



Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática

Experiencing Manipulative Material for the Teaching and Learning of Mathematics

Claudemir Murari*

Resumo

Este trabalho, resultado de pesquisas e experiências em salas de aula, trata de possibilidades do uso integrado de espelhos, caleidoscópios, materiais manipulativos e softwares de geometria dinâmica em estudos das geometrias euclidiana e não-euclidiana.

Palavras-chave: Espelhos. Caleidoscópios. Materiais manipulativos. Softwares de geometria dinâmica.

Abstract

This paper presents some outcomes from research based on classroom experiences. The main themes are the use of mirrors, kaleidoscopes, dynamic geometry software, and manipulative material considering their possibilities for the teaching and learning of Euclidean and non-Euclidean geometries.

Keywords: Mirrors. Kaleidoscopes. Manipulative material. Software of dynamic geometry.

* Livre Docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, SP, Brasil. Endereço para correspondência: UNESP - Depto.de Matemática, Av. 24-A, nº1515, Bela Vista, CEP: 13506-900, Rio Claro, SP, Brasil. *E-mail:* claudemirmurari@hotmail.com.

1 Introdução

O cerne deste trabalho, construído pela prática profissional vivenciada e baseado na produção sistemática de pesquisas sobre o assunto, se refere à reflexão sobre a ação pedagógica, uma necessidade emergente de novas compreensões do processo ensino e aprendizagem, muitas vezes implicando em mudança da prática do professor, e um exame cuidadoso de conceitos e objetivos do processo educacional e instrucional, em virtude de novas exigências sociais ou de políticas públicas.

As obras de Schön (1983, 1987), reputadas como um marco para a construção de uma nova epistemologia da prática do professor, *o professor reflexivo*, abriram espaços para que as contribuições de outros pesquisadores como Nóvoa (1992) e Shulman (1996), dentre outros, afluissem para a sistematização das relações, a compreensão dos vínculos e a avaliação dos resultados e das aplicações, apesar de, muitas vezes, essas pesquisas terem um embasamento sustentado por metodologias e teorias múltiplas.

Na profissão de educador os desafios se apresentam continuamente, os quais podem derivar da sua educação prévia, dos alunos, colegas, diretores, publicações e, até mesmo, do governo. O modo de proceder dos educadores ante tais desafios vai depender do grau de envolvimento dos mesmos na sua vida profissional. Desse modo, o professor sofre, certamente, pressão para se transformar, com o fim de melhor atender às necessidades dos alunos e da sociedade.

O fracasso escolar na disciplina Matemática, revelado por indicadores externos (Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)) e pelos internos, produzidos nas escolas, ocasiona uma enorme pressão para que sejam implementadas inovações educacionais, importantes para o desenvolvimento profissional do professor e para diminuição do insucesso dos alunos. Nesse sentido, é preciso conceber o professor como um pesquisador no ambiente escolar, aquele que reflete continuamente sobre sua própria prática e que se transforma a partir daí (SCHÖN, 1995).

Perez (1999, 2002) concordando com Schön, reforça trabalhos de outros pesquisadores (NÓVOA, 1992; ZEICHNER, 1993), apresentando o professor-pesquisador como um profissional prático-reflexivo que: (a) reflete durante sua ação em sala de aula; (b) reflete sobre a ação que foi desenvolvida em classe;

(c) reflete, coletivamente, sobre a reflexão na ação.

É o processo que leva o profissional a progredir no seu desenvolvimento profissional (formação continuada) e a construir sua forma pessoal de conhecer, ajudando a determinar ações futuras, compreender futuros problemas ou descobrir novas soluções.

Contudo, aprender a ensinar de maneiras diferentes pode não ser tão simples para os professores. A mudança em sua prática é um processo que exige mudanças de comportamento como, por exemplo, ser de novo aprendiz, desenvolver novas compreensões dos conteúdos ensinados e estar engajado em um grupo de pessoas que tenham, também, o objetivo de repensar ou mudar suas práticas. Desse modo, ao aproveitar circunstâncias adequadas e favoráveis para aprender a ensinar de uma nova maneira, poderá observar tais experiências e perceber as implicações que resultam dessa aprendizagem, bem como avaliar continuamente e criticamente sua prática.

Assim, a experimentação de novas práticas pode depender de condições pessoais, interpessoais, organizacionais e até mesmo contextuais. Entretanto, é bem possível que não se concretizem todas as condições favoráveis que contribuam para o estabelecimento de uma postura do professor, cabendo a ele tomar a iniciativa de exercitar novas práticas, e, talvez, fazer a mesma coisa, porém *de um modo diferente*, tomando o cuidado de aplicar metodologias apropriadas a cada situação.

2 O computador chega à sala de aula

A sociedade moderna vem sofrendo grandes transformações, especialmente nos sistemas de informação e comunicação, exigindo competências para analisar, compreender e interpretar as novas informações. A disseminação da tecnologia informática fez com que ela se propagasse até a escola, e a utilização crescente das Tecnologias da Informação e Comunicação no sistema educacional tem produzido e exigido novos comportamentos e novas ações humanas para enfrentamento das mudanças que vêm dinamizando o ambiente educacional, pois

[...] os computadores na sala de aula freqüentemente quebram as rotinas tradicionais e permitem aos professores estabelecerem novos padrões e, algumas vezes, os próprios softwares trazem o “germe de novas práticas”. (OLSON, 1988 apud PENTEADO, 1999, p.306).

Desse modo, o modelo tradicional de ensino perde espaço com a implementação das novas tecnologias da informação e da comunicação como recursos didáticos, visando ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem das ciências na direção de uma aprendizagem mais significativa. Mudanças ocorreram em várias dimensões visto que

[...] O desenvolvimento tecnológico proporciona uma nova dimensão ao processo educacional, a qual transcende os paradigmas ultrapassados do ensino tradicional, [...] Esta nova dimensão prioriza um novo conhecimento que considera o desenvolvimento do pensamento criativo como uma dimensão fundamental da cognição humana. Os educadores devem estar abertos a essas novas formas do saber, novas maneiras de gerar e dominar o conhecimento, novas formas de produção e apropriação do saber científico [...] (MISKULIN, 2006, p.154).

As potencialidades educativas das tecnologias de informação, das quais se destacam as possibilidades de representações múltiplas, geram compreensões matemáticas mais abrangentes e completas (BORBA, 1995, VILLAREAL, 1999). Não há unanimidade entre os matemáticos e educadores matemáticos, mas existe concordância entre muitos pesquisadores quanto às contribuições significativas para a aprendizagem que um ambiente informatizado pode proporcionar. Muitos professores até relutam em fazer uso do computador, mas para Borba e Penteadó, (2001, p.15) “o computador pode ser um problema a mais na vida já atribulada do professor, mas pode também desencadear o surgimento de novas possibilidades para o seu desenvolvimento como um profissional da educação”.

