

**TIAGO DA SILVA BALBINO**

**DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS EM LAJES PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

**Guaratinguetá  
2012**

**TIAGO DA SILVA BALBINO**

**DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS EM LAJES PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Civil

Orientador: Prof. Dr. Yzumi Taguti

**Guaratinguetá  
2012**

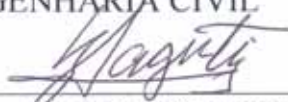
	Balbino, Tiago da Silva
B172d	Determinação dos esforços em lajes pelo método dos elementos de contorno / Tiago da Silva Balbino. – Guaratinguetá : [s.n], 2012 57 f. Bibliografia : f. 57
	Trabalho de Graduação em Engenharia Civil – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012 Orientador: Prof Dr Yzumi Taguti
	1. Métodos de elementos de contorno I.Título
	CDU 624.014.2

DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS EM LAJES PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO

TIAGO DA SILVA BALBINO

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO  
COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
**GRADUADO EM ENGENHARIA CIVIL**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO  
DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

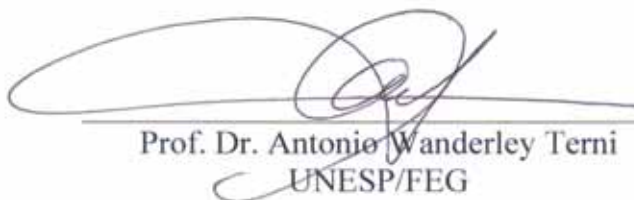


Prof. Dr. Yzumi Taguti  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



Prof. Dr. Yzumi Taguti  
Orientador/UNESP-FEG



Prof. Dr. Antonio Wanderley Terni  
UNESP/FEG

Eng. Alex Thaumaturgo Dias  
Membro Externo

Dezembro de 2012

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos professores do departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá que contribuíram diretamente para minha formação e em especial aos professores Yzumi Taguti e Wanderley Terni, os quais me auxiliaram com muita competência e paciência e me inspiraram para a escolha da minha carreira profissional.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus que me deu forças e sabedoria para suportar os momentos de dificuldades encontrados no decorrer da realização do meu curso de graduação.

Agradeço a minha família que me apoiou em todos os momentos da minha vida e principalmente agora durante esta longa jornada, me dando forças e o auxílio necessário para permanecer e concluir meu curso.

Agradeço a todos os professores que me ajudaram contribuindo com uma parcela do conhecimento de cada um, os quais foram muito válidos e úteis para minha boa formação.

Agradeço aos meus amigos e companheiros de turma, os quais compartilharam ótimos momentos e também a força nos momentos de angústias durante este nobre período da minha vida.

Agradeço em especial a minha namorada Camila que me ajudou muito na finalização deste trabalho.

BALBINO, T. S. **Determinação dos esforços em lajes pelo método dos elementos de contorno.** 2012. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso Engenharia Civil – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

## RESUMO

Através das deduções e formulações das equações que regem o comportamento das placas elásticas e delgadas baseadas na teoria de Kirchhoff, evidencia-se que é justificável a aplicação dos métodos numéricos, considerando a complexidade das equações que descrevem o comportamento físico destes elementos e a obtenção de soluções analíticas para as situações mais específicas.

Este estudo direciona-se a aplicação do método numérico que se baseia em discretizações mais simples para os elementos o que acarreta na diminuição de dados a serem processados. O método numérico em questão é o Método dos Elementos de Contorno (MEC), como o nome sugere, a discretização é apenas no contorno da placa, que é dividida em partes finitas.

O MEC converte as equações integrais complexas, em somatórios de funções que se reduzem as incógnitas nos nós que delimitam as extremidades dos elementos, obtendo os valores internos aos elementos através de funções interpoladoras.

Ratificando a necessidade e utilidade do MEC, aplicam-se, posteriormente as fundamentações necessárias, aos casos específicos da Engenharia Civil em que os métodos tradicionais não oferecem o suporte desejável, deixando em questão as situações de segurança e economia dos projetos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Elementos de Contorno.

BALBINO, T. S. **Determination of efforts into slabs by the method of boundary elements.** 2012. 57 f. Working End of Course Civil Engineering - Faculty of Engineering Guaratinguetá, University State of São Paulo, Guaratinguetá, 2012.

### **ABSTRACT**

Through deductions and formulations of the equations governing the behavior of plates elastic and thin based Kirchhoff theory, it is evident that it is justifiable to the complication of the numerical methods considering the complexity of the equations that describe the physical behavior of these elements and obtaining analytical solutions for specific situations.

This study is directed to the application of the numerical method which is based on discretizations to the simplest elements which results in the reduction of data to be processed from. The numerical method in question is the Boundary Element Methods (BEM), as the name suggests, the discretizations are only the edges of the elements.

The BEM converts the complex integral equations, in sums of functions that reduce the unknowns at the nodes that define the ends of discrete elements, obtaining internal values to elements using interpolation functions.

Confirming the need and usefulness of the BEM, apply, then the foundations necessary to the specific cases of Civil Engineering where traditional methods do not provide the desired support, leaving in question the security situations and economics of the projects.

**KEYWORDS:** Boundary elements.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Superfície média da placa após a deformação .....	19
Figura 2 - Representações de Tensões e Momentos .....	21
Figura 3 - Momentos Fletores (por unidade de comprimento).....	22
Figura 4 - Momentos de Torção (por unidade de comprimento) .....	22
Figura 5 - Cortantes (por unidade de comprimento) .....	22
Figura 6 - Representação do domínio, pontos de carregamento “q” e de deslocamentos “p” .	24
Figura 7 - Acréscimo de um contorno circular.....	26
Figura 8 - Discretização do contorno da placa (apenas elementos lineares).....	27
Figura 9 - Descrição geométrica o elemento linear .....	28
Figura 10 - Laje isolada com dois lados engastados e dois lados apoiados .....	34
Figura 11 - Malha 1 (72 elementos, 76 nós externos, 35 nós internos).....	35
Figura 12 - Malha 2 (144 elementos, 148 nós externos, 35 nós internos).....	36
Figura 13 - Representação dos cortes passando pelos nos internos na direção horizontal.....	37
Figura 14 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores da Malha 1 .....	38
Figura 15 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores da Malha 1 em forma de superfície tridimensional .....	38
Figura 16 - Representação dos cortes passando pelos nos internos na direção horizontal.....	39
Figura 17 - Gráfico Momentos Fletores Malha 2 .....	40
Figura 18 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores da Malha 2 em forma de superfície tridimensional. ....	40
Figura 19 - Discretização da malha 1 com alvenaria concentrada .....	43
Figura 20 - Discretização da malha 2 com alvenaria concentrada .....	44
Figura 21 - Gráfico Momentos Fletores Malha 1 – Alvenaria concentrada.....	45
Figura 22 - Gráfico – Superfície 3D Momentos Fletores Malha 1 Alvenaria concentrada.....	45
Figura 23 - Gráfico – Momentos Fletores Malha 2 Alvenaria concentrada .....	46
Figura 24 - Gráfico Superfície 3D Momentos Fletores Malha 1 – Alvenaria concentrada.....	47
Figura 25 - Momentos Máximos Tabelas de Czerny .....	47
Figura 26 - Momentos Máximos MEC – carga da alvenaria distribuída por toda laje .....	48
Figura 27 - Momentos Máximos MEC – carga da alvenaria concentrada no local real .....	48
Figura 28 - Laje parcialmente engastada e apoiada.....	49
Figura 29 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores Lajes parcialmente engastadas.....	50
Figura 30 - Gráfico Superfície 3D Momentos Fletores – Laje parcialmente engastada .....	51

Figura 31 - Discretização laje circular (40 elementos, 80 nós externos e 13 nós internos) .....	52
Figura 32 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores da Laje Circular .....	53
Figura 33 - Gráfico Variação dos Momentos para lajes circular e quadrada .....	55

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores dos Momentos Fletores da Malha 1 .....	37
Tabela 2 - Valores dos Momentos Fletores da Malha 2 .....	39
Tabela 3 - Momentos na direção do corte Mx4 da Malha 1 .....	42
Tabela 4 - Momentos na direção do corte Mx4 da Malha 2.....	42
Tabela 5 - Momentos fletores malha 1 com alvenaria concentrada .....	44
Tabela 6 - Momentos fletores malha 2 com alvenaria concentrada .....	46
Tabela 7 - Momentos Fletores Laje com borda parcialmente engastada .....	50
Tabela 8 - Momentos Fletores para laje circular .....	53
Tabela 9 - Mx Laje quadrada lado 400 cm.....	54

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO .....	13
1.1.	MOTIVAÇÃO .....	13
1.2.	REFERÊNCIAS .....	14
2.	OBJETIVO .....	16
3.	TEORIA DA ELASTICIDADE .....	17
4.	TEORIA DAS PLACAS DE PRIMEIRA ORDEM .....	19
4.1.	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACA DE PRIMEIRA ORDEM.....	24
4.2.	EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS .....	25
5.	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	27
6.	PROGRAMA PLACAS2.FOR .....	32
6.1.	ENTRADA DE DADOS .....	32
6.2.	MONTAGEM DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES: SUB-ROTINA MATPD2.FOR.....	32
6.3.	RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS: SUB-ROTINA GAUPD.FOR	32
6.4.	CÁLCULO DOS ESFORÇOS NO CONTORNO E DESLOCAMENTOS NOS PONTOS INTERNOS E DO CONTORNO .....	32
6.5.	CÁLCULO DOS ESFORÇOS, $M_x$ , $M_y$ E $M_{xy}$ , NOS PONTOS INTERNOS .....	33
7.	APLICAÇÕES PRÁTICAS .....	34
7.1.	EXEMPLO 1 – LAJE RETANGULAR COM CARGA DE ALVENARIA APOIADA DIRETAMENTE SOBRE A LAJE .....	34
7.1.1.	RESULTADOS OBTIDOS PELO MEC .....	36
7.1.1.1.	MALHA 1 .....	36
7.1.1.2.	MALHA 2 .....	39
7.1.2.	RESULTADOS OBTIDOS PELAS TABELAS DE CZERNY .....	41
7.1.3.	VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MEC .....	42
7.1.4.	APLICAÇÃO DO MEC PARA CARGAS DAS ALVENARIAS CONCENTRADA .....	43
7.1.5.	ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS DO EXEMPLO 1 .....	47
7.2.	EXEMPLO 2 – LAJE PARCIALMENTE ENGASTADA E APOIADA .....	49
7.2.1.	RESULTADOS OBTIDOS PELO MEC .....	49
7.2.2.	RESULTADOS OBTIDOS PELA TABELAS DE CZERNY .....	51
7.2.3.	ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS DO EXEMPLO 2 .....	51
7.3.	EXEMPLO 3 – LAJE CIRCULAR REPRESENTANDO FUNDO DE RESERVATÓRIO .....	52
7.3.1.	RESULTADOS OBTIDOS PELO MEC .....	52

7.3.2. RESULTADOS OBTIDOS PELAS TABELAS DE CZERNY .....	54
7.3.3. CÁLCULO DA LAJE QUADRADA PELO MEC .....	54
7.3.4. ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS DO EXEMPLO 3 .....	55
8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	56
REFERÊNCIAS .....	57

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. Motivação

Na engenharia estrutural encontram-se problemas para determinação de esforços que muitas vezes não são possíveis serem solucionados com formulações analíticas disponíveis na literatura. Para obtenção de resultados satisfatórios para estes problemas conta-se com o auxílio de computadores para resoluções aproximadas como as obtidas pelos métodos numéricos.

Os métodos numéricos vêm sendo amplamente utilizados nos diversos campos da engenharia e aplicados com resultados satisfatórios para a solução de diversos problemas em que seria muito complexa ou até mesmo impossível a solução analítica.

Os métodos numéricos mais difundidos atualmente são os Métodos das Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

O Método das Diferenças Finitas (MDF) consiste em transformar o sistema de equações diferenciais em um sistema algébrico, através de aplicações de operadores diferenciais que aproximam cada uma das derivadas parciais contínuas, usando expansões locais, geralmente séries de Taylor truncadas, para representar as variáveis em sub-regiões convenientemente definidas. O surgimento deste método se deu no início deste século, através de Runge e ao trabalho de SOUTHWELL, e continua ainda hoje adequado a solução de vários problemas de engenharia.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), desde o início dos anos sessenta, tornou-se o procedimento mais usado e difundido para a solução dos mais diversos problemas de engenharia. Apresenta como grande característica o significado físico intuitivo que consiste em dividir o meio contínuo em uma série de elementos, equacionando-os individualmente como sub-regiões contínuas e reunindo-os para a solução do problema como um todo. Para tal torna-se necessário associarem-se nós a cada elemento e escolherem-se funções aproximadas para representar os valores das variáveis em quaisquer pontos do contínuo, a partir dos valores nodais das mesmas.

Atualmente, a maioria dos programas computacionais disponíveis está fundamentada no Método dos Elementos Finitos. Um dos grandes problemas da utilização deste método é a exigência de um alto grau de refinamento na discretização do domínio de forma a obterem-se níveis de precisão adequada, como ocorre no caso de problemas de concentração de tensões.

Nestes casos tem-se conseqüentemente um grande volume de dados em um sistema com elevado número de equações.

Como alternativa aos métodos de domínio (MDF e MEF), atualmente, encontra-se em desenvolvimento o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Neste método as variáveis básicas do problema são calculadas em pontos discretos, definidos apenas sobre o contorno. Os valores das variáveis nos pontos do interior do domínio são calculados diretamente a partir dos valores de contorno, somente nos pontos de real interesse. Como característica vantajosa do método deve-se notar que ocorre sempre uma redução na dimensão do problema analisado, reduzindo-se também o volume de dados de entrada, o tempo de processamento e a área de memória auxiliar para armazenamento das informações necessárias.

Neste trabalho será realizado o estudo da aplicação do MEC em algumas situações da Engenharia Civil, especificamente no cálculo de esforços em lajes. Para tal estudo foi necessário a utilização de teorias disponíveis na literatura e deduções já consagradas como o estudo das placas elásticas e delgadas de Kirchhoff (1850).

## 1.2. Referências

O Método dos Elementos de Contorno originou-se como uma evolução natural das técnicas de resolução de equações integrais de contorno, tais como, as aplicadas em problemas de elasticidade por Betti (1872), por Kupradze (1965), por Rizzo (1967).

O desenvolvimento de formulações para a análise de placas através do Método dos Elementos de Contorno, e sua aplicação prática na engenharia estrutural se deu posteriormente à introdução do método à análise de tensões em problemas de elasticidade bi e tridimensionais. Nesse campo de aplicação, a maioria dos trabalhos desenvolvidos se baseia nas hipóteses da teoria clássica de Kirchhoff. O trabalho considerado como referência inicial é devido a JASWON publicado em 1967.

