



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de São José do Rio Preto

Everaldo Rodrigues Nunes

A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como  
elemento motivador da aprendizagem

São José do Rio Preto  
2014

Everaldo Rodrigues Nunes

A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – ensino de matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita.

São José do Rio Preto  
2014

Nunes, Everaldo Rodrigues.

A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem / Everaldo Rodrigues Nunes. – São José do Rio Preto, 2014.

79 f.: il.

Orientador: Vanderlei Minori Horita

Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Triângulo – Estudo e ensino. 3. Séries geométricas. 4. Bell, Alexander Graham, 1847-1922. 5. Matemática – Metodologia. I. Horita, Vanderlei Minori. II. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.1(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Everaldo Rodrigues Nunes

A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como  
elemento motivador da aprendizagem

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – ensino de matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita  
UNESP – São José do Rio Preto  
Orientador

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira  
UFPB – João Pessoa

Prof. Dr. João Carlos Ferreira da Costa  
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto  
29 de agosto de 2014

*“O conhecimento é o processo pelo qual o pensamento se aproxima infinita e eternamente do objeto.”*

Vladimir Ilyich Lenin.

## RESUMO

O ponto chave deste trabalho é o aprendizado da matemática na sua forma mais prazerosa, com seus encantos que explicam muito daquilo que os alunos gostariam que fosse justificado sobre o seu cotidiano. Porém não deixará de ser analisada a importância da transmissão do conhecimento científico, cujo prazer normalmente é diminuído, pois o aluno necessita dessa bagagem do saber produzido socialmente para se elevar culturalmente, proporcionando-lhe enriquecimento intelectual. A pipa tetraédrica de Graham Bell será o elemento motivador para o estudo de alguns tópicos da matemática do ensino médio, a saber: progressões geométricas, semelhança de triângulos e pirâmides.

Palavras-chave: Pipa tetraédrica de Graham Bell. Progressões geométricas. Semelhança de triângulos.

## **ABSTRACT**

The key point of this work is the mathematics in its more pleasant way, with its charms that explain much of what students would like to see justified on their daily lives. It is also considered the relevance of the transmission of scientific knowledge, whose pleasure is usually reduced because the student needs the previous knowledge socially produced to raise oneself culturally, providing to the student with intellectual enrichment. The Graham Bell tetrahedral kite is the motivating factor to study some topics of mathematics in high school, namely geometric progressions, similar triangles and pyramids.

**Keywords:** The Graham Bell tetrahedral kite. Geometric progressions. Similar triangles.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS</b>	<b>9</b>
2.1	Sequências numéricas	9
2.2	Introdução às séries numéricas	16
2.3	Uma sequência e uma série especiais: progressão geométrica e série geométrica	17
<b>3</b>	<b>USO DA PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL NA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO: ESTUDO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>USO DA PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO: ESTUDO DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS</b>	<b>28</b>
4.1	Conceitos iniciais: semelhança de triângulos	28
4.2	Uso da pipa tetraédrica de Graham Bell no estudo da semelhança de triângulos	33
<b>5</b>	<b>USO DA PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL NA TERCEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO: ESTUDO DOS TETRAEDROS</b>	<b>41</b>
5.1	Conceitos iniciais: peso e volume de um tetraedro regular	41
5.2	Uso da pipa tetraédrica de Graham Bell no estudo dos tetraedros regulares	42
<b>6</b>	<b>ANÁLISE FILOSÓFICA DA EDUCAÇÃO ESCOLAR COMO MEDIADORA ENTRE O COTIDIANO (SENSO COMUM) E NÃO-COTIDIANO (CONHECIMENTO OBJETIVO): OS CAMINHOS EM PIAGET E EM VIGOTSKI</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>TRABALHO DE CAMPO: O PROFESSOR REFLEXIVO-CRÍTICO E A CONTRUÇÃO DA PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL</b>	<b>52</b>
<b>8</b>	<b>PESQUISA DO REAL INTERESSE DE ALEXANDER GRAHAM BELL EM CRIAR UMA PIPA DIFERENTE</b>	<b>56</b>
<b>9</b>	<b>PESQUISA SOBRE FRACTAIS</b>	<b>59</b>
9.1	Geometria dos fractais	59
9.2	Triângulo de Sierpinski	61
9.3	Pirâmide de Sierpinski	62
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>66</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>68</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>76</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar alternativas para tornar a aula de Matemática da educação básica atrativa ao aluno. Conhecer o interesse do aluno e relacioná-lo com o conhecimento elaborado para ganhar sua atração no ensino médio é primordial aqui. Através do interesse inicial do aluno, suscitar nele outros interesses (aprofundamentos) sobre o conhecimento. Mostrar que o aprofundamento o ajudará olhar o mundo com uma visão cultural superior: crítica ou multifocal. Além da experiência do autor dessa dissertação como professor de matemática no ensino médio e da orientação do prof. Dr. Vanderlei Minori Horita que inspiraram este trabalho, foi feita uma pesquisa em cima das pedagogias de Newton Duarte e Dermeval Saviani e das psicologias de Piaget e Vigotski, para que caminhos sejam apontados no sentido de valorizar o conhecimento do aluno e privilegiar o saber objetivo construído histórico e socialmente pela humanidade.

Nesta perspectiva, a pipa — elemento presente no cotidiano dos alunos da Escola Estadual Presidente Tancredo Neves de Aparecida de Minas, município de Frutal, Minas Gerais — foi resgatada para auxiliar no ensino de alguns tópicos das três séries do ensino médio. Uma pipa diferente das conhecidas pelos alunos dessa escola, a *Pipa Tetraédrica de Graham Bell*, foi escolhida para despertar ainda mais o interesse dos mesmos, além do fato de que esta pipa auxilia melhor nos temas a serem tratados neste projeto. Aqui fica claro que o objetivo deste projeto não se resume em trabalhar o cotidiano do aluno, somente; como se nada mais pudesse ser acrescentado no conhecimento do aluno a respeito da pipa. Segundo Vigotski, em DUARTE (2007, p. 97), “ensinar a uma criança aquilo que é incapaz de aprender é tão inútil como ensinar-lhe a fazer o que é capaz de realizar por si mesma”. Dentre os vários papéis acolhidos pela educação escolar de hoje como a educação moral e o comportamento social dos alunos, a escola é a única entidade responsável pela transmissão do conhecimento científico (ou objetivo, ou elaborado). “A psicologia vigotskiana dá total respaldo a uma pedagogia na qual a escola deve ter como papel central possibilitar a apropriação do conhecimento objetivo pelos alunos” (DUARTE, 2003, p. 80). Neste sentido, a estratégia é usar a *Pipa Tetraédrica de Graham Bell* apenas como elemento motivador, sendo que o objetivo central deste trabalho é possibilitar que o aluno se aproprie do conhecimento científico, dividido segundo os temas: na primeira série do ensino médio, fez-se um estudo sobre sequências numéricas, principalmente das progressões geométricas, relacionando com o *Triângulo de Sierpinski*; na segunda série do ensino médio, o estudo foi

sobre semelhança de triângulos e suas áreas com pré-requisito das progressões geométricas; na terceira série do ensino médio, analisou-se o volume e o peso das estruturas tetraédricas das pipas construídas, relacionando com a *Pirâmide de Sierpinski*, tendo como pré-requisito as progressões geométricas.

O problema está em como fazer o aluno gostar e reconhecer a importância da transmissão deste conhecimento elaborado. Não seria a abordagem voltada para o cotidiano do aluno e, principalmente, com a profissão que ele pretende ter, o elemento motivador para a ânsia de aprender? A contextualização e interdisciplinaridade de tudo que é ensinado não estreitariam os laços entre aluno e professor, tornando as turmas mais participativas a cada aula? O próprio título, “a pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem”, e o objetivo deste trabalho deixam claro: a escola deve ter uma abordagem crítica no planejamento e no ato de ensinar, ou seja, deve fazer uma análise responsável sobre o que ensinar a cada turma, para que não haja um esvaziamento escolar no que diz respeito ao conhecimento científico. Acrítico seria o profissional da educação que não se preocuparia em *analisar* para chegar à verdade. Muitos podem contrariar esta ideia, mas segundo Vigotski, “no enfoque não-crítico cada um vê o que quer e não o que é” (Vigotski in DUARTE, 2003, p. 42). Isto justifica o fato de que a pipa deve ser apenas um elemento motivador. A partir dessa motivação, o aluno deve apropriar-se do conhecimento objetivo, cujos temas foram propostos, na sua forma mais profunda dentro do nível escolar exigido. O intuito deste trabalho, mas não o foco, é também discutir os métodos de Jean William Fritz Piaget (1896-1980) e Liev Seminióvitch Vigotski (1896-1934) para responder, da maneira mais clara possível, as interrogações anteriores.

O conteúdo deste trabalho está dividido em seções: Seção 2: introdução às sequências e séries; Seção 3: uso da pipa tetraédrica de Graham Bell na primeira série do ensino médio para auxiliar no estudo das progressões geométricas; Seção 4: uso da pipa tetraédrica de Graham Bell na segunda série do ensino médio no estudo da semelhança de triângulos; Seção 5: uso da pipa tetraédrica de Graham Bell na terceira série do ensino médio para calcular o peso e o volume das estruturas tetraédricas, bem como suas relações; Seção 6: trata da importância do cotidiano do aluno para aprender matemática e de como relacioná-lo e justificá-lo com a ajuda do conhecimento objetivo, discutindo os caminhos em Piaget e em Vigotski; Seção 7: construção da pipa tetraédrica de Graham Bell e trabalho de campo; Seção 8: pesquisa sobre o real motivo que levou Alexander Graham Bell a construir tal pipa e, por fim, Seção 9: pesquisa sobre fractais, principalmente sobre os algoritmos das construções do Triângulo e da Pirâmide de Sierpinski.

## 2 SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

Os modelos matemáticos trabalhados com a pipa tetraédrica de Graham Bell usam sequências e séries. Por isso, seguem suas definições e algumas propriedades relevantes.

### 2.1 Sequências numéricas

**Definição 1: (Sequência numérica real.)** Uma *sequência numérica real* é uma função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo domínio é o conjunto dos naturais e o contradomínio é o conjunto dos reais.

*Notações* usuais para sequência:  $(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots)$ , ou  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou simplesmente  $(f_n)$ , onde  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  é o conjunto dos números naturais. Dada uma sequência real  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n = f(n)$  é chamado de  $n$ -ésimo termo da sequência, ou termo geral da sequência.

*Observação:* Em alguns casos, neste trabalho, o domínio mencionado poderá conter o zero.

*Conceito de limite de uma sequência:* Uma sequência real  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde a cada natural  $n$  associa-se um número real  $f_n$ , tem limite  $L$  se o real  $f_n$  fica tão próximo de  $L$  quanto se queira quando  $n$  é suficientemente grande e escreve-se:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L$ . Ou ainda, que  $f_n$  tende a  $L$  quando  $n$  tende ao infinito e escreve-se:  $f_n \rightarrow L$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 2: (Limite de uma sequência real.)** Uma sequência real  $(f_n)$  tem *limite*  $L$ , o que se denota por  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L$ , se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  natural tal que  $|f_n - L| < \varepsilon$  sempre que o índice  $n$  for maior do que  $N$ . Simbolicamente, escreve-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L \cdot \equiv \cdot \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow |f_n - L| < \varepsilon.$$

*Observações:* O símbolo  $\cdot \equiv \cdot$  acima significa que o que vem depois é definição do que vem antes. Escrever  $|f_n - L| < \varepsilon$  é o mesmo que  $L - \varepsilon < f_n < L + \varepsilon$ , ou seja,  $f_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Se tal limite existe, diz-se que a sequência é **convergente**, ou converge para  $L$ ; caso contrário, trata-se de uma sequência **divergente**.

**Teorema 1: (Unicidade do limite.)** Uma sequência não converge para dois limites diferentes.

*Demonstração:* Suponha, por absurdo, que a sequência real  $(f_n)$  irá convergir para dois limites distintos, ou seja, suponha que ocorram as duas situações:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L_1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N}; n > N_1 \Rightarrow |f_n - L_1| < \varepsilon \text{ e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L_2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N}; n > N_2 \Rightarrow |f_n - L_2| < \varepsilon, \text{ com } L_1 \neq L_2.$$

Tomando-se  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , pode-se afirmar que, para todo  $n > N$ , vale:

$$|f_n - L_1| < \varepsilon \Rightarrow L_1 - \varepsilon < f_n < L_1 + \varepsilon \text{ e} \quad (\text{I})$$

$$|f_n - L_2| < \varepsilon \Rightarrow L_2 - \varepsilon < f_n < L_2 + \varepsilon. \quad (\text{II})$$

Multiplicando a Desigualdade (I) por  $-1$ , tem-se  $-L_1 + \varepsilon > -f_n > -L_1 - \varepsilon$ , que é equivalente a  $-L_1 - \varepsilon < -f_n < -L_1 + \varepsilon$ . Somando essa desigualdade com (II), tem-se:

$$L_2 - L_1 - 2\varepsilon < 0 < L_2 - L_1 + 2\varepsilon \Rightarrow -2\varepsilon < L_1 - L_2 < 2\varepsilon \Rightarrow |L_1 - L_2| < 2\varepsilon. \quad (\text{III})$$

Como deve ser válido para todo  $\varepsilon$ , tome  $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$ , que equivale a  $2\varepsilon = |L_1 - L_2|$ .

Então, por esta última equação e pela Inequação (III), tem-se:  $2\varepsilon = |L_1 - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$ , o que é um absurdo. O absurdo foi assumir  $L_1 \neq L_2$ . Portanto, o limite é único.  $\square$

**Lema 1:** Considere a sequência real  $(f_n) = (q^n)$ . Se  $|q| < 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ .

*Demonstração:* Se  $q = 0$ , é trivial que tal limite  $L$  se anula, pois  $|f_n - L| = |0^n - 0| = 0 < \varepsilon$  independentemente da escolha de  $N$ . Se  $0 < |q| < 1$ , deve-se provar, pela Definição 2, que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon.$$

Note que:  $|q^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |q|^n < \varepsilon \Leftrightarrow \ln|q|^n < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n \ln|q| < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$ , pois o

$\ln|q|$  é negativo. A última desigualdade dá uma visão para escolha de  $N$ . 1º) Se  $\varepsilon < 1$ , então

$\ln \varepsilon < 0$  e, com isso, basta tomar  $N$  como qualquer inteiro maior do que ou igual a  $\frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} > 0$

(esta razão é positiva, pois  $\ln|q| < 0$  e  $\ln \varepsilon < 0$ ). Dessa forma, se  $n > N$  e  $N \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$ , então

$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$ , que, pelas relações de equivalência anteriores, é equivalente a  $|q^n - 0| < \varepsilon$ , ou seja,

$L = 0$ . 2º) Se  $\varepsilon \geq 1$ , então  $\ln \varepsilon \geq 0$  e, com isso, basta tomar  $N$  como sendo qualquer natural,

pois  $\frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} \leq 0$  (esta razão é não positiva, pois  $\ln|q| < 0$  e  $\ln \varepsilon \geq 0$ ). Assim, se  $n > N$  e

$N \geq 1 > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$  ( $N$  arbitrário), então  $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$ , o que, pelas relações de equivalência anteriores,

é equivalente a  $|q^n - 0| < \varepsilon$ , ou seja,  $L = 0$ . Por tudo isso e pela unicidade do limite provada

no Teorema 1, tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  para  $|q| < 1$ .  $\square$

**Teorema 2:** Se a sequência real  $(f_n)$  converge, então a sequência  $(|f_n|)$  converge. Ou, pela equivalência lógica, se  $(|f_n|)$  diverge, então  $(f_n)$  diverge.

*Demonstração:* Se  $(f_n)$  converge para um valor  $L$ , então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  natural tal que  $|f_n - L| < \varepsilon$  sempre que  $n > N$ . Usando o fato de que  $||a| - |b|| \leq |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$ , pode-se afirmar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  natural tal que  $||f_n| - |L|| \leq |f_n - L| < \varepsilon$  se  $n > N$ . Portanto, a sequência  $(|f_n|)$  converge para  $|L|$ .  $\square$

**Definição 3: (Limite infinito.)** Uma sequência real  $(f_n)$  tem *limite infinito*, o que se denota por  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty$ , se para todo  $P > 0$ , existe  $N$  natural tal que  $f_n > P$  sempre que o índice  $n$  for maior do que  $N$ . Simbolicamente, escreve-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty \cdot \equiv \cdot \forall P > 0 \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow f_n > P.$$

**Lema 2:** Considere a sequência real  $(f_n) = (q^n)$ . Se  $|q| > 1$ , então  $(f_n)$  diverge.

*Demonstração:* 1º) Se  $q > 1$ , considere  $P$  positivo e arbitrário, além das equivalências:

$$f_n = q^n > P \Leftrightarrow \ln q^n > \ln P \Leftrightarrow n \ln q > \ln P \Leftrightarrow n > \frac{\ln P}{\ln q}.$$

A última desigualdade dá uma visão para escolha de  $N$ . Basta tomar  $N$  como qualquer inteiro positivo maior do que ou igual a  $\frac{\ln P}{\ln q}$ . Dessa forma, se  $n > N$  e  $N \geq \frac{\ln P}{\ln q}$ , então  $n > \frac{\ln P}{\ln q}$ , que, pelas relações de equivalência anteriores, é equivalente a  $f_n > P$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty$  pela Definição 3, comprovando que  $(f_n)$  diverge. 2º) Se  $q < -1$ , acabou de ser provado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = +\infty$ , isto é,  $(|q^n|)$  diverge. Se a sequência  $(|q^n|)$  diverge, então  $(q^n)$  também diverge, segundo o Teorema 2. Portanto,  $(f_n) = (q^n)$  diverge para  $|q| > 1$ .  $\square$

**Definição 4: (Sequência limitada.)** Uma sequência  $(f_n)$  é *limitada* se existe um número real  $c$  tal que  $|f_n| < c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Caso contrário, a sequência é *ilimitada*.

**Definição 5: (Sequência crescente.)** A sequência  $(f_n)$  é *crescente* se  $f_1 < f_2 < \dots < f_n < \dots$ , ou seja,  $f_{n+1} > f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Se  $f_{n+1} \geq f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , então a sequência é *não decrescente*.

**Exemplo 1:** A sequência real  $(f_n) = (1, 2, 3, 4, \dots)$  é *crescente*, pois  $f_{n+1} > f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e também é *não decrescente*, pois  $f_{n+1} \geq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Mais geral: toda

sequência *crescente* é *não decrescente*, pois se vale  $f_{n+1} > f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então também vale que  $f_{n+1} \geq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Já a sequência real  $(g_n) = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots)$  é *não decrescente*, pois  $f_{n+1} \geq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , mas não é *crescente*, pois não vale que  $f_{n+1} > f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que nem toda sequência *não decrescente* é *crescente*.

**Definição 6: (Sequência decrescente.)** Uma sequência  $(f_n)$  é *decrescente* se  $f_{n+1} < f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $f_{n+1} \leq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então a sequência é *não crescente*.

**Exemplo 2:** A sequência real  $(f_n) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$  é *decrescente*, pois  $f_{n+1} < f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , conforme será provado no Exemplo 4, e também é *não crescente*, pois  $f_{n+1} \leq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Mais geral: toda sequência *decrescente* é *não crescente*, pois se vale  $f_{n+1} < f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então também vale que  $f_{n+1} \leq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Já a sequência  $(g_n) = (1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/3, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, \dots)$  é *não crescente*, pois  $f_{n+1} \leq f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , mas não é *decrescente*, pois não vale que  $f_{n+1} < f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que nem toda sequência *não crescente* é *decrescente*.

*Observação:* As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes e não crescentes são chamadas de sequências *monótonas* ou *monotônicas*. Sequências constantes são monótonas.

**Lema 3:** Uma sequência constante  $(f_n) = (k)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{R}$ , converge para  $k$ .

*Demonstração:* Basta provar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  natural tal que  $|f_n - k| < \varepsilon$  sempre que  $n > N$ . De fato, independente de  $N$ , tem-se:  $|f_n - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$ .  $\square$

**Exemplo 3:** Considere a sequência real  $(f_n)$  tal que  $f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $(f_n) = (1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, \dots)$ . Note que esta sequência *não é monótona*. Pode-se provar, conforme será feito no Exemplo 5, que esta sequência é *convergente*. Como  $f_1 = 1$  é seu maior elemento e  $f_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então existe  $c = 2$  tal que  $|f_n| < c$  para todo índice  $n \in \mathbb{N}$ , concluindo que esta sequência é *limitada*. É fácil provar que  $c = 2$  satisfaz a desigualdade  $|f_n| < c$ , pois  $|f_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \frac{1}{n} < 2 = c$ , já que  $\frac{1}{n} < 2$  equivale a  $2n > 1$ , o que é verdade para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Este exemplo inspira o teorema seguinte.

**Teorema 3:** Toda sequência convergente é limitada.

*Demonstração:* Seja  $(f_n)$  uma sequência convergente, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L$ . Assim, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n > N$ , então  $L - \varepsilon < f_n < L + \varepsilon$ . Ou seja, existe um intervalo limitado  $I = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  tal que  $f_n \in I$  para todo  $n > N$ . Os únicos termos da sequência  $(f_n)$  que não pertencem a  $I$  são  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_N$ , os quais são em quantidade finita e, portanto, o conjunto  $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$  é limitado. Então, o conjunto  $J = I \cup F$  é limitado e contém todos os termos da sequência  $(f_n)$ , concluindo-se que  $(f_n)$  é limitada.  $\square$

*Observação:* A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Repare que a sequência real  $(f_n) = (10, -1, 10, -1, 10, -1, \dots)$  é limitada, pois existe  $c = 11$  tal que  $|f_n| < c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Todavia, ela não é convergente, pois não existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Isto é fácil provar, pois  $(f_n)$  pode ser dada pela lei:  $f_n = 10$  se  $n$  for ímpar, ou  $f_n = -1$  se  $n$  for par. Pode-se verificar, então, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{2n-1}) = 10$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{2n}) = -1$ . Como o limite não é único, isto contraria o Teorema 1, concluindo-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  não existe.

**Exemplo 4:** Considere a sequência real  $(f_n)$  tal que  $f_n = 1/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Nota-se que  $(f_n) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$ . Esta sequência, chamada de *sequência harmônica*, é *decrecente*, pois:  $n < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow f_{n+1} < f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Como a sequência  $(f_n)$  é decrescente, seu maior elemento é 1 e ela não atinge valores negativos, então ela é *limitada* ( $f_n \in ]0, 1]$ ); ou, existe  $c = 2$  tal que  $|f_n| < c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pois  $|f_n| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < 2 = c$ , já que  $\frac{1}{n} < 2$  equivale a  $2n > 1$ , o que é verdade para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pelo fato de esta sequência ser decrescente e não atingir valores negativos é razoável pensar que ela irá *convergir* para zero. Pode-se provar tal fato pela Definição 2, onde  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  natural tal que  $|f_n - 0| < \varepsilon$  sempre que  $n > N$ . Tomando  $N$  inteiro maior do que ou igual a  $1/\varepsilon$  (pois  $N \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$ ), tem-se:  $n > N \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow |f_n - 0| < \varepsilon$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ . Este exemplo inspira o teorema seguinte.

**Definição 7: (Extremo superior.)** Seja  $B$  um conjunto não vazio de números reais. Um número  $b_1$  é cota superior de  $B$  se  $x \leq b_1$ , para todo  $x \in B$ . Um número  $b$  é *extremo superior* de  $B$ , ou *supremo* de  $B$ , escreve-se  $b = \sup B$ , se  $b$  é cota superior de  $B$  e nenhum outro número menor do que  $b$  é cota superior de  $B$ .

**Definição 8: (Extremo inferior.)** Seja  $B$  um conjunto não vazio de números reais. Um número  $b_1$  é cota inferior de  $B$  se  $x \geq b_1$ , para todo  $x \in B$ . Um número  $b$  é *extremo inferior* de  $B$ , ou *ínfimo* de  $B$ , escreve-se  $b = \inf B$ , se  $b$  é cota inferior de  $B$  e nenhum outro número maior do que  $b$  é cota inferior de  $B$ .