Na produção de objetos geométricos através de softwares de geometria dinâmica é possível efetuar explorações experimentais e teóricas, o que favorece elaborar e testar as conjecturas, além do que se pode dar um dinamismo às construções com os recursos do arrastar, movimentar e animar. Assim, mostram-se diferentes possibilidades de visualização das construções, que é um aspecto importante na formação dos conceitos. Em razão desses resultados práticos, temos utilizado vários softwares de geometria dinâmica em nossas pesquisas, como por exemplo, *Geometricks*, *Cabri-Géomètre II*, *Cinderella*, *iGeom*, *GeoGebra*, *Cabri-Géomètre II (menu hiperbólico)* *Kali* e *Tess*.

3 Materiais manipulativos para apreensão de conceitos de geometria

O uso de materiais manipuláveis no ensino “foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi¹, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações” (NACARATO, 2005, p.1). A autora declara, ainda, que no Brasil, na década de 1920, surgiram as recomendações para utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática. Depois disso, manifestaram-se várias tendências; por exemplo, a empírico-ativista (métodos de ensino pautados em atividades que contemplavam a ação, a manipulação e a experimentação), que não se desenvolveu devido, principalmente, ao despreparo dos professores da época. Além desse movimento denominado Escola Nova (quando o aluno deveria *aprender fazendo*), relativamente ao tema sobre o qual se discorre trazemos à memória o Movimento da Matemática Moderna (década de 1970), quando começou uma grande produção e divulgação de novos materiais didáticos para o ensino da Matemática, enquanto a incorporação dos recursos representados por calculadoras e computadores ocorreu somente a partir de 1990.

No entanto, há de se ter um olhar circunspecto para que a utilização de materiais manipulativos proporcione um resultado eficaz no processo de ensino e aprendizagem. É necessário ter uma visão crítica sobre a utilização de materiais manipulativos nas aulas de geometria, buscando estimular uma contínua conexão entre a manipulação de materiais e situações que tenham sentido para o aluno. Nacarato (2005) aponta possibilidades e limites desses recursos didáticos, os quais podem se tornar facilitadores, ou mesmo complicadores quando não têm relação com os conceitos trabalhados; então, a maneira como utilizá-los é importante, pois o uso indevido, ou pouco exploratório, de um material manipulável produzirá uma aprendizagem insuficiente.

Pais (2006), na busca de delinear as dificuldades ligadas ao processo de ensino e aprendizagem de geometria, destaca a importância do uso de desenhos, objetos materiais, conceitos e imagens mentais, os quais não podem ser desvinculados uns dos outros, pois “as articulações entre esses elementos condicionam o trabalho didático e o raciocínio do aluno na construção do conhecimento geométrico” (p. 93).

Ressalta que na elaboração conceitual a intuição e a experiência exercem

¹ Pestalozzi foi um dos pioneiros da pedagogia moderna, influenciando profundamente todas as correntes educacionais; afirmava que a função principal do ensino é levar as crianças a desenvolver suas habilidades naturais e inatas.

papel importante, e que o objeto e o desenho não caracterizam as noções geométricas, apesar de favorecerem a construção do conhecimento de natureza experimental. Assim, o desenho e o objeto possuem natureza concreta (no sentido de apresentarem possibilidades de serem visualizadas ideias nucleares aos conceitos aos quais se referem), o que é o oposto das características gerais e abstratas dos conceitos. O objeto estaria associado aos modelos e materiais didáticos, enquanto o desenho, por vezes, é visto pelo aluno como o próprio conceito na geometria plana, o mesmo não ocorrendo na geometria espacial devido à necessidade de se usar a perspectiva para sua compreensão.

Quanto às imagens mentais, o mesmo autor afirma que são de natureza distinta do objeto e do desenho, e se destacam por duas características básicas: a subjetividade e a abstração. Considerando que as noções geométricas não operam com a realidade sensível, entende o autor que a formação de imagens mentais seria uma consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos. Apesar de reconhecer a dificuldade para definir formalmente imagem mental, pois existem muitas discussões sobre o assunto, o autor assim se exprime: “o indivíduo tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos” (PAIS, 1996, p. 70).

Com relação à generalização e à abstração dos conceitos geométricos, Pais nos dá a entender que ocorrem de maneira gradual, num processo dialético, que envolve a influência do mundo e uma reflexão intelectual sobre ele. Primeiramente,

a elaboração desse processo, estabelece-se numa relação de permanente comparação entre o mundo das idéias e o mundo físico [...] e é no processo de conceitualização que o aluno lança mão dos recursos que lhe são mais próximos e disponíveis, entrando em cena as representações por objetos e desenhos e, posteriormente, pelas imagens mentais (PAIS, 1996, p. 70).

Passos (2000, p.81-82) afirma que a visualização pode ser considerada como um dos processos envolvidos nas diferentes maneiras de representação, no tocante ao processo ensino-aprendizagem de Geometria, entendendo que “a representação pode ser gráfica, como um desenho em um papel ou como modelos manipuláveis, ou mesmo através da linguagem e de gestos [...]”. Em continuação, a autora cita inferências de Hoffer, ao afirmar que não há reconhecimento ou entendimento dos conceitos geométricos pelo aluno sem que ele possa perceber,

visualmente, exemplos, e identificar figuras e propriedades, associando-as com suas experiências prévias.

Afirma, também, que a habilidade de percepção visual e os conceitos geométricos podem ser aprendidos simultaneamente, pois

[...] a geometria exige que o aluno reconheça figuras, suas relações e suas propriedades. A geometria informal poderia ser ensinada facilmente e incluída num programa de treinamento de percepção visual, de modo a melhorar a percepção visual do aluno. (HOFFER, 1977 apud PASSOS (2000), p.96).

O uso de material concreto como apoio para aulas de geometria é um recurso que deve ser utilizado por professores com as devidas precauções. Apesar de ser questionado por alguns pesquisadores, é considerado por Nacarato (2005) como fundamental em todas as séries e níveis de ensino, por facultarem aos alunos melhorar a visualização. Em conclusão, esta autora afirma que “o desenvolvimento dos processos de visualização depende da exploração de modelos ou materiais que possibilitem ao aluno a construção de imagens mentais” (NACARATO, 2005, p.4).

Ao utilizarmos um material didático é absolutamente necessário ter o cuidado de analisar se o mesmo satisfaz e proporciona a obtenção de um dos objetivos precípuos do processo de ensino e aprendizagem, que é a compreensão dos conceitos estudados.

Nesse sentido, nossas experiências indicam que o uso de espelhos e caleidoscópios se justifica como recurso didático auxiliar, pois colaboram na construção dos significados pelos alunos quando estudam alguns temas da geometria. Também, a utilização desses instrumentos se torna razoável se atentarmos ao que declara Passos (2006) como sendo os critérios (definidos por Reys) para a escolha de bons materiais manipulativos²:

- *os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas.*

Se considerarmos *personificação* como a representação simbólica do modelo de alguma coisa, construído numa escala normal, reduzida ou ampliada, temos essa possibilidade com os caleidoscópios. Por exemplo, se construirmos um padrão geométrico que origina uma determinada pavimentação, ao ser

² Aos critérios definidos por Reys (expostos em itálico), seguem comentários nossos sobre o modo como entendemos esses critérios em consonância com o uso de materiais manipulativos, aqui particularizados em termos de trabalho com espelhos e caleidoscópios.

colocado no interior de um caleidoscópio com três espelhos, obtemos o visual dessa pavimentação que se estende pelo infinito.

