

UNESP - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

**RODOLFO JOSÉ BUENO ROGERIO**

**CAMPOS ESPINORIAIS ELKO**

Guaratinguetá

2014

**RODOLFO JOSÉ BUENO ROGERIO**

**CAMPOS ESPINORIAIS ELKO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos

Orientador: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva.

Guaratinguetá

2014

R723c Rogério, Rodolfo José Bueno  
Campos Espinoriais ELKO/ Rodolfo José Bueno Rogerio–  
Guaratinguetá, 2014.  
61 f : il.  
Bibliografia: f. 60-61

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de  
Engenharia de Guaratinguetá, 2014.  
Orientador: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva

1. Teoria quântica de campos 2. Férmions I. Título

CDU 530.145(043)

*RODOLFO JOSÉ BUENO ROGERIO*


ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*

  
Prof. Dr. JÚLIO MARNY HOFF DA SILVA  
Orientador - UNESP/FEG

  
Prof. Dr. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA  
UNESP/FEG

  
Prof. Dr. JOSÉ ABDALLA HELAYËL NETO  
CBPF

*Julho de 2014*

*de maneira especial, à meus pais, Ana Ruth Bueno Rogerio e Paulo Afonso Rogerio, que com todo seu Amor, carinho e dedicação sempre me propuseram o melhor que puderam sem medir esforços.*

Questione para monitorar seu foco.  
O que você foca transforma-se em sentimento.  
O que você sente te conduz para ação.  
Sua ação torna-se um hábito.  
Hábito constrói seu CARÁTER.

Sensei Marcelo Reis

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à meus Pais, *Paulo e Ana*, pois com muita dedicação sempre me educaram e me ensinaram o que é caráter.

Em segundo lugar agradeço à *Gabriela*, minha namorada, pela compreensão e pela paciência que em todo esse tempo foi vital para minha carreira.

Em especial agradeço meu orientador, *Prof.Dr.Júlio Marny Hoff da Silva*, por ter me aceitado em seu grupo de pesquisas, pela dedicação e incentivo. Gestos os quais cada vez mais me motivaram a seguir em frente.

Agradeço à meu grande amigo *Carlos Hugo Coronado Villalobos*, pessoa a qual sempre esteve disposta a ajudar, tanto academicamente quanto pessoalmente.

Também agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio durante todo o tempo de pesquisa.

E por fim, agradeço meu segundo lar, a *República* onde morei durante minha graduação e voltei a morar durante a pós graduação. Local onde sempre aprendi e também sempre poderei ensinar.

ROGERIO, R. J. B. **Campos Espinoriais ELKO** 2014. 61f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, 2014.

## RESUMO

O século passado é considerado como a era das Teorias Quânticas de Campos. Desta forma, neste trabalho, forneceremos todos os detalhes de uma descoberta teórica inesperada de uma partícula de matéria de spin  $1/2$  com dimensão de massa 1. Esses espinores recebem o nome de ELKO, o qual vem do acrônimo alemão *Eigenespinores des Ladungskonjugationsoperators*, e são fundamentados em um conjunto completo de autoespinores de helicidade dual do operador conjugação de carga. O ELKO pertence a um subgrupo do grupo completo de Lorentz. Portanto, a lei de transformação entre suas componentes não é dada pela simetria de paridade, e desta maneira não satisfaz a equação de Dirac. Intrinsecamente nas somas de spin para o ELKO aparece um termo que quebra a simetria de Lorentz, levando então à apreciação da *Very Special Relativity*, que nada mais é do que um subgrupo do grupo de Lorentz, cuja álgebra deixa as somas de spin invariantes ou covariantes. Pela razão do propagador do ELKO ser o mesmo de Klein-Gordon a menos de um fator, a lagrangiana associada é a do campo escalar, por esta razão o ELKO é dotado de dimensão de massa 1.

**Palavras-chave:** Campo Quântico, Férmions, Localidade.



ROGERIO, R. J. B. **ELKO Spinor's Field** 2014. 61f. Thesis (Master in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, 2014.

## ABSTRACT

The last century is considered as the era of Quantum Field Theories. Thus, in this work, we provide all the details of an unexpected theoretical discovery of a matter particle spin  $1/2$  endowed with mass dimension 1. These spinors are the so called ELKO, which comes from the German acronym *Eigenspinores des Ladungskonjugationsoperators*, based on a complete set of a dual helicity eigenspinors of the charge conjugation operator. ELKO belongs to a subgroup of the full Lorentz group. Therefore, the law of transformation between its components is not given by the parity symmetry, and thus it does not satisfies the Dirac equation. It appears, intrinsically in the spin sums a Lorentz symmetry breaking term, then it will be better analysed within the *Very Special Relativity*, which is a subgroup of the Lorentz group, whose algebra leaves the spin sums invariant or covariant under transformations. Since the ELKO propagator is the same of Klein-Gordon propagator apart from a term, than the associated lagrangian is the scalar field one, for this reason ELKO is endowed with mass dimension 1.

**Keywords:** Quantum Field, Fermions, Locality.

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>PRELÚDIO: O SURGIMENTO DO OPERADOR CONJUGAÇÃO DE CARGA</b>	<b>14</b>
2.1	A CONSTRUÇÃO DOS ESPINORES DE DIRAC . . . . .	14
<b>3</b>	<b>HELICIDADE DUAL DOS AUTOESPINORES DO OPERADOR CONJUGAÇÃO DE CARGA (ELKO)</b>	<b>18</b>
3.1	A ESTRUTURA DOS ESPINORES ELKO . . . . .	18
3.2	CÁLCULO DA HELICIDADE PARA O ELKO . . . . .	20
3.3	FORMA EXPLÍCITA PARA O ELKO . . . . .	22
3.4	O DUAL DO ELKO . . . . .	24
3.5	RELAÇÕES DE ORTONORMALIDADE E COMPLETEZA PARA O ELKO	28
3.6	SOMAS DE SPIN E PROJEÇÃO PARA O ELKO . . . . .	30
<b>4</b>	<b>DINÂMICA DO CAMPO: EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON E DIRAC ATUANDO NOS ESPINORES ELKO</b>	<b>33</b>
4.1	ELKO NÃO SATISFAZ A A EQUAÇÃO DE DIRAC . . . . .	33
4.2	ELKO SATISFAZ A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON . . . . .	35
4.3	TRANSFORMAÇÃO NÃO UNITÁRIA . . . . .	36
<b>5</b>	<b>ELKO E A RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL (VSR)</b>	<b>38</b>
5.1	OS GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO E ESTRUTURA ALGÉBRICA DA VSR . . . . .	38
5.2	REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DA ÁLGEBRA DOS GRUPOS SIM(2) E HOM(2) . . . . .	40
5.3	INVARIANTES DE CASIMIR DO GRUPO ISIM(2) . . . . .	42
5.4	ESTADOS DE UMA PARTÍCULA . . . . .	42
5.5	ABORDAGEM DO ELKO PELA ÁLGEBRA DA VSR . . . . .	44
5.5.1	<b>Invariância das Somas de Spin para o “VSR ELKO”</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>INTERPRETAÇÃO DE PARTÍCULA E DIMENSÃO DE MASSA</b>	<b>47</b>

6.1	ESTABELENCENDO A ENERGIA DO VÁCUO E AS ESTATÍSTICAS FERMIÔNICAS: RELAÇÕES ENTRE OS OPERADORES $c_\beta$ e $c_\beta^\dagger$ . . . . .	47
6.2	O PROPAGADOR PARA O ELKO . . . . .	51
6.3	O PROPAGADOR PARA O ELKO NA AUSÊNCIA DE UMA DIREÇÃO PRIVILEGIADA . . . . .	54
6.4	INTERAÇÕES PERMITIDAS PARA O ELKO . . . . .	57
<b>7</b>	<b>ESTRUTURA DE LOCALIDADE</b>	<b>58</b>
7.1	ANTICOMUTADOR CAMPO-MOMENTO . . . . .	58
7.2	ANTICOMUTADOR CAMPO-CAMPO E MOMENTO-MOMENTO . . . . .	60
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>RELAÇÕES BI-ORTONORMAIS PARA OS ESPINORES <math>\lambda(p)</math></b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>AS COMPONENTES ESPINORIAIS</b>	<b>69</b>
B.1	$\phi_L^\pm(\mathbf{0})$ e $\phi_R^\pm(\mathbf{0})$ . . . . .	69

# 1 INTRODUÇÃO

O século XX pode ser considerado como a era das Teorias Quânticas de Campos (*TQC*). A maioria dos conceitos surgiram na primeira metade de tal século, após a unificação da Mecânica Quântica, Relatividade Especial e Teoria Clássica de Campos. Na segunda metade do século XX, diversas aplicações foram analisadas e estudadas em detalhe. Isso levou à criação do Modelo Padrão (*Standard Model*) da física de partículas, o qual descreve todas as interações conhecidas da natureza exceto a interação gravitacional [1, 2].

Mesmo com o sucesso da *TQC* existem fenômenos que não são acomodados no escopo da teoria. Assim, por exemplo, é natural se tentar estender a estrutura já conhecida para explorar a natureza das partículas que compõe a matéria escura [3]. O caminho que seguiremos aqui é baseado na visão de Wigner onde as partículas são descritas como representações irredutíveis do grupo de Poincaré, e são rotuladas pelos invariantes de Casimir do grupo.

A essência do presente trabalho é analisar algebricamente todas as propriedades de um novo espinor e a quantização do campo associado à partícula fermiônica “escura” de spin 1/2 chamada ELKO, proposta por Ahluwalia e Grumiller em 2003 [4, 5]. ELKO é um acrônimo alemão para *Eigenspinoren des Ladungsquajugationsoperator*, cuja tradução é Autoespinor do Operador Conjugação de Carga ou também conhecido como Autoespinor de Helicidade Dual do Operador Conjugação de Carga.

A origem do ELKO foi uma descoberta teórica inesperada. À época, os autores estavam interessados em estudar e entender os espinores de Majorana. Historicamente os espinores de Majorana foram descobertos no ano de 1937 por Ettore Majorana. Porém não se sabe ao certo a origem de seu surgimento. O conjunto usual dos espinores de Majorana é composto de dois biespinores, ambos possuindo autovalores positivos via atuação do operador conjugação de carga

$$C\psi_M(\mathbf{p}) = +\psi_M(\mathbf{p}), \quad (1.1)$$

este é denominado espinor autoconjugado.

Portanto, de forma a tentar estender esses espinores a um conjunto completo de autoespinores do operador conjugação de carga surgem os ELKOS, os quais veremos que

sob a atuação de tal operador é possível encontrar

$$C\lambda(\mathbf{p}) = \pm\lambda(\mathbf{p}), \quad (1.2)$$

um espinor que possui autovalores  $\pm 1$  sob a atuação de operador conjugação de carga, um conjunto completo com quatro espinores, dois autoconjugados (autovalor  $+1$ ) e dois anti autoconjugados (com autovalor  $-1$ ). No tocante à helicidade dual de tais espinores veremos que é uma propriedade intrínseca do ELKO, ao se definir a helicidade de uma das componentes espinoriais como positiva ou negativa, a outra componente automaticamente possui helicidade oposta. Isto está relacionado com algumas propriedades do termo de fase, que estudaremos com maior rigor e detalhe no Capítulo 3.

Por algumas razões óbvias, veremos que  $\lambda(\mathbf{p})$  não é autoespinor do operador  $\gamma_\mu p^\mu$ , ou seja, o ELKO assim como o espinor de Majorana não satisfaz a equação de Dirac. Isso será devido ao fato de que as componentes espinoriais do ELKO não estão relacionadas entre si pela simetria de paridade, mas sim com as matrizes de Pauli. De uma simples maneira demonstraremos que o ELKO obedece a equação de Klein-Gordon, assim como esperado para todo campo quântico. Constataremos que nas somas de spin do ELKO há o surgimento de um determinado termo, denotado por  $\mathcal{G}(\phi)$ , o qual não é invariante por transformações de Lorentz. Desta maneira, vamos recorrer à uma álgebra da chamada *Very Special Relativity* ou simplesmente VSR, proposta por Cohen e Glashow em 2006. Estudaremos toda sua estrutura algébrica para poder entendê-la e veremos que a mesma acomodará, sem perda de generalidade, os espinores ELKO. Assim, através desta álgebra, conseguimos mostrar a invariância das somas de spin por todos os geradores.

Apesar de estarmos tratando de um férmion, veremos que seu propagador guarda muita similaridade com o do campo escalar, e desta forma concluiremos que a dimensão de massa para o campo do ELKO é 1, diferente da dimensão de massa  $3/2$  esperada para os campos espinoriais de spin  $1/2$ . Isso implica que o campo associado ao ELKO não interage com o campo eletromagnético, por ser eletricamente neutro via atuação do operador conjugação de carga, e as interações com todas as partículas do Modelo Padrão, exceto com o bóson de Higgs, não são renormalizáveis perturbativamente, ou suprimidas [6]. Finalmente, após a construção dos operadores de campo discutiremos a localidade. Faremos uso das relações fermiônicas de anticomutação entre operadores de campo e densidade de momento, como critério para a localidade do campo. Não obstante, veremos que a localidade do ELKO possui uma forte dependência com o operador  $\mathcal{G}(\phi)$ , o mesmo das somas de spin.

No Capítulo 2 mostraremos um pouco da álgebra do grupo de Lorentz. A partir daí construiremos os operadores de *boost* para cada tipo de componente espinorial, as que se transformam como mão direita e as de mão esquerda. Aproveitando esta álgebra mostraremos uma construção da equação de Dirac e conseqüentemente iremos determinar

uma das realizações do operador conjugação de carga,  $C$ .

O Capítulo 3 está reservado para um estudo bem detalhado da estrutura formal do ELKO, assim como a escolha da fixação das fases para que ele seja de fato um autoespinor do operador conjugação de carga com autovalores  $\pm 1$ . De uma forma algébrica bastante rigorosa, construiremos o espinor dual associado ao ELKO, em particular, perceberemos que se o dual para o ELKO seguir a mesma construção que o dual de Dirac, não conseguiremos uma norma não nula real e invariante por transformações de Lorentz. Por fim, através de simples cálculos será mostrada a existência da helicidade dual para as componentes deste espinor, as relações de ortonormalidade, completeza e as somas de spin. Como dito, um termo responsável pela quebra de simetria de Lorentz é oriundo das somas de spin. Sendo assim, vamos analisar quais implicações físicas isso pode trazer para a teoria.

O Capítulo 4 é reservado para o estudo da dinâmica do ELKO, faremos então a construção e análise do operador que aniquila tal espinor. Veremos que o ELKO não satisfaz a equação de Dirac, e tal fato acontece por razões óbvias no contexto a ser discutido.

No Capítulo 5 apresentaremos a *Very Special Relativity*, que faz uso de um subgrupo do grupo de Lorentz. A VSR basicamente é moldada de forma a retirar todas as simetrias discretas,  $P, T, CP$  e  $CT$  do grupo de Lorentz, rearranjando-se os geradores da álgebra,  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{K}$ , de maneira que quando introduzidas as simetrias discretas retorna-se novamente ao grupo de Lorentz completo. Esse subgrupo de Lorentz é importante pois por ele poderemos estudar teorias as quais violam Lorentz, ou violam alguma das simetrias discretas citadas anteriormente. Desta maneira mostraremos que um novo operador de *boost* é construído dentro dessa álgebra, pelas simples razões de que os geradores da VSR são outros. Com respeito aos invariantes de Casimir da VSR veremos que um deles é preservado, a massa, enquanto outro invariante não tem um significado físico até então.

No capítulo 6, construiremos os operadores de campo quântico. Para isso, primeiramente vamos construir a Hamiltoniana e estabelecer que tipo de relação os operadores de criação e aniquilação de partículas devem obedecer, a fim de manter a energia do sistema positivo definida. Assim, estabeleceremos a relação de anticomutação para tais operadores, como no caso de Dirac. Veremos que na construção do propagador do campo quântico associado ao ELKO será herdado o termo  $\mathcal{G}(\phi)$  advindo das somas de spin. Desta forma vamos ver quais consequências tal fator poderá trazer para o propagador. Finalmente, faremos uma breve discussão sobre os possíveis acoplamentos permitidos para o ELKO.

Por fim, no Capítulo 7 partiremos das relações básicas entre os operadores de campo e densidade de momento, para analisar a localidade do campo quântico associado ao ELKO. Veremos que o termo  $\mathcal{G}(\phi)$  estará presente em tais relações, e desta forma o campo será local se este termo for identicamente nulo quando integrado em todo o espaço. Caso contrário existirá uma dependência espacial.

## 2 PRELÚDIO: O SURGIMENTO DO OPERADOR CONJUGAÇÃO DE CARGA

### 2.1 A CONSTRUÇÃO DOS ESPINORES DE DIRAC

Sabemos que os espinores de Dirac e Majorana podem ser escritos na representação de Weyl como

$$\psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_R(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde o espinor massivo  $\phi_R(\mathbf{p})$  se transforma como objeto  $(1/2,0)$  no espaço de representações e o espinor massivo  $\phi_L(\mathbf{p})$  como um objeto  $(0,1/2)$ . Pensando em um *boost* de Lorentz arbitrário, por definição a componente de mão direita se transforma da seguinte maneira [7]

$$\phi_R(\mathbf{p}) \longrightarrow e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}}\phi_R(\mathbf{0}), \quad (2.2)$$

e para a componente de mão esquerda a transformação é definida como

$$\phi_L(\mathbf{p}) \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}}\phi_L(\mathbf{0}). \quad (2.3)$$

Analisando a equação (2.2), lembrando que o mesmo raciocínio pode ser tomado para (2.3), podemos escrevê-la em termos do parâmetro de *boost*,  $\varphi$ , desta maneira temos

$$\phi_R(\mathbf{p}) = \left[ \text{I} \cosh \frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} \sinh \frac{\varphi}{2} \right] \phi_R(\mathbf{0}), \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário na direção do *boost* de Lorentz. Em (2.4), suporemos que o espinor original se refere a uma partícula em repouso,  $\phi_R(\mathbf{0})$ , e o espinor transformado,  $\phi_R(\mathbf{p})$ , a uma partícula com um dado momento arbitrário  $\mathbf{p}$ . Pela análise dos operadores de *boost* em [7] podemos escrever

$$\phi_R(\mathbf{p}) = \frac{E + m + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{[2m(E + m)]^{\frac{1}{2}}} \phi_R(\mathbf{0}). \quad (2.5)$$

De maneira semelhante  $\phi_L(\mathbf{p})$  pode ser escrito como

$$\phi_L(\mathbf{p}) = \frac{E + m - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{[2m(E + m)]^{\frac{1}{2}}} \phi_L(\mathbf{0}). \quad (2.6)$$

Podemos ainda escrever esses operadores da seguinte maneira [7]

$$\kappa^{(1/2,0)} = \exp\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right), \quad (2.7)$$

$$\kappa^{(0,1/2)} = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right), \quad (2.8)$$

em que o momento das equações acima é dado por  $\mathbf{p} = p \cdot \hat{p}$  e o parâmetro de *boost* é definido por  $\cosh \varphi = \frac{E}{m}$ ,  $\sinh \varphi = \frac{p}{m}$  e  $\hat{\varphi} = \hat{p}$ , onde  $m$  se refere à massa.

