1}{dz}(0) + \frac{z^2}{2} \frac{d^2 f_1}{dz^2}(0) + \dots = z \frac{\partial f}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon)),$$

e

$$g_1(z) = g_1(0) + z \frac{dg_1}{dz}(0) + \frac{z^2}{2} \frac{d^2 g_1}{dz^2}(0) + \dots = z \frac{\partial g}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon).$$

Substituindo em (2.23) obtemos o seguinte sistema

$$z' = \varepsilon A(t, \varepsilon)z, \tag{2.24}$$

com $A(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z} [f(t, \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon g(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)]$ uma matriz T -periódica na variável t , pois f e g o são por hipótese. O sistema (2.24) é uma linearização, com coeficientes T -periódicos, do sistema (2.3) numa vizinhança da solução periódica $\phi(t, \varepsilon)$.

Definimos

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(t, p).$$

Como f é T -periódica na variável t , segue também que $B(t)$ é T -periódica. Pelo Teorema 2.1.5 temos que $\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, conseqüentemente $A(t, \varepsilon) \rightarrow B(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Utilizamos também as matrizes

$$B^0 = \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt, \text{ e } C(t) = \int_0^t [B(s) - B^0] ds.$$

Notamos que B^0 é a matriz constante da equação diferencial média (2.5) linearizada. De fato, expandindo a função $f^0(y)$ de (2.5) em série de Taylor em torno de seu ponto singular p e considerando a parte linear da expansão temos

$$\begin{aligned} f^0(y) &= f^0(p) + \frac{df^0}{dy}(p)(y - p) + \dots \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t, p) dt (y - p) \\ &= B^0(y - p). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Considerando a translação $w = y - p$, levamos o ponto singular $y = p$ para a origem $w = 0$. Assim, a equação diferencial média (2.5) linearizada é da forma

$$w' = \varepsilon f^0(w + p) = \varepsilon B^0 w.$$

Por (2.25) temos $B^0 = \frac{df^0}{dy}(p)$. Temos por hipótese que todos os autovalores de B^0 possuem parte real negativa. Além disso, a matriz $C(t)$ é T -periódica, pois

$$\begin{aligned} C(t + T) &= \int_0^{t+T} B(s) ds - \int_0^{t+T} B^0 ds \\ &= \left(\int_0^t B(s) ds + \int_t^{t+T} B(s) ds \right) - \left(\int_0^t B^0 ds + \int_t^{t+T} B^0 ds \right) \\ &= \int_0^t [B(s) - B^0] ds + \int_0^T B(s) ds - \int_0^T B^0 ds \\ &= \int_0^t [B(s) - B^0] ds + B^0 T - B^0 T \\ &= C(t), \end{aligned}$$

e $C(t)$ possui média nula na variável t , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T [B(s) - B^0] ds &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T B(s) ds - \int_0^T B^0 ds \right] = \frac{1}{T} \int_0^T B(s) ds - \frac{1}{T} B^0 T \\ &= B^0 - B^0 = 0. \end{aligned}$$

Agora, consideramos a mudança de variável quase-identidade

$$y = (I - \varepsilon C(t))z. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.26) em (2.24) e usando o fato que $(I - \varepsilon C(t))^{-1} = I + \varepsilon C(t) + \dots$ em torno de $\varepsilon = 0$, temos o sistema na variável y

$$\begin{aligned}
 y' &= -\varepsilon C'(t)z + (I - \varepsilon C(t))z' \\
 &= -\varepsilon(B(t) - B^0)z + (I - \varepsilon C(t))\varepsilon A(t, \varepsilon)z \\
 &= [\varepsilon B^0 + \varepsilon(A(t, \varepsilon) - B(t)) - \varepsilon^2 C(t)A(t, \varepsilon)](I - \varepsilon C(t))^{-1}y \\
 &= \varepsilon B^0 y + \varepsilon(A(t, \varepsilon) - B(t))y + \varepsilon^2 R(t, \varepsilon)y,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $R(t, \varepsilon) = B^0 C(t) + (A(t, \varepsilon) - B(t))C(t) - C(t)A(t, \varepsilon) - \varepsilon C(t)A(t, \varepsilon)C(t)$ é T -periódica e limitada, pois as matrizes $C(t)$, $B(t)$ e $A(t, \varepsilon)$ são T -periódicas e contínuas. Como $A(t, \varepsilon) \rightarrow B(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que $(A(t, \varepsilon) - B(t)) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então, usando o Teorema 1.1.13 e para ε suficientemente pequeno, o sinal da parte real dos expoentes característicos da parte linear de (2.27) é igual ao sinal da parte real dos autovalores da matriz B^0 . Pela mudança de coordenadas quase-identidade (2.26), para ε suficientemente pequeno, o sistema (2.27) está “próximo” do sistema (2.24), e então o sinal da parte real dos expoentes característicos de (2.24) é igual ao sinal da parte real dos autovalores de B^0 . Como os autovalores de B^0 tem parte real negativa, aplicando o Teorema 2.1.2 no sistema (2.24) com $f(t, x) \equiv 0$ obtemos que a solução nula $z = 0$ é estável, ou seja, $z(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Então, pela mudança de variável (2.22) segue que $x(t) \rightarrow \phi(t, \varepsilon)$ quando $t \rightarrow \infty$, e, portanto, a solução periódica do sistema (2.3) é estável.

Vamos supor agora que pelo menos um dos autovalores do ponto singular $y = p$ da equação diferencial média (2.5) possui parte real positiva. Então, a matriz B^0 tem pelo menos um autovalor com parte real positiva. Como $(A(t, \varepsilon) - B(t)) \rightarrow 0$ e $\frac{\|\varepsilon^2 R(t, \varepsilon)y\|}{\|y\|} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ podemos aplicar o Teorema 2.1.3 no sistema (2.27) e daí concluímos que a solução trivial $y = 0$ é instável, ou seja, $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$. Pela mudança de variável (2.26) e pelo fato da matriz $C(t)$ ser T -periódica, temos que $z(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ e então, pela mudança de variável (2.22), segue que $x(t) \rightarrow \phi(t, \varepsilon)$ quando $t \rightarrow -\infty$, o que implica que a solução periódica $\phi(t, \varepsilon)$ de (2.3) é instável.

□

Aplicações dos resultados apresentados nesta seção serão vistos no Capítulo 3.

2.2 Método via estudo de equações variacionais

Nessa seção estudamos o método proposto por Coll, Gasull e Prohens em [3] para mensurar o número de ciclos limite de um sistema de equações diferenciais.

Consideramos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dr}{dt} = f(t, r, \varepsilon) = f_0(t, r) + \sum_{i=1}^m f_i(t, r)\varepsilon^i + O(\varepsilon^{m+1}), \quad (2.28)$$

onde $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, cada $f_i : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função real, de classe \mathcal{C}^r , para r suficientemente grande, e T -periódica na variável t para cada $i = 0, \dots, m$, e ε é um parâmetro positivo suficientemente pequeno.

Temos que (2.28) é uma perturbação da equação diferencial não-autônoma

$$\frac{dr}{dt} = f_0(t, r); \quad t \in [0, T], \quad r \in \mathbb{R}^d. \quad (2.29)$$

Assumimos que essa equação possui um aberto contínuo de soluções T -periódicas, ou seja, existe um aberto não-vazio $U \subset \mathbb{R}^d$ tal que para cada $\rho \in U$ a solução $\varphi_0(t, \rho)$ de (2.29) satisfaz $\varphi_0(T, \rho) = \varphi_0(0, \rho) = \rho$.

Estamos interessados em descobrir quais das soluções periódicas de (2.29) permanecem como ciclos limites de (2.28) para $\varepsilon \neq 0$ e encontramos limitantes inferiores para o número de tais ciclos limites. Para isto obtemos m funções tais que seus zeros simples dão origem a soluções isoladas T -periódicas do sistema perturbado (2.28). Estas funções são encontradas a partir do conhecimento explícito do fluxo da equação não-perturbada (2.29).

Seja $\varphi_\varepsilon(t, \rho)$ a solução da equação (2.28) com condição inicial $\varphi_\varepsilon(0, \rho) = \rho \in \mathbb{R}^d$. Escrevemos a solução $\varphi_\varepsilon(t, \rho)$ da seguinte maneira

$$\varphi_\varepsilon(t, \rho) = \varphi_0(t, \rho) + \sum_{i=1}^m u_i(t, \rho)\varepsilon^i + O(\varepsilon^{m+1}), \quad (2.30)$$

onde $u_i(t, \rho) : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ são funções tais que $u_i(0, \rho) = 0$ para cada i inteiro positivo de 1 até m .

Definimos $M_0(\rho) \equiv 0$ e $M_i(\rho) = u_i(T, \rho)$ quando $i > 0$ e $M_1(\rho) \equiv M_2(\rho) \equiv \dots \equiv M_{i-1}(\rho) \equiv 0$. Notamos que $M_i : U \rightarrow \mathbb{R}^d$. No Teorema 2.2.1 apresentamos explicitamente a expressão das funções $M_1(\rho)$ e $M_2(\rho)$. Em seguida, é dada a expressão de $M_3(\rho)$.

Lembramos que, dada uma função suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D_\rho f$ denota a matriz Jacobiana de f e $D_{\rho\rho} f$ denota a matriz Hessiana de f .

Teorema 2.2.1. *Consideramos a equação diferencial (2.28). Seja $\varphi_\varepsilon(t, \rho)$ a solução tal que $\varphi_\varepsilon(0, \rho) = \rho$, escrita como em (2.30). Assumimos que $\varphi_0(T, \rho) = \rho$, para todo $\rho \in U$. Então,*

$$M_1(\rho) = \int_0^T (D_\rho \varphi_0(t, \rho))^{-1} f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) dt$$

e

$$M_2(\rho) = \int_0^T (D_\rho \varphi_0(t, \rho))^{-1} \left[\frac{1}{2} u_1^T(t, \rho) D_{\rho\rho} f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) u_1(t, \rho) \right. \\ \left. + D_\rho f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) u_1(t, \rho) + f_2(t, \varphi_0(t, \rho)) \right] dt.$$

Mais ainda, se $M_1(\rho) \equiv 0$ então, para ε suficientemente pequeno, cada zero simples $\rho^* \in U$ de $M_2(\rho)$, dá origem a um ciclo limite T -periódico da equação (2.28).

Este ciclo limite tende para a solução $\varphi_0(t, \rho^*)$ da equação (2.29) não-perturbada passando por $\rho = \rho^*$, quando ε tende a zero.

Demonstração. Seja $\varphi_\varepsilon(t, \rho) = \varphi_0(t, \rho) + \sum_{i=1}^3 u_i(t, \rho) \varepsilon^i + O(\varepsilon^4)$ a solução de

$$\frac{dr}{dt} = f_0(t, r) + \sum_{i=1}^3 f_i(t, r) \varepsilon^i + O(\varepsilon^4). \quad (2.31)$$

Derivando $\varphi_\varepsilon(t, \rho)$ com relação a t , temos

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t}(t, \rho) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(t, \rho) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial t}(t, \rho) \varepsilon^i + O(\varepsilon^4). \quad (2.32)$$

Em (2.31) tomamos $r = \varphi_\varepsilon(t, \rho)$ e igualamos com (2.32)

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(t, \rho) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial t}(t, \rho) \varepsilon^i + O(\varepsilon^4) = f_0(t, \varphi_\varepsilon(t, \rho)) + \sum_{i=1}^3 f_i(t, \varphi_\varepsilon(t, \rho)) \varepsilon^i + O(\varepsilon^4). \quad (2.33)$$

Consideramos a expansão em série de Taylor de cada um dos termos do lado direito de (2.33) em torno de $\varphi_0(t, \rho)$.

Tomando a expansão em série de Taylor de f_0 em torno de $\varphi_0(t, \rho)$ e explicitando os termos até ordem 3, obtemos

$$f_0(t, \varphi_\varepsilon(t, \rho)) \cong f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) (\varphi_\varepsilon(t, \rho) - \varphi_0(t, \rho)) \\ + \frac{1}{2} D_{\rho\rho} f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) (\varphi_\varepsilon(t, \rho) - \varphi_0(t, \rho))^2 \\ + \frac{1}{3!} D_{\rho\rho\rho} f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) (\varphi_\varepsilon(t, \rho) - \varphi_0(t, \rho))^3 \\ = f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) \\ + D_\rho f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) (u_1(t, \rho) \varepsilon + u_2(t, \rho) \varepsilon^2 + u_3(t, \rho) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)) \\ + \frac{1}{2} D_{\rho\rho} f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) (u_1(t, \rho) \varepsilon + u_2(t, \rho) \varepsilon^2 + u_3(t, \rho) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4))^2 \\ + \frac{1}{6} D_{\rho\rho\rho} f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) (u_1(t, \rho) \varepsilon + u_2(t, \rho) \varepsilon^2 + u_3(t, \rho) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4))^3$$

$$\begin{aligned}
&= f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)\varepsilon \\
&\quad + D_\rho f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho)\varepsilon^2 + D_\rho f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_3(t, \rho)\varepsilon^3 \\
&\quad + \frac{1}{2}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)\varepsilon^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}u_1(t, \rho)^{\mathbf{T}}D_{\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho)\varepsilon^3 \\
&\quad + \frac{1}{6}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)u_1(t, \rho)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Analogamente, considerando a expansão de f_1 até ordem 2, de f_2 até ordem 1 e de f_3 até ordem zero.