Posteriormente, em 1976, HANSEN, apresentou uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos de contorno não carregado.

BEZINE e GAMBY propuseram, em 1978, uma formulação que se distingue das duas anteriores por se tratar de uma formulação direta. Partindo da identidade de Green e considerando como variáveis do contorno as variáveis físicas do problema real, isto é, o deslocamento transversal e a sua derivada na direção normal ao contorno, ou respectivamente, a força

cortante equivalente e o momento fletor na direção normal. Foram efetuadas aplicações práticas para diversas placas quadradas com várias combinações e condições de contorno.

Outros trabalhos, também falando sobre formulação direta e teoria de Kirchhoff, foram desenvolvidos por BEZINE e STERN.

ALTIERO e SIKARSKIE e WU e ALTIERO, trataram o problema de placas através da formulação indireta, resolvendo exemplos práticos apenas para contornos engastados e relatando as dificuldades numéricas para a consideração de outros tipos de contorno.

Ainda com base nas hipóteses de Kirchhoff, PAIVA trabalhou com diversas alternativas para equacionamento do problema de placas.

Vários outros trabalhos tratando da análise de placas finas foram publicados nos últimos anos.



## 2. OBJETIVO

O objetivo deste estudo é a apresentação do Método dos Elementos de Contorno (MEC), aplicado a placas delgadas, para a utilização em problemas na Engenharia Civil, especificamente no cálculo de esforços em lajes. Será realizada a análise e comparação dos resultados obtidos através deste método numérico com os resultados determinados através das tabelas já consagradas para cálculo de esforços em lajes, como as tabelas de Czerny.

Para tal comparação serão utilizados alguns exemplos nos quais as tabelas de cálculos apresentam certas limitações nas suas aplicações, como em placas de bordas curvas ou para a representação mais precisa dos carregamentos, etc.

Para um bom entendimento do método faz-se necessário anteriormente as aplicações, a apresentação de alguns conceitos utilizados na formulação deste método, como a Teoria da Elasticidade, Teoria da Placas de Kirchhoff e o Teorema de Betti, os quais serão apresentados a partir do capítulo 3.

Após a Formulação do Método dos Elementos de Contorno serão apresentados os exemplos nos quais serão discutidas situações específicas para a determinação dos esforços.

No exemplo 1 e 2 serão calculados os esforços em uma laje retangular com o auxílio da tabela de Czerny e com a aplicação do MEC para carga de alvenaria totalmente distribuída pela laje, semelhante às condições de Czerny, e alvenaria localizada especificamente na região concentrada da mesma.

No exemplo 3 calcula-se o esforço em uma laje circular pelo MEC e por tabelas. As lajes circulares são calculadas com aproximações grosseiras através das tabelas de cálculo, já que estas tabelas só oferecem casos para lajes retangulares.

Para cada exemplo serão apresentados os resultados, as análises e as discussões das soluções encontradas.

### 3. TEORIA DA ELASTICIDADE

Na Teoria da Elasticidade estudam-se as relações entre as forças externas, deslocamentos, deformações e tensões em um corpo constituído de material elástico.

Elasticidade é a propriedade dos corpos que submetidos a ação de forças externas se deformam, e retornam completamente a sua forma original inicial quando estas forças deixam de atuar.

Na teoria da elasticidade existe a distinção entre “Estado Plano de Tensão” e “Estado Plano de Deformação”. Neste estudo aplica-se o Estado Plano de Tensão, em que as dimensões do elemento nas direções x e y são bem maiores do que na direção z e nas equações apresentadas a seguir a tensão normal na direção z será considerada nula, já o Estado Plano de Deformação são as deformações na direção do eixo z é que são consideradas nulas.

As principais equações desenvolvidas serão as relações de deformação-deslocamento e relações constitutivas.

Equações Constitutivas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{E} [\sigma_x - \sigma_y] \quad (3.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.4)$$

Onde,

$\nu$  e o coeficiente de Poisson;

$E$  módulo de elasticidade longitudinal;

$G$  módulo de Elasticidade transversal;

A relação entre estes dois módulos é dada pela equação:

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (3.5)$$

As equações que relacionam deformação-deslocamento que envolvem as componentes de deslocamentos u e v são representadas a seguir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.7}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.8}$$

#### 4. TEORIA DAS PLACAS DE PRIMEIRA ORDEM

Como se trata do estudo de lajes cujo elemento representativo será a placa delgada, será aplicada a teoria das placas elásticas baseadas na teoria de Kirchhoff. São consideradas algumas hipóteses para as formulações:

- Espessura da placa pequena em relação às outras dimensões da placa;
- Material homogêneo e isotrópico;
- Linearidade física, ou seja, a relação entre tensão e deformação obedece a Lei de Hooke.
- Linearidade geométrica, isto significa que as deformações da placa serão muito pequenas e a condição de equilíbrio adotada será aplicada a placa indeformada.
- As forças cortantes e as tensões normais serão desprezadas;
- Não há cargas externas paralelas ao plano médio;
- O plano médio não se deforma permanecendo neutro após deformação.

Em posse das hipóteses apresentadas relacionam-se os deslocamentos nos planos  $Oxz$  e  $Oyz$  conhecendo a função  $w(x,y)$  para os deslocamentos na direção  $Oz$  da placa. Através da representação gráfica podem-se observar as seguintes relações:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.2)$$

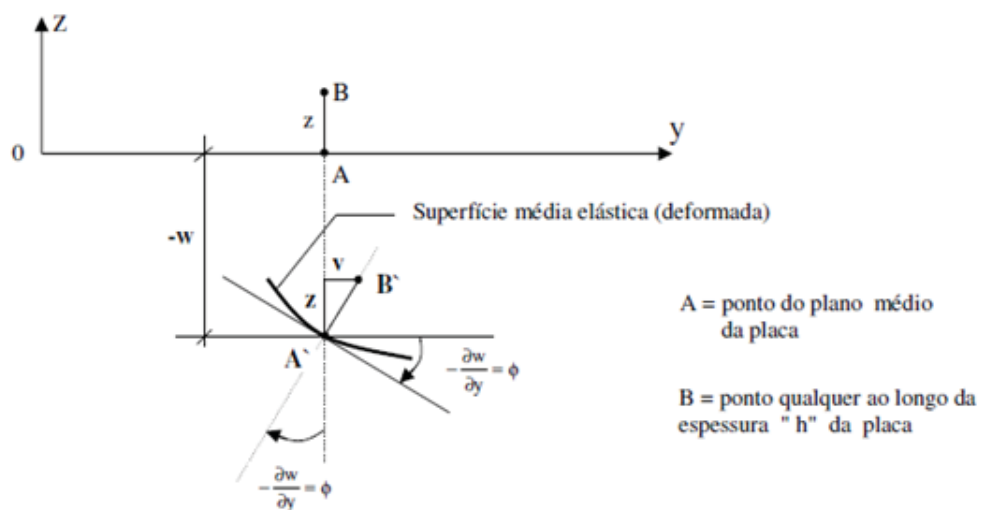


Figura 1 - Superfície média da placa após a deformação

Com o auxílio das expressões determinadas pela Teoria da Elasticidade podem-se escrever as relações deformação/deslocamento em função de  $w$ .

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.4)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.5)$$

E conseqüentemente será possível representar as tensões e deformações em função de  $w$ , substituindo as relações acima apresentadas nas expressões determinadas pela Teoria da Elasticidade que relacionam tensão/deformação como segue representadas nas equações 4.7, 4.9 e 4.11.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (4.6)$$

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.7)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.8)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.9)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (4.10)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{(1+\nu)} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.11)$$

Assim observa-se que todas as tensões serão determinadas com o conhecimento da função  $w(x,y)$ .

Conhecendo as tensões ao longo da espessura da placa poderão ser determinados os momentos integrando estas tensões de  $-h/2$  a  $h/2$ .

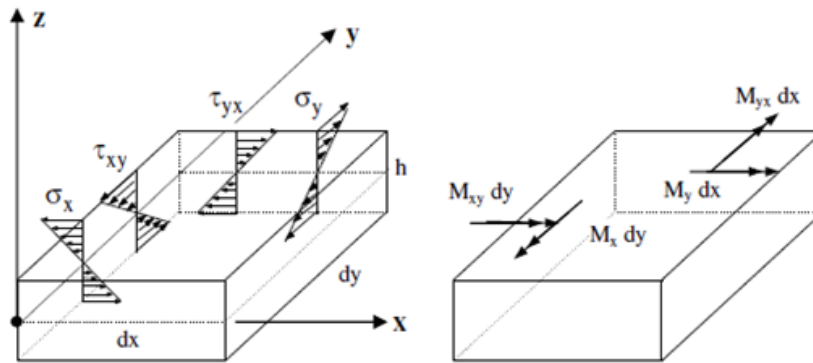


Figura 2 - Representações de Tensões e Momentos

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z(\sigma_x \cdot 1) dz \quad (4.12)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z(\sigma_y \cdot 1) dz \quad (4.13)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z(\tau_{xy} \cdot 1) dz \quad (4.14)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (4.15)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} dz \quad (4.16)$$

Integrando-se todas as expressões utilizando as tensões determinadas em função do deslocamento  $w$  e definindo o parâmetro chamado de rigidez da placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.17)$$

Tem-se:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.18)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.19)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.20)$$

Com isto também se tem os momentos definidos com o conhecimento da função  $w(x,y)$ . Para a determinação da função  $w(x,y)$  aplica-se as condições de equilíbrio:

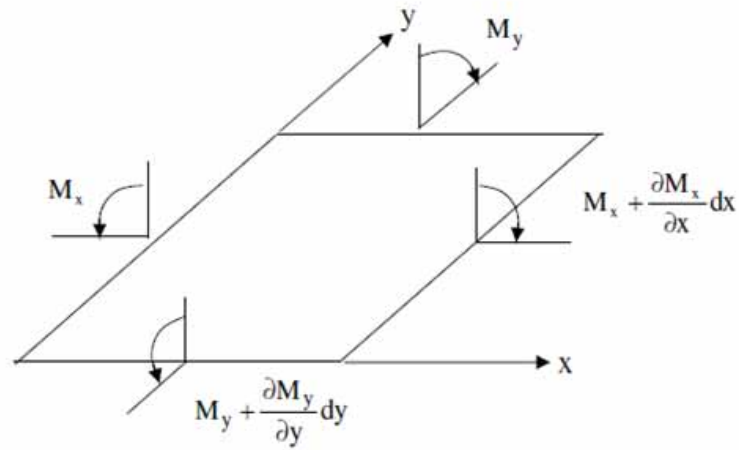


Figura 3 - Momentos Fletores (por unidade de comprimento)

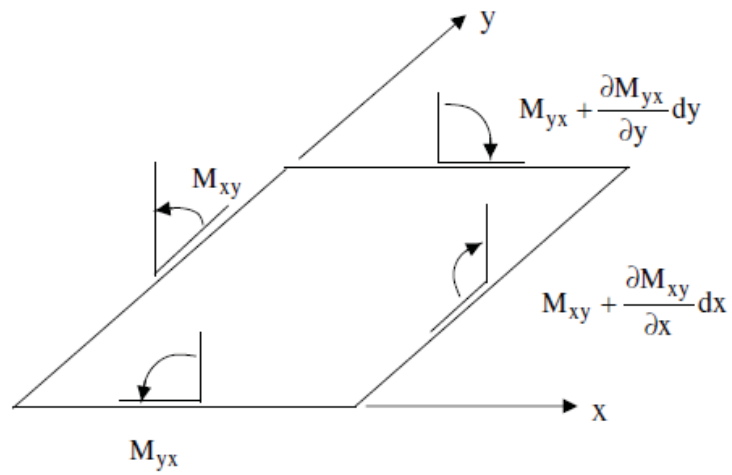


Figura 4 - Momentos de Torção (por unidade de comprimento)

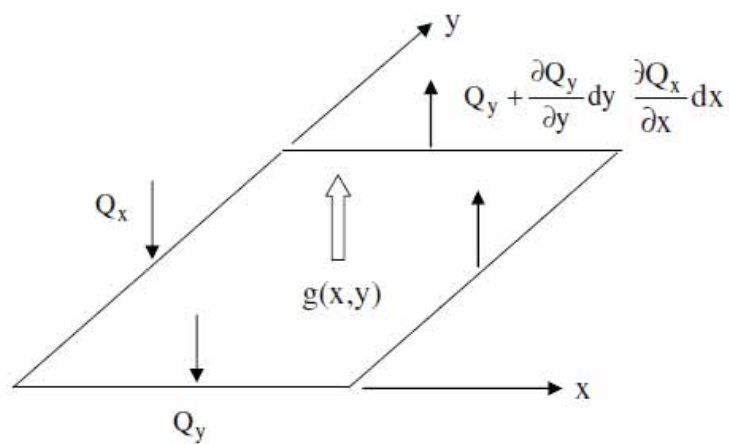


Figura 5 - Cortantes (por unidade de comprimento)

Equilíbrio de forças na vertical:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + g dx dy = 0 \quad (4.21)$$

de onde,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -g(x, y) \quad (4.22)$$

Equilíbrio de momentos em torno do eixo 0x:

$$\left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - M_{xy} dy + \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_y dx - Q_y dx dy = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (4.24)$$

Equilíbrio de momentos em torno do eixo 0y:

$$\left( M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - M_{yx} dx + \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy - Q_x dx dy = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad (4.26)$$

Substituindo nas expressões de forças verticais (equação 4.22), os esforços em função dos momentos determinado nas equações 4.24 e 4.26, chega-se à expressão abaixo realizando alguma manipulação algébrica.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = -g \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -g \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -g \quad (4.29)$$

Agora substituindo os momentos pelas expressões 4.18, 4.19 e 4.20 encontradas anteriormente, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + \frac{2\partial^2}{\partial x \partial y} \left( -D(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) = -g \quad (4.30)$$

$$-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - v \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2v \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - v \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{g}{D} \quad (4.31)$$



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} \quad (4.32)$$

Esta é a equação diferencial geral das placas e pode ser escrita da forma:

$$\nabla^4 w = \frac{g}{D} \quad (4.33)$$

ou

$$\nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{g}{D} \quad (4.34)$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.35)$$

é o operador Laplaciano.

#### 4.1. Solução fundamental de placa de primeira ordem

A solução fundamental é a resposta encontrada em um ponto genérico “p” de um domínio devido a uma carga unitária aplicada a outro ponto “q” deste domínio.