- *os materiais devem representar claramente o conceito matemático.*

No caso dos caleidoscópios, eles por si só não representam os conceitos, mas as imagens que os espelhos fornecem podem reproduzir as características gerais que definem um determinado conceito. Os conceitos de reflexão e rotação, por exemplo, podem ser intuídos com o uso de caleidoscópios. Quando um objeto qualquer é colocado entre dois espelhos abertos em ângulos específicos, se formarão imagens virtuais do objeto numa sucessão de reflexões e rotações do objeto original, que serão claramente percebidas pelos alunos. O número de imagens obtidas será determinado pelo ângulo de abertura dos espelhos.

- *os materiais devem ser motivadores.*

Os caleidoscópios possuem uma motivação intrínseca que se manifesta, especialmente, quando se utiliza o recurso da coloração no momento da construção dos padrões a serem colocados no interior dos espelhos. A possibilidade de o aluno elaborar o seu próprio trabalho, escolhendo e/ou combinando diversos elementos, harmonizando as cores, desencadeia grande motivação que se revela pelo interesse e participação nas atividades.

- *os materiais, se possível, devem ser apropriados para serem usados quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de conceitos.*

Nossa experiência atesta e comprova a versatilidade dos espelhos e caleidoscópios. Tais recursos didáticos já foram por nós utilizados em cursos para alunos da graduação, pós-graduação e, também, em cursos de formação continuada (por exemplo, Programa Teia do Saber – Rede de Aprendizagem e Valorização dos Educadores da Rede Pública Estadual), além de cursos de extensão dentro e fora da UNESP. Nossos orientandos têm desenvolvido seus trabalhos, realizando experiências com alunos do curso fundamental, Médio e Superior.

- *os materiais devem formar uma base para a abstração.*

Isso pode ser verificado no trabalho com espelhos quando, por exemplo, vamos estudar o conceito de ângulo central de um polígono. Colocamos um caleidoscópio com dois espelhos abertos num ângulo de 120° sobre uma fita ou uma régua (representando um segmento), de modo que ela forme, com os espelhos, ângulos de 30° , e origine o visual de um triângulo equilátero. O ponto de junção dos dois espelhos representará o centro da circunferência em que o polígono (triângulo equilátero) estaria inscrito e, conseqüentemente, fornecerá o

ângulo central da figura, capacitando o aluno a refletir sobre o conceito de ângulo central, e questionar e testar a sua validade para outro tipo de polígono.

- *os materiais devem proporcionar manipulação individual.*

Os espelhos e caleidoscópios são, normalmente, utilizados em atividades desenvolvidas por alunos divididos em pequenos grupos. Porém, apesar de os alunos estarem assim dispostos, em geral, cada estudante acaba manipulando o material ao testar/validar sua folha individual de atividade, ou mesmo quando elabora um desenho decorativo.

4 O uso integrado de espelhos, caleidoscópios e materiais manipulativos

Uma das potencialidades dos caleidoscópios é que eles têm relações explícitas com os conceitos estudados e contribuem para o processo da visualização. Considerando que a visualização e o desenho não têm sido tratados com a devida importância no estudo da geometria, pensamos, através de nossos trabalhos, podermos colaborar no processo de visualização, bem como resgatar o ensino do desenho geométrico que foi suprimido em muitas escolas públicas.

A questão norteadora de nossas pesquisas tem sido: *Quais as possibilidades de inserção de materiais manipulativos, integrados a espelhos e caleidoscópios, em estudos das geometrias euclidiana e não-euclidiana, de modo a promover maior interesse e participação dos alunos no processo de ensino e aprendizagem?* Alguns estudos já foram realizados, sinalizando algumas dessas possibilidades; podemos citar, por exemplo, Murari (1999, 2004, 2005); Murari, Perez e Barbosa (2001); Murari e Lazari (2004); Buske e Murari (2007); entre outros. Além destes, temos orientado diversas pesquisas, utilizando materiais manipulativos em seu desenvolvimento. A seguir, listaremos esses trabalhos, todos na categoria de dissertação (mestrado em educação matemática).

³ São padrões geométricos (triangulares ou quadrangulares) resultantes de segmentos intencionalmente construídos. Servem para ser colocados no interior dos caleidoscópios, e, através da reflexão desses segmentos nos espelhos, fornecerem uma determinada pavimentação; para tanto, dentro da base caleidoscópica, os segmentos devem delimitar polígonos ou partes destes, que vão compor a pavimentação. Numa pavimentação existem *bases geradoras* e *bases transformadas*; estas últimas formadas por réplicas das bases geradoras. Em Murari (1999) há uma explicitação mais detalhada sobre o assunto, inclusive um algoritmo para sua identificação em uma porção de pavimentação.

4.1 Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais.

Martins (2003) utilizou, de maneira integrada, caleidoscópios, sólidos geométricos, e os *softwares* educacionais *Cabri-Géomètre II* e *Geometricks*, possibilitando que alunos da 8ª série do ensino fundamental estudassem as tesselações do plano por polígonos regulares e tesselações do espaço por poliedros regulares. Nas faces dos sólidos geométricos que tessalam o espaço, em particular dos poliedros regulares, colocou *bases caleidoscópicas*³ para que, no empilhamento dos mesmos (numa forma de jogo), em cada lateral, fossem visualizadas diferentes porções de pavimentações. As bases (ou padrões) e planificações dos sólidos elaboradas graficamente, primeiro no papel, com os instrumentos usuais de desenho, e depois por meio do computador resultaram numa integração entre o laboratório de ensino e o de informática. Posteriormente, essas mesmas bases caleidoscópicas elaboradas no computador, nas dimensões do caleidoscópio, foram inseridas no interior dos espelhos, através dos quais eram geradas as pavimentações estudadas. Também, por intermédio do computador (macros) foram obtidas as mesmas pavimentações. Assim, num dado momento, sobre a mesa do computador, tornou-se possível que os alunos contemplassem, lado a lado, a mesma pavimentação: nos caleidoscópios, no computador e nas laterais das pirâmides ou cubos, resultantes do empilhamento dos sólidos geométricos. A Figura 1 mostra isso:

- (a) base caleidoscópica da pavimentação de configuração (4,4,4,4);
- (b) o visual gerado por essa mesma base quando colocada dentro do caleidoscópio com três espelhos;
- (c) porção de pavimentação obtida por macros na tela do computador; e
- (d) um sólido geométrico formado com o empilhamento de pequenos cubos com a mesma base caleidoscópica estampada em uma de suas faces.

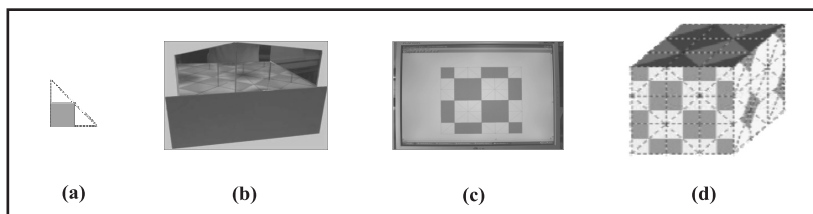


Figura 1- Visual da pavimentação (4,4,4,4) obtido através de vários recursos.