Com um pouco de manipulação algébrica das equações (2.5) e (2.6), usando o fato que as componentes dos espaços de representação (1/2,0) e (0,1/2) se transformam por paridade e quando a partícula está em repouso não podemos definir se seu spin é de mão direita ou mão esquerda, portanto  $\phi_R(\mathbf{0}) = \phi_L(\mathbf{0})$ , pode-se escrever essas relações da seguinte maneira

$$\phi_R(\mathbf{p}) = \frac{E + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m} \phi_L(\mathbf{p}), \quad (2.9)$$

$$\phi_L(\mathbf{p}) = \frac{E - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m} \phi_R(\mathbf{p}). \quad (2.10)$$

Devemos atentar para o fato de que o mesmo não será válido para o ELKO, uma vez que para este caso as componentes não estarão relacionadas por paridade. Também podemos escrever na forma matricial as duas últimas equações, obtendo

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ p_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

As matrizes Gamma de Dirac, na representação de Weyl são escritas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

assim, a equação (2.11) é

$$(\gamma_0 p^0 + \gamma_i p^i - m)\psi(\mathbf{p}) = 0, \quad (2.13)$$

ou ainda de uma forma mais compacta

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(\mathbf{p}) = 0, \quad (2.14)$$

que é a equação de Dirac no espaço dos momentos.

A construção da equação de Dirac, aqui mostrada, carrega um aspecto da mecânica quântica que possibilita que as duas representações do espaço de Weyl possam ter uma fase relativa, pela maneira matemática que a equação foi construída e também via as propriedades das transformações de Lorentz atuando nos espinores de Weyl [5].



Até aqui nossa tarefa foi a construção da Equação de Dirac, porém levamos em conta apenas os *boosts* de Lorentz. Vale lembrar que as transformações mais gerais de Lorentz são compostas por rotações e *boosts*. Denotemos  $\mathbf{K}$  os geradores de *boosts* e  $\mathbf{J}$  geradores de rotações. De uma maneira explicita, a relação de comutação entre esses geradores pode ser calculada

$$[K_x, K_y] = -iJ_z \quad \text{e permutações cíclicas,} \quad (2.15)$$

$$[J_x, K_x] = 0 \quad \text{etc,} \quad (2.16)$$

$$[J_x, K_y] = iK_z \quad \text{e permutações cíclicas.} \quad (2.17)$$

Facilmente vemos que  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{J}$  juntos não formam um grupo fechado assim como os geradores de rotação  $\mathbf{J}$

$$[J_x, J_y] = iJ_z \quad \text{e permutações cíclicas.} \quad (2.18)$$

Podemos então, com esses 6 geradores  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{J}$  definir dois novos geradores [7]

$$\left. \begin{array}{l} SU(2)_A: \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}) \\ SU(2)_B: \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}) \end{array} \right\}, \quad (2.19)$$

de tal forma que as relações de comutação para essa nova composição de geradores são

$$[A_x, A_y] = iA_z \quad \text{e permutações cíclicas,} \quad (2.20)$$

$$[B_x, B_y] = iB_z \quad \text{e permutações cíclicas,} \quad (2.21)$$

$$[A_i, B_j] = 0 \quad \text{para } i, j = x, y, z. \quad (2.22)$$

Isso mostra que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , cada um deles, agora forma um grupo  $SU(2)$  e esses dois grupos fecham uma álgebra [7]. O grupo de Lorentz é essencialmente  $SU(2) \otimes SU(2)$  e os espinores se transformam de maneira bem definida. Serão rotulados por dois autovalores  $(j, j')$  o primeiro corresponderá a  $\mathbf{A}$  e o segundo a  $\mathbf{B}$ . Dessa forma podemos escrever da seguinte maneira

$$\text{Tipo 1: } (1/2, 0): \quad \mathbf{J}^{1/2} = \sigma/2, \quad \mathbf{K}^{1/2} = -i\sigma/2, \quad (2.23)$$

$$\text{Tipo 2: } (0, 1/2): \quad \mathbf{J}^{1/2} = \sigma/2, \quad \mathbf{K}^{1/2} = i\sigma/2. \quad (2.24)$$

Devemos observar que esses seis parâmetros são referentes a três ângulos, que estão associados às rotações, e três velocidades, às quais estão relacionados os *boosts* de Lorentz. Pelas transformações de Lorentz, existem dois tipos de espinores com duas componentes cada, transformando-se de acordo com o Tipo 1 e Tipo 2, que correspondem às representações

$(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  do grupo de Lorentz.

Imaginemos agora o efeito de um operador que quando atuar em um espinor conjugue sua carga

$$\psi_c(\mathbf{p}) = C\psi(\mathbf{p}). \quad (2.25)$$

Eis, então, que do âmago dessa estrutura surge uma nova simetria, a conjugação de carga cujo operador associado é dado por [5, 8]

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & i\Theta \\ -i\Theta & 0 \end{pmatrix} K = \gamma_2 K. \quad (2.26)$$

Na expressão (2.26) o operador  $K$  tem a finalidade de tomar o complexo conjugado de qualquer quantidade que esteja a sua direita e  $\Theta$  é o operador de reversão temporal de Wigner, que para a representação de spin  $1/2$  é dado por

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Vimos assim, uma das realizações do operador conjugação de carga, a qual será usada neste trabalho daqui em diante.

### 3 HELICIDADE DUAL DOS AUTOESPINORES DO OPERADOR CONJUGAÇÃO DE CARGA (ELKO)

No capítulo anterior citamos o operador conjugação de carga  $C$ . O passo seguinte é a obtenção dos autoespinores desse operador. Tais espinores recebem o nome de ELKO, proposto por Ahluwalia e Grumiller. Os autores não tinham a intenção de propor nenhum candidato a matéria escura. Entretanto, foi descoberto que o ELKO possuía dimensão de massa 1, ao invés de 3/2 e portanto não poderia entrar nos dubletos do modelo padrão. Mais além, o ELKO possui uma autointeração renormalizável, uma desejável propriedade da matéria escura. Essas características fazem do ELKO um candidato interessante a tal.

Os espinores de Majorana são escritos como

$$\psi_M(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\sigma_2 \phi_L^*(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

e obedecem a condição de Majorana, que é

$$C\psi_M(\mathbf{p}) = +\psi_M(\mathbf{p}), \quad (3.2)$$

isto é, são espinores autoconjugados via atuação do operador conjugação de carga, pois possuem autovalor positivo. Podemos notar que  $\phi_L(\mathbf{p})$  se transforma como um espinor de mão esquerda ao passo que  $-\sigma_2 \phi_L^*(\mathbf{p})$  se transforma como um espinor de mão direita [4, 5].

#### 3.1 A ESTRUTURA DOS ESPINORES ELKO

Começaremos aqui falando sobre algumas propriedades dos operadores de *boost*, e do operador de Wigner (2.27), já definido anteriormente. Na representação  $(1/2,0) \oplus (0,1/2)$  com a estrutura completa do grupo de Lorentz podemos dizer que existe a relação de paridade entre os operadores de *boost*  $\kappa^{(1/2,0)}$  e  $\kappa^{(0,1/2)}$ , pois, desta maneira podemos construir  $\kappa^{(1/2,0)}$  a partir de  $\kappa^{(0,1/2)}$  apenas pela troca de sinal [5, 9]. Dados os operadores de *boosts* podemos ver que

$$(\kappa^{(1/2,0)})^{-1} = (\kappa^{(0,1/2)})^\dagger, \quad (\kappa^{(0,1/2)})^{-1} = (\kappa^{(1/2,0)})^\dagger. \quad (3.3)$$

Uma consideração que podemos fazer sobre uma característica das matrizes de Pauli é a seguinte

$$\sigma_2 \sigma_i \sigma_2^{-1} = -\sigma_i^*. \quad (3.4)$$

Tal expressão pode ser escrita através do operador de Wigner

$$\Theta \sigma_i \Theta^{-1} = -\sigma_i^*, \quad (3.5)$$

e as duas últimas equações acima nos permitem introduzir a chamada “mágica das matrizes de Pauli” [10]. É através desta “mágica das matrizes de Pauli” que a construção do ELKO de fato começa. Quando conjugamos as equações (2.2) e (2.3) e em seguida multiplicamos pela esquerda por  $\Theta$ , essa sequência de manipulações nos leva à <sup>1</sup>

$$\Theta \phi_R^*(\mathbf{p}) = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \Theta \phi_R^*(\mathbf{0}), \quad (3.6a)$$

$$\Theta \phi_L^*(\mathbf{p}) = \exp\left(+\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \Theta \phi_L^*(\mathbf{0}). \quad (3.6b)$$

Isto é, essas observações quando combinadas implicam

- Se  $\phi_L(\mathbf{p})$  se transforma como um espinor de mão esquerda então  $(\zeta_\lambda \Theta) \phi_L^*(\mathbf{p})$  se transforma como um espinor de mão direita, com a fase  $\zeta_\lambda$  ainda não especificada.
- Se  $\phi_R(\mathbf{p})$  se transforma como uma componente de mão direita, então  $(\zeta_\rho \Theta)^* \phi_R^*(\mathbf{p})$  se transforma como mão esquerda, com a fase  $\zeta_\rho$  ainda não especificada.

Devemos enfatizar a importância da equação (3.5), pois agora estabelecemos através de (3.6a) e (3.6b) como as componentes espinoriais se transformam ou estão relacionadas. Podemos dizer que elas se transformam através das matrizes de Pauli, este é o único vínculo estabelecido entre elas. Para isso não fizemos alusão a nenhum operador de simetria, tal como a simetria de paridade, assim como é o caso para a construção dos espinores de Dirac.<sup>2</sup> Aqui é nosso dever deixar claro que uma vez que construímos um espinor dentro do grupo *Full Lorentz* estaremos construindo um espinor de Dirac. Partindo dos espinores tipo Majorana, porém escrevendo-os de uma forma geral com uma fase arbitrária, temos então que os espinores que pertencem a esse espaço de representações <sup>3</sup>  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  são

$$\lambda(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (\zeta_\lambda \Theta) \phi_L^*(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_R(\mathbf{p}) \\ (\zeta_\rho \Theta)^* \phi_R^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

<sup>1</sup>É aqui nosso dever observar que, como até então não introduzimos a simetria de paridade ou reversão temporal, estamos em um subgrupo do grupo de Lorentz. Aqui, estamos apenas nos baseando no operador conjugação de carga e *boosts*.

<sup>2</sup>Novamente, é muito importante e sutil a colocação feita sobre a maneira que as matrizes de Pauli fazem a ligação entre as componentes do ELKO, pois, para o caso de Dirac é imposto que o elo entre as componentes espinoriais seja o operador Paridade.

<sup>3</sup>Aqui, vamos tratar dos espinores  $\lambda(\mathbf{p})$  apenas. A física relacionada a  $\rho(\mathbf{p})$  é a mesma essencialmente.

sendo aqui  $\zeta_\lambda$  e  $\zeta_\rho$  fases arbitrárias a serem determinadas posteriormente. Limitando-nos apenas a autovalores reais, esses espinores se tornam autoespinores do operador conjugação de carga com autovalores iguais à  $\pm 1$  (obedecendo a condição de Majorana, porém de uma forma mais completa) se as fases tiverem os valores  $\pm i$ , levando então a

$$C\lambda(\mathbf{p}) = \pm\lambda(\mathbf{p}). \quad (3.8)$$

Faremos uma distinção entre os espinores que carregam autovalores “+” e autovalores “−”, chamaremos de espinores *Self-Conjugate* ou *Autoconjugados* os que carregam autovalores “+”, espinores que serão representados por  $\lambda^S(\mathbf{p})$  e os espinores que possuem autovalores “−” recebendo o nome de espinores *Anti-Self-Conjugate* ou *anti autoconjugados* e serão representados por  $\lambda^A(\mathbf{p})$ . Ou seja, da observação acima teremos as seguintes relações

$$C\lambda^S(\mathbf{p}) = +\lambda^S(\mathbf{p}), \quad C\lambda^A(\mathbf{p}) = -\lambda^A(\mathbf{p}). \quad (3.9)$$

Para obter a forma explicita para os espinores  $\lambda^S(\mathbf{p})$  vamos escrevê-los no referencial de repouso e depois aplicar o operador de *boost* [5]. Então a princípio temos

$$\lambda^S(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} +i\Theta\phi_L^*(\mathbf{0}) \\ \phi_L(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \lambda^A(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -i\Theta\phi_L^*(\mathbf{0}) \\ \phi_L(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

### 3.2 CÁLCULO DA HELICIDADE PARA O ELKO

É importante relatar aqui que o operador helicidade é definido como um produto interno entre o operador de projeção do spin na direção do momento [11], em outras palavras o conceito de helicidade nos dá a informação sobre a projeção do spin na direção do movimento da partícula. Para isso, usando as matrizes de Pauli,  $\sigma_i$ , com  $i = x, y$  e  $z$  e o vetor unitário para o momento  $\hat{p} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ , a equação de autovalor para a helicidade fica dada por

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} |\phi_{R/L}\rangle = \pm |\phi_{R/L}\rangle, \quad (3.11)$$

onde o operador é escrito como  $\vec{\sigma} \cdot \hat{p} := \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z$  e o vetor unitário  $\hat{p}$  parametrizado em coordenadas esféricas é  $\hat{p} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ . Desta maneira temos uma equação que define o operador helicidade e seus respectivos autovalores e autovetores [11]. Para encontrar a helicidade do ELKO faremos a seguinte escolha

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_L^\pm(\mathbf{0}) = \pm \phi_L^\pm(\mathbf{0}). \quad (3.12)$$

Resolvendo explicitamente para a helicidade positiva temos

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+ \\ \phi_{L2}^+ \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+ \\ \phi_{L2}^+ \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

o que, após alguns simples cálculos envolvendo relações trigonométricas, leva-nos a

$$\phi_L^+(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Fazendo o mesmo procedimento para a helicidade negativa temos

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^- \\ \phi_{L2}^- \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \phi_{L1}^- \\ \phi_{L2}^- \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

e desta forma

$$\phi_L^-(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

A justificativa da aparição do termo de massa nas equações (3.14) e (3.16) são dadas no Apêndice B. De uma maneira um pouco mais simples podemos agora calcular os autoestados de helicidade para o espinor que se tranforma como mão direita  $\Theta \phi_L^{\pm*}$ . Assim, conjugando a equação (3.12) temos

$$\sigma^* \cdot \hat{p} [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^* = \pm [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^*. \quad (3.17)$$

Substituindo  $\sigma^*$  pela equação (3.5)

$$\Theta \sigma \cdot \Theta^{-1} \hat{p} [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^* = \mp [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^*, \quad (3.18)$$

e usando o fato de que  $\Theta^{-1} = -\Theta$ , encontramos

$$-\Theta \sigma \cdot \Theta \hat{p} [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^* = \mp [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^*, \quad (3.19)$$

ou ainda

$$\Theta^{-1} \sigma \cdot \Theta \hat{p} [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^* = \mp [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^*. \quad (3.20)$$

O passo final é multiplicar pela esquerda ambos os lados da equação (3.20) por  $\Theta$ , pois assim chegaremos a conclusão que

$$\sigma \cdot \hat{p} \Theta [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^* = \mp \Theta [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^*. \quad (3.21)$$

Podemos observar então que  $\Theta [\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})]^*$  possui helicidade oposta a  $\phi_L^{\pm}(\mathbf{0})$ , resultado esse que contrasta com os espinores de Dirac pois, neste último caso as duas componentes possuem mesma helicidade [5].

A maneira mais comum de se representar os espinores de Majorana é como um

conjunto de dois bi-espinores, ambos possuindo autovalores iguais a 1 sob a atuação do operador conjugação de carga [12]. Esse é o conjunto de espinores autoconjugados. No entanto como mostrado em [5, 9], também existe um conjunto de espinores anti autoconjugados. O espinor de Majorana escrito em (3.1) é um espinor do tipo autoconjugado sob atuação do operador conjugação de carga. Para  $\phi_L$  existem duas possibilidades de helicidade, helicidade positiva e helicidade negativa [5, 9]. Agora vamos fazer uma análise para o ELKO. Uma vez que para esse caso  $i\Theta = \sigma_2$  podemos escrever

$$\lambda(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \pm\sigma_2\phi_L^*(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Temos uma liberdade na escolha da helicidade das componente de  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  de  $\lambda(\mathbf{p})$ . Nesse momento estamos interessados em observar que ao fixarmos as helicidades de  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  como sendo as mesmas,  $\lambda(\mathbf{p})$  será um objeto de uma única helicidade se tornando idêntico aos espinores de Majorana [12]. Essa escolha, contrariaria os resultados obtidos em (3.12) e (3.21). O que acontece é que para o ELKO começamos com a componente  $(0, 1/2)$  de  $\phi_L(\mathbf{p})$  escolhendo uma determinada helicidade; já quando vamos construir a componente  $(1/2, 0)$ ,  $\pm i\Theta\phi_L^*(\mathbf{p})$ , percebemos uma mudança da helicidade para a componente  $(1/2, 0)$  acontecendo naturalmente. Isso é notado em (3.21) [5, 12], e por essa razão o ELKO é dito ser um objeto com Helicidade Dual.

