UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

TIAGO AUGUSTO DOS SANTOS BOZA

UM MODELO ALGÉBRICO DO QUANTIFICADOR DA UBIQUIDADE

MARÍLIA – 2014

TIAGO AUGUSTO DOS SANTOS BOZA

UM MODELO ALGÉBRICO DO QUANTIFICADOR DA UBIQUIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de Marília, na Área de Concentração: Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica, sob a orientação do Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa e co-orientação do Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares.

MARÍLIA – 2014

Boza, Tiago Augusto dos Santos.
B793m Um modelo algébrico do quantificador da ubiquidade / Tiago Augusto dos Santos Boza. – Marília, 2014.
125 f. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, 2014.
Bibliografia: f. 117-125
Orientador: Hércules de Araújo Feitosa.
Co-orientador: Marcelo Reicher Soares.

1. Lógica algébrica. 2. Lógica simbólica e matemática. 3. Indução (Lógica). 4. Halmos, Paul R. – Paul Richard – 1916-2006. I. Título.

CDD 160

RESUMO

Esta pesquisa está inserida no contexto filosófico da Lógica, com ênfase nos aspectos dos quantificadores e nos seus modelos ou interpretações. O objetivo deste trabalho é um aprofundamento das noções de quantificação dentro do aspecto das lógicas moduladas. Para tanto, aborda-se a lógica modulada do plausível, que procura formalizar o quantificador da ubiquidade. O texto apresenta uma proposta, introduzida por Paul Halmos, de interpretação da lógica quantificacional clássica em modelos algébricos e, como contribuição original, estende este modelo para um modelo algébrico para a lógica do plausível.

Palavras-Chave: quantificadores; lógicas moduladas; lógica algébrica; ubiquidade.

ABSTRACT

This research is inserted in the context of Philosophy of Logic, with emphasis on aspects of quantifiers and their models or interpretations. The aim of this paper is a deepening on notions of quantification in the environment of modulate logics. For that, this Dissertation approaches the modulate logic of plausible, which seeks to formalize the quantifier of ubiquity. The text presents a proposal, of Paul Halmos, to interpret the classical logic quantification into algebraic models. As an original contribution, it is extended this model to an algebraic model for the logic of plausible.

Key Words: quantifiers; modulate logics; algebraic logic; ubiquity.

SUMÁRIO

Introdução

Não se tem muito claro quais são, exatamente, os objetos de estudo daqueles que se comprometem em investigar sobre a Lógica. Mas, alguns autores ainda tentam explicitar, pelo menos, quais objetos foram e estão sendo estudados.

Desse modo, segundo Scabia (1976, p. 9), os temas lógicos podem agrupar-se da seguinte maneira:

(i) problemas relacionados com o estudo das inferências válidas e a análise dos conceitos de demonstração e definição; (ii) problemas que hoje chamamos de semânticos, ligados à análise dos conceitos de significado e verdade; (iii) análise dos paradoxos lógicos, que se apresentam em diferentes ambientes teóricos; (iv) estudo de alguns conceitos, que podem ser denominados de críticos.

Estes últimos, por sua vez, tratam dos conceitos de quantidade, números, infinito, etc.

Estas ideias apresentadas por Scabia e por outros autores, nos parece uma caracterização ainda atual e, obviamente, para alguns casos, insuficiente.

Sabemos que, tradicionalmente, os sistemas lógicos atendem preferencialmente as assertivas (i) e (ii). Pois, ao se conceber um sistema lógico, é necessário que exista uma determinada sintaxe e uma interpretação para aquela.

Usualmente, a Lógica que nos é apresentada inicialmente é aquela que chamamos de lógica proposicional clássica, que possui uma linguagem específica, tendo no seu *alfabeto* os seguintes conectivos: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (condicional), intuitivamente *se isso, então aquilo*, $\leftrightarrow$ (bicondicional), intuitivamente, *isso se, e somente se, aquilo*, e, também uma semântica que explicita os aspectos Booleanos da lógica proposicional clássica.

A Lógica tem como um de seus objetivos, desenvolver reflexões sobre o raciocínio humano, isto é, como é que de um conjunto de informações ou inferências deduzimos uma conclusão. No entanto, cabe a seguinte pergunta: o tratamento dado por esta lógica, com estes conectivos, não é simplista demais? Não existem outras formas de raciocínio além dessas?

Esta pergunta e, claramente, algumas outras, motivaram a ideia das chamadas lógicas modais, as quais inserem um novo operador não definido a partir dos conectivos clássicos para tratar das modalidades.

Estendendo-nos nesta linha de raciocínio podemos então nos lembrar da lógica clássica de primeira ordem que, por sua vez, possui os quantificadores clássicos universal - $\forall$, e existencial - $\exists$.

É sabido que não existem somente os quantificadores clássicos. Todavia, será que há uma conceituação clara do que é um quantificador? A apresentação usual para os quantificadores clássicos é única?

Na procura de respostas para estas perguntas é que se localiza o cerne deste trabalho. Esta dissertação pretende apresentar algumas reflexões sobre quantificadores, clássicos e não clássicos, suas formalizações e interpretações semânticas.

Para tanto, no Capítulo 1, apresentaremos algumas noções sobre quantificadores, com alguns critérios, encontrados na literatura, para que possamos refinar as primeiras noções sobre eles.

Em particular, trataremos de um quantificador modulado, não clássico que, portanto, não pode ser definido a partir dos quantificadores clássicos, como por exemplo, o quantificador da ubiquidade, que será apresentado no Capítulo 2, com sua respectiva interpretação semântica.

No Capítulo 3, apresentaremos uma forma distinta de interpretação de quantificador, como um operador numa álgebra de Boole. Este conceito será apresentado num ambiente *algébrico*, a partir das *funções proposicionais* e, por fim, das *lógicas* e *álgebras monádicas*. Nos últimos resultados do Capítulo 3, demonstramos que tal versão é *adequada* à lógica de primeira ordem e, desse modo, equivalente aos modelos usuais para a lógica clássica de primeira ordem.

Como elemento original deste trabalho, apresentaremos, no Capítulo 4, uma interpretação algébrica do quantificador da ubiquidade que estende as álgebras monádicas do capítulo anterior.

1. *Quantificadores*

Neste primeiro capítulo, apresentamos algumas motivações e desenvolvimentos sobre os estudos dos *Quantificadores.*

1.1 Aspectos históricos e motivações

Há quase que um consenso de que Aristóteles não apenas inventou a Lógica, com o desenvolvimento da base da lógica tradicional, mas também introduziu o estudo de quantificação como uma parte daquela.

Para Aristóteles, os estudos sobre quantificadores consistia do estudo dos *enunciados categóricos* que, por sua vez, possuem uma forma muito particular de escrita, na forma *sujeito-predicado.*

Ou seja, a quantificação resumia-se no estudo formal do significado das quatro expressões básicas de quantificação categórica ou aristotélica:

(A) Afirmação Universal: Todo S é P.

(E) Negação Universal: Nenhum S é P.

(I) Afirmação Particular: Algum S é P.

(O) Negação Particular: Algum S não é P.

As letras **A**, **E**, **I** e **O** são designadas para denotar as afirmações e negações e advêm, respectivamente, das palavras latinas ***affirmo*** e ***nego***.

Obviamente, os dois termos vinculados pelo verbo de ligação "é", nos enunciados categóricos, possuem diferentes *status*. O primeiro combina com o quantificador, tornando-se o *sujeito* da expressão, enquanto o segundo ocorre no *predicado*.

Dessa maneira, um sujeito é, de fato, um conjunto dentre conjuntos de indivíduos, ou seja, quando dizemos *alguns cachorros*, tomamos um conjunto dentro do conjunto dos cachorros que, por sua vez, deve possuir algum cachorro.

Como estas expressões quantificadas possuem dois termos, elas podem ser encaradas como *relações binárias*. Ambas sintática e semanticamente.

Agora, dado que os termos representam conjuntos de indivíduos, a expressão *algum*, por exemplo, pode significar a relação de intersecção não vazia entre estes conjuntos, já a expressão *todo* significa a relação de inclusão total. Estas relações não são entre *indivíduos*, mas entre *conjuntos de indivíduos*, ou seja, são relações de segunda ordem. Falaremos destas relações mais adiante.

Aristóteles ainda analisou formas de *negação* combinadas com as expressões quantificadas. Esta análise pode ser resumida no *quadrado das oposições* (Feitosa e Paulovich, 2005), elaborado no período medieval, em que temos o seguinte:

(i) As sentenças categóricas **A** e **O**, assim como **E** e **I**, são *contraditórias*. Isto significa que não podem ser, simultaneamente, verdadeiras, nem falsas.

(ii) As sentenças categóricas **A** e **E** são *contrárias*. Isto significa que não podem ser ambas verdadeiras, entretanto podem ser ambas falsas.

(iii) As sentenças categóricas **I** e **O** são *subcontrárias*. Isto significa que não podem ser ambas falsas, porém podem ser ambas verdadeiras.

(iv) Por fim, as sentenças categóricas **A** e **I**, e, **E** e **O** são chamadas de sentenças *subalternas*. Isto quer dizer que se **A** ou **E** é verdadeira, então **I** ou **O**, respectivamente, também é verdadeira.

Segundo Feitosa e Paulovich (2005) os argumentos categóricos estão divididos nestas *Figuras* e podem ser classificados nestas quatro formas, de maneira que as três primeiras foram tratadas por Aristóteles e a última foi desenvolvida posteriormente.

Estes estudos culminaram ao que chamamos de *silogismos categóricos*, que é o estudo dos argumentos categóricos válidos. Um *argumento categórico* é composto por três enunciados, duas premissas e uma conclusão. Tanto as premissas quanto a conclusão são sentenças categóricas e estas são constituídas a partir das seguintes estruturas básicas:

Figura 1: M --- P, S --- M, S --- P;

Figura 2: P --- M, S --- M, S --- P;

Figura 3: M --- P, M --- S, S --- P;

Figura 4: P --- M, M --- S, S --- P.

Nesta estrutura, os dois primeiros itens, separados por vírgulas, são as premissas e o último, sublinhado, é a conclusão do argumento.

Contudo, por mais que estes silogismos tenham contribuído para as investigações sobre a quantificação, considerara-se que são, em certo sentido, limitados. Principalmente, quando utilizados para expressar algumas sentenças quantificadas da linguagem natural, bem como alguns raciocínios matemáticos.

Para enfrentar esta limitação, busca-se introduzir esquemas inferenciais distintos dos silogismos. Mais especificamente, esquemas inferenciais que envolveriam os quantificadores das sentenças categóricas, porém com a meta de ir além das formas apresentadas por Aristóteles.

Segundo Westerståhl e Peters (2002) existem muitos destes esforços que vão além, em pelo menos uma das seguintes maneiras:

(i) Os nomes dos indivíduos jogam um papel importante no processo inferencial, já que não são apenas nomes de propriedades, mas também nomes de relações binárias;

(ii) A quantificação pode ocorrer tanto no sujeito quanto no predicado.

Dessa forma, Westerståhl e Peters (2002) acreditam que uma lógica que não seja capaz de lidar com estes tipos de inferências, não será capaz de explicar, por exemplo, a estrutura das provas utilizadas na geometria elementar, como as de Euclides.

Krause (2009) destaca que Gottfried Leibniz (1646-1716) percebeu que a teoria dos argumentos categóricos seria insuficiente para uma boa parte das inferências usadas pelos matemáticos.

Leibniz foi influenciado por outro matemático que se dispôs a tal formalização: Thomas Hobbes (1588 - 1679). Segundo Hobbes, uma relação muito forte entre a lógica e a matemática é a dada por: raciocinar é o mesmo que calcular. E, portanto, cabe à lógica determinar quais regras podem ser utilizadas nestes cálculos.

Hobbes, por sua vez, pretendia, com tal linguagem, que a lógica viesse a sistematizar e organizar a forma de uso da linguagem dos seres humanos.

Assim, Leibniz entendeu que um caminho razoável para enfrentar tais situações estaria na formalização da linguagem natural, sendo pioneiro neste propósito. Apresentou tal caminho por meio da sua *lingua philosophica*, que tentou representar o pensamento humano, utilizando-se de uma linguagem e de um cálculo para deduzir conclusões através de premissas universais. A sua contribuição de uma língua universal ficou mais como uma proposta, um projeto, pois não conseguiu dar seguimento ao proposto.

Ainda refletindo sobre os silogismos, mas agora num outro sentido, chegamos na segunda maior contribuição para os estudos em quantificação, dada por Gottlob Frege (1845 - 1925), tomado por muitos como o *pioneiro* da lógica contemporânea.

Uma das motivações para a abordagem de Frege seria o abandono da forma *sujeito-predicado* de Aristóteles. Para tanto, passou a trabalhar com as noções de função e argumento.

Frege acreditava que as relações lógicas não se estabeleciam entre as orações e fórmulas, mas entre o que as orações e as fórmulas dizem. Com isto, na mesma linha de Leibniz e Hobbes, introduziu a linguagem da lógica de predicados, com conectivos sentenciais, identidade e os quantificadores clássicos, $\exists$ e $\forall$, como dispositivos de ligação entre os operadores. Apresentou também a noção abstrata de um quantificador como uma relação de segunda ordem, ou como ele mesmo denominava de *conceito de segundo nível*. Por fim, procurava uma forma de definir todos os quantificadores de Aristóteles em termos de $\forall$ e operadores sentenciais.

Sendo assim, apresentou o seguinte:

(i) Todo A é B, pode ser reescrito por $\forall x\ (Ax \rightarrow Bx)$;

(ii) Algum A é B, por sua vez, por $\neg\forall x\ (Ax \rightarrow \neg Bx)$.

Portanto, para Frege, em linguagem lógica, quantificar expressões significa criar meios de ligação entre os operadores.

Assim, por exemplo, $\exists$ é o operador familiar tal que numa fórmula $\exists x(\varphi)$, $\exists x$ se liga com todas as ocorrências livres de x em φ.

Devemos então ressaltar alguns pontos importantes sobre a teoria de Frege:

(i) Frege, com tais noções, gerou uma considerável variedade de quantificadores lógicos partindo, como já dito, do *para todo*, $\forall$, como seu quantificador lógico básico. Dentre eles o *Algum*, *nem todo*, *exatamente um*, *no mínimo n* e *no máximo n*, para qualquer número natural *n*;

(ii) ofereceu uma interpretação sistemática de prefixos de múltiplos quantificadores e outras espécies de quantificadores.

Atualmente a linguagem clássica da matemática utiliza-se muito destes quantificadores, bem como a linguagem de muitas ciências são expressas usando estes quantificadores.

Conclui-se então, segundo Frápolli Sanz (2007), que a teoria da quantificação, tal qual a conhecemos, surge principalmente com Frege, na obra *Conceptografia* (1972).

De acordo com Hintikka e Sandu (1994, p. 113) as expressões 'quantificadores' e 'lógica de primeira ordem', aparecem apenas com Peirce em 1883. As diferenças entre as abordagens de Frege e Peirce, referem-se ao fato de que Frege desenvolveu uma formalização com a intenção de criar uma linguagem universal da matemática, de maneira que não apresentasse as ambiguidades e imperfeições das linguagens naturais. Já Peirce pensou nos quantificadores e na notação envolvida como dispositivo lógico.

Abaixo apresentaremos, resumidamente, uma possível divisão atual do estudo da quantificação. Tal divisão, proposta por Hintikka e Sandu (1994), pode ser feita em três diferentes caminhos, segundo sejam usados em linguagem formal e linguagem natural:

(i) *Quantificadores como predicados de ordens mais altas*: da análise de uma sentença com o quantificador existencial, da forma: $\exists x(Sx)$, observa-se que tal sentença significa apenas que o predicado Sx é não vazio. Esta abordagem é a mais natural, interpretada inicialmente por Frege. Desenvolvendo esta teoria, chegamos à teoria chamada de quantificadores generalizados, que trataremos mais adiante, e que nos dias atuais é o caminho dominante nos estudos da quantificação. Esta teoria é normalmente desenvolvida com algumas noções introduzidas por Tarski, tais como a sua definição de verdade.

(ii) *Interpretações de substituição de quantificadores*: ainda na expressão $\exists$x(Sx). Esta expressão é explicada em termos do conjunto das diferentes substituições instanciais das variáveis livres da fórmula Sx. Basicamente, a motivação da interpretação sobre substituições concerne na declaração de uma genuína semântica para quantificadores. Portanto, a declaração de qualquer semântica para a linguagem. Muitos autores consideram tal abordagem *morta*. No entanto, autores importantes possuem trabalhos segundo tal abordagem, tais como Quine e Saul Kripke.

(iii) *Quantificadores interpretados por funções de escolha*: esta abordagem pode ser encarada como a mais intuitiva, pois trata da existência de uma entidade, ou de uma espécie de entidade, que pode ser expressa linguisticamente, através de uma *tradução bastante literal*, ao responder à seguinte questão: Pode-se encontrar isto? Neste ponto de vista, os quantificadores codificam funções adequadas de escolha universal. As visões das formas gerais deste tipo foram guiadas pelos trabalhos de David Hilbert e sua escola, nas décadas de 1920 e 1930.

Feito isso, chegamos aos estudos mais recentes e mais utilizados atualmente, sobre os *quantificadores generalizados*.

1.2 Quantificadores Generalizados

Nesta seção apresentaremos algumas noções sobre os quantificadores generalizados.

1.2.1 No caminho da generalização

O termo 'quantificador generalizado' reflete exatamente o que estas entidades pretendem introduzir na lógica, uma generalização dos quantificadores clássicos da lógica moderna, $\exists$ e $\forall$.

Em linhas gerais, $\exists$ e $\forall$ são tomados, neste sentido, como duas instâncias de um ou mais conceitos gerais de quantificadores, tornando-se assim o termo 'generalizado', em certo modo, supérfluo. Assim, simplesmente não se aplica o termo para $\exists$ e $\forall$.

Mas então como seria uma generalização de tais quantificadores?

A lógica de predicados moderna fixa o significado do quantificador universal - $\forall$, e do quantificador existencial - $\exists$, com as respectivas cláusulas na definição de *verdade*, para o modelo $\mathcal{M}$ = (M, I), em que M é o universo e I a função de interpretação.

(i) $\mathcal{M} \vDash \forall x\psi(x, b_1, ..., b_n)$ se, e somente se, (que, a partir deste momento denotaremos por *see*), para todo $a \in M$, $\mathcal{M} \vDash \psi(a, b_1, ..., b_n)$;

(ii) $\mathcal{M} \vDash \exists x\psi(x, b_1, ..., b_n)$ see, para algum $a \in M$, $\mathcal{M} \vDash \psi(a, b_1, ..., b_n)$.

Tais cláusulas especificam indutivamente quando uma fórmula $\varphi(y_1, ..., y_n)$ é *satisfeita* pelos correspondentes elementos do modelo.

Agora, para introduzirmos outros quantificadores, basta modificarmos as cláusulas acima. Primeiramente consideramos que toda fórmula $\psi(x)$ com uma variável livre denota, no modelo, um subconjunto do universo M, o conjunto de indivíduos em M que satisfazem $\psi(x)$.

De modo mais geral, tomando $(y_1, ..., y_n) = [y]$, temos que se $\psi(x, y_1, ..., y_n) = \psi(x, [y])$ e $\psi(x, [y])$ possui no máximo as variáveis livres mostradas e $[b] = b_1, ..., b_n$ são elementos de M, então consideramos a *extensão* $\psi(x, [y])$ em $\mathcal{M}$ relativo à $b_1, ..., b_n$, como o seguinte:

$\psi(x, [b])^{\mathcal{M}, x} = \{a \in M : \mathcal{M} \vDash \psi(a, [b])\}$.

Agora, podemos reformular (i) e (ii) como segue:

(iii) $\mathcal{M} \vDash \forall x\psi(x, [b])$ see $\psi(x, [b])^{\mathcal{M}, x} = M$;

(iv) $\mathcal{M} \vDash \exists x\psi(x, [b])$ see $\psi(x, [b])^{\mathcal{M}, x} \neq \varnothing$.

Nota-se que as condições da direita emergem como propriedades dos conjuntos $\psi(x, [b])$. Assim, de fato, podemos pensar nos quantificadores $\exists$ e $\forall$ como denotando estas propriedades.

Caminhando neste sentido e estendendo as noções um pouco mais, chegamos à definição de quantificador generalizado, que essencialmente pretende capturar as noções de Mostowski. Lindström (1966, p. 186), introduz a *tipagem* encontrada nesta definição e, por fim, tem sua formulação geral dada por Westerståhl (2005, p. 5).