4.2 Um estudo de pavimentação do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri Géomètre II

Almeida (2003) empregou caleidoscópios, jogos e o *software Cabri Géomètre II*, para aprendizagem de Geometria. Em sua abordagem, sob a perspectiva do método Resolução de Problemas, elaborou atividades (no laboratório de ensino e no de informática) para alunos do 2º ano do Ensino Médio, focando temas como simetrias (reflexão, rotação e translação), polígonos regulares, construções geométricas, pavimentações do plano, sequências numéricas etc. A atividade resultou num jogo, à maneira de um quebra-cabeça, cujas peças estavam formadas por bases caleidoscópicas geradoras em uma face, e bases transformadas na outra face, configurando duas peças diferentes – enantiomorfas – com o objetivo de formar porções de pavimentações do plano. Essa proposta exigiu dos alunos que observassem as regras da simetria reflexional. De forma lúdica, os estudantes formaram as porções de pavimentações, comprovando, experimentalmente, que estas podiam ser obtidas através de diversas bases; estudaram a formação das bases transformadas, sendo possível contar as regiões. Como resultado inédito dessa pesquisa, foi descoberto um algoritmo que permite encontrar, de maneira precisa, a quantidade de regiões que poderão ser coloridas na n -ésima base transformada de algumas pavimentações ($n \in \mathbf{IN}$). Para exemplificar o jogo, mostramos, na Figura 2:

- (a) uma base geradora (nas duas formas enantiomorfas);
- (b) uma pequena porção de pavimentação obtida pela união de várias peças de (a);
- (c) uma base transformada (nas duas formas enantiomorfas); e
- (d) uma porção de pavimentação obtida através das bases transformadas.

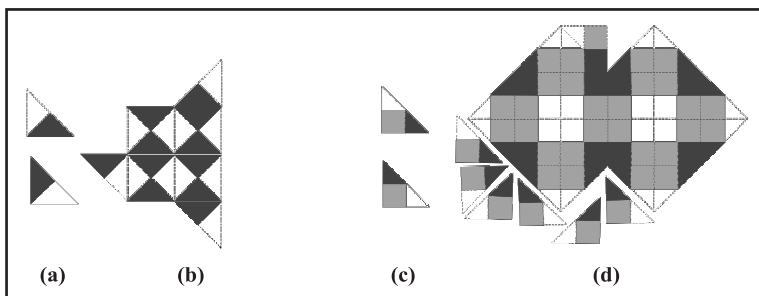


Figura 2 – Exemplificação do jogo desenvolvido com bases geradoras e transformadas.

Com o desenvolvimento do jogo, e através dessas bases, o pesquisador obteve uma pavimentação de configuração (4,4,4,4). Em **(b)** temos quadrados com duas cores, e em **(d)** os quadrados possuem três cores.

4.3 Um Kit de espelhos planos para o ensino de geometria

Batistela (2005), a partir da literatura sobre o emprego de espelhos no ensino de geometria, construiu e sistematizou materiais didáticos com espelhos, cujos instrumentos já existiam e até mesmo já vinham sendo utilizados para o ensino de geometria. Elaborou um *kit de instrumentos construídos com espelhos*, agrupados, mostrando possibilidades de emprego dos mesmos, bem como, propondo uma nova utilização para os caleidoscópios generalizados. Entre esses instrumentos estão: o espelho mágico ou mira; um espelho simples; dois espelhos que podem ser utilizados unidos ou separados (paralelos e no sentido vertical a um mesmo plano); caleidoscópios modificados com três e quatro espelhos; espelhos articulados especiais e caleidoscópios generalizados (esféricos). No trabalho o autor estabeleceu a maneira como o *kit* deve ser construído, observando os princípios matemáticos que sustentam, asseguram e determinam ângulos entre os espelhos que possibilitem a reflexão perfeita de imagens e a repetição delas, sem lacunas ou sobreposições. Igualmente, Murari e Batistela (2004) apresentaram visuais de poliedros de Arquimedes obtidos através dos caleidoscópios generalizados, sendo que, até então, não havia qualquer indicação de que estes caleidoscópios já tivessem sido utilizados para esse fim. Através dos espelhos articulados especiais apresentados por Walter (1981) os pesquisadores obtiveram o visual de poliedros regulares (de Platão). Na Figura 3 aparecem os vários tipos de instrumentos, sendo **(a)** e **(b)** caleidoscópios planos e **(c)**, **(d)** e **(e)** caleidoscópios espaciais.

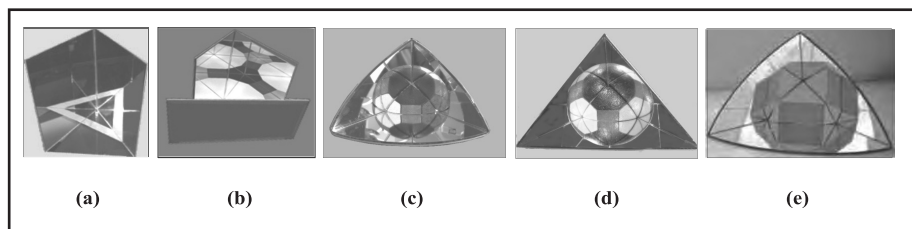


Figura 3 – Exemplos de caleidoscópios dos tipos planos e espaciais com os respectivos visuais.

4.4 Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica

Gouvea (2005) estudou a Geometria Fractal, um tema pouco explorado nos cursos de graduação em Matemática. Seu trabalho consistiu em elaborar e aplicar atividades a alunos da Licenciatura em Matemática (do 1º e 2º semestres) da UNESP de Rio Claro, que participaram de um Curso de Extensão. Foram utilizados caleidoscópios e softwares educacionais da Geometria Dinâmica como o *Cabri-Géomètre II* (comercial) e o *iGeom* (este, gratuito, e não tão disseminado e utilizado), tendo a Resolução de Problemas como procedimento metodológico de ensino. O autor objetivou retomar conceitos básicos da Geometria Euclidiana, muitas vezes não assimilados pelos alunos. Apresentou uma maneira inovadora de obterem-se fractais geométricos: a partir de bases caleidoscópicas. Em vista disso, pôde aprofundar o estudo sobre espelhos e caleidoscópios. O pesquisador também observou que os caleidoscópios, por fornecerem visuais magníficos e através das bases caleidoscópicas, contribuíram para despertar, no aluno, o interesse em participar das atividades e compreender os conceitos inerentes ao tema. Com isso, estabeleceu uma estratégia de ensino-aprendizagem distinta da tradicional. O estudo foi desenvolvido nos laboratórios de ensino (com o uso de régua e compasso) e no de informática, onde a construção de conceitos geométricos se dá por meio da interação aluno-aluno, aluno-computador e aluno-professor. A Figura 4 simula o processo de obtenção de um fractal geométrico através de uma base caleidoscópica da pavimentação de configuração (6,6,6), por meio do software *Cabri-Géomètre II*. Observe-se que, na última figura existem n cópias semelhantes à base geradora; continuando progressivamente neste processo pode-se obter o fractal.