**Teorema 4:** Toda sequência monótona e limitada é convergente.

*Demonstração:* Seja  $(f_n)$  uma sequência monótona (tome o caso não decrescente) e limitada. Basta provar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L$ . De fato, se  $(f_n)$  é limitada, então existe um número real  $c$  tal que  $|f_n| < c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . O conjunto  $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots\}$  tem supremo, pois tem cota superior (axioma da completude). Sendo  $L = \sup F$ , pode-se afirmar que  $f_n \leq L \leq c$  para toda cota superior  $c$  de  $F$ . Se  $L$  é supremo, então  $L - \varepsilon$  não é cota superior para todo  $\varepsilon > 0$  e, com isso, existe  $N$  natural tal que  $L - \varepsilon < f_N \leq L$ , pois  $(f_n)$  é não decrescente, ou seja,  $f_N \leq f_n$  para  $n > N$ . Assim, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n > N$ , então:

$$L - \varepsilon < f_N \leq L \text{ e } f_N \leq f_n \Rightarrow L - \varepsilon < f_N \leq f_n \leq L \Rightarrow L - \varepsilon < f_n < L + \varepsilon,$$

e, com isso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L$ . A demonstração para  $(f_n)$  não crescente é semelhante, bastando tomar  $L = \inf F$ .  $\square$

**Teorema 5:** Seja  $(f_n)$  uma sequência. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| = 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ .

*Demonstração:* Seja  $(f_n)$  uma sequência, onde  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| = 0$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  natural tal que  $||f_n| - 0| < \varepsilon$  sempre que o índice  $n$  for maior do que  $N$ . Daí, para todo  $n > N$ , vale:  $||f_n| - 0| < \varepsilon \Rightarrow |f_n| < \varepsilon \Rightarrow |f_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ .  $\square$

**Exemplo 5:** Prova de que a sequência real  $(f_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , converge para zero. Note que  $|f_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, pelo Exemplo 4, está provado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Assim, pelo Teorema 5, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| = 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ .

*Observação:* A recíproca do teorema anterior é verdadeira, pois se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  natural tal que  $|f_n - 0| < \varepsilon$  sempre que o índice  $n$  for maior do que  $N$ , então, para  $n > N$ , vale:  $|f_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow |f_n| < \varepsilon \Rightarrow ||f_n| - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| = 0$ . A demonstração do Teorema 2 também garante este fato.  $\square$



**Teorema 6: (Operações com limites.)** Considere  $(f_n)$  e  $(g_n)$  duas seqüências reais tais que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L_1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = L_2$ . Então vale:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot f_n) = k \cdot L_1$ , para todo  $k \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n) = L_1 + L_2$ .
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n \cdot g_n) = L_1 \cdot L_2$ .
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n}{g_n}\right) = \frac{L_1}{L_2}$  se  $L_2 \neq 0$ .

*Demonstração:* Por hipótese, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L_1, \text{ ou seja, } f_n \rightarrow L_1 \text{ se } n \rightarrow \infty \text{ e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = L_2, \text{ ou seja, } g_n \rightarrow L_2 \text{ se } n \rightarrow \infty.$$

(i) Repare que  $|kf_n - kL_1| = |k| \cdot |f_n - L_1|$ . Então, se  $f_n \rightarrow L_1$  quando  $n \rightarrow \infty$ , tem-se:

$$|f_n - L_1| \rightarrow 0 \Rightarrow |k| \cdot |f_n - L_1| \rightarrow 0 \Rightarrow |kf_n - kL_1| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot f_n) = k \cdot L_1.$$

(ii) Pela desigualdade triangular, pode-se afirmar que:

$$|(f_n + g_n) - (L_1 + L_2)| = |(f_n - L_1) + (g_n - L_2)| \leq |f_n - L_1| + |g_n - L_2|.$$

Para  $n$  suficientemente grande, sabe-se que  $f_n \rightarrow L_1$  e  $g_n \rightarrow L_2$ , de onde é possível concluir que  $|f_n - L_1| + |g_n - L_2| \rightarrow 0$ . Então, da desigualdade anterior, pode-se provar que:

$$|(f_n + g_n) - (L_1 + L_2)| \rightarrow 0 \Rightarrow (f_n + g_n) \rightarrow (L_1 + L_2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n) = L_1 + L_2.$$

(iii) Note que  $(f_n g_n) - (L_1 L_2) = f_n g_n - f_n L_2 + f_n L_2 - L_1 L_2 = f_n (g_n - L_2) + L_2 (f_n - L_1)$ . Sabe-se que existe  $c > 0$  tal que  $|f_n| < c$  para todo  $n$ , pois toda seqüência convergente é limitada (Teorema 3), Então, pela desigualdade triangular, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} |(f_n g_n) - (L_1 L_2)| &= |f_n (g_n - L_2) + L_2 (f_n - L_1)| \leq |f_n (g_n - L_2)| + |L_2 (f_n - L_1)| = \\ &= |f_n| \cdot |(g_n - L_2)| + |L_2| \cdot |(f_n - L_1)| < c \cdot |(g_n - L_2)| + |L_2| |(f_n - L_1)|. \end{aligned}$$

Para  $n$  suficientemente grande, sabe-se que  $f_n \rightarrow L_1$  e  $g_n \rightarrow L_2$ , de onde é possível concluir que  $c \cdot |(g_n - L_2)| + |L_2| |(f_n - L_1)| \rightarrow 0$ . Então, das inequações anteriores, tem-se:

$$|(f_n g_n) - (L_1 L_2)| \rightarrow 0 \Rightarrow (f_n g_n) \rightarrow (L_1 L_2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n \cdot g_n) = L_1 \cdot L_2.$$

(iv) Antes, deve-se provar que: se  $g_n \rightarrow L_2 \neq 0$  se  $n \rightarrow \infty$ , então  $(1/g_n) \rightarrow 1/L_2$  se  $n \rightarrow \infty$ .

De fato, repare que:

$$\left| \frac{1}{g_n} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - g_n}{g_n \cdot L_2} \right| = \left| \frac{g_n - L_2}{g_n \cdot L_2} \right|.$$

Se  $g_n \rightarrow L_2 \neq 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então  $|g_n - L_2| \rightarrow 0$  e  $|g_n \cdot L_2| \rightarrow L_2^2 \neq 0$ . Assim:

$$\left| \frac{g_n - L_2}{g_n \cdot L_2} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \left| \frac{1}{g_n} - \frac{1}{L_2} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{g_n}\right) \rightarrow \frac{1}{L_2} \text{ se } n \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{g_n}\right) = \frac{1}{L_2}.$$

Por (iii), tem-se:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n}{g_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n \cdot \frac{1}{g_n}\right) = L_1 \cdot \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}$ . □

## 2.2 Introdução às séries numéricas

**Definição 9: (Série.)** Uma *série numérica infinita* (ou simplesmente *série*) é uma expressão da forma  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Notação:* A série  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ,  $n \in \mathbb{N}$  pode ser denotada por  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , ou simplesmente  $\sum a_n$ , onde  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da série.

Às vezes, surge confusão entre os conceitos de série e sequência. Todavia, basta ter em mente que sequência é uma coleção de números que estão em correspondência biunívoca com os naturais (ou a disposição de infinitos números em certa ordem), enquanto que série é a *soma* desses infinitos números. Repare que  $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  representa uma sequência, enquanto  $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  representa uma série. Além disso, a definição a seguir traz um tipo especial de sequência que se obtém a partir de uma série.

**Definição 10: (Sequência de somas parciais.)** Seja  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  a soma dos  $n$  primeiros termos da série  $\sum a_n$ , também chamada de  $n$ -ésima soma parcial da série  $\sum a_n$ . A *sequência de somas parciais* da série  $\sum a_n$  é  $(S_n) = (S_1, S_2, \dots, S_n, \dots)$ .

**Definição 11: (Séries convergente e divergente.)** Seja  $(S_n)$  a sequência de somas parciais da série  $\sum a_n$ . A série  $\sum a_n$  é dita *convergente* se a sequência de somas parciais  $(S_n)$  converge, ou seja, se existe um número real  $S$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . O limite  $S$  é a soma da série  $\sum a_n$  e escreve-se  $S = \sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ . Caso contrário, a série é *divergente*. Uma série divergente não tem soma, pois não atinge nenhum valor real.

**Teorema 7:** Seja  $(a_n)$  uma sequência. Se a série  $\sum a_n$  é *convergente*, então a sequência  $(a_n)$  converge para zero, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Demonstração:* Se  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da série  $\sum a_n$  e  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  é a  $n$ -ésima soma parcial, então  $a_n = S_n - S_{n-1}$ . Se  $S$  é a soma da série  $\sum a_n$ , então, pela Definição 11, sabe-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  e também  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ . Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n-1}) = S - S = 0. \quad \square$$

**Exemplo 6:** A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. A sequência harmônica  $(a_n) = (1/n)$  converge para zero, conforme Exemplo 4. Todavia, a série  $\sum(1/n)$  diverge. De fato, reagrupe os termos da série harmônica da seguinte forma:

$$\sum\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) \dots$$

Percebe-se que a soma dentro de cada parênteses é sempre maior do que  $1/2$  e, por isso:

$$\sum\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty,$$

comprovando que a série harmônica diverge. Outra prova: suponha, por absurdo, que a série harmônica irá convergir para  $S$ , ou seja,  $\sum(1/n) = S$ . Então, as séries  $\sum(1/2n) = T$  e  $\sum(1/(2n-1)) = R$  irão convergir, pois  $(T_n) = (1/2n)$  e  $(R_n) = (1/(2n-1))$  são sequências, que também são subsequências da sequência  $(1/n)$ , cujos termos são frações com numeradores unitários e denominadores pares e ímpares, respectivamente. Como não há termos em comum entre  $(T_n)$  e  $(R_n)$ , note que:

$$S = \sum\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots\right) = R + T \text{ se } n \rightarrow \infty.$$

Todavia,  $T = \sum(1/2n) = (1/2)\sum(1/n) = S/2$  e  $S = R + T$  implica que  $T = R = S/2$ . Por outro lado, a diferença  $R - T = \sum\left(\frac{1}{2n-1}\right) - \sum\left(\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty}(R_n) - \lim_{n \rightarrow \infty}(T_n)$  pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} R - T &= \lim_{n \rightarrow \infty}(R_n - T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow R - T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} \right] > 0 \Rightarrow R > T, \end{aligned}$$

o que é absurdo, pois  $T = R = S/2$ . Portanto, a série harmônica é divergente.  $\square$

### 2.3 Uma sequência e uma série especiais: progressão geométrica e série geométrica

Em todos os exercícios aplicados neste trabalho, envolvendo a pipa tetraédrica de Graham Bell, estão presentes sequências especiais denominadas progressões geométricas, bem como a soma de seus termos. Por isso, seguem suas propriedades e definições.

**Definição 12: (Progressão geométrica.)** Uma *progressão geométrica* (doravante denominada PG) é toda sequência real onde o primeiro termo não é nulo e os demais são obtidos multiplicando-se seu antecessor por uma constante não nula chamada razão da PG. Ou seja, a sequência real  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma PG se existe um número real  $q \neq 0$  que satisfaz a recorrência  $a_{n+1} = a_n \cdot q$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $a_1 \neq 0$  é o primeiro termo e  $q$  é a razão.

Considere uma PG de razão  $q$  (não nula) dada por  $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$ . Note que  $a_1$  pode ser escrito da forma  $a_1 = a_1 \cdot q^0$  e, de acordo com a Definição 12, tem-se:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^1, \\ a_3 &= a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^1 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2, \\ a_4 &= a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3. \end{aligned}$$

Nota-se que, até aqui, os termos da PG, inclusive o primeiro, é escrito como o produto entre o primeiro termo e a potência de base igual à razão  $q$  e expoente igual ao antecessor do índice do termo. Deste raciocínio, deduz-se o termo geral da PG, conforme lema a seguir.

**Lema 4: (Termo geral de uma PG.)** O termo geral de uma PG de razão  $q$  (não nula) e primeiro termo  $a_1$  (não nulo) é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

*Demonstração:* A dedução anterior é perfeitamente aceitável no ensino médio. Todavia, fica aqui a demonstração pelo Princípio da Indução Finita (PIF). Para  $n = 1$ , tem-se da Equação (1):  $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$ , que é uma identidade. Hipótese de indução (HI): supor que, para algum  $n > 1$ , vale a Equação (1). Tese: provar que vale a Equação (1) para o sucessor de  $n$ . De fato: para obter o  $(n + 1)$ -ésimo termo da PG, deve-se multiplicar o  $n$ -ésimo termo pela razão, conforme a Definição 12, ou seja:

Se  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ , então, por HI:  $a_{n+1} = (a_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q = a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot q^{(n+1)-1}$ .

Então, pelo PIF, a Equação (1) é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Outra demonstração: resolvendo a recorrência linear  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ , de  $n = 1$  até  $n - 1$ , tem-se:

$$a_2 = a_1 \cdot q, \quad a_3 = a_2 \cdot q, \quad a_4 = a_3 \cdot q, \dots, \quad a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q \text{ e } a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Multiplicando as  $n - 1$  igualdades anteriores membro a membro, tem-se:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot q \cdot a_2 \cdot q \cdot a_3 \cdot q \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

**Lema 5: (Propriedades de uma PG.)** Seja  $(a_n) = (a_1 \cdot q^{n-1})$  uma progressão geométrica.

- (i) Se  $q = 1$ , então  $(a_n)$  é constante, convergente e limitada.
- (ii) Se  $q > 1$  e  $a_1 > 0$ , ou  $0 < q < 1$  e  $a_1 < 0$ , então  $(a_n)$  é crescente.
- (iii) Se  $q > 1$  e  $a_1 < 0$ , ou  $0 < q < 1$  e  $a_1 > 0$ , então  $(a_n)$  é decrescente.
- (iv) Se  $q = -1$ , então  $(a_n)$  é divergente e limitada.
- (v) Se  $|q| < 1$ , então  $(a_n)$  é convergente e limitada.
- (vi) Se  $|q| > 1$ , então  $(a_n)$  é divergente e ilimitada.

*Demonstração:* (i) Se  $q = 1$ , então:  $a_n = a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1$ , ou seja,  $(a_n)$  é constante. Além disso,  $(a_n)$  é convergente e limitada, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 = a_1$  e toda sequência convergente é limitada segundo o Teorema 3. (ii) Se  $q > 1$  e  $a_1 > 0$ , então  $(a_n)$  é crescente, pois, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$q > 1 \Rightarrow q^n \cdot q > q^n \Rightarrow q^{n+1} > q^n \Rightarrow \frac{q^{n+1}}{q} > \frac{q^n}{q} \Rightarrow a_1 \cdot q^{(n+1)-1} > a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} > a_n.$$

Se  $0 < q < 1$  e  $a_1 < 0$ , então  $(a_n)$  é crescente, pois, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$0 < q < 1 \Rightarrow q^n \cdot q < q^n \Rightarrow \frac{q^{n+1}}{q} < \frac{q^n}{q} \Rightarrow a_1 \cdot q^{(n+1)-1} > a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} > a_n.$$

(iii) Se  $q > 1$  e  $a_1 < 0$ , então  $(a_n)$  é decrescente, pois, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$q > 1 \Rightarrow q^n \cdot q > q^n \Rightarrow q^{n+1} > q^n \Rightarrow \frac{q^{n+1}}{q} > \frac{q^n}{q} \Rightarrow a_1 \cdot q^{(n+1)-1} < a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} < a_n.$$

Se  $0 < q < 1$  e  $a_1 > 0$ , então  $(a_n)$  é decrescente, pois, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se:

$$0 < q < 1 \Rightarrow q^n \cdot q < q^n \Rightarrow \frac{q^{n+1}}{q} < \frac{q^n}{q} \Rightarrow a_1 \cdot q^{(n+1)-1} < a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} < a_n.$$

(iv) Se  $q = -1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe, pois  $(a_n) = (a_1, -a_1, a_1, -a_1, \dots)$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = a_1 \neq 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -a_1 \neq 0$ , contrariando a unicidade do limite e comprovando a divergência de  $(a_n)$ ; neste caso,  $(a_n)$  é limitada, pois existe  $c = |a_1| + 1$ , tal que  $|a_n| = |a_1| < |a_1| + 1 = c$ . (v) Se  $|q| < 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \cdot q^{n-1}) = 0$  e, com isso,  $(a_n)$  é convergente e, pelo Teorema 3,  $(a_n)$  é limitada. (vi) Se  $|q| > 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe e  $(a_n)$  diverge, pois a sequência  $(q^n)$  diverge pelo Lema 2 e, por isso,  $(q^{n-1})$  diverge, ou seja, a não existência de  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1}$  implica na não existência de  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \cdot q^{n-1})$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_1 \cdot q^{n-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_1| \cdot |q|^{n-1}) = +\infty$ , então  $(a_n)$  é ilimitada.  $\square$

**Teorema 8: (Soma dos  $n$  primeiros termos de uma PG.)** A soma  $S_n$  dos  $n$  primeiros termos de uma PG com razão  $q \neq 1$  e primeiro termo  $a_1$  é:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

*Demonstração:* Escrevendo essa soma, tem-se:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \quad (I)$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade pela razão  $q$ , tem-se:

$$\begin{aligned} S_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + a_4 \cdot q + \dots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q. \end{aligned} \quad (II)$$

Realizando, membro a membro, a subtração (I) – (II), tem-se:  $S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$ . Daí:

$$\begin{aligned} S_n - S_n \cdot q &= a_1 - a_n \cdot q \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - (a_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^n \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ se } q \neq 1 \text{ e } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad \square$$

**Definição 13: (Série geométrica.)** Se  $(a_n)$  é uma progressão geométrica, então  $\sum a_n$  será chamada de *série geométrica*. A série geométrica é uma das mais importantes, pois aparece nas soluções de diversos problemas aplicados, inclusive neste trabalho.

**Teorema 9:** Seja  $(a_n) = (a_1 \cdot q^{n-1})$  uma progressão geométrica. Então, a série geométrica  $\sum a_n$  converge para  $S = \frac{a_1}{1-q}$  se  $|q| < 1$ , ou diverge se  $|q| \geq 1$ .

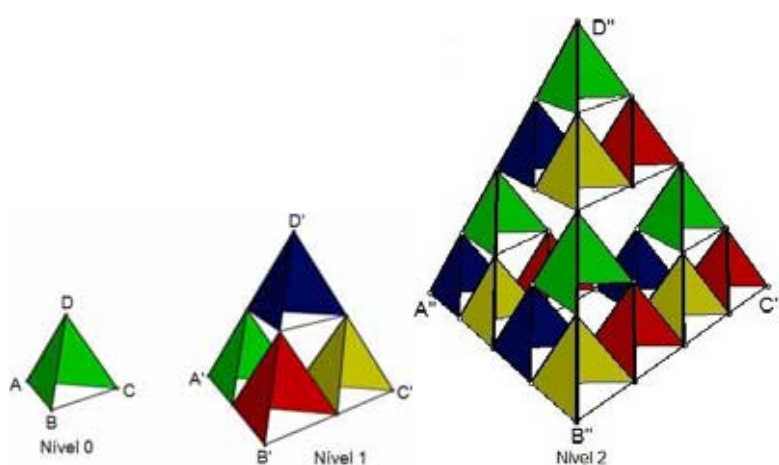
*Demonstração:* Sendo  $(S_n)$  a sequência de somas parciais da série  $\sum a_n$ , basta analisar quatro casos para a razão  $q$ . 1º) Se  $q = 1$ , então  $S_n = a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1$  e a série diverge, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  não existe. 2º) Se  $q = -1$ , a sequência de somas parciais  $(S_n)$  oscila entre  $a_1$  e zero e, por isso, ela diverge. Repare que  $(S_n)$  pode ser dada pela lei:  $S_n = a_1$  se  $n$  for ímpar, ou  $S_n = 0$  se  $n$  for par. Pode-se verificar, então, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = a_1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 0$ . Como o limite não é único, isto contraria o Teorema 1, concluindo-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  não existe. 3º) Se  $|q| < 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = 0$  pelo Lema 1 e  $S_n$  é dada pela Equação 2. Logo, a série geométrica converge para  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$ . 4º) Se  $|q| > 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n)$  não existe pelo Lema 2 e  $S_n$  é dada pela Equação 2. Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n)$  não existe, o Teorema 6 garante que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$  não existe e, portanto, a série geométrica diverge. Os três casos de divergência aqui citados, poderiam ser comprovados com o Teorema 7, onde  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  é uma condição necessária para que a série  $\sum a_n$  seja convergente e sabe-se que: se  $q = 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \neq 0$  (por definição); se  $q = -1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe, pois  $(a_n) = (a_1, -a_1, a_1, -a_1, \dots)$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = a_1 \neq 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -a_1 \neq 0$ , contrariando a unicidade do limite; se  $|q| > 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe, pois a sequência  $(q^n)$  diverge pelo Lema 2 e, por isso,  $(q^{n-1})$  diverge, concluindo que a não existência de  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1}$  implica na não existência de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ , o que comprova a divergência da PG  $(a_n) = (a_1 \cdot q^{n-1})$ .  $\square$

Então, a soma dos termos da PG de razão  $q$ , onde  $-1 < q < 1$  e  $q \neq 0$  (ou simplesmente,  $|q| < 1$ , pois  $q \neq 0$  por definição), é uma *série geométrica convergente* dada por:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \frac{a_1}{1-q}. \quad (3)$$

### 3 USO DA PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL NA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO: ESTUDO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

O trabalho desenvolvido pela primeira série do ensino médio foi a construção da pipa, pesquisa histórica sobre Alexander Graham Bell e sobre fractais, além do trabalho escolar envolvendo sequências e séries numéricas, conforme Apêndice A. A transcrição, resolução e comentários sobre o objetivo de cada questão deste são feitas a seguir.



**Figura 1:** Os três primeiros níveis da pipa tetraédrica encontrada em BORTOLOSSI (2013a).

A Figura 1 mostra os três primeiros níveis da pipa tetraédrica de Graham Bell, cuja construção encontra-se no Anexo A. Segue as questões aplicadas à primeira série do ensino médio, conforme Apêndice A.

#### **Questão 1:**

a) *Quantos canudos foram usados na construção das pipas dos níveis zero, um e dois?*

Esta questão procura calcular o número de canudos usados na construção de cada pipa e o comprimento da aresta (a definir) da pipa, bem como estabelecer relações entre ambos. Observando a Figura 1, tem-se os valores 6, 24 e 96, que podem ser escritos da forma:

$$6 = 6 \cdot 4^0, \quad (4)$$

$$24 = 6 \cdot 4^1 \text{ e} \quad (5)$$

$$96 = 6 \cdot 4^2. \quad (6)$$

Nesta questão, entende-se por aresta da pipa como sendo a aresta do maior tetraedro que a constitui. Assim, na Figura 1, os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  são arestas das pipas dos níveis 0, 1 e 2, respectivamente.

*b) Considere  $C_n$  a quantidade de canudos no nível  $n$ . Observando que a quantidade de canudos parece formar uma progressão geométrica, determine o número de canudos do nível  $n$ , ou seja, encontre o termo geral dessa PG. Apesar de não termos visualizado do nível 3 em diante da pipa, por que você acredita tratar-se de uma PG? Justifique usando a ideia da construção da pipa para chegar à razão da PG. Essa PG é crescente ou decrescente?*

Observando as Igualdades (4), (5) e (6) anteriores, percebe-se que seus valores estão em progressão geométrica de razão 4 e primeiro termo 6. Nota-se ainda que o primeiro termo é representado por  $C_0$ , já que  $n$  representa o número do nível o qual assume valor inicial zero. Então, o termo geral dessa progressão geométrica é:

$$C_n = 6 \cdot 4^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (7)$$

Tradicionalmente, o primeiro elemento de uma PG tem índice 1 e o expoente, cuja potência tem base igual à razão, é  $n - 1$ , conforme Equação (1), o que não acontece na Equação (7). Esta questão vem provocar o raciocínio lógico no aluno para que consiga montar o termo geral da PG independente das convenções habituais da matemática. O aluno deve ressaltar ainda que a razão ser igual a 4 vem da construção das pipas, onde cada pipa de certo nível é obtida a partir da união de quatro pipas do nível anterior. Dessa forma, a questão fica bem justificada no nível de ensino considerado. Todavia, cabe aqui uma demonstração formal de tal fato usando o Princípio da Indução Finita (PIF), como segue: para  $n = 0$ , tem-se da Equação (7):  $C_0 = 6 \cdot 4^0 = 6$ , que é a quantidade de canudos do nível zero. Hipótese de indução (HI): supor que, para algum  $n > 0$ , vale a Equação (7). Tese: provar que vale a Equação (7) para o sucessor de  $n$ . De fato: para construir a pipa do nível  $n + 1$  deve-se, conforme a construção, unificar quatro pipas do nível  $n$ , ou seja:

$$C_{n+1} = 4 \cdot C_n \implies C_{n+1} = 4 \cdot 6 \cdot 4^n = 6 \cdot 4^{n+1}.$$

Então, pelo PIF, a Equação (7) é verdadeira. □

Como  $C_{n+1} = 6 \cdot 4^{n+1} = 6 \cdot 4 \cdot 4^n > 6 \cdot 4^n = C_n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , então a progressão geométrica ( $C_n$ ) é crescente, conforme Definição 5. O Lema 5 também comprova este fato.



c) Seja  $L$  o comprimento do canudo usado, isto é, cada uma das seis arestas do nível zero da estrutura tetraédrica vale  $L$ . Qual o comprimento da aresta da pipa do nível 1? E do nível 2?

