UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Luís Antonio Evangelista

O Teorema de Pitágoras:
Alternativas de demonstrações

São José do Rio Preto
2014

Luís Antonio Evangelista

O Teorema de Pitágoras: Alternativas de demonstrações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rita de Cassia Pavani Lamas

São José do Rio Preto
2014

Evangelista, Luís Antonio.
O Teorema de Pitágoras : alternativas de demonstrações / Luís Antonio Evangelista. -- São José do Rio Preto, 2014
55 f. : il.

Orientador: Rita de Cassia Pavani Lamas
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Pitágoras, Teorema de - Estudo e ensino. 3. Matemática – Metodologia. 4. Matemática (Ensino médio) I. Lamas, Rita de Cassia Pavani. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Luís Antonio Evangelista

O Teorema de Pitágoras: Alternativas de demonstrações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof.ª Dr.ª Rita de Cassia Pavani Lamas
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof.ª Dr.ª Miriam da Silva Pereira
UFPB – João Pessoa

Prof.ª Dr.ª Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
29 de agosto de 2014

Dedico este trabalho

A minha esposa Angelita e meu filho Luan , pela compreensão e dedicação, e também à meus pais Antonio e Isabel pela força e estímulos dados.

A todos os educadores e amigos. E principalmente aos nossos Mestres e Doutores pela dedicação em nos ensinar, por transmitir um pouco do muito que ainda tenho a aprender, ao longo de minha vida. Minha eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela oportunidade de estudar.

Agradeço a todos os educadores pela dedicação e pelos ensinamentos ao longo do curso. Em especial a minha orientadora Prof.ª Dr.ª Rita de Cassia Pavani Lamas pelo incentivo, respeito e dedicação em me conduzir a maiores reflexões, engrandecendo-me. Minha eterna gratidão.

Aos meus queridos pais Antonio Evangelista e Isabel Alves Fonseca Evangelista. Meus eternos amores.

A minha amada esposa Angelita de Sousa P. Evangelista, por sempre estar ao meu lado em todos os momentos, incentivando-me sempre.

Ao meu amado e querido filho Luan Henrique Evangelista.

E finalmente, a todos que de forma direta ou indireta me auxiliaram para que chegasse até aqui.

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo mostrar que o Teorema de Pitágoras, uma das principais criações da Matemática, não deve ser encarado como uma simples fórmula a memorizar, mas sim como uma ferramenta importante e de grande utilidade que deve ser demonstrada. Como as demonstrações normalmente são muito pouco trabalhadas no Ensino Fundamental e Médio, grande parte dos alunos e professores não tem oportunidade de conhecer a enorme riqueza das suas aplicações e as distintas demonstrações, muitas vezes, surpreendentes. Além de apresentar nesse trabalho seis demonstrações históricas e clássicas, também é apresentado como alternativa de ensino, atividade experimental para induzir os alunos ao Teorema de Pitágoras, assim como motivá-los a conhecer as suas demonstrações. Tal atividade foi aplicada com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio e os resultados foram positivos, como pode ser verificado aqui.

Palavras chave: Teorema de Pitágoras. Atividade experimental. Demonstração.

ABSTRACT

This work aims to show that the Pythagorean Theorem, a major creations in mathematics, should not be seen as a simple formula to memorize, but as an important and useful tool that should be demonstrated. Because the statements are normally very little worked in elementary and high school, most students and teachers have no opportunity to meet the enormous wealth of their applications and the different statements often surprising. In addition to presenting this work six historic and classic statements, is also presented as alternative education, experimental activity to induce students to the Pythagorean theorem, as well as motivate them to meet their statements. Such activity was applied with students of the first year of high school and the results were positive, as can be seen here.

Keywords: Pythagorean Theorem. Experimental activity. Demonstration.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O teorema de Pitágoras acompanhou-nos durante nossa vida escolar a partir do Ensino Fundamental – ciclo II e, dada a sua importância no ensino, é fundamental que o professor conheça algumas demonstrações deste teorema para que possa possibilitar aos alunos um contato com diferentes tipos de raciocínios mostrando-lhes que é possível demonstrar determinada propriedade matemática.

> *A Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL,1998a, p. 42).*

Segundo Barbosa (1998, p.5), um referencial sobre o grande número de demonstrações do Teorema de Pitágoras é o livro do professor de Matemática Elisha Scott Loomis do Estado de Ohio, Estados Unidos, publicado em 1927. O livro " The Pythagorean Proposition" reúne 230 demonstrações do teorema, em sua segunda edição, em 1940, ampliou esse número para 370.