Definição 1.1 Um quantificador generalizado Q do tipo <1> é:

(i) Sintaticamente, uma variável de ligação entre os operadores, tais que se φ é uma fórmula, então $Qx\varphi$ também é, e Qx liga todas as ocorrências livres de x em φ;

(ii) Semanticamente, um mapeamento dos universos arbitrários (conjuntos não vazios) M por um conjunto Q_M de subconjuntos de M, que interpreta fórmulas do tipo $Qx\varphi$ de acordo com a cláusula seguinte:

$\mathcal{M} \vDash Qx\psi(x, [b])$ see $\psi(x, [b])^{\mathcal{M}, x} \subseteq Q_M$.

Aqui usamos o mesmo símbolo para o quantificador e o mapeamento que estes significam ou denotam. Assim, $\forall$ agora denota o quantificador universal, em que o mapeamento é dado por:

$\forall_M = \{M\}$, para todo M.

Similarmente, $\exists$ denota o mapeamento definido por:

$\exists_M = \{A \subseteq M : A \neq \varnothing\}$.

Assim, os quantificadores segundo Mostowski são, sobre cada M, relações unárias entre subconjuntos de M.

Ante ao exposto, o que difere os quantificadores de Mostowski e Lindström estão nos tipos de relações.

Agora temos uma noção precisa de um quantificador generalizado, em que $\forall$ e $\exists$ são instâncias de uma coleção.

Vimos acima que a generalização é possível. Primeiro tomamos Q para *ligar* uma variável em duas ou mais fórmulas. Posteriormente, podemos simultaneamente ligar duas ou mais variáveis em algumas destas fórmulas.

No entanto, o que significa a *tipagem* apresentada no quantificador acima? E mais, existem quantificadores com *tipagens* distintas desta apresentada por Mostowski?

Para responder a tais questões, apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.2 Um quantificador Q é de tipo $<n_1, ..., n_k>$, quando este é aplicado para k fórmulas, e *liga* n_i variáveis na i-ésima fórmula.

De maneira que: cada n_i é um número natural com $n_i \geq 1$.

Trivialmente é visto o porquê consideramos os quantificadores acima de tipo $<1>$.

Num caso mais geral, uma fórmula que se inicia com Q possui a forma:

$Q[x_i], ..., [x_k](\varphi_1, ..., \varphi_k)$

em que são escolhidas variáveis distintas $x_{i1}, ..., x_{ini} = [x_i]$ para $1 \leq i \leq k$, e todas as ocorrências livres de $x_{i1}, ..., x_{ini}$ em φ_i se tornam ligadas.

Agora, Q associa com cada universo M uma relação k-ária Q_M entre as relações sobre M, de modo que o i-ésimo argumento é uma relação n-ária entre indivíduos.

Desse modo, a correspondente cláusula na definição de verdade é como se segue:

Definição 1.3 $\mathcal{M} \vDash Q[x_i], ..., [x_k](\psi_1([x_1], [b]), ..., \psi_k([x_k], [b]))$ see

$$Q_M(\psi_1([x_i], [b])^{\mathcal{M}, [X1]}, \ldots, \psi_k([x_k], [b])^{\mathcal{M}, [xk]}).$$

em que $\psi_1([x_i], [b])$ é uma fórmula em que no máximo as variáveis livres $[x_i]$ aparecem, [b] é uma sequência de elementos de M correspondente à [y], e $\psi_i([x_i], [b])^{\mathcal{M}, [xi]}$ é a extensão de $\psi_i([x_i], [b])$ em $\mathcal{M}$ relativo à [b], ou seja, o conjunto de n_i-uplas $[a_i]$ tais que $\mathcal{M} \vDash \psi_i([a_i], [b])$.

Esta última definição foi introduzida inicialmente por Lindström (1966) e, por isso, estes quantificadores são chamados, por alguns autores, de *quantificadores de Lindström.* Neste caso, fixando M para o universo que contém *tudo*, temos essencialmente a noção de Frege de um conceito de segundo nível.

Abaixo uma definição muito utilizada nos textos sobre o tema e que, mais adiante, nos será útil.

Definição 1.4 Q é dito *monádico* se Q é do tipo $<1, ..., 1>$. Caso contrário é dito *poliádico.*

Por exemplo, segundo Westerstähl e Peters, um quantificador $<1, 1>$ associa com cada universo M uma relação binária.

Assim, os quantificadores mencionados por Aristóteles são relações binárias do tipo $<1, 1>$:

1. Todo A é B $\Leftrightarrow$ A $\subseteq$ B;

2. Algum A é B $\Leftrightarrow$ A$\cap$B $\neq \varnothing$;

3. Nenhum A é B $\Leftrightarrow$ A$\cap$B $= \varnothing$;

4. Algum A não é B $\Leftrightarrow$ A $\nsubseteq$ B.

Aqui, mais alguns quantificadores do tipo $<1, 1>$:

5. No mínimo 5 de A são de B $\Leftrightarrow$ $|A\cap B| \geq 5$ (em que $|A|$ representa a cardinalidade do conjunto A);

6. Exatamente 3 de A são de B $\Leftrightarrow$ $|A\cap B| = 3$;

7. Infinitamente muitos de A são de B $\Leftrightarrow$ A$\cap$B é infinito;

8. Maioria de A é de B $\Leftrightarrow$ $|A\cap B| > |A\text{-}B|$;

9. I_M (A, B) $\Leftrightarrow$ $|A| = |B|$ (quantificador de Härtig).

Com quantificadores monádicos usa-se apenas *uma* variável.

Dessa maneira, como Q *liga* a mesma variável em cada uma das fórmulas, podemos dizer que "a maioria de A não é de B", por exemplo, e também podemos dizer que "a maioria de Ax não é de By".

Agora, alguns exemplos de quantificadores poliádicos:

10. Tipo $<2>$: W(R) $\Leftrightarrow$ R é uma boa ordem de M, este quantificador vem da lógica e da teoria dos conjuntos;

11. Tipo $<n>$: $(Q_0^n)(R) \Leftrightarrow$ existe um conjunto infinito $A \subseteq M$ tal que $A^n \subseteq R$, idem ao acima;

12. Tipo $<k, k>$: $Res^k(R, S) \Leftrightarrow |R \cap S| > |R\text{-}S|$, já este é a retomada da noção de *maioria* para k-uplas. Estes quantificadores denotados por Res são os quantificadores chamados de *quantificadores* (ou *operadores*) *de Rescher*;

13. Tipo $<1, 2>$: RECIP(A, R) $\Leftrightarrow$ para todos a, b distintos com $a, b \in A$, existe $n \geq 1$ e $c_0, ..., c_n$ tais que $c_0 = a$ e $c_n = b$ e $c_i R c_{i+1}$ para $i < n$, usado na interpretação de certas sentenças em linguagem natural.

1.2.2 Formalização

Neste item, apresentaremos uma formalização mais precisa e matemática de quantificadores generalizados.

Para tal exporemos apenas as definições e resultados e, também, o faremos em duas vertentes: primeiramente segundo Mostowski (1957) e, posteriormente, segundo Barwise e Cooper (1981).

(i) Segundo Mostowski (1957):

Definição 1.6 Seja I um conjunto arbitrário. Chamamos de *produto cartesiano* de I ao conjunto de todas as sequências $X = (x_1, x_2, ...)$, com $x_i \in I$ e $i = 1, 2, ...$. Denotamos isto por: I^*.

Neste caso, convencionamos que indicaremos os valores de verdade, falso e verdadeiro, por $\perp$ e $\top$, respectivamente.

Definição 1.7 Uma função proposicional F em I é uma função de I^* em $\{\top, \perp\}$, tal que existe um conjunto finito de inteiros A e se $X \in I^*$, $Y \in I^*$ e $x_i = y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então $F(X) = F(Y)$.

Claramente, a definição acima mostra que F depende de um conjunto finito de argumentos. Daí, chegamos à próxima definição.

Definição 1.8 O menor conjunto K segundo a descrição da Definição 1.7 é chamado de *suporte* de F.

Definição 1.9 Seja A uma função bijetiva de I sobre um conjunto I', não necessariamente distinto de I. Se $X \in I^*$, então denotamos por A(X) a sequência $(A(x_1), A(x_2), ...)$. Se F é uma função proposicional em I, então denotamos por F_A a função proposicional em I' tal que $F_A(A(X)) = F(X)$.

Definição 1.10 Uma função Q é chamada de *quantificador limitado* para I quando atribui um dos elementos do conjunto $\{\top, \perp\}$ para cada função proposicional F em I com um argumento e que satisfaz a seguinte cláusula:

(i) $Q(F) = Q(F_A)$, para toda função F e toda permutação A de I.

Consideremos agora (m_ξ, n_ξ) uma sequência finita de todos os pares de números cardinais que satisfazem a equação $m_\xi + n_\xi = |I|$, em que $|I|$ denota o cardinal de I. Agora, para toda função T que atribui um dos valores verdade para cada par (m_ξ, n_ξ), temos: $Q_T(F) = T(|F^{-1}(\perp)|, |F^{-1}(\top)|)$. Com isto chegamos a alguns resultados.

Definição 1.11 Um *quantificador ilimitado*, ou simplesmente um *quantificador*, é uma função que atribui um quantificador Q_T, limitado para I, para cada conjunto I e que satisfaz a seguinte condição: $Q_I(T) = Q_{I'}(T_\varphi)$ para cada função proposicional T em I com um argumento e para cada função bijetiva de I em I'.

Teorema 1.1 Q_T é um quantificador ilimitado para I.

Demonstração: Cf. Mostowski (1957), p. 13. ■

Teorema 1.2 Para todo quantificador ilimitado para I, existe uma função T tal que $Q_T = Q$.

Demonstração: Cf. Mostowski (1957), p. 13. ■

Definição 1.12 Um quantificador é chamado de *dual* do quantificador Q_T, quando este é determinado por T*, com $T^* = {\sim}T(m_\xi, n_\xi)$. Denota-se o dual por Q_{T^*}.

Definição 1.13 Chamamos de *quantificador* a uma função que atribui um quantificador ilimitado Q em I, para todo conjunto I, e que satisfaz a seguinte condição:

(i) $Q(F) = Q(F_A)$, para toda função proposicional F em I com um argumento e para toda função bijetiva de I em I'.

Para Mostowski o termo quantificador pode ser substituído pelo termo *quantificador ilimitado*, termo este utilizado por ele.

Considerando tal definição chegamos ao ponto mais alto desta exposição, ou seja, temos uma definição clara de um quantificador.

Agora, como ficam os quantificadores $\forall$ e $\exists$ nesta nova abordagem?

Abaixo a definição de tais quantificadores a partir dos conceitos apresentados.

Definição 1.14 Chamamos de *quantificador existencial*, denotado por $\exists$, ao quantificador limitado para I, que satisfaz o seguinte:

(i) $\{T(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{m_\xi \neq 0\}$.

Definição 1.15 Chamamos de *quantificador universal*, denotado por $\forall$, ao quantificador limitado para I, que satisfaz o seguinte:

(i) $\{T(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{n_\xi = 0\}$.

Para outros exemplos de quantificadores, conferir em Mostowski (1957).

(ii) Segundo Barwise e Cooper (1981):

Diferentemente de Mostowski, que pretendia formalizar conceitos matemáticos, Barwise e Cooper pretendiam a aproximação da lógica com a linguagem natural. Considera-se tal aproximação muito conveniente, pois pode interessar não somente aos lógicos e matemáticos, mas também aos linguistas e cientistas da computação.

Abaixo apresentaremos a caracterização de uma lógica, segundo Barwise e Cooper, com quantificadores generalizados, que será denotada por $\mathcal{L}(\mathbf{QG})$.

Definição 1.16 Os símbolos lógicos de $\mathcal{L}(\mathbf{QG})$ são os seguintes:

(i) $\wedge$, $\vee$, ~ são os conectivos proposicionais;

(ii) x, y, z, x_0, ... são as variáveis;

(iii) **thing** um termo de conjuntos distinguido;

(iv) (,), [,], ^ são símbolos auxiliares;

(v) = símbolo de igualdade;

(vi) **todos**, **existe**, **nenhum**, **ambos**, **1**, **2**, **3**, ..., **!1**, **!2**, **!3**, ..., **o 1**, **os 2**, **os 3**, ...

Na semântica de $\mathcal{L}(\mathbf{QG})$, **thing** denota o conjunto E de todos os elementos do modelo, ou seja, o conjunto dos elementos do domínio de discurso. Já a distinção entre **3** e **!3** e **os 3**, se dá pelo fato de que **3** significa que pelo menos três elementos satisfazem certa propriedade, enquanto que **!3** significa que exatamente três satisfazem tal propriedade e **os 3** somente terá significado naqueles modelos em que existam exatamente três elementos, pois **os 3** significa os únicos três.

E mais algumas definições.

Definição 1.17 Os símbolos não lógicos de **$\mathcal{L}$(QG)** são os seguintes:

(i) c, d, ... são os símbolos de constantes;

(ii) R, S, ... são símbolos relacionais;

(iii) D_1, D_2, ... determinantes não lógicos e podem incluir **muitos**, **poucos**, **maioria** e etc.

Definição 1.18 As expressões de **$\mathcal{L}$(QG)** são dadas pelas seguintes cláusulas:

(i) todo símbolo de predicado é um termo de conjunto;

(ii) se A é uma fórmula e u é uma variável, então $\hat{u}$[A] é um termo de conjunto;

(iii) se **D** é um determinante e η um termo de conjunto, então **D**(η) é um quantificador;

(iv) se **R** é um símbolo de relação n-ário e t_1, t_2, ..., t_n são constantes ou variáveis, então **R**(t_1, t_2, ..., t_n) é uma fórmula. Da mesma forma, se η é um termo de conjunto e t uma constante ou variável, então η(t) é uma fórmula;

(v) se Q é um quantificador e η um termo de conjunto, então $Q(\eta)$ é uma fórmula;

(vi) se A e B são fórmulas, então $A \wedge B$, $A \vee B$ e $\sim A$ são fórmulas.

Notoriamente as expressões de $\mathcal{L}$**(QG)** são divididas em três tipos: *termos de conjuntos* (i) e (ii), *quantificadores* (iii), *fórmulas* (iv), (v) e (vi).

Abaixo apresentamos a semântica para esta lógica.

Definição 1.19 Um modelo para a lógica $\mathcal{L}$**(QG)** é um par $\mathcal{M} = (E, ||\ \ ||)$, em que E é um conjunto não vazio e $||\ \ ||$ é uma função que interpreta as expressões da linguagem da seguinte forma:

(i) $\mathcal{M}$ interpreta **thing** por um conjunto não vazio E, isto é, $||\mathbf{thing}|| \neq \varnothing$;

(ii) $\mathcal{M}$ interpreta todo símbolo **S** por $||\mathbf{S}||$ de modo a satisfazer as regras de (S_1) à (S_6):

(S_1) Se t é uma constante ou variável, então $||t|| \in E$;

(S_2) $||\mathbf{thing}|| = E$;

(S_3) $||=|| = \{(a, a)\ :\ a \in E\}$;

(S_4) Se **R** é um símbolo de relação n-ário, então $||\mathbf{R}|| \in E \times E \times \ldots \times E$ (n vezes). Da mesma maneira, se **U** é um termo de conjunto básico, então $||\mathbf{U}|| \subseteq E$;

(S_5) Seja $|Y|$ a cardinalidade do conjunto Y, então:

a) $||$**algum**$||$ é uma aplicação que designa para todo $A \subseteq E$ a família $||$**algum**$||(A) = \{X \subseteq E : X \cap A \neq \emptyset\}$;

b) $||$**todo**$||$ é uma aplicação que designa para todo $A \subseteq E$ a família $||$**todo**$||(A) = \{X \subseteq E : X \subseteq A\}$;

c) $||$**nenhum**$||$ é uma aplicação que designa para todo $A \subseteq E$ a família $||$**nenhum**$||(A) = \{X \subseteq E : X \cap A = \emptyset\}$;

d) Para todo número natural n, $||$**n**$||$, $||$**!n**$||$ e $||$**os n**$||$ são aplicações definidas por: $||$**n**$||(A) = \{X \subseteq E : |X \cap A| \geq n\}$; $||$**!n**$||(A) = \{X \subseteq E : |X \cap A| = n\}$; $||$**os n**$||(A) = ||$**todo**$||(A)$, se $|A| = n$ e, *indefinido* caso contrário;

e) $||$**ambos**$||(A) = ||$**os 2**$||(A)$;

f) $||$**nenhum dos dois**$||(A) = ||$**nenhum**$||(A)$, se $|A| = 2$ e, *indefinido* caso contrário.

(S_6) Se **D** é um símbolo de um determinante não lógico, então $||$**D**$||$ designa para todo conjunto A alguma família de conjuntos que vive em A.

Definição 1.20 Dado um modelo $\mathcal{M} = (E, ||\ ||)$. Dizemos que um quantificador Q *vive em* um conjunto $A \subseteq E$ se Q é um conjunto de subconjuntos de E com a seguinte propriedade:

(i) para todo $X \subseteq E$, $X \in Q$ see $(X \cap A) \in Q$.

Claramente $||\ ||$ é a interpretação dos objetos, ou seja, esta é a semântica de $\mathcal{L}$**(QG)**.

Agora, apresentaremos, para finalizar, a definição de $||\mathbf{S}||^{\mathcal{M}}$, dada por recursão nas expressões de $\mathcal{L}(\mathbf{QG})$, simultaneamente, para todo modelo $\mathcal{M}$, em que $||\mathbf{S}||^{\mathcal{M}}$ denota **S** com respeito à $\mathcal{M}$.

Definição 1.21 $||\mathbf{S}||^{\mathcal{M}}$ é definido recursivamente sobre as expressões de $\mathcal{L}(\mathbf{QG})$, dadas pelas seguintes cláusulas:

(S_7) Se **R** é um símbolo relacional *n*-ário, então:

$||\mathbf{R}(t_1, ..., t_n)|| = 1$, se , $<||t_1||, ..., ||t_n||> \in ||\mathbf{R}||$ e, 0 caso contrário.

Da mesma forma, se η é um termo de conjunto, então:

$||\eta(t)|| = 1$, se $||t|| \in ||\eta||$ e, 0 caso contrário.

(S_8) Se **D** é um determinante e η é um termo de conjunto, então o quantificador $\mathbf{D}(\eta)$ denota o resultado da aplicação da denotação de **D** na denotação de η, isto é, $||\mathbf{D}(\eta)|| = ||\mathbf{D}||(||\eta||)$. Esta é uma família de conjuntos que vive em $||\eta||$.

(S_9) Se Q é um quantificador e ψ é um termo de conjunto, então $Q\psi$ denota verdade ou falsidade dependendo da denotação de ψ ser ou não um dos subconjuntos de Q, ou seja, $||Q\psi|| = 1$, se $||\psi|| \in ||Q||$ e, 0 caso contrário.

(S_{10}) Para os operadores usuais, as regras utilizadas são as mesmas:

$||A \wedge B|| = 1$, se $||A|| = ||B|| = 1$ e, 0 caso contrário;

$||A \vee B|| = 1$, se $||A|| = 1$ ou $||B|| = 1$ e, 0 caso contrário;

$||{\sim}A|| = 1$, se $||A|| = 0$ e, 0 caso contrário.

1.2.3 Uma Crítica

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos, com suas respectivas ponderações, introduzidas por Hintikka e Sandu (1994), a fim de realizar certa crítica sobre a formalização de quantificadores generalizados, principalmente quando há alguma dependência e independência entre os quantificadores e as variáveis apresentadas.

Entendemos que o termo *crítica* que está sendo utilizado como título e no corpo do texto não deve ser entendido de maneira pejorativa, já que os autores de tais ideias estiveram preocupados em mostrar alguns pontos em que podem surgir problemas no estudo dos quantificadores generalizados.

A teoria de quantificadores generalizados pode ser encarada como uma teoria de quantificadores *à la* Frege, ou seja, quantificadores como predicados de segundo nível.

Para Frege, um quantificador é uma expressão relacional de segundo nível em que os argumentos são preenchidos por predicados de primeiro nível:

> "As palavras *todo*, *qualquer*, *nenhum*, *algum* são prefixos para palavras-conceito. Em sentenças universais e particulares afirmativas e negativas estamos apresentando relações entre conceitos. Usamos as palavras apenas para indicar um tipo especial de relação" (Frege apud. Hintikka e Sandu (1994, p. 48)).

Para Hintikka e Sandu (1994, p. 122) os quantificadores são definidos como relações entre os conjuntos do universo, do modelo e sua respectiva linguagem. Por exemplo, nas sentenças:

1. Os homens, em sua maioria, são sábios;

2. Todos os cisnes são pretos;

3. Três homens transportam uma mala;

4. Algum homem está bêbado.

Os quantificadores *maioria*, *todos*, *três* e *algum* são relações binárias no universo M, em que os símbolos de predicado recebem uma interpretação do modo usual.

Em (4), notamos que o quantificador *algum* corresponde a uma relação entre o conjunto denotado por *homem* e outro denotado por *bêbado*. Esta relação vale se e, somente se, a intersecção destes dois conjuntos é não vazia.