Percebe-se que, a cada mudança de nível, a aresta da pipa dobra de comprimento conforme Figura 1. Então, o comprimento da aresta da pipa do nível 1 é  $2L$  e do nível 2 é  $4L$ , onde:  $2L = L \cdot 2^1$  e  $4L = L \cdot 2^2$ .

d) Se montarmos uma sequência dos comprimentos das arestas em cada nível, teremos uma PG? Escreva os cinco primeiros elementos dessa sequência e sua razão. Encontre o termo geral dessa sequência em função de  $n$  e  $L$ , considerando  $A_n$  como sendo o comprimento de cada aresta da pipa do nível  $n$ .

Como a aresta da pipa dobra de valor a cada mudança de nível, os comprimentos das arestas formam uma PG de razão 2, onde os cinco primeiros termos são:

$$A_0 = L, A_1 = 2L, A_2 = 4L, A_3 = 8L \text{ e } A_4 = 16L.$$

Nota-se que  $A_n$  é uma PG de razão 2 e primeiro termo  $L$ , cujo termo geral é:

$$A_n = L \cdot 2^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (8)$$

Demonstração da Equação (8) usando o Princípio da Indução Finita (PIF): para  $n = 0$ , tem-se da Equação (8):  $A_0 = L \cdot 2^0 = L$ , que é o comprimento da aresta da pipa do nível zero.

Hipótese de indução (HI): supor que, para algum  $n > 0$ , vale a Equação (8).

Tese: provar que vale a Equação (8) para o sucessor de  $n$ .

De fato: para construir a pipa do nível  $n + 1$  deve-se, conforme a construção, unificar quatro pipas do nível  $n$ , de tal forma que duas arestas do nível  $n$  fiquem alinhadas formando uma só aresta do nível  $n + 1$ , ou seja:

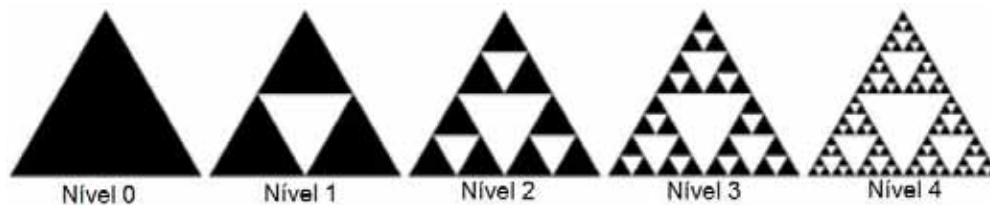
$$A_{n+1} = 2 \cdot A_n \Rightarrow A_{n+1} = 2 \cdot L \cdot 2^n = L \cdot 2^{n+1}.$$

Então, pelo PIF, a Equação (8) é verdadeira. □

e) Quantos canudos há na pipa tetraédrica de aresta  $2^n L$ ?

Esta pergunta tem por objetivo relacionar as Equações (7) e (8). Da Equação (8), tem-se que aresta igual  $2^n L$  se refere ao nível  $n$ , cuja quantidade de canudos é dada pela Equação (7), valendo  $C_n = 6 \cdot 4^n$  no nível  $n$ . Portanto, a quantidade de canudos na pipa tetraédrica de aresta com comprimento  $2^n L$  é  $6 \cdot 4^n$ .

**Questão 2:** considere como face da pipa a face do maior tetraedro que a constitui, desde que seja revestido (parcialmente) pelo papel de seda. De acordo com essa convenção, na Figura 1, os triângulos equiláteros  $ABD$ ,  $A'B'D'$  e  $A''B''D''$  são faces das pipas dos níveis 0, 1 e 2, respectivamente. Nota-se que uma face em particular da pipa tetraédrica trata-se de um dos níveis do Triângulo de Sierpinski, onde o papel de seda assume as posições dos triângulos pretos na Figura 2. Para obter o Triângulo de Sierpinski, construa um triângulo equilátero, conforme Nível 0 da figura abaixo. Construa três segmentos com extremos nos pontos médios dos lados desse triângulo, formando assim quatro triângulos equiláteros; retire o triângulo central (branco), conforme Nível 1 da figura a seguir. Sobre cada um dos três triângulos (pretos) que restaram no Nível 1, repete-se o procedimento anterior, obtendo-se a figura do Nível 2 abaixo. Refazendo esse processo indefinidamente, obtém-se o Triângulo de Sierpinski. A figura a seguir mostra os cinco primeiros níveis dessa construção.



**Figura 2:** Os cinco primeiros níveis da construção do Triângulo de Sierpinski.

Observando os níveis do Triângulo de Sierpinski da Figura 2, foram elaboradas as perguntas a seguir na Questão 2, conforme Apêndice A. Esta questão tem o objetivo de calcular o número total de triângulos em cada nível do Triângulo de Sierpinski. Como será relatado na Seção 8 sobre o Triângulo de Sierpinski, em sua construção retira-se o triângulo central (branco) e deixa somente os que estão ao seu redor (pretos). Mesmo assim, o objetivo aqui é contar todos os triângulos, ou seja, sem excluir os triângulos brancos da conta.

*a) Repare que no nível 1 são formados 4 novos triângulos (congruentes entre si, contando brancos e pretos) em relação ao nível zero. Quantos novos triângulos são formados nos níveis dois e três?*

No nível 2 são formadas quatro novos triângulos em cada um dos três triângulos pretos do nível 1, totalizando 12 novos triângulos. No nível 3 são formadas quatro novos triângulos em cada um dos nove triângulos pretos do nível 2, totalizando 36 novos triângulos. Espera-se que o aluno não só conte os triângulos, mas perceba as relações:

$$a_0 = 1, \quad (9)$$

$$a_1 = 4 = 4 \cdot 3^0, \quad (10)$$

$$a_2 = 12 = 4 \cdot 3^1 \text{ e} \quad (11)$$

$$a_3 = 36 = 4 \cdot 3^2. \quad (12)$$

b) Considere  $a_n$  a quantidade de novos triângulos formados no nível  $n$ . Observando que a quantidade de triângulos parece formar uma progressão geométrica, desde que retiremos o nível zero da sequência, determine o número de triângulos do nível  $n$ , ou seja, encontre o termo geral dessa PG. Usando essa equação, quantos novos triângulos são formados no nível 4? Apesar de não termos visualizado do nível 5 em diante desse fractal, por que você acredita tratar-se de uma PG? Justifique usando a ideia da construção da pipa (ou do próprio fractal) para chegar à razão da PG.

Observando as igualdades (10), (11) e (12) anteriores, percebe-se que seus valores estão em progressão geométrica de razão 3 e primeiro termo 4. Nota-se ainda que o primeiro termo é representado por  $a_1$ , já que  $n$  representa o número do nível e o elemento  $a_0 = 1$  foi retirado para não descaracterizar a progressão geométrica. Então, o termo geral dessa PG é:

$$a_n = 4 \cdot 3^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

No nível 4 há, segundo a Equação (13),  $a_4 = 4 \cdot 3^{4-1} = 4 \cdot 3^3 = 108$  novos triângulos (pretos e brancos) formados.

Esta questão vem provocar o raciocínio lógico no aluno para que consiga montar o termo geral dessa PG. O aluno deve ressaltar ainda que a razão ser igual a 3 vem da construção do Triângulo de Sierpinski, onde a quantidade de triângulos pretos obedecem a uma PG de razão 3 e somente nestes são formados novos triângulos (a saber: quatro novos triângulos em cada triângulo preto). Dessa forma, a questão fica bem justificada no ensino médio. Todavia, cabe aqui uma demonstração formal de tal fato. Seja  $P_n$  a quantidade de triângulos pretos no nível  $n$ . Nota-se que  $P_n = 3^n$ , o que é fácil comprovar usando o *Princípio da Indução Finita*; onde, na tese será usado o fato de que, ao passar para um nível imediatamente superior, são gerados três triângulos pretos sobre cada triângulo preto do nível anterior. Nota-se que são gerados quatro novos triângulos (brancos e pretos) no nível  $n$  para cada triângulo preto do nível  $n - 1$ , ou seja:

$$a_n = 4 \cdot P_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}. \quad \square$$

c) Repare que no nível zero há um triângulo equilátero e no nível 1 há cinco triângulos equiláteros (4 congruentes entre si, além do maior de todos, que já havia no nível zero). Assim, quantos triângulos equiláteros há no nível 2?

Há 17 triângulos equiláteros no nível 2, a saber: os 5 que já existiam no nível 1 acrescidos dos 12 gerados no nível 2, conforme a Igualdade (11).

d) Se montarmos uma sequência da quantidade de triângulos equiláteros em cada nível, provavelmente não teremos PA nem PG. Seja  $b_n$  a quantidade de triângulos equiláteros no nível  $n$ . Repare que não é tão difícil encontrar uma fórmula para  $b_n$ : basta somar a quantidade de triângulos equiláteros do nível anterior ( $b_{n-1}$ ) com os novos triângulos ( $a_n$ ) formados no nível  $n$ . Isto é:  $b_n = b_{n-1} + a_n$ . Usando essa ideia, encontre o número de triângulos equiláteros dos níveis 3 e 4.

Dos itens (a) e (b), tem-se  $a_3 = 36$  e  $a_4 = 108$ . Do item (c) tem-se  $b_2 = 17$ . Da equação de recorrência  $b_n = b_{n-1} + a_n$ , tem-se:  $b_3 = b_2 + a_3 = 17 + 36 = 53$ , ou seja, há 53 triângulos equiláteros no nível 3 e  $b_4 = b_3 + a_4 = 53 + 108 = 161$ , ou seja, há 161 triângulos equiláteros no nível 4.

e) Todavia, para sabermos quantos triângulos equiláteros há no centésimo nível teremos que conhecer a quantidade de triângulos equiláteros do nível 99. O ideal seria determinarmos a quantidade de triângulos equiláteros de qualquer nível em função de  $n$  (número do nível). Isto é possível se for resolvida a recorrência linear de 1ª ordem do item (d). Pesquise como resolver esta recorrência e encontre  $b_n$  em função de  $n$ . Dica: você precisará usar a soma dos termos de uma PG.

Resolvendo a recorrência linear de primeira ordem  $b_n = b_{n-1} + a_n$  para  $n \geq 1$ , onde  $b_0 = 1$  (há somente um triângulo equilátero no nível 1), tem-se:

para  $n = 1$ , tem-se  $b_1 = b_0 + a_1$ ;

para  $n = 2$ , tem-se  $b_2 = b_1 + a_2$ ;

para  $n = 3$ , tem-se  $b_3 = b_2 + a_3$ .

Assim por diante, onde para  $n$  qualquer, tem-se  $b_n = b_{n-1} + a_n$ .

Somando membro a membro as  $n$  igualdades anteriores, tem-se:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ \Rightarrow b_n = b_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

onde  $b_0 = 1$  e  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  é a soma dos  $n$  termos de uma PG de razão  $q = 3$  e primeiro termo igual a 4, sendo  $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$  conforme Equação (13). Assim:

$$b_n = b_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = b_0 + a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + 4 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 1 + 2 \cdot (3^n - 1),$$

ou simplesmente:

$$b_n = 2 \cdot 3^n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (14)$$

A Equação (14) responde a pergunta, onde  $b_n$  representa a quantidade total dos diversos triângulos equiláteros no nível  $n$  do Triângulo de Sierpinski.

O objetivo desta questão é mostrar ao aluno que a equação da soma dos  $n$  primeiros termos de uma PG pode auxiliar na busca de repostas para perguntas intrigantes, como esta. Mais ainda: o aluno deve reconhecer que todo esse conhecimento permite a ele determinar uma quantidade imensa de triângulos equiláteros para um nível mais elevado, sem necessariamente contá-los mecanicamente, o que seria extremamente trabalhoso.

## 4 USO DA PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO: ESTUDO DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

O trabalho desenvolvido pela segunda série do ensino médio foi a construção da pipa, pesquisa histórica sobre Alexander Graham Bell e sobre fractais, além do trabalho escolar envolvendo semelhança de triângulos, conforme Apêndice B. A transcrição, resolução e comentários sobre o objetivo de cada questão deste são feitas a seguir. Antes disso, segue definições e propriedades dos conceitos aqui exigidos.

### 4.1 Conceitos iniciais: semelhança de triângulos

**Definição 14: (Semelhança de triângulos.)** Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma relação biunívoca entre seus vértices, de modo que aconteça uma das equivalências a seguir:

- (i) os três ângulos internos correspondentes são congruentes.
- (ii) os lados homólogos são proporcionais.

*Observações:* Dois lados são homólogos (*homo* significa mesmo e *logos* significa lugar) se cada um deles está em um dos triângulos e ambos são lados opostos a ângulos congruentes. Na maioria dos livros de geometria plana, a definição de semelhança de triângulos exige que aconteça ambas as condições, (i) e (ii) anteriores, para que a semelhança seja garantida. Todavia, será demonstrado no Teorema 11 que elas são equivalentes, provando ser redundante a exigência de ambas na definição.

*Representação simbólica:* Se um triângulo  $ABC$  é semelhante a outro  $A'B'C'$ , escreve-se:  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ . Se  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ , então  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ ,  $\hat{A} \cong \hat{A}'$ ,  $\hat{B} \cong \hat{B}'$  e  $\hat{C} \cong \hat{C}'$  (o símbolo  $\cong$  significa *é congruente*, mesma medida). Ou seja, nesta escrita está implícito que os vértices dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  estão dispostos em ordem de correspondência.

**Definição 15: (Razão de semelhança.)** Considere os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  semelhantes. A *razão de semelhança* ( $k > 0$ ) entre os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , nesta ordem, é:

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

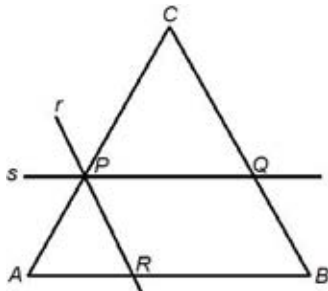
**Teorema 10:** Considere o triângulo  $ABC$  e os pontos  $P \in \overline{AC}$  e  $Q \in \overline{BC}$  tal que  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ . Então, o triângulo  $ABC$  é semelhante ao triângulo  $PQC$ .

*Demonstração:* Considere as retas  $r$  e  $s$  tais que  $s \supset \overline{PQ}$  e  $r \parallel \overline{BC}$  com  $P \in r$ . Considere ainda  $\{R\} = r \cap \overline{AB}$ . Como  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ , tem-se  $\widehat{C\hat{A}B} \cong \widehat{C\hat{P}Q}$  e  $\widehat{C\hat{Q}P} \cong \widehat{C\hat{B}A}$  (ângulos correspondentes). Além disso,  $\widehat{C}$  é ângulo comum aos triângulos  $ABC$  e  $PQC$ . Com isso, a condição (i) da Definição 14 está satisfeita, comprovando a semelhança entre os triângulos  $ABC$  e  $PQC$ . Também é possível mostrar que a condição (ii) da Definição 14 é satisfeita. De fato, como consequência do Teorema de Tales, se  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ , então  $\frac{AC}{PC} = \frac{BC}{QC}$  e, além disso, se  $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$ , então  $\frac{AC}{PC} = \frac{AB}{RB}$ . Como o quadrilátero  $PQBR$  tem os lados opostos paralelos, por construção, então ele é um paralelogramo, o que garante a igualdade:  $PQ = RB$ . Então, das três igualdades anteriores, tem-se:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PC} = \frac{BC}{QC} = k,$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade, o que satisfaz a condição (ii) da Definição 14: lados homólogos proporcionais. Novamente, conclui-se:  $\Delta ABC \sim \Delta PQC$ .  $\square$

A Figura 3 ilustra a situação do Teorema 10.



**Figura 3:** Ilustração do Teorema 10.

*Observações:* Quando  $k = 1$ , os triângulos são ditos *congruentes*. É fácil ver que: se  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$  e  $\Delta A'B'C' \cong \Delta A''B''C''$  ( $\cong$  significa *congruente*), então  $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$ .

A veracidade da equivalência das condições (i) e (ii) da Definição 14 ainda não foi provada nem assumida até aqui, apesar de ter sido citada. O teorema a seguir traz tal prova.

**Teorema 11:** Dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  possuem os três lados respectivamente proporcionais se, e somente se, seus ângulos internos forem respectivamente congruentes.

*Demonstração:* Considere as correspondências  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$  entre os vértices.

( $\Rightarrow$ ) Tem-se, por hipótese, que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}. \quad (\text{I})$$

Sem perda de generalidade, suponha  $AC > A'C'$ . Tome  $P \in \overline{AC}$ , tal que:

$$PC = A'C'. \quad (\text{II})$$

Traçando por  $P$  uma reta  $s$  tal que  $s \parallel \overline{AB}$  e tomando  $\{Q\} = s \cap \overline{BC}$  (observe a Figura 4), conclui-se, pela demonstração do Teorema 10, que:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PC} = \frac{BC}{QC} \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{QC}. \quad (\text{III})$$

De (I) e (III), tem-se:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{QC} \Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{QC} \Rightarrow B'C' = QC \text{ e} \quad (\text{IV})$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{PQ} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{PQ} \Rightarrow A'B' = PQ. \quad (\text{V})$$

De (II), (IV) e (V), conclui-se que o triângulo  $A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $PQC$ . Nota-se que:  $\Delta ABC \sim \Delta PQC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ . Todavia, a tese é provar que os ângulos são respectivamente congruentes. De fato, como  $s \parallel \overline{AB}$  e  $\Delta PQC \cong \Delta A'B'C'$ , tem-se:

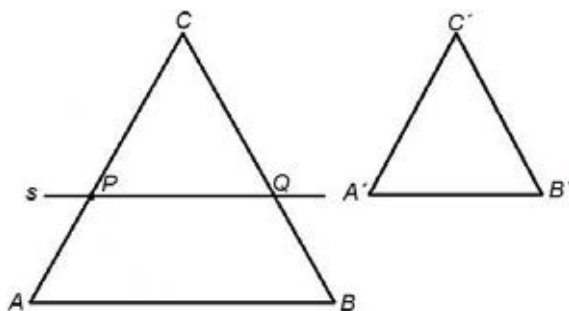
$$\hat{A} \cong C\hat{P}Q \cong \hat{A}', \hat{B} \cong P\hat{Q}C \cong \hat{B}' \text{ e } \hat{C} = A\hat{C}B \cong P\hat{C}Q \cong \hat{C}'.$$

( $\Leftarrow$ ) Tem-se, por hipótese, que:  $\hat{A} \cong \hat{A}'$ ,  $\hat{B} \cong \hat{B}'$  e  $\hat{C} \cong \hat{C}'$ . Considerando a construção da Figura 4, então, pela hipótese e pelo paralelismo da reta  $s$ , tem-se, nessa ordem:

$$\hat{A}' \cong \hat{A} \cong C\hat{P}Q, \hat{B}' \cong \hat{B} \cong P\hat{Q}C \text{ e } \hat{C}' \cong \hat{C} = A\hat{C}B \cong P\hat{C}Q.$$

Como os ângulos dos triângulos  $A'B'C'$  e  $PQC$  são respectivamente congruentes e, por construção,  $PC = A'C'$ , conclui-se que os triângulos  $A'B'C'$  e  $PQC$  são congruentes pelo critério *lado, ângulo, ângulo oposto* da congruência de triângulos, o qual é pré-requisito para este trabalho. Então:  $PQ = A'B'$ ,  $PC = A'C'$  e  $QC = B'C'$ . Disso e da demonstração do Teorema 10, chega-se na tese (lados homólogos proporcionais):

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PC} = \frac{BC}{QC} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}. \quad \square$$



**Figura 4:** Ilustração do Teorema 11 e da Propriedade 3.



Dentre os três casos de semelhança enunciados e provados a seguir, dar-se-á ênfase ao critério *LLL* (*Lado, Lado, Lado*), pois este é o único usado neste trabalho.

**Propriedade 1: (Caso de semelhança LLL: Lado, Lado, Lado.)** Dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes se possuem os três lados respectivamente proporcionais (lados homólogos proporcionais).

*Demonstração:* Este critério de semelhança é uma consequência direta da Definição 14. Para os autores que exigem a simultaneidade das condições (i) e (ii) da Definição 14, o Teorema 11 garante a Propriedade 1.  $\square$

**Propriedade 2: (Caso de semelhança AA: Ângulo, Ângulo.)** Dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes se possuem dois ângulos respectivamente congruentes.

*Demonstração:* Têm-se dois ângulos respectivamente congruentes por hipótese, que podem ser:  $\hat{A}' \cong \hat{A}$  e  $\hat{B}' \cong \hat{B}$ . Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , tem-se:

$$\begin{aligned} med(\hat{A}') + med(\hat{B}') + med(\hat{C}') &= 180^\circ = med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow med(\hat{C}') = med(\hat{C}) \Rightarrow \hat{C}' \cong \hat{C}. \end{aligned}$$

Como os três ângulos são respectivamente congruentes, a condição (i) da Definição 14 é satisfeita e, por isso, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes.  $\square$

**Propriedade 3: (Caso de semelhança LAL: Lado, Ângulo, Lado.)** Dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos do outro e se os ângulos compreendidos entre eles são congruentes.

*Demonstração:* Tem-se, por hipótese, que:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ e } \hat{C}' \cong \hat{C}. \quad (\text{I})$$

Sem perda de generalidade, suponha  $AC > A'C'$ . Tome  $P \in \overline{AC}$ , tal que:

$$PC = A'C'. \quad (\text{II})$$

Traçando por  $P$  uma reta  $s$  tal que  $s \parallel \overline{AB}$  e tomando  $\{Q\} = s \cap \overline{BC}$  (observe a Figura 4), conclui-se, pela demonstração do Teorema 10 e da Igualdade (II), que:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PC} = \frac{BC}{QC} \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{QC}. \quad (\text{III})$$

De (I) e (III), tem-se:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{QC} \Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{QC} \Rightarrow B'C' = QC. \quad (IV)$$

De (I), (II) e (IV), conclui-se que o triângulo  $A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $PQC$ , pois  $PC = A'C'$ ,  $\widehat{C'} \cong \widehat{C}$  e  $B'C' = QC$  trata-se do critério de congruência *lado proporcional, ângulo congruente, lado proporcional*, o qual é pré-requisito para este trabalho. Do Teorema 10 e da congruência entre os triângulos  $A'B'C'$  e  $PQC$ , nota-se que:

$$\Delta ABC \sim \Delta PQC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'. \quad \square$$

**Propriedade 4:** A área de um triângulo equilátero de aresta  $L$  é dada por:

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}. \quad (15)$$

*Demonstração:* Tome um triângulo equilátero  $ABC$  de aresta  $L$ . Seja  $M$  o ponto médio do lado  $\overline{AB}$ . O fato de o triângulo  $ABC$  ser equilátero implica:  $\Delta AMC \sim \Delta BMC$ . De fato,  $AC = BC = L$ ,  $AM = BM = L/2$ , pois  $M$  é ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $\overline{MC}$  é lado comum. Pela Propriedade 1, tem-se  $\Delta AMC \sim \Delta BMC$ . Em particular,  $\widehat{AMC} \cong \widehat{BMC}$ . Assim, cada um desses ângulos é reto, pois se trata de ângulos adjacentes suplementares. Logo, o  $\Delta BMC$  é retângulo em  $M$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $BMC$ , tem-se:

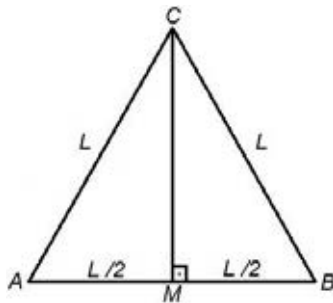
$$(BC)^2 = (CM)^2 + (BM)^2 \Rightarrow L^2 = (CM)^2 + (L/2)^2 \Rightarrow (CM)^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4}.$$

$$\therefore CM = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Como a área de qualquer triângulo é metade do produto da base ( $AB$ ) pela altura ( $CM$ ) relativa a esta base, tem-se:

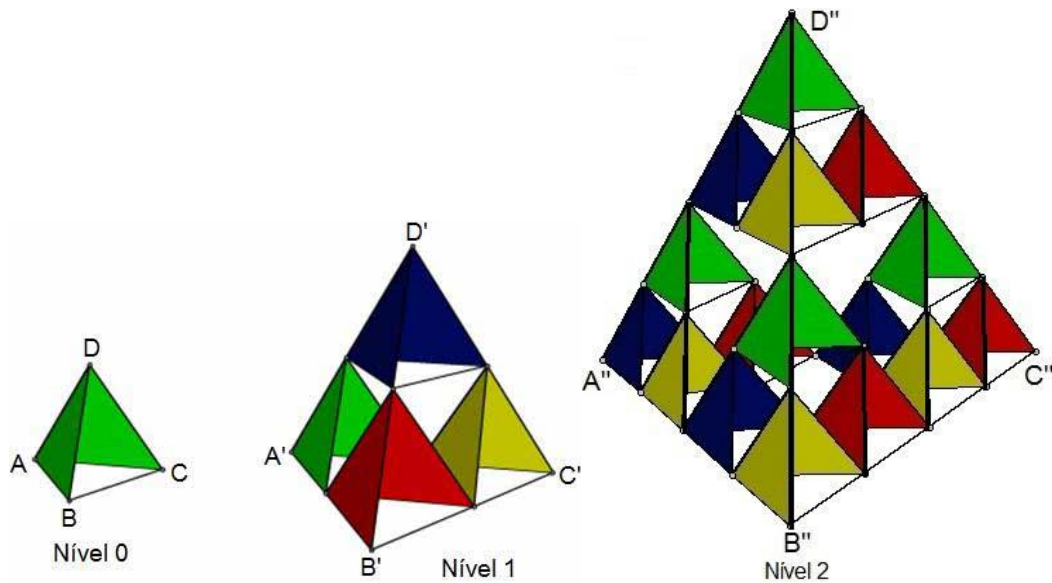
$$\text{área}(ABC) = \frac{AB \cdot CM}{2} = \frac{L \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}. \quad \square$$

A Figura 5 ilustra a situação da Propriedade 4.