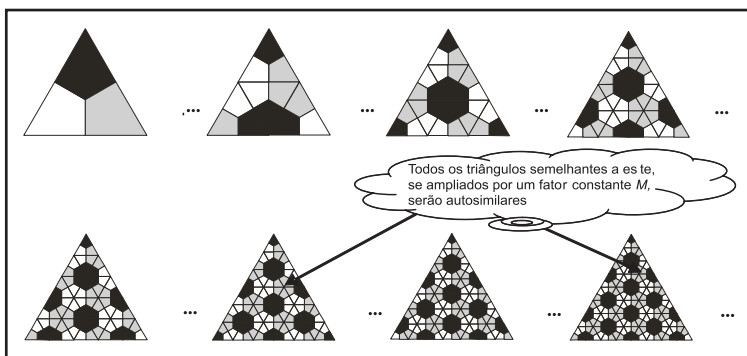


Figura 4 – Simulação do processo de obtenção de um fractal geométrico através de uma base caleidoscópica

4.5 Pavimentações do plano: um estudo com professores de matemática e arte

Santos (2006), através de um curso de extensão, desenvolveu atividades com *professores de Matemática e de Arte*, investigando *quais significados eles atribuem ao trabalho com pavimentações do plano, envolvendo material manipulativo, em situação de ensino e aprendizagem de geometria*. Em suas respectivas escolas, os professores-alunos trabalharam com alunos das séries finais do Ensino Fundamental (quinta a oitavas séries). Os encontros tinham como pano de fundo o tema *pavimentações do plano*, com o emprego de materiais didáticos manipuláveis. O autor apresentou um estudo referente aos conceitos e propriedades geométricas concernentes às pavimentações uniformes do plano, à obtenção dessas pavimentações em caleidoscópios, aos tetraminós e às pavimentações de Penrose⁴. Para consecução do trabalho foram utilizados os seguintes recursos didáticos: caleidoscópios, kit de polígonos, quadriláteros irregulares denominados *kite* e *dart* (para obterem-se as pavimentações aperiódicas de Penrose) e os tetraminós. O kit de polígonos é um conjunto de polígonos regulares (triângulos, quadrados, hexágonos, octógonos, decágonos, dodecágonos etc.) confeccionados em papel resistente, todos com a mesma medida de lado e com cores distintas em suas faces, que servem para descobrir quais arranjos de polígonos colocados de modo adjacente podem dar origem a uma pavimentação; é um bom recurso para se estudar polígonos, ângulos internos e pavimentações. Para obtenção das pavimentações nos caleidoscópios foram construídas bases caleidoscópicas no computador, por meio do *software Cabri-Géomètre II*. Os tetraminós foram feitos em material emborrachado (e.v.a); o pesquisador estudou as várias possibilidades de formação dos tetraminós e desenvolveu atividades sobre áreas, perímetros e semelhanças. Os *kites* e *darts* foram elaborados em papel espesso para formar as pavimentações de Penrose; esse tema proporcionou estudar a divisão de segmentos, a razão áurea e a construção do segmento áureo. Na primeira linha da Figura 5 há exemplos de arranjos de polígonos feitos a partir do kit de polígonos; na segunda linha há, primeiramente, combinações de *kites* (semelhantes a papagaios) e *darts* (análogos a setas) e, depois, de tetraminós (três últimas figuras).

⁴ Roger Penrose, físico-matemático inglês, com interesse por recreações matemáticas, descobriu ser possível tesselar uma superfície plana de maneira não periódica, isto é, sem que um padrão se repita, utilizando apenas dois quadriláteros denominados *kite* e *dart*. Assim, as tesselações de Penrose obtidas com *kites* e *darts* são *aperiódicas* (ou *não periódicas*), ou seja, não podem ser obtidas pela translação de um padrão da pavimentação.

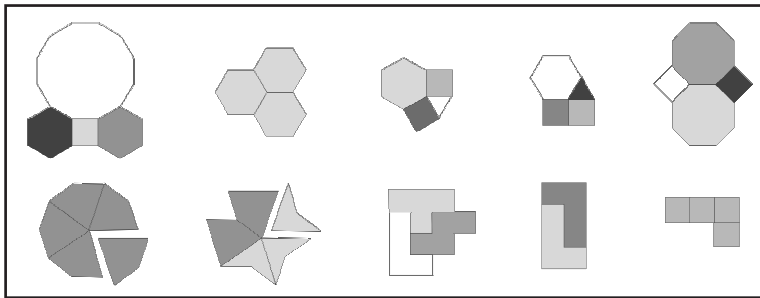


Figura 5 - Arranjos de polígonos, combinações de *kites* e *darts* e formações de tetraminós.

4.6 Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis

Reis (2006) realizou pesquisa com o objetivo de identificar alguns materiais manipulativos passíveis de ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Esférica, e descreveu o seu uso em um ambiente natural de sala de aula. Reis tentou compreender como estes recursos didáticos colaborariam na aquisição de conceitos e propriedades básicas dessa geometria. Preparou um curso de extensão universitária sobre o tema, direcionado a alunos cursando entre o 3º e 8º semestres da Graduação em Matemática da UNESP de Rio Claro. Dentre os recursos pedagógicos investigados, selecionou as esferas de isopor e a esfera de Lénárt⁵ para representar o plano esférico como modelos físicos, o *software Cinderella* como modelo virtual da superfície esférica e os caleidoscópios generalizados, representando um modelo misto, composto por aspectos físicos e virtuais. Para as construções de figuras geométricas nos modelos físicos do plano esférico utilizou compassos comuns, fitilhos coloridos para representações das linhas *retas* sobre a superfície esférica, alfinetes com cabeças coloridas para simbolizar os pontos e tiras de acetato transparente como régua esférica, por ser um material barato e facilmente acessível. A esfera de Lénárt foi apresentada como material alternativo, pois apesar de ser um bom recurso didático, seu preço é muito elevado para a realidade financeira de nossas escolas; Reis a substituiu pela esfera de isopor, a qual se mostrou suficiente para esse

⁵ István Lénárt (1996) anexou em sua obra *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: activities comparing planar and spherical geometry* um conjunto de objetos para serem utilizados nas atividades por ele propostas. Dentre os itens desse conjunto encontramos régua e transferidor esféricos, compasso esférico, toros, hemisférios transparentes e uma superfície esférica de acrílico transparente, denominada de esfera de Lénárt, que é utilizada simbolicamente para representar o planeta terra.

fim. O autor percebeu que procedimentos como manipular, tatear e visualizar foram importantes nas investigações e explorações dos alunos, embora se revelassem menos precisas as representações geométricas feitas com esse material em relação ao *Cinderella*. Os modelos físicos mostraram-se mais adequados para atividades de percepção e concepção de objetos geométricos. Segundo o pesquisador, o uso do *software* auxiliou a verificação de propriedades já conhecidas e a descoberta de outras; os caleidoscópios generalizados possibilitaram obter o visual das tesselações esféricas através dos padrões geométricos construídos, e contribuíram para um ambiente de estudo agradável e participativo. A Figura 6 mostra esferas de isopor, alfinetes e um caleidoscópio generalizado. Observe-se que, nas esferas de isopor foram desenhadas tesselações esféricas. O pequeno triângulo que aparece recortado na penúltima figura é a base caleidoscópica que, colocada no interior do caleidoscópio, fornece o visual da bola de futebol.