### 3.3 FORMA EXPLÍCITA PARA O ELKO

Após estudar a estrutura formal do ELKO na seção anterior, nosso próximo passo é a construção de sua forma completa. Começaremos primeiramente tratando os espinores em seu referencial de repouso. Temos dois espinores autoconjugados

$$\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} +i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} +i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

e as duas representações restantes são para os anti autoconjugados

$$\lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Façamos uma pausa para entender um pouco melhor a forma com que esses espinores foram escritos. As quantidades entre parênteses  $(\pm, \mp)$  estão relacionadas com a helicidade, a primeira entrada é referente a helicidade da componente que se transforma como mão direita, isto é  $(1/2, 0)$  enquanto a segunda entrada refere-se a helicidade da componente de

mão esquerda  $(0, 1/2)$ . Podemos também de uma forma mais geral, aplicar nos espinores os operadores de *boost* de Lorentz representados pela forma matricial abaixo

$$\lambda_{(h,-h)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \kappa^{(1/2,0)} & 0 \\ 0 & \kappa^{(0,1/2)} \end{pmatrix} \lambda_{(h,-h)}(\mathbf{0}). \quad (3.25)$$

Agora, se fizermos uma pequena mudança nos operadores de *boost* trocando  $\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}$  por  $p \cdot \hat{\sigma} \hat{p}$ , pois  $\mathbf{p} = p \hat{p}$ , e aplicarmos esse operador nas equações (3.23) e (3.24) temos

$$\lambda(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( \mathbf{I} - \frac{p \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Desta maneira, após a atuação de  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p}$  nas componentes do espinor, podemos escrever de uma forma bem completa os espinores em termos das helicidades e do momento

$$\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( 1 - \frac{p}{E+m} \right) \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0}), \quad (3.27)$$

além de

$$\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( 1 + \frac{p}{E+m} \right) \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{0}). \quad (3.28)$$

Devemos enfatizar algo que merece nossa atenção: os dois fatores que antecedem a quantidade  $\lambda^S(\mathbf{0})$  acima não são mais os operadores de *boost* de Lorentz que aparecem em (3.25), pois pela substituição feita em (3.26) a quantidade que aparece multiplicando o espinor deixou de ser um operador matricial, sendo agora essa quantidade um número que leva em conta o módulo do momento da partícula.

Da mesma maneira podemos proceder com os cálculos para encontrar os  $\lambda^A(\mathbf{p})$ . Assim, teremos os espinores anti autoconjugados após o *boost* [4, 5]

$$\lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( 1 - \frac{p}{E+m} \right) \lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{0}), \quad (3.29)$$

$$\lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( 1 + \frac{p}{E+m} \right) \lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{0}). \quad (3.30)$$

Portanto, explicitamos aqui como ficam os espinores ELKO com a atuação dos operadores de *boost* de Lorentz.



### 3.4 O DUAL DO ELKO

Sabemos que para Dirac o correspondente dual é dado por [7]

$$\bar{\psi}(\mathbf{p}) = \psi^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0, \quad (3.31)$$

onde a quantidade  $\bar{\psi}(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p})$  é um invariante sob transformações de Lorentz ou seja, um escalar. Se tomarmos o mesmo formato do dual de Dirac para o ELKO,  $\bar{\lambda}(\mathbf{p}) = \lambda^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0$  veremos que este não possui uma norma desejada (o apêndice A foi reservado para todos detalhes e contas). Explicitamente, se o dual do ELKO massivo tiver a mesma construção que de Dirac teremos uma norma nula [13]

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(\pm,\mp)}^S(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.32a)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(\pm,\mp)}^A(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.32b)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(\mp,\pm)}^A(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.32c)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(\pm,\mp)}^A(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.32d)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(\pm,\mp)}^S(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.32e)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(\mp,\pm)}^S(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.32f)$$

Teremos também as normas imaginárias para os seguintes casos [13]

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(\mp,\pm)}^S(\mathbf{p}) = \mp 2im, \quad (3.33a)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(\mp,\pm)}^A(\mathbf{p}) = \pm 2im. \quad (3.33b)$$

Desta maneira temos um grande problema inicial para definir o dual dos espinores ELKO. Vamos tomar um desses espinores de forma genérica e chamá-lo de  $\varrho(\mathbf{p})$ . Devemos buscar um dual que chamaremos de  $\bar{\varrho}_\alpha(\mathbf{p})$ , o qual assegure uma norma real não nula invariante por transformações de Lorentz. Vamos então examinar uma forma bem geral de se escrever o dual

$$\bar{\varrho}_\alpha(\mathbf{p}) \stackrel{def}{=} [\Xi \varrho_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \eta. \quad (3.34)$$

Em (3.35) o operador  $\Xi$  é tal que quando atue em algum 4-espinor de  $\varrho_\alpha(\mathbf{p})$  nos devolva algum espinor  $\varrho_\beta(\mathbf{p})$  que pertença a um dos autoespinores de  $\mathbb{C}$  que estamos analisando. Requeremos apenas que  $\Xi^2 = I$  para que seja um mapa invertível, além de podermos escrever o usual em termos do espinor dual e também para que o dual do dual coincida com o espinor usual. Para o ELKO, os resultados contidos nas equações (3.32a) até (3.32f) nos permitem definir [13]

$$\Xi \stackrel{def}{=} \frac{1}{2m} \left( \lambda_{(+,-)}^S \bar{\lambda}_{(+,-)}^S + \lambda_{(-,+)}^S \bar{\lambda}_{(-,+)}^S - \lambda_{(+,-)}^A \bar{\lambda}_{(+,-)}^A - \lambda_{(-,+)}^A \bar{\lambda}_{(-,+)}^A \right). \quad (3.35)$$

Daqui podemos extrair a informação de que  $\Xi^2 = \mathbf{I}$  e que sua inversa existe. Então de acordo com nosso ponto de partida, (3.35), podemos introduzir a notação para o dual do ELKO como sendo

$$\bar{\lambda}_\alpha(\mathbf{p}) = [\Xi \lambda_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \eta. \quad (3.36)$$

Sendo assim podemos escrever uma relação para o dual do ELKO com uma notação específica [13]. Usando as equações (3.32a) à (3.32f), (3.34a) e (3.34b) atuaremos pela direita com  $\lambda_{(+,-)}^s$  em (3.36), resultando no que se segue

$$\Xi \lambda_{(+,-)}^s(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \lambda_{(-,+)}^s(\mathbf{p}) \underbrace{\bar{\lambda}^s(\mathbf{p})_{(-,+)} \lambda_{(+,-)}^s(\mathbf{p})}_{=2im}, \quad (3.37a)$$

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^s(\mathbf{p}) = -i [\lambda_{(-,+)}^s(\mathbf{p})]^\dagger \eta. \quad (3.37b)$$

Notemos então que a principal função do operador  $\Xi$  é fazer a troca de helicidade. Devemos agora encontrar  $\eta$  para que  $[\lambda_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \eta \lambda_{\alpha'}(\mathbf{p})$  seja invariante sob qualquer transformação arbitrária de Lorentz, onde  $\lambda_\alpha(\mathbf{p})$  é qualquer um dos espinores ELKO [4, 9]. Para que isso seja verdade, as identidades seguintes devem ser válidas

$$[\mathbf{J}, \eta] = 0, \quad \{\mathbf{K}, \eta\} = 0. \quad (3.38)$$

A princípio parece não haver uma solução não trivial para  $\eta$ . Podemos pensar de uma maneira ilustrativa o seguinte: para que  $[\lambda_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \eta \lambda_{\alpha'}(\mathbf{p})$  seja invariante devemos ter a seguinte forma

$$\text{Matriz}_{(1 \times 4)} \times \text{Matriz}_{(4 \times 1)} = \text{Matriz}_{(1 \times 1)}, \quad (3.39)$$

onde uma  $\text{Matriz}_{(1 \times 1)}$  é simplesmente um número, um escalar, invariante sob qualquer transformação de Lorentz, exatamente o que queremos do produto do espinor dual com o usual  $[\lambda_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \eta \lambda_{\alpha'}(\mathbf{p})$ . Podemos começar escrevendo

$$\psi_j^\dagger(\mathbf{p}) \eta \psi_i(\mathbf{p}) = \psi_j^\dagger(\mathbf{0}) (e^{i\mathbf{K}\varphi})^\dagger \eta e^{i\mathbf{K}\varphi} \psi_i(\mathbf{0}). \quad (3.40)$$

Usando o fato de que  $\mathbf{K}^\dagger = -\mathbf{K}$ , vamos escrever a equação acima como

$$\psi_j^\dagger(\mathbf{p}) \eta \psi_i(\mathbf{p}) = \psi_j^\dagger(\mathbf{0}) \eta \psi_i(\mathbf{0}), \quad (3.41)$$

Para o cálculo de  $\eta$ , usaremos as relações de comutação e anticomutação com os geradores do grupo,  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{K}$ , começando por  $\{K_z, \eta\} = 0$ . Para isso, digamos que  $\eta$  é uma matriz qualquer da forma

$$\eta = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & l & m & n \\ p & q & r & s \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Então

$$\{K_z, \eta\} = \begin{pmatrix} -2ia & 0 & 0 & -2id \\ 0 & 2if & 2ig & 0 \\ 0 & 2il & im & 0 \\ -2ip & 0 & 0 & -2is \end{pmatrix} = 0. \quad (3.43)$$

Pela identificação dos elementos do anticomutador com a matriz nula 0, temos que

$$a = d = f = g = l = m = p = s = 0. \quad (3.44)$$

Com isso conseguimos eliminar alguns termos de  $\eta$

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & b & c & 0 \\ e & 0 & 0 & h \\ j & 0 & 0 & n \\ 0 & q & r & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Calculando  $\{K_x, \eta\}$  temos

$$\begin{pmatrix} -i(b+e) & -i(a+f) & i(d-g) & i(c-h) \\ -i(f+a) & -i(+b) & i(h-c) & i(g-d) \\ i(p-l) & i(q-j) & i(r+n) & i(m+s) \\ i(j-q) & i(l-m) & i(s+m) & i(r+n) \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Assim, de  $\{K_x, \eta\} = 0$  ficamos com

$$b = -e \quad c = h \quad q = j \quad r = -n. \quad (3.47)$$

Por último, faremos  $\{K_y, \eta\}$ , ou seja

$$\begin{pmatrix} b-e & 0 & 0 & c-h \\ 0 & -e+b & -h+c & g+d \\ 0 & -j+q & -n+r & 0 \\ q-j & 0 & 0 & r-n \end{pmatrix} = 0, \quad (3.48)$$

resultando em

$$b = e = r = n = 0. \quad (3.49)$$

Por fim, usando a relação  $[J_x, \eta] = 0$  temos  $n = 0$ . Logo, a matriz  $\eta$  fica dada por

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Para que  $\eta$  tenha uma norma invariante e real, e também para que as componentes  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  se transformem de maneira simétrica faremos  $c = j = 1$ , o que finalmente resulta em [13]

$$\eta = \gamma_0, \quad (3.51)$$

a menos de uma constante irrelevante. Após todo esse processo para encontrar  $\eta$  precisamos verificar como poderá ser escrita a relação  $[\lambda_\alpha(\mathbf{p})]^\dagger \eta \lambda_{\alpha'}(\mathbf{p})$ . É simples vermos que o dual para o ELKO pode ser expresso, de uma forma bastante útil, como

$$\bar{\lambda}_\alpha(\mathbf{p}) \stackrel{def}{=} i \epsilon_\alpha^\beta \lambda_\beta^\dagger(\mathbf{p}) \gamma_0, \quad (3.52)$$

com o novo símbolo  $\epsilon$  significando  $\epsilon_{(+,-)}^{(-,+)} := -1 = -\epsilon_{(-,+)}^{(+,-)}$ . Esse símbolo deve ser entendido apenas como um compensador de sinal entre as quantidades indicadas pelos índices superiores e inferiores, sem fazer referência alguma a qualquer tipo de métrica para subir ou descer índices. Vale lembrar que a equação (3.51) vale tanto para espinores autoconjugados quanto anti autoconjugados  $\lambda(\mathbf{p})$ . Assim a equação (3.53) pode ser escrita em sua forma explícita por

$$\bar{\lambda}_{(-,+)}^{S/A}(\mathbf{p}) = i \left[ \lambda_{(+,-)}^{S/A}(\mathbf{p}) \right]^\dagger \gamma_0, \quad (3.53a)$$

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^{S/A}(\mathbf{p}) = -i \left[ \lambda_{(-,+)}^{S/A}(\mathbf{p}) \right]^\dagger \gamma_0. \quad (3.53b)$$

Apenas por comparação, o dual de Dirac pode ser escrito de uma forma equivalente

$$\bar{\psi}(\mathbf{p}) := \delta_h^{h'} \psi_{h'}^\dagger(\mathbf{p}) \gamma_0, \quad (3.54)$$

onde  $\psi(\mathbf{p})$  representa qualquer um dos 4 espinores de Dirac e o símbolo  $\delta_h^{h'}$  é o Delta de Kroncker. Devemos salientar que se usarmos o mesmo procedimento para construir o dual de Dirac chegaremos ao resultado já conhecido para este caso.

### 3.5 RELAÇÕES DE ORTONORMALIDADE E COMPLETEZA PARA O ELKO

De posse do dual do ELKO bem definido, podemos estabelecer as expressões

$$\bar{\lambda}_\alpha^S(\mathbf{p})\lambda_{\alpha'}^S(\mathbf{p}) = 2m\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (3.55a)$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^A(\mathbf{p})\lambda_{\alpha'}^A(\mathbf{p}) = -2m\delta_{\alpha\alpha'}. \quad (3.55b)$$

Calcularemos a equação (3.56a) pois para calcular (3.56b) é apenas necessário repetir o procedimento trocando o espinor autoconjugado pelo anti autoconjugado. Assim

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{(-,+)}^S \gamma_0 \lambda_{(+,-)}^S &= \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix}^\dagger \gamma_0 \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i(\Theta\phi_L^+(\mathbf{0}))^T & \phi_L^{+\dagger}(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix} = \\ &= -i[\Theta\phi_L^+(\mathbf{0})]^T \phi_L^-(\mathbf{0}) + i\phi_L^{+\dagger}(\mathbf{0})\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^*. \end{aligned}$$

Recorrendo às equações (3.14) e (3.16) vamos reescrever  $\phi_L^+(\mathbf{0})$  e  $\phi_L^-(\mathbf{0})$  em termos de senos e cossenos, obtendo

$$\begin{aligned} &i \left[ -i\sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2})e^{\frac{i\phi}{2}} & \cos(\frac{\theta}{2})e^{\frac{-i\phi}{2}} \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2})e^{\frac{-i\phi}{2}} \\ \cos(\frac{\theta}{2})e^{\frac{+i\phi}{2}} \end{pmatrix} \right] + \\ &i \left[ i\sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2})e^{\frac{i\phi}{2}} & \sin(\frac{\theta}{2})e^{\frac{-i\phi}{2}} \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\cos(\frac{\theta}{2})e^{\frac{-i\phi}{2}} \\ -\sin(\frac{\theta}{2})e^{\frac{+i\phi}{2}} \end{pmatrix} \right] = 2m. \quad (3.56) \end{aligned}$$

De modo análogo pode ser mostrada a relação (3.56b). A relação de completeza para o ELKO fica então definida por

$$\frac{1}{2m} \sum_\alpha \left[ \lambda_{(\alpha)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(\alpha)}^S(\mathbf{p}) - \lambda_{(\alpha)}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(\alpha)}^A(\mathbf{p}) \right] = \mathbf{I}. \quad (3.57)$$

Tal relação pode ser mostrada após uma série de cálculos, cujos passos principais são mostrados a seguir.