Agora, sintaticamente, as sentenças de (1) a (4) podem ser representadas por:

5. Maioria x (homem(x), sábios(x));

6. Todo x (cisnes(x), pretos(x));

7. Três x (carregam(x), algum y(mala(y), carregam(x, y)));

8. Algum x (homem(x), bêbado(x)).

Já em linguagem formal, as relações de (1) a (4) podem ser representadas por:

9. Maioria = $\{(X, Y) : X \in M \wedge Y \in M \wedge |X \cap Y| > |X\text{-}Y|\}$;

10. Todo = $\{(X, Y) : X \in M \wedge Y \in M \wedge X \subseteq Y\}$;

11. Três = $\{(X, Y) : X \in M \wedge Y \in M \wedge |X \cap Y| = 3\}$;

12. Algum = $\{(X, Y) : X \in M \wedge Y \in M \wedge X \cap Y \neq \varnothing\}$.

Estamos considerando $|A|$, como a cardinalidade do conjunto A.

Segundo Hintikka e Sandu (1994), se passarmos a considerar algumas sentenças, tais como estas, que envolvem certas dependências e independências de quantificadores, os problemas começam a emergir.

Abaixo uma anáfora que exemplifica muito bem tal situação:

13. Cada menino que possui um cão o chuta.

Cada, neste caso, é um quantificador generalizado que possui uma relação entre o conjunto denotado por *garoto que possui um cachorro* e outro *o chuta.*

Sintaticamente, este é um quantificador generalizado monádico que relata a relação entre os dois conjuntos da seguinte maneira:

14. Cada x (garoto(x) $\wedge$ algum y (cachorro(y), possuir(x, y)), chutar(x, ?))).

em que, neste momento não conseguimos notar claramente a ligação entre *chuta* e a variável *y*, por isso o símbolo '?' utilizado na notação acima.

Para alguns autores a forma de se representar esta anáfora sintaticamente, utilizando um quantificador generalizado monádico, pode ser dada pelo seguinte:

15. Cada x ((garoto(x) ∧ algum y (cachorro(y), possuir(x, y))), (cada y (cachorro(y) ∧ possuir(x, y), chutar(x, y)))).

Que semanticamente traduz o seguinte:

16. Cada garoto que possui um cão chuta cada cão que possui.

Contudo, claramente 16 está distinta da sentença apresentada em 13. Outra forma de se interpretar tal situação é a seguinte:

17. Cada xy ((garoto(x) ∧ cachorro(y) ∧ possuir(x, y)), chutar (x, y))

Em que é logicamente equivalente a uma fórmula de primeira ordem da seguinte maneira:

18. $\forall x \forall y$ ((garoto(x) ∧ cachorro(y) ∧ possuir(x, y)) → chutar(x, y))

Entretanto, novamente a dependência funcional dos dois quantificadores das expressões, *todo garoto* e *um cachorro*, respectivamente, é perdido. E como estes há muitos outros exemplos que não podem ser completamente bem representados.

1.3 Quantificadores Lógicos

A lógica clássica de primeira ordem trata dos quantificadores universal ($\forall$) e existencial ($\exists$). Por meio destes quantificadores, podemos definir vários outros quantificadores, como por exemplo, o quantificador *existe um único*:

1. Existe um único: $\exists!xA(x) =_{df} \exists xA(x) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow x = y)$.

E mais, é possível, na lógica clássica de primeira ordem, definir um dos quantificadores a partir do outro. Por exemplo, se considerarmos o quantificador $\forall$, podemos definir o quantificador $\exists$ da seguinte maneira:

2. $\exists xA(x) =_{df} \neg\forall x\neg A(x)$.

No entanto, existem vários quantificadores que não podem ser definidos através destes quantificadores. Barwise e Cooper (1981) argumentam que há pelo menos quatro aspectos em que os quantificadores da lógica de primeira ordem não são suficientes para tratar das sentenças quantificadas na linguagem natural. São eles:

(i) Sintaxe: as estruturas sintáticas das sentenças quantificadas nas linguagens naturais e na lógica de primeira ordem são diferentes;

(ii) Semântica: existem sentenças quantificadas nas linguagens naturais que não podem ser expressas pelos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem;

(iii) Ambiente lógico: segundo os autores, os quantificadores somente podem ser construídos em ambientes lógicos;

(iv) O último aspecto refere-se à noção de que os quantificadores determinam um conjunto de famílias.

Considerando tais pontos Barwise e Cooper (1981) classificam os quantificadores como *lógicos* e *não-lógicos*.

Ainda segundo Barwise e Cooper (1981), os quantificadores lógicos são aqueles que podem ser definidos em termos dos quantificadores $\forall$ e $\exists$. Enquanto que os quantificadores não lógicos são aqueles que não podem ser definidos a partir destes. Por exemplo, os quantificadores *maioria*, *muitos*, *poucos* e *boa parte* são tidos como não lógicos.

Assim, quantificadores generalizados são considerados, segundo este critério, não lógicos. Para uma compreensão melhor de tal afirmação, basta lembrarmos da Definição 1.17 do presente texto.

Ainda segundo Barwise e Cooper, os quantificadores não lógicos podem variar de um modelo para outro. Por exemplo, afirmam que a diferença entre *todos os homens* e *muitos homens* é dada pela interpretação dos termos: *muito* e *homens* num respectivo modelo, entretanto, a interpretação de *todos* é igual em todos os modelos.

Para transpor tal obstáculo, a teoria dos quantificadores generalizados foi criada, em decorrência dos fatos de que os quantificadores generalizados são relações entre subconjuntos de um conjunto determinado, ou seja, as fórmulas quantificadas com quantificadores do tipo *muitos*, *poucos*, *maioria* ou *boa parte* variam de acordo com o tamanho do universo utilizado. Por exemplo, "12 alunos ausentes numa sala" é muito em um total de 20 alunos, mas não é muito pensando em uma sala com 80 alunos.

Dessa maneira, os quantificados generalizados surgiram na lógica para representar operadores quantificacionais que não podem ser definidos a partir dos quantificadores universal ($\forall$) e existencial ($\exists$).

Já vimos anteriormente que a história dos quantificadores generalizados começa com Mostowski em 1957, o qual sugere que poderíamos generalizar a noção comum de quantificadores lógicos ao longo de duas dimensões: sintática e semântica:

(i) Sintaticamente: um quantificador lógico é um operador de ligação lógica que gera novas fórmulas a partir de outras;

(ii) Semanticamente: um quantificador lógico sobre um universo M é uma função de cardinalidade sobre conjuntos de M para um valor verdade, que satisfaz certas condições invariantes.

Como exemplo, tomamos os quantificadores existencial e universal sobre M, $\exists_M$ e $\forall_M$. Estes são funções que, dado um subconjunto A de M, satisfazem o seguinte:

1. $\exists_M(A) = T$ see $|A|>0$;

2. $\forall_M(A) = T$ see $|A\text{-}B| = 0$, em que B é o complemento de A.

Para analisarmos tais quantificadores, é necessário que apresentemos as definições seguintes.

Definição 1.21 Um quantificador Q sobre M é *invariante sobre todas as permutações de* M quando, para todos A, B e B', em que A é um conjunto não vazio e B, B' são subconjuntos de A:

(i) se B' é obtido por B pelas mesmas permutações de A, então: $Q_A(B) = Q_A(B')$;

(ii) se existe uma permutação p de A tal que $p^*(B) = B'$, então $Q_A(B) = Q_A(B')$.

em que uma permutação de A é uma bijeção p: $A \rightarrow A$ e p^* a função nos subconjuntos de A induzidos por p.

Para Sher (2012), os quantificadores $\forall_M$ e $\exists_M$, por exemplo, são quantificadores invariantes sobre todas as permutações sobre M.

Generalizando tais noções, Mostowski mostra o seguinte critério para quantificadores lógicos:

Definição 1.22 (Critério para quantificadores lógicos de Mostowski) Um quantificador Q é dito *lógico* se para cada conjunto não vazio A, Q_A é invariante sobre todas as permutações de A.

De modo similar Lindström (1966) generalizou tal noção de Mostowski em duas direções, que são as seguintes:

(i) Estendeu a ideia para predicados de primeira ordem de todos os tipos, por exemplo, 'é vermelho' e 'é igual';

(ii) Estendeu para quantificadores de primeira ordem ou predicados de segunda ordem de todos os tipos, por exemplo, 'é uma relação entre os humanos' e 'é simétrico'.

Assim, o critério de Lindström (1966) para quantificadores lógicos e predicados pode ser formulado como se segue:

Definição 1.23 (Critério para quantificadores lógicos de Lindström) Um quantificador Q é *lógico* se para qualquer Q-estrutura $\mathcal{S}$, Q é invariante sobre todos os isomorfismos de $\mathcal{S}$.

Em que: uma Q-estrutura $\mathcal{S}$ é um (n+1)-upla da forma (A, β_1, ..., β_n) e A é um conjunto não vazio chamado de *universo de* $\mathcal{S}$ e β_1, ..., β_n são elementos de estruturas de elementos de A do mesmo tipo que correspondem aos argumentos de Q.

Ou seja, para Lindström (1966), um quantificador é entendido como uma classe Q de estruturas relacionais de tipo $t \in W^n$ para algum $n > 0$, tal que Q é fechada sob isomorfismo.

Para entendermos, portanto, tal critério é necessário que apresentemos mais algumas definições.

Definição 1.24 Seja $\mathcal{S}$ = (A, β_1, ..., β_n) e $\mathcal{S}'$ = (A', β'_1, ..., β'_n). Dizemos que as estruturas $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ são *isomórfas* quando existe uma bijeção *f* entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$, tal que $f^*(\beta_i) = f(\beta_i)$, com f^* induzida por *f*.

Definição 1.25 Um quantificador Q é *invariante sobre todos os isomorfismos* da Q-estrutura $\mathcal{S}$ se para as Q-estruturas $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, temos:

(i) Se $\mathcal{S}$ é isomórfa à $\mathcal{S}'$, então $Q_A(\beta_1, ..., \beta_n) = Q_{A'}(\beta'_1, ..., \beta'_n)$.

Apresentamos, neste item, três critérios para classificação dos quantificadores em *lógicos* e *não lógicos*.

A seguir mergulhamos num particular quantificador não lógico ou generalizado.

2. A Lógica da Ubiquidade

Nesse capítulo, apresentaremos primeiro de maneira intuitiva e, depois, de modo formal, uma lógica modulada, a saber, a *lógica do plausível.*

2.1 Versão Axiomática

Mas afinal, o que vem a ser uma lógica modulada? Bem, uma lógica modulada é uma extensão conservativa da lógica clássica de primeira ordem, dada pela inclusão de um novo quantificador, não definível a partir dos quantificadores clássicos, universal $\forall$ e existencial $\exists$.

Para a lógica do plausível, inclui-se um novo quantificador na linguagem da lógica clássica de primeira ordem, denotado por U, denominado de quantificador do plausível ou quantificador da ubiquidade, que assim o chamaremos nesta dissertação.

Este quantificador tem a motivação intuitiva de capturar proposições da linguagem natural da forma 'uma boa parte'. Para isso, a autora proponente desta lógica modulada, Grácio (1999) introduziu como uma interpretação deste quantificador uma estrutura matemática denominada de *espaço pseudo-topológico*, a qual será detalhada numa próxima seção deste capítulo.

Desse modo, uma sentença quantificada como UxAx significa que "uma 'boa' parte de x, satisfaz a propriedade A" ou também que "há suficientes x tais que Ax", com o significado que um conjunto considerado suficiente, ou razoável, de evidências, ou indivíduos, mas que não é necessariamente grande, satisfaz a condição A. Argumentos desta forma representam proposições plausíveis de uma base de conhecimento, ou também, “vale em quase toda parte”.

Dessa maneira, independente do parâmetro de grandeza adotado e do grau de certeza que temos sobre algumas proposições, existe um conjunto de proposições no qual acreditamos, valendo-nos das experiências ou evidências favoráveis e que denominamos *proposições plausíveis*. Podemos, então, considerar que tais proposições representam, de algum modo, argumentos próximos àqueles usados em inferências estatísticas, na qual o conjunto de evidências, a amostra, é considerado suficiente para o estabelecimento das conclusões, e este pode ser pequeno, com relação ao conjunto universo.

Desse modo, o conceito aqui apresentado está desvinculado da noção de cardinalidade do conjunto de confirmações ou evidências, mas está associado à noção de “suficiência de evidências” atribuída às proposições, fornecida por uma quantidade de evidências que julgamos satisfatória para o seu estabelecimento.

Alguns exemplos da linguagem natural de tal quantificador poderiam ser: “uma boa parte das pessoas gosta de flores”, “uma parte significativa dos europeus gosta de café”.

Obviamente, como dito anteriormente, não podemos afirmar nada, de maneira comparativa, sobre a cardinalidade desses conjuntos, pois queremos considerar tal quantificador como “Ax é ubíquo”, no sentido de que embora o conjunto de evidências não seja ‘grande’, quando comparado com o domínio, há indivíduos por toda parte que satisfazem tal propriedade, ou seja, há indivíduos suficientes tais que Ax.

Um exemplo desta noção de ubiquidade pode estar no domínio do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, e uma relação Qx tal que Q signifique 'x é um número racional'. Claramente, 'uma boa parte' dos números reais são números racionais. Porém, no que tange à cardinalidade desses dois conjuntos, os números racionais, $\mathbb{Q}$, não têm uma grande quantidade de elementos, quando comparados com a quantidade de números reais.

Desta noção de ubiquidade e com o conceito de espaços pseudo-topológicos, o qual definiremos adiante, caminhamos para uma formalização desta lógica, bem como a obtenção de modelos para a mesma.

Consideremos que $\mathcal{L}$ é a lógica clássica de primeira ordem com identidade, como em Feitosa e Paulovich (2005). A lógica do plausível $\mathcal{L}(U)$ é determinada a partir de $\mathcal{L}$ do seguinte modo (Grácio, Carnielli, 2008):

Definição 2.1 $\mathcal{L}(U)$ é determinada por todos os axiomas de $\mathcal{L}$ acrescidos dos seguintes axiomas específicos para o novo quantificador U:

(Ax_1) $(U\mathrm{x}A\mathrm{x} \wedge U\mathrm{x}B\mathrm{x}) \rightarrow U\mathrm{x}(A\mathrm{x} \wedge B\mathrm{x})$

(Ax_2) $(U\mathrm{x}A\mathrm{x} \wedge U\mathrm{x}B\mathrm{x}) \rightarrow U\mathrm{x}(A\mathrm{x} \vee B\mathrm{x})$

(Ax_3) $\forall \mathrm{x}A\mathrm{x} \rightarrow U\mathrm{x}A\mathrm{x}$

(Ax_4) $U\mathrm{x}A\mathrm{x} \rightarrow \exists \mathrm{x}A\mathrm{x}$

(Ax_5) $(\forall \mathrm{x}(A\mathrm{x} \leftrightarrow B\mathrm{x})) \rightarrow (U\mathrm{x}A\mathrm{x} \leftrightarrow U\mathrm{x}B\mathrm{x})$

(Ax_6) UxAx $\rightarrow$ UyAy, quando y ocorre livre para x em A.

- As regras de dedução são as seguintes:

Modus Ponens (*MP*): A, A$\rightarrow$B $\vdash$ B

Generalização (Gen): A $\vdash \forall$x A

Os axiomas (Ax_1) a (Ax_4) são específicos da lógica do plausível, $\mathcal{L}(U)$, já os outros dois axiomas estão aí dispostos para cumprirem uma função importante de possibilitar a adequação da lógica no componente sintático com o modelo correspondente e compõem cada lógica modulada.

Intuitivamente, o que esses axiomas traduzem é a ideia de que:

(Ax_1) Se A é plausível e B é plausível, então A$\wedge$B é plausível.

(Ax_2) Se A é plausível e B é plausível, então A$\vee$B é plausível.

(Ax_3) Se para todo x vale Ax, então A é plausível.

(Ax_4) Se A é plausível, então existe x para o qual vale Ax.

As definições sintáticas usuais para $\mathcal{L}(U)$ como sentença, demonstração, teorema, consistência, entre outras, são definidas da mesma forma que na lógica clássica de primeira ordem.

Abaixo apenas apresentaremos alguns resultados desta lógica.

Teorema 2.1.1 As fórmulas abaixo são teoremas de $\mathcal{L}(U)$.

(i) Ux (Ax $\vee$ $\neg$Ax);

(ii) UxAx $\wedge$ UxBx $\rightarrow$ $\exists$x(Ax $\wedge$ Bx);

(iii) UxAx $\rightarrow$ $\neg U$x$\neg$Ax.

Demonstração: Em (Grácio e Carnielli 2008). ■

Teorema 2.1.2 O cálculo de predicados $\mathcal{L}(U)$ é consistente.

Demonstração: Análoga à demonstração para a lógica clássica $\mathcal{L}$, mudando apenas a definição da função *esquecimento*, h, por meio da inclusão da condição $h(U\mathrm{xAx}) = h(\mathrm{Ax})$. ■

Teorema 2.1.3 (Teorema da Dedução) Seja $\Gamma \cup \{A, B\}$ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}(U)$. Suponhamos que $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, e que x_i é uma variável livre de A e que, na demonstração de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, a regra *Gen* não é aplicada em nenhuma fórmula A_i, que dependa de A. Neste caso, $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Demonstração: Em (Grácio e Carnielli 2008). ■

Teorema 2.1.4 Seja Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}(U)$. Então Γ é consistente see todo subconjunto finito Γ_0 de Γ é consistente.

Demonstração: Em (Grácio e Carnielli 2008). ■

Teorema 2.1.5 Sejam Γ um conjunto de fórmulas e A uma sentença de $\mathcal{L}(U)$. Então $\Gamma \cup \{A\}$ é inconsistente see $\Gamma \vdash \neg A$.

Demonstração: Em (Grácio e Carnielli 2008). ■

Teorema 2.1.6 Se Γ é um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}(U)$ consistente maximal e A, B são sentenças de $\mathcal{L}(U)$, então:

(i) $\Gamma \vdash A$ see $A \in \Gamma$;

(ii) $A \notin \Gamma$ see $\neg A \in \Gamma$;

(iii) $A \wedge B \in \Gamma$ see $A, B \in \Gamma$.

Demonstração: Análoga ao caso clássico. ■

Teorema 2.1.7 Todo conjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}(U)$ está contido em um conjunto consistente maximal.

Demonstração: Similar o Teorema de Lindenbaum. ■

Apresentaremos, na seção seguinte, a estrutura utilizada para interpretar tais elementos.

2.2 Espaços Pseudo-Topológicos

Nesta seção apresentamos os espaços pseudo-topológicos, que são ambientes matemáticos para a interpretação do quantificador da ubiquidade.

Grácio e Carnielli (2008), na tentativa de formalizar o novo quantificador *U*, procuraram uma estrutura matemática que pudesse modelar o seu novo quantificador.

O conceito de espaços pseudo-topológicos foi introduzido exatamente com esta finalidade. Estamos aqui discorrendo sobre uma estrutura matemática advinda dos espaços topológicos.

Há de se tomar cuidado com este fato, pois, apesar da semelhança conceitual, são estruturas distintas.

Definição 2.2.1 Um espaço pseudo-topológico é um par (E, Ω), em que E é um conjunto não-vazio e Ω um subconjunto de $\mathcal{P}$(E). Cada membro de Ω é denominado um aberto de (E, Ω), de maneira:

(i) se A, B $\in \Omega$, então A $\cap$ B $\in \Omega$;

(ii) se A, B $\in \Omega$, então A $\cup$ B $\in \Omega$;

(iii) E $\in \Omega$;

(iv) $\varnothing \notin \Omega$.

Um subconjunto F de E é fechado em (E, Ω) quando seu complementar é um aberto em (E, Ω), isto é, o complementar de F, denotado por F^C, pertence à Ω, $F^C \in \Omega$.

Abaixo daremos alguns exemplos de espaços pseudo-topológicos interessantes do ponto de vista matemático.

Exemplo 2.2.1 Seja $E \neq \emptyset$ e tomemos $\Omega = \{E\}$.

Certamente $\emptyset \notin \Omega$, mas $E \in \Omega$. As condições (i) e (ii) são trivialmente satisfeitas. Então, (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico.

Exemplo 2.2.2 Seja $E \neq \emptyset$. Para $a \in E$, seja $\Omega = \{B \in E : a \in B\}$.

Então, de modo óbvio verificamos que $\emptyset \notin E$, mas $E \in \Omega$. E, dessa forma, (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico.

Segue da definição de pseudo-topologia, que não existem dois abertos disjuntos, pois neste caso a sua intersecção $\emptyset$, também seria um aberto segundo (i), o que contradiz (iv).