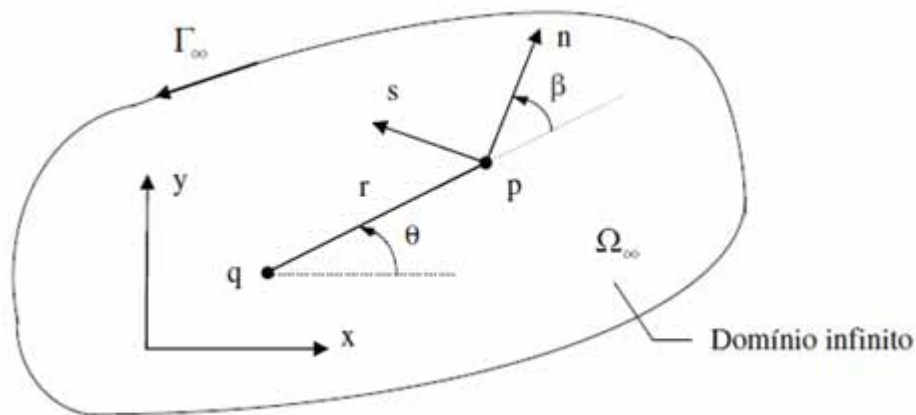


Figura 6 - Representação do domínio, pontos de carregamento “q” e de deslocamentos “p”

No caso de placas a solução fundamental será o deslocamento  $w^*$  num ponto de coordenadas  $\{x(p), y(p)\}$  devido a uma carga unitária aplicada ao ponto de carregamento de coordenadas  $\{x(q), y(q)\}$ .

A solução fundamental será obtida a partir da equação:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \frac{\delta(q,p)}{D} \quad (4.1.1)$$

A solução fundamental  $w^*$  é obtida a partir da equação diferencial – 4.1.1 aplicada a todos os pontos do domínio exceto ao ponto de carregamento “q”.

Após algumas manipulações algébricas chega-se à solução fundamental:

$$w^* = \frac{r^2}{8\pi D} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (4.1.2)$$

onde:

$$r = \{ [x(p) - x(q)]^2 + [y(p) - y(q)]^2 \}^{1/2} \quad (4.1.3)$$

## 4.2. Equações Integrais para Flexão de Placas

Na formulação do Método dos Elementos de Contorno são necessárias equações Integrais que envolvem as soluções fundamentais obtidas anteriormente.

Sua obtenção pode ser feita através do Teorema de Reciprocidade de Betti, que aplicado em uma placa submetida a carregamentos não simultâneos  $g$  e  $g^*$ , dão origem a dois estados de tensão e deformação distintos.

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad i, j = 1, 2, 3 \dots \quad (4.2.1)$$

Assim obtêm-se as equações integrais referentes ao deslocamento  $w(q)$ :

$$w(q) + \int_{\Gamma} \left\{ V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right\} d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} = \int_{\Gamma} \left\{ V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right\} d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (4.2.2)$$

A equação 4.2.2 será válida apenas para os pontos “q” do domínio, entretanto, são necessárias equações integrais para pontos “Q” do contorno.

Seja a figura abaixo, onde o ponto “Q” inicialmente encontra-se sobre o contorno. Devido a um acréscimo de um contorno circular de centro em “Q”, agora este ponto pertence ao domínio.

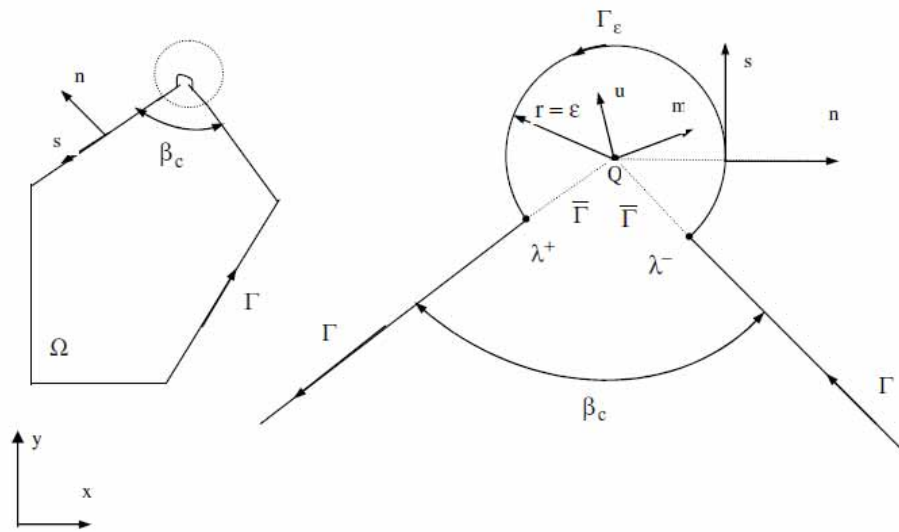


Figura 7 - Acréscimo de um contorno circular

Após a modificação do domínio da placa, a equação integral anterior do deslocamento para o ponto “Q”, à medida que o raio se aproxima de zero o ponto “Q” se aproxima do contorno e na condição limite, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 & w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}} \left\{ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \\
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma_\varepsilon(P) + \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ (R_{c\lambda^-}^*(Q, P) w_{c\lambda^-}(P)) + (R_{c\lambda^+}^*(Q, P) w_{c\lambda^+}(P)) \right] = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}} \left\{ V_n(Q, P) w^*(P) - \right. \\
 & \left. M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} d\Gamma(P) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ V_n(Q, P) w^*(P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} d\Gamma_\varepsilon(P) + \\
 & \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ (R_{c\lambda^-}(P) w_{c\lambda^-}^*(Q, P)) + (R_{c\lambda^+}(P) w_{c\lambda^+}^*(Q, P)) \right] + \\
 & \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega(p) \tag{4.2.3}
 \end{aligned}$$

Após os cálculos dos limites tem-se:

$$\begin{aligned}
 & K(Q) w(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \\
 & \int_{\Gamma} \left\{ V_n(Q, P) w^*(P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}(P) w_{ci}(Q, P) + \\
 & \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q, P) d\Omega(P) \tag{4.2.4}
 \end{aligned}$$

## 5. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

As equações integrais do deslocamento são praticamente impossíveis de serem resolvidas analiticamente. Uma alternativa é a resolução destas equações através de métodos numéricos, transformando-as em equações algébricas.

Utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno, essa transformação é feita dividindo-se o contorno da placa em segmentos, os quais recebem o nome de “elementos de contorno” onde os deslocamentos e esforços nestes pequenos segmentos são aproximados por funções interpoladoras, que fornecem os valores dos deslocamentos e esforços, de pontos do elemento, em função dos seus valores nodais.

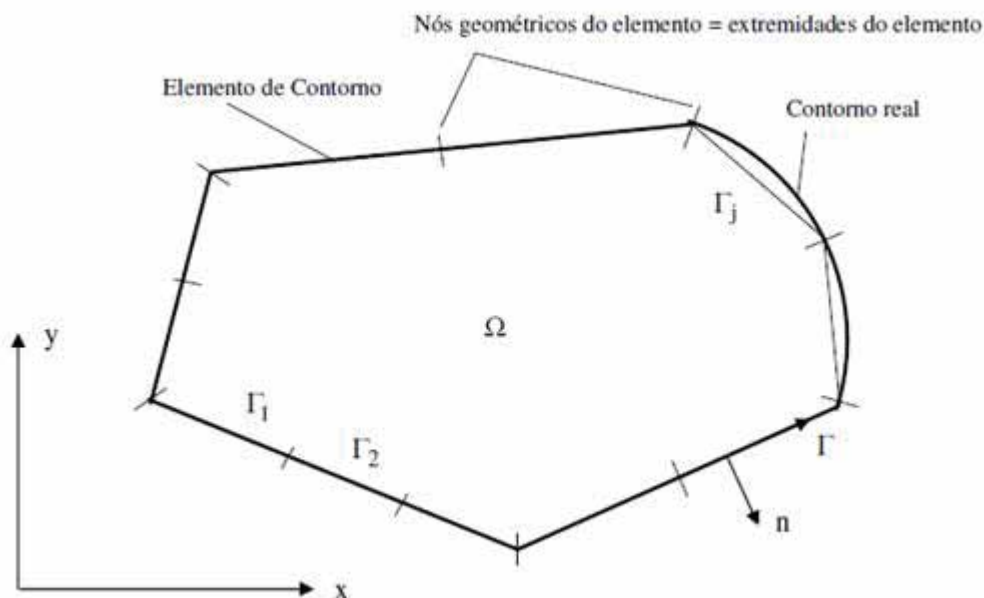


Figura 8 - Discretização do contorno da placa (apenas elementos lineares)

Assim, cada equação integral terá sua correspondente equação algébrica, podendo-se definir um sistema de equações nos pontos de contorno. Sabendo-se as condições de contorno dos problemas, o sistema é resolvido em termos dos valores de contorno, podendo-se posteriormente, extrapolar os resultados para todo domínio.

Com o propósito de facilitar os cálculos das integrações numéricas, expressam-se as coordenadas de cada ponto “P” de um elemento “j”, em função das coordenadas locais homogêneas em termos de matrizes.

$$\underline{x}(P) = \underline{\psi}^T(P)\underline{X}^N \quad (5.1)$$

onde,

$$\underline{x}(P) = \begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\underline{\psi}^T(P) = \begin{Bmatrix} \underline{\varphi}^T(P) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\varphi}^T(P) \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\underline{X}^N = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

O índice N é utilizado para indicar valores nodais.  $x_i^N$  é coordenada nodal do nó “N” na direção “i”.

O vetor da função interpoladora é dada por:

$$\underline{\varphi}(P) = \begin{Bmatrix} \phi_1(P) \\ \phi_2(P) \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

onde,

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.6)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.7)$$

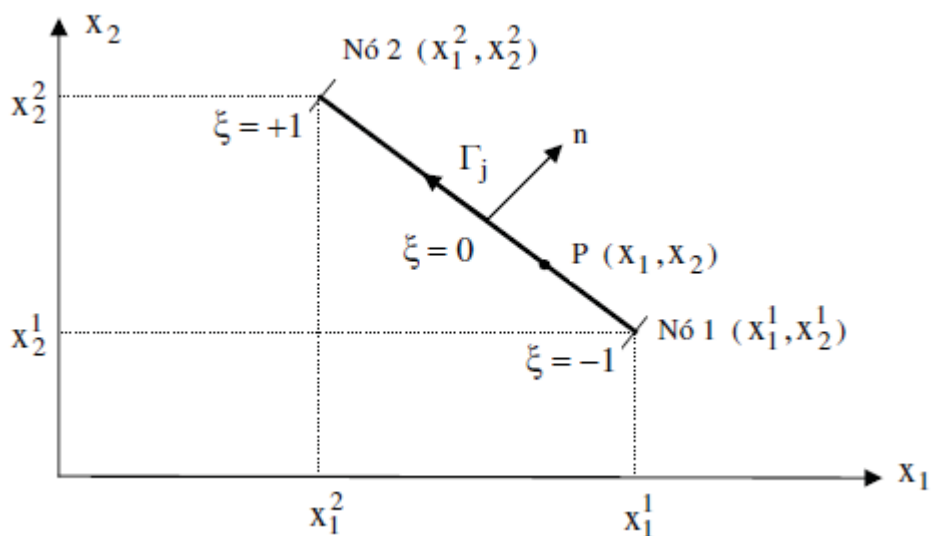


Figura 9 - Descrição geométrica o elemento linear

De maneira análoga à geometria, podem-se expressar as variáveis  $\underline{u}(P)$  e  $\underline{p}(P)$  (deslocamentos e esforços) sobre cada elemento, através de funções aproximadas “ $\Phi$ ” e valores nodais  $\underline{U}^N$  e  $\underline{P}^N$ .

$$\underline{u}(P) = \underline{\phi}^T(P)\underline{U}^N \quad (5.8)$$

$$\underline{p}(P) = \underline{\phi}^T(P)\underline{P}^N \quad (5.9)$$

ou escrita explicitamente:

$$\begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P)\phi_2(P) & \phi_1(P)\phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P)\phi_2(P) & \phi_1(P)\phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Assim, para um elemento qualquer “j”, os deslocamentos e esforços nos pontos nodais serão:

$$u_1(P) = w(P) \quad U_1^1 = w^1 \quad U_1^2 = w^2 \quad (5.12)$$

$$u_2(P) = \frac{\partial w}{\partial n}(P) \quad U_2^1 = \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad U_2^2 = \frac{\partial w^2}{\partial n} \quad (5.13)$$

$$p_1(P) = V_n(P) \quad P_1^1 = V_n^1 \quad P_1^2 = V_n^2 \quad (5.14)$$

$$p_2(P) = M_n(P) \quad P_2^1 = M_n^1 \quad P_2^2 = M_n^2 \quad (5.15)$$

A equação integral do deslocamento  $w(Q)$ , de um ponto “Q” qualquer do contorno, pode ser escrita de forma genérica como:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q, P)\underline{u}(P)d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \underline{p}_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) \\ = \int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q, P)\underline{p}(P)d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} u_{ci}^*P_{ci}^*(Q, P)R_{ci}(P) + \int_{\Omega_g} g(p)u_g^*(Q, p)d\Omega(p) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Onde os esforços e os deslocamentos são expressos através de variáveis generalizadas. Assim, tem-se:

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (5.17)$$

$$u(Q) = w(Q) \quad (5.18)$$

$$\underline{u}(P) = \left\{ \begin{array}{l} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{array} \right\} \quad (5.19)$$

$$\underline{p}(P) = \left\{ \begin{array}{l} V_n(P) \\ M_n(P) \end{array} \right\} \quad (5.20)$$

$$\underline{p}^*(Q, P) = \{V_n^*(Q, P) - M_n^*(Q, P)\} \quad (5.21)$$

$$\underline{u}^*(Q, P) = \left\{ w^*(Q, P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} \quad (5.22)$$

$$P_{ci}^*(Q, P) = R_{ci}^*(Q, P) \quad (5.23)$$

$$u_{ci}^*(Q, P) = w_{ci}^*(Q, P) \quad (5.24)$$

$$u_g^*(Q, p) = w^*(Q, p) \quad (5.25)$$

Considerando-se o contorno da placa discretizado por “Ne” elementos e substituindo-se as variáveis por suas aproximações, a equação 5.16 fica:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) + \sum_{i=1}^{Ne} \underline{p}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \underline{U}_j^N + \\ \sum_{i=1}^{Ne} p_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{Ne} \underline{u}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma(P) P_j^N + \sum_{i=1}^{Ne} u_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + \\ \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Portanto, impondo-se as condições de contorno a todos os “Ne” nós da equação acima, tem-se “2Ne” incógnitas, o que torna necessário a utilização de duas equações para cada nó, para definir um sistema de equações lineares.

$$\underline{HU} = \underline{GP} + \underline{T} \quad (5.27)$$

O sistema de equações lineares pode ser resolvido levando-se todas as incógnitas para o primeiro membro, e todas as parcelas conhecidas para o segundo membro, obtendo-se:

$$\underline{AX} = \underline{B} \quad (5.28)$$

Onde  $X$  é o vetor das incógnitas procuradas, composto por deslocamentos e esforços nodais.