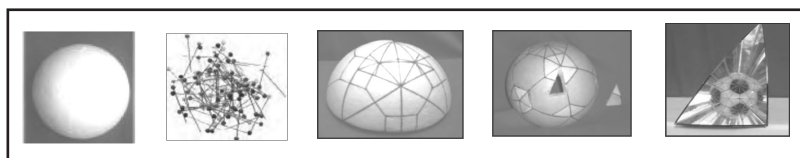


Figura 6 – Esferas de isopor, alfinetes e um caleidoscópio generalizado.

4.7 Uma contribuição para o ensino de geometria utilizando origami e caleidoscópio

O trabalho de Buske (2007) teve como objetivo analisar como *origami* e *caleidoscópios* podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem de alguns conceitos da Geometria. Consistiu na elaboração e aplicação de atividades a alunos do segundo semestre de um curso de licenciatura em Matemática. O trabalho implicou em construções feitas com régua e compasso, com o *software Cabri-Géomètre II* e com o *origami*. A autora utilizou o caleidoscópio generalizado para obter o visual de alguns dos poliedros de Platão e Arquimedes a partir de dobraduras que, devidamente confeccionadas, transformam-se em bases caleidoscópicas. Os conteúdos estudados estavam relacionados às construções fundamentais, polígonos e, através do origami modular, foram montados os poliedros. Buske apontou que os caleidoscópios e o origami têm em comum a capacidade de reproduzirem coisas belas e de promoverem maior atenção e interesse no processo de ensino e aprendizagem. A Figura 7 mostra

em (a) e (b) octaedros obtidos em caleidoscópios generalizados de tipos diferentes; em (c) aparece o cubo obtido por meio de caleidoscópio generalizado; em seguida, poliedros obtidos pela técnica do origami modular, a saber: em (d) o Cuboctaedro truncado e em (e) o Icosaedro.

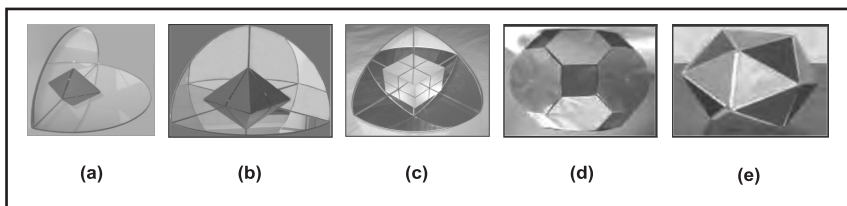


Figura 7 – Poliedros obtidos por meio de caleidoscópios generalizados e de origami modular.

4.8 Um estudo sobre o uso de régua, compasso e um software de geometria dinâmica no ensino da geometria hiperbólica

O projeto de Rossini (2010) teve por principal objetivo contribuir para o ensino e aprendizagem da geometria hiperbólica, apresentando uma proposta que visou ao estudo introdutório dessa geometria. Caracterizou-se pela aplicação de atividades a alunos de um curso de graduação em Engenharia Elétrica oferecido pelo Instituto Tecnológico do Sudoeste Paulista (INTESP), em Ipaussu (SP). Os sujeitos da pesquisa foram escolhidos devido à importância de conhecimentos dessa geometria na área das telecomunicações no que diz respeito à transmissão de sinais, quando há a ocorrência de grande quantidade de pavimentações hiperbólicas. A autora explicitou que a escassa ocorrência de formas hiperbólicas torna difícil a construção de modelos concretos como suporte material no processo de ensino e aprendizagem dessa geometria; então, empregou modelos prontos que emblemam conceitos dessa geometria, por exemplo, a sela e a pseudoesfera, obtida a partir da tratriz, que são algumas superfícies que atendem aos requisitos da geometria hiperbólica. As construções geométricas foram realizadas com régua e compasso e com o *Cabri-Géomètre II*, menu – hiperbólico, quando são adicionados ao menu euclidiano mais quatro comandos. Uma mesma atividade foi desenvolvida através de régua e compasso (laboratório de ensino) e também pelo computador (laboratório de informática), minimizando as limitações próprias do ambiente papel/lápis, que são compensadas pelos recursos tecnológicos, por exemplo, a rapidez nas construções, facilitando o processo educativo. Rossini apontou que as construções manuais se justificavam

em razão de que, geralmente, os estudos sobre a geometria hiperbólica não mostram algumas justificativas sobre os passos da construção de figuras geométricas relacionadas a essa geometria, pois sendo efetuados somente através de *software*, alguns procedimentos não são demonstrados, dificultando a formalização das provas. Na Figura 8 aparecem: (a) um modelo de sela; (b) o quadrilátero de Saccheri construído através do *software Cabri-Géomètre II, menu – hiperbólico*; (c) a construção de outro quadrilátero de Saccheri por meio de régua e compasso.

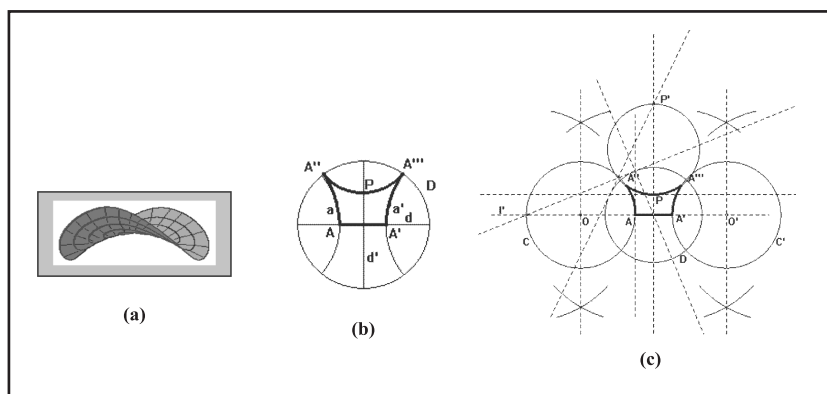


Figura 8 – Modelo de sela e diferentes construções de quadriláteros de Saccheri

4.9 Da cartolina ao computador: uma proposta para estudo de geometria

A pesquisa de Fassio (2011) incluiu uma parceria entre universidade e escola de ensino fundamental, objetivando verificar o envolvimento de alunos dessa escola em uma proposta de estudo da geometria, utilizando diferentes recursos materiais: da cartolina ao computador, passando pelo uso de lápis, régua, espelhos, caleidoscópios, esquadro, compasso, *software* Geogebra, *portasegmentos*⁶, entre outros, cujo trabalho de campo foi desenvolvido através de atividades investigativas. A autora elegeu o método Experimento de Ensino, que facultou perceber melhor a matemática desenvolvida pelos alunos e conjeturar a produção do conhecimento advindo da utilização de diversos recursos materiais. Estudou Construções Básicas, por exemplo, perpendiculares, ponto médio,

