

ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA

GRÁFICOS DE CONTROLE DE SHEWHART: DUAS DÉCADAS DE
PESQUISA

Tese de Livre-Docência apresentada à
Faculdade de Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade Estadual
Paulista, para a obtenção do título de livre-
docente em Engenharia da Qualidade.

Guaratinguetá
2007

DADOS CURRICULARES

ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA

NASCIMENTO	23.11.1956 – SÃO PAULO / SP
FILIAÇÃO	Geraldo José Barbosa Costa Magnólia Branco Costa
1975/1979	Curso de Graduação FEG - UNESP
1980/1983	Mestrado ITA
1984/1989	Doutorado UNICAMP
1995/1996	Pós Doutorado Wisconsin University Center for Quality and Productivity Improvement

DEDICATÓRIA

aos meus orientadores de mestrado e doutorado, respectivamente
Professores Paulo Renato de Moraes e Sebastião de Amorim

AGRADECIMENTOS

A FUNDUNESP, FAPESP, CAPES, e ao CNPq. Aos meus co-autores Professores Abdur Rahim, Maysa Sacramento De Magalhães, Eugenio Kahn Epprecht, e Luiz César Ribeiro Carpinetti, e aos meus orientados Marcela Aparecida Guerreiro Machado e Fernando Antonio Elias Claro.

COSTA, A. F. B. **Gráficos de Shewhart: Duas Décadas de Pesquisa**. 2007. 163f. Tese de Livre-docência em Engenharia da Qualidade – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

RESUMO

Esta tese apresenta, de forma compacta, os trabalhos mais importantes do autor, que são frutos de uma pesquisa de vinte anos sobre gráficos de Shewhart. O autor estudou os modelos que descrevem o tipo e o instante de ocorrência das causas especiais, propôs novos esquemas de amostragens e estatísticas de monitoramento. Mais recentemente, vem avaliando a capacidade dos gráficos de controle em sinalizar causas especiais quando as observações são autocorrelacionadas e propondo novas estatísticas para o monitoramento de processos multivariados.

PALAVRAS-CHAVE: Gráfico de Shewhart, esquemas de amostragens, estatísticas de monitoramento, dados autocorrelacionados, processos multivariados

COSTA, A. F. B. Shewhart Charts: Two Decades of Research 2007. 163f. Tese de Livre-docência em Engenharia da Qualidade – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

ABSTRACT

In this work, a collection of the most important author's publications is presented. They are the result of two decades of research in the quality control field. The author studied the models that describe the way and the time the process change, proposed new sampling procedures and new statistics for monitoring. More recently, he is studying the performance of the control chart when the data are autocorrelated and, finally, proposing new statistics for monitoring multivariate processes.

KEY-WORDS: Shewhart charts, sampling schemes, new statistics for monitoring, autocorrelated data, multivariate processes

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme falso.....	23
FIGURA 1.2 – Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme verdadeiro.....	25
FIGURA 1.3 – Curvas de Pd versus δ	26
FIGURA 1.4 – Curvas de NMA versus δ	27
FIGURA 2.1 – Gráfico de controle de \bar{X} com amostras de tamanho variável.....	31
FIGURA 2.2 – NMA do gráfico de \bar{X} com amostra de tamanho fixo e variável.....	33
FIGURA 2.3 – Gráfico de controle de np com amostras de tamanho variável.....	37
FIGURA 2.4 – NMA do gráfico de np , esquemas FSS , e VSS	40
FIGURA 2.5 – Gráfico de \bar{X} com duas escalas.....	51
FIGURA 2.6 – TES do gráfico de Shewhart e do gráfico Vp	53
FIGURA 2.7 – TES do gráfico de c com parâmetros fixos e variáveis.....	62
FIGURA 5.2 – Gráfico $EWMA$ com valores de Y_i	97
FIGURA 5.1 – Gráfico de controle $BIDU$	108
FIGURA 5.2 – Gráfico de controle $BITWO$	109
FIGURA 5.3 – Gráfico de controle $SyBIDU$	110
FIGURA 5.4 – Gráfico de controle $SyBITWO$	112
FIGURA 5.5 – Gráfico de controle $SyBITWO$ do exemplo ilustrativo.....	119
FIGURA 5.6 – Gráfico de controle $VMAX$	121
FIGURA 5.7 – Gráfico de controle $VMAX$ com amostragem dupla.....	125
FIGURA 5.8 – Peça do exemplo ilustrativo.....	128
FIGURA 5.9 – Gráfico de controle $VMAX$ com amostragem dupla - exemplo.....	130
FIGURA 6.1 – NMA do gráfico de \bar{X}	133
FIGURA 6.2 – Visão gráfica do esquema de amostragem dupla.....	135
FIGURA 6.3 – NMA do gráfico de \bar{X} com amostragem dupla.....	137
FIGURA 6.4 – NMA do gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho variável.....	138

LISTA DE TABELAS

TABELA 1.1 – Valores de P_d para diferentes combinações de n e de δ	26
TABELA 2.1 – Influência de n_1 e n_2 no NMA do gráfico de \bar{X} , esquema VSS	34
TABELA 2.2 – Parâmetros dos gráficos de controle de np	38
TABELA 2.3 – NMA 's dos gráficos de np com amostras de tamanho fixo e variável	39
TABELA 2.4 – Os estados da cadeia de Markov	42
TABELA 2.5 – TES 's dos gráfico de \bar{X} , esquemas $VSSI$, VSI e VSS , $n_0=3$	47
TABELA 2.6 – TES 's dos gráfico de \bar{X} , esquemas $VSSI$, VSI e VSS , $n_0=5$	48
TABELA 2.7 –Influência dos valores de n_2 , h_1 e k_2 no TES do Gráfico de Vp	54
TABELA 2.8 –Estados da cadeia de Markov	55
TABELA 2.9 –Esquemas adaptativos - notação	59
TABELA 2.10 – Parâmetros do gráfico adaptativo de c	60
TABELA 2.11 – TES para os gráficos de c da tabela 2.10.....	61
TABELA 3.1 – Projeto ótimo dos gráficos de controle de \bar{X} e R	73
TABELA 3.2 – Estados da cadeia de Markov	76
TABELA 3.3 – Valores de $c_0, A_0, A_1, V_0, V_1, d_0, d_1, \lambda$, e δ	80
TABELA 3.4 – Projeto ótimo de um gráfico de \bar{X} com parâmetros fixos e variáveis.....	81
TABELA 4.1 – Valores do NMA para os gráficos de \bar{X} e R e para o gráfico de $\chi^2(\lambda)$..	85
TABELA 4.2 – Valores do NMA para os gráficos de \bar{X} e R e de $EWMA$ ($n=5$).....	88
TABELA 4.3 – Valores do NMA para os gráficos de \bar{X} e R e de $EWMA_Y$ e $EWMA_A$	90
TABELA 4.4 – Parâmetros do gráficos de \bar{X} e R , esquemas Vp , VSS , VSI e Fp	92
TABELA 4.5 – Parâmetros do gráfico de W , esquemas Vp , VSS , VSI e Fp	92
TABELA 4.6 – TMS dos gráficos de \bar{X} e R e de W com parâmetros fixos e variáveis ...	93
TABELA 4.7 – Gráfico de W adaptativo: influência dos parâmetros de projeto no TES ...	95
TABELA 4.8 – Valores de X_{ij} , W_i e Y_i	97
TABELA 4.9 – A influência dos parâmetros de projeto no NMA do gráfico de $EWMA_S$..	99
TABELA 4.10 – NMA dos gráficos de \bar{X} e S , $MaxEWMA$, e $EWMA_S$ ($n=5$)	102
TABELA 5.1 – Efeito do parâmetro L nos valores do NMA do gráfico $SyBITWO$	115

TABELA 5.2 – Efeito do n_0 no NMA dos gráficos $BITWO$ e $SyBITWO$	116
TABELA 5.3 – Valores do NMA dos gráficos $SyBITWO$ ($L=10$) e $T^2 VSS$, $\bar{n} = 4$	116
TABELA 5.4 – Dados do exemplo ilustrativo	118
TABELA 5.5 – Valores do NMA do Gráfico de $VMAX$ ($n= 5$)	122
TABELA 5.6 – Valores do NMA dos gráficos de $VMAX$ e de $ S $	123
TABELA 5.7 – Valores de NMA dos gráfico de $VMAX$ ($\bar{n} = 4$, $n_1=2$, $n_2=8$, $\rho=0,5$)	126
TABELA 5.8 – NMA 's dos gráficos de $VMAX$ e de $ S $ com amostragem dupla.....	126
TABELA 5.9 – NMA 's dos gráficos de $VMAX$ e de $ S $ ($\bar{n} = 4$, $n_1=2$, $\rho=0,5$).....	127
TABELA 5.10 – NMA 's dos gráficos de $VMAX$ e de $ S $ ($\bar{n} = 4$, $n_1=3$, $\rho=0,5$).....	128
TABELA 5.11 – Dados para o exemplo ilustrativo	129
TABELA 5.12 – Valores de S_{1x}^2 , S_{1y}^2 , S_{2x}^2 , S_{2y}^2 , $VMAX_1$ e $VMAX_2$	130

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>BIDU</i>	- Bivariado com amostragem dupla
<i>BITWO</i>	- Bivariado com amostragem em dois estágios
<i>NA</i>	Número de amostras até o sinal
<i>NMA</i>	Número médio de amostras até o sinal
<i>SyBIDU</i>	- Bivariado com amostragem dupla e regra especial de decisão
<i>SyBITWO</i>	- Bivariado com amostragem em dois estágios e com regra especial de decisão
<i>TS</i>	Tempo até o sinal
<i>TES</i>	Tempo esperado até o sinal
<i>TEC</i>	Tempo esperado de um ciclo de produção
<i>VMAX</i>	Corresponde ao maior valor das variâncias amostrais, $\max\{S_x^2, S_y^2\}$
<i>VSS</i>	Amostras de tamanho variável
<i>VSI</i>	Intervalo entre amostragens variável
<i>VSSI</i>	Amostras e intervalo entre amostragens variável
<i>Vp</i>	Amostras, intervalo entre amostragens e abertura dos limites de controle variável

LISTA DE SÍMBOLOS

Os seguintes símbolos foram utilizados por Costa (1993) para apresentar seu modelo econômico para a obtenção dos valores ótimos dos parâmetros dos gráficos de controle de \bar{X} e R , ver seção 3.1:

μ_0 = valor alvo, ou valor em controle, da média do processo;

σ_0 = valor alvo, ou valor em controle, do desvio padrão do processo;

δ = magnitude do deslocamento da média do processo, expressa em unidades do valor em controle do desvio padrão σ_0 ($\delta\sigma_0$);

γ = magnitude do aumento do desvio padrão, expressa em unidades do valor em controle do desvio padrão σ_0 ($\gamma\sigma_0$);

λ_1 = taxa horária de ocorrência da causa especial que altera a média do processo;

λ_2 = taxa horária de ocorrência da causa especial que altera a variabilidade do processo;

λ = taxa horária de ocorrência de causas especiais ($\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$);

a_1 = custo fixo por amostragem;

a_2 = custo variável por amostragem;

a_3 = custo esperado com a procura e a eliminação das causas especiais;

a'_3 = custo com a parada desnecessária do processo na busca de causas especiais inexistentes;

D_0 = tempo médio com a procura de causas especiais quando tais causas inexistem;

D_1 = tempo médio com a procura e subsequente eliminação de uma ou das duas causas especiais;

FD_0 = porcentagem de itens não conformes produzidos quando o processo está isento de causas especiais;

FD_1 = porcentagem de itens não conformes produzidos quando a média do processo está fora do seu valor alvo;

FD_2 = porcentagem de itens não conformes produzidos quando a causa especial que aumenta a variabilidade do processo está presente;

FD_3 = porcentagem de itens não conformes produzidos quando estão presentes as duas causas especiais que deslocam a média do processo e aumentam a variabilidade;

V = lucro horário quando todos os itens atendem as especificações, que são estabelecidas a $3,5\sigma_0$ de distância da dimensão nominal;

V_0 = lucro horário quando o processo está em controle, isto é, isento de causas especiais;

V_1 = lucro horário quando a média do processo está fora de seu valor alvo;

V_2 = lucro horário quando a causa especial que aumenta a variabilidade do processo está presente;

V_3 = lucro horário quando estão presentes as duas causas especiais que deslocam a média do processo e aumentam a variabilidade;

n = tamanho da amostra;

h = intervalo de tempo entre amostragens;

k_1 = fator de abertura dos limites de controle do gráfico de \bar{X} ($CL_{\bar{X}} = \mu \pm k_1\sigma_0 / \sqrt{n}$);

k_2 = fator de abertura do limite superior de controle do gráfico de R ($UCL_R = k_2\sigma_0$);

$\Phi()$ = função distribuição normal acumulada padrão;

R = amplitude amostral;

$F_w()$ = função distribuição acumulada da variável $W=R/\sigma$;

α = probabilidade do erro do tipo I quando os gráficos de controle de \bar{X} e R são utilizados em conjunto;

p = poder conjunto dos gráficos de \bar{X} e R quando a média e a variância do processo estão fora de controle;

p_1 = poder conjunto dos gráficos de \bar{X} e R quando apenas a média do processo estão desajustada;

p_2 = poder conjunto dos gráficos de \bar{X} e R quando apenas a variância do processo estão desajustada;

q_1 = probabilidade de que dentro de um intervalo tempo entre amostragens tenha sido a média do processo a se alterar, dado-que o processo se desajustou em algum instante de tempo dentro deste intervalo;

q_2 = probabilidade de que dentro de um intervalo tempo entre amostragens tenha sido a variância do processo a se alterar, dado-que o processo se desajustou em algum instante de tempo dentro deste intervalo;

q_3 = probabilidade de que, dentro de um intervalo tempo entre amostragens, média e variância se alterem, dado-que o processo se desajustou em algum instante de tempo dentro deste intervalo;

τ = tempo médio entre a última amostragem com o processo em controle e o instante em que ele se desajusta;

τ_i = tempo médio entre a última amostragem com o processo isento da causa especial (i) e o instante de sua ocorrência, $i = 1,2$;

T_X = tempo médio em que o processo permanece desajustado com apenas a média fora de controle;

T_R = tempo médio em que o processo permanece desajustado com apenas o desvio padrão fora de controle;

T_X = tempo médio em que o processo permanece desajustado com a média e a variância, fora de seus valores alvo;

F = custo horário;

$$V_{01} = V_0 - V_1;$$

$$V_{02} = V_0 - V_2;$$

$$V_{03} = V_0 - V_3;$$

$$U = V_0 D_0 + a_3';$$

$$B = 1/\lambda + h/p - \tau;$$

$$B_0 = \alpha \exp(-\lambda h) / [1 - \exp(-\lambda h)];$$

$$B_1 = 1/\lambda + T_X + T_R + T_{XR};$$

$$W = V_0 D_1 + a_3$$

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Introdução	17
1 Gráficos de Controle de Shewhart.....	21
2 Esquemas adaptativos duais	29
2.1 Esquemas adaptativos duais aplicados ao tamanho das amostras	30
2.1.1 Gráfico de controle de \bar{X}	30
2.1.2 Gráfico de controle de np	34
2.2 Esquemas adaptativos duais aplicados ao tamanho das amostras e intervalo entre retirada de amostras	41
2.3 Esquemas adaptativos duais aplicados ao tamanho das amostras e intervalo entre retirada de amostras e ao fator de abertura dos limites de controle.....	49
2.3.1 Gráfico de controle de \bar{X}	49
2.3.2 Gráfico de controle de c	54
3 Estudo econômico dos gráficos de controle	63
3.1 Estudo econômico dos gráficos de controle de \bar{X} e R	63
3.1.1 Notação	64
3.1.2 Hipóteses do modelo	64
3.1.3 Poder de detecção e risco de alarme falso	65
3.1.4 Tempo esperado fora de controle	65
3.1.5 Modelo e custo	69
3.1.6 Projeto ótimo de gráficos de controle.....	71
3.2 Estudo econômico dos gráficos de controle de \bar{X} com parâmetros variáveis.....	74
3.2.1 Hipóteses	75

3.2.2	Determinação da cadeia de Markov associada ao esquema de monitoramento	75
3.2.3	Função de custo	78
4	Uma nova estatística para o monitoramento da média e da variância.....	82
4.1	Gráfico de controle baseado na estatística de qui-quadrado não-central.....	82
4.2	Gráfico de controle de <i>EWMA</i> baseado na estatística de $\chi^2(\lambda)$	86
4.3	Exemplo de aplicação do gráfico de <i>EWMA</i> baseado na estatística de $\chi^2(\lambda)$	96
4.4	Gráfico de $\chi^2(\lambda)$ para a detecção de decréscimo na variabilidade.....	98
5	Gráficos de controle multivariados.....	104
5.1	Gráficos de controle para o monitoramento do vetor de médias.....	105
5.1.1	Gráficos de controle bivariados com amostragem em dois estágios	106
5.1.2	Gráficos de controle bivariados com regra especial de decisão	109
5.1.3	Obtenção das propriedades dos gráficos de controle com amostragem em dois estágios e com regra especial de decisão.....	112
5.1.4	Exemplo ilustrativo	117
5.2	Gráfico de controle da maior variância (Gráfico de VMAX)	120
5.2.1	Descrição do gráfico de VMAX.....	120
5.2.2	Gráfico de VMAX com amostragem dupla.....	123
5.2.3	Propriedades dos gráficos de VMAX com amostragem dupla.....	125
5.2.4	Exemplo ilustrativo	128
6	Monitoramento de processos autocorrelacionados.....	131
6.1	Descrição do modelo	131
6.2	Gráficos de \bar{X} com amostragem dupla para processos autocorrelacionados	132
6.3	Propriedades dos gráficos de \bar{X} com amostragem dupla	135
6.4	Gráficos de \bar{X} com amostras de tamanho variável para processos autocorrelacionados	137
7	Comentários.....	139
	Referências	142
Apêndice A	Obtenção do <i>TES</i> para o gráfico de \bar{X} com parâmetros variáveis	149
Apêndice B	Prova do teorema B1	155
Apêndice C	Obtenção do <i>NMA</i> para o gráfico de VMAX	156

Apêndice D	Obtenção do <i>NMA</i> para o gráfico de VMAX com amostragem dupla.....	158
Apêndice E	Expressões de p_1 e p_2 para o gráfico de \bar{X} com amostragem dupla	160

Gráficos de Controle de Shewhart: Duas Décadas de Pesquisa

O interesse do pesquisador pelos Gráficos de Shewhart não é recente, iniciou-se em 1987, quando então definiu o Controle Estatístico de Processos como o assunto de pesquisa de sua tese de doutorado. A partir de então, passou a estudar o desempenho dos gráficos de controle, a propor novas estatísticas de monitoramento e novos esquemas de amostragens, em especial os esquemas adaptativos duais em que o tamanho das amostras n , e/ou o intervalo entre retirada de amostras h , e/ou o fator de abertura dos limites de controle k não são fixos, porém variam apenas entre dois valores, um mínimo e um máximo. Um ponto na região de advertência do gráfico de controle intensifica o monitoramento, pois h e k assumem valores mínimos e n o seu valor máximo. Um ponto na região central do gráfico de controle atenua o monitoramento, pois h e k assumem valores máximos e n o seu valor mínimo. Para uma mesma taxa de inspeção e incidência de alarmes falsos, os esquemas duais e as estatísticas propostas melhoram o desempenho dos gráficos de Shewhart na detecção de causas especiais que alteram os parâmetros do processo. Os trabalhos mais recentes do pesquisador tratam do monitoramento de processos autocorrelacionados, da proposição de novas estatísticas para o monitoramento de processos multivariados, e da aplicação dos esquemas adaptativos com os gráficos de controle utilizados no monitoramento de processos multivariados.

Introdução

No ano de 1980, o pesquisador foi contratado pela UNESP, em regime de dedicação integral a docência e a pesquisa - RDIDP, para ministrar entre outras, as disciplinas de Estatística e de Controle de Qualidade. Visando um contínuo aprimoramento da atividade de docência passou então a desenvolver pesquisas, inicialmente em processos estocásticos (Costa, 1983) e subsequentemente em monitoramento de processos (Costa, 1989). Em 1993 publicou seu primeiro artigo em periódico internacional, que tratou do monitoramento conjunto da média e da

variância do processo pelos gráficos de controle de \bar{X} e R (Costa 1993). Baseado no modelo econômico de Duncan (1956) propôs um modelo mais realístico para a ocorrência das causas especiais. Até então, por simplicidade, supunha-se que uma única causa especial alterava ambas, a média e a variância do processo. No estudo proposto, o pesquisador adotou uma hipótese mais realística de duas causas especiais, uma a afetar o parâmetro de posição do processo, e outra o parâmetro de dispersão, sendo ambas totalmente independentes (Al-Sultan e Rahim (1997), seção 1.6). Inicialmente, foram adotadas duas distribuições exponenciais independentes para descrever o momento da ocorrência de cada causa especial. Em estudos subsequentes, optou-se por uma distribuição mais geral, a de Weibull (Costa e Rahim (2000), Rahim e Costa (2000)).

Em 1994, o pesquisador publicou na revista *Journal of Quality Technology* seu mais importante artigo (Costa, 1994) em que propôs, pela primeira vez, variar o tamanho das amostras, nos esquemas adaptativos duais. De acordo com a *Web of Science* este artigo já foi citado em 44 trabalhos científicos, e serviu de inspiração para os esquemas adaptativos duais (esquema *VSSI*) em que tanto o tamanho das amostras quanto o intervalo entre retirada de amostras não são fixos, pois, dependendo da severidade desejada ao monitoramento, assumem um valor mínimo, ou então um valor máximo. O monitoramento se torna severo após a ocorrência de um ponto na região de advertência do gráfico de controle, quando então se espera um tempo mínimo para tomada de uma nova amostra que, em geral, é constituída por um grande número de itens. Por outro lado, o monitoramento se torna atenuado após a ocorrência de um ponto na região central do gráfico de controle, pois se espera mais tempo do que o usual para tomada de uma nova amostra que, em geral, é constituída de um único item. O esquema *VSSI* foi proposto para os gráficos de controle de \bar{X} (Costa (1997, 1998b)), porém logo passou a ser utilizado com os mais diversos tipos de dispositivos estatísticos de monitoramento, incluindo os esquemas *EWMA* e *CUSUM* (Arnold e Reynolds (2001), Reynolds e Arnolds (2001)), os gráficos de controle por atributos (Costa (1993a), Epprecht e Costa (2001), Epprecht et al. (2003, 2005)), e os gráficos multivariados (Aparisi (1996) Aparisi e Haro (2001, 2003)).

Ao se variar o fator de abertura dos limites de controle dos gráficos de Shewhart tem-se uma oportunidade adicional para melhorar o desempenho. Com limites espaçados no monitoramento atenuado, e limites estreitos no monitoramento severo, é possível diminuir o

tempo de detecção das causas especiais, sem se aumentar à incidência de alarmes falsos ou mesmo a taxa de inspeção (Costa (1998, 1998a, 1999a, 1999b)). Os esquemas adaptativos duais com todos parâmetros variáveis (esquema Vp) incluem os parâmetros n , h e k , respectivamente, o tamanho das amostras, o intervalo entre retirada de amostras e o fator de abertura dos limites de controle. O artigo da revista *IIE-Transactions* (Costa, 1998), em que o pesquisador apresenta o esquema Vp , foi premiado como o melhor artigo do ano da seção “*Qualidade e Engenharia de Confiabilidade*”. O projeto econômico ou econômico-estatístico dos gráficos de Shewhart com parâmetros variáveis tem sido objeto de pesquisa de vários pesquisadores (Costa e Rahim (2001), De Magalhães e Costa (2005), De Magalhães et al. (2001, 2002, 2006), Park e Kim (2004), De Magalhães e Moura Neto (2006)). O estudo das propriedades dos gráficos de controle adaptativos sob a hipótese de não normalidade da variável de monitoramento tem sido objeto de pesquisa (Lin e Chou (2005, 2005a, 2007)).

O esquema de monitoramento com amostras suplementares é uma variante do esquema adaptativo dual em que o intervalo de tempo entre retirada de amostras é variável (*Variable Sampling Interval -VSI*). No esquema de monitoramento com amostras suplementares, entre os instantes fixos e obrigatórios de retiradas de amostras são permitidas as retiradas de amostras adicionais, igualmente espaçadas entre si, sempre que se suspeitar das condições do processo e informações adicionais sobre o mesmo sejam necessárias para se tomar à decisão de pará-lo ou não (Costa, 1998b). Amostras obrigatórias são, por exemplo, tomadas a cada meia hora, e quando há necessidade uma ou duas amostras adicionais são tomadas, respectivamente, sempre aos dez e aos vinte minutos após a retirada da amostra obrigatória. Em Costa (2000), é proposto o gráfico de X com amostras suplementares. A cada instante de amostragem, inspeciona-se apenas um item da produção; se a medida deste item é próxima do valor alvo, a amostragem é interrompida, caso contrário, todos os itens de uma amostra suplementar são inspecionados e as estatísticas de \bar{X} e R são calculadas e comparadas com os limites dos gráficos de controle da média e da amplitude. O gráfico proposto é projetado para que a frequência requerida de amostras suplementares, durante o período em que o processo permanece sob controle, não exceda a 5%. Já o esquema de amostragem em dois estágios (Costa e Rahim, 2004 e 2006), é uma particularização da amostragem dupla proposta por Daudin (1992). Na amostragem dupla, a amostra é dividida em duas sub amostras excludentes. Inspecciona-se então a primeira sub amostra, e, com base nas informações obtidas, deve-se decidir se a amostragem deve ser

interrompida e o processo considerado sob controle ou não; ou então, se a decisão sobre o estado do processo deve ser adiada para após a inspeção de todos os itens da amostra. Na amostragem em dois estágios, inspeciona-se no primeiro estágio poucos itens da amostra, em geral apenas um. Com as informações do processo obtidas com a inspeção deste item, decide-se se a amostragem deve seguir ou não para o segundo estágio, quando então se inspeciona toda a amostra. Se a amostragem não segue para o segundo estágio, o processo é automaticamente julgado em controle. A grande vantagem da amostragem em dois estágios é que no primeiro estágio a inspeção pode ser feita por atributos. Nas condições em que o processo permanece longos períodos em controle, na maior parte das vezes, a amostragem não segue para o segundo estágio, dispensando as mensurações e os cálculos matemáticos para, por exemplo, se obter a média ou a variância amostral.

Em outra vertente de seus estudos, o autor vem propondo novas estatísticas para o monitoramento de processos, tais como a estatística de qui-quadrado não central (Costa e De Magalhães (2005a, 2007), Costa e Rahim (2004a, 2006, 2006a, 2006b), Costa, De Magalhães e Epprecht (2005)). O gráfico de controle baseado na estatística de qui-quadrado não central tem se mostrado mais eficiente que os gráficos conjuntos de \bar{X} e R .

Uma das hipóteses básicas para a aplicação dos gráficos de Shewhart é a da independência entre observações consecutivas do processo. Com a automação crescente esta hipótese vem deixando de ser válida, conseqüentemente a autocorrelação existente entre observações deve ser levada em conta quando da construção dos gráficos de controle. Neste sentido, o pesquisador vem se dedicando ao estudo dos gráficos de controle quando as observações não são independentes, mas se ajustam aos modelos autoregressivos usuais, isto é, modelos AR e ARMA (Costa e Claro (2008)).

Boa parte dos estudos elaborados pelo pesquisador tratou dos gráficos de controle univariados. O aumento da complexidade e dos níveis de automação dos processos industriais e a crescente disponibilidade de suporte computacional têm aumentado o interesse pelo monitoramento simultâneo de várias características de qualidade, também chamadas de variáveis do processo (Lowry e Montgomery, 1995). Pouco a pouco, o pesquisador vem estendendo para os processos multivariados, as estratégias de monitoramento originalmente criadas para processos univariados (Costa e Machado, 2007).

Capítulo 1. Gráficos de Controle de Shewhart.

Os gráficos de controle surgiram em 1924, quando Shewhart, então funcionário da Bell Laboratories, publicou relatório técnico visando divulgar os fundamentos de uma técnica estatística destinada ao monitoramento de processos. No início, como era de se esperar, poucos acreditaram no potencial desta nova técnica. Pouco a pouco, no entanto, os gráficos de controle ganharam a fama de serem ferramentas poderosas de monitoramento. A década de 70 pode ser considerada como a década dos gráficos de Shewhart; o lema da época era: “*só se assegura qualidade de processos que estejam sob o monitoramento de gráficos de Shewhart*”. Esta “febre” teve seu lado bom e seu lado ruim. O lado bom foi que o uso intenso dos gráficos de controle facilitou a divulgação de diversas técnicas estatísticas, especialmente desenvolvidas para o monitoramento de processos industriais. O lado ruim foi que, em função da pressão natural gerada pelo modismo da época, os gráficos de Shewhart passaram a ser utilizados de forma indevida, ou pior, em situações desnecessárias, caindo assim no descrédito. Ainda hoje, se sente o efeito deste modismo.

Quando o gráfico de Shewhart, mais especificamente o gráfico de \bar{X} , está em uso, monitorando um processo, amostras de tamanho n são retiradas digamos a cada 15 minutos, ou a cada meia hora, e o valor da estatística \bar{X} calculado para cada amostra é plotado no gráfico de controle. Este dispositivo estatístico pode ser visto como uma seqüência de testes de hipóteses, onde, a cada 15 ou 30 minutos, testamos sempre as mesmas hipóteses:

$$H_0 : \text{Processo em controle} \quad (1.1)$$

$$H_1 : \text{Processo fora de controle} \quad (1.2)$$

Outras maneiras de descrever as hipóteses H_0 e H_1 são:

$$H_0 : \text{Processo ajustado} \quad (1.3)$$

$$H_1 : \text{Processo desajustado} \quad (1.4)$$

ou

$$H_0 : \text{Processo centrado no valor-alvo} \quad (1.5)$$

$$H_1 : \text{Processo não centrado no valor-alvo} \quad (1.6)$$

ou

$$H_0 : \text{Processo livre de causas especiais} \quad (1.7)$$

$$H_1 : \text{Processo sob a influência de causas especiais} \quad (1.8)$$

ou, ainda,

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad (1.9)$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (1.10)$$

onde μ_0 é o valor-alvo ou o valor médio em controle da variável aleatória X .

A hipótese H_0 é aceita como verdadeira todas as vezes que o valor de \bar{X} cair dentro dos limites de controle. Já a hipótese H_1 é aceita como verdadeira sempre que o valor de \bar{X} cair fora dos limites de controle. Se o processo estiver em controle (H_0 verdadeira), α representa o risco (probabilidade) de erroneamente se considerar o processo fora de controle (“**alarme falso**”). Se o processo estiver fora de controle (H_1 verdadeira), β representa o risco (probabilidade) de erroneamente se considerar o processo em controle (“**não-deteccção**”).

A consequência de ordem prática associada ao erro do tipo I (alarme falso) é intervir no processo na hora errada, quando o mesmo está isento de causas especiais (o que em si já acarreta um custo — de interrupção do processo, de mão de obra — além de um risco de desajustar um processo que estava ajustado); e a consequência de ordem prática associada ao erro do tipo II (não deteção) é não intervir no processo na hora certa, quando o mesmo está sob a influência de causas especiais.

As probabilidades de alarme falso (α) e de não-deteccção (β) são dadas por:

$$\alpha = \Pr[\bar{X} > LSC_{\bar{X}} \text{ ou } \bar{X} < LIC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0] \quad (1.11)$$

$$\beta = \Pr[LIC_{\bar{X}} < \bar{X} < LSC_{\bar{X}} \mid \mu \neq \mu_0] \quad (1.12)$$

O poder do gráfico de controle, P_d , é definido como sendo a probabilidade de detecção ($P_d = 1 - \beta$).

A Figura 1.1 retrata a ocorrência de um alarme falso. Nessa figura, a hipótese H_0 é verdadeira, pois a média $\mu_{\bar{X}}$ da variável aleatória \bar{X} é igual ao valor-alvo μ_0 . Tradicionalmente, os limites de controle do gráfico de \bar{X} são estabelecidos — usando os valores em controle dos parâmetros do processo, μ_0 e σ_0 — a ± 3 desvios padrões amostrais, $\sigma_{\bar{X}}$, da linha média ($LM = \mu_0$), ou seja, em $\mu_0 \pm 3\sigma_0 / \sqrt{n}$.

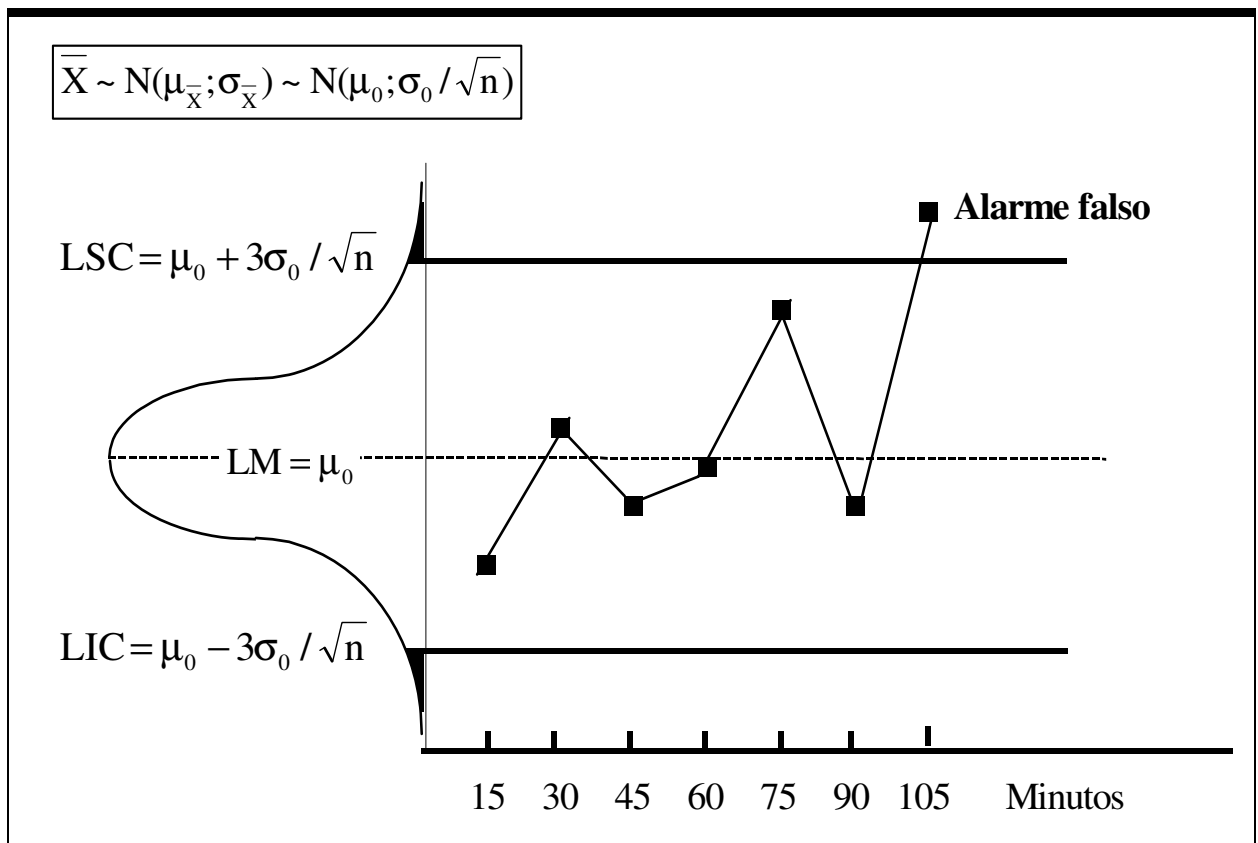


Figura 1.1. Gráfico de \bar{X} – ocorrência de um alarme falso (Costa, Epprecht e Carpinetti, 2005)

Para uma abertura dos limites de controle de ± 3 desvios padrões amostrais, o risco α é igual a 0,0027. Então, durante o período em que o processo permanece estável e ajustado, portanto sob controle, essa é a probabilidade de o valor de \bar{X} cair na região de ação do gráfico (acima do *LSC*, ou então, abaixo do *LIC*); ou seja, é a probabilidade que cada amostra tem de gerar um alarme falso. A distribuição do número de amostras, L , que antecedem um alarme falso (incluindo a amostra que gera o alarme falso), é geométrica de parâmetro $p=\alpha$:

$$\Pr[L = d] = p(1 - p)^{d-1}, \quad d=1, 2, 3, \dots \quad (1.13)$$

Por exemplo, na Figura 1.1 temos $L=7$.

A média da distribuição geométrica é igual a $1/p$, portanto o número médio de amostras até um alarme falso é igual a $1/\alpha$. Em outras palavras, com limites de 3 sigma, teremos em média um alarme falso a cada $1 / 0,0027 = 370,4$ pontos plotados. Caso o usuário considere esta frequência de alarmes falsos inaceitável, a alternativa consiste em alargar os limites de controle, por exemplo aumentar k de 3,00 para 3,10 (k é o fator de abertura dos limites de controle, ou seja, $LIC = \mu_0 - k\sigma_0 / \sqrt{n}$ e $LSC = \mu_0 + k\sigma_0 / \sqrt{n}$). Com $k= 3,10$, o risco de alarme falso diminui para 0,0019 e o tempo médio entre alarmes falsos aumenta para $(1/0,0019) \times h = 516,7 \times h$, sendo h o intervalo de tempo entre retirada de amostras. Se uma amostra é retirada do processo a cada 15 minutos, então, em média, ter-se-á um alarme falso a cada $516,7/4=129$ horas de produção. O risco α é função apenas do fator de abertura dos limites de controle, k . Se por um lado o tamanho de amostra, n , não afeta a probabilidade de alarme falso α , por outro lado ele tem uma influência grande no poder do gráfico de controle

Quando a hipótese H_1 é a hipótese verdadeira (processo sob a influência de causas especiais), o ideal seria que o primeiro ponto plotado já caísse fora dos limites de controle (sinalizando o estado de falta de controle). Contudo, isto nem sempre ocorre, em especial se o deslocamento sofrido pela média do processo for pequeno. É usual expressar este deslocamento

em unidades iguais ao desvio padrão da variável X , de forma que o novo valor da média, μ_1 , pode ser escrito como $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$, portanto

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} \quad (1.14)$$

De um modo geral, se $\delta \geq 1,5$, então rapidamente um valor de \bar{X} cairá fora dos limites de controle. Caso contrário, existirá uma certa inércia. Por exemplo, na Figura 1.2, o sinal só ocorre quando o 5º valor de \bar{X} é plotado. Nessa Figura, a hipótese H_1 é verdadeira porque a média $\mu_{\bar{X}}$ da variável \bar{X} é diferente de μ_0 ; na verdade ela é igual a $\mu_0 + \delta\sigma$.

A Tabela 1.1 apresenta valores de P_d para diferentes combinações de δ e de n . A Figura 1.3 apresenta as curvas de P_d versus o deslocamento δ , para $n=2, 3, 4, 5, 9$ e 16 .