$$\begin{aligned}
f_1(t, \varphi_\varepsilon(t, \rho)) &\cong f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_1(t, \varphi_0(t, \rho))(\varphi_\varepsilon(t, \rho) - \varphi_0(t, \rho)) \\
&\quad + \frac{1}{2}D_{\rho\rho}f_1(t, \varphi_0(t, \rho))(\varphi_\varepsilon(t, \rho) - \varphi_0(t, \rho))^2 \\
&= f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_1(t, \varphi_0(t, \rho))(u_1(t, \rho)\varepsilon + u_2(t, \rho)\varepsilon^2 \\
&\quad + u_3(t, \rho)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)) + \frac{1}{2}D_{\rho\rho}f_1(t, \varphi_0(t, \rho))(u_1(t, \rho)\varepsilon \\
&\quad + u_2(t, \rho)\varepsilon^2 + u_3(t, \rho)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4))^2 \\
&= f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_1(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)\varepsilon \\
&\quad + D_\rho f_1(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho)\varepsilon^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_1(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(t, \varphi_\varepsilon(t, \rho)) &\cong f_2(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_2(t, \varphi_0(t, \rho))(\varphi_\varepsilon(t, \rho) - \varphi_0(t, \rho)) \\
&= f_2(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_2(t, \varphi_0(t, \rho))(u_1(t, \rho)\varepsilon + u_2(t, \rho)\varepsilon^2 + u_3(t, \rho)\varepsilon^3 \\
&\quad + O(\varepsilon^4)) \\
&= f_2(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_2(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)\varepsilon + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

$$f_3(t, \varphi_\varepsilon(t, \rho)) \cong f_3(t, \varphi_0(t, \rho)).$$

Reescrevemos (2.33) colocando ε , ε^2 , ε^3 em evidência

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_0}{dt}(t, \rho) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial t}(t, \rho)\varepsilon^i + O(\varepsilon^4) = f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) \\
&\quad + \varepsilon[f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) + D_\rho f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)] + \varepsilon^2[f_2(t, \varphi_0(t, \rho)) \\
&\quad + D_\rho f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho) + D_\rho f_1(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho) \\
&\quad + \frac{1}{2}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)] + \varepsilon^3[f_3(t, \varphi_0(t, \rho)) \\
&\quad + D_\rho f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_3(t, \rho) + \frac{1}{2}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
& +u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho) \\
& +\frac{1}{6}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)u_1(t, \rho) \\
& +D_{\rho}f_1(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho) +\frac{1}{2}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_1(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho) \\
& +D_{\rho}f_2(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho)] + O(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Por igualdade de polinômios em ε na expressão (2.34), obtemos as seguintes equações diferenciais não-homogêneas para as funções $u_i(t, \rho)$, $i = 1, 2, 3$.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(t, \rho) = D_{\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho) + f_1(t, \varphi_0(t, \rho)); \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial t}(t, \rho) & = D_{\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho) + f_2(t, \varphi_0(t, \rho)) \\
& +D_{\rho}f_1(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho) +\frac{1}{2}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho);
\end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_3}{\partial t}(t, \rho) & = D_{\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_3(t, \rho) + f_3(t, \varphi_0(t, \rho)) \\
& +\frac{1}{2}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho) + u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho) \\
& +\frac{1}{6}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)(D_{\rho\rho\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho))u_1(t, \rho) \\
& +D_{\rho}f_1(t, \varphi_0(t, \rho))u_2(t, \rho) +\frac{1}{2}u_1^{\mathbf{T}}(t, \rho)D_{\rho\rho}f_1(t, \rho)u_1(t, \rho) \\
& +D_{\rho}f_2(t, \varphi_0(t, \rho))u_1(t, \rho).
\end{aligned} \quad (2.37)$$

Notamos que (2.35), (2.36) e (2.37) são equações diferenciais lineares não homogêneas da forma

$$x' = a(t)x + b(t),$$

onde $'$ denota a derivada com relação à variável t . O problema de Cauchy com condição inicial $x(0) = 0$ tem solução

$$x(t) = A(t) \int_0^t A^{-1}(s)b(s)ds,$$

onde $A(t)$ é uma matriz principal da equação diferencial homogênea $x' = a(t)x$.

Sabemos que $D_{\rho}\varphi_0(t, \rho)$ é uma matriz principal da equação linear homogênea

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(t, \rho) = D_{\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))u_i(t, \rho),$$

para $i = 1, 2, 3$, pois $\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(t, \rho) = f_0(t, \varphi_0(t, \rho))$, e

$$\frac{\partial}{\partial t}(D_{\rho}\varphi_0)(t, \rho) = D_{\rho}f_0(t, \varphi_0(t, \rho))D_{\rho}\varphi_0(t, \rho).$$

Portanto, impondo a condição de periodicidade $\varphi_0(T, \rho) = \rho$, obtemos as soluções dessas equações em $t = T$ da forma

$$u_i(T, \rho) = \int_0^T D_\rho \varphi_0(s, \rho)^{-1} b_i(s) ds,$$

onde $b_i(s)$ é a parte não-homogênea das equações (2.35), (2.36) e (2.37) respectivamente para $i = 1, 2, 3$.

Com isso, obtemos as expressões de $M_1(\rho)$, $M_2(\rho)$ e $M_3(\rho)$.

Por fim, mostramos que cada zero simples de $M_1(\rho)$ dá origem, para ε suficientemente pequeno, a um ciclo limite T -periódico da equação (2.28). De (2.30) temos, $\varphi_\varepsilon(T, \rho) = \rho + \varepsilon M_1(\rho) + O(\varepsilon^2)$. Então, definimos

$$\Psi(\rho, \varepsilon) := \frac{\varphi_\varepsilon(T, \rho) - \rho}{\varepsilon} = M_1(\rho) + O(\varepsilon). \quad (2.38)$$

Uma vez que $\varphi_0(0, \rho) = \varphi_0(T, \rho) = \rho$, e usando a regra de L'Hospital, temos que

$$\Psi(\rho, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi'(\rho, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_1(\rho) + 2\varepsilon M_2(\rho) + \dots = M_1(\rho),$$

daí, se ρ é zero de $M_1(\rho)$, então $\Psi(\rho, 0) = M_1(\rho) = 0$ e $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}(\rho, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = M_1'(\rho)$.

Se ρ^* é uma raiz simples de $M_1(\rho)$, então $\Psi(\rho^*, 0) = 0$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}(\rho^*, 0)$ é não nulo.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança V_0 de $\varepsilon = 0$ tal que para cada $\varepsilon^* \in V_0$ existe um único $\rho(\varepsilon^*) \in U$ tal que

$$\Psi(\rho(\varepsilon^*), \varepsilon^*) = 0,$$

ou seja, $\varphi_\varepsilon(T, \rho(\varepsilon^*)) = \rho(\varepsilon^*)$. Em outras palavras, para $\varepsilon^* \in V_0$, $\varphi_\varepsilon(t, \varepsilon^*)$ é um ciclo limite T -periódico da equação diferencial (2.28).

Se temos que $M_1(\rho) \equiv 0$, então podemos aplicar o mesmo argumento para

$$\frac{\varphi_\varepsilon(T, \rho) - \rho}{\varepsilon^2} = M_2(\rho) + O(\varepsilon).$$

Com isso, demonstramos o Teorema. □

No Teorema 2.2.1, se $M_i(\rho) \equiv 0$ para $i = 1, \dots, k-1$, então aplicamos o mesmo argumento para

$$\Psi_k(\rho, \varepsilon) = \frac{\varphi_\varepsilon(T, \rho) - \rho}{\varepsilon^k} = M_k(\rho) + O(\varepsilon)$$

e concluímos que cada zero simples de $M_k(\rho)$ dá origem a um ciclo limite T -periódico da equação diferencial (2.28).

Observamos que, assumindo as hipóteses do Teorema 2.2.1 e supondo $f_0 \in \mathcal{C}^3([0, T] \times U)$, temos que a expressão de $M_3(\rho)$ é dada por:

$$\begin{aligned} M_3(\rho) = & \int_0^T (D_\rho \varphi_0(t, \rho))^{-1} (u_1^\mathbf{T}(t, \rho) D_{\rho\rho} f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) u_2(t, \rho) + \frac{1}{6} u_1^\mathbf{T}(t, \rho) \\ & (D_{\rho\rho\rho} f_0(t, \varphi_0(t, \rho)) u_1(t, \rho)) u_1(t, \rho) + D_\rho f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) u_2(t, \rho) + \frac{1}{2} u_1^\mathbf{T}(t, \rho) \\ & D_{\rho\rho} f_1(t, \varphi_0(t, \rho)) u_1(t, \rho) + D_\rho f_2(t, \varphi_0(t, \rho)) u_1(t, \rho) + f_3(t, \varphi_0(t, \rho))) dt. \end{aligned}$$

Quando $d = 1$ e $f_0(t, r) \equiv 0$, então $\varphi_0(t, \rho) = \rho$ e uma expressão mais simples para M_i , $i = 1, \dots, 4$ é dada na próxima proposição.

Proposição 2.2.1. *Consideramos a equação diferencial (2.28) com $f_0(t, r) \equiv 0$ e $d = 1$. Sejam $f_i \in \mathcal{C}^3([0, T] \times U)$, $i = 1, \dots, 4$, T -periódicas na variável t , onde $U \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Então,*

$$M_1(\rho) = \int_0^T f_1(t, \rho) dt,$$

$$M_2(\rho) = \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial \rho}(t, \rho) u_1(t, \rho) + f_2(t, \rho) \right) dt,$$

$$\begin{aligned} M_3(\rho) = & \int_0^T \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho^2}(t, \rho) u_1^2(t, \rho) + \frac{\partial f_1}{\partial \rho}(t, \rho) u_2(t, \rho) + \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(t, \rho) u_1(t, \rho) \right. \\ & \left. + f_3(t, \rho) \right) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_4(\rho) = & \int_0^T \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial \rho^3}(t, \rho) u_1^3(t, \rho) + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho^2}(t, \rho) u_1(t, \rho) u_2(t, \rho) + \frac{\partial f_1}{\partial \rho}(t, \rho) u_3(t, \rho) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \rho^2}(t, \rho) u_1^2(t, \rho) + \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(t, \rho) u_2(t, \rho) + \frac{\partial f_3}{\partial \rho}(t, \rho) u_1(t, \rho) \right. \\ & \left. + f_4(t, \rho) \right) dt. \end{aligned}$$

Além disso, as mesmas conclusões do Teorema 2.2.1 são válidas.

Notamos que a Proposição 2.2.1, quando $M_1(\rho)$ não é identicamente nula, implica no Teorema da Média de Primeira Ordem. Enquanto que, quando $M_1(\rho) \equiv 0$, o que equivale a função média (2.4) identicamente nula, e $M_2(\rho)$ não identicamente nula, a Proposição 2.2.1 implica no Teorema da Média de Segunda Ordem como surge no Teorema 3.1 de [1].

Observamos que no Teorema 2.2.1 e na Proposição 2.2.1 uma hipótese chave é que todos os zeros de $M_i(\rho)$ são simples. Essa hipótese pode ser verificada encontrando os zeros de $M_1(\rho)$ e mostrando que o determinante da matriz jacobiana de $M_i(\rho)$ nesses zeros é não nulo. Apresentamos uma técnica que nos permite verificar essa hipótese quando $M_i(\rho) = 0$ é equivalente a um sistema polinomial em \mathbb{R}^d . Por simplicidade consideramos o caso em que $d = 2$, contudo ele pode ser estendido para dimensões maiores.

Proposição 2.2.2. *Consideramos o sistema polinomial no plano,*

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0,$$

e definimos

$$J(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

$$R^x(y) = \text{Res}(P(x, y), J(x, y), x),$$

$$R^y(x) = \text{Res}(P(x, y), J(x, y), y),$$

$$S^x(y) = \text{Res}(Q(x, y), J(x, y), x),$$

$$S^y(x) = \text{Res}(Q(x, y), J(x, y), y),$$

$$T_1(x) = \text{Res}(R^x(y), S^x(y), y) \in \mathbb{C},$$

$$T_2(x) = \text{Res}(R^y(x), S^y(x), x) \in \mathbb{C}.$$

Se $T_1 \neq 0$ ou $T_2 \neq 0$, então todas as soluções (reais ou complexas) do sistema são simples.

Demonstração. Suponhamos que $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ é uma solução múltipla do sistema. Como a solução é múltipla, então o determinante do Jacobiano se anula em (x_0, y_0) . Portanto, $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = J(x_0, y_0) = 0$, e daí temos que $R^x(y_0) = S^x(y_0) = R^y(x_0) = S^y(x_0) = 0$, o que implica que $T_1 = T_2 = 0$. \square

Observamos que às vezes pode ser útil decompor os polinômios R^x , R^y , S^x , e S^y em fatores. Usando essas decomposições podemos provar que, em certas regiões, todas as soluções do sistema são simples.

Como aplicação do Teorema 2.2.1 consideramos algumas famílias gerais de equações diferenciais com $d = 1, 2, 3$ incluindo algumas equações diferenciais polinômiais autônomas e equações diferenciais de Abel não-autônomas. Estes exemplos estão apresentados no Capítulo 3.

2.3 Método via Redução de Lyapunov-Schmidt

Nessa seção trabalhamos com equações diferenciais não-autônomas e periódicas dependendo de um parâmetro. Tais equações são semelhantes a (2.28). Assumimos que a equação não perturbada possui uma variedade invariante de soluções periódicas. De maneira análoga à seção 2.1, o método aqui apresentado apresenta condições suficientes para garantir quando uma órbita periódica desta variedade invariante persiste após uma perturbação. A principal ferramenta para este método é a Redução de Lyapunov-Schmidt. Este trabalho foi realizado por Buicã, Françoise e Llibre em [2].

Consideramos uma equação diferencial que possua um termo que não é multiplicado pelo parâmetro ε , ou seja, uma equação da forma

$$x'(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.39)$$

onde ε é um parâmetro suficientemente pequeno, $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $R : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções de classe \mathcal{C}^2 , T -periódicas na variável t , $F_0(t, x)$ é não-nula em $\mathbb{R} \times \Omega$ e Ω é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n .

Vamos considerar o problema de bifurcação de soluções T -periódicas para equações diferenciais da forma (2.39) tomando como hipótese principal que a equação não-perturbada

$$x'(t) = F_0(t, x) \quad (2.40)$$

possui uma variedade invariante de soluções periódicas.

No que segue denotamos a projeção sobre as k primeiras coordenadas em \mathbb{R}^n por $\Pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ e sobre as restantes $(n-k)$ coordenadas por $\Pi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

O primeiro passo é reduzir o problema de bifurcação de solução T -periódica em bifurcação de ponto fixo de uma aplicação conveniente $g : D_g \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde D_g é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Uma vez que, em geral, não é possível aplicar diretamente o Teorema da Função Implícita para a função g , usamos a Teoria da

Redução de Lyapunov-Schmidt, mas em uma forma simplificada ao assumir que a matriz jacobiana de $g(\cdot, 0)$ possui uma forma particular.

De um modo geral, a Redução de Lyapunov-Schmidt reduz o problema de encontrar soluções periódicas para um sistema de equações diferenciais a resolver um sistema de equações algébricas. Mais detalhes sobre a Redução de Lyapunov-Schmidt são encontrados em [5].