**Figura 5:** Triângulo equilátero  $ABC$ .

## 4.2 Uso da pipa tetraédrica de Graham Bell no estudo da semelhança de triângulos



**Figura 6:** Repete-se aqui a Figura 1: os três primeiros níveis da pipa tetraédrica.

Segue as questões aplicadas à segunda série do ensino médio, conforme Apêndice B.

**Questão 1:** Esta questão procura calcular a razão de semelhança entre triângulos encontrados na pipa, encontrar a relação entre as áreas de triângulos semelhantes, bem como estabelecer relações entre ambas. Sendo  $L$  o comprimento de cada canudo usado na construção das pipas, pede-se no item (a) (observando a Figura 6):

a) Prove que os triângulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  são semelhantes. Determine a razão de semelhança entre o comprimento das arestas das pipas dos níveis: um e zero; dois e zero; dois e um.

Por construção, os triângulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  são equiláteros com arestas medindo  $L$ ,  $2L$  e  $4L$ , respectivamente. Então, pela Propriedade 1, tem-se:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C';$$

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{BC}{B''C''} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{L}{4L} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A''B''C'' \text{ e}$$

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''} = \frac{A'C'}{A''C''} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C'' .$$

Portanto, os triângulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  são semelhantes, com razão de semelhança entre o comprimento das arestas das pipas dos níveis:

$$\text{Um e zero: } \frac{A'B'}{AB} = \frac{2L}{L} = 2; \text{ dois e zero: } \frac{A''B''}{AB} = \frac{4L}{L} = 4 \text{ e dois e um: } \frac{A''B''}{A'B'} = \frac{4L}{2L} = 2.$$

b) Determine a razão entre as áreas dos triângulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  (dois a dois).  
 Conclusão: o que acontece com a área de um triângulo equilátero quando sua aresta duplica (nível zero para 1)? E quando a aresta quadruplica (nível zero para 2)?

Sejam  $A_0 = \text{área}(ABC)$ ,  $A_1 = \text{área}(A'B'C')$  e  $A_2 = \text{área}(A''B''C'')$ . Então:

$$A_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}, A_1 = \frac{(2L)^2\sqrt{3}}{4} = L^2\sqrt{3} \text{ e } A_2 = \frac{(4L)^2\sqrt{3}}{4} = 4L^2\sqrt{3},$$

devido à Propriedade 4. Daí, tem-se a razão entre as áreas dos triângulos:

$$A'B'C' \text{ e } ABC: \frac{A_1}{A_0} = \frac{L^2\sqrt{3}}{L^2\sqrt{3}/4} = 4;$$

$$A''B''C'' \text{ e } A'B'C': \frac{A_2}{A_1} = \frac{4L^2\sqrt{3}}{L^2\sqrt{3}} = 4 \text{ e}$$

$$A''B''C'' \text{ e } ABC: \frac{A_2}{A_0} = \frac{4L^2\sqrt{3}}{L^2\sqrt{3}/4} = 16.$$

Conclusão que o aluno deve ter: quando a aresta duplica, a área do triângulo equilátero quadruplica, pois  $A_1 = 4A_0$  (ou  $A_2 = 4A_1$ ); quando a aresta quadruplica, a área do triângulo equilátero fica 16 vezes maior, conforme se nota que  $A_2 = 16A_0$ .

c) Considere  $a_n$  o comprimento da aresta da pipa do nível  $n$ . Observando que a cada mudança de nível a aresta da pipa dobra, nota-se que os comprimentos das arestas em cada nível formam uma progressão geométrica. Determine o termo geral dessa PG em função de  $L$ . Qual a razão de semelhança entre o triângulo da face do nível  $n$  e o triângulo da face do nível zero em função de  $n$ ? Chame essa razão de  $k_n$ .

Percebe-se que, a cada mudança de nível, a aresta da pipa dobra de comprimento conforme Figura 6, além de ter sido enunciado. Então, o comprimento da aresta da pipa do nível  $n$  obedece à PG de primeiro termo  $a_0 = L$  (enunciado) e razão 2 (da construção). Isto é:

$$a_n = L \cdot 2^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (16)$$

No ensino médio, basta observar que o comprimento da aresta da pipa do nível 1 é  $2L$  e do nível 2 é  $4L$ , onde:  $a_1 = 2L = L \cdot 2^1$  e  $a_2 = 4L = L \cdot 2^2$ . Ou seja, basta notar que o índice do termo e o expoente da potência de base 2 são iguais para justificar a Equação (16). Todavia, a demonstração pelo Princípio da Indução Finita está feita na Equação (8), onde  $a_n$  é representado por  $A_n$ . Razão de semelhança entre os triângulos das faces dos níveis  $n$  e zero:

$$k_n = \frac{a_n}{a_0} = \frac{L \cdot 2^n}{L} = 2^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (17)$$

d) Considere  $A_n$  a área de uma face da pipa do nível  $n$ . Conforme observado no item b para os níveis iniciais, a cada mudança de nível a área de uma face da pipa quadruplica, concluindo que se trata de uma progressão geométrica. Determine o termo geral dessa PG em função de  $L$  usando esta observação. Calcule novamente  $A_n$  usando o comprimento da aresta da pipa do nível  $n$  ( $a_n$ ) encontrado no item c. Determine a razão entre a área do nível  $n$  e a do nível zero em função de  $n$ . Prove que a razão entre a área do nível  $n$  e a do nível zero é  $(k_n)^2$ .

De acordo com a citada observação do item (b),  $A_n$  é o termo geral de PG de razão 4 (área quadruplica a cada mudança de nível) e primeiro termo, conforme Propriedade 4, igual a  $A_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ . Provocar essa percepção nos alunos resulta no termo geral:

$$A_n = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (18)$$

A Equação (18) pode ser provada usando o Princípio da Indução Finita, ou conforme pediu o enunciado, com a aresta do nível  $n$  já calculada na Equação (16). Da Propriedade 4:

$$A_n = \frac{(a_n)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_n = \frac{(L \cdot 2^n)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4^n, \text{ o que prova a Equação (18).}$$

Este item também pede a razão entre a área do nível  $n$  e a do nível zero em função de  $n$ , que vale:

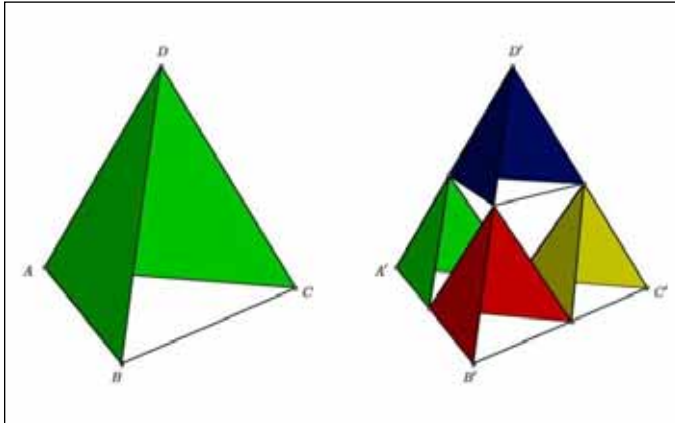
$$\frac{A_n}{A_0} = \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4^n}{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}} = 4^n.$$

Note que,  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , tem-se:

$$\frac{A_n}{A_0} = 4^n = (2^2)^n = (2^n)^2 \Rightarrow \frac{A_n}{A_0} = (k_n)^2.$$

Aqui fica comprovado, com a motivação da pipa, que a razão entre as áreas de dois triângulos equiláteros é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles, cuja propriedade poderá ser estendida, pelo professor, para triângulos quaisquer.

**Questão 2:** Esta questão deixa claro que, na prática, não foram construídas as pipas conforme a figura a seguir. Ou seja, não foram construídas duas pipas exatamente do mesmo tamanho (arestas de mesmo comprimento), mas com quantidade de células diferente. O objetivo aqui é mostrar uma intrigante relação entre as áreas das asas de pipas com diferentes quantidades de células.



**Figura 7:** Duas pipas de arestas congruentes: à esquerda com uma célula e à direita com quatro células.

A figura anterior, encontrada em BORTOLOSSI (2013a) no ícone “Formulário de Acompanhamento do Aluno”, mostra essa nova situação, onde os tetraedros  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  são congruentes e a quantidade de células é diferente.

Item (a) da Questão 2 do Apêndice B: *Considere as duas pipas da Figura 7 como sendo estruturas tetraédricas regulares, onde  $AB = A'B' = a$ . Determine a área das asas (ou seja, do papel seda) das pipas  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  em função de  $a$ .*

Sendo  $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  a área de triângulo equilátero de aresta  $a$ , conforme Propriedade 4, e notando-se que a pipa  $ABCD$  tem dois triângulos equiláteros de aresta  $a$  revestidos com papel de seda, pode-se afirmar que a área das asas dessa pipa é:

$$\text{área}(ABCD) = 2A = 2 \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

A pipa  $A'B'C'D'$  tem 8 asas, as quais são triângulos equiláteros de aresta  $a/2$ , uma vez que são tomados os pontos médios das arestas da pipa  $ABCD$  para se obter os demais vértices dos tetraedros menores na pipa  $A'B'C'D'$ . Assim, conforme Propriedade 4, pode-se afirmar que a área das asas dessa pipa é:

$$\text{área}(A'B'C'D') = 8 \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

b) *Subdivide a pipa  $A'B'C'D'$ , criando outra de 16 células semelhante a do nível 2 da Figura 6, porém com arestas regulares e  $A''B'' = a$ . Determine a área das asas dessa nova pipa em função de  $a$ .*

Repare que a nova pipa  $A''B''C''D''$  tem 16 células (tetraedros menores), o que resulta em 32 asas. Cada asa é triângulo equilátero de aresta  $a/4$ , pois foram tomados os pontos médios das arestas da pipa  $A'B'C'D'$  para se obter os demais vértices dos tetraedros menores na pipa  $A''B''C''D''$ . Assim, conforme Propriedade 4, tem-se:

$$\text{área}(A''B''C''D'') = 32 \frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

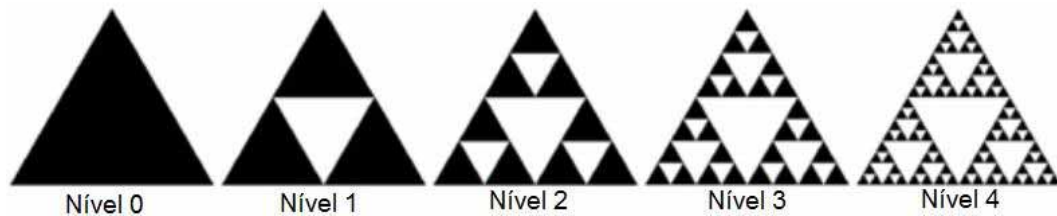
c) *Generalize esta questão para um nível qualquer.*

Seja  $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}D^{(n)}$  a pipa tetraédrica após  $n$  subdivisões com  $A^{(n)}B^{(n)} = AB = a$ . Sejam  $Q_n$  e  $a_n$  a quantidade de triângulos revestidos com papel de seda e o comprimento da aresta de cada um desses triângulos, respectivamente, no nível  $n$ . Usando o *Princípio da Indução Finita*, pode-se provar que  $Q_n$  é uma PG de razão 4 e primeiro termo  $Q_0 = 2$  e  $a_n$  é uma PG de razão  $1/2$  e primeiro termo  $a_0 = a$ . Isto é:  $Q_n = 2 \cdot 4^n$  e  $a_n = a \cdot (1/2)^n$ . Então:

$$\text{área}(A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}D^{(n)}) = Q_n \frac{(a_n)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2 \cdot 4^n \frac{(a \cdot (1/2)^n)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

O objetivo dessa questão é fazer o aluno notar que a área total das asas não mudará, por mais que continue subdividindo a pipa obedecendo ao algoritmo citado.

**Questão 3:** Esta questão, do Apêndice B, procura relacionar a pipa com o Triângulo de Sierpinski, porém com uma abordagem diferente àquela da primeira série do ensino médio. Observando os níveis do Triângulo de Sierpinski da Figura 8, responda as questões:



**Figura 8:** Repete-se a Figura 2: os cinco primeiros níveis da construção do Triângulo de Sierpinski.

a) *Repare que no nível 1 são formados 3 novos triângulos (congruentes entre si, contando apenas os pretos) em relação ao nível zero. Quantos novos triângulos são formados nos níveis dois e três? Seja  $T_n$  o número de triângulos (pretos) do nível  $n$ . Observando-se que trata-se de uma PG, determine  $T_n$  em função de  $n$ .*

Os triângulos pretos, chamados aqui de *novos triângulos formados*, são os triângulos que restam em cada nível da construção. Nota-se que no nível dois restam 9 triângulos e, no nível três, restam 27. Sendo  $T_0 = 1 = 3^0$ ,  $T_1 = 3 = 3^1$ ,  $T_2 = 9 = 3^2$  e  $T_3 = 27 = 3^3$ , o aluno deve notar que se trata de uma PG de razão 3 e primeiro termo igual a  $T_0 = 1$ . Daí:

$$T_n = 3^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (19)$$

Para justificar a Equação (19), o argumento anterior é suficiente no ensino médio. Todavia, segue a demonstração através do Princípio da Indução Finita (PIF): para  $n = 0$ , tem-se da Equação (19):  $T_0 = 3^0 = 1$ , que é a quantidade de triângulos no nível zero.

Hipótese de indução (HI): supor que, para algum  $n > 0$ , vale a Equação (19).

Tese: provar que vale a Equação (19) para o sucessor de  $n$ .

De fato: para construir o Triângulo de Sierpinski do nível  $n + 1$  deve-se, conforme a construção, tomar os pontos médios das arestas dos triângulos pretos do nível  $n$  e retirar o triângulo central com vértices nesses pontos. Com isso, em cada triângulo preto do nível  $n$  são formados três novos triângulos no nível  $n + 1$ , ou seja:

$$T_{n+1} = 3 \cdot T_n \Rightarrow T_{n+1} = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

Então, pelo PIF, a Equação (19) é verdadeira.  $\square$

b) Seja  $L$  a aresta do triângulo equilátero do nível zero. Considere  $a_n$  o comprimento de cada aresta dos novos triângulos formados (pretos) no nível  $n$ . Determine  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  em função de  $L$ . Observando-se que trata-se de uma PG, determine  $a_n$  em função de  $n$  e  $L$ .

Como são tomados sempre os pontos médios das arestas de cada triângulo preto para se retirar o triângulo central com vértices nesses pontos, nota-se que, a partir de  $a_0 = L$ , tem-se  $a_1 = L/2$ ,  $a_2 = L/4$  e  $a_3 = L/8$ .

Para justificar o termo geral, o aluno deve perceber que:

$a_1 = \frac{L}{2} = L \left(\frac{1}{2}\right)^1$ ,  $a_2 = \frac{L}{4} = L \left(\frac{1}{2}\right)^2$  e  $a_3 = \frac{L}{8} = L \left(\frac{1}{2}\right)^3$ , ou seja, trata-se de uma PG de razão  $1/2$  e primeiro termo  $a_0 = L$ , cujo termo geral é:

$$a_n = L \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (20)$$



Segue a demonstração da Equação (20) através do Princípio da Indução Finita (PIF): para  $n = 0$ , tem-se da Equação (20):  $a_0 = L \left(\frac{1}{2}\right)^0 = L$ , que é o comprimento da aresta do triângulo do nível zero.

Hipótese de indução (HI): supor que, para algum  $n > 0$ , vale a Equação (20).

Tese: provar que vale a Equação (20) para o sucessor de  $n$ .

De fato: para construir o Triângulo de Sierpinski do nível  $n + 1$  deve-se, conforme a construção, tomar os pontos médios das arestas dos triângulos pretos do nível  $n$  e retirar o triângulo central com vértices nesses pontos. Com isso, cada aresta dos triângulos que restam no novo nível será a metade da aresta de um triângulo preto do nível anterior, ou seja:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot L \left(\frac{1}{2}\right)^n = L \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Então, pelo PIF, a Equação (20) é verdadeira.  $\square$

*c) Seja  $A_n$  a soma das áreas dos novos triângulos formados no nível  $n$ , ou seja,  $A_n$  é a área de toda região preta do nível  $n$ . Usando os itens a e b, mostre que  $A_n = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ , ou seja, trate-se de uma PG de 1º termo  $A_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$  e razão  $3/4$ . Você percebe essa PG apenas observando a Figura 8? Justifique com suas palavras. Essa PG é convergente ou divergente? Limitada ou ilimitada? Crescente ou decrescente?*

No nível  $n$  há  $T_n$  triângulos equiláteros de aresta  $a_n$ . Então, pelas Equações (15), (19) e (20), tem-se:

$$A_n = \frac{(a_n)^2\sqrt{3}}{4} \cdot T_n \Rightarrow A_n = \frac{\left(L\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3^n = \frac{L^2\sqrt{3}}{4 \cdot 4^n} \cdot 3^n = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n. \quad \square$$

Nota-se que, a cada mudança de nível, subdivide-se um triângulo preto em quatro triângulos (três pretos e um branco). Como todos esses quatro triângulos são congruentes entre si, conclui-se que a área dos três triângulos pretos é  $3/4$  da área total dos quatro triângulos (ou do triângulo preto do nível anterior, que originou esses quatro). Assim, é possível perceber que se trata de uma PG de razão  $3/4$  e primeiro termo  $A_0$  (área de um triângulo equilátero de aresta  $L$ ) apenas observando a Figura 8.

Essa PG é convergente, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] = 0$  e, pelo Teorema 3, a sequência  $(A_n)$  é limitada. Note, ainda, que  $(A_n)$  é decrescente, pois:

$$A_{n+1} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n = A_n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Observando-se que essa PG tem primeiro termo  $A_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$  e razão  $q = \frac{3}{4}$ , a Proposição (v) do Lema 5 também garante que a progressão geométrica  $(A_n)$  é convergente e limitada, pois  $|q| < 1$ , enquanto a Proposição (iii) desse lema garante que esta sequência é decrescente, pois  $0 < q < 1$  e  $A_0 > 0$ .

*d) Se montarmos uma PG infinita com essas áreas, qual a soma dos infinitos termos dessa PG em função de L?*

A soma dos infinitos termos de uma PG de razão  $q = 3/4$  e primeiro termo  $A_0$  é uma série geométrica convergente, conforme Equação (3), dada por:

$$S = \frac{A_0}{1 - q} = \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = L^2\sqrt{3}.$$

O objetivo dessas questões é fazer o aluno recordar e aplicar as equações que envolvam o termo geral de uma PG e de séries geométricas convergentes, vistas na série anterior, relacionando-as com o conteúdo da série atual. O termo *PG infinita* é uma redundância, pois toda sequência é infinita por definição. Todavia, na educação básica, a maioria dos autores define progressões geométricas *finita* e *infinita* e, por isso, estes termos aparecem nas questões voltadas para os alunos.

## 5 USO DA PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL NA TERCEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO: ESTUDO DOS TETRAEDROS

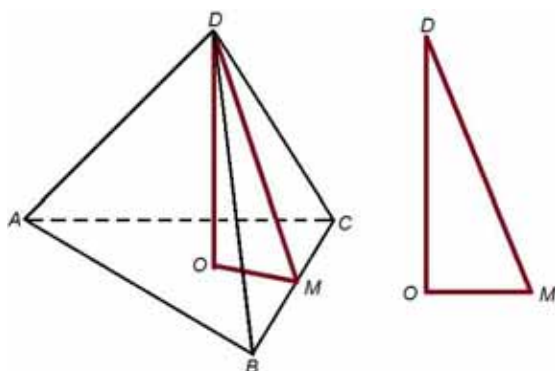
O trabalho desenvolvido pela terceira série do ensino médio foi a construção da pipa, pesquisa histórica sobre Alexander Graham Bell e sobre fractais, além do trabalho escolar envolvendo progressões geométricas, peso e volume das estruturas tetraédricas, conforme Apêndice C. A transcrição, resolução e comentários sobre o objetivo de cada questão deste são feitas a seguir. Antes disso, alguns conceitos pertinentes a esse trabalho são citados a seguir.

### 5.1 Conceitos iniciais: peso e volume de um tetraedro regular

**Definição 16: (Módulo P da força peso.)** Considere um objeto de massa  $m$  submetido à ação gravitacional de algum astro celeste de módulo  $g$ . O *peso* do objeto é a força gravitacional atrativa que o astro celeste aplica nele, cujo módulo é:  $P = m \cdot g$ .

**Propriedade 5:** O volume de um tetraedro regular de aresta  $L$  é dado por:  $V = \frac{L^3\sqrt{2}}{12}$ .

*Demonstração:* A Figura 9 mostra um tetraedro regular  $ABCD$ , sendo  $M$  o ponto médio de  $\overline{BC}$  e  $O$  é o centro (ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro) do triângulo equilátero  $ABC$ .



**Figura 9:** Tetraedro regular.

Sendo  $L$  a aresta desse tetraedro, tem-se:  $\overline{DM}$  é apótema do tetraedro, sendo igual à altura de um triângulo equilátero de aresta  $L$ , ou seja,  $DM = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ ;  $\overline{OM}$  é apótema da base, sendo igual à

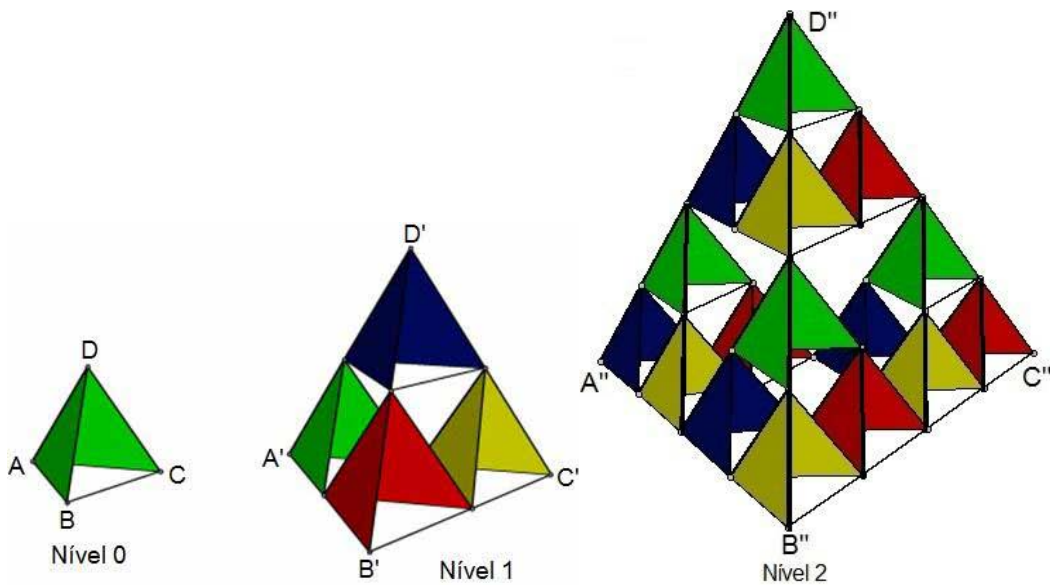
terça parte da altura de um triângulo equilátero de aresta  $L$ , ou seja,  $OM = \frac{L\sqrt{3}}{6}$  e  $\overline{OD}$  é a altura do tetraedro relativa à base  $ABC$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no  $\Delta DOM$  retângulo em  $O$ , tem-se:

$$\begin{aligned}(DM)^2 &= (OM)^2 + (OD)^2 \Rightarrow (OD)^2 = \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{L\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3L^2}{4} - \frac{3L^2}{36} = \frac{27L^2 - 3L^2}{36} \Rightarrow \\ &\Rightarrow OD = \sqrt{\frac{24L^2}{36}} = \frac{2L\sqrt{6}}{6} \Rightarrow OD = \frac{L\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

Como a área da base do tetraedro (triângulo equilátero de aresta  $L$ ) é dada pela Equação (15) e o volume de uma pirâmide qualquer é a terça parte do produto da área da base pela altura da pirâmide, tem-se que o volume desse tetraedro é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot OD = \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{L\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3\sqrt{18}}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3L^3\sqrt{2}}{12} = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} \quad \square$$

## 5.2 Uso da pipa tetraédrica de Graham Bell no estudo dos tetraedros regulares



**Figura 10:** Repete-se aqui a Figura 1: os três primeiros níveis da pipa tetraédrica.

**Questão 1:** Os quatro itens dessa questão do Apêndice C são iguais aos quatro primeiros itens da Questão 1 do Apêndice A, cujas soluções foram apresentadas na Seção 2.