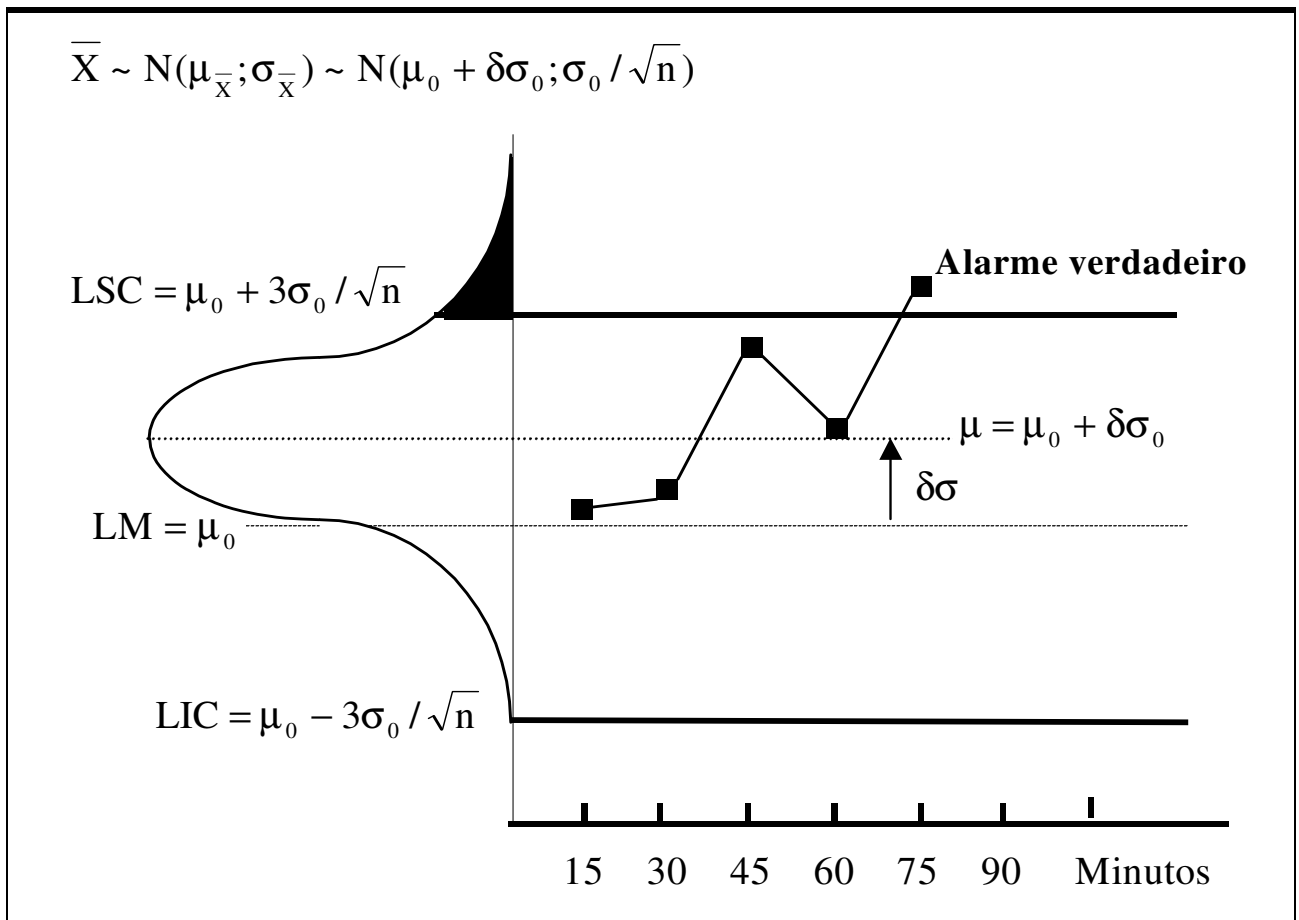


Figura 1.2. Gráfico de \bar{X} – ocorrência de um alarme verdadeiro

(Costa, Epprecht e Carpinetti, 2005)

Tabela 1.1. Valores de P_d para diferentes combinações de n e de δ
(Costa, Epprecht e Carpinetti, 2005)

δ	n				
	2	3	4	5	9
0,25	0,004	0,005	0,006	0,007	0,012
0,5	0,011	0,016	0,023	0,03	0,067
0,75	0,026	0,044	0,067	0,093	0,227
1	0,056	0,102	0,159	0,222	0,5
1,25	0,109	0,202	0,309	0,419	0,773
1,5	0,19	0,344	0,5	0,638	0,933
2	0,432	0,679	0,841	0,93	0,999
3	0,893	0,986	0,999	1	1

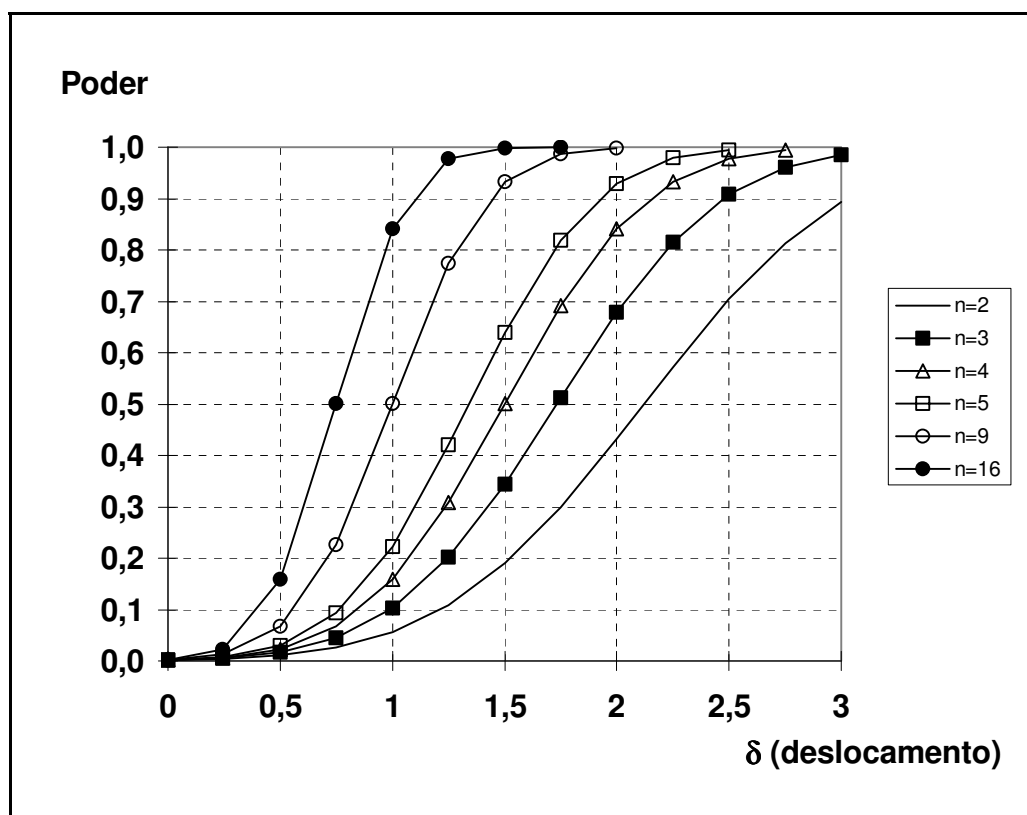


Figura 1.3. Curvas de P_d versus δ (Costa, Epprecht e Carpinetti, 2005)

A medida de eficiência mais usual dos gráficos de controle é o *NMA*, número médio de amostras até o sinal. A Figura 1.4 apresenta as curvas do *NMA* versus o deslocamento δ . Exemplo, em média, são necessárias 10 amostras ($NMA=10$) de tamanho 3 ($n=3$), ou 2 ($NMA=2$) de tamanho 9 ($n=9$) para se detectar um deslocamento na média do processo de um desvio padrão ($\delta=1,0$).

$$NMA=1/Pd$$

$$(1.15)$$

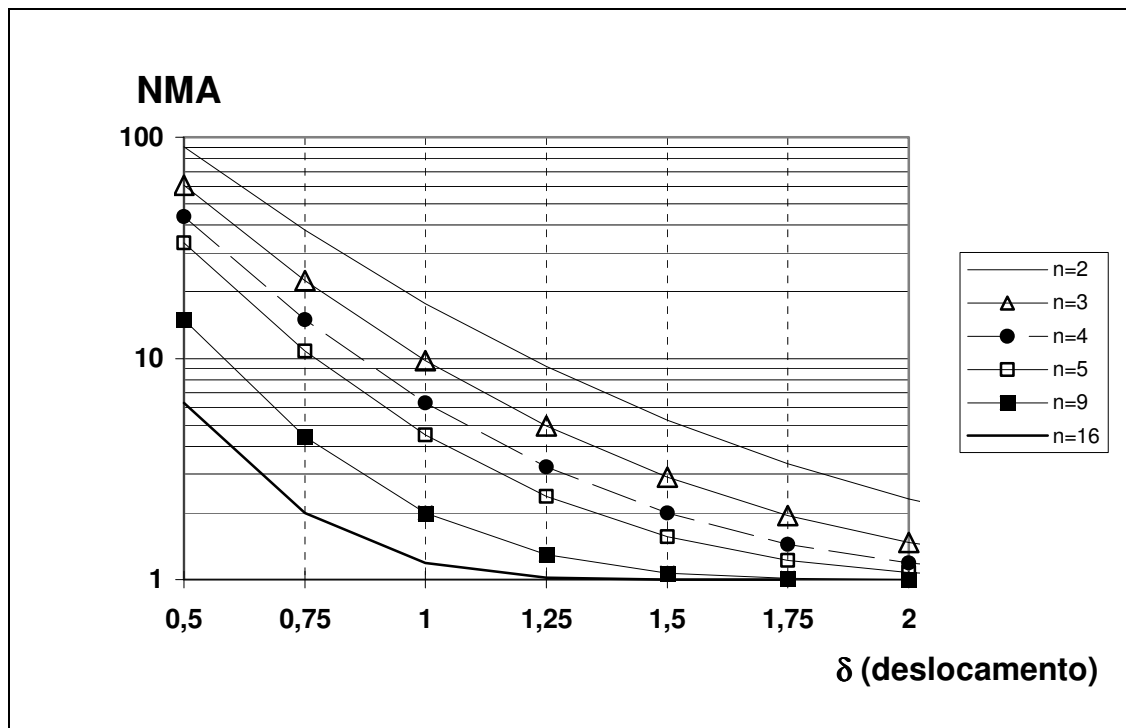


Figura 1.4. Curvas de NMA versus δ (Costa, Epprecht e Carpinetti, 2005)

O gráfico de Shewhart sinaliza uma deterioração do processo sempre quando um ponto cai em sua região de ação. De acordo com os fundamentos estabelecidos por Shewhart, sempre que um ponto é plotado na região de ação do gráfico, o responsável pelo processo deve interrompê-lo imediatamente, visando encontrar causas especiais que afetam a qualidade dos produtos, exemplo, um desgaste de ferramenta que altera a dimensão dos eixos que estão sendo manufaturados. Na prática, contudo, poucos são aqueles que seguem a regra estabelecida por

Shewhart, a maioria prefere esperar a ocorrência de um segundo ponto na região de ação. As propriedades dos gráficos de controle dependem das regras de monitoramento. Assim, ao se esperar, de forma indiscriminada, pelo segundo ponto na região de ação do gráfico de controle, aumenta-se, de forma absurda, o *NMA* (Costa, Epprecht e Carpinetti (2005)). É sempre interessante propor novas regras de monitoramento, contudo, sem um estudo cauteloso da influência destas na performance do gráfico de controle, em geral, cria-se dispositivos de monitoramento ineficientes, ou por gerar um número absurdo de alarmes falsos, ou pela morosidade na sinalização de uma causa especial (*NMA* muito grande).

Capítulo 2. Esquemas Adaptativos Duais

A simplicidade operacional dos gráficos de Shewhart tem sido a principal motivação para o seu uso intenso no monitoramento de processos produtivos. Contudo, esta simplicidade operacional, isto é, de se tomar amostras de tamanho n a cada h horas e investigar o processo somente quando um ponto amostral cai fora dos limites de controle, faz dos gráficos de Shewhart um dispositivo lento na detecção de pequenas alterações no processo. Por conta disto, os gráficos de Shewhart vem sendo gradualmente substituídos por outros gráficos, tais como os gráficos das somas acumuladas ou os gráficos das médias móveis, operacionalmente mais complexos, porém ágeis na detecção de pequenas mudanças no processo. O avanço tecnológico vem intensificando esta tendência, visto que os processos estão cada vez mais robustos (robustos no sentido de produzirem itens cada vez mais iguais em termos de peso, dimensões, composição, etc.). Neste contexto, pequenas alterações no processo podem ser críticas, portanto devem ser detectadas e corrigidas com rapidez.

Nestes últimos vinte anos, especial atenção tem sido devotada aos gráficos de Shewhart visando a sua utilização no monitoramento de processos robustos. A idéia básica consiste em se variar os parâmetros de projeto dos gráficos de Shewhart de maneira apropriada, entre um valor mínimo e um valor máximo (Tagaras, 1998). Estes parâmetros são o tamanho da amostra n , o intervalo de tempo entre retirada de amostras h , e o fator de abertura k dos limites de controle (no caso particular do gráfico \bar{X} , os limites de controle são dados por $\mu_0 \pm k\sigma_0 / \sqrt{n}$, onde μ_0 e σ_0 são respectivamente a média e o desvio padrão da variável X com o processo em controle). Assim, quando há suspeitas de que o processo se alterou, o controle se torna mais rígido, caso contrário ele é relaxado. Suspeitas de que o processo se alterou são obtidas quando um ponto amostral cai na chamada região de advertência do gráfico (veja Figura 2.1). Nestas condições, o controle se torna mais rígido porque se toma uma, duas ou todas das seguintes medidas:

- a) Redução no tempo de espera para a retirada da próxima amostra (valor mínimo de h);
- b) Aumento do tamanho da próxima amostra (valor máximo de n);
- c) Estreitamento dos limites de controle (valor mínimo de k).

Um ponto amostral na região central do gráfico é uma indicação de que o processo não sofreu alterações. Nestas condições, o controle é relaxado porque se toma uma, duas ou todas das seguintes medidas:

- a) Aumento no tempo de espera para a retirada da próxima amostra (valor máximo de h);
- b) Redução do tamanho da próxima amostra (valor mínimo de n);
- c) Alargamento dos limites de controle (valor máximo de k).

A idéia de variar o intervalo entre retirada de amostras foi primeiro explorada com os gráficos de \bar{X} (Reynolds et al.(1988), Runger e Pignatiello (1991), Amin e Miller (1993), Runger e Montgomery (1993), Baxley (1995), Reynolds et al. (1996), Reynolds (1996)), mas logo se estendeu para outros gráficos (Reynolds et al. (1990), Saccucci et al. (1992)). Por sua vez, Prabhu, et al. (1993) e Costa (1994) estudaram os gráficos de \bar{X} com o tamanho das amostras variável.

2.1. Esquemas Adaptativos Duais Aplicados ao Tamanho das Amostras

Costa (1994) propôs para o gráfico de \bar{X} o uso do esquema de amostragens com amostras de tamanho variável. Epprecht e Costa (2001) adotaram este esquema com o gráfico de np .

2.1.1 Gráfico de Controle de \bar{X}

Costa (1994) propôs o gráfico de controle de \bar{X} com amostras de tamanho variável (*VSS - Variable sample size*) para o monitoramento de um processo que está sujeito a ocorrência de uma causa especial. O processo inicia-se em controle com a média $\mu = \mu_0$. A causa especial desloca a média do processo de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$, sendo $\delta > 0$. Amostras aleatórias de tamanho variável são extraídas do processo a cada h horas. As médias amostrais são plotadas em um gráfico de controle de \bar{X} com limites de advertência $\mu_0 \pm w\sigma_{\bar{X}}$ e limites de ação $\mu_0 \pm k\sigma_{\bar{X}}$, com $0 \leq w < k$. Para facilitar a apresentação, os pontos amostrais plotados no gráfico de controle serão as médias amostrais padronizadas, isto é, $(\bar{X} - \mu_0)/\sigma_{\bar{X}}$, ver Figura 2.1. Nesse caso, os limites de advertência e de ação serão simplesmente $\pm w$ e $\pm k$, respectivamente. A investigação de causas especiais será empreendida quando o ponto amostral não pertencer ao intervalo $(-k, k)$.

O tamanho da próxima amostra depende da posição do ponto amostral da amostra atual, em relação aos limites do gráfico de controle. Se o ponto amostral pertence ao intervalo $(-w, w)$,

então a próxima amostra será constituída de n_1 itens; e se o ponto amostral pertence ao intervalo $(-k, -w]$ ou $[w, k)$, então a próxima amostra será constituída de n_2 itens, sendo $n_2 > n_1$. A Figura 2.1 apresenta um gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho variável.

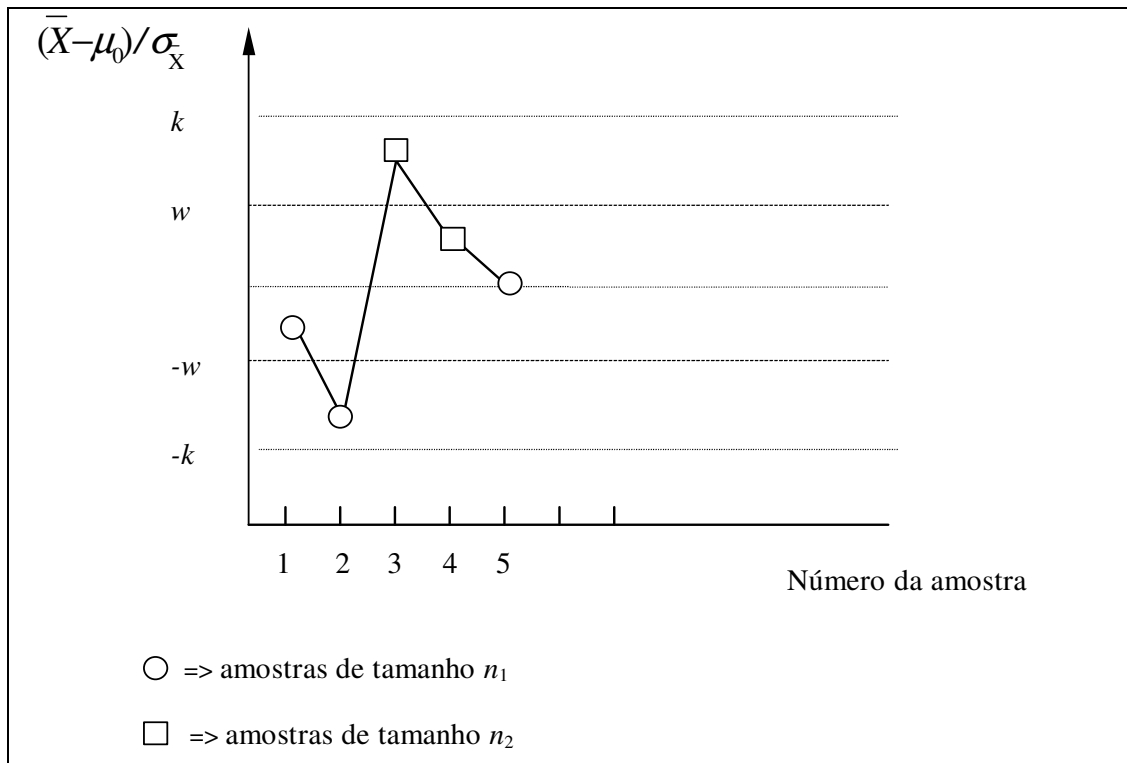


Figura 2.1: Gráfico de controle de \bar{X} com amostras de tamanho variável
 (Costa, Epprecht e Carpinetti, 2005)

As propriedades dos gráficos de controle de \bar{X} com amostras de tamanho variável são determinadas pelo número de amostras, NA , retiradas do processo até o alarme. Para um processo em controle ($\mu = \mu_0$), o NA deve ser grande de tal sorte que a taxa de alarmes falsos seja baixa. Para um processo fora de controle ($\mu = \mu_1$), o NA deve ser pequeno para uma rápida detecção da causa especial. Para a obtenção do número médio de amostras até o sinal, NMA , faz-se uso das propriedades das cadeias de Markov,

$$NMA = \mathbf{1} \cdot (-Q)^{-1} \quad (2.1)$$

onde I é matriz identidade 2×2 , $\mathbf{1}$ é o vetor 2×1 de uns, a matriz Q contém as probabilidades de transição,

$$p_{i1} = Pr\{Y < w \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_i}, 1)\}, \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

e

$$p_{i2} = Pr\{w < Y < k \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_i}, 1)\}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

O vetor r é o vetor de probabilidades iniciais; $r = (p_0, 1 - p_0)$, sendo p_0 a probabilidade de que a primeira amostra retirada do processo após a ocorrência da causa especial seja uma amostra constituída de n_1 itens. A notação $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ é utilizada para uma variável Y normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 . Da expressão (2.1) obtém-se

$$NMA = p_0 \left[\frac{1 - p_{22} - p_{12}}{(1 - p_{11})(1 - p_{11}) - p_{12}p_{21}} \right] + (1 - p_0) \left[\frac{1 - p_{11} - p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{11}) - p_{12}p_{21}} \right] \quad (2.4)$$

onde:

$$p_0 = Pr\{Z < w \mid Z < k\}$$

sendo $Z \sim N(0, 1)$. O coeficiente de abertura do limite de advertência, w , é ajustado para que durante o período em controle, o gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho variável tenha a mesma taxa de inspeção do gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho fixo n_0 , portanto:

$$n_1 p_0 + n_2 (1 - p_0) = n_0$$

A Figura 2.2 compara o gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho variável (VSS) com o gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho fixo (FSS). A adoção de amostras de tamanho variável reduz o NMA substancialmente.

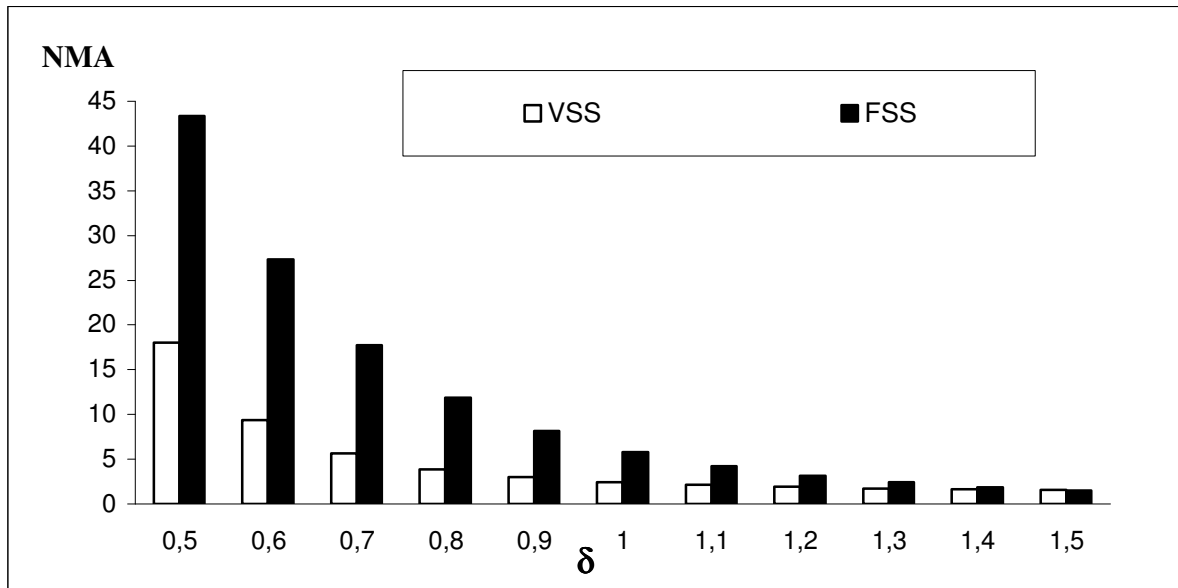


Figura 2.2: *NMA* dos gráficos de \bar{X} com amostras de tamanho fixo ($n_0=4$ e $k=3,00$) e com amostras de tamanho variável ($n_1 = 1, n_2 = 12, k_1=1,09$ e $k=3,00$)

A Tabela 2.1 ilustra a influência dos valores de n_1 e n_2 no *NMA* do gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho variável. Quando se aumenta o valor de n_2 , ou se reduz o valor de n_1 , o gráfico de controle sinaliza pequenas (moderadas) mudanças na média com maior (menor) rapidez.

Tabela 2.1: Influência dos valores de n_1 e n_2 no NMA do gráfico de \bar{X} , esquema VSS

$n_0=4$	$n_1 = 1$		$n_1 = 2$
	$n_2 = 8$	$n_2 = 12$	$n_2 = 8$
δ			
0,0	370,4	370,4	370,4
0,25	138,9	126,9	141,6
0,50	25,92	18,01	27,20
0,75	6,54	4,62	6,73
1,00	2,76	2,46	2,75
1,25	1,70	1,82	1,64
1,50	1,30	1,54	1,22

2.1.2 Gráfico de Controle de np

Epprecht e Costa (2001) propuseram o gráfico de controle de np com amostras de tamanho variável (VSS) para o monitoramento de um processo que está sujeito à ocorrência de uma causa especial. O processo inicia-se em controle, com cada item produzido tendo uma probabilidade p_0 de ser não conforme. Após a ocorrência da causa especial o risco de um item produzido ser não conforme aumenta de p_0 para p_1 . Amostras aleatórias de tamanho variável são extraídas do processo e o número de itens não conformes dentro de cada amostra é a estatística (ponto amostral) plotado no gráfico de controle de np . O tamanho da próxima amostra depende da posição do ponto amostral da amostra atual, em relação aos limites do gráfico de controle. Se o ponto amostral é plotado abaixo do limite de controle, e longe deste, a próxima amostra será constituída de n_1 itens; e se o ponto amostral é plotado abaixo do limite de controle, mas próximo a este, a próxima amostra será constituída de n_2 itens, sendo $n_1 < n_2$. Deste modo, o gráfico de controle de np é construído com limites de advertência e duas escalas (vide Figura 2.3). Os pontos abaixo dos limites de advertência (LA) são considerados distantes dos limites de controle (LC), e os pontos amostrais advindos de amostras pequenas (grandes) são plotados

utilizando-se a escala da esquerda (direita). Epprecht e Costa (2001) obtiveram a seguinte expressão do *NMA* para o gráfico de controle de *np* com o tamanho das amostras variável:

$$NMA = \frac{r_1(1 - q_{22} - q_{12}) + (1 - r_1)(1 - q_{11} - q_{21})}{(1 - q_{11})(1 - q_{22}) - q_{12} - q_{21}} \quad (2.5)$$

onde

$$q_{i1} = \sum_{j=0}^{a_i} \binom{n_i}{j} p_1^j (1 - p_1)^{n_i - j}, \quad i = 1, 2 \text{ and } a_i = \text{int}(LA_i)$$

$$q_{i2} = \sum_{j=a_i+1}^{b_i} \binom{n_i}{j} p_1^j (1 - p_1)^{n_i - j}, \quad i = 1, 2 \text{ e } b_i = \text{int}(LC_i)$$

$$r_1 = \frac{-(p_{12} + p_{21} - (p_{23} - p_{13})) + \sqrt{(p_{12} + p_{21} - (p_{23} - p_{13}))^2 + 4(p_{23} - p_{13})p_{21}}}{2(p_{23} - p_{13})}$$

sendo $\text{int}(Y)$ o maior inteiro menor que ou igual a Y , e

$$p_{i1} = \sum_{j=0}^{a_i} \binom{n_i}{j} p_0^j (1 - p_0)^{n_i - j}, \quad i = 1, 2 \text{ e } a_i = \text{Maior Inteiro} \leq LA_i$$

$$p_{i2} = \sum_{j=a_i+1}^{u_i} \binom{n_i}{j} p_0^j (1 - p_0)^{n_i - j}, \quad i = 1, 2 \text{ e } u_i = \text{Maior Inteiro} \leq LC_i$$

$$p_{i3} = 1 - p_{i1} - p_{i2}, \quad i = 1, 2.$$

Quando o processo está em controle, a taxa média de alarmes falsos $\bar{\alpha}$ e o tamanho médio das amostras \bar{n} para o gráfico de *np* com amostras de tamanho variável são dados respectivamente por

$$\bar{\alpha} = p_{13}r_1 + p_{23}(1 - r_1) \quad (2.6)$$

$$\bar{n} = n_1r_1 + n_2(1 - r_1) \quad (2.7)$$

Conseqüentemente, o $NMA_0 = 1/\bar{\alpha}$. Quando o processo está isento de causas especiais o NMA , que neste caso é chamado de NMA_0 , é o número médio de amostras até a ocorrência de um alarme falso, incluindo a amostra que gerou o alarme.

O NMA_0 para o gráfico de controle de np com amostras de tamanho n_0 (FSS) e limite de controle LC é dado por:

$$NMA_0 = 1/\alpha$$

onde

$$\alpha = \sum_{j=a+1}^{n_0} \binom{n_0}{j} p_0^j (1 - p_0)^{n_0-j}, a = \text{int}(LC)$$

O NMA é dado por $1/(1 - \beta)$, onde

$$\beta = \sum_{j=0}^a \binom{n_0}{j} p_1^j (1 - p_1)^{n_0-j}, a = \text{int}(LC)$$

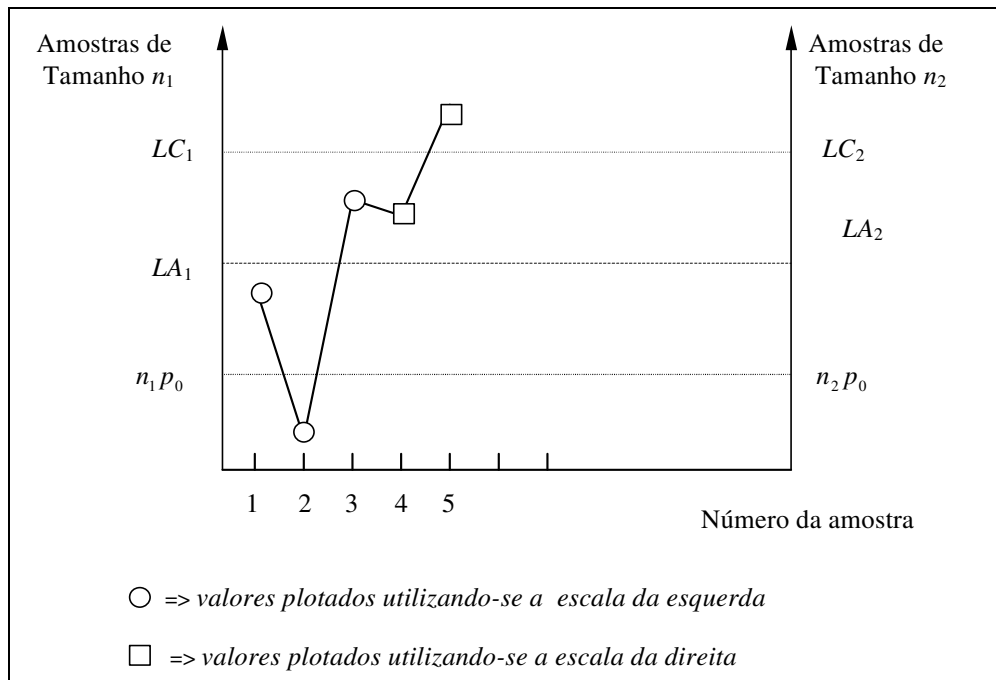


Figura 2.3: Gráfico de controle de np com amostras de tamanho variável (Epprecht e Costa, 2001)

A Tabela 2.3, obtida de Epprecht e Costa (2001), apresenta os NMA_0 's para vários gráficos de np com o tamanho das amostras fixo e variável. Os parâmetros de projeto se encontram na Tabela 2.2, ver Epprecht e Costa (2001). Só faz sentido comparar gráficos de controle que levem aos mesmos NMA_0 's e mesmas taxas de inspeção por amostragens durante o período em que o processo permanece sob controle, isto é, $\bar{n} = n_0$. Contudo, para gráficos por atributos, a variável de monitoramento é discreta; conseqüentemente, para dois gráficos de controle por atributos, é impossível que tenha os mesmos NMA_0 's e os mesmos tamanhos médios de amostras. Para efeito de comparação, estabelece-se que o gráfico de controle com tamanho de amostral variável (VSS) deve oferecer proteção igual ou superior contra alarmes falsos e, na média, deve demandar igual ou menos inspeção que o seu competidor, o gráfico de controle de np com amostras de tamanho fixo (FSS)

Para pequenos a moderados aumentos em p_0 , a adoção do esquema de amostragem com amostras de tamanho variável melhora o desempenho do gráfico de controle de np , contudo, para grandes aumentos, isto não se verifica.

Tabela 2.2: Parâmetros dos gráficos de controle de np considerados na Tabela 2.3

Caso	p_0	FSS		VSS						
		n	LC	n_1	n_2	LC_1	LA_1	LC_2	LA_2	r_1
A	0.005	100	3.5	45	347	3.5	0.5	5.5	3.5	0.81828
B	0.005	200	4.5	102	840	3.5	1.5	9.5	4.5	0.86776
C	0.005	300	5.5	200	609	5.5	1.5	7.5	4.5	0.75606
D	0.005	400	6.5	90	845	4.5	0.5	9.5	4.5	0.61983
E	0.005	600	8.5	300	1135	6.5	1.5	12.5	7.5	0.61643
F	0.005	800	10.5	599	1590	9.5	5.5	15.5	6.5	0.79839
G	0.010	50	3.5	15	200	2.5	0.5	6.5	2.5	0.82973
H	0.010	100	4.5	50	395	3.5	1.5	8.5	5.5	0.90214
I	0.010	200	6.5	107	800	4.5	2.5	17.5	8.5	0.87003
J	0.010	400	10.5	220	880	8.5	3.5	16.5	8.5	0.73110
K	0.010	600	13.5	390	1170	11.5	4.5	20.5	17.5	0.73123
L	0.010	800	16.5	180	1112	7.5	2.5	20.5	7.5	0.33589

Tabela 2.3: *NMA*'s para os gráficos de *np* com amostras de tamanho fixo e variável

Caso*	esquema	\bar{n}	NMA_0	$p_1 (x10^{-3})$									
				7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5	25,0	27,5	30,0
A	FSS	100	597,6	142,6	54,42	23,85	15,57	10,09	7,09	5,30	4,15	3,38	2,83
	VSS	99,88	614,9	74,70	20,12	8,70	5,13	3,68	2,98	2,59	2,36	2,21	2,11
B	FSS	200	282,1	55,14	19,33	9,30	5,45	3,65	2,69	2,13	1,78	1,55	1,39
	VSS	199,6	332,7	24,68	6,75	3,96	3,00	2,53	2,24	2,04	1,90	1,78	1,68
C	FSS	300	230,8	37,25	12,06	5,68	3,37	2,34	1,80	1,49	1,31	1,20	1,13
	VSS	299,8	284,1	24,06	6,46	3,30	2,34	1,94	1,73	1,60	1,50	1,41	1,34
D	FSS	400	226,6	30,36	9,12	4,22	2,54	1,81	1,45	1,26	1,15	1,08	1,05
	VSS	377,0	228,6	14,97	4,34	2,59	2,06	1,84	1,74	1,68	1,64	1,61	1,57
E	FSS	600	270,1	25,22	6,59	2,96	1,83	1,38	1,18	1,08	1,04	1,02	1,01
	VSS	599,2	388,6	17,39	3,96	2,18	1,71	1,52	1,40	1,32	1,24	1,18	1,13
F	FSS	800	362,2	23,81	5,46	2,40	1,53	1,21	1,08	1,03	1,01	1,00	1,00
	VSS	798,8	420,6	9,99	3,14	1,97	1,55	1,34	1,20	1,11	1,05	1,03	1,01

Caso*	esquema	\bar{n}	NMA_0	p_1									
				0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,60
G	FSS	50	626,5	148,5	56,31	27,62	15,93	10,28	7,19	5,35	4,17	3,39	2,84
	VSS	46,50	929,0	91,15	20,08	8,35	5,14	3,88	3,24	2,87	2,63	2,46	2,33
H	FSS	100	291,4	56,52	19,67	9,41	5,49	3,57	2,69	2,13	1,77	1,54	1,38
	VSS	83,76	300,1	27,02	7,45	4,17	3,11	2,61	2,32	2,11	1,95	1,83	1,72
I	FSS	200	232,8	30,89	9,21	4,24	2,54	1,81	1,45	1,25	1,14	1,08	1,04
	VSS	197,1	239,4	23,93	5,01	2,83	2,15	1,82	1,62	1,47	1,36	1,27	1,20
J	FSS	400	372,7	24,17	5,49	2,40	1,52	1,21	1,08	1,03	1,01	1,00	1,00
	VSS	397,5	375,2	8,44	2,79	1,94	1,65	1,49	1,36	1,25	1,17	1,10	1,06
K	FSS	600	290,0	13,83	3,15	1,56	1,16	1,04	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00
	VSS	599,6	354,2	8,01	2,23	1,59	1,37	1,21	1,10	1,05	1,02	1,01	1,00
L	FSS	800	282,5	10,04	2,30	1,28	1,06	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	VSS	799,0	284,8	6,54	2,03	1,45	1,31	1,25	1,20	1,15	1,11	1,07	1,05

* Os parâmetros de projeto estão na Tabela 2.2

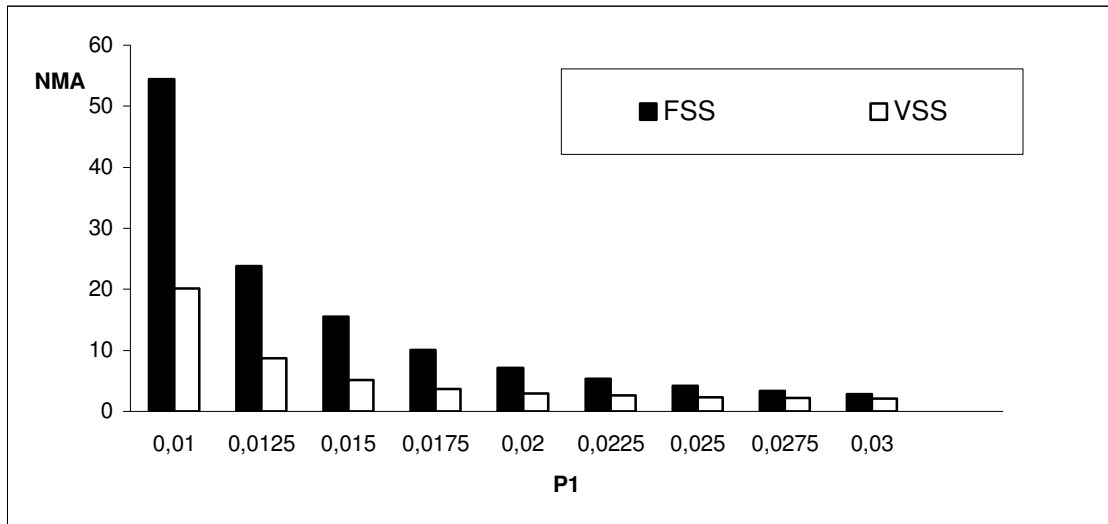


Figura 2.4. *NMA* do gráfico de np , esquemas *FSS* e *VSS*

A Figura 2.4 compara o gráfico de np com amostras de tamanho variável (*VSS*) com o gráfico de np com amostras de tamanho fixo (*FSS*), caso A da Tabela 2.2 e 2.3. A adoção de amostras de tamanho variável reduz o *NMA* substancialmente.

2.2. Esquemas Adaptativos Duais Aplicados ao Tamanho das Amostras e ao Intervalo entre Retirada de Amostras

Costa (1997) propôs o gráfico de controle de \bar{X} com esquema *VSSI* de monitoramento, em que o tamanho das amostras e o intervalo entre retirada de amostras são variáveis (*variable sample size and variable sampling interval*). O processo inicia-se em controle com a média $\mu = \mu_0$, e assim permanece até a ocorrência de uma causa especial que desloca a média do processo de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$, sendo $\delta > 0$. O instante de sua ocorrência é dado por uma distribuição exponencial de parâmetro λ (assim $1/\lambda$ é o tempo médio em que o processo permanece ajustado). Amostras aleatórias de tamanho variável são extraídas do processo. As médias amostrais são plotadas em um gráfico de controle de \bar{X} com limites de advertência $\mu_0 \pm w\sigma_{\bar{X}}$ e limites de ação $\mu_0 \pm k\sigma_{\bar{X}}$, com $0 \leq w < k$. Para facilitar a apresentação, os pontos amostrais plotados no gráfico de controle serão as médias amostrais padronizadas, isto é, $(\bar{X} - \mu_0)/\sigma_{\bar{X}}$. Nesse caso, os limites de advertência e de ação serão simplesmente $\pm w$ e $\pm k$, respectivamente. A investigação de causas especiais será empreendida quando o ponto amostral não pertencer ao intervalo $(-k, k)$.

O tamanho da próxima amostra e o instante de sua retirada depende do que ocorre com a amostra atual. Se o ponto amostral atual pertence ao intervalo $(-w, w)$, então a próxima amostra será constituída de n_1 itens e será retirada após um intervalo de tempo h_1 ; e se o ponto amostral atual pertence ao intervalo $(-k, -w]$ ou $[w, k)$, então a próxima amostra será constituída de n_2 itens e será retirada após um intervalo de tempo h_2 ; sendo $n_2 > n_1$ e $h_2 < h_1$. O tamanho da primeira amostra que é retirada do processo de produção quando este se inicia, ou após um alarme falso, é escolhido aleatoriamente. Se ela é grande (pequena) ela será retirada após um curto (longo) intervalo de tempo. Durante o período em controle todas as amostras, incluindo a primeira, devem ter probabilidade p_0 de serem pequenas e $(1 - p_0)$ de serem grandes, onde

$$p_0 = \Pr[|Z| < w \mid |Z| < k] \quad (2.8)$$

A velocidade com a qual o gráfico de controle detecta alterações no processo mede sua eficiência estatística. Quando o intervalo entre retirada de amostras é fixo a velocidade pode ser medida pelo NA , número de amostras até o sinal, mas quando o intervalo é variável, adota-se o TS , tempo até o sinal. O TS é o tempo que vai do desajuste do processo até a sua sinalização pelo gráfico. A duração de um ciclo, TC , corresponde ao tempo que vai do início da produção até o primeiro sinal após o desajuste do processo. Se a causa especial ocorre segundo uma distribuição exponencial de parâmetro λ então

$$TES = TEC - 1/\lambda \quad (2.9)$$

onde TES é o tempo esperado até o sinal e TEC é o tempo esperado de um ciclo.

A propriedade de “Esquecimento” da distribuição exponencial permite obter o TEC usando o “approach” de cadeia de Markov. Assim, a cada instante de amostragem e em função das condições do processo (sob ou fora de controle) e do tamanho da amostra (grande ou pequeno), um dos seguintes estados é alcançado;

Estado 1: O processo está sob controle e a amostra é pequena

Estado 2: O processo está sob controle e a amostra é grande

Estado 3: O processo está fora de controle e a amostra é pequena

Estado 4: O processo está fora de controle e a amostra é grande

Alternativamente, as condições da média do processo (ajustada ou desajustada) quando da retirada da $(i+1)$ éxima amostra e a posição do i -ésimo ponto no gráfico de controle definem os estados transientes da cadeia de Markov (vide Tabela 2.4).

Tabela 2.4: Os estados da cadeia de Markov.

i éxima amostra	$(i+1)$ éxima amostra	
Posição do ponto amostral (região)	Condições do processo (sob ou fora de controle)*	Estado da cadeia de Markov
advertência	sob	2
advertência	fora	4
central	sob	1
central	fora	3

(*) sob controle significa que $\mu = \mu_0$ e fora de controle significa que $\mu = \mu_0 \pm \delta\sigma$

O gráfico de controle produz um sinal sempre que um ponto amostral é plotado na região de ação do gráfico. Se o estado corrente é o estado 1 ou 2 (3 ou 4) o sinal é um alarme falso (verdadeiro). O estado absorvente (estado 5) é alcançado com a ocorrência de um alarme verdadeiro. A matriz de probabilidade de transições é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} \end{bmatrix}$$

onde

$$p_1 = p_{11} = p_{21} = \Pr[|Z| < w | Z| < k] e^{-\lambda h_1}$$

$$p_2 = p_{12} = p_{22} = \Pr[w < Z < w | Z| < k] e^{-\lambda h_2}$$

$$p_3 = p_{13} = p_{23} = \Pr[|Z| < w | Z| < k] (1 - e^{-\lambda h_1})$$

$$p_4 = p_{14} = p_{24} = \Pr[w < Z < k | Z| < k] (1 - e^{-\lambda h_2})$$

$$p_{33} = \Pr[|Y| < w | Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1)]$$

$$p_{34} = \Pr[w < Y < k | Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1)]$$

$$p_{35} = \Pr[|Y| > k | Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1)]$$

$$p_{43} = \Pr[|Y| < w | Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1)]$$

$$p_{44} = \Pr[w < Y < k | Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1)]$$

$$p_{45} = \Pr[|Y| > k | Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1)]$$

Das propriedades elementares de cadeias de Markov (Çinlar (1975))

$$TEC = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{t} \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{b}=(p_1, p_2, p_3, p_4)$ é o vetor de probabilidades iniciais, \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem 4, \mathbf{Q} é a matriz de probabilidades de transição sem os elementos associados ao estado absorvente, e $\mathbf{t}'=(h_1, h_2, h_1, h_2)$ é o vetor de intervalos entre amostragens.

Um gráfico de controle é mais eficiente que o outro quando ele tem a capacidade de detectar alterações no processo com maior rapidez. Contudo, os gráficos de controle devem ser comparados em igualdades de condições, isto é, devem demandar o mesmo número de amostras, NA , e a mesma quantidade de itens a serem inspecionados, QI , durante o período em controle, que se supõe ser muito mais longo que o período fora de controle. Ainda das propriedades elementares de cadeias de Markov segue

$$NMA = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{r}$$

$$QMI = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{s}$$

onde $\mathbf{r}'=(1, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{s}'=(n_1, n_2, 0, 0)$. Portanto

$$NMA = (p_1 + p_2)/(1 - p_1 - p_2) \quad (2.11)$$

$$QMI = p_1 n_1 / (1 - p_1 - p_2) + p_2 n_2 / (1 - p_1 - p_2) \quad (2.12)$$

O NMA , QMI , e TEC para um gráfico padrão de \bar{X} são facilmente determinados porque nesse caso, se m_1 e m_2 representam o número de amostras tomadas do processo, antes e após a ocorrência da causa especial, então m_1+1 e m_2 são variáveis aleatórias geometricamente distribuídas com parâmetros q e p , respectivamente. Portanto, para um gráfico padrão de \bar{X} com tamanho de amostra n_0 e intervalo entre amostragens h

$$NMA = q/(1 - q) \quad (2.13)$$

$$QMI = n_0 q/(1 - q) \quad (2.14)$$

$$TEC = h[q/(1 - q) + 1/p] \quad (2.15)$$

onde $q = e^{-\lambda h}$ e $p = \Pr[|Y| > k | Y \sim N(\delta\sqrt{n_0}, 1)]$

Para comparar o esquema *VSSI* de monitoramento com o esquema padrão, os limites de advertência devem ser dados por;

$$w = \Phi^{-1} \left\{ \Phi(k) - \left[\Phi(k) - \frac{1}{2} \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 - n_2} \right) e^{-\lambda(h-h_2)} \right] \right\} \quad (2.16)$$

A expressão (2.16) foi obtida igualando o *NMA* (dado pelas expressões (2.11) e (2.13)) e o *QMI* (dado pelas expressões (2.12) e (2.14)), onde $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição normal padrão acumulada.

Considerando o conjunto de parâmetros (n_1, n_2, h_1, h_2) , o usuário pode fixar apenas três deles. O último é função dos demais. Normalmente é o parâmetro h_1 que é definido em função dos demais

$$h_1 = h_2 \frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{[2\Phi(k) - 1]e^{-\lambda(h-h_2)} - 2[\Phi(k) - \Phi(w)]}{2\Phi(w) - 1} \right\} \quad (2.17)$$

As Tabelas 2.5 e 2.6 apresentam os *TES*'s para vários gráficos de \bar{X} com o tamanho das amostras e/ou o intervalo entre amostragens variável. A adoção de amostras de tamanho variável e/ou o intervalo entre amostragens variável reduz o *TES* substancialmente.