Teorema 2.3.1. (*Redução de Lyapunov-Schmidt*) *Sejam $g : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ funções de classe \mathcal{C}^2 , onde D é um conjunto aberto do \mathbb{R}^n e V é um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^k . Assumimos que:*

- i) $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset D$ e para cada $z_\alpha \in \mathcal{Z}$, $g(z_\alpha, 0) = 0$,
- ii) a matriz $G_\alpha = D_z g(z_\alpha, 0)$ tem em seu canto superior direito a matriz nula $k \times (n-k)$ e em seu canto inferior direito a matriz Δ_α , $(n-k) \times (n-k)$, com $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

Consideramos a função $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por $f_1(\alpha) = \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \varepsilon}(z_\alpha, 0)$. Se existe $a \in V$ com $f_1(a) = 0$ e $\det\left(\frac{df_1}{d\alpha}(a)\right) \neq 0$, então existe α_ε tal que $g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$ e $z_{\alpha_\varepsilon} \rightarrow z_a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A função f_1 é chamada de função de bifurcação.

Demonstração. Consideramos a função

$$\begin{aligned} \Pi^\perp g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon] &\rightarrow \mathbb{R}^{n-k}; \\ (\alpha, \beta, \varepsilon) &\mapsto \Pi^\perp g(\alpha, \beta, \varepsilon) \end{aligned}$$

Então, temos que $\Pi^\perp g(z_\alpha, 0) = 0$ e $\frac{\partial(\Pi^\perp g)}{\partial \beta}(z_\alpha, 0) = \Delta_\alpha$.

Uma vez que $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$, o Teorema da Função Implícita implica que, numa vizinhança \tilde{V}_0 de $\varepsilon = 0$, existe uma função $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon)$ tal que $\beta(\alpha, 0) = \beta_0(\alpha)$ e $\Pi^\perp g(\alpha, \beta(\alpha, \varepsilon), \varepsilon) = 0$ para cada $\varepsilon \in \tilde{V}_0$.

Agora consideramos a função

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^k \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] &\rightarrow \mathbb{R}^k; \\ (\alpha, \varepsilon) &\mapsto \delta(\alpha, \varepsilon) = \Pi g(\alpha, \beta(\alpha, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \delta(\alpha, 0) &= \Pi g(z_\alpha, 0) = 0, \\ \delta_\varepsilon(\alpha, 0) &= \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \beta}(z_\alpha, 0) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon}(\alpha, 0) + \frac{\partial(\Pi g)}{\partial \varepsilon}(z_\alpha, 0). \end{aligned}$$

Usando ii) vemos que $\frac{\partial(\Pi g)}{\partial \beta}(z_\alpha, 0) = \mathbf{0}_{k \times (n-k)}$, onde $\mathbf{0}_{k \times (n-k)}$ é a matriz nula.

Portanto, $\delta_\varepsilon(\alpha, 0) = f_1(\alpha)$ e, usando a expansão em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ escrevemos $\delta(\alpha, \varepsilon) = \varepsilon f_1(\alpha) + \varepsilon^2 r(\alpha, \varepsilon)$.

Temos que encontrar os zeros de $\delta(\alpha, \varepsilon) = \varepsilon f_1(\alpha) + \varepsilon^2 r(\alpha, \varepsilon)$. Equivalentemente basta encontrar os zeros de $\varphi(\alpha, \varepsilon) := f_1(\alpha) + \varepsilon r(\alpha, \varepsilon)$. Por hipótese, temos que existe $a \in V$ tal que $f_1(a) = 0$ e $\det\left(\frac{df_1(a)}{d\alpha}\right) \neq 0$. Notamos que $\varphi(a, 0) = 0$ e $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(a, 0)\right) \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças V_0 de $\varepsilon = 0$ e V_a de $\alpha = a$ tais que para cada $\alpha \in V_a$ existe $\varepsilon \in V_0$ tal que $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\alpha(0) = a$ e $\varphi(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = f_1(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon r(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Daí, $\delta(\alpha(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, e portanto, $\Pi g(z_{\alpha(\varepsilon)}, 0) = 0$.

Havíamos tomado anteriormente uma vizinhança \tilde{V}_0 tal que nessa vizinhança $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon)$. Consideramos então a interseção de \tilde{V}_0 e V_0 , e denotamos $z_{\alpha_\varepsilon} = (\alpha(\varepsilon), \beta(\alpha(\varepsilon), \varepsilon))$, então $\Pi g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$ e $\Pi^\perp g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$, o que implica $g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$.

Notamos que, como $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ é contínua e $\alpha(0) = a$, então $z_{\alpha_\varepsilon} \rightarrow z_a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Dado $z \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto denotamos por $x(\cdot, z, \varepsilon) : [0, t_{(z, \varepsilon)}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução da equação (2.39) com $x(0, z, \varepsilon) = z$. Admitimos que existe um subconjunto aberto D de Ω e um ε_0 suficientemente pequeno tal que, para todo $(z, \varepsilon) \in D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ a solução $x(\cdot, z, \varepsilon)$ é definida no intervalo $[0, T]$. Podemos considerar a função $f : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - z. \tag{2.41}$$

Logo, todo $(z_\varepsilon, \varepsilon)$ tal que

$$f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0 \tag{2.42}$$

nos dá uma solução periódica $x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$ de (2.39).

O inverso também é verdade, isto é, para toda solução T -periódica da equação (2.39), se denotamos por z_ε seu valor em $t = 0$ então a equação (2.42) é válida. Assim, o problema de encontrar uma solução T -periódica da equação (2.39) pode ser substituído pelo problema de encontrar zeros da função de $f(\cdot, \varepsilon)$ dada por (2.41).

Denotamos a linearização de (2.40) por

$$y' = P(t, z)y \tag{2.43}$$

onde

$$P(t, z) = D_x F_0(t, x(t, z, 0)) \tag{2.44}$$

e seja $Y(\cdot, z)$ uma matriz fundamental de soluções da equação (2.43).

Teorema 2.3.2. *Seja $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ uma função de classe \mathcal{C}^2 , onde $V \subset \mathbb{R}^k$ é aberto e limitado. Assumimos que*

i) $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset D$ e para cada $z_\alpha \in \mathcal{Z}$, a única solução x_α de (2.40) com $x_\alpha(0) = z_\alpha$ é T -periódica.

ii) Para cada $z_\alpha \in \mathcal{Z}$, existe uma matriz fundamental de soluções da equação (2.43), $Y_\alpha(t) = Y(t, z_\alpha)$ tal que a matriz $Y_\alpha^{-1}(0) - Y_\alpha^{-1}(T)$ tem em seu canto superior direito a matriz nula $k \times (n - k)$ e em seu canto inferior direito a matriz denotada por Δ_α , $(n - k) \times (n - k)$, com $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

Consideramos a função $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$f_1(\alpha) = \Pi \int_0^T Y_\alpha^{-1}(t) F_1(t, x_\alpha(t)) dt. \quad (2.45)$$

Se existe $a \in V$ com $f_1(a) = 0$ e $\det\left(\frac{df_1}{d\alpha}\right)(a) \neq 0$, então existe uma solução T -periódica $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ da equação (2.39) tal que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Temos que estudar os zeros simples da função (2.41), ou, equivalentemente, os zeros simples de

$$g(z, \varepsilon) = Y^{-1}(T, z) f(z, \varepsilon).$$

Temos que $g(z_\alpha, 0) = 0$, pois $x(\cdot, z_\alpha, 0)$ é T -periódica, e provaremos que

$$G_\alpha = \frac{\partial g}{\partial z}(z_\alpha, 0) = Y_\alpha^{-1}(0) - Y_\alpha^{-1}(T). \quad (2.46)$$

Como $\frac{\partial x}{\partial z}(\cdot, z, 0)$ é a matriz solução da equação (2.43) com $\frac{\partial x}{\partial z}(0, z, 0) = I_n$ temos que $\frac{\partial x}{\partial z}(t, z, 0) = Y(t, z) Y^{-1}(0, z)$. Mais ainda, $f(z, 0) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z, 0) = \frac{\partial x}{\partial z}(T, z, 0) - I_n = Y(T, z) Y^{-1}(0, z) - I_n$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z}(z, 0) &= Y_z^{-1}(T, z) f(z, 0) + Y^{-1}(T, z) \frac{\partial f}{\partial z}(z, 0) \\ &= Y^{-1}(T, z) (Y(T, z) Y^{-1}(0, z) - I_n) \\ &= Y^{-1}(0, z) - Y^{-1}(T, z). \end{aligned}$$

Para cada $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ temos $\frac{\partial g}{\partial z}(z_\alpha, 0) = G_\alpha = Y^{-1}(0, z_\alpha) - Y^{-1}(T, z_\alpha)$.

Por outro lado,

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(z, 0) = Y^{-1}(T, z) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(T, z, 0).$$

A função $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(\cdot, z, 0)$ é a única solução do problema de valor inicial

$$y' = D_x F_0(t, x(t, z, 0))y + F_1(t, x(t, z, 0)), \quad y(0) = 0,$$

pois, $x'(t, z, \varepsilon) = F_0(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon F_1(t, x(t, z, \varepsilon))$, daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(x'(t, z, \varepsilon)) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial x}{\partial t}(t, z, \varepsilon) \right) = \frac{\partial F_0}{\partial x}(t, x(t, z, \varepsilon)) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, \varepsilon) + F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial x}(t, x(t, z, \varepsilon)) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, \varepsilon) \end{aligned}$$

e portanto, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, 0) \right) = \frac{\partial F_0}{\partial x}(t, x(t, z, 0)) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, 0) + F_1(t, x(t, z, 0))$. Temos também que $x'(t, z, \varepsilon) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x)$; $x(0, z, \varepsilon) = z$, então $x(t, z, \varepsilon) = z + t\gamma(t, z, \varepsilon)$, para alguma função γ , e $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, \varepsilon) = t \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon}(t, z, \varepsilon)$. Portanto, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0, z, 0) = 0$.

Então, usando a Proposição 1.1.3,

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, z, 0) = Y(t, z) \int_0^t Y^{-1}(s, z) F_1(s, x(s, z, 0)) ds.$$

Agora, nós temos

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(z, 0) = \int_0^T Y^{-1}(s, z) F_1(s, x(s, z, 0)) ds,$$

portanto,

$$\frac{\partial(\Pi g)}{\partial \varepsilon}(z_\alpha, 0) = f_1(\alpha)$$

onde f_1 é dada por (2.45). Aplicando o Teorema 2.3.1, para cada ε suficientemente pequeno existe $\alpha_\varepsilon \in V$ tal que $g(z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon) = 0$ e, além disso, $f(z_{\alpha_\varepsilon}) = 0$, que garante que $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z_{\alpha_\varepsilon}, \varepsilon)$ é uma solução T -periódica de (2.39). \square

Capítulo 3

Aplicações

Nesse capítulo apresentamos algumas aplicações dos resultados estudados no Capítulo 2 em alguns casos particulares. Na Seção 3.1 apresentamos exemplos de aplicações dos resultados da Seção 2.2 em sistemas autônomos e não-autônomos. Tais exemplos foram previamente apresentados no artigo [3]. Na Seção 3.2 mostramos aplicações do Método via Redução de Lyapunov-Schmidt, e na Seção 3.3 apresentamos aplicações da Teoria da Média de primeira ordem. Utilizamos o software *Mathematica 7* para fazer a maioria das contas.

3.1 Aplicações do método via equação variacional

3.1.1 Sistemas autônomos

Nesta subseção, os dois primeiros exemplos são equações diferenciais autônomas. Para poder aplicar o método via equação variacional, consideramos mudança de coordenadas polar e cilíndrica, respectivamente, e obtemos equações não-autônomas periódicas na variável independente.

Exemplo com $d=2$

Consideramos a família de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = -y + xH_{n-1}(x, y) + \varepsilon P(x, y), \\ y' = x + yH_{n-1}(x, y) + \varepsilon Q(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde H_{n-1} é um polinômio homogêneo de grau $n - 1$ nas variáveis x e y . As funções P e Q são polinômios de grau n nas variáveis x e y . Quando $\varepsilon = 0$ e

$\int_0^{2\pi} H_{n-1}(\cos s, \text{sen} s) ds = 0$, a família acima é formada por centros isócronos, isto é, todas as órbitas possuem o mesmo período.

Primeiramente consideramos a mudança de variável polar $x = r \cos \theta$ e $y = r \text{sen} \theta$. Temos

$$r' = \frac{xx' + yy'}{r} \text{ e } \theta' = \frac{y'x - yx'}{r^2}.$$

Nestas novas variáveis, o sistema (3.1) é da forma

$$r' = \frac{r \cos \theta (-y + xH_{n-1}(x, y) + \varepsilon P(x, y)) + r \text{sen} \theta (x + yH_{n-1}(x, y) + \varepsilon Q(x, y))}{r},$$

$$\theta' = \frac{r \cos \theta (x + yH_{n-1}(x, y) + \varepsilon Q(x, y)) - r \text{sen} \theta (-y + xH_{n-1}(x, y) + \varepsilon P(x, y))}{r^2}.$$

Agora, tomando como variável independente a variável θ , o sistema fica da forma

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \\ &= \frac{r[\cos \theta (-y + xH_{n-1}(x, y) + \varepsilon P(x, y)) + \text{sen} \theta (x + yH_{n-1}(x, y) + \varepsilon Q(x, y))]}{\cos \theta (x + yH_{n-1}(x, y) + \varepsilon Q(x, y)) - \text{sen} \theta (-y + xH_{n-1}(x, y) + \varepsilon P(x, y))}. \end{aligned}$$

Substituindo $x = r \cos \theta$ e $y = r \text{sen} \theta$ e usando propriedades de polinômios homogêneos obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= r [\cos \theta (-r \text{sen} \theta + r \cos \theta r^{n-1} H_{n-1}(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \varepsilon P(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)) \\ &\quad + \text{sen} \theta (r \cos \theta + r \text{sen} \theta r^{n-1} H_{n-1}(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \varepsilon Q(r \cos \theta, r \text{sen} \theta))] / \\ &\quad [\cos \theta (r \cos \theta + r \text{sen} \theta r^{n-1} H_{n-1}(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \varepsilon Q(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)) \\ &\quad - \text{sen} \theta (-r \text{sen} \theta + r \cos \theta r^{n-1} H_{n-1}(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \varepsilon P(r \cos \theta, r \text{sen} \theta))] \\ &= \frac{r^{n+1} H_{n-1}(\cos \theta, \text{sen} \theta) + r \cos \theta \varepsilon P(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) + r \text{sen} \theta \varepsilon Q(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)}{r + \cos \theta \varepsilon Q(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) - \text{sen} \theta \varepsilon P(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)}. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r^n H_{n-1}(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \cos \theta \varepsilon P(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) + \text{sen} \theta \varepsilon Q(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)}{1 + \frac{1}{r} (\cos \theta \varepsilon Q(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) - \text{sen} \theta \varepsilon P(r \cos \theta, r \text{sen} \theta))} \\ &= \frac{r^n H_{n-1}(\cos \theta, \text{sen} \theta) + \varepsilon R(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)}{1 + \varepsilon S(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)}, \end{aligned}$$

onde,

$$R(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) = \cos \theta P(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) + \text{sen} \theta Q(r \cos \theta, r \text{sen} \theta),$$

$$S(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) = \frac{\cos \theta Q(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) - \text{sen} \theta P(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)}{r}.$$

Podemos ainda escrever

$$\frac{dr}{d\theta} = H_{n-1}(\cos \theta, \text{sen} \theta) r^n + \varepsilon T(r \cos \theta, r \text{sen} \theta) + O(\varepsilon^2), \quad (3.2)$$

onde $T(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = R(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) - S(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) H_{n-1}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) r^n$.

