



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Ana Maria Mathias Morita

Algumas generalizações do teorema clássico de Borsuk-Ulam

São José do Rio Preto - SP

2014

Ana Maria Mathias Morita

Algumas generalizações do teorema clássico de Borsuk-Ulam

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Topologia Algébrica, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a Dr^a Maria Gorete Carreira Andrade

São José do Rio Preto - SP

2014

Morita, Ana Maria Mathias.

Algumas generalizações do teorema clássico de Borsuk-Ulam / Ana Maria Mathias Morita. – São José do Rio Preto, 2014.

60 f. : il.

Orientador: Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. Espaços topológicos. 3. Borsuk-Ulam, Teorema de. I. Andrade, Maria Gorete Carreira. II. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Ana Maria Mathias Morita

Algumas generalizações do teorema clássico de Borsuk-Ulam

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Topologia Algébrica, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof^a Dr^a Maria Gorete Carreira Andrade
UNESP - São José do Rio Preto

Prof^a Dr^a Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP - São José do Rio Preto

Prof^a Dr^a Denise de Mattos
USP - São Carlos

São José do Rio Preto - SP

20 de fevereiro de 2014

A minha mãe,
Dalva,
dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, agradeço à Deus, em primeiro lugar, por iluminar o meu caminho e dar forças para eu seguir em frente.

À minha querida mãe Dalva, responsável pela realização deste sonho. Sou grata pelo amor incondicional, dedicação e ensinamentos.

À minha irmã Mariana, pela amizade, companheirismo e preciosos momentos divertidos.

Ao meu namorado Luís Ricardo, pelo carinho, apoio e compreensão nos momentos em que não pude estar presente.

À minha orientadora Maria Gorete Carreira Andrade, pelos inestimáveis ensinamentos e por acreditar em mim, mesmo quando eu não tinha essa fé.

Aos professores do Departamento de Matemática do IBILCE-UNESP, em especial aos professores Adalberto Spezamiglio, pela colaboração e convivência desde os tempos de PET e Hermes Antonio Pedroso, pelo carinho.

Aos professores Daciberg Lima Gonçalves, do IME-USP e John Guaschi, da Université de Caen, pela disponibilidade em esclarecer algumas dúvidas.

Aos meus queridos amigos, que se tornaram uma família para mim e fizeram com que essa jornada fosse muito prazerosa. Em especial à Rafaella, que sempre esteve comigo desde os primeiros passos na escola, ao Pedro e à Luana, pelo companheirismo e risos sem fim.

À banca examinadora.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para realização deste trabalho.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê”

Arthur Schopenhauer

RESUMO

O teorema clássico de Borsuk-Ulam afirma que se $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então existe um ponto x na esfera tal que $f(x) = f(-x)$. Desde a publicação, diversas generalizações desse resultado têm sido abordadas. Algumas generalizações consistem em substituir o domínio (\mathbb{S}^n, A) , onde A é a involução antipodal, por outros pares (X, T) de involuções livres, ou o contradomínio \mathbb{R}^n por espaços topológicos mais gerais Y . Nesse caso, dizemos que $((X, T); Y)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam se dada uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, existe um ponto x em X tal que $f(x) = f(T(x))$. Neste trabalho, detalhamos a demonstração de um resultado de classificação apresentado por Gonçalves em [6], que fornece condições necessárias e suficientes para que uma superfície fechada satisfaça a propriedade de Borsuk-Ulam. Mostramos também uma prova detalhada de um resultado apresentado por Desideri, Pergher e Vendrusculo em [3], que estabelece um critério algébrico para que um espaço topológico qualquer satisfaça a propriedade de Borsuk-Ulam.

Palavras-chave: Teorema de Borsuk-Ulam, involução livre, aplicação equivariante.

ABSTRACT

The classic Borsuk-Ulam theorem states that if $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a continuous map, then there exists a point x in the sphere such that $f(x) = f(-x)$. Since the publication, many generalizations of that result have been studied. Some generalizations consist in replacing either the domain (\mathbb{S}^n, A) , where A is the antipodal involution, by other free involution pair (X, T) , or the target space \mathbb{R}^n by more general topological spaces Y . In that case, we say that $((X, T); Y)$ satisfies the Borsuk-Ulam property if given any continuous map $f : X \rightarrow Y$, there exists a point x in X such that $f(x) = f(T(x))$. In this work, we detail the proof of a classification result presented by Gonçalves in [6], that provides necessary and sufficient conditions for a closed surface satisfy the Borsuk-Ulam property. We also show a detailed proof of a result presented by, Desideri, Pergher and Ventrúsculo in [3], that establishes an algebraic criterion for any topological space satisfy the Borsuk-Ulam property.

Key-words: Borsuk-Ulam theorem, free involution, equivariant map.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Conceitos e resultados preliminares	3
1.1 Ações de grupos	3
1.2 Espaços de recobrimento	4
1.3 Grupos de (co)homologia singular	9
1.4 Produtos: cup, tensorial e cap	14
1.5 Variedades	18
1.6 Característica de Euler de uma superfície	19
1.7 CW-complexos	22
2 O teorema clássico de Borsuk-Ulam	24
2.1 O caso particular	24
2.2 O caso geral	28
3 O teorema de Borsuk-Ulam para superfícies	33
3.1 Involuções canônicas	34
3.2 Existência de aplicações equivariantes	43
3.3 O teorema principal	47
4 Outras generalizações do teorema de Borsuk-Ulam	52
Bibliografia	59

INTRODUÇÃO

O teorema de Borsuk-Ulam é um dos resultados mais importantes da Topologia Algébrica. Dentre as razões que justificam sua grandeza podemos citar o fato de que existem várias versões do teorema e diferentes demonstrações para cada versão. O artigo original de Borsuk ([2]) já nos fornece três variantes do teorema. Listamos aqui seis versões equivalentes, onde $n \geq 0$:

1. Para toda aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existe um ponto $x \in \mathbb{S}^n$ com $f(x) = f(-x)$.
2. Para toda aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva pontos antipodais (isto é, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$) existe um ponto $x_0 \in \mathbb{S}^n$ satisfazendo $f(x_0) = 0$.
3. Não existe aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que preserva pontos antipodais.
4. Não existe aplicação contínua $f : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que preserva pontos antipodais sobre o bordo, isto é, satisfaz $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n$.
5. Para toda cobertura F_1, \dots, F_{n+1} da esfera \mathbb{S}^n por $n+1$ conjuntos fechados, existe pelo menos um conjunto contendo um par de pontos antipodais.
6. Para toda cobertura U_1, \dots, U_{n+1} da esfera \mathbb{S}^n por $n+1$ conjuntos abertos, existe pelo menos um conjunto contendo um par de pontos antipodais.

Uma das versões do teorema de Borsuk-Ulam mais conhecida é a afirmação 1. Uma interpretação popular, encontrada em vários livros é para o caso $n=2$. Ela diz que em cada instante, existem locais diametralmente opostos (pontos antipodais) sobre a superfície da Terra nos quais a temperatura e a pressão atmosférica coincidem (assumindo, é claro, que temperatura e pressão variam continuamente com o tempo).

Um outro fato que torna esse teorema tão especial são as inúmeras extensões e generalizações que ele possui. Singh refere em seu artigo ([13]) um trabalho de Steinlein de 1985, onde ele lista 457 publicações a respeito de generalizações do teorema de Borsuk-Ulam. Algumas generalizações consistem em substituir o domínio (\mathbb{S}^n, A) , onde A é a involução antipodal, por outros pares (X, T) de involuções livres, ou o contradomínio \mathbb{R}^n

por espaços topológicos mais gerais Y . Resultados desse tipo podem ser encontrados, por exemplo, em [1], [3], [6] e [9]. Nesse caso, dizemos que $((X, T); Y)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam se dada uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, existe um ponto x em X tal que $f(x) = f(T(x))$.

Nosso objetivo neste trabalho é demonstrar o teorema clássico de Borsuk-Ulam e assim estudar algumas de suas generalizações. Para isso, no capítulo 1 apresentamos alguns pré-requisitos fundamentais para o desenvolvimento da dissertação, como por exemplo, ações de grupos, espaços de recobrimento, grupos de (co)homologia singular, característica de Euler e CW-complexos. As principais referências para este capítulo são [10], [11] e [12].

O capítulo 2 é dedicado ao famoso teorema de K. Borsuk e S. Ulam, o qual afirma não existir uma aplicação contínua de \mathbb{S}^n em \mathbb{S}^{n-1} que preserva pontos antipodais. A prova deste teorema é dividida em duas partes: o caso particular ($n = 1$ ou $n = 2$) e o caso geral, pois o primeiro caso envolve conceitos mais simples, enquanto o segundo exige mais pré-requisitos.

No capítulo 3 apresentamos uma generalização do teorema de Borsuk-Ulam dada por Gonçalves, em [6]. Neste artigo a esfera n -dimensional e a involução antipodal são substituídas por uma superfície fechada S , equipada com uma involução livre T e considera-se uma aplicação contínua com valores em \mathbb{R}^2 . Mostramos uma prova detalhada de um teorema de classificação, no qual o autor caracterizou todos os pares (S, T) para os quais a propriedade de Borsuk-Ulam é válida. Para essa demonstração estudamos o conceito de involução canônica e consequências da existência de uma aplicação equivariante de S em \mathbb{S}^1 .

No último capítulo apresentamos uma generalização dada por Desideri, Pergher e Ventrúsculo, em [3]. Neste artigo considera-se uma aplicação contínua cujo domínio é um espaço topológico qualquer X equipado com uma involução livre T e com valores em \mathbb{R}^2 . Detalhamos a demonstração de um teorema que fornece um critério algébrico para que $((X, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaça a propriedade de Borsuk-Ulam. Em seguida vemos algumas consequências interessantes deste resultado e como o teorema de Gonçalves se relaciona com este.

Conceitos e resultados preliminares

Neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos, terminologias e resultados que serão aqui utilizados. Ao longo do texto também surgirão definições adicionais que estarão acompanhadas de uma referência para maiores informações.

1.1 Ações de grupos

Definição 1.1.1. *Sejam X um espaço e G um grupo. Uma **ação à esquerda** de G sobre X é uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \phi: G \times X &\longrightarrow G \\ (g, x) &\longrightarrow \phi(g, x) = g \cdot x \end{aligned}$$

tal que

1. $e \cdot x = x$, para todo $x \in X$, com $e \in G$ denotando a unidade.
2. $g(h \cdot x) = (gh) \cdot x$, para quaisquer $g, h \in G$, $x \in X$.

Neste caso dizemos que X é um G -espaço à esquerda.

Analogamente, uma **ação à direita** de G sobre X é uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} \varphi: X \times G &\longrightarrow G \\ (x, g) &\longrightarrow \varphi(x, g) = x \cdot g \end{aligned}$$

tal que

1. $x \cdot e = x$, para todo $x \in X$, com $e \in G$ denotando a unidade.
2. $x \cdot (gh) = (x \cdot g)h$, para quaisquer $g, h \in G$, $x \in X$.

Neste caso dizemos que X é um G -espaço à direita.

Definição 1.1.2. *Sejam X_1 e X_2 G -espaços à esquerda. Uma aplicação $f : X_1 \rightarrow X_2$ é chamada de **G -equivariante** se*

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x).$$

Definição 1.1.3. *Seja X um G -espaço à esquerda. Para um ponto $x \in X$, o conjunto $G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ é chamado de **órbita** de x e o subgrupo $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ é chamado de **subgrupo de isotropia** de x .*

É fácil ver que duas órbitas são disjuntas ou idênticas, assim elas particionam o espaço X .

Definição 1.1.4. *Seja X um G -espaço à esquerda. O conjunto constituído de todas as órbitas $G(x)$, denotado por $\frac{X}{G}$, é chamado de **espaço de órbitas**. Este conjunto é munido da topologia quociente, ou seja, da topologia mais fina tal que a projeção $p : X \rightarrow \frac{X}{G}$ seja contínua.*

Definição 1.1.5. *Seja X um G -espaço à esquerda. A ação de G sobre X é livre se $G_x = \{e\}$, para todo $x \in X$.*

Definição 1.1.6. *Seja X um G -espaço à esquerda. Dizemos que G **opera transitivamente à esquerda** sobre X ou que X é um **G -espaço à esquerda homogêneo** se, para quaisquer elementos $x, y \in X$, existe um elemento $g \in G$ tal que*

$$g \cdot x = y.$$

Definição 1.1.7. *Seja X um G -espaço à esquerda. Dizemos que a ação de G sobre X é **propriamente descontínua** se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que*

$$g \neq e \Rightarrow g \cdot U \cap U = \emptyset.$$

Observação 1.1.1. *Podemos enunciar as definições acima para G -espaços à direita de forma análoga. Neste trabalho, a menos que especifiquemos o contrário, sempre que nos referirmos a um G -espaço X significará G -espaço à esquerda.*

1.2 Espaços de recobrimento

Nesta seção consideramos conhecidos os conceitos de homotopia e grupo fundamental e assumiremos que todos os espaços topológicos mencionados são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos (e portanto, conexos).

Definição 1.2.1. *Seja X um espaço topológico. Um **espaço de recobrimento** de X é um par (\tilde{X}, p) , onde \tilde{X} é um espaço topológico e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, satisfazendo a seguinte condição: cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança*

aberta conexa por caminhos U tal que cada componente conexa por caminhos de $p^{-1}(U)$ é aplicada homeomorficamente sobre U .

A vizinhança U é chamada **vizinhança elementar** e a aplicação p é chamada de **projeção de recobrimento**.

Definição 1.2.2. Sejam (\tilde{X}, p) um recobrimento de X e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho em X . Um caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ em \tilde{X} é chamado de **levantamento de α** se $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Se $F : I \times I \rightarrow X$ é uma homotopia, então uma homotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ é um **levantamento de F** se $p \circ \tilde{F} = F$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ I \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

Teorema 1.2.1. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Então, para qualquer caminho $\alpha : I \rightarrow X$ com ponto inicial x_0 , existe um único caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ com ponto inicial \tilde{x}_0 tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

Demonstração: [10], Capítulo V, Lema 3.1. ■

Teorema 1.2.2. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e $F : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia tal que $F(0,0) = x_0$. Se \tilde{x}_0 é um ponto de \tilde{X} com $p(\tilde{x}_0) = x_0$, então existe uma única homotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$.

Demonstração: [10], Capítulo V, Lema 3.3. ■

Teorema 1.2.3. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e sejam $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \rightarrow \tilde{X}$ caminhos em \tilde{X} que têm o mesmo ponto inicial. Se $p \circ \tilde{\alpha} \sim p \circ \tilde{\beta}$ então $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$. Em particular, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ têm o mesmo ponto final.

Demonstração: [10], Capítulo V, Lema 3.3. ■

Proposição 1.2.1. Se (\tilde{X}, p) é um espaço de recobrimento de X , então os conjuntos $p^{-1}(x)$, $x \in X$, têm a mesma cardinalidade.

Demonstração: [10], Capítulo V, Lema 3.4. ■

Definição 1.2.3. Se (\tilde{X}, p) é um espaço de recobrimento de X , o número cardinal comum dos conjuntos $p^{-1}(x)$, $x \in X$, é chamado de **número de folhas do recobrimento**. Dizemos que o recobrimento é de n -folhas se $\#p^{-1}(x) = n$ e de infinitas folhas se $\#p^{-1}(x) = \infty$. O conjunto $p^{-1}(x)$ é chamado de **fibra** de (\tilde{X}, p) no ponto $x \in X$.

Teorema 1.2.4. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Então, o homomorfismo induzido $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um monomorfismo.

Demonstração: [10], Capítulo V, Teorema 4.1. ■

Sejam X, Y espaços topológicos com $x \in X$ e $y \in Y$. A notação $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ significa uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ com $f(x) = y$.

Definição 1.2.4. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, $y_0 \in Y$ e $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$. Um **levantamento de φ** é uma aplicação $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{\varphi} & (X, x_0) \end{array}$$

Teorema 1.2.5. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , Y um espaço conexo e localmente conexo por caminhos, $y_0 \in Y$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Dada uma aplicação $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, existe um levantamento $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se, e somente se, $\varphi_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Demonstração: [10], Capítulo V, Teorema 5.1. ■

Definição 1.2.5. Sejam (\tilde{X}_1, p_1) e (\tilde{X}_2, p_2) espaços de recobrimento de X . Um **homomorfismo** de (\tilde{X}_1, p_1) em (\tilde{X}_2, p_2) é uma aplicação contínua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Isto é, $p_2 \circ \varphi = p_1$.

Definição 1.2.6. Um homomorfismo φ de (\tilde{X}_1, p_1) em (\tilde{X}_2, p_2) é chamado **isomorfismo** se existe um homomorfismo $\psi : (\tilde{X}_2, p_2) \rightarrow (\tilde{X}_1, p_1)$ tal que $\psi \circ \varphi$ e $\varphi \circ \psi$ são aplicações identidades. Dois recobrimentos são ditos isomorfos se existe um isomorfismo entre eles.

Um **automorfismo** é um isomorfismo de um espaço de recobrimento sobre ele mesmo. Os automorfismos de espaços de recobrimento são usualmente chamados de **transformações de recobrimento**. O conjunto de todas as transformações de recobrimento, denotado por $A(\tilde{X}, p)$, é um grupo em relação à composição.

Proposição 1.2.2. Sejam (\tilde{X}_1, p_1) e (\tilde{X}_2, p_2) espaços de recobrimento de X e sejam $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ com $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Então existe um homomorfismo φ de (\tilde{X}_1, p_1) em (\tilde{X}_2, p_2) tal que $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se, e somente se, $p_{1\#}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset p_{2\#}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Demonstração: [10], Capítulo V, Lema 6.3. ■

Corolário 1.2.1. Sob as hipóteses da Proposição 1.2.2, existe um isomorfismo de (\tilde{X}_1, p_1) em (\tilde{X}_2, p_2) com $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se, e somente, $p_{1\#}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2\#}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Demonstração: [10], Capítulo V, Corolário 6.4. ■

Definição 1.2.7. Sejam (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e $x \in X$. Dada qualquer classe $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, pelo Teorema 1.2.1, existe um único caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ começando em \tilde{x} tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Definimos

$$\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1).$$

Temos então a aplicação

$$\begin{aligned} p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) &\longrightarrow p^{-1}(x) \\ (\tilde{x}, [\alpha]) &\longrightarrow \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1) \end{aligned}$$

Observação 1.2.1. A definição acima independe da escolha do caminho representando a classe $[\alpha]$.

Proposição 1.2.3. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $x \in X$. Então:

- (a) $p^{-1}(x)$ é um $\pi_1(X, x)$ -espaço à direita homogêneo;
- (b) O subgrupo de isotropia correspondendo a $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ é precisamente o subgrupo $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ de $\pi_1(X, x)$;
- (c) O número de folhas do recobrimento (\tilde{X}, p) é o índice do subgrupo $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ em $\pi_1(X, x)$.

Demonstração: [10], Capítulo V, p.162. ■

Proposição 1.2.4. Para qualquer automorfismo $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$, qualquer ponto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e qualquer $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ temos

$$\varphi(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = \varphi(\tilde{x}) \cdot [\alpha],$$

isto é, cada elemento $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$ induz um automorfismo do conjunto $p^{-1}(x)$, considerado como um $\pi_1(X, x)$ -espaço à direita.

Demonstração: [10], Capítulo V, Proposição 7.1. ■

Definição 1.2.8. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X . Se $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$, isto é, \tilde{X} é simplesmente conexo, dizemos que (\tilde{X}, p) é um **espaço de recobrimento universal** de X .

Definição 1.2.9. Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $x \in X$. Se $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ é normal em $\pi_1(X, x)$, dizemos que (\tilde{X}, p) é um **espaço de recobrimento regular** de X .