**Questão 2:** Esta questão procura calcular a área das asas das pipas construídas, conforme Figura 10. Entende-se por asa como sendo todo triângulo onde tem papel seda.

a) Seja  $L$  o comprimento do canudo usado, isto é, a área total das asas da estrutura tetraédrica do nível zero vale  $A_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{2}$ , ou seja, a área de dois triângulos equiláteros de aresta  $L$ . Então, qual a área total das asas da pipa do nível 1? E do nível 2?

No nível 1 há quatro estruturas tetraédricas iguais à do nível zero. Então:

$$A_1 = 4A_0 = 4 \frac{L^2\sqrt{3}}{2}.$$

No nível 2 há quatro estruturas tetraédricas iguais à do nível 1. Então:

$$A_2 = 4A_1 = 4 \cdot 4 \frac{L^2\sqrt{3}}{2} = 4^2 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}.$$

b) Se montarmos uma sequência da área total das asas (triângulos onde tem o papel seda) em cada nível, teremos uma PG? Escreva os cinco primeiros elementos dessa sequência e sua razão. Encontre o termo geral dessa sequência em função de  $n$  e  $L$ , considerando  $A_n$  como sendo a área total das asas da pipa do nível  $n$ .

A situação trata-se de uma PG de razão 4, pois a cada mudança de nível usa-se quatro estruturas tetraédricas deste nível para construir o nível seguinte. Usando este raciocínio, já empregado no item (a), os cinco primeiros termos são:

$$(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4) = \left( 4^0 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}, 4^1 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}, 4^2 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}, 4^3 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}, 4^4 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2} \right).$$

Daí, o aluno deve perceber o termo geral dessa PG, que é:

$$A_n = 4^n \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (21)$$

**Questão 3:** a) Seja  $P$  o peso de cada canudo usado e considere desprezível o peso das folhas de seda e das linhas, isto é, o peso total da estrutura tetraédrica do nível zero é  $P_0 = 6P$ , ou seja, o peso das seis arestas. Então, qual o peso total da pipa do nível 1? E do nível 2?

No nível 1 há quatro estruturas tetraédricas iguais à do nível zero. Então:

$$P_1 = 4P_0 = 4 \cdot 6P = 24P.$$

No nível 2 há quatro estruturas tetraédricas iguais à do nível 1. Então:

$$P_2 = 4P_1 = 4 \cdot 24P = 96P.$$

b) Se montarmos uma sequência do peso total da pipa em cada nível, teremos uma PG? Escreva os cinco primeiros elementos dessa sequência e sua razão. Encontre o termo geral dessa sequência em função de  $n$  e  $P$ , considerando  $P_n$  como sendo o peso total da pipa do nível  $n$ .

A situação trata-se de uma PG de razão 4, pois a cada mudança de nível usa-se quatro estruturas tetraédricas para construir o nível seguinte, sendo que a espessura do canudo não é alterada. Usando este raciocínio, já empregado no item (a), os cinco primeiros termos são:

$$(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4) = (4^0 \cdot 6P, 4^1 \cdot 6P, 4^2 \cdot 6P, 4^3 \cdot 6P, 4^4 \cdot 6P).$$

Daí, o aluno deve perceber o termo geral dessa PG, que é:

$$P_n = 4^n \cdot 6P, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (22)$$

Usando o *Princípio da Indução Finita*, fica fácil demonstrar as Equações (21) e (22), observando-se apenas que, a cada mudança de nível, são usadas quatro estruturas tetraédricas do nível atual para construir o nível seguinte.

**Questão 4:** a) A relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível zero é  $P_0/A_0$ ; encontre-a usando os resultados das questões anteriores. Qual a relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível 1? E do nível 2?

Relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível zero:

$$\frac{P_0}{A_0} = \frac{6P}{\frac{L^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{12P}{L^2\sqrt{3}} = \frac{12P\sqrt{3}}{3L^2} = \frac{4P\sqrt{3}}{L^2}.$$

Relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível 1:

$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{4 \cdot 6P}{4 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{12P}{L^2\sqrt{3}} = \frac{12P\sqrt{3}}{3L^2} = \frac{4P\sqrt{3}}{L^2}.$$

Relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível 2:

$$\frac{P_2}{A_2} = \frac{4^2 \cdot 6P}{4^2 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{12P}{L^2\sqrt{3}} = \frac{12P\sqrt{3}}{3L^2} = \frac{4P\sqrt{3}}{L^2}.$$

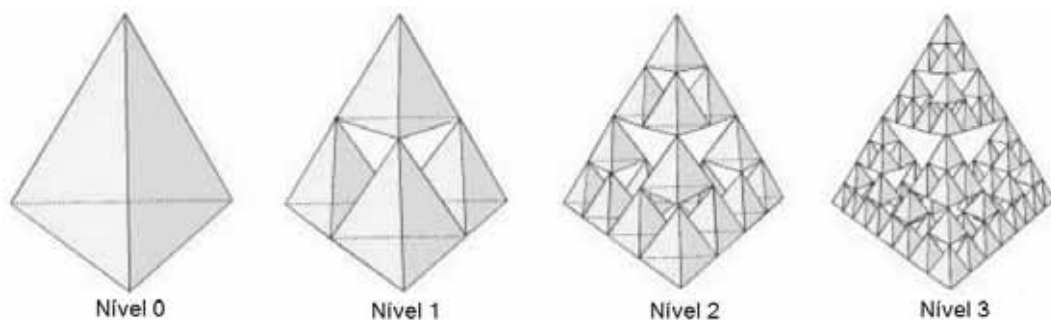
b) Qual a relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível  $n$ ? Explique porque este fato não viola a afirmação de Simon Newcomb (1835–1909): “Considere duas máquinas voadoras semelhantes, sendo que uma tem o dobro da escala da outra. Todos sabemos que o volume e, então, o peso de dois corpos semelhantes são proporcionais aos cubos de suas dimensões. O cubo de dois é 8; então a máquina maior terá 8 vezes o peso da máquina menor. As áreas das superfícies destas máquinas, por outro lado, são proporcionais aos quadrados de suas dimensões. O quadrado de dois é 4. Desta maneira, a máquina mais pesada exporá ao vento uma superfície com área apenas 4 vezes maior, tendo então uma nítida desvantagem na razão eficiência por peso.”

Pode-se calcular a relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível  $n$  usando as Equações (21) e (22):

$$\frac{P_n}{A_n} = \frac{4^n \cdot 6P}{4^n \cdot \frac{L^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{12P}{L^2 \sqrt{3}} = \frac{12P\sqrt{3}}{3L^2} = \frac{4P\sqrt{3}}{L^2}.$$

Nota-se que a “razão eficiência por peso” não é prejudicada na pipa tetraédrica de Graham Bell, mesmo em estruturas imensas ( $n$  grande), pois a razão  $P_n/A_n$  é uma constante (só depende de  $P$  e  $L$  fixados inicialmente). Este fato não viola a afirmação de Simon Newcomb, pois a espessura dos palitos não aumentou proporcionalmente ao comprimento e as pipas de níveis diferentes não são figuras semelhantes, o que foi considerado na afirmação de Simon Newcomb. Todavia, Graham Bell conseguiu criar duas máquinas voadoras, as pipas tetraédricas, onde a mais pesada não está em desvantagem em relação a mais leve, contrariando o fim da afirmação de Simon Newcomb.

**Questão 5:** Nota-se que cada pipa da Figura 10 assemelha-se a uma Pirâmide de Sierpinski, como na figura a seguir. Esta questão trata dos tetraedros formados na construção dessa pirâmide, cujo algoritmo de construção é: construa um tetraedro regular, conforme Nível 0 da figura abaixo. Construa todos os segmentos com extremos nos pontos médios das arestas desse tetraedro, desde que o comprimento desses segmentos sejam igual à metade da medida da aresta desse tetraedro. Assim, formam-se os quatro tetraedros regulares do Nível 1. Sobre cada um dos tetraedros regulares formados no Nível 1, repete-se o procedimento anterior, obtendo-se a figura do Nível 2 abaixo. Refazendo esse processo indefinidamente, obtém-se a Pirâmide de Sierpinski, onde os quatro primeiros níveis da construção estão na Figura 11.



**Figura 11:** Os quatro primeiros níveis da construção da Pirâmide de Sierpinski.

a) Repare que no nível 1 são formados quatro tetraedros (congruentes entre si) em relação ao nível zero. Quantos tetraedros há no nível dois? Seja  $T_n$  o número de tetraedros do nível  $n$ . Observando-se que trata-se de uma PG, determine  $T_n$  em função de  $n$ .

Nota-se que há  $T_2 = 16$  tetraedros no nível 2. O propósito dessa questão é fazer o aluno observar que:

$$T_0 = 1 = 1 \cdot 4^0, T_1 = 4 = 1 \cdot 4^1 \text{ e } T_2 = 16 = 1 \cdot 4^2.$$

Daí, notar que se trata de uma PG de razão 4 e primeiro termo 1, cujo termo geral é:

$$T_n = 1 \cdot 4^n = 4^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (23)$$

Usando o *Princípio da Indução Finita*, fica fácil demonstrar a Equação (23), observando-se apenas que, a cada mudança de nível, são usadas quatro estruturas tetraédricas desse nível para construir o nível seguinte.

b) Seja  $L$  a aresta do tetraedro regular do nível zero. Considere  $a_n$  o comprimento de cada aresta dos novos tetraedros formados no nível  $n$  e observe que a cada mudança de nível a aresta de um tetraedro cai pela metade. Determine  $a_1$  e  $a_2$  em função de  $L$ . Observando-se que se trata de uma PG, determine  $a_n$  em função de  $n$  e  $L$ . Essa PG é limitada?

O propósito dessa questão é fazer o aluno observar que:

$$a_0 = L = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0, a_1 = \frac{L}{2} = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \text{ e } a_2 = \frac{L}{4} = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

A partir daí, notar que  $(a_n)$  é uma PG de razão  $1/2$  e primeiro termo igual a  $L$ , ou seja:

$$a_n = L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (24)$$

Usando o *Princípio da Indução Finita*, fica fácil demonstrar a Equação (24), observando-se apenas que, a cada mudança de nível, a aresta de um tetraedro cai pela metade. Nota-se, ainda, que a PG  $(a_n)$  converge para zero, pois:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = L \cdot 0 = 0.$$

Como toda sequência convergente é limitada, segundo do Teorema 3, então  $(a_n)$  é limitada. Também se pode dizer que  $(a_n)$  é limitada através da Definição 4, pois:

$$|a_n| = \left| L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| = \frac{L}{2^n} \leq L < L + 1, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Percebe-se, então, que  $a_n \in ]0, L]$ . Mais ainda, que zero é ínfimo e  $L$  é supremo do conjunto  $\{a_n\}$  formado pelos termos da sequência  $(a_n)$ . A Proposição (v) do Lema 5 também responde o fato de  $(a_n)$  ser convergente e limitada, pois  $|q| < 1$ .



c) Seja  $V_n$  o volume da Pirâmide de Sierpinski no nível  $n$ , ou seja,  $V_n$  é a soma dos volumes de todos os tetraedros congruentes que restaram no nível  $n$ . Sabe-se que  $V_0 = \frac{L^3\sqrt{2}}{12}$  é o volume do tetraedro do nível zero. Usando os itens a e b, mostre que  $V_n = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , ou seja, trata-se de uma PG de 1º termo  $V_0 = \frac{L^3\sqrt{2}}{12}$  e razão  $1/2$ . Você percebe essa PG apenas observando a Figura 11 (ou para suas pipas)? Justifique com suas palavras.

Basta tomar o produto entre a quantidade de tetraedros do nível  $n$ , do item (a), e o volume de cada tetraedro desse nível, o qual pode ser calculado usando-se a aresta do nível  $n$  calculada no item (b). Disto e da Propriedade 5, que dá o volume de um tetraedro regular, tem-se,  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , que:

$$V_n = T_n \cdot \frac{a_n^3\sqrt{2}}{12} = 4^n \cdot \frac{\left[L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^3\sqrt{2}}{12} = 4^n \cdot \frac{\left[L \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^3\sqrt{2}}{12} = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{4^n}{8^n} = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad \square$$

A maioria dos alunos respondeu que conseguiu perceber essa PG apenas observando a Figura 11 (ou para suas pipas), o que logicamente não é verdade. Afinal, há grande dificuldade em notar-se a razão  $1/2$  visualizando apenas as pipas.

d) Se montarmos uma PG infinita com esses volumes, qual a soma dos infinitos termos dessa PG em função de  $L$ ?

Trata-se de uma PG infinita de razão  $q = 1/2$  e primeiro termo  $V_0 = \frac{L^3\sqrt{2}}{12}$ , cuja soma  $S$  dada pela Equação (3), vale:

$$S = \frac{V_0}{1 - q} = \frac{\frac{L^3\sqrt{2}}{12}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{L^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{L^3\sqrt{2}}{6}.$$

Fica claro que o objetivo deste trabalho na terceira série do ensino médio é relacionar o estudo dos tetraedros com as progressões geométricas, uma vez que a maioria dos exercícios trabalhados se preocupou com essas relações. Além disso, este trabalho torna-se um pretexto para revisar conceitos de séries anteriores.

## **6 ANÁLISE FILOSÓFICA DA EDUCAÇÃO ESCOLAR COMO MEDIADORA ENTRE O COTIDIANO (SENSO COMUM) E O NÃO-COTIDIANO (CONHECIMENTO OBJETIVO): OS CAMINHOS EM PIAGET E EM VIGOTSKI**

Piaget identifica quatro estágios de desenvolvimento intelectual com características qualitativas diferentes: sensório-motor; pré-operatório; operações concretas e operações formais. Uma prévia explicação do segundo e quarto períodos a seguir.

O período pré-operatório do pensamento vai dos dois anos de idade até aos seis. Neste a criança ainda tem condições de se colocar no lugar do outro. Todavia é o período em que a linguagem permitirá à criança adquirir uma progressiva interiorização, graças ao emprego de sinais verbais, sociais e transmissíveis socialmente. Nesta fase tudo pode, tudo é tudo. Este é o período do faz de conta, onde uma régua pode ser uma nave espacial, sabugo de milho pode ser gente etc. A criança usa sua imaginação para criar suas fantasias. O uso dessa inteligência é a mesma da hipotética lógica, ou seja, para aprender números negativos, por exemplo, ela terá que se abstrair. Afinal duas maçãs negativas fogem do conceito presente de maçã quando o aluno estuda os números negativos. Repare como viver bem o mundo do faz de conta é importante para outra fase: operatório formal. Quem não viver bem o período pré-operatório, não conseguirá ter sucesso no operatório formal, devido ao fato de estar sendo usada a mesma inteligência em ambos os períodos.

No período das operações formais, a partir dos 12 anos, há o aparecimento do pensamento formal, graças ao qual se torna possível uma coordenação das operações para resolver determinado problema. O adolescente deixa de ter um raciocínio fragmentado, tornando-se capaz de relacionar ideias. Considerando o fato de que um fenômeno é regido por diversos fatores, ele aprende a combiná-los e integrá-los em um sistema que considera todas as possibilidades.

O lema “aprender a aprender” nos ideários construtivistas, onde há uma preocupação no uso das operações formais pelo adolescente, e também na escola nova, define-se:

[...] o núcleo definidor do lema “aprender a aprender” reside na desvalorização da transmissão do saber objetivo, na diluição do papel da escola em transmitir esse saber, na descaracterização do papel do professor como alguém que detém um saber a ser transmitido aos seus alunos, na própria negação do ato de ensinar (DUARTE, 2006, p. 8).

Um dos posicionamentos valorativos desse lema evidencia que o aluno deve dirigir o ensino, isto é, que o conteúdo ensinado deve ser voltado apenas para aquilo que é de seu interesse.

[...] consiste em ressaltar que além de o aluno buscar por si mesmo o conhecimento e nesse processo construir seu método de conhecer, é preciso também que o *motor* desse processo seja uma necessidade inerente à própria criança (DUARTE, 2006, pp. 40-41, grifo nosso).

Segundo a psicologia de Vigotski, o domínio de uma nação sobre a outra está intimamente ligado com o nível cultural em que se encontra e este é tão maior quanto maior for o conhecimento objetivo dos membros dela. Logo, não existe apenas saberes diferentes nessa concepção, mas um pode superar o outro. Um aluno que assistiu à aula inicial sobre triângulos, por exemplo, onde o professor usou três pauzinhos retos (material *concreto*, segundo Piaget), entenderá sua forma geométrica, bem como que com três medidas diferentes nem sempre será possível construí-lo. Porém, o aluno que vai mais a fundo e reconhece os ângulos internos e externos de um triângulo e suas somas; que um triângulo possui relações métricas e trigonométricas; que dois triângulos se relacionam por semelhança ou congruência; que um triângulo pode ter lados curvos em geometrias não euclidianas, este sim, ao ver um triângulo na rua, não enxergará apenas três pauzinhos. Segundo Vigotski, o triângulo se tornou *concreto* para ele. Acreditando nisto, os profissionais da educação devem defender veementemente o papel da escola em continuar *transmitindo* o conhecimento científico.

[...] estou intencionalmente contrapondo-me à tônica dominante nos ideários pedagógicos contemporâneos, os quais frequentemente concebem o processo educativo como um processo de interação entre significados subjetivos individuais em oposição à transmissão de um saber objetivo socialmente construído. Também é comum condenar como autoritária, etnocêntrica, falocêntrica e racista a defesa de que existam saberes mais desenvolvidos, que passaram a ter validade universal para o gênero humano e devam ser transmitidos pela escola (DUARTE, 2003, p. 78).

[...] a atividade humana é uma atividade criativa, por meio da qual o ser humano passa a ser mais do que apenas uma espécie biológica, transformando-se naquilo que poderia ser chamado de gênero humano, desde que por gênero humano se entenda o conjunto da humanidade, das relações sociais, enfim, o conjunto da cultura humana (DUARTE, 2003, p. 98).

Newton Duarte ainda afirma:

*A transmissão pelo adulto, à criança, da cultura construída na história social humana, não é concebida na psicologia vigotskiana apenas como um dos fatores do desenvolvimento, ela é considerada o fator determinante, principal (DUARTE, 2003, p. 45, grifo nosso).*

O problema está em como fazer o aluno gostar e reconhecer a importância do conhecimento. Uma indagação sempre está presente: “Para que serve isto?” e não há dúvidas de que esta merece uma resposta plausível em cada conceito ensinado. Para isto o professor deve conhecer a realidade do aluno para relacionar o conteúdo com o cotidiano dele e, principalmente, com a profissão que ele pretende ter. Fica claro que a contextualização traz o aluno para perto do professor e os problemas de atenção às aulas e disciplina, por consequência, ficam resolvidos ou amenizados. Os recursos tecnológicos, os experimentos matemáticos (visuais) também enriquecem a aula, pois são chamativos e ajudam na explicação e na compreensão de assuntos mais confusos.

Somente pelo processo de análise, o qual trabalha com abstrações, o professor poderá ser o mediador entre o conhecimento objetivo e o construído pelo aluno até então, pois “a essência do objeto em seu estágio de maior desenvolvimento não se apresenta ao pesquisador de maneira imediata, mas sim de maneira mediatizada” (DUARTE, 2003, p. 46).

O processo do conhecimento conteria três momentos: síntese, análise e síntese. Sem a mediação da análise o pensamento científico não seria capaz de superar a síntese própria do senso comum e, portanto, não seria capaz de alcançar a síntese, isto é, alcançar a compreensão da realidade investigada em seu todo concreto (DUARTE, 2003, p. 46).

Fica evidente a importância da abstração tão exigida em matemática, por mais confusa que inicialmente pareça ser, para o entendimento da realidade concreta.

[...] Vigotski está em perfeita consonância com a dialética presente na obra de Marx. A dialética marxiana também se apoiava no princípio de que a abstração é uma mediação indispensável por meio da qual a ciência chega à essência da realidade concreta (DUARTE, 2003, p. 51).

É claro que um aluno não consegue aprender qualquer conceito que um professor, com aulas mal planejadas, deseja ensinar. Vigotski atribui dois níveis de desenvolvimento: o *nível de desenvolvimento atual* e a *zona de desenvolvimento próximo*. O primeiro é aquele em que o aluno consegue resolver problemas de maneira independente, sem a ajuda de outros, ou seja, é tudo aquilo que é imediato ao seu entendimento. Já a zona de desenvolvimento próximo envolve tudo aquilo que o aluno pode aprender, mas somente com a ajuda do adulto, o professor. Se o professor for resolver problemas cada vez mais difíceis com o aluno, poderá chegar o momento em que o aprendiz não conseguirá mais, mesmo com a ajuda alheia, denotando que foi ultrapassada a zona de desenvolvimento próximo. Todavia, ensinar o que o

aluno pode aprender sozinho, ou seja, ficar rodeando apenas no nível de desenvolvimento atual, não caracteriza um bom ensino. Segundo Vigotski, em DUARTE (2007, p. 97), “ensinar a uma criança aquilo que é incapaz de aprender é tão inútil como ensinar-lhe a fazer o que é capaz de realizar por si mesma”. Desta forma, o bom ensino é aquele que trabalha na zona de desenvolvimento próximo, pois assim o aluno poderá evoluir culturalmente, ou seja, conforme afirma Vigotski em DUARTE (2007, p. 98):

A investigação mostra sem lugar a dúvidas que o que se acha na zona de desenvolvimento próximo num determinado estágio se realiza e passa no estágio seguinte ao nível de desenvolvimento atual. Com outras palavras, o que a criança é capaz de fazer hoje em colaboração será capaz de fazê-lo por si mesma amanhã.

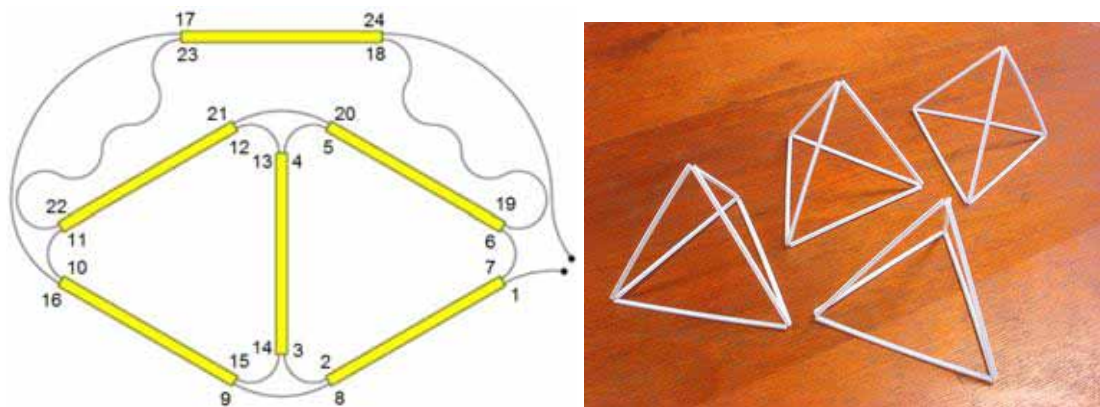
Por fim, uma pedagogia que se traduz como histórico-crítica deve defender radicalmente o papel mais importante da escola que é a socialização do saber objetivo.