Para $\varepsilon = 0$, a solução de (3.2) é

$$\varphi_0(\theta, \rho) = \frac{\rho}{\sqrt[n-1]{1 - (n-1)\rho^{n-1} \int_0^\theta H_{n-1}(\cos s, \operatorname{sen} s) ds}}. \quad (3.3)$$

Na expressão acima, tomando $\theta = 2\pi$ temos $\varphi_0(\theta, 2\pi) = \rho$, pois, por hipótese, $\int_0^{2\pi} H_{n-1}(\cos s, \operatorname{sen} s) ds = 0$. Isso mostra que o sistema não-perturbado é isócrono. Uma vez que conhecemos a expressão de $\varphi_0(\theta, \rho)$ é possível determinar a expressão de $M_1(\rho)$ associada a (3.2). Para ilustrar sua aplicabilidade, apresentamos a seguir um exemplo quadrático com $n = 2$ e $H_1(x, y) = x/2$. Este sistema possui dois ciclos limites do sistema não-perturbado que permanecem para ε suficientemente pequeno.

Proposição 3.1.1. *Para ε suficientemente pequeno, temos que os sistemas de equações diferenciais da forma*

$$\begin{cases} x' = -y + x^2/2 + \varepsilon P(x, y), \\ y' = x + xy/2 + \varepsilon Q(x, y), \end{cases} \quad (3.4)$$

onde P e Q são polinômios quadráticos, possuem pelo menos dois ciclos limites.

Demonstração. Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ polinômios quadráticos arbitrários. Consideramos a mudança de coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = \operatorname{sen} \theta$ no sistema (3.4) e tomamos θ como variável independente. Temos por (3.3) que

$$\varphi_0(s, \rho) = \frac{\rho}{1 - \rho \int_0^s \frac{\cos \theta}{2} d\theta} = \frac{\rho}{1 - \frac{\rho \operatorname{sen} s}{2}} = \frac{2\rho}{2 - \rho \operatorname{sen} s}.$$

Logo,

$$D_\rho \varphi_0(s, \rho) = \frac{2(2 - \rho \operatorname{sen} s) - 2\rho(-\operatorname{sen} s)}{(2 - \rho \operatorname{sen} s)^2} = \frac{4}{(2 - \rho \operatorname{sen} s)^2}.$$

Pelo Teorema 2.2.1

$$M_1(\rho) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (2 - \rho \operatorname{sen} s)^2 f_1(s, \varphi_0(s, \rho)) ds,$$

onde

$$f_1(s, r) = (\cos s P + \operatorname{sen} s Q) - (\cos s Q - \operatorname{sen} s P) \frac{r \cos s}{2},$$

$P = P(r \cos s, r \operatorname{sen} s)$, $Q = Q(r \cos s, r \operatorname{sen} s)$ e $0 < \rho < 2$.

Podemos considerar $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ e $Q(x, y) = dx^2 + exy + fy^2$, com a, b, c, d, e, f constantes reais. Em coordenadas polares $x = r \cos s$ e $y = r \operatorname{sen} s$

$$\begin{aligned} P(r \cos s, r \operatorname{sen} s) &= ar^2 \cos^2 s + br^2 \operatorname{sen} s \cos s + cr^2 \operatorname{sen}^2 s, \\ Q(r \cos s, r \operatorname{sen} s) &= dr^2 \cos^2 s + er^2 \operatorname{sen} s \cos s + fr^2 \operatorname{sen}^2 s. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} M_1(\rho) &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (2 - \rho \operatorname{sen} s)^2 f_1(s, \varphi_0(s, \rho)) ds \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (2 - \rho \operatorname{sen} s)^2 \varphi_0^2(s, \rho) \left[\cos s (a \cos^2 s + b \operatorname{sen} s \cos s + c \operatorname{sen}^2 s) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen} s (d \cos s + e \operatorname{sen} s \cos s + f \operatorname{sen}^2 s) - (\cos s (d \cos^2 s + e \operatorname{sen} s \cos s \right. \\ &\quad \left. + f \operatorname{sen}^2 s) - \operatorname{sen} s (a \cos^2 s + b \operatorname{sen} s \cos s + c \operatorname{sen}^2 s)) \frac{2\rho \cos s}{2(2 - \rho \operatorname{sen} s)} \right] ds \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 4\rho^2 \left[a \left(\cos^3 s + \frac{\rho \operatorname{sen} s \cos^3 s}{2 - \rho \operatorname{sen} s} \right) + b \left(\operatorname{sen} s \cos^2 s + \frac{\rho \operatorname{sen}^2 s \cos^2 s}{2 - \rho \operatorname{sen} s} \right) \right. \\ &\quad \left. + c \left(\cos s \operatorname{sen}^2 s + \frac{\rho \operatorname{sen}^3 s \cos s}{2 - \rho \operatorname{sen} s} \right) + d \left(\operatorname{sen} s \cos s - \frac{\rho \cos^4 s}{2 - \rho \operatorname{sen} s} \right) \right. \\ &\quad \left. + e \left(\operatorname{sen}^2 s \cos s - \frac{\rho \operatorname{sen} s \cos^3 s}{2 - \rho \operatorname{sen} s} \right) + f \left(\operatorname{sen}^3 s - \frac{\rho \operatorname{sen}^2 s \cos^2 s}{2 - \rho \operatorname{sen} s} \right) \right] ds \\ &= \frac{1}{\rho} \left[(16b\pi - 2b\pi\rho^2 - 16f\pi + 2f\pi\rho^2 + 16d\pi - 6d\pi\rho^2) \right. \\ &\quad \left. + (2d\pi\rho^2 - 8d\pi + 8f\pi - 8b\pi)\sqrt{4 - \rho^2} \right]. \end{aligned}$$

Tomando

$$p_1(\rho^2) = (-2b\pi + 2f\pi - 6d\pi)\rho^2 + 16b\pi - 16f\pi + 16d\pi,$$

e

$$q_1(\rho^2) = 2d\pi\rho^2 - 8b\pi + 8f\pi - 8d\pi,$$

temos que

$$M_1(\rho) = \frac{p_1(\rho^2) + q_1(\rho^2)\sqrt{4 - \rho^2}}{\rho} \text{ e } p_1(0) + 2q_1(0) = 0.$$

Introduzindo a nova variável $\tau^2 = 4 - \rho^2$, para $0 < \tau < 2$, temos que $\rho M_1(\rho)$ se escreve como $N(\tau) = (\tau - 2)p_2(\tau)$, sendo p_2 um polinômio de grau 2. Portanto, tomando P e Q tal que p_2 possui dois zeros simples no intervalo $(0, 2)$, temos que o

sistema quadrático correspondente possui dois ciclos limites como queríamos provar. \square

Com o intuito de considerar um exemplo e aplicar o método via equação variacional e o método da média, consideramos a equação diferencial (3.4). A Proposição 3.1.1 garante, via o método proposto em [3] que (3.4) tem pelo menos 2 ciclos limites. Consideramos a mudança de coordenadas proposta no Teorema 1.2.1, aplicamos o método da média e obtemos que a função média de primeira ordem é identicamente nula. Tentamos aplicar o Teorema da Média de segunda ordem, mas nossos recursos computacionais não foram suficientes para avaliar a nova função média. Disso concluímos que, em certos casos, como no sistema (3.4), o método proposto por B. Coll, A. Gasull e R. Prohens se mostra mais aplicável computacionalmente. Destacamos aqui que o Teorema da Média de segunda ordem não foi abordado neste trabalho, mas pode ser encontrado em [1].

O exemplo a seguir é um sistema de equações diferenciais autônomas com $d = 3$.

Um exemplo polinômial com $d=3$

Proposição 3.1.2. *Consideramos a família de campos de vetores polinomiais de dimensão 3:*

$$\begin{cases} x' = -y + \varepsilon a(x^2), \\ y' = x + \varepsilon b(z), \\ z' = \varepsilon xc(z) + \varepsilon^2 d(z), \end{cases} \quad (3.5)$$

onde a, b, c, d são polinômios reais de grau $\frac{n}{2}, n, n-1$ e n , respectivamente, e ε é um parâmetro suficientemente pequeno. Mostramos que podemos escolher a, b, c, d de forma que o sistema acima tenha $(\frac{n}{2}-1)(2n-1)$ ciclos limites bifurcando de um contínuo de órbitas periódicas existentes para $\varepsilon = 0$.

Demonstração. Consideramos o sistema (3.5) em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , ou seja, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $z = z$, assim (3.5) é transformado no sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{xx' + yy'}{r} = \frac{r \cos \theta (-r \operatorname{sen} \theta + \varepsilon a(r^2 \cos^2 \theta)) + r \operatorname{sen} \theta (r \cos \theta + \varepsilon b(z))}{r} \\
&= \varepsilon \cos \theta a(r^2 \cos^2 \theta) + \varepsilon \operatorname{sen} \theta b(z), \\
\theta' &= \frac{y'x - yx'}{r^2} = \frac{(r \cos \theta + \varepsilon b(z))r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta (-r \operatorname{sen} \theta + \varepsilon a(r^2 \cos^2 \theta))}{r^2} \quad (3.6) \\
&= \frac{r + \varepsilon \cos \theta b(z) - \varepsilon \operatorname{sen} \theta a(r^2 \cos^2 \theta)}{r},
\end{aligned}$$

$$z' = \varepsilon r \cos \theta c(z) + \varepsilon^2 d(z).$$

Condiderando θ como variável independente no sistema (3.6)

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r(\varepsilon \cos \theta a(r^2 \cos^2 \theta) + \varepsilon \operatorname{sen} \theta b(z))}{r + \varepsilon \cos \theta b(z) - \varepsilon \operatorname{sen} \theta a(r^2 \cos^2 \theta)}, \quad (3.7)$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{r(\varepsilon r \cos \theta c(z) + \varepsilon^2 d(z))}{r + \varepsilon \cos \theta b(z) - \varepsilon \operatorname{sen} \theta a(r^2 \cos^2 \theta)}.$$

Tomamos a expansão em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ de cada expressão em (3.7) e escrevemos

$$\left(\frac{dr}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta} \right) = \varepsilon f_1(\theta, r, z) + \varepsilon^2 f_2(\theta, r, z) + O(\varepsilon^3),$$

onde cada $f_i = (f_{i1}, f_{i2})$, para $i = 1, 2$, e suas componentes são dadas explicitamente por

$$\begin{aligned}
f_{11}(\theta, r, z) &= \cos \theta a(r^2 \cos^2 \theta) + \operatorname{sen} \theta b(z), \\
f_{12}(\theta, r, z) &= r \cos \theta c(z), \\
f_{21}(\theta, r, z) &= \frac{1}{r} (\cos \theta a(r^2 \cos^2 \theta) + \operatorname{sen} \theta b(z)) (\operatorname{sen} \theta a(r^2 \cos^2 \theta) - \cos \theta b(z)), \\
f_{22}(\theta, r, z) &= d(z) - c(z) (\cos^2 \theta b(z) - \operatorname{sen} \theta \cos \theta a(r^2 \cos^2 \theta)).
\end{aligned}$$

Escrevendo $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ e $u_i = (u_{i1}, u_{i2})$, para $i = 1, 2$, o Teorema 2.2.1 garante que

$$\begin{aligned}
u_{11}(\theta, \rho) &= u_{11}(\theta, (\rho_1, \rho_2)) = \int_0^\theta f_{11}(\psi, (\rho_1, \rho_2)) d\psi \\
&= \int_0^\theta \cos \psi a(\rho_1^2 \cos^2 \psi) d\psi + \int_0^\theta \operatorname{sen} \psi b(z) d\psi \\
&= \int_0^\theta \cos \psi a(\rho_1^2 \cos \psi) d\psi + (1 - \cos \theta) b(z).
\end{aligned}$$

Temos que $a(x)$ é um polinômio real de grau $k = \frac{n}{2}$, então podemos escrever $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$, e usando o fato que

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^{2k+1} \psi d\psi &= \frac{1}{2k+1} \cos^{2k} \psi \operatorname{sen} \psi + \frac{2k}{2k+1} \int_0^\theta \cos^{2k-1} \psi d\psi = \\ &= \operatorname{sen} \psi \left(\frac{1}{2k+1} \cos^{2k} \psi + \frac{2k}{2k+1} \frac{1}{2k-1} \cos^{2k-2} \psi \right) + \\ &= \frac{2k-2}{2k-1} \int_0^\theta \cos^{2k-3} \psi d\psi = \dots = \\ &= \operatorname{sen} \psi P(\cos^2 \psi), \end{aligned}$$

para alguma função polinomial P , segue que

$$\begin{aligned} u_{11}(\theta, (\rho_1, \rho_2)) &= (1 - \cos \theta)b(z) + \sum_{i=1}^k a_i \rho_1^{2i} \int_0^\theta \cos^{2i+1} \psi d\psi \\ &= \int_0^\theta a_0 \cos \psi + \dots + a_k \rho_1^{2k} \cos^{2k+1} \psi d\psi + (1 - \cos \theta)b(z) \\ &= \operatorname{sen} \theta P_0(\cos^2 \theta) + \operatorname{sen} \theta P_1(\cos^2 \theta) + \dots + \operatorname{sen} \theta P_k(\cos^2 \theta) \\ &+ (1 - \cos \theta)b(z) \\ &= \operatorname{sen} \theta \left(\sum_{i=0}^k P_i(\cos^2 \theta) \right) + (1 - \cos \theta)b(z), \end{aligned}$$

onde cada P_i é uma função polinomial, $i = 0, \dots, k$.

$$\text{Daí, } M_{11}(\rho) = u_{11}(2\pi, \rho) = \operatorname{sen} 2\pi \left(\sum_{i=0}^k P_i(\cos^2 2\pi) \right) = 0.$$

Similarmente,

$$u_{12}(\theta, \rho) = \int_0^\theta f_{12}(\psi, \rho) d\psi = \int_0^\theta \rho_1 \cos \psi c(\rho_2) d\psi = \rho_1 c(\rho_2) \operatorname{sen} \theta.$$

Então, $M_{12}(\rho) = u_{12}(2\pi, \rho) = \rho_1 c(\rho_2) \operatorname{sen} 2\pi = 0$.