Proposição 1.2.5. Se (\tilde{X}, p) é um espaço de recobrimento regular de X , então $A(\tilde{X}, p)$ é isomorfo ao grupo quociente $\frac{\pi_1(X, x)}{p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))}$ para todo $x \in X$ e todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Demonstração: [10], Capítulo V, Corolário 7.4. ■

Definição 1.2.10. Dizemos que um espaço topológico X admite uma **involução sem pontos fixos** se existe uma aplicação contínua $T : X \rightarrow X$ tal que $(T \circ T)(x) = x$ e $T(x) \neq x$, $\forall x \in X$.

Proposição 1.2.6. Seja X um espaço topológico conexo que admite uma involução sem pontos fixos $T : X \rightarrow X$. Consideremos em X a relação de equivalência determinada pela partição $\{\{x, T(x)\} : x \in X\}$ e denotemos por $\frac{X}{T}$ o espaço quociente de X por essa relação. Seja $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ a aplicação quociente definida por:

$$p(x) = \bar{x} = \{x, T(x)\}.$$

Se X for um espaço de Hausdorff, então $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ é um recobrimento de duas folhas.

Demonstração: Seja $\bar{x} = \{x, T(x)\} \in \frac{X}{T}$. Como X é espaço de Hausdorff, consideremos U e V vizinhanças de x e $T(x)$, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$. Sendo T uma aplicação contínua, existe uma vizinhança W de x tal que $T(W) \subset V$. Vamos definir

$$\tilde{U} = U \cap W \quad \text{e} \quad \tilde{V} = T(\tilde{U}),$$

os quais são disjuntos e abertos em X .

Assim, o conjunto $p(\tilde{U})$ é uma vizinhança de \bar{x} tal que $p^{-1}(p(\tilde{U})) = \tilde{U} \cup \tilde{V}$ e as restrições

$$p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow p(\tilde{U}) \quad \text{e} \quad p|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow p(\tilde{V})$$

são homeomorfismos. ■

Proposição 1.2.7. *Sejam X um espaço topológico que possui um espaço de recobrimento universal e H um subgrupo de $\pi_1(X, x)$. Então, existe um espaço de recobrimento (\tilde{X}, p) de X tal que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = H$. Ou seja, $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \simeq H$ (pois $p_{\#}$ é monomorfismo).*

Demonstração: [10], Capítulo V, Lema 10.1. ■

1.3 Grupos de (co)homologia singular

Grupos de homologia singular

Consideremos o espaço \mathbb{R}^{∞} . Um elemento de \mathbb{R}^{∞} é uma sequência infinita de números reais, os quais são nulos, exceto por uma quantidade finita de componentes.

Definição 1.3.1. *Um **p -simplexo** σ em \mathbb{R}^{∞} é o menor conjunto convexo do espaço que contém $(p+1)$ pontos $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ de \mathbb{R}^{∞} , no qual $a_1 - a_0, \dots, a_p - a_0$ formam um conjunto linearmente independente. Os elementos a_0, \dots, a_p são chamados de vértices de σ*

Definição 1.3.2. *Qualquer simplexo obtido por um subconjunto de $\{a_0, \dots, a_p\}$ é chamado de **face** de σ . A face de σ obtida de $\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p\}$ é chamada de **face oposta** a a_i .*

Definição 1.3.3. *O p -simplexo de \mathbb{R}^{∞} cujos vértices são*

$$\varepsilon_0 = (0, 0, \dots, 0, \dots),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= (1, 0, \dots, 0, \dots), \\ &\vdots \\ \varepsilon_p &= (0, 0, \dots, 1, \dots),\end{aligned}$$

é chamado de **p-simplexo padrão** e denotado por Δ_p . Note que Δ_{p-1} é uma face de Δ_p

Definição 1.3.4. Seja X um espaço topológico. Um **p-simplexo singular** em X é uma função contínua $T : \Delta_p \rightarrow X$.

Definição 1.3.5. Seja X um espaço topológico. Definimos $S_p(X)$ o grupo abeliano livre gerado por todos os p-simplexos singulares de X e o chamamos de **grupo de cadeias singulares** de X em dimensão p . Um elemento de $S_p(X)$ é chamado uma **p-cadeia singular** de X e tem a forma

$$\sum_{\Delta_p} n_{\Delta_p} \cdot \Delta_p,$$

onde n_{Δ_p} é um inteiro, igual a zero, exceto para um número finito de Δ_p 's.

É conveniente considerar um tipo especial de simplexo singular. Considere um espaço vetorial E^J , onde J é o conjunto dos inteiros positivos e $a_0, \dots, a_p \in E^J$, os quais não precisam ser linearmente independentes. Existe uma única aplicação afim l de Δ sobre E^J , que associa ε_i a a_i , para todo $i = 0, \dots, p$. Ela é definida pela equação

$$l(x_1, \dots, x_p, 0, \dots) = a_0 + \sum_{i=1}^p x_i (a_i - a_0).$$

Definição 1.3.6. A aplicação definida acima é chamada de **simplexo singular linear** determinado por a_0, \dots, a_p e o denotamos por $l(a_0, \dots, a_p)$.

Exemplo 1.3.1. A aplicação $l(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ é a aplicação inclusão de Δ_p em \mathbb{R}^∞ .

Se usarmos a notação $\widehat{\varepsilon}_i$ para denotar que o símbolo ε_i deve ser retirado, então a aplicação

$$l(\varepsilon_0, \dots, \widehat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_p)$$

é a aplicação de Δ_{p-1} sobre \mathbb{R}^∞ que leva Δ_{p-1} , por um homomorfismo linear, sobre a face $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_p$ de Δ_p . Se $T : \Delta_p \rightarrow X$, podemos formar a composição

$$T \circ l(\varepsilon_0, \dots, \widehat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_p)$$

Este é um (p-1)-simplexo singular de X , o qual pensamos como a “i-ésima face” do p-simplexo singular T .

Definição 1.3.7. Se $T : \Delta_p \rightarrow X$ é um p-simplexo singular de X , definimos o homomorfismo $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ da seguinte maneira

$$\partial_p(T) = \sum_{i=0}^p (-1)^i T \circ l(\varepsilon_0, \dots, \widehat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_p).$$

Esse homomorfismo é denominado **operador bordo** e $\partial_p(T)$ é uma soma formal de simplexos singulares de dimensão p-1, os quais são as “faces” de T .

Proposição 1.3.1. A composição $\partial_p \circ \partial_{p+1}$ em

$$S_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X)$$

é o operador nulo.

Demonstração: [12], Capítulo IV, Teorema 29.1. ■

Definição 1.3.8. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, definimos um homomorfismo $f_{\#_p} : S_p(X) \rightarrow S_p(Y)$ através dos p -simplexos singulares pela equação $f_{\#_p}(T) = f \circ T$. Isto é, $f_{\#_p}(T)$ é a composição

$$\Delta_p \xrightarrow{T} X \xrightarrow{f} Y.$$

Teorema 1.3.1. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ é uma aplicação de cadeia, ou seja, o homomorfismo $f_{\#}$ comuta com ∂ .

Demonstração: [12], Capítulo IV, Teorema 29.1. ■

Definição 1.3.9. A família de grupos $S_p(X)$ e homomorfismos $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ são chamados de **complexo de cadeia singular** de X e denotado por $S_*(X)$. Definimos

$$Z_p(X) = \ker \partial_p$$

$$B_p(X) = \text{Im} \partial_p$$

Para cada $p \in \mathbb{N}$, o grupo quociente

$$H_p(X) = \frac{Z_p(X)}{B_{p+1}(X)}$$

é chamado de n -ésimo **grupo de homologia singular** de X .

Definição 1.3.10. Seja $\epsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo sobrejetor definido por $\epsilon(T) = 1$, para cada 0-simplexo singular $T : \Delta_0 \rightarrow X$. A aplicação ϵ é chamada **aplicação aumento** para $S_0(X)$. Notemos que $\epsilon(\partial_1(T)) = 0$, se T é um 1-simplexo singular. A sequência

$$\dots \rightarrow S_p(X) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X) \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

é chamada de **complexo de cadeia reduzido** de X e denotado por $\{S_*(X), \epsilon\}$. Os grupos de homologia de $\{S_*(X), \epsilon\}$ são chamados de grupos de homologia singular reduzida de X e são denotados por $\tilde{H}_p(X)$.

Observação 1.3.1. Para $p \neq 0$, $\tilde{H}_p(X) = H_p(X)$.

Em vista do Teorema 1.3.1, se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua temos bem definido o homomorfismo

$$f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

dado por $f_*(\bar{T}) = \overline{f_{\#}(T)} = \overline{f \circ T}$.

Teorema 1.3.2. Se $i : X \rightarrow X$ é a identidade, então $i_* : H_*(X) \rightarrow H_*(X)$ é o homomorfismo identidade. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções contínuas, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. O mesmo é válido em homologia reduzida.

Demonstração: [12], Capítulo IV, Teorema 29.2. ■

Corolário 1.3.1. Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então f_* é um isomorfismo. ■

Introduziremos agora, o conceito de grupos de homologia singular relativa.

Definição 1.3.11. Se X é um espaço e A é um subespaço de X , existe uma inclusão natural $S_p(A) \rightarrow S_p(X)$. O grupo de cadeia singular relativa é definido por

$$S_p(X, A) = \frac{S_p(X)}{S_p(A)}.$$

Segue da definição do operador bordo $\partial : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ que a restrição de ∂ a $S_p(A)$ é um operador bordo $\partial_1 : S_p(A) \rightarrow S_{p-1}(A)$. Daí ele induz um operador bordo

$$\bar{\partial} : S_p(X, A) \rightarrow S_{p-1}(X, A)$$

em cadeias relativas. A família de grupos $S_p(X, A)$ e homomorfismos $\bar{\partial}$ é chamada de complexo de cadeia singular do par (X, A) e denotado por $S_*(X, A)$. Os grupos de homologia deste complexo de cadeia são chamados de grupos de homologia singular do par (X, A) e denotados por $H_p(X, A)$.

Observação 1.3.2. Se $A = \emptyset$, então $H_p(X, A) = H_p(X)$, $\forall p \geq 0$.

Grupos de cohomologia singular

Definição 1.3.12. Sejam A, B e G grupos abelianos. Um homomorfismo $f : A \rightarrow B$ dá origem a um **homomorfismo dual**

$$\text{Hom}(B, G) \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Hom}(A, G),$$

definido por $\tilde{f}(\phi) = \phi \circ f$, com $\phi : B \rightarrow G$.

Teorema 1.3.3. *Sejam f um homomorfismo e \tilde{f} o seu homomorfismo dual.*

1. *Se f é um isomorfismo, então \tilde{f} também o é.*
2. *Se f é o homomorfismo nulo, então \tilde{f} também o é.*
3. *Se f é sobrejetivo, então \tilde{f} é injetivo.*

Demonstração: [12], Capítulo V, Teorema 41.1. ■

Definição 1.3.13. *Sejam $\mathcal{C} = \{C_p, \partial\}$ um complexo de cadeias e G um grupo abeliano. Definimos o grupo de cocadeias p -dimensional de X , com coeficientes em G , pela equação*

$$C^p(\mathcal{C}; G) = \text{Hom}(C_p, G) = \{f : C_p \longrightarrow G \mid f \text{ é homomorfismo}\}.$$

Definimos o operador cobordo δ como sendo o dual do operador bordo $\partial : C_{p+1} \longrightarrow C_p$. Dessa forma, $\delta^2 = 0$ e

$$\delta : C^p(\mathcal{C}; G) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{C}; G)$$

Definição 1.3.14. *Denotando o núcleo e a imagem do operador $\delta^{p+1} : C^p(\mathcal{C}; G) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{C}; G)$ por $Z^{p+1}(\mathcal{C}; G)$ e $B^{p+1}(\mathcal{C}; G)$, respectivamente, definimos o grupo de cohomologia de \mathcal{C} em dimensão p , com coeficientes em G , por*

$$H^p(\mathcal{C}; G) = \frac{Z^{p+1}(\mathcal{C}; G)}{B^{p+1}(\mathcal{C}; G)}$$

Definição 1.3.15. *Se $\{\mathcal{C}; \epsilon\}$ é um complexo de cadeia aumentado, então existe um complexo de cadeia correspondente*

$$\dots \longleftarrow C^1(\mathcal{C}; G) \xleftarrow{\delta^1} C^0(\mathcal{C}; G) \xleftarrow{\tilde{\epsilon}} \text{Hom}(\mathbb{Z}, G),$$

onde $\tilde{\epsilon}$ é injetivo. Definimos os grupos de cohomologia reduzida de \mathcal{C} da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \hat{H}^q(\mathcal{C}; G) = H^q(\mathcal{C}; G), & \text{se } q > 0; \\ \tilde{H}^q(\mathcal{C}; G) = \frac{\ker \delta^1}{\text{Im} \tilde{\epsilon}}, & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

Definição 1.3.16. *Os grupos de cohomologia singular de um par topológico (X, A) , com coeficientes em um grupo abeliano G , são definidos por*

$$H^p(X, A; G) = H^p(S_*(X, A); G),$$

onde $S_(X, A)$ é o complexo de cadeia de (X, A) .*

Observação 1.3.3. *Omitimos A da notação se $A = \emptyset$, e omitimos G da notação se $G = \mathbb{Z}$.*

1.4 Produtos: cup, tensorial e cap

Nesta seção, R denota um anel comutativo com elemento unidade.

Produto cup

Definição 1.4.1. *Sejam X um espaço topológico e $S^p(X; R) = \text{Hom}(S_p(X), R)$ o grupo de p -cocadeias singulares de X , com coeficientes em R . Definimos uma aplicação*

$$S^p(X; R) \times S^q(X; R) \xrightarrow{\cup} S^{p+q}(X; R)$$

da seguinte maneira: se $T : \Delta_{p+q} \rightarrow X$ é um $(p+q)$ -simplexo singular, então

$$\langle c^p \cup c^q, T \rangle = \langle c^p, T \circ l(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p) \rangle \cdot \langle c^q, T \circ l(\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{p+q}) \rangle$$

A cocadeia $c^p \cup c^q$ é chamada o **produto cup** das cocadeias c^p e c^q .

Teorema 1.4.1. *O produto cup de cocadeias é bilinear e associativo. Além disso, a seguinte fórmula do cobordo é válida:*

$$\delta(c^p \cup c^q) = (\delta c^p) \cup c^q + (-1)^p c^p \cup (\delta c^q)$$

Demonstração: [12], Capítulo V, Teorema 48.1. ■

Teorema 1.4.2. *O produto cup de cocadeias induz uma operação*

$$H^p(X; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X; R)$$

que é bilinear e associativa.

Demonstração: [12], Capítulo V, Teorema 48.2. ■

Definição 1.4.2. *Denote por $H^*(X; R)$ a soma direta externa $\bigoplus H^i(X; R)$. A operação produto cup faz desse grupo um anel com um elemento unidade. Ele é chamado **anel de cohomologia** de X com coeficientes em R .*

Se $h : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então h^* é um homomorfismo de anel.

Observação 1.4.1. Em geral, um anel de cohomologia não é comutativo. Ele possui uma propriedade usualmente chamada **anticomutatividade**. Especificamente, se $\alpha^p \in H^p(X; R)$ e $\beta^q \in H^q(X; R)$, então

$$\alpha^p \cup \beta^q = (-1)^{pq} \beta^q \cup \alpha^p.$$

Produto tensorial

Definição 1.4.3. Sejam A e B grupos abelianos e $F(A, B)$ o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto $A \times B$. Considere $R(A, B)$ o subgrupo gerado por todos os elementos da forma

$$\begin{aligned} (a + a', b) - (a, b) - (a', b), \\ (a, b + b') - (a, b) - (a, b'), \end{aligned}$$

para $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$. Definimos

$$A \otimes B = \frac{F(A, B)}{R(A, B)}$$

e o chamamos de **produto tensorial** de A e B . A classe lateral do par (a, b) é denotada por $a \otimes b$.

Para $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, temos as seguintes relações em $A \otimes B$:

$$\begin{aligned} (a + a') \otimes b &= a \otimes b + a' \otimes b, \\ a \otimes (b + b') &= a \otimes b + a \otimes b', \end{aligned}$$

pela definição. É imediato que $0 \otimes b = 0$, uma vez que

$$a \otimes b = (0 + a) \otimes b = 0 \otimes b + a \otimes b$$

Similarmente, $a \otimes 0 = 0$. Daí segue que

$$(-a) \otimes b = -(a \otimes b) = a \otimes (-b),$$

já que adicionando $a \otimes b$ em cada expressão acima resulta em zero. Uma consequência imediata é a relação

$$(na) \otimes b = n(a \otimes b) = a \otimes (nb),$$

quando n é um inteiro arbitrário.

Definição 1.4.4. Sejam $f : A \rightarrow A'$ e $g : B \rightarrow B'$ homomorfismos. Existe um único homomorfismo

$$f \otimes g : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$$

tal que $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Tal homomorfismo é chamado **produto tensorial** de f e g .

Produto cap

Definição 1.4.5. *Seja X um espaço topológico. Definimos uma aplicação*

$$S^p(X; R) \otimes S_{p+q}(X; R) \xrightarrow{\cap} S_q(X; R)$$

da seguinte maneira: se $T : \Delta_{p+q} \rightarrow X$ é um simplexo singular em X e se $\alpha \in R$, então

$$c^p \cap (T \otimes \alpha) = T \circ l(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_q) \otimes \alpha \cdot \langle c^p, T \circ l(\varepsilon_q, \dots, \varepsilon_{p+q}) \rangle.$$

*Essa cadeia é chamada o **produto cap** da cocadeia c^p e a cadeia $T \otimes \alpha$.*

Existem versões alternativas do produto cap. Dentre elas, as aplicações

$$S^p(X; G) \otimes S_{p+q}(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap} S_q(X; G),$$

$$S^p(X; F) \otimes_F S_{p+q}(X; F) \xrightarrow{\cap} S_q(X; F),$$

onde G é um grupo abeliano e F é um corpo.

Teorema 1.4.3. *O produto cap é bilinear e é natural com respeito às aplicações contínuas. Ele satisfaz a fórmula bordo*

$$\partial(d^p \cap c_{p+q}) = (-1)^q (\delta d^p \cap c_{p+q}) + d^p \cap \partial c_{p+q}$$

e está relacionado ao produto cup pela fórmula

$$c^p \cap (d^q \cap e_{p+q+r}) = (c^p \cup d^q) \cap e_{p+q+r}.$$

Demonstração: [12], Capítulo VIII, Teorema 66.1. ■

Teorema 1.4.4. *O produto cap induz um homomorfismo*

$$H^p(X; R) \otimes H_{p+q}(X; R) \xrightarrow{\cap} H_q(X; R).$$

Ele é natural e satisfaz a fórmula

$$\alpha^p \cap (\beta^q \cap \gamma_{p+q+r}) = (\alpha^p \cup \beta^q) \cap \gamma_{p+q+r}.$$

Demonstração: [12], Capítulo VIII, Teorema 66.2. ■

Relação do produto cap com o índice de Kronecker

Definição 1.4.6. Se $\mathcal{C} = \{C_i, \partial\}$ é um complexo de cadeia, existe uma aplicação

$$\text{Hom}(C_p, G) \times C_p \longrightarrow G$$

que leva o par (c^p, c_p) em um elemento de G , que vamos denotar por $\langle c^p, c_p \rangle$. Tal aplicação é bilinear, e é chamada aplicação avaliação. Ela induz uma aplicação bilinear

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^p(\mathcal{C}; G) \otimes H_p(\mathcal{C}) \longrightarrow G,$$

que chamamos de **índice de Kronecker**. Denotamos a imagem de (α^p, β_p) pela aplicação por $\langle \alpha^p, \beta_p \rangle$.