## **6. PROGRAMA PLACAS2.FOR**

O programa Placas2.for foi desenvolvido pelo Prof. Yzumi Taguti do departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – UNESP.

Este programa calcula os esforços numa placa delgada aplicando o Método dos Elementos de Contorno e será utilizado neste trabalho para obtenção das soluções pretendidas.

### **6.1. Entrada de dados**

É feita a leitura de todos os dados através de um arquivo (\*.dat), para definir o problema:

- a) Sobre a discretização pretendida: Número de nós, de elementos, coordenadas nodais, incidência dos elementos, dos nós e tipo de elemento (linear, constante ou parabólico) e condições de contorno;
- b) Carregamentos e condições de contorno: valor da carga, região da aplicação da carga;
- c) Características dos materiais: Módulo de Elasticidade do material, E, coeficiente de Poisson,  $\nu$ .

### **6.2. Montagem dos sistemas de equações: sub-rotina matpd2.for**

As matrizes H, G, Hc e Gc são geradas através da sub-rotina MATPD2.FOR. As integrações necessárias são realizadas pela sub-rotina INTPD.FOR. Após a obtenção dessas matrizes são impostas as condições de contorno do problema, o que permite a obtenção das matrizes Ac e Bc.

### **6.3. Resolução do Sistema de Equações Algébricas: sub-rotina GAUPD.FOR**

A resolução do sistema de equações é feita pelo processo de Gauss, obtendo-se assim o vetor das incógnitas no contorno,  $\underline{X}_c$ . Este vetor pode conter esforços ou deslocamentos nos nós do contorno e de canto.

### **6.4. Cálculo dos Esforços no Contorno e Deslocamentos nos Pontos Internos e do Contorno**

Após a obtenção das incógnitas no contorno, realizado pela sub-rotina GAUPD2, obtêm-se os deslocamentos em pontos internos, realizados pela sub-rotina SAINCOG.FOR.

### **6.5. Cálculo dos Esforços, $M_x$ , $M_y$ e $M_{xy}$ , nos Pontos Internos**

Após o conhecimento das incógnitas no contorno, os momentos fletores e de torção nos pontos internos são obtidos pela sub-rotina ESFORIND2.FOR. As integrações necessárias são realizadas através da sub-rotina INTIND.FOR.

## 7. APLICAÇÕES PRÁTICAS

Para a aplicação do MEC, serão apresentadas as situações específicas em que a aplicação das tabelas de cálculos de Czerny possui limitações para a determinação dos esforços que represente a situação mais próxima da realidade. Para cada exemplo serão mostrados os esforços determinados pelos dois métodos propostos, tanto o método numérico em questão quanto o método tradicional através das tabelas de Czerny para sua devida análise e comparação dos resultados obtidos.

### 7.1. Exemplo 1 – Laje retangular com carga de alvenaria apoiada diretamente sobre a laje

Para este exemplo será apresentada uma situação em que a alvenaria está apoiada diretamente sobre a laje de 10 cm de espessura e totalizando uma carga de  $6,25 \text{ kN/m}^2$ . Considerando o peso próprio da laje de  $2,5 \text{ kN/m}^2$ , a sobrecarga de  $1,5 \text{ kN/m}^2$  e alvenarias com carga distribuída por toda área da laje de  $1,4 \text{ kN/m}^2$  e restante da carga para revestimento e forro. Para o cálculo dos esforços será considerada que a laje está isolada e com as devidas vinculações no contorno. Para casos em que a laje deveria ser contínua será considerada que a borda está engastada (representada por linhas duplas) e para casos de não continuidade a borda da laje será considerada apenas apoiada (representada por linhas simples).

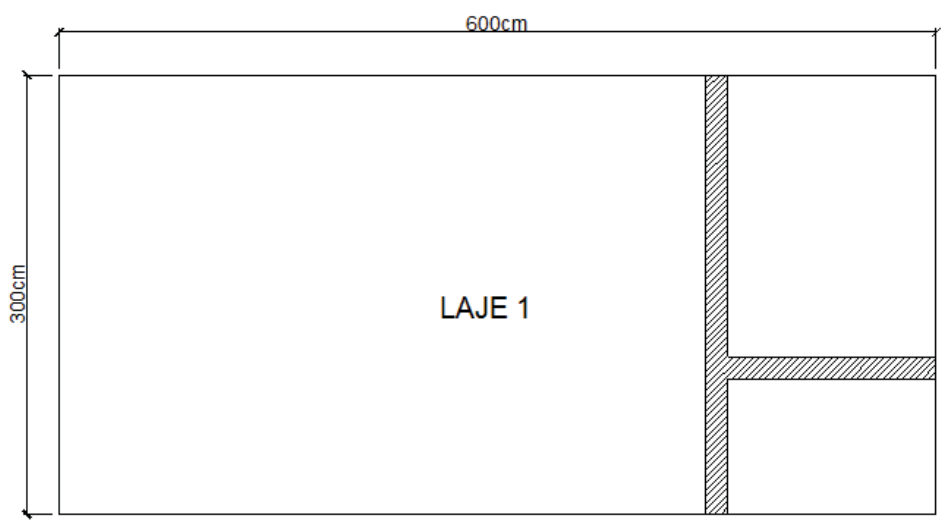


Figura 10 - Laje isolada com dois lados engastados e dois lados apoiados

Primeiramente será realizada a aplicação do MEC para situação em que a carga da alvenaria é distribuída por toda a área da laje 1, semelhante às considerações quando se utiliza as

tabelas de cálculo de Czerny. Realiza-se este procedimento para comparação e validação dos resultados obtidos pelo MEC.

Para aplicação do MEC, deve-se discretizar o contorno da laje. Neste caso foram realizadas duas discretizações, uma malha com poucos elementos e outra com a discretização mais refinada. Espera-se que os resultados sejam muito próximos para as duas situações, confirmando a não necessidade de um alto refinamento na malha para obtenção de resultados satisfatórios.

A malha1 possui 72 elementos e 76 nós externos. Já a malha2 possui 144 elementos e 148 nós externos. Ambas as malhas possuem 35 nós internos onde são calculados os esforços e deslocamentos.

Após a discretização das malhas, cria-se o arquivo de dados \*.dat, que contém as informações geométricas, condições de contorno, propriedades mecânicas dos materiais e carregamentos de cada malha para a utilização do programa PLACAS2.

Este programa fará a leitura dos dados e o cálculo através do MEC e os resultados serão apresentados na forma de tabelas. Neste trabalho foi feito o tratamento dos resultados utilizando a ferramenta gráfica do Excel que serão apresentados a seguir.

Seguem-se as malhas discretizadas:

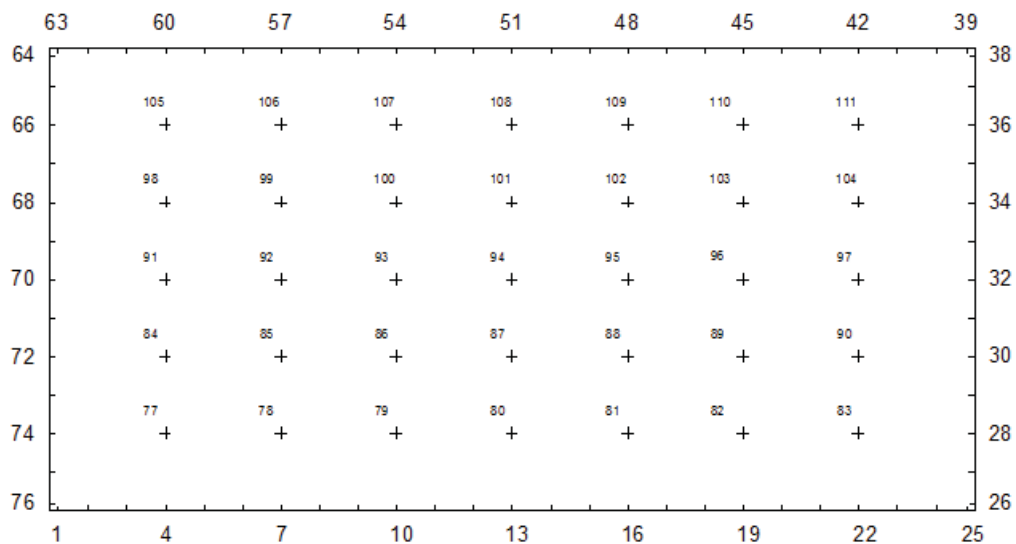


Figura 11 - Malha 1 (72 elementos, 76 nós externos, 35 nós internos)

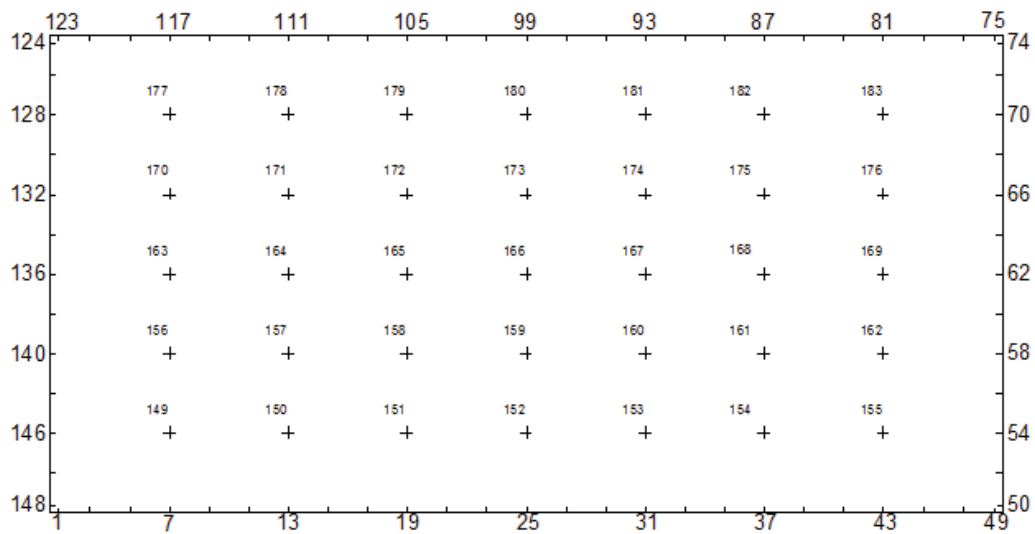


Figura 12 - Malha 2 (144 elementos, 148 nós externos, 35 nós internos)

### 7.1.1. Resultados obtidos pelo MEC

#### 7.1.1.1. Malha 1

Na malha 1, cada elemento possui 25 cm de comprimento, assim sabe-se que as coordenadas na direção x variam de 0 a 600 cm e as coordenadas do eixo y variam de 0 a 300 cm, a origem no canto 1 (C1), como mostrado em figura abaixo. Para a interpretação dos resultados foram definidos cortes horizontais passando pelos pontos internos para definição dos momentos nestes pontos. Para os momentos paralelos a borda horizontal inferior foi representado pelo corte Myn1 definido do nó 1 ao nó 25, para os momentos no interior da laje, são representados pelos cortes de Mx1 até Mx5, que começam na borda vertical esquerda até a borda vertical direita do desenho e finalmente os momentos paralelo a borda horizontal superior dado por Myn2.

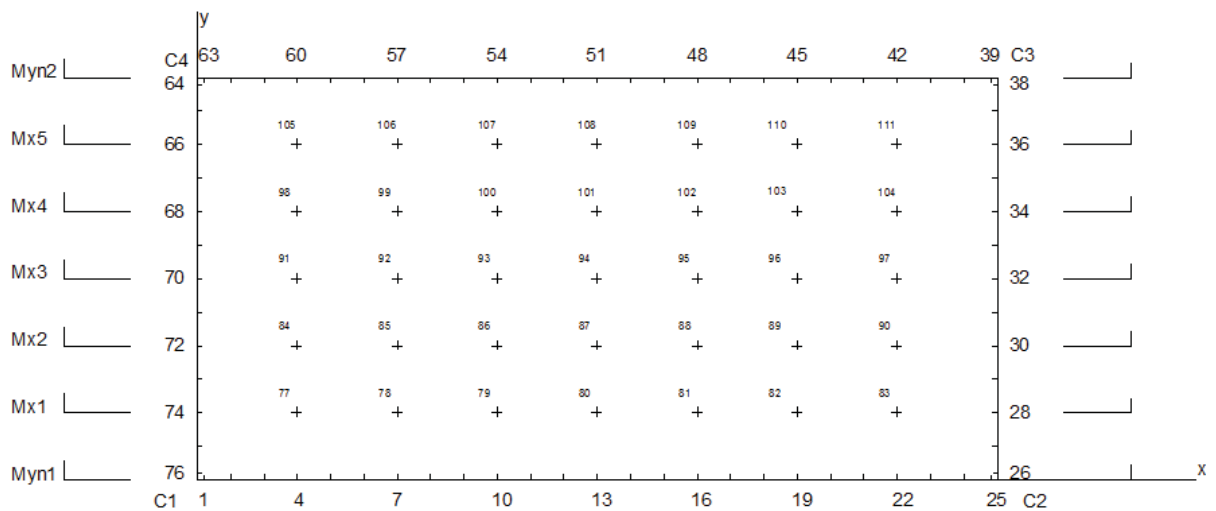


Figura 13 - Representação dos cortes passando pelos nós internos na direção horizontal

Momentos Fletores da Malha 1 (kN.cm/cm)								
X (cm)	Nó_myn1	Myn1	Nó_mx1	Mx1	Nó_mx2	Mx2	Nó_mx3	Mx3
0	1	0,748	74	0,000	72	0,000	70	0,000
75	4	4,057	77	-0,156	84	-0,895	91	-1,269
150	7	5,777	78	0,078	85	-0,795	92	-1,281
225	10	6,450	79	0,219	86	-0,633	93	-1,119
300	13	<b>6,516</b>	80	0,241	87	-0,597	94	-1,075
375	16	6,035	81	0,158	88	-0,681	95	-1,151
450	19	4,736	82	0,011	89	-0,721	96	-1,151
525	22	2,289	83	0,066	90	-0,062	97	-0,085
600	25	0,017	28	1,189	30	3,220	32	4,439