Portanto, $M_1(\rho) \equiv 0$.

Agora calculamos $M_2(\rho)$. Pelo Teorema 2.2.1,

$$M_2(\rho) = \int_0^{2\pi} (D_\rho f_1(\theta, \rho) \cdot u_1(\theta, \rho) + f_2(\theta, \rho)) d\rho.$$

Temos que

$$D_\rho f_1(\theta, \rho) \cdot u_1(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} a'(\rho_1^2 \cos^2 \theta) 2\rho_1 \cos^3 \theta & \operatorname{sen} \theta b'(\rho_2) \\ \cos \theta c(\rho_2) & \rho_1 \cos \theta c'(\rho_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}(\theta, \rho) \\ \rho_1 c(\rho_2) \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix},$$

onde a' denota a derivada de a com relação a ρ_1 . Daí,

$$M_{21}(\rho) = \int_0^{2\pi} \left[a'(\rho_1^2 \cos^2 \theta) 2\rho_1 \cos^3 \theta u_{11}(\rho, \theta) + \rho_1 c(\rho_2) b'(\rho_2) \sin^2 \theta + \frac{1}{\rho_1} (\cos \theta a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) + \sin \theta b(\rho_2)) (\sin \theta a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) - \cos \theta b(\rho_2)) \right] d\theta.$$

Substituindo a expressão de $u_{11}(\theta, \rho)$ temos

$$\begin{aligned} M_{21}(\rho) &= \int_0^{2\pi} \left[a'(\rho_1^2 \cos^2 \theta) 2\rho_1 \cos^3 \theta \int_0^\theta \cos \psi a(\rho_1^2 \cos^2 \psi) d\psi \right. \\ &\quad \left. + a'(\rho_1^2 \cos^2 \theta) 2\rho_1 \cos^3 \theta (1 - \cos \theta) b(\rho_2) \right] d\theta + \rho_1 c(\rho_2) b'(\rho_2) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho_1} (\cos \theta a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) + \sin \theta b(\rho_2)) (\sin \theta a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad - \cos \theta b(\rho_2)) d\theta. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Notamos que as seguintes relações são válidas

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^{2\pi} a'(\rho_1^2 \cos^2 \theta) 2\rho_1 \cos^3 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{n/2} i a_i (\rho_1^2 \cos^2 \theta)^{i-1} \right) 2\rho_1 \cos^3 \theta d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n/2} 2\rho_1^{2i-1} i a_i \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta d\theta = \left(\sum_{i=0}^{n/2} 2\rho_1^{2i-1} i a_i \right) \sin 2\pi P(\cos^2 \theta) = 0, \end{aligned}$$

onde P é um polinômio de grau i ;

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{\rho_1} \int_0^{2\pi} (\cos \theta a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) + \sin \theta b(\rho_2)) (\sin \theta a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) - \cos \theta b(\rho_2)) d\theta \\ &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^{2\pi} (a^2(\rho_1^2 \cos^2 \theta) - b(\rho_2)) \sin \theta \cos \theta + a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) b(\rho_2) (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= b(\rho_2) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho_1} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) d\theta, \end{aligned}$$

pois $\int_0^{2\pi} (a^2(\rho_1^2 \cos^2 \theta) - b(\rho_2)) \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$;

$$\bullet \rho_1 c(\rho_2) b'(\rho_2) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \rho_1 c(\rho_2) b'(\rho_2) \pi.$$

Então, usando essas relações em (3.8), $M_{21}(\rho)$ é escrito como,

$$\begin{aligned} M_{21}(\rho) &= \\ &\rho_1 c(\rho_2) b'(\rho_2) \pi + b(\rho_2) \int_0^{2\pi} \frac{a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) (1 - 2 \cos^2 \theta)}{\rho_1} - 2\rho_1 a'(\rho_1^2 \cos^2 \theta) \cos^4 \theta d\theta. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por definição, o fatorial duplo de um número inteiro positivo n é a generalização

do fatorial comum $n!$ definido por

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\dots 5\cdot 3\cdot 1 & \text{se } n > 0 \text{ impar,} \\ n(n-2)\dots 6\cdot 4\cdot 2 & \text{se } n > 0 \text{ par,} \\ 1 & \text{se } n = -1, 0. \end{cases}$$

Uma propriedade desse fatorial duplo é:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m} \theta \, d\theta = \frac{2\pi(2m-1)!!}{(2m)!!},$$

Podemos escrever a segunda parcela de (3.9) como

$$\begin{aligned} & b(\rho_2) \left(\frac{1}{\rho_1} \int_0^{2\pi} a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) \, d\theta - \frac{2}{\rho_1} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, a(\rho_1^2 \cos^2 \theta) \, d\theta \right. \\ & \left. - 2\rho_1 \int_0^{2\pi} a'(\rho_1^2 \cos^2 \theta) \cos^4 \theta \, d\theta \right) = \\ & b(\rho_2) \left(\frac{1}{\rho_1} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{n/2} a_i(\rho_1^2 \cos^2 \theta)^i \, d\theta - \frac{2}{\rho_1} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sum_{i=0}^{n/2} a_i(\rho_1^2 \cos^2 \theta)^i \, d\theta \right. \\ & \left. - 2\rho_1 \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n/2} i a_i(\rho_1^2 \cos^2 \theta)^{i-1} \cos^4 \theta \, d\theta \right) = \\ & b(\rho_2) \left(\sum_{i=0}^{n/2} a_i \rho_1^{2i-1} \frac{2\pi(2i-1)!!}{2i!!} + \sum_{i=0}^{n/2} -2a_i \rho_1^{2i-1} \frac{2\pi(2i+1)!!}{(2i+2)!!} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n/2} -2\rho_1^{2i-1} i a_i \frac{2\pi(2i+1)!!}{(2i+2)!!} \right). \end{aligned}$$

Notemos que, para $i = 0$,

$$a_0 \frac{1}{\rho_1} 2\pi \frac{(-1)!!}{0!!} - 4a_0 \frac{1}{\rho_1} \pi \frac{1!!}{2!!} = \frac{2\pi a_0}{\rho_1} - \frac{2\pi a_0}{\rho_1} = 0.$$

Com isso podemos escrever essa soma começando em $i = 1$:

$$\begin{aligned} & b(\rho_2) \sum_{i=1}^{n/2} \left[a_i \rho_1^{2i-1} 2\pi \frac{(2i-1)!!}{2i!!} - 4a_i \rho_1^{2i-1} \pi \frac{(2i+1)!!}{(2i+2)!!} - 4a_i \rho_1^{2i-1} i \pi \frac{(2i+1)!!}{(2i+2)!!} \right] = \\ & -4b(\rho_2)\pi\rho_1 \sum_{i=1}^{n/2} \left[a_i \rho_1^{2i-2} \left(-\frac{1}{2} \frac{(2i-1)!!}{2i!!} + \frac{2i+1}{2i+2} \frac{(2i-1)!!}{2i!!} + i \frac{2i+1}{2i+2} \frac{(2i-1)!!}{2i!!} \right) \right] = \\ & -4b(\rho_2)\pi\rho_1 \sum_{i=1}^{n/2} \left[a_i \rho_1^{2i-2} \frac{(2i-1)!!}{2i!!} \left(\frac{-1}{2} + \frac{2i+1}{2i+2} + i \frac{2i+1}{2i+2} \right) \right] = \\ & -4b(\rho_2)\pi\rho_1 \sum_{i=1}^{n/2} \left[a_i \rho_1^{2i-2} \frac{(2i-1)!!}{2i!!} \left(\frac{4i^2 + 4i}{4i+4} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$-4b(\rho_2)\pi\rho_1 \sum_{i=1}^{n/2} \left[ia_i \rho_1^{2i-2} \frac{(2i-1)!!}{2i!!} \right].$$

Então M_{21} é escrito como

$$M_{21}(\rho_1) = \pi\rho_1 \left(c(\rho_2)b'(\rho_2) - 4b(\rho_2) \sum_{i=1}^{n/2} ia_i \frac{(2i-1)!!}{2i!!} \rho_1^{2i-2} \right). \quad (3.10)$$

Analogamente, obtemos $M_{22}(\rho)$,

$$\begin{aligned} M_{22}(\rho) &= \int_0^{2\pi} [\cos \theta c(\rho_2)u_{11}(\theta, \rho) + \rho_1^2 \sin \theta \cos \theta c'(\rho_2) + d(\rho_2) \\ &\quad - c(\rho_2)(\cos^2 \theta b(\rho_2) - \sin \theta \cos \theta a(\rho_1^2 \cos^2 \theta))] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos \theta c(\rho_2) \int_0^\theta \cos \psi a(\rho_1^2 \cos^2 \psi) d\psi + \cos \theta c(\rho_2)b(\rho_2) \\ &\quad - \cos^2 \theta c(\rho_2)b(\rho_2) + \rho_1^2 \sin \theta \cos \theta c'(\rho_2)c(\rho_2) + d(\rho_2) \\ &\quad - \cos^2 \theta c(\rho_2)b(\rho_2) + \sin \theta \cos \theta c(\rho_2)a(\rho_1^2 \cos^2 \theta)] d\theta \\ &= -2c(\rho_2)b(\rho_2)\pi + 2\pi d(\rho_2) \\ &= 2\pi(d(\rho_2) - c(\rho_2)b(\rho_2)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Então, de (3.10) e (3.11) temos a expressão explícita de $M_2(\rho) = (\pi\rho_1(c(\rho_2)b'(\rho_2) - 4b(\rho_2) \sum_{i=1}^{n/2} ia_i \frac{(2i-1)!!}{2i!!} \rho_1^{2i-2}), 2\pi(d(\rho_2) - c(\rho_2)b(\rho_2)))$.

Tomando $b(z) = z^n$ obtemos que $M_{22}(\rho)$ é um polinômio em ρ_2 de grau $2n - 1$, pois $c(\rho_2)$ tem grau $n - 1$. Fixamos c e d tal que $M_{22}(\rho)$ tenha $2n - 1$ raízes reais não-nulas. Então, para cada uma dessas raízes $\rho_2 = \rho_{2i}$, $i = 1, \dots, 2n - 1$, consideramos valores $k_i = \frac{c(\rho_{2i})b'(\rho_{2i})}{4b(\rho_{2i})}$. Escolhemos a'_j s tais que para cada $i = 1, \dots, 2n - 1$, a equação

$$\sum_{j=1}^{n/2} ja_j \frac{(2j-1)!!}{2j!!} \rho_1^{2j-2} = k_i \quad (3.12)$$

tenha exatamente $\frac{n}{2} - 1$ soluções positivas simples, diga-se $\rho_{1i_1}, \dots, \rho_{1i_{\frac{n}{2}-1}}$. Isso pode ser visto ao notar que, tomando a_j conveniente, o lado esquerdo da equação (3.12) pode ser tomado como um polinômio arbitrário em ρ_1^2 .

Portanto, o sistema (3.4) tem $(2n - 1)(\frac{n}{2} - 1)$ ciclos limites que tentem para a órbita periódica $r = \rho_{1i_j}$, $z = \rho_{2i}$, $i = 1, \dots, 2n - 1$, $j = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$, quando ε tende a zero.

□

3.1.2 Sistemas não-autônomos

Nos exemplos anteriores apresentamos aplicações do método via equação variacional em sistemas autônomos. Nesta seção continuamos utilizando o mesmo método, porém em sistemas não-autônomos.

Um exemplo com $d=1$

Nessa seção estudamos o número de ciclos limites de uma equação diferencial polinomial não-autônoma da forma

$$\frac{dr}{dt} = \varepsilon \sum_{j=0}^N f_{1,j}(t)r^j + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^N f_{2,j}(t)r^j + \varepsilon^3 \sum_{j=0}^N f_{3,j}(t)r^j, \quad (3.13)$$

onde cada $f_{i,j}$ é uma função real, suave, T -periódica na variável t , $N \geq 0$ e $i, j = 1, \dots, N$. Neste caso $d = 1$. Para isto usamos a Proposição 2.2.1.

Introduzimos as seguintes notações. Dada duas funções f e g reais a valores reais e integráveis, definimos

$$\tilde{f}(t) := \int_0^t f(s) ds, \quad \widetilde{gf}(t) := \int_0^t \left(g(s) \int_0^s f(w) dw \right) ds.$$

Temos que são válidas as relações dadas pelo seguinte lema:

Lema 3.1.1. *Sejam f e g funções reais, suaves e T -periódicas em t , $t \in [0, T]$, tais que $\tilde{f}(T) = \tilde{g}(T) = 0$. Se $I = \int_0^T g(t)(\tilde{f}(t))^2 dt$, então:*

$$(1) \int_0^T f(t)\tilde{f}(t)\tilde{g}(t) dt = \frac{-I}{2},$$

$$(2) \int_0^T f(t)\widetilde{fg}(t) dt = \frac{I}{2},$$

$$(3) \int_0^T g(t)\widetilde{ff}(t) dt = \frac{I}{2},$$

$$(4) \int_0^T f(t)\widetilde{gf}(t) dt = -I,$$

$$(5) \int_0^T f(t)\tilde{f}\tilde{f}(t) dt = 0.$$

Demonstração. Usando o método de integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_0^T f(t)\tilde{f}(t)\tilde{g}(t) dt = \tilde{g}(t) \frac{(\tilde{f}(t))^2}{2} \Big|_0^T - \int_0^T g(t) \frac{(\tilde{f}(t))^2}{2} dt = \frac{-I}{2}, \\
 (2) \quad & \int_0^T f(t)\tilde{f}\tilde{g}(t) dt = \int_0^T f(t) \int_0^t f(s) \int_0^s g(w) dw ds dt = \tilde{f}(t)\tilde{f}\tilde{g}(t) \Big|_0^T \\
 & - \int_0^T \tilde{f}(t)f(t)\tilde{g}(t) dt = -\left(\frac{-I}{2}\right) = \frac{I}{2}, \\
 (3) \quad & \int_0^T g(t)\tilde{f}\tilde{f}(t) dt = \int_0^T g(t) \int_0^t f(s) \int_0^s f(w) dw ds dt = \tilde{g}(t)\tilde{f}\tilde{f}(t) \Big|_0^T \\
 & - \int_0^T f(t)\tilde{f}(t)\tilde{g}(t) dt = -\left(\frac{-I}{2}\right), \\
 (4) \quad & \int_0^T f(t)\tilde{g}\tilde{f}(t) dt = \int_0^T f(t) \int_0^t g(s) \int_0^s f(w) dw ds dt = \tilde{f}(t)\tilde{g}\tilde{f}(t) \Big|_0^T - \\
 & \int_0^T \tilde{f}(t)g(t)\tilde{f}(t) dt = -\int_0^T g(t)(\tilde{f}(t))^2 dt = -I, \\
 (5) \quad & \int_0^T f(t)\tilde{f}\tilde{f}(t) dt = \int_0^T f(t) \int_0^t f(s) \int_0^s f(w) dw ds dt = \tilde{f}(t)\tilde{f}\tilde{f}(t) \Big|_0^T - \\
 & \int_0^T \tilde{f}(t)f(t)\tilde{f}(t) dt = -\int_0^T f(t)\tilde{f}(t)\tilde{f}(t) dt = -[\tilde{f}(t)\tilde{f}\tilde{f}(t) \Big|_0^T - \int_0^T f(t)\tilde{f}\tilde{f}(t) dt] \Rightarrow \\
 & 2 \int_0^T f(t)\tilde{f}\tilde{f}(t) dt = 0.
 \end{aligned}$$

□

A proposição a seguir nos dá o grau das M_i 's associadas à equação diferencial (3.13) e nos garante quando essas funções possuem raízes reais simples.