Definição 1.4.7. A **aplicação de Kronecker**

$$k : H^p(\mathcal{C}; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_p(\mathcal{C}); G)$$

é a aplicação que a cada α associa o homomorfismo $\langle \alpha, \cdot \rangle$. Formalmente, definimos

$$[k(\alpha^p)](\beta_p) = \langle \alpha^p, \beta_p \rangle.$$

A aplicação k é um homomorfismo, pois o índice de Kronecker é linear na primeira variável.

Teorema 1.4.5. Se X é um espaço topológico e F é um corpo, então existe um isomorfismo natural entre espaços vetoriais

$$H^p(X; F) \longrightarrow \text{Hom}_F(H_p(X; F), F),$$

obtido pela aplicação de Kronecker.

Demonstração: [12], Capítulo VII, Corolário 53.6. ■

Teorema 1.4.6. Seja $\epsilon_* : H_0(X; G) \longrightarrow G$ o homomorfismo induzido pela aplicação aumento ϵ , que é um isomorfismo se X é conexo por caminhos e considere o produto cap $\cap : H^p(X; G) \otimes H_p(X; G) \longrightarrow H_0(X; G)$. Então, o índice de Kronecker é igual à composição $\epsilon_* \circ \cap$.

Demonstração: [12], Capítulo VIII, Teorema 66.3. ■

1.5 Variedades

Definição 1.5.1. Um espaço de Hausdorff X é chamado uma **n -variedade** se cada ponto de X possui uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Ele é chamado uma n -variedade com bordo se cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um conjunto aberto do semiespaço euclidiano \mathbb{H}^n .

Dizemos que uma n -variedade é fechada se ela é compacta e sem bordo.

Definição 1.5.2. Seja X uma n -variedade fechada e conexa. Se X é orientável, então $H_n(X)$ é cíclico infinito e um gerador Γ de $H_n(X)$ é chamado uma **classe de orientação** para X . Similarmente, se X é não orientável e Γ_2 é o único elemento não trivial de $H_n(X; \mathbb{Z}_2)$, então Γ_2 é chamado uma classe de orientação para X sobre \mathbb{Z}_2 .

Teorema 1.5.1. (Dualidade de Poincaré) Seja X uma n -variedade fechada. Se X é orientável e se $\Gamma \in H_n(X)$ é uma classe de orientação para X , então

$$H^p(X; G) \xrightarrow{\cap \Gamma} H_{n-p}(X; G)$$

é um isomorfismo para G um grupo abeliano. Se X é orientável ou não, então

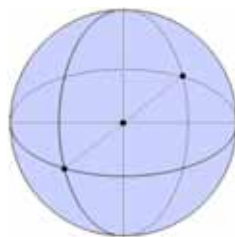
$$H^p(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cap \Gamma_2} H_{n-p}(X; \mathbb{Z}_2)$$

é um isomorfismo.

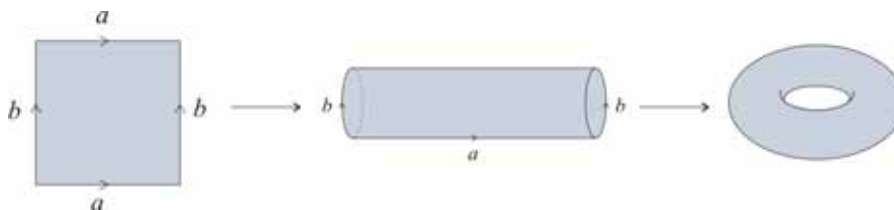
Demonstração: [12], Capítulo VIII, Teorema 67.1. ■

Definição 1.5.3. Uma variedade de dimensão 2 é chamada de **superfície**.

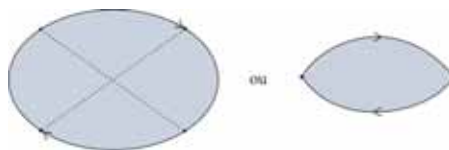
Exemplo 1.5.1. A esfera \mathbb{S}^2 .



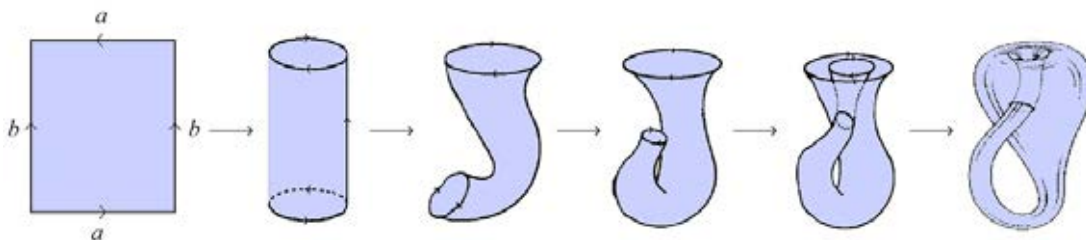
Exemplo 1.5.2. O toro T^2 .



Exemplo 1.5.3. O plano projetivo $\mathbb{R}P^2$.



Exemplo 1.5.4. A garrafa de Klein KB .



Lema 1.5.1. A soma conexa de um toro e um plano projetivo é homeomorfa à soma conexa de três planos projetivos.

Demonstração: [10], Capítulo I, Seção VII.

■

Teorema 1.5.2. (Teorema de classificação das superfícies fechadas) Qualquer superfície fechada orientável é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de toros. Qualquer superfície fechada não orientável é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo ou uma garrafa de Klein e uma superfície fechada orientável.

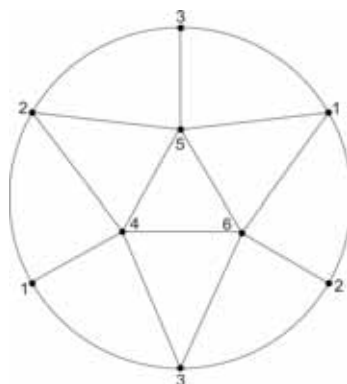
Demonstração: [10], Capítulo I, Seção VII.

■

1.6 Característica de Euler de uma superfície

Definição 1.6.1. Uma triangulação de uma superfície compacta S consiste de uma família finita de subconjuntos fechados $\{T_1, \dots, T_n\}$ que cobrem S e uma família de homeomorfismos $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$, $i = 1, \dots, n$, onde cada T'_i é um triângulo em \mathbb{R}^2 . Os subconjuntos T_i são chamados “triângulos”. Os subconjuntos de T_i que são as imagens dos vértices e arestas do triângulo T'_i por φ_i também são chamados de “vértices” e “arestas”, respectivamente. Finalmente, é necessário que quaisquer dois triângulos distintos, T_i e T_j , sejam disjuntos, ou tenham um único vértice em comum, ou tenham uma aresta inteira em comum.

Exemplo 1.6.1. *Triangulação do plano projetivo, considerado como o espaço obtido pela identificação dos pontos diametralmente opostos no bordo de um disco.*



Definição 1.6.2. *Seja S uma superfície compacta com triangulação $\{T_1, \dots, T_n\}$. Sejam*

$$\begin{aligned} v &= \text{número de vértices de } S, \\ e &= \text{número de arestas de } S, \\ t &= \text{número de triângulos (neste caso, } t = n). \end{aligned}$$

Então,

$$\chi(S) = v - e + t$$

é chamada a **característica de Euler** de S .

Proposição 1.6.1. *Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas. As características de Euler de S_1 e S_2 e de sua soma conexa $S_1 \# S_2$ estão relacionadas pela fórmula*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Demonstração: [10], Capítulo I, Proposição 8.1.

■

Através dessa proposição e de resultados conhecidos da esfera, do toro e do plano projetivo, obtemos a seguinte tabela:

Superfície	Característica de Euler
Esfera	2
Soma conexa de n toros	$2 - 2n$
Soma conexa de n planos projetivos	$2 - n$
Soma conexa de um plano projetivo e n toros	$1 - 2n$
Soma conexa de uma garrafa de Klein e n toros	$-2n$

Notemos que a característica de Euler de uma superfície orientável é sempre par, enquanto que para uma superfície não orientável pode ser par ou ímpar.

Teorema 1.6.1. *Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas. Então, S_1 e S_2 são homeomorfas se, e somente se, suas características de Euler são iguais e ambas são orientáveis ou não orientáveis.*

Demonstração: [10], Capítulo I, Teorema 8.2. ■

Definição 1.6.3. *Dizemos que uma superfície S é de **genus** n se ela é a soma conexa de n toros ou n planos projetivos. A esfera é uma superfície de genus 0.*

A seguinte relação é válida entre o genus g e a característica de Euler χ de uma superfície fechada:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi), & \text{no caso orientável} \\ 2 - \chi, & \text{no caso não orientável} \end{cases}$$

Teorema 1.6.2. *Sejam \tilde{S} e S superfícies fechadas e conexas, $\tilde{\chi}$ e χ suas respectivas características de Euler e $c \geq 1$, $c \in \mathbb{Z}$. Então \tilde{S} é um espaço de recobrimento de c folhas de S se, e somente se, $\tilde{\chi} = c\chi$ e uma das seguintes condições é satisfeita:*

- a) \tilde{S} e S são orientáveis;
- b) \tilde{S} e S são não orientáveis;
- c) \tilde{S} é orientável, S é não orientável e $2 \mid c$.

Demonstração: [14], Capítulo III, Teorema 3.4.2. ■

Teorema 1.6.3. *Se S é uma superfície fechada com característica de Euler ímpar, então S não possui involuções sem pontos fixos.*

Demonstração: Suponhamos que S possua uma involução sem pontos fixos $T : S \rightarrow S$. Sendo S um espaço de Hausdorff, sabemos que a aplicação quociente $p : S \rightarrow \frac{S}{T}$ é um recobrimento de duas folhas (Proposição 1.2.6).

Pelo Teorema 1.6.2, temos

$$\chi(S) = 2 \cdot \chi\left(\frac{S}{T}\right),$$

ou seja, $\chi(S)$ é par, o que contradiz a hipótese. ■

1.7 CW-complexos

Definição 1.7.1. Um espaço é chamado de **célula** de dimensão m se é homeomorfo ao disco $D^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq 1\}$ e é chamado de **célula aberta** de dimensão m se é homeomorfo a $\text{Int}(D^m)$.

Definição 1.7.2. Um **CW-complexo** é um espaço X e uma coleção de células abertas disjuntas e_α , cuja união é X , tal que:

1. X é Hausdorff.
2. Para cada m -célula aberta e_α da coleção, existe uma aplicação contínua $f_\alpha : D^m \rightarrow X$ que aplica $\text{Int}(D^m)$ homeomorficamente sobre e_α e leva $\partial(D^m)$ em uma união finita de células abertas, cujas dimensões são menores que m .
3. Um conjunto A é fechado em X se $A \cap \overline{e_\alpha}$ é fechado em $\overline{e_\alpha}$ para cada α .

Um CW-complexo finito X é um CW-complexo cuja coleção de células abertas é finita.

A aplicação f_α é chamada de **aplicação característica** para a célula aberta e_α .

Observação 1.7.1. Sejam X um CW-complexo e Y um subespaço de X que é a união de células abertas de X . Suponha que para cada célula aberta e_α de X contida em Y , seu fecho também está contido em Y . Então pode-se mostrar que Y é um conjunto fechado em X e que Y é um CW-complexo.

Definição 1.7.3. Nas condições descritas acima, Y é chamado de **subcomplexo** de X . Em particular, o subespaço X^p de X que é a união de células abertas de X de dimensão no máximo p satisfaz essas condições. Assim, X^p é um subcomplexo de X , que é chamado de **p -esqueleto** de X .

Um CW-complexo é finito ou infinito se o número de células é finito ou infinito, respectivamente. Se $X = X^n$ para algum n , o CW-complexo tem dimensão finita e o menor inteiro n para o qual isso ocorre é chamado de dimensão de X .

Proposição 1.7.1. Seja X um CW-complexo. Então X^p é um subespaço fechado de X^{p+1} para cada p , e X é a união dos espaços $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^p \subset \dots$

Reciprocamente, suponha que X^p é um CW-complexo e é o p -esqueleto de X^{p+1} , para cada p . Se X é a união dos espaços X^p , então X é um CW-complexo tendo X^p como seu p -esqueleto.

Demonstração: [12], Capítulo IV, Teorema 38.3. ■

Lema 1.7.1. *Seja X um CW-complexo. Dada uma p -célula aberta e_α de X , qualquer aplicação característica para e_α ,*

$$f_\alpha : (D^p, \mathbb{S}^{p-1}) \longrightarrow (\bar{e}_\alpha, \dot{e}_\alpha),$$

induz um isomorfismo em homologia relativa.

Demonstração: [12], Capítulo IV, Lema 39.1. ■

Teorema 1.7.1. *O grupo $H_i(X^p, X^{p-1})$ é nulo para $i \neq p$ e é abeliano livre para $i = p$. Se γ gera $H_p(D^p, \mathbb{S}^{p-1})$, então os elementos $f_{\alpha*}(\gamma)$ formam uma base para $H_p(X^p, X^{p-1})$, já que f_α varia ao longo de um conjunto de aplicações características para as p -células de X .*

Demonstração: [12], Capítulo IV, Teorema 39.3. ■

Definição 1.7.4. *Seja Y um CW-complexo tal que:*

1. Y é conexo.
2. $\pi_1(Y) = G$.
3. *O recobrimento universal \tilde{Y} de Y é contrátil (é fato conhecido que, para CW-complexos conexos, sempre existe tal recobrimento universal e este é regular).*

*Nestas condições, Y é dito um **complexo de Eilenberg-MacLane do tipo $(G, 1)$** ou simplesmente, **$K(G, 1)$ -complexo**.*

Proposição 1.7.2. *Sejam X um CW complexo conexo e Y um espaço $K(G, 1)$. Então todo homomorfismo $g_\# : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é induzido por uma aplicação $g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ que é única, a menos de homotopia fixando x_0 .*

Demonstração: [8], Capítulo I, Proposição 1B.9. ■

O teorema clássico de Borsuk-Ulam

O Teorema de Borsuk-Ulam (TBU) foi primeiramente conjecturado pelo matemático S. Ulam e foi posteriormente provado pelo matemático K. Borsuk, em 1933. Desde a sua publicação, têm sido apresentadas diferentes demonstrações, generalizações e aplicações deste famoso teorema. Ele afirma o seguinte:

Teorema clássico de Borsuk-Ulam: *Dada qualquer aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe um ponto $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Mas o TBU é uma consequência do teorema:

Teorema: *Se $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ é contínua e preserva pontos antipodais, então $n \leq m$. Em particular, não existe aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que preserva pontos antipodais.*

Neste capítulo nosso principal objetivo é demonstrar o teorema acima. Para isto, dividiremos o estudo em dois casos: o caso particular, para aplicações contínuas de \mathbb{S}^n em \mathbb{S}^{n-1} com $n = 1$ ou $n = 2$, e o caso geral.

2.1 O caso particular

Definição 2.1.1. *Seja \mathbb{S}^n a esfera unitária n -dimensional em \mathbb{R}^{n+1} . Se $x \in \mathbb{S}^n$, então seu **antipodal** é o ponto $-x$. Uma aplicação $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$ **preserva pontos antipodais** se $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{S}^m$.*

Teorema 2.1.1. *Para $n = 1$ ou $n = 2$, não existe aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que preserva pontos antipodais.*

Demonstração: Caso $n = 1$

Suponhamos que exista uma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^0$ que preserva pontos antipodais.

$$\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} = \{-1, 1\}$$

Observemos que f é sobrejetora, pois se $x \in \mathbb{S}^1$ e supondo $f(x) = 1$, temos:

$$f(-x) = -f(x) = -1 \in \mathbb{S}^0.$$

Analogamente, se $f(x) = -1$ então $f(-x) = -f(x) = 1 \in \mathbb{S}^0$.

Sendo f contínua, sobrejetora e \mathbb{S}^1 conexo, segue que \mathbb{S}^0 é conexo, o que é um absurdo.

Portanto, não existe aplicação contínua que preserva pontos antipodais para $n = 1$.

Caso $n = 2$

Suponhamos que exista uma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que preserva pontos antipodais.

Seja $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação tal que $A(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, com $n = 1, 2$. A aplicação A é uma involução sem pontos fixos, já que $(A \circ A)(x) = x$ e $A(x) \neq x$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. Como \mathbb{S}^n é um espaço de Hausdorff, segue da Proposição 1.2.6 que (\mathbb{S}^n, p_n) é um espaço de recobrimento de duas folhas de $\frac{\mathbb{S}^n}{A}$, onde $p_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \frac{\mathbb{S}^n}{A}$ é a aplicação quociente definida por

$$p_n(x) = \bar{x} = \{x, -x\}, \quad \forall x \in \mathbb{S}^n.$$

Esses espaços quocientes $\frac{\mathbb{S}^2}{A}$ e $\frac{\mathbb{S}^1}{A}$ são, respectivamente, o plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ e o espaço projetivo $\mathbb{R}P^1$, o qual é homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Observemos ainda que estes espaços de recobrimento são regulares, uma vez que o índice do subgrupo $p_{n\#}(\pi_1(\mathbb{S}^n))$ em $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ corresponde ao número de folhas do recobrimento, que é 2 (Proposição 1.2.3).

Consideremos $g : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ tal que $g(\bar{x}) = \overline{f(x)}$. Mostremos que g está bem definida. Dados $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}P^2$, se $\bar{x} = \bar{y}$ então $\{x, -x\} = \{y, -y\}$. Logo, $x = y$ ou $x = -y$. Assim, $f(x) = f(y)$ ou $f(x) = f(-y) = -f(y)$. Ou seja,

$$\overline{f(x)} = \{f(x), -f(x)\} = \{f(y), -f(y)\} = \overline{f(y)}.$$

Portanto, g está bem definida.

Consideremos então o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}P^1 \end{array}$$

Dado $x \in \mathbb{S}^2$, temos

$$(p_1 \circ f)(x) = p_1(f(x)) = \overline{f(x)} \quad \text{e}$$

$$(g \circ p_2)(x) = g(p_2(x)) = g(\bar{x}) = \overline{f(x)}.$$

Logo, o diagrama é comutativo, ou seja, $p_1 \circ f = g \circ p_2$.

Vamos mostrar que g é uma aplicação contínua. Seja U um subconjunto aberto em $\mathbb{R}P^1$. Como p_1 é contínua, segue que $p_1^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto em \mathbb{S}^1 . Sendo f uma aplicação contínua, temos

$$f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = (p_1 \circ f)^{-1}(U)$$

é um subconjunto aberto em \mathbb{S}^2 .

Pela comutatividade do diagrama, $(p_1 \circ f)^{-1}(U) = (g \circ p_2)^{-1}(U)$. Dessa forma,

$$f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = (p_1 \circ f)^{-1}(U) = (g \circ p_2)^{-1}(U) = p_2^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Assim, segue que $p_2^{-1}(g^{-1}(U))$ é um subconjunto aberto em \mathbb{S}^2 . Logo, como p_2 é a aplicação quociente, $g^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}P^2$.

Portanto, g é uma aplicação contínua.

Consideremos assim o homomorfismo induzido no grupo fundamental,

$$g_{\#} : \pi_1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1).$$

Sabemos que $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$ é cíclico de ordem 2 e $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \simeq \mathbb{Z}$ é cíclico infinito. Logo o homomorfismo $g_{\#}$ deve ser o homomorfismo trivial.

De fato. Seja $g_{\#} : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo. Consideremos os grupos multiplicativos $\mathbb{Z}_2 = \langle t \mid t^2 = 1 \rangle$ e $\mathbb{Z} = \langle s \mid \emptyset \rangle$. Então $g_{\#}(1) = 1$. Suponhamos que $g_{\#}(t) = s^k$, com $k \neq 0$. Dessa forma,

$$g_{\#}(1) = g_{\#}(t \cdot t) = g_{\#}(t) \cdot g_{\#}(t) = s^k \cdot s^k = s^{2k} \neq 1, \text{ já que } k \neq 0,$$

o que é uma contradição.