Este trabalho, envolvendo a pipa tetraédrica de Graham Bell, foi desenvolvido observando-se atentamente a psicologia vigotskiana, o que pode ser comprovado com as três características seguintes: 1<sup>a</sup>) após construir a pipa e antes da aplicação das questões matemáticas, o professor definiu a sequência PG, bem como trabalhou exercícios envolvendo o termo geral e a soma dos  $n$  primeiros termos, ou seja, o conhecimento antecedeu o aprendizado (característica de Vigotski) e não o inverso (característica de Piaget); 2<sup>a</sup>) os alunos só conseguiram resolver as questões com a ajuda do professor, evidenciando que elas foram elaboradas dentro da zona de desenvolvimento próximo de cada aluno e 3<sup>a</sup>) todas as abstrações feitas nas questões das três séries do ensino médio, apesar de serem vistas como algo confuso a princípio, ajudaram o aluno alcançar a *realidade concreta* do objeto, o que é uma característica da psicologia marxiana de Vigotski: [...] a abstração é uma mediação indispensável por meio da qual a ciência chega à essência da realidade concreta (DUARTE, 2003, p. 51). Para Piaget, o simples fato de construir a pipa e contar os canudos dos três primeiros níveis, conforme pede o item *a* da questão 1 do Apêndice A, já pode-se afirmar que a pipa é um objeto concreto para o aluno. Todavia, segundo Vigotski, a pipa só será um *objeto concreto* quando as abstrações, feitas posteriormente, tornarem-se concretas na visão do aluno, sendo que isto é possível somente através da transmissão do conhecimento produzido histórico e socialmente pela humanidade e da análise do pensamento científico.

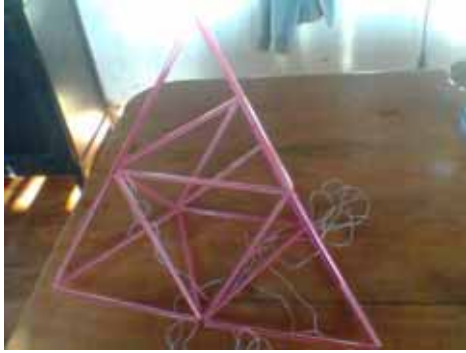
## 7 TRABALHO DE CAMPO: O PROFESSOR REFLEXIVO-CRÍTICO E A CONTRUÇÃO DA PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL

Para que haja uma abordagem do conhecimento científico que se traduz em sucesso, a partir do cotidiano como elemento motivador, é preciso que o profissional da educação empenhe-se na qualidade de seu trabalho, no enriquecimento de sua prática pedagógica. O professor deve permitir que a didática não seja apenas uma disciplina de regras e receitas prontas, mas ideias que servem para provocá-lo, fazendo-o repensar sua prática pedagógica. Reflexão esta que tenta buscar soluções de problemas encontrados a cada experiência em sala de aula, em comunidade escolar. Portanto, ser um professor didático não é ser somente eloquente, mas também reflexivo-crítico, ou seja, é refletir através da análise para se chegar à verdade. Dentro deste ser reflexivo-crítico está a autoavaliação para que aulas posteriores sejam mais bem programadas e executadas que as já consumadas. Isto porque, através da experiência do professor, foi detectado que o aprendizado de alguns conceitos matemáticos em anos anteriores não se concretizou. Nesta visão, a pipa tetraédrica de Graham Bell foi o elemento motivador resgatada do cotidiano dos alunos da Escola Estadual Presidente Tancredo Neves de Aparecida de Minas, município de Frutal, Minas Gerais, com o objetivo de reformular o planejamento de algumas aulas de matemática.

Em BORTOLOSSI (2013b), no sítio eletrônico da Universidade Federal Fluminense, encontra-se o “passo a passo” da construção da pipa tetraédrica de Graham Bell, cuja reprodução está no Anexo A. A figura a seguir, retirada do Anexo A, mostra como construir os tetraedros, onde basta puxar ambas pontas dos fios após passa-los pelos canudos seguindo a ordem crescente dos números. À direita, observa-se como ficam os tetraedros.

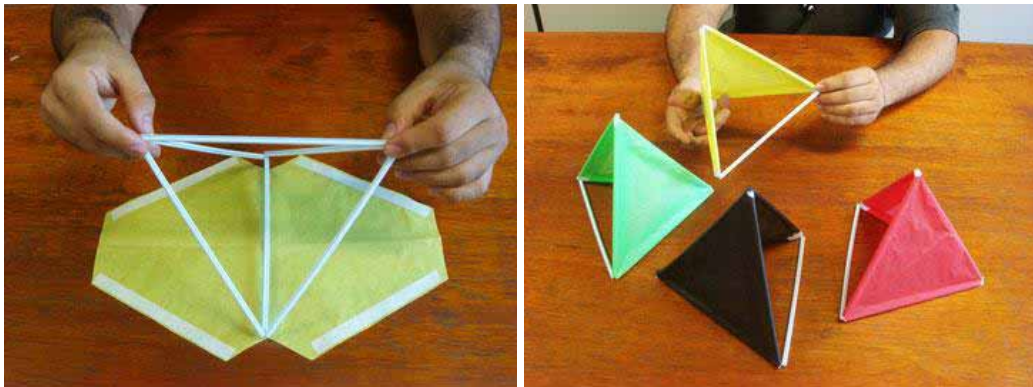


**Figura 12:** Montagem de um tetraedro (ou célula tetraédrica).



**Figura 13:** Estrutura da pipa tetraédrica de quatro células (ou quatro tetraedros).

Unificando os vértices, dois a dois, de quatro tetraedros, monta-se uma estrutura maior, conforme a figura anterior. Todavia, é mais prático recobrir cada tetraedro antes de unificá-los, conforme a figura seguinte. Após recortar o papel de seda, conforme passos 4, 5 e 6 do Anexo A, deve-se colar o papel de seda na estrutura tetraédrica cobrindo duas faces desta, de acordo com as imagens a seguir encontradas nos passos 7 e 8 do Anexo A.



**Figura 14:** Revestimento com papel de seda em apenas duas faces dos tetraedros.

A figura a seguir mostra três pipas construídas pelos alunos envolvidos no trabalho.



**Figura 15:** Pipas tetraédricas de uma, quatro e dezesseis células.

A figura a seguir mostra o professor Everaldo Rodrigues Nunes, juntamente com alunos, unificando quatro pipas de quatro células cada para montar uma pipa de 16 células.



**Figura 16:** Trabalho de campo: montagem da pipa tetraédrica de dezesseis células.

A próxima figura mostra o início de voo da pipa de dezesseis células tetraédricas. O uso da rabiola foi essencial para que as pipas não entrassem em movimento giratório. Apesar de não ter sido citada, no Anexo A, pelo Prof. Dr. Humberto José Bortolossi, a rabiola é item obrigatório para provocar o equilíbrio no voo de cada pipa. Repare no passo 11 do Anexo A que o cabresto é amarrado na aresta comum às faces que contem papel de seda em dois pontos: no vértice e no ponto médio dessa aresta. O lado esquerdo da figura seguinte mostra o cabresto em uma pipa de dezesseis células tetraédricas. Olhando para o tetraedro maior (de aresta igual a quatro canudos), note que a rabiola está no vértice oposto ao vértice onde foi amarrada uma ponta do cabresto. A figura a seguir, à direita, mostra o voo dessa pipa.



**Figura 17:** Trabalho de campo: pipa tetraédrica de dezesseis células.



As figuras seguintes mostram os voos das pipas de quatro e dezesseis células.



**Figura 18:** Trabalho de campo: pipas tetraédricas de quatro células.



**Figura 19:** Trabalho de campo: pipa tetraédrica de dezesseis células.

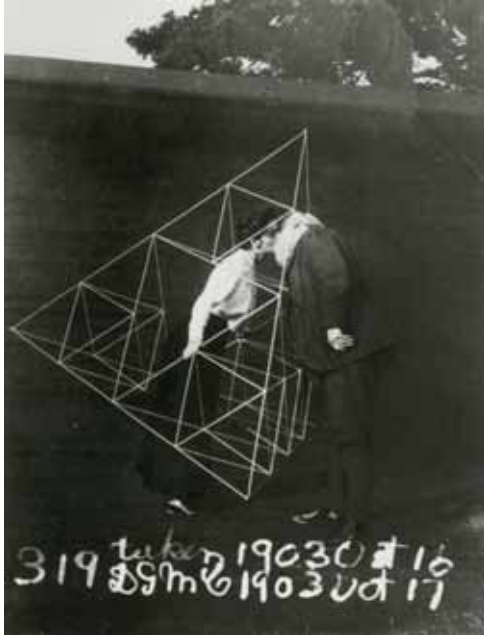
## 8 PESQUISA DO REAL INTERESSE DE ALEXANDER GRAHAM BELL EM CRIAR UMA PIPA DIFERENTE

Dentro do trabalho desenvolvido pelo autor dessa dissertação na Escola Estadual Presidente Tancredo Neves, foi pedido aos alunos das três séries do ensino médio, conforme Apêndices A, B e C, a seguinte atividade: *Faça uma pesquisa sobre a pipa tetraédrica de Alexander Graham Bell, citando os motivos históricos que o levaram a construir tal pipa. Procure colocar imagens da época que justifiquem tais fatos.*

Segundo BORTOLOSSI (2013a), no sítio eletrônico da Universidade Federal Fluminense, “uma das questões tecnológicas que permeavam os círculos científicos no início do século XX era sobre a possibilidade de se construir aparatos voadores grandes e aerodinamicamente estáveis.” Todavia, argumentos contrários eram dados na época, como este do astrônomo e matemático Simon Newcomb (1835 a 1909):

Considere duas máquinas voadoras semelhantes, sendo que uma tem o dobro da escala da outra. Todos sabemos que o volume e, então, o peso de dois corpos semelhantes são proporcionais aos cubos de suas dimensões. O cubo de dois é 8; então a máquina maior terá 8 vezes o peso da máquina menor. As áreas das superfícies destas máquinas, por outro lado, são proporcionais aos quadrados de suas dimensões. O quadrado de dois é 4. Desta maneira, a máquina mais pesada exporá ao vento uma superfície com área apenas 4 vezes maior, tendo então uma nítida desvantagem na razão eficiência por peso. (Newcomb in BORTOLOSSI, 2013a).

Mesmo assim, Alexander Graham Bell estava determinado a criar um objeto voador aerodinamicamente estável, cujo princípio básico fosse não alterar a “razão eficiência por peso”, citada por Newcomb, por mais que se aumentasse sua dimensão. Mirando neste foco, Graham Bell teve a engenhosa ideia de usar células tetraédricas para a criação de uma pipa, cuja construção está detalhada no Anexo A. Entende-se como célula cada tetraedro menor revestido por papel de seda em duas de suas faces, somente. A Figura 20, a seguir, mostra uma foto de Graham Bell e sua esposa Mabel Gardiner Hubbard (1877 a 1922). Como se percebe, esta figura trata-se de uma estrutura tetraédrica de 16 células que, depois de concluída sua construção, ficaria como a pipa do nível dois da Figura 10.



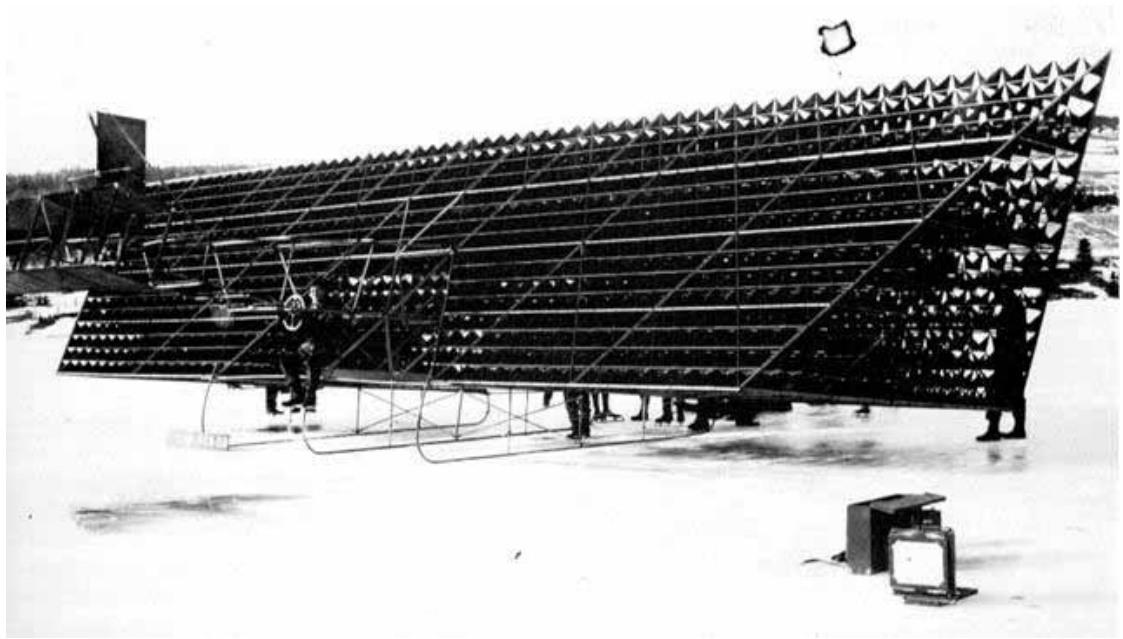
**Figura 20:** Graham Bell e sua esposa em uma estrutura tetraédrica.

A figura anterior já sugere a vontade de Bell em criar uma máquina voadora que pudesse levar consigo um ser humano. Historicamente, sabe-se que:

Em 1899, Bell começou a desenvolver um novo design de uma aeronave que tinha uma grande área de superfície e ao mesmo tempo era leve. Ele se encontrou completamente imerso no projeto (“Por que? Eu não sei”, ele explicou enigmaticamente), argumentando que provas de máquinas voadoras mais pesadas do que o ar estavam no mundo natural. “Nós todos estamos interessados em locomoção aérea”, ele escreveu. “E eu tenho certeza que ninguém que observou com atenção o voo de pássaros pode duvidar por um momento do voo aéreo de corpos especificamente mais pesados do que o ar.”

Ao longo dos quatro anos seguintes, Bell desenvolveu um conceito de pipa com uma enorme área de asa, mas armação leve, graças a suportes finos em forma de diamante. Estas formas tetraédricas criam uma rede densa de pequenas asas, o que aumenta a envergadura de asa com pouca adição de peso. Bell foi além e criou o protótipo de muitas pipas. E, em 1903, ele criou uma enorme máquina voadora de 3.393 células baseadas nas armações, que ele batizou de Cygnet. (DOLLAGHAN, 2014).

O projeto Cygnet foi um verdadeiro fracasso em termos de transporte, apesar de ter sido favorável na questão que relaciona peso e área das células. A figura a seguir mostra uma foto do projeto Cygnet, com um tipo de assento para piloto de onde a máquina era controlada com um volante.



**Figura 21:** Projeto Cygnet com 3393 células.

O militar Thomas Etholen Selfridge foi o primeiro a voar nessa estrutura de Bell.

Pouco é sabido da infância de Selfridge. Graduou-se em 1903 na United States Military Academy (Academia Militar dos Estados Unidos) em West Point. [...] Fez seu primeiro vôo em 6 de dezembro de 1907, na pipa tetraédrica de Alexander Graham Bell *Cygnet*, feita de 3,393 células alares. A pipa levou-o a 51 metros no ar sobre o Bras'Or Lake na Nova Escócia, no Canadá e voou por 7 minutos. Este foi o primeiro vôo tripulado registrado numa máquina mais pesada que o ar no Canadá. (WIKIPÉDIA, 2014).

As citações feitas nesta seção estavam presentes nos trabalhos dos alunos das três séries do ensino médio, os quais deram uma resposta satisfatória a esta questão. Esta pesquisa teve um efeito pedagógico bastante positivo, pois fez com que os alunos deixassem de ter uma visão limitada de Graham Bell, apenas como inventor do telefone, e conhecessem outros trabalhos dele, bem como a ideia de fazer o homem voar, a qual permeava na sua época.

## 9 PESQUISA SOBRE FRACTAIS

Para as três séries do ensino médio da Escola Estadual Presidente Tancredo Neves, conforme Apêndices A, B e C, o professor de matemática pediu aos alunos: *Faça uma pesquisa sobre a geometria dos fractais, citando, entre outros, o Triângulo e a Pirâmide de Sierpinski. Mostre as imagens dos fractais pesquisados, explicando-as. Com suas palavras, procure dizer o que seja um fractal.*

### 9.1 Geometria dos fractais

Segundo o professor Isaac Clemente no sítio eletrônico do *InfoEscola Navegando e Aprendendo* do portal *terra*:

A **geometria fractal** estuda as propriedades e comportamentos de figuras mais complexas que a geometria euclidiana (ou dimensão topológica) abrange, descreve situações que não podem ser descritas pela geometria euclidiana, por esta falhar nesses casos. A geometria euclidiana falha na descrição de formas encontradas na natureza. A geometria fractal, em destaque a dimensão fractal, tem utilização em várias áreas científicas, como no estudo dos sistemas caóticos, reconhecimento de padrões em imagens, tecnologia, ciências, artes e música, etc.

O fractal é uma estrutura geométrica ou física, e geralmente são muito similares em diferentes níveis de escala, porém nos fractais naturais essa característica é limitada em função da escala. O objeto é composto por partes reduzidas com formas semelhantes à dele próprio. O nome deriva do Latim *fractus*, que significa quebrado ou fraturado. Várias estruturas naturais são do tipo fractal, são igualmente complexas no detalhe e na forma global. A dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro, podendo ter dimensão fracionária. A maioria não se enquadra nas definições tradicionais e gera dúvida em relação a comprimento, área e volume destas entidades matemáticas. Com a ampliação dos fractais eles não perdem definição, porque sempre possuem estrutura idêntica com a original (CLEMENTE, 2014).

Historicamente, sabe-se que:

Entre 1857 e 1913 um grupo de cientistas realizou um trabalho que catalogava alguns objetos como “demônios” por julgarem que não teriam significativo valor para a ciência. A partir deste trabalho surge a ideia de fractal. O desenvolvimento científico em relação aos fractais teve um aceleramento a partir dos anos 60 em consequência da computação, pois criou vários tipos de fractais.

Os primeiros fractais estudados foram o Conjunto de Cantor, Floco de Neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski (CLEMENTE, 2014).

A figura a seguir mostra uma planta denominada, popularmente, de *renda portuguesa*, cujo nome científico é *davallia fejeensis*. Note que esta planta parece um fractal, pois é possível retirar uma folha e, desta folha, pode-se retirar outra parte e, assim, sucessivamente até certo limite, cujas partes ainda são semelhantes ao todo (a folha original).



**Figura 22:** A renda portuguesa assemelha-se a um fractal.

Segundo o professor Isaac Clemente no sítio eletrônico do *InfoEscola Navegando e Aprendendo* do portal *terra*:

Os fractais podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente, através de processos recursivos, os quais podem apresentar características encontradas em formas da natureza.

Os fractais estão em vários lugares. Existem muitos objetos naturais que são considerados fractais naturais devido ao seu comportamento ou estrutura, mas estes são tipo de fractais finitos, o que os distingue dos fractais de tipo matemático criados por interações recursivas. Citamos como exemplo as nuvens e árvores (CLEMENTE, 2014).

Todavia, os objetos da Natureza não são verdadeiramente fractais, pois não são *infinitamente* complexos, ou seja, não possuem um processo recursivo infinito. Apesar de um fractal ser obtido da repetição infinita de algum algoritmo, mesmo um objeto com traços finitos tende a parecer com um fractal quando o número de iterações aumenta. Por esse motivo, várias formas encontradas na natureza são consideradas fractais por alguns autores.

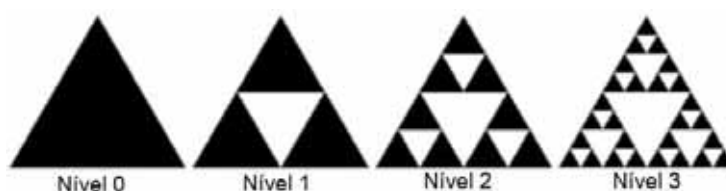
Algumas frases dos alunos da Escola Estadual Presidente Tancredo Neves sobre o que seja um fractal: “fractal é uma figura que pode ser reduzida ou aumentada, permanecendo na mesma razão”; “um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original”; “diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e independem de escala”; “são figuras geométricas muito diferentes

[...] principal característica dessa figura é a autossimilaridade [...] como se fosse uma figura com várias cópias menores dentro da própria figura”; “tecnicamente, um fractal é um objeto que não perde sua definição formal à medida que é ampliado, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original”.

A questão pede para que os alunos digam o que seja um fractal *com suas palavras*. Nota-se que isto não foi feito, pois se evidencia que as frases anteriores foram retiradas de pesquisas na internet, mesmo não possuindo nenhuma referência. Esta evidência está na complexidade dos termos técnicos usados.

## 9.2 Triângulo de Sierpinski

A construção do Triângulo de Sierpinski encontra-se no Anexo B. Para construí-lo, tome os pontos médios das arestas de um triângulo equilátero. O triângulo com vértices nesses pontos será retirado, conforme o nível 1 da figura a seguir, restando apenas três triângulos equiláteros e congruentes entre si. Repetindo este procedimento infinitamente, ou seja, removendo sucessivamente o triângulo central quando se divide os triângulos que sobraram (os pretos) em quatro triângulos equiláteros e congruentes, tem-se um conjunto de pontos denominado *Triângulo de Sierpinski*. A figura seguinte mostra as três primeiras iterações.



**Figura 23:** As três primeiras iterações da construção do Triângulo de Sierpinski.

Segundo PRISMA (2014a) sobre o *Triângulo de Sierpinski*, tem-se:

Tem área zero, pois a cada passo a área reduz-se para  $3/4$  da área do passo anterior. Por exemplo: se a área inicial for 1, ao fim do primeiro passo é  $3/4$ , ao fim do segundo é  $3/4 \times 3/4$ , ao fim do terceiro é  $3/4 \times 3/4 \times 3/4$ , pelo que a área limite é  $3/4 \times 3/4 \times 3/4 \times \dots = 0$ .

É infinito, pois em particular o conjunto de pontos que não são retirados da base do triângulo inicial é infinito. De facto, em cada passo ‘retira-se’ da base do triângulo todos os pontos cuja distância ao vértice esquerdo é um múltiplo de  $L \times (1/2)^n$ , onde  $L$  é o comprimento dos lados, e  $n = 1, 2, \dots$  para as sucessivas iterações. Todos [os] pontos cuja distância ao vértice esquerdo é o produto de  $L$  por um número irracional nunca são removidos, porque os números irracionais não são o quociente de dois inteiros, pelo que ‘ficam’ no conjunto um número infinito de pontos da base.

É ‘autossemelhante’ [...].

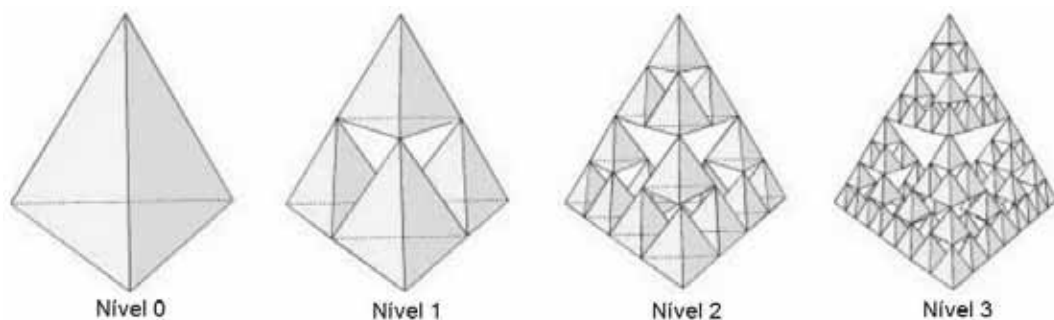
### 9.3 Pirâmide de Sierpinski

Segundo SANTOS (2014) sobre o *Triângulo* e a *Pirâmide de Sierpinski*, tem-se:

O Triângulo de Sierpinski foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinski (1882-1969). É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes, visto que um destes triângulos está invertido, em relação ao original e é retirado do triângulo original sobrando apenas os outros três. Assim, repete-se no passo seguinte o mesmo procedimento em cada um dos três novos triângulos com a orientação original, e assim sucessivamente.