X (cm)	Nó_mx4	Mx4	Nó_mx5	Mx5	Nó_myn2	Myn2
0	68	0,000	66	0,000	63	0,000
75	98	-1,255	105	-0,833	60	0,000
150	99	<b>-1,305</b>	106	-0,857	57	0,000
225	100	-1,172	107	-0,777	54	0,000
300	101	-1,133	108	-0,752	51	0,000
375	102	-1,190	109	-0,785	48	0,000
450	103	-1,125	110	-0,744	45	0,000
525	104	-0,119	111	-0,142	42	0,000
600	34	<b>4,430</b>	36	3,005	39	0,000

Tabela 1 - Valores dos Momentos Fletores da Malha 1

Com auxílio dos gráficos pode-se visualizar melhor as distribuições dos esforços pela laje ao longo dos cortes realizados:

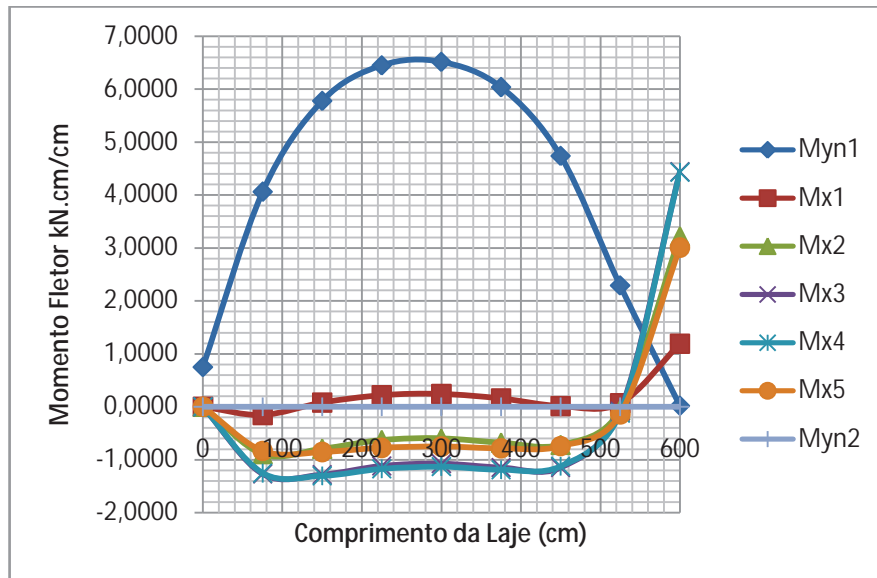


Figura 14 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores da Malha 1

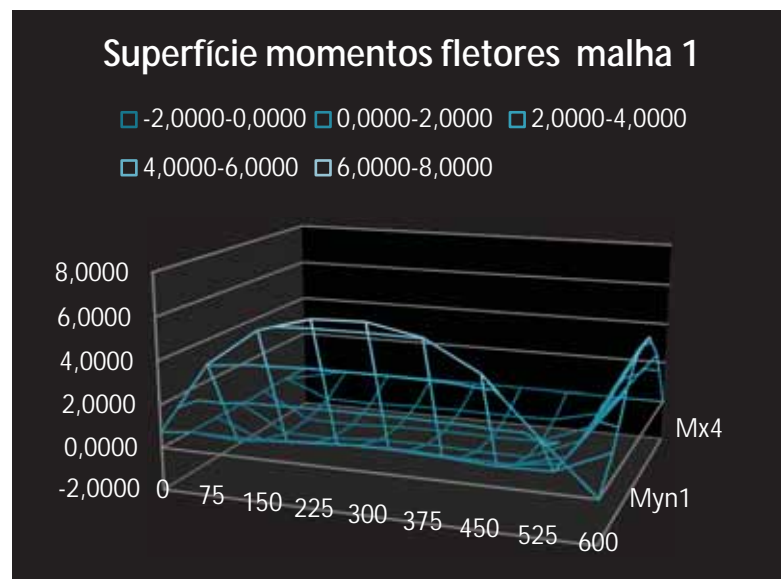


Figura 15 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores da Malha 1 em forma de superfície tridimensional

### 7.1.1.2. Malha 2

Na malha 2 foram realizados cortes horizontais passando pelos pontos internos da malha de maneira semelhante à apresentada anteriormente como seguem.

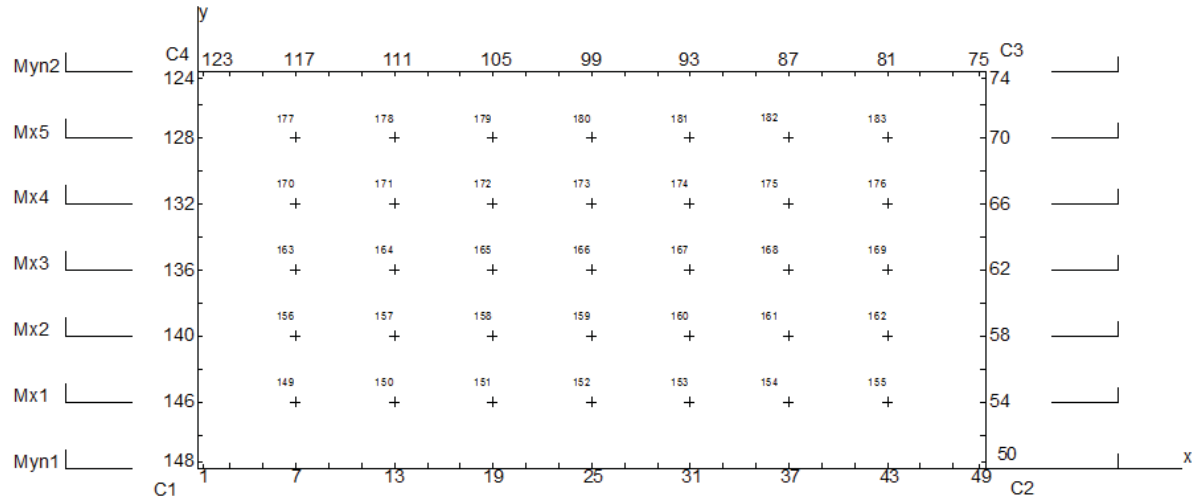


Figura 16 - Representação dos cortes passando pelos nos internos na direção horizontal

Seguem os resultados dos momentos obtidos ao longo dos cortes:

Momentos Fletores da Malha 2 (kN.cm/cm)								
X(cm)	Nó_myn1	Myn1	Nó_mx1	Mx1	Nó_mx2	Mx2	Nó_mx3	Mx3
0	1	0,403	144	0,000	140	0,000	136	0,000
75	7	4,038	149	-0,156	156	-0,895	163	-1,269
150	13	5,820	150	0,079	157	-0,795	164	-1,281
225	19	6,510	151	0,219	158	-0,633	165	-1,119
300	25	<b>6,575</b>	152	0,241	159	-0,597	166	-1,075
375	31	6,094	153	0,158	160	-0,681	167	-1,151
450	37	4,778	154	0,011	161	-0,721	168	-1,111
525	43	2,272	155	0,066	162	-0,062	169	-0,085
600	49	0,002	54	1,176	58	3,223	62	4,398

X(cm)	Nó_mx4	Mx4	Nó_mx5	Mx5	Nó_myn2	Myn2
0	132	0,000	128	0,000	123	0,000
75	170	-1,255	177	-0,833	117	0,000
150	171	<b>-1,305</b>	178	-0,857	111	0,000
225	172	-1,172	179	-0,777	105	0,000
300	173	-1,133	180	-0,753	99	0,000
375	174	-1,190	181	-0,785	93	0,000
450	175	-1,125	182	-0,744	87	0,000
525	176	-0,119	183	-0,142	81	0,000
600	66	<b>4,421</b>	70	2,943	75	0,000

Tabela 2 - Valores dos Momentos Fletores da Malha 2



Seguem-se abaixo as representações gráficas da variação dos esforços:

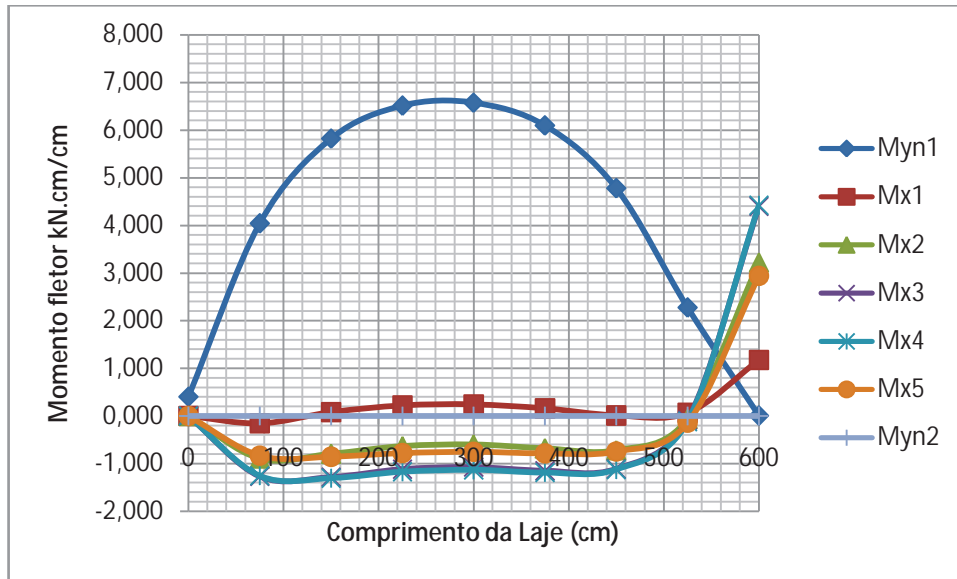


Figura 17 - Gráfico Momentos Fletores Malha 2

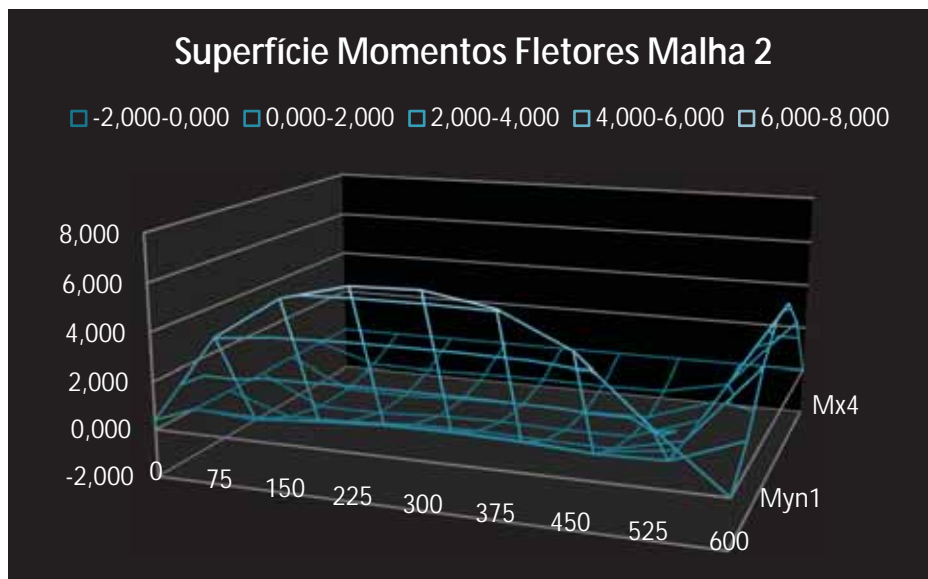


Figura 18 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores da Malha 2 em forma de superfície tridimensional.

### 7.1.2. Resultados obtidos pelas tabelas de Czerny

Para os cálculos dos esforços numa laje utilizando as tabelas de Czerny têm-se nove situações de vinculações para as bordas das lajes. Para cada uma das nove possibilidades de vinculações os parâmetros  $\alpha_x$  ou  $\alpha_y$  (momentos positivos) e  $\beta_x$  e  $\beta_y$  (momentos negativos), oferecidos pelas tabelas para o cálculo dos esforços, variam com a relação de  $l_y/l_x$ , sendo  $l_y$  o maior lado da laje e  $l_x$  o menor lado. Na presente situação analisa-se o caso de duas bordas engastadas e duas bordas apoiadas, pois, calculam-se os esforços para a Laje 1 já apresentada anteriormente, através das seguintes equações, considerando a carga de  $p= 6,25 \text{ kN/m}^2$ , distribuída por toda laje e coeficiente de Poisson igual a 0,2 e módulo de elasticidade igual a  $2380 \text{ kN/m}^2$ .

$$M_x = \frac{p \times l_x^2}{\alpha_x} \quad M_y = \frac{p \times l_x^2}{\alpha_y} \quad M_{bx} = \frac{p \times l_x^2}{\beta_x} \quad M_{by} = \frac{p \times l_x^2}{\beta_y}$$

Pontanto tem-se:

laje	$l_x$ (m)	$l_y$ (m)	$l_y/l_x$
1	3,00	6,00	2,00

Para  $l_y/l_x$  igual a 2 tem-se:

$a_x$	$a_y$	$b_x$	$b_y$
17,1	40,2	8,4	12,2

Os momentos obtidos pelas equações acima são:

$m_x$ (kN.m/m)	$m_y$ (kN.m/m)	$m_{bx}$ (kN.m/m)	$m_{by}$ (kN.m/m)
3,29	1,40	6,70	4,61

Estes valores são os esforços máximos solicitados na laje em questão. É importante tentar para o fato que os momentos obtidos por Czerny são orientados em relação ao tamanho dos lados  $l_y$  e  $l_x$ , sendo  $l_y$  sempre o maior lado da laje, ou seja, neste caso e o vetor que representa  $m_y$  será perpendicular ao maior lado da laje e o vetor que representa o  $m_x$  será perpendicular ao menor lado da laje.

### 7.1.3. Validação dos resultados obtidos pelo MEC

Primeiramente observa-se que as diferentes discretizações apresentam valores de momentos fletores muito próximos, ou seja, não existe a necessidade de um alto grau de refinamento das malhas dos elementos de contorno para se obterem valores satisfatórios dos esforços. Pode-se comparar os valores ao longo do corte Mx4 que provavelmente oferece os máximos valores dos momentos fletores no interior e na borda da laje, perpendiculares ao maior lado da laje.

Nó_mx4	Mx4
68	0,000
98	-1,255
99	<b>-1,305</b>
100	-1,172
101	-1,133
102	-1,190
103	-1,125
104	-0,119
34	<b>4,430</b>

Tabela 3 - Momentos na direção do corte Mx4 da Malha 1

Nó_mx4	Mx4
132	0,000
170	-1,255
171	<b>-1,305</b>
172	-1,172
173	-1,133
174	-1,190
175	-1,125
176	-0,119
66	<b>4,421</b>

Tabela 4 - Momentos na direção do corte Mx4 da Malha 2

Observa-se que os valores dos maiores momentos no interior da laje fica em torno de 1,3 kN.cm/cm para as duas discretizações e os momentos nas bordas ficam em torno de 4,4 kN.cm/cm.