Tabela 2.5: *TES*'s dos gráficos de controle de \bar{X} , esquemas *VSSI*, *VSI* e *VSS*, $n_0=3$

Chart	$\lambda = 0.0001$			δ				
	(n_1, n_2)	(h_1, h_2)	w	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
VSSI	(1, 30)	(1.07, 0.01)	1.80	13.56*	6.63	4.49	3.15	2.28
VSSI	(1, 12)	(1.21, 0.01)	1.33	19.94	4.62*	2.67	1.98	1.53
VSSI	(2, 8)	(1.20, 0.01)	1.38	30.90	5.79	2.08*	1.28	0.96
VSSI	(2, 6)	(1.33, 0.01)	1.15	34.69	6.87	2.17	1.24*	0.94
VSSI	(2, 6)	(1.33, 0.01)	1.14	34.69	6.87	2.17	1.24	0.94*
VSSI	(1, 30)	(1.07, 0.10)	1.80	13.63*	6.65	4.52	3.19	2.33
VSSI	(1,13)	(1.18, 0.10)	1.38	19.29	4.73*	2.81	2.07	1.61
VSSI	(2, 9)	(1.15, 0.10)	1.46	29.83	5.71	2.20*	1.38	1.03
VSSI	(2, 7)	(1.22, 0.10)	1.28	33.43	6.60	2.25	1.33*	0.99
VSSI	(2, 7)	(1.22, 0.10)	1.28	33.43	6.60	2.25	1.33	0.99*
VSS	(1,34)	(1.00, 1.00)	1.86	14.18*	7.33	5.15	3.81	2.93
VSS	(1,16)	(1.00, 1.00)	1.49	19.46	5.51*	3.36	2.56	2.10
VSS	(2,12)	(1.00, 1.00)	1.63	29.63	6.68	3.06*	2.04	1.57
VSS	(2,10)	(1.00, 1.00)	1.52	33.22	7.51	3.15	1.99*	1.51
VSS	(2, 8)	(1.00, 1.00)	1.38	37.92	8.99	3.47	2.02	1.47*
VSI	(3, 3)	(3.23, 0.01)	0.40	44.22*	11.79	4.01	2.17	1.74
VSI	(3, 3)	(2.67, 0.01)	0.48	44.32	11.72*	3.82	1.92	1.47
VSI	(3, 3)	(2.07, 0.01)	0.64	44.88	11.88	3.72*	1.70	1.20
VSI	(3, 3)	(1.62, 0.01)	0.87	46.18	12.50	3.86	1.61*	1.02
VSI	(3, 3)	(1.34, 0.01)	1.13	48.25	13.63	4.29	1.70	0.96*
VSI	(3, 3)	(3.10, 0.10)	0.39	45.58*	12.64	4.43	2.32	1.74
VSI	(3, 3)	(2.60, 0.10)	0.47	45.66	12.58*	4.27	2.12	1.52
VSI	(3, 3)	(2.03, 0.10)	0.62	46.13	12.72	4.18*	1.92	1.29
VSI	(3, 3)	(1.60, 0.10)	0.84	47.26	13.25	4.30	1.84*	1.13
VSI	(3, 3)	(1.60, 0.10)	1.10	49.10	14.25	4.68	1.92	1.08*
Shewhart Chart ($n = 3, h = 1.00, k = 3.00$)				60.19	21.98	9.26	4.45	2.41

Tabela 2.6: *TES*'s dos gráficos de controle de \bar{X} , esquemas *VSSI*, *VSI* e *VSS*, $n_0=5$

Chart	(n_1, n_2)	(h_1, h_2)	w	δ				
				0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
$\lambda = 0.0001$								
VSSI	(2, 29)	(1.12, 0.01)	1.58	6.86*	3.16	2.03	1.40	1.04
VSSI	(3, 14)	(1.22, 0.01)	1.33	10.13	2.25*	1.27	0.92	0.75
VSSI	(4, 9)	(1.25, 0.01)	1.28	15.85	2.78	1.12*	0.79	0.68
VSSI	(4,10)	(1.20, 0.01)	1.38	15.21	2.68	1.13	0.79*	0.67
VSSI	(4,12)	(1.14, 0.01)	1.52	14.04	2.56	1.16	0.80	0.66*
VSSI	(2, 30)	(1.10, 0.10)	1.60	6.95*	3.25	2.10	1.47	1.09
VSSI	(3, 15)	(1.18, 0.10)	1.38	10.06	2.37*	1.35	0.97	0.79
VSSI	(4, 10)	(1.18, 0.10)	1.37	15.76	2.89	1.22*	0.83	0.69
VSSI	(4, 10)	(1.18, 0.10)	1.38	15.76	2.89	1.22	0.84*	0.69
VSSI	(4, 12)	(1.13, 0.10)	1.53	14.48	2.72	1.24	0.85	0.69*
VSS	(2, 36)	(1.00, 1.00)	1.69	7.74*	3.90	2.70	2.03	1.61
VSS	(3, 21)	(1.00, 1.00)	1.58	10.43	3.22*	1.98	1.49	1.19
VSS	(3, 15)	(1.00, 1.00)	1.38	13.60	3.49	1.88*	1.37	1.12
VSS	(4,12)	(1.00, 1.00)	1.52	18.92	4.41	1.99	1.29*	0.98
VSS	(4, 9)	(1.00, 1.00)	1.28	22.87	5.59	2.27	1.34	0.96*
VSI	(5, 5)	(2.90, 0.01)	0.44	20.15*	4.38	1.90	1.52	1.45
VSI	(5, 5)	(2.14, 0.01)	0.62	20.42	4.24*	1.59	1.15	1.08
VSI	(5, 5)	(1.56, 0.01)	0.91	21.62	4.49	1.45*	0.90	0.80
VSI	(5, 5)	(1.25, 0.01)	1.27	23.83	5.27	1.59	0.83*	0.67
VSI	(5, 5)	(2.80, 0.10)	0.43	21.22*	4.86	2.04	1.50	1.37
VSI	(5, 5)	(2.09, 0.10)	0.60	21.46	4.74*	1.78	1.19	1.06
VSI	(5, 5)	(1.54, 0.10)	0.88	22.50	4.95	1.66*	0.98	0.82
VSI	(5, 5)	(1.25, 0.10)	1.23	24.38	5.61	1.77	0.91*	0.70
VSI	(5, 5)	(1.11, 0.10)	1.59	26.70	6.59	2.08	0.96	0.67*
Shewhart Chart ($n = 5, h = 1.00, k = 3.00$)				32.90	10.26	4.00	1.89	1.07

Nesta seção, por meio das propriedades elementares das cadeias de Markov, foi possível obter o *TES* para os gráficos de controle de \bar{X} , esquemas *VSSI*, *VSI* e *VSS*. Na próxima seção, será apresentado um desenvolvimento matemático alternativo para a obtenção do *TES*. Os dois procedimentos levam a valores de *TES* cada vez mais iguais, a medida em que λ diminui.

2.3. Esquemas Adaptativos Duais Aplicados ao Tamanho das Amostras ao Intervalo entre Retirada de Amostras e ao Fator de Abertura dos Limites de Controle

Costa (1999) propôs para o gráfico de \bar{X} variar o tamanho das amostras e o instante de amostragem. Epprecht, Costa e Mendes (2003) adotaram este esquema com o gráfico de c .

2.3.1 Gráfico de Controle de \bar{X}

Costa (1999) propôs o gráfico de controle de \bar{X} com esquema Vp de monitoramento, em que o tamanho das amostras, o intervalo de tempo entre retirada de amostras, e o fator de abertura dos limites de controle são variáveis. O processo inicia-se em controle com a média $\mu = \mu_0$, e assim permanece até a ocorrência de uma causa especial que desloca a média do processo de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$, sendo $\delta > 0$.

A posição do último ponto amostral estabelece o tamanho da próxima amostra e o instante de sua amostragem (vide Figura 2.5). Se o último ponto amostral pertence a região de advertência do gráfico então a próxima amostral deverá ser grande, isto é n_2 , e ela deve ser amostrada após um intervalo curto de tempo, isto é h_2 . Por outro lado, se o último ponto amostral pertencer a região central do gráfico a próxima amostral deverá ser pequena, isto é n_1 , e ela deverá ser amostrada após um intervalo longo de tempo, isto é h_1 . Além disso, os valores de \bar{X} deverão ser plotados em um gráfico com limites de advertência e de ação dados por $\mu_0 \pm w_i\sigma_0/\sqrt{n_i}$ e $\mu_0 \pm k_i\sigma_0/\sqrt{n_i}$ respectivamente, onde $i=1$ ($i=2$) se \bar{X} vier de uma amostra pequena (grande), sendo $k_1 > k_0 > k_2$ e $w_1 > w_2$.

Para evitar o uso de dois gráficos de \bar{X} , um para amostras pequenas e outro para amostras grandes, o usuário pode construir o gráfico de \bar{X} com duas escalas, uma do lado esquerdo e outra do lado direito, conforme ilustrado na Figura 2.5. Os valores de \bar{X} vindos de amostras pequenas

(grandes) são plotados no gráfico de \bar{X} considerando a escala da esquerda (direita). Como a escala da esquerda não é uma função linear da escala da direita, os limites de advertência (e/ou de ação) para amostras pequenas e grandes não coincidem. O gráfico de \bar{X} da Figura 2.5 é um gráfico especial, onde as escalas da esquerda e da direita foram escolhidas para que os limites de advertência do lado esquerda e do lado direito coincidam. Além disso, a região de advertência para amostras pequenas foi “encolhida” forçando a coincidência dos limites de ação. Por simplicidade, os limites do gráfico de \bar{X} da Figura 2.5 foram obtidos para $\mu_0 = 0$ e $\sigma_0 = 1.00$. O gráfico proposto sinaliza sempre que uma observação de \bar{X} cai na região de ação do gráfico. Quando $\mu = \mu_0$ o sinal é um alarme falso, quando $\mu = \mu_1$ o sinal é um alarme verdadeiro.

O tamanho da primeira amostra que é retirada do processo de produção quando este se inicia, ou após um alarme falso, é escolhido aleatoriamente. Se ela é grande (pequena) ela será retirada após um curto (longo) intervalo de tempo. Durante o período em controle todas as amostras, incluindo a primeira, devem ter probabilidade p_0 de serem pequenas e $(1-p_0)$ de serem grandes, onde

$$p_0 = \Pr[|Z| < w_i | |Z| < k_i], \quad i=1,2. \quad (2.18)$$

onde $Z \sim N(0,1)$. A expressão (2.18) foi construída sob a hipótese que, durante o período em que o processo permanece ajustado, as amostras tem probabilidade p_0 $(1-p_0)$ de serem pequenas (grandes).

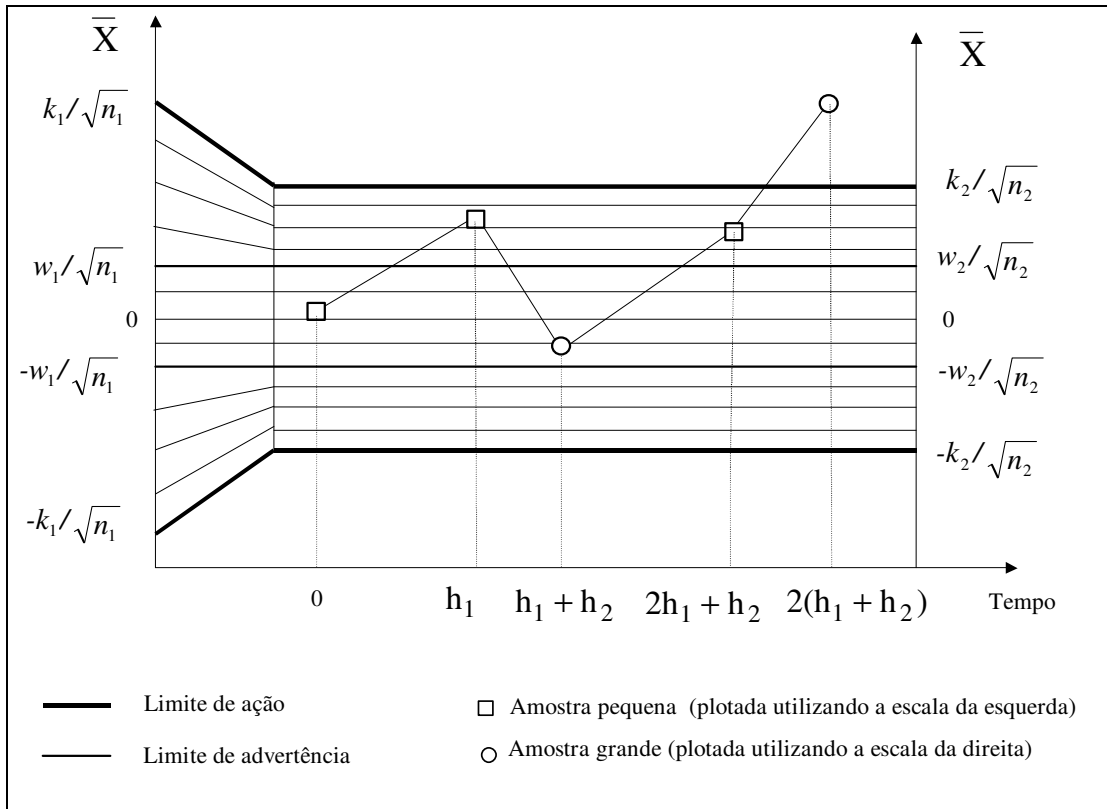


Figura 2.5: Gráfico de \bar{X} com duas escalas

No Apêndice A é obtida a expressão do tempo médio entre o instante em que o processo se desajusta e o instante em que o gráfico de controle sinaliza tal desajuste, TES .

Os oito parâmetros do esquema de monitoramento Vp utilizado com o gráfico de controle de \bar{X} , (n_1, n_2) , (h_1, h_2) , (w_1, w_2) e (k_1, k_2) , são escolhidos levando em conta a restrição em (2.18) e as restrições a seguir:

$$n_1 p_0 + n_2 (1 - p_0) = n_0 \quad (2.19)$$

$$h_1 p_0 + h_2 (1 - p_0) = h_0 \quad (2.20)$$

$$\Pr[|Z| > k_1] p_0 + \Pr[|Z| > k_2] (1 - p_0) = \Pr[|Z| > k_0] \quad (2.21)$$

onde n_0 , h_0 , e k_0 são os parâmetros do gráfico de \bar{X} padrão (gráfico de Shewhart). Usualmente $n_0=3, 4$ ou 5 , $k_0=3,00$, e, sem perda de generalidade, $h_0=1,00$.

As restrições estabelecidas nas expressões (2.18) até (2.21) asseguram que a taxa de alarmes falso e a taxa de inspeção com o processo ajustado é a mesma para o gráfico de \bar{X} padrão e para o gráfico de \bar{X} com todos parâmetros variáveis. De acordo com as expressões (2.18), (2.19) e (2.20) o usuário pode escolher os valores de um dos pares (n_1, n_2) , (h_1, h_2) e (k_1, k_2) , e um dos elementos de cada par restante. Sugere-se escolher (n_1, n_2) , e os elementos h_1 e k_1 por duas razões:

1. O gama de valores para n_2 e h_2 dependem do tempo necessário para amostrar cada item
2. O esquema Vp é recomendado para detectar pequenas alterações na média do processo; neste caso, o gráfico de \bar{X} tem um melhor desempenho quando $n_1 = 1$ e k_1 grande o suficiente para que com amostras pequenas o risco de se ter um alarme falso seja praticamente zero.

Os demais parâmetros serão dados por:

$$k_2 = \Phi^{-1} \left\{ \frac{(n_2 - n_1)\Phi(k) - (n_2 - n)\Phi(k_1)}{n - n_1} \right\}$$

$$w_i = \Phi^{-1} \left\{ \frac{2(n_2 - n)\Phi(k_i) + n - n_1}{2(n_2 - n_1)} \right\}, i = 1, 2$$

e

$$h_1 = \frac{h(n_2 - n_1) - h_2(n - n_1)}{n_2 - n}$$

A Figura 2.6 compara o gráfico de \bar{X} com parâmetros variáveis (Vp) com o gráfico de \bar{X} com parâmetros fixo, gráfico de Shewhart. O Apêndice A apresenta o desenvolvimento matemático para a obtenção da expressão do tempo esperado até o sinal – TES . A adoção de parâmetros variáveis reduz o TES substancialmente.

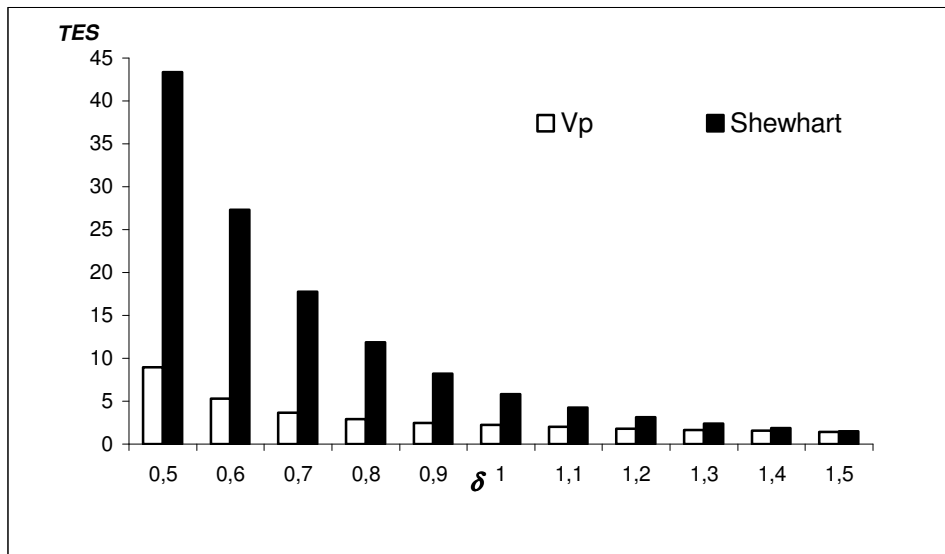


Figura 2.6: *TES* do Gráfico de Shewhart ($n_0=4$, $h_0=1,00$ e $K=3,000$) e do gráfico *Vp* ($n_1 = 1, n_2 = 12$, $h_1=1,34$, $h_2=0,10$, $w_1=1,097$, $w_2=1,080$, $k_1=6,000$ e $k_2=2,579$)

A Tabela 2.7 ilustra a influência do valores de k_1 , h_2 e n_2 no *TES* do gráfico *Vp*. Quando se aumenta o n_2 , se reduz h_2 , ou se aumenta o k_2 , gráfico de controle sinaliza pequenas mudanças na média com maior rapidez

Tabela 2.7: Influência dos valores de n_2 , h_1 e k_2 no TES do Gráfico de Vp^*

δ	$n_1 = 1$	k_1	6,00		3,00
		h_2	0,10		0,25
		n_2	8	12	12
0,5			12,84	8,99	9,25
0,6			6,87	5,28	5,43
0,7			4,24	3,69	3,77
0,8			3,02	2,93	2,97
0,9			2,41	2,50	2,52
1,0			2,07	2,21	2,22
1,1			1,86	1,99	2,00
1,2			1,70	1,81	1,83
1,3			1,57	1,66	1,68
1,4			1,47	1,53	1,56
1,5			1,38	1,42	1,45

* $NMA_0=370,4$

2.3.2 Gráfico de Controle de c

Epprecht, Costa e Mendes (2003) propuseram o gráfico de controle de c com o tamanho das amostras, a abertura dos limites de controle e o intervalo entre retirada de amostras variáveis (esquema Vp). Seja um processo produtivo, cuja estatística de interesse x_k é o número de não conformidades em m unidades de inspeção. A variável x_k tem distribuição de Poisson com média $c = mu$, onde u é o número médio de não conformidades por unidade inspecionada. No início de operação o processo é considerado estar sob controle com $u=u_0$, mas após a ocorrência da causa

especial o processo se desajusta, pois u passa de u_0 para u_1 , com $u_1 > u_0$. O processo permanece desajustado até que ocorra uma intervenção para retorná-lo ao estado de controle.

Suponha que um gráfico adaptativo de c é utilizado para controlar o processo. O gráfico adaptativo de c é definido com dois conjuntos de parâmetros, $\Theta_1 = \{m_1, h_1, UCL_1, WL_1\}$ e $\Theta_2 = \{m_2, h_2, UCL_2, WL_2\}$, onde m_i ($i=1, 2$) é o tamanho da amostra, h_i é o intervalo entre amostragens, UCL_i é o limite de ação, e WL_i é o limite de advertência, sendo $0 < WL_i < UCL_i$ ($i=1, 2$), $m_1 \leq m_2$ e $h_1 \geq h_2$. A operação do gráfico adaptativo de c é simples: a posição de x_k no gráfico de controle estabelece o conjunto de parâmetros, Θ_1 ou Θ_2 , para a próxima amostra: se $x_k \leq WL_i$, use para a próxima amostra o conjunto de parâmetros Θ_1 ; se $WL_i < x_k \leq UCL_i$, use para a próxima amostra o conjunto de parâmetros Θ_2 ; se $x_k > UCL_i$, investigue a existência de causa especial.

A partir da construção de uma cadeia de Markov é possível obter as propriedades do gráfico adaptativo de c . A cadeia é construída de tal modo que, a cada instante de amostragem, um dentre três estados é alcançado, dependendo da posição do valor amostral x_k (vide Tabela 2.8).

Tabela 2.8. Estados da cadeia de Markov

k éxima amostra Posição de x_k	$(k+1)$ éxima amostra Conjunto de parâmetros	Estados da Cadeia de Markov
$x_k \leq WL_i$	Θ_1	1
$WL_i < x_k \leq UCL_i$	Θ_2	2
$x_k > UCL_i$	—	3*

* estado absorvente (controle interrompido)

Se p_{ij} representa a probabilidade de transição em um estágio do estado i pra o estado j , quando $u=u_s, s=0,1$ então;

$$p_{i1}^{(s)} = \sum_{j=0}^{\text{int}(WL_i)} e^{-m_i u} (m_i u)^j / j! \quad i=1,2, s=0,1$$

$$p_{i2}^{(s)} = \sum_{j=\text{int}(WL_i)+1}^{\text{int}(UCL_i)} e^{-m_i u} (m_i u)^j / j! \quad i=1,2, s=0,1$$

$$p_{i3}^{(s)} = 1 - p_{i1} - p_{i2} \quad i=1,2, s=0,1$$

$$p_{31}^{(s)} = p_{32}^{(s)} = 0 \quad s=0,1$$

$$p_{33}^{(s)} = 1 \quad s=0,1$$

O conjunto de parâmetros a ser adotado para a primeira amostra (ou quando o controle estatístico do processo está se iniciando ou quando ele é reiniciado após um alarme) é escolhido aleatoriamente. Para o desenvolvimento matemático, é conveniente assumir que o conjunto de parâmetros será escolhido aleatoriamente, com probabilidade r_1 de ser Θ_1 e com probabilidade $1-r_1$ de ser Θ_2 , onde

$$r_1 = \left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right) / (2a)$$

e

$$\begin{aligned} a &= p_{23}^{(0)} - p_{13} > 0 \\ b &= p_{12}^{(0)} + p_{21}^{(0)} + p_{13}^{(0)} - p_{23}^{(0)} \\ c &= -p_{21}^{(0)} \end{aligned}$$

Como Reynolds et al. (1988) nós consideramos que a probabilidade s_1 (s_2) de uma mudança no processo ocorrer dentro de um intervalo curto (longo) é proporcional ao produto do comprimento do intervalo pela probabilidade de um intervalo daquele comprimento ocorrer:

$$s_i = r_i h_i / \mathbf{r}' \mathbf{h} \quad i=1,2$$

sendo $\mathbf{r}' = (r_1 \quad r_2)$ e $\mathbf{h}' = (h_1 \quad h_2)$.

Das propriedades elementares de cadeias de Markov obtém-se o *NMA*, número esperado de amostras até o sinal:

$$NMA_0 = \mathbf{r}' \mathbf{N}_0 \mathbf{1}$$

$$NMA_1 = \mathbf{s}' \mathbf{N}_1 \mathbf{1}$$

O índice $i=0,1$ indica o estado do processo ($i=0$ ajustado, $i=1$ desajustado), $\mathbf{s}' = (s_1 \quad s_2)$, $\mathbf{1}' = (1 \quad 1)$ e ambos \mathbf{N}_0 e \mathbf{N}_1 seguem a fórmula geral

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$\mathbf{N} = \frac{1}{(1 - p_{11}^{(s)})(1 - p_{22}^{(s)}) - p_{12}^{(s)} p_{21}^{(s)}} \begin{bmatrix} (1 - p_{22}^{(s)}) & p_{12}^{(s)} \\ p_{21}^{(s)} & (1 - p_{11}^{(s)}) \end{bmatrix}$$

Das propriedades elementares de cadeias de Markov obtém-se também o *TES*, tempo esperado até o sinal, e para o período em controle, o tamanho médio das amostras, \bar{m} , e o comprimento médio do intervalo de tempo entre amostragens, \bar{h} :

$$TES_0 = \mathbf{r}' \mathbf{N}_0 \mathbf{h}$$

$$TES = \mathbf{s}' \mathbf{N}_1 \mathbf{h} - \mathbf{s}' \mathbf{h} / 2$$

$$\bar{m} = (r'N_0m)/NMA_0$$

$$\bar{h} = TES_0/NMA_0$$

onde $m' = (m_1 \quad m_2)$.

O TES_0 representa o tempo esperado até um alarme falso. O TES_1 representa o tempo esperado até um alarme verdadeiro caso a alteração no parâmetro do processo se dê imediatamente após a inspeção de uma amostra. Como o instante em que o processo se altera é suposto aleatório, o tempo esperado entre o instante da mudança do processo e a ocorrência do alarme é chamado de tempo esperado até o sinal (TES):

$$TES = TES_1 - E(t)$$

onde t é o tempo entre a última amostral obtida com o processo em controle e o instante em que o processo se desajusta. Similar ao trabalho de Reynolds *et al.* (1988), nós assumimos que, quando o processo se altera em um instante no tempo dentro de um intervalo entre duas amostragens consecutivas, o exato ponto da mudança é uniformemente distribuído ao longo do intervalo, conseqüentemente:

$$E(t) = s'h/2$$

e

$$TES = TES_1 - s'h/2$$

Visando comparar a rapidez de sinalização dos gráficos de c com parâmetros fixos e com parâmetros variáveis, a Tabela 2.10 apresenta vários gráficos de c projetados para valores de $u_0=0,5$ e $1,0$, e que minimizam o TES para uma perturbação de magnitude γ^* . Para $u_0=1,5, 2,0, 3,0$ e $4,0$ ver Epprecht, Costa e Mendes (2003). Na Tabela 2.11 estão o TES destes gráficos para vários valores de $\gamma = u_1/u_0$. A Tabela 2.9 apresenta a notação utilizada para os esquemas adaptativos e não adaptativos considerados nas Tabelas 2.10 e 2.11. Exemplo, o esquema VSI

está associado ao gráfico de controle com o intervalo entre amostragens variável, porém com o tamanho das amostras e a abertura dos limites de controle fixos.

Tabela 2.9: Esquemas adaptativos -notação

Esquema	Tamanho das amostras	Intervalos entre amostragens	Abertura dos limites de controle
<i>Vp</i>	variável	variável	variável
<i>VSS</i>	variável	fixo	fixo
<i>VSIL</i>	fixo	variável	variável
<i>VL</i>	fixo	fixo	variável
<i>VSI</i>	fixo	variável	fixo
<i>Shewhart</i>	fixo	fixo	fixo

O TES_0 e o TES para o gráfico de c com parâmetros fixos segue:

$$TMS_0 = NMA_0 h$$

$$TMS = NMZ_1 h - h/2$$

onde $h=1$, e NMA_0 e NMA_1 são calculados pela distribuição de Poisson.

Na Tabela 2.11, observa-se que, ao se variar os parâmetros de um gráfico de c , o tempo médio de detecção de pequenas a moderadas mudanças no processo se reduz substancialmente. Epprecht, Costa e Mendes (2005) ensinam como, na prática, deve ser projetado o gráfico adaptativo de controle por atributos.

Tabela 2.10: Parâmetros do gráfico adaptativo de c otimizado para um dado c_0 , γ^* e h_2

$c_0=u_0$	γ^*	Esquema	h_2	h_1	m_1	m_2	UCL_1	WL_1	UCL_2	WL_2	r_1
0.5	1.5	Shewhart	1	1	1	1	3.5	----	3.5	----	----
		Vp	0.1	1.158	0.536	3.635	4.5	1.5	5.5	0.5	0.8509
		Vp	0.5	1.088	0.536	3.635	4.5	1.5	5.5	0.5	0.8509
		VSS	1	1	0.536	3.635	4.5	1.5	5.5	0.5	0.8509
		VSIL	0.1	1.192	1	1	5.5	1.5	2.5	0.5	0.8728
		VSIL	0.5	1.133	1	1	5.5	1.5	2.5	0.5	0.8728
		VL	1	1	1	1	4.5	1.5	2.5	1.5	0.9111
		VSI	0.1	1.581	1	1	3.5	0.5	3.5	0.5	0.6076
	VSI	0.5	1.323	1	1	3.5	0.5	3.5	0.5	0.6076	
	2.0	Vp	0.1	1.180	0.256	4.615	3.5	0.5	6.5	2.5	0.8336
		Vp	0.5	1.100	0.256	4.615	3.5	0.5	6.5	2.5	0.8336
		VSS	1	1	0.256	4.615	3.5	0.5	6.5	2.5	0.8336
		VSIL	0.1	1.192	1	1	5.5	1.5	2.5	0.5	0.8728
		VSIL	0.5	1.133	1	1	5.5	1.5	2.5	0.5	0.8728
		VL	1	1	1	1	4.5	1.5	2.5	1.5	0.9111
		VSI	0.1	1.581	1	1	3.5	0.5	3.5	0.5	0.6076
		VSI	0.5	1.323	1	1	3.5	0.5	3.5	0.5	0.6076
	3.0	Vp	0.1	1.216	0.400	3.460	3.5	0.5	5.5	2.5	0.8067
		Vp	0.5	1.093	0.328	4.580	3.5	0.5	6.5	3.5	0.8425
		VSS	1	1	0.328	4.580	3.5	0.5	6.5	3.5	0.8425
VSIL		0.1	1.192	1	1	5.5	1.5	2.5	0.5	0.8728	
VSIL		0.5	1.133	1	1	5.5	1.5	2.5	0.5	0.8728	
VL		1	1	1	1	4.5	1.5	2.5	1.5	0.9111	
VSI		0.1	1.581	1	1	3.5	0.5	3.5	0.5	0.6076	
VSI		0.5	1.323	1	1	3.5	0.5	3.5	0.5	0.6076	
1.0	1.5	Vp	1	1	1	1	4.5	----	4.5	----	----
		Vp	0.1	1.286	0.512	2.515	5.5	1.5	6.5	1.5	0.7588
		VSS	0.5	1.152	0.493	2.550	5.5	1.5	6.5	1.5	0.7665
		VSIL	1	1	0.384	3.075	3.5	1.5	7.5	1.5	0.7778
		VSIL	0.1	1.222	1	1	5.5	2.5	3.5	0.5	0.8278
		VL	0.5	1.140	1	1	5.5	2.5	3.5	0.5	0.8278
		VSI	1	1	1	1	6.5	2.5	3.5	0.5	0.8270
		VSI	0.1	2.538	1	1	4.5	0.5	4.5	0.5	0.3692
	2.0	VSI	0.5	1.854	1	1	4.5	0.5	4.5	0.5	0.3692
		Vp	0.1	1.317	0.256	3.075	3.5	0.5	7.5	3.5	0.7394
		Vp	0.5	1.176	0.256	3.075	3.5	0.5	7.5	3.5	0.7394
		VSS	1	1	0.208	4.195	2.5	0.5	9.5	5.5	0.8033
		VSIL	0.1	1.222	1	1	5.5	2.5	3.5	0.5	0.8278
		VSIL	0.5	1.140	1	1	5.5	2.5	3.5	0.5	0.8278
		VL	1	1	1	1	6.5	2.5	3.5	0.5	0.8270
		VSI	0.1	2.538	1	1	4.5	0.5	4.5	0.5	0.3692
	3.0	VSI	0.5	1.854	1	1	4.5	0.5	4.5	0.5	0.3692
		Vp	0.1	1.228	0.776	1.885	4.5	1.5	5.5	2.5	0.7981
		Vp	0.5	1.165	0.312	3.075	3.5	0.5	7.5	4.5	0.7522
		VSS	1	1	0.312	3.075	3.5	0.5	7.5	4.5	0.7522
VSIL		0.1	1.222	1	1	5.5	2.5	3.5	0.5	0.8278	
VSIL		0.5	1.140	1	1	5.5	2.5	3.5	0.5	0.8278	
VL		1	1	1	1	6.5	2.5	3.5	0.5	0.8270	
VSI		0.1	2.538	1	1	4.5	0.5	4.5	0.5	0.3692	
VSI	0.5	1.854	1	1	4.5	0.5	4.5	0.5	0.3692		

Tabela 2.11: *TES* para os gráficos de *c* da Tabela 2.10

c_0 $=u_0$	γ^*	Scheme	h_2	\bar{m}	\bar{h}	TES_0	$\gamma=u_1/u_0$							
							1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.5	padrão			1	1	570.9	136.6	52.16	25.63	14.73	9.42	6.50	4.75	3.63
	1.5	Vp	0.1	0.998	1.000	615.5	40.19	13.18	7.87	5.62	4.33	3.49	2.91	2.48
		Vp	0.5	0.998	1.000	615.5	<u>43.61</u>	14.27	8.29	5.83	4.47	3.62	3.04	2.62
		VSS		0.998	1	615.5	48.03	15.72	8.86	6.11	4.66	3.78	3.20	2.79
		VSIL	0.1	1	1.053	571.8	88.08	25.51	10.66	5.66	3.55	2.50	1.91	1.55
		VSIL	0.5	1	1.053	571.4	93.32	29.03	13.02	7.35	4.82	3.50	2.73	2.24
		VL		1	1	696.5	130.6	44.24	20.62	11.70	7.55	5.34	4.03	3.19
		VSI	0.1	1	1.000	570.9	110.3	34.63	14.36	7.22	4.21	2.76	2.01	1.58
	VSI	0.5	1	1.000	570.9	122.0	42.36	19.31	10.49	6.46	4.36	3.16	2.42	
	2.0	Vp	0.1	0.981	1.000	628.2	43.13	9.66	4.82	3.46	2.84	2.46	2.19	1.98
		Vp	0.5	0.981	1.000	628.2	46.33	<u>10.91</u>	<u>5.38</u>	3.76	3.04	2.62	2.34	2.14
		VSS		0.981	1	628.2	50.36	12.49	6.09	4.15	3.29	2.82	2.52	2.32
		VSIL	0.1	1	1.053	571.8	88.08	25.51	10.66	5.66	3.55	2.50	1.91	1.55
		VSIL	0.5	1	1.053	571.4	93.32	29.03	13.02	7.35	4.82	3.50	2.73	2.24
		VL		1	1	696.5	130.6	44.24	20.62	11.70	7.55	5.34	4.03	3.19
		VSI	0.1	1	1.000	570.9	110.3	34.63	14.36	7.22	4.21	2.76	2.01	1.58
	VSI	0.5	1	1.000	570.9	122.0	42.36	19.31	10.49	6.46	4.36	3.16	2.42	
	3.0	Vp	0.1	0.992	1.000	581.0	55.52	12.50	5.03	2.98	2.20	1.81	1.58	1.42
		Vp	0.5	0.998	1.000	682.9	57.79	13.00	5.54	<u>3.48</u>	<u>2.66</u>	<u>2.24</u>	<u>1.98</u>	<u>1.81</u>
		VSS		0.998	1	682.9	61.40	14.61	6.36	3.97	3.01	2.53	2.25	2.06
		VSIL	0.1	1	1.053	571.8	88.08	25.51	10.66	5.66	3.55	2.50	1.91	1.55
		VSIL	0.5	1	1.053	571.4	93.32	29.03	13.02	7.35	4.82	3.50	2.73	2.24
		VL		1	1	696.5	130.6	44.24	20.62	11.70	7.55	5.34	4.03	3.19
		VSI	0.1	1	1.000	570.9	110.3	34.63	14.36	7.22	4.21	2.76	2.01	1.58
VSI	0.5	1	1.000	570.9	122.0	42.36	19.31	10.49	6.46	4.36	3.16	2.42		
1.0	Vp			1	1	273.2	53.33	18.49	8.69	4.91	3.14	2.19	1.64	1.29
	1.5	Vp	0.1	0.995	1.000	282.9	16.35	5.14	3.13	2.31	1.85	1.55	1.35	1.20
		VSS	0.5	0.973	1.000	273.3	<u>18.47</u>	6.02	3.57	2.59	2.07	1.75	1.54	1.39
		VSIL		0.982	1	282.3	21.27	7.60	4.53	3.26	2.58	2.17	1.89	1.70
		VSIL	0.1	1	1.029	273.5	26.74	6.99	3.20	1.97	1.43	1.14	0.97	0.86
		VL	0.5	1	1.030	273.7	30.21	8.90	4.33	2.71	1.94	1.51	<u>1.24</u>	<u>1.06</u>
		VSI		1	1	298.2	36.18	11.74	6.01	3.84	2.78	2.17	1.78	1.51
		VSI	0.1	1	1.000	273.2	35.75	9.26	3.85	2.29	1.72	1.48	1.36	1.30
	VSI	0.5	1	1.000	273.2	43.40	13.19	5.83	3.29	2.18	1.63	1.31	1.12	
	2.0	Vp	0.1	0.991	1.000	273.7	18.19	4.55	2.56	1.95	1.66	1.47	1.33	1.23
		Vp	0.5	0.991	1.000	273.7	20.13	<u>5.26</u>	2.86	2.12	1.78	1.58	1.45	1.36
		VSS		0.992	1	312.2	24.58	6.12	3.29	2.45	2.08	1.88	1.74	1.64
		VSIL	0.1	1	1.029	273.5	26.74	6.99	3.20	1.97	1.43	1.14	0.97	0.86
		VSIL	0.5	1	1.030	273.7	30.21	8.90	4.33	2.71	1.94	1.51	<u>1.24</u>	<u>1.06</u>
		VL		1	1	298.2	36.18	11.74	6.01	3.84	2.78	2.17	1.78	1.51
		VSI	0.1	1	1.000	273.2	35.75	9.26	3.85	2.29	1.72	1.48	1.36	1.30
	VSI	0.5	1	1.000	273.2	43.40	13.19	5.83	3.29	2.18	1.63	1.31	1.12	
	3.0	Vp	0.1	1.000	1.000	280.7	26.57	6.14	2.60	1.60	1.20	1.00	0.88	0.81
		Vp	0.5	0.997	1.000	277.5	23.46	5.80	<u>2.82</u>	<u>1.96</u>	<u>1.60</u>	<u>1.42</u>	1.30	1.22
		VSS		0.997	1	277.5	25.59	6.72	3.28	2.24	1.82	1.60	1.48	1.40
		VSIL	0.1	1	1.029	273.5	26.74	6.99	3.20	1.97	1.43	1.14	0.97	0.86
		VSIL	0.5	1	1.030	273.7	30.21	8.90	4.33	2.71	1.94	1.51	<u>1.24</u>	<u>1.06</u>
		VL		1	1	298.2	36.18	11.74	6.01	3.84	2.78	2.17	1.78	1.51
		VSI	0.1	1	1.000	273.2	35.75	9.26	3.85	2.29	1.72	1.48	1.36	1.30
VSI	0.5	1	1.000	273.2	43.40	13.19	5.83	3.29	2.18	1.63	1.31	1.12		

A Figura 2.7 compara o gráfico de c com parâmetros variáveis (Vp) com o gráfico de c com parâmetros fixos (gráfico de Shewhart). A adoção de parâmetros variáveis reduz o TES substancialmente.

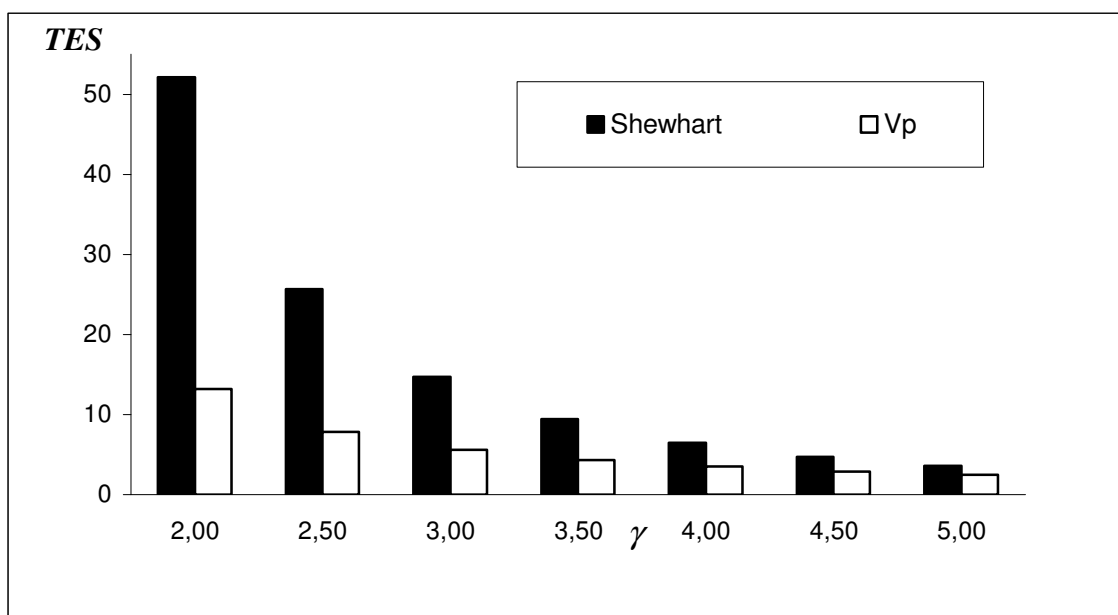


Figura 2.7: TES do gráfico de c , com parâmetros fixos e variáveis ($u_0=0,5$ e $\gamma^*=1,5$)

3. Estudo Econômico dos Gráficos de Controle

Desde o trabalho pioneiro de Duncan (1956), muitos pesquisadores vêm propondo diferentes modelos econômicos para a obtenção dos valores ótimos dos parâmetros dos gráficos de controle. Estes modelos incluem, entre outros, o custo com a inspeção dos itens das amostras, o custo com alarmes falsos e o custo com a produção de itens não conformes. Nesta área, os trabalhos do autor, que mais se destacaram, tratam:

- a) do estudo econômico dos gráficos de \bar{X} e R utilizados no monitoramento de processos sujeitos a duas causas especiais; uma que altera a média do processo, e outra que aumenta a sua variabilidade (Costa 1993);
- b) do estudo econômico dos gráficos adaptativos de \bar{X} (Costa e Rahim (2001));
- c) do estudo econômico dos gráficos de \bar{X} nas condições em que o monitoramento direto através da variável de interesse, X , é caro ou demanda muito tempo, sendo assim, recorre-se a uma variável substituta Y , correlacionada com X e fácil de ser observada (Costa e De Magalhães (2005)).

A seção 3.1 é dedicada ao caso (a) e a seção 3.2 ao caso (b).

3.1 Estudo Econômico dos Gráficos de Controle de \bar{X} e R

O estudo econômico dos gráficos de controle de \bar{X} e R , utilizados em conjunto, iniciou-se com o trabalho de Saniga (1977). O modelo econômico proposto assumia que o processo estava sujeito a duas causas especiais; a primeira alterava a média e a segunda aumentava a sua variabilidade. A ocorrência de uma causa especial bloqueava a ocorrência da outra, conseqüentemente, o modelo proposto não levava em conta o caso em que a média e variância se desajustam. Alternativamente, Saniga (1979) e Saniga e Montgomery (1981) propuseram o modelo de uma única causa especial que, simultaneamente, deslocava a média aumentando a variabilidade. Em Costa (1993), adota-se o modelo de Saniga (1979) a menos da restrição de que uma causa especial bloqueia a ocorrência da outra. Deste modo, se a média do processo se altera, isto não impede que a qualquer instante subsequente à variabilidade possa aumentar, ou alternativamente, se a variância do processo aumenta, isto não impede que a qualquer instante subsequente à média possa se deslocar de seu valor alvo, que por definição corresponde ao valor da média do processo quando este se encontra isento de causas especiais, portanto em controle.

A seguir apresentamos a notação, as hipóteses, os erros do tipo I e do II, e o modelo de custos adotado por Costa (1993).

3.1.1 Notação

Os símbolos utilizados por Costa (1993) para apresentar seu modelo econômico para a obtenção dos valores ótimos dos parâmetros dos gráficos de controle de \bar{X} e R estão na Lista de Símbolos.

3.1.2 Hipóteses do Modelo

No modelo proposto por Costa (1993), a qualidade dos itens produzidos é avaliada pelo valor de uma característica de qualidade X , normalmente distribuída. No início da produção, o processo é assumido estar em controle, isto é, isento de causas especiais. No entanto, ele é vulnerável a ocorrência de dois tipos de causas especiais, a causa especial (1) que desloca a média de μ_0 para $\mu_0 \pm \delta\sigma_0$, sendo $\delta > 0$, e a causa especial (2) que aumenta o desvio padrão de σ_0 para $\gamma\sigma_0$, sendo $\gamma > 1,0$. A ocorrência de um tipo de causa especial não bloqueia a ocorrência do outro tipo de causa especial. Deste modo, se a média do processo se altera, isto não impede que a qualquer instante subsequente o desvio padrão possa aumentar, ou alternativamente, se o desvio padrão do processo aumenta, isto não impede que a qualquer instante subsequente a média possa se deslocar de seu valor alvo.