O fractal obtido é estritamente autossimilar, ou seja, as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura. Pode-se generalizar o Triângulo de Sierpinski para uma terceira dimensão, obtendo assim a Pirâmide de Sierpinski.

A figura a seguir mostra as três primeiras iterações da construção da Pirâmide de Sierpinski, onde sempre são tomados os pontos médios das arestas de cada tetraedro regular que restou para gerar quatro novos tetraedros regulares e congruentes entre si. O Anexo C mostra a construção da Pirâmide de Sierpinski.



**Figura 24:** Três primeiras iterações da construção da Pirâmide de Sierpinski.

Apesar de a questão pedir que os alunos escrevessem sobre outros fractais com suas respectivas construções, isto não foi feito por nenhum grupo. Porém, o efeito pedagógico dessa pesquisa foi bastante positivo, pois os alunos passaram a conhecer essa geometria recente denominada *fractal*. Além disso, puderam entender alguns de seus mecanismos de construção como o *Triângulo de Sierpinski*, onde algumas de suas iterações foram construídas no papel e a *Pirâmide de Sierpinski*, cujas primeiras iterações foram construídas com o auxílio da Pipa Tetraédrica de Graham Bell.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

As questões aplicadas às três séries do ensino médio deixam evidente a real necessidade de um raciocínio lógico apurado para resolvê-las. Durante todo o processo de resolução destas questões pelos alunos, estes procuraram o professor por diversas vezes para tirar dúvidas sobre como desencadear um raciocínio para chegar a uma resposta adequada. Todas as questões foram elaboradas segundo o conteúdo ministrado nas respectivas turmas, mas os alunos não conseguiram resolvê-las sozinhos. Isto mostra que este trabalho foi elaborado dentro da *zona de desenvolvimento próximo*, confirmando o fato assumido por Vigotski: qualquer conteúdo a ser trabalhado dentro dessa zona necessita da ajuda de uma pessoa externa; o aluno não pode aprender por si mesmo. Com certeza, estes alunos cresceram culturalmente, pois não foram trabalhados apenas conceitos matemáticos que eles poderiam resolver sozinhos.

Certa aluna comentou ter ficado maravilhada com o fato de o tetraedro realmente ter sido formado, ao puxar ambas as pontas do fio da Figura 12. Isto mostra a importância do elemento motivador com o intuito único de divertir os alunos para, na sequência, o professor buscar conhecimento matemático profundo (dentro da *zona de desenvolvimento próximo*) envolvendo o objeto em questão. Nota-se que, apesar de existir algumas equações matemáticas prontas, como o termo geral de uma PG, neste trabalho houve uma valorização do pensamento lógico para se chegar a tais equações. Isto, porque provocar o raciocínio lógico é o ponto chave para o avanço da matemática no século XXI.

[...] calcula-se que 95% da matemática conhecida hoje tenha sido produzida a partir de 1900. Centenas de periódicos publicados no mundo todo dedicam a maior parte de seu espaço à matemática. A cada ano, a revista de resumos *Mathematical Reviews* publica milhares de páginas de sinopses de artigos recentes contendo novos resultados. O século XX (e talvez o novo século também) é justificadamente chamado de “idade de ouro da matemática” (BERLINGHOFF, 2010, p. 53).

Se a “idade de ouro da matemática” realmente é algo presente, é porque professores foram responsáveis por provocar o raciocínio lógico das pessoas que publicaram tantos artigos. A abstração e a especialização tornaram-se essenciais nos estudos matemáticos. Não é possível dominar todo o conteúdo matemático, mas é possível abstrair-se para investigar mundos cada vez mais estranhos e complexos, desde que o raciocínio lógico destes investigadores tenha sido provocado na educação básica.

[...] De um lado, novos e mais abstratos subcampos da matemática emergiram para se tornar áreas estabelecidas de pesquisa e de direito próprio. [...]

O aumento na simples quantidade de matemática e no nível de abstração inevitavelmente levou no aumento da especialização (BERLINGHOFF, 2010, p. 54).

É preciso interligar mais os conceitos matemáticos e relacioná-los com outras áreas do conhecimento, inclusive com o senso comum para, através da análise, separar crença de ciência. Dessa forma, o cotidiano do aluno, além de ser um elemento motivador da aprendizagem, passa a ser explicado com maior clareza pelo conhecimento objetivo adquirido e pela análise feita. “Nenhum indivíduo pode se objetivar sem a apropriação das objetivações existentes. É dessa forma que todo indivíduo humano realiza seu processo de inserção na história” (DUARTE, 2001, p. 30).

Os planos de aula devem sim ser elaborados pelo próprio professor, com a observância da realidade escolar e do cotidiano de seu aluno, mas não deixar que apenas as necessidades dos alunos sejam o *motor* desta elaboração. Os professores devem elaborar projetos com seus alunos, até mesmo para construção de laboratórios para suas escolas, o que mostra a preocupação do professor sobre a relação ensino-aprendizagem. Os projetos devem conter pesquisa, montagem e relatório, para que os alunos entendam a relevância da história, da dificuldade em se produzir equipamentos e da importância em traduzir tudo isto em uma escrita científica, por exemplo, o famoso relatório. O LEG da UFF deixa isto claro:

No presente texto apresentam-se os propósitos e a trajetória do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG), do Departamento de Geometria da Universidade Federal Fluminense (UFF). Em Niterói (RJ) (LORENZATO, 2010, p. 113).

A motivação das ações desenvolvidas no LEG é apoiada no entendimento de que as formas geométricas podem servir de modelo a diversos tipos de fenômenos do cotidiano e, ainda, que tais formas têm sido pouco exploradas didaticamente (LORENZATO, 2010, p. 116).

Os professores de matemática são constantemente taxados por *explicar coisas difíceis*, ou, pior ainda, por *não saber explicar direito* quando o aluno não aprende. Muitas vezes, nada é dito sobre o empenho do aluno em aprender e quais as exigências para que este aprendizado se concretize. O estudo das neurociências garante que o aprendizado se faz durante o sono, principalmente quando o indivíduo está sonhando; momento essencial para que as experiências vividas durante o dia sejam memorizadas com eficiência. Mas só serão gravadas no córtex, durante o sono, aquelas experiências que foram substancialmente emocionantes para o aluno; as que não foram interessantes, na visão do aluno, serão apagadas da memória.

Os neurônios se ligam uns aos outros por meio de terminais – uma espécie de “tomadinhas” eletroquímicas – chamados sinapses.

Desse modo, a gravação de uma informação de forma permanente exige que algumas sinapses sejam desligadas, outras reforçadas, outras inibidas e outras, ainda, criadas visando alterar os caminhos que as pequenas correntes elétricas irão seguir (PIAZZI, 2010, p. 70).

E, como eles não costumam achar as aulas uma experiência emocionante, normalmente são as aulas que vão parar no lixo! (PIAZZI, 2010, p. 73).

Aqui, a pipa tetraédrica de Graham Bell vem novamente estimular o aluno, para que a experiência em sala de aula seja mais prazerosa. Não há dúvidas de que, quando estiver tentando elaborar um raciocínio para responder as questões abordadas, o aluno ainda se lembrará da pipa e dos momentos agradáveis que ela proporcionou, fazendo com que as próximas etapas (estudo profundo envolvendo a pipa) não sejam tão entediantes.

Retomando a epígrafe dessa dissertação: “O conhecimento é o processo pelo qual o pensamento se aproxima infinita e eternamente do objeto” (LENIN, 1975, p.123), fica claro que o conhecimento científico deve ser ensinado, repensado, aprofundado, ensinado de novo com novas descobertas e construções, mas nunca se chega ao fim, pois há sempre o que aprender sobre o referido objeto. A pipa tetraédrica de Graham Bell é uma prova disso. Além do que, no início, a pipa era apenas um arranjo de canudos, papéis de seda e linhas, a qual podia voar. Após todo o estudo feito, o aluno percebeu que podem ser explorados vários conceitos matemáticos olhando para a pipa, tais como: progressões geométricas, semelhança de triângulos, volume e peso de tetraedros e suas relações etc. Aqui o aluno deixa de ver a pipa apenas como um arranjo de canudos, papéis de seda e linhas, ou seja, a pipa se *concretizou* para ele; a visão de pipa mudou para ele, pois a visão de mundo se altera com o conhecimento. Ou seja, através da análise, o conhecimento do aluno sobre a pipa saiu da *síncrese* (senso comum) e chegou à *síntese*, que é a “compreensão da realidade investigada em seu todo concreto” (DUARTE, 2003, p. 46). É assim que o indivíduo se humaniza.

## REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**: Tradução Elza Gomide, Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BORTOLOSSI, Humberto José. **A pipa tetraédrica de Alexander Graham Bell**. 2013a. Disponível em: <<http://www.uff.br/cdme/pgb/pgb-html/pgb-br.html>>. Acesso em: 15 ago. 2013.

BORTOLOSSI, Humberto José. **Passos para a construção da pipa tetraédrica**. 2013b. Disponível em: <<http://www.uff.br/cdme/pgb/pgb-html/construcao-br.html>>. Acesso em: 15 ago. 2013.

CHAUÍ, Marilena de Souza. **O que é ideologia?** São Paulo: Brasiliense, 1980.

CLEMENTE, Isaac. **Geometria fractal**. 2014. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/matematica/geometria-fractal/>>. Acesso em: 30 jan. 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010. v. 1.

DOLLAGHAN, Kelsey Campbell. **Uma máquina voadora fracassada de Alexander Graham Bell foi revivida na forma de uma estrutura flutuante**. 2014. Disponível em: <<http://gizmodo.uol.com.br/maquina-voadora-graham-bell/>>. Acesso em: 24 jan. 2014.

DUARTE, Newton. **Sociedade do conhecimento ou sociedade das ilusões?: quatro ensaios crítico-dialéticos em filosofia da educação**. Campinas: Autores Associados, 2003.

DUARTE, Newton. **Vigotski e o “aprender a aprender”**: crítica às apropriações neoliberais e pós-modernas da teoria vigotskiana. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

DUARTE, Newton. **Educação escolar, teoria do cotidiano e a escola de Vigotski**. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

LENIN, Vladimir Ilyich. **Os cadernos sobre a dialética de Hegel**. Lisboa: Minerva, 1975.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, Sergio (Org). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar**: geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PIAGET, Jean. **Sobre a pedagogia** (textos inéditos). São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

PIAZZI, Pierluigi. **Estimulando inteligência**. São Paulo: Aleph, 2008.

PRISMA. **Fractais e a geometria da natureza**. 2014a. Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico4.php>>. Acesso em: 24 jan. 2014.

PRISMA. **Fractais e a geometria da natureza**. 2014b. Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico3.php>>. Acesso em: 24 jan. 2014.

SANTOS, Andrios Bemfica dos. **Geometria fractal**. 2014. Disponível em: <<http://professorandrios.blogspot.com.br/2011/06/geometria-fractal-arte-e-matematica-em.html>>. Acesso em: 30 jan. 2014.

SAVIANI, Dermeval. **Escola e democracia**. 30. ed. Campinas: Autores Associados, 1996.

SAVIANI, Dermeval. **Pedagogia histórico-crítica**: primeiras aproximações. 6. ed. Campinas: Autores Associados, 1997.

SOUSA, Joamir Roberto. **Matemática**: coleção novo olhar: ensino médio. São Paulo: FTD, 2010. v. 1.

SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. v.2.

WIKIPÉDIA, A ENCICLOPÉDIA LIVRE. **Thomas Etholen Selfridge**. 2014. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Thomas\\_Etholen\\_Selfridge](http://pt.wikipedia.org/wiki/Thomas_Etholen_Selfridge)>. Acesso em: 24 jan. 2014.

APÊNDICE A – Trabalho aplicado à primeira série do ensino médio.

# E. E. PRESIDENTE TANCREDO NEVES

Nome:	N°	Série: 1ª ens. médio
Professor: EVERALDO	Data de entrega: 10/12/2013	Bimestre: 4º
Avaliação: TRABALHO 2	Disciplina: MATEMÁTICA	NOTA:
Observação: A PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL. Valor: 4,0 pontos.		

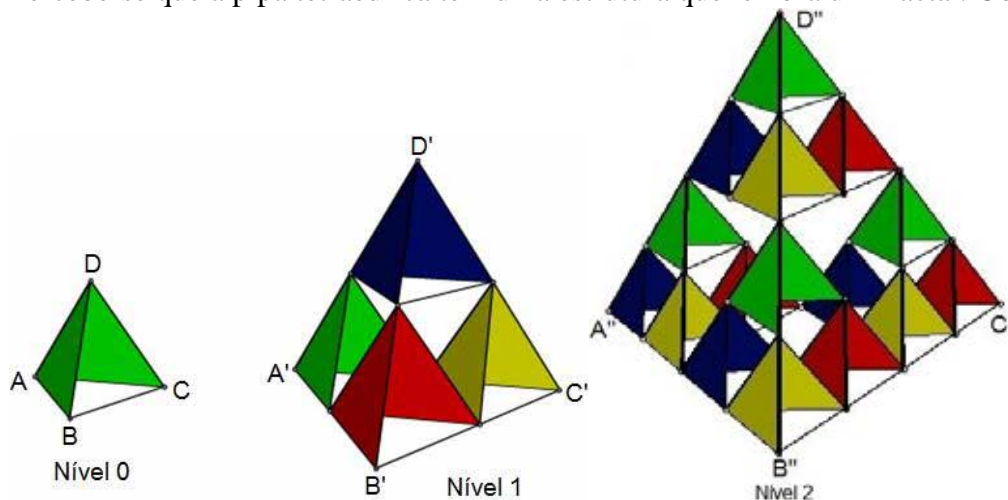
## 1ª PARTE: Pesquisa.

Faça uma pesquisa sobre a pipa tetraédrica de Alexander Graham Bell, citando os motivos históricos que o levaram a construir tal pipa. Procure colocar imagens da época que justifiquem tais fatos.

Faça uma pesquisa sobre a *geometria dos fractais*, citando, entre outros, o Triângulo e a Pirâmide de Sierpinski. Mostre as imagens dos fractais pesquisados, explicando-as. Com suas palavras, procure dizer o que seja um *fractal*.

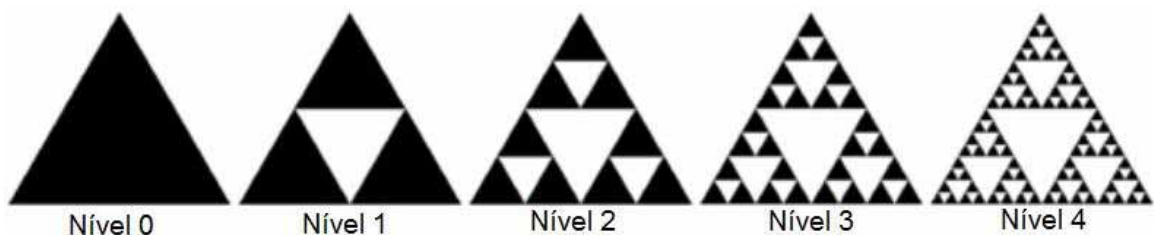
## 2ª PARTE: Olhando a pipa tetraédrica como um fractal.

Percebe-se que a pipa tetraédrica tem uma estrutura que lembra um fractal. Observe:



**Figura 1:** Os três primeiros níveis da pipa tetraédrica.

Nota-se que uma face da pipa trata-se de um dos níveis do Triângulo de Sierpinski, como abaixo:



**Figura 2:** Os cinco primeiros níveis da construção do Triângulo de Sierpinski.

**Responda as seguintes questões:**

1. Na prática, construímos as três pipas da Figura 1.
  - a) Quantos canudos foram usados na construção das pipas dos níveis zero, um e dois?
  - b) Considere  $C_n$  a quantidade de canudos no nível  $n$ . Observando que a quantidade de canudos parece formar uma progressão geométrica, determine o número de canudos do nível  $n$ , ou seja, encontre o termo geral dessa PG. Apesar de não termos visualizado do nível 3 em diante da pipa, por que você acredita tratar-se de uma PG? Justifique usando a ideia da construção da pipa para chegar à razão da PG. Essa PG é crescente ou decrescente?
  - c) Seja  $L$  o comprimento do canudo usado, isto é, cada uma das seis arestas do nível zero da estrutura tetraédrica vale  $L$ . Então, qual o comprimento da aresta da pipa do nível 1? E do nível 2?
  - d) Se montarmos uma sequência dos comprimentos das arestas em cada nível, teremos uma PG? Escreva os cinco primeiros elementos dessa sequência e sua razão. Encontre o termo geral dessa sequência em função de  $n$  e  $L$ , considerando  $A_n$  como sendo o comprimento de cada aresta da pipa do nível  $n$ .
  - e) Quantos canudos há na pipa tetraédrica de aresta  $2^n L$ ?
  
2. Observando os níveis do Triângulo de Sierpinski da Figura 2, responda as questões abaixo.
  - a) Repare que no nível 1 são formados 4 novos triângulos (congruentes entre si, contando brancos e pretos) em relação ao nível zero. Quantos novos triângulos são formados nos níveis dois e três?
  - b) Considere  $a_n$  a quantidade de novos triângulos formados no nível  $n$ . Observando que a quantidade de triângulos parece formar uma progressão geométrica, desde que retiremos o nível zero da sequência, determine o número de triângulos do nível  $n$ , ou seja, encontre o termo geral dessa PG. Usando essa equação, quantos novos triângulos são formados no nível 4? Apesar de não termos visualizado do nível 5 em diante desse fractal, por que você acredita tratar-se de uma PG? Justifique usando a ideia da construção da pipa (ou do próprio fractal) para chegar à razão da PG.
  - c) Repare que no nível zero há um triângulo equilátero e no nível 1 há cinco triângulos equiláteros (4 congruentes entre si, além do maior de todos, que já havia no nível zero). Assim, quantos triângulos equiláteros há no nível 2?
  - d) Se montarmos uma sequência da quantidade de triângulos equiláteros em cada nível, provavelmente não teremos PA nem PG. Seja  $b_n$  a quantidade de triângulos equiláteros no nível  $n$ . Repare que não é tão difícil encontrar uma fórmula para  $b_n$ : basta somar a quantidade de triângulos equiláteros do nível anterior ( $b_{n-1}$ ) com os novos triângulos ( $a_n$ ) formados no nível  $n$ . Isto é:  $b_n = b_{n-1} + a_n$ . Usando essa ideia, encontre o número de triângulos equiláteros dos níveis 3 e 4.
  - e) Todavia, para sabermos quantos triângulos equiláteros há no centésimo nível teremos que conhecer a quantidade de triângulos equiláteros do nível 99. O ideal seria determinarmos a quantidade de triângulos equiláteros de qualquer nível em função de  $n$  (número do nível). Isto é possível se for resolvida a recorrência linear de 1ª ordem do item (d). Pesquise como resolver esta recorrência e encontre  $b_n$  em função de  $n$ . Dica: você precisará usar a soma dos termos de uma PG.

APÊNDICE B – Trabalho aplicado à segunda série do ensino médio.

# E. E. PRESIDENTE TANCREDO NEVES

Nome:	N°	Série: 2ª ens. médio
Professor: EVERALDO	Data de entrega: 10/12/2013	Bimestre: 4°
Avaliação: TRABALHO 2	Disciplina: MATEMÁTICA	NOTA:
Observação: A PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL. Valor: 4,0 pontos.		

## 1ª PARTE: Pesquisa.

Faça uma pesquisa sobre a pipa tetraédrica de Alexander Graham Bell, citando os motivos históricos que o levaram a construir tal pipa. Procure colocar imagens da época que justifiquem tais fatos.

Faça uma pesquisa sobre a *geometria dos fractais*, citando, entre outros, o Triângulo e a Pirâmide de Sierpinski. Mostre as imagens dos fractais pesquisados, explicando-as. Com suas palavras, procure dizer o que seja um *fractal*.

## 2ª PARTE: Encontrando figuras semelhantes nas pipas tetraédricas.

Nota-se que as três pipas tetraédricas da Figura 1 tem “certa semelhança”.

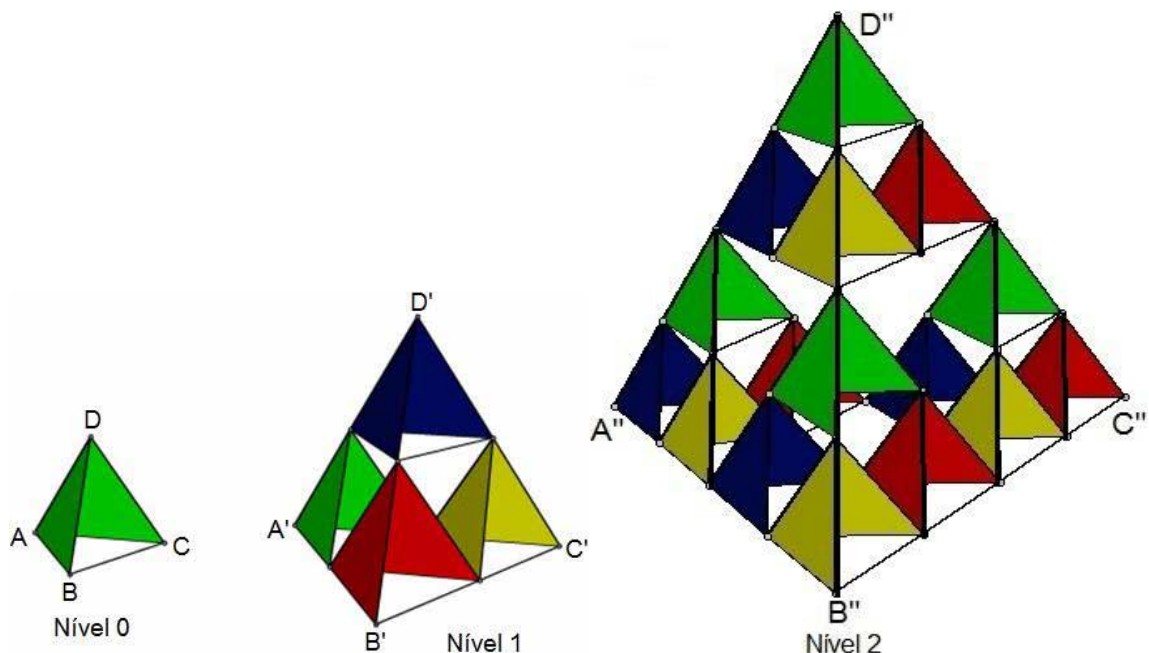
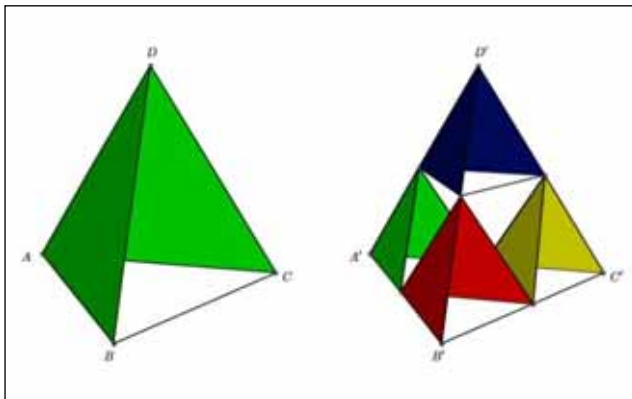


Figura 1: Os três primeiros níveis da pipa tetraédrica.

Responda as seguintes questões:



1. Na prática, construímos as três pipas da Figura 1. Seja  $L$  o comprimento do canudo usado na construção de todas elas.
  - a) Prove que os triângulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  são semelhantes. Determine a razão de semelhança entre o comprimento das arestas das pipas dos níveis: um e zero; dois e zero; dois e um.
  - b) Determine a razão entre as áreas dos triângulos  $ABC$ ,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  (dois a dois). Conclusão: o que acontece com a área de um triângulo equilátero quando sua aresta duplica (nível zero para 1)? E quando a aresta quadruplica (nível zero para 2)?
  - c) Considere  $a_n$  o comprimento da aresta da pipa do nível  $n$ . Observando que a cada mudança de nível a aresta da pipa dobra, nota-se que os comprimentos das arestas em cada nível formam uma progressão geométrica. Determine o termo geral dessa PG em função de  $L$ . Qual a razão de semelhança entre o triângulo da face do nível  $n$  e o triângulo da face do nível zero em função de  $n$ ? Chame essa razão de  $k_n$ .
  - d) Considere  $A_n$  a área de uma face da pipa do nível  $n$ . Conforme observado no item *b* para os níveis iniciais, a cada mudança de nível a área de uma face da pipa quadruplica, concluindo que se trata de uma progressão geométrica. Determine o termo geral dessa PG em função de  $L$  usando esta observação. Calcule novamente  $A_n$  usando o comprimento da aresta da pipa do nível  $n$  ( $a_n$ ) encontrado no item *c*. Determine a razão entre a área do nível  $n$  e a do nível zero em função de  $n$ . Prove que a razão entre a área do nível  $n$  e a do nível zero é  $(k_n)^2$ .
  