Comparando estes resultados com os resultados obtidos pelas tabelas de Czerny pode-se validar a precisão dos resultados obtidos, pois os mesmos apresentam as mesmas condições de contorno e valores muito próximos para os esforços obtidos. Os valores obtidos por Czerny são: 1,4 kN.m/m para o máximo valor no interior da laje para o momento perpendicular ao maior lado da laje e 4,6 kN.m/m para a borda.

Portanto valida-se os valores obtidos pelo método dos elementos de contorno como satisfatório para a situação semelhante as condições de contorno de CZERNY.

#### 7.1.4. Aplicação do MEC para cargas das alvenarias concentrada

Como justificativa para utilização do MEC tem se a possibilidade de aplicação do mesmo para situações específicas como introduzido neste trabalho. Portanto para o exemplo 1 apresenta-se a situação em que as alvenarias que são descarregadas diretamente sobre as lajes serão consideradas somente na região onde as mesmas estão localizadas, ou seja, uma simulação da situação real, o que os métodos de cálculos por tabelas não permitem.

Para tanto considera-se a carga de  $37,7 \text{ kN/m}^2$  distribuída somente na área ocupada pela alvenaria sobre a laje.

Utilizando as discretizações anteriores agora com a representação das alvenarias somente onde serão aplicadas tem-se as seguintes representações.

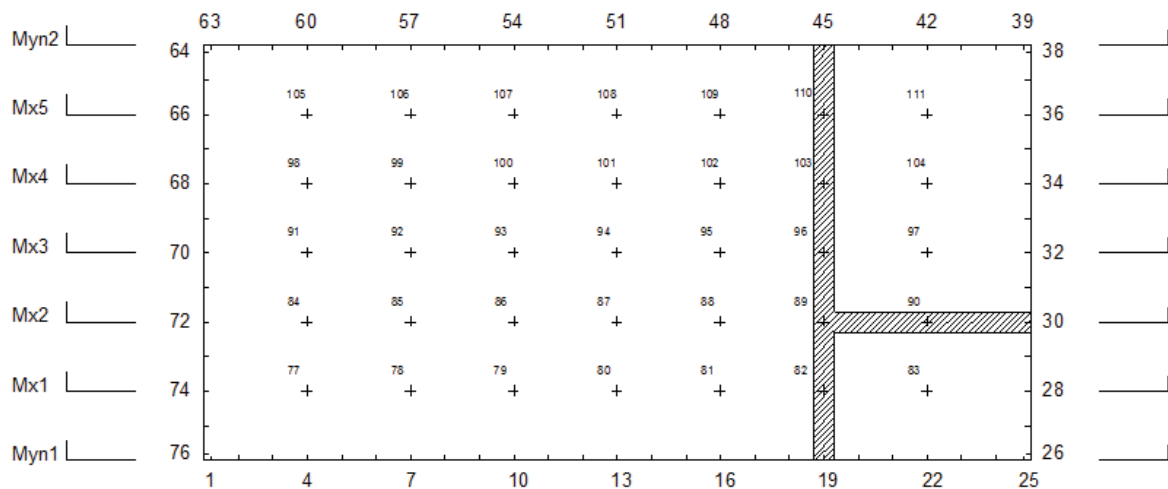


Figura 19 - Discretização da malha 1 com alvenaria concentrada

Agora para a malha 2 tem-se:

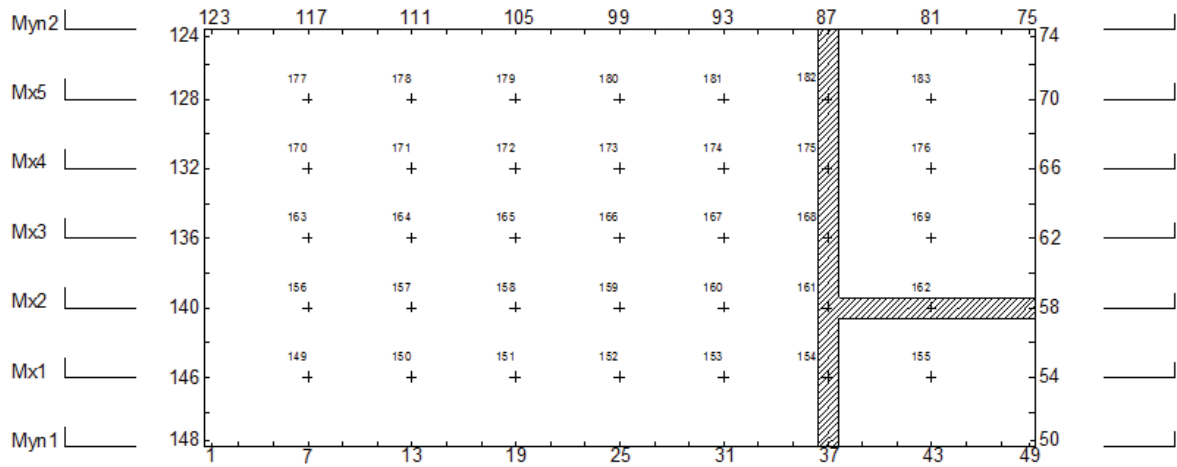


Figura 20 - Discretização da malha 2 com alvenaria concentrada

Com as mesmas considerações aplicadas anteriormente para as discretizações, referentes aos cortes e suas orientações para a correta leitura dos resultados, tem-se os resultados obtidos pelo MEC apresentados a seguir. Para a malha 1 tem-se.

Momentos Fletores da Malha 1 (kN.cm/cm)								
X(cm)	Nó_myn1	Myn1	Nó_mx1	Mx1	Nó_mx2	Mx2	Nó_mx3	Mx3
0	1	0,585	74	0,000	72	0,000	70	0,000
75	4	3,175	77	-0,109	84	-0,671	91	-0,954
150	7	4,581	78	0,094	85	-0,559	92	-0,921
225	10	5,292	79	0,244	86	-0,382	93	-0,743
300	13	5,812	80	0,325	87	-0,323	94	-0,719
375	16	6,471	81	0,270	88	-0,612	95	-1,161
450	19	<b>7,331</b>	82	-0,644	89	-1,986	96	<b>-2,561</b>
525	22	3,301	83	0,045	90	-0,439	97	-0,255
600	25	0,001	28	1,670	30	5,380	32	<b>5,936</b>

X(cm)	Nó_mx4	Mx4	Nó_mx5	Mx5	Nó_myn2	Myn2
0	68	0,000	66	0,000	63	0,000
75	98	-0,945	105	-0,629	60	0,000
150	99	-0,946	106	-0,625	57	0,000
225	100	-0,802	107	-0,541	54	0,000
300	101	-0,800	108	-0,542	51	0,000
375	102	-1,225	109	-0,789	48	0,000
450	103	-2,467	110	-1,710	45	0,000
525	104	-0,118	111	-0,083	42	0,000
600	34	5,414	36	3,480	39	0,000

Tabela 5 - Momentos fletores malha 1 com alvenaria concentrada

Podem ser melhor visualizados pelos gráficos a seguir:

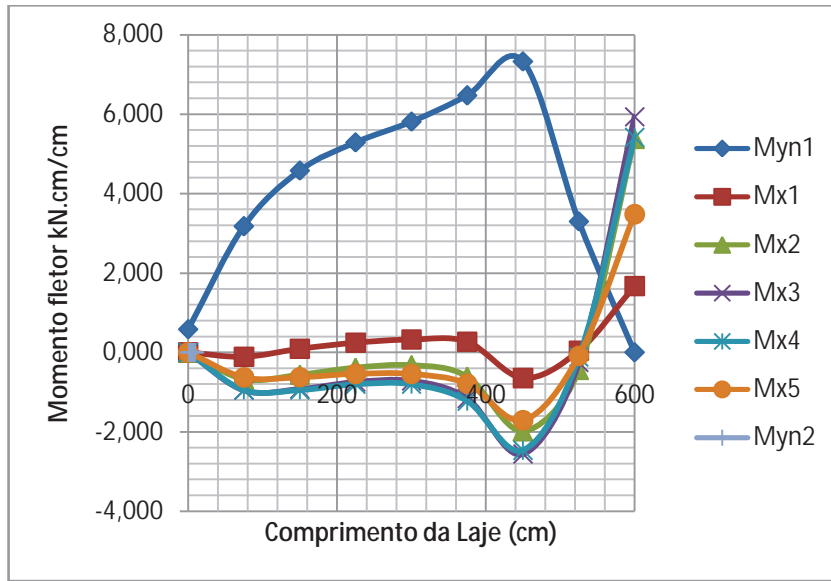


Figura 21 - Gráfico Momentos Fletores Malha 1 – Alvenaria concentrada

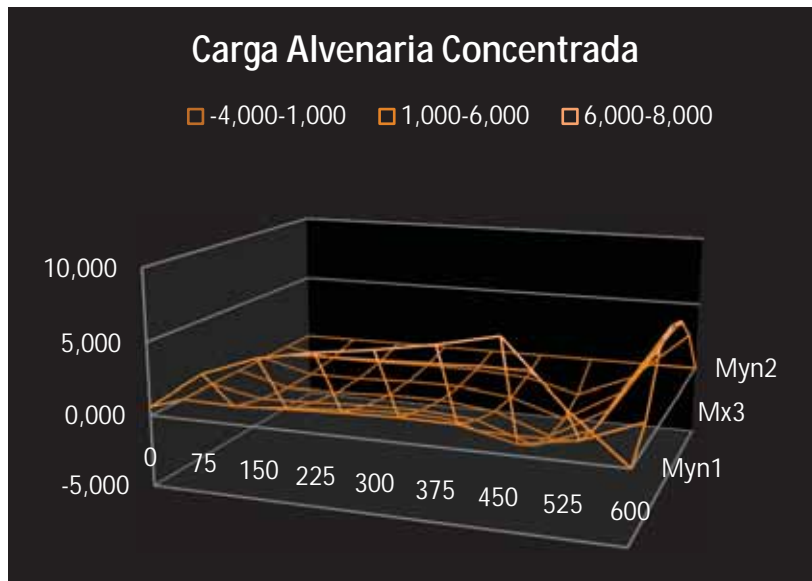


Figura 22 - Gráfico – Superfície 3D Momentos Fletores Malha 1 Alvenaria concentrada

Para malha 2 são determinados os seguintes resultados:

Momentos Fletores da Malha 2 (kN.cm/cm)								
X(cm)	Nó_myn1	Myn1	Nó_mx1	Mx1	Nó_mx2	Mx2	Nó_mx3	Mx3
0	1	0,314	144	0,000	140	0,000	136	0,000
75	7	3,161	149	-0,109	156	-0,672	163	-0,955
150	13	4,614	150	0,094	157	-0,559	164	-0,922
225	19	5,341	151	0,244	158	-0,382	165	-0,743
300	25	5,861	152	0,325	159	-0,323	166	-0,719
375	31	6,521	153	0,270	160	-0,612	167	-1,161
450	37	<b>7,329</b>	154	-0,645	161	-1,986	168	<b>-2,561</b>
525	43	3,282	155	0,045	162	-0,439	169	-0,255
600	49	-0,008	54	1,684	58	5,351	62	<b>5,907</b>

X(cm)	Nó_mx4	Mx4	Nó_mx5	Mx5	Nó_myn2	Myn2
0	132	0,000	128	0,000	123	0,000
75	170	-0,946	177	-0,629	117	0,000
150	171	-0,946	178	-0,625	111	0,000
225	172	-0,802	179	-0,541	105	0,000
300	173	-0,800	180	-0,543	99	0,000
375	174	-1,225	181	-0,789	93	0,000
450	175	-2,467	182	-1,710	87	0,000
525	176	-0,118	183	-0,083	81	0,000
600	66	5,403	70	3,419	75	0,000

Tabela 6 - Momentos fletores malha 2 com alvenaria concentrada

Seguem os gráficos para melhor visualização da distribuição dos momentos fletores:

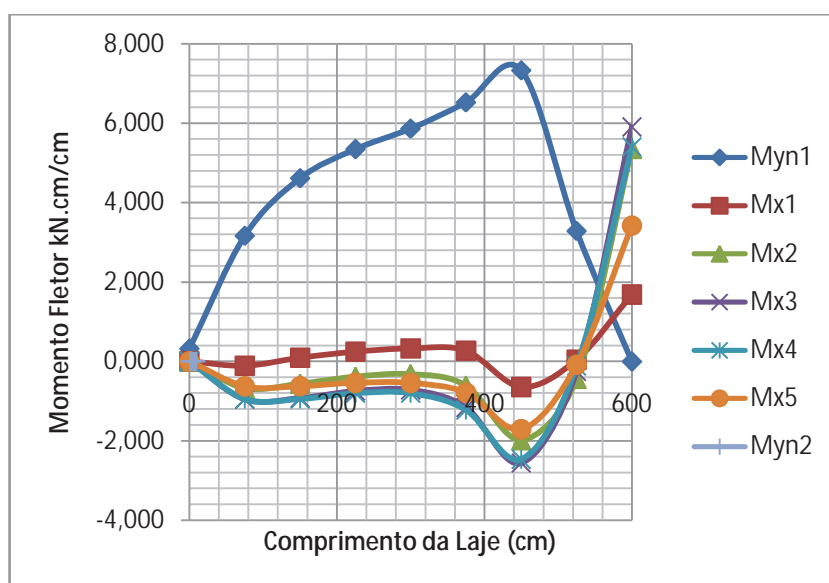


Figura 23 - Gráfico – Momentos Fletores Malha 2 Alvenaria concentrada

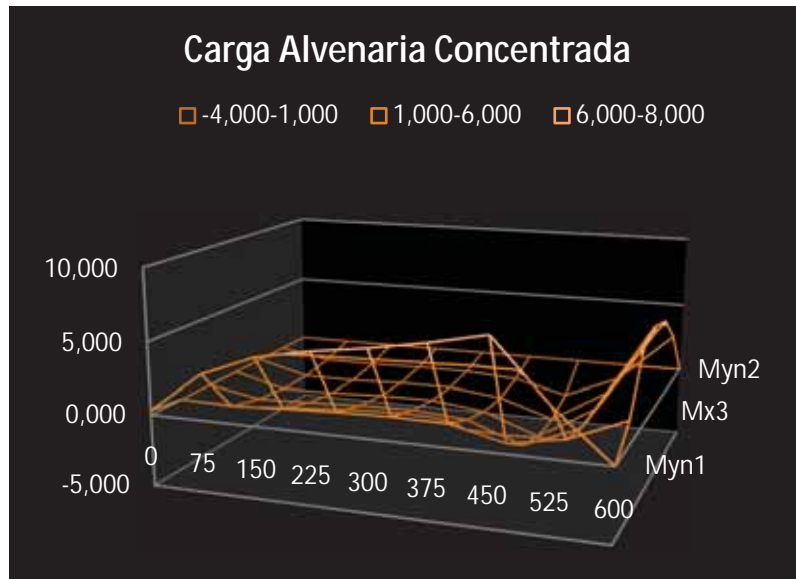


Figura 24 - Gráfico Superfície 3D Momentos Fletores Malha 1 – Alvenaria concentrada