Como primeiro passo vamos supor, para facilitar os cálculos, que o momento seja

$\mathbf{p} = p_x \hat{x}$ . Então

$$\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = i \left( \frac{E+m}{2m} \right) \begin{pmatrix} i\Theta(\phi_L^-(\mathbf{0}))^* + p_x(\phi_L^-(\mathbf{0})) \\ ip_x\Theta(\phi_L^-(\mathbf{0}))^* + \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} -ip_x(\Theta\phi_L^-(\mathbf{0}))^T + (\phi_L^-(\mathbf{0}))^\dagger & -i(\Theta\phi_L^-(\mathbf{0}))^T + p_x(\phi_L^-(\mathbf{0}))^\dagger \end{pmatrix}.$$

Após realizar a multiplicação obtemos

$$\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = m \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Agora, a próxima etapa é calcular  $\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p})$ , o que após alguns passos se reduz a

$$\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = -i \left( \frac{E+m}{2m} \right) \begin{pmatrix} i\Theta(\phi_L^+(\mathbf{0}))^* + p_x(\phi_L^+(\mathbf{0})) \\ -ip_x\Theta(\phi_L^+(\mathbf{0}))^* + \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \times \\ \begin{pmatrix} ip_x(\Theta\phi_L^+(\mathbf{0}))^T + (\phi_L^+(\mathbf{0}))^\dagger & -i(\Theta\phi_L^+(\mathbf{0}))^T + p_x(\phi_L^+(\mathbf{0}))^\dagger \end{pmatrix}.$$

Após as multiplicações das matrizes, ficamos com

$$\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = -m \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Feito isso, o resultado obtido corresponde apenas à primeira parcela do somatório. Devemos prosseguir agora com os cálculos para os espinores anti autoconjugados. Nesse caso temos

$$\lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -i\Theta(\phi_L^-(\mathbf{0}))^* + p_x(\phi_L^-(\mathbf{0})) \\ -ip_x\Theta(\phi_L^-(\mathbf{0}))^* + \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} ip_x(\Theta\phi_L^-(\mathbf{0}))^T + (\phi_L^-(\mathbf{0}))^\dagger & i(\Theta\phi_L^-(\mathbf{0}))^T + p_x(\phi_L^-(\mathbf{0}))^\dagger \end{pmatrix},$$

e desta maneira

$$\lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) = -m \begin{pmatrix} -1 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Por fim

$$\lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -i\Theta(\phi_L^+(\mathbf{0}))^* - p_x(\phi_L^+(\mathbf{0})) \\ ip_x\Theta(\phi_L^+(\mathbf{0}))^* + \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ip_x(\Theta\phi_L^+(\mathbf{0}))^T + (\phi_L^+(\mathbf{0}))^\dagger & i(\Theta\phi_L^+(\mathbf{0}))^T - p_x(\phi_L^+(\mathbf{0}))^\dagger \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(+,-)}^{\neg A}(\mathbf{p}) = m \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Podemos agora voltar na equação (3.58) e substituir os termos encontrados, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[ m \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \right] \\ + \frac{1}{2m} \left[ m \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \right] = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

A relação acima nos mostra a necessidade da existência dos espinores anti autoconjugados, pois sem eles não conseguiríamos estabelecer a relação de completeza. Para comparação, as relações de ortonormalidade e completeza para os espinores de Dirac são, respectivamente [5, 7]

$$\bar{u}_{h'}(\mathbf{p}) u_h(\mathbf{p}) = 2m \delta_{h'h}, \quad (3.62)$$

$$\bar{v}_{h'}(\mathbf{p}) v_h(\mathbf{p}) = 2m \delta_{h'h}, \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{2m} \sum_{h=\pm 1/2} [u_h(\mathbf{p}) \bar{u}_h(\mathbf{p}) - v_h(\mathbf{p}) \bar{v}_h(\mathbf{p})] = \mathbf{I}. \quad (3.64)$$

### 3.6 SOMAS DE SPIN E PROJEÇÃO PARA O ELKO

Falaremos aqui a respeito da relação existente entre a soma de spin e o operador de onda (operador que aniquila o espinor) associado. Começamos então escrevendo a relação para os espinores autoconjugados

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^{\neg S}(\mathbf{p}) = \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(-,+)}^{\neg S}(\mathbf{p}) + \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(+,-)}^{\neg S}(\mathbf{p}), \quad (3.65)$$

pois como já visto anteriormente podemos destacar

$$\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(+,-)}^{\neg S}(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.66)$$

$$\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{(-,+)}^{\neg S}(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.67)$$

Recorrendo à equação (3.60), o somatório resume-se a

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(\mathbf{p}) = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

De maneira correlata podemos realizar os cálculos para os espinores anti autoconjugados. Usando a equação (3.62) temos

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) = m \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & -1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & -1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

onde podemos definir uma dada matriz  $\mathcal{G}(\phi)$  como sendo

$$\mathcal{G}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 0 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 0 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Desta forma, usando  $\mathcal{G}(\phi)$ , podemos reescrever as relações (3.69) e (3.70) como se segue

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(\mathbf{p}) = m(\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)), \quad (3.71)$$

enquanto para  $\lambda_{\alpha}^A(\mathbf{p})$  temos a seguinte relação para a soma de spin

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) = -m(\mathbf{I} - \mathcal{G}(\phi)). \quad (3.72)$$

Faremos aqui uma breve pausa para uma observação importante a respeito dos resultados obtidos até agora nessa seção. Embora o termo que aparece do lado direito das equações (3.72) e (3.73) seja o operador que aniquila o ELKO, como podemos ver



$$[\mathcal{G}(\phi) - \mathbf{I}] \lambda_\alpha^S(\mathbf{p}) = 0,$$

$$[\mathcal{G}(\phi) + \mathbf{I}] \lambda_\alpha^A(\mathbf{p}) = 0,$$

este não é um operador de onda, pois, não possui dependência temporal. Portanto, devemos destacar que nas somas de spin para o ELKO existe uma dependência com relação a uma determinada direção espacial, contida em  $\mathcal{G}(\phi)$ , portanto podemos dizer que existe a quebra da simetria de Lorentz. Uma vez que as somas de spin aparecem no coração da estrutura do propagador associado ao campo, e estas estão relacionadas com a interpretação de partícula e localidade, veremos que isso afetará na localidade do campo quântico. Para o caso de Dirac temos as seguintes relações

$$\sum_{h=\pm 1/2} u_h(\mathbf{p}) \bar{u}_h(\mathbf{p}) = \gamma_\mu p^\mu + m\mathbf{I}, \quad (3.73)$$

enquanto para os espinores referentes às “antipartículas”,  $v_h(\mathbf{p})$ ,

$$\sum_{h=\pm 1/2} v_h(\mathbf{p}) \bar{v}_h(\mathbf{p}) = \gamma_\mu p^\mu - m\mathbf{I}, \quad (3.74)$$

onde no lado direito das duas últimas equações acima aparece o operador de onda que aniquila os espinores de Dirac, e perfazem a equação de onda. Desta maneira, essa estrutura encontrada para o ELKO contrasta diretamente com o caso de Dirac.

## 4 DINÂMICA DO CAMPO: EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON E DIRAC ATUANDO NOS ESPINORES ELKO

Este capítulo está reservado para analisarmos de uma forma mais ampla e detalhada o comportamento dos espinores  $\lambda_\alpha^S(\mathbf{p})$  e  $\lambda_\alpha^A(\mathbf{p})$  sob a atuação do operador de Dirac  $\gamma_\mu p^\mu$  e do operador d'Alambertiano.

### 4.1 ELKO NÃO SATISFAZ A A EQUAÇÃO DE DIRAC

O operador de Dirac no espaço dos momentos não aniquila  $\lambda(\mathbf{p})$ . Para verificar isso começaremos atuando com  $\gamma_\mu p^\mu$  em um ELKO qualquer

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \left[ E\gamma_0 + p \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \right] \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0}). \quad (4.1)$$

Atentando para as relações (3.17) e (3.21), e após alguma manipulação algébrica, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0}) = \gamma_0 \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0}), \quad (4.2)$$

como consequência podemos escrever (4.2) como

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) (E+p) \gamma_0 \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0}). \quad (4.3)$$

Agora, observando que

$$\gamma_0 \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0}) = -i \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{0}), \quad (4.4)$$

e evocando a relação de dispersão temos a seguinte relação

$$\left(1 - \frac{p}{E+m}\right) (E+p) = \frac{E^2 - p^2 + m(E+p)}{E+m} \quad (4.5)$$

$$= \left(1 + \frac{p}{E+m}\right). \quad (4.6)$$

Finalmente temos

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = -im \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{0}), \quad (4.7)$$

e recorrendo a equação (3.28) temos

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = -im \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}). \quad (4.8)$$

De maneira similar podemos atuar com  $\gamma_\mu p^\mu$  nos outros espinores ELKO, cujo resultado é

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = -im \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}), \quad (4.9a)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = im \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}), \quad (4.9b)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) = -im \lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}), \quad (4.9c)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) = im \lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}). \quad (4.9d)$$

As relações contidas em (4.9a) à (4.9d) também podem ser escritas sob a forma matricial como se segue [5, 12]

$$\begin{pmatrix} \gamma_\mu p^\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\mu p^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_\mu p^\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_\mu p^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) \\ \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) \\ \lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) \\ \lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) \end{pmatrix} - im \mathbf{I} \begin{pmatrix} -\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) \\ \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) \\ \lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) \\ -\lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.10)$$

então de uma maneira mais compacta temos

$$(\gamma_\mu p^\mu \delta_\alpha^\beta + im \mathbf{I} \epsilon_\alpha^\beta) \lambda_\beta^S(\mathbf{p}) = 0, \quad (4.11)$$

$$(\gamma_\mu p^\mu \delta_\alpha^\beta - im \mathbf{I} \epsilon_\alpha^\beta) \lambda_\beta^A(\mathbf{p}) = 0. \quad (4.12)$$

Nas equações (4.11) e (4.12) o símbolo  $\delta_\alpha^\beta$  é responsável por fazer a troca da helicidade do espinor que aparece à sua direita e  $\epsilon_\alpha^\beta$  é definido como anteriormente. A presença de  $\delta_\alpha^\beta$  e  $\epsilon_\alpha^\beta$  nestas equações mostra que o ELKO não satisfaz a equação de Dirac. Sabemos que os espinores de Dirac, no espaço dos momentos, são aniquilados pelo operador  $(\gamma_\mu p^\mu \pm m\mathbf{I})$  [5]

$$(\gamma_\mu p^\mu + m\mathbf{I})u(\mathbf{p}) = 0, \quad (4.13a)$$

$$(\gamma_\mu p^\mu - m\mathbf{I})v(\mathbf{p}) = 0. \quad (4.13b)$$

Os espinores  $u(\mathbf{p})$  e  $v(\mathbf{p})$  são autoespinores do operador  $\gamma_\mu p^\mu$  e possuem autovalores iguais a  $+m$  e  $-m$ , respectivamente [1].

Podemos escrever um dado espinor que satisfaça a equação de Dirac,  $\psi(\mathbf{p})$ , no espaço

das posições em termos de combinações lineares de ondas planas,  $\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{p})e^{\mp ip_\mu x^\mu}$ . Assim escrevemos a equação de Dirac no espaço das posições

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbf{I})\psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.14)$$

Seguindo o mesmo raciocínio pode-se escrever a seguinte relação para o ELKO

$$\lambda^{S/A}(\mathbf{x}) = \lambda^{S/A}(\mathbf{p})e^{(\varepsilon^{S/A} ip_\mu x^\mu)}. \quad (4.15)$$

Para que a equação (4.15) esteja em concordância com (4.11) e (4.12), devemos fixar  $\varepsilon^S = -1$  e  $\varepsilon^A = +1$  [5]. Desta forma podemos escrever no espaço das posições a equação que aniquila o ELKO

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_\alpha^\beta + im\mathbf{I}\varepsilon_\alpha^\beta)\lambda_\beta^{S/A}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.16)$$

Comparando as equações (4.14) e (4.16), podemos notar que o operador de Dirac,  $i\gamma^\mu \partial_\mu \pm m\mathbf{I}$ , aniquila cada um dos espinores  $u_h(\mathbf{x})$  e  $v_h(\mathbf{x})$ , mas o mesmo não acontece para o ELKO. O operador da equação (4.16) quando atua em um espinor ELKO faz a conexão entre as helicidades  $(+,-)$  e  $(-,+)$ , e vice versa. Isso acontece tanto para os espinores *autoconjugados* quanto para os *anti autoconjugados*. Devemos enfatizar a seguinte situação: no caso de Dirac, a equação é dinâmica, enquanto que (4.16) é apenas uma identidade meramente algébrica.

## 4.2 ELKO SATISFAZ A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Para ver se os espinores ELKO satisfazem a equação de Klein-Gordon iremos atuar com o operador  $\gamma_\nu p^\nu$  no espinor da relação (4.9a). Desta forma

$$\begin{aligned} \gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) &= im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}), \\ \underbrace{-(\gamma^\mu \partial_\mu)(\gamma^\nu \partial_\nu)}_{-\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu \partial_\nu} \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) &= im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

utilizando a relação (4.9b) ficamos com

$$-\square \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = \underbrace{im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p})}_{m^2 \lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p})}, \quad (4.18)$$

assegurando desta maneira para todos os espinores ELKO a seguinte relação

$$(\square + m^2)\lambda_\beta^{(S/A)}(\mathbf{p}) = 0. \quad (4.19)$$

De fato, isso já era esperado; uma vez que a equação de Klein-Gordon é uma relação que expressa conservação de energia, ela deve ser satisfeita por qualquer campo independentemente do spin.

Como no caso para o campo escalar, a densidade de probabilidade para o ELKO não é postivo definida. Portanto isso pode ser resolvido se deixarmos de lado a interpretação de uma única partícula descrita por uma função de onda e passarmos a pensar em um campo quântico, para o qual, após a quantização, conseguimos assegurar uma densidade de probabilidade positivo definida. A seguir veremos mais um argumento em prol da (segunda) quantização.

### 4.3 TRANSFORMAÇÃO NÃO UNITÁRIA

Vamos analisar aqui, nesta seção, a relação de covariância da relação algébrica que aniquila o ELKO. Para tanto vamos ver se essa equação mantém sua forma após uma transformação geral dada por

$$\lambda'(\mathbf{x}') = S(\Lambda)\lambda(\mathbf{x}), \quad (4.20)$$

onde  $S(\Lambda)$  é uma matrix  $4 \times 4$  não nula e não singular (deve admitir inversa). Desta maneira, usando a relação (4.20) na equação (4.11) vamos definir a equação transformada por

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_\alpha^\beta + im\mathbf{I}\epsilon_\alpha^\beta)\lambda_\beta(\mathbf{x}) &= 0, \\ i\gamma^\mu \partial'_\mu \delta'_\alpha{}^\beta S(\Lambda)^{-1}\lambda'_\beta(\mathbf{x}') + im\mathbf{I}\epsilon'_\alpha{}^\beta S(\Lambda)^{-1}\lambda'_\beta(\mathbf{x}') &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Lembremos que embora os índices S (autoconjugado) e A (anti autoconjugado) tenham sido suprimidos, os cálculos valem para os dois tipos de espinores. Então introduzindo  $S(\Lambda)^{-1}S(\Lambda) = 1$  na equação (4.21) e multiplicando pela esquerda por  $S(\Lambda)$  temos

$$iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)^{-1}S(\Lambda)\partial'_\mu S(\Lambda)^{-1}S(\Lambda)\delta'_\alpha{}^\beta S(\Lambda)^{-1}\lambda'_\beta(\mathbf{x}') + im\mathbf{I}S(\Lambda)\epsilon'_\alpha{}^\beta S(\Lambda)^{-1}\lambda'_\beta(\mathbf{x}') = 0.$$

Sabendo que as quantidades  $\delta'^\beta$  e  $\epsilon'_\alpha{}^\beta$  se mantêm invariantes, temos

$$\underbrace{(iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)^{-1}\Lambda_\mu^\nu \partial'_\mu \delta'_\alpha{}^\beta + im\mathbf{I}\epsilon'_\alpha{}^\beta)}_{\gamma^{\mu\nu}}\lambda'_\beta(\mathbf{x}') = 0. \quad (4.22)$$

A equação na forma covariante fica escrita como

$$(i\gamma'^\mu \partial'_\mu \delta'_\alpha{}^\beta + im\mathbf{I}\epsilon'_\alpha{}^\beta)\lambda'_\beta(\mathbf{x}') = 0. \quad (4.23)$$

Como uma consequência, temos que para qualquer  $\lambda_{\beta}^{S/A}(\boldsymbol{x})$

$$S(\Lambda)\gamma^{\nu}S(\Lambda)^{-1} = \gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu}. \quad (4.24)$$

Desta maneira, se  $\Lambda$  for uma rotação então a transformação aplicada em  $\lambda(\boldsymbol{x})$  é unitária, mas caso  $\Lambda$  seja um *boost* de Lorentz a transformação não será unitária. Desta maneira os espinores ELKO não podem representar um estado quântico, mas servirão como coeficientes de expansão do campo quântico, o qual, este sim, transformar-se-á de maneira unitária.

## 5 ELKO E A RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL (VSR)

A Very Special Relativity (VSR) foi proposta no ano de 2006 por Cohen e Glashow, desenhada para descrever teorias que violam a simetria de Lorentz, assim como para o caso do ELKO que como vimos possui um termo de quebra de simetria nas somas de spin. Os autores ainda mostram que a invariância das leis físicas e a invariância da velocidade da luz em qualquer referencial inercial, não requerem o grupo completo de Poincaré, mas sim podem ser explicadas por dois subgrupos da VSR, os grupos  $HOM(2)$  e  $SIM(2)$ . De modo geral, se a teoria a ser estudada contém partículas massivas e não viola nenhuma simetria discreta como  $P$ ,  $T$ ,  $CP$  e  $CT$  então a escolha é única, deve-se escolher o grupo de Poincaré. Caso a teoria viole alguma simetria discreta, então o grupo que melhor abordará essa teoria é algum subgrupo que está por trás da VSR. Para o nosso caso a VSR é de suma importância, pois, como visto no Capítulo 3 o ELKO viola a simetria de Lorentz, e veremos aqui que na estrutura algébrica da VSR as somas de spin para o ELKO são invariantes ou covariantes, possibilitando desta maneira uma melhor interpretação física.

### 5.1 OS GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO E ESTRUTURA ALGÉBRICA DA VSR

Começaremos definindo os subgrupos do grupo de Lorentz<sup>1</sup> como subgrupos que engendram a VSR, se a estes subgrupos quando feita a adição de qualquer simetria discreta  $P$ ,  $T$ ,  $CP$  e  $CT$  novamente retornamos ao grupo de Lorentz. O menor grupo com essa propriedade possui os geradores

$$T_1 \equiv K_x + J_y \quad \text{e} \quad T_2 \equiv K_y - J_x, \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{J}$  são geradores de rotações e  $\mathbf{K}$  são geradores de boosts. Esse grupo é isomorfo ao grupo de translações no plano  $T(2)$  [14, 15]. Atentando-nos ao fato de que  $T(2)$  é um subgrupo da VSR, verificaremos então se com a adição da simetria de paridade,  $P$ , por exemplo, reconstruímos o grupo de Lorentz. Então com a aplicação de  $P$  nos geradores  $T_1$  e  $T_2$  temos

$$P(T_1) = -K_x + J_y \quad \text{e} \quad P(T_2) = -K_y - J_x. \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>Como de praxe quando nos referimos ao grupo de Lorentz estamos falando do grupo formado pelas simetrias discretas, geradores de rotações  $\mathbf{J}$  e geradores de boosts  $\mathbf{K}$ . Quando nos referimos ao grupo de Poincaré estamos falando do grupo de Lorentz mais geradores de translações no espaço-tempo.