2. Na prática, não construímos as pipas conforme a figura a seguir. Ou seja, não construímos duas pipas exatamente do mesmo tamanho, mas com quantidade de células diferentes.

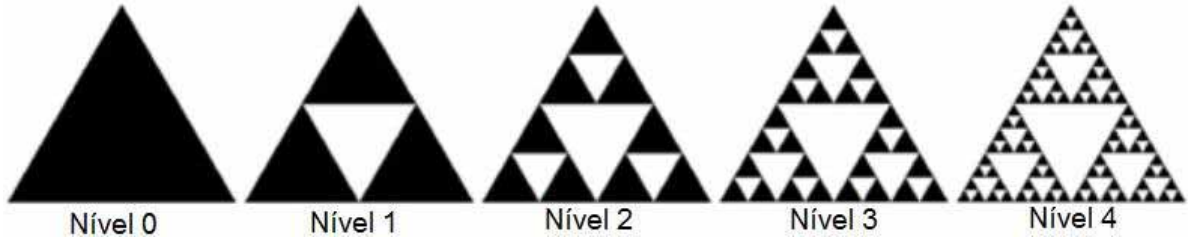


**Figura 2:** Duas pipas de mesmas medidas.

- a) Considere as duas pipas da Figura 2 como sendo estruturas tetraédricas regulares, onde  $AB = A'B' = a$ . Determine a área das asas (ou seja, do papel seda) das pipas  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  em função de  $a$ .
- b) Subdivida a pipa  $A'B'C'D'$ , criando outra de 16 células semelhante a do nível 2 da Figura 1, porém com arestas regulares e  $A''B'' = a$ . Determine a área das asas dessa nova pipa em função de  $a$ .
- c) Generalize esta questão para um nível qualquer.

**3ª PARTE: Olhando a pipa tetraédrica como um fractal.**

Nota-se que uma face da pipa trata-se de um dos níveis do Triângulo de Sierpinski, como abaixo:



**Figura 3:** Os cinco primeiros níveis da construção do Triângulo de Sierpinski.

3. Observando os níveis do Triângulo de Sierpinski da Figura 3, responda as questões abaixo.
- Repare que no nível 1 são formados 3 novos triângulos (congruentes entre si, contando apenas os pretos) em relação ao nível zero. Quantos novos triângulos são formados nos níveis dois e três? Seja  $T_n$  o número de triângulos (pretos) do nível  $n$ . Observando-se que trata-se de uma PG, determine  $T_n$  em função de  $n$ .
  - Seja  $L$  a aresta do triângulo equilátero do nível zero. Considere  $a_n$  o comprimento de cada aresta dos novos triângulos formados (pretos) no nível  $n$ . Determine  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  em função de  $L$ . Observando-se que trata-se de uma PG, determine  $a_n$  em função de  $n$  e  $L$ .
  - Seja  $A_n$  a soma das áreas dos novos triângulos formados no nível  $n$ , ou seja,  $A_n$  é a área de toda região preta do nível  $n$ . Usando os itens  $a$  e  $b$ , mostre que  $A_n = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ , ou seja, trata-se de uma PG de 1º termo  $A_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$  e razão  $3/4$ . Você percebe essa PG apenas observando a Figura 3? Justifique com suas palavras. Essa PG é convergente ou divergente? Limitada ou ilimitada? Crescente ou decrescente?
  - Se montarmos uma PG infinita com essas áreas, qual a soma dos infinitos termos dessa PG em função de  $L$ ?

APÊNDICE C – Trabalho aplicado à terceira série do ensino médio.

## E. E. PRESIDENTE TANCREDO NEVES

Nome:	N°	Série: 3ª ens. médio
Professor: EVERALDO	Data de entrega: 10/12/2013	Bimestre: 4°
Avaliação: TRABALHO 2	Disciplina: MATEMÁTICA	NOTA:
Observação: A PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL. Valor: 4,0 pontos.		

### 1ª PARTE: Pesquisa.

Faça uma pesquisa sobre a pipa tetraédrica de Alexander Graham Bell, citando os motivos históricos que o levaram a construir tal pipa. Procure colocar imagens da época que justifiquem tais fatos.

Faça uma pesquisa sobre a *geometria dos fractais*, citando, entre outros, o Triângulo e a Pirâmide de Sierpinski. Mostre as imagens dos fractais pesquisados, explicando-as. Com suas palavras, procure dizer o que seja um *fractal*.

### 2ª PARTE: Olhando as pipas tetraédricas como figuras semelhantes.

As pipas tetraédricas da Figura 1 têm uma, quatro e 16 células.

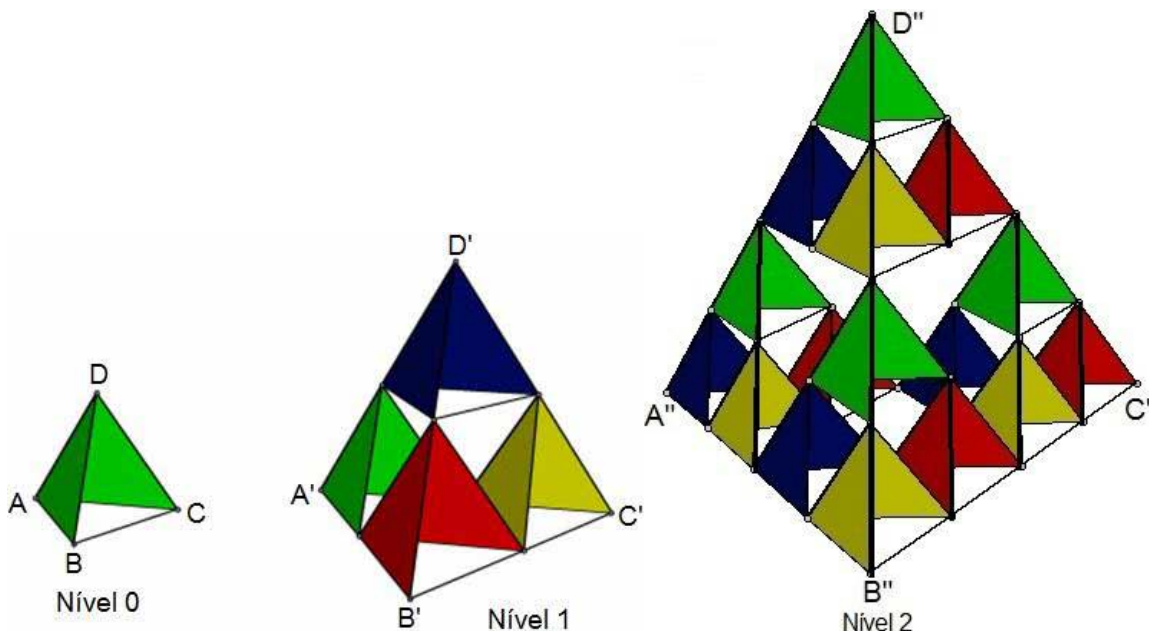


Figura 1: Os três primeiros níveis da pipa tetraédrica.

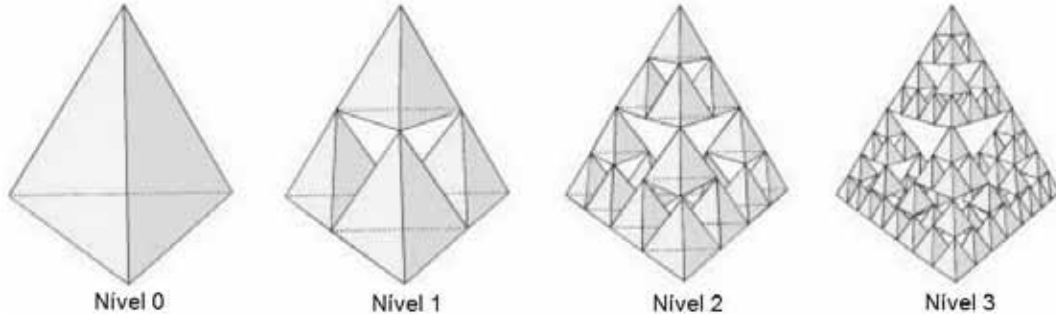
### Responda as seguintes questões:

- Na prática, construímos as três pipas da Figura 1. Observando-as, responda as perguntas relativas às suas arestas:
  - Quantos canudos foram usados na construção das pipas dos níveis zero, um e dois?

- b) Considere  $C_n$  a quantidade de canudos no nível  $n$ . Observando que a quantidade de canudos parece formar uma progressão geométrica, determine o número de canudos do nível  $n$ , ou seja, encontre o termo geral dessa PG. Apesar de não termos visualizado do nível 3 em diante da pipa, por que você acredita tratar-se de uma PG? Justifique usando a ideia da construção da pipa para chegar à razão da PG.
- c) Seja  $L$  o comprimento do canudo usado, isto é, cada uma das seis arestas do nível zero da estrutura tetraédrica vale  $L$ . Então, qual o comprimento da aresta da pipa do nível 1? E do nível 2?
- d) Se montarmos uma sequência dos comprimentos das arestas em cada nível, teremos uma PG? Escreva os cinco primeiros elementos dessa sequência e sua razão. Encontre o termo geral dessa sequência em função de  $n$  e  $L$ , considerando  $a_n$  como sendo o comprimento de cada aresta da pipa do nível  $n$ .
2. Observando a Figura 1, responda às perguntas relativas às áreas das asas – entenda asa como sendo todo triângulo onde tem papel seda.
- a) Seja  $L$  o comprimento do canudo usado, isto é, a área total das asas da estrutura tetraédrica do nível zero vale  $A_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{2}$ , ou seja, a área de dois triângulos equiláteros de aresta  $L$ . Então, qual a área total das asas da pipa do nível 1? E do nível 2?
- b) Se montarmos uma sequência da área total das asas (triângulos onde tem o papel seda) em cada nível, teremos uma PG? Escreva os cinco primeiros elementos dessa sequência e sua razão. Encontre o termo geral dessa sequência em função de  $n$  e  $L$ , considerando  $A_n$  como sendo a área total das asas da pipa do nível  $n$ .
3. Observando a Figura 1, responda às perguntas relativas ao peso das pipas.
- a) Seja  $P$  o peso de cada canudo usado e considere desprezível o peso das folhas de seda e das linhas, isto é, o peso total da estrutura tetraédrica do nível zero vale  $P_0 = 6P$ , ou seja, o peso das seis arestas (canudos). Então, qual o peso total da pipa do nível 1? E do nível 2?
- b) Se montarmos uma sequência do peso total da pipa em cada nível, teremos uma PG? Escreva os cinco primeiros elementos dessa sequência e sua razão. Encontre o termo geral dessa sequência em função de  $n$  e  $P$ , considerando  $P_n$  como sendo o peso total da pipa do nível  $n$ .
4. Observando a Figura 1, responda às perguntas referentes à relação entre o peso e a área total das asas de cada pipa.
- a) A relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível zero é  $P_0/A_0$ ; encontre-a usando os resultados das questões anteriores. Qual a relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível 1? E do nível 2?
- b) Qual a relação entre o peso e a área total das asas da pipa do nível  $n$ ? Explique porque este fato não viola a afirmação de Simon Newcomb (1835–1909): “*Considere duas máquinas voadoras semelhantes, sendo que uma tem o dobro da escala da outra. Todos sabemos que o volume e, então, o peso de dois corpos semelhantes são proporcionais aos cubos de suas dimensões. O cubo de dois é 8; então a máquina maior terá 8 vezes o peso da máquina menor. As áreas das superfícies destas máquinas, por outro lado, são proporcionais aos quadrados de suas dimensões. O quadrado de dois é 4. Desta maneira, a máquina mais pesada exporá ao vento uma superfície com área apenas 4 vezes maior, tendo então uma nítida desvantagem na razão eficiência por peso.*”

**3ª PARTE: Olhando a pipa tetraédrica como um fractal.**

Nota-se que cada pipa da Figura 1 assemelha-se a uma Pirâmide de Sierpinski, como abaixo:



**Figura 2:** Os quatro primeiros níveis da construção da Pirâmide de Sierpinski.

5. Observando os níveis da Pirâmide de Sierpinski da Figura 2, responda as questões abaixo.
- Repare que no nível 1 são formados quatro tetraedros (congruentes entre si) em relação ao nível zero. Quantos tetraedros há no nível dois? Seja  $T_n$  o número de tetraedros do nível  $n$ . Observando-se que trata-se de uma PG, determine  $T_n$  em função de  $n$ .
  - Seja  $L$  a aresta do tetraedro regular do nível zero. Considere  $a_n$  o comprimento de cada aresta dos novos tetraedros formados no nível  $n$  e observe que a cada mudança de nível a aresta de um tetraedro cai pela metade. Determine  $a_1$  e  $a_2$  em função de  $L$ . Observando-se que se trata de uma PG, determine  $a_n$  em função de  $n$  e  $L$ . Essa PG é limitada?
  - Seja  $V_n$  o volume da Pirâmide de Sierpinski no nível  $n$ , ou seja,  $V_n$  é a soma dos volumes de todos os tetraedros congruentes que restaram no nível  $n$ . Sabe-se que  $V_0 = \frac{L^3\sqrt{2}}{12}$  é o volume do tetraedro do nível zero. Usando os itens  $a$  e  $b$ , mostre que  $V_n = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , ou seja, trata-se de uma PG de 1º termo  $V_0 = \frac{L^3\sqrt{2}}{12}$  e razão  $1/2$ . Você percebe essa PG apenas observando a Figura 2 (ou para suas pipas)? Justifique com suas palavras.
  - Se montarmos uma PG infinita com esses volumes, qual a soma dos infinitos termos dessa PG em função de  $L$ ?

## ANEXO A – “Passos para a construção da pipa tetraédrica”.

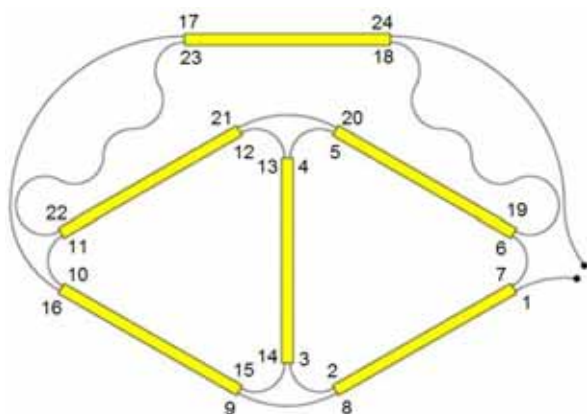
Anexo retirado do sítio eletrônico da Universidade Federal Fluminense, encontrado em BORTOLOSSI (2013b).



### PASSO 1

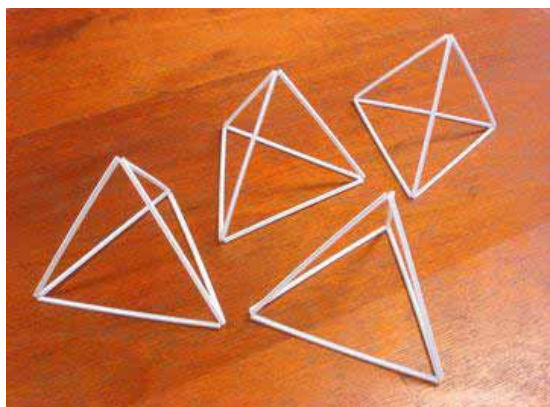
Os materiais necessários são:

- 24 canudos de mesmo tamanho (sugerimos os menos flexíveis);
- 1 carretel de linha;
- 4 folhas de papel de seda;
- 1 cartolina (para o molde de corte);
- 1 fita dupla-face;
- 1 tesoura;
- 1 palito de madeira (para reforçar a estrutura de um dos canudos).



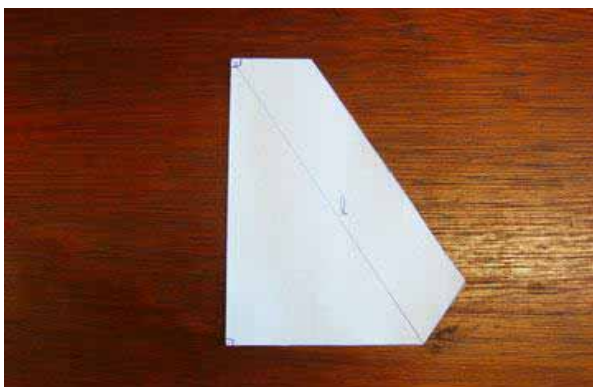
### PASSO 2

Corte um segmento de linha com tamanho igual a  $16L$ , onde  $L$  é o comprimento do canudo. Passe um dos segmentos de linha por dentro de seis canudos seguindo a ordem indicada na figura ao lado (clique na figura para ampliá-la). Feito isto, puxe ao máximo as pontas para formar a estrutura tetraédrica. Dê um nó e corte os excessos. Dica: para passar a linha pelos canudos, você pode sugá-la, mas cuidado para não engoli-la.



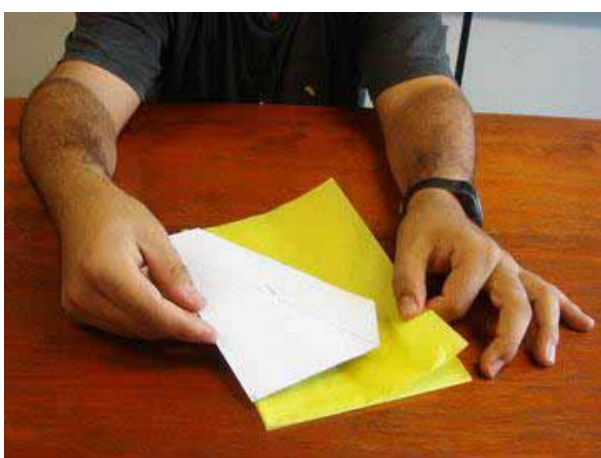
### PASSO 3

Repita o passo anterior mais três vezes para obter, no total, quatro estruturas tetraédricas.



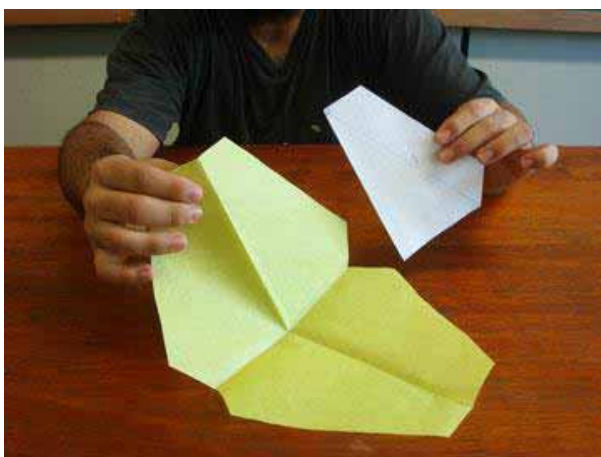
#### PASSO 4

O molde para a construção do revestimento da pipa é feito a partir da “metade” de um triângulo equilátero cujo lado tem o comprimento do canudo, acrescentando-se uma aba de largura suficiente para encapá-lo.



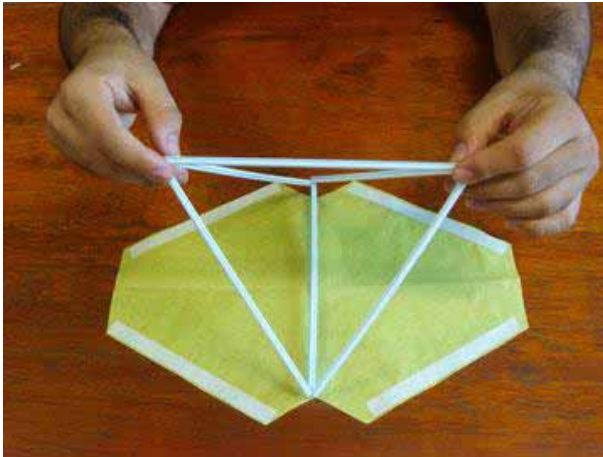
#### PASSO 5

Pegue uma das folhas de papel de seda e dobre-a em quatro. Encaixe o vértice do molde, no canto em que se encontram as dobras (centro da folha), conforme a figura. Recorte o papel de seda em torno do molde.



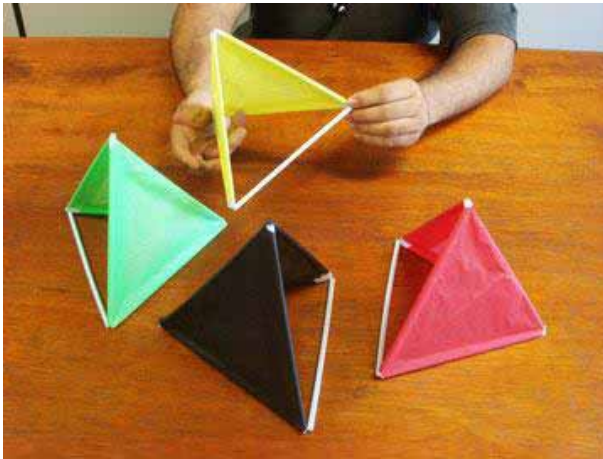
#### PASSO 6

Veja que a figura formada é um losango munido de abas iguais as do molde. Cole tiras de fita dupla-face em cada uma das abas e na diagonal menor do losango.



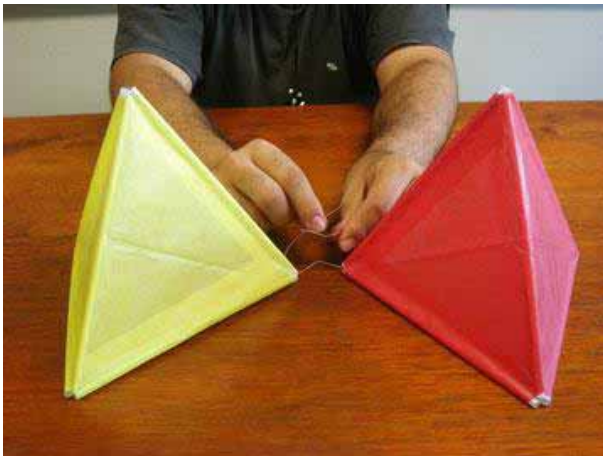
### PASSO 7

Coloque a aresta de uma das estruturas tetraédricas em cima da fita do meio, deite-a sobre uma das metades da folha e envolva, com as abas, as arestas que tocam o papel. Repita na outra parte da folha. O objeto construído é semelhante a uma asa-delta.



### PASSO 8

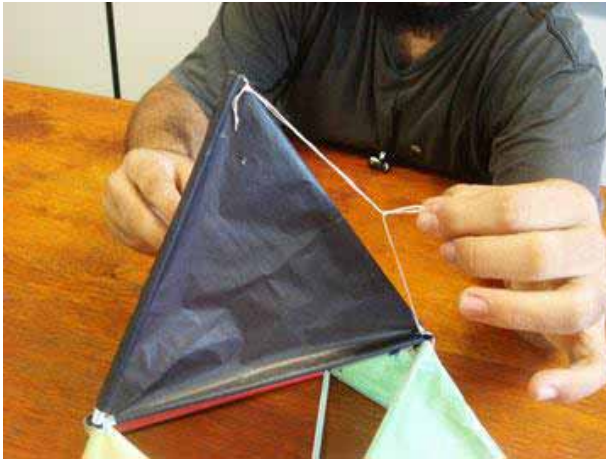
Repita os passos anteriores mais três vezes para obter, no total, quatro estruturas tetraédricas encapadas.



### PASSO 9

Agora você amarrará as estruturas que construiu. Elas serão unidas pelos vértices, de modo que cada uma das estruturas tem que estar ligada às outras três. Siga o exemplo das fotos ao lado.



**PASSO 10**

Agora faremos o cabresto. As pontas do cabresto são feitas uma no vértice superior do tetraedro de cima e a outra na interseção entre os tetraedros que estão na frente, como ilustra a figura ao lado. A folga do cabresto deve ser o menor possível [...].

**PASSO 11**

Encaixe um palito de madeira na aresta do cabresto para reforçá-la!