Os instantes de ocorrência das causas especiais seguem distribuições exponenciais com tempos médios de $1/\lambda_1$ para a causa especial (1) e $1/\lambda_2$ para a causas especial (2). O tempo em que o processo permanece isento de causas especiais tem distribuição exponencial com média dada por $1/\lambda$ ($\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$). A produção é interrompida durante a procura de causas especiais. Costa e Rahim (2000) e Rahim e Costa (2000) tornaram o modelo mais abrangente ao adotarem a distribuição de Weibull para descrever os instantes de ocorrência das causas especiais. A distribuição exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull.

3.1.3 Poder de Detecção e Risco de Alarme Falso

Quando o processo é monitorado por dois gráficos de controle, gráficos de \bar{X} e de R , o erro do tipo I é dado por

$$\alpha = 2\Phi(-k_1) + [1 - 2\Phi(-k_1)]F_w(k_2)$$

Na linguagem de gráficos de controle, o erro do tipo I é chamado de alarme falso. Sua ocorrência é indesejável, pois leva a uma parada desnecessária da produção para a procura de causas especiais inexistentes.

O poder conjunto dos gráficos de \bar{X} e R na presença da causa especial (1) é dado por

$$p_1 = F_w(k_2) + \Phi(-k_1 - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-k_1 + \delta\sqrt{n})[1 - F_w(k_2)]$$

O poder conjunto dos gráficos de \bar{X} e R na presença da causa especial (2) é dado por

$$p_2 = F_w(k_2 / \lambda) + 2\Phi(-k_1 / \gamma)[1 - F_w(k_2 / \gamma)]$$

O poder conjunto dos gráficos de \bar{X} e R na presença das causas especiais (1) e (2) é dado por

$$p = F_w(k_2 / \gamma) + [\Phi(-k_1 / \gamma - \delta\sqrt{n} / \gamma) + \Phi(-k_1 / \gamma + \delta\sqrt{n} / \gamma)][1 - F_w(k_2 / \gamma)]$$

3.1.4 Tempo Esperado Fora de Controle

Se amostras de tamanho n são retiradas do processo a intervalos de tempo h , e o processo se desajusta entre a m -ésima e a $m+1$ -ésima amostragens, três casos podem ocorrer:

Caso 1: Somente a média do processo se altera;

Caso 2: Somente o desvio padrão do processo se altera;

Caso 3: A média e o desvio padrão se alteram.

A probabilidade de ocorrência do caso i é dada por q_i , $i=1, 2, 3$.

$$q_1 = \frac{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1 \int_{(m+1)h}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2}{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{(1 - e^{-\lambda_1 h}) e^{-\lambda_2 h}}{(1 - e^{-\lambda h})}$$

$$q_2 = \frac{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2 \int_{(m+1)h}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1}{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{(1 - e^{-\lambda_2 h}) e^{-\lambda_1 h}}{(1 - e^{-\lambda h})}$$

$$q_3 = \frac{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1 \int_{nh}^{(m+1)h} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2}{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{(1 - e^{-\lambda_1 h})(1 - e^{-\lambda_2 h})}{(1 - e^{-\lambda h})}$$

Alem disso, se a causa especial (i), $i=1, 2$, ocorre entre a m -ésima e a $m+1$ -ésima amostragens, então o tempo esperado de sua ocorrência dentro deste intervalo é dado por:

$$\tau_i = \frac{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda_i e^{-\lambda_i t} (t - mh) dt}{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt} = \frac{1 - (1 + \lambda_i h) e^{-\lambda_i h}}{\lambda_i (1 - e^{-\lambda_i h})}, \quad i = 1, 2$$

Existem duas possíveis situações quando o caso 1 ocorre:

a) a causa especial (1) é detectada antes da causa especial (2) ocorrer. Nesta situação, o tempo esperado em que a média do processo permanece fora de controle é dada por:

$$S_1' = p_1 \sum_{s=0}^{\infty} [(s+1)h - \tau_1] [(1-p_1)e^{-\lambda_2 h}]^s$$

b) a causa especial (2) ocorre antes da causa especial (1) ser detectada. Nesta situação, o tempo esperado em que somente a média do processo permanece fora de controle é dada por:

$$S_1'' = (1-p_1)(1-e^{-\lambda_2 h}) \sum_{s=0}^{\infty} [(s+1)h - \tau_1 + \tau_2] [(1-p_1)e^{-\lambda_2 h}]^s$$

Portanto, para o caso 1, o tempo esperado em que somente a média do processo permanece fora de controle é dado por:

$$S_1 = S_1' + S_1'' = \frac{h}{1 - (1-p_1)e^{-\lambda_2 h}} - \tau_1 + \tau_2 \left(1 - \frac{p_1}{1 - (1-p_1)e^{-\lambda_2 h}} \right)$$

Para o caso 2, o tempo esperado em que somente a média do processo permanece fora de controle é obviamente nulo, e para o caso 3 é:

$$\begin{aligned} A_X &= \frac{\int_{nh}^{(m+1)h} \int_1^{(m+1)h} (t_2 - t_1) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2 dt_1}{\int_{nh}^{(m+1)h} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1 \int_{nh}^{(m+1)h} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2} \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \right) e^{-\lambda_2 h} - h e^{-\lambda_2 h} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\lambda h} \right]}{(1 - e^{-\lambda_1 h})(1 - e^{-\lambda_2 h})} \end{aligned}$$

Finalmente, o tempo esperado quando somente a média do processo permanece fora de controle é dado por:

$$T_X = q_1 S_1 + q_2 0 + q_3 A_X$$

Similarmente, o tempo esperado em que somente a variância do processo permanece fora de controle é dado por:

$$T_R = q_1 0 + q_2 S_2 + q_3 A_R$$

onde

$$S_2 = \frac{h}{1 - (1 - p_2)e^{-\lambda_1 h}} - \tau_2 + \tau_1 \left(1 - \frac{p_2}{1 - (1 - p_2)e^{-\lambda_1 h}} \right)$$

$$A_R = \frac{\int_{nh}^{(m+1)h} \int_2^{(m+1)h} (t_2 - t_1) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_1 dt_2}{\int_{mh}^{(m+1)h} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1 \int_{mh}^{(m+1)h} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) e^{-\lambda_1 h} - h e^{-\lambda_1 h} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda h} \right]}{(1 - e^{-\lambda_1 h})(1 - e^{-\lambda_2 h})}$$

Para os casos 1 e 2, as expressões para o tempo esperado em que a média e a variância do processo permanecem fora de controle são dadas, respectivamente, por:

$$SL_1 = (h/p + \tau_2) \left(1 - \frac{p_1}{1 - (1 - p_1)e^{-\lambda_2 h}} \right)$$

$$SL_2 = (h/p + \tau_1) \left(1 - \frac{p_2}{1 - (1 - p_2)e^{-\lambda_1 h}} \right)$$

Para o caso 3, o tempo esperado em que a média e a variância permanecem fora de controle é dado por:

$$SL_3 = A_{XR} + h(1/p - 1)$$

onde

$$A_{XR} = \frac{\int_{mh}^{(m+1)h} \left\{ \int_{mh}^{t_1} [(m+1)h - t_1] \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2 + \int_{t_1}^{(m+1)h} [(m+1)h - t_2] \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2 \right\} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1}{\int_{mh}^{(m+1)h} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1 \int_{mh}^{(m+1)h} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2}$$

$$= \frac{h + \frac{e^{-\lambda_1 h}}{\lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_2 h}}{\lambda_2} + \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_2}}{(1 - e^{-\lambda_1 h})(1 - e^{-\lambda_2 h})}$$

Portanto, o tempo esperado em que juntas, média e a variância, permanecem fora de controle é dado por:

$$T_{XR} = q_1 SL_1 + q_2 SL_2 + q_3 SL_3$$

3.1.5 Modelo de Custo

Seguindo um argumento similar ao de Duncan (1956), tem-se que a duração esperada de um ciclo de produção é constituída de seis partes:

- (a) o período em controle, com duração esperada $1/\lambda$;
- (b) o período fora de controle devido à ocorrência da causa especial (1), com duração esperada T_X ;
- (c) o período fora de controle devido à ocorrência da causa especial (2), com duração esperada T_R ;
- (d) o período fora de controle devido à ocorrência das causas especiais (1) e (2), com duração esperada T_{XR} ;
- (e) os períodos de investigações devido aos alarmes falsos, com duração esperada $\alpha D_0 \{ \exp(-\lambda h) / [1 - \exp(-\lambda h)] \}$ onde D_0 é o tempo esperado com a investigação de causas especiais quando as mesmas inexistem, e $\{ \exp(-\lambda h) / [1 - \exp(-\lambda h)] \}$ é o número esperado de alarmes falsos por ciclo;
- (f) período de investigação e de ajustes do processo devido as causas especiais (1) e/ou (2), com duração esperada D_1 .

Deste modo, a duração esperada de um ciclo de produção é dada por:

$$E(T) = 1/\lambda + T_X + T_R + T_{XR} + \alpha D_0 \left(\frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \right) + D_1$$

De forma similar tem-se o lucro esperado de um ciclo de produção

$$E(C) = V_0/\lambda + V_1 T_X + V_2 T_R + V_3 T_{XR} - \alpha a_3' \left(\frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \right) - (a_1 + a_2 n)(1/\lambda + T_X + T_R + T_{XR})/h - a_3$$

onde V_0 , V_1 , V_2 e V_3 são respectivamente os lucros horários quando o processo está em controle, quando a média do processo está fora de controle, quando a variância do processo está fora de controle e quando a média e a variância estão fora de controle. Os parâmetros a_1 e a_2 representam, respectivamente, os componentes fixo e variável do custo com as amostragens, a_3 representa o custo para localizar e eliminar a causa especial (1) e/ou (2) e a_3' representa o custo esperado com a procura de causas especiais quando estas inexistem. O número esperado de amostras por ciclo é igual a $(1/\lambda + T_X + T_R + T_{XR})/h$. Portanto, o lucro horário esperado é dado por $I = E(C)/E(T)$. Definindo $I = V_0 - F$ segue

$$F = \frac{V_{01} T_X + V_{02} T_R + V_{03} T_{XR} + U B_0 + W + (a_1 + a_2 n) B_1 / h}{B_1 + D_0 B_0 + D_1}$$

onde

$$V_{01} = V_0 - V_1;$$

$$V_{02} = V_0 - V_2;$$

$$V_{03} = V_0 - V_3;$$

$$U = V_0 D_0 + a_3';$$

$$B_0 = \alpha \exp(-\lambda h) / [1 - \exp(-\lambda h)];$$

$$B_1 = 1/\lambda + T_X + T_R + T_{XR};$$

$$W = V_0 D_1 + a_3$$

A função F representa o prejuízo horário associado ao modelo proposto. F é uma função dos parâmetros dos gráficos de controle n , h , k_1 e k_2 . O objetivo do planejamento econômico dos gráficos de controle de \bar{X} e R , utilizados em conjunto, é obter os valores de n , h , k_1 e k_2 que minimizam F .

Quando as causas especiais (1) e (2) ocorrem no mesmo instante, tem-se o modelo proposto por Saniga e Montgomery (1981). Pode-se então considerar que o processo está sujeito a uma única causa especial, que altera tanto a média do processo quanto a variância. Se o instante em que a causa especial ocorre segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ tem-se que

$$F = \frac{V_{03}(H/P - \tau) + UB_0 + W + (a_1 + a_2n)B/h}{B + D_0B_0 + D_1}$$

onde

$$\tau = \frac{1 - (1 + \lambda e^{-\lambda h})}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})}$$

$$B = 1/\lambda + h/p - \tau$$

3.1.6 Projeto Ótimo do Gráfico de Controle

Um procedimento constituído de duas etapas foi empregado para a minimização da função F . Na primeira etapa, determina-se os valores ótimos de h , k_1 e k_2 e o valor ótimo resultante de $F(n)$, para um dado valor de n . Na segunda etapa, determina-se o valor de n que minimiza $F(n)$. O lucro horário quando o processo está em controle ou fora de controle é sempre função da fração defeituosa, isto é

$$V_i = V - 1.000 * FD_i \quad i = 1, 2, 3$$

onde FD_0 é a fração defeituosa quando o processo está em controle e FD_1 , FD_2 e FD_3 são respectivamente as frações defeituosas quando a média, a variância, e a média e variância estão fora de controle. V é o lucro horário quando todos itens produzidos atendem as especificações, que são estabelecidas a $\pm 3,5\sigma$ da dimensão nominal desejada. Deste modo, cada 0,001 de aumento na fração defeituosa resulta em um prejuízo horário de 1,00 unidade monetária. A Tabela 3.1 apresenta várias combinações de λ_1 , λ_2 , δ e γ , os valores ótimos de n , h , k_1 e k_2 e o custo ótimo para o modelo proposto em Costa (1993). A especificação errada do modelo leva a prejuízos econômicos. A Tabela 3.1 foi elaborada assumindo que o modelo proposto por Saniga e Montgomery (1981) é o modelo errado que não representa a situação real de um processo sujeito a duas causas especiais independentes. O prejuízo pela adoção do modelo errado corresponde ao custo quando os gráficos de \bar{X} e de R são economicamente planejados considerando que o processo está sujeito a uma única causa especial, e são utilizados no monitoramento de um processo que está sujeito a duas causas especiais independentes.

Os exemplos numéricos da Tabela 3.1 permitem fazer uma análise de sensibilidade do modelo proposto com respeito aos parâmetros λ_1 , λ_2 , δ e γ .

- i) Quando λ_2 tende a zero, k_2 aumenta o suficiente para tornar sem efeito o uso do gráfico de R . A explicação é que o gráfico de R é apenas sensível a mudanças na variância, quando λ_2 tende a zero, a variância permanece inalterada.
- ii) Quando λ_1 tende a zero, k_1 não tende a valores que tornam sem efeito o uso do gráfico de \bar{X} . A explicação é que quando λ_1 tende a zero, a média do processo não se altera. Entretanto, o gráfico de \bar{X} é sensível não apenas a mudanças na média mas também aos aumentos na variância.
- iii) Os valores de n e h são, em geral, menores quando o processo é especificado erroneamente.
- iv) A especificação errada do modelo leva a um considerável prejuízo econômico quando
 - a) a mudança na média (variância) é grande $\delta=2$ ($\gamma=2$), mas rara, λ_1 tende a zero (λ_2 tende a zero);
 - b) a mudança na média (variância) é moderada $\delta=3/2$ ($\gamma=1$), mas freqüente, λ_1 tende a λ (λ_2 tende a λ).

Tabela 3.1 Projeto ótimo dos gráficos de controle de \bar{X} e R

$\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0.1, \sigma_3 = 2.0, \sigma_4 = 1.0, V = 120., D_0 = 0.1, D_1 = 0.3, \lambda = 0.05$

δ	γ					Two Assignable Causes Process Model				Misspecification Cost	Penalty
		λ_1	λ_2	n	k_1	k_2	h	Cost		%	
1	3/2	.00001	.04999	14	2.69	4.42	2.20	4.74	5.33	12.4	
		.001	.049	14	2.67	4.43	2.20	4.72	5.30	12.3	
		.005	.045	14	2.61	4.45	2.24	4.64	5.19	11.9	
		.025	.025	14	2.45	4.56	2.55	4.11	4.60	11.9	
		.045	.005	13	2.27	4.83	3.56	3.24	3.96	22.2	
		.049	.001	12	2.20	5.24	4.18	2.92	3.83	31.2	
		.04999	.00001	12	2.20	6.89	4.57	2.78	3.80	36.7	
		* $\lambda = 0.05$		12	2.36	5.31	1.11				
3/2	3/2	.00001	.04999	14	2.69	4.42	2.19	4.74	6.07	28.1	
		.001	.049	13	2.67	4.38	2.09	4.74	6.04	27.4	
		.005	.045	12	2.66	4.39	1.92	4.72	5.91	25.2	
		.025	.025	9	2.58	4.46	1.53	4.48	5.21	14.0	
		.045	.005	7	2.47	4.85	1.45	3.91	4.45	13.8	
		.049	.001	7	2.50	5.40	1.52	3.69	4.30	16.5	
		.04999	.00001	7	2.53	7.18	1.55	3.59	4.26	18.7	
		* $\lambda = 0.05$		8	2.57	5.61	0.71				
2	3/2	.00001	.04999	14	2.69	4.42	2.19	4.74	7.09	49.6	
		.001	.049	13	2.69	4.41	2.02	4.78	7.05	47.5	
		.005	.045	10	2.70	4.36	1.53	4.91	6.89	40.3	
		.025	.025	6	2.69	4.39	0.91	5.05	6.08	20.4	
		.045	.005	5	2.69	4.90	0.78	4.77	5.19	8.8	
		.049	.001	5	2.74	5.48	0.78	4.62	5.01	8.4	
		.04999	.00001	5	2.78	7.13	0.79	4.55	4.96	9.0	
		* $\lambda = 0.05$		6	2.77	6.00	0.51				
1	2	.00001	.04999	9	2.96	4.70	0.78	6.26	6.36	1.6	
		.001	.049	9	2.94	4.70	0.79	6.22	6.32	1.6	
		.005	.045	9	2.90	4.71	0.82	6.06	6.18	2.0	
		.025	.025	10	2.74	4.83	1.12	5.10	5.43	6.5	
		.045	.005	11	2.45	5.02	2.24	3.59	4.66	29.8	
		.049	.001	12	2.30	5.33	3.60	3.01	4.50	49.5	
		.04999	.00001	12	2.21	6.56	4.53	2.78	4.46	60.4	
		* $\lambda = 0.05$		8	2.76	4.90	0.61				
3/2	2	.00001	.04999	9	2.96	4.70	0.78	6.26	6.59	5.3	
		.001	.049	9	2.95	4.71	0.79	6.22	6.56	5.5	
		.005	.045	9	2.93	4.72	0.81	6.08	6.42	5.6	
		.025	.025	9	2.84	4.80	0.98	5.28	5.72	8.3	
		.045	.005	8	2.65	5.03	1.33	4.11	4.99	21.4	
		.049	.001	7	2.53	5.38	1.46	3.73	4.85	30.0	
		1.04999	.00001	7	2.53	6.77	1.55	3.59	4.81	34.0	
		* $\lambda = 0.05$		7	2.77	5.10	0.50				
2	2	.00001	.04999	9	2.96	4.70	0.78	6.26	6.98	11.5	
		.001	.049	9	2.96	4.71	0.79	6.24	6.94	11.2	
		.005	.045	9	2.98	4.73	0.79	6.17	6.82	10.5	
		.025	.025	7	2.92	4.70	0.74	5.69	6.16	8.3	
		.045	.005	5	2.75	4.93	0.73	4.91	5.48	11.6	
		.049	.001	5	2.76	5.44	0.77	4.65	5.34	14.8	
		.04999	.00001	5	2.78	6.77	0.79	4.55	5.31	16.7	
		* $\lambda = 0.05$		5	2.80	5.10	0.39				

* Modelo de um processo sujeito a uma única causa especial

3.2 Estudo econômico dos Gráfico de Controle de \bar{X} com Parâmetros Variáveis

Apesar do Gráfico de controle de \bar{X} ser a mais importante ferramenta estatística de monitoramento, utilizada para detectar alterações na média do processo, um número crescente de usuários vem se queixando da morosidade com que este dispositivo sinaliza causas especiais que levam a um deslocamento moderado da média do processo. Neste cenário, um número crescente de artigos tem advogado a idéia de se variar os parâmetros do gráfico de controle visando melhorar o seu desempenho na sinalização de desajustes.

Park e Reynolds (1999) propuseram o projeto econômico de um gráfico de controle de \bar{X} com o tamanho das amostras e o intervalo de tempo entre amostragens variáveis. Costa e Rahim (2001) estenderam este estudo de modo a considerar todos os parâmetros do gráfico de \bar{X} variável (Vp \bar{X} chart), incluindo k , o fator utilizado na determinação da abertura dos limites de controle do gráfico. Por meio de uma definição conveniente, dos estados transientes e do estado absorvente, é possível utilizar as propriedades das cadeias de Markov para estudar o desempenho dos gráficos de controle. Este procedimento é mais simples que o proposto por Park e Reynolds (1999). Alternativamente, De Magalhães, Costa e Epprecht (2001) propuseram um diferente “approach” para o estudo econômico dos gráficos de controle de \bar{X} com parâmetros variáveis. De Magalhães, Costa e Moura Neto (2006) trataram do estudo econômico dos gráficos de controle de \bar{X} e de R utilizados no monitoramento de processos sujeitos a dois tipos de causas especiais independentes; uma que altera a média do processo e outra que aumenta sua variabilidade. A causa especial de um tipo bloqueia a ocorrência de outra do mesmo tipo, mas não bloqueia a ocorrência da causa especial de outro tipo.

De acordo com a seção 2.3.1, o projeto do gráfico de \bar{X} com todos parâmetros variáveis requer a especificação de oito parâmetros, n_i , h_i , k_i e w_i , $i=1,2$. O fator de abertura do limite de advertência w_i e o fator de abertura do limite de ação k_i são especificado obedecendo a restrição de que durante o período em que o processo permanece em controle a probabilidade condicional p_0 , de um ponto amostral cair na região central do gráfico, dado que ele não caiu na região de ação, é independente do tamanho da amostra.

$$p_0 = \Pr[|Z| < w_i | |Z| < k_i], \quad i=1,2.$$

onde $Z \sim N(0,1)$. O tamanho da primeira amostra que é retirada do processo de produção quando este se inicia, ou após um alarme falso, é escolhido aleatoriamente. Se ela é grande (pequena) ela será retirada após um curto (longo) intervalo de tempo. Durante o período em controle todas as amostras, incluindo a primeira, devem ter probabilidade p_0 de serem pequenas e $(1-p_0)$ de serem grandes.

3.2.1 Hipóteses

Em Costa e Rahim (2001) assume-se que o gráfico de controle de \bar{X} com parâmetros variáveis é empregado no monitoramento de um processo cuja característica de qualidade de interesse, X , é normalmente distribuída com média μ e variância conhecida σ^2 . A produção inicia-se com o processo ajustado, isto é, com sua média no valor alvo ($\mu = \mu_0$), mas em algum instante no futuro, a média do processo se desloca de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$, $\delta > 0$ devido a ocorrência de uma causa especial. Antes da causa especial ocorrer, o processo é considerado estar sob controle. O tempo em que o processo permanece sob controle tem distribuição exponencial com parâmetro λ . Após o deslocamento, a média do processo permanece fora de seu valor alvo, com $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$, até que a causa especial seja eliminada. Durante a procura da causa especial a produção é interrompida.

3.2.2 Determinação da cadeia de Markov associada ao esquema de monitoramento

A velocidade que o gráfico de controle sinaliza um deslocamento da média do processo é uma medida de sua eficiência estatística. Quando o intervalo entre amostragens é fixo, a velocidade de detecção é medida pelo *NMA*, número médio de amostras até o sinal. Quando o intervalo entre amostragens é variável, o desempenho do gráfico é medido pelo *TMS*, tempo

médio até o sinal, que corresponde ao tempo entre a ocorrência da causa especial e o instante em que o gráfico de controle sinaliza sua existência.

O tempo médio de um ciclo (*TMC*) corresponde ao tempo médio que vai do início da produção, passando pelo instante de ocorrência da causa especial, e encerrando-se no momento em que o gráfico de controle sinaliza a sua existência. Se o instante de ocorrência da causa especial tem distribuição exponencial com parâmetro λ segue

$$TMS = TMC - 1/\lambda$$

Graças à propriedade de esquecimento da distribuição exponencial é possível, por meio de uma definição conveniente, dos estados transientes e do estado absorvente, utilizar resultados bem conhecidos de cadeias de Markov para se obter o *TMC*. Deste modo, a cada instante de amostragem, um dentre quatro estado transientes é alcançado, de acordo com o status do processo (sob controle ou não) e o tamanho da amostra corrente (pequena ou grande). Isto é

Estado 1: O processo está em controle e a amostra é pequena;

Estado 2: O processo está em controle e a amostra é grande;

Estado 3: O processo está fora de controle e a amostra é pequena;

Estado 4: O processo está fora de controle e a amostra é grande.

Alternativamente, o status da média do processo (no valor alvo ou fora), quando a $i+1$ -ésima amostra é tomada, e a posição do i -ésimo ponto amostral no gráfico de controle define os estados transientes da cadeia de Markov (ver Tabela 3.2).

Tabela 3.2. Estados da cadeia de Markov

<i>i</i> -ésima amostra	<i>i</i> +1-ésima amostra	
Posição do ponto amostral (região*)	Status da média do processo (no alvo ou fora)**	Estado da cadeia de Markov
advertência	No alvo	2
advertência	Fora do alvo	4
Central	No alvo	1
Central	Fora do alvo	3

(*) para detalhes sobre as regiões do gráfico de controle ver seção 2.3.1.

(**) média do processo no valor alvo $\mu = \mu_0$ e fora do valor alvo $\mu = \mu_0 \pm \delta\sigma$

O gráfico de controle produz um sinal quando o ponto amostral cai na região de ação do gráfico de controle. Se o estado atual da cadeia de Markov é o estado 1 ou 2, o sinal é um alarme falso; se o estado atual é o estado 3 ou 4, o sinal é um alarme verdadeiro. O estado absorvente, estado 5, é alcançado quando um alarme verdadeiro ocorre. A matriz de probabilidades de transição é dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} \end{bmatrix}$$

Onde p_{ij} é a probabilidade de transição de partindo do estado i alcançar o estado j . Deste modo

$$p_{11} = \Pr[|Z| < w_1 \mid |Z| < k_1] e^{-\lambda h_1}$$

$$p_{12} = \Pr[w_1 < |Z| < k_1 \mid |Z| < k_1] e^{-\lambda h_2}$$

$$p_{21} = \Pr[|Z| < w_2 \mid |Z| < k_2] e^{-\lambda h_1}$$

$$p_{22} = \Pr[w_2 < |Z| < k_2 \mid |Z| < k_2] e^{-\lambda h_2}$$

$$p_{13} = \Pr[|Z| < w_1 \mid |Z| < k_1] (1 - e^{-\lambda h_1})$$

$$p_{23} = \Pr[|Z| < w_2 \mid |Z| < k_2] (1 - e^{-\lambda h_1})$$

$$p_{14} = \Pr[w_1 < |Z| < k_1 \mid |Z| < k_1] (1 - e^{-\lambda h_2})$$

$$p_{24} = \Pr[w_2 < |Z| < k_2 \mid |Z| < k_2] (1 - e^{-\lambda h_2})$$

$$p_{33} = \Pr[|Y| < w_1 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1)]$$

$$p_{34} = \Pr[w_1 |Y| < k_1 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1)]$$

$$p_{43} = \Pr[|Y| < w_2 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1)]$$

$$p_{44} = \Pr[w_2 |Y| < k_2 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1)]$$

$$p_{35} = \Pr[|Y| > k_1 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1)]$$

$$p_{45} = \Pr[|Y| > k_2 \mid Y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1)].$$

De acordo com as propriedades elementares de cadeias de Markov

$$TMC = b' (I - Q)^{-1} t,$$

onde $b' = (p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14})$ é o vetor de probabilidades iniciais, I , é a matriz identidade de ordem 4, Q é a matriz de probabilidades de transições sem os elementos associados com o estado absorvente, e $t' = (h_1, h_2, h_1 h_2)$ é o vetor dos intervalos entre amostragens. Segue então,

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1 - p_{22}}{A} & \frac{p_{12}}{A} & \frac{C(1 - p_{44}) + Dp_{43}}{AB} & \frac{Cp_{34} + D(1 - p_{33})}{AB} \\ \frac{p_{21}}{A} & \frac{1 - p_{11}}{A} & \frac{E(1 - p_{44}) + Fp_{43}}{AB} & \frac{Ep_{34} + F(1 - p_{33})}{AB} \\ 0 & 0 & \frac{1 - p_{44}}{B} & \frac{p_{34}}{B} \\ 0 & 0 & \frac{p_{43}}{B} & \frac{1 - p_{33}}{B} \end{bmatrix}$$

$$A = (1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}$$

$$B = (1 - p_{44})(1 - p_{33}) - p_{34}p_{43}$$

$$C = p_{23}p_{12} + p_{13}(1 - p_{22})$$

$$D = p_{24}p_{12} + p_{14}(1 - p_{22})$$

$$E = p_{13}p_{21} + p_{23}(1 - p_{11})$$

$$F = p_{14}p_{21} + p_{24}(1 - p_{11}).$$

3.2.3 Função de custos

O ciclo de produção é constituído das seguintes fases: período em controle, período fora de controle, período de investigação da existência de causas especiais, período de reparo que resulta

na eliminação da causa especial. Deste modo, a duração esperada de um ciclo de produção é dada por:

$$E(T) = TMC + d_0 E(AF) + d_1$$

Onde d_0 é o tempo médio despedido com a busca de causas especiais no período em que o processo está em controle, d_1 é o tempo médio necessário para encontrar e eliminar a causa especial.

O número esperado de alarmes falsos por ciclo é dado por

$$E(AF) = b' (I - Q)^{-1} \alpha,$$

onde $\alpha' = (\alpha_1; \alpha_2; 0; 0)$; e $\alpha_i = \Pr[|Z| > k_i]$, $i=1,2$.

O lucro esperado de um ciclo de produção é dado por

$$E(C) = V_0(1/\lambda) + V_1(TMC - 1/\lambda) - A_0 E(AF) - A_1 - c_0 E(M),$$

onde V_0 é o lucro médio por hora quando o processo está operando em controle, V_1 é o lucro médio por hora quando o processo está operando fora de controle, A_0 é o custo resultante esperado com um alarme falso, A_1 é o custo de detectar e remover uma causa especial, c_0 é o custo por item inspecionada, e $E(M)$ é o número médio de itens inspecionadas por ciclo:

$$E(M) = b' (I - Q)^{-1} m,$$

onde $m' = (n_1; n_2; n_1; n_2)$.

A função prejuízo F é dada por

$$F = V_0 - E(C) / E(T).$$

A Tabela 3.3 fornece os valores de $c_0, A_0, A_1, V_0, V_1, d_0, d_1, \lambda$, e δ adotados em onze exemplos. Para estes onze exemplos, a Tabela 3.4 mostra a economia que se obtém ao se variar os parâmetros do gráfico de controle de \bar{X} . No primeiro exemplo, a função F alcança um mínimo de 43,04 unidades monetárias (UnM) quando n, h e k são fixos e um mínimo de 36,65 UnM quando estes são variáveis. A economia que se obtém a cada hora de operação é de 6,39 UnM, que corresponde a 14,8% de redução, isto é, $100*(43,04-36,65)/43,04$.

Tabela 3.3. Valores de $c_0, A_0, A_1, V_0, V_1, d_0, d_1, \lambda$, e δ

Exemplo	c_0	A_0	A_1	V_0	V_1	d_0	d_1	λ	δ
1	5	500	500	500	0	5	1	0.01	1
2	10	500	500	500	0	5	1	0.01	1
3	5	250	500	500	0	5	1	0.01	1
4	5	500	500	250	0	5	1	0.01	1
5	5	500	500	500	0	2.5	1	0.01	1
6	5	500	500	500	0	5	1	0.01	1,5
7	5	500	50	500	0	5	1	0.01	1
8	5	500	500	500	0	5	10	0.01	1
9	5	500	500	500	0	5	1	0.01	0.75
10	5	500	500	500	0	5	1	0.01	0.50
11	5	500	500	500	0	5	1	0.05	1

Tabela 3.4. Projeto ótimo de um gráfico de \bar{X} com parâmetros fixos e variáveis

Ex:	Parâmetros Fixos					Parâmetros variáveis					
	k	h	n	UnM	E (AF)	k_1 / w_1	k_2 / w_2	h_2 / h_1	n_1 / n_2	UnM	E (AF)
1	2,82	5,45	15	43,04	0,086	3,60/1,46	2,95/1,58	0,5/3,39	6/14	36,65	0,0240
2	2,58	7,22	13	54,04	0,134	3,35/1,42	2,75/1,43	0,5/4,75	5/12	46,40	0,0392
3	2,79	5,40	15	42,82	0,095	3,55/1,45	2,92/1,57	0,5/3,40	6/14	36,58	0,0274
4	2,63	7,39	14	29,65	0,111	3,42/1,43	2,79/1,45	0,5/4,76	5/12	25,66	0,0321
5	2,65	5,17	14	4,80	0,153	3,36/1,44	2,80/1,51	0,5/3,44	5/13	36,27	0,0472
6	3,08	3,88	8	33,35	0,052	3,83/1,50	3,16/1,77	0,5/2,31	3/8	28,67	0,0152
7	2,82	5,43	15	38,75	0,085	3,60/1,46	2,95/1,58	0,5/3,37	6/14	32,32	0,0240
8	2,80	5,64	15	79,08	0,089	3,57/1,45	2,93/1,56	0,5/3,52	6/14	73,49	0,0250
9	2,62	6,89	24	51,97	0,124	3,39/1,43	2,78/1,45	0,5/4,48,	10/22	44,51	0,0360
10	2,31	9,47	43	68,00	0,211	3,03/1,39	2,53/1,30	0,5/6,75	21/39	59,87	0,0678
11	2,75	2,57	15	114,0	0,043	3,61/1,45	2,88/1,41	0,1/1,56	5/12	101,3	0,0128

O planejamento dos gráficos de controle, com base em modelos econômicos puros, tem sido criticado por Woodall (1986), pois tais modelos não levam em conta propriedades estatísticas relevantes; por exemplo, os valores ótimos dos parâmetros de projeto de um gráfico de controle estabelecidos com base em um modelo econômico pode levar a um número excessivo de alarmes falsos. Isto, em geral, é desastroso, pois o responsável pela linha de produção pode perder confiança no esquema de monitoramento e simplesmente descartá-lo. Com base nestas críticas De Magalhães, Costa e Epprecht (2002) e De Magalhães e Costa (2005) propuseram modelos estatístico-econômicos para a determinação dos valores ótimos dos parâmetros dos gráficos adaptativos de \bar{X} .

4. Uma Nova Estatística Para o Monitoramento da Média e da Variância do Processo

Dois gráficos de controle são usualmente utilizados no monitoramento da média e da variância de um processo. Em geral, utiliza-se o gráfico de \bar{X} para a detecção de alterações da média, e o gráfico de R para a sinalização de aumentos da variabilidade. Contudo, os gráficos conjuntos de \bar{X} e R não são confiáveis na identificação do tipo de causa especial. Isto é, sempre que uma causa especial é detectada, nunca se sabe se tal causa especial é aquela que apenas altera a média, ou apenas aumenta a variabilidade, ou, no pior caso, altera a média aumentando a variabilidade. Por exemplo, quando o gráfico de \bar{X} sinaliza a presença de uma causa especial, então deve-se investigar qual parâmetro do processo foi afetado pela causa especial, pois o gráfico de \bar{X} é sensível não só a mudanças da média, como também a aumentos da variabilidade. Na prática, a velocidade com a qual os gráficos de controle detectam mudanças no processo parece ser mais importante do que a habilidade destes em identificar o tipo de mudança. Deste modo, faz sentido considerar um único gráfico de controle, baseado em uma única estatística, para o monitoramento simultâneo da média e da variância do processo. Em particular, a estatística de Qui-quadrado não-central, tem se mostrado mais ágil na detecção de causas especiais, quando comparada com o uso conjunto das estatísticas de \bar{X} e R .

4.1 Gráfico de Controle Baseado na Estatística de Qui-Quadrado Não-Central

Costa e De Magalhães (2005a) propuseram o uso da estatística de qui-quadrado não-central para o monitoramento de processos cuja característica de qualidade de interesse X tem distribuição normal com média μ e desvio padrão σ . Quando o processo está sob controle, ou seja, isento de causas especiais, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = \sigma_0$. A causa especial desloca a média μ de seu valor alvo μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma_0$, onde $\delta \neq 0$, e/ou altera o desvio padrão σ de σ_0 para $\sigma_1 = \gamma\sigma_0$, onde $\gamma > 1$.

Seja x_{ij} , $i = 1, 2, 3, \dots$, e $j = 1, 2, \dots, n$ as medidas da variável X , organizadas em subgrupos de tamanho n , sendo i o número do subgrupo, e seja

$$\xi_i = d \text{ se } \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq n\mu_0; \text{ caso contrário } \xi_i = -d,$$

onde d é uma constante positiva.

Os pontos amostrais W_i , do gráfico de controle de qui-quadrado não-central (gráfico de $\chi^2(\lambda)$), são dados por

$$W_i = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_0 + \xi_i \sigma_0)^2, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Condicionado a um valor de ξ_i , W_i / σ_0^2 tem, para $\mu = \mu_0$ e para $\sigma = \sigma_0$, distribuição de qui-quadrado não-central com n graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\lambda_0 = nd^2$, e para $\mu = \mu_1$ e $\sigma = \sigma_1$, W_i / σ_1^2 tem distribuição de qui-quadrado não-central com n graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\lambda_1 = n(\delta + \xi_i)^2 / \gamma^2$, ou seja, $W_i / \sigma_0^2 \sim \chi_n^2(\lambda_0)$ e $W_i / \sigma_1^2 \sim \chi_n^2(\lambda_1)$. O gráfico proposto sinaliza uma condição de falta de controle, sempre que $W_i > k_{chi} \sigma_0^2$, onde k_{chi} é o fator de abertura do limite superior de controle do gráfico. Como ξ_i é uma variável aleatória, que depende do valor de \bar{X}_i , obtém-se o risco α e o poder de detecção do gráfico proposto por meio da seguinte expressão:

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{\chi_{n-1}^2 > [k_{chi} / a - (z + b\sqrt{n})^2]\} \phi(z) dz \quad (4.2)$$

onde $\phi(z)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição normal padrão. Quando o processo está sob controle $a = 1$, $b = d$, se $z > 0$, caso contrário $b = -d$, e o risco de alarme falso $\alpha = P_s$. Quando o processo está fora de controle $a = \gamma^2$ e $b = (\delta + d) / \gamma$, se $z > -\delta\sqrt{n} / \gamma$, caso contrário, $b = (\delta - d) / \gamma$, e o poder do gráfico de controle $Pd = P_s$.

O *NMA* para o gráfico proposto é facilmente determinado pois, neste caso, o número de amostras até o sinal é uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro P_s , isto é, $NMA = 1 / P_s$. Durante o período em controle, $NMA = NMA_0 = 1 / \alpha$.

A Tabela 4.1 fornece o *NMA* dos gráficos de $\chi^2(\lambda)$ e de \bar{X} e R para o seguinte conjunto de valores: $NMA_0=433,0$; $n= 4; 5$, $d=0; 0,5$ e 1 , $\delta=0; 0,5; 0,75; 1,00; 1,25$ e $1,50$, e $\gamma=1,0; 1,3; 1,5$ e $2,0$. Com $d=1$ o gráfico de $\chi^2(\lambda)$ é sempre mais ágil que os gráficos de \bar{X} e R , na detecção de causas especiais que alteram a média do processo e/ou aumentam a variabilidade. Os valores do *NMA* foram obtidos com o auxílio da biblioteca IMSL da Microsoft *FORTTRAN* Power Station 4.0, 1995.

Para um dado valor de n e de d , o *NMA* do gráfico proposto e dos gráficos conjuntos de \bar{X} e R diminuem quando δ e/ou γ aumenta. Para $\delta=0$ e $\gamma>0$, o *NMA* aumenta sempre que d aumenta. Por exemplo, para $n=5$; $\delta=0$ e $\gamma=1,5$, o *NMA* aumenta de 7,0 para 7,7 quando d passa de 0 para 0,5, e aumenta de 7,7 para 9,3 quando d passa de 0,5 para 1,0. Para $\delta>0$ e $\gamma=1,0$, o *NMA* diminui quando d aumenta. Por exemplo, para $n=5$; $\delta=0,75$ e $\gamma=1,0$, *NMA* diminui de 35,5 para 19,4 quando d passa de 0 para 0,5, e diminui de 19,4 para 14,6 quando d passa de 0,5 para 1,0.

Tabela 4.1. Valores do *NMA* para os gráficos de \bar{X} e *R* e para o gráfico de $\chi^2(\lambda)$

δ	γ	$d=$ $k_{Chi}=\frac{\bar{X}-R^*}{\sigma}$	n=4			$\bar{X}-R^{**}$	n=5		
			0,0 16,602	0,5 21,836	1,0 30,084		0,0 18,572	0,5 24,352	1,0 33,871
0,00	1,0	433	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0
	1,3	29,2	23,0	25,1	29,2	25,9	19,4	21,5	25,8
	1,5	10,9	8,5	9,3	10,9	9,5	7,0	7,7	9,3
	2,0	3,1	2,6	2,7	3,1	2,6	2,0	2,3	2,6
0,50	1,0	74,8	115,2	70,0	58,4	56,6	104,3	56,8	45,6
	1,3	15,8	13,9	12,5	12,7	13,2	11,5	10,0	10,3
	1,5	7,8	6,4	6,3	6,8	6,6	5,3	5,2	5,6
	2,0	2,8	2,4	2,5	2,7	2,4	2,0	2,1	2,3
0,75	1,0	24,3	42,3	24,2	19,9	16,9	35,5	19,4	14,6
	1,3	9,2	8,8	7,3	7,1	7,3	7,2	5,8	5,6
	1,5	5,6	4,9	4,5	4,6	4,7	4,0	3,7	3,8
	2,0	2,5	2,2	2,2	2,4	2,2	1,9	1,9	2,0
1,00	1,0	9,4	16,6	9,4	8,2	6,4	13,2	7,2	5,9
	1,3	5,4	5,5	4,5	4,3	4,2	4,5	3,5	3,3
	1,5	4,0	3,6	3,2	3,2	3,3	3,0	2,6	2,6
	2,0	2,2	2,0	2,0	2,1	1,9	1,7	1,7	1,8
1,25	1,0	4,4	7,4	4,5	4,0	3,1	5,7	3,5	3,0
	1,3	3,4	3,6	3,0	2,8	2,6	2,9	2,4	2,2
	1,5	2,8	2,7	2,4	2,4	2,3	2,2	2,0	1,9
	2,0	1,9	1,8	1,7	1,8	1,7	1,5	1,7	1,5
1,50	1,0	2,5	3,8	2,7	2,4	1,8	3,0	2,1	1,8
	1,3	2,3	2,5	2,1	2,0	1,8	2,1	1,7	1,6
	1,5	2,1	2,1	1,8	1,8	1,8	1,8	1,6	1,5
	2,0	1,7	1,6	1,5	1,6	1,4	1,4	1,4	1,4

*gráfico de \bar{X} com limites $\mu_0 \pm 3,250 \sigma_0 / \sqrt{4}$, e gráfico de *R* com limite superior $5,257 \sigma_0$

**gráfico de \bar{X} com limites $\mu_0 \pm 3,250 \sigma_0 / \sqrt{5}$, e gráfico de *R* com limite superior $5,433 \sigma_0$

4.2 Gráfico de Controle de EWMA Baseado na Estatística de $\chi^2(\lambda)$

O gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente, mais conhecido como gráfico de EWMA, tem se mostrado útil na detecção de pequenas mudanças no processo (ver Reynolds e Stoumbos (2001)). Para a detecção de pequenas mudanças no processo, Costa e De Magalhães (2005a) e Costa e Rahim (2006a) propuseram um gráfico de controle de EWMA baseado na seguinte estatística:

$$Y_i = rW_i + (1-r)Y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

com W_i dado pela expressão (4.1), $Y_0 = E(W_i | \mu = \mu_0, \sigma = \sigma_0)$ e $0 < r \leq 1$. O valor do parâmetro de amortecimento r determina o peso da última observação W_i na tomada de decisão quanto ao estado do processo, se sob controle ou não. Um valor maior de r atribui maior peso a última observação, enquanto que um valor menor de r atribui maior peso a Y_{i-1} , que é dependente de todas as observações, com exceção da última. O gráfico de EWMA sinaliza uma condição de falta de controle, sempre que $Y_i > k_y \sigma_0^2$, onde k_y é o fator de abertura do limite superior de controle do gráfico. A Tabela 4.2 fornece para $n=5$, e diversos valores de d , r , δ e γ , o NMA para o gráfico de EWMA baseado na estatística de $\chi^2(\lambda)$ e para os gráficos conjuntos de \bar{X} e R . O fator de abertura k_y é ajustado para que se tenha sempre um $NMA_0 = 433,0$.