O objetivo desse trabalho não é fazer todas essas demonstrações e sim apresentar alternativas de demonstrações. As demonstrações do capítulo 4 são históricas e do capítulo 5 são baseadas em conhecimentos desenvolvidos no Ensino Fundamental. Isso permite a utilizá-las tanto no Ensino Fundamental ou Médio (nono ano ou 1º ano), estimulando uma aprendizagem significativa e desenvolvendo competências e habilidades importantes, via uma retrospectiva dos resultados.

Para isso, foi proposta uma atividade experimental de forma a induzir os alunos ao Teorema de Pitágoras e motivá-los a demonstrá-lo de diferentes maneiras. É importante destacar que a atividade experimental não é suficiente para demonstrar o Teorema. Em cada caso será necessário mostrar que as figuras recortadas realmente formam a figura final (trapézio, quadrado, ...), via conceitos básicos do Ensino Fundamental (ângulos, polígonos, semelhança e áreas).

Em geral, os livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio trazem apenas a demonstração via semelhança de triângulos e a proposta de atividades experimentais análogas as propostas neste trabalho, que raramente são desenvolvidas e demonstradas em sala de aula.

Muitos tópicos matemáticos dependem do estudo do Teorema de Pitágoras, isso está de acordo com os PCNs (BRASIL, 1998a).

No segundo capítulo é apresentado um breve histórico sobre o Teorema de Pitágoras, no terceiro capítulo são apresentados conceitos geométricos, os quais serão necessários nas demonstrações, no quarto capítulo são apresentadas seis alternativas de demonstrações históricas do Teorema de Pitágoras baseadas nos conceitos de área, semelhança e equivalência de polígonos (congruência), incluindo nessas a demonstração mais antiga feita por Euclides, em Os Elementos, uma demonstração presidencial feita pelo Presidente Garfield (presidente dos Estados Unidos por quatro meses) que também usou o conceito de áreas, mas se diferenciou das demais por usar apenas triângulos em sua demonstração. No quinto capítulo são apresentadas quatro demonstrações das mostrações do Teorema, as quais foram propostas via atividade experimental, para os alunos do Ensino Fundamental (9º ano) e/ou Médio (1º ano).

Os resultados de aplicação da atividade experimental para alunos do primeiro ano do ensino médio, assim como as considerações finais se encontram no sexto capítulo.

Todas as demonstrações aqui desenvolvidas se encontram nas referências citadas na bibliografia. Reuní-las em um único texto facilitará seu uso pelos professores e alunos.

2. BREVE HISTÓRICO – PITÁGORAS E O SEU TEOREMA

Pitágoras, uma das personalidades mais fascinante e misteriosa da antiguidade, foi um grande filósofo e matemático grego que nasceu em Samos cerca de 570 a.C. e morreu cerca de 496 a.C..

> *Pitágoras viveu há mais de dois mil anos, por isso conhece-se pouco a seu respeito. Todos os seus escritos perderam-se, mas ele é citado por escritores que o sucederam. Sabe-se que foi matemático, filósofo, sacerdote e líder de uma seita religiosa. (IMENES e LELLIS - 2000, p. 7).*

Para Eves (1997), sua história é envolta em lendas e mitos pois não há relatos originais sobre sua vida, é possível que tenha sido discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo do que este e morava em Mileto, onde vivia Tales.

Pitágoras foi o fundador da famosa escola pitagórica que era um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais. Como nessa escola todas as descobertas eram atribuídas ao fundador é difícil saber exatamente quais descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras.

Figura 1: Escola Pitagórica.
Fonte: www.humaniversidade.com.br

Pitágoras teve seu nome associado a um dos mais importantes teoremas da Geometria Plana, mas

> *não foi Pitágoras quem inventou o teorema, pois "esse já era conhecido pelos babilônicos do tempo de Hamurabi, mais de um milênio antes", é possível que o teorema leve o seu nome por acreditar-se que ele tenha sido o primeiro a dar uma demonstração geral (EVES-1997).*

Na sua origem, o Teorema de Pitágoras foi descrito com o seguinte contorno:

> *"A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos" (LIMA – 2006, p.52.).*

A figura 2 apresenta um exemplo específico de triângulo retângulo de lados medindo a, b e c unidades de comprimento, com a representação do que isso significa.