⁶ O *portasegmento* é um instrumento retangular (geralmente, com medidas que variam entre 1,5 a 3 cm de largura e de 10 a 15 cm de comprimento), que pode ser confeccionado com papel resistente (do tipo cartolina, por exemplo), celulósido ou outro material plástico. Apesar de pouco conhecido, o *portasegmento* serve para realizar algumas construções geométricas, tais como perpendiculares, bissetriz, mediatriz, paralelas, tangentes, etc.

paralelas, bissetriz, transporte de segmentos, transporte de ângulos etc. Nesta pesquisa, Fassio cogitou na organização de ambientes de aprendizagem que privilegiassem as atitudes investigativas do professor e do aluno, utilizando tecnologia informática e materiais manipuláveis. Analisou, em cada instrumento, as limitações e as ideias matemáticas passíveis de ser exploradas. Como resultado, confeccionou uma proposta de atividades que utiliza diferentes recursos, apresentada como sugestão para professores utilizarem em sala de aula. A Figura 9 mostra posições de portasegmentos e de esquadros, alguns dos instrumentos utilizados nas construções geométricas.

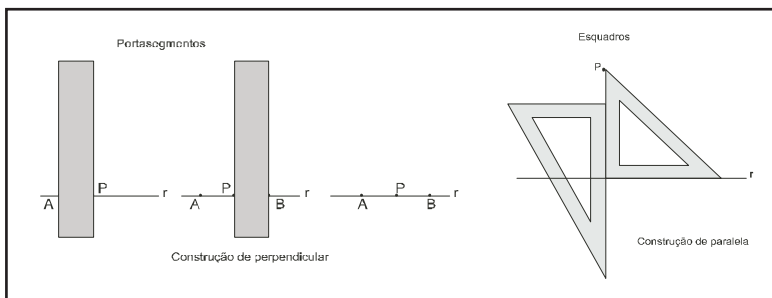


Figura 9 - Posições dos instrumentos no processo das construções geométricas

4.10 O uso de caleidoscópios no ensino de grupos de simetria e transformações geométricas

Neves (2011) estudou os grupos de simetria das figuras simétricas planas, bem como analisou as contribuições que se podem obter com a incorporação de espelhos e caleidoscópios. Teve como meta mostrar que os espelhos permitem tornar *visíveis* as operações do grupo de simetria das figuras simétricas planas (rosáceas, frisos e padrões), o que tende a propiciar maior assimilação dos conceitos no processo de ensino e aprendizagem dos temas abordados. Realizou um estudo exploratório dos grupos cristalográficos (*wallpapers*), buscando identificar em quais deles são observáveis as operações dos grupos de simetria através dos espelhos. Utilizou vários tipos de caleidoscópios dos tipos planos e generalizados e, como recurso computacional, utilizou o *software* Kali. Ofereceu um curso de extensão a futuros professores, alunos que estavam cursando licenciatura em matemática da UNESP (a partir do segundo ano), e a professores da rede pública de ensino. Nesse contexto, foi elaborada uma sequência didática, envolvendo conhecimentos sobre caleidoscópios, transformações geométricas,

grupos de simetria e ornamentos planos, seguindo a metodologia resolução de problemas. Seu estudo discutiu as possibilidades e limitações do uso dos caleidoscópios no processo de ensino/aprendizagem de transformações geométricas e grupos de simetria, através do estudo dos ornamentos planos. A figura 10 apresenta o caleidoscópio de três espelhos planos, fornecendo o mesmo visual do *wallpaper*.

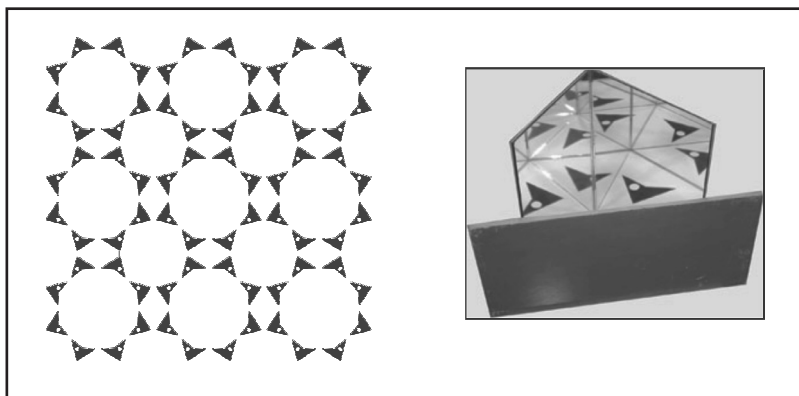


Figura 10 - Um *wallpaper* e seu visual no caleidoscópio

5 Considerações finais

É senso comum que não existem fórmulas nem caminho único para o ensino de qualquer disciplina. Da mesma forma, não podemos afirmar que a aprendizagem efetiva só ocorre com a utilização de materiais manipulativos. Temos, à nossa disposição, diversas possibilidades de trabalho em salas de aula com sustentação teórica, com características específicas, que utilizam recursos didáticos e enfoques metodológicos diferentes, que vão matizando os procedimentos e conduzindo o processo de ensino e aprendizagem. Porém, as ações devem ser canalizadas para que a aprendizagem ocorra com significado para o aluno e de uma maneira ativa. Torna-se necessário elaborar atividades que favoreçam desenvolver e aperfeiçoar as estruturas lógicas de pensamento, que tenham por resultado prático o estabelecimento de condições para aquisição de outros conhecimentos, os quais podem colaborar para que os estudantes tomem decisões conscientes.

Assim, diante da convicção de que nenhum material traz consigo a garantia da aprendizagem, fica manifesto que, anteriormente à escolha do suporte material,

impõem-se a necessidade de uma reflexão sobre a proposta político-pedagógica a ser adotada. Essa cautela é indispensável, pois as escolhas do professor também vão concorrer na determinação do tipo de formação que se dá ao aluno; é importante saber se lhe está sendo permitido adquirir um saber significativo, produto da construção e reconstrução das ideias.

Em quase todas as nossas pesquisas com utilização de recursos didáticos os caleidoscópios têm sido empregado de modo recorrente, em colaboração com outros instrumentos, redundando num suporte material integrado. Apesar da informalidade que se pode trabalhar com os caleidoscópios, sua operacionalização exige certo rigor matemático. Por exemplo, para se obter corretamente as transformações de uma figura geométrica colocada no interior de dois espelhos, estes devem ser abertos em ângulos específicos (30° , 45° , 60° , etc.), através dos quais são geradas as operações de simetria dessa figura. A não observância desses ângulos inviabiliza o estudo. Os temas possíveis de ser focalizados com os diversos tipos de caleidoscópios planos e espaciais representam fontes desencadeadoras de conhecimentos geométricos, e estes, por sua vez, podem propiciar ao aluno o desenvolvimento de habilidades de visualização, de desenho, de argumentação, de compreensão e percepção do espaço e de construção de modelos, e podem servir como instrumentos para uma leitura integrada do mundo à sua volta.