### 7.1.5. Análise e discussões dos resultados do exemplo 1

Para os métodos analisados tem-se dos seguintes esforços representados pelos vetores dos momentos fletores demonstrados nos seguintes desenhos:

#### MOMENTOS MÁXIMOS - CZERNY

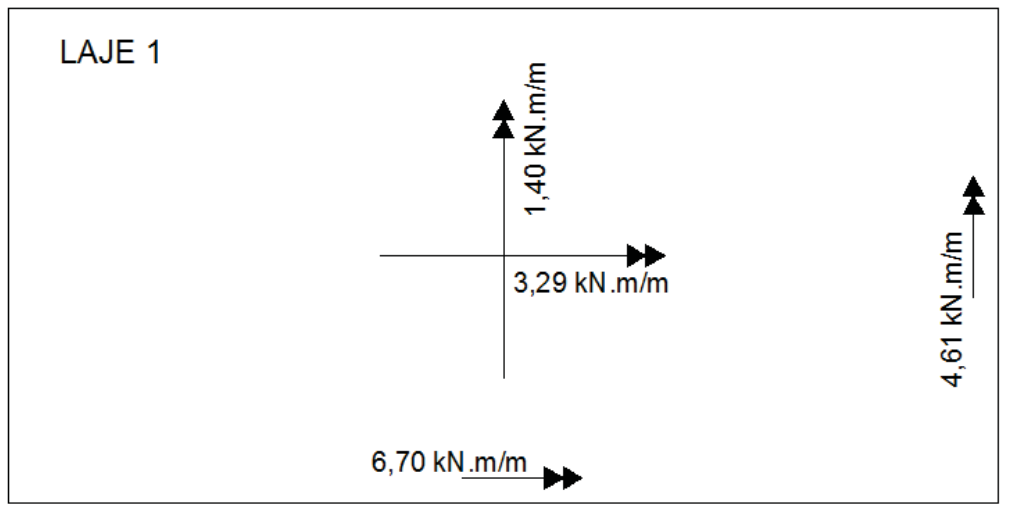


Figura 25 - Momentos Máximos Tabelas de Czerny



MOMENTOS MÁXIMOS - (MEC)  
ALVENARIA DISTRIBUÍDA POR TODA LAJE

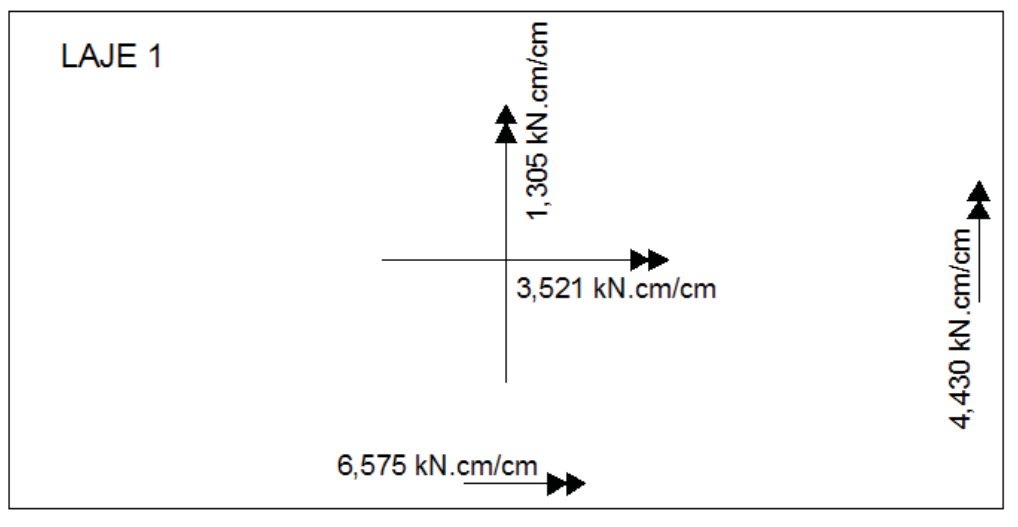


Figura 26 - Momentos Máximos MEC – carga da alvenaria distribuída por toda laje

MOMENTOS MÁXIMOS - (MEC)  
ALVENARIA CONCENTRADA NO LOCAL REAL

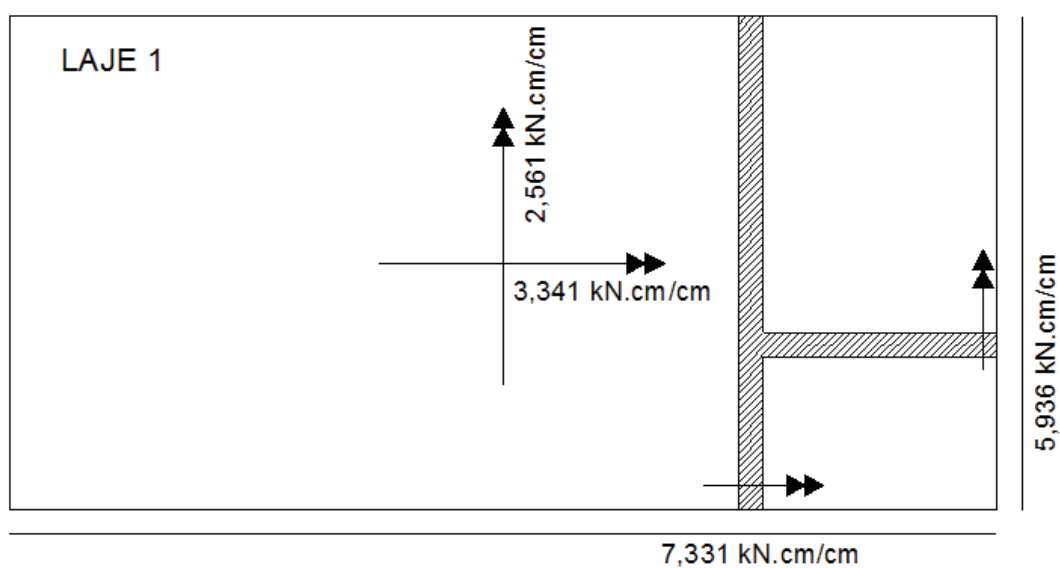


Figura 27 - Momentos Máximos MEC – carga da alvenaria concentrada no local real

Observa-se que os valores para os momentos máximos para as situações em que a carga da alvenaria está totalmente distribuída pela área da laje, realmente apresentam-se muito próximos pelas tabelas de Czerny e para o MEC, como já foi comentado anteriormente, verifica-se a validade dos resultados obtidos pelo método numérico.

Agora, analisando a situação específica para carga da alvenaria localizada no local real, percebe-se que houve o deslocamento da região de maior esforço para a área imediatamente abaixo da alvenaria. Verifica-se que houve um aumento do esforço dos momentos das bordas e do momento perpendicular ao maior lado da laje. Portanto os valores encontrados para a carga da alvenaria no local real apresentam os valores mais realísticos, que não são possíveis serem obtidos pelas tabelas de Czerny.

## 7.2. Exemplo 2 – Laje parcialmente engastada e apoiada

Reutilizando a geometria da laje discutida anteriormente, altera-se a condição de vinculação de uma das bordas para a simulação do cálculo de esforços em outra situação particular, deixando uma das bordas engastadas, parcialmente apoiada. Muitas vezes por questões arquitetônicas depara-se com esta situação, a qual não se dispõe das tabelas tradicionais de cálculo para este caso.

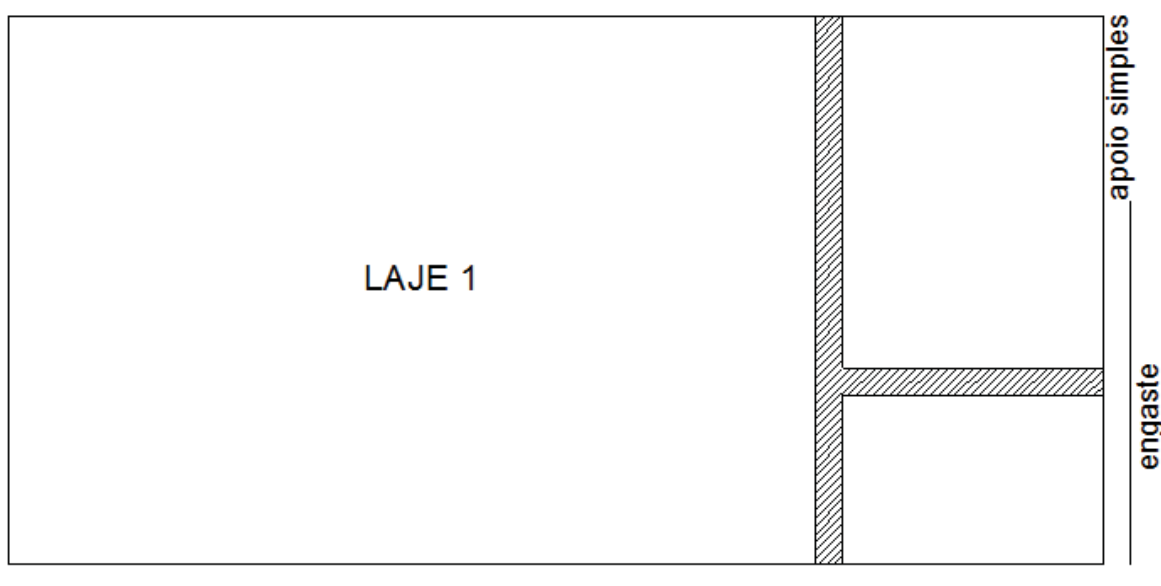


Figura 28 - Laje parcialmente engastada e apoiada

### 7.2.1. Resultados obtidos pelo MEC

Tal situação pode ser perfeitamente representada com auxílio do MEC. Utilizando a malha 2 anteriormente apresentada, faz-se alterações nas condições de contorno, liberando o movimento de rotação dos nós que se localizam na borda que torna-se simplesmente apoiada.

Com as alterações pertinentes têm-se os seguintes resultados dos esforços:

Momentos Fletores da Malha 2 Modificada (kN.cm/cm)								
X	Nó_myn1	Myn1	Nó_mx1	Mx1	Nó_mx2	Mx2	Nó_mx3	Mx3
0	1	0,403	144	0,000	140	0,000	136	0,000
75	7	4,039	150	-0,155	157	-0,894	164	-1,268
150	13	5,823	151	0,080	158	-0,793	165	-1,278
225	19	6,519	152	0,221	159	-0,629	166	-1,114
300	25	<b>6,597</b>	153	0,245	160	-0,592	167	-1,067
375	31	6,140	154	0,162	161	-0,680	168	-1,148
450	37	4,842	155	0,009	162	-0,743	169	-1,144
525	43	2,301	156	0,069	163	-0,081	170	-0,189
600	49	0,002	54	1,187	58	3,300	62	4,715

X	Nó_mx4	Mx4	Nó_mx5	Mx5	Nó_myn2	Myn2
0	132	0,000	128	0,000	123	0,000
75	171	-1,254	178	-0,833	118	0,000
150	172	<b>-1,303</b>	179	-0,855	112	0,000
225	173	-1,167	180	-0,774	106	0,000
300	174	-1,123	181	-0,746	100	0,000
375	175	-1,180	182	-0,774	94	0,000
450	176	-1,137	183	-0,732	88	0,000
525	177	-0,304	184	-0,271	82	0,000
600	66	<b>12,195</b>	70	0,000	76	0,000

Tabela 7 - Momentos Fletores Laje com borda parcialmente engastada

E pelos gráficos observa-se:

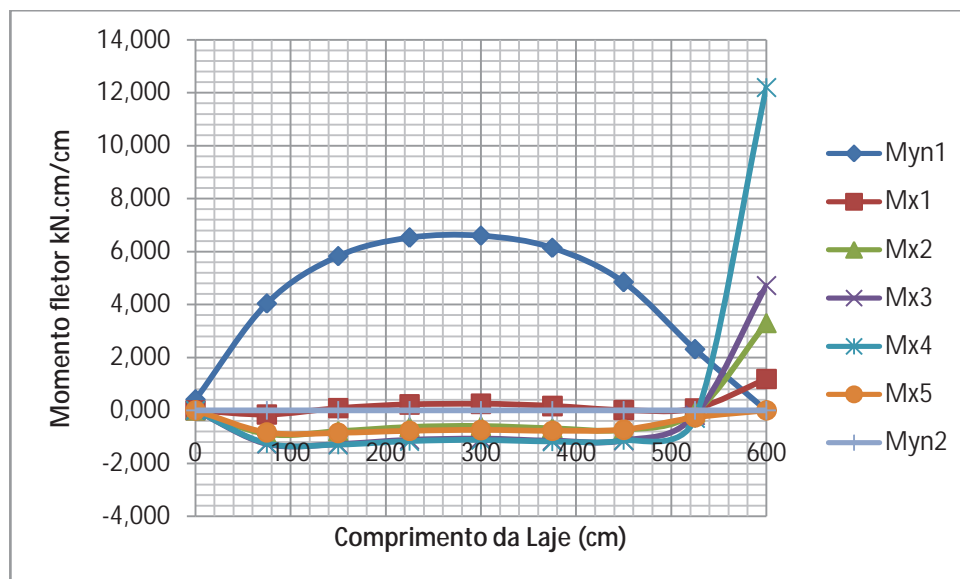


Figura 29 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores Lajes parcialmente engastadas

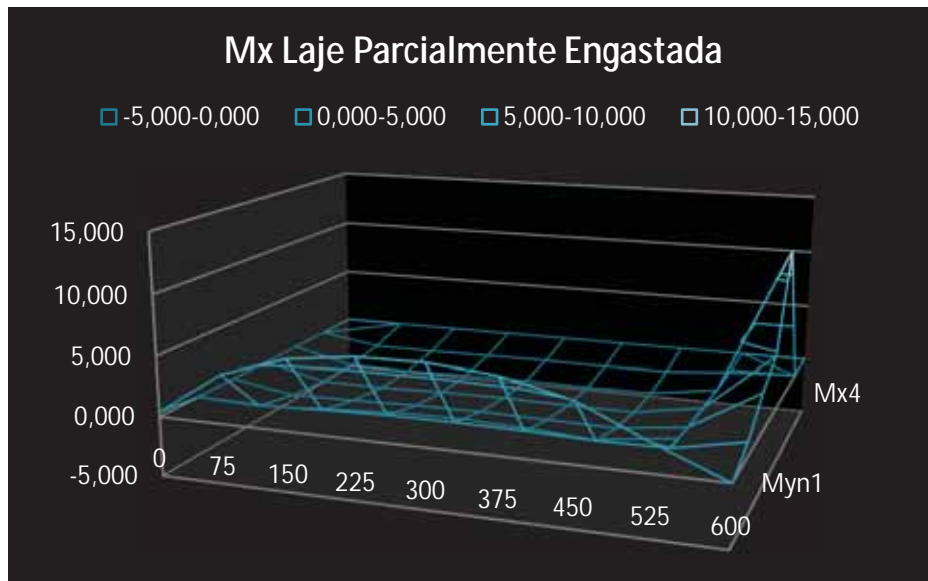


Figura 30 - Gráfico Superfície 3D Momentos Fletores – Laje parcialmente engastada

### 7.2.2. Resultados obtidos pelas tabelas de Czerny

Para estes casos, realizam-se simplificações para a utilização dos cálculos pelas tabelas, pois as mesmas só oferecem condições em que as bordas encontram-se completamente em uma única situação de vinculação. Neste caso considera a borda totalmente engastada e se obtém resultados semelhantes aos obtidos pelas tabelas de Czerny no exemplo anterior.