Note que apenas os geradores de boost ganham um sinal. Isso advém do fato que a atuação de  $P$  em tais geradores inverte o sentido da velocidade, fazendo  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ . Enquanto para os geradores de rotações, os quais da maneira mais simples podemos escrever como  $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ , a atuação de  $P$  inverte o sinal de ambos os termos, desta forma mantendo-os inalterados. Uma vez que façamos combinações apropriadas com as equações (5.1) e (5.2) podemos obter  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $J_x$  e  $J_y$ . Além do mais, usando as relações de comutação dos geradores do grupo de Lorentz

$$[K_x, K_y] = -iJ_z \text{ e permutações cíclicas,} \quad (5.3)$$

$$[J_x, K_x] = 0 \text{ etc.,} \quad (5.4)$$

$$[J_x, K_y] = iK_z \text{ e permutações cíclicas,} \quad (5.5)$$

podemos então encontrar  $K_z$  usando a relação (5.5) e  $J_z$  usando (5.3). Desta forma podemos ver que o grupo T(2) com a adição de  $P$  é equivalente ao grupo de Lorentz. O próximo passo é catalogar os grupos da VSR. Se adicionarmos a T(2) o gerador de rotação em torno do eixo  $z$ ,  $J_z$ , isso fornecerá um grupo isomorfo ao grupo euclidiano E(2), o grupo de rotações e translações no plano  $xy$ . É claro que E(2) com a adição de alguma simetria discreta é equivalente ao grupo de Lorentz, uma vez que T(2) é um subgrupo de E(2). Este último também é classificado como um grupo da VSR. Vamos prosseguir com o processo de aumentar os grupos da VSR, adicionando a T(2) o gerador  $K_z$  temos o grupo isomorfo ao grupo de três parâmetros de transformações de similaridade, ou homotetias, HOM(2), enquanto que com a adição de ambos os geradores  $K_z$  e  $J_z$  consegue-se construir um grupo isomorfo ao grupo de 4 parâmetros, *similitude*, ou SIM(2) [14, 15]. Temos então, de forma ilustrativa a tabela abaixo com todos os grupos de VSR. Dois dos subgrupos

Grupo	Geradores	Álgebra
T(2)	$T_1, T_2$	$[T_1, T_2] = 0$
E(2)	$T_1, T_2, J_z$	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, J_z] = -iT_2, [T_2, J_z] = iT_1$
HOM(2)	$T_1, T_2, K_z$	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, K_z] = iT_1, [T_2, K_z] = iT_2$
SIM(2)	$T_1, T_2, J_z, K_z$	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, K_z] = iT_1, [T_2, K_z] = iT_2$ $[T_1, J_z] = -iT_2, [T_2, J_z] = iT_1, [J_z, K_z] = 0$

**Tabela 5.1:** Os 4 grupos da álgebra da VSR

da VSR, HOM(2) e SIM(2), permitem a construção de uma transformação que simula o comportamento do boost de Lorentz, isto é, uma transformação que toma um dado vetor ou espinor do repouso para um dado momento arbitrário [15]. O boost da VSR é definido como [14]

$$\mathcal{V} \equiv e^{iT_1 \epsilon_1} e^{iT_2 \epsilon_2} e^{iK_z \varphi_z}. \quad (5.6)$$



Desta forma os parâmetros da transformação acima são definidos como

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{p^1}{p^0 - p^3}, \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{p^2}{p^0 - p^3}, \quad (5.8)$$

$$\varphi_z \equiv -\log\left(\frac{p^0 - p^3}{m}\right). \quad (5.9)$$

## 5.2 REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DA ÁLGEBRA DOS GRUPOS SIM(2) E HOM(2)

A partir deste momento passaremos a analisar a álgebra dos grupos SIM(2) e HOM(2). Vamos denotá-las por  $\mathfrak{sim}(2)$  e  $\mathfrak{hom}(2)$ , respectivamente. Começaremos com a observação que essas duas álgebras, admitem dois tipos de representações espinoriais de spin 1/2 as quais chamaremos de *tipo - a* e *tipo - b*. Por definição, uma vez que paridade não é uma simetria de SIM(2), logo a forma com que esses dois tipos se transformam um em outro é diferente dos *tipo - r* e *tipo - l* da representação espinorial de Weyl. Os geradores do *tipo - a* na representação espinorial  $\mathfrak{sim}(2)$  são

$$\mathcal{T}_1^a \equiv \mathcal{K}_x^a + \mathcal{J}_y^a, \quad (5.10)$$

$$\mathcal{T}_2^a \equiv \mathcal{K}_y^a + \mathcal{J}_x^a, \quad (5.11)$$

onde  $\mathcal{J}_z^a$  e  $\mathcal{K}_z^a$  são

$$\mathcal{K}^a = -i\sigma/2, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{J}^a = \sigma/2. \quad (5.13)$$

Para os *tipo - b* temos os geradores

$$\mathcal{T}_1^b \equiv \mathcal{K}_x^b + \mathcal{J}_y^b, \quad (5.14)$$

$$\mathcal{T}_2^b \equiv \mathcal{K}_y^b + \mathcal{J}_x^b, \quad (5.15)$$

com as quantidades  $\mathcal{J}_z^b$  e  $\mathcal{K}_z^b$  iguais a

$$\mathcal{K}^b = +i\sigma/2, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{J}^b = \sigma/2, \quad (5.17)$$

sendo  $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  as matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Fazendo uma soma direta entre os geradores do *tipo - a* e *tipo - b* teremos uma representação espinorial quadridimensional dada pelos geradores na forma matricial [15]

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\mathcal{J}_z = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Agora, usando esses geradores podemos redefinir (5.6) como [15]

$$\mathcal{V} \equiv e^{i\mathcal{T}_1\epsilon_1} e^{i\mathcal{T}_2\epsilon_2} e^{i\mathcal{K}_z\varphi_z}. \quad (5.21)$$

Para encontrar a forma matricial de (5.21) devemos expandir as exponenciais em termos dos geradores atentando-nos para o fato de que  $(\mathcal{T}_1)^2 = (\mathcal{T}_2)^2 = 0$  e  $(2\mathcal{K}_z)^3 = -2\mathcal{K}_z$ . Assim, temos [15, 16]

$$e^{i\mathcal{T}_1\epsilon_1} = 1 + i\mathcal{T}_1\epsilon_1, \quad (5.22a)$$

$$e^{i\mathcal{T}_2\epsilon_2} = 1 + i\mathcal{T}_2\epsilon_2, \quad (5.22b)$$

$$e^{i\mathcal{K}_z\varphi_z} = 1 + i(2\mathcal{K}_z) \sinh(\varphi/2) + (2\mathcal{K}_z)^2 [1 - \cosh(\varphi_z/2)]. \quad (5.22c)$$

Usando então as equações (5.22a) - (5.22c) podemos encontrar a forma matricial de (5.21)

$$\mathcal{V}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{p^0-p^3}} & \frac{p^1-ip^2}{\sqrt{m(p^0-p^3)}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{p^0-p^3}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p^0-p^3}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^1+ip^2}{\sqrt{m(p^0-p^3)}} & \sqrt{\frac{m}{p^0-p^3}} \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Desta maneira encontramos a representação espinorial do boost da VSR.

### 5.3 INVARIANTES DE CASIMIR DO GRUPO ISIM(2)

Sabemos que para o grupo de Poincaré os invariantes de Casimir, são dados por

$$C_1 = P^\mu P_\mu = m^2, \quad C_2 = W^\mu W_\mu = -m^2 s(s+1), \quad (5.24)$$

sendo  $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} J^{\nu\rho} P^\lambda$  o pseudo-vetor de Pauli-Lubanski, e  $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$  o tensor de Livi-Civita, com [3, 7]

$$\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = 1. \quad (5.25)$$

Massa e spin são autovalores dos operadores  $C_1$  e  $C_2$  de Casimir. Esses dois autovalores são invariantes por quaisquer transformações de Lorentz e comutam com os geradores do grupo de Poincaré, o que lhes assegura a alcunha de invariantes.

Por outro lado, queremos levar essa análise adiante para a VSR. Os invariantes de Casimir para a álgebra<sup>2</sup>  $\mathfrak{isim}(2)$  são dados por [17]

$$C_1 = P^\mu P_\mu, \quad C_2 = J^3 - \frac{P^2}{P^0 - P^3} T^1 + \frac{P^1}{P^0 - P^3} T^2. \quad (5.26)$$

Facilmente podemos identificar os autoestados do primeiro Casimir com a massa da partícula. Todavia, os autoestados do segundo invariante não possuem interpretação física direta até então. O que podemos inferir de (5.26) é que massa continua sendo válida para a descrição de partículas, contudo além da noção de spin, não fica clara qual informação está contida em  $C_2$ .

### 5.4 ESTADOS DE UMA PARTÍCULA

Sabemos que os invariantes de Casimir nos fornecem informações sobre os estados de uma partícula. Entretanto, não nos dá informações a respeito de como esses estados se transformam. Por este motivo, precisamos estudar as representações irredutíveis do grupo, ou seja, vamos buscar os *Little Groups*, grupos que mantêm invariantes por transformações um dado estado inicial. Os estados de uma partícula construídos na VSR carregam os mesmos aspectos que os encontrados usualmente nos livros-texto, porém aqui faremos a construção deles ressaltando algumas sutilezas advindas da álgebra da VSR.

Sabemos que os geradores de translação no espaço-tempo,  $P^\mu$ , comutam com a energia  $H$  do sistema, então para que nossos estados possuam energia e momento bem definidos, vamos impor que sejam autoestados de  $P^\mu$ , de maneira que

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle, \quad (5.27)$$

---

<sup>2</sup>O Grupo  $ISIM(2)$  é o análogo de Poincaré (Rotações+Booster+Translações no espaço-tempo) para a VSR. Basicamente esse grupo é o grupo  $SIM(2)$ , porém com a inclusão de geradores de translação no espaço-tempo.

onde o índice  $\sigma$  pode se referir a qualquer outra grandeza, como spin por exemplo. Imaginemos um dado vetor momento tipo-tempo no referencial de repouso, denotado por

$$k^\mu = (m, \mathbf{0}). \quad (5.28)$$

Conseqüentemente, para um momento tipo-tempo, para saber o efeito de uma transformação de Lorentz precisamos conhecer apenas as representações dos grupos de rotação [7]. Considere um momento  $p^\mu$ , tipo-tempo

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}). \quad (5.29)$$

É óbvio que existe uma transformação que conecta  $k^\mu$ , do repouso, para um momento arbitrário  $p^\mu$ . No nosso caso, a transformação é a seguinte

$$p^\mu = \mathcal{V}_\nu^\mu(p)k^\nu, \quad (5.30)$$

sendo  $\mathcal{V}_\nu^\mu(p)$  dado pela matriz (5.23). Podemos escrever a relação acima no espaço de Hilbert

$$|p, \sigma\rangle = U(\mathcal{V}(p))|k, \sigma\rangle. \quad (5.31)$$

Onde  $U(\mathcal{V}(p))$  é um operador unitário (matriz) que implementa  $\mathcal{V}_\nu^\mu(p)$ . Agora consideremos uma transformação arbitrária da VSR, mais precisamente uma transformação feita por algum gerador de  $SIM(2)$ , dada por  $\Lambda$

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = \Lambda_\nu^\mu p^\nu, \quad (5.32)$$

que na notação de Dirac corresponde a

$$|p, \sigma\rangle \rightarrow U(\Lambda)|p, \sigma\rangle. \quad (5.33)$$

Precisamos encontrar o estado transformado  $U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$ . Reescrevendo (5.31) obtemos

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = U(\Lambda)U(\mathcal{V}(p))|k, \sigma\rangle, \quad (5.34)$$

inserindo a matriz identidade do lado direito da última equação acima, ficamos com

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = U(\mathcal{V}(\Lambda p))U^{-1}(\mathcal{V}(\Lambda p))U(\Lambda)U(\mathcal{V}(p))|k, \sigma\rangle. \quad (5.35)$$

Usando as seguintes regras  $U^{-1}(A) = U(A^{-1})$  e  $U(A)U(B)U(C) = U(ABC)$  [7], teremos

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = U(\mathcal{V}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{V}(p))U(\Lambda)U(\mathcal{V}(p))|k, \sigma\rangle. \quad (5.36)$$

Note que  $\mathcal{V}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{V}(p)$  é a matriz que quando atua em  $k^\mu$  devolve  $k^\mu$ , pois  $\mathcal{V}(p)$  transforma  $k$  em  $p$ ,  $\Lambda$  transforma  $p$  em  $\Lambda p$  e finalmente  $\mathcal{V}^{-1}(\Lambda p)$  faz a transformação inversa, isto é, transforma  $\Lambda p$  em  $k$ . Vamos então definir essa matriz, a fim de simplificar a notação, como

$$\mathcal{W}(\Lambda, p) = \mathcal{V}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{V}(p). \quad (5.37)$$

Assim, podemos escrever

$$U(\mathcal{V})|p, \sigma\rangle = \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}(\mathcal{W}(\Lambda, p))|\Lambda p, \bar{\sigma}\rangle, \quad (5.38)$$

onde a quantidade  $\sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}(\mathcal{W}(\Lambda, p))$  pode ser entendida como uma soma de sucessivas transformações. Para este caso, a transformação que deixa invariante o estado de uma partícula massiva é [3]

$$D(\mathcal{W}(\Lambda, p)) = e^{iJ_z\phi}, \quad (5.39)$$

ou seja, nada mais do que uma rotação em torno do eixo  $z$ . De forma a contrastar com o grupo de Poincaré, temos a tabela abaixo. Aqui o grupo  $SO(2)$  é o grupo de rotações no

	$k^\mu$	<i>Little Group VSR</i>	<i>Little Group SR</i>
$p^\mu p_\mu = m^2, p^0 > 0$	$(m, 0, 0, 0)$	$SO(2)$	$SU(2)$

**Tabela 5.2:** O *Little Group*

plano, geradas por  $J_z$  e o grupo  $SU(2)$  é o de rotações geradas por  $J_x, J_y$  e  $J_z$ .

## 5.5 ABORDAGEM DO ELKO PELA ÁLGEBRA DA VSR

Nesta seção iremos elaborar uma abordagem do ELKO através do grupo  $SIM(2)$  da VSR. Sabemos que as somas de spin para o ELKO não são invariantes de Lorentz, tornando difícil uma interpretação física da teoria. Como veremos aqui, boa parte da estrutura algébrica do ELKO permanece inalterada pelo grupo  $SIM(2)$  da VSR. Vamos estabelecer uma pequena distinção entre o ELKO construído na representação do grupo de Lorentz intitulando-o de “Lorentz ELKO” enquanto que o ELKO construído no grupo  $SIM(2)$  será denominado por “VSR ELKO”[15]. Primeiramente deve ser salientado que podemos, sem perda de generalidade, construir o ELKO usando a VSR pois este é um auto espinor do operador conjugação de carga ( $C$ ), e sabemos que  $C$  não é uma simetria do grupo de Lorentz, ou seja, não é uma simetria que aumenta, por assim dizer, nenhum grupo da VSR. Tendo a última afirmação em mente, podemos evidenciar o fato de que o mesmo não poderia ser feito para os espinores de Dirac, pelo simples fato destes serem autoespinores do operador paridade, simetria banida quando fizemos a construção da VSR.

Vamos evidenciar aqui apenas as sutilezas do “VSR ELKO” em relação ao “Lorentz ELKO”. Já foi mostrado anteriormente que o ELKO é um objeto de helicidade dual e isso

continua válido nos nossos novos moldes algébricos. Relembrando o operador de boost construído no Capítulo 3, sabemos da veracidade das equações (3.27) - (3.30) quando se trata do grupo de Lorentz. Fazendo uma analogia, podemos escrever em termos do operador de boost da VSR a seguinte relação

$$\lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu) = \mathcal{V}(\epsilon_1, \epsilon_2, \varphi_z) \lambda_\alpha^{S/A}(k^\mu), \quad (5.40)$$

onde  $\lambda_\alpha(k^\mu)$  é um dos quatro autoespinores ELKO, já definidos anteriormente. O subíndice  $\alpha$  refere-se as duas possíveis helicidades,  $(+, -)$  e  $(-, +)$  de cada espinor  $\lambda^S$  e  $\lambda^A$ . Temos também que

$$k^\mu = (m, \mathbf{0}) \quad \text{e} \quad p^\mu = (p^0, \mathbf{p}). \quad (5.41)$$

Os resultados a serem obtidos serão os mesmos apresentados em (3.12) e (3.21) e podemos também estendê-los para um momento arbitrário, pois os tratamos no referencial de repouso. É claro que o operador helicidade  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p}$  deve comutar com o operador de boost (5.21). Ao se realizar esse cálculo para a matriz (5.23), no entanto, percebemos que esses operadores não comutam. Isso advém do fato de que autoestados de helicidade estão ligados pela ação do operador paridade,  $P$ , que pela definição da VSR não pertence a esse grupo. Para o caso de um boost de Lorentz pode-se encontrar que os operadores de boost e helicidade comutam, e conseqüentemente a helicidade dual do ELKO é válida para qualquer momento arbitrário. Essa é a principal diferença entre o “Lorentz ELKO” e o “VSR ELKO” [15].

### 5.5.1 Invariância das Somas de Spin para o “VSR ELKO”

No Capítulo 3 quando calculamos as somas de spin para o ELKO, deparamo-nos com a violação da simetria de Lorentz, pelo simples fato da aparição da matriz  $\mathcal{G}(\phi)$  nas equações (3.72) e (3.73), revelando dependência com uma dada direção espacial. Nossa tarefa aqui é analisar o comportamento de  $\mathcal{G}(\phi)$  com relação aos geradores do grupo SIM(2). Primordialmente analisaremos a invariância de  $\mathcal{G}(\phi)$  pela matriz (5.23)<sup>3</sup>

$$\mathcal{V}(p) \mathcal{G}(\phi) [\mathcal{V}(p)]^{-1} = \mathcal{G}(\phi), \quad (5.42)$$

portanto em primeira análise  $\mathcal{G}(\phi)$  é invariante sob transformação realizada por  $\mathcal{V}(p)$ . Porém ainda é necessário checar se o mesmo acontece para as demais transformações do grupo SIM(2). A fim de facilitar a notação, vamos definir  $\Gamma_1 \equiv e^{i\mathcal{T}_1 \epsilon_1}$ . Então teremos

$$\Gamma_1 \mathcal{G}(\phi) [\Gamma_1]^{-1} \Big|_{\epsilon_1=0} = \mathcal{G}(\phi), \quad (5.43)$$

---

<sup>3</sup>Todos os cálculos dessa seção foram realizados usando os *softwares* Maple 9.0, Maple 12.0 e Wolfram Mathematica 7.0.

mostrando  $\mathcal{G}(\phi)$  invariante por transformações geradas  $\mathcal{T}_1$ . De forma análoga vamos definir  $\Gamma_2 \equiv e^{i\mathcal{T}_2\epsilon_2}$  obtendo

$$\Gamma_2\mathcal{G}(\phi)[\Gamma_2]^{-1} \Big|_{\epsilon_2=0} = \mathcal{G}(\phi), \quad (5.44)$$

de onde podemos afirmar que  $\mathcal{G}(\phi)$  é invariante também por transformações geradas por  $\mathcal{T}_2$ . Definindo agora  $\Gamma_3 \equiv e^{i\mathcal{K}_z\varphi_z}$  encontramos

$$\Gamma_3\mathcal{G}(\phi)[\Gamma_3]^{-1} = \mathcal{G}(\phi). \quad (5.45)$$

Logo,  $\mathcal{G}(\phi)$  é invariante sob um boost arbitrário ao longo da direção  $z$  [15]. Por último vamos determinar o que acontece sob a transformação de  $e^{i\mathcal{J}_z\phi'}$ , denotando  $\Gamma_4 \equiv e^{i\mathcal{J}_z\phi'}$ , temos

$$\Gamma_4\mathcal{G}(\phi)[\Gamma_4]^{-1} = \mathcal{G}(\phi + \phi'), \quad (5.46)$$

evidenciando que neste caso  $\mathcal{G}(\phi)$  é covariante por uma rotação em torno do eixo  $z$ . Assim, mostramos que ao se usar o grupo SIM(2) é garantida a covariância da matriz  $\mathcal{G}(\phi)$  por transformações realizadas pelos geradores deste grupo. Caso o grupo escolhido fosse o HOM(2) teríamos a invariância do termo  $\mathcal{G}(\phi)$ . Desta maneira, dentro da VSR, conseguimos solucionar o problema da violação de Lorentz.