Sempre que possível, trabalhamos com Resolução de Problemas, fazendo com que os alunos atuem em grupos e participem de discussões coletivas. Procuramos abordar os conteúdos de maneira que adquiram flexibilidade e interatividade, a fim de que, na interpretação das informações, os alunos se utilizem das competências e habilidades anteriormente desenvolvidas, e, em acréscimo, elaborem outras, assimilando os conceitos requeridos para a compreensão e apropriação dos assuntos estudados no momento. Nas construções geométricas fazemos uso dos recursos régua, compasso e do computador, para que os alunos possam perceber as relações entre as representações planas nos desenhos e aquelas geradas na tela do computador, o que pode propiciar, a partir dessas representações, a concepção de novas formas planas ou espaciais e a compreensão de suas propriedades.

Em nossos trabalhos apresentamos, com certa regularidade, atividades com a elaboração de alguns problemas para ensinar conteúdos das Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas, pontuando com exemplos de experiências já desenvolvidas com alunos do ensino fundamental, médio e superior, bem como apresentando os procedimentos matemáticos básicos para as resoluções. Longe

de nós imaginarmos que isso seja uma receita acabada e a ser seguida: são apenas sugestões. Nossa intenção é, simplesmente, interpor um conduto através do qual o processo de ensino e aprendizagem de geometria possa ser mais criativo, e a capacidade exploratória e inquiridora dos alunos possa ser desenvolvida. É preciso planejamento e preparo adequado para a utilização dos recursos pedagógicos, assim como estratégias de ação a fim de que o trabalho possa extrapolar os objetivos de uma simples atividade lúdica. Também, somos conscientes de que muito ainda há para ser pesquisado, discutido e analisado a respeito do assunto, o que requer de nós, profissionais da educação, um olhar atento sobre a nossa prática, cujos objetivos educacionais se concretizam por ações. Assim, temos possibilidades e limites, e eis aí um campo aberto para muitas discussões, e viabilizar aberturas é o papel da educação!

Referências

- ALMEIDA, S. T. **Um estudo de pavimentações do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri-Géomètre II**. 2003. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- BATISTELA, R. F. **Um kit de Espelhos Planos para o Ensino de Geometria**. 2005. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.
- BORBA, M. C. Funções, representações múltiplas e visualização na Educação Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1995, **Anais...** Rio de Janeiro: IM - UFRJ, 1995. p.71-90. CD-ROM.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**, Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BUSKE, N. **Uma contribuição para o ensino de geometria utilizando origami e caleidoscópio**. 2007, 200f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.
- BUSKE, N.; MURARI, C. Origami Modular na construção de poliedros para o ensino da geometria. In: ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte, MG. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 01-13. CD-ROM.

FASSIO, S. A. O. **Da Cartolina ao Computador:** uma proposta para estudo de Geometria. 2011, 149f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

GOUVEA, F. R. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica.** 2005, 259f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

LÉNÁRT, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere:** activities comparing planar and spherical geometry. Berkeley: Key Curriculum Press, 1996.

MARTINS, R. A. **Ensino-aprendizagem de geometria:** uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais. 2003, 246f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

MISKULIN, R. G. S. As potencialidades didático pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. In: LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p.153-178. (Coleção Formação de Professores).

MURARI, C. **Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7a e 8a séries, via caleidoscópios.** 1999, 347f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

MURARI, C. A Tesselação (5,6,6) - a bola de futebol - visualizada em caleidoscópio generalizado. In: ENCONTRO NACIONAL EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife, PE. **Anais...** Recife: SBEM-SBEM/PE, 2004. p. 01-09. CD-ROM.

MURARI, C. Visualização de Tesselações Esféricas em caleidoscópios generalizados. In: CIBEM – CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto, Portugal. **Actas...** Porto, Portugal: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005. p. 01-11. CD-ROM.

MURARI, C.; BATISTELA, R.F. Bases para visualização dos poliedros de Arquimedes. In CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 17., 2004, Porto Alegre, RS. **Livro de Resumos...** Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2004. p. 195.

MURARI, C., PEREZ, G. BARBOSA, R. M. Caleidoscopios Educativos: Coloraciones Múltiples. **Uno:** Revista de Didáctica de las Matemáticas, Graó, Barcelona, v. 27, p. 7-20, abr. 2001. ano VIII.

MURARI, C.; LAZARI, H. Tesselações Hiperbólicas com régua e compasso. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - Matemática na Escola: conteúdos e contextos, 7., 2004, São Paulo, SP. **Anais...** São Paulo: SBEM-SP, 2004. p. 01-10. Disponível em: <<http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/index.htm>> - Acesso em: 05 fev. 2010

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6. 2005. Disponível em: <<http://www.sbempaulista.org.br/RevEdMatVol9.pdf>> . Acesso em: 12 ago. 2010.

NEVES, P. R. V. **Um Estudo das Simetrias sob o Ponto de Vista Geométrico e Algébrico**. 2011, 129f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

NÓVOA, A. Formar professores como profissionais reflexivos. In NÓVOA, A. (Org.). **Os professores e sua formação**, Lisboa: Dom Quixote, 1992.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, Campinas, v.4, n. 6, p. 65-74, jul./dez. 1996.

PAIS, L. C. **Ensinar e Aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. 2000, 210f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2000.

PASSOS, C. L. B. Materiais Manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92. (Coleção Formação de professores).

PENTEADO, M. G. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999, p. 297-313.

PEREZ, G. Formação de Professores de Matemática sob a Perspectiva do Desenvolvimento Profissional. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999, p. 263-282.
PEREZ, G., COSTA, G. L. M., VIEL, S. R. Desenvolvimento Profissional e Prática Reflexiva. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 15, n. 17, p. 59-70, 2002.

REIS, J. S. **Geometria Esférica por meio de Materiais Manipuláveis**. 2006, 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

ROSSINI, M. A. P. **Um estudo sobre o uso de régua, compasso e um software de geometria dinâmica no ensino da geometria hiperbólica**. 2010, 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SANTOS, M. R. **Pavimentações do plano**: um estudo com professores de Matemática e Arte. 2006, 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SCHÖN, D.A. The reflective practitioner: how professionals think in action. Massachusetts-USA: Basic Books Inc., 1983.

SCHÖN, D.A. **Educating the reflective practitioner**. New York: Jossey-Bass, 1987.

SCHÖN, D.A. The new scholarship requires a new epistemology. **Change**, Washington, US, v. 27, n. 6, p.26-34, Nov./Dec. 1995. Disponível em: <<http://neillthew.typepad.com/files/schon-new-scholarship-copy.pdf>>. Acesso em: 20 set. 2010.

SHULMAN, L. S. Just in case: reflections on learning from experience. In: COLBERT, J.; TRIMBLE, K.; DESBERG, P. (Eds.) **The case for education**: contemporary approaches for using case methods. Needham Height: Allyn Bacon, 1996, p. 197-217.

VILLARREAL, M. E. **Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. 1999, 387f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

WALTER, M. One mirror, two mirrors... **Mathematics teaching**. Derby, Inglaterra, v. 96, p. 54-56, Sept. 1981.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores**: idéias e práticas. Lisboa: EDUCA, 1993.