O Teorema de Pitágoras como conhecemos hoje: num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

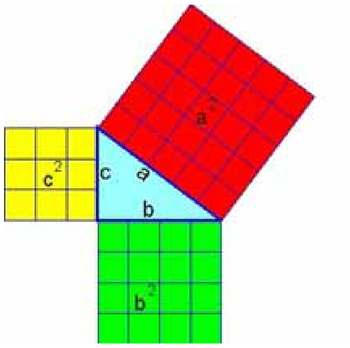


Figura 2: Configuração geométrica para oTeorema de Pitágoras.

3. CONCEITOS PRELIMINARES

3.1. Congruência de triângulos

3.1.1 Definição. Dois segmentos *AB e CD* são chamados congruentes quando *AB e CD* tem a mesma medida. Dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são chamados congruentes quando têm a mesma medida.

Para simplificar ao máximo a nossa notação, iremos utilizar o símbolo "=" para representar congruente, *"AB"* para segmento de *A* até *B* e "$\overline{AB}$" para medida do segmento *AB*.

3.1.2. Definição. Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Se *ABC e DEF* são dois triângulos congruentes (Figura 3) e se,

$A \leftrightarrow D$

$B \leftrightarrow E$

$C \leftrightarrow F$

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes:

$\overline{AB} = \overline{DE}$ $\quad$ $\overline{BC} = \overline{EF}$ $\quad$ e $\quad$ $\overline{AC} = \overline{DF}$

$\hat{A} = \hat{D}$ $\quad$ $\hat{B} = \hat{E}$ $\quad$ $\hat{C} = \hat{F}$

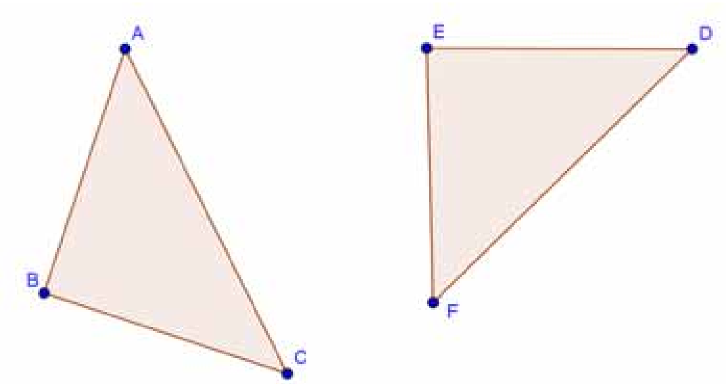


Figura 3: Triângulos congruentes.

As propriedades a seguir são consequências imediatas da definição de triângulos congruentes.

a) reflexiva: triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *ABC*.

b) simétrica: triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *RST* então o triângulo *RST* é congruente ao triângulo *ABC*.

c) transitiva: se o triângulo *ABC* é congruente aos triângulos *RST* e *XYZ* então os triângulos *RST* e *XYZ* são congruentes.

Axioma 3.1.3. (1º caso de congruência-LAL): Dados dois triângulos *ABC* e *EFG*, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$ e $\hat{A} = \hat{E}$ então *ABC*=*EFG*.

Teorema 3.1.4. (2º caso de congruência-ALA): Dados dois triângulos *ABC* e *EFG*, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então *ABC*=*EFG*.

Prova: Sejam *ABC* e *EFG* dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Seja *D* um ponto da semirreta S_{AC} tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$ (Figura 4).

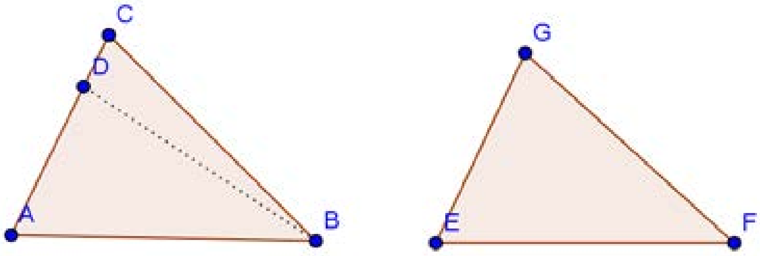


Figura 4:Triângulo ABD congruente a EFG.