## 6 INTERPRETAÇÃO DE PARTÍCULA E DIMENSÃO DE MASSA

Este capítulo é reservado para explicitar a construção dos operadores de campo, através da análise da Hamiltoniana, e conseqüentemente a construção do propagador. Vamos estabelecer que tipo de relação deve existir entre os operadores de criação e aniquilação de partículas a fim de garantir uma energia positivo definida. Perceberemos, após a construção do propagador, que na ausência de uma direção preferencial, o propagador do ELKO é igual ao propagador do campo escalar. Por este motivo veremos que a lagrangiana que dá origem à equação de movimento do campo é a lagrangiana do campo escalar. Isso implicará no fato do ELKO ser um espinor dotado de dimensão de massa 1, contrariando a dimensão 3/2 esperada para um campo espinorial local.

### 6.1 ESTABELENCENDO A ENERGIA DO VÁCUO E AS ESTATÍSTICAS FERMIÔNICAS: RELAÇÕES ENTRE OS OPERADORES $c_\beta$ e $c_\beta^\dagger$

Nesta seção vamos construir o operador de campo quântico para o ELKO. Seguindo a equação (4.15) sabemos que podemos escrever tal operador como uma combinação de soluções de ondas planas. Então temos a seguinte relação

$$\eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \sum_\beta \left[ c_\beta(\mathbf{p}) \lambda_\beta^S(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + c_\beta^\dagger(\mathbf{p}) \lambda_\beta^A(\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu} \right], \quad (6.1)$$

onde  $a(p^\mu) \in \mathbb{R}$  e será determinada posteriormente. A partir daqui nosso objetivo é estabelecer que tipo de relação, comutação ou anticomutação, deve existir entre os operadores de criação e aniquilação,  $c_\beta^\dagger$  e  $c_\beta$  respectivamente. Foi mostrado no capítulo anterior que o ELKO obedece a equação de Klein-Gordon, dada em (4.19), então o operador que aniquila o campo quântico será [9]

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\eta(x) = 0. \quad (6.2)$$

Desta forma usaremos a lagrangiana que dá origem a equação de movimento, que é a lagrangiana do campo escalar

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\eta}(x) \partial_\mu \eta(x) - m^2 \bar{\eta}(x) \eta(x). \quad (6.3)$$



Sendo assim podemos calcular a densidade de momento para  $\pi(x)$ , dada por

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}(x)} \\ &= \frac{\partial \bar{\eta}(x)}{\partial t}\end{aligned}\tag{6.4}$$

e de forma análoga temos a densidade de momento conjugado

$$\bar{\pi}(x) = \frac{\partial \eta(x)}{\partial t},\tag{6.5}$$

a qual é diferente de zero, contrariando o que acontece para Dirac. Podemos escrever então a densidade Hamiltoniana da seguinte maneira

$$\mathcal{H} = \pi(x) \frac{\partial \eta(x)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\eta}(x)}{\partial t} \bar{\pi}(x) - \mathcal{L}.\tag{6.6}$$

As propriedades entre os operadores  $c_\beta$  e  $c_\beta^\dagger$  serão encontradas quando integrarmos a densidade Hamiltoniana em todo espaço e exigirmos que a energia do sistema seja positivo definida. Assim

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \mathcal{H} \\ &= \int d^3x \left[ \partial^0 \bar{\eta}(x) \partial_0 \eta(x) - \partial^i \bar{\eta}(x) \partial_i \eta(x) + m^2 \bar{\eta}(x) \eta(x) \right].\end{aligned}\tag{6.7}$$

Introduzindo (6.1) e seu dual,  $\bar{\eta}(x)$ , em (6.7) temos a seguinte relação

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \sum_{\beta\beta'} \int \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^\mu)}{2E(\mathbf{p}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \\ &\quad \times \left( \left[ (c_\beta^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^S(\mathbf{p})(ip^0) e^{ip_\mu x^\mu} + c_\beta(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^A(\mathbf{p})(-ip^0) e^{-ip_\mu x^\mu}) \right. \right. \\ &\quad \times (c_{\beta'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\beta'}^S(\mathbf{p}')(-ip'^0) e^{-ip'_\mu x^\mu} + c_{\beta'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\beta'}^A(\mathbf{p}')(+ip'^0) e^{+ip'_\mu x^\mu}) \left. \right] \\ &\quad + \left[ (c_\beta^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^S(\mathbf{p})(i\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu} + c_\beta(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^A(\mathbf{p})(-i\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu}) \right. \\ &\quad \times (c_{\beta'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\beta'}^S(\mathbf{p}')(-i\mathbf{p}') e^{-ip'_\mu x^\mu} + c_{\beta'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\beta'}^A(\mathbf{p}')(+i\mathbf{p}') e^{+ip'_\mu x^\mu}) \left. \right] \\ &\quad + m^2 \left[ (c_\beta^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^S(\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu} + c_\beta(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^A(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu}) \right. \\ &\quad \left. \left. \times (c_{\beta'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\beta'}^S(\mathbf{p}') e^{-ip'_\mu x^\mu} + c_{\beta'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\beta'}^A(\mathbf{p}') e^{+ip'_\mu x^\mu}) \right] \right).\end{aligned}$$

A integração no espaço nos fornece  $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ , e usando as relações (A.6) e (A.7) do apêndice A podemos escrever a Hamiltoniana como

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^\mu)}{4E^2(\mathbf{p})} \sum_{\beta} \left[ (p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) (c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) c_{\beta}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^S(\mathbf{p}) + c_{\beta}(\mathbf{p}) c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^A(\mathbf{p})) \right].$$

Recorrendo às relações de ortonormalidade, (3.56a) e (3.56b), obtemos

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{2ma^2(p^\mu)}{4E^2(\mathbf{p})} \sum_{\beta} \left[ (p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) (c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) c_{\beta}(\mathbf{p}) - c_{\beta}(\mathbf{p}) c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p})) \right]. \quad (6.8)$$

Assim, notamos que o termo  $p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2$  corresponde a  $2E^2(\mathbf{p})$  e desta maneira somos levados a escrever

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} ma^2(p^\mu) \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) c_{\beta}(\mathbf{p}) - c_{\beta}(\mathbf{p}) c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) \right]. \quad (6.9)$$

Até o presente momento, nenhum tipo de relação foi estabelecida ainda. Porém é evidente que se impusermos a relação de comutação entre os operadores  $c_{\beta}(\mathbf{p})$  e  $c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p})$  a Hamiltoniana (6.9) irá fornecer uma energia que irá evanescer. Por esta razão a relação a ser fixada deve ser fermiônica

$$\{c_{\beta}(\mathbf{p}), c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} = b(p^\mu) (2\pi)^3 2E(\mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\beta\beta'}, \quad (6.10)$$

onde  $b(p^\mu) \in \mathbb{R}$  e será determinado durante a interpretação de  $H$ . Podemos assim escrever a seguinte relação

$$c_{\beta}(\mathbf{p}) c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}') = b(p^\mu) (2\pi)^3 2E(\mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\beta\beta'} - c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}') c_{\beta}(\mathbf{p}) \quad (6.11)$$

e substituindo (6.11) em (6.9) obtemos

$$H = -\delta^3(\mathbf{0}) \int d^3 p a^2(p^\mu) m b(p^\mu) \sum 2E(\mathbf{p}) \delta_{\beta\beta'} + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a^2(p^\mu) m \sum_{\beta} 2c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) c_{\beta}(\mathbf{p}).$$

Para que a Hamiltoniana seja consistente com a dos campos fermiônicos, devemos impor que  $a(p^\mu)$  e  $b(p^\mu)$  sejam dados por

$$a(p^\mu) = \sqrt{\frac{2E(\mathbf{p})}{m}}, \quad b(p^\mu) = \frac{1}{2E(\mathbf{p})}. \quad (6.12)$$

Desta forma temos então

$$H = -\delta^3(\mathbf{0}) \int d^3 p \sum_{\beta} 2E(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2E(\mathbf{p}) \sum_{\beta} 2c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) c_{\beta}(\mathbf{p}). \quad (6.13)$$

Uma vez que a função  $\delta^3(\mathbf{0})$  pode ser escrita como

$$\delta^3(\mathbf{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x, \quad (6.14)$$

o primeiro termo de (6.13) é

$$H_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \sum_{\beta} 2E(\mathbf{p}), \quad (6.15)$$

daí, finalmente temos que a Hamiltoniana para o ELKO fica sendo dada por

$$H = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \sum_{\beta} 2E(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2E(\mathbf{p}) \sum_{\beta} 2c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p})c_{\beta}(\mathbf{p}). \quad (6.16)$$

Comparando (6.16) com a Hamiltoniana usual para campos fermiônicos encontrada em [18]

$$H = -\delta(\mathbf{0}) \int d^3p \sum_s E(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E(\mathbf{p}) \sum_s 2b_s^{\dagger}(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}), \quad (6.17)$$

a qual é construída para o espinor de Dirac, podemos concluir que cada uma das helicidades,  $(+, -)$  e  $(-, +)$ , dos espinores autoconjugados e anti autoconjugados ELKO contribuem com uma energia de  $\frac{1}{2}E(\mathbf{p})$ , totalizando assim  $2E(\mathbf{p})$ , contrastando com o caso de Dirac, que possui helicidade única, onde a energia é  $E(\mathbf{p})$ , ou seja, metade do que obtemos para o ELKO. O termo  $H_0$  na equação (6.16) é análogo à energia de ponto zero, ou energia mínima, de um oscilador harmônico simples dada por  $(1/2)\hbar\omega$ , porém com um sinal negativo assim como no caso de Dirac. Então cada partícula contribui com  $-(1/2)\hbar\omega$  para a energia do vácuo. Lembremos, de passagem, que para o campo escalar as contribuições são de  $(1/2)\hbar\omega$ .

Após esta série de cálculos concluímos que as relações entre os operadores  $c_{\beta}(\mathbf{p})$  e  $c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p})$  são

$$\{c_{\beta}(\mathbf{p}), c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\beta\beta'}, \quad (6.18)$$

$$\{c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}), c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} = \{c_{\beta}(\mathbf{p}), c_{\beta'}(\mathbf{p}')\} = 0, \quad (6.19)$$

e o operador de campo quântico e do dual para o ELKO são <sup>1</sup>

$$\eta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^S(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^A(\mathbf{p}) e^{+ip_{\mu}x^{\mu}} \right], \quad (6.20)$$

---

<sup>1</sup>O fator  $\frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}}$  que aparece na integral do operador de campo é de extrema importância, pois é responsável por manter o elemento de volume invariante por transformações de Lorentz, como no caso dos campos bosônicos e fermiônicos usuais porém para este caso aparece um termo de massa.

$$\bar{\eta}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \sum_{\beta} \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\mathbf{p}) e^{+ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\beta}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right]. \quad (6.21)$$

## 6.2 O PROPAGADOR PARA O ELKO

Essencialmente a ideia de propagador está associada com a relação [19]

$$\langle 0 | [\eta(x'), \bar{\eta}(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | \eta(x') \bar{\eta}(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{\eta}(x) \eta(x') | 0 \rangle, \quad (6.22)$$

onde o estado  $|0\rangle$  representa o vácuo físico e cada uma das parcelas de (6.22) se refere a amplitude de propagação das partículas. A primeira parcela do comutador está associada a uma partícula autoconjugada com energia positiva propagando de  $x$  até  $x'$  enquanto a segunda parcela refere-se à antipartícula.

Usando a equação (6.22) escrevemos então a amplitude de propagação para o ELKO como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \left( \langle 0 | \eta(x') \bar{\eta}(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{\eta}(x) \eta(x') | 0 \rangle \right). \quad (6.23)$$

O fator  $\vartheta$  da última equação acima será fixado posteriormente quando impusermos que a integração de  $\mathcal{Q}(x' - x)$  em todo espaço-tempo deve nos assegurar o valor igual a 1. Isso garante que podemos encontrar a amplitude de propagação dessa partícula em algum lugar do universo, conseqüentemente,  $|\mathcal{Q}(x' - x)|^2$  é a probabilidade de encontrá-la.

Devemos lembrar que queremos integrar sobre todo espaço-tempo<sup>2</sup>. A propagação de uma partícula autoconjugada, como no caso de Dirac, é um processo onde uma partícula é criada a partir do vácuo em  $x$ , e se propaga até  $x'$  onde é absorvida pelo vácuo. Devemos ressaltar que uma partícula não pode ser destruída antes de ser criada, uma vez que isso aconteça o ordenamento temporal dos eventos estará sendo violado.

Uma vez que as amplitudes de propagação fermiônicas são antissimétricas pela troca  $x \rightarrow x'$ , escreveremos a amplitude para o processo como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \langle 0 | \eta(x') \bar{\eta}(x) | 0 \rangle \theta(x'^0 - x^0) - \vartheta \langle 0 | \bar{\eta}(x) \eta(x') | 0 \rangle \theta(x^0 - x'^0), \quad (6.24)$$

onde as funções  $\theta(x'^0 - x^0)$  e  $\theta(x^0 - x'^0)$  são funções de Heaviside, as quais exigem que  $x'^0 > x^0$  e  $x^0 < x'^0$  respectivamente. De uma maneira mais compacta a equação (6.24) se resume a

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \theta(x'^0 - x^0) \langle 0 | [\eta(x'), \bar{\eta}(x)] | 0 \rangle. \quad (6.25)$$

Podemos também fazer uso do operador de ordenamento temporal,  $\mathcal{T}$ , e escrever a equação

<sup>2</sup>Como já é sabido dos capítulos anteriores o ELKO pode vir a violar a estrutura de localidade, portanto, esperamos que em algum momento em sua quantização possamos nos deparar novamente com algo que nos remeta a esse fato. Veremos que mesmo assim a causalidade será respeitada pelos campos quânticos associados, isso é de mostrado de forma bem detalhada e discutida na referência [15].

(6.24) como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \langle 0 | \mathcal{T} \eta(x') \bar{\eta}(x) | 0 \rangle. \quad (6.26)$$

O operador  $\mathcal{T}$  requer que os operadores de campo sejam colocados em ordem temporal, o que possui maior  $x^0$  à esquerda. Calcularemos então  $\mathcal{Q}(x' - x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x' - x) = & \left\langle \left| \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 \sqrt{2mE(\mathbf{p}')}} \right. \right. \\ & \times \sum_{\beta} \sum_{\beta'} \left[ c_{\beta'}(\mathbf{p}') \lambda_{\beta'}^S(\mathbf{p}') e^{-ip'_{\mu} x'^{\mu}} + c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}') \lambda_{\beta'}^A(\mathbf{p}') e^{+ip'_{\mu} x'^{\mu}} \right] \\ & \left. \left. \times \left[ c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\mathbf{p}) e^{+ip_{\mu} x^{\mu}} + c_{\beta}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\mathbf{p}) e^{+ip_{\mu} x^{\mu}} \right] \right| \right\rangle \theta(x'^0 - x^0). \quad (6.27) \end{aligned}$$

Agora faremos uso das relações entre os operadores  $c_{\beta}(\mathbf{p})$  e  $c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p})$  contidas em (6.18), obtendo desta maneira

$$\langle 0 | c_{\beta}(\mathbf{p}) c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}') | 0 \rangle + \underbrace{\langle 0 | c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}') c_{\beta}(\mathbf{p}) | 0 \rangle}_{=0} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\beta\beta'} \langle 0 | 0 \rangle, \quad (6.28)$$

onde o estado normalizado fica sendo  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ , restando apenas

$$\langle 0 | c_{\beta}(\mathbf{p}) c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\beta\beta'}. \quad (6.29)$$

Assim sendo, podemos escrever  $\langle 0 | \mathcal{T} \eta(x') \bar{\eta}(x) | 0 \rangle$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2mE(\mathbf{p})} \sum_{\beta} \left[ \lambda_{\beta}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}(x'^{\mu} - x^{\mu})} \theta(x'^0 - x^0) \right. \\ \left. - \lambda_{\beta}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\mathbf{p}) e^{+ip_{\mu}(x'^{\mu} - x^{\mu})} \theta(x^0 - x'^0) \right], \quad (6.30) \end{aligned}$$

e recorrendo às somas de spin dos espinores  $\lambda_{\beta}^S$  e  $\lambda_{\beta}^A$ , que estão nas equações (3.72) e (3.73), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left[ (\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)) e^{-ip_{\mu}(x'^{\mu} - x^{\mu})} \theta(x'^0 - x^0) \right. \\ \left. + (\mathbf{I} - \mathcal{G}(\phi)) e^{+ip_{\mu}(x'^{\mu} - x^{\mu})} \theta(x^0 - x'^0) \right]. \quad (6.31) \end{aligned}$$