Os momentos fletores obtidos foram:

$m_x(\text{kN.m/m})$	$m_y(\text{kN.m/m})$	$m_{bx}(\text{kN.m/m})$	$m_{by}(\text{kN.m/m})$
3,29	1,40	6,70	4,61

### 7.2.3. Análise e discussões dos resultados do exemplo 2

Observa-se que os momentos determinados no interior da laje e até mesmo o momento da borda completamente engastada são próximos, determinados pelo MEC e as tabelas. Porém verifica-se que houve um pico de esforço exatamente no ponto onde as vinculações sofrem transição.

Neste exemplo evidencia-se uma situação em que há negligência em relação a este aumento brusco de esforço, aplicando as simplificações práticas.

### 7.3. Exemplo 3 – Laje circular representando fundo de reservatório

Neste exemplo calculam-se os esforços em uma laje circular com 4 m de diâmetro e carregamento simulando um reservatório, ou seja, com o carregamento de uma coluna de água de 4 m sobre a laje, distribuído por toda a área da laje com a borda engastada representando o travamento com a parede do reservatório.

Não existe a possibilidade de cálculos dos esforços para lajes circulares utilizando as tabelas, portanto o que consegue-se são apenas aproximações grosseiras utilizando os casos de lajes quadradas com as quatro bordas engastadas.

#### 7.3.1. Resultados obtidos pelo MEC

Para o exemplo foi discretizada a borda da laje circular em 40 elementos e 80 nós externos e 13 nós internos, cada extremidade dos elementos definiam-se nós duplos pela mudança de direção do mesmo.

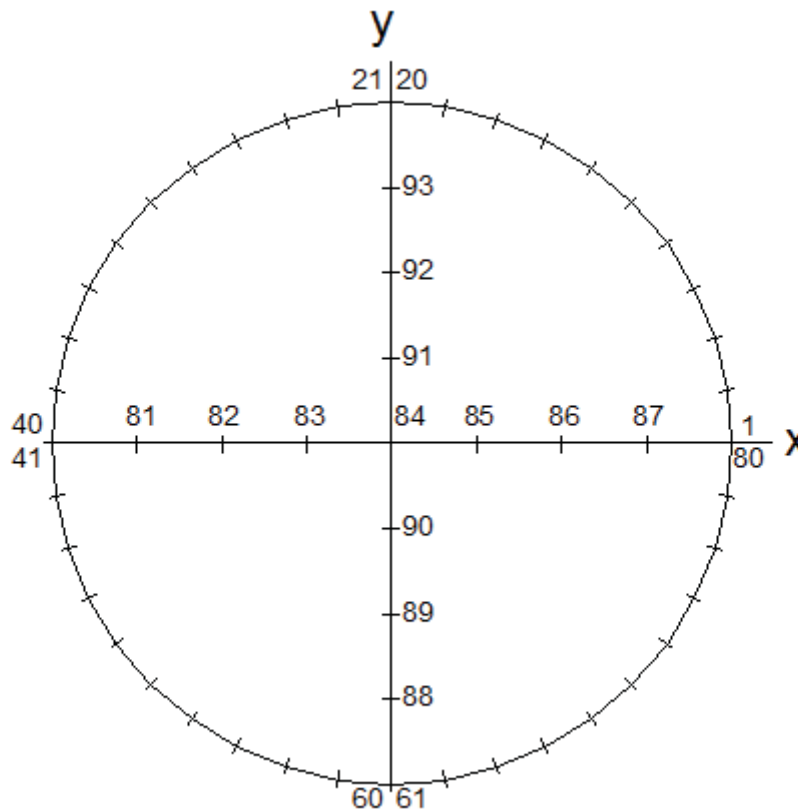


Figura 31 - Discretização laje circular (40 elementos, 80 nós externos e 13 nós internos)

A partir da discretização apresentada, cria-se o arquivo de dados para o cálculo dos esforços utilizando o programa placas2.

Os esforços obtidos são os seguintes:

Momentos Fletores - Laje Circular (kN.cm/cm)				
x (cm)	y (cm)	Nó	Mx	My
-200	0	40	21,07850	0,00000
-150	0	81	-6,219058	-15,781832
-100	0	82	-16,844101	-21,094193
-50	0	83	-23,219125	-24,281653
0	0	84	-25,344138	-25,344138
50	0	85	-23,219125	-24,281653
100	0	86	-16,844101	-21,094194
150	0	87	-6,219058	-15,781832
200	0	1	21,07850	0,00000
0	-200	61	0,00000	21,07850
0	-150	88	-15,781832	-6,219058
0	-100	89	-21,094193	-16,844101
0	-50	90	-24,281653	-23,219125
0	0	84	-25,344138	-25,344138
0	50	91	-24,281653	-23,219125
0	100	92	-21,094194	-16,844101
0	150	93	-15,781832	-6,219058
0	200	20	0,000000	21,07850

Tabela 8 - Momentos Fletores para laje circular

Através do gráfico pode-se observar um comportamento esperado para a distribuição dos esforços dos momentos fletores, ou seja, os momentos nas direções dos eixos x e y são simétricos, portanto são idênticos:



Figura 32 - Gráfico Distribuição dos Momentos Fletores da Laje Circular

### 7.3.2. Resultados obtidos pelas tabelas de Czerny

Para o exemplo utiliza-se uma aproximação da situação real adotando uma laje quadrada de lados de 4 m e todos engastados. Esta improvisação é necessária, pois as tabelas de Czerny ou qualquer outro método tabelado, não oferece possibilidade de cálculos para lajes circulares. Para laje em questão tem-se:

laje	lx(m)	ly(m)	ly/lx
2	4,00	4,00	1,00

Portanto, os parâmetros são:

a x	a y	b x	b y
47,3	47,3	19,4	19,4

E os esforços determinados são:

mx(kN.m/m)	my(kN.m/m)	mbx(kN.m/m)	mby(kN.m/m)
14,38	14,38	35,05	35,05

### 7.3.3. Cálculo da laje quadrada pelo MEC

É interessante a comparação dos valores obtidos pelo MEC para laje circular, com valores para a laje quadrada também calculada pelo MEC. Com esta comparação pode-se observar a variação dos esforços através do corte realizado, passando pelo centro da laje quadrada. Também pode-se perceber a semelhança dos valores obtidos pelo cálculo com tabelas e com o MEC para a laje quadrada, que foi calculada com as mesmas condições de contorno.

Mx - Laje quadrada (lado 400 cm)		
x (cm)	Nó	Mx(kN.cm/cm)
-200	40	34,536
-150	81	7,107
-100	82	-6,731
-50	83	-12,742
0	84	-14,377
50	85	-12,742
100	86	-6,731
150	87	7,107
200	1	34,536

Tabela 9 - Mx Laje quadrada lado 400 cm

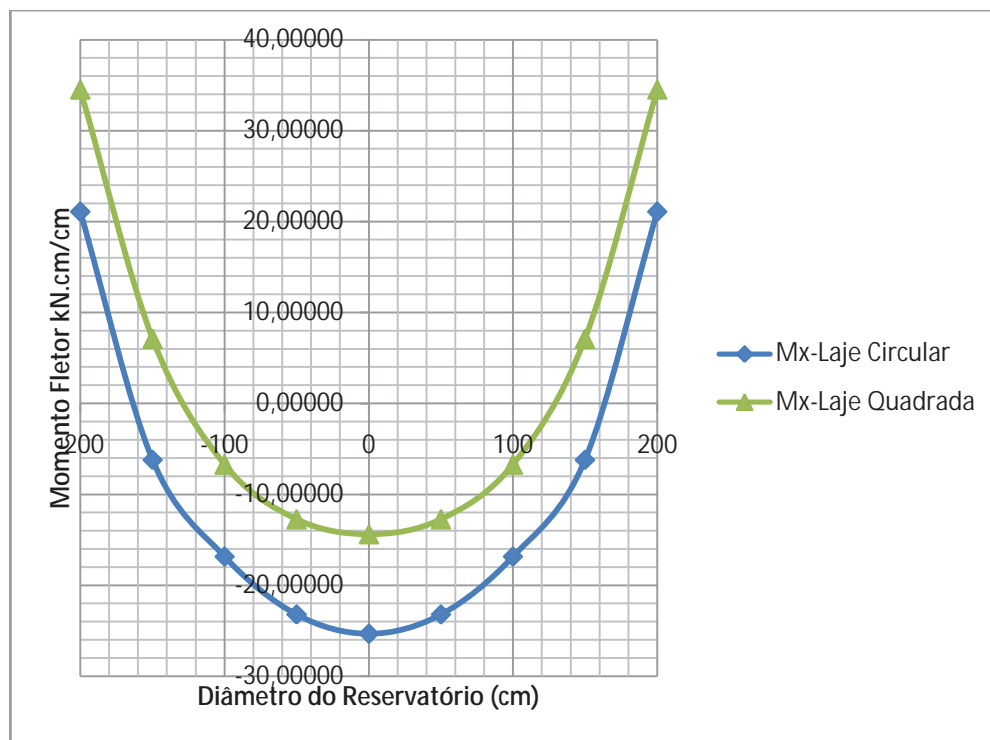


Figura 33 - Gráfico Variação dos Momentos para lajes circular e quadrada

Neste gráfico é possível observar claramente as diferenças dos esforços entre a laje quadrada e a laje circular, ambas calculadas pelo MEC, através do corte passando pelo centro das lajes.

#### 7.3.4. Análise e discussões dos resultados do exemplo 3

Observa-se que existe uma grande discrepância entre os momentos obtidos pelo MEC e as tabelas de Czerny, pois a aproximação ao exemplo para determinação dos esforços pelas tabelas não representa muito bem a realidade. O modelo utilizado permite maior deformação no centro da laje devido a perda de rigidez do conjunto através das pontas que não caracterizam as distribuições dos esforços homogeneamente ao elemento por completo, como acontece fisicamente com a laje circular. Os esforços calculados pelo MEC oferecem esforços mais próximos da realidade.

O deslocamento ou flecha calculado por Czerny é de  $w = -1,3$  cm e o deslocamento determinado pelo MEC é de  $w = -0,5$  cm, deixando claro que o elemento circular é mais rígido.



## 8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Analisando as situações discutidas neste trabalho, fica evidente que as aplicações dos métodos tradicionais são justificáveis até o ponto em que as variações das condições de contorno consideradas para as elaborações das tabelas práticas, não saiam muito do contexto analisado, ou seja, tem-se os resultados satisfatórios para os casos descritos nas condições de contorno das tabelas referente às vinculações, formas geométricas, etc.

Para casos mais específicos é interessante uma precaução na utilização de qual método oferecerá o resultado mais confiável, pois para certas situações negligenciam-se a economia de materiais, mas em outras ocasiões pode estar sendo colocada em risco a segurança do projeto a ser executado.

Recomenda-se no procedimento deste estudo, que se desenvolva uma lógica de aplicação deste método numérico às lajes contínuas. Assim os resultados poderão ser mais realísticos considerando por exemplo a análise das lajes de todo o pavimento de um edifício e não por lajes isoladas como foi realizado neste estudo.

**REFERÊNCIAS**

- ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, D.L.; **“A Boundary Integral Method Applied to Plates fo Arbitrary Plan Form”**; *Comp. & Struct.*; 9; 163-168; 1978.
- BEZINE, G.P.; GAMBY, D.A.; **“A New Integral Equation Formulation for Plate Bending Problems”**; In: Brebbia, C.A.; ed.; *Recent Advances in BEM*; 327-342; Pentech Press; 1978.
- BEZINE, G.P.; **“Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions”**; *Mech. Res. Comm.*; 5(4); 197-206; 1978.
- HANSEN, E.B.; **“Numerical solution of Integro-differential and Singular Integral Equations for Plate Bending Problems”**; *Journal of Elasticity*; 6(1); 39-56; 1976.
- JASWON, M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.J.; **“Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications”**; *Int. J. Solids Struct*; 3; 309-332; 1967.
- KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E.; **“A New Boundary Equation Solution to the Plate Problem”**; *J. Appl. Mech.*; 56(2); 364-374; 1989.
- PAIVA, J.B.; **“Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Flexão de Placas e suas Aplicações em Engenharia de Estruturas”**; Tese de Doutorado; EESC-USP; 1987.
- PILTNER, R; TAYLOR, R.L.; **“The Solution of Plate Bending Problems with the Aid of a Boundary Element Algorithm Based on Singular Complex Functions”**; in: Tanaka, M.; Brebbia, C.A.; Honma, T.; eds.; *Boundary Elements XII*; 1989.
- SOUTHWELL, R.V.; **“Relaxation Methods in Theoretical Physics”**; Oxford University Press, London; 1946.
- STERN, M.A.; **“A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems”**; *Int. J. Solids Struct.*; 15; 769-782; 1979.
- TAGUTI, Yzumi. **“Método dos Elementos de Contorno da Resolução do Problema de Segunda Ordem em Placas Delgadas”**. Tese de Doutorado; FEG-UNESP; 2012.
- WU, B.C.; ALTIERO, N.J.; **“A Boundary Integral Method Applied to Plates fo Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions”**; *Comp. & Struct.*; 10; 703-707; 1979.