Considere o triângulo *ABD* e o compare com o triângulo *EFG*. Como $\overline{AD} = \overline{EG}$, $\overline{AB} = \overline{EF}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, concluímos, pelo axioma I, que *ABD*=*EFG*. Como consequência, têm-se que $A\hat{B}D = \hat{F}$. Mas, por hipótese, $\hat{F} = A\hat{B}C$. Logo $A\hat{B}D = A\hat{B}C$. Consequentemente as semirretas S_{BD} e S_{BC} coincidem. Mas então o ponto *D* coincide com o ponto *C* e, portanto, coincidem os triângulos *ABC* e *ABD*. Como provamos que *ABD*=*EFG*, então *ABC*=*EFG*.

Teorema 3.1.5. (3º caso de congruência-LLL): Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

Prova: Sejam *ABC* e *EFG* dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$. Vamos provar que *ABC*=*EFG*.

Para isso, construa, a partir da semirreta S_{AB} e no semiplano oposto ao que contém o ponto *C*, um ângulo igual ao ângulo $\hat{E}$ (Figura 5). No lado deste ângulo que não contém o ponto *B*, marque um ponto *D* tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$ e ligue *D* a *B*.

O segmento *CD* intersecta a reta *AB* em um ponto *H*.

Para *H* em *AB*; *H*≠*A* e *H*≠*B* (Figura 5), temos $\overline{AB} = \overline{EF}$ (por hipótese), $\overline{AD} = \overline{EG}$ (por construção) e $D\hat{A}B = \hat{E}$ (por construção), então pelo axioma 3.1.3 , *ABD*=*EFG*.

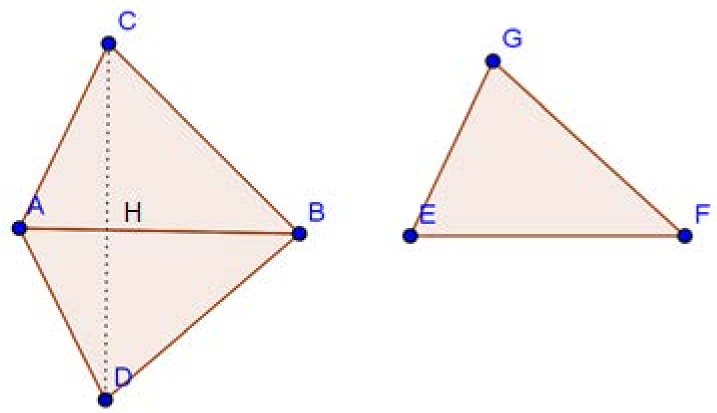


Figura 5: Ponto H no interior de AB.

Os triângulos *ABD* e *ABC* são congruentes.

Como $\overline{AD} = \overline{EG} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{FG} = \overline{BC}$, os triângulos *ADC* e *BDC* são isósceles. Segue-se que $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B = D\hat{C}B$, logo $A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Então, pelo axioma 3.1.3, *ABD*=*ABC*. Como já provado que *ABD*=*EFG*, *ABC*=*EFG*.

O caso em que *H* está no exterior de *AB* é análogo.

Para H=A ou H=B (Figura 6), $\overline{AB} = \overline{EF}$ (por hipótese), $\overline{AD} = \overline{EG}$ (por construção) e $D\hat{A}B = \hat{E}$ (por construção). Assim, pelo axioma 3.1.3 , *ABD*=*EFG*.

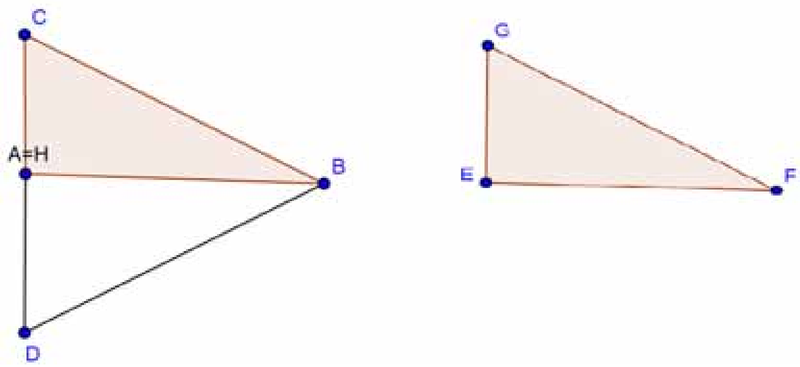


Figura 6: Ponto H =A.