Assim, $g_{\#}$ é o homomorfismo trivial.

Por outro lado, seja $[\alpha]$ uma classe de equivalência de caminhos em \mathbb{S}^2 tal que os pontos extremos desses caminhos sejam x_0 e $-x_0$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = -x_0$.

Por hipótese temos $f(-x_0) = -f(x_0)$. Dessa forma, os pontos extremos dos caminhos da classe $[f \circ \alpha] = f_{\#}([\alpha])$ são $f(x_0)$ e $-f(x_0)$, que são pontos antipodais em \mathbb{S}^1 .

Consideremos novamente o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}P^1 \end{array}$$

Temos

$$(p_2 \circ \alpha)(0) = p_2(x_0) = \overline{x_0} = \{x_0, -x_0\} \text{ e}$$

$$(p_2 \circ \alpha)(1) = p_2(-x_0) = \overline{-x_0} = \{x_0, -x_0\}.$$

Portanto, $p_{2\#}([\alpha]) = [p_2 \circ \alpha]$ é uma classe de laços com ponto base $\overline{x_0}$ em $\mathbb{R}P^2$.

Temos também

$$\begin{aligned} (p_1 \circ (f \circ \alpha))(0) &= p_1(f(x_0)) = \overline{f(x_0)} \text{ e} \\ (p_1 \circ (f \circ \alpha))(1) &= p_1(f(-x_0)) = p_1(-f(x_0)) = \overline{f(x_0)}. \end{aligned}$$

Logo, $p_{1\#}(f_{\#}([\alpha])) = [p_1 \circ (f \circ \alpha)]$ é uma classe de laços com ponto base $\overline{f(x_0)}$ em $\mathbb{R}P^1$.

Dessa forma, $p_{2\#}([\alpha])$ e $p_{1\#}(f_{\#}([\alpha]))$ pertencem, respectivamente, aos grupos fundamentais $\pi_1(\mathbb{R}P^2, \overline{x_0})$ e $\pi_1(\mathbb{R}P^1, \overline{f(x_0)})$. Afirmamos que $p_{2\#}([\alpha]) \neq 1$ e $p_{1\#}(f_{\#}([\alpha])) \neq 1$.

De fato. Suponhamos que $p_{2\#}([\alpha]) = 1$. Logo, $[p_2 \circ \alpha] = [c_{\overline{x_0}}]$, com $c_{\overline{x_0}}$ o caminho constante no ponto $\overline{x_0}$ em $\mathbb{R}P^2$ e assim, $(p_2 \circ \alpha) \sim c_{\overline{x_0}}$.

Consideremos agora c_{x_0} , que é o caminho constante no ponto $x_0 \in S^2$. Temos

$$p_{2\#}([c_{x_0}]) = [p_2 \circ c_{x_0}] = [c_{\overline{x_0}}].$$

Assim, $(p_2 \circ c_{x_0}) \sim c_{\overline{x_0}}$.

Como $(p_2 \circ \alpha) \sim c_{\overline{x_0}}$ e $(p_2 \circ c_{x_0}) \sim c_{\overline{x_0}}$, obtemos $(p_2 \circ \alpha) \sim (p_2 \circ c_{x_0})$. Agora, como o ponto inicial de α e c_{x_0} são iguais, segue do Teorema 1.2.3 que $\alpha \sim c_{x_0}$ e seus respectivos pontos finais são iguais. Mas isso é um absurdo, pois $x_0 \neq -x_0$.

Portanto, $p_{\#}([\alpha]) \neq 1$.

Suponhamos agora que $p_{1\#}(f_{\#}([\alpha])) = 1$. Logo, $[p_1 \circ (f \circ \alpha)] = [c_{y_0}]$, com $y_0 = \overline{f(x_0)}$. Assim, $(p_1 \circ (f \circ \alpha)) \sim c_{y_0}$.

Observemos que $f \circ \alpha$ é um caminho em S^1 com ponto inicial $f(x_0)$ e ponto final $f(-x_0) = -f(x_0)$. Dado $c_{f(x_0)}$ o caminho constante no ponto $f(x_0) \in S^1$, temos $[p_1 \circ c_{f(x_0)}] = [c_{y_0}]$. Logo, $(p_1 \circ c_{f(x_0)}) \sim c_{y_0}$.

Como $(p_1 \circ (f \circ \alpha)) \sim c_{y_0}$ e $(p_1 \circ c_{f(x_0)}) \sim c_{y_0}$, segue que $(p_1 \circ (f \circ \alpha)) \sim (p_1 \circ c_{f(x_0)})$. Agora, como o ponto inicial de $f \circ \alpha$ e $c_{f(x_0)}$ são iguais, segue do Teorema 1.2.3 que $f \circ \alpha \sim c_{f(x_0)}$ e seus respectivos pontos finais são iguais. Mas isso é uma contradição, pois $f(x_0) \neq -f(x_0)$.

Logo, $p_{1\#}(f_{\#}([\alpha])) \neq 1$.

Pela comutatividade do diagrama segue que $g_{\#}(p_{2\#}([\alpha])) = p_{1\#}(f_{\#}([\alpha]))$. Assim, $g_{\#}$ leva $p_{2\#}([\alpha]) \neq 1$ em $p_{1\#}(f_{\#}([\alpha])) \neq 1$. Porém isso contradiz o fato de $g_{\#}$ ser o homomorfismo trivial.

Portanto, não existe uma aplicação contínua $f : S^2 \rightarrow S^1$ que preserva pontos antipodais. ■

2.2 O caso geral

A prova do caso particular envolve conceitos mais simples do que no caso geral. Para provar o caso geral do teorema, precisaremos do resultado a seguir. Mas antes, lembremos que se \mathcal{C} é um complexo de cadeias e F é um corpo, então $\text{Hom}(C_p, F)$ e $C_p \otimes F$ têm, de uma maneira natural, a estrutura de espaço vetorial sobre F . Dados $\alpha, \beta \in F$, $c^p \in \text{Hom}(C_p, F)$ e $c_p \in C_p$ definimos

$$\langle \alpha c^p, c_p \rangle = \alpha \cdot \langle c^p, c_p \rangle,$$

$$\alpha(c_p \otimes \beta) = c_p \otimes (\alpha\beta).$$

Tanto o operador cobordo δ quanto o operador bordo ∂ são transformações lineares, de modo que $H^p(\mathcal{C}; F)$ e $H_p(\mathcal{C}; F)$ também têm estrutura de espaço vetorial sobre F .

Teorema 2.2.1. *Seja X uma n -variedade fechada e conexa. Seja F um corpo; assuma que F é igual a \mathbb{Z}_2 se X não é orientável. Seja Λ o gerador de $H^n(X; F)$. Existem elementos básicos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ para $H^k(X; F)$ e β_1, \dots, β_m para $H^{n-k}(X; F)$ tais que para $i, j = 1, \dots, m$,*

$$\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij} \Lambda.$$

Demonstração: Seja $\epsilon_* : H_0(X; F) \rightarrow F$ a aplicação induzida da aplicação aumentação. Como X é conexo por caminhos, ϵ_* é um isomorfismo.

Considere X uma variedade orientável. Usando a Dualidade de Poincaré, o isomorfismo

$$H^n(X; F) \xrightarrow{\cap \Gamma} H_0(X; F) \xrightarrow{\epsilon_*} F, \quad (2.1)$$

leva Λ em $1 \in F$, com Λ o gerador de $H^n(X; F)$. Assim, $\epsilon_*(\Lambda \cap \Gamma) = 1$. No caso não orientável, Γ é única.

Para provar o teorema devemos encontrar elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de $H^k(X; F)$ e β_1, \dots, β_m de $H^{n-k}(X; F)$ tais que

$$\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij} \Lambda$$

para $i, j = 1, \dots, m$.

Pela Dualidade de Poincaré, temos o isomorfismo

$$\cap \Gamma : H^{n-k}(X; F) \rightarrow H_k(X; F), \quad (2.2)$$

obtido pelo produto cap .

Agora, pelo Teorema 1.4.5, temos o isomorfismo

$$\kappa^* : H^k(X; F) \rightarrow \text{Hom}_F(H_k(X; F), F), \quad (2.3)$$

obtido pela aplicação de Kronecker.

Ele está relacionado com o produto cap pela fórmula

$$[\kappa^*(\alpha)](\beta) = [\kappa(\alpha)](\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle = \epsilon_*(\alpha \cap \beta).$$

Combinando as equações (2.2) e (2.3) temos a seguinte sequência de isomorfismos

$$H^{n-k}(X; F) \xrightarrow[\simeq]{\cap \Gamma} H_k(X; F) \simeq \text{Hom}_F(H_k(X; F), F) \xleftarrow[\simeq]{\kappa^*} H^k(X; F).$$

Escolha, arbitrariamente, elementos básicos β_1, \dots, β_m para $H^{n-k}(X; F)$. Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ os correspondentes elementos básicos para $H_k(X; F)$, definidos pela equação $\beta_j \cap \Gamma = \gamma_j$ para todo $j = 1, \dots, m$. Sejam $\gamma_1^*, \dots, \gamma_m^*$ os correspondentes elementos básicos duais para $\text{Hom}_F(H_k(X; F), F)$, definidos pela equação $\gamma_i^*(\gamma_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, m$. Finalmente, sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ os elementos básicos correspondentes para $H^k(X; F)$, definidos pela equação $\kappa^*(\alpha_i) = \gamma_i^*$ para todo i .

Para mostrar que $\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij}\Lambda$, é preciso mostrar que

$$\epsilon_*((\alpha_i \cup \beta_j) \cap \Gamma) = \delta_{ij}.$$

De fato,

$$\delta_{ij} = \gamma_i^*(\gamma_j) = [\kappa^*(\alpha_i)](\beta_j \cap \Gamma) = \langle \alpha_i, \beta_j \cap \Gamma \rangle = \epsilon_*(\alpha_i \cap (\beta_j \cap \Gamma)) = \epsilon_*((\alpha_i \cup \beta_j) \cap \Gamma).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \epsilon_*(\delta_{ij}\Lambda \cap \Gamma) &= \delta_{ij}\epsilon_*(\Lambda \cap \Gamma) = \delta_{ij} = \epsilon_*((\alpha_i \cup \beta_j) \cap \Gamma) \xrightarrow{\epsilon_* \text{ injetor}} \\ &\implies (\alpha_i \cup \beta_j) \cap \Gamma = \delta_{ij}\Lambda \cap \Gamma \xrightarrow{\cap \Gamma \text{ isom.}} \alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij}\Lambda. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.2. *Se u é o elemento não nulo de $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, então u^k é o elemento não nulo de $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, para $k = 2, \dots, n$.*

Demonstração: Faremos a prova por indução, começando com $n = 2$.

O espaço vetorial $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ possui dimensão 1. Se u é seu elemento não nulo, então pelo teorema anterior, $u^2 = u \cup u \in H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ deve ser não nulo. Agora, suponhamos que o teorema seja verdadeiro para dimensão $n - 1$. A aplicação inclusão $j : \mathbb{R}P^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ induz isomorfismos de homologia e cohomologia (sobre \mathbb{Z}_2) em dimensões menores que n .

Considere o isomorfismo de anéis $j^* : H^q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$, $q < n$. Se $u \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ é não nulo, então $j^*(u) = v$ é não nulo em $H^1(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$. Por

hipótese de indução, v^k é não nulo em $H^k(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$, com $k \leq n-1$. Daí, $j^{*-1}(v^k) = (j^{*-1}(v))^k = u^k$ é não nulo em $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, com $k \leq n-1$. Resta mostrar que $u^n \neq 0$.

Pelo teorema anterior, existe um elemento básico α_1 para $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ e um elemento básico β_1 para $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ tais que $\alpha_1 \cup \beta_1$ gera $H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$. Como u e u^{n-1} são os únicos elementos não nulos desses grupos, respectivamente, devemos ter $\alpha_1 = u$ e $\beta_1 = u^{n-1}$. Assim, $u^n = u \cup u^{n-1}$ é não nulo, como desejado. ■

Teorema 2.2.3. *Se $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ é contínua e preserva pontos antipodais, então $n \leq m$. Em particular, não existe aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que preserva pontos antipodais.*

Demonstração: Dividiremos a demonstração em três partes.

Parte 1

Seja $a_n = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$ o ponto base de \mathbb{S}^n e consideremos $p_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ a projeção quociente, que é uma aplicação de recobrimento.

Provaremos que se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ é um caminho qualquer ligando a_n ao seu antipodal $-a_n$, então $p_n \circ \alpha$ representa o elemento não nulo de $H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Se α é o caminho usual $\beta(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0, \dots, 0)$, com $t \in I = [0, 1]$, então β define um homeomorfismo

$$(I, \partial I) \rightarrow (E_+^1, \mathbb{S}^0),$$

onde E_+^1 é o hemisfério superior fechado de \mathbb{S}^1 . A projeção $p_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ aplica (E_+^1, \mathbb{S}^0) sobre $(\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^0)$, transformando \mathbb{S}^0 em um único ponto.

Pelo Lema 1.7.1,

$$p_{1*} : H_1(E_+^1, \mathbb{S}^0; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^0; \mathbb{Z}_2)$$

é um isomorfismo e assim, leva um gerador de $H_1(E_+^1, \mathbb{S}^0; \mathbb{Z}_2)$ em um gerador para a 1-célula de $\mathbb{R}P^n$. A aplicação identidade, considerada como um 1-simplexo singular $i : \Delta_1 \rightarrow I$ gera $H_1(I, \partial I; \mathbb{Z}_2)$ e portanto, o 1-simplexo singular $p_1 \circ \beta \circ i = p_1 \circ \beta = p_n|_{\mathbb{S}^1} \circ \beta$ gera $H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Assim, $p_n \circ \beta$ representa o elemento não nulo de $H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Consideremos agora um caminho qualquer α ligando a_n até $-a_n$ e a 1-cadeia singular $\alpha * \beta^{-1} \equiv \alpha - \beta$, onde β é o caminho usual, como anteriormente.

Como $\alpha - \beta$ é um laço, segue que $\partial_1(\alpha - \beta) = 0$ e assim $\alpha - \beta$ é um ciclo singular de \mathbb{S}^n .

No caso $n > 1$ temos $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$ ($\ker(\partial_1) = \text{Im}(\partial_2)$). Logo, existe uma 2-cadeia singular d tal que $\partial_2(d) = \alpha - \beta$. Então

$$p_n \circ \alpha - p_n \circ \beta = p_{n\#}(\alpha - \beta) = p_{n\#}(\partial_2(d)) = \partial_2(p_{n\#}(d)) = \partial_2(p_n \circ d).$$

Assim, $p_n \circ \alpha$ e $p_n \circ \beta$ são homólogos em $H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$, ou seja, $p_n \circ \alpha$ gera $H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Se $n = 1$, usamos o fato que a aplicação $p_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ tem grau 2. Uma vez que $\alpha - \beta$ é um ciclo singular de \mathbb{S}^1 , segue que o ciclo $p_1 \circ \alpha - p_1 \circ \beta$ representa um múltiplo par do gerador de $H_1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$, em particular, ele representa o elemento nulo de $H_1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$. Deste modo, $p_1 \circ \alpha$ e $p_1 \circ \beta$ são homólogos como ciclos.

Parte 2

Seja $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ uma aplicação contínua que preserva pontos antipodais. Escolhemos uma rotação de \mathbb{S}^m , $\rho : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$, que leva o ponto $f(a_n)$ ao ponto base a_m de \mathbb{S}^m . Daí, $g = \rho \circ f$ é uma aplicação contínua que preserva pontos antipodais, pois

$$g(-x) = (\rho \circ f)(-x) = \rho(-f(x)) = -(\rho \circ f)(x) = -g(x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^m.$$

E também, $g(a_n) = \rho(f(a_n)) = a_m$, ou seja, a aplicação g leva a_n em a_m .

Através das aplicações quocientes p_n e p_m , a aplicação g induz uma aplicação contínua $h : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^m$, como mostra o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^m \\ p_n \downarrow & & \downarrow p_m \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}P^m \end{array}$$

Temos $h(p_n(x)) = p_m(g(x))$, para $x \in \mathbb{S}^n$.

Mostremos que $h_* : H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ é não trivial. Seja α um caminho qualquer em \mathbb{S}^n ligando a_n a $-a_n$. Como g preserva pontos antipodais, $g(-a_n) = -g(a_n) = -a_m$. Assim, $g \circ \alpha$ é um caminho em \mathbb{S}^m ligando a_m a $-a_m$.

Consideremos a aplicação em nível de cadeia $h_{\#} : C_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$. Temos:

$$h_{\#}(p_n \circ \alpha) = h \circ p_n \circ \alpha = p_m \circ g \circ \alpha.$$

Pela Parte 1, o homomorfismo h_* leva o elemento não nulo de $H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ ao elemento não nulo de $H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$. Portanto, h_* é um homomorfismo não trivial.

Parte 3

Pelo Teorema 1.4.5, existe um isomorfismo natural

$$\kappa_i^* : H^1(\mathbb{R}P^i; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(\mathbb{R}P^i; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2).$$

para $i = m, n$.

Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{h^*} & H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \\ \kappa_m^* \downarrow & & \downarrow \kappa_n^* \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

no qual $\varphi(l) = l \circ h_*$, para todo homomorfismo $l : H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ e h^* é um homomorfismo de cohomologia.

Agora, como h_* é um homomorfismo não trivial (pela Parte 2), o diagrama é comutativo e κ_i^* é isomorfismo, segue que $h^* : H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ também é não trivial.

Seja $u \in H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ não nulo; então $h^*(u) \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ é não nulo. Como h^* é um homomorfismo de anéis, $h^*(u^n) = (h^*(u))^n$. Pelo Teorema 2.2.2 segue que $(h^*(u))^n$ é o elemento não nulo. Por consequência, $u^n \in H^n(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ também é não nulo. Ainda pelo Teorema 2.2.2 segue que $n \leq m$, pois caso contrário, $u^n = 0$.

Portanto, se $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^m$ é uma aplicação que preserva pontos antipodais, então $n \leq m$. ■

Corolário 2.2.1. (Teorema clássico de Borsuk-Ulam) *Dada uma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, existe um ponto $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Em particular, f não é injetora.*

Demonstração: Suponhamos que $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. Consideremos uma aplicação $g : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, definida por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

A aplicação g é contínua, uma vez que f é contínua, e preserva pontos antipodais, pois:

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = \frac{-[f(x) - f(-x)]}{\|-[f(x) - f(-x)]\|} = -\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} = -g(x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^n.$$

Mas isto contradiz o teorema anterior, portanto, existe um ponto $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. ■

Corolário 2.2.2. *Nenhum subconjunto de \mathbb{R}^n é homeomorfo a \mathbb{S}^n .*

Demonstração: Suponhamos que exista um subconjunto A do espaço \mathbb{R}^n de modo que A seja homeomorfo a \mathbb{S}^n . Assim, existe uma aplicação contínua e bijetora $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow A$.

Considere a aplicação $i \circ f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $i : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão. Claramente $i \circ f$ é contínua e injetora, pois i é contínua e f é contínua e injetora.

No entanto, pelo corolário anterior $i \circ f$ não pode ser injetora. Portanto, nenhum subconjunto de \mathbb{R}^n é homeomorfo a \mathbb{S}^n . ■

O teorema de Borsuk-Ulam para superfícies

Este capítulo trata de uma generalização natural do teorema de Borsuk-Ulam, dada por Gonçalves em [6]. Nesse artigo \mathbb{S}^n é substituída por uma superfície fechada S (compacta e sem bordo) equipada com uma involução livre T .