Proposição 3.1.3. *Consideramos a equação diferencial (3.13) com $N \geq 3$. Então, cada $M_i(\rho)$ é um função polinomial na variável ρ de grau máximo N , $2N - 2$ ou $3N - 3$ quando $i = 1, 2$, ou 3 , respectivamente. Mais ainda, para $N \leq 6$, existem escolhas adequadas das funções $f_{i,j}(t)$ para as quais todas as raízes de $M_i(\rho)$ são reais e simples.*

Demonstração. Utilizando a notação apresentada na Seção 2.2 temos que $u_1(t, \rho) = \sum_{j=0}^N \int_0^t f_{1j}(s)\rho^j ds$, daí, pela definição de $M_1(\rho)$

$$M_1(\rho) = u_1(T, \rho) = \sum_{j=0}^N \int_0^T f_{1j}(t)\rho^j dt,$$

cujo grau na variável ρ é N .

Por definição, para obter $M_j(\rho)$ é necessário que $M_1(\rho) \equiv \dots \equiv M_{j-1}(\rho) \equiv 0$. Então, para obter $M_2(\rho)$ impomos que $M_1(\rho) \equiv 0$, ou seja, $\int_0^T f_{1j}(t)\rho^j dt = 0$, para todo $j = 1, \dots, N$.

Pela Proposição 2.2.1 temos que

$$M_2(\rho) = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^N j f_{1,j}(t)\rho^{j-1} \right) \left(\sum_{i=0}^N \int_0^T f_{1,i}(s)\rho^i ds \right) + \left(\sum_{j=0}^N f_{2,j}(t)\rho^j \right) dt.$$

Notamos que o maior grau de $M_2(\rho)$ é $2N - 1$ e isso ocorre quando o grau de $u_1(t, \rho)$ é N e o grau de $\frac{\partial f_1(t)}{\partial \rho}$ é $N - 1$. O segundo maior grau de $M_2(\rho)$ é $2N - 2$, que ocorre quando o grau de $u_1(t, \rho)$ é N e o de $\frac{\partial f_1(t)}{\partial \rho}$ é $N - 2$, ou quando o grau de $u_1(\rho)$ e de $\frac{\partial f_1(t)}{\partial \rho}$ são iguais a $N - 1$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} M_2(\rho) &= \int_0^T \left(\int_0^T f_{1,N}(s) ds \rho^N \right) (N f_{1,N}(t)\rho^{N-1}) dt + \\ &\int_0^T \left(\int_0^T f_{1,N}(s) ds \rho^N \right) ((N - 1) f_{1,N-1}(t)\rho^{N-2}) dt + \\ &\int_0^T \left(\int_0^T f_{1,N-1}(s) ds \rho^{N-1} \right) (N f_{1,N}(t)\rho^{N-1}) dt + Q_{2N-3}(\rho) = \\ &\left(N \int_0^T \tilde{f}_{1,N}(t) f_{1,N}(t) dt \right) \rho^{2N-1} + \\ &\left((N - 1) \int_0^T \tilde{f}_{1,N}(t) f_{1,N-1}(t) dt + N \int_0^T \tilde{f}_{1,N-1}(t) f_{1,N}(t) dt \right) \rho^{2N-2} + \\ &Q_{2N-3}(\rho), \end{aligned}$$

onde $Q_{2N-3}(\rho)$ é um polinômio em ρ de grau $2N - 3$. Como $M_1(\rho) \equiv 0$, temos que o coeficiente de ρ^{2N-1} em $M_2(\rho)$ é zero, pois

$$\begin{aligned} \int_0^T f_{1,N}(t) \int_0^t f_{1,N}(s) ds dt &= \int_0^t f_{1,N}(s) ds \int_0^s f_{1,N}(s) ds \Big|_0^T \\ &- \int_0^T f_{1,N}(t) \int_0^t f_{1,N}(s) ds dt = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M_2(\rho) &= \left((N - 1) \int_0^T \tilde{f}_{1,N}(t) f_{1,N-1}(t) dt + N \int_0^T \tilde{f}_{1,N-1}(t) f_{1,N}(t) dt \right) \rho^{2N-2} + \\ &Q_{2N-3}(\rho), \end{aligned}$$

é uma função polinomial em ρ de grau $2N - 2$.

Para obtermos $M_3(\rho)$ impomos que $M_2(\rho) \equiv 0$. Então, usando também o fato de que $M_1(\rho) \equiv 0$

$$\int_0^T f_{1,N}(s) \int_0^s f_{1,N-1}(w) dw ds = \int_0^s f_{1,N-1}(w) dw \int_0^s f_{1,N}(w) dw \Big|_0^T - \int_0^T \int_0^s f_{1,N}(w) dw f_{1,N-1}(s) ds,$$

então,

$$\int_0^T f_{1,N}(s) \int_0^s f_{1,N-1}(w) dw ds = - \int_0^T \int_0^s f_{1,N}(w) dw f_{1,N-1}(s) ds \quad (3.14)$$

O coeficiente de ρ^{2N-2} em $M_2(\rho)$ tem que ser nulo, e por (3.14), temos que

$$\begin{aligned} & N \int_0^T \tilde{f}_{1,N-1}(t) f_{1,N}(t) dt + (N-1) \int_0^T \tilde{f}_{1,N}(t) f_{1,N-1}(t) dt = \\ & -N \int_0^T f_{1,N-1}(t) \tilde{f}_{1,N}(t) dt + N \int_0^t f_{1,N-1}(t) \tilde{f}_{1,N}(t) dt - \int_0^T f_{1,N-1}(t) \tilde{f}_{1,N}(t) dt = \\ & \int_0^T f_{1,N-1}(t) \tilde{f}_{1,N}(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A Proposição 2.2.1 nos diz que

$$M_3(\rho) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(t)}{\partial \rho^2} u_1^2(t, \rho) + \frac{\partial f_1(t)}{\partial \rho} u_2(t, \rho) + \frac{\partial f_2(t)}{\partial \rho} u_1(t, \rho) + f_3(t, \rho) \right) dt,$$

onde,

$$\begin{aligned} u_1^2(t, \rho) &= \left(\sum_{j=0}^N \int_0^t f_{1,j}(t) dt \rho^j \right)^2, \\ u_2(t, \rho) &= \left(N \int_0^T \tilde{f}_{1,N}(t) f_{1,N}(t) dt \right) \rho^{2N-1} + \left((N-1) \int_0^T \tilde{f}_{1,N}(t) f_{1,N-1}(t) dt \right. \\ &\quad \left. + N \int_0^T \tilde{f}_{1,N-1}(t) f_{1,N}(t) dt \right) \rho^{2N-2} + Q_{2N-3}(\rho), \\ \frac{\partial f_1(t)}{\partial \rho} &= \sum_{j=1}^N j f_{1,j}(t) \rho^{j-1}, \\ \frac{\partial^2 f_1(t)}{\partial \rho^2} &= \sum_{j=2}^N j(j-1) f_{1,j}(t) \rho^{j-2}, \\ \frac{\partial f_2(t)}{\partial \rho} &= \sum_{j=1}^N j f_{2,j}(t) \rho^{j-1}, \\ f_3(t) &= \sum_{j=0}^N f_{3,j}(t) \rho^j \end{aligned}$$

Para encontrar $M_3(\rho)$ prosseguimos da mesma maneira que para obter $M_2(\rho)$ e chegamos na expressão

$$M_3(\rho) = \left[\frac{N(N-1)}{2} \int_0^T f_{1,N}(t)(\tilde{f}_{1,N}(t))^2 + N^2 \int_0^T f_{1,N}(t)\widetilde{f_{1,N}f_{1,N}}(t)dt \right] \rho^{3N-2} +$$

$$\left[N(N-1) \int_0^T f_{1,N}(t)\tilde{f}_{1,N}(t)\tilde{f}_{1,N-1}(t) dt + \right.$$

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} \int_0^T (\tilde{f}_{1,N}(t))^2 f_{1,N-1}(t) dt +$$

$$N^2 \int_0^T f_{1,N}(t)\widetilde{f_{1,N}f_{1,N-1}}(t) dt + N(N-1) \int_0^T f_{1,N-1}(t)\widetilde{f_{1,N}f_{1,N}}(t) dt +$$

$$\left. N(N-1) \int_0^T f_{1,N}(t)\widetilde{f_{1,N-1}f_{1,N}}(t) dt \right] \rho^{3N-3} + Q_{3N-4}(\rho),$$

onde $Q_{3N-4}(\rho)$ é um polinômio de grau $3N-4$ na variável ρ .

Do Lema 3.1.1 temos que $\int_0^T f_{1,N}(t)\widetilde{f_{1,N}f_{1,N}}(t) = 0$. Utilizando o método de integração por partes, temos também que

$$\int_0^T f(t) \left(\int_0^t f(s) ds \right)^2 dt = \int_0^t f(s) ds \left(\int_0^t f(s) ds \right)^2 \Big|_0^T$$

$$- 2 \int_0^T \left(\int_0^t f(s) ds \right)^2 f(t) dt.$$

Logo,

$$\int_0^T f(t) \left(\int_0^t f(s) ds \right)^2 dt = 0.$$

Portanto, o coeficiente de ρ^{3N-2} em $M_3(\rho)$ é zero.

Usando o Lema 3.1.1, temos que o coeficiente de ρ^{3N-3} em $M_3(\rho)$ pode ser escrito como:

$$N(N-1) \left(\frac{-I}{2} \right) + \frac{(N-1)(N-2)}{2} I + N^2 \left(\frac{I}{2} \right) + N(N-1) \left(\frac{I}{2} \right) + N(N-2)(-I) =$$

$$\frac{2-N}{2} \int_0^T f_{1,N-1}(t)(\tilde{f}_{1,N}(t))^2 dt,$$

e então,

$$M_3(\rho) = \left(\frac{2-N}{2} \int_0^T f_{1,N-1}(t)(\tilde{f}_{1,N}(t))^2 dt \right) \rho^{3N-3} + Q_{3N-4}(\rho).$$

Notamos que é possível encontrar funções $f_{1,N}$ e $f_{1,N-1}$ tais que

$$\int_0^T f_{1,N-1}(t)(\tilde{f}_{1,N}(t))^2 dt \neq 0$$

e a condição (3.15) é satisfeita. Isso conclui a primeira parte da demonstração.

Para provar que as funções $M_i(\rho)$ podem ser escolhidas arbitrariamente, tomamos

$$f_{1,j}(t) = \alpha_j + \beta_j \cos t + \gamma_j(\sin^2 t - 1/2),$$

$$f_{2,j}(t) = \delta_j + \eta_j \cos t, \text{ e}$$

$$f_{3,j}(t) = \lambda_j,$$

onde $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \eta_j$, e λ_j são números reais arbitrários, $j = 0, \dots, N-1$, e

$$f_{1,N}(t) = \alpha_N + \sin^4 t + \phi \sin t - 3/8,$$

$$f_{2,N}(t) = \delta_N + \sin t, \text{ e}$$

$$f_{3,N}(t) = \lambda_N \text{ é uma constante real arbitrária,}$$

onde α_N, δ_N e ϕ são números reais.

Todas essas funções são 2π -periódicas. Por conveniência, apresentamos os detalhes apenas para o caso $N = 3$. Os outros casos são semelhantes. A fim de simplificar nossos cálculos, tomamos $\beta_0 = \beta_1 = \gamma_0 = 0$.

Pela Proposição 2.2.1, obtemos

$$M_1(\rho) = 2\pi \sum_{i=0}^3 \alpha_i \rho^i,$$

$$M_2(\rho) = \frac{\beta_2 \phi}{2} \rho^4 + \delta_3 \rho^3 + \delta_2 \rho^2 + \delta_1 \rho + \delta_0,$$

$$M_3(\rho) = \rho^6 + (128\beta_2^2 - 2)\rho^5 + (5\gamma_1 + 512\beta_2)\rho^4 + (-4\gamma_1^2 + 1024\lambda_3)\rho^3 + 1024\lambda_2\rho^2 + 1024\lambda_1\rho + 1024\lambda_0.$$

Lembramos que para obter a expressão de $M_3(\rho)$ é necessário ter $M_2(\rho) \equiv 0$. Para essa condição estar satisfeita é necessário que $\beta_2 \phi = 0$, e daí temos fixado $\phi = 0$. Para terminar a demonstração, observe que os coeficientes de $M_1(\rho)$ e $M_2(\rho)$ podem ser escolhidos arbitrariamente. Adicionalmente, ao tomarmos β_2 tal que $128\beta_2^2 - 2 = 0$, $M_3(\rho)$ é um polinômio mônico arbitrário de grau seis e sem o termo ρ^5 . Por meio de uma translação conveniente, é fácil ver que qualquer polinômio de grau seis pode ser escrito dessa forma. Assim, para coeficientes adequados de $M_3(\rho)$, bastando tomar as f_{ij} adequadamente, é possível obter $M_3(\rho)$ com 6 zeros simples, como queríamos demonstrar. \square

Um exemplo com $d=2$

Consideramos um sistema de equações de Abel generalizadas

$$\begin{cases} r' = a(t)r^2 + \varepsilon f(t)r^n s^m, \\ s' = b(t)s^2 + \varepsilon g(t)r^p s^q, \end{cases} \quad (3.16)$$

onde m, n, p e q são inteiros positivos tais que $n + m \geq 3, p + q \geq 3$, e a, b, f, g são funções polinomiais trigonométricas (ou seja, polinômios de seno e cosseno da variável t) T -periódicas.