Usando o fato do operador (3.71), que é um operador ímpar, e fazendo  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  no segundo

termo, a amplitude de propagação fica sendo

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left[ (\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)) e^{-iE(\mathbf{p})(x'^0 - x^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \theta(x'^0 - x^0) \right. \\ \left. + (\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)) e^{+iE(\mathbf{p})(x'^0 - x^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \theta(x^0 - x'^0) \right]. \quad (6.32)$$

A próxima etapa será usar a função de Heaviside na forma integral, a qual é dada por

$$\theta(x'^0 - x^0) = \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(x'^0 - x^0)}}{\omega}, \quad (6.33)$$

$$\theta(x^0 - x'^0) = \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(x^0 - x'^0)}}{\omega}. \quad (6.34)$$

Inserindo as equações (6.33) e (6.34) em (6.32), vamos obter

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \int \frac{d\omega}{2\pi i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left[ (\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)) e^{-iE(\mathbf{p})(x'^0 - x^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \frac{e^{i\omega(x'^0 - x^0)}}{\omega} \right. \\ \left. + (\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)) e^{+iE(\mathbf{p})(x'^0 - x^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \frac{e^{i\omega(x^0 - x'^0)}}{\omega} \right], \quad (6.35)$$

que após agrupar alguns termos fornece

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \int \frac{d\omega}{2\pi i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left[ \frac{(\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi))}{\omega} \left( e^{i(\omega - E(\mathbf{p}))(x'^0 - x^0)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-i(\omega - E(\mathbf{p}))(x'^0 - x^0)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \right) \right]. \quad (6.36)$$

Agora, fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\text{para o primeiro termo da integral: } \omega \rightarrow p_0 = -(\omega - E(\mathbf{p})),$$

$$\text{para o segundo termo da integral: } \omega \rightarrow p_0 = \omega - E(\mathbf{p}),$$

ficamos com

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \int \frac{dp^0}{2\pi i} e^{-ip_0(x'^0 - x^0)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \\ \times \left[ \frac{\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)}{E(\mathbf{p}) - p_0} + \frac{\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)}{E(\mathbf{p}) + p_0} \right]. \quad (6.37)$$

Analisando apenas a integral em  $p^0$ , no plano complexo, temos polos localizados em  $p_0 = \pm E(\mathbf{p})$ , sendo assim usamos o teorema dos resíduos para calculá-la. Desta maneira

podemos prosseguir se fizermos o seguinte [5, 19]

$$E(\mathbf{p}) = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2},$$

desta forma, temos

$$p_o = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2},$$

assim os dois termos entre colchetes podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)}{E(\mathbf{p}) - p_o} + \frac{\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)}{E(\mathbf{p}) + p_o} &= \frac{-2E(\mathbf{p})(\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi))}{p_o^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \\ &= \frac{-2E(\mathbf{p})(\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi))}{p_\mu p^\mu - m^2}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Substituindo a relação (6.38) na equação (6.37) obtemos

$$\mathcal{Q}(x' - x) = i\vartheta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ \frac{\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (6.39)$$

o fator  $i\epsilon$  contido na última expressão acima desloca os polos,  $p_o = \pm(E(\mathbf{p}) - i\epsilon)$ , de uma quantidade  $\epsilon$  acima ou abaixo do eixo real.

### 6.3 O PROPAGADOR PARA O ELKO NA AUSÊNCIA DE UMA DIREÇÃO PRIVILEGIADA

Vamos analisar nesta seção o comportamento do propagador do ELKO na ausência de uma direção preferencial. Sendo assim o integraremos sobre todos os momentos, porém estamos livre para escolher qualquer sistema de coordenadas. Desta forma escolheremos um sistema no qual  $(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$  esteja ao longo do eixo  $z$ . Para esta situação temos que  $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$  dependerá apenas de  $p$  e  $\theta$ , conforme mostrado em (B.1), e a única dependência em relação ao ângulo  $\phi$  está na função  $\mathcal{G}(\phi)$ , a qual zera quando integrada no intervalo  $\{0, 2\pi\}$ . Com isso em mente, o propagador se reduz simplesmente a

$$\mathcal{Q}(x' - x) = i\vartheta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ \frac{\mathbf{I}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (6.40)$$

O próximo passo é encontrar o valor de  $\vartheta$ . Para tanto precisamos usar algo que foi discutido no início deste capítulo. Vamos integrar a equação (6.40) em todo o espaço e o valor dessa integração deve ser igual a 1. Começamos chamando  $(x'^\mu - x^\mu) = X^\mu$ , então isso resultará

em

$$\underbrace{\int dX^\mu \mathcal{Q}(x' - x)}_1 = i\vartheta \int \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} dX^\mu e^{-ip_\mu X^\mu} \left[ \frac{\mathbf{I}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (6.41)$$

desta forma temos

$$\begin{aligned} i\vartheta \int \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} dX^\mu e^{-ip_\mu X^\mu} \left[ \frac{\mathbf{I}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right] &= 1 \\ i\vartheta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^4(p^\mu) \left[ \frac{\mathbf{I}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right] &= 1, \end{aligned} \quad (6.42)$$

levando a

$$\frac{i\vartheta \mathbf{I}}{-m^2 + i\epsilon} = \mathbf{I}. \quad (6.43)$$

No limite de  $\epsilon \rightarrow 0$ , estabelecemos que

$$\vartheta = im^2. \quad (6.44)$$

Com o fator  $\vartheta$  fixado, escrevemos (6.40) como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = -m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ \frac{\mathbf{I}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (6.45)$$

Como discutido nos livros texto, sabemos que o propagador de um campo quântico é uma função de Green, então este deve obedecer a equação de onda da seguinte maneira

$$(\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} \mathbf{I} + m^2 \mathbf{I}) \mathcal{Q}(x' - x) \propto \delta^4(x' - x) \mathbf{I}, \quad (6.46)$$

desta maneira podemos atuar com o operador  $(\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} + m^2)$  em  $\mathcal{Q}(x' - x)$  e constatar se obtemos um resultado proporcional à função Delta de Dirac, assim temos

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} \mathbf{I} + m^2 \mathbf{I}) \mathcal{Q}(x' - x) &= \partial_{\mu'} \partial^{\mu'} \{ \theta(x'^0 - x^0) \langle 0 | [\eta(x'), \bar{\eta}(x)] | 0 \rangle \} \\ &\quad + m^2 \{ \theta(x'^0 - x^0) \langle 0 | [\eta(x'), \bar{\eta}(x)] | 0 \rangle \}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Como  $\theta(x'^0 - x^0)$  é uma função apenas de componentes temporais, as únicas derivadas não nulas são  $\partial_{0'}$  e  $\partial^{0'}$ , portanto

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} + m^2) \mathcal{Q}(x' - x) &= \partial^{0'} \partial_{0'} [\theta(x'^0 - x^0)] \langle 0 | [\eta(x'), \bar{\eta}(x)] | 0 \rangle \\ &\quad + 2\partial_{0'} [\theta(x'^0 - x^0)] \partial^{0'} \langle 0 | [\eta(x'), \bar{\eta}(x)] | 0 \rangle + \theta(x'^0 - x^0) (\partial^2 + m^2) \langle 0 | [\eta(x'), \bar{\eta}(x)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.48)$$



Após alguns cálculos usuais, esta última equação acima nos fornece simplesmente

$$(\partial^2 + m^2)\mathcal{Q}(x' - x) = -i\delta^4(x' - x). \quad (6.49)$$

Por fim, vamos calcular o propagador de uma maneira simples, através da transformação de Fourier, ou seja, escrevendo

$$\mathcal{Q}(x' - x) = -m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \tilde{\mathcal{Q}}(p). \quad (6.50)$$

Colocando a equação (6.50) em (6.49) temos que encontrar a função  $\tilde{\mathcal{Q}}(p)$  que dá origem a  $\mathcal{Q}(x' - x)$ . Prossequindo usando este raciocínio vamos obter

$$-m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} + m^2) e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \tilde{\mathcal{Q}}(p) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)}. \quad (6.51)$$

A equação (6.51) é idêntica à equação (6.49), porém está na forma integral, então (6.51) nos fornece como resultado

$$\tilde{\mathcal{Q}}(p) = \frac{-1}{m^2(p^2 - m^2)}. \quad (6.52)$$

Substituindo este último resultado obtido na equação (6.50) temos o propagador para o ELKO, que finalmente pode ser escrito como

$$\mathcal{S}^{ELKO}(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ \frac{\mathbf{I}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (6.53)$$

Devemos frisar que o propagador para o ELKO é diferente do propagador de Dirac

$$\mathcal{S}^{DIRAC}(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[ \frac{\gamma^\mu p_\mu + m\mathbf{I}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (6.54)$$

O propagador para o ELKO, na ausência de uma direção preferencial, é idêntico ao propagador do campo escalar de Klein-Gordon. Como já vimos anteriormente o ELKO satisfaz a equação de Klein-Gordon, dada por (4.19). Neste capítulo construímos o propagador para o ELKO partindo de uma lagrangiana clássica, a qual sabemos que é válida para este caso desde o Capítulo 4, e a partir dela chegamos na energia do sistema. Assim estabelecemos quais deveriam ser as relações existentes entre operadores de criação e aniquilação a fim de manter a energia positivo definida. Um fato que deve ser destacado é que o caminho inverso também é válido, poderíamos ter partido diretamente de operadores de campos e relações fermiônicas usuais, desta forma construir a amplitude de propagação e assim chegar no propagador, e conseqüentemente após este procedimento verificar a Hamiltoniana do sistema.

## 6.4 INTERAÇÕES PERMITIDAS PARA O ELKO

Os campos quânticos do ELKO foram apresentados anteriormente como candidatos a matéria escura, não possuindo interações com partículas do Modelo Padrão exceto com o campo de Higgs, portanto nesta seção vamos deixar isso claro [5, 20]. Vimos que a lagrangiana associada ao ELKO é a lagrangiana do campo escalar, dada por

$$\mathcal{L}(x) = \partial^\mu \bar{\eta}(x) \partial_\mu \eta(x) - m^2 \bar{\eta}(x) \eta(x). \quad (6.55)$$

Então, nosso próximo passo é analisar quais tipos de interações serão possíveis para o ELKO, lembrando que os campos  $\eta(x)$  e  $\bar{\eta}(x)$  são dotados de dimensão de massa 1 e qualquer interação a ser analisada com as partículas do Modelo Padrão será regida pelo argumento de contagem de potência, para que desta maneira possamos obter uma teoria renormalizável perturbativamente. Começaremos então evidenciando a possibilidade da interação da forma [5]

$$\mathcal{L}^{int}(x) = \lambda_E \phi^\dagger(x) \phi(x) \bar{\eta}(x) \eta(x), \quad (6.56)$$

onde  $\phi(x)$  é um dubleto de Higgs e  $\lambda_E$  é uma constante de acoplamento adimensional. Claro está que mais interações desse tipo são possíveis se mais campos escalares existirem na natureza [6]. Uma outra interação permitida é autointeração [5]

$$\mathcal{L}^{int}(x) = \alpha_E [\bar{\eta}(x) \eta(x)]^2, \quad (6.57)$$

onde  $\alpha_E$  é outra constante adimensional. Remetendo-nos ao fato de que o ELKO é neutro, via atuação do operador conjugação de carga, é fácil entender então o porquê interações com o campo eletromagnético não podem ser observadas, ou seja, interações do tipo

$$\mathcal{L}^{int} = \bar{\eta}(x) A^\mu(x) A_\mu(x) \eta(x), \quad (6.58)$$

não são possíveis. As interações dadas em (6.56) e (6.57) são possíveis, pois são interações renormalizáveis perturbativamente. A interação entre ELKO-Higgs, dada em (6.56), é a interação dominante entre o ELKO e partículas do modelo Padrão [5, 6]. A natureza escura do ELKO é esclarecida em [5], pois devido a dimensão de massa ser 1 ao invés de 3/2 isso proíbe uma classe de interações com os campos de gauge e campos de matéria do Modelo Padrão, o que o faz não ser detectado tão facilmente.

## 7 ESTRUTURA DE LOCALIDADE

Neste capítulo veremos uma discussão a respeito da estrutura de localidade do campo quântico associado aos espinores ELKO. As relações fermiônicas de anticomutação entre os operadores de campo,  $\eta(x)$ , e densidade de momento,  $\pi(x)$ , serão construídas e analisadas para, assim, tirarmos informações físicas relevantes a respeito da estrutura de localidade. Já de antemão, como visto nos capítulos anteriores, sabemos que o ELKO viola a simetria de Lorentz nas somas de spin com o aparecimento do fator  $\mathcal{G}(\phi)$ , então aqui veremos quais consequências tal termo traz para a estrutura do campo.

Dos livros texto, tais como [7, 19], sabemos que as relações fermiônicas usuais entre os operadores  $\eta(x)$  e  $\pi(x)$  devem ser

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (7.1a)$$

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \bar{\eta}(\mathbf{x}',t)\} = 0, \quad (7.1b)$$

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \eta(\mathbf{x}',t)\} = 0, \quad (7.1c)$$

$$\{\pi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} = 0. \quad (7.1d)$$

Essas relações devem ser satisfeitas por todo campo quântico local. Desta maneira vamos calcular esses quatro correlatores para o ELKO e verificar se o mesmo as obedece.

### 7.1 ANTICOMUTADOR CAMPO-MOMENTO

Vamos começar calculando o seguinte correlator a tempos iguais

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} = \{\eta(\mathbf{x},t), \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t}(\mathbf{x}',t)\}. \quad (7.2)$$

Então escrevendo a última relação em termos dos operadores de campo ficaremos com

$$\begin{aligned}
\{\eta(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p}')}} \times \\
&\quad \sum_{\beta\beta'} \left[ c_\beta(\mathbf{p}) \lambda_\beta^S(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + c_\beta^\dagger(\mathbf{p}) \lambda_\beta^A(\mathbf{p}) e^{ip_\mu x^\mu} \right] \\
&\quad \times \left[ c_{\beta'}^\dagger(\mathbf{p}') (iE(\mathbf{p}')) \bar{\lambda}_{\beta'}^S(\mathbf{p}') e^{ip'_\mu x'^\mu} + c_{\beta'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\beta'}^A(\mathbf{p}') (-iE(\mathbf{p}')) e^{ip'_\mu x'^\mu} \right] \\
&\quad + \left[ c_{\beta'}^\dagger(\mathbf{p}') (iE(\mathbf{p}')) (\bar{\lambda}_{\beta'}^S(\mathbf{p}'))^\dagger e^{ip'_\mu x'^\mu} + c_{\beta'}(\mathbf{p}') (\bar{\lambda}_{\beta'}^A(\mathbf{p}'))^\dagger (-iE(\mathbf{p}')) e^{-ip'_\mu x'^\mu} \right] \\
&\quad \times \left[ c_\beta(\mathbf{p}) (\lambda_\beta^S(\mathbf{p}))^\dagger e^{-ip_\mu x^\mu} + c_\beta^\dagger(\mathbf{p}) (\lambda_\beta^A(\mathbf{p}))^\dagger e^{ip_\mu x^\mu} \right].
\end{aligned}$$

Passaremos agora a usar as relações (6.18) e (6.19), chegando assim em

$$\begin{aligned}
\{\eta(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p}')}} \times \\
&\quad \sum_{\beta\beta'} iE(\mathbf{p}') \left[ \lambda_\beta^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^S(\mathbf{p}') \{c_\beta(\mathbf{p}), c_{\beta'}^\dagger(\mathbf{p}')\} e^{-ip_\mu x^\mu + ip'_\mu x'^\mu} \right] \\
&\quad - \left[ \lambda_\beta^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^A(\mathbf{p}') \{c_\beta^\dagger(\mathbf{p}), c_{\beta'}(\mathbf{p}')\} e^{ip_\mu x^\mu - ip'_\mu x'^\mu} \right]. \tag{7.3}
\end{aligned}$$

Fazendo a integração de (7.3) em  $\mathbf{p}'$ , e posteriormente no segundo termo da integral fazendo a mudança de variáveis  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ , obteremos

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} = \frac{i}{2m} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \sum_\beta \left[ \lambda_\beta^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^S(\mathbf{p}) - \lambda_\beta^A(-\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^A(-\mathbf{p}) \right]. \tag{7.4}$$

Claramente podemos recorrer às somas de spin, (3.72) e (3.73), com as quais finalmente podemos escrever

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} [\mathbf{I} + \mathcal{G}(\phi)]. \tag{7.5}$$

Novamente a matriz  $\mathcal{G}(\phi)$  aparece. Se adotarmos a mesma forma de raciocínio tomada anteriormente, estando livres para escolher uma direção em que o momento esteja alinhado, optaremos por integrar de maneira que a quantidade “ $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ” esteja alinhada com um eixo de forma que  $\mathbf{p}$  seja independente do ângulo  $\phi$ . Desta maneira, usando deste artifício, sabemos que pela parametrização do momento feita no Capítulo 3, a segunda integral de (7.5) é nula quando  $\mathbf{p}$  está alinhado com o eixo  $z$ , restando-nos apenas

$$i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{7.6}$$

e finalmente concluímos que

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.7)$$

A relação (7.7) foi obtida negligenciando-se as demais direções espaciais pelas quais possam existir dependência em  $\mathcal{G}(\phi)$ . Recentemente, um estudo mais rigoroso foi realizado com relação ao fator  $\mathcal{G}(\phi)$ , ou mais precisamente no termo  $(I + \mathcal{G}(\phi))$  que aparece no propagador [21]. Conseguiu-se mostrar que a integral que contém  $\mathcal{G}(\phi)$  é nula independentemente do eixo em que  $\mathbf{p}$  esteja alinhado, em um contexto bastante rebuscado, matematicamente falando. Entretanto, um novo termo aparece nas equações de movimento do campo, o que leva à uma nova lagrangiana, embora ainda seja a de Klein-Gordon, esta lagrangiana quebra explicitamente a simetria de Lorentz e assim o mesmo acontece com as equações de movimento. Esta nova lagrangiana está sendo objeto de análise na comunidade que pesquisa na área.