Para o gráfico de EWMA, o número médio de amostras até o sinal dependerá do último valor de Y_i com o processo em controle. Quando a mudança ocorre após um tempo de monitoramento relativamente longo o NMA dependerá da distribuição estacionária de Y_i . Os valores do NMA da Tabela 4.2 foram obtidos:

- a) considerando a distribuição estacionária de Y_i ;
- b) e por meio de uma cadeia de Markov com 100 estados transientes, ou seja, a região do gráfico abaixo do limite superior de controle foi fragmentada em 100 partes iguais, ver Saccucci e Lucas (1990) para detalhes.

Ao se analisar os dados da Tabela 4.2 conclui-se que:

- (1) O gráfico de *EWMA* com $d=0,5$ e $1,0$ sempre detecta mudanças no processo com mais rapidez que os gráficos conjuntos de \bar{X} e R , isto é, o *NMA* do gráfico proposto é sempre menor que o *NMA* dos gráficos conjuntos. Por exemplo, para $\delta=0,5$, $\gamma=1,5$, e $n=5$, o *NMA* para os gráficos de \bar{X} e R é de $6,6$, enquanto que para o gráfico de *EWMA* é de apenas $3,8$ ($r=0,3$ e $d=0,5$).
- (2) Para um dado n , d e r , o *NMA* para o gráfico de *EWMA* e para os gráficos conjuntos diminui sempre que δ e/ou γ aumentam.
- (3) Para um dado r , valores maiores de d são piores para a detecção de aumentos no desvio padrão σ , quando $\mu = \mu_0$. Por exemplo, para $r=0,3$; $\delta = 0$ e $\gamma = 1,3$, o *NMA* aumenta de $10,6$ para $11,4$ quando d passa de 0 para $0,5$, e de $11,4$ para $13,3$ quando d passa de $0,5$ para 1 . Entretanto, para um dado r , valores maiores de d são melhores para detecção de mudanças da média μ , quando $\sigma = \sigma_0$. Por exemplo, para $r=0,3$; $\delta = 0,75$ e $\gamma = 1,0$, o *NMA* diminui de $15,4$ para $8,6$ quando d passa de 0 para $0,5$, e de $8,6$ para $7,0$ quando d passa de $0,5$ para 1 .
- (4) Para um dado d , valores maiores de r são piores na detecção de deslocamentos da média μ , quando $\sigma = \sigma_0$. Por exemplo, para $d=0,5$, $\delta = 0,5$, e $\gamma = 1,0$, *NMA* aumenta de $28,2$ para $37,3$ quando r passa de $0,3$ para $0,5$, e de $37,3$ para $56,8$, quando r passa de $0,5$ para $1,0$.
- (5) Para um dado d , valores maiores de r são piores na detecção de aumentos da variabilidade, quando $\mu = \mu_0$. Por exemplo, para $d=0,5$, $\delta = 0,0$, e $\gamma = 1,3$, *NMA* aumenta de $11,4$ para $14,1$ quando r passa de $0,3$ para $0,5$, e de $14,1$ para $21,5$, quando r passa de $0,5$ para $1,0$.

A conclusão geral que se pode tirar da Tabelas 4.2 é que o esquema *EWMA* proposto melhora a capacidade de detecção do gráfico de $\chi^2(\lambda)$.

Tabela 4.2. Valores do *NMA* para os gráficos de \bar{X} e *R* e para o gráfico de *EWMA* ($n=5$)

δ	γ	$r=$ $d=$ $k_Y=$ $\bar{X}-R^*$	0,3	0,3	0,3	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0
			9,6968	13,735	20,693	12,153	16,669	24,333	18,572	24,352	33,871
0,00	1,0	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0	433,0
	1,3	25,9	10,6	11,4	13,3	12,9	14,1	16,7	19,4	21,5	25,8
	1,5	9,5	4,7	5,1	5,8	5,2	5,6	6,5	7,0	7,7	9,3
	2,0	2,6	2,0	2,1	2,4	2,0	2,1	2,3	2,0	2,3	2,6
0,50	1,0	56,6	55,6	28,2	21,9	73,5	37,3	28,8	104,3	56,8	45,6
	1,3	13,2	6,8	6,2	6,4	7,9	7,1	7,2	11,5	10,0	10,3
	1,5	6,6	3,8	3,8	4,0	4,1	4,0	4,3	5,3	5,2	5,6
	2,0	2,4	1,9	2,0	2,1	1,9	1,9	2,1	2,0	2,1	2,3
0,75	1,0	16,9	15,4	8,6	7,0	21,0	10,8	8,5	35,5	19,4	14,6
	1,3	7,3	4,7	4,1	4,0	5,2	4,3	4,2	7,2	5,8	5,6
	1,5	4,7	3,1	3,0	3,1	3,2	3,0	3,1	4,0	3,7	3,8
	2,0	2,2	1,8	1,8	1,9	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0
1,00	1,0	6,4	6,3	4,1	3,6	7,7	4,6	3,9	13,2	7,2	5,9
	1,3	4,2	3,3	2,8	2,7	3,5	2,9	2,8	4,5	3,5	3,3
	1,5	3,3	2,5	2,3	2,4	2,5	2,3	2,3	3,0	2,6	2,6
	2,0	1,9	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,8
1,25	1,0	3,1	3,5	2,6	2,4	3,8	2,6	2,3	5,7	3,5	3,0
	1,3	2,6	2,5	2,1	2,1	2,5	2,1	2,0	2,9	2,4	2,2
	1,5	2,3	2,1	1,9	1,9	2,0	1,9	1,8	2,2	2,0	1,9
	2,0	1,7	1,5	1,5	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,7	1,5
1,50	1,0	1,8	2,3	1,9	1,8	2,4	1,8	1,7	3,0	2,1	1,8
	1,3	1,8	1,9	1,7	1,6	1,9	1,6	1,6	2,1	1,7	1,6
	1,5	1,8	1,7	1,6	1,6	1,7	1,5	1,5	1,8	1,6	1,5
	2,0	1,5	1,4	1,4	1,4	1,4	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4

* gráfico de \bar{X} com limites $\mu_0 \pm 3,250 \sigma_0 / \sqrt{5}$, e gráfico de *R* com limite superior de controle $5,433\sigma_0$

Domangue e Patch (1991) foram os primeiros a terem a idéia de se utilizar um único gráfico de *EWMA* para o monitoramento da média e da variabilidade. O gráfico de *EWMA* proposto por eles é baseado na seguinte estatística:

$$A_i = r|Z_i|^\theta + (1-r)A_{i-1} \quad (4.4)$$

onde $Z_i = \sqrt{n}(\bar{x}_i - \mu_0) / \sigma_0$, $i = 1, 2, \dots$, $0 < r \leq 1$, e $\theta = 0,5$ ou 2 .

Durante o período em controle, Z_i^2 tem distribuição de qui-quadrado com um grau de liberdade. Durante o período em que o processo permanece fora de controle, Z_i^2 / γ^2 tem distribuição de qui-quadrado não-central com parâmetro de não-centralidade $\lambda = \delta\sqrt{n} / \gamma$, isto é, $Z_i^2 / \gamma^2 \sim \chi_1^2(\lambda)$. A principal deficiência do gráfico de $EWMA$ proposto por Domangue e Patch (1991), gráfico de $EWMA_A$, está no fato de amostras maiores não melhoraram o desempenho do gráfico na detecção de aumentos em σ quando $\mu = \mu_0$ (λ é sempre igual a zero). A última coluna da Tabela 4.3 fornece valores do NMA para o gráfico de $EWMA_A$ para $\theta = 2,0$, $r=0,4$, e $n=5$. A principal conclusão que se pode tirar destes valores de NMA é que para amostras maiores do que um, o gráfico de $EWMA_A$ não é eficiente no monitoramento da variância do processo. Para observações individuais $Z_i^2 = W_i / \sigma_0^2$, portanto o gráfico de $EWMA$ baseado na estatística Y_i , gráfico de $EWMA_Y$, e o gráfico de $EWMA_A$ com $\theta = 2,0$ são os mesmos.

Tabela 4.3. Valores do NMA para os gráficos de \bar{X} e R , $EWMA_Y$, e $EWMA_A$ ($n=5$)

		\bar{X} -R	$EWMA_Y$							$EWMA_A$ $\theta = 2$
δ	γ	$r=$	1,0	0,8	0,6	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4
		$d=$	1,0	1,0	1,0	1,0	0	0,5	1,0	
		UCL=	33,251	29,496	25,841	18,666	10,775	15,024	22,299	4,332
0,0	1,0	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4
	1,2	47,9	47,2	42,1	36,2	24,9	22,8	25,4	29,9	66,8
	1,4	13,7	13,6	11,9	10,4	9,3	6,8	7,7	9,2	24,5
	1,6	6,2	6,1	5,5	5,1	5,6	3,6	4,2	4,9	13,0
0,5	1,0	51,5	40,8	35,7	30,0	20,8	58,5	30,9	24,4	21,0
	1,2	18,7	14,0	12,4	10,8	9,8	11,1	9,7	9,6	12,1
	1,4	8,5	7,0	6,3	5,8	6,1	4,9	5,1	5,5	8,4
	1,6	4,8	4,2	3,9	3,7	4,4	3,1	3,4	3,7	6,4
0,75	1,0	15,8	13,3	11,2	9,3	8,2	16,8	9,6	8,0	6,4
	1,2	8,9	6,8	6,0	5,5	5,9	6,4	5,4	5,2	5,2
	1,4	5,5	4,3	4,0	3,8	4,5	3,7	3,7	3,8	4,5
	1,6	3,7	3,1	2,9	2,9	3,6	2,6	2,8	3,0	4,0
1,0	1,0	6,1	5,5	4,7	4,2	4,7	6,6	4,5	4,0	3,0
	1,2	4,6	3,7	3,4	3,2	4,0	3,9	3,4	3,3	2,9
	1,4	3,5	2,8	2,7	2,7	3,4	2,8	2,7	2,7	2,8
	1,6	2,8	2,3	2,2	2,3	2,9	2,2	2,3	2,4	2,7
1,5	1,0	1,8	1,8	1,7	1,8	2,5	2,3	2,0	1,9	1,4
	1,2	1,8	1,6	1,6	1,7	2,3	2,0	1,8	1,8	1,5
	1,4	1,8	1,6	1,6	1,6	2,2	1,7	1,7	1,7	1,5
	1,6	1,7	1,5	1,5	1,5	2,0	1,6	1,6	1,6	1,6

Costa e De Magalhães (2007) compararam o desempenho dos gráficos de controle adaptativos de \bar{X} e R com o desempenho do gráfico adaptativo de W . Na Tabela 4.4 estão os valores dos parâmetros dos gráficos de \bar{X} e R , na Tabela 4.5 os valores dos parâmetros do gráfico de W e na Tabela 4.6 estão os valores do TMS , que mede o tempo médio entre o instante em que o processo se desajusta e o instante em que o gráfico sinaliza o desajuste. A Tabela 4.6 também fornece a porcentagem de redução no tempo de detecção (denotado por

PR_1, PR_2, PR_3, PR_4 e PR_5 , respectivamente) do gráfico de Y , esquema de amostragem Fp , relativo aos gráficos de \bar{X} e R , esquema de amostragem Fp , do gráfico de W , esquema VSI , relativo aos gráficos de \bar{X} e R , esquema VSI , do gráfico de W , esquema VSS , relativo aos gráficos de \bar{X} e R , esquema VSS , do gráfico de W , esquema de amostragem Vp , relativo aos gráficos de \bar{X} e R , esquema de amostragem Vp , e do gráfico de Y , esquema de amostragem Vp , relativo ao gráfico de W , esquema de amostragem Fp , onde as expressões de PR_i , $i = 1, \dots, 5$ são dadas por:

$$PR_i = \left[\frac{TMS_{C_i/\bar{X}R} - TMS_{C_i/W}}{TMS_{C_i/\bar{X}R}} \right], \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \text{ e onde } C_1 = Fp, C_2 = VSI, C_3 = VSS, C_4 = Vp$$

$$PR_5 = \left[\frac{TMS_{Fp/W} - TMS_{Vp/W}}{TMS_{Fp/W}} \right]$$

A conclusão que pode ser tirada da Tabela 4.6 é que os esquemas adaptativos reduzem substancialmente o tempo necessário para detectar pequenas a moderadas perturbações no processo, sendo que o gráfico de W sempre detecta mudanças no processo com mais rapidez que os gráficos de \bar{X} e R . Além disso, o gráfico de W com parâmetros fixo é mais ágil que o gráficos de \bar{X} e R com parâmetros fixo. Por exemplo, quando $\delta = 0,4$ e $\gamma = 1,4$, e os parâmetros são fixos, o TMS para o gráfico de \bar{X} e R e para o gráfico de W são respectivamente 10,7 e 9,0; para a mesma perturbação, o TMS para os esquemas Vp de ambos os gráficos são respectivamente 3,9 e 3,3. Ainda da Tabela 4.6, observa-se dos valores de PR_5 , que, para o gráfico de W , o esquema Vp é muito mais ágil que o esquema Fp , na detecção de mudanças no processo.

Tabela 4.4. Valores dos parâmetros dos gráficos de \bar{X} e R , esquemas Vp , VSS , VSI e Fp

	h_1	h_2	n_1	n_2	$w_X(n_1)$	$k_X(n_1)$	$w_X(n_2)$	$k_X(n_2)$	$w_R(n_1)$	$k_R(n_1)$	$w_R(n_2)$	$k_R(n_2)$
Vp	1,18	0,10	4	10	1,711	5,000	1,677	2,700	3,323	7,590	4,165	5,296
VSS	1,00	1,00	4	10	1,705	3,250	1,705	3,250	3,316	5,257	4,195	5,927
VSI	1,20	0,10	5	5	1,662	3,250	1,662	3,250	3,499	5,433	3,250	5,433
Fp	1,00	1,00	5	5	0,000	3,250	0,000	3,250	0,000	5,433	0,000	5,433

Table 4.5. Valores dos parâmetros do gráfico de W , esquemas Vp , VSS , VSI e Fp

	h_1	h_2	n_1	n_2	w_1	k_1	w_2	k_2	d
Vp	1,18	0,10	4	10	15,239	46,262	30,863	43,393	1,000
VSS	1,00	1,00	4	10	15,193	30,090	31,178	50,852	1,000
VSI	1,20	0,10	5	5	17,629	33,877	17,629	33,877	1,000
Fp	1,00	1,00	5	5	0,000	33,873	0,000	33,873	1,000

Tabela 4.6. Valores do *TMS* para os gráficos de \bar{X} e *R* e gráfico de *W* com parâmetros fixos e variáveis

$n_0=5$		<i>Fp</i>			<i>VSI</i>			<i>VSS</i>			<i>Vp</i>			PR_5
δ	γ	$\bar{X}R$	<i>W</i>	PR_1	$\bar{X}R$	<i>W</i>	PR_2	$\bar{X}R$	<i>W</i>	PR_3	$\bar{X}R$	<i>W</i>	PR_4	
0,0	1,0	433,4	433,3	(%)	433,4	433,4	(%)	433,4	433,3	(%)	433,4	433,5	(%)	(%)
	1,2	53,7	52,6	2,05	43,5	42,8	1,61	50,9	48,0	5,7	30,9	28,3	8,411	46,20
	1,4	14,9	14,7	1,34	9,6	9,6	0,00	12,1	11,1	8,26	6,2	5,7	8,06	61,20
	1,6	6,6	6,5	1,52	3,5	3,5	0,00	4,7	4,3	8,51	2,5	2,4	4,00	63,08
	1,8	3,8	3,8	0	1,8	1,8	0,00	2,6	2,4	7,69	1,5	1,5	0,00	60,53
0,2	1,0	263,6	225,8	14,34	254,9	217,2	14,7	256,5	220,0	14,2	187,6	161,4	13,97	28,52
	1,2	44,3	39,0	11,96	34,8	30,7	11,7	40,1	32,9	17,9	22,7	18,8	17,18	51,79
	1,4	13,6	12,7	6,62	8,6	8,1	5,81	10,8	9,2	14,8	5,4	4,8	11,11	62,20
	1,6	6,3	6,0	4,76	3,3	3,2	3,03	4,5	4,0	11,1	2,4	2,2	8,33	57,57
	1,8	3,7	3,6	2,70	1,8	1,8	0,00	2,5	2,3	8,00	1,5	1,4	6,67	61,11
0,4	1,0	96,1	76,4	20,50	83,9	65,4	22,0	76,3	62,2	18,5	38,3	31,6	17,49	58,64
	1,2	27,2	21,0	22,79	19,7	15,1	23,3	21,4	15,1	29,4	10,8	8,2	24,07	60,95
	1,4	10,7	9,0	15,89	6,4	5,4	15,6	7,9	6,0	24,1	3,9	3,3	15,38	63,33
	1,6	5,5	5,0	9,09	2,8	2,6	7,14	3,8	3,2	15,8	2,0	1,9	5,00	62,00
	1,8	3,5	3,3	5,71	1,6	1,6	0,00	2,3	2,1	8,70	1,4	1,3	7,14	60,61
0,6	1,0	34,1	28,2	17,30	25,1	19,9	20,7	19,2	17,0	11,5	8,6	7,4	13,95	73,76
	1,2	14,9	11,1	25,50	9,5	6,9	27,3	9,5	6,8	28,4	4,7	3,7	21,28	66,67
	1,4	7,7	6,0	22,08	4,2	3,3	21,4	5,1	3,7	27,5	2,6	2,2	15,38	63,33
	1,6	4,5	3,9	13,33	2,2	2,0	9,09	3,0	2,4	20,0	1,7	1,5	11,76	61,54
	1,8	3,1	2,8	9,68	1,4	1,3	7,14	2,0	1,8	10,0	1,3	1,2	7,69	57,14
0,8	1,0	13,7	12,0	12,41	8,0	6,6	17,5	6,1	5,8	4,92	2,9	2,6	10,34	78,33
	1,2	8,2	6,3	23,17	4,4	3,3	25,0	4,5	3,5	22,2	2,4	2,0	16,67	68,25
	1,4	5,3	4,1	22,64	2,6	2,1	19,2	3,2	2,4	25,0	1,8	1,6	11,11	60,98
	1,6	3,6	3,0	16,67	1,7	1,5	11,7	2,3	1,9	17,4	1,4	1,3	7,14	56,67
	1,8	2,7	2,4	11,11	1,2	1,1	8,33	1,7	1,5	11,8	1,1	1,1	0,00	54,17
1,0	1,0	6,4	5,9	7,81	2,9	2,6	10,3	2,8	2,8	0,00	1,5	1,4	6,67	76,27
	1,2	4,8	3,9	18,75	2,2	1,8	18,1	2,5	2,1	16,0	1,5	1,3	13,33	66,67
	1,4	3,7	2,9	21,62	1,7	1,4	17,6	2,2	1,7	22,7	1,3	1,2	7,69	58,62
	1,6	2,9	2,4	17,24	1,3	1,1	15,3	1,8	1,5	16,7	1,1	1,1	0,00	54,17
	1,8	2,3	2,0	13,04	1,0	1,0	0,00	1,5	1,3	13,3	1,0	1,0	0,00	50,00

A Tabela 4.7 fornece o *TMS* para o gráfico de *W* com todos os parâmetros variáveis, onde $n_0 = 5$, $n_1 = 2$ ou 4 , $n_2 = 10$ ou 15 , $h_2 = 0,1$ ou $0,25$, e $d=0,8, 1,0$ ou $1,2$. A escolha de n_1 , n_2 , h_2 , e d afeta a velocidade com a qual o gráfico de controle sinaliza. Da Tabela 4.7 conclui-se que:

- a)** Valores menores de n_1 são melhores para detectar causas especiais que alteram os parâmetros do processo moderadamente ($\mu \leq 0.6$ e $\delta \leq 1.4$), por exemplo, quando $\delta = 0,4$, $\gamma = 1,2$, $h_2 = 0,1$, $n_2 = 10$, e $d = 1,0$, e n_1 passa de 4 para 2, o *TMS* também diminui de 8,2 para 7,0.
- b)** Valores maiores de n_2 são melhores para detectar causas especiais que alteram os parâmetros do processo moderadamente ($\mu \leq 0.6$ e $\delta \leq 1.4$).
- c)** Para os valores de n_1 e n_2 considerados, valores menores de h_2 aumentam a velocidade com a qual o gráfico sinaliza, por exemplo, para $n_1 = 4$, $n_2 = 10$, $\delta = 0,2$, $\gamma = 1,2$, $d = 1,0$, quando $h_2 = 0,1$, o *TMS* = 18,8 enquanto que para $h_2 = 0,25$, o *TMS* = 19,5.
- d)** Valores menores de d aumentam a velocidade com a qual o gráfico sinaliza, exceto quando a média do processo se altera e a variância permanece inalterada, neste caso, o gráfico demanda mais tempo para sinalizar. Assim, para $\delta = 0,4$, $\gamma = 1,2$, $h_2 = 0,1$, $n_1 = 4$ e $n_2 = 10$, quando d diminui de 1,0 para 0,8, o *TMS* diminui de 8,2 para 8,1; entretanto, se $\gamma = 1,0$, o *TMS* aumenta de 31,6 para 35,0.
- e)** Quando δ e/ou γ aumenta o efeito de d no *TMS* tende a desaparecer.

Tabela 4.7. Gráfico de W com parâmetros variáveis: influência dos parâmetros de projeto no TMS

		$d = 1,0$					$d = 0,8$	$d = 1,2$
$n_0 = 5$		$h_2 = 0,1$		$h_2 = 0,25$			$h_2 = 0,1$	
δ	γ	$n_1 = 4$ $n_2 = 10$	$n_1 = 2$ $n_2 = 10$	$n_1 = 4$ $n_2 = 15$	$n_1 = 2$ $n_2 = 15$	$n_1 = 4$ $n_2 = 10$	$n_1 = 4$ $n_2 = 10$	$n_1 = 4$ $n_2 = 10$
0,0	1,0	433,5	433,6	433,4	433,4	433,3	433,5	433,5
	1,2	28,3	25,3	25,3	22,0	29,2	25,5	31,2
	1,4	5,7	4,9	5,3	4,3	6,1	5,1	6,4
	1,6	2,4	2,3	2,3	2,2	2,6	2,2	2,6
	1,8	1,5	1,6	1,5	1,6	1,6	1,4	1,5
0,2	1,0	161,4	151,1	137,5	122,2	162,3	170,9	155,0
	1,2	18,8	16,2	16,3	13,3	19,5	17,5	20,0
	1,4	4,8	4,2	4,5	3,7	5,2	4,4	5,3
	1,6	2,2	2,2	2,2	2,1	2,4	2,1	2,4
	1,8	1,4	1,6	1,5	1,6	1,6	1,4	1,5
0,4	1,0	31,6	28,5	24,6	20,0	32,4	35,0	29,4
	1,2	8,2	7,0	7,1	5,8	8,6	8,1	8,4
	1,4	3,3	3,0	3,2	2,8	3,6	3,2	3,5
	1,6	1,9	1,9	1,9	1,9	2,1	1,8	2,0
	1,8	1,3	1,5	1,4	1,5	1,5	1,3	1,4
0,6	1,0	7,4	6,6	6,3	5,1	7,9	8,3	6,9
	1,2	3,7	3,4	3,4	3,0	3,9	3,7	3,7
	1,4	2,2	2,2	2,2	2,1	2,4	2,2	2,3
	1,6	1,5	1,7	1,6	1,7	1,7	1,5	1,6
	1,8	1,2	1,4	1,2	1,4	1,3	1,2	1,2
0,8	1,0	2,6	2,6	2,6	2,5	2,9	2,9	2,5
	1,2	2,0	2,1	2,0	2,0	2,2	2,0	2,0
	1,4	1,6	1,7	1,6	1,7	1,7	1,5	1,6
	1,6	1,3	1,5	1,3	1,5	1,4	1,2	1,3
	1,8	1,1	1,3	1,1	1,3	1,2	1,0	1,1
1,0	1,0	1,4	1,7	1,5	1,7	1,6	1,5	1,4
	1,2	1,3	1,6	1,4	1,6	1,4	1,3	1,3
	1,4	1,2	1,5	1,2	1,5	1,3	1,2	1,2
	1,6	1,1	1,3	1,1	1,3	1,2	1,1	1,1
	1,8	1,0	1,3	1,0	1,2	1,1	0,9	1,0

Em outros trabalhos, Costa e Rahim (2006b) estudaram os gráficos de controle de $\chi^2(\lambda)$ com regra especial de decisão. Costa, De Magalhães e Epprecht (2005) estudaram o gráfico de controle de $\chi^2(\lambda)$ com amostragem dupla.

4.3 Exemplo de Aplicação do Gráfico de *EWMA* Baseado na Estatística de $\chi^2(\lambda)$

Costa e De Magalhães (2005a) apresentam um exemplo em que o gráfico de *EWMA* baseado na estatística de qui-quadrado não-central é utilizado para monitorar um sistema de enchimento de garrafas. A quantidade de líquido X , em cada garrafa, é a característica de qualidade de interesse. Ocasionalmente, certas impurezas do líquido entopem parcialmente a tubulação por onde flui o líquido. Esta causa especial altera a média e aumenta a variabilidade do processo. Para eliminar a causa especial é necessário limpar a tubulação. Limpezas desnecessárias devem ser evitadas, pois demandam paradas do processo.

O monitoramento do processo é feito através da retirada, a cada 20 minutos, de uma amostra de cinco garrafas ($n=5$ e $h=20$). Durante vários anos, o processo foi monitorado pelos gráficos de controle de \bar{X} e R tradicionais. Assim, as médias amostrais eram plotadas no gráfico de \bar{X} com limites de controle dados por $\mu_0 \pm 3,250\sigma_0 / \sqrt{n}$, e os valores das amplitudes amostrais eram plotadas no gráfico de R com limite superior dado por $5,257\sigma_0$.

A Tabela 4.8 fornece os valores dos volumes de 75 garrafas (isto é, 15 amostras de tamanho 5). Os valores de W_i e Y_i , para cada uma das quinze amostras, estão nas últimas duas colunas. O volume especificado de cada garrafa é de 600,00 mililitros (ml), ou seja, o valor alvo da média é 600,00 ml. Quando isento de impurezas, o desvio padrão do processo é igual a 2,00 ml. Foram adotados para o gráfico de *EWMA* os seguintes valores: $d=0,5$; $r=0,3$ e $Y_0=29,18$. A título de ilustração, a Figura 4.1 apresenta o gráfico proposto de *EWMA* com os 15 pontos amostrais (valores de Y_i na Tabela 4.8).

Tabela 4.8. Valores de X_{ij} , W_i e Y_i

# da amostra (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	W_i	Y_i
1	599,83	598,00	600,93	601,60	600,25	13,78	24,56
2	598,30	599,34	598,80	599,92	596,49	36,44	28,12
3	600,00	598,22	597,11	600,63	600,89	24,08	26,91
4	603,22	602,02	600,14	598,30	603,53	49,25	33,61
5	596,77	596,56	600,15	599,70	602,23	41,52	35,98
6	601,47	596,73	598,01	601,12	601,03	27,40	33,41
7	599,98	598,98	599,16	597,73	601,64	19,62	29,27
8	597,26	600,67	599,35	600,54	598,59	22,88	27,35
9	601,05	600,61	599,18	597,69	598,72	19,61	25,03
10	602,41	602,90	600,00	602,29	599,78	39,24	29,29
11	597,76	601,11	596,47	601,08	601,06	31,05	29,82
12	599,51	601,02	601,22	597,49	599,52	16,81	25,92
13	597,95	600,93	597,95	604,39	604,29	62,92	37,02
14	598,33	598,95	597,39	602,73	602,63	30,15	34,96
15	602,33	601,47	598,54	598,60	597,07	29,22	33,24

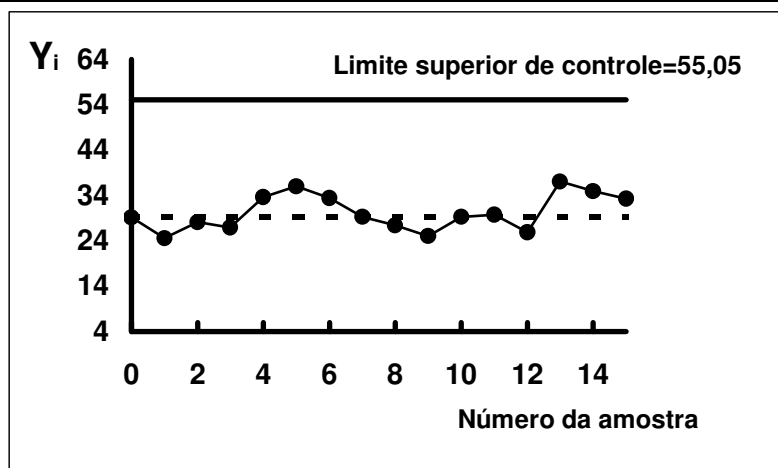


Figura 4.1. Gráfico de $EWMA$ com 15 valores da estatística Y_i
($r= 0,3$; $d= 0,5$, e $Y_0= 29,18$).

Os seguintes pontos são favoráveis ao uso do gráfico de $EWMA$ em substituição aos gráficos conjuntos de \bar{X} e R :

- (a) **A simplicidade operacional:** é sempre mais fácil monitorar o processo com um único gráfico de controle do que dois gráficos, especialmente quando muitas características de qualidade são controladas ao mesmo tempo.
- (b) **A sensibilidade:** quando comparado com os gráficos conjuntos de \bar{X} e R , o gráfico de $EWMA$ detecta mudanças no processo com mais rapidez. Por exemplo, os gráficos conjuntos demandam, em média, 7,3 amostras de tamanho cinco para detectar um deslocamento moderado da média do processo ($\delta = 0,75$) acompanhado de um pequeno aumento da variabilidade ($\gamma = 1,30$). Com o gráfico proposto ($r = 0,3$ e $d = 0,5$), este número se reduz a 4,1.

4.4 Gráfico de $\chi^2(\lambda)$ para a Detecção de Decréscimo na Variabilidade

Costa e Rahim (2004a) propuseram o gráfico de $EWMA_S$ para a detecção de todo tipo de causa especial, incluindo a que reduz variabilidade, sendo $S_i = Y_i$ com

$$\xi_i = \begin{cases} d_1 & \text{if } e_i \geq L \\ -d_1 & \text{if } e_i \leq -L \\ d_0 & \text{if } 0 < e_i < L \\ -d_0 & \text{if } -L < e_i \leq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Na i -ésima amostragem, tem-se um alarme quando S_i excede o limite superior de controle LSC , ou quando S_i é menor que o limite inferior de controle (LIC). Quando $d_0 = d_1 = d$, o gráfico de $EWMA_S$ se reduz ao gráfico de $EWMA_Y$. Durante o período em que o processo permanece sob controle, S_i / σ_0^2 segue uma distribuição de qui-quadrado não-central com n graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\lambda_0 = nd_1^2$, se $|e_i| > L$; caso contrário, $\lambda_0 = nd_0^2$. Durante o período fora de controle, S_i / σ_1^2 segue uma distribuição de qui-quadrado não-central com n graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\lambda_1 = n(\delta + \xi_i)^2 / \gamma^2$. A escolha de d_0 , d_1 , e L afetam a velocidade com a qual o gráfico de controle sinaliza uma alteração no processo. A Tabela 4.9 fornece os NMA 's do gráfico de $EWMA_S$. Quando se

aumenta d_0 ou d_1 , ou se diminui LIC ou L , o gráfico de controle se torna mais ágil na detecção de deslocamentos da média μ , quando $\sigma = \sigma_0$. Contudo, o gráfico de controle se torna mais lento na detecção de pequenos a moderados deslocamentos da média ($\delta=0,25$ or $0,50$) acompanhados de pequenos a moderados decréscimos na variabilidade ($\gamma=0,25$ ou $0,50$). Os NMA 's do gráfico de $EWMA_S$ foram obtidos por meio de uma cadeia de Markov com 100 estados transientes, ou seja, a região do gráfico entre os limites de controle foi fragmentada em 100 partes iguais, ver Saccucci e Lucas (1990) para detalhes.

Tabela 4.9. A influência dos parâmetros de projeto no NMA do gráfico de $EWMA_S$ ($n=5, r=0.2$)

		-0,2	0	-0,2	-0,2	-0,2
$d_0 =$		0,3	0,3	0,4	0,3	0,3
$d_1 =$		2,6	2,6	2,6	1,6	2,6
$LIC =$		1,5	1,5	1,5	1,5	1
$L =$						
δ	γ					
0,00	0,25	4,2	3,4	4,2	6,6	4,2
	0,50	5,3	4,6	5,4	11,9	5,4
	1,00	185,0	185,0	185,0	185,0	185,0
	1,50	4,3	4,1	4,3	4,4	4,3
	2,00	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1
0,25	0,25	3,5	4,5	3,5	5,4	3,7
	0,50	5,2	5,8	5,3	11,5	6,1
	1,00	102,9	86,4	90,9	96,3	81,4
	1,50	4,0	3,8	4,0	4,2	4,0
	2,00	2,0	1,9	2,0	2,1	2,0
0,50	0,25	5,3	7,9	5,5	9,1	15,3
	0,50	9,5	18,5	10,6	46,3	28,5
	1,00	24,7	17,8	19,8	23,7	17,5
	1,50	3,4	3,2	3,3	3,5	3,3
	2,00	1,9	1,8	1,9	2,0	1,9
1,00	0,25	3,0	2,4	1,4	2,7	3,2
	0,50	4,3	3,8	2,8	4,1	3,9
	1,00	3,1	2,8	2,7	3,1	2,8
	1,50	2,1	1,9	2,0	2,1	2,0
	2,00	1,6	1,5	1,5	1,6	1,6
2,00	0,25	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	0,50	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	1,00	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1
	1,50	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
	2,00	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1

A idéia de se utilizar um único gráfico de controle para monitorar μ e σ foi também considerada por Chen et al. (2001). Eles consideraram duas estatísticas:

$$Z_i = \frac{(\bar{x}_i - \mu_0)}{\sigma_0 / \sqrt{n}},$$

e

$$V_i = \Phi^{-1} \left\{ H \left(\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2}; n-1 \right) \right\},$$

onde n é o tamanho da amostra, \bar{x}_i é a i -ésima média amostral e S_i^2 é a i -ésima variância amostral, $\Phi(z) = \Pr(Z \leq z)$ para $Z \sim N(0,1)$, é a distribuição normal padrão, $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a função inversa de $\Phi(\cdot)$, e $H(w; \nu) = \Pr(W \leq w | \nu)$ sendo que $W \sim \chi_\nu^2$. Quando $\mu = \mu_0$ e $\sigma = \sigma_0$, U_i e V_i tem a mesma distribuição, deste modo, é possível construir um único gráfico de controle para monitorar ambas média e variância do processo. Para tanto, eles definiram duas estatísticas de *EWMA*:

$$\begin{aligned} B_i &= (1-r)B_{i-1} + rZ_i, & 0 < r \leq 1, & i = 1,2,\dots, \\ C_i &= (1-r)C_{i-1} + rV_i, & 0 < r \leq 1, & i = 1,2,\dots, \end{aligned}$$

com B_0 e C_0 sendo os valores iniciais, e propuseram um gráfico de controle baseado na estatística M_i dada por:

$$M_i = \max\{|B_i|, |C_i|\}.$$

A estatística M_i é uma variável aleatória que não assume valores negativos, portanto o gráfico tem apenas limite superior de controle, que é dado por:

$$LSC = E(M_i) + k\sqrt{V(M_i)},$$

onde $E(M_i)$ é a média de M_i , e $V(M_i)$ a variância de M_i .

O gráfico proposto por Chen et al. (2001) passou a ser chamado de gráfico *MaxEWMA*. Eles investigaram a habilidade do gráfico em diagnosticar o tipo de causa especial. Desta investigação, descobriu-se que o gráfico *MaxEWMA* não oferece um diagnóstico confiável sobre a natureza da causa especial que tem afetado o processo.

Como os gráficos *MaxEWMA* e *EWMA_S* foram projetados para detectar toda sorte de alteração no processo, incluindo reduções na variabilidade, faz sentido compará-los, ver Tabela 4.10. Para o gráfico *MaxEWMA*, não existe uma expressão para o cálculo do *NMA*, assim simulações com 10.000 corridas foram necessárias para se estimar os *NMA*'s. Os valores de d_0 , d_1 , *LIC*, *LSC*, e *L* foram escolhidos de tal sorte que o gráfico de \bar{X} e *S* nunca tem um desempenho superior ao do gráfico de *EWMA_S*. Os limites de controle do gráfico *EWMA_S* foram ajustados para se ter um $NMA_0 = 185,0$.

Da análise da Tabela 4.10 conclui-se que:

- (1) O gráfico *EWMA_S* é melhor para detectar causas especiais que só aumentam a variabilidade, ou aumentam a variabilidade deslocando a média;
- (2) O gráfico *MaxEWMA* é melhor para detectar causas especiais que só deslocam a média ligeira ou moderadamente ($\delta \leq 0.5$).
- (3) Quando a variabilidade diminui, não há um gráfico que se seja preferível.
- (4) Quando o desvio padrão se reduz de uma metade ($\gamma = 0.5$) e a média permanece inalterada, ou se desloca moderadamente ($\delta \leq 1.0$), o gráfico *MaxEWMA* e o gráfico *EWMA_S* detectam este tipo de perturbação com muito mais rapidez que os gráficos conjuntos de \bar{X} e de *S*. Por exemplo, para $r = 0.2$, $\delta = 0.25$, e $\gamma = 0.5$, o *NMA* dos gráficos conjuntos de \bar{X} e *S*, do gráfico *MaxEWMA* e do gráfico *EWMA_S* são respectivamente, 51,4, 5,1 e 5,0.

Tabela 4.10 Valores do *NMA* dos gráficos de \bar{X} e *S*, *MaxEWMA*, e *EWMA_S* (*n*=5)

δ	γ	\bar{X} - <i>S</i>	<i>r</i> =0,20	<i>r</i> =0,20	<i>r</i> =0,50	<i>r</i> =0,50	<i>r</i> =0,80	<i>r</i> =0,80
			<i>MaxEWMA</i> <i>k</i> =2,86	<i>EWMA_S</i> <i>LSC</i> =8,77 <i>LIC</i> =2,80 <i>L</i> =1,52 <i>d</i> ₀ =-0,27 <i>d</i> ₁ =0,45	<i>MaxEWMA</i> <i>k</i> =3,06	<i>EWMA_S</i> <i>LSC</i> =12,41 <i>LIC</i> =1,56 <i>L</i> =1,68 <i>d</i> ₀ =-0,26 <i>d</i> ₁ =0,56	<i>MaxEWMA</i> <i>k</i> =3,06	<i>EWMA_S</i> <i>LSC</i> =14,23 <i>LIC</i> =0,70 <i>L</i> =1,60 <i>d</i> ₀ =-0,20 <i>d</i> ₁ =0,64
0,0	0,25	4,8	2,6	4,5	2,2	3,3	2,6	2,8
	0,50	51,4	5,1	5,5	7,4	5,4	21,0	10,3
	1,00	185,4	185,6	185,0	184,4	185,0	185,4	185,0
	1,50	7,3	6,1	4,5	5,8	4,7	6,5	5,2
	2,00	2,3	2,9	2,1	2,3	2,0	2,2	2,0
0,25	0,25	4,8	2,6	3,3	2,2	2,3	2,6	2,0
	0,50	51,4	5,1	5,0	7,3	4,5	21,2	9,1
	1,00	98,1	27,7	98,1	50,0	97,7	77,5	83,6
	1,50	6,7	5,7	4,1	5,3	4,3	5,9	4,7
	2,00	2,2	2,8	2,1	2,3	1,9	2,1	1,9
0,5	0,25	4,8	2,6	4,6	2,2	3,2	2,6	4,5
	0,50	51,2	4,9	8,3	7,0	7,5	21,1	27,3
	1,00	30,7	8,0	11,9	11,5	14,7	20,3	20,4
	1,50	5,2	4,7	3,4	4,2	3,4	4,5	3,5
	2,00	2,1	2,7	1,9	2,1	1,8	2,0	1,8
1,0	0,25	4,8	2,6	1,3	2,1	2,7	2,5	3,2
	0,50	12,3	3,0	2,7	2,7	3,2	4,3	4,0
	1,00	4,5	3,1	2,7	2,8	2,6	3,3	2,6
	1,50	2,7	3,0	2,0	2,4	1,8	2,5	1,8
	2,00	1,7	2,3	1,6	1,8	1,4	1,7	1,4
2,0	0,25	1,0	1,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	0,50	1,0	1,7	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	1,00	1,1	1,6	1,0	1,2	1,0	1,1	1,0
	1,50	1,2	1,6	1,1	1,2	1,0	1,2	1,0
	2,00	1,2	1,6	1,1	1,2	1,1	1,2	1,1

Dois gráficos *EWMA* são normalmente utilizados para monitorar a média e a variabilidade do processo. O gráfico de *MaxEWMA* é justamente uma combinação de dois gráficos de *EWMA*. Assim, o usuário permanece tendo que lidar com duas estatísticas de *EWMA*, que são muito mais complicadas que a estatística de *EWMA_S*. Assim, se uma aplicação particular demandar um dispositivo mais sensível na detecção de pequenas perturbações, incluindo

reduções na variabilidade, o gráfico de $EWMA_S$ parece ser uma alternativa interessante, se comparado com o gráfico de $MaxEWMA$.

5. Gráficos De Controle Multivariados

Os capítulos anteriores trataram dos gráficos de controle univariados. Porém, o aumento da complexidade e dos níveis de automação dos processos industriais e a crescente disponibilidade de suporte computacional, têm aumentado o interesse pelo monitoramento simultâneo de várias características de qualidade, também chamado de variáveis do processo (Lowry e Montgomery, 1995). Pouco a pouco as novas estratégias de monitoramento de processos univariados estão sendo aplicadas ao monitoramento de processos multivariados.

Desde que foi criado, o gráfico de controle baseado na estatística T^2 para o monitoramento de processos multivariados (Hotelling, 1947) passou a ser o dispositivo estatístico mais utilizada no monitoramento de duas ou mais características de qualidade. Lowry e Montgomery (1995) fazem uma revisão dos gráficos de controle multivariados. Mason e Young (2002) discutem exaustivamente as aplicações do gráfico de controle T^2 .

O gráfico de controle T^2 é utilizado no monitoramento simultâneo de k variáveis de interesse. Quando o vetor de médias e a matriz de covariâncias, μ_0 e Σ_0 , de um processo k -variado distribuído normalmente são conhecidos, a estatística T^2 de Hotelling para a i -ésima amostra é dada por:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\bar{X}_i - \mu_0),$$

onde n é o tamanho da i -ésima amostra e \bar{X}_i é o vetor de médias amostrais dos k parâmetros para a amostra i . Quando o processo está sob controle, T_i^2 segue uma distribuição de qui-quadrado com k graus de liberdade.

O gráfico de controle T^2 de Hotelling é análogo ao gráfico \bar{X} de Shewhart, sendo ambos pouco sensíveis a pequenas e moderadas mudanças no processo. Desta forma, métodos estatísticos univariados tais como o esquema CUSUM e o gráfico de EWMA, ver Costa, Epprecht e Carpinetti (2005), têm sido utilizados para o caso multivariado em que o vetor de médias está sujeito a pequenas alterações. A idéia de se variar os parâmetros dos gráficos de controle multivariados (gráficos adaptativos multivariados), tais como o tamanho da amostra, o intervalo de tempo entre retiradas de amostras, tem sido explorada em artigos recentes (Aparisi (1996), Aparisi e Haro (2001), Aparisi e Haro (2003), Chou, Chen e Chen (2006)).

A adoção da amostragem dupla para o caso de processos multivariados tem sido estudada por Grigoryan e He (2005) e He e Grigoryan (2005). He e Grigoryan (2005) estudaram os gráficos multivariados com amostragens múltiplas e obtiveram o *NMA* por meio de simulação. Alternativamente, Machado (2006), sob a orientação do autor, se dedicou ao desenvolvimento teórico necessário a obtenção das propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem dupla. Em seguida, Costa e Machado (2007) ampliaram os estudos teóricos de modos a obter as propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem em dois estágios e com regra especial de decisão.