Para cada $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\varphi_0(t, \rho)$ a solução da equação (3.16) para $\varepsilon = 0$, tal que $\varphi_0(0, \rho) = \rho = (\rho_1, \rho_2)$. Nesse caso

$$\varphi_0(t, \rho) = \left(\frac{\rho_1}{1 - A(t)\rho_1}, \frac{\rho_2}{1 - B(t)\rho_2} \right),$$

onde $A(t) = \int_0^t a(s) ds$ e $B(t) = \int_0^t b(s) ds$. Assumimos que $A(T) = B(T) = 0$ para assegurar que o sistema não-perturbado possui um contínuo de órbitas periódicas. Antes de aplicar o Teorema 2.2.1 notamos que

$$D_\rho \varphi_0(t, \rho) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1 - A(t)\rho_1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1 - B(t)\rho_2)^2} \end{pmatrix}$$

e

$$(D_\rho \varphi_0(t, \rho))^{-1} = \begin{pmatrix} (1 - A(t)\rho_1)^2 & 0 \\ 0 & (1 - B(t)\rho_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} M_1(\rho) &= \int_0^T \begin{pmatrix} (1 - A(t)\rho_1)^2 & 0 \\ 0 & (1 - B(t)\rho_2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \left(\frac{\rho_1}{1 - A(t)\rho_1} \right)^n \left(\frac{\rho_2}{1 - B(t)\rho_2} \right)^m \\ g(t) \left(\frac{\rho_1}{1 - A(t)\rho_1} \right)^p \left(\frac{\rho_2}{1 - B(t)\rho_2} \right)^q \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \rho_1^n \rho_2^m \int_0^T \frac{f(t)}{(1 - A(t)\rho_1)^{n-2} (1 - B(t)\rho_2)^m} dt \\ \rho_1^p \rho_2^q \int_0^T \frac{g(t)}{(1 - A(t)\rho_1)^p (1 - B(t)\rho_2)^{q-2}} dt \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Estudamos o caso particular do sistema (3.16) na Proposição 3.1.4. Neste caso, tem-se 4 ciclos limites que permanecem quando $\varepsilon \neq 0$.

Proposição 3.1.4. *Existem sistemas da forma*

$$\begin{cases} r' = \cos(t)r^2 + \varepsilon(F_1 + F_2 \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t))rs^2, \\ s' = \cos(t)s^2 + \varepsilon(G_1 + G_2 \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t))r^2s, \end{cases} \quad (3.18)$$

onde F_i e G_i , para $i = 1, 2$ são constantes reais e ε é suficientemente pequeno, que possuem quatro ciclos limites.

Demonstração. Identificando (3.18) com os termos de (3.16) temos $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$ e $q = 1$. Além disso, $f(t) = F_1 + F_2 \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t)$, $g(t) = G_1 + G_2 \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t)$, $a(t) = b(t) = \cos(t)$. Denotamos $F = (F_1, F_2)$ e $G = (G_1, G_2)$. A função $M_1(\rho) = (M_{11}(\rho), M_{12}(\rho))$ associada ao sistema diferencial (3.18) é obtida a partir de (3.17)

$$\begin{aligned} M_{11}(\rho) &= \rho_1 \rho_2^2 \int_0^{2\pi} \frac{(F_1 + F_2 \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t))(1 - \rho_1 \operatorname{sen}(t))}{(1 - \rho_2 \operatorname{sen}(t))^2} dt, \\ M_{12}(\rho) &= \rho_1^2 \rho_2 \int_0^{2\pi} \frac{(G_1 + G_2 \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t))(1 - \rho_2 \operatorname{sen}(t))}{(1 - \rho_1 \operatorname{sen}(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Portanto, assumindo que $|\rho_1| < 1$ e $|\rho_2| < 1$ temos,

$$\begin{aligned} M_{11}(\rho) &= \frac{2\pi\rho_1}{\rho_2(1 - \rho_2^2)^{3/2}} (P_F(\rho_1, \rho_2) + Q_F(\rho_1, \rho_2)\sqrt{1 - \rho_2^2}), \\ M_{12}(\rho) &= \frac{2\pi\rho_2}{\rho_1(1 - \rho_1^2)^{3/2}} (P_G(\rho_1, \rho_2) + Q_G(\rho_1, \rho_2)\sqrt{1 - \rho_1^2}), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} P_F(\rho_1, \rho_2) &= 2\rho_1 - \rho_2 - 3\rho_1\rho_2^2 + 2\rho_2^3 + (\rho_2^3 - \rho_1\rho_2^4)F_1 + (\rho_1\rho_2 - 2\rho_1\rho_2^3 + \rho_2^4)F_2, \\ Q_F(\rho_1, \rho_2) &= -2\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_1\rho_2^2 - \rho_2^3 + (-\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_2^3)F_2, \\ P_G(\rho_1, \rho_2) &= 2\rho_2 - \rho_1 - 3\rho_2\rho_1^2 + 2\rho_1^3 + (\rho_1^3 - \rho_2\rho_1^4)G_1 + (\rho_2\rho_1 - 2\rho_2\rho_1^3 + \rho_1^4)G_2, \\ Q_G(\rho_1, \rho_2) &= -2\rho_2 + \rho_1 + 2\rho_2\rho_1^2 - \rho_1^3 + (-\rho_2\rho_1 + \rho_2\rho_1^3)G_2. \end{aligned}$$

Notamos que, se $\rho_1 = 0$ então $M_{11}(\rho_1, \rho_2) = 0$ para todo ρ_2 , e se $\rho_2 = 0$ então $M_{12} = 0$ para todo ρ_1 . Portanto, as soluções simples do sistema

$$\frac{(1 - \rho_2^2)^{3/2}}{2\pi\rho_1} M_{11}(\rho) = 0, \quad \frac{(1 - \rho_1^2)^{3/2}}{2\pi\rho_2} M_{12}(\rho) = 0 \quad (3.19)$$

em $D := \{(\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2 : |\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1, \rho_1\rho_2 \neq 0\}$ dão origem a ciclos limites do sistema (3.18), para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno.

Os zeros simples do sistema (3.19) em D são os zeros simples do sistema polinomial:

$$\begin{cases} P_F^2(\rho_1, \rho_2) - Q_F^2(\rho_1, \rho_2)(1 - \rho_2^2) = 0, \\ P_G^2(\rho_1, \rho_2) - Q_G^2(\rho_1, \rho_2)(1 - \rho_1^2) = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

no mesmo domínio.

Para diversos valores de F e G o sistema (3.20) tem uma solução em D . Por exemplo, fixamos $F = \bar{F} = (-1/2, -1/10)$ e $G = \bar{G} = (-3/5, 3/10)$. Para esses valores o sistema (3.20) se escreve como:

$$\begin{cases} \phi_1(\rho_1, \rho_2) := P_{\bar{F}}^2(\rho_1, \rho_2) - Q_{\bar{F}}^2(\rho_1, \rho_2)(1 - \rho_2^2) = 0, \\ \phi_2(\rho_1, \rho_2) := P_{\bar{G}}^2(\rho_1, \rho_2) - Q_{\bar{G}}^2(\rho_1, \rho_2)(1 - \rho_1^2) = 0, \end{cases}$$

Utilizando o software Mathematica 7.0 encontramos 10 raízes para esse sistema, dentre as quais somente 4 são raízes de $M_1(\rho)$. O valor aproximado destas raízes com 50 casas decimais são

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1 &= (-0.89846847915776946838560567934669833816209810626797, \\ & 0.21875505073688296129334864785202155858216776824718), \\ \tilde{\rho}_2 &= (-0.93810747940775073614634802187956144436222926534309, \\ & -0.73879419676660777943438518355397023429523621646177), \\ \tilde{\rho}_3 &= (0.29908017799555348219747143203687448231883554528328, \\ & 0.11405407225599664299254340771279221090352966661631), \\ \tilde{\rho}_4 &= (0.43017208549428521876194620500540340802189035855994, \\ & 0.40830711943739738040906466978330143500508191727263). \end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.2.2, e novamente com o auxílio do software Mathematica 7.0, temos que essas raízes são todas simples. □

3.2 Aplicações do método via Redução de Lyapunov-Schmidt

Consideramos a equação diferencial de terceira ordem

$$x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x''), \quad (3.21)$$

onde as variáveis x e t e os parâmetros μ e ε são reais, ε é suficientemente pequeno, e a função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe \mathcal{C}^2 , sendo Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 . Esta equação, para o parâmetro $\mu \neq 0$ e $\mu = 0$, foi estudada por J. Llibre e L. Roberto em [14]. Neste trabalho é analisado o número de ciclos limites via Teorema 2.1.5 para o caso $\mu = 0$ e via Teorema 2.3.2 para o caso $\mu \neq 0$. Nesta seção estudamos o caso $\mu \neq 0$.

Equação diferencial de terceira ordem com $\mu \neq 0$

O Teorema 3.2.1 nos dá condições para que a equação diferencial (3.21) possua um ciclo limite para ε próximo de zero.

Teorema 3.2.1. *Consideramos a equação diferencial (3.21) com $\mu \neq 0$. Para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno e para cada zero simples r_0^* da função*

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C) \cos \theta \, d\theta,$$

onde

$$A = -\frac{r_0(\cos \theta + \mu \operatorname{sen} \theta)}{1 + \mu^2}, \quad B = \frac{r_0(\operatorname{sen} \theta - \mu \cos \theta)}{1 + \mu^2}, \quad C = \frac{r_0(\cos \theta + \mu \operatorname{sen} \theta)}{1 + \mu^2},$$

a equação diferencial (3.21) possui uma solução periódica $x_\varepsilon(t)$ que tende para a solução periódica

$$x(t) = -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \operatorname{sen} t)}{1 + \mu^2},$$

de $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Primeiramente escrevemos a equação diferencial (3.21) na forma de sistema diferencial considerando $y = x'$ e $z = x''$. Assim (3.21) é equivalente ao sistema de equações diferenciais no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = -y + \mu(x + z) + \varepsilon F(x, y, z). \end{cases} \quad (3.22)$$

Quando $\varepsilon = 0$, em (3.21), denominamos este sistema não-perturbado. O seu único ponto singular é a origem, cujos autovalores associados são i , $-i$ e μ . Considerando a mudança de variáveis linear $(X, Y, Z)^T = C(x, y, z)^T$ com

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\mu & 1 \\ -\mu & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

transformamos o sistema diferencial (3.22) em um novo sistema que possui sua parte linear na forma normal de Jordan

$$\begin{cases} X' = -Y + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z), \\ Y' = X, \\ Z' = \mu Z - \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z), \end{cases} \quad (3.23)$$

onde $\tilde{F}(X, Y, Z) = F(A, B, C)$ sendo

$$A = -\frac{X + Z + \mu Y}{1 + \mu^2}, \quad B = \frac{Y - \mu(X + Z)}{1 + \mu^2}, \quad C = \frac{X + \mu(Y - \mu Z)}{1 + \mu^2}.$$

Agora, nas coordenadas cilíndricas (r, θ, Z) do \mathbb{R}^3 , onde $X = r \cos \theta$ e $Y = r \sin \theta$, o sistema diferencial (3.23) é escrito como

$$\begin{cases} r' = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta, \\ \theta' = 1 - \varepsilon \frac{G(r, \theta, Z) \sin \theta}{r}, \\ Z' = \mu Z - \varepsilon G(r, \theta, Z), \end{cases} \quad (3.24)$$

onde $G(r, \theta, Z) = \tilde{F}(r \cos \theta, r \sin \theta, Z)$.

Mudando a variável independente de t para θ o sistema diferencial (3.24) se torna

$$\begin{cases} r' = \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \\ Z' = \frac{dZ}{d\theta} = \mu Z + \varepsilon \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (3.25)$$

Então, para $\mu \neq 0$, o sistema (3.25) pode ser escrito como

$$\mathbf{x}' = F_0(\theta, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(\theta, \mathbf{x}, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (3.26)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ Z \end{pmatrix}, \quad F_0(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu Z \end{pmatrix}, \quad F_1(\theta, \mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) \end{pmatrix}.$$

Vamos estudar as soluções periódicas do sistema (3.26) usando o método via Redução de Lyapunov-Schmidt, em particular o Teorema 2.3.2. Primeiramente vamos procurar por soluções periódicas do sistema não-perturbado

$$\mathbf{x}' = F_0(\theta, \mathbf{x}).$$

Notamos que essas soluções periódicas são

$$(r(\theta), Z(\theta)) = (r_0, 0),$$

para cada $r_0 > 0$, ou seja, essas soluções periódicas moram no plano $Z = 0$ para o sistema (3.24). É claro que todas essas soluções periódicas nas coordenadas (r, Z) são 2π -periódicas na variável θ .

No Teorema 2.3.2 vamos considerar $k = 1$ e $n = 2$. Seja $r_1 > 0$ arbitrariamente pequeno e $r_2 > 0$ arbitrariamente grande. Então vamos tomar o subconjunto aberto e limitado $V \subset \mathbb{R}$ como $V = (r_1, r_2)$, $\alpha = r_0 \in V$ e $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida tal que $\beta(r_0) = 0$. O conjunto \mathcal{Z} é

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_{r_0} = (r_0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}.$$

Claramente para cada $\mathbf{z}_{r_0} \in \mathcal{Z}$ podemos considerar a solução 2π -periódica $\mathbf{x}(\theta) = \mathbf{z}_{r_0} = (r_0, 0)$.