Definição 3.0.1. *Seja (X, T) um par, onde X é um espaço topológico equipado com uma involução livre T . Dizemos que $((X, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a **propriedade de Borsuk-Ulam** se dada uma aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe um ponto $x \in X$ (que depende de f) tal que $f(x) = f(T(x))$.*

O principal resultado deste capítulo é um teorema de classificação, que será demonstrado posteriormente:

Teorema 3.0.4. *Seja (S, T) um par, onde S é uma superfície fechada equipada com uma involução livre T . A propriedade de Borsuk-Ulam é válida para $((S, T); \mathbb{R}^2)$ se, e somente se, uma das seguintes condições abaixo é verdadeira:*

- (i) S é orientável e sua característica de Euler é congruente a $2 \pmod{4}$;
- (ii) S é não orientável, sua característica de Euler é congruente a $2 \pmod{4}$ e a involução T é equivalente a uma das involuções canônicas que correspondem aos subgrupos dados pelas sequências da forma $(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, onde $\delta_i = \bar{0}$ ou $\bar{1}$ e r é o número de geradores de $\pi_1 \left(\frac{S}{T} \right)$;
- (iii) S é não orientável, sua característica de Euler é congruente a $0 \pmod{4}$ e a involução T é equivalente a uma das involuções canônicas que correspondem aos subgrupos dados pelas sequências da forma $(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, onde $\delta_i = \bar{0}$ ou $\bar{1}$ e r é o número de geradores de $\pi_1 \left(\frac{S}{T} \right)$.

O teorema clássico de Borsuk-Ulam é o caso (i) do Teorema 3.0.4 para a característica de Euler igual a 2.

3.1 Involuções canônicas

Esta seção apresenta a caracterização das involuções canônicas usadas no Teorema 3.0.4.

As superfícies fechadas são classificadas por suas características de Euler e orientações. Baseado nessa classificação, vamos escolher um representante de cada classe de equivalência. Denote por $S_{(l,\epsilon)}$ uma superfície fechada que tem característica de Euler l e é orientável se $\epsilon = 1$ e não orientável se $\epsilon = -1$.

Seja $S_{(l,\epsilon)}$ uma superfície fechada de genus n . Do Teorema 1.5.2, podemos obter as seguintes apresentações dos grupos fundamentais por geradores e relações:

1. Se $S_{(l,1)} \neq \mathbb{S}^2$, então

$$\pi_1(S_{(l,1)}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n} \mid [a_1, a_2] \dots [a_{2n-1}, a_{2n}] \rangle \quad (3.1)$$

2. Para $S_{(l,-1)}$ temos duas possibilidades:

(a) Para n ímpar, $S_{(l,-1)}$ é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo e uma superfície fechada orientável de genus $\frac{n-1}{2}$, e assim,

$$\pi_1(S_{(l,-1)}) = \langle \alpha, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} \mid \alpha^2 [a_1, a_2] \dots [a_{n-2}, a_{n-1}] \rangle \quad (3.2)$$

(b) Para n par, $S_{(l,-1)}$ é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e uma superfície fechada orientável de genus $\frac{n-2}{2}$, e assim,

$$\pi_1(S_{(l,-1)}) = \langle \alpha, \beta, a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n-2} \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} [a_1, a_2] \dots [a_{n-3}, a_{n-2}] \rangle \quad (3.3)$$

Denominaremos as apresentações (3.1), (3.2) e (3.3) de apresentações canônicas e o conjunto de geradores de $\pi_1(S_{(l,\epsilon)})$ de **sistema canônico de geradores**.

Seja $\{a_1, \dots, a_r\}$ um sistema canônico de geradores de $\pi_1(S_{(l,\epsilon)})$. Vamos considerar os seguintes conjuntos:

- O conjunto de subgrupos $H \subset \pi_1(S_{(l,\epsilon)})$ de índice 2.
- O conjunto de homomorfismos não triviais de $\pi_1(S_{(l,\epsilon)})$ em \mathbb{Z}_2 .
- O conjunto de sequências não triviais de elementos de \mathbb{Z}_2 com r elementos.

Proposição 3.1.1. *Existe uma correspondência biunívoca entre quaisquer dois dos três conjuntos acima. Sua cardinalidade é $2^r - 1$, onde $r = -l + 2$.*

Demonstração: Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{H \leq \pi_1(S_{(l,\epsilon)}) \mid [\pi_1(S_{(l,\epsilon)}) : H] = 2\} \\ \mathcal{C} &:= \{f : \pi_1(S_{(l,\epsilon)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \mid f \text{ é homomorfismo não trivial}\} \\ \mathcal{A} &:= \{f : \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \mid f \text{ é uma aplicação não trivial}\} \end{aligned}$$

Dado um elemento $H \in \mathcal{H}$ concluímos que H é normal. Assim, a aplicação quociente $p : \pi_1(S_{(l,\epsilon)}) \longrightarrow \frac{\pi_1(S_{(l,\epsilon)})}{H}$ fornece um homomorfismo $\bar{p} : \pi_1(S_{(l,\epsilon)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ que é não trivial (uma vez que $\frac{\pi_1(S_{(l,\epsilon)})}{H} \simeq \mathbb{Z}_2$ e p é sobrejetora). Isto define uma aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ H &\longrightarrow \Phi(H) = \bar{p} \end{aligned}$$

Reciprocamente, dado qualquer homomorfismo não trivial $f \in \mathcal{C}$ temos f sobrejetor. Segue que $\mathbb{Z}_2 \simeq \frac{\pi_1(S_{(l,\epsilon)})}{ker(f)}$, ou seja, $H = ker(f)$ tem índice 2. Daí, definimos uma aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ f &\longrightarrow \Psi(f) = H = ker(f) \end{aligned}$$

Temos:

$$(\Psi \circ \Phi)(H) = \Psi(\Phi(H)) = \Psi(\bar{p} : \pi_1(S_{(l,\epsilon)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2) = ker(\bar{p}) = H$$

Logo,

$$\Psi \circ \Phi = id : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

Assim, para todo $H \in \mathcal{H}$ existe $f = \Phi(H) \in \mathcal{C}$ tal que $\Psi(f) = \Psi(\Phi(H)) = (\Psi \circ \Phi)(H) = H$. Portanto, Ψ é sobrejetora.

Ψ também é injetora, pois, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}$, temos:

$$\Psi(f) = \Psi(g) \Rightarrow ker(f) = ker(g) \Rightarrow f(x) = g(x) = \begin{cases} \bar{0}, & \text{se } x \in ker(f) = ker(g) \\ \bar{1}, & \text{se } x \notin ker(f) = ker(g) \end{cases} \Rightarrow f = g.$$

Logo, existe uma bijeção Ψ entre os conjuntos \mathcal{H} e \mathcal{C} .

Agora, para cada homomorfismo não trivial $f \in \mathcal{C}$ considere sua restrição ao sistema canônico de geradores. Temos, então, uma correspondência

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ f &\longrightarrow \Lambda(f) = f_{\{a_1, \dots, a_r\}} \end{aligned}$$

que é claramente injetora.

O grupo fundamental de $\pi_1(S_{(l,\epsilon)})$ tem uma apresentação da forma

$$\pi_1(S_{(l,\epsilon)}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_r \mid R \rangle,$$

onde R é uma relação que define $\pi_1(S_{(l,\epsilon)})$.

Se $\alpha \in \pi_1(S_{(l,\epsilon)})$ então $\alpha = a_1^{s_1^1} . a_2^{s_2^1} \dots a_r^{s_r^1} . a_1^{s_1^2} . a_2^{s_2^2} \dots a_r^{s_r^2} \dots a_1^{s_1^n} . a_2^{s_2^n} \dots a_r^{s_r^n}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $s_i^k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq k \leq n$.

Para todo $f \in \mathcal{A}$, defina uma aplicação $F : \pi_1(S_{(l,\epsilon)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ da seguinte forma:

$$F(a_i) = f(a_i)$$

$$F(\alpha) = (s_1^1 + \dots + s_1^n).F(a_1) + (s_2^1 + \dots + s_2^n).F(a_2) + \dots + (s_r^1 + \dots + s_r^n).F(a_r)$$

F está bem definida, pois:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\beta^{-1} = 1 \Rightarrow \alpha\beta^{-1} \in R \Rightarrow F(\alpha\beta^{-1}) = 0 \Rightarrow F(\alpha) - F(\beta) = 0 \Rightarrow F(\alpha) = F(\beta)$$

Segue da definição que F é um homomorfismo não trivial, pois f é não trivial. Como $\text{Im}(F) = \mathbb{Z}_2$ (que é abeliano e cíclico de ordem 2) então $F(R) = 0$. Além disso, $\Lambda(F) = F|_{\{a_1, \dots, a_r\}} = f$. Logo, Λ é sobrejetora, ou seja, existe uma bijeção entre as aplicações e os homomorfismos. Mas o número de tais aplicações é $2^r - 1$, já que não incluímos a aplicação constante em $\bar{0}$. Segue que o número de subgrupos é $2^r - 1$ e a classificação das superfícies nos dá o valor de r . ■

Observação 3.1.1. *Como consequência da proposição acima, os subgrupos H de índice 2 são caracterizados pelas sequências não nulas $(\delta_1, \dots, \delta_r)$ onde δ_i é $\bar{0}$ ou $\bar{1}$. Além disso, existem $2^r - 1$ sequências desse tipo (ou homomorfismos $\pi_1(S_{(l,\epsilon)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ não nulos).*

A fim de reduzir o número de homomorfismos sobrejetivos $\pi_1(S_{(l,\epsilon)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ a serem analisados, apresentamos dois resultados presentes no artigo de Gonçalves e Guaschi ([7]): um para o caso em que $S_{(l,\epsilon)}$ é uma superfície orientável e outro para o caso contrário. Mas antes de enunciá-los, precisamos do conceito de homomorfismos equivalentes:

Definição 3.1.1. *Dados um grupo G e dois homomorfismos sobrejetivos $\phi_1, \phi_2 \in \text{Hom}(G, \mathbb{Z}_2)$, dizemos que eles são equivalentes se existe um isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G$ tal que $\phi_1 \circ \varphi = \phi_2$.*

Proposição 3.1.2. *Seja $\pi_1(S_{(l,1)})$ o grupo fundamental de uma superfície fechada, conexa e orientável, diferente de \mathbb{S}^2 , de genus h , e considere sua apresentação dada por*

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{2h-1}, a_{2h} \mid [a_1, a_2] \dots [a_{2h-1}, a_{2h}] \rangle.$$

Então qualquer homomorfismo sobrejetivo de $\pi_1(S_{(l,1)})$ em \mathbb{Z}_2 é equivalente ao homomorfismo $\theta : \pi_1(S_{(l,1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ definido por $\theta(a_{2h}) = \bar{1}$ e $\theta(a_i) = \bar{0}$, para todo $1 \leq i < 2h$.

Demonstração: A ideia básica é fazer uma sequência de trocas de geradores (fornecidas pelas identidades (1)-(4) abaixo), com a restrição que em cada etapa do processo temos um conjunto S de geradores com $2h$ elementos e a única relação entre esses elementos é o produto de comutadores dos novos geradores.

Sejam a, b, c e d geradores de $\pi_1(S_{(l,1)})$ e considere novos geradores a', b', c' e d' fornecidos pelas seguintes identidades:

$$(1) (a', b') = (a, ba)$$

Temos então,

$$\begin{aligned} [a', b'] &= abaa^{-1}(ba)^{-1} \\ &= abaa^{-1}a^{-1}b^{-1} \\ &= aba^{-1}b^{-1} \\ &= [a, b] \end{aligned}$$

$$(2) (a', b') = (aba^{-1}, a^{-1})$$

Daí,

$$\begin{aligned} [a', b'] &= aba^{-1}a^{-1}(aba^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1} \\ &= aba^{-1}a^{-1}ab^{-1}a^{-1}a \\ &= aba^{-1}b^{-1} \\ &= [a, b] \end{aligned}$$

$$(3) (a', b', c', d') = ([a, b]c[b, a], [a, b]d[b, a], a, b)$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} [a', b'] [c', d'] &= [a, b]c[b, a][a, b]d[b, a]([a, b]c[b, a])^{-1}([a, b]d[b, a])^{-1}aba^{-1}b^{-1} \\ &= aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}aba^{-1}b^{-1}dbab^{-1}a^{-1}aba^{-1}b^{-1}c^{-1}bab^{-1}a^{-1} \\ &\quad aba^{-1}b^{-1}d^{-1}bab^{-1}a^{-1}aba^{-1}b^{-1} \\ &= aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \\ &= [a, b][c, d] \end{aligned}$$

$$(4) (a', b', c', d') = (ac, c^{-1}bc, c^{-1}bcb^{-1}c, dc^{-1}b^{-1}c)$$

Assim,

$$\begin{aligned} [a', b'] [c', d'] &= acc^{-1}bc(ac)^{-1}(c^{-1}bc)^{-1}c^{-1}bcb^{-1}cdc^{-1}b^{-1}c(c^{-1}bcb^{-1}c)^{-1}(dc^{-1}b^{-1}c)^{-1} \\ &= acc^{-1}bcc^{-1}a^{-1}c^{-1}b^{-1}cc^{-1}bcb^{-1}cdc^{-1}b^{-1}cc^{-1}bc^{-1}b^{-1}cc^{-1}bcd^{-1} \\ &= aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \\ &= [a, b][c, d] \end{aligned}$$

Considere agora $\theta : \pi_1(S_{(l, \epsilon)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ um homomorfismo sobrejetivo e a_{2i-1}, a_{2i} dois geradores de $\pi_1(S_{(l, \epsilon)})$. Se $(\theta(a_{2i-1}), \theta(a_{2i})) = (\bar{1}, \bar{1})$, então pela identidade (1) poderemos substituir cada par de elementos (a_{2i-1}, a_{2i}) no conjunto S de geradores por um outro par (a'_{2i-1}, a'_{2i}) , onde $(a'_{2i-1}, a'_{2i}) = (a_{2i-1}, a_{2i}a_{2i-1})$, de maneira que o novo conjunto S' gera o grupo e a nova relação é o produto de comutadores dos novos geradores. Além disso, como $\theta(a'_{2i-1}) = \theta(a_{2i-1}) = \bar{1}$ e $\theta(a'_{2i}) = \theta(a_{2i}) + \theta(a_{2i-1}) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$, poderemos supor que a imagem por θ de a'_{2i-1} ou a'_{2i} seja igual a $\bar{0}$, para todo $i = 1, \dots, h$.

Se $\theta(a'_{2i-1}) \neq \bar{0}$, então podemos transformar, usando a relação (2), os pares correspondentes (a'_{2i-1}, a'_{2i}) em (a''_{2i-1}, a''_{2i}) , onde $(a''_{2i-1}, a''_{2i}) = (a'_{2i-1}a'_{2i}(a'_{2i-1})^{-1}, (a'_{2i-1})^{-1})$, tal

que o novo conjunto S'' gera o grupo, a nova relação é o produto de comutadores dos novos geradores e, além disso, $\theta(a''_{2i-1}) = \theta(a'_{2i-1}) + \theta(a''_{2i}) - \theta(a'_{2i-1}) = \bar{1} + \bar{0} - \bar{1} = \bar{0}$, $\forall i = 1, \dots, h$.

Assim, temos um conjunto de geradores $S'' = \{a''_1, \dots, a''_{2h}\}$ tal que a única relação entre esses elementos é $[a''_1, a''_2] \dots [a''_{2h-1}, a''_{2h}] = 1$ e que $\theta(a''_{2i-1}) = \bar{0}$, $\forall i = 1, \dots, h$. Se $h = 1$, então o resultado está provado. Daí, podemos supor que $h \geq 2$.

Com o conjunto S'' , a sequência $(\theta(a''_1), \theta(a''_2), \dots, \theta(a''_{2h}))$ é da forma

$$(\bar{0}, \theta(a''_2), \bar{0}, \theta(a''_4), \dots, \bar{0}, \theta(a''_{2h})),$$

onde $\theta(a''_{2i}) = \bar{1}$, para algum $i = 1, \dots, h$.

Se $(\bar{0}, \theta(a''_{2i}), \bar{0}, \theta(a''_{2i+2})) \neq (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1})$, utilizando a identidade (3) temos

$$\begin{aligned} \theta(a'''_{2i-1}) &= \theta(a''_{2i+1}) = \bar{0} \\ \theta(a'''_{2i}) &= \theta(a''_{2i+2}) \\ \theta(a'''_{2i+1}) &= \theta(a''_{2i-1}) = \bar{0} \\ \theta(a'''_{2i+2}) &= \theta(a''_{2i}) \end{aligned}$$

Aplicando esta identidade sucessivamente, se for preciso, podemos assumir que existe $1 \leq r < h$ tal que $\theta(a''_i) = \bar{0}$ para $i \leq 2r$, e para $i > r$ $\theta(a''_{2i-1}) = \bar{0}$ e $\theta(a''_{2i}) = \bar{1}$.

Se $(\bar{0}, \theta(a''_{2i}), \bar{0}, \theta(a''_{2i+2})) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1})$, aplicando a identidade (4) temos

$$\begin{aligned} \theta(a'''_{2i-1}) &= \theta(a''_{2i-1}) + \theta(a''_{2i+1}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \\ \theta(a'''_{2i}) &= -\theta(a''_{2i+1}) + \theta(a''_{2i}) + \theta(a''_{2i+1}) = \bar{0} + \bar{1} + \bar{0} = \bar{1} \\ \theta(a'''_{2i+1}) &= -\theta(a''_{2i+1}) + \theta(a''_{2i}) + \theta(a''_{2i+1}) - \theta(a''_{2i}) + \theta(a''_{2i+1}) = \bar{0} + \bar{1} + \bar{0} + \bar{1} + \bar{0} = \bar{0} \\ \theta(a'''_{2i+2}) &= \theta(a''_{2i+2}) - \theta(a''_{2i+1}) - \theta(a''_{2i}) + \theta(a''_{2i+1}) = \bar{1} + \bar{0} + \bar{1} + \bar{0} = \bar{0} \end{aligned}$$

Aplicando as identidades (3) e (4) o quanto for necessário, vemos que um homomorfismo sobrejetivo $\theta : \pi_1(S_{(l,1)}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é caracterizado pelo homomorfismo dado por $\theta(a_i) = \bar{1}$ se $i = 2h$ e $\bar{0}$ caso contrário.

■

Observação 3.1.2. *Das relações acima, no caso orientável, deduzimos que quaisquer dois homomorfismos sobrejetivos de $\pi_1(S_{(l,1)})$ em \mathbb{Z}_2 são equivalentes. Assim, podemos considerar o elemento não nulo em qualquer uma das posições. Para a proposição seguinte vamos tomar como representante o homomorfismo $\theta : \pi_1(S_{(l,1)}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta(a_1) = \bar{1}$ e $\theta(a_i) = \bar{0}$ para $i > 1$.*

Proposição 3.1.3. *Seja $\pi_1(S_{(l,-1)})$ o grupo fundamental de uma superfície fechada, conexa, não orientável, diferente de $\mathbb{R}P^2$ e de genus $h \geq 2$. Considere um homomorfismo sobrejetivo $\theta : \pi_1(S_{(l,-1)}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.*

(a) *Seja h um número ímpar e considere a seguinte apresentação*

$$\pi_1(S_{(l,-1)}) = \langle \alpha, a_1, a_2, \dots, a_{h-2}, a_{h-1} \mid \alpha^2[a_1, a_2] \dots [a_{h-2}, a_{h-1}] \rangle \quad (3.4)$$

Então θ é equivalente a um dos três homomorfismos abaixo:

1. $\theta_1 : \pi_1(S_{(l,-1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta_1(\alpha) = \bar{0}$, $\theta_1(a_1) = \bar{1}$ e $\theta_1(a_i) = \bar{0}$, para $1 < i \leq h-1$.
2. $\theta_2 : \pi_1(S_{(l,-1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta_2(\alpha) = \bar{1}$ e $\theta_2(a_i) = \bar{0}$, para $1 \leq i \leq h-1$.
3. $\theta_3 : \pi_1(S_{(l,-1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta_3(\alpha) = \bar{1}$, $\theta_3(a_1) = \bar{1}$ e $\theta_3(a_i) = \bar{0}$, para $1 < i \leq h-1$.