## 7.2 ANTICOMUTADOR CAMPO-CAMPO E MOMENTO-MOMENTO

Para as próximas relações vamos permanecer usando o mesmo procedimento feito anteriormente. Podemos de maneira análoga, portanto, determinar o anticomutador entre  $\eta(\mathbf{x},t)$  e  $\bar{\eta}(\mathbf{x}',t)$ . Então, usando algumas identidades já encontradas e seguindo com os cálculos padrão podemos escrever para este caso

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \bar{\eta}(\mathbf{x}',t)\} = \frac{1}{2m} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E(\mathbf{p})} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \times \sum_{\beta} \underbrace{\left[ \underbrace{\lambda_{\beta}^S(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^{\neg S}(\mathbf{p})}_{m[1+\mathcal{G}(\phi)]} + \underbrace{\lambda_{\beta}^A(-\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^{\neg A}(-\mathbf{p})}_{-m[1+\mathcal{G}(\phi)]} \right]}_{=0}. \quad (7.8)$$

Desta maneira, quando recorremos às somas de spin, o lado direito da última equação é identicamente nulo. Facilmente demonstramos que a relação de anticomutação é dada pela forma usual, ou seja

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \bar{\eta}(\mathbf{x}',t)\} = 0. \quad (7.9)$$

O próximo passo é calcular o anticomutador dos campos a tempos iguais:

$$\begin{aligned} \{\eta(\mathbf{x},t), \eta(\mathbf{x}',t)\} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p}')}} \\ &\times \sum \left[ \{c_{\beta}(\mathbf{p}), c_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} \lambda_{\beta}^{S\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\beta'}^A(\mathbf{p}') e^{-ip_{\mu}x^{\mu} + ip'_{\mu}x'^{\mu}} \right. \\ &\quad \left. + \{c_{\beta'}(\mathbf{p}'), c_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p})\} \lambda_{\beta'}^{A\dagger}(\mathbf{p}') \lambda_{\beta}^S(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu} + ip'_{\mu}x'^{\mu}} \right]. \quad (7.10) \end{aligned}$$

Usando as relações (6.18) e (6.19), a última equação acima se reduz à

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \eta(\mathbf{x}',t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2mE(\mathbf{p})} \sum_{\beta} \left[ \lambda_{\beta}^{S\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^A(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}(x^{\mu}-x'^{\mu})} + \lambda_{\beta}^{A\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^S(\mathbf{p}) e^{ip_{\mu}(x^{\mu}-x'^{\mu})} \right]. \quad (7.11)$$

Fazendo uso do mesmo truque usado anteriormente, e efetuando a transformação  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  no segundo termo da integral, ficaremos com

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2mE(\mathbf{p})} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \underbrace{\sum_{\beta} \left[ \lambda_{\beta}^{S\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^A(\mathbf{p}) + \lambda_{\beta}^{A\dagger}(-\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^S(-\mathbf{p}) \right]}_{(\star)}, \quad (7.12)$$

na integral acima os cálculos da relação  $\star$  em termos das componentes espinoriais e  $\lambda^S(\mathbf{p})$  e  $\lambda^A(\mathbf{p})$ , temos explicitamente

$$\star = \sum_{\beta} \left[ \lambda_{\beta}^{S\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^A(\mathbf{p}) + \lambda_{\beta}^{A\dagger}(-\mathbf{p}) \lambda_{\beta}^S(-\mathbf{p}) \right] = 0. \quad (7.13)$$

De modo análogo aos casos anteriores, mostramos que se pode escrever a relação de anticomutação a tempos iguais como

$$\{\eta(\mathbf{x},t), \eta(\mathbf{x}',t)\} = 0. \quad (7.14)$$

De maneira correlata, a última relação a ser mostrada é o anticomutador momento-momento. Tal relação pode ser escrita como

$$\{\pi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t}(\mathbf{x},t), \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t}(\mathbf{x}',t) \right\}. \quad (7.15)$$

Após uma série de cálculos, assim como para os casos anteriores, temos na forma mais compacta

$$\{\pi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E(\mathbf{p})}{2m} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \underbrace{\sum_{\beta} \left[ \overset{-A\dagger}{\lambda}_{\beta}(\mathbf{p}) \overset{-S}{\lambda}_{\beta}(\mathbf{p}) + \overset{-S\dagger}{\lambda}_{\beta}(-\mathbf{p}) \overset{-A}{\lambda}_{\beta}(-\mathbf{p}) \right]}_{\blacksquare}.$$

Analisando o termo do somatório, podemos calculá-lo em termos das componentes espinoriais. Evocando as somas de spin dadas na relação (A.8), obtemos também para este caso

$$\blacksquare = \sum_{\beta} \left[ \overset{-A\dagger}{\lambda}_{\beta}(\mathbf{p}) \overset{-S}{\lambda}_{\beta}(\mathbf{p}) + \overset{-S\dagger}{\lambda}_{\beta}(-\mathbf{p}) \overset{-A}{\lambda}_{\beta}(-\mathbf{p}) \right] = 0, \quad (7.16)$$

de onde finalmente vemos que

$$\{\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{x}',t)\} = 0. \quad (7.17)$$

Podemos concluir das equações (7.7), (7.9), (7.14) e (7.17) que  $\eta(x)$  é um campo local caso a integral de  $\mathcal{G}(\phi)$  seja nula quando integrada em todo o espaço, independente da direção. Caso contrário, se esta não for nula não podemos afirmar que o campo seja local.

## 8 CONCLUSÕES

Neste trabalho fizemos a construção algébrica e sistemática do espinor ELKO, proposto por Alhuwalia e Grumiller, o qual forma um conjunto completo e de autoespinores do operador conjugação de carga,  $C$ . Por este motivo o ELKO é considerado um forte candidato a matéria escura, visto que a neutralidade via atuação de  $C$  significa que ele não interage com o campo eletromagnético. Durante sua construção, quando nos referimos ao ELKO, a maneira mais simples e precisa de definir esse espinor é através das equações (3.5), (3.6a) e (3.6b), pois, essas equações nos mostram que é através da “Mágica da matrizes de Pauli” que as componentes espinoriais se transformam como objetos de mão direita e objetos de mão esquerda no espaço de representações  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ . Isso difere bastante do caso dos espinores de Dirac onde as componentes espinoriais se transformam por paridade.

Para calcularmos as somas de spin primeiramente precisamos do dual do ELKO. Sendo assim, durante sua construção vimos que o ELKO necessita de um “novo dual”, o qual requer a troca de helicidade dos espinores para que assim se assegure uma norma real não nula e invariante por transformações de Lorentz. A partir do momento que encontramos o dual mostramos que o ELKO viola a simetria de Lorentz nas somas de spin, com o surgimento do termo  $\mathcal{G}(\phi)$ . Pode-se afirmar então que tal fato é algo intrínseco da estrutura do ELKO. Uma vez que, para este caso, as somas de spin não são quantidades invariantes por transformações de Lorentz, isso traz drásticas consequências para a interpretação física da teoria. Por este motivo fomos levados a buscar um grupo pelo qual as somas de spin do ELKO são invariantes, chegando na VSR. Apesar do ELKO aqui não ter sido construído desde o princípio usando-se a álgebra da VSR, pudemos sem perda de generalidade alguma, usar os resultados obtidos na construção do ELKO dentro do grupo Lorentz, o chamado de *Lorentz ELKO*, e analisá-los dentro da VSR, obtendo o *VSR ELKO*. O grupo *SIM(2)* da VSR mantém as propriedades do ELKO inalteradas, com a grande vantagem de que a matriz  $\mathcal{G}(\phi)$  é invariante por transformações dos seus geradores.

Quando analisamos a dinâmica do campo ELKO, vimos que este obedece apenas a equação de Klein-Gordon e portanto a lagrangiana que dá origem à equação de movimento do campo é a lagrangiana do campo escalar.

No tocante aos acoplamentos permitidos para o ELKO vimos que este possui duas interações possíveis. Uma delas é com o dubleto de Higgs e a outra interação permitida é a autointeração. O fato do ELKO não interagir com campos de gauge ou com férmions



do Modelo Padrão faz com que seja difícil detectá-lo, por estas razões o ELKO é um forte candidato a matéria escura.

De posse da lagrangiana do sistema, construímos a Hamiltoniana associada ao ELKO, a qual é positivo definida se as relações entre os operadores de criação e aniquilação de partículas obedecem as relações fermiônicas usuais. Portanto, se a lagrangiana é a mesma do campo escalar, concluímos que o ELKO possui dimensão de massa 1 ao invés de  $3/2$ , diferentemente do que é usualmente esperado para campos fermiônicos. Sabemos que as somas de spin aparecem no ângulo da estrutura do propagador do campo quântico, desta maneira o fator  $\mathcal{G}(\phi)$  é herdado quando se constrói o propagador para o ELKO. Sendo assim, a estrutura local do campo depende naturalmente deste termo. Logo, a localidade deste campo está intimamente relacionada a  $\mathcal{G}(\phi)$ . Das relações entre os operadores de campo e momento canonicamente conjugado podemos inferir que se  $\mathcal{G}(\phi)$  for nula quando integrada em todo espaço o campo é local, caso contrário existirá uma dependência espacial e assim o campo deixa de ser local.

Finalmente, após estudar algebricamente os espinores ELKO e principalmente notar a necessidade de analisá-los dentro da VSR, somos levados a considerar que a matéria escura não precisa necessariamente satisfazer a simetria de Poincaré. Assim, estamos apresentando um novo formalismo para estudar a matéria escura baseado no fato de que as simetrias do espaço-tempo para tal caso não sejam as mesmas encetadas pelo grupo de Poincaré, ou pelo menos o grupo completo de Poincaré.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume 1, Primeira Edição, Editora Cambridge University Press, New York (1995).
- [2] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*, Editora Cambridge University Press, New York (2012).
- [3] Cheng-Yang Lee, Symmetries of Elko and massive vector fields, hep-th/1306.5491 (2013).
- [4] D. V. Ahluwalia-Khalilova e D. Grumiller, Dark matter: A spin one half fermion field with mass dimension one?, Phys. Rev. **D 72**, 067701 (2005).
- [5] D. V. Ahluwalia-Khalilova e D. Grumiller, Spin-half fermions with mass dimension one: Theory, phenomenology, and dark matter, JCAP 0507:012 (2005).
- [6] A. B. Gillard e B. M. S. Martin, Quantum fields, dark matter and non-standard Wigner classes, hep-th/0904.2063 (2009).
- [7] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Segunda Edição, Editora Cambridge University Press, New York (1996).
- [8] C. Itzykson e J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Primeira Edição, Editora Dover Publications, New York (2005).
- [9] D. V. Ahluwalia-Khalilova, Cheng-Yang Lee e D. Schrittt, Elko as self-interacting fermionic dark matter with axis of locality, Phys. Lett. **B 687**, 248 (2010).
- [10] P. Ramond, *Field Theory: A modern primer*, Segunda Edição, Editora Addison Wesley-Publishing, California (1989).
- [11] C. G. Böhrmer e L. Corpe, Helicity - from Clifford to Graphene, Journal of Physics **A 45**, 205206 (2012).
- [12] D. V. Ahluwalia-Khalilova, Cheng-Yang Lee e D. Schrittt, Self-interacting Elko dark matter with an axis of locality, Phys. Rev. **D 83**, 065017 (2011).
- [13] D. V. Ahluwalia, On a local mass dimension one Fermi field of spin one-half and the theoretical crevice that allows it, hep-th/1305.7509 (2013).

- [14] A. G. Cohen e S. L. Glashow, Very Special Relativity, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 021601 (2006).
- [15] S. P. Horvath, *On the Relativity of Elko dark matter*, Dissertação de Mestrado, University of Canterbury, New Zealand (2011).
- [16] D. V. Ahluwalia e S. P. Horvath, Very special relativity as relativity of dark matter: the Elko connection, *JHEP* 1011:078 (2010).
- [17] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz e H. Zassenhaus, Subgroups of the Poincaré group and their invariants, *J. Math. Phys.* **17**, 977 (1976).
- [18] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Segunda Edição, Editora Princeton University Press, New Jersey (2003).
- [19] M. E. Peskin e D. Schroeder's, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Primeira Edição, Editora Addison-Wesley Publishing Company, New York (1995).
- [20] A. Gillard, *Quantum Fields, Dark Matter, Elko Field and Non-Standard Wigner Classes*, Tese de Doutorado, University of Canterbury, New Zealand (2012).
- [21] Cheng-Yang Lee, The Lagrangian for Mass Dimension One Fermions, hep-th/1404.5307v1 (2014).
- [22] D. V. Ahluwalia, M. B. Johnson e T. Goldman, Majorana-Like Representation Spaces: Construction and Physical Interpretation, *Mod. Phys. Lett.* **A 9**, 439 (1994).
- [23] M. S. Marinov, Construction of Invariant Amplitudes for Interactions of Particles with Any Spin, *Ann. Phys.* **49**, 357 (1968).

## Apêndice A RELAÇÕES BI-ORTONORMAIS PARA OS ESPINORES $\lambda(\mathbf{p})$

Este apêndice está reservado para que as relações espinoriais do dual do ELKO sejam explicitadas para o caso usual  $\bar{\lambda}(\mathbf{p}) = \lambda^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0$ . Começamos notando que

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = \left(\frac{E+m}{2m}\right) \left(\mathbf{I} + \frac{\sigma_x p_x}{E+m}\right) \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}^\dagger \gamma_0 \left(\mathbf{I} + \frac{\sigma_x p_x}{E+m}\right) \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}.$$

Tomando o conjugado hermitiano da primeira matriz e multiplicando por  $\gamma_0$  teremos:

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = \left(\frac{E+m}{2m}\right) \begin{pmatrix} -i\frac{p_x}{E+m}\Theta\phi_L^-(\mathbf{0}) + [\phi_L^-(\mathbf{0})]^* & -i\Theta\phi_L^-(\mathbf{0}) + \frac{p_x}{E+m}[\phi_L^-(\mathbf{0})] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* + \frac{p_x}{E+m}[\phi_L^-(\mathbf{0})] \\ \frac{p_x}{E+m}[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* + \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo a equação acima em termos das matrizes  $\phi_L^-(\mathbf{0})$  e multiplicando todos os termos obteremos após uma série de cálculos

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = \left(\frac{E+m}{2m}\right) \left[ im + \frac{ip^2 m}{(E+m)^2} - im - \frac{ip^2 m}{(E+m)^2} \right] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Vamos repetir os cálculos, agora para  $\bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{0})\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0})$

$$\left(\frac{E+m}{2m}\right)^2 \left(\mathbf{I} + \frac{\sigma_x p_x}{E+m}\right) \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}^\dagger \gamma_0 \left(\mathbf{I} - \frac{\sigma_x p_x}{E+m}\right) \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^2 \begin{pmatrix} ip_x\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* + \phi_L^-(\mathbf{0}) & i\Theta[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* + p_x\phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* - p_x\phi_L^+(\mathbf{0}) \\ -ip_x\Theta[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* + \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix},$$

resultando em

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{0})\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{0}) = i\left(\frac{E+m}{2m}\right)\left[\frac{-mp_x}{E+m} + \frac{mp_x}{E+m} + \frac{mp_x}{E+m} + \frac{mp_x}{E+m}\right] = 2im.$$

Repetindo esse procedimento para todos os demais espinores, temos para os autoconjugados

$$\bar{\lambda}_{(-,+)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = 0, \quad \bar{\lambda}_{(-,+)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = 2im, \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = -2im, \quad \bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = 0. \quad (\text{A.3})$$

O mesmo pode ser feito para os espinores anti autoconjugados

$$\bar{\lambda}_{(-,+)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) = 0, \quad \bar{\lambda}_{(-,+)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) = -2im, \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\lambda}_{(+,-)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) = 2im, \quad \bar{\lambda}_{(+,-)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Para as relações cruzadas temos

$$\bar{\lambda}_{(-,+)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(-,+)}^A(\mathbf{p}) = 0, \quad \bar{\lambda}_{(+,-)}^S(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^A(\mathbf{p}) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{\lambda}_{(-,+)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(-,+)}^S(\mathbf{p}) = 0, \quad \bar{\lambda}_{(+,-)}^A(\mathbf{p})\lambda_{(+,-)}^S(\mathbf{p}) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Outras identidades que podemos calcular são as chamadas “twisted spin sums”, fornecidas pelas relações

$$\sum_{\alpha} \left[ \lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p})(\lambda_{\alpha}^A)^T(\mathbf{p}) + \lambda_{\alpha}^A(-\mathbf{p})(\lambda_{\alpha}^S)^T(-\mathbf{p}) \right] = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{\alpha} \left[ (\bar{\lambda}_{\alpha}^S)^T(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) + (\bar{\lambda}_{\alpha}^A)^T(-\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(-\mathbf{p}) \right] = 0. \quad (\text{A.9})$$

## Apêndice B AS COMPONENTES ESPINORIAIS

### B.1 $\phi_L^\pm(\mathbf{0})$ e $\phi_R^\pm(\mathbf{0})$

Representando o vetor unitário  $\hat{p}$ , parametrizado em coordenadas esféricas, como

$$\hat{p} = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)), \quad (\text{B.1})$$

as componentes  $\phi_L^+(\mathbf{0})$  e  $\phi_L^-(\mathbf{0})$  podem ser escritas como

$$\phi_L^+(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{+i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

$$\phi_L^-(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ -\cos(\frac{\theta}{2}) e^{+i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Para as componentes de mão direita temos as seguintes relações

$$\phi_R^+(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} i \sin(\frac{\theta}{2}) e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ -i \cos(\frac{\theta}{2}) e^{+i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

$$\phi_R^-(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -i \cos(\frac{\theta}{2}) e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ -i \sin(\frac{\theta}{2}) e^{+i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

São úteis também as seguintes identidades

$$\sigma_2 \phi_L^+(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -i \sin(\frac{\theta}{2}) e^{+i\frac{\phi}{2}} \\ i \cos(\frac{\theta}{2}) e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma_2 \phi_L^-(\mathbf{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} i \cos(\frac{\theta}{2}) e^{+i\frac{\phi}{2}} \\ i \sin(\frac{\theta}{2}) e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

O fator de massa é escolhido de forma que no caso limite de partículas sem massa,  $m \rightarrow 0$ , os espinores em repouso no espaço de representação  $(1/2,0)$  e  $(0,1/2)$  desapareçam, pois não podem existir partículas sem massa em repouso [22]. Para que isso seja consistente, as amplitudes de interação devem ter o fator  $m^j$ , onde no caso  $j$  é o spin associado à partícula [23].