Computando a matriz fundamental $M_{\mathbf{z}_{r_0}}(\theta)$ do sistema linear diferencial (2.43) associada a solução 2π -periódica $\mathbf{z}_{r_0} = (r_0, 0)$ tal que $M_{\mathbf{z}_{r_0}}(0)$ é a matriz identidade do \mathbb{R}^2 , temos que

$$M(\theta) = M_{\mathbf{z}_{r_0}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mu\theta} \end{pmatrix}.$$

Notamos que a matriz $M(\theta)$ não depende da órbita periódica particular \mathbf{z}_{r_0} . Uma vez que a matriz

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix},$$

não é identicamente nula, pois $\mu \neq 0$, ela satisfaz a hipótese do item *ii*) do Teorema 2.3.2, e agora podemos aplicar esse teorema para o sistema (3.25).

Seja $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção $\Pi(r, Z) = r$. Calculamos a função (2.45)

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C) \cos \theta \, d\theta,$$

onde A, B e C são definidas no enunciado do Teorema 3.2.1. Então, pelo Teorema 2.3.2 temos que para cada zero simples $r_0^* \in [r_1, r_2]$ da função $\mathcal{F}(r_0)$ temos uma solução periódica $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ do sistema (3.25) tal que

$$(r_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(0)) \rightarrow (r_0^*, 0) \quad \text{conforme } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Voltando pela mudança de coordenadas, temos uma solução periódica $(r_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ do sistema (3.24) tal que

$$(r_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0^*, t, 0) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Consequentemente obtemos uma solução periódica $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ do sistema (3.23) tal que

$$(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0^* \cos t, r_0^* \text{sent}, 0) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto, uma vez que

$$x = -\frac{X + Z + \mu Y}{1 + \mu^2}, \tag{3.27}$$

temos uma solução periódica $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ do sistema (3.22) tal que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \text{sent})}{1 + \mu^2} \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Notamos que $x(t) = -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \text{sent})}{1 + \mu^2}$ nos dá uma solução periódica da equação diferencial linear $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = 0$. Com isso temos provado o Teorema 3.2.1.

□

Na seção a seguir, apresentamos exemplos onde se aplica o Método da Média padrão. Em particular, apresentamos o estudo da equação (3.21) quando $\mu = 0$.

3.3 Aplicação da Teoria da Média

Equação diferencial de terceira ordem com $\mu = 0$

Teorema 3.3.1. *Consideramos $\mu = 0$ na equação diferencial (3.21). Se existe (r_0, Z_0) tal que*

$$f_1(r_0, Z_0) = 0, \quad f_2(r_0, Z_0) = 0 \quad e \quad \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, Z)} \right) (r_0, Z_0) \neq 0,$$

então a equação diferencial (3.21) com $\mu = 0$ possui uma solução periódica $x_\varepsilon(t)$ que tende para a solução periódica

$$x(t) = -r_0 \cos t - Z_0,$$

de $x''' + x' = 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Semelhante ao feito na demonstração do Teorema 3.2.1 temos que o sistema (3.25) com $\mu = 0$ é escrito como

$$\begin{cases} r' = \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \\ Z' = \frac{dZ}{d\theta} = -\varepsilon G(r, \theta, Z) + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (3.28)$$

com $(r, Z) \in D \subset \mathbb{R}^2$ e D um subconjunto aberto em \mathbb{R}^2 .

Notamos que o sistema (3.28) está na forma padrão para aplicarmos o Teorema 2.1.5. Então, o sistema diferencial médio é

$$(r', Z') = \varepsilon g^0(r, Z), \quad (3.29)$$

onde

$$g^0(r, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(r, s, Z) \cos s, G(r, s, Z)) ds. \quad (3.30)$$

Pelo Teorema 2.1.5 para cada ponto singular $p = (r_0, Z_0)$ do sistema (3.29) tal que

$$\det \left(\frac{\partial g^0}{\partial(r, Z)} \right) \Big|_{(r, Z)=p} \neq 0, \quad (3.31)$$

existe uma solução 2π -periódica $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ do sistema (3.28) tal que $(r_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(0)) \rightarrow p$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Notamos que (3.31) é equivalente a

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, Z)} \right) (r_0, Z_0) \neq 0,$$

onde f_1 e f_2 são funções definidas por

$$\begin{aligned} f_1(r_0, Z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha, \beta, \gamma) \cos \theta d\theta, \\ f_2(r_0, Z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha, \beta, \gamma) d\theta, \end{aligned}$$

com

$$\alpha = -Z_0 - r_0 \cos \theta, \quad \beta = r_0 \sin \theta, \quad \gamma = r_0 \cos \theta.$$

Voltando pela mudança de coordenadas, a solução 2π -periódica $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ do sistema (3.28) nos dá uma solução periódica $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ do sistema (3.22) com $\mu = 0$ tal que

$$(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0 \cos t, r_0 \sin t, Z_0) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto, de (3.27) temos uma solução periódica $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ do sistema (3.22) tal que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow -r_0 \cos t - Z_0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

O que prova o Teorema 3.3.1. □

Um exemplo planar com mudança de variável

A seguir apresentamos um exemplo retirado do artigo [1], onde aplicamos a mudança de variável do Teorema 1.2.1 e depois o Teorema da Média de primeira ordem.

Consideramos o sistema diferencial quadrático

$$\begin{cases} x' &= -y + x^2 \\ y' &= x + xy \end{cases} \quad (3.32)$$

cuja origem é um centro isócrono, e que possui uma integral primeira dada por

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y^2)},$$

como apresentado em [9].

Na notação do Teorema 1.2.1 temos que $h_c = 0$, $h_s = 1$ e a função ρ é dada por

$$\rho(R, \varphi) = \frac{R}{1 - R \operatorname{sen} \varphi}, \quad \text{para todo } 0 < R < 1 \text{ e } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Consideramos perturbações da forma

$$\begin{cases} x' &= -y + x^2 + \varepsilon p(x, y) \\ y' &= x + xy + \varepsilon q(x, y), \end{cases} \quad (3.33)$$

onde $p(x, y) = a_1 y - a_3 x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6 y^2$ e $q(x, y) = a_1 y + a_2 x^2 + a_4 xy - a_2 y^2$, com $a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{R}$.

Então, a equação correspondente à equação (1.26) fica da seguinte forma

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \operatorname{sen}(\varphi) + \varepsilon c(\varphi)R}, \quad (3.34)$$

onde

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= (-2a_1 + 3a_2 + a_5) \operatorname{sen} \varphi + (a_4 + a_6) \cos \varphi + (-4a_2 - a_5) \operatorname{sen}^3 \varphi \\ &\quad + (-a_3 - a_4 - a_6) \cos^3(\varphi), \\ b(\varphi) &= a_1 + a_2 + (-a_1 - 2a_2) \cos^2 \varphi - a_4 \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi, \\ c(\varphi) &= (a_3 + a_4) \operatorname{sen} \varphi + (-3a_2 - a_5) \cos \varphi + (-a_3 - a_4 - a_6) \operatorname{sen}^3 \varphi \\ &\quad + (4a_2 + a_5) \cos^3 \varphi. \end{aligned}$$

Expandimos a equação (3.34) em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ e obtemos

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon F_1(\varphi, R) + \varepsilon^2 G(\varphi, R, \varepsilon), \quad (3.35)$$

onde

$$F_1(\varphi, R) = \frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \operatorname{sen}\varphi}$$

e

$$G(\varphi, R, \varepsilon) = -\frac{[a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3]c(\varphi)R}{(1 - R \operatorname{sen}\varphi)(1 - R \operatorname{sen}\varphi + \varepsilon c(\varphi)R)}.$$

Temos que a equação (3.35) está na forma para se aplicar o Teorema 2.1.5. A função média para esse problema $f^0 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f^0(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_1 z + a(\varphi)z^2 + b(\varphi)z^3}{1 - z \operatorname{sen}\varphi} d\varphi.$$

Computando essa integral obtemos

$$f^0(z) = -\frac{1}{2(z\sqrt{1-z^2})} (2a_2 z^4 + (6a_2 + a_5 - 2a_1)z^2 \sqrt{1-z^2} - (10a_2 + 2a_5)z^2 - (2a_5 + 8a_2)\sqrt{1-z^2} + 8a_2 + 2a_5).$$

Tomando uma nova variável $\xi \in (0, 1)$ definida por $z = \sqrt{1 - \xi^2}$, obtemos

$$f^0(\sqrt{1 - \xi^2}) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \xi^2}} (1 - \xi) (2a_2 \xi^2 + (2a_1 - 4a_2 - a_5)\xi + 2a_1 + 2a_2 + a_5).$$

Notamos que $z \in (0, 1)$ é um zero de f^0 se, e somente se, $\xi \in (0, 1)$ é um zero da função polinomial $g(\xi) = 2a_2 \xi^2 + c_1 \xi + c_2$, onde $c_1 = 2a_1 - 4a_2 - a_5$ e $c_2 = 2a_1 + 2a_2 + a_5$. Então, podemos concluir que o número de zeros de g no intervalo $(0, 1)$ é no máximo 2, o que implica que o número de zeros de f^0 é no máximo 2. Portanto, o método garante a existência de até dois ciclos limites bifurcando do anel periódico do sistema (3.32).

Se consideramos o caso particular em que $a_1 = \frac{3}{32}$, $a_2 = \frac{1}{2}$ e $a_5 = \frac{17}{16}$, então f^0 possui dois zeros simples $\tilde{z}_1 = 0.968246$ e $\tilde{z}_2 = 0.866025$. Como $\frac{df^0}{dz}(\tilde{z}_1) = 0.375$ e $\frac{df^0}{dz}(\tilde{z}_2) = -0.125$ então os pontos singulares hiperbólicos \tilde{z}_1 e \tilde{z}_2 são, respectivamente, instável e estável. Portanto, pelo Teorema 2.1.6, a órbita associada a \tilde{z}_1 é instável e a associada a \tilde{z}_2 é estável.

Agora, se no sistema (3.32) tomamos a mudança de coordenadas polares usual (r, θ) e consideramos θ como variável independente, o sistema é escrito como

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= r(\varepsilon(4a_1 + r(4a_2 + a_5) \operatorname{sen}(3\theta) - r \cos(3\theta)(a_3 + a_4 + a_6) \\ &\quad + a_5 r \operatorname{sen}\theta) + r \cos\theta(\varepsilon(-3a_3 + a_4 + a_6) + 4))/ \\ &\quad r\varepsilon((4a_2 + a_5) \cos(3\theta) + \operatorname{sen}\theta(a_3 + a_4 - 3a_6) \\ &\quad + \operatorname{sen}(3\theta)(a_3 + a_4 + a_6) - a_5 \cos\theta) + 4 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Assim como procedemos na Proposição 3.1.1, temos que a solução do sistema não-perturbado é dada por

$$\varphi_0(s, \rho) = \frac{\rho}{1 - \rho \operatorname{sens} s},$$

derivando em relação a ρ obtemos

$$D_\rho \varphi_0(s, \rho) = \frac{1}{(1 - \rho \operatorname{sens} s)^2},$$

e a expressão de $f_1(s, \rho)$ é

$$\begin{aligned} f_1(s, \rho) &= \operatorname{sens}(a_2 \rho^2 \cos^2 s + a_1 \rho \operatorname{sens} s + a_4 \rho^2 \cos s \operatorname{sens} s - a_2 \rho^2 \operatorname{sen}^2 s) \\ &\quad + \cos s(a_1 \rho \cos s - a_3 \rho^2 \cos^2 s + (2a_2 + a_5) \rho^2 \cos s \operatorname{sens} s + a_6 \rho^2 \operatorname{sen}^2 s) \\ &\quad - \rho \cos s(\cos s(a_2 \rho^2 \cos^2 s + a_1 \rho \operatorname{sens} s + a_4 \rho^2 \cos s \operatorname{sens} s - a_2 \rho^2 \operatorname{sen}^2 s) \\ &\quad - \operatorname{sens}(a_1 \rho \cos s - a_3 \rho^2 \cos^2 s + (2a_2 + a_5) \rho^2 \cos s \operatorname{sens} s + a_6 \rho^2 \operatorname{sen}^2 s)). \end{aligned}$$

Se consideramos $a_5 = a_2(-4 + \rho^2)$ então, aplicando o Teorema 2.2.1, temos que a expressão de $M_1(\rho)$ é dada por

$$\begin{aligned} M_1(\rho) &= -\frac{1}{\rho^2} \left(\pi \left(-2a_1 \rho^2 + a_2(\rho^2 - 4) \left(-\sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}} \rho^2 + \rho^2 + \sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}} - 2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_2 \left(\left(6 - 5\sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}} \right) \rho^2 + 4 \left(\sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}} - 2 \right) + \sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}} \rho^4 \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Daí, se tomarmos $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ então as raízes de $M_1(\rho)$ são $\tilde{\rho}_1 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}}$ e $\tilde{\rho}_2 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}}$, e ambas são simples. Portanto, com as considerações feitas, temos que a equação (3.36) possui dois ciclos limites.

Referências Bibliográficas

- [1] A. BUICÃ, J. LLIBRE, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), no. 1, 7-22.
- [2] A. BUICÃ, J. FRANÇOISE, J. LLIBRE, *Periodic Solution of Nonlinear Periodic Differential Systems With a Small Parameter*, Commun. Pure Appl. Anal. **6** (2007), no. 1, 103-111.
- [3] B. COLL, A. GASULL, R. PROHENS, *Periodic Orbits for Perturbed Non-Autonomous Differential Equations*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 7, 803-819.
- [4] C. CHICONE, *Ordinary Differential Equations With Applications*, Texts in Applied Mathematics **34**, Springer-Verlag, (1999).
- [5] C. CHICONE, *Lyapunov-Schmidt reduction and Melnikov integrals for bifurcation of periodic solutions in coupled oscillators*, J. Differential Equations **112** (1994), 407-447.
- [6] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, J. C. ARTÉS, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer-Verlag, (2006).
- [7] F. VERHUST, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer-Verlag, (1996).
- [8] H. COHEN, *A course in computational algebraic number theory*, Graduate Texts in Mathematics, **138**, Springer-Verlag, Berlin, (1993).
- [9] J. CHAVARRIGA, M. SABATINI, *A Survey of Isochronous Centers*, Qualitative Theory of Dynamical Systems **1**, (1999) 1-70.
- [10] J. HALE, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, (1969).
- [11] J. PALIS, W. MELO, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Projeto Euclides, IMPA, (1978).

- [12] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [13] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics **7**, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [14] L. ROBERTO, J. LLIBRE, *On the Periodic Orbits of the Third-Order Differential Equation $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x'')$* , Appl. Math. Lett. **26** (2013), no. 4, 425-430.
- [15] W. HIRSCH, S. SMALE, L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Introduction to Chaos*, 2nd ed. Elsevier. (2004).