(b) Seja h um número par e considere a seguinte apresentação

$$\pi_1(S_{(l,-1)}) = \langle \alpha, \beta, a_1, a_2, \dots, a_{h-3}, a_{h-2} \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1}[a_1, a_2] \dots [a_{h-3}, a_{h-2}] \rangle$$

(I) Se $h = 2$, então θ é equivalente a um dos dois homomorfismos abaixo:

1. $\theta_1 : \pi_1(S_{(l,-1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta_1(\alpha) = \bar{0}$ e $\theta_1(\beta) = \bar{1}$.
2. $\theta_2 : \pi_1(S_{(l,-1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta_2(\alpha) = \bar{1}$ e $\theta_2(\beta) = \bar{0}$.

(II) Se $h \geq 4$, então θ é equivalente a um dos três homomorfismos abaixo:

1. $\theta_1 : \pi_1(S_{(l,-1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta_1(\alpha) = \bar{0}$, $\theta_1(\beta) = \bar{1}$ e $\theta_1(a_i) = \bar{0}$, para $1 \leq i \leq h-2$.
2. $\theta_2 : \pi_1(S_{(l,-1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta_2(\alpha) = \theta_2(\beta) = \bar{0}$, $\theta_2(a_1) = \bar{1}$ e $\theta_2(a_i) = \bar{0}$ para $1 < i \leq h-2$.
3. $\theta_3 : \pi_1(S_{(l,-1)}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\theta_3(\alpha) = \bar{1}$, $\theta_3(\beta) = \bar{0}$ e $\theta_3(a_i) = \bar{0}$ para $1 \leq i \leq h-2$.

Demonstração: (a) Seja $h \geq 3$ um número ímpar. Suponha primeiramente que $\theta(\alpha) = \bar{0}$. Pela relação da apresentação dada pela equação (3.4), devemos ter $\theta(a_i) = \bar{1}$ para algum i . Usando as transformações da demonstração da Proposição 3.1.2 e a Observação 3.1.2, podemos assumir que $\theta(a_1) = \bar{1}$ e $\theta(a_i) = \bar{0}$ se $1 < i \leq h-1$, que é o caso 1.

Agora suponha que $\theta(\alpha) = \bar{1}$. Uma possibilidade é que $\theta(a_i) = \bar{0}$, para todo i , que é o caso 2. A outra possibilidade é $\theta(a_i) = \bar{1}$, para algum $1 \leq i \leq h-1$. Novamente usando as transformações da demonstração da Proposição 3.1.2 e a Observação 3.1.2, podemos assumir que $\theta(a_1) = \bar{1}$ e $\theta(a_i) = \bar{0}$ se $1 < i \leq h-1$, que é o caso 3. Isto completa a demonstração da parte (a).

(b) Se $\alpha, \beta \in \pi_1(S_{(l,-1)})$, seja $[\alpha, \beta]' = \alpha\beta\alpha\beta^{-1}$ seu comutador torcido.

(I) Seja $h = 2$. Então existem três homomorfismos sobrejetivos:

- (i) $\theta_1(\alpha) = \bar{0}$ e $\theta_1(\beta) = \bar{1}$, que é o caso 1.
- (ii) $\theta_2(\alpha) = \bar{1}$ e $\theta_2(\beta) = \bar{0}$, que é o caso 2.
- (iii) $\theta_3(\alpha) = \theta_3(\beta) = \bar{1}$.

Para o caso (iii), considere a identidade $(\alpha^*, \beta^*) = (\alpha, \beta\alpha)$. Temos

$$[\alpha^*, \beta^*]' = \alpha^* \beta^* \alpha^* (\beta^*)^{-1} = \alpha\beta\alpha\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = [\alpha, \beta]'$$

Também:

$$\begin{cases} \theta_3(\alpha^*) = \theta_3(\alpha) = \bar{1} \\ \theta_3(\beta^*) = \theta_3(\beta\alpha) = \theta_3(\beta) + \theta_3(\alpha) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{0} \end{cases}$$

Isto mostra que os homomorfismo θ_2 e θ_3 são equivalentes e completamos a demonstração da parte (I).

(II) Seja $h \geq 4$ um número par. Primeiro reduzimos o número de casos para cinco. Argumentando como no caso $h = 2$ a respeito dos valores de θ sobre α e β , vemos que podemos reduzir aos seguintes casos:

- (i) $\theta(\alpha) = \theta(\beta) = \bar{0}$
- (ii) $\theta(\alpha) = \bar{0}$ e $\theta(\beta) = \bar{1}$
- (iii) $\theta(\alpha) = \bar{1}$ e $\theta(\beta) = \bar{0}$

Para o caso (i) devemos ter $\theta(a_i) = \bar{1}$ para algum $1 \leq i \leq h-2$. Segue da demonstração da Proposição 3.1.2 e da Observação 3.1.2 que podemos assumir que $\theta(a_1) = \bar{1}$ e $\theta(a_i) = \bar{0}$ para $1 < i \leq h-2$.

Para o caso (ii) podemos ter $\theta(a_i) = \bar{0}$ para todo i ou $\theta(a_i) = \bar{1}$ para algum $1 \leq i \leq h-2$. No último caso, novamente pela demonstração da Proposição 3.1.2 e da Observação 3.1.2, podemos assumir que $\theta(a_1) = \bar{1}$ e $\theta(a_i) = \bar{0}$ para $1 < i \leq h-2$.

O caso (iii) é completamente análogo ao caso (ii) e assim, os três casos acima fornecem um total de cinco subcasos:

- (i)' $\theta_1(\alpha) = \theta_1(\beta) = \bar{0}$, $\theta_1(a_1) = \bar{1}$ e $\theta_1(a_i) = \bar{0}$ para $1 < i \leq h-2$ (caso 2).
- (ii)' $\theta_2(\alpha) = \bar{0}$, $\theta_2(\beta) = \bar{1}$ e $\theta_2(a_i) = \bar{0}$ para todo i (caso 1).
- (iii)' $\theta_3(\alpha) = \bar{0}$, $\theta_3(\beta) = \bar{1}$, $\theta_3(a_1) = \bar{1}$ e $\theta_3(a_i) = \bar{0}$ para $1 < i \leq h-2$.
- (iv)' $\theta_4(\alpha) = \bar{1}$, $\theta_4(\beta) = \bar{0}$ e $\theta_4(a_i) = \bar{0}$ para todo i (caso 3).
- (v)' $\theta_5(\alpha) = \bar{1}$, $\theta_5(\beta) = \bar{0}$, $\theta_5(a_1) = \bar{1}$ e $\theta_5(a_i) = \bar{0}$ para $1 < i \leq h-2$.

Considere a identidade

$$(\alpha^*, \beta^*, a_1^*, a_2^*) = (\alpha a_1 \alpha a_1^{-1} \alpha^{-1}, \alpha a_1 \alpha^{-1} a_1^{-1} \beta \alpha a_1^{-1} \alpha^{-1}, \alpha a_1 \alpha^{-1}, a_2 \alpha^{-1})$$

Temos,

$$[\alpha^*, \beta^*]'[a_1^*, a_2^*] = [\alpha, \beta]'[a_1, a_2],$$

e

$$\begin{cases} \theta_1(\alpha^*) = \theta_1(\alpha) = \bar{0} \\ \theta_1(\beta^*) = \theta_1(\beta) - \theta_1(a_1) = \bar{0} - \bar{1} = \bar{1} \\ \theta_1(a_1^*) = \theta_1(a_1) = \bar{1} \\ \theta_1(a_2^*) = \theta_1(a_2) - \theta_1(\alpha) = \bar{0} - \bar{0} = \bar{0} \end{cases}$$

Assim, θ_1 é equivalente a θ_3 .

Também,

$$\begin{cases} \theta_4(\alpha^*) = \theta_4(\alpha) = \bar{1} \\ \theta_4(\beta^*) = \theta_4(\beta) - \theta_4(a_1) = \bar{0} - \bar{0} = \bar{0} \\ \theta_4(a_1^*) = \theta_4(a_1) = \bar{0} \\ \theta_4(a_2^*) = \theta_4(a_2) - \theta_4(\alpha) = \bar{0} - \bar{1} = \bar{1} \end{cases}$$

Logo, θ_4 é equivalente a

$$\theta(\alpha) = \bar{1}, \theta(\beta) = \bar{0}, \theta(a_2) = \bar{1} \text{ e } \theta(a_i) = \bar{0} \text{ para } i \neq 2.$$

Mas pela Proposição 3.1.2 e a Observação 3.1.2, isto é equivalente a θ_5 , completando a demonstração da parte (II). ■

Definição 3.1.2. *Sejam (X_1, T_1) e (X_2, T_2) pares, onde X_i é um espaço e T_i é uma involução livre sobre X_i , para $i = 1, 2$. Dizemos que T_1 e T_2 são equivalentes se existe um homeomorfismo $h : X_1 \rightarrow X_2$ equivariante.*

Observação 3.1.3. *Segue da definição acima que h induz uma aplicação \bar{h} sobre os espaços de órbitas que torna o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \frac{X_1}{T_1} & \xrightarrow{\bar{h}} & \frac{X_2}{T_2} \end{array}$$

comutativo. De fato. Seja $p_2 : X_2 \rightarrow \frac{X_2}{T_2}$ a aplicação quociente dada por $p_2(z) = \bar{z} = \{z, T_2(z)\}$, para qualquer $z \in X_2$. Vamos definir a aplicação $\tilde{h} : X_1 \rightarrow \frac{X_2}{T_2}$ como sendo a composta

$$\tilde{h}(w) = (p_2 \circ h)(w) = \overline{h(w)} = \{h(w), T_2(h(w))\} \stackrel{h \text{ equivariante}}{=} \{h(w), h(T_1(w))\},$$

para qualquer $w \in X_1$.

Tal função é contínua e constante nas classes de equivalência determinadas por T_1 (ou seja, $\tilde{h}(w) = \tilde{h}(T_1(w))$), $\forall w \in X_1$, e portanto, induz a aplicação contínua $\bar{h} : \frac{X_1}{T_1} \rightarrow \frac{X_2}{T_2}$, definida por

$$\bar{h}(\bar{w}) = \tilde{h}(w) = \{h(w), h(T_1(w))\}.$$

Temos então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \\ p_1 \downarrow & \searrow \tilde{h} & \downarrow p_2 \\ \frac{X_1}{T_1} & \xrightarrow{\bar{h}} & \frac{X_2}{T_2} \end{array}$$

Observemos que

$$(p_2 \circ h)(w) = \tilde{h}(w) = \bar{h}(\bar{w}) = \bar{h}(p_1(w)) = (\bar{h} \circ p_1)(w).$$

Portanto o diagrama é comutativo.

Considere o par $(S_{(l,\epsilon)}, H)$, onde $S_{(l,\epsilon)}$ é uma superfície fechada e $H \subset \pi_1(S_{(l,\epsilon)})$ é um subgrupo de índice 2. A Proposição 1.2.7 nos garante que existe um espaço de recobrimento (\tilde{S}, q) de S tal que $q_{\#}(\pi_1(\tilde{S})) = H$. Pela Proposição 1.2.5 temos $A(\tilde{S}, q) \simeq \frac{\pi_1(S_{(l,\epsilon)})}{q_{\#}(\pi_1(\tilde{S}))}$, ou seja, $A(\tilde{S}, q) = \{id, \varphi\}$. Tome $\tilde{T} = \varphi$. Assim, obtemos uma involução $\tilde{T} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ associada ao par $(S_{(l,\epsilon)}, H)$.

Definição 3.1.3. *Uma involução obtida como acima é chamada de **involução canônica** sobre a superfície $S_{(l,\epsilon)}$.*

Proposição 3.1.4. *Seja S uma superfície fechada e $T : S \rightarrow S$ uma involução sem pontos fixos. Então esta involução é equivalente a uma involução canônica.*

Demonstração: Como S é um espaço de Hausdorff, segue da Proposição 1.2.6 que (S, p) é um espaço de recobrimento de 2 folhas de $\frac{S}{T}$, onde $p : S \rightarrow \frac{S}{T}$ é a aplicação quociente.

Pela Proposição 1.2.3, o índice do subgrupo $p_{\#}(\pi_1(S))$ em $\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)$ é 2, ou seja, $p_{\#}(\pi_1(S))$ é normal em $\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)$. Assim, (S, p) é um espaço de recobrimento regular de $\frac{S}{T}$.

Uma vez que $\frac{S}{T}$ também é uma superfície fechada, existe um homeomorfismo $\bar{h} : \frac{S}{T} \rightarrow S_{(l,\epsilon)}$, para algum par (l, ϵ) . Considere o subgrupo $H = \bar{h}_{\#} \circ p_{\#}(\pi_1(S))$. Tendo em vista que $(S, \bar{h} \circ p)$ é um espaço de recobrimento de 2 folhas de $S_{(l,\epsilon)}$, segue que $H = \bar{h}_{\#} \circ p_{\#}(\pi_1(S))$ tem índice 2 em $\pi_1(S_{(l,\epsilon)})$. Considere a involução canônica $\tilde{T} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ associada ao par $(S_{(l,\epsilon)}, H)$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{T} \neq id} & \tilde{S} \\ & \searrow q & \swarrow q \\ & S_{(l,\epsilon)} & \end{array}$$

Temos $q \circ \tilde{T} = q$ e $q_{\#}(\pi_1(\tilde{S})) = H$.

Como $q_{\#}(\pi_1(\tilde{S})) = H = \bar{h}_{\#} \circ p_{\#}(\pi_1(S))$ segue do Corolário 1.2.1 que existe um homeomorfismo $h : S \rightarrow \tilde{S}$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h} & \tilde{S} \\ & \searrow \bar{h} \circ p & \swarrow q \\ & S_{(l,\epsilon)} & \end{array}$$

Agora mostramos que h é equivariante, ou seja, $h(T(x)) = \tilde{T}(h(x))$, $\forall x \in S$.

Tome $x \in S$ e $y = (\bar{h} \circ p)(x) \in S_{(l,\epsilon)}$. Temos $(\bar{h} \circ p)^{-1}(y) = \{x, x_0\}$. Pela comutatividade do diagrama temos:

$$q(h(x)) = (q \circ h)(x) = (\bar{h} \circ p)(x) = y \Rightarrow h(x) \in q^{-1}(y)$$

$$q(h(x_0)) = (q \circ h)(x_0) = (\bar{h} \circ p)(x_0) = y \Rightarrow h(x_0) \in q^{-1}(y)$$

Logo, $q^{-1}(y) = \{h(x), h(x_0)\}$.

Pela Proposição 1.2.4 segue que

$$T_{|_{(\bar{h} \circ p)^{-1}(y)}} : (\bar{h} \circ p)^{-1}(y) \longrightarrow (\bar{h} \circ p)^{-1}(y)$$

e

$$\tilde{T}_{|_{q^{-1}(y)}} : q^{-1}(y) \longrightarrow q^{-1}(y)$$

são automorfismos. Assim,

$$T(\{x, x_0\}) = \{x, x_0\} \xrightarrow{T(x) \neq x} T(x) = x_0 \quad (1)$$

$$\tilde{T}(\{h(x), h(x_0)\}) = \{h(x), h(x_0)\} \xrightarrow{\tilde{T}(h(x)) \neq h(x)} \tilde{T}(h(x)) = h(x_0) \quad (2)$$

De (1) e (2) concluímos que $\tilde{T}(h(x)) = h(T(x))$.

Portanto, T e \tilde{T} são equivalentes. ■

3.2 Existência de aplicações equivariantes

Nesta seção tratamos sobre a existência de alguma aplicação equivariante $g : S \longrightarrow \mathbb{S}^1$. Apresentamos alguns resultados importantes que serão utilizados na demonstração do Teorema 3.0.4 e Teorema 4.0.1.

Lema 3.2.1. *Sejam (X, T) e (\mathbb{S}^1, A) pares, onde X é um espaço topológico, equipado com uma involução livre T e A é a involução antipodal sobre \mathbb{S}^1 . Existe uma aplicação equivariante $g : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$ se, e somente se, a tripla $((X, T); \mathbb{R}^2)$ não satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Demonstração: Suponha que a tripla $((X, T); \mathbb{R}^2)$ não satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam, ou seja, existe uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) \neq f(T(x))$, $\forall x \in X$. Então a aplicação $g(x) = \frac{f(x) - f(T(x))}{\|f(x) - f(T(x))\|}$ é uma aplicação bem definida

em \mathbb{S}^1 que é equivariante com relação à involução antipodal A sobre \mathbb{S}^1 . Para ver que a aplicação é equivariante temos:

$$\begin{aligned} g(T(x)) &= \frac{f(T(x)) - f(T(T(x)))}{\|f(T(x)) - f(T(T(x)))\|} \\ &= \frac{f(T(x)) - f(x)}{\|f(T(x)) - f(x)\|} \\ &= -\frac{f(x) - f(T(x))}{\|f(x) - f(T(x))\|} = -g(x) = A(g(x)). \end{aligned}$$

Reciprocamente, dada uma aplicação equivariante $g : X \rightarrow \mathbb{S}^1$, se compusermos esta aplicação com a inclusão $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtemos uma aplicação contínua $f = i \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(T(x)) \neq f(x), \quad \forall x \in X.$$

Logo, a tripla $((X, T); \mathbb{R}^2)$ não satisfaz a Propriedade de Borsuk-Ulam. ■

A fim de estudar as aplicações equivariantes usaremos o seguinte lema:

Lema 3.2.2. *Sejam (S, T) e (\mathbb{S}^1, A) pares, onde S é uma superfície fechada, equipada com uma involução livre T e A é a involução antipodal sobre \mathbb{S}^1 . Se existe uma aplicação equivariante $g : S \rightarrow \mathbb{S}^1$, então a aplicação induzida sobre os espaços de órbitas $\bar{g} : \frac{S}{T} \rightarrow \frac{\mathbb{S}^1}{A}$ tem a propriedade que o homomorfismo $\bar{g}_\# : \pi_1\left(\frac{S}{T}\right) \rightarrow \pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right)$ induz o homomorfismo identidade $\frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, onde $H = p_\#(\pi_1(S))$ e $p : S \rightarrow \frac{S}{T}$ é a projeção. Reciprocamente, se uma aplicação $\bar{g} : \frac{S}{T} \rightarrow \frac{\mathbb{S}^1}{A}$ é tal que $\bar{g}_\#(H) \subset 2\mathbb{Z}$ e o homomorfismo induzido por $\bar{g}_\#$ sobre o quociente $\frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ é a identidade, então existe uma aplicação equivariante $g : S \rightarrow \mathbb{S}^1$.*

Demonstração: Seja $q : \mathbb{S}^1 \rightarrow \frac{\mathbb{S}^1}{A}$ a projeção. Então (\mathbb{S}^1, q) é um espaço de recobrimento regular de $\frac{\mathbb{S}^1}{A}$. Observemos ainda que este espaço de recobrimento é de duas folhas.

O espaço de órbita $\frac{\mathbb{S}^1}{A}$ é o espaço projetivo $\mathbb{R}P^1$, o qual é homeomorfo a \mathbb{S}^1 , e assim vamos identificar o grupo fundamental de $\frac{\mathbb{S}^1}{A}$ com \mathbb{Z} . Como

$$\mathbb{Z}_2 \simeq \frac{\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right)}{q_\#(\pi_1(\mathbb{S}^1))},$$

então $q_{\#}(\pi_1(\mathbb{S}^1))$ é identificado com $2\mathbb{Z}$.