O primeiro gráfico de controle utilizado no monitoramento da matriz de covariâncias Σ se baseou na estatística obtida do teste da razão de máxima verossimilhança generalizada (Alt, 1985). Para o caso bivariado, Alt (1985) propôs o uso da variância amostral generalizada $|S|$ para controlar a matriz de covariâncias Σ . Aparisi *et al.* (1999) estenderam a aplicação da estatística $|S|$ para o caso em que o número de variáveis do processo sob monitoramento é maior do que dois ($p > 2$) e, considerando esta mesma estatística, propuseram um gráfico de controle bivariado com tamanho de amostra variável (Aparisi *et al.*, 2001). Grigoryan e He (2005) propuseram o gráfico de controle multivariado com amostragem dupla para o monitoramento da matriz de covariâncias. Yeh *et al.* (2006) fizeram uma revisão dos gráficos de controle existentes na literatura para o monitoramento da matriz de covariâncias. Machado e Costa (2008) propuseram, para o monitoramento de processos bivariados, um gráfico de controle baseado nas variâncias amostrais de duas características de qualidade. Os pontos no gráfico correspondem ao valor da maior variância. O gráfico proposto, denominado gráfico de VMAX, ou seja, da maior variância, tem um desempenho superior ao do gráfico da variância amostral generalizada $|S|$. Machado, De Magalhães e Costa (2008) vem estudando as propriedades do gráfico de VMAX com amostragem dupla. A seção 5.1 é dedicada aos gráficos de controle bivariados com amostragem em dois estágios e com regra especial de decisão e a seção 5.2 ao gráfico de controle de VMAX. A seção 5.1 trata de gráficos de controle para o monitoramento do vetor de médias e a seção 5.2 dos gráficos de controle para o monitoramento da matriz de covariâncias.

5.1 Gráficos de Controle para o Monitoramento do Vetor de Médias

Nesta seção serão apresentados os gráficos de controle bivariados com amostragem dupla, ou com amostragem em dois estágios, com ou sem regra especial de decisão.

5.1.1 Gráficos de Controle Bivariados com Amostragem em Dois estágios

O gráfico de controle com amostragem em dois estágios é um caso particular do gráfico de controle com amostragem dupla. Assim, precisamos, primeiro, introduzir o gráfico de controle com amostragem dupla para o monitoramento de processos bivariados (gráfico de controle *BIDU*).

O gráfico de controle *BIDU* é empregado no monitoramento de duas características de qualidade ($X;Y$), descritas por uma distribuição normal bivariada com vetor de médias $\mu' = (\mu_x; \mu_y)$ e

uma matriz de covariâncias conhecida $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$, em que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \rho\sigma_x\sigma_y$ é a covariância

entre X e Y . No início do monitoramento o vetor de médias está centrado nos valores-alvo, $\mu'_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y})$, mas após um certo tempo aleatório uma causa especial altera o vetor de médias de μ_0 para μ_1 , em que $(\mu_1 - \mu_0)' = (\delta_x\sigma_x; \delta_y\sigma_y)$, com $\delta_x \neq 0$ e/ou $\delta_y \neq 0$ sem alterar a matriz de covariâncias. Durante o período em controle $\mu = \mu_0$ e durante o período fora de controle $\mu = \mu_1$. O objetivo do monitoramento é detectar qualquer causa especial que tire μ' do seu valor alvo μ'_0 .

Similarmente ao gráfico de controle de Shewhart, amostras com tamanho $n_1 + n_2$ são retiradas do processo em intervalos de tempos regulares. A amostragem é realizada em dois estágios. No primeiro estágio n_1 unidades são inspecionadas, duas características de qualidade ($x; y$) são medidas e a distância estatística entre $\bar{X}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ e $\mu'_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y})$, dada por $T_1^2 = n_1(\bar{X}_1 - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\bar{X}_1 - \mu_0)$ é calculada, sendo \bar{x}_1 e \bar{y}_1 as médias amostrais das duas características de qualidade ($X;Y$) da sub-amostra de tamanho n_1 .

Se T_1^2 for menor do que o limite de advertência, LA , a amostragem é interrompida. Se T_1^2 for maior do que o limite de controle do primeiro estágio, LC_1 , o gráfico de controle sinaliza um desajuste do processo. Se $LC_1 < T_1^2 < LA$, a amostragem vai para o segundo estágio, onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e a distância estatística entre $\bar{X}_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ e $\mu_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y})$, dada por $T_2^2 = n(\bar{X}_2 - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\bar{X}_2 - \mu_0)$, é calculada, sendo \bar{x}_2 e \bar{y}_2 as médias amostrais de ($X;Y$) levando em consideração a amostra de tamanho n , sendo $n = n_1 + n_2$. O gráfico também sinaliza um desajuste do processo quando $T_2^2 > LC_2$, sendo LC_2 o limite de controle do segundo estágio.

A região dada por (LA, LC_1) será chamada de região de advertência. A região acima de LC_1 será chamada de região de ação do primeiro estágio e a região acima de LC_2 será chamada de região de ação do segundo estágio.

Se um ponto cai na região de ação antes da média do processo se desajustar, isto é, quando $\mu = \mu_0$, tem-se um alarme falso. Em outras palavras, o gráfico de controle sinaliza erroneamente a ocorrência de uma causa especial. No primeiro estágio a probabilidade de se ter um alarme falso é dada por α_1 e, no segundo estágio, por α_2 .

Se um ponto cai na região de ação após a ocorrência da causa especial, isto é, quando $\mu \neq \mu_0$, tem-se um alarme verdadeiro. No primeiro estágio a probabilidade de se ter um alarme verdadeiro é dada por p_1 e, no segundo estágio, por p_2 .

Deste modo, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ é a probabilidade de se ter um alarme falso quando a amostragem dupla está em uso e $p = p_1 + p_2$ é o poder de detecção do gráfico de controle *BIDU*.

Durante o período em controle, o número médio de itens inspecionado por amostragem, \bar{n} , é dado por

$$\bar{n} = n_1 + n_2(1 - p_0)$$

onde p_0 é a probabilidade de que a amostragem seja interrompida no primeiro estágio.

A eficiência do gráfico *BIDU* em detectar uma alteração no processo é também medida pelo número médio de amostras até o sinal (*NMA*), ver Costa, Epprecht e Carpinetti (2005).

A distância estatística T^2 tem uma distribuição de Qui-Quadrado, $T_i^2 \sim \chi_k^2$, portanto:

$$LA = \chi_{k, 1-p_0+\alpha_1}^2 \quad (5.1)$$

$$LC_1 = \chi_{k, \alpha_1}^2 \quad (5.2)$$

onde $\Pr(\chi_k^2 > \chi_{k,a}^2) = a$.

A Figura 5.1 apresenta um gráfico de controle *BIDU* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 plotados. O gráfico de controle dá um sinal quando $T_{i1}^2 > LC_1$ ou quando $T_{i2}^2 > LC_2$. Os pontos amostrais T_{i1}^2 , ao caírem na região de advertência, disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística T_{i2}^2 é calculada e comparada com LC_2 . Para evitar o uso de dois gráficos, um para o primeiro estágio e outro para o segundo estágio, o usuário pode construir o gráfico *BIDU* com duas escalas, uma do lado

esquerdo e uma do lado direito, como ilustrado na Figura 5.1. Os valores T_{i1}^2 correspondem aos pontos pretos que são plotados considerando a escala da esquerda, e os valores T_{i2}^2 correspondem aos pontos brancos que são plotados considerando a escala da direita.

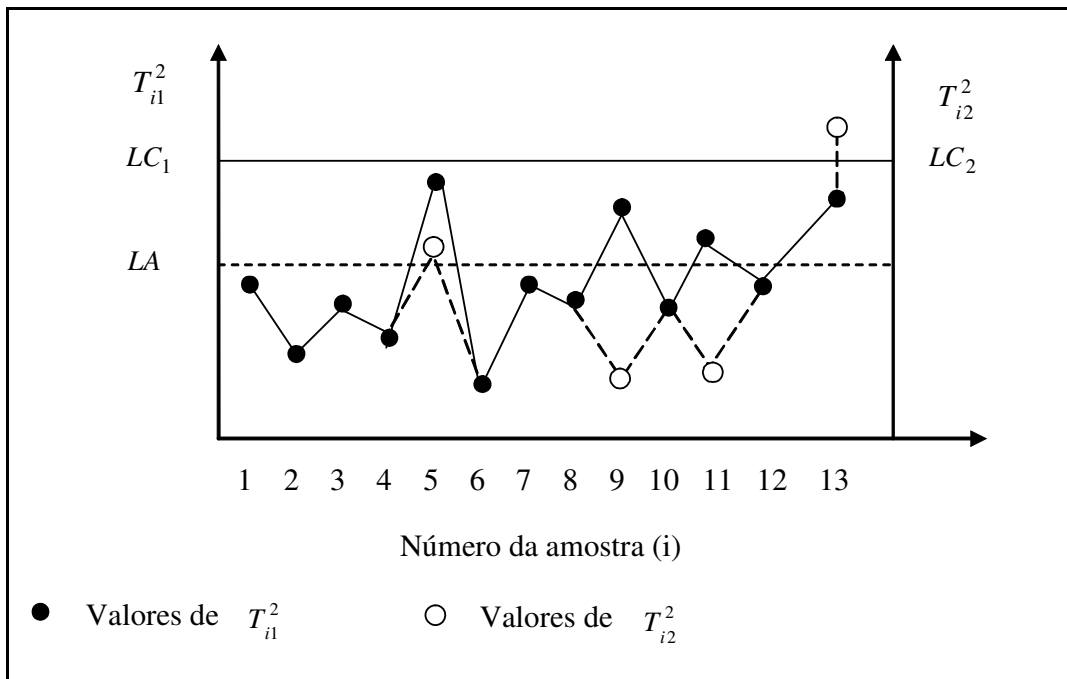


Figura 5.1 - Gráfico de controle *BIDU* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 (Machado, 2006)

O gráfico de controle com amostragem em dois estágios (gráfico *BITWO*) é um caso particular do gráfico *BIDU* onde $n_1=1$, $n_2 = n_0$ e $LC_1 = \infty$, ou seja, $\alpha_1=0$. O gráfico de controle com amostragem em dois estágios foi objeto de estudo de Costa e Rahim (2004, 2006).

A Figura 5.2 apresenta o gráfico de controle *BITWO* com os valores T_{i1}^2 e T_{i2}^2 plotados. O gráfico de controle dá um sinal quando $T_{i2}^2 > LC_2$. Os pontos amostrais T_{i1}^2 , ao caírem na região de advertência, que para o caso da amostragem em dois estágios corresponde a região acima de LA , disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística T_{i2}^2 é calculada e comparada com LC_2 .

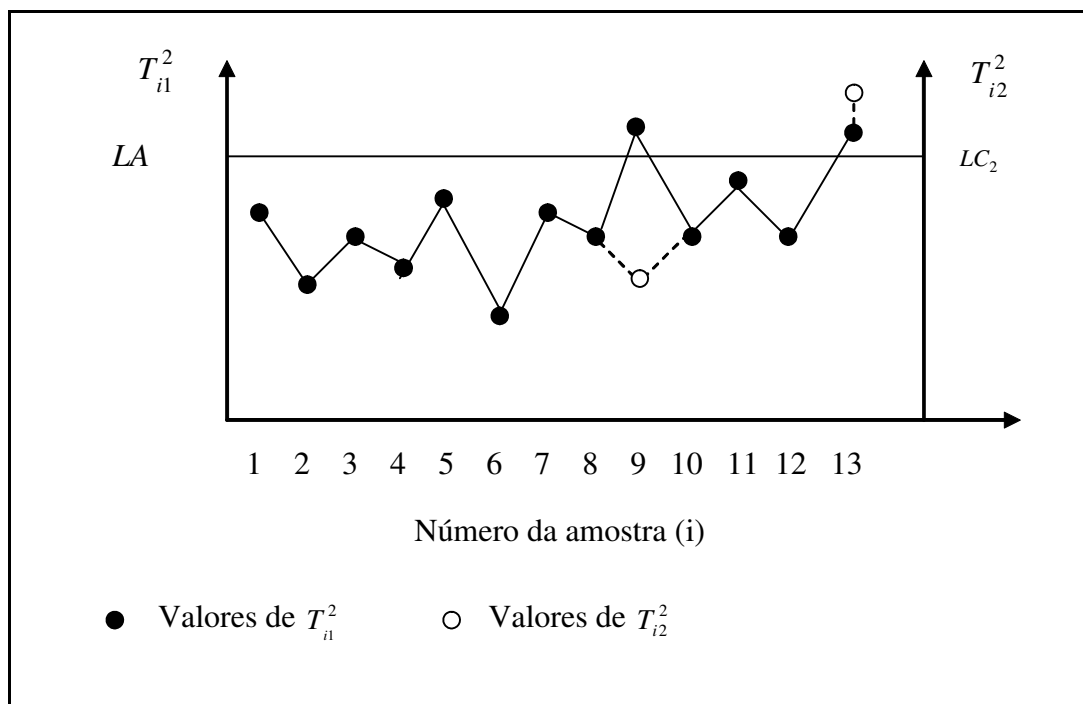


Figura 5.2 - Gráfico de controle *BITWO* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 (Machado 2006)

Para o cálculo do *LA* utiliza-se a equação (5.1) fazendo $\alpha_1 = 0$. Ao se observar as Figuras 5.1 e 5.2, percebe-se que é mais fácil trabalhar com o gráfico de controle *BITWO*. Um ponto favorável ao gráfico de controle *BITWO* e que, em geral, valores de $\alpha_1 \neq 0$ não agilizam a detecção de mudanças no processo.

5.1.2 Gráficos de Controle Bivariados com Regra Especial de Decisão

Quando o gráfico de controle com regra especial de decisão está em uso, a decisão sobre o estado do processo é baseada no *NA*, número de amostras conformes entre ocorrências de amostras não-conformes. Uma amostra será não-conforme quando seu valor amostral gerar um ponto fora dos limites de controle. No início do monitoramento, o primeiro *NA* corresponde ao número de amostras retiradas do processo antes da ocorrência da primeira amostra não-conforme. Se o *NA* for menor ou igual a *L*, onde *L* é um número inteiro positivo especificado, o processo é considerado fora de controle e um sinal é gerado.

Quando o intervalo entre amostragens é fixo, o *NMA* mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que esteja presente desde o início do monitoramento ou desde a ocorrência da causa

especial. No primeiro caso o *NMA* é obtido com o processo em regime transiente, enquanto que no segundo caso o *NMA* é obtido após o processo alcançar o regime permanente. Para efeito de determinação do *NMA* será considerado o segundo caso.

A Figura 5.3 mostra um gráfico de controle com amostragem dupla e regra especial de decisão (*SyBIDU*) com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 plotados. Uma amostra é classificada como não-conforme sempre que $T_{i1}^2 > LC_1$ ou $T_{i2}^2 > LC_2$ e o gráfico *SyBIDU* dá um sinal quando $NA \leq L$.

Semelhante ao gráfico *BIDU*, os pontos amostrais T_{i1}^2 , ao caírem na região delimitada por *LA* e LC_1 , disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística T_{i2}^2 é calculada e comparada com LC_2 . O sinal é baseado no *NA*. De acordo com a Figura 5.3, o primeiro ponto amostral na região de ação é o da nona amostra, portanto trata-se de amostra não-conforme. A próxima amostra não-conforme é a 13ª. O *NA* neste caso é igual a quatro, ou seja, há quatro amostras conformes entre a nona e a 13ª amostras ($13 - 9 = 4$). Como o *NA* é menor do que $L (= \text{cinco})$, o gráfico *SyBIDU* sinaliza uma alteração no processo.

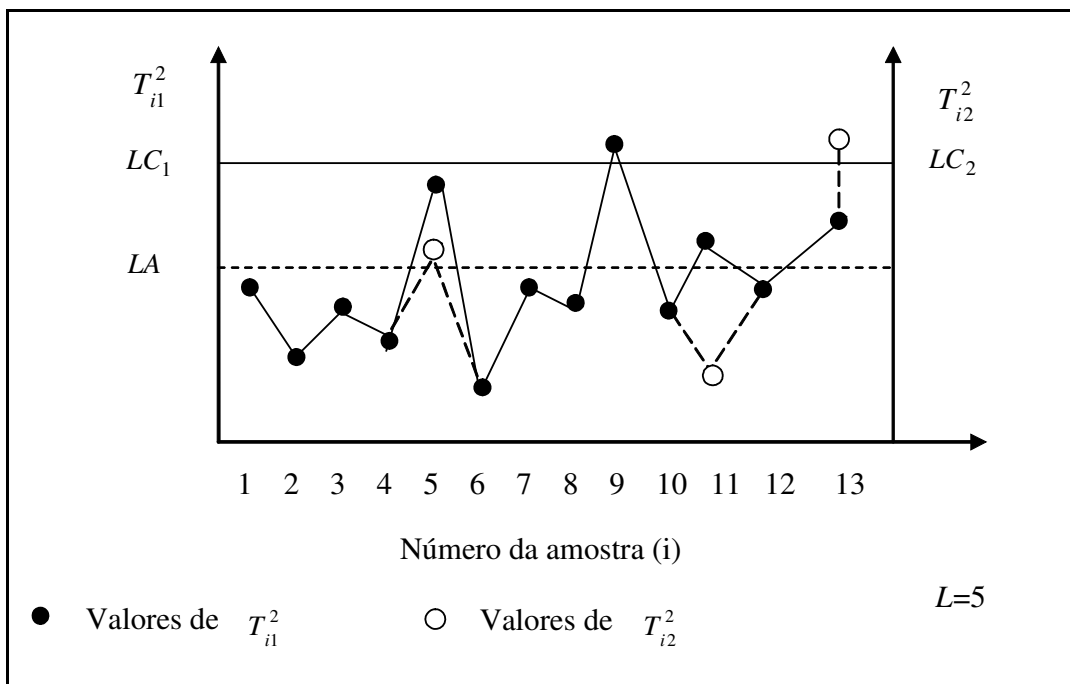


Figura 5.3- Gráfico de controle *SyBIDU* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 (Machado, 2006)

Observa-se na Figura 5.3 que a nona amostra foi classificada como não-conforme após a inspeção dos seus primeiros n_1 itens (gerando um ponto preto acima do LC_1), enquanto que a décima terceira

amostra foi classificada como não-conforme somente após a inspeção de todos os seus n itens (gerando um ponto branco acima do LC_2). Alternativamente a primeira amostra não-conforme poderia corresponder a um ponto branco (acima do LC_2) e/ou a segunda amostra não-conforme poderia corresponder a um ponto preto (acima do LC_1).

O gráfico de controle bivariado com amostragem em dois estágios e regra especial de decisão (*SyBITWO*) é um caso particular do gráfico *SyBIDU*, onde $n_1=1$ e $LC_1 = \infty$. Portanto, quando o gráfico de controle *SyBITWO* está em uso, para que uma amostra seja classificada como não-conforme é necessário que a amostragem vá para o segundo estágio, isto é, que a estatística $T_{i1}^2 > LA$, e que a estatística $T_{i2}^2 > LC_2$.

No gráfico da Figura 5.4 a amostra não-conforme é aquela que gera dois pontos, um preto e um branco, acima da linha de advertência LA , que coincide com a linha de controle LC_2 . As amostras 9 e 13 são não-conformes. O NA neste caso é igual a quatro (13^a amostra - 9^a amostra = 4). Como o NA é menor do que L (=cinco), o gráfico *SyBITWO* sinaliza uma alteração no processo. O NMA para o gráfico *SyBITWO* foi obtido utilizando-se o procedimento descrito por Davis e Woodall (2002). Este procedimento requer, como parâmetro de entrada, a probabilidade de uma amostra ser classificada como conforme ou não-conforme. A próxima seção é dedicada à obtenção desta probabilidade no caso de se estar utilizando o gráfico *SyBITWO*.

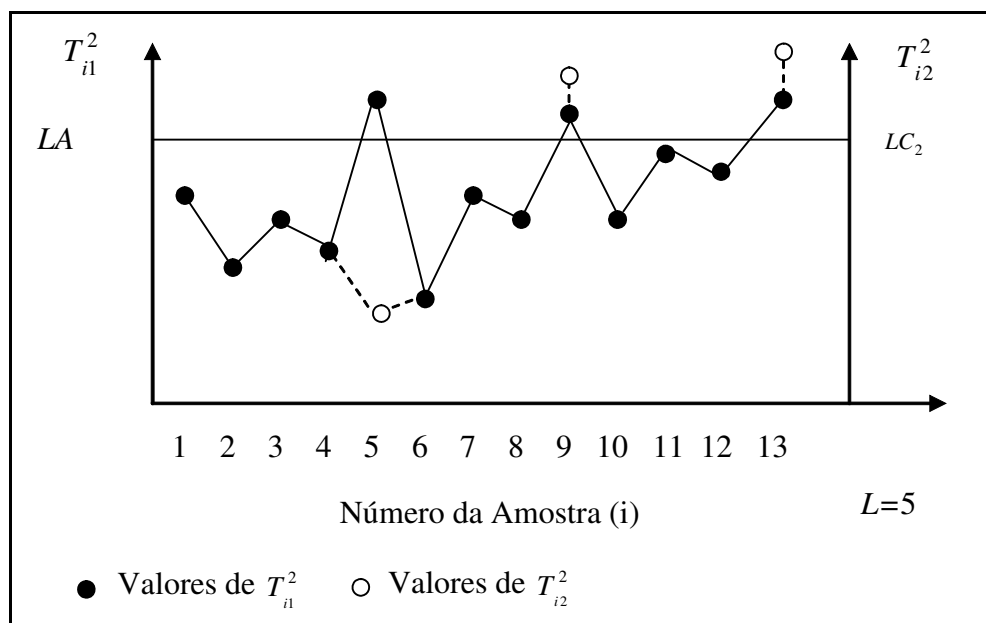


Figura 5.4. Gráfico de controle *SyBITWO* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 (Machado, 2006)

5.1.3 Obtenção das Propriedades do Gráfico de Controle Bivariado com Amostragem em Dois Estágios e Regra especial de Decisão

Para obter a probabilidade de uma amostra ser classificada como conforme ou não-conforme, Costa e Machado (2007) fizeram uso do seguinte teorema: Se um ponto P tem coordenadas retangulares (x, y) então as coordenadas polares de P são (r, θ) onde

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (5.3)$$

$$\theta = \arctan(y / x), \quad (5.4)$$

portanto, para qualquer disco $D(0, a)$ centrado na origem, $(x, y) \in D(0, a)$ se e somente se $r^2 < a^2$. Com base neste teorema é possível escrever a estatística de Hotelling na seguinte forma alternativa: $T^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) = g_1^2(n, \boldsymbol{\mu}) + g_2^2(n, \boldsymbol{\mu})$, onde

$$g_1(n, \boldsymbol{\mu}) = h_1(\bar{x}) \cos \varphi - h_2(\bar{y}) \sin \varphi, \quad (5.5)$$

$$g_2(n, \boldsymbol{\mu}) = -h_1(\bar{x}) \sin \varphi + h_2(\bar{y}) \cos \varphi, \quad (5.6)$$

com $\sin 2\varphi = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$, $h_1(\bar{x}) = \sqrt{n} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x) / \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}$, $h_2(\bar{y}) = \sqrt{n} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y) / \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}$, e $|\boldsymbol{\Sigma}| = \det \boldsymbol{\Sigma} = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 > 0$. De acordo com o teorema B1, que se encontra no Apêndice B, $g(n, \boldsymbol{\mu}) = (g_1^2(n, \boldsymbol{\mu}), g_2^2(n, \boldsymbol{\mu}))$ tem distribuição normal com vetor de médias zero e matriz de covariâncias

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Portanto,}$$

$$\Pr[T^2 < a^2] = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f_{N(0, \boldsymbol{\Sigma})}(x, y) dy dx = \int_0^a r \exp(-r^2) dr = 1 - \exp(-a^2 / 2) \quad (5.7)$$

onde $f_{N(0, \boldsymbol{\Sigma})}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp[-0.5(x^2 + y^2)]$. Quando o processo se encontra em controle estatístico, $p_0 = \Pr[T_1^2 < LC_1]$ é a probabilidade de que a amostragem em dois estágios seja interrompida no primeiro estágio:

$$p_0 = 1 - \exp(-LC_1 / 2) \quad (5.8)$$

Durante o período em controle, a taxa de itens inspecionados por amostragem, \bar{n} , é dado por

$$\bar{n} = 1 + n_0(1 - p_0) = 1 + n_0[\exp(-LC_1 / 2)] \quad (5.9)$$

Se os valores dos parâmetros n_0 e LC_1 são escolhidos sob a restrição de que \bar{n} é igual a n , o tamanho das amostras quando o gráfico bivariado de Hotelling T^2 está em uso, então ambos, o gráfico de controle *SyBITWO* e o gráfico de controle de T^2 tem a mesma taxa de itens inspecionados por amostragens.

Quando a amostra de tamanho n é dividida em duas sub-amostras excludentes de tamanhos n_1 e n_2 , com $n_1 + n_2 = n$, segue que

$$g(n, \boldsymbol{\mu}) = \left(\sqrt{n_1} g(n_1, \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{n_2} g(n_2, \boldsymbol{\mu}) \right) / \left(\sqrt{n_1 + n_2} \right) \quad (5.10)$$

No caso da amostragem em dois estágios, $n_1 = 1$, $n_2 = n_0$, e a amostra é classificada como não-conforme se $g(n_1, \boldsymbol{\mu}) \notin D(0, \sqrt{LC_1})$ e $g(n, \boldsymbol{\mu}) \notin D(0, \sqrt{LC_2})$. Com o processo em controle, segue de (5.7) que, a probabilidade de uma amostra ser classificada com não-conforme é dada por:

$$p^{in} = \iint_{\notin D(0, \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \boldsymbol{\varepsilon})}(x, y) \left[\iint_{\notin D(C, R)} f_{N(0, \boldsymbol{\varepsilon})} dudv \right] dx dy \quad (5.11)$$

onde $C(-x/\sqrt{n_0}; -y/\sqrt{n_0})$ e $R = \sqrt{\frac{1+n_0}{n_0} LC_2}$.

de (5.5) e (5.6), segue que:

$$g_1(n, \boldsymbol{\mu}_1) - g_1(n, \boldsymbol{\mu}_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(1-\rho^2)}} \left[-\delta_x \cos \varphi + \delta_y \sin \varphi \right] = \sqrt{n} \delta'_x,$$

$$g_2(n, \boldsymbol{\mu}_1) - g_2(n, \boldsymbol{\mu}_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(1-\rho^2)}} \left[-\delta_y \cos \varphi + \delta_x \sin \varphi \right] = \sqrt{n} \delta'_y$$

Conseqüentemente, em estando o processo fora de controle, a probabilidade de uma amostra ser classificada como não-conforme, é dada por:

$$p^{out} = \iint_{\mathbb{E}(a, \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) \left[\iint_{\mathbb{E}D(C, R)} f_{N(0, \mathcal{E})} dudv \right] dx dy \quad (5.12)$$

onde $a = (\delta'_x; \delta'_y)$ e $C(-x/\sqrt{n_0} + \delta'_x\sqrt{n_0}; -y/\sqrt{n_0} + \delta'_y\sqrt{n_0})$.

Os valores do *NMA* para o gráfico de controle *SyBITWO* estão na Tabela 5.1 para $\bar{n}=4$, $n_0=9$, $LC_1=2,1973$ e $L=1, 5, 10, 20, 50, 100$. Quando L aumenta de 1 to 50, os *NMA* diminuem. A perturbação no processo é medida por $\lambda = \sqrt{\bar{n}(\delta_x'^2 + \delta_y'^2)}$, sendo $\delta_x'^2 = \delta_y'^2$. Por exemplo, se $\lambda = 0,5$, o *NMA* diminui de 84,79 para 59,74. O efeito de se variar L de 50 a 100 quase não afeta a velocidade com a qual o gráfico de controle sinaliza pequenas ou grandes perturbações. Exemplo, se $\lambda = 1,5$, o *NMA* aumenta de 4,80 para 4,88 quando L passa de 50 para 100. E se uma mudança grande é considerada, por exemplo, $\lambda = 3,0$, o *NMA* diminui de 1,62 para 1,59 quando L aumenta de 50 para 100. A Tabela 5.1 também traz os valores do *NMA* para o gráfico de controle bivariado padrão (gráfico de T^2). A Tabela 5.1 revela que o gráfico de controle *SyBITWO* é sempre mais ágil que o gráfico de T^2 na sinalização de alterações no processo, exceto quando $L=1$. Exemplo, se $\lambda = 1,5$ e $L=20$, o valor do *NMA* para o gráfico de controle *SyBITWO* é 4,86, enquanto que, para o gráfico de controle de T^2 o valor do *NMA* é maior, isto é, 15,79.

Tabela 5.1. Efeito do parâmetro L nos valores do *NMA* do gráfico *SyBITWO*

	Gráfico T^2	Gráfico <i>SyBITWO</i>					
	$n=4$	$L=1$	$L=5$	$L=10$	$L=20$	$L=50$	$L=100$
λ	$LC=10,597$	$LC_2=3,380$	$LC_2=4,983$	$LC_2=5,635$	$LC_2=6,253$	$LC_2=7,001$	$LC_2=7,503$
0,0	200,3	200,1	200,1	200,1	200,2	200,1	200,1
0,5	115,7	84,79	66,98	62,92	60,61	59,74	60,44
1,0	41,97	24,12	15,33	13,93	13,32	13,30	13,64
1,5	15,79	9,75	5,68	5,12	4,86	4,80	4,88
2,0	6,88	5,88	3,33	2,97	2,77	2,67	2,67
2,5	3,55	4,18	2,45	2,18	2,02	1,92	1,90
3,0	2,16	3,31	2,04	1,83	1,7	1,62	1,59

$$\lambda = \sqrt{\bar{n}(\delta_x'^2 + \delta_y'^2)}, \text{ com } \delta_x'^2 = \delta_y'^2$$

A Tabela 5.2 apresenta os valores do *NMA* para o gráfico *SyBITWO* para $\bar{n}=4, L=10$, e $n_0=6, 9, 12$. A escolha de n_0 afeta a velocidade com a qual o gráfico de controle sinaliza. Valores grandes de n_0 são melhores para a detecção de pequenos desajustes no processo e piores para a detecção de grandes desajustes. Exemplo, na Tabela 5.2, quando $\lambda = 1,5$, e n_0 dobra de 6 para 12, o *NMA* diminui de 5,91 to 5,30. Por outro lado, quando $\lambda = 3,0$, e n_0 dobra de 6 to 12, o *NMA* aumenta de 1,55 para 2,13. A Tabela 5.2 também apresenta os valores do *NMA* para o gráfico de controle bivariado com amostragem em dois estágios (gráfico *BITWO*). A Tabela 5.2 revela que o gráfico *SyBITWO*, com $L=10$, é sempre mais ágil que o gráfico de T^2 e o gráfico *BITWO* na sinalização de pequenas perturbações. Exemplo, se $\lambda = 1,0$ e $n_0=9$, o valor do *NMA* para o gráfico *SyBITWO* 13,93. Os valores equivalentes do *NMA* para os gráficos de T^2 e *BITWO* são respectivamente, 41,97 e 17,59. Quando λ passa de 1,5 para 3,0, o gráfico *BITWO* se torna mais ágil que o gráfico *SyBITWO*. Exemplo, se $\lambda = 2,5$ e $n_0=9$, o valor do *NMA* para o gráfico *BITWO* é igual a 1,94 e o *NMA* para o gráfico *SyBITWO* é igual a 2,18.

Tabela 5.2. Efeito do n_0 no *NMA* dos gráficos *BITWO* e *SyBITWO*

λ	Gráfico	Gráfico		Gráfico		Gráfico	
	T^2	<i>BITWO</i>	<i>SyBITWO</i>	<i>BITWO</i>	<i>SyBITWO</i>	<i>BITWO</i>	<i>SyBITWO</i>
	$n=4$ $LC=10,597$	$n_0=6$	$n_0=6$	$n_0=9$	$n_0=9$	$n_0=12$	$n_0=12$
		$LC_1=1,39$	$LC_1=1,386$	$LC_1=2,20$	$LC_1=2,197$	$LC_1=2,77$	$LC_1=2,773$
		$LC_2=9,92$	$LC_2=6,442$	$LC_2=9,20$	$LC_2=5,635$	$LC_2=8,56$	$LC_2=4,998$
0,0	200,3	200,0	200,2	200,2	200,1	200,1	200,2
0,5	115,7	88,09	76,38	72,14	62,92	63,04	57,25
1,0	41,97	24,15	17,48	17,59	13,93	14,36	12,68
1,5	15,79	8,10	5,91	5,9	5,12	5,17	5,30
2,0	6,88	3,58	2,94	2,93	2,97	2,88	3,40
2,5	3,55	2,07	1,95	1,94	2,18	2,11	2,59
3,0	2,16	1,49	1,55	1,57	1,83	1,76	2,13

$$\lambda = \sqrt{\bar{n}(\delta_x'^2 + \delta_y'^2)}, \text{ com } \delta_x'^2 = \delta_y'^2$$

A Tabela 5.3 fornece o *NMA* para o gráfico *SyBITWO* e para o gráfico de T^2 de Hotelling com tamanho das amostras variável (T^2 VSS), Similarmente a Costa (1994), Aparisi (1996) obteve o *NMA* do gráfico de T^2 VSS por meio de uma cadeia de Markov, sendo adotados dois tamanhos de amostras,

n_1 e n_2 . De acordo com a Tabela 5.3, o gráfico *SyBITWO* tem um desempenho global superior ao do gráfico T^2 VSS.

Tabela 5.3. Valores do *NMA* dos gráficos *SyBITWO* ($L=10$) e T^2 VSS, $\bar{n} = 4$

$n_1=1$	$n_2 = n_0 = 6$		$n_2 = n_0 = 9$		$n_2 = n_0 = 12$	
	T^2 VSS $w=1,011$ $LC=10,597$	<i>SyBITWO</i> $LC_1=1,386$ $LC_2=6,442$	T^2 VSS $w=1,961$ $LC=10,597$	<i>SyBITWO</i> $LC_1=2,197$ $LC_2=5,635$	T^2 VSS $w=2,611$ $LC=10,597$	<i>SyBITWO</i> $LC_1=2,773$ $LC_2=4,998$
λ						
0,00	200,1	200,2	198,42	200,1	197,93	200,2
0,50	111,64	76,38	107,02	62,92	104,79	57,25
1,00	33,76	17,48	26,30	13,93	21,44	12,68
1,50	10,56	5,91	7,30	5,12	5,90	5,30
2,00	4,42	2,94	3,43	2,97	3,21	3,40
2,50	2,58	1,95	2,35	2,18	2,49	2,59
3,00	1,84	1,55	1,98	1,83	2,17	2,13

5.1.4 Exemplo Ilustrativo

Para ilustrar o uso do gráfico de controle bivariado com amostragem em dois estágios e regra especial de decisão, nós consideramos o exemplo apresentado por Montgomery (2004) para explicar o uso do gráfico de controle de T^2 . Neste exemplo, o gráfico de T^2 é utilizado para monitorar duas características de interesse, a resistência a tensão (psi) e o diâmetro de uma fibra têxtil ($\times 10^{-2}$ inch). Um conjunto de 20 amostras de 10 unidades foi utilizado para estimar o vetor de médias e a matriz de covariâncias

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 115.59 \\ 1.06 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1.23 & 0.79 \\ 0.79 & 0.83 \end{pmatrix}$$

Baseado nestas estimativas, 10 amostras de tamanho $n_0 + 1$, com $n_0 = 6$, foram geradas pela subrotina DRNMVN da biblioteca IMSL do FORTRAN (1995). Após fixar $\bar{n} = 3$, a taxa de itens inspecionados por amostragem, $\alpha = 0.005$, o risco com alarme falso, e $L = 2$, as expressões (5.9) e (5.11) foram utilizadas para a obtenção do $LC_1 = 2,197$ e $LC_2 = 4,911$. A expressão geral da estatística T^2 de Hotelling para duas características de qualidade é dada por:

$$T^2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{n}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \left[\sigma_y^2 (\bar{x} - \mu_x)^2 + \sigma_x^2 (\bar{y} - \mu_y)^2 - 2\sigma_{xy} (\bar{y} - \mu_y)(\bar{x} - \mu_x) \right]$$

De acordo com o esquema de amostragem em dois estágios, no primeiro estágio, um item da amostra é inspecionado e duas características de qualidade correlacionadas $(x; y)$ são medidas. A distância estatística entre $\mathbf{X}' = (x, y)$ e $\boldsymbol{\mu}'_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y})$ é dada por:

$$T_1^2 = \frac{1}{(1,23)(0,83) - (0,79)^2} [0,83(x_1 - 115,59)^2 + 1,23(y_1 - 1,06)^2 - 2(0,79)(x_1 - 115,59)(y_1 - 1,06)]$$

Se $T_1^2 < LC_1$, a amostragem é interrompida. Caso contrário, a amostragem segue para o segundo estágio, onde os n_0 itens restantes da amostra são inspecionados e a distância estatística T_2^2 entre $\bar{\mathbf{X}}' = (\bar{x}; \bar{y})$ e $\boldsymbol{\mu}'_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y})$ é calculada:

$$T_2^2 = \frac{7}{(1,23)(0,83) - (0,79)^2} [0,83(\bar{x} - 115,59)^2 + 1,23(\bar{y} - 1,06)^2 - 2(0,79)(\bar{x} - 115,59)(\bar{y} - 1,06)]$$

As variáveis \bar{x} e \bar{y} são as médias amostrais das duas características de qualidade $(X; Y)$ considerando todos os $n_0 + 1$ itens da amostra. Quando a estatística $T_2^2 > LC_2$, a amostra é classificada como não-conforme. De acordo com a regra especial de decisão, *NAC*, o número de amostras conformes entre amostras não-conformes, é a variável que define quando o gráfico de controle sinaliza um desajuste no processo. O *NAC* é o número de amostras conformes, entre não-conformes, ou o número de amostras conformes tomadas da produção desde o seu início, ou após um alarme falso, até o instante de ocorrência da primeira amostra não-conforme. O gráfico de controle sinaliza um desajuste do processo sempre que *NAC* for menor ou igual a L . A Tabela 5.4 apresenta os valores de $(X; Y)$, as médias amostrais, as estatísticas T_1^2 e T_2^2 e o que ocorre com a amostragem.

Tabela 5.4. Dados do exemplo ilustrativo

#		Observações							Medias amostrais	T_1^2	T_2^2	*
		1	2	3	4	5	6	7				
1	x	114,37	116,30	117,37	114,78	114,51	115,72	115,06	115,44	3,55	2,18	2
	y	1,14	1,46	2,17	1,24	0,54	1,47	0,89				
2		116,39	116,02	115,30	114,20	115,28	116,62	115,98	115,68	2,86	0,05	2
		2,44	1,65	0,12	0,21	1,20	1,44	0,83				
3		114,34	-	-	-	-	-	-	114,34	1,36	-	1
		0,42	-	-	-	-	-	-				
4		114,27	116,37	115,27	115,74	116,11	116,75	115,19	115,67	3,64	0,04	2
		1,06	1,13	0,54	1,28	0,82	1,75	1,21				
5		114,49	114,37	116,11	113,81	116,58	115,36	115,09	115,11	4,42	7,38	2
		1,41	1,18	1,55	1,04	1,29	1,06	1,46				
6		116,49	114,86	115,77	116,51	116,01	115,85	115,37	115,84	1,54	0,83	2
		1,11	0,99	0,34	1,45	1,51	1,67	0,41				
7		115,52	-	-	-	-	-	-	115,52	0,24	-	1
		1,29	-	-	-	-	-	-				
8		115,84	-	-	-	-	-	-	115,84	0,15	-	1
		1,40	-	-	-	-	-	-				
9		115,49	114,97	114,95	116,02	115,30	115,05	114,50	115,18	2,30	5,92	2
		1,85	1,64	1,07	1,35	1,55	0,61	0,86				
10		115,52	-	-	-	-	-	-	115,52	0,79	-	1
		0,51	-	-	-	-	-	-				

#: Número da amostra; * (1): Amostragem é interrompida (2): Amostragem segue para o segundo estágio.

A Figura 5.5 apresenta o Gráfico *SyBITWO* do exemplo ilustrativo. De acordo com esta figura, a primeira amostra não-conforme é a de número cinco, e a segunda é a de número nove. Deste modo, o *NAC* é igual a 4 (9-5). Como o *NAC* é maior que $L (= 2)$, o gráfico não sinaliza um desajuste no processo.

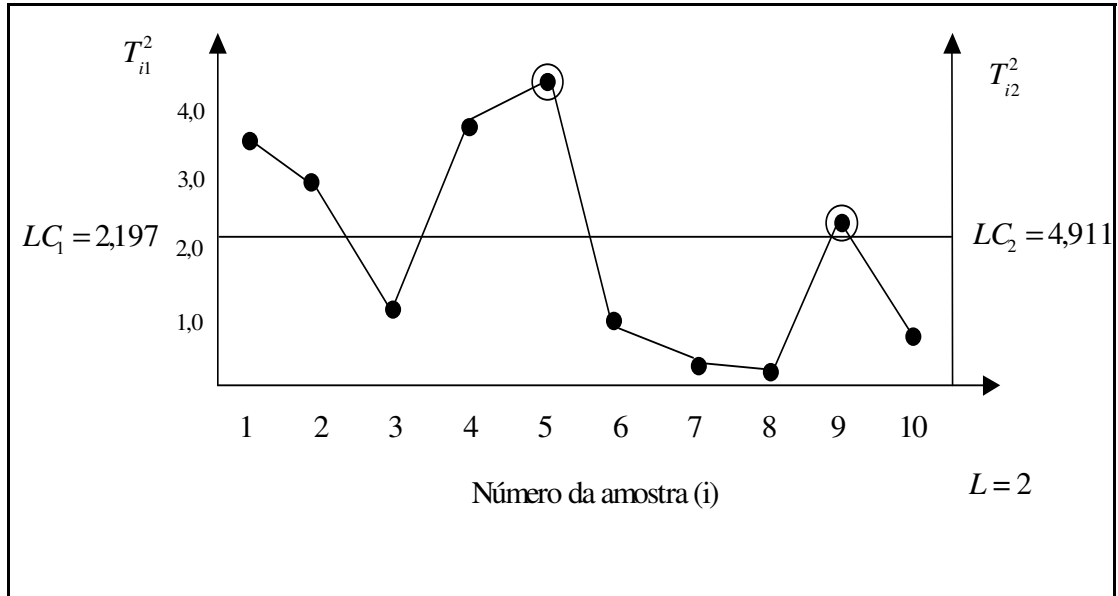


Figura 5.5. Gráfico SyBITWO do exemplo ilustrativo (Machado, 2006)

5.2 Gráfico de Controle da Maior Variância (Gráfico de VMAX)

Machado, De Magalhães e Costa (2008) propuseram o gráfico de controle da maior variância para o monitoramento da matriz de covariâncias Σ de um processo bivariado.

A estatística de monitoramento $VMAX = \max\{S_x^2, S_y^2\}$ corresponde ao maior valor das

variâncias amostrais $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x)^2}{n}$ e $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_y)^2}{n}$, sendo X e Y duas características de

qualidade que seguem uma distribuição normal bivariada. Sem perda de generalidade, supõe-se que

com o processo em controle a matriz de covariâncias é dada por $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & 1 \end{pmatrix}$, sendo σ_{xy} e σ_{yx} as

covariâncias entre X e Y . Na prática, o mais comum é encontrar variáveis com variâncias diferentes entre si e não necessariamente iguais a 1. Contudo, a análise de sensibilidade apresentada neste trabalho permanece válida, uma vez que o efeito da causa especial, que resulta em aumento da variabilidade, é sempre expresso em unidades das variâncias iniciais de X e Y , isto é, variâncias de X e Y estimadas com o processo em controle.

Analogamente a Surtihadi *et al.* (2004), são consideradas duas formas de uma causa especial

alterar a matriz de covariâncias, resultando na matriz $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \cdot \sigma_{xy} \\ a \cdot b \cdot \sigma_{yx} & b \cdot b \end{pmatrix}$. Uma possibilidade

(caso I) supõe que a causa especial afeta somente a variância da variável aleatória X , isto é, $a = c$ e $b = 1$, ou somente a variância da variável aleatória Y , isto é, $b = c$ e $a = 1$. A outra possibilidade (caso II) supõe que a causa especial altera tanto a variância de X como a de Y e, neste caso, $a = b = \sqrt{c}$, sendo c a magnitude da perturbação ($c > 1$). Em ambos os casos a correlação $\rho = \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ entre X e Y não é afetada pela causa especial.