Como $\overline{BC} = \overline{FG} = \overline{BD}$, o triângulo *BDC* é isósceles de base *CD*. Segue que $A\hat{C}B = A\hat{D}B$. Pelo axioma 3.1.3, *ABD*=*ABC* e por transitividade *ABC*=*EFG*.

3.2. O Teorema do ângulo externo e suas consequências

Definição 3.2.1: Se ABC é um triângulo, os seus ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são chamados de ângulos internos ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo

Na figura 7, $B\hat{A}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC , pois é suplementar à $C\hat{A}B$.

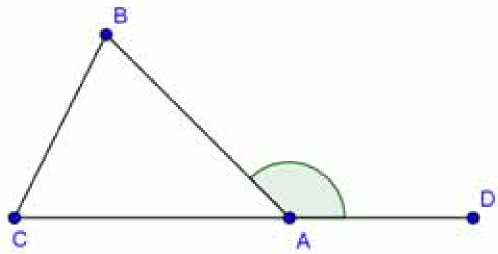


Figura 7: Ângulo externo.

Teorema 3.2.2 (ângulo externo): Todo ângulo externo de um Triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

A demonstração do Teorema 3.2.2 pode ser encontrada em Barbosa (2000, p.50).

3.3. O axioma das paralelas

Axioma 3.3.1: Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a reta m.

Proposição 3.3.2: Se a reta *m* é paralela às retas *s* e *t*, então *s* e *t* são paralelas ou coincidentes.

Prova: Suponha que *s* e *t* não coincidem e são paralelas a reta *m*. Se *s* e *t* não fossem paralelas entre si, elas teriam um ponto de intersecção, digamos *P*. Mas então *s* e *t* seriam distintas paralelas à reta *m* passando por *P*. Isto contradiz o axioma 3.2.1. Logo *s* e *t* são paralelas.

Proposição 3.3.3: Sejam *m, n,* $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Se $\hat{A} = \hat{B}$ como na figura 8, então as retas m e n são paralelas.

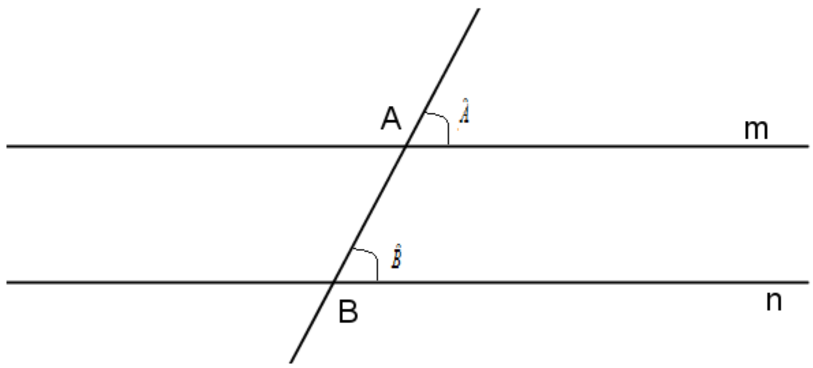


Figura 8: Retas m e n paralelas.

Prova: De fato, se m intercectasse n em algum ponto *P*, teríamos um triângulo ABP, representado na figura 9. Neste triângulo $\hat{A}$ é ângulo externo e $\hat{B}$ é ângulo interno não adjacente ao ângulo $\hat{A}$, ou vice-versa. Assim, pelo teorema 3.2.2 teríamos $\hat{A} \neq \hat{B}$ o que contradiz nossa hipótese. Portanto, m e n não se intersectam.

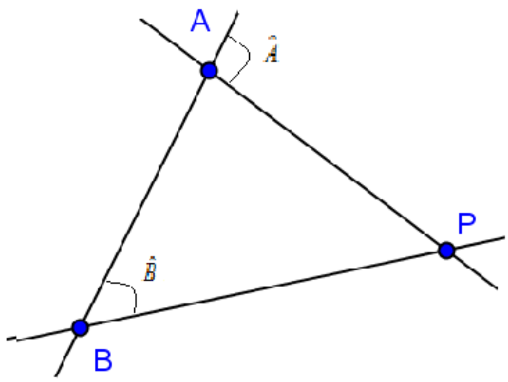


Figura 9: Intercecção de m e n.

Teorema 3.3.4: Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

A prova do Teorema 3.3.4 pode ser encontrada em Barbosa (2000, p.82).

3.4. Semelhança de triângulos

Definição 3.4.1: Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais (Figura 10).