Se $g : S \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma aplicação equivariante, então o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^1 \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ S & \xrightarrow{\bar{g}} & \mathbb{S}^1 \\ T & \xrightarrow{\bar{g}} & A \end{array}$$

é comutativo.

Pela functorialidade de π_1 , o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S) & \xrightarrow{g_{\#}} & \pi_1(\mathbb{S}^1) \\ p_{\#} \downarrow & & \downarrow q_{\#} \\ \pi_1\left(\frac{S}{T}\right) & \xrightarrow{\bar{g}_{\#}} & \pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right) \end{array}$$

também é comutativo.

Temos:

$$\bar{g}_{\#}(H) = \bar{g}_{\#}(p_{\#}(\pi_1(S))) = q_{\#}(g_{\#}(\pi_1(S))) \subset q_{\#}(\pi_1(\mathbb{S}^1)) = 2\mathbb{Z}.$$

Uma vez que a imagem de H por $\bar{g}_{\#}$ está contida em $2\mathbb{Z}$ temos o homomorfismo induzido sobre os quocientes

$$\mathbb{Z}_2 \simeq \frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

A fim de mostrar que este homomorfismo é a identidade, devemos provar que a classe não nula de $\frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H}$ é levada, pelo homomorfismo, na classe não nula de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

Considere qualquer caminho λ ligando o ponto base $s_0 \in S$ ao ponto $T(s_0) \in S$ (λ não é um laço, pois $T(s_0) \neq s_0$). Temos $p \circ \lambda$ um laço em $\frac{S}{T}$ e afirmamos que $[p \circ \lambda] \notin H$. De fato, se $[p \circ \lambda] \in H = p_{\#}(\pi_1(S))$, então existe um laço β em S tal que $[\beta] \in \pi_1(S)$ e $[p \circ \lambda] = p_{\#}([\beta]) = [p \circ \beta]$. Mas,

$$[p \circ \lambda] = [p \circ \beta] \Rightarrow p \circ \lambda \sim p \circ \beta \xrightarrow{T_{eo.1.2,3}} \lambda \sim \beta \text{ e } \lambda, \beta \text{ têm o mesmo ponto final.}$$

Isso é uma contradição. Logo, $[p \circ \lambda] \notin H$ e $[p \circ \lambda]$ é um representante da classe não nula de $\frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H}$. Vamos mostrar que $\bar{g}_{\#}([p \circ \lambda]) = [\bar{g} \circ p \circ \lambda]$ é um representante da classe não nula de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

A imagem $g \circ \lambda$ é um caminho em \mathbb{S}^1 ligando o ponto base $g(s_0)$ com o ponto $g(T(s_0)) = A(g(s_0)) = -g(s_0)$, seu antipodal. Portanto, sua imagem pela projeção q é um múltiplo ímpar do gerador de $\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right)$, ou seja, $[q \circ g \circ \lambda]$ é um inteiro ímpar sob a identificação de $\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right)$ com \mathbb{Z} .

Temos

$$[q \circ g \circ \lambda] = [\bar{g} \circ p \circ \lambda] = \bar{g}_\#([p \circ \lambda]).$$

Portanto, $\bar{g}_\#([p \circ \lambda])$ é um representante da classe não nula de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ e o resultado segue.

Reciprocamente, considere uma aplicação $\bar{g} : \frac{S}{T} \rightarrow \frac{\mathbb{S}^1}{A}$ tal que $\bar{g}_\#(H) \subset 2\mathbb{Z}$.

$$\bar{g}_\#(H) \subset 2\mathbb{Z} \Leftrightarrow \bar{g}_\#(p_\#(\pi_1(S))) \subset q_\#(\pi_1(\mathbb{S}^1)) \Leftrightarrow (\bar{g} \circ p)_\#(\pi_1(S)) \subset q_\#(\pi_1(\mathbb{S}^1))$$

Pelo Teorema 1.2.5, existe uma aplicação $g : S \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^1 \\ & \nearrow g & \downarrow q \\ S & \xrightarrow{p} \frac{S}{T} & \xrightarrow{\bar{g}} \frac{\mathbb{S}^1}{A} \end{array}$$

Agora, basta mostrarmos que g é equivariante, ou seja, $g(T(x)) = -g(x)$, $\forall x \in S$. Para todo $x \in S$, temos

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{x}) &= \bar{g}(p(x)) = q(g(x)) = \{g(x), -g(x)\} \\ \bar{g}(\overline{T(x)}) &= \bar{g}(p(T(x))) = q(g(T(x))) = \{g(T(x)), -g(T(x))\} \end{aligned}$$

Mas $p(x) = p(T(x))$, então $\{g(x), -g(x)\} = \{g(T(x)), -g(T(x))\}$. Temos duas possibilidades:

- (1) $g(x) = -g(T(x))$
- (2) $g(x) = g(T(x))$

Vamos supor que (2) ocorra para algum $x_0 \in S$. Tome α um caminho em S ligando x_0 a $T(x_0)$ (α é um caminho aberto). A imagem $g \circ \alpha$ é um laço em \mathbb{S}^1 baseado em $g(x_0) = g(T(x_0))$. Daí, $g \circ \alpha \sim c_{g(x_0)}$ ou $g \circ \alpha$ dá pelo menos 1 volta completa em \mathbb{S}^1 . Logo, $q \circ g \circ \alpha$ é homotópico ao caminho constante ou $q \circ g \circ \alpha$ é um múltiplo par do gerador de $\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right)$. Assim, $[q \circ g \circ \alpha]$ é um inteiro par sob a identificação $\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right) \simeq \mathbb{Z}$.

Por outro lado, $[p \circ \alpha] = p_\#([\alpha]) \notin H$, logo, $[p \circ \alpha]$ é um representante da classe não nula de $\frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H}$. Como $\frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ é a identidade, segue que $\bar{g}_\#([p \circ \alpha]) = [\bar{g} \circ p \circ \alpha] = [q \circ g \circ \alpha]$ é um representante da classe não nula de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, o que é uma contradição.

Portanto, $g : S \rightarrow \mathbb{S}^1$ é equivariante. ■

3.3 O teorema principal

Agora temos ferramentas suficientes para detalhar a demonstração do principal resultado deste capítulo:

Teorema 3.0.4. *Seja (S, T) um par, onde S é uma superfície fechada equipada com uma involução livre T . A propriedade de Borsuk-Ulam é válida para $((S, T); \mathbb{R}^2)$ se, e somente se, uma das seguintes condições abaixo é verdadeira:*

(i) S é orientável e sua característica de Euler é congruente a 2 mod 4;

(ii) S é não orientável, sua característica de Euler é congruente a 2 mod 4 e a involução T é equivalente a uma das involuções canônicas que correspondem aos subgrupos dados pelas sequências da forma $(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, onde $\delta_i = \bar{0}$ ou $\bar{1}$ e r é o número de geradores de $\pi_1 \left(\frac{S}{T} \right)$;

(iii) S é não orientável, sua característica de Euler é congruente a 0 mod 4 e a involução T é equivalente a uma das involuções canônicas que correspondem aos subgrupos dados pelas sequências da forma $(\bar{1}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r)$, onde $\delta_i = \bar{0}$ ou $\bar{1}$ e r é o número de geradores de $\pi_1 \left(\frac{S}{T} \right)$.

Demonstração: Vamos supor que uma das condições (i), (ii) ou (iii) seja satisfeita. Analisaremos separadamente os casos mencionados no teorema.

Caso (i)

Se S é orientável e $\chi(S) \equiv 2 \pmod{4}$, ou seja, $\chi(S) = 2 - 4k$ com $k \in \mathbb{N}$, então o espaço de órbitas $\frac{S}{T}$ é uma superfície fechada que tem característica de Euler ímpar, uma vez que $\chi \left(\frac{S}{T} \right) = \frac{\chi(S)}{2} = 1 - 2k$ (Teorema 1.6.2).

Assim, a superfície $\frac{S}{T}$ é unicamente determinada, a menos de homeomorfismo, e seu grupo fundamental tem uma apresentação da forma

$$\langle \alpha, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid \alpha^2 [a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] \rangle .$$

Suponha que exista uma aplicação equivariante $g : S \rightarrow \mathbb{S}^1$ e considere $\bar{g} : \frac{S}{T} \rightarrow \frac{\mathbb{S}^1}{A}$ a aplicação induzida nos espaços de órbitas. Como $\pi_1 \left(\frac{\mathbb{S}^1}{A} \right) \simeq \mathbb{Z}$ é abeliano, livre de

torção e $\bar{g}_\#(\alpha^2 \cdot [a_1, b_1] \dots [a_n, b_n]) = 0$, segue que $2 \cdot \bar{g}_\#(\alpha) = 0$, o que implica $\bar{g}_\#(\alpha) = 0$. Mas α é a classe de um laço que reverte orientação, e assim não pertence ao subgrupo $p_\#(\pi_1(S)) \simeq \pi_1(S)$, onde $p : S \rightarrow \frac{S}{T}$ é a projeção. Do Lema 3.2.2, a imagem de α não é trivial (na verdade é um número ímpar), o que é uma contradição. Portanto não existe aplicação equivariante de S em \mathbb{S}^1 e o resultado segue do Lema 3.2.1.

Caso (ii)

Agora, seja S uma superfície não orientável com $\chi(S) \equiv 2 \pmod{4}$. O espaço de órbitas é necessariamente uma superfície não orientável e como no caso (i) o seu grupo fundamental tem a seguinte apresentação:

$$\langle \alpha, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid \alpha^2 [a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] \rangle .$$

Vamos supor que $((S, T); \mathbb{R}^2)$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam, ou seja, existe uma aplicação $g : S \rightarrow \mathbb{S}^1$ equivariante. Assim $\bar{g}_\#(\alpha) = 0$, como no caso (i).

Por outro lado, pelo Lema 3.2.2 temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1\left(\frac{S}{T}\right) & \xrightarrow{\bar{g}_\#} & \pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H} & \xrightarrow{id} & \frac{\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right)}{q_\#(\pi_1(\mathbb{S}^1))} \end{array}$$

Identificando os grupos $\frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H}$ e $\frac{\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right)}{q_\#(\pi_1(\mathbb{S}^1))}$ com \mathbb{Z}_2 , temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1\left(\frac{S}{T}\right) & \xrightarrow{\bar{g}_\#} & \pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right) \\ \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\ & \mathbb{Z}_2 & \end{array}$$

Por hipótese, $\varphi(\alpha) = \bar{1}$, pois T é equivalente a uma ação canônica que corresponde ao subgrupo dado pela sequência $(\bar{1}, \delta_2, \dots, \delta_r)$. Daí,

$$\bar{1} = \varphi(\alpha) = (\psi \circ \bar{g}_\#)(\alpha) = \psi(0) = \bar{0},$$

o que é um absurdo.

Portanto, $((S, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.

Caso (iii)

Se S é não orientável e $\chi(S) \equiv 0 \pmod{4}$, ou seja, $\chi(S) = -4k$ com $k \in \mathbb{N}$, então o espaço de órbitas $\frac{S}{T}$ é necessariamente uma superfície fechada não orientável e $\chi\left(\frac{S}{T}\right) = \frac{\chi(S)}{2} = -2k$ (Teorema 1.6.2).

Assim, a superfície $\frac{S}{T}$ é unicamente determinada, a menos de homeomorfismo, e seu grupo fundamental tem uma apresentação

$$\langle \alpha, \beta, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid (\alpha\beta\alpha\beta^{-1})[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] \rangle .$$

Aplicando o mesmo argumento utilizado no caso (ii) o resultado segue.

Reciprocamente, suponha que a propriedade de Borsuk-Ulam é válida para $((S, T); \mathbb{R}^2)$. Devemos provar que uma das condições mencionadas no teorema é satisfeita. Para isto, provaremos a contrarrecíproca desta implicação.

Vamos considerar uma involução (S, T) que não é equivalente a uma das involuções (i), (ii) e (iii). Pelo Teorema 1.6.3 desprezamos as superfícies fechadas com característica de Euler ímpar. Assim, temos os seguintes casos:

- (a) S é orientável, $\chi(S) \equiv 0 \pmod{4}$ e a involução reverte orientação;
- (b) S é orientável, $\chi(S) \equiv 0 \pmod{4}$ e a involução preserva orientação;
- (c) S é não orientável, $\chi(S) \equiv 2 \pmod{4}$ e a involução é caracterizada por uma sequência da forma $(\bar{0}, \delta_2, \dots, \delta_r)$, onde δ_i é $\bar{1}$ ou $\bar{0}$ e $\delta_i \neq \bar{0}$ para pelo menos um valor de i ;
- (d) S é não orientável, $\chi(S) \equiv 0 \pmod{4}$ e a involução é caracterizada por uma sequência da forma $(\bar{0}, \delta_2, \dots, \delta_r)$, onde δ_i é $\bar{1}$ ou $\bar{0}$ e $\delta_i \neq \bar{0}$ para pelo menos um valor de i .

Sejam $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ um sistema canônico de geradores de $\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)$ e $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$ a sequência associada ao subgrupo $H = p_{\#}(\pi_1(S))$. Vamos provar que existe um homomorfismo

$$\phi : \pi_1\left(\frac{S}{T}\right) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

De fato. No caso (a), a superfície $\frac{S}{T}$ é unicamente determinada, a menos de homeomorfismo, e seu grupo fundamental tem uma apresentação

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{r-1}, a_r \mid (a_1 a_2 a_1 a_2^{-1})[a_3, a_4] \dots [a_{r-1}, a_r] \rangle.$$

Como S é orientável e a_1 é a classe de um laço que reverte orientação, então $a_1 \notin H = p_{\#}(\pi_1(S))$. Daí, a imagem de a_1 pelo homomorfismo não trivial

$$\pi_1\left(\frac{S}{T}\right) \longrightarrow \frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H} \simeq \mathbb{Z}_2$$

é $\bar{1}$. Assim, $\delta_1 = \bar{1}$.

Definamos uma aplicação $f : \{a_1, \dots, a_r\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ da seguinte maneira:

$$f(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } \delta_i = \bar{0} \\ 0, & \text{se } \delta_i = \bar{1} \end{cases}$$

Neste caso a aplicação f pode ser estendida a um homomorfismo $\phi : \pi_1 \left(\frac{S}{T} \right) \longrightarrow \mathbb{Z} \simeq \pi_1 \left(\frac{\mathbb{S}^1}{A} \right)$, pois se R é a relação que define $\pi_1 \left(\frac{S}{T} \right)$, então

$$\begin{aligned} \phi(R) &= \phi((a_1 a_2 a_1 a_2^{-1}) [a_3, a_4] \dots [a_{r-1}, a_r]) \\ &= \phi(a_1) + \phi(a_2) + \phi(a_1) - \phi(a_2) + \phi(a_3) + \phi(a_4) - \phi(a_3) - \phi(a_4) + \dots - \phi(a_r) \\ &= 2 \cdot \phi(a_1) \\ &= 2 \cdot f(a_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para os demais casos (b), (c) e (d) definimos $f : \{a_1, \dots, a_r\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ da seguinte forma

$$f(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } \delta_i = \bar{1} \\ 0, & \text{se } \delta_i = \bar{0} \end{cases}$$

Esta aplicação também se estende a um homomorfismo ϕ , pois no caso (b), como $\frac{S}{T}$ é orientável a relação R que define $\pi_1 \left(\frac{S}{T} \right)$ é um produto de comutadores e assim, $\phi(R) = 0$. Nos casos (c) e (d), como $\frac{S}{T}$ é não orientável a relação R que define o grupo contém o fator a_1^2 ou $a_1 a_2 a_1 a_2^{-1}$, que para ser levada a zero, obrigatoriamente devemos ter $\phi(a_1) = 0$. Mas em (c) e (d) temos a hipótese $\delta_1 = \bar{0}$.

Em todos os quatro casos existe um elemento do sistema canônico de geradores que é levado em 1, pois de acordo com a Proposição 3.1.3 as sequências não são constantes. Assim, se fizermos a composição de ϕ com a projeção $\eta : \mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ obtemos um homomorfismo não trivial $\eta \circ \phi : \pi_1 \left(\frac{S}{T} \right) \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2$. Pela Proposição 3.1.1, existe $\ker(\eta \circ \phi)$, o único subgrupo de índice 2 de $\pi_1 \left(\frac{S}{T} \right)$ associado a $\eta \circ \phi$. Temos então, as seguintes correspondências:

$$H = p_{\#}(\pi_1(S)) \longleftrightarrow (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) \longleftrightarrow \eta \circ \phi \longleftrightarrow \ker(\eta \circ \phi)$$

Daí, $H = \ker(\eta \circ \phi)$, ou seja, $\phi(H) \subset \ker(\eta) = 2\mathbb{Z}$.

Pela Proposição 1.7.2 o homomorfismo ϕ é induzido por uma aplicação $\bar{g} : \frac{S}{T} \longrightarrow \frac{\mathbb{S}^1}{A}$, onde $\bar{g}_{\#} = \phi$. Como $\phi(H) = \bar{g}_{\#}(H) \subset 2\mathbb{Z}$, temos o homomorfismo induzido $\bar{\phi}$ que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1\left(\frac{S}{T}\right) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right) \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
\frac{\pi_1\left(\frac{S}{T}\right)}{H} & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \frac{\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right)}{2\mathbb{Z}}
\end{array}$$

Sendo $\psi \circ \phi$ um homomorfismo não trivial, então $\bar{\phi} \circ \varphi$ é não trivial. Logo, $\bar{\phi}$ é não trivial, ou seja, é a identidade. Portanto, pelo Lema 3.2.2, existe uma aplicação equivariante $g : S \rightarrow \mathbb{S}^1$, o que implica a invalidade da propriedade de Borsuk-Ulam para $((S, T); \mathbb{R}^2)$.

■

Outras generalizações do teorema de Borsuk-Ulam

Neste capítulo apresentamos outra generalização do teorema de Borsuk-Ulam dada por Desideri, Pergher e Ventrúsculo em [3]. Nesse artigo os autores substituem a esfera n -dimensional e a involução antipodal por um espaço topológico qualquer equipado com uma involução livre.

Seja X um espaço de Hausdorff conexo por caminhos, equipado com uma involução livre $T : X \rightarrow X$. Seja $\frac{X}{T}$ o espaço de órbitas de X por T e $p : X \rightarrow \frac{X}{T}$ a aplicação quociente. Tome um ponto $a \in X$ e considere o homomorfismo induzido nos grupos fundamentais $p_{\#} : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right)$, onde $\bar{a} = p(a)$. Denote por $h_X : \pi_1(X, a) \rightarrow H_1(X)$ o homomorfismo de Hurewicz, onde $H_1(X)$ é o \mathbb{Z} -grupo de homologia 1-dimensional de X . Nestas condições temos o seguinte teorema:

Teorema 4.0.1. *Se existe $[\beta] \in G = \pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) - p_{\#}(\pi_1(X, a))$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\beta])$ é um elemento de torção em $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, então $((X, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que $((X, T); \mathbb{R}^2)$ não satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam, ou seja, existe uma aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $f(x) \neq f(T(x))$ para todo $x \in X$. Então, pelo Lema 3.2.1, existe uma aplicação equivariante $F : X \rightarrow \mathbb{S}^1$, isto é, satisfazendo $F(T(x)) = -F(x)$, para todo $x \in X$.