5.2.1 Descrição do Gráfico de VMAX

Quando o gráfico de VMAX está em uso, amostras de tamanho n são retiradas do processo em intervalos de tempo regulares. Duas características de qualidade $(x;y)$ das n unidades da amostra são medidas e a estatística $VMAX = \max\{S_x^2, S_y^2\}$ é calculada, sendo S_x^2 e S_y^2 as variâncias amostrais de $(x;y)$.

Se a estatística VMAX for maior do que o limite de controle LC , o gráfico sinaliza um desajuste no processo. Após a ocorrência do sinal, o usuário pode imediatamente examinar as variâncias amostrais de X e Y para descobrir quais variáveis são responsáveis pelo desajuste do processo. Este diagnóstico deve ser feito com cautela, pois uma causa especial pode aumentar a variabilidade de X e Y e, para a amostra que sinaliza, não necessariamente as variâncias amostrais de X e Y serão maiores que o limite de controle. O limite de controle LC do gráfico de VMAX é obtido utilizando a expressão (C1) do Apêndice C. A Figura 5.6 apresenta o gráfico proposto. No Apêndice I, tem-se também a expressão do NMA para o gráfico de VMAX.

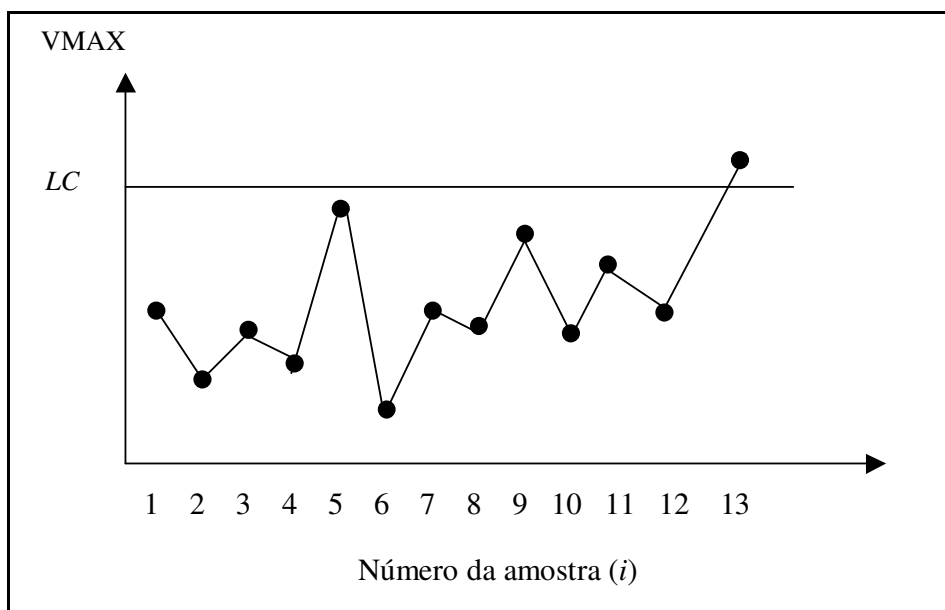


Figura 5.6. Gráfico de controle de VMAX.

O desempenho do gráfico proposto é comparado com o do gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$, onde $\frac{2(n-1)|\mathbf{S}|^{1/2}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}$ tem distribuição de qui-quadrado com $2n - 4$ graus de liberdade.

A matriz de covariâncias \mathbf{S} é dada por $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{yx} & s_{yy} \end{bmatrix}$, sendo s_{xx} e s_{yy} as variâncias amostrais de X e Y respectivamente e s_{xy} e s_{yx} as covariâncias amostrais. O limite de controle para o gráfico de $|\mathbf{S}|$ é dado por:

$$LC = \frac{(\chi_{2n-4, \alpha}^2)^2 |\boldsymbol{\Sigma}_0|}{4(n-1)^2} \quad (5.13)$$

A magnitude da perturbação é dada por c^2 , onde c^2 é a razão entre $|\Sigma_1|$ e $|\Sigma_0|$. Sendo assim, o gráfico de $|\mathbf{S}|$ terá o mesmo poder de detecção para qualquer perturbação na matriz de covariâncias que resulte no mesmo valor de c^2 , independente da causa especial afetar apenas a variável X ou apenas a variável Y (caso I), ou ambas (caso II).

O desempenho do gráfico de $|\mathbf{S}|$ é independente de ρ , enquanto ρ tem uma certa influência nas propriedades do gráfico de VMAX, ver Tabela 5.5. Desta forma, escolheu-se um valor de ρ intermediário para a obtenção das propriedades do gráfico de VMAX. De acordo com a Tabela 5.6, construída para $\rho=0,5$, o gráfico de VMAX é sempre mais eficiente que o gráfico da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$. Para o caso I, em que a causa especial afeta apenas a variável X ou apenas a variável Y , o gráfico de VMAX tem um desempenho bem superior ao do gráfico de controle proposto por Alt (1985). Os gráficos de controle em todas as tabelas que seguem foram planejados com base em um erro do tipo I da ordem de 0,5%, ou seja, um $NMA_0 = 200,0$.

Tabela 5.5. Valores do NMA do Gráfico de VMAX ($n= 5$)

		caso I					caso II				
		ρ					ρ				
		0,0	0,1	0,5	0,7	0,9	0,0	0,1	0,5	0,7	0,9
c^2	LC	3,677	3,676	3,668	3,646	3,569	3,677	3,676	3,668	3,646	3,569
	1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
	1,1	132,1	132,1	132,5	132,8	132,1	139,1	139,1	139,7	140,5	142,1
	1,2	86,5	86,5	86,8	86,8	84,5	101,6	101,7	102,4	103,6	105,8
	1,3	58,1	58,1	58,3	58,1	55,5	77,1	77,2	78,0	79,3	81,6
	1,4	40,6	40,6	40,7	40,4	38,1	60,5	60,5	61,4	62,6	64,9
	1,5	29,5	29,5	29,6	29,3	27,4	48,7	48,7	49,6	50,8	53,0
	2,0	9,62	9,62	9,62	9,50	8,91	21,6	21,7	22,3	23,2	24,8
	3,0	3,38	3,38	3,38	3,34	3,21	8,64	8,66	9,09	9,59	10,5
	5,0	1,67	1,67	1,67	1,66	1,63	3,73	3,74	3,98	4,25	4,71

Tabela 5.6. Valores do *NMA* dos gráficos de VMAX e de $|S|$

		<i>n</i>					
		4			5		
		$ S $	VMAX		$ S $	VMAX	
			caso I	caso II		caso I	caso II
c^2	<i>LC</i>	6,134	4,094	4,094	5,375	3,668	3,668
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		146,8	136,6	143,0	141,4	132,5	139,7
1,2		112,5	92,4	107,0	104,6	86,8	102,4
1,3		89,1	63,9	82,9	80,5	58,3	78,0
1,4		73,3	45,7	66,1	64,1	40,7	61,4
1,5		60,4	33,9	54,1	51,9	29,6	49,6
2,0		30,2	11,6	25,4	24,1	9,62	22,3
3,0		13,6	4,09	10,7	10,2	3,38	9,09
5,0		6,37	1,95	4,77	4,58	1,67	3,98

5.2.2 Gráfico de VMAX com Amostragem Dupla

Machado, De Magalhães e Costa (2007) também consideraram a adoção da amostragem dupla com um gráfico de controle de VMAX. Isto é, amostras de tamanho $n = n_1 + n_2$ são retiradas do processo em intervalos de tempo regulares. A amostragem é realizada em dois estágios. No primeiro estágio n_1 unidades são inspecionadas, duas características de qualidade ($X;Y$) são medidas e a estatística $VMAX_1 = \max\{S_{1x}^2, S_{1y}^2\}$ é calculada, sendo S_{1x}^2 e S_{1y}^2 as variâncias amostrais de ($X;Y$) da sub-amostra de tamanho n_1 .

Se $VMAX_1$ for menor do que o limite de advertência, LA , a amostragem é interrompida. Se $VMAX_1$ for maior do que o limite de controle do primeiro estágio, LC_1 , o gráfico de controle sinaliza um desajuste do processo. Se $LA < VMAX_1 \leq LC_1$, a amostragem vai para o segundo estágio, onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e a estatística $VMAX_2 = \max\{S_{2x}^2, S_{2y}^2\}$ é calculada, sendo S_{2x}^2 e S_{2y}^2 as variâncias amostrais de ($X;Y$) levando em consideração a amostra de tamanho n . O gráfico também sinaliza um desajuste do processo quando $VMAX_2 > LC_2$, sendo LC_2 o limite de controle do segundo estágio.

A região dada por (LA, LC_1) corresponde a região de advertência. A região acima de LC_1 é a região de ação do primeiro estágio e a região acima de LC_2 é a região de ação do segundo estágio.

Se um ponto cai na região de ação com o processo em controle, isto é, quando $\Sigma = \Sigma_0$, tem-se um alarme falso. Em outras palavras, o gráfico de controle sinaliza erroneamente a existência de uma causa especial. No primeiro estágio a probabilidade de se ter um alarme falso é dada por α_1 e, no segundo estágio, por α_2 .

Se um ponto cai na região de ação após a ocorrência da causa especial, isto é, quando $\Sigma \neq \Sigma_0$, tem-se um alarme verdadeiro. No primeiro estágio a probabilidade de se ter um alarme verdadeiro é dada por p_1 e, no segundo estágio, por p_2 .

Deste modo, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ é a probabilidade de se ter um alarme falso quando a amostragem dupla está em uso e $p = p_1 + p_2$ é o poder de detecção do gráfico de VMAX.

Durante o período em controle, o número médio de itens inspecionado por amostragem, \bar{n} , é dado por

$$\bar{n} = n_1 + n_2(1 - p_0) \quad (5.14)$$

onde p_0 é a probabilidade de que a amostragem seja interrompida no primeiro estágio, ver expressão (D2) do Apêndice D.

A Figura 2 apresenta um gráfico de VMAX com os valores de $VMAX_1$ e $VMAX_2$. O gráfico de controle dá um sinal quando $VMAX_1 > LC_1$ ou quando $VMAX_2 > LC_2$. Os pontos amostrais $VMAX_1$, ao caírem na região de advertência, disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística $VMAX_2$ é calculada e comparada com LC_2 . Para evitar o uso de dois gráficos, um para o primeiro estágio e outro para o segundo estágio, o usuário pode construir o gráfico de VMAX com duas escalas, uma do lado esquerdo e uma do lado direito, como ilustrado na Figura 5.7. Os valores $VMAX_1$ correspondem aos pontos pretos que são desenhados considerando a escala da esquerda e os valores $VMAX_2$ correspondem aos pontos brancos que são desenhados considerando a escala da direita.

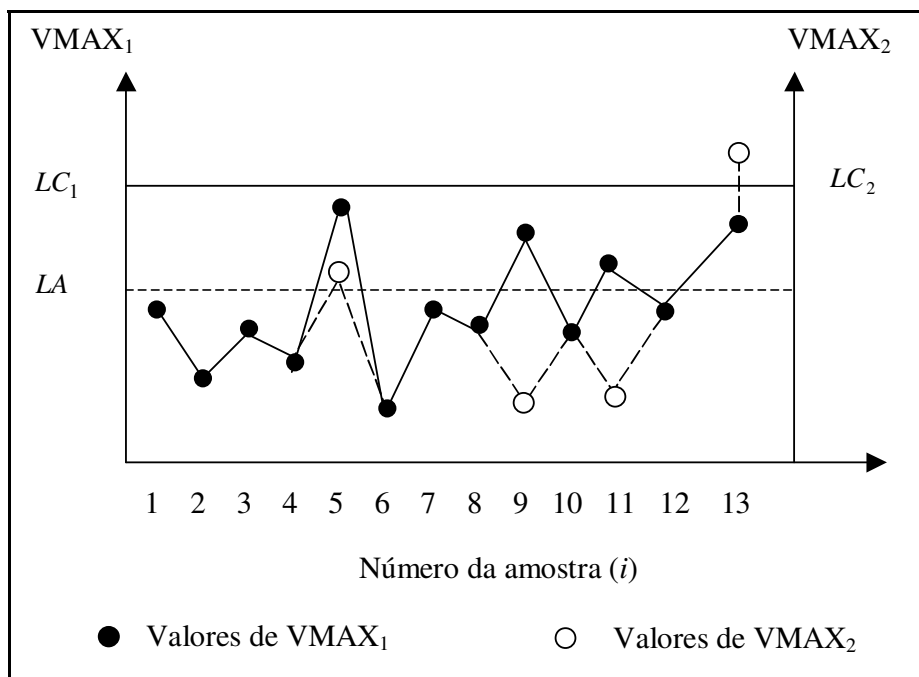


Figura 5.7. Gráfico de controle de VMAX com amostragem dupla.

5.2.3 Propriedades do Gráfico de VMAX com Amostragem dupla

Com a amostragem dupla, a eficiência do gráfico de controle em detectar uma alteração no processo, é medida também pelo *NMA*, número médio de amostras até o sinal. A expressão do *NMA* para o gráfico de VMAX com amostragem dupla encontra-se no Apêndice D.

As tabelas desta seção foram obtidas fixando $LC_1 = \infty$, ou seja, $\alpha_1 = 0$. Neste caso, o gráfico de controle dá um sinal somente quando $VMAX_2 > LC_2$. Os pontos amostrais $VMAX_1$, ao caírem na região de advertência, que para o caso em que $LC_1 = \infty$ corresponde a região acima de LA , disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística $VMAX_2$ é calculada e comparada com LC_2 . Em geral, a performance do gráfico de VMAX tende a piorar sempre que se adota valores de $\alpha_1 > 0$, ver Tabela 5.7.

Tabela 5.7. Valores de NMA dos gráfico de VMAX ($\bar{n} = 4, n_1=2, n_2=8, \rho =0,5$)

	$\alpha_1=0$		$\alpha_1=0,001$		$\alpha_1=0,0025$		
	caso I	caso II	caso I	caso II	caso I	caso II	
	LA	1,928	1,928	1,923	1,923	1,917	1,917
LC_1	∞	∞	7,593	7,593	6,672	6,672	
c^2	LC_2	2,571	2,571	2,590	2,590	2,636	2,636
1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	
1,1	121,6	130,2	125,5	133,4	132,8	139,8	
1,2	73,3	90,1	76,5	93,4	83,2	100,4	
1,3	46,1	65,5	48,1	68,2	52,7	74,3	
1,4	30,6	49,5	31,8	51,7	34,8	56,7	
1,5	21,5	38,7	22,3	40,4	24,2	44,4	
2	6,68	15,7	6,88	16,3	7,17	17,7	
3	2,58	6,01	2,61	6,16	2,65	6,54	
5	1,53	2,70	1,53	2,74	1,54	2,83	

A Tabela 5.8 compara os gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostragem dupla. Os valores da Tabela 5.8 para o gráfico de $|S|$ com amostragem dupla foram obtidos por Grigoryan e He (2005) por meio de simulações. De acordo com a Tabela 5.8, observa-se que quando a amostragem dupla está em uso o gráfico proposto tem, em geral, um desempenho superior ao do gráfico de $|S|$.

Tabela 5.8. NMA 's dos gráficos de VMAX e de $|S|$ com amostragem dupla ($\bar{n} = 4, \rho =0,5$).

c^2	n_1	n_2	LA	LC_2	VMAX		$ S $
					caso I	caso II	
1,1	3	23	3,175	1,701	108,6	118,9	102,0
1,2	3	23	3,175	1,701	59,7	76,9	72,6
1,3	3	23	3,175	1,701	35,6	53,2	49,5
1,5	3	24	3,207	1,678	16,2	29,3	29,4
2	3	19	3,031	1,818	5,62	11,9	14,0
3	3	19	3,031	1,818	2,59	4,85	6,45
5	3	11	2,613	2,193	1,50	2,47	3,59

As Tabelas 5.9, e 5.10 apresentam os valores do NMA para o gráfico de VMAX com amostragem dupla. Nestas tabelas n_1 é fixo enquanto n_2 assume diferentes valores. Quando n_2 aumenta, o gráfico de VMAX se torna mais ágil na detecção de pequenas alterações; porém, se torna lento na detecção de grandes alterações. Por exemplo, da Tabela 5.9 observa-se que para $c^2 = 1,3$ o

NMA diminui de 46,1 para 37,4 quando n_2 aumenta de 8 para 16 (caso I). Por outro lado, para $c^2 = 5$, o *NMA* aumenta de 1,53 para 1,67 quando n_2 passa de 8 para 16 (caso I).

O efeito da escolha de n_1 na velocidade com que o gráfico de VMAX sinaliza o desajuste pode ser observado comparando os *NMA*s das Tabelas 5.9 e 5.10. Quando n_2 é pequeno e n_1 aumenta de 2 para 3 o gráfico de VMAX se mostra mais ágil. Por exemplo, das Tabelas 5.9 e 5.10 observa-se que para $c^2 = 1,3$ e $n_2=8$, o *NMA* diminui de 46,1 para 44,7 quando n_1 passa de 2 para 3 (caso I). Para a mesma perturbação, porém para n_2 grande ($n_2=16$), o *NMA* aumenta de 37,4 para 38,0 quando n_1 passa de 2 para 3. As Tabelas 5.9 e 5.10, apresentam também os *NMA*s para o gráfico de $|\mathbf{S}|$ com amostragem simples ($n=\bar{n}$). Observa-se que o gráfico de VMAX tem sempre um desempenho superior ao do gráfico de $|\mathbf{S}|$.

Tabela 5.9. Valores de *NMA* dos gráficos de VMAX e de $|\mathbf{S}|$ ($\bar{n} = 4$, $n_1=2$, $\rho=0,5$).

		n_2					
		8		12		16	
		VMAX		VMAX		VMAX	
		caso I	caso II	caso I	caso II	caso I	caso II
c^2	<i>LC</i>	6,134	-	-	-	-	-
	<i>LA</i>	-	1,928	1,928	2,364	2,364	2,668
	<i>LC₂</i>	-	2,571	2,571	2,213	2,213	1,997
	1,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
	1,1	146,8	121,6	130,2	116,0	125,4	111,9
	1,2	112,5	73,3	90,1	67,0	84,3	62,6
	1,3	89,1	46,1	65,5	40,8	59,8	37,4
	1,4	73,3	30,6	49,5	26,6	44,4	24,1
	1,5	60,4	21,5	38,7	18,5	34,2	16,7
	2	30,2	6,68	15,7	5,81	13,4	5,44
	3	13,6	2,58	6,01	2,46	5,13	2,50
	5	6,37	1,53	2,70	1,59	2,45	1,67

Tabela 5.10. Valores de NMA dos gráficos de $VMAX$ e de $|S|$ ($\bar{n} = 4, n_1=3, \rho=0,5$)

	$ S $	n_2						
		8		12		16		
		VMAX		VMAX		VMAX		
		caso I	caso II	caso I	caso II	caso I	caso II	
c^2	LC	6,134	-	-	-	-	-	-
	LA	-	2,363	2,363	2,680	2,680	2,901	2,901
	LC_2	-	2,450	2,450	2,127	2,127	1,923	1,923
1,0		200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0	200,0
1,1		146,8	120,3	129,1	115,7	125,2	112,5	122,3
1,2		112,5	71,7	88,8	66,7	84,0	63,3	80,7
1,3		89,1	44,7	64,2	40,6	59,6	38,0	56,5
1,4		73,3	29,5	48,3	26,4	44,2	24,7	41,6
1,5		60,4	20,6	37,6	18,4	34,0	17,2	31,8
2		30,2	6,38	15,1	5,81	13,3	5,62	12,4
3		13,6	2,48	5,76	2,43	5,13	2,50	4,89
5		6,37	1,47	2,60	1,52	2,46	1,58	2,48

5.2.4 Exemplo Ilustrativo

Nesta seção, considera-se o exemplo citado por Aparisi *et al.* (2001) para explicar o uso do gráfico de controle com amostragem dupla baseado na estatística $VMAX$.

A peça da Figura 5.8 tem duas dimensões a serem controladas, X (distância entre centros de dois furos interiores) e Y (distância entre dois centros de furos laterais). As duas características de qualidade são correlacionadas, sendo $\rho = 0,7$.

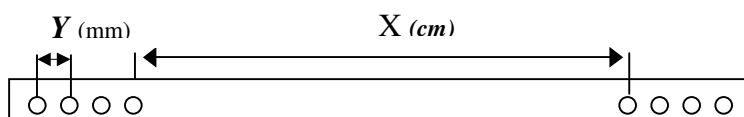


Figura 5.8. Peça do exemplo ilustrativo.

Quando o processo está em controle, o vetor de médias e a matriz de covariâncias do processo são conhecidos:

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 10,0 \\ 10,5 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,332 \\ 0,332 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Inicialmente foram geradas 10 amostras com o processo em controle, onde $\bar{n} = 4$, $n_1 = 2$ e $n_2 = 8$. A última amostra foi gerada sob a condição do caso I ter ocorrido, em que a causa especial aumenta somente a variabilidade da primeira variável X , sendo $c^2 = 3,0$. Portanto,

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1,35 & 0,575 \\ 0,575 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Na Tabela 5.11 estão os dados de $(X;Y)$ e na Tabela 5.12 estão as variâncias amostrais S_{1x}^2 , S_{1y}^2 , S_{2x}^2 e S_{2y}^2 e as estatísticas $VMAX_1$ e $VMAX_2$. Para a obtenção do limite de controle $LC_2 = 2,571$ e do limite de advertência $LA = 1,928$ foi utilizada a expressão (5.14) e as expressões (D2) e (D4) do Apêndice D, para $a = b = 1,0$. Neste exemplo, adotou-se $\alpha = 0,005$ e $LC_1 = \infty$.

A Figura 5.9 apresenta o gráfico de $VMAX$ com amostragem dupla. O sinal é dado pela 11^a amostra (Número de amostras até o sinal = 1).

Tabela 5.11. Dados para o exemplo ilustrativo

#		Observações									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X(cm)	10,335	10,739	-	-	-	-	-	-	-	-
	Y(mm)	11,401	10,625	-	-	-	-	-	-	-	-
2		10,707	10,300	-	-	-	-	-	-	-	-
		10,990	10,664	-	-	-	-	-	-	-	-
3		8,670	10,462	-	-	-	-	-	-	-	-
		9,506	10,23	-	-	-	-	-	-	-	-
4		9,435	10,160	-	-	-	-	-	-	-	-
		9,020	11,230	-	-	-	-	-	-	-	-
5		8,556	10,778	9,480	9,420	8,901	10,433	9,927	10,580	10,796	9,137
		8,999	11,860	10,092	9,687	9,528	10,444	10,903	10,808	10,258	10,414
6		10,670	8,743	-	-	-	-	-	-	-	-
		10,324	10,207	-	-	-	-	-	-	-	-
7		9,728	10,320	-	-	-	-	-	-	-	-
		9,883	11,261	-	-	-	-	-	-	-	-
8		10,815	10,338	-	-	-	-	-	-	-	-
		11,223	8,880	-	-	-	-	-	-	-	-
9		10,174	8,752	-	-	-	-	-	-	-	-
		10,386	9,192	-	-	-	-	-	-	-	-
10		10,934	9,048	-	-	-	-	-	-	-	-
		11,221	9,484	-	-	-	-	-	-	-	-
11		11,733	8,492	11,080	8,449	6,54	11,578	8,747	7,765	9,839	11,68
		11,543	10,737	10,723	9,749	8,386	9,800	8,827	9,931	10,793	8,746

#: Número da amostra

Tabela 5.12. Valores de S_{1x}^2 , S_{1y}^2 , S_{2x}^2 , S_{2y}^2 , $VMAX_1$ e $VMAX_2$

#	1º estágio			2º estágio		
	S_{1x}^2	S_{1y}^2	$VMAX_1$	S_{2x}^2	S_{2y}^2	$VMAX_2$
1	0,329	1,177	1,177	-	-	-
2	0,295	0,710	0,710	-	-	-
3	0,991	0,148	0,991	-	-	-
4	0,172	1,237	1,237	-	-	-
5	1,345	2,231	2,231	0,641	0,669	0,669
6	1,014	0,074	1,014	-	-	-
7	0,088	0,802	0,802	-	-	-
8	0,389	1,375	1,375	-	-	-
9	0,794	0,401	0,794	-	-	-
10	0,889	0,879	0,889	-	-	-
11	2,639	1,462	2,639	3,272	0,974	3,272

#: Número da amostra

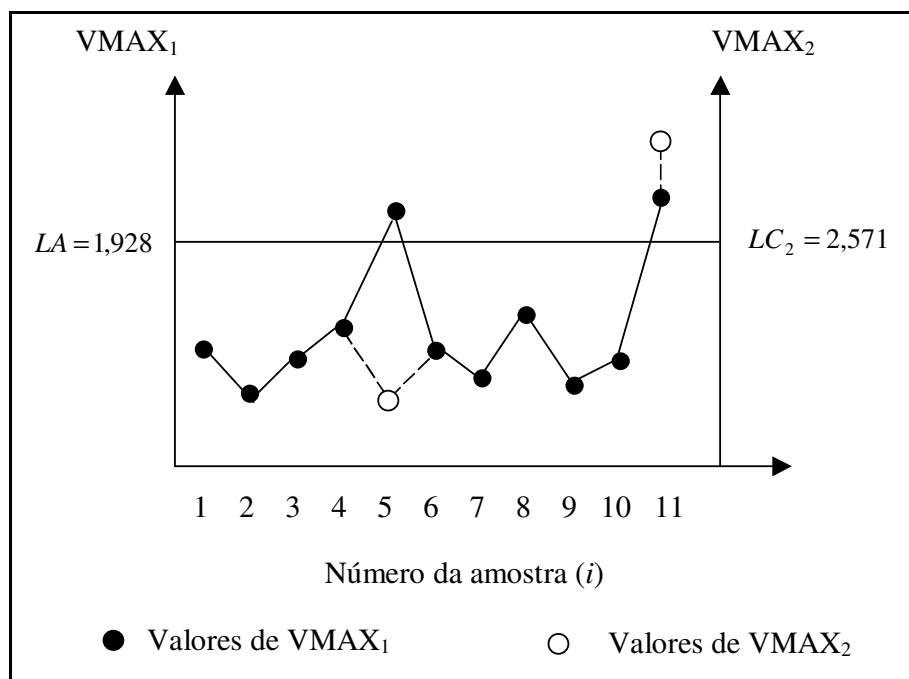


Figura 5.9. Gráfico de VMAX com Amostragem Dupla – Exemplo

6. Monitoramento de Processos Autocorrelacionados

Os gráficos de controle de Shewhart são planejados assumindo que observações consecutivas do processo são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), entretanto esta hipótese é freqüentemente violada na prática, pois a maioria dos processos apresenta autocorrelação. Os processos de manufatura, em geral, são regidos por elementos inerciais, e quando o intervalo entre observações é pequeno em relação a estas forças, elas se tornam correlacionadas ao longo do tempo (Montgomery, 2004).

Se a autocorrelação na variável sob monitoramento é provocada por uma causa especial, deve-se tentar eliminá-la. Por outro lado, se ela é parte inerente da variabilidade resultante de causas comuns e não pode ser removida, deve-se levá-la em consideração quando da estimação dos parâmetros das cartas de controle, caso contrário, pode se incorrer em um aumento na taxa de alarmes falsos ou no número de amostras necessárias para detecção de deslocamentos da média do processo (Vander Wiel, 1996). Como em muitas aplicações a dinâmica do processo faz com que observações consecutivas ou próximas tornem-se correlacionadas, uma forma de se evitar tal dependência é aumentar o intervalo de tempo entre observações, com a conseqüente desvantagem de não se aplicar o conceito de subgrupo racional, ou então, “alargar” os limites de controle (Vasilopoulos e Stamboulis (1978)). Uma outra estratégia freqüentemente utilizada consiste em ajustar as observações da característica de qualidade a um modelo de previsão apropriado e monitorar o processo com cartas de controle dos resíduos i.i.d. resultantes (Montgomery e Mastrangelo (1991); English et al. (2000)).

6.1 Descrição do Modelo

Costa e Claro (2008), Claro e Costa (2008) e Claro et al. (2008) se dedicaram ao monitoramento de processos autocorrelacionados com observações coletadas em subgrupos racionais, como é freqüentemente o caso, principalmente em indústrias de processos. O modelo em questão é uma variante da pesquisa de Alwan e Radson (1992). Para capturar a variabilidade inerente de curto-prazo, cada subgrupo racional é constituído de unidades produzidas na seqüência, praticamente num mesmo instante, cuja dependência deve ser

modelada. Como o intervalo entre amostras deve ser grande o suficiente para que todas as fontes potenciais de variação no processo possam atuar, a autocorrelação entre subgrupos é considerada desprezível. As observações da característica de qualidade a ser monitorada são representadas por um modelo auto-regressivo de primeira ordem, comum em aplicações (Montgomery e Mastrangelo (1991); Runger e Willemain (1995 e 1996); Atienza et al. (1998); Timmer et al. (2000)). Claro e Costa (2008) e Claro et al. (2008), respectivamente, estudaram as propriedades do gráfico de \bar{X} com amostragem dupla e do gráfico de EWMA. Em ambos os estudos, consideraram que as observações de X são de um processo auto-regressivo de primeira ordem AR (1). Costa e Claro (2008) estudaram as propriedades do gráfico de \bar{X} com amostragem dupla, para o caso em que as observações de X são de um modelo ARMA.

6.2 O gráfico de controle de \bar{X} para processos autocorrelacionados

As propriedades do gráfico de médias são determinadas segundo a metodologia apresentada em Costa et al. (2005), entretanto com o desvio-padrão da amostra levando em conta a autocorrelação. O gráfico \bar{X} tem linha central em μ_0 e limites de controle (LC) dados por $\mu_0 \pm k\sigma_{\bar{X}}$. As observações X_t para um processo autoregressivo de primeira ordem AR(1) são dadas por:

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \mathcal{E}_t, \quad t=1, 2, 3, \dots, n \quad (6.1)$$

onde μ é a media do processo, ϕ é o coeficiente autoregressivo e \mathcal{E}_t é o erro aleatório, i.i.d., $\mathcal{E}_t \sim N(0, \sigma_{\mathcal{E}})$. Os parâmetros do modelo autoregressivo são considerados conhecidos e a autocorrelação positiva. A expressão das X_t observações consecutivas que formam o subgrupo de tamanho n , derivada através de substituições recursivas, é genericamente representada por:

$$X_t = \sum_{i=1}^t \phi^{t-i} \mathcal{E}_i; \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (6.2)$$

A média amostral é dada por:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^t \phi^{t-i} \varepsilon_i}{n} \quad (6.3)$$

E, segundo Vasilopoulos e Stamboulis (1978), e o desvio padrão $\sigma_{\bar{X}}$ por:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{2\sigma_x^2}{n^2} \left\{ \frac{\phi^{n+1} - n\phi^2 + (n-1)\phi}{(\phi-1)^2} \right\}}. \quad (6.4)$$

onde $\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$. A causa especial desloca a média do processo de $\mu = \mu_0$ para $\mu = \mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma_x$. Sem perda de generalidade, nós adotamos $\mu = \mu_0 = 0$ e $\sigma_\varepsilon = 1$. A Figura 6.1 ilustra a perda de desempenho do gráfico de \bar{X} , pelo fato do processo ser autocorrelacionado.

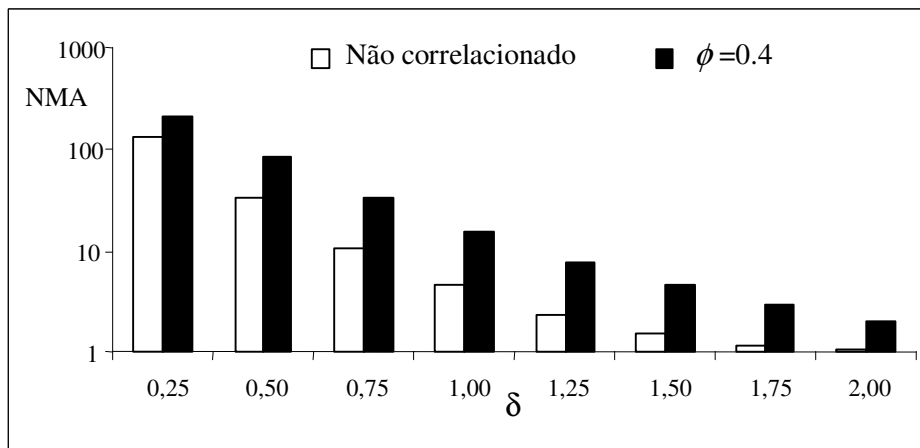


Figura 6.1. NMA do gráfico de \bar{X} , $NMA_0=370,4$, $n=5$ (Claro e Costa, 2008)

6.2 O gráfico de controle de \bar{X} com amostragem dupla para processos autocorrelacionados

A amostragem dupla assume que, a cada instante de amostragem, uma amostra mestra, de tamanho n , formada por duas sub-amostras de tamanhos n_1 e n_2 ($n = n_1 + n_2$) é retirada do processo de uma única vez, constituída assim de itens que foram produzidos na seqüência, um após outro; deste modo, a característica de qualidade destes itens tem a mesma distribuição de probabilidades. A amostragem dupla é realizada em duas etapas:

Primeira etapa: a característica de qualidade dos itens da sub-amostra de tamanho n_1 é medida e sua média \bar{X}_1 calculada. Seja $Z_1 = (\bar{X}_1 - \mu_0) / \sigma_{\bar{X}_1}$ onde $\bar{X}_1 \sim N(\mu, \sigma_{\bar{X}_1})$ sendo μ_0 a média do processo quando em controle e $\sigma_{\bar{X}_1}$ o desvio padrão da sub-amostra de tamanho n_1 , que é dado pela expressão 6.3 fazendo $n = n_1$. Na primeira etapa podem ocorrer três casos:

- ✓ Se $|Z_1| < L_1$, conclui-se que a média do processo está ajustada, a amostragem é finalizada.
- ✓ If $|Z_1| > L$, conclui-se que a média do processo está desajustada, a amostragem é finalizada ($0 < L_1 < L$).
- ✓ If $L > |Z_1| > L_1$, a amostragem vai para a segunda etapa

Segunda etapa: a característica de qualidade dos itens da sub-amostra de tamanho n_2 é medida e sua média \bar{X}_2 calculada. Seja $Z_2 = (\bar{Y} - \mu_0) / \sigma_{\bar{Y}}$ onde \bar{Y} é a média amostra mestra dada por $\bar{Y} = (n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2) / (n_1 + n_2)$ e $\sigma_{\bar{Y}}$ é o desvio padrão da amostra mestra, que é dado pela expressão 6.3, sendo $n = n_1 + n_2$

Na segunda etapa podem ocorrer dois casos:

- ✓ Se $|Z_2| < L_2$, conclui-se que a média do processo está ajustada
- ✓ If $|Z_2| > L_2$, conclui-se que a média do processo está desajustada

A Figura 6.2 é uma representação gráfica da amostragem dupla.

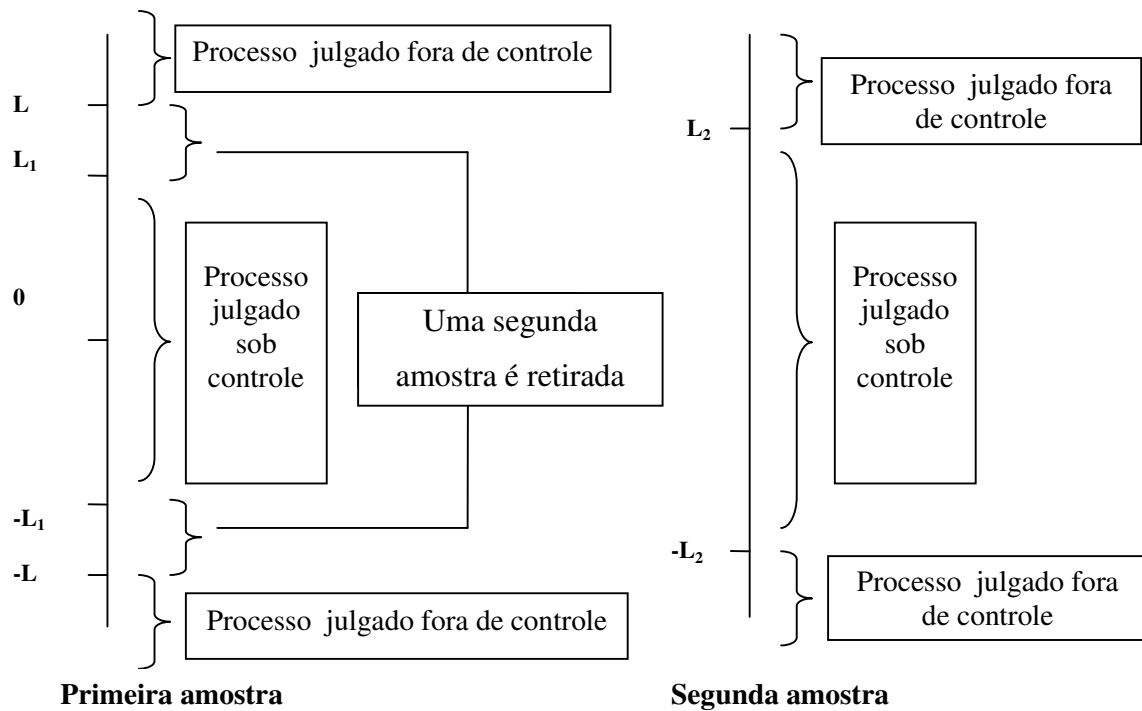


Figura 6.2. Visão gráfica do esquema de amostragem dupla (Claro e Costa, 2008)

6.3 Propriedades do Gráfico de controle de \bar{X} com amostragem dupla

De acordo com a Figura 6.2 a probabilidade de se ter que inspecionar a segunda amostra, antes de julgar o estado do processo (em controle ou fora de controle) é dado por:

$$\Pr[\bar{X}_1 \in I_2] = \Phi\left(L - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}\right) - \Phi\left(L_1 - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}\right) + \Phi\left(-L_1 - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}\right) - \Phi\left(-L - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}\right) \quad (6.5)$$

onde Φ é a função distribuição normal padrão e $\delta = \mu_1 - \mu_0 / \sigma_x$. O número médio de itens inspecionado por amostragem é dado por:

$$\bar{n} = n_1 + n_2 \Pr[\bar{X}_1 \in I_2] \quad (6.6)$$

onde

$$I_2 = [(\mu_0 - L\sigma_{\bar{x}_1}; \mu_0 - L_1\sigma_{\bar{x}_1})U(\mu_0 + L_1\sigma_{\bar{x}_1}; \mu_0 + L\sigma_{\bar{x}_1})]$$

Para o gráfico de controle de \bar{X} com amostragem dupla, o número médio de amostras até o sinal é dado por

$$NMA = 1/(1 - P) \quad (6.7)$$

onde $P = P_1 + P_2$ e P_i ($i=1,2$) é a probabilidade de julgar o processo em controle na etapa i da amostragem. As expressões de P_1 e P_2 estão no Apêndice E, elas são, respectivamente, as expressões (E12) e (E13). Quando o processo está sob controle $NMA = NMA_0$, neste caso:

$$P_2 = 1 - P_1 - (1/NMA_0) \quad (6.8)$$

O desempenho do gráfico de controle de \bar{X} com amostragem dupla depende dos parâmetros n_1 , n_2 , L , L_1 e L_2 . Em uma investigação preliminar, Claro e Costa (2008) descobriram que valores grandes de L levam a um gráfico de controle com melhor performance, isto é, quando o risco com alarme falso na primeira etapa é praticamente zero. Daudin (1992) recomenda a adoção de $L=4$ ou $L=5$; seguindo esta sugestão adotou-se $L=5$.

O coeficiente L_1 é obtido da expressão (6.6) e o coeficiente L_2 da expressão (6.8). Na expressão (E12), P_1 é uma função de L_1 , e na expressão (E13), P_2 é uma função crescente de L_2 , assim para um dado NMA_0 , é sempre possível encontrar o valor de L_2 que torna igual os dois lados da expressão (6.8).

A Figura 6.3 ilustra a perda de desempenho do gráfico de \bar{X} , pelo fato do processo ser autocorrelacionado. Em Claro e Costa (2008) é feita uma análise detalhada do efeito dos parâmetros n_1 , n_2 , L , L_1 e L_2 no desempenho do gráfico de controle.

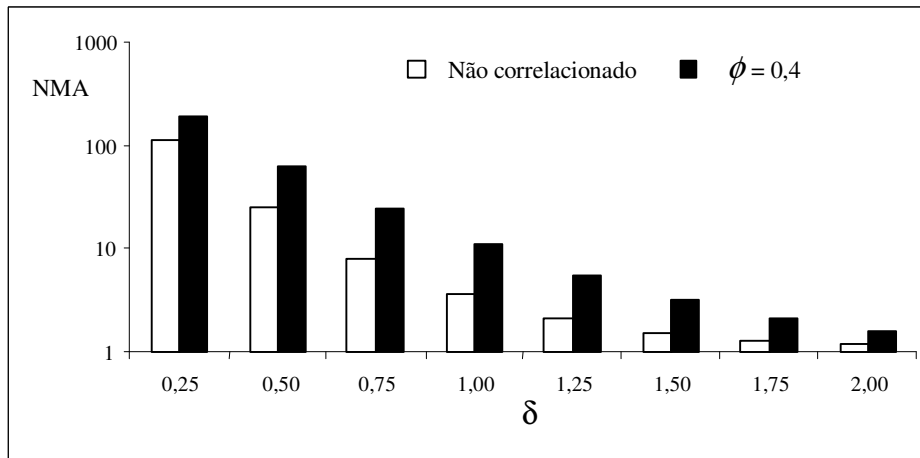


Figura 6.3. *NMA* do Gráfico de controle de \bar{X} com amostragem dupla, $NMA_0=370.4$, $n_1 = 1$, $n_2 = 6$ e $\bar{n} = 3$ (Claro e Costa, 2008)

6.4 Gráfico de controle de \bar{X} com amostras de tamanho variável para processos auto-correlacionados

O gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho variável tem limites de controle dados por $\mu_0 \pm k\sigma_{\bar{X}}$ e limites de advertência por $\mu_0 \pm k_1\sigma_{\bar{X}}$, onde $0 < k_1 < k$ e $\sigma_{\bar{X}}$ é o desvio padrão das médias amostrais. O tamanho de cada amostra depende do que é observado na amostragem precedente. Se o valor de \bar{X} cai na região central do gráfico de controle, há uma relaxação no monitoramento, pois a próxima amostragem é feita com uma amostra de tamanho n_1 , menor que a usual. Por outro lado, se o valor de \bar{X} cai na região de advertência, que separa a região central do gráfico da sua região de ação, então o monitoramento se torna mais rígido, pois a próxima amostragem é feita com uma amostra de tamanho n_2 , maior que a usual.

As propriedades do gráfico de controle de \bar{X} com amostras de tamanho variável para o modelo considerado neste capítulo foram determinadas utilizando-se as expressões

encontradas em Costa (1994), levando em conta a autocorrelação na obtenção do desvio padrão das médias amostrais. A Figura 6.4 ilustra a perda de desempenho do gráfico de \bar{X} com amostras de tamanho variável, pelo fato do processo ser autocorrelacionado. Em Claro e Costa (2008) é feita uma análise detalhada do efeito de n_1 e n_2 no desempenho do gráfico de controle.