Usualmente, uma topologia caracteriza uma operação de interior. Não tratamos com qualquer topologia, mas apenas com pseudo-topologias. Assim, temos uma particular definição de interior.

A definição abaixo é apresentada originalmente neste trabalho, a fim de que as relações algébricas apresentadas posteriormente possuam uma interpretação nos espaços pseudo-topológicos.

Definição 2.2.2 Seja (E, Ω) um espaço pseudo-topológico. O interior de A $\subseteq \Omega$ é denotado por $\Upsilon(A)$ e definido por:

$$\begin{cases} \text{o maior } D \in \Omega : D \subseteq A, & \text{se existe tal } D \\ \varnothing, & \text{se não existe } D. \end{cases}$$

Segue desta definição que $\Upsilon(A) \subseteq A$, para todo $A \in \mathcal{P}(E)$.

Definição 2.2.3 Seja (E, Ω) um espaço pseudo-topológico. Um conjunto A $\subseteq$ E é aberto em (E, Ω) se $A \subseteq \Upsilon(A)$.

Se A é aberto então $\Upsilon(A) = A$. Além disso, o interior de um conjunto é um conjunto aberto ou é o conjunto vazio.

Proposição 2.2.1 Se (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico, então: A $\subseteq$ B $\Rightarrow \Upsilon$(A) $\subseteq \Upsilon$(B).

Demonstração: Se Υ(A) = $\varnothing$, então Υ(A) $\subseteq \Upsilon$(B). Se Υ(A) é um aberto D, então D $\subseteq$ A $\subseteq$ B. Logo, Υ(A) $\subseteq \Upsilon$(B), pois Υ(B) é um aberto maior que D ou o próprio D. ■

Proposição 2.2.2 Se (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico, então: A $\subseteq$ B $\Rightarrow \Upsilon$(A) $\subseteq \Upsilon$(B) é equivalente a Υ(A) $\subseteq \Upsilon$(A $\cup$ B).

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como A $\subseteq$ A $\cup$ B, então, pela hipótese, Υ(A) $\subseteq \Upsilon$(A $\cup$ B). ($\Leftarrow$) Se A $\subseteq$ B, então A $\cup$ B = B. Daí, Υ(A) $\subseteq \Upsilon$(A $\cup$ B) = Υ(B). ■

Proposição 2.2.3 Se (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico, então: Υ(A) $\cap$ Υ(B) $\subseteq \Upsilon$(A $\cap$ B).

Demonstração: Se Υ(A) = $\varnothing$ ou Υ(B) = $\varnothing$, então $\varnothing$ = Υ(A) $\cap$ Υ(B) $\subseteq$ Υ(A $\cap$ B). Agora, se Υ(A) $\neq \varnothing$ e Υ(B) $\neq \varnothing$, Υ(A) e Υ(B) são abertos. Logo, Υ(A) $\cap$ Υ(B) é um aberto e Υ(A) $\cap$ Υ(B) $\subseteq$ A $\cap$ B. Por outro lado Υ(A $\cap$ B) é o maior aberto contido em A $\cap$ B. Assim, Υ(A) $\cap$ Υ(B) $\subseteq \Upsilon$(A $\cap$ B). ■

Faremos uma pequena apresentação para deixarmos claro qual é a estrutura que usaremos para a interpretação da lógica do plausível.

Definição 2.2.2 Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura clássica de primeira ordem com universo A. Dizemos que uma estrutura pseudo-topológica $\mathcal{K}$ para a lógica do plausível $\mathcal{L}(U)$ consiste da estrutura usual de primeira ordem, $\mathcal{A}$, acrescida de uma pseudo-topologia (A, Ω), sobre o domínio de $\mathcal{A}$.

Definição 2.2.3 Na estrutura $\mathcal{K}$ a relação de satisfação de $\mathcal{L}(U)$ é definida de modo recursivo, no caminho usualmente utilizado, adicionando as seguintes cláusulas:

- Seja A uma fórmula cujas variáveis livres estão contidas em:

$\{x\} \cup \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ e $a' = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma sequência de elementos de A.

Então $\mathcal{K} \vDash U$x A[x, a'] $\Leftrightarrow$ $\{b \in A : \mathcal{K} \vDash A[b, a']\} \in \Omega$.

Como usualmente, para a sentença UxAx, temos: $\mathcal{K} \vDash U\mathrm{x}A\mathrm{x} \Leftrightarrow \{a \in A : \mathcal{K} \vDash A(a)\} \in \Omega$.

Outras noções semânticas como modelos, validade, consequência semântica, entre outras, para $\mathcal{L}(U)$, são definidas de modo semelhante à lógica clássica de primeira ordem.

Utilizando-se desta estrutura, Grácio e Carnielli (2008) mostraram que a lógica $\mathcal{L}(U)$ é correta e completa com respeito às estruturas pseudo-topológicas.

Como o objetivo de tal dissertação é a apresentação de modelos algébricos para o quantificador da ubiquidade, entendemos que o leitor deve estar bem familiarizado com tal quantificador. Para tal, apresentaremos a seguir o ambiente proposicional em que o mesmo foi interpretado. Mais especificamente, definiremos uma lógica proposicional do plausível.

2.3 Uma lógica proposicional do plausível

Nesta seção, apresentamos uma versão da *lógica proposicional do plausível*, apresentada inicialmente por Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) e modificada posteriormente em Boza (2010). Aqui denotaremos tal lógica por $\mathcal{L}(\nabla)$.

Esta lógica, de caráter modal, adiciona um novo operador ∇, não definido a partir dos outros operadores clássicos na linguagem da lógica clássica proposicional. Logo, $\mathcal{L}(\nabla)$ é uma extensão conservativa da lógica proposicional clássica. A sua linguagem será denotada por $L(\neg, \vee, \nabla)$, ou seja, apenas adicionamos o novo operador ∇.

Dessa maneira, a lógica proposicional do plausível é determinada por:

- Axiomas:

Os axiomas da lógica proposicional clássica (LPC), como em Feitosa e Paulovich (2005), acrescidos dos axiomas:

(Ax_1) $(\nabla A \wedge \nabla B) \rightarrow \nabla(A \wedge B)$

(Ax_2) $(\nabla A \vee \nabla B) \rightarrow \nabla(A \vee B)$

(Ax_3) $\nabla A \rightarrow A$

(Ax_4) $\nabla(A \vee \neg A)$

- Regras de dedução:

(*MP*) A, $A \rightarrow B$ / B

($R\nabla$) $\vdash (A \leftrightarrow B)$ / $(\nabla A \leftrightarrow \nabla B)$.

De maneira intuitiva, podemos entender os axiomas (Ax_1) a (Ax_4) como:

(Ax_1) Se A é plausível e B é plausível, então $A \wedge B$ é plausível;

(Ax_2) Se A é plausível ou B é plausível, então $A \vee B$ é plausível;

(Ax_3) Se A é plausível, então A vale;

(Ax_4) Todo teorema é plausível.

Já a regra ($R\nabla$) nos garante que, se é o caso que duas proposições são equivalentes, então é equivalente a plausibilidade das duas proposições. Esses axiomas e a regra ($R\nabla$) tentam resgatar as ideias introduzidas no contexto teórico dos espaços pseudo-topológicos.

Teorema 2.3.1 Nenhuma contradição $\perp$ é plausível.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

Teorema 2.3.2 $\vdash A \Rightarrow \vdash \nabla A$.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

As teoremas abaixo foram apresentados e demonstrados originalmente por Boza (2010).

Teorema 2.3.3 $\vdash \nabla A \to \nabla(A \vee B) \Leftrightarrow \ \vdash (\nabla A \vee \nabla B) \to \nabla(A \vee B)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Queremos mostrar que a seguinte implicação é válida: $\nabla A \to \nabla(A \vee B) \Rightarrow (\nabla A \vee \nabla B) \to \nabla(A \vee B)$. Sendo assim, temos como hipótese o fato de que $\nabla A \to \nabla(A \vee B)$ é válido, mas como temos que $\nabla B \to \nabla(A \vee B)$ também é válido, segue que $(\nabla A \vee \nabla B) \to \nabla(A \vee B)$ é válido. ($\Leftarrow$) Agora, queremos mostrar que a seguinte implicação é válida: $(\nabla A \vee \nabla B) \to \nabla(A \vee B) \Rightarrow \nabla A \to \nabla(A \vee B)$. Desse modo, temos que é válido $(\nabla A \vee \nabla B) \to \nabla(A \vee B)$ e, da lógica proposicional clássica temos que vale a seguinte fórmula $\nabla A \to (\nabla A \vee \nabla B)$. Logo, por transitividade, é válido $\nabla A \to \nabla(A \vee B)$. ■

Teorema 2.3.4 (i) $\vdash A \to \neg\nabla\neg A$;

(ii) $\vdash \nabla A \to \neg\nabla\neg A$;

(iii) $\vdash \nabla\neg A \to \neg\nabla A$.

Demonstração: (i) Como uma instância do (Ax_3) temos que $\vdash \nabla\neg A \to \neg A$, e pela sua recíproca da contrária, segue que $\vdash \neg\neg A \to \neg\nabla\neg A$, que é equivalente à expressão: $\vdash A \to \neg\nabla\neg A$. (ii) Pelo item (i) temos que vale $\vdash A \to \neg\nabla\neg A$ e como uma instância do (Ax_3) temos $\nabla A \to A$ agora, por transitividade (SH), vem que $\vdash \nabla A \to \neg\nabla\neg A$. (iii) Pelo item (ii), $\vdash \nabla A \to \neg\nabla\neg A$, pela sua recíproca da contrária, temos o seguinte $\vdash \neg\neg\nabla\neg A \to \neg\nabla A$, que por sua vez, é equivalente à formula $\vdash \nabla\neg A \to \neg\nabla A$. ■

2.4 Álgebra do Plausível

Trataremos, de maneira sucinta, da álgebra do plausível, apresentada inicialmente Feitosa, Nascimento e Grácio (2009), daremos uma demonstração da correção e completude, isto é, a adequação, da lógica proposicional do plausível relativa a seus modelos algébricos.

Definição 2.4.1 A *álgebra do plausível* é uma 7-upla $\boldsymbol{P} = (P, 0, 1, \wedge, \vee, {\sim}, \#)$, em que $(P, 0, 1, \wedge, \vee, {\sim})$ é uma álgebra de Boole e # é o operador do plausível, de modo que valham as seguintes condições:

(i) $\#a \wedge \#b \leq \#(a \wedge b)$;

(ii) $\#a \vee \#b \leq \#(a \vee b)$;

(iii) $\#a \leq a$;

(iv) $\#1 \leq 1$.

Definição 2.4.2 Um elemento $a \in P$, tal que a $\neq 0$, é plausível quando $\#a = a$.

Poderíamos concluir que $\#0 = 0$, mas, por definição, 0 não é plausível.

Definição 2.4.3 Uma álgebra é *não-degenerada* quando seu universo tem pelo menos dois elementos.

Teorema 2.4.4 Para cada álgebra do plausível $\boldsymbol{P}$ = (P, 0, 1, $\wedge$, $\vee$, ~, #), existe um monomorfismo h de P em um espaço pseudo-topológico de conjuntos definidos em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(P))$.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

Teorema 2.4.5 Se $\boldsymbol{P} = (P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim, \#)$ é uma álgebra do plausível e a, $b \in P$, então $\#a \leq \#(a \vee b)$.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

Teorema 2.4.6 Se $\boldsymbol{P} = (P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim, \#)$ é uma álgebra do plausível e a, $b \in \boldsymbol{P}$, então $a \leq b \Rightarrow \#a \leq \#b$.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

2.5 Adequação Algébrica

Nesse item trataremos das propriedades de correção e completude para a lógica proposicional do plausível, segundo os modelos algébricos das álgebras do plausível.

Usaremos as seguintes notações:

- o conjunto de variáveis proposicionais de $\mathcal{L}(\nabla)$ será indicado por **Var** $\mathcal{L}(\nabla)$;

- o conjunto das fórmulas de $\mathcal{L}(\nabla)$ será indicado por **For** $\mathcal{L}(\nabla)$;

- uma dedução de uma fórmula A à partir de Γ: $\Gamma \vdash$ A; e quando Γ é vazio, apenas por $\vdash$ A. Nesse caso, a fórmula A é um teorema de $\mathcal{L}(\nabla)$.

Definição 2.5.1 Uma fórmula A $\in$ **For** $\mathcal{L}(\nabla)$ é *refutável* em Γ, quando vale $\Gamma \vdash \neg$A. Caso contrário A é irrefutável.

Definição 2.5.2 Uma *valoração restrita* é uma função $v^\wedge$: **Var** $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\nabla) \rightarrow \boldsymbol{P}$, que interpreta cada variável de $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\nabla)$ em um elemento de uma álgebra do plausível $\boldsymbol{P}$.

Definição 2.5.3 Uma *valoração* é uma função v: **For** $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\nabla) \rightarrow \boldsymbol{P}$, que estende a função $v^\wedge$ da seguinte forma:

(i) $v(\text{p}) = v^\wedge(\text{p})$

(ii) $v(\neg \text{A}) = {\sim} v(\text{A})$

(iii) $v(\text{A} \vee \text{B}) = v(\text{A}) \vee v(\text{B})$

(iv) $v(\text{A} \rightarrow \text{B}) = {\sim} v(\text{A}) \vee v(\text{B})$

(v) $v(\nabla \text{A}) = \# v(\text{A})$.

Como usual, os membros à esquerda são os operadores lógicos e aqueles à direita representam os operadores algébricos.

Definição 2.5.4 Seja $\boldsymbol{P}$ uma álgebra do plausível e v uma valoração v: **For** $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\nabla) \rightarrow \boldsymbol{P}$. A álgebra $\boldsymbol{P}$ é um modelo para o conjunto $\Gamma \in$ **For** $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\nabla)$ quando $v(\text{A}) = 1$, para cada fórmula $\text{A} \in \Gamma$. Em particular, a valoração v: **For** $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\nabla) \rightarrow \boldsymbol{P}$ satisfaz a fórmula $\text{A} \in$ **For** $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\nabla)$ quando $v(\text{A}) = 1$.

Definição 2.5.5 Uma fórmula A é válida em uma álgebra do plausível $\boldsymbol{P}$ quando cada valoração v: **For** $\mathcal{L}(\nabla) \to \boldsymbol{P}$ é um modelo para a fórmula A.

Definição 2.5.6 Uma fórmula A é válida, o que será denotado por $\Vdash$ A, quando esta é válida em todas as álgebras do plausível.

Consideremos agora (**For** $\mathcal{L}(\nabla)$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, ∇, 0, 1) a álgebra das fórmulas de **For** $\mathcal{L}(\nabla)$, tal que $\vee$ e $\rightarrow$ são operadores binários, $\neg$ e ∇ são operadores unários, 0 e 1 constantes e $A \rightarrow B =_{df} \neg A \vee B$.

Definiremos uma relação de equivalência $\equiv$ dada por:

$A \equiv B =_{df} \vdash A \rightarrow B$ e $\vdash B \rightarrow A$

Esta relação $\equiv$, mais do que uma relação de equivalência, é uma congruência, dada pela regra (R∇):

$A \equiv B \Leftrightarrow\ \vdash A \leftrightarrow B \Rightarrow \vdash \nabla A \leftrightarrow \nabla B \Leftrightarrow \nabla A \equiv \nabla B.$

Para cada $A \in$ **For** $\mathcal{L}(\nabla)$, denotamos a classe de equivalência de A módulo $\equiv$ por: $[A] = \{B \in$ **For** $\mathcal{L}(\nabla) : B \equiv A\}$.

Definição 2.5.7 A *álgebra de Lindenbaum* de $\mathcal{L}(\nabla)$, denotada por $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\nabla))$, é a álgebra definida por: $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\nabla)) = (\mathbf{For}\ \mathcal{L}(\nabla)/_{\equiv}, 0, 1, \wedge_{\equiv}, \vee_{\equiv}, \neg_{\equiv}, \nabla_{\equiv})$, de tal modo que:

(i) $[A]\vee_{\equiv}[B] = [A\vee B]$;

(ii) $[A]\wedge_{\equiv}[B] = [A\wedge B]$;

(iii) $\neg_{\equiv}[A] = [\neg A]$;

(iv) $\nabla_{\equiv}[A] = [\nabla A]$;

(v) $0 = [A\wedge\neg A] = [\perp]$;

(vi) $1 = [A\vee\neg A] = [\top]$.

Teorema 2.5.8 Em $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\nabla))$ é válido que $[A] \leq [B] \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B$.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

Teorema 5.9 A álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\nabla))$ é uma álgebra do plausível.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

Segundo Feitosa, Nascimento e Grácio (2009), a álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\nabla))$ é um modelo canônico de $\mathcal{L}(\nabla)$.

Corolário 2.5.10 Seja A $\in$ **For** $\mathcal{L}(\nabla)$. Então se $\vdash$ A, então [A] = 1, é a unidade, no modelo de $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\nabla))$. A fórmula A é irrefutável se [A] $\neq$ 0.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

Desse resultado, temos que: (i) [A] = 1 see $\vdash$ A e (ii) [A] = 0 see $\vdash \neg$A.

Teorema 2.5.11 (Correção) As álgebras do plausível são modelos corretos para a lógica $\mathcal{L}(\nabla)$.

Demonstração: Seja $\boldsymbol{P} = (P, 0, 1, \vee, \neg, \#)$ uma álgebra do plausível. Queremos mostrar que os axiomas de $\mathcal{L}(\nabla)$ são válidos em $\boldsymbol{P}$ e que a regra (R∇) preserva a validade, desse modo, temos:

(i) Para (Ax_1): $v(\nabla A \wedge \nabla B) \rightarrow \nabla(A \wedge B) = 1$, pois $\#v(A) \wedge \#v(B) \leq \#v(A \wedge B)$;

(ii) Para (Ax_2): $v\ (\nabla A \vee \nabla B) \rightarrow \nabla(A \vee B)) = 1$, pois $\#v(A) \vee \#v(B) \leq \#v(A \vee B)$;

(iii) Para (Ax_3): $v(\nabla A \rightarrow A) = {\sim}\#v(A) \vee v(A) = {\sim}\#v(A) \vee (\#v(A) \vee v(A)) = ({\sim}\#v(A) \vee \#v(A)) \vee v(A) = 1 \vee v(A) = 1$;

(iv) Para (Ax_4): $v(\nabla(A \vee \neg A)) = \#v(A \vee \neg A) = \#1 = 1$;

(v) Para (R∇): $v(A \leftrightarrow B) = 1 \Rightarrow v(A) = v(B) \Rightarrow \#v(A) = \#v(B) \Rightarrow v(\nabla A) = v(\nabla B) \Rightarrow v(\nabla A \leftrightarrow \nabla B) = 1$. ■

Corolário 2.5.12 A lógica proposicional $\mathcal{L}(\nabla)$ é consistente.

Demonstração: Em (Feitosa, Nascimento e Grácio 2009). ■

Teorema 2.5.13 Seja A $\in$ **For** $\mathcal{L}(\nabla)$. As seguintes asserções são equivalentes:

(i) $\vdash$ A;

(ii) $\Vdash$ A;

(iii) A é válida em toda álgebra plausível de uma subgebra de um espaço pseudo-topológico (E, Ω);

(iv) $v^*_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}) = 1$, em que v^* é a valoração do modelo canônico.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): segue diretamente pelo Teorema da Correção; (ii) $\Rightarrow$ (iii): segue diretamente pelo Teorema 2.5.1; (iii) $\Rightarrow$ (iv): basta observarmos que toda álgebra plausível é isomórfica à uma subgebra de um espaço pseudo-topológico (E, Ω) e que $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\nabla))$ é uma álgebra do plausível, logo o resultado se verifica; (iv) $\Rightarrow$ (i) Se A $\in$ **For** $\mathcal{L}(\nabla)$ e não é derivável em $\mathcal{L}(\nabla)$, pelo Corolário 5.3, [A] não coincide com a unidade de $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\nabla))$, assim $v^*_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}) \neq 1$. Dessa forma, A não é uma fórmula válida. ■

Corolário 2.5.14 (Completude) Para cada fórmula A $\in$ **For** $\mathcal{L}(\nabla)$, se A é válida, então A é derivável em $\mathcal{L}(\nabla)$.

Demonstração: Segue imediatamente do resultado obtido acima. ■

3. Lógica algébrica

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos sobre a *lógica algébrica*, segundo as motivações de Paul R. Halmos, mediante os textos: *Algebraic logic* (1962), *Algebraic logic, I. Monadic boolean álgebras* (1956), *Logic as algebra* (1998), *The concepts of algebraic logic* (1956).

No nosso caso, a motivação de tal capítulo se dá pela apresentação de Halmos de uma interpretação em modelo algébrico dos quantificadores clássicos, $\forall$ e $\exists$. Posteriormente, apresentaremos uma versão algébrica para o quantificador da ubiquidade, apresentado no capítulo anterior.

Para a apresentação de resultados referentes à este capítulo e, ao capítulo posterior, utilizam-se os conceitos de ideais, filtros e homomorfismos booleanos. Apresentamos, sucintamente, estes conceitos no apêndice desta dissertação.

3.1 Funções Proposicionais

Nesta seção, pretendemos apresentar as funções proposicionais em que a interpretação algébrica de uma proposição é um elemento de uma álgebra de Boole.

Abaixo, a definição formal de *funções proposicionais.*

Definição 3.1.1 Seja X um conjunto não vazio, denominado *domínio*, e **B** uma álgebra de Boole. Consideremos o conjunto $\mathbf{B}^X$ de todas as funções de X em **B**, e as seguintes operações. Se $p, q \in \mathbf{B}^X$ e $x \in X$, então:

(i) O *supremo* de p e q, denotado por $p \vee q$, é definido por: $(p \vee q)(x) = p(x) \vee q(x)$;

(ii) O *ínfimo* de p e q, denotado por $p \wedge q$, é definido por: $(p \wedge q)(x) = p(x) \wedge q(x)$;

(iii) O *complemento* de p, denotado por p', é definido por: $p'(x) = (p(x))'$.

(iv) O *zero* e a *unidade* de $\mathbf{B}^X$ são, respectivamente, as funções constante iguais a 0 e a 1.

Proposição 3.1.2 $\boldsymbol{P} = (\mathbf{B}^X, 0, 1, \wedge, \vee, ')$ é uma Álgebra de Boole.

Demonstração: (Halmos e Givant 1998). ∎

Assim, uma *função proposicional* é uma função para a qual seus elementos são os elementos de uma álgebra de Boole. Por exemplo, se p_0 é a sentença "6 é par" e $p(x)$ é "x é par", então p é uma função proposicional que toma o valor p_0 quando $x = 6$.

Segue então que existe uma ordem parcial natural de $\mathbf{B}^X$, dada por: $p \leq q$ se, e somente se, $p \wedge q = p$. Claramente, $p \leq q$, em $\mathbf{B}^X$, é justamente o caso em que, para todo $x \in X$, $p(x) \leq q(x)$, em **B**.

Abaixo, mais algumas definições.

Definição 3.1.3 Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}^X$, então a subgebra constante $\mathbf{A_0}$ consiste das funções finitamente valoradas p de **A**, isto é, $\mathbf{A_0} = \{p\text{: } p(x) = p(y)$, para todos x, $y \in X\}$.

Esta definição nos dá a noção de que o único valor de cada função é um elemento de **B**, ou seja, existe uma correspondência natural e unívoca entre $\mathbf{A_0}$ e **B**. Esta correspondência é o isomorfismo que assume para cada função constante, de $\mathbf{A_0}$, seu único valor em **B**.

Num sentido inverso desta observação, podemos dizer que este isomorfismo assume para cada elemento p_0 de **B** a função p em $\mathbf{A_0}$, definida por $p(x) = p_0$, para todo $x \in X$.

O interessante sobre $\mathbf{B}^X$ é que esta álgebra pode ser considerada mais que uma Álgebra de Boole, pois temos a possibilidade de associar cada função p de $\mathbf{B}^X$ à um subconjunto de **B**, tal como na definição abaixo.

Definição 3.1.4 Seja $\mathbf{B}^{X}$ como acima, o subconjunto $\mathbf{R}(p)$ de $\mathbf{B}$, em que $\mathbf{R}(p) = \{p(x) : x \in X\}$, é denominado de *a imagem* da função p.

Definição 3.1.5 Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{X}$, a subgebra $\mathbf{A_1}$ consiste das funções finitamente valoradas com p funções constantes em $\mathbf{A}$.

Nota-se que, neste caso, se p é uma função constante, então $R(p)$ é unitário, pela Definição 3.1.3, de modo que $R(p)$ é um subconjunto finito de $\mathbf{B}$ para todos $x, y \in X$. E mais, é fácil ver que $\mathbf{A_0} \subseteq \mathbf{A_1}$.

Como uma proposição (sempre) diz algo, uma função proposicional constante diz a mesma coisa sobre tudo. Já uma função proposicional finitamente valorada diz apenas um número finito de diferentes coisas sobre tudo.

Deste modo, faz sentido falarmos do supremo de todos os valores de f (finita).

Definição 3.1.6 Se $p \in \mathbf{A_1}$, chamamos de *supremo* dos valores de p, denotado por $\vee\mathbf{R}(p)$, ao elemento de $\mathbf{B}$, dado por: $\vee\mathbf{R}(p) = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$, em que p_1, p_2, ..., p_n são todos os diferentes valores, em $\mathbf{B}$, que a função proposicional p, de $\mathbf{A_1}$, assume.

A fim de não causar muitas confusões simbólicas, a partir deste momento, usaremos uma notação mais neutra para $\vee\mathbf{R}(p)$, neste caso, denotaremos por $\vee\mathbf{R}(p) = Q_p(x) = Qp$, para todo $x \in$ X. Vale observar que $Qp \in \mathbf{A_0}$ e, ainda mais, $Qp \in \mathbf{A_1}$. Note que $Q_p(x)$ é um elemento de $\mathbf{B}$ e não uma função $\mathbf{B^X}$.

Notação 3.1.7 Denotamos por Q a função, de $\mathbf{A_1}$ em $\mathbf{A_0}$, que associa cada p à sua respectiva função constante Qp.

E agora, algumas propriedades desta função Q:

$\mathrm{P_1}$) Q é *normalizado*, ou seja, $Q0 = 0$;

$\mathrm{P_2}$) Q é *crescente*, ou seja, $p \leq Qp$;

$\mathrm{P_3}$) Q é *distributivo sobre* $\vee$, ou seja, $Q(p\vee q) = Qp\vee Qq$;

$\mathrm{P_4}$) Q é *idempotente*, ou seja, $Q(Qp) = Qp$;

$\mathrm{P_5}$) Relação entre o complemento e Q: $Q(Qp)' = (Qp)'$;

$\mathrm{P_6}$) Outra relação entre o complemento e Q: $Q(p') = (Qp)'$;

$\mathrm{P_7}$) Q é *quase multiplicativo* sobre $\wedge$: $Q(p\wedge Qq) = Qp\wedge Qq$;

$\mathrm{P_8}$) Relação entre Q e $\wedge$: $Q(p\wedge q) = Qp\wedge q$;

Nota-se que nas propriedades acima, o complemento $(Qp)'$ significa o complemento de Qp e $Q(p')$ representa apenas o complemento em p.

As demonstrações destas propriedades podem ser encontradas nos textos de Halmos, principalmente em (Halmos e Givant, 1998).

Destas propriedades, ressaltamos um resultado particular da propriedade P_2, quando obtemos que $Q1 = 1$. E de um resultado particular da propriedade P_4, obtemos que $Qp \in \mathbf{A_0}$, para todo $p \in \mathbf{A_1}$, isto já era claro da própria definição de Qp. Já a propriedade P_8 é uma consequência da propriedade P_7.

3.2 Álgebras monádicas funcionais

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e alguns resultados que podem ser encontrados nos textos descritos no início do presente capítulo. Mais especificamente, em (Halmos e Givant, 1998)

Consideremos o conjunto, $\mathbf{R}(p)$, definido no item anterior. Podemos então considerar que temos dois caminhos óbvios para associarmos um elemento de $\mathbf{B}$: podemos tentar formar o *supremo* e o *ínfimo* de $\mathbf{R}(p)$.

O problema que surge neste caso é que a não ser que $\mathbf{B}$ seja completa, no sentido usual da teoria dos reticulados, esta condição pode não ser aceita, já que podem não existir *supremos* e *ínfimos* em $\mathbf{B}$ e, do ponto de vista das aplicações pretendidas, a afirmação de que $\mathbf{B}$ é completo é importante. A solução é dada então pela definição abaixo:

Definição 3.2.1 Denomina-se *álgebra monádica funcional* a qualquer subgebra, $\mathbf{C}$ de $\mathbf{B}^{\mathrm{X}}$, tal que para toda função $p \in \mathbf{C}$ o *supremo*, $\vee\mathbf{R}(p)$, e o ínfimo, $\wedge\mathbf{R}(p)$, existem em $\mathbf{C}$. Então, $\exists p$ e $\forall p$ são definidos por: $\exists p(x) = \vee\mathbf{R}(p)$ e $\forall p(x) = \wedge\mathbf{R}(p)$.

A definição de $\wedge\mathbf{R}(p)$ é análoga à definição dada para $\vee\mathbf{R}(p)$, no item anterior, apenas trocando as ocorrências de $\vee$ por $\wedge$.

Toda álgebra monádica funcional é formada por uma álgebra monádica funcional **B-**valorada com domínio X.

A razão para o termo 'monádica', nesta definição, se dá pelo fato de que o conceito de uma álgebra monádica pode ser definido como um caso especial do conceito de álgebras poliádicas. Este caso especial é caracterizado pela imposição na estrutura Booleana de exatamente um operador adicional.

Definição 3.2.2 Os elementos $\exists p$ e $\forall p$ são denominados de *quantificador existencial funcional* e *quantificador universal funcional.*

Temos as seguintes observações a serem feitas e que nos ajudam a justificar a denominação dada às definições acima.

Seja X um conjunto não vazio e $\mathbf{B}$ uma álgebra Booleana de todos os subconjuntos de X, e consideremos a álgebra funcional $\mathbf{B}^{\mathbf{X}}$. Nesta situação se $x \in$ X e $p \in \mathbf{B}^{\mathbf{X}}$, então $p(x) \subseteq$ X.

Deste modo, a álgebra Booleana $\mathbf{B}^{\mathbf{X}}$ é naturalmente isomorfa a todos os subconjuntos do conjunto X $\times$ X, conjunto dos pares ordenados dos elementos de X. Este isomorfismo é dado por uma função que atribui para cada $p \in \mathbf{B}^{\mathbf{X}}$ o conjunto Y, que é: Y $= \{(x, y) : y \in p(x)\}$.

A noção intuitiva deste conjunto Y corresponde à proposição: "y depende de $p(x)$".

Neste conjunto, a *imagem*, $\mathbf{R}(p)$, de um elemento p em $\mathbf{B}^{\mathrm{X}}$, é uma coleção de subconjuntos de X e, assim, o *supremo* desta imagem, em $\mathbf{B}$, é a união desta coleção, tal qual aquela definida na Teoria de Conjuntos. Disto segue que, cada valor de $\exists p$ corresponde à "existe um x tal que y pertence à $p(x)$".

Mais especificamente, podemos dizer que Qp é a função constante em que para cada $x \in$ X atribui-se a união dos conjuntos da imagem de p, $\vee\mathbf{R}(p)$. Desta maneira o conjunto Qp, no isomorfismo descrito acima, é:

$Qp = \{(x, y) : \text{existe um } z \text{ tal que } y \in p(z)\}$.

Isto é, este é o conjunto dos pares, de elementos em X, em que a primeira coordenada é um elemento x, e a segunda coordenada do par é dada por $\vee\mathbf{R}(p)$.

Agora, um *quantificador*, neste caso *existencial*, pode ser definido como se segue.

Definição 3.2.3 Um *quantificador existencial funcional*, $\exists$, é uma função de uma álgebra Booleana em si mesma que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\exists$ é normalizado, i.e., $\exists 0 = 0$;

(ii) $\exists$ é crescente, i.e., $p \leq \exists p$;

(iii) $\exists$ é quase multiplicativo $\wedge$, i.e., $\exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q$.

Por estas razões, o operador $\exists$, numa álgebra monádica funcional, é chamado de *quantificador existencial funcional*. E, analogamente, segue a justificativa para o *quantificador universal funcional*.

Para estes *quantificadores* valem as seguintes dualizações: $\forall p = (\exists p')'$ e $\exists p = (\forall p')'$. E assim, a definição de $\forall$ é similar às propriedades duais daquelas descritas para $\exists$.

Definição 3.2.4 Um *quantificador universal funcional*, $\forall$, é uma função de uma álgebra Booleana em si mesma que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\forall 1 = 1$;

(ii) $p \geq \forall p$;

(iii) $\forall(p \vee \forall q) = \forall p \vee \forall q$.

Abaixo, demonstramos alguns resultados destes quantificadores.

Teorema 3.2.5 Para o quantificador existencial funcional $\exists$, vale o seguinte: $\exists 1 = 1$.

Demonstração: Basta considerarmos que $\exists$ é crescente, condição (ii) da Definição 3.2.3 e $p = 1$. ■

Lema 3.2.6 O quantificador existencial funcional, $\exists$, é idempotente.

Demonstração: $\exists(\exists p) = \exists(1 \wedge \exists p) = \exists 1 \wedge \exists p = 1 \wedge \exists p = \exists p$. ■

Teorema 3.2.7 Se $p \leq \exists q$, então $\exists p \leq \exists q$.

Demonstração: Por hipótese temos que $p \wedge \exists q = p$, disto segue que:

$\exists p = \exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q \Rightarrow \exists p \leq \exists q$. ■

Teorema 3.2.8 O quantificador existencial funcional, $\exists$, é *monótono*, isto é, se $p \leq q$, então $\exists p \leq \exists q$.

Demonstração: Por hipótese $p \leq q$ e como $q \leq \exists q$, pois $\exists$ é crescente, daí é só aplicar o Teorema 3.2.7 e, obtemos:

$$p \leq \exists q \Rightarrow \exists p \leq \exists q. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.9 Para o quantificador existencial funcional, $\exists$, vale o seguinte: $\exists(\exists p)' = (\exists p)'$.

Demonstração: (i) $(\exists p)' \leq \exists(\exists p)'$, imediata pois $\exists$ é crescente; (ii) Pela álgebra Booleana sabemos que $(\exists p)' \wedge \exists p = 0$, disto segue que:

$0 = \exists((\exists p)' \wedge \exists p) = \exists(\exists p)' \wedge \exists p \Rightarrow \exists(\exists p)' \leq (\exists p)'$. De (i) e (ii) segue a igualdade. $\blacksquare$

Lema 3.2.10 Uma condição necessária e suficiente para que um elemento p de $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{X}$ pertença à *imagem* de $\exists$, isto é, que $p \in \exists(\mathbf{A})$, é que $\exists p = p$.

Demonstração: Se $p \in \exists(\mathbf{A})$, então para algum $q \in \mathbf{A}$, $p = \exists q$, então $\exists p = \exists\exists q = \exists q$, pois $\exists$ é idempotente, conforme Teorema 3.2.6. Portanto, $\exists p = p$. Isto prova a necessidade; já a suficiência é trivial. $\blacksquare$

Teorema 3.2.11 A *imagem* de $\exists$, $\exists(\mathbf{A})$, é uma sub-álgebra Booleana de $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{X}$.

Demonstração: Se p e q estão em $\exists(\mathbf{A})$, então pelo Lema 3.2.10, temos que $\exists p = p$ e $\exists q = q$. Como $\exists$ é quase multiplicativo, segue que $p \wedge q = \exists p \wedge \exists q = \exists(p \wedge \exists q)$. Isto prova que $\exists(\mathbf{A})$ é fechado para a formação de ínfimos. Agora, se p

$\in \exists(\mathbf{A})$, então novamente pelo Lema 3.2.10, $p = \exists p$, e pelo Teorema 3.2.9, obtemos $p' = (\exists p)' = \exists(\exists p)'$. Isto prova que $\exists(\mathbf{A})$ é fechado para a formação de complementos. Como $\exists 0 = 0$ e $\exists 1 = 1$, então $0 \in \exists(\mathbf{A})$ e $1 \in \exists(\mathbf{A})$. Logo, $\exists(\mathbf{A})$ é Booleana. ■

Teorema 3.2.12 O quantificador existencial funcional, $\exists$, é *disjuntivo*, ou seja, $\exists(p \vee q) = \exists p \vee \exists q$.

Demonstração: Lembremos que $p \leq p \vee q$ e $q \leq p \vee q$. Daí, como $\exists$ é monótono, segue que $\exists p \leq \exists(p \vee q)$ e $\exists q \leq \exists(p \vee q)$ e, portanto, $\exists p \vee \exists q \leq \exists(p \vee q)$. Para provar a desigualdade reversa, observemos primeiramente que ambos $\exists p$ e $\exists q$ pertencem à $\exists(\mathbf{A})$ e, pelo Teorema 3.2.11, temos $\exists p \vee \exists q$ pertence à $\exists(\mathbf{A})$. Daí, pelo Lema 3.2.10, temos que $\exists(\exists p \vee \exists q) = \exists p \vee \exists q$. Assim, $p \leq \exists p \vee \exists q$, pois $\exists$ é crescente e, similarmente, $q \leq \exists p \vee \exists q$. Com isso, $p \vee q \leq \exists p \vee \exists q$ e como $\exists$ é monótono, então $\exists(p \vee q) \leq \exists(\exists p \vee \exists q) = \exists p \vee \exists q$. ■

Tomemos aqui as seguintes operações Booleanas $p\text{-}q = p \wedge q'$ e $p+q = (p\text{-}q) \vee (q\text{-}p)$. Os resultados abaixo e suas respectivas provas são simples.

Teorema 3.2.13 Para o quantificador existencial funcional, $\exists$, valem as seguintes propriedades: (i) $\exists p\text{-}\exists q \leq \exists(p\text{-}q)$; (ii) $\exists p + \exists q \leq \exists(p+q)$.

Demonstração: De fato, $p \vee q = (p\text{-}q) \vee q$. Pelo Teorema 3.2.12, segue que $\exists p \vee \exists q = \exists(p\text{-}q) \vee \exists q$. Formando o ínfimo em ambos os lados da equação com $(\exists q)'$, obtemos $\exists p\text{-}\exists q = \exists(p\text{-}q)\text{-}\exists q \leq \exists(p\text{-}q)$. O resultado para a adição Booleana segue pela aplicação do resultado para complementação relativa. ■

Quando, para um quantificador vale o item (ii) deste resultado, dizemos o quantificador é *aditivo*.

Agora, chegamos à definição culminante desta seção.

Definição 3.2.14 Um *operador de fecho topológico* em uma álgebra Booleana **A** é uma função Q, de **A** em **A**, que satisfaz as seguintes condições:

(i) Q é normalizado;

(ii) Q é crescente;

(iii) Q é idempotente;

(iv) Q é aditivo.

Como pudemos observar, o operador $\exists$ satisfaz todas as condições descritas acima. Assim, $\exists$ é um operador de fecho topológico.

Teorema 3.2.15 Se $\exists$ é um operador de fecho topológico numa Álgebra Booleana $\mathbf{A}$, então as seguintes condições são equivalentes:

(i) $\exists$ é um quantificador;

(ii) A imagem de $\exists$, $\exists(\mathbf{A})$, é uma sub-álgebra Booleana de $\mathbf{A}$;

(iii) $\exists(\exists p)' = (\exists p)'$, para todo $p \in \mathbf{A}$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): é apenas uma instância do Teorema 3.2.11; (ii) $\Rightarrow$ (iii): Notemos primeiramente, pelo Lema 3.2.10, que $p \in \exists(\mathbf{A})$ see $\exists p = p$. Isto segue que (iii) é equivalente à asserção que $(\exists p)' \in \exists(\mathbf{A})$, para todo p, e isto, por sua vez, é uma consequência imediata, via (ii), do fato que $\exists p \in \exists(\mathbf{A})$, para todo p. (iii) $\Rightarrow$ (i): Daí, somente nos falta provar que se (iii) é satisfeito, então $\exists$ é quase conjuntivo, i. e., $\exists p \wedge \exists q \leq \exists(p \wedge \exists q)$. Assim, $p \wedge \exists q \leq p \leq \exists p$, disto segue que $\exists(p \wedge \exists q) \leq \exists\exists p = \exists p$, pois $\exists$ é um operador de fecho. Em particular, aditivo e monótono. Similarmente, obtemos $p \wedge \exists q \leq \exists q$, isto segue que $\exists(p \wedge \exists q) \leq \exists q$ e, assim, que $\exists(p \wedge \exists q) \leq \exists p \wedge \exists q$. Para provar a inequação reversa, notemos que $p = (p \wedge \exists q) \vee (p \wedge (\exists q)') \leq (p \wedge \exists q) \vee (\exists q)'$ e que, $\exists p \leq \exists(p \wedge \exists q) \vee (\exists q)'$, aqui por (iii), formando o ínfimo de ambos os lados desta relação com $\exists q$, obtemos, finalmente, $\exists p \wedge \exists q \leq \exists(p \wedge \exists q) \wedge \exists q \leq \exists(p \wedge \exists q)$, e a prova é completa. ■

Segundo Halmos (1956, p. 224), existem certas semelhanças entre homomorfismos Booleanos e quantificadores. Um homomorfismo, neste caso, é uma função que satisfaz certas condições algébricas, para uma álgebra Booleana em outra. Já um quantificador, no nosso caso, é uma função que satisfaz certas condições algébricas de uma álgebra Booleana nela mesma.

Um homomorfismo, por exemplo, determina, de modo único, um subconjunto de seu domínio denominado *kernel*, ou núcleo do homomorfismo. Neste contexto, pelo teorema do homomorfismo, todo ideal próprio é um núcleo, que pode ser visto como uma caracterização de núcleos. Ou seja, este teorema nos mostra que um subconjunto de uma álgebra Booleana é o núcleo de um homomorfismo se, e somente se, este é um ideal, ou seja, a álgebra é o núcleo do homomorfismo nulo.

Como uma analogia entre estes conceitos e os quantificadores, podemos dizer que um quantificador determina um subconjunto de seu domínio, no nosso caso, chamado de *imagem*. Abaixo, mostraremos que a *imagem*, de modo único, determina o quantificador e, assim poderemos caracterizar as possíveis *imagens* dos quantificadores.

Definição 3.2.16 Seja $\mathbf{A}$ uma álgebra Booleana e $\mathbf{B}$ uma subgebra Booleana de $\mathbf{A}$. A álgebra $\mathbf{B}$ é *relativamente completa* se, para todo $p \in \mathbf{A}$, o conjunto $\mathbf{B}(p)$, definido por $\mathbf{B}(p) = \{q \in \mathbf{B} : p \leq q\}$, possui um menor elemento, neste caso, um *ínfimo*.

Sendo $\mathbf{B}$ uma álgebra de Boole, então $1 \in \mathbf{B}(p)$, portanto $\mathbf{B}(p) \neq \varnothing$.

Segundo Halmos (1956, p. 224), podemos dizer que as relações entre as sub-álgebras *relativamente completas* e os quantificadores, são comparáveis àquelas relações entre os filtros ideais para os homomorfismos. Assim, mostremos o seguinte.

Teorema 3.2.17 Se $\exists$ é um quantificador numa álgebra Booleana $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é a *imagem* de $\exists$, então $\mathbf{B}$ é uma sub-álgebra relativamente completa de $\mathbf{A}$. E mais, se $\mathbf{B}(p) = \{q \in \mathbf{B} : p \leq q\}$, então $\exists p = \wedge\mathbf{B}(p)$, para todo $p \in \mathbf{A}$.

Demonstração: O fato de que $\mathbf{B}$ é uma sub-álgebra relativamente completa de $\mathbf{A}$ segue imediatamente do Teorema 3.2.11. Agora, consideremos $q \in \mathbf{B}(p)$. Então segue, pela definição, que $p \leq q$. E mais, pelos Teoremas 3.2.8 e 3.2.10, obtemos que $\exists p \leq \exists q = q$. Assim, $\exists p \in \mathbf{B}(p)$ e disto segue que $\mathbf{B}(p)$ possui um menor elemento e que este menor elemento é $\exists p$. ■

Teorema 3.2.18 Se $\mathbf{B}$ é uma sub-álgebra relativamente completa de uma álgebra Booleana $\mathbf{A}$, então existe um único quantificador em $\mathbf{A}$, com *imagem* $\mathbf{B}$.

Demonstração: Tomemos, para cada $p \in \mathbf{A}$, $\exists p = \wedge\mathbf{B}(p)$, este conjunto existe, pois $\mathbf{B}(p) \neq \varnothing$. Vamos verificar que $\exists$ é um operador de fecho e concluir, pelo Teorema 3.2.15, que $\exists$ é quantificador em $\mathbf{A}$. Para (i) Se $p = 0$, então $\mathbf{B}(p) = \mathbf{B}$, pois $\exists 0 = 0$ e, portanto, $\exists$ é normalizado; (ii) Sempre que existir $q \in \mathbf{B}(p)$, segue que $p \leq \wedge\mathbf{B}(p) = \exists p$; (iii) Se $p \in \mathbf{B}$, então $p \in \mathbf{B}(p)$ e mais, $\exists p = \wedge\mathbf{B}(p) \leq$

p. Disto e pelo item anterior segue que, $\exists p = p$, sempre que $p \in \mathbf{B}$. Assim, $\exists p \in \mathbf{B}$, para todo $p \in \mathbf{A}$. Este resultado implica que $\exists$ é idempotente, ou seja, $\exists\exists p = \exists p$, sempre que $p \in \mathbf{A}$; (iv) Se p_1 e p_2 estão em $\mathbf{A}$, então $\exists p_1$ e $\exists p_2$ estão em $\mathbf{B}$ e, assim, $\mathbf{B}$ é uma álgebra Booleana, pois $\mathbf{B}$ é uma sub-álgebra relativamente completa. Agora, pelo item (ii), $p_1 \vee p_2 \leq \exists p_1 \vee \exists p_2$, deste modo, $\exists p_1 \vee \exists p_2 \in \mathbf{B}(p_1 \vee p_2)$. Com isso, $\exists(p_1 \vee p_2) = \wedge\mathbf{B}(p_1 \vee p_2) \leq \exists p_1 \vee \exists p_2$. De outra forma, podemos dizer que $p_1 \leq \exists(p_1 \vee p_2)$ e $p_2 \leq \exists(p_1 \vee p_2)$. A definição de $\exists$ implica que $\exists p_1 \leq \exists(p_1 \vee p_2)$ e $\exists p_2 \leq \exists(p_1 \vee p_2)$. Desta maneira, obtemos que $\exists p_1 \vee \exists p_2 \leq \exists(p_1 \vee p_2)$; (v) A *imagem* de $\exists$ está inclusa em $\mathbf{B}$ pela definição de $\exists$, já o item (iii) implica a inclusão reversa. Logo $\exists(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$. Nos itens (i) a (iv) vimos que $\exists$ é um operador de fecho. Pelo item (v), a imagem de $\exists$ é uma álgebra Booleana. Pelo Teorema 3.2.15, $\exists$ é um quantificador e, portanto, a prova da existência está completa, já a unicidade é dada por uma consequência imediata do Teorema 3.2.17. ■

3.3 Álgebras Monádicas

Nesta seção, apresentaremos as noções de álgebra monádica que, no nosso caso, é o item que iremos nos aprofundar e apresentar, posteriormente, uma *álgebra monádica da ubiquidade*, ou seja, uma álgebra monádica estendida por um operador que busca capturar as noções do quantificador da ubiquidade.

Definição 3.3.1 Uma *álgebra monádica* é uma álgebra Booleana $\mathbf{A}$ acrescida de um quantificador funcional $\exists$ em $\mathbf{A}$.

Abaixo apresentaremos dois exemplos de álgebras monádicas.

(1) Qualquer álgebra Booleana com a função identidade como o quantificador é uma álgebra monádica. Chamamos este quantificador de *discreto*.

(2) Qualquer álgebra Booleana com a função $\exists$, definida por $\exists 0 = 0$ e $\exists p = 1$, para todo $p \neq 0$, como o quantificador é uma álgebra monádica. Este quantificador é chamado de *simples*.

Aqui, precisamos seguir, minimamente, os mesmos passos e definições dadas acima, ou seja, apresentaremos as definições para as álgebras monádicas dos conceitos que discorremos acima.

Definição 3.3.2 Um subconjunto **B** de uma álgebra monádica **A** é uma *sub-álgebra monádica* de **A** se este determina uma sub-álgebra Booleana de **A**; e é uma álgebra monádica com relação ao quantificador de **A**.

Em outras palavras, **B** é uma *sub-álgebra monádica* de **A** se, e somente se, $\exists p \in \mathbf{B}$, sempre que $p \in \mathbf{B}$.

Definição 3.3.3 Um *homomorfismo monádico* é uma função f de uma álgebra monádica em outra, tal que f é um homomorfismo Booleano e $f(\exists p) = \exists(f(p))$, para todo p.

Definição 3.3.4 O *núcleo* (*kernel*) de um homomorfismo monádico é definido por $ker(f) = \{p : f(p) = 0\}$.

O *kernel* de um homomorfismo monádico é também chamado de *ideal monádico*.

A Definição 3.3.4 nos diz que o núcleo, $ker(f)$, é um ideal Booleano em **A**, tal que $\exists p \in ker(f)$, sempre que $p \in ker(f)$. Similarmente, um *filtro*, **F**, em **A** é um filtro Booleano em **A**, tal que $\forall p \in \mathbf{F}$, sempre que $p \in \mathbf{F}$.

Definição 3.3.5 Uma *relação de congruência monádica*, $\equiv$, em **A** é uma relação de congruência Booleana em **A**, tal que: $p \equiv q \Rightarrow \exists p \equiv \exists q$.

Sejam **A** uma álgebra monádica e **I** é um ideal monádico em **A**, formemos a *álgebra Booleana quociente*, $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$, e consideremos o homomorfismo Booleano canônico f de **A** em **B**, que leva cada elemento p na sua respectiva classe de equivalência, $[p]$ módulo **I**. Segundo Halmos e Givant (1998, p. 118), existe um único caminho para converter **B** numa álgebra monádica, de forma que f seja um homomorfismo monádico com núcleo **I**.

Para tal, definimos $\exists[p] = [\exists p]$, em que $\exists[p] \in$ **B** e $[\exists p] \in$ **A**. Para mostrarmos que este quantificador existencial está bem definido em **B**, suponhamos p_1 e p_2 estão em **A** e que $[p_1] = [p_2]$. Então, $p_1 + p_2$ está em **I**, e mais, $\exists(p_1+p_2)$ também está, pois **I** é um ideal monádico. Disto segue que, $\exists p_1 + \exists p_2 \in$ I, pois $\exists p_1 + \exists p_2 \leq \exists(p_1+p_2)$, donde vem que $[\exists p_1] = [\exists p_2]$.

Assim, chegamos a mais algumas definições.

Definição 3.3.6 Uma álgebra monádica **A** é *simples* se $\{0\}$ é seu único ideal próprio.

Definição 3.3.7 Um ideal monádico **I** é *maximal* quando **I** é um ideal monádico próprio que não é um subconjunto próprio de qualquer outro ideal monádico próprio de **A**.

Neste caso, a conexão entre os ideais maximais e as álgebras simples se dá pelo fato de que o núcleo de um homomorfismo é um ideal maximal se, e somente se, *sua imagem* é uma álgebra simples.

Deste modo, a conexão entre simplicidade e quantificadores fica clara, uma vez que uma álgebra é simples se, e somente se, seu quantificador não é trivial, mas é simples.

Lema 3.3.8 Uma álgebra monádica é simples se, e somente se, é não trivial e seu quantificador é simples.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $\mathbf{A}$ simples e $p \in \mathbf{A}$, com $p \neq 0$. Tomemos o seguinte conjunto $\mathbf{I} = \{q : q \leq \exists p\}$. Assim, $\mathbf{I}$ é um ideal monádico não trivial e, desse modo, $\mathbf{I} = \mathbf{A}$. Em particular, $1 \in \mathbf{I}$. Isto implica que $\exists p = 1$, sempre que $p \neq 0$. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $\exists 1 = 1$, sempre que $p \neq 0$ e, mais, que $\mathbf{I}$ é um ideal monádico em $\mathbf{A}$. Se $1 \in \mathbf{I}$, então $\mathbf{I} = \mathbf{A}$, isto é, todo ideal não trivial em $\mathbf{A}$ é não próprio, ou seja, $\mathbf{A}$ é simples. ■

Lema 3.3.9 Toda sub-álgebra de uma álgebra monádica simples é simples.

Demonstração: Tomemos a álgebra Booleana simples de dois elementos, denotada aqui por $\mathbf{O}$. Esta álgebra é constituída pelo conjunto de todas as funções características em X. Uma álgebra monádica é simples se, e somente se, seu quantificador é simples e, assim o quantificador da álgebra monádica funcional $\mathbf{O}^{\mathrm{X}}$ é simples. Deste modo, temos que $\mathbf{O}^{\mathrm{X}}$ é uma álgebra monádica simples sempre que X é não vazio. ■

A partir deste momento tomaremos $\mathbf{O} = \{0, 1\}$, como a álgebra Booleana simples de dois elementos.

Este lema nos garante que toda sub-álgebra de $\mathbf{O}^{X}$, que neste caso equivale a toda álgebra monádica funcional **O**-valorada, ou **2**-valorada, com um domínio X não vazio, é também simples. Nota-se também que esta é uma sub-álgebra relativamente completa, de toda álgebra Booleana, ou seja, o lema anterior nos remete a que uma álgebra monádica é simples se, e somente se, a sub-álgebra relativamente completa associada com este quantificador é igual a **O**, ou em outras palavras, se, e somente se, a imagem deste quantificador é uma álgebra Booleana simples.

Teorema 3.3.10 Uma álgebra monádica **A** é simples se, e somente se, **A** é isomorfa à uma álgebra monádica funcional **O**-valorada com um domínio não vazio.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se **A** é uma álgebra monádica funcional **O**-valorada com domínio X, e se $p \in \mathbf{A}$, com $p \neq 0$, então $p(x_0) = 1$, para algum ponto $x_0 \in$ X. Disto segue que $1 \in \mathbf{R}(p)$ e que $\vee\mathbf{R}(p) = 1$. Da definição de quantificador funcional, temos que $\exists p = 1$. Isto prova que $\exists p = 1$, sempre que $p \neq 0$, isto é, que $\exists$ é simples, aplicando o Lema 3.3.8. ($\Leftarrow$) Neste caso, utilizaremos o Teorema de Stone referente à representação de Álgebras de Boole. Se **A** é uma álgebra monádica simples, então **A** é, em particular, uma álgebra Booleana, na qual o Teorema de Stone se aplica. Disto segue que existe: (i) um conjunto X;

(ii) uma sub-álgebra Booleana **B** de $\mathbf{O}^{X}$, e (iii) um isomorfismo Booleano f de **A** em **B**. Assim, pelo Lema 3.3.8, o quantificador de **A** é simples e, ainda pelo Lema 3.3.8 e a primeira parte desta prova, o quantificador de **B** é simples, ou seja, f preserva a quantificação. Assim, f é um isomorfismo monádico entre as álgebras monádicas **A** e **B**. ■

Abaixo mostraremos alguns resultados sobre os ideais nas álgebras monádicas.

Teorema 3.3.11 Seja **I** um ideal Booleano de **A** e $\mathbf{I}^*$ o conjunto de todos os elementos $p \in \mathbf{A}$ em que $\exists p \in \mathbf{I}$. Então, $\mathbf{I}^*$ é um ideal monádico e $\mathbf{I}^* \subseteq \mathbf{I}$.

Demonstração: Se $p \in \mathbf{I}^*$, então $\exists p \in \mathbf{I}$. Como **I** é um ideal e $p \leq \exists p$, então $p \in \mathbf{I}$. Assim $\mathbf{I}^* \subseteq \mathbf{I}$. De fato, se p e q estão em $\mathbf{I}^*$, então $\exists p$ e $\exists q$ estão em **I**, por definição. E mais, $\exists p \vee \exists q$ está em **I**, pois **I** é um ideal Booleano. Como $\exists$ é um quantificador distributivo, temos que $\exists(p \vee q) \in \mathbf{I}$, logo $p \vee q \in \mathbf{I}^*$. Agora, se $p \in \mathbf{A}$ e $q \in \mathbf{I}^*$, então $\exists q \in \mathbf{I}$, bem como $\exists p \wedge \exists q \in \mathbf{I}$. Como $\exists$ é modular, temos que $\exists(p \wedge \exists q) \in \mathbf{I}$ e, mais, como $\exists$ é crescente, obtemos que $\exists(p \wedge q) \in \mathbf{I}$. Logo, $p \wedge q \in \mathbf{I}^*$. Se $p \in \mathbf{I}^*$, então $\exists p \in \mathbf{I}$. Como $\exists$ é idempotente obtemos que $\exists\exists p \in \mathbf{I}$, portanto, $\exists p \in \mathbf{I}^*$. ■

Teorema 3.3.12 Se $\mathbf{I}$ é um ideal maximal Booleano de $\mathbf{A}$, então $\mathbf{I}^*$ é um ideal monádico maximal.

Demonstração: Suponha que $\mathbf{M}$ é um ideal monádico obtido pela extensão de $\mathbf{I}^*$. Se $\mathbf{I}^* \neq \mathbf{M}$, existe um elemento p em $\mathbf{M}$, tal que $p \notin \mathbf{I}^*$. Como $\mathbf{M}$ é um ideal monádico, então $\mathbf{M}$ contém o elemento $\exists p$. Obviamente, $\exists p$ não está em $\mathbf{I}$, pois do contrário p estaria em $\mathbf{I}^*$. Agora, $\mathbf{I}$ é um ideal maximal e, desse modo, o elemento $(\exists p)'$ está em $\mathbf{I}$. Mas isto significa que $\exists(\exists p)' \in \mathbf{I}$, ou seja, $(\exists p)' \in \mathbf{I}^*$ e, portanto, em $\mathbf{M}$. Assim, $\mathbf{M}$ contém ambos elementos, $\exists p$ e $(\exists p)'$, ou seja, $\mathbf{M}$ é não próprio. ■

Em suma, o que os resultados acima nos dizem é que ao tomar cada ideal Booleano $\mathbf{I}$ e $\mathbf{I}^*$, a função do conjunto dos ideais Booleanos de $\mathbf{A}$ no conjunto dos ideais monádicos de $\mathbf{A}$, preserva a inclusão e leva ideais maximais em ideais monádicos maximais.

Teorema 3.3.13 (Teorema dos Ideais Maximais para as álgebras Monádicas) Todo ideal monádico próprio numa álgebra monádica pode ser incluído em algum ideal monádico maximal.

Demonstração: Se $\mathbf{I}_0$ é um ideal monádico próprio de uma álgebra monádica $\mathbf{A}$, então $\mathbf{I}_0$ é um ideal Booleano próprio e, assim, pode ser estendido a um ideal maximal Booleano $\mathbf{I}$. Pelo mesmo procedimento acima, podemos tomar, sem perda de generalidade, o conjunto $\mathbf{I}^*$ como o ideal monádico maximal e $\mathbf{I_0}^* \subset \mathbf{I}^*$. Como, $\mathbf{I_0}^* = \mathbf{I_0}$, então $\mathbf{I}^*$ é um ideal maximal monádico que estende $\mathbf{I_0}$. ■

O teorema da existência de ideais monádicos maximais segue do teorema da existência de ideais maximais, assim como é realizado para as álgebras Booleanas.

Teorema 3.3.14 (Teorema da existência para as álgebras monádicas) Se $\mathbf{A}$ é uma álgebra monádica, então para todo elemento p_0, com $p_0 \neq 0$ e $p_0 \in \mathbf{A}$, existe um homomorfismo f de $\mathbf{A}$ sobre uma álgebra monádica tal que $f(p_0) \neq 0$.

Demonstração: Por causa da relação entre ideais maximais e álgebras monádicas simples, o teorema da existência pode ser reescrito da seguinte forma: existe um ideal maximal monádico $\mathbf{I}$ em $\mathbf{A}$ tal que $p_0 \notin \mathbf{I}$. Pelo Teorema 3.3.13, existe um ideal monádico maximal $\mathbf{I_0}$ em que para todos os elementos $p \in \mathbf{A}$, temos $p \leq (\exists p_0)'$. Se $p_0 \in \mathbf{I}$, então o elemento $p_0 \vee \neg\exists p_0 \in \mathbf{I}$ e, assim, também teremos o seguinte $\exists(p_0 \vee \neg\exists p_0) \in \mathbf{I}$, pois $\mathbf{I}$ é fechado para a quantificação. Mas, este elemento coincide com $\exists p_0 \vee \neg\exists p_0$. Deste modo, $1 \in \mathbf{I}$ e $\mathbf{I}$ é não próprio. Portanto, $p_0 \notin \mathbf{I}$. ■

Notemos que existe um ideal monádico maximal **I** tal que $\exists p_0 \notin$ **I**. Logo, segue um corolário.

Corolário 3.3.15 Se **A** é uma álgebra monádica, então para todo elemento p_0, com $p_0 \neq 0$ e $p_0 \in$ **A**, existe um homomorfismo f de **A** sobre uma álgebra monádica tal que $f(p_0) = 1$.

A demonstração deste corolário é imediata.

3.4 Lógicas Monádicas

Neste item apresentaremos as Lógicas Monádicas com suas respectivas definições.

Definição 3.4.1 Uma *lógica monádica* é um par (**A**, **I**), em que **A** é uma álgebra monádica e **I** é um ideal monádico em **A**.

Neste ponto surge uma questão interessante: quais propriedades parecem ser razoáveis para que um subconjunto **I** de **A** seja refutável?

Halmos, segue o seguinte caminho:

(i) se p e q são refutáveis, então $p \vee q$ são refutáveis;

(ii) se p é refutável então $p \wedge q$ deve ser refutável.

Assim, **I** deve ser, no mínimo, um ideal em **A**. No entanto, isto não é suficiente, já que precisamos que a seguinte condição seja verdadeira:

(iii) se p é refutável, então $\exists p$ é refutável.

A fim de solucionar tal questão segue a definição.

Definição 3.4.2 Os elementos $p \in \mathbf{I}$ são chamados de elementos *refutáveis* da lógica $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$. Se $\neg p \in \mathbf{I}$, então p é *demonstrável*.

Definição 3.4.3 Um *modelo* é uma lógica monádica $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$, em que **A** é uma álgebra monádica funcional **O**-valorada, $\mathbf{O} = \{0, 1\}$, e **I** o ideal trivial $\{0\}$.

Definição 3.4.4 Uma *interpretação* de uma lógica monádica $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ é um modelo $(\mathbf{B}, \{0\})$ em que há um homomorfismo monádico f de **A** em **B** para o qual $f(p) = 0$, sempre que $p \in \mathbf{I}$.

Definição 3.4.5 Todo elemento refutável é dito *falso* na interpretação. Se, um elemento $p \in \mathbf{A}$ é falso em toda interpretação, então p é denominado *universalmente inválido.*

Definição 3.4.6 Se todo elemento universalmente inválido é refutável, dizemos que a lógica é *semanticamente completa.*

Definição 3.4.7 Dizemos que um elemento p é *universalmente válido* se $f(p) = 1$, para toda interpretação f, isto é, p é *verdadeiro* em toda interpretação.

3.5 Semisimplicidade

Neste último item apresentaremos o conceito de semisimplicidade. Tal conceito se justifica pelo fato de que a completude semântica demanda uma lógica $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ em que o ideal $\mathbf{I}$ deve ser relativamente grande.

Se, em particular, $\mathbf{I}$ é muito grande, isto é, $\mathbf{I} = \mathbf{A}$, então a lógica é semanticamente completa, pois todo elemento $p \in \mathbf{A}$ é refutável.

Agora, se $\mathbf{I} \neq \mathbf{A}$, então tomemos a álgebra quociente $\mathbf{A}/\mathbf{I}$. O problema de decidir se a lógica $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ é semanticamente completa se reduz à questão sobre a *álgebra* $\mathbf{A}/\mathbf{I}$.

Para tal, necessitamos da seguinte definição.

Definição 3.5.1 Uma álgebra monádica **A** é *semisimples* se a interpretação de todos os ideais maximais em **A** é $\{0\}$.

Agora podemos concluir que as álgebras monádicas constituem uma generalização das álgebras Booleanas. O teorema seguinte, em particular, mostra que toda álgebra Booleana é semisimples. Esta consequência é conhecida, pois é uma consequência imediata do Teorema da Representação de Stone e, este é o mais importante passo na prova do próximo teorema. A prova da presente generalização pode ser dada por uma imitação monádica de qualquer uma das usuais provas dos casos especiais Booleanos. A prova a seguir adota o procedimento alternativo de deduzir a generalização para o caso especial.

Teorema 3.5.2 Toda álgebra monádica é semisimples.

Demonstração: Queremos provar que se **A** é uma álgebra monádica e se p_0 é um elemento, $p_0 \neq 0$ e $p_0 \in \mathbf{A}$, então existe um ideal maximal monádico **I** em **A** tal que $p_0 \in \mathbf{I}$. Fazendo uma analogia para o caso estritamente Booleano, temos que mostrar que existe um ideal maximal Booleano $\mathbf{I_0}$ em **A**, tal que $p_0 \in \mathbf{I_0}$. Se **I** é o conjunto de todos os elementos p em **A** para os quais $\exists p \in \mathbf{I_0}$, então pelo Teorema 3.3.12 **I** é um ideal monádico e que $p_0 \in \mathbf{I_0}$. A prova da semisimplicidade pode ser completada mostrando que **I** é monádico maximal. Tal prova segue ainda pelo Teorema 3.3.12. ■

3.6 Adequação

Neste item apresentaremos uma demonstração para os resultados de *correção* e *completude* com relação à Lógica Monádica e Álgebra Monádica.

Teorema 3.6.1 Uma lógica monádica $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ é semanticamente correta se ela tem uma interpretação, isto é, se existe um homomorfismo f: $(\mathbf{A}, \mathbf{I}) \to (\mathbf{B}, \{0\})$, tal que se $p \in \mathbf{I}$, então $f(p) = 0$.

Demonstração: É uma consequência do Teorema 3.3.14 que $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ é correta apenas no caso em que o ideal $\mathbf{I}$ é próprio. De fato, se $\mathbf{I}$ não é próprio, então ele contém 1, e nenhum homomorfismo com uma imagem não trivial pode atribuir 0 e 1. Por outro lado, se $\mathbf{I}$ é próprio, então existe um ideal maximal monádico $\mathbf{J}$, tal que, $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{J}$. O homomorfismo canônico f é definido de $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ em $(\mathbf{A}/\mathbf{J}, \{0\})$. Além disso, considerando que $\mathbf{A}/\mathbf{J}$ é simples, pois $\mathbf{J}$ é maximal, então $(\mathbf{A}/\mathbf{J}, \{0\})$ é isomorfo a um modelo $(\mathbf{B}, \{0\})$, Portanto, f é uma interpretação. ■

Teorema 3.6.2 (Correção) Se p é demonstrável em $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$, então p é válido em $(\mathbf{B}, \{0\})$.

Demonstração: Se p é demonstrável em $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$, então $p' \in \mathbf{I}$. Daí $f(p') = 0$ e, então, $f(p) = 1$.

Teorema 3.6.3 (Completude) Toda lógica monádica é semanticamente completa.

Demonstração: Desde que cada interpretação de (**A**, **I**) num modelo (**B**, $\{0\}$) induz, de forma natural, um homomorfismo de $\mathbf{A}/\mathbf{I}$ em **B** e como a única restrição sobre **B** é que seja uma álgebra simples, então a questão da completude semântica torna-se em mostrar que $\mathbf{A}/\mathbf{I}$ é semisimples. Daí, segundo o Teorema 3.5.2, toda álgebra monádica é semisimples e, dessa maneira, toda lógica monádica é semanticamente completa. ■

Corolário 3.6.4 Se p é válido em (**B**, $\{0\}$), então p é demonstrável em (**A**, **I**).

Demonstração: O teorema anterior mostra que se p é refutável em (**A**, **I**), então p não é válido em (**B**, $\{0\}$). ■

No próximo capítulo, estenderemos estes resultados para o operador da ubiquidade.

4. Um modelo algébrico para o quantificador da ubiquidade

Neste capítulo apresentaremos o elemento original de nosso trabalho, ou seja, uma interpretação algébrica do quantificador da ubiquidade, tal qual apresentamos no capítulo anterior para os quantificadores clássicos.

4.1 Quantificador funcional da ubiquidade

Neste item pretendemos apresentar um caso particular das funções proposicionais, neste caso, a *função proposicional da ubiquidade* que aqui denominaremos por *quantificador funcional da ubiquidade.*

Definição 4.1.1 Um *quantificador funcional da ubiquidade* ou *operador da ubiquidade*, denotado por Υ, é uma operação de uma álgebra monádica $\mathbf{M}$ em si mesma tal que:

(i) $\Upsilon p \wedge \Upsilon q \leq \Upsilon(p \wedge q)$;

(ii) $\Upsilon p \leq \Upsilon(p \vee q)$;

(iii) $\forall p \leq \Upsilon p \leq \exists p$.

As condições acima introduzem as características do quantificador do plausível no contexto das álgebras monádicas. A expressão Υp indica o interior do conjunto que interpreta p. Os itens (i) e (iii) correspondem aos axiomas da lógica do plausível e a condição (ii) a Proposição 2.2.2.

Abaixo mostraremos alguns resultados deste quantificador funcional.

Teorema 4.1.2 Para o operador da ubiquidade Υ, vale o seguinte: $\Upsilon 1 = 1$.

Demonstração: Basta lembrarmos que $\forall 1 = 1 = \exists 1$. Daí, pela condição (iii) da Definição 4.1.1 e para $p = 1$, $1 = \forall 1 \leq \Upsilon 1 \leq \exists\ 1 = 1$. Portanto, $\Upsilon 1 = 1$.■

De modo semelhante, verificamos que $\Upsilon 0 = 0$. No contexto algébrico, a condição $\Upsilon 1 = 1$ indica que o universo é um conjunto aberto é verdadeiro, enquanto que $\Upsilon 0 = 0$ indica que o vazio é um conjunto aberto é falso.

Teorema 4.1.3 Para o operador da ubiquidade Υ, vale o seguinte: $\Upsilon p \wedge \Upsilon q \leq \exists(p \wedge q)$.

Demonstração: Da condição (i) da Definição 4.1.1, obtemos que $\Upsilon p \wedge \Upsilon q \leq \Upsilon(p \wedge q)$ e pela condição (iii), ainda da Definição 4.1.1, obtemos que $\Upsilon(p \wedge q) \leq \exists(p \wedge q)$. Desse modo, $\Upsilon p \wedge \Upsilon q \leq \exists(p \wedge q)$. ■

Lema 4.1.4 Para o quantificador funcional da ubiquidade Υ, vale o seguinte: $\Upsilon p \wedge \Upsilon p' = 0$.

Demonstração: Lembremos que $\exists 0 = 0$. Do Teorema 4.1.3 obtemos $\Upsilon p \wedge \Upsilon p' \leq \exists(p \wedge p')$. Mas, como $p \wedge p' = 0$, então $\Upsilon p \wedge \Upsilon p' \leq \exists 0 = 0$. Como não temos o caso em que $\Upsilon p \wedge \Upsilon p' < 0$, então $\Upsilon p \wedge \Upsilon p' = 0$. ■

Teorema 4.1.5 Para o operador da ubiquidade Υ, vale o seguinte: $\Upsilon p \leq (\Upsilon p')'$.

Demonstração: Como **M** é, em particular, uma álgebra de Boole, então $\Upsilon p' \wedge (\Upsilon p')' = 0$. Pelo Lema 4.1.4, $\Upsilon p' \wedge \Upsilon p = 0$. Logo, $\Upsilon p \leq (\Upsilon p')'$. ■

Teorema 4.1.6 Para o operador da ubiquidade Υ, vale o seguinte: $\Upsilon(p \vee p') = 1$.

Demonstração: Basta lembrarmos que $p \vee p' = 1$. Daí, pelo Teorema 4.1.2, temos $\Upsilon(p \vee p') = \Upsilon 1 = 1$. ■

Como instâncias do resultado acima, temos: $\Upsilon(p \wedge p') = 0$, $(\Upsilon 0)' = 1$ e $(\Upsilon(p \wedge p'))' = 1$.

Teorema 4.1.7 Para o quantificador funcional da ubiquidade Υ, vale o seguinte: Se $p \leq q$, então $\Upsilon p \leq \Upsilon q$.

Demonstração: Se $p \leq q$, então $q = p \vee q$. Logo, $\Upsilon q = \Upsilon(p \vee q)$, o que nos dá $\Upsilon p \leq \Upsilon(p \vee q) = \Upsilon q$. ■

Teorema 4.1.8 Para o quantificador funcional da ubiquidade Υ, vale o seguinte: $\Upsilon p \wedge \Upsilon q \leq \Upsilon p \vee \Upsilon q \leq \Upsilon(p \vee q)$.

Demonstração: Por instâncias da condição (ii) da Definição 4.1.1, $\Upsilon p \leq \Upsilon(p \vee q)$ e $\Upsilon q \leq \Upsilon(p \vee q)$. Logo, $\Upsilon p \wedge \Upsilon q \leq \Upsilon p \vee \Upsilon q \leq \Upsilon(p \vee q)$. ■

Teorema 4.1.9 Para o quantificador funcional da ubiquidade Υ, vale o seguinte: $\Upsilon(p \wedge q) \leq \Upsilon p$.

Demonstração: Como $p \wedge q \leq p$, então, pelo Teorema 4.1.7, $\Upsilon(p \wedge q) \leq \Upsilon p$. ■

Corolário 4.1.10 Para o quantificador funcional da ubiquidade Υ, vale o seguinte: $\Upsilon(p \wedge q) = \Upsilon p \wedge \Upsilon q$.

Demonstração: Pela condição (i) da Definição 4.1.1 temos que $\Upsilon p \wedge \Upsilon q \leq \Upsilon(p \wedge q)$. Sendo assim, basta-nos mostrar que $\Upsilon(p \wedge q) \leq \Upsilon p \wedge \Upsilon q$. Pelo Teorema 4.1.9 obtemos que $\Upsilon(p \wedge q) \leq \Upsilon p$ e $\Upsilon(p \wedge q) \leq \Upsilon q$. Logo $\Upsilon(p \wedge q) \leq \Upsilon p \wedge \Upsilon q$. ■

4.2 Álgebra Monádica da Ubiquidade

Neste item apresentaremos as noções e alguns resultados de uma *álgebra monádica da ubiquidade*, ou seja, uma álgebra monádica que é estendida por um operador para capturar as noções do quantificador da ubiquidade, no nosso caso o *quantificador funcional da ubiquidade.*

Definição 4.2.1 Uma *álgebra monádica da ubiquidade*, $\mathbf{U}$, é uma álgebra monádica $\mathbf{M}$ acrescida do operador da ubiquidade Υ.

A próxima definição apenas relembra definição do capítulo anterior

Definição 4.2.2 O operador $\exists$ é *simples* quando $\exists 0 = 0$ e $\exists p = 1$, sempre que $p \neq 0$.

Poderíamos tentar definir o operador da ubiquidade Υ como *simples* se$\Upsilon 0 = 0$ e $\Upsilon p = 1$, sempre que $p \neq 0$, mas como vale $\forall p \leq \Upsilon p \leq \exists p$, para ideais maximais não teríamos informações sobre elementos maiores que Υp.

Seguiremos, de perto, os mesmos passos e definições dadas anteriormente, agora para esta álgebra.

Definição 4.2.3 Um subconjunto $\mathbf{B}$ de uma álgebra monádica da ubiquidade $\mathbf{U}$ é uma *sub-álgebra monádica da ubiquidade* de $\mathbf{U}$ se: $p \in \mathbf{B} \Rightarrow \Upsilon p \in \mathbf{B}$.

Definição 4.2.4 Um *homomorfismo monádico da ubiquidade* é uma função f de uma álgebra monádica da ubiquidade em outra, tal que f é um homomorfismo monádico e $f(\Upsilon p) = \Upsilon(fp)$, para todo p.

Definição 4.2.5 O *núcleo* (*kernel*) de um homomorfismo monádico da ubiquidade f é definido por $ker(f) = \{p : f(p) = 0\}$.

Definição 4.2.6 Um *ideal monádico da ubiquidade* $\mathbf{I}$ é um ideal monádico $\mathbf{I}$ tal que: $p \in \mathbf{I} \Rightarrow \Upsilon p \in \mathbf{I}$.

Teorema 4.2.7 Todo ideal monádico é um ideal monádico da ubiquidade.

Demonstração: Seja $\mathbf{I}$ um ideal monádico. Se $p \in \mathbf{I}$, então $\exists p \in \mathbf{I}$ e como $\Upsilon p \leq \exists p$, então $\Upsilon p \in \mathbf{I}$. ■

Assim, o *kernel* de um homomorfismo monádico da ubiquidade é um ideal monádico da ubiquidade.

Neste trabalho, assim como fizemos no capítulo anterior, trataremos apenas dos ideais.

Definição 4.2.8 Uma *relação de congruência monádica da ubiquidade*, $\equiv$, em **U** é uma relação de congruência monádica em **U**, tal que $\Upsilon p \equiv \Upsilon q$, sempre que $p \equiv q$.

Se **U** é uma álgebra monádica da ubiquidade e **I** é um ideal monádico da ubiquidade em **U**, formemos a *álgebra Booleana quociente*, $\mathbf{B} = \mathbf{U}/\mathbf{I}$, e consideremos o homomorfismo Booleano canônico f de **U** em **B**, que leva cada elemento $p \in \mathbf{U}$ na sua respectiva classe de equivalência $[p]$ módulo **I**. Assim, como feito anteriormente, sabemos que existe um único caminho de converter **B** numa álgebra monádica da ubiquidade, de forma que f torna-se um homomorfismo monádico da ubiquidade com *kernel* **I**.

Para tal, temos que $\Upsilon[p] = [\Upsilon p]$, em que Υp é um elemento de **U**. Para mostrarmos que este quantificador está bem definido em **B**, suponhamos p_1, $p_2 \in \mathbf{U}$ e que $[p_1] = [p_2]$. Então, $p_1 \vee p_2$ está em **I** e, mais, $\Upsilon(p_1 \vee p_2)$ também está, pois **I** é um ideal da ubiquidade. Disto segue que, $\Upsilon p_1 \vee \Upsilon p_2 \in \mathbf{I}$ pois $\Upsilon p_1 \vee \Upsilon p_2 \leq \Upsilon(p_1 \vee p_2)$, donde vem que $[\Upsilon p_1] = [\Upsilon p_2]$.

Assim, chegamos a mais algumas definições.

Definição 4.2.9 Uma álgebra monádica da ubiquidade **U** é *simples* se $\{0\}$ é o único ideal monádico da ubiquidade próprio de **U**.

Definição 4.2.10 Um ideal monádico da ubiquidade, **I**, é *maximal* quando **I** é um ideal próprio que não é um subconjunto próprio de qualquer outro ideal monádico da ubiquidade próprio.

Com este resultado garantimos que quase todos os Teoremas e Lemas apresentados para os ideais monádicos no capítulo anterior são válidos, agora, para os ideais monádicos da ubiquidade. Desse modo, apenas apresentaremos versões modificadas dos enunciados destes resultados introduzindo os ideais monádicos da ubiquidade ao invés dos ideais monádicos.

Lema 4.2.11 Uma álgebra monádica da ubiquidade é simples se, e somente se, seu quantificador $\exists$ é simples.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Consideremos que $\mathbf{U}$ é simples, $p \in \mathbf{U}$ e $p \neq 0$. Tomemos o seguinte conjunto $\mathbf{I} = \{q : q \leq \ \exists p\}$ o qual sabemos ser um ideal monádico para o qual $\exists$ é simples. Agora, como todo ideal monádico é monádico da ubiquidade, então $\mathbf{I}$ atende o enunciado. $(\Leftarrow)$ Suponhamos que $\exists 0 = 0$ e $\exists p = 1$, sempre que $p \neq 0$, e mais, que $\mathbf{I}$ é um ideal monádico da ubiquidade em $\mathbf{U}$. Assim, se $p \in \mathbf{I}$, então $\exists p \in \mathbf{I}$, e para $p \neq 0$, então $1 \in \mathbf{I}$. Logo, $\mathbf{I} = \mathbf{U}$. Em outras palavras, todo ideal monádico da ubiquidade não trivial em $\mathbf{U}$ é impróprio, ou seja, $\mathbf{U}$ é simples. ■

Lema 4.2.12 Toda sub-álgebra de uma álgebra monádica da ubiquidade simples é simples.

Demonstração: A única álgebra Booleana simples é a álgebra de dois elementos, denotada aqui por $\mathbf{O}$. Como uma álgebra monádica da ubiquidade é simples se, e somente se, seu quantificador $\exists$ é simples, então $\mathbf{O}^{\mathrm{X}}$ é uma álgebra monádica da ubiquidade simples sempre que X é não vazio. ■

Teorema 4.2.13 Uma álgebra monádica da ubiquidade $\mathbf{U}$ é simples se, e somente se, $\mathbf{U}$ é isomorfa à uma álgebra monádica funcional $\mathbf{O}$-valorada.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Já foi mostrado que toda álgebra **O**-valorada funcional com um domínio não-vazio é simples; ($\Leftarrow$) Neste caso, nos utilizaremos novamente do Teorema de Stone referente à representação de álgebras Booleanas. Se **U** é uma álgebra monádica da ubiquidade simples, então **U** é, em particular, uma álgebra Booleana, na qual o Teorema de Stone é aplicável. Disto segue que existe: (i) um conjunto X; (ii) uma sub-álgebra Booleana **B** de $\mathbf{O}^{X}$, e (iii) um isomorfismo Booleano f de **U** em **B**. Assim, pelo Lema 4.2.11, o quantificador $\exists$ de **U** é simples e pelo Lema 4.2.12 o quantificador $\exists$ de **B** é simples, ou seja, f preserva todos os elementos e é automaticamente um isomorfismo monádico da ubiquidade entre as álgebras monádicas da ubiquidade **U** e **B**. ■

Os resultados seguintes, sobre os ideais e as álgebras monádicas, são semelhantes aos apresentados no Capítulo 3.

Teorema 4.2.13 Se **I** é um ideal Booleano de **U** e $\mathbf{I}^*$ é o conjunto de todos os elementos $p \in \mathbf{A}$ tais que $\Upsilon p \in \mathbf{I}$, então $\mathbf{I}^*$ é um ideal monádico da ubiquidade.

Demonstração: Já tínhamos visto ser um ideal monádico. A condição adicional assegura ser um ideal monádico da ubiquidade. ■

Teorema 4.2.14 Se **I** é um ideal maximal Booleano de **U**, então $\mathbf{I}^*$ é um ideal maximal monádico da ubiquidade.

Demonstração: Já tínhamos visto ser um ideal maximal monádico. Como todo monádico é da ubiquidade, então vale o enunciado. ■

Teorema 4.2.15 (Teorema dos ideais maximais) Todo ideal próprio numa álgebra monádica da ubiquidade está incluso em algum ideal maximal monádico da ubiquidade.

Demonstração: Já vimos que todo ideal monádico próprio está incluso num ideal maximal monádico. Como todo monádico é da ubiquidade, então vale o enunciado. ■

Teorema 4.2.16 (Teorema da existência) Para todo elemento p_0, $p_0 \neq 0$ e $p_0 \in$ **U**, em que **U** é uma álgebra monádica da ubiquidade, existe um homomorfismo f de **U** sobre uma álgebra monádica da ubiquidade simples tal que $f(p_0) \neq 0$.

Portanto, podemos concluir que todo ideal monádico da ubiquidade próprio numa álgebra monádica da ubiquidade está incluso em algum ideal maximal monádico da ubiquidade, tal qual concluímos acima.

4.3 Lógicas Monádicas da Ubiquidade

Neste item, apresentaremos as lógicas monádicas da ubiquidade.

Definição 4.3.1 Uma *lógica monádica da ubiquidade* é um par (**U**, **I**), em que **U** é uma álgebra monádica da ubiquidade e **I** é um ideal monádico da ubiquidade em **U**.

Definição 4.3.2 Os elementos $p \in$ **I** são os elementos *refutáveis* da lógica. E, se $p' \in$ **I**, então p é *provável.*

Definição 4.3.3 *Modelo* é uma lógica monádica da ubiquidade (**U**, **I**), em que **U** é uma álgebra monádica funcional da ubiquidade **O**-valorada e **I** o ideal trivial $\{0\}$.

Definição 4.3.4 Uma *interpretação* de uma lógica monádica da ubiquidade (**U**, **I**) num modelo (**B**, $\{0\}$) é um homomorfismo monádico f de **U** em **B** tal que $fp = 0$, sempre que $p \in$ **I**.

Definição 4.3.5 Todo elemento refutável é dito *falso* na interpretação. Se, um elemento $p \in$ **U** é falso em toda interpretação, então p é denominado de *universalmente inválido.*

Definição 4.3.6 Se todo elemento universalmente inválido é refutável, então a lógica é *semanticamente completa.*

Definição 4.3.7 Um elemento p é *universalmente válido* se $fp = 1$, para toda interpretação f, isto é, p é *verdadeiro* segundo toda interpretação.

4.4 Semisimplicidade

Neste último item, apresentaremos o conceito de semisimplicidade para uma álgebra monádica da ubiquidade. As observações feitas no início do item 3.5 deste trabalho se aplicam, obviamente, aqui também.

Definição 4.4.1 Uma álgebra monádica da ubiquidade **U** é *semisimples* se a interpretação para qualquer ideal maximal de **U** é $\{0\}$.

Dado um elemento qualquer p de **U**, se ele está em algum ideal maximal, então a sua interpretação em (**B**, $\{0\}$) tem que ser dada por um homomorfismo f tal que $f(p) = 0$, isto é, os elementos refutáveis devem tomar valor 0. Isto também é equivalente a dizer que se para algum homomorfismo f , $f(p) \neq 0$, então existe um ideal maximal **I** de **U** tal que $p \notin$ **I**.

Teorema 4.4.2 (Teorema da semisimplicidade) Toda álgebra monádica da ubiquidade é semisimples.

Demonstração: Precisamos mostrar que se **U** é uma álgebra monádica da ubiquidade, $p_0 \in$ **U** e $p_0 \neq 0$, então existe um ideal maximal monádico da ubiquidade **I** de **U** tal que $p_0 \notin$ **I**. Como **U** é uma álgebra de Boole, então existe um ideal Booleano maximal $\mathbf{I}_0$ tal que $p_0 \notin \mathbf{I}_0$. Seja **I** o conjunto de todos os elementos $p \in$ **U** para os quais $\exists p \in \mathbf{I}_0$. Então **I** é um ideal monádico e, portanto, monádico da ubiquidade e tal que $p_0 \notin$ **I**. A prova da semisimplicidade precisa ser completada mostrando que **I** é maximal. Suponhamos que **J** é um ideal monádico, tal que $\mathbf{I} \subset \mathbf{J}$ (inclusão própria). Daí, existe $p \in$ **J** tal que $p \notin$ **I**. Como **J** é monádico, então que $\exists p \in$ **J**. Por outro lado, desde que $p \notin$ **I**, então $\exists p \notin \mathbf{I}_0$ e como $\mathbf{I}_0$ é um ideal maximal Booleano, então $(\exists p)' \in \mathbf{I_0}$. Daí, $\exists(\exists p)' = (\exists p)' \in \mathbf{I_0}$ e, portanto, $(\exists p)' \in \mathbf{I} \subset \mathbf{J}$. Logo $1 \in \mathbf{J}$ e, desse modo, $\mathbf{J} = \mathbf{U}$. ■

4.5 Adequação

Neste item apresentaremos os teoremas de *correção* e *completude* com relação a uma *lógica monádica da ubiquidade* e uma *álgebra monádica da ubiquidade*.

Fundamentalmente, precisamos mostrar que a álgebra da lógica do plausível é uma álgebra monádica da ubiquidade.

Teorema 4.5.1 A álgebra de Lindenbaum da lógica do plausível é uma álgebra monádica da ubiquidade.

Demonstração: Como estamos tratando com uma álgebra de Lindenbaum de uma extensão conservativa da lógica de primeira ordem, devemos recordar que vale o seguinte: $\vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \vDash [A] \leq [B]$, a transferência de elementos dedutivos para conceitos algébricos da ordem Booleana. Já sabemos que a álgebra de uma lógica de primeira ordem monádica é uma álgebra monádica.

Precisamos verificar que valem as seguintes condições: (i) $[\Upsilon p] \wedge [\Upsilon q] \leq [\Upsilon(p \wedge q)]$; (ii) $[\Upsilon p] \leq [\Upsilon(p \vee q)]$; (iii) $[\forall p] \leq [\Upsilon p] \leq [\exists p]$.

A condição (i) segue do (Ax_1) $(\Upsilon xAx \wedge \Upsilon xBx) \rightarrow \Upsilon x(Ax \wedge Bx)$, a condição (iii) dos ($Ax_3$) $\forall xAx \rightarrow \Upsilon xAx$ e (Ax_4) $\Upsilon xAx \rightarrow \exists xAx$.

A lógica do plausível é correta e completa para os modelos pseudo-topológicos, conforme mostrou Gracio (1999). A Proposição 2.2.2 afirma que o interior de A está contido no interior de A$\cup$B. Assim, a condição (ii) vale em todo espaço pseudo-toplógico e, portanto, vale a sua versão correspondente na lógica do plausível.

Desse modo, a álgebra de Lindenbaum da lógica do plausível tem as propriedades que definem uma álgebra monádica da ubiquidade. ■

Teorema 4.5.2 Uma lógica monádica da ubiquidade (**U**, **I**) é semanticamente correta se ela tem uma interpretação, isto é, se existe um homomorfismo f: (**U**, **I**) $\rightarrow$ (**B**, $\{0\}$), tal que se $p \in$ **I**, então $f(p) = 0$.

Demonstração: Análoga àquela dada no Teorema 3.6.1, fazendo as permutas de **M** por **U** e **I** ideal monádico por **I** ideal monádico da ubiquidade.■

Corolário 4.5.3 Se p é demonstrável em (**U**, **I**), então p é válido em (**B**, $\{0\}$).

Demonstração: Se p é demonstrável em (**U**, **I**), então p' $\in$ **I** e daí $f(p') = 0$ e, portanto, $f(p) = 1$. ■

Teorema 4.5.4 (Completude) Toda lógica monádica da ubiquidade é semanticamente completa.

Demonstração: Desde que cada interpretação de (**U**, **I**) num modelo (**B**, $\{0\}$) induz, de forma natural, um homomorfismo de **U**/**I** em **B** e como a única restrição sobre **B** é que seja uma álgebra simples, então a questão da completude semântica restringe-se em mostrar que **U**/**I** é semisimples. Mas, segundo o

Teorema 4.4.2, toda álgebra monádica da ubiquidade é semisimples e, dessa maneira, toda lógica monádica da ubiquidade é semanticamente completa.■

Corolário 4.5.5 Se p é válido em (**B**, $\{0\}$), então p é demonstrável em (**U**, **I**).

Demonstração: O teorema anterior mostra que se p é refutável em (**U**, **I**), então p não é válido em (**B**, $\{0\}$). ■

Com isto concluímos que a lógica monádica da ubiquidade é *correta* e *completa*.

Como o Teorema 4.5.2 mostra que toda álgebra de Lindenbaum da lógica do plausível é uma álgebra monádica da ubiquidade, então temos também a adequação da lógica do plausível segundo os modelos algébricos das álgebras monádicas da ubiquidade.

Considerações Finais

O presente trabalho mostrou um modelo algébrico do quantificador da ubiquidade, que foi apresentado inicialmente em versão modulada, ou seja, para sua semântica foi dada como uma estrutura de primeira ordem acrescida dos espaços pseudo-topológicos.

Nos primeiros capítulos fizemos uma reflexão sobre o tema dos quantificadores. Como uma continuação a estes estudos, discorremos, sucintamente, sobre a lógica da ubiquidade, que introduz o quantificador modulado da ubiquidade, objeto de estudo desta Dissertação. A lógica da ubiquidade foi inicialmente apresentada por Grácio (1999) e Grácio e Carnielli (2008).

Prosseguindo, procuramos entender as motivações dos modelos algébricos apresentados nos textos de Paul Halmos, a saber, as álgebras e lógicas monádicas.

E por fim, estendemos tais noções para os elementos particulares da lógica da ubiquidade através de modelos algébricos no estilo de Halmos. Para tanto, trabalhamos apenas com uma versão de lógica monádica

Contudo, obviamente não temos claro que seja o único, nem o melhor modelo algébrico para esta lógica.

As ideias em modelos algébricos usa com bastante frequência as noções de filtros e ideais, no nosso trabalho decidimos por utilizar os ideais por ser um caminho mais usual.

No entanto, esse trabalho torna possível verificar se uma fórmula A é ou não um teorema da lógica da ubiquidade, através de um modelo puramente algébrico.

Podemos dizer que um dos intuitos deste trabalho seria a obtenção de um modelo para a lógica da ubiquidade um pouco mais próximo à nossa intuição, pois a medida que tentamos capturar as noções de quantificador a partir de conceitos algébricos, tomando por exemplo, o quantificador existencial ($\exists$) como uma generalização da disjunção ($\vee$), ou seja, uma disjunção *infinita*, parece-nos então que, esta abordagem aproxima-se do que intuitivamente pensamos ser um quantificador.

Ao apresentarmos tais conceitos, mostramos a correção e completude deste modelo algébrico.

É exatamente neste ponto que vemos a maior vantagem nesta abordagem, pois mostramos a adequação sem sequer sairmos do ambiente algébrico o que nos permite certa facilidade na abordagem com relação aos métodos tradicionais.

Portanto, podemos dizer que o presente trabalho pretendia mostrar um novo modelo, no caso algébrico, para o quantificador da ubiquidade e este objetivo foi alcançado.

Apêndice

Neste apêndice apresentaremos sucintamente o conceito de ideais, filtros e homomorfismos booleanos.

Definição Um *Ideal Booleano* **I** em uma álgebra **B** é um subconjunto de **B**, tal que:

(i) $0 \in \mathbf{I}$;

(ii) Se $p \in \mathbf{I}$ e $q \in \mathbf{I}$, então $p \vee q \in \mathbf{I}$;

(iii) Se $p \in \mathbf{I}$ e $q \in \mathbf{B}$, então $p \wedge q \in \mathbf{I}$

O conceito complementar ao conceito de ideais chamamos de *filtros*.

Definição Um *Filtro Booleano* **F** em uma álgebra de Boole **B** é um subconjunto de **B**, tal que:

(i) $1 \in \mathbf{F}$;

(ii) Se $p \in \mathbf{F}$ e $q \in \mathbf{F}$, então $p \wedge q \in \mathbf{F}$;

(iii) Se $p \in \mathbf{F}$ e $q \in \mathbf{B}$, então $p \vee q \in \mathbf{F}$.

Definição Um homomorfismo booleano é uma função f de uma álgebra de Boole **B** em uma outra álgebra de Boole **A**, tal que:

(i) $f(p \wedge q) = f(p) \wedge f(q)$

(ii) $f(p \vee q) = f(p) \vee f(q)$

(iii) $f(\neg p) = \neg f(p)$

Abaixo algumas observações sobre estes homomorfismos.

(i) Quando esta função é injetiva temos um *monomorfismo*;

(ii) Quando esta função é sobrejetiva temos um *epimorfismo*;

(iii) Quando esta função é bijetiva temos um *isomorfismo*.

(iv) Quando $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ e temos um isomorfismo dizemos que existe um *automorfismo*.

Definição O conjunto $\mathbf{I} = \{f(p) = 0, \forall p \in \mathbf{B}\}$ é chamado de *núcleo* de um homomorfismo booleano f.

Claramente vemos que o conjunto **I** se trata de um caso de ideal.

E, por fim, algumas definições de ideais que foram tratados neste texto.

Definição Um ideal é dito *próprio* se este não contém o elemento 1.

Definição Um ideal é dito *impróprio* se este contém os elementos 0 e 1.

Referências Bibliográficas

BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. In: *Linguistics and Philosophy*, vol. 4, p. 159-219, 1981.

BENTHEM, J. V.; WESTERSTÄHL, D. Directions in Generalized Quantifier Theory. In: *Studia Logica*, vol. 55, p. 389 – 419, 1995.

BETH, E. W. *The fundations of mathematics.* Amsterdam: North Holland, 1959.

BOZA, T. A. S. *Tableaux para uma Lógica Proposicional do Plausível.* Relatório de Pesquisa. Orientador: Hércules de Araujo Feitosa. Bauru, 2010.

BOZA, T. A. S. *Semântica Relacional para uma Lógica Proposicional do Plausível.* Relatório de Pesquisa. Orientador: Hércules de Araujo Feitosa. Bauru, 2011.

BOZA, T. A. S.; FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C. Algebraic Aspects of the Plausible Logic. In: 8th Conference Brazilian on Dynamics, Control and Applications - DINCON'09, *Archimedes Series*, vol. 8. Bauru, 2009.

BULL, R.; SEGERBERG, K. Basic modal logic. In: Gabbay, D.; Guenthner, F. (Eds.) *Handbook of philosophical logic, vol. II.* Dordrecht: D. Reidel, p. 1 – 88, 1984.

CARNIELLI, W. A.; EPSTEIN, R. L. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática.* São Paulo: Editora UNESP, 2006.

CASTRUCCI, B. *Elementos de teoria dos conjuntos.* São Paulo: G.E.E.M., 1967.

CHELLAS, B. F. *Modal logic: an introduction.* New York: University Press, Cambridge, 1999.

CORREA DA SILVA, F. S.; FINGER, M.; MELO, A. C. V. de. *Lógica para computação.* São Paulo: Thomson, 2006.

EPSTEIN, R. L. *The semantic foundations of logic, vol. 1: propositional logics*. New York: Oxford University Press, 1995.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; BRUNO-ALFONSO, A. *Teoria dos conjuntos: sobre a fundamentação matemática e a construção de conjuntos numéricos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. *A propositional version of the plausible logic*. In: Cezar Mortari e Luiz Henrique Dutra. (Org.). Simpósio Internacional Principia – Rumos da Epistemologia. Florianópolis: NEL/UFSC, vol. 9, p. 185 – 196, 2009.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FRÁPOLLI SANZ, M. J. Cuantificadores. In: Frápolli Sanz, M. J. (Coord.) *Filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos, p. 151 - 178, 2007.

FREGE, G. Conceptografía, lós fundamentos de La aritmética: otros estudos filosóficos. Tradução de: Hugo Padilla. In: Fernando Salmerón. Coleção*:* *Filosofía Contemporánea*. Série: Textos Fundamentales, 1972.

GENTZEN, G. *The collected papers of Gerhard Gentzen*. North Holland Publishing Company: Amsterdam – London, 1969.

GOLZIO, A. C. J. *Elementos algébricos para a noção de 'poucos' e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos*. Dissertação de Mestrado. Orientador: Hércules de Araujo Feitosa. Marília: UNESP, 2011.

GONZALEZ, M. E. Q.; HASELAGER, W. F. G. Raciocínio abdutivo, criatividade e auto-organização. *Cognitio: Revista de Filosofia*, número 3, p. 22-31, 2002.

GRÁCIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de Doutorado, Institute of Philosophy and Human Sciences, State University of Campinas, 1999.

GRÁCIO, M. C. C.; CARNIELLI, W. A. Modulated logics and flexible reasoning. *Logic and Logical Philosophy*, volume 17, p. 211 – 249, 2008.

HALMOS, P. R. *Algebraic Logic*. New York: Chelsea Publishing Company, 1962.

HALMOS, P. R. Algebraic Logic, I. Monadic boolean algebras. In: *Compositio Mathematica*, p. 217-249, 1956.

HALMOS, P. R. The basic concepts of Algebraic Logic. In: *The American Mathematical Monthly*, vol. 63, p. 363-387, 1956.

HALMOS, P. R.; GIVANT, Steven. Logic as Algebra. In: *The Mathematical Association of America*, 1998.

HINTIKKA, J.; SANDU, G. What is quantifier? In: *Synthese*, vol. 98, nº1. Symposium in Honor of Alastair Hannay and Dagfinn, p. 113-123, 1994.

KRAUSE, D. *Capítulo 4: Lógica e Ontologia*, 2009. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/Ontologia/LogOnto(LaTeX).pdf.A>. Acesso em: 28 janeiro de 2013.

KRAUSE, D. *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência.* São Paulo: EPU, 2002.

LINDSTRÖM, P. First order predicate logic with generalized quantifiers. In: Theoria: *A swedish journal of Philosophy and Psychology*, vol. 32, p. 186-195, 1966.

LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos conjuntos.* Tradução Fernando Vilain Heusi da Silva. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1967.

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic.* Princeton: D. Van Nostrand, 1964.

MIRAGLIA, F. *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica.* Campinas: UNICAMP/CLE. (Coleção CLE, vol. 1), 1987.

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica.* São Paulo: Editora UNESP: Imprensa Oficial do Estado, 2001.

MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. In: *Fundamenta Mathematicæ*, vol. 44, p. 12-36, 1957.

NASCIMENTO, M. C., FEITOSA, H. A. As álgebras dos operadores de conseqüência. In: *Revista de Matemática e Estatística*, vol. 23, número 1, p. 19-30, São Paulo, 2005.

PINTER, C. C. Algebraic logic with generalized quantifiers. In: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XVI, número 4, p. 511 – 516, 1975.

PRIEST, G. *An introduction to non-classical logic.* United Kingdom: University Press, Cambridge, 2001.

RODRIGUES, A. P. *Sobre quantificadores: uma formalização do quantificador 'quase sempre'.* Dissertação de mestrado, programa de Mestrado em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica, Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista. Marília, 2011.

SALMON, W. C. *Lógica.* Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Zahar Editores S. A.: Rio de Janeiro, 1963.

SCABIA, M. L. D. C. *Lógica: temas de filosofía.* Editora Labor, S. A. Barcelona, Cataluña, 1976.

SHER, G. Logical Quantifiers. In: *The Routledge Companion to Philosophy of Language*, edited by Gillian Russell e Delia Graff Fara. New York: Routledge, p. 579 – 595, 2012.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. Addison-Wesley Pub, 1967.

SILVESTRINI, L. H. da C. *Um sistema de Tableaux Analíticos para a Lógica do Plausível*. Volume 6, número 2, p. 57 – 71. ISSN: 1807-8281, 2007.

SMULLYAN, R. *First-order logic*. Amsterdam: North-Holland, 1971.

VÄÄNÄNEN, J. Generalized Quantifiers, an introduction. In: *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, vol. 1754, p. 1 – 17, Springer, 1999.

WESTERSTÅHL, D. Generalized quantifiers. In: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2005. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/generalized-quantifiers/>. Acesso em: 18 de janeiro de 2013.

WESTERSTÅHL, D.; PETERS, S. *Quantifiers. Cap. 2*, 2002. Disponível em:
<http://www.stanford.edu/group/nasslli/courses/peterswes/PWbookdraft2-3.pdf>. Acesso em: 18 de janeiro de 2013.