Considere $q : \mathbb{S}^1 \rightarrow \frac{\mathbb{S}^1}{A}$ a aplicação quociente. Como F é equivariante, ela induz

uma aplicação contínua $\bar{F} : \frac{X}{T} \longrightarrow \frac{\mathbb{S}^1}{A}$ de modo que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & \mathbb{S}^1 \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \frac{X}{T} & \xrightarrow{\bar{F}} & \frac{\mathbb{S}^1}{A} \end{array}$$

é comutativo. Seja $z = F(a)$. Então $q(z) = \bar{z} = \bar{F}(\bar{a})$. Tome $[\beta] \in G$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\beta])$ é um elemento de torção em $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$ e considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) & \xrightarrow{\bar{F}_\#} & \pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}, \bar{z}\right) \\ h_{\frac{X}{T}} \downarrow & & \simeq \downarrow h_{\frac{\mathbb{S}^1}{A}} \\ H_1\left(\frac{X}{T}\right) & \xrightarrow{\bar{F}_*} & H_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right) \end{array}$$

Então $\bar{F}_*(h_{\frac{X}{T}}([\beta]))$ é um elemento de torção em $H_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}\right) \simeq \mathbb{Z}$, o que significa $\bar{F}_*(h_{\frac{X}{T}}([\beta])) = 0$.

Seja β um laço em $\frac{X}{T}$ com ponto base \bar{a} e $p : X \longrightarrow \frac{X}{T}$ um recobrimento com $p(a) = \bar{a}$, existe um único levantamento $\tilde{\beta} : [0, 1] \longrightarrow X$ tal que $\tilde{\beta}(0) = a$. Observemos que $\tilde{\beta}(1) = a$ ou $\tilde{\beta}(1) = T(a)$.

Se $\tilde{\beta}(1) = a$, então $[\tilde{\beta}] \in \pi_1(X, a)$, e portanto,

$$[\beta] = [p \circ \tilde{\beta}] = p_\#([\tilde{\beta}]) \in p_\#(\pi_1(X, a)),$$

o que contradiz a hipótese. Logo, $\tilde{\beta}(1) = T(a)$. Já que F é equivariante, o caminho $F \circ \tilde{\beta} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ satisfaz

$$(F \circ \tilde{\beta})(0) = F(a) = z \quad \text{e} \quad (F \circ \tilde{\beta})(1) = F(T(a)) = -F(a) = -z.$$

Vamos escolher um gerador $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, z) \simeq \mathbb{Z}$ e um caminho $\mu : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ com ponto inicial z e ponto final $-z$ (semicircunferência), de modo que $[q \circ \mu]$ seja um gerador de $\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}, \bar{z}\right) \simeq \mathbb{Z}$. Por conveniência vamos denotar aditivamente os grupos $\pi_1(\mathbb{S}^1, z)$ e $\pi_1\left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}, \bar{z}\right)$.

Temos

$$q_\#([\alpha]) = [q \circ \alpha] = [(q \circ \mu) * (q \circ \mu)] = [q \circ \mu] + [q \circ \mu] = 2[q \circ \mu] \quad (4.1)$$

Afirmação: $[q \circ (F \circ \tilde{\beta})]$ representa um elemento ímpar em $\pi_1 \left(\frac{\mathbb{S}^1}{A}, \bar{z} \right) \simeq \mathbb{Z}$.

De fato. Para verificarmos essa afirmação consideramos

$$F \circ \tilde{\beta} * \mu^{-1} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

a justaposição de $F \circ \tilde{\beta}$ e μ^{-1} . A classe $[F \circ \tilde{\beta} * \mu^{-1}]$ é um elemento de $\pi_1(\mathbb{S}^1, z)$, pois

$$(F \circ \tilde{\beta} * \mu^{-1})(0) = (F \circ \tilde{\beta})(0) = z = \mu^{-1}(1) = (F \circ \tilde{\beta} * \mu^{-1})(1)$$

Assim,

$$[F \circ \tilde{\beta} * \mu^{-1}] = r[\alpha], \quad \text{para algum } r \in \mathbb{Z}.$$

$$q_{\#}([F \circ \tilde{\beta} * \mu^{-1}]) = q_{\#}(r[\alpha]) = r q_{\#}([\alpha]) \stackrel{4.1}{=} 2r[q \circ \mu].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} q_{\#}([F \circ \tilde{\beta} * \mu^{-1}]) &= [q \circ (F \circ \tilde{\beta} * \mu^{-1})] \\ &= [(q \circ (F \circ \tilde{\beta})) * (q \circ \mu^{-1})] \\ &= [q \circ (F \circ \tilde{\beta})] + [q \circ \mu^{-1}] \\ &= [q \circ (F \circ \tilde{\beta})] - [q \circ \mu]. \end{aligned}$$

Logo,

$$[q \circ (F \circ \tilde{\beta})] - [q \circ \mu] = 2r[q \circ \mu] \Rightarrow [q \circ (F \circ \tilde{\beta})] = (2r + 1)[q \circ \mu]$$

Assim, $[q \circ (F \circ \tilde{\beta})] \neq 0$ e como $h_{\frac{\mathbb{S}^1}{A}}$ é isomorfismo, segue que $h_{\frac{\mathbb{S}^1}{A}}([q \circ (F \circ \tilde{\beta})]) \neq 0$.

Mas

$$0 = \bar{F}_*(h_{\frac{X}{T}}([\beta])) = h_{\frac{\mathbb{S}^1}{A}}(\bar{F}_{\#}([\beta])) = h_{\frac{\mathbb{S}^1}{A}}([\bar{F} \circ \beta]) = h_{\frac{\mathbb{S}^1}{A}}([\bar{F} \circ p \circ \tilde{\beta}]) = h_{\frac{\mathbb{S}^1}{A}}([q \circ F \circ \tilde{\beta}]) \neq 0,$$

que é um absurdo.

Portanto, $((X, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam. ■

Corolário 4.0.1. *Seja X um espaço de Hausdorff conexo por caminhos e $T : X \longrightarrow X$ uma involução livre. Se o grupo fundamental de X é um grupo de torção (que inclui o caso em que $X = \mathbb{S}^2$), então $((X, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Demonstração: Escolhemos um ponto base $a \in X$ e tomamos a aplicação quociente $p : X \longrightarrow \frac{X}{T}$. Seja $\bar{a} = p(a)$. Tem-se que p é um recobrimento de 2 folhas, com $\{id, T\}$ sendo o grupo de transformações de recobrimento de p . Deste modo, temos o isomorfismo

$$\frac{\pi_1 \left(\frac{X}{T}, \bar{a} \right)}{p_{\#}(\pi_1(X, a))} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Isto significa que $p_{\#}(\pi_1(X, a))$ é um subgrupo de $\pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right)$ de índice 2. Se $[\beta] \in G = \pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) - p_{\#}(\pi_1(X, a))$, então $[\bar{\beta}] \neq \bar{0}$. Daí,

$$[\bar{\beta}]^2 = \bar{0} \Rightarrow [\bar{\beta}]^2 = \bar{0} \Rightarrow [\beta]^2 \in p_{\#}(\pi_1(X, a)).$$

O fato que $\pi_1(X, a)$ é um grupo de torção implica que $p_{\#}(\pi_1(X, a))$ também é um grupo de torção. Logo, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $([\beta]^2)^n = 0$. Mas

$$([\beta]^2)^n = 0 \Rightarrow [\beta]^{2n} = 0 \Rightarrow [\beta] \text{ é um elemento de torção}$$

Assim, existe $[\beta] \in G$ tal que $h_{\frac{X}{T}}([\beta])$ é um elemento de torção em $H_1\left(\frac{X}{T}\right)$, onde $h_{\frac{X}{T}} : \pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{a}\right) \rightarrow H_1\left(\frac{X}{T}\right)$ é o homomorfismo de Hurewicz. Portanto, segue do Teorema 4.0.1 que $((X, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam. ■

Corolário 4.0.2. *Sejam X e Y espaços de Hausdorff conexos por caminhos, $T : X \rightarrow X$ uma involução livre e $S : Y \rightarrow Y$ uma involução. Se $\pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{x}_0\right) - p_{1\#}(\pi_1(X, x_0))$ possui um elemento de torção, sendo $p_{1\#}$ o homomorfismo induzido da aplicação quociente $p_1 : X \rightarrow \frac{X}{T}$, então $((X \times Y, T \times S); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam, onde $T \times S : X \times Y \rightarrow X \times Y$ é a involução produto definida por $(T \times S)(x, y) = (T(x), S(x))$.*

Demonstração: Se T não possui pontos fixos, então

$$(T \times S)(x, y) = (T(x), S(x)) \neq (x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Assim, $T \times S$ é uma involução sem pontos fixos.

Consideremos as aplicações quociente $p_2 : Y \rightarrow \frac{Y}{S}$ e $p : X \times Y \rightarrow \frac{X \times Y}{T \times S}$ e seja $f : X \times Y \rightarrow \frac{X}{T} \times \frac{Y}{S}$ a função definida por:

$$f(x, y) = (p_1(x), p_2(y)) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Observemos que f é contínua, sobrejetora e constante nas classes de equivalência determinadas por $T \times S$, ou seja, $f(x, y) = f(T(x), S(y))$, para qualquer $(x, y) \in X \times Y$. Logo, f induz uma função contínua e bijetora $\bar{f} : \frac{X \times Y}{T \times S} \rightarrow \frac{X}{T} \times \frac{Y}{S}$ dada por $\bar{f}(\overline{(x, y)}) =$

$f(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$, de modo que o diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{f} & \frac{X}{T} \times \frac{Y}{S} \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \frac{X \times Y}{T \times S} & & \end{array}$$

Afirmção 1: \bar{f} é uma aplicação aberta.

De fato. Se \bar{V} é um aberto básico em $\frac{X \times Y}{T \times S}$, então $p^{-1}(\bar{V})$ é aberto em $X \times Y$. Daí, $p^{-1}(\bar{V}) = \bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i)$, onde A_i e B_i são abertos de X e Y , respectivamente. Como p é sobrejetora, $\bar{V} = p(p^{-1}(\bar{V})) = p\left(\bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i)\right) = \bigcup_{i \in I} p(A_i \times B_i) = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i \times B_i}$. Assim,

$$\bar{f}(\bar{V}) = \bar{f}\left(\bigcup_{i \in I} \overline{A_i \times B_i}\right) = \bigcup_{i \in I} \bar{f}(\overline{A_i \times B_i}) = \bigcup_{i \in I} (p_1(A_i) \times p_2(B_i)),$$

que é um aberto de $\frac{X}{T} \times \frac{Y}{S}$.

Logo, \bar{f} é contínua, bijetora, e aberta, e assim é um homeomorfismo, que induz o isomorfismo

$$\bar{f}_{\#} : \pi_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}, \overline{(x_0, y_0)}\right) \longrightarrow \pi_1\left(\frac{X}{T} \times \frac{Y}{S}, \overline{(x_0, y_0)}\right).$$

Por outro lado, pela demonstração do Teorema 60.1. em [11], a aplicação

$$g : \pi_1\left(\frac{X}{T} \times \frac{Y}{S}, \overline{(x_0, y_0)}\right) \longrightarrow \pi_1\left(\frac{X}{T}, \overline{x_0}\right) \times \pi_1\left(\frac{Y}{S}, \overline{y_0}\right)$$

definida por $g([\gamma]) = ([q_1 \circ \gamma], [q_2 \circ \gamma])$, onde $q_1 : \frac{X}{T} \times \frac{Y}{S} \longrightarrow \frac{X}{T}$ e $q_2 : \frac{X}{T} \times \frac{Y}{S} \longrightarrow \frac{Y}{S}$ são projeções, também é um isomorfismo.

Deste modo temos o isomorfismo

$$h = g \circ \bar{f}_{\#} : \pi_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}, \overline{(x_0, y_0)}\right) \longrightarrow \pi_1\left(\frac{X}{T}, \overline{x_0}\right) \times \pi_1\left(\frac{Y}{S}, \overline{y_0}\right),$$

definido por

$$h([\bar{\alpha}]) = (g \circ \bar{f}_{\#})([\bar{\alpha}]) = g([\bar{f} \circ \bar{\alpha}]) = g([f \circ \alpha]) = g([\overline{(\alpha_1, \alpha_2)}]) = ([\overline{\alpha_1}], [\overline{\alpha_2}]),$$

onde α_1 e α_2 são as funções coordenadas de $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X \times Y$, $\bar{\alpha} = p \circ \alpha$, $\overline{\alpha_1} = p_1 \circ \alpha_1$ e $\overline{\alpha_2} = p_2 \circ \alpha_2$.

Seja $[\bar{\lambda}] \in \pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{x}_0\right) - p_{1\#}(\pi_1(X, x_0))$ um elemento de torção. Então $([\bar{\lambda}], [c_{\bar{y}_0}]) \in \pi_1\left(\frac{X}{T}, \bar{x}_0\right) \times \pi_1\left(\frac{Y}{S}, \bar{y}_0\right)$ também é um elemento de torção, onde $c_{\bar{y}_0}$ é o caminho constante.

Como h é um isomorfismo, existe $[\bar{\beta}] \in \pi_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}, \overline{(x_0, y_0)}\right)$ um elemento de torção tal que

$$h([\bar{\beta}]) = ([\bar{\lambda}], [c_{\bar{y}_0}]) \quad (4.2)$$

Afirmção 2: $[\bar{\beta}] \notin p_{\#}(\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)))$.

De fato. Se $[\bar{\beta}] \in p_{\#}(\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)))$, então existe $[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ tal que

$$p_{\#}([\alpha]) = [p \circ \alpha] = [\bar{\beta}] \quad (4.3)$$

Daí,

$$([\bar{\lambda}], [c_{\bar{y}_0}]) \stackrel{4.2}{=} h([\bar{\beta}]) \stackrel{4.3}{=} h([p \circ \alpha]) = h([\bar{\alpha}]) = ([p_1 \circ \alpha_1], [p_2 \circ \alpha_2]).$$

Mas,

$$[p_1 \circ \alpha_1] = [\bar{\lambda}] \Rightarrow p_{1\#}([\alpha_1]) = [\bar{\lambda}] \Rightarrow [\bar{\lambda}] \in p_{1\#}(\pi_1(X, x_0)),$$

o que é um absurdo.

Assim, existe um elemento

$$[\bar{\beta}] \in \pi_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}, \overline{(x_0, y_0)}\right) - p_{\#}(\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)))$$

tal que $h_{\frac{X \times Y}{T \times S}}([\bar{\beta}])$ é um elemento de torção, onde

$$h_{\frac{X \times Y}{T \times S}} : \pi_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}, \overline{(x_0, y_0)}\right) \longrightarrow H_1\left(\frac{X \times Y}{T \times S}\right)$$

é o homomorfismo de Hurewicz.

Portanto, pelo Teorema 4.0.1, $((X \times Y, T \times S); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam. ■

O resultado a seguir mostra uma relação entre os teoremas principais dos capítulos 3 e 4. Parte do Teorema 3.0.4 segue como corolário do Teorema 4.0.1.

Corolário 4.0.3. *Sejam S uma superfície orientável fechada com característica de Euler congruente a 2 mod 4, e T uma involução livre sobre S . Então $((S, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Demonstração: Se S é orientável e $\chi(S) \equiv 2 \pmod{4}$, então $\frac{S}{T}$ é uma superfície fechada cuja característica de Euler é ímpar. Assim, $\frac{S}{T}$ é unicamente determinada, a menos de homeomorfismo, e seu grupo fundamental é da forma

$$\langle \alpha, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid \alpha^2[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n] \rangle.$$

Como α é a classe de um laço β que reverte orientação, então $\alpha \in \pi_1\left(\frac{S}{T}\right) - p_{\#}(\pi_1(S))$, onde $p : S \rightarrow \frac{S}{T}$ é a projeção.

Seja $h_{\frac{S}{T}} : \pi_1\left(\frac{S}{T}\right) \rightarrow H_1\left(\frac{S}{T}\right)$ o homomorfismo de Hurewicz. Temos:

$$0 = h_{\frac{S}{T}}(\alpha^2[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n]) = 2 \cdot h_{\frac{S}{T}}(\alpha) + \dots + h_{\frac{S}{T}}(a_n) + h_{\frac{S}{T}}(b_n) - h_{\frac{S}{T}}(a_n) - h_{\frac{S}{T}}(b_n) = 2 \cdot h_{\frac{S}{T}}(\alpha)$$

Assim, $h_{\frac{S}{T}}([\beta])$ é um elemento de torção em $H_1\left(\frac{S}{T}\right)$. Portanto, pelo Teorema 4.0.1, $((S, T); \mathbb{R}^2)$ satisfaz a propriedade de Borsuk-Ulam. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] BIASI, C.; MATTOS, D.; SANTOS, E. L. A Borsuk-Ulam theorem for maps from a sphere to a generalized manifold, *Geometriae Dedicata*, 107, p. 101-110, 2004.
- [2] BORSUK, K. Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, 20, p. 177-190, 1933.
- [3] DESIDERI, P. E.; PERGHER, P. L. Q.; VENDRÚSCULO, D. Some generalizations of the Borsuk-Ulam theorem. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 78, p. 583-593, 2011.
- [4] DESIDERE, P. E. *Um teorema tipo Borsuk-Ulam para espaços topológicos gerais em termos do grupo fundamental*. 64f. Dissertação(Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2008.
- [5] GALVES, A. P. T. *O Teorema de Lefschetz-Hopf e sua relação com outros teoremas clássicos da topologia*. 106f. Dissertação(Mestrado) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. UNESP. São José do Rio Preto, 2009.
- [6] GONÇALVES, D. L. The Borsuk-Ulam theorem for surfaces, *Quaestiones Mathematicae*, 29, p. 117-123, 2006.
- [7] GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface, *Topology and its Applications*, 157, p. 1742-1759, 2010.
- [8] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [9] MATTOS, D.; PERGHER, P. L. Q.; SANTOS, E. L., The Borsuk-Ulam theorem for general spaces, *Arch. Math. (Basel)*, 81, p. 96-102, 2003.
- [10] MASSEY, W. S. *Algebraic topology: an introduction*. Springer-Verlag, 1967.
- [11] MUNKRES, J. R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [12] MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley, 1984.
- [13] SINGH, M. A simple proof of the Borsuk-Ulam theorem for \mathbb{Z}_p -actions, *Topology Proceedings*, 36, p. 249-253, 2010.
- [14] ZIESCHANG, H.; VOGT, E.; COLDEWEY, H. D. *Surfaces and planar discontinuous groups*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1980.

ÍNDICE

- Índice de Kronecker, 17
- Órbita, 4
- Ação, 3
 - livre, 4
 - propriamente descontínua, 4
 - transitiva, 4
- Anel de cohomologia, 14
- Anticomutatividade, 15
- Aplicação
 - G -equivariante, 4
 - aumentação, 11
 - característica, 22
 - de Kronecker, 17
- Célula, 22
 - aberta, 22
- Característica de Euler de uma superfície, 20
- Classe de orientação, 18
- Complexo de cadeia
 - reduzido, 11
 - singular, 11
- CW-complexo, 22
- Espaço de órbitas, 4
- Espaço de recobrimento, 4
 - regular, 8
 - universal, 8
- Face de um simplexo, 9
- G -espaço homogêneo, 4
- Genus de uma superfície, 21
- Grupo de cadeia singular, 10
- Grupo de homologia singular, 11
- Homomorfismo
 - de espaços de recobrimento, 6
 - dual, 12
- Involuções
 - canônicas, 42
 - equivalentes, 41
 - sem pontos fixos, 8
- $K(G,1)$ -complexo, 23
- Levantamento
 - de aplicações, 6
 - de caminho, 5
 - de homotopia, 5
- Número de folhas de um recobrimento, 6
- Operador bordo, 10
- Produto
 - cap, 16
 - cup, 14
 - tensorial, 15
- Projeção de recobrimento, 4
- Propriedade de Borsuk-Ulam, 33
- Simplexo, 9
 - padrão, 9
 - singular, 10
 - singular linear, 10
- Sistema canônico de geradores, 34
- Subcomplexo, 22
- Subgrupo de isotropia, 4
- superfície, 18
- Transformação de recobrimento, 7
- Variedade, 18
- Vizinhança elementar, 4