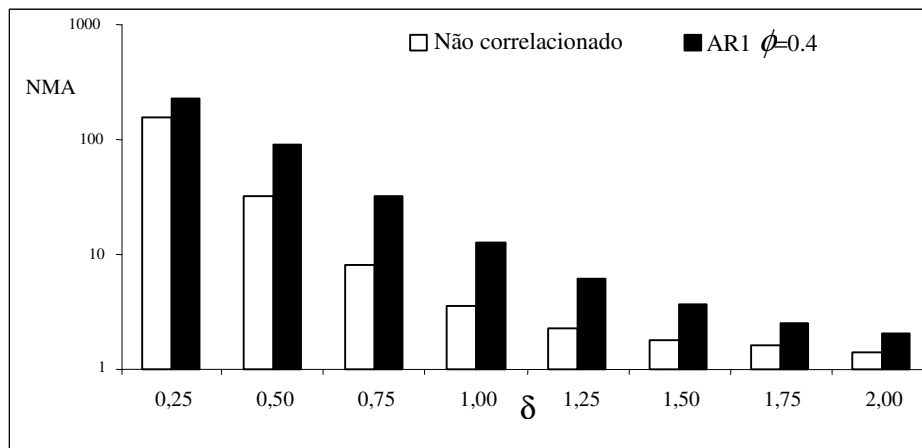


Figura 6.4. *NMA* do gráfico de controle de \bar{X} com amostras de tamanho variável $NMA_0=370.4$, $n_1=2$, $n_2=6$ e $\bar{n}=3$ (Claro e Costa, 2008)

7. Comentários

Nas últimas duas décadas, o autor dedicou-se ao estudo dos gráficos de controle. A razão principal de ter abraçado esta linha de pesquisa se deve ao fato de, após integrar o quadro de docentes da UNESP, em Regime de Dedicção Integral a Docência e a Pesquisa, passou a ser responsável pela disciplina de Controle de Qualidade. Um outro ponto importante considerado quando da escolha desta linha de pesquisa, é que o autor rapidamente percebeu que, ao menos, em um primeiro momento, pesquisas neste tema não demandavam profundo conhecimento de estatística. Embora apaixonado por ela, o autor tinha noção clara que, no início de sua carreira, não a dominava. A bem da verdade, não existe quem domine completamente todo o conhecimento da estatística, acabamos sempre enveredando para aquela parte em que temos um maior interesse. Os resultados obtidos nestes vinte anos de pesquisa estão em vários artigos publicados em diversos periódicos. No quadro 7.1 temos os periódicos que aparecem na Web of Science, os artigos publicados em cada um deles, e o número de citações. Do quadro 7.1, podemos comentar que a pesquisa do autor tem sido considerada pela comunidade científica. Os artigos publicados no Journal of Quality Technology são os mais citados. De todas as revistas em que o autor publicou, sem sombra de dúvidas, o Journal of Quality Technology (JQT) é a mais importante delas, e também a mais difícil de se conseguir publicar. Quatro dos cinco artigos publicados na JQT foram elaborados no período em que o autor morou no exterior, dedicando-se integralmente a pesquisa. No quadro 7.2 temos os periódicos que não aparecem na Web of Science.

Quadro 7.1. Revistas da Web of Science

Nome do Periódico	artigo	citações
Journal of Quality Technology	Costa (1994)	49
	Costa (1997)	44
	Costa (1999)	26
	Costa (1999a)	23
	Costa (1999b)	6
IIE Transactions	Costa (1993)	13
	Costa (1998)	19
	Epprecht, Costa e Mendes (2003)	2
Communications in Statistics	Costa (1998a)	2
Quality and Reliability Eng. International	Costa e Rahim (2000)	10
	Costa e Rahim (2004)	2
	Costa e De Magalhães (2007)	0
Inter. Journal of Production Research	Rahim e Costa (2000)	8
	Costa (2000)	3
	De Magalhães, Costa e Epprecht (2002)	7
Inter. Journal of Production Economics	De Magalhães, Epprecht e Costa (2001)	5
	Costa e De Magalhães (2005)	0
	De Magalhães, Costa e Neto (2006)	1
Journal of Applied Statistics	Claro e Costa (2008)*	
	Costa e Rahim (2001)	7
	Costa e Rahim (2004)	2
European J. of Operational Research	Costa e Rahim (2006)	0

* Em revisão

Quadro 7.2. Demais Revistas

Nome do Periódico	artigo
Quality Engineering	Epprecht e Costa (2001)
Quality Techn. and Quant. Manag.	Costa e Rahim (2006)
J. of Quality in Maintenance Eng.	Costa e Rahim (2006a)
Int. J. of Adv. Manufacturing Tech.	Costa e Claro (2008)
Brazilian J. of Oper. & Prod. Manag.	Costa e De Magalhães (2005a) Costa, De Magalhães e Epprecht (2005)
	Costa (1998)
Gestão & Produção	Padilha, Costa, Contador e Marins (2004) Costa e De Magalhães (2005b)
	Epprecht, Costa e Mendes (2005)
Pesquisa Operacional	Costa e Machado (2006) Machado e Costa (2007)*
	Epprecht, Leiras e Costa (2007)
Produção	Machado, De Magalhães e Costa (2008)* Claro, Costa e Machado (2008)*
Revista Eng. Ciênc. Aplic.	Costa (1993)

* Em revisão

Referências do Autor

- Costa, A. F. B. (1983) Um problema de otimização em controle da quantidade de trabalho acumulado em uma fila M/G/1, Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto tecnológico de Aeronáutica.
- Costa, A. F. B. (1989) O projeto econômico do gráfico de controle \bar{X} para sistemas com deterioração, Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – UNICAMP.
- Costa, A. F. B. (1993) Joint economic design of \bar{X} and R control charts for processes subject to two independent assignable causes, *IIE-Transactions* 25, p. 27-33.
- Costa, A. F. B. (1993a) Gráficos de controle com amostragem múltipla, *Revista de Engenharia e Ciências Aplicadas* 1, 79-85.
- Costa, A. F. B. (1994) \bar{X} charts with variable sample size, *Journal of Quality Technology* 26, p. 155-163.
- Costa, A. F. B. (1997) \bar{X} charts with variable sample size and sampling intervals *Journal of Quality Technology* 29, p. 197-204.
- Costa, A. F. B. (1998) Joint \bar{X} and R charts with variable parameters, *IIE Transactions* 30, p. 505-514.
- Costa, A. F. B. (1998a) Gráficos de controle \bar{X} para processos robustos, *Gestão & Produção* 5, p. 259-271.
- Costa, A. F. B. (1998b) VSSI \bar{X} charts with sampling at fixed times, *Communications in Statistics* 27, p. 2853-2869.
- Costa, A. F. B. (1999) Joint \bar{X} and R charts with variable sample sizes and sampling intervals, *Journal of Quality Technology* 31, p. 387-397.
- Costa, A. F. B. (1999a) \bar{X} charts with variable parameters, *Journal of Quality Technology* 31, pp. 408-416.
- Costa, A. F. B. (1999b) AATS for the \bar{X} Chart with variable parameters *Journal of Quality Technology* 31, p. 455-458.
- Costa, A. F. B. (2000) X charts with supplementary samples to control the mean and variance, *International Journal of Production Research* 38, p. 3801-3804.

- Costa, A. F. B. e Claro, F. A. E. (2008) Double sampling \bar{X} control chart for a first order autoregressive-moving average process model, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* (**aceito**)
- Costa, A. F. B. e De Magalhães, M. S. (2005) Economic design of two-stage \bar{X} charts: the Markov chain approach, *International Journal of Production Economics* 95, p. 9-20.
- Costa, A. F. B. e De Magalhães, M. S. (2005a) O uso da estatística de qui-quadrado no controle de processos, *Gestão & Produção* 12, p. 271-277.
- Costa, A. F. B. e De Magalhães, M. S. (2007) An adaptive chart for monitoring the process mean and variance, *Quality and Reliability Engineering-International* (**aceito**)
- Costa, A. F. B. e Machado, M. A. G. (2007) Synthetic control charts with two-stage sampling for monitoring bivariate processes, *Pesquisa Operacional* 17, p.117-130.
- Costa, A. F. B. e Rahim, A. (2000) Economic design of \bar{X} and R charts under Weibull shock models, *Quality and Reliability Engineering International* 16, p. 143-156.
- Costa, A. F. B. e Rahim, A. (2001) Economic design of \bar{X} charts with variable parameters: The Markov chain approach, *Journal of Applied Statistics* 28, p.875-885.
- Costa, A. F. B. e Rahim, M. A. (2004) Joint \bar{X} and R charts with two stage samplings, *Quality and Reliability Engineering-International* 20, p. 699-708.
- Costa, A. F. B. e Rahim, M. A. (2004a) Monitoring process mean and variability with a non-central chi-square chart, *Journal of Applied Statistics* 31, p. 1171-1183.
- Costa, A. F. B. e Rahim, M A. (2006) The non-central chi-square chart with two stage samplings, *European Journal of Operational Research*, v. 171, p. 64-73.
- Costa, A. F. B. e Rahim, M. A. (2006a) A single EWMA chart for monitoring process mean and process variance, *Quality Technology And Quantitative Management*, v. 3, p. 295-305.
- Costa, A. F. B. e Rahim, M A. (2006b) A synthetic control chart for monitoring the process mean and variance, *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 12, p. 81-88.
- Costa, A. F. B., Epprecht E. K. e Carpinetti, L. C. R. (2005) **Controles Estatísticos de Qualidade**, 2. Ed. São Paulo: Editora Atlas, 334 p.
- Costa, A. F. B, De Magalhães, M. S., e Epprecht, E. K. (2005) The non-central chi-square chart with double sampling, *Brazilian Journal of Operations and Production Management* 2, p. 57-80
- Claro, F. A. E. e Costa, A. F. B. (2008) Double sampling \bar{X} control chart for autocorrelated processes, *International Journal of Production Economics* (**em revisão**)

- Claro, F. A. E., Costa, A. F. B. e Machado, M. A. G. (2008) Gráficos de controle de EWMA e de \bar{X} para monitoramento de processos autocorrelacionados, *Produção (em revisão)*
- Epprecht, E. K. & Costa, A. F. B. (2001) Adaptive sample size control charts for attributes, *Quality Engineering* 13, p. 465-473.
- Epprecht, E. K.; Costa, A. F. B., e Mendes, F. C. T. (2003) Adaptive control charts for attributes, *IIE Transactions* 35, p. 567-582.
- Epprecht, E; Costa, A. F. B. e Mendes, F. C. T. (2005) Gráficos adaptativos de controle para atributos e seu projeto na prática, *Pesquisa Operacional* 25, p.113-134.
- De Magalhães, M. S. e Costa, A. F. B. (2005) Economic-statistical control chart design: a sensitive study, *Brazilian Journal of Operations and Production Management* 2, p. 25-38.
- De Magalhães, M. S., Epprecht, E., e Costa, A. F. B. (2001) Economic design of a $V_p \bar{X}$ chart, *International Journal of Production Economics* 74, p. 191-200.
- De Magalhães, M. S., Costa, A. F. B e Epprecht, E (2002) Constrained optimization model for the adaptive \bar{X} chart, *International Journal of Production Research* 40, p. 3199-3218.
- De Magalhães, M. S., Costa, A. F. B., e Moura Neto, F. D. (2006) Adaptive control charts: a Markovian approach for processes subject to independent out-of-control disturbances, *International Journal of Production Economics* 99, p. 236-246.
- Machado, M. A. G. e Costa, A. F. B. (2008) Some comments on the use of principal components and simultaneous univariate control charts for multivariate process control, *Pesquisa Operacional (em revisão)*.
- Machado, M. A. G., De Magalhães, M. S. e Costa, A. F. B. (2008) Gráfico de controle de VMAX para o monitoramento da matriz de covariâncias, *Produção (em revisão)*.

Demais Referências:

- Al-Sultan, K. S. e Rahim, M. A. (1997) **Optimization in Quality Control**, Kluwer.
- Alt, F. B. (1985) **Multivariate Quality Control** In: Kotz, S., Johnson, N. L., ed., *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Wiley.
- Alwan, L. C. e Radson, D. (1992) Time-series investigation of subsample mean charts, *IIE Transactions*, 24, p.66-80.
- Amin, R. W. & Miller, R. W. (1993) A robustness study of \bar{X} charts with variable sampling intervals, *Journal of Quality Technology*, 25, p.36-44.

- Aparisi, F. (1996) Hotelling's T^2 control chart with adaptive sample sizes, *International Journal of Production Research* 34, p. 2853-2862.
- Aparisi, F. e Haro, C.L. (2001) Hotelling's T^2 control chart with variable sampling intervals, *International Journal Of Production Research*, 39, p. 3127-3140.
- Aparisi, F. e Haro, C. L. (2003) A comparison of T^2 control charts with variable sampling schemes as opposed to MEWMA chart. *International Journal of Production Research*, 41, p. 2169-2182.
- Aparisi, F., Jabaloyes, J. E e Carrión, A. (1999) Statistical properties of the |S| multivariate control chart, *Communication in Statistics – Theory and Methods*, 28, p. 2671-2686.
- Aparisi, F., Jabaloyes, J. e Carrión, (2001) A generalized variance chart design with adaptive sample sizes- the bivariate case, *Communication in Statistics – Simulation and Computation*, 30, p. 931-948.
- Arnold, J. C. e Reynolds, M. R. Jr. (2001) CUSUM control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals, *Journal of Quality Technology* 33, p. 66-81.
- Atienza, O. O., Tang, L. C. e Ang, B. W. (1998) A SPC procedure for detecting level shifts of autocorrelated processes, *Journal of Quality Technology*, 30, p.340-350.
- Baxley, R. V., Jr. (1995) An application of variable sampling interval control charts, *Journal of Quality Technology* 27, p.275-282.
- Çinlar, E. (1975) **Introduction to Stochastic Process**, Prentice Halls, Englewood Cliff, NJ.
- Chen, G., Cheng, S. W. e Xie, H. (2001) Monitoring process mean and variability with one EWMA chart, *Journal of Quality Technology*, 33, p. 223-233.
- Chou, C.Y., Chen, C.H. e Chen, C.H. (2006) Economic design of variable sampling intervals T^2 control charts using genetic algorithms, *Expert Systems with Applications*, 30, p. 233-242, 2006.
- Daudin, J.J. (1992) Double sampling \bar{X} charts, *Journal of Quality Technology*, 24, p.78-87.
- Davis, R.B. e Woodall, W.H. (2002) Evaluating and Improving the Synthetic Control Chart, *Journal of Quality Technology*, 34, p. 200-208.
- De Magalhães, M. S. e Moura Neto, F. D. (2006) Joint economic model for totally adaptive \bar{X} and R charts, *European Journal of Operational Research* 161, p. 148-161
- Domangue, R.; Patch, S. C. (1991) Some omnibus exponentially weighted moving average statistical process monitoring schemes, *Technometrics*, 33, p. 299-313.
- Duncan, A. J. (1956) The economic design of \bar{X} -charts used to maintain current control of a process, *Journal of American Statistical Association*, 51, p.228-242.

- English, J.R., Lee, S. C., Martin, T.W. e Tilmon, C. (2000) Detecting changes in autoregressive processes with \bar{X} and EWMA charts, *IIE Transactions*, 32, p.1103-1113.
- Grigoryan, A. E He, D. (2005) Multivariate double sampling $|S|$ charts for controlling process variability, *International Journal of Production Research*, 43, p. 715-730.
- He, D. e Grigoryan, A. (2005) Multivariate multiple sampling charts, *IIE Transactions*, 37, p. 509-521.
- Hotelling, H. (1947) **Multivariate Quality Control**, Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights. Techniques of Statistical Analysis, p. 111-184, New York, McGraw Hill.
- Lin, Y. C. e Chou, C. Y. (2005) On the design of variable sample size and sampling intervals \bar{X} charts under non-normality, *International Journal of Production Economics* 96, p. 249-261.
- Lin, Y. C. e Chou, C. Y. (2005a) Robustness of the variable sample size and control limit \bar{X} chart to non-normality, *Communications in Statistics-Theory and Methods* 34, p.721-743.
- Lin, Y. C. e Chou, C. Y. (2007) Non-normality and the variable parameters X control charts, *European Journal Of Operational Research* 176, p.361-373.
- Lowry, C. A. & Montgomery, D. C. (1995) A Review of Multivariate Control Charts. *IIE Transactions* 27, p. 800-810.
- Machado, M. A. G. (2006) *Estudo das propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem dupla*, 129f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.
- Mason, R. L. e Young, J. C. (2002) **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**, 1st. ed. Philadelphia: ASA-SIAM.
- Microsoft FORTRAN Power Station 4.0. (1995) Professional Edition with Microsoft IMSL Mathematical and Statistical Libraries, Microsoft Corporation.
- Montgomery, D. C. (2004) **Introduction to Statistical Quality Control**, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Montgomery, D. C. e Mastrangelo, C. M. (1991) Some statistical process control methods for autocorrelated data, *Journal of Quality Technology*, 23, p.179-193.
- Park, C. e Reynolds, M. R., Jr. (1999) Economic design of a variable sampling rate \bar{X} chart, *Journal of Quality Technology*, 31, p.427-443.
- Park, C., Lee, J. e Kim, Y. (2004) Economic design of a variable sampling rate EWMA chart, *IIE Transaction* 36, p.387-399.

- Prabhu, S. S., Runger, G. C. e Keats, J. B. (1993) An adaptive sample size \bar{X} Chart, *International Journal of Production Research* 31, p. 2895-2909.
- Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. e Runger, G. C. (1994) Combined adaptive sample size and sampling interval \bar{X} control scheme, *Journal of Quality Technology* 26, p.164-176.
- Rahim, M. A. & Costa, A. F. B. (2000) Joint economic design of \bar{X} and R charts under Weibull shock models, *International Journal of Production Research* 38, p. 2871-2889.
- Reynolds, M. R. Jr. (1996) Shewhart and EWMA Variable sampling interval control charts with sampling at fixed times, *Journal of Quality Technology* 28, p.199-212.
- Reynolds, M. R. Jr. e Arnold, J. C. (2001) EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals, *IIE Transactions* 33, p. 511-530.
- Reynolds, M. R. Jr. e Stoumbos, Z.G. (2001) Monitoring the process mean and variance using individual observations and variable sampling intervals, *Journal of Quality Technology* 33, 181-205.
- Reynolds, M. R. Jr., Amin, R. W., Arnold, J. C. e Nachlas, J. A. (1988) \bar{X} charts with variable sampling intervals, *Technometrics* 30, p.181-192.
- Reynolds, M. R. Jr., Amin, R. W. e Arnold, J. C. (1990) CUSUM charts with variable sampling intervals, *Technometrics* 32, p.371-384.
- Reynolds, M. R. Jr., Arnold, J. C. e Baik, J. W. (1996) Variable sampling interval \bar{X} charts in the presence of correlation, *Journal of Quality Technology* 28, p1-28.
- Runger, G. C., e Montgomery, D. C. (1993) Adaptive sampling enhancements for Shewhart control charts, *IIE Transactions* 25, p.41-51.
- Runger, G. C., e Pignatiello, J. J., Jr. (1991) Adaptive sampling for process control, *Journal of Quality Technology* 23, p.135-155.
- Runger, C. G. e Willemain, T. R. (1995) Model-based and Model-Free control of autocorrelated process, *Journal of Quality Technology*, 27, p.283-292.
- Runger, C. G. e Willemain, T. R. (1996) Batch-means control charts for autocorrelated data, *IIE Transactions*, 28, p.483-487.
- Saccucci, M. S. and Lucas, J. M. (1990) Average run length for exponentially weighted moving average control schemes using the Markov chain approach, *Journal of Quality Technology*, 22, p. 154-162.

- Saccucci, M. S., Amin, R. W. e Lucas, J. M. (1992) Exponentially weighted moving average control schemes with variable sampling intervals, *Communications in Statistics- Simulation and Computation* 21, p.627-657.
- Saniga, E. M. (1977) Joint economically optimal design of \bar{X} and R control charts, *Management Science* 24, p.420-431.
- Saniga, E. M. (1979) Joint economic design of \bar{X} and R control charts with alternative process models, *AIIE Transactions* 11, p.254-260.
- Saniga, E. M. and Montgomery, D. C. (1981) Economical quality control policies for a single cause system, *AIIE Transactions* 13, p.258-264.
- Surtihadi, J., Raghavachari, M. e Runger, G. (2004) Multivariate control charts for process dispersion, *International Journal of Production Research*, 42, p. 2993-3009.
- Tagaras, G. (1998) A survey of recent development in the design of adaptive control charts, *Journal of Quality Technology* 30, p.212-231.
- Timmer, D.H., Pignatiello Jr., J. J. e Longnecker, M.T. (2000) Applying an AR (1) CUSUM control chart to data from a chemical process, *Quality Engineering*, 13, p.107-114.
- Vander Wiel, S.A. (1996) Monitoring processes that wander using integrated moving average models, *Technometrics* 38, p.139-151.
- Vasilopoulos, A.V. e Stamboulis, A. P. (1978) Modification of control charts limits in the presence of data correlation, *Journal of Quality Technology*, 10, p.20-30.
- Woodall, W. H. (1986) Weakness of the economic design of control charts, *Technometrics* 28, p.408-409.
- Yeh, A. B., Lin, D. K. J. e McGrath, R. N. (2006) Multivariate control charts for monitoring covariance matrix: a review, *Quality Technology and Quantitative Management*, 3, p. 415-436.

Apêndice B: Prova do Teorema B1

Teorema B1: As funções $g_1(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{y})$ e $g_2(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{y})$ tem distribuição normal com o vetor de médias sendo um vetor de zeros e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prova: As funções $g_1(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{y})$ e $g_2(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{y})$ são normais pois elas são combinações lineares de variáveis normais x_i e y_i . Além disso,

$$E(\bar{x} - \mu_x)^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}, \quad E(\bar{y} - \mu_y)^2 = \frac{\sigma_y^2}{n}, \quad E(\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y) = \frac{\sigma_{xy}}{n}$$

Após alguns cálculos obtemos

$$E[g_1(n, \boldsymbol{\mu})]^2 = \frac{n}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \left[\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{n} - \frac{2}{n} \sigma_x \sigma_y \sigma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \right].$$

Pela simetria com respeito aos índices x e y , segue que:

$$E[g_1(n, \boldsymbol{\mu})]^2 = E[g_2(n, \boldsymbol{\mu})]^2 = \frac{n}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \left[\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{n} - \frac{1}{n} \sigma_x \sigma_y \sigma_{xy} \sin 2\varphi \right]$$

Como $\sin 2\varphi = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$ e $|\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2$, segue que:

$$E[g_1(n, \boldsymbol{\mu})]^2 = E[g_2(n, \boldsymbol{\mu})]^2 = \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \left[\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 \right] = 1$$

Similarmente,

$$E[g_1(n, \boldsymbol{\mu})g_2(n, \boldsymbol{\mu})] = \frac{n}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \left[\frac{\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}}{n} - \frac{1}{n} \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sin 2\varphi \right] = \frac{\sigma_x \sigma_y}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \left[\sigma_{xy} - \sigma_x \sigma_y \sin 2\varphi \right] = 0$$

O Teorema B1 está provado.

Apêndice C: Obtenção do NMA para o Gráfico de VMAX

Considere as estatísticas $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x)^2}{n}$ e $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_y)^2}{n}$, onde $x_i = X_i - \mu_x$, $y_i = Y_i - \mu_y$ e X e Y são duas características de qualidade que seguem uma distribuição normal bivariada. O poder do gráfico de VMAX é dado por:

$$p = 1 - \Pr\left[\left(S_x^2 < LC\sigma_{0x}^2\right) \cap \left(S_y^2 < LC\sigma_{0y}^2\right)\right],$$

onde LC é o fator de abertura dos limites de controle. Portanto,

$$NMA = \frac{1}{1 - \Pr\left[\left(S_x^2 < LC\sigma_{0x}^2\right) \cap \left(S_y^2 < LC\sigma_{0y}^2\right)\right]}.$$

Sem perda de generalidade, supõe-se que com o processo em controle a matriz de covariâncias é dada por $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & 1 \end{pmatrix}$, ou seja, $\sigma_{0x} = \sigma_{0y} = 1$. A ocorrência da causa especial altera a matriz de covariâncias inicial para $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \cdot \sigma_{xy} \\ a \cdot b \cdot \sigma_{yx} & b \cdot b \end{pmatrix}$, sendo $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \rho$. Para o caso I $a = c$ e $b = 1$ (ou $b = c$ e $a = 1$) e para o caso II $a = b = \sqrt{c}$. Se X e Y são normalmente distribuídos,

$$\frac{nS_x^2}{a^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

e

$$\frac{y_i | x_i}{b\sqrt{1-\rho^2}} \sim N\left(\frac{\rho x_i}{a\sqrt{1-\rho^2}}, 1\right).$$

Conseqüentemente,

$$\frac{nS_y^2 | x_1, x_2, \dots, x_n}{b^2(1-\rho^2)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i | x_i}{b\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2 \sim \chi_{n,(\rho^2/1-\rho^2)}^2$$

e

$$p = 1 - \int_0^{nLC/a^2} \Pr\left[\chi_{n,(\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{nLC}{b^2(1-\rho^2)}\right] \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt. \quad (C1)$$

O limite de controle, LC , é obtido pela expressão (C1), fazendo $a=b=1$ e $p=\alpha$. Utilizou-se a sub-rotina CSNDF da biblioteca IMSL *FORTRAN* (1995) para o cálculo da função de distribuição de qui-quadrado não-central.

Apêndice D: Obtenção do NMA para o Gráfico de VMAX com Amostragem Dupla

Sejam as variâncias amostrais $S_{1x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_x)^2}{n_1}$, $S_{1y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (Y_i - \mu_y)^2}{n_1}$,
 $S_{2x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x)^2}{n}$ e $S_{2y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_y)^2}{n}$, onde $x_i = X_i - \mu_x$, $y_i = Y_i - \mu_y$ e X e Y são duas características de qualidade que seguem uma distribuição normal bivariada.

De acordo com o Apêndice C, a probabilidade p_1 do gráfico de controle sinalizar um desajuste do processo após a inspeção da amostra de tamanho n_1 é dada por:

$$p_1 = 1 - \Pr\left[\left(S_{1x}^2 < LC_1\right) \cap \left(S_{1y}^2 < LC_1\right)\right],$$

$$p_1 = 1 - \int_0^{n_1 LC_1 / a^2} \Pr\left[\chi_{n_1, t_1}^2(\rho^2 / (1 - \rho^2)) < \frac{n_1 LC_1}{b^2 (1 - \rho^2)}\right] f(t_1) dt_1. \quad (D1)$$

O limite de controle do primeiro estágio, LC_1 , é obtido pela expressão (D1), fazendo $p_1 = \alpha_1$ e $a = b = 1$.

A probabilidade p_s , da amostragem ser interrompida no primeiro estágio, é dada por:

$$p_s = p_1 + \int_0^{n_1 LA / a^2} \Pr\left[\chi_{n_1, t_1}^2(\rho^2 / (1 - \rho^2)) < \frac{n_1 LA}{b^2 (1 - \rho^2)}\right] f(t_1) dt_1. \quad (D2)$$

O limite de advertência, LA , é obtido pela expressão (D2), fazendo $p_s = p_0$, $p_1 = \alpha_1$ e $a = b = 1$. O valor de α_1 é especificado pelo usuário e o valor de p_0 é função de n_1 , n_2 e \bar{n} (ver expressão (5.14)), que também devem ser fornecidos pelo usuário.

A probabilidade p_2 , do gráfico de controle sinalizar um desajuste após a inspeção dos $n_1 + n_2$ itens da amostra, é dada por:

$$p_2 = 1 - (p_{2a} + p_{2b}) \quad (D3)$$

onde

$$p_{2a} = \Pr\left[\left(S_{2x}^2 < LC_2\right) \cap \left(S_{2y}^2 < LC_2\right) \mid \left(S_{1x}^2 < LA\right) \cap \left(LA < S_{1y}^2 < LC_1\right)\right] \cdot \Pr\left[\left(S_{1x}^2 < LA\right) \cap \left(LA < S_{1y}^2 < LC_1\right)\right]$$

$$= \int_0^{n_1 LA/a^2} \int_0^{n LC_2/a^2 - t_1} \Pr \left[\chi_{n, (t_1+t_2)(\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{n LC_2}{b^2(1-\rho^2)} \mid \frac{n_1 LA}{b^2(1-\rho^2)} < \chi_{n_1, t_1(\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{n_1 LC_1}{b^2(1-\rho^2)} \right] \cdot \\ \Pr \left[\frac{n_1 LA}{b^2(1-\rho^2)} < \chi_{n_1, t_1(\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{n_1 LC_1}{b^2(1-\rho^2)} \right] f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2$$

e

$$p_{2b} = \Pr \left[(S_{2x}^2 < LC_2) \cap (S_{2y}^2 < LC_2) \mid (LA < S_{1x}^2 < LC_1) \cap (S_{1y}^2 < LC_1) \right] \cdot \Pr \left[(LA < S_{1x}^2 < LC_1) \cap (S_{1y}^2 < LC_1) \right]$$

$$p_{2b} = \int_{n_1 LA/a^2}^{n_1 LC_1/a^2} \int_0^{n LC_2/a^2 - t_1} \Pr \left[\chi_{n, (t_1+t_2)(\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{n LC_2}{b^2(1-\rho^2)} \mid \chi_{n_1, t_1(\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{n_1 LC_1}{b^2(1-\rho^2)} \right] \cdot \\ \Pr \left[\chi_{n_1, t_1(\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{n_1 LC_1}{b^2(1-\rho^2)} \right] f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2$$

$$\text{com } f(t_i) = \frac{1}{2^{n_i/2} \Gamma(n_i/2)} e^{-t_i/2} t_i^{(n_i/2)-1} \quad i = 1, 2.$$

O limite de controle do segundo estágio, LC_2 , é obtido pela expressão (D3), fazendo $a = b = 1$ e $p_2 = \alpha_2$. O valor de α_2 é especificado pelo usuário.

O poder do gráfico de VMAX com amostragem dupla é dado por:

$$p = p_1 + p_2. \quad (D4)$$

Portanto, $NMA = 1/p$.

Para a obtenção do risco α do gráfico de VMAX com amostragem dupla basta fazer $a = b = 1$ nas expressões de p_1 e p_2 . Então, $\alpha = p_1 + p_2$.

Apêndice A: Obtenção do TES para o gráfico de \bar{X} com parâmetros variáveis

Para a obtenção da expressão do tempo esperado entre o instante em que o processo se desajusta e o instante em que o gráfico de controle sinaliza tal desajuste, TES , considere que a posição do ponto amostral gera um dos seguintes sinais;

Sinal verde: quando um ponto é plotado na região central do gráfico,

Sinal amarelo: quando um ponto é plotado na região de advertência do gráfico,

Sinal vermelho: quando um ponto é plotado na região de ação do gráfico.

Se M_1 é o número de sinais verdes que antecedem ao sinal vermelho, então M_1 tem distribuição geométrica com parâmetro $1 - p_1$, onde p_1 é a probabilidade condicional de se obter um novo sinal verde dado que o sinal atual é verde

$$p_1 = p_{11} + p_{12} \sum_{i=1}^{\infty} p_{22}^{i-1} p_{21},$$

onde

$$p_{11} = \Pr[|y| < w_1 \mid y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1)]$$

$$p_{12} = \Pr[w_1 < |y| < k_1 \mid y \sim N(\delta\sqrt{n_1}, 1)]$$

$$p_{22} = \Pr[w_2 < |y| < k_2 \mid y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1)]$$

e

$$p_{21} = \Pr[|y| < w_2 \mid y \sim N(\delta\sqrt{n_2}, 1)]$$

Portanto,

$$E(M_1) = \frac{1 - p_{22}}{Q}$$

com $Q=1-p_{11} - p_{22} + p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}$.

O tempo do início do processo até o primeiro sinal vermelho é dado por

$$T_1 = \sum_{i=1}^{M_1} L_i$$

As variáveis L_i são independentes, identicamente distribuídas e correspondem ao intervalo de tempo Y_1 até um sinal vermelho ou outro sinal verde, dado que o sinal atual é verde

$$\begin{aligned} \Pr[Y_1 = h_1] &= 1 - p_{12}, \\ \Pr[Y_1 = h_1 + ih_2] &= p_{12}p_{22}^{i-1}(1 - p_{22}), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e

$$E(Y_1) = h_1 + h_2 p_{12} / (1 - p_{22}).$$

Se a primeira amostra for de tamanho n_1

$$\begin{aligned} E(T_1) &= E(M_1)E(Y_1) \\ &= [h_1(1 - p_{22}) + h_2 p_{12}] / Q, \end{aligned}$$

Seja $C_1 = Y_1 - h_1$, então $V(C_1) = V(Y_1)$ e $E(C_1^2) = h_2^2 p_{12} E(D^2)$ onde D tem distribuição geométrica de parâmetro $1 - p_{22}$,

$$\begin{aligned} V(Y_1) &= E(C_1^2) - [E(C_1)]^2 \\ &= h_2^2 [p_{12}(1 + p_{22}) - p_{12}^2] / (1 - p_{22})^2. \end{aligned}$$

Usando a propriedade $V(T_1) = E(M_1)V(Y_1) + V(M_1)[E(Y_1)]^2$, segue que

$$\begin{aligned} V(T_1) &= h_2^2 [p_{12}(1 - p_{12}) + p_{12}p_{22}] / Q(1 - p_{22}) + \\ &+ [(1 - p_{22} - Q)(1 - p_{22})][h_1 + h_2 p_{12} / (1 - p_{22})]^2 / Q^2. \end{aligned}$$

Quando a primeira amostra for de tamanho n_2 , o tempo do início do processo até o primeiro sinal vermelho será obtido considerando o número de sinais amarelos M_2 antes de um sinal vermelho. M_2 tem distribuição geométrica de parâmetro $1 - p_2$, onde p_2 é a probabilidade condicional de se obter um novo sinal amarelo dado que o atual sinal é amarelo

$$p_2 = p_{22} + p_{21} \sum_{i=1}^{\infty} p_{11}^{i-1} p_{12}.$$

O tempo do início do processo até o primeiro sinal vermelho é dado por

$$T_2 = \sum_{i=1}^{M_2} O_i.$$

As variáveis O_i são independentes, identicamente distribuídas e correspondem ao intervalo de tempo Y_2 até um sinal vermelho ou outro sinal amarelo, dado que o sinal atual é amarelo

$$\Pr[Y_2 = h_2] = 1 - p_{21},$$

$$\Pr[Y_2 = h_2 + ih_1] = p_{21}p_{11}^{i-1}(1 - p_{11}), \quad i = 1, 2, \dots$$

e

$$E(Y_2) = h_2 + h_1 p_{21} / (1 - p_{11}).$$

Se a primeira amostra for de tamanho n_2

$$\begin{aligned} E(T_2) &= E(M_2)E(Y_2) \\ &= [h_2(1 - p_{11}) + h_1 p_{21}] / Q, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V(T_2) &= E(M_2)V(Y_2) + V(M_2)[E(Y_2)]^2 \\ &= h_1^2 [p_{21}(1 - p_{21}) + p_{21}p_{11}] / Q(1 - p_{11}) + \\ &\quad + [(1 - p_{11} - Q)(1 - p_{11})][h_2 + h_1 p_{21} / (1 - p_{11})]^2 / Q^2. \end{aligned}$$

Com o processo ajustado, o tempo esperado até o alarme, TES_0 , será dado por:

$$TES_0 = E(T_1)p_0 + E(T_2)(1 - p_0)$$

sendo p_0 a probabilidade da primeira amostra ser pequena e $1 - p_0$ de ser grande.

Para se obter o TES , seja A o tamanho do intervalo de tempo entre amostragens no qual o processo se desajustou, R o tempo entre o instante em que o processo se desajusta e a

retirada da primeira amostra após tal desajuste, S o intervalo de tempo entre a retirada da primeira amostra após o desajuste e o sinal vermelho.

$$TES = E(R) + E(S).$$

A probabilidade do processo se desajustar em um intervalo entre amostragens é proporcional ao produto do tamanho deste intervalo pela probabilidade de sua ocorrência (Reynolds et al. (1988));

$$\Pr[A = h_1] = p_0 h_1 / [p_0 h_1 + (1 - p_0) h_2], \quad (\text{A1})$$

e

$$\Pr[A = h_2] = (1 - p_0) h_1 / [p_0 h_1 + (1 - p_0) h_2], \quad (\text{A2})$$

Considerando uniforme a distribuição do tempo entre o desajuste do processo e a amostral subsequente;

$$E(R|A = h_i) = h_i/2, \quad i = 1, 2. \quad (\text{A3})$$

De (A1), (A2) e (A3) segue que

$$E(R) = \frac{[p_0 h_1^2 + (1 - p_0) h_2^2]}{2[p_0 h_1 + (1 - p_0) h_2]}.$$

O valor esperado de S depende da cor do primeiro sinal após a mudança (B). A probabilidade de ser verde ($B=B_1$), amarelo ($B=B_2$) ou vermelho ($B=B_3$) depende do comprimento do intervalo no qual se dá o desajuste;

$$\begin{aligned}\Pr[B = B_1] &= \Pr[B = B_1|A = h_1]\Pr[A=h_1] + \Pr[B = B_1|A = h_2]\Pr[A = h_2] \\ &= p_{11}\Pr[A=h_1] + p_{21}\Pr[A = h_2],\end{aligned}$$

$$\Pr[B = B_2] = p_{12}\Pr[A=h_1] + p_{22}\Pr[A=h_2],$$

e

$$\Pr[B = B_3] = (1-p_{11} - p_{12})\Pr[A = h_1] + (1-p_{21} - p_{22})\Pr[A = h_2].$$

Quando o primeiro sinal após a mudança é verde $S=T_1$. Quando esse sinal é amarelo

$S=T_2$. Portanto,

$$E(S) = \Pr[B = B_1]E(T_1) + \Pr[B = B_2]E(T_2).$$

Como R e S não são independentes, a expressão apropriada da variância de TS é;

$$\begin{aligned}V(TS) &= E_{A \cap B}[V(TS|A \cap B)] + V_{A \cap B}[E(TS|A \cap B)] \\ &= E(T_1^2)\Pr[B = B_1] + E(T_2^2)\Pr[B = B_2] - E(TS)^2 + \\ &\quad + [h_1^2/3 + E(T_1)h_1p_{11} + E(T_2)h_1p_{12}]\Pr[A = h_1] + \\ &\quad + [h_2^2/3 + E(T_1)h_2p_{21} + E(T_2)h_2p_{22}]\Pr[A = h_2].\end{aligned}$$

Apêndice E: Expressões de p_1 e p_2 para o gráfico de \bar{X} com amostragem dupla para processos autocorrelacionados

As observações X_t para um processo auto-regressivo de primeira ordem AR(1), expressão (6.1), são dadas por $X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$, $t=1, 2, 3, \dots, T$; onde ϕ é o coeficiente auto-regressivo $|\phi| < 1$, μ é a média do processo e ε_t é o ruído branco, i.i.d., $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$. A variância das observações consecutivas de X_t é dada por $\sigma_x^2 = \sigma_\varepsilon^2(1 - \phi^2)^{-1}$. Sem perda de generalidade, nós consideramos $\mu = \mu_0 = 0$ e $\sigma_\varepsilon = 1$ quando o processo está isento de causa especiais.

Com base na amostragem dupla, uma amostra mestra de tamanho n , que contém observações seqüenciais do processo, pode ser dividida em duas amostras de tamanhos n_1 e n_2 , com $n = n_1 + n_2$. O intervalo de tempo entre retirada de amostras mestras é suficientemente longo para tornar o efeito da autocorrelação entre tais amostras desprezível.

A média da primeira amostra n_1 é dada por:

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1} = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} \sum_{i=1}^t \phi^{t-i} \omega_i}{n_1} \quad (\text{E1})$$

onde: $\omega_i \begin{cases} = x_1 & \text{quando } t = 1 \\ = \varepsilon_i & \text{quando } t > 1 \end{cases}$

E, segundo Vasilopoulos e Stamboulis (1978), o desvio padrão $\sigma_{\bar{X}_1}$

$$\sigma_{\bar{X}_1} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{2\sigma_x^2}{n_1^2} \left\{ \frac{\phi^{n_1+1} - n_1\phi^2 + (n_1 - 1)\phi}{(\phi - 1)^2} \right\}} \quad (\text{E2})$$

Dada a estrutura fixa de correlação dentro dos subgrupos, a expressão da segunda media amostral (\bar{X}_2) é constituída de duas parcelas, $X_{i,k}$ e $X_{i,u}$, respectivamente dos termos conhecidos e desconhecidos (valores de ε_t) após a análise da primeira amostra,

$$\bar{X}_2 = \frac{\left(\sum_{i=n_1+1}^n X_{i,k} + \sum_{i=n_1+1}^n X_{i,u} \right)}{n_2} \quad (\text{E3})$$

onde:

$$X_{i,k} = \sum_{t=1}^{n_1} \phi^{i-t} \omega_t \quad i = n_1 + 1, \dots, n \quad (\text{E4})$$

e

$$X_{i,u} = \sum_{t=n_1+1}^i \phi^{i-t} \omega_t \quad i = n_1 + 1, \dots, n \quad (\text{E5})$$

$$\text{onde: } \omega_t \begin{cases} = x_1 \text{ quando } t = 1 \\ = \varepsilon_t \text{ quando } t > 1 \end{cases}$$

A media amostral combinada (\bar{Y}) é dada por:

$$\bar{Y} = \frac{n_1}{n} \bar{X}_1 + \frac{n_2}{n} \bar{X}_2 \quad (\text{E6})$$

Assim:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^{n_1} \sum_{i=1}^t \phi^{t-i} \omega_i + \sum_{i=n_1+1}^n X_{i,k} \right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=n_1+1}^n X_{i,u} \right) \\ \therefore \bar{Y} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^{n_1} \sum_{i=1}^t \phi^{t-i} \omega_i + \sum_{i=n_1+1}^n \sum_{t=1}^{n_1} \phi^{i-t} \omega_t \right) + \frac{n_2}{n} \left(\frac{\sum_{i=n_1+1}^n \sum_{t=n_1+1}^i \phi^{i-t} \omega_t}{n_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{E7})$$

e finalmente

$$\bar{Y} = \Delta + \frac{n_2}{n} \bar{X}_2^* \quad (\text{E8})$$

onde:

$$\Delta = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{t=1}^{n-i+1} \phi^{t-1} \omega_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} B_i \omega_i \quad (\text{E9})$$

$$\text{com } B_i = \sum_{t=1}^{n-i+1} \phi^{t-1} \quad \text{e } \sigma_{\Delta} = \sqrt{\frac{B_1^2}{1-\phi^2} + B_2^2 + \dots + B_{n_1}^2}$$

A variável \bar{X}_2^* introduzida em (E8) é dada por:

$$\bar{X}_2^* = \frac{\sum_{t=n_1+1}^n \sum_{i=t}^n \phi^{i-t} \omega_i}{n_2} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} C_j \varepsilon_{n_1+j}}{n_2} \quad (\text{E10})$$

$$\text{onde: } C_j = \sum_{i=n_1+j}^n \phi^{i-(n_1+j)} \quad j=1,2,3,\dots,n_2$$

e a variância:

$$\sigma_{\bar{X}_2^*}^2 = \sum_{i=1}^{n_2} C_i^2 \quad (\text{E11})$$

Da amostragem dupla, tem-se que:

$$P_1 = \Pr[\bar{X}_1 \in I_1] = \Pr[-L_1 \sigma_{\bar{X}_1} - \delta < \bar{X}_1 < L_1 \sigma_{\bar{X}_1} - \delta]$$

Que pode ser escrita como:

$$P_1 = \Pr\left[-L_1 - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}} < Z < L_1 - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}\right] \quad (\text{E12})$$

$$\text{onde: } \delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$$

A probabilidade P_2 é dada por:

$$P_2 = \Pr\left[\left(\bar{Y} \in I_4\right) \cap \left(\bar{X}_1 \in I_2\right)\right]$$

E pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
P_2 = & \int_{L_1 - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}}^{L_1 - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}} \left\{ \Phi \left(\frac{n}{n_2} \right) \left(\frac{L_2 \sigma_{\bar{Y}} - \Delta - \delta}{\sigma_{\bar{X}_2}^*} \right) - \Phi \left(\frac{n}{n_2} \right) \left(\frac{-L_2 \sigma_{\bar{Y}} - \Delta - \delta}{\sigma_{\bar{X}_2}^*} \right) \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \\
& \int_{L_1 - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}}^{L_1 - \frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}_1}}} \left\{ \Phi \left(\frac{n}{n_2} \right) \left(\frac{L_2 \sigma_{\bar{Y}} - \Delta - \delta}{\sigma_{\bar{X}_2}^*} \right) - \Phi \left(\frac{n}{n_2} \right) \left(\frac{-L_2 \sigma_{\bar{Y}} - \Delta - \delta}{\sigma_{\bar{X}_2}^*} \right) \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (E13)
\end{aligned}$$

onde Φ é a função distribuição normal padrão e $\sigma_{\bar{Y}}$ é dada por (E2) substituindo n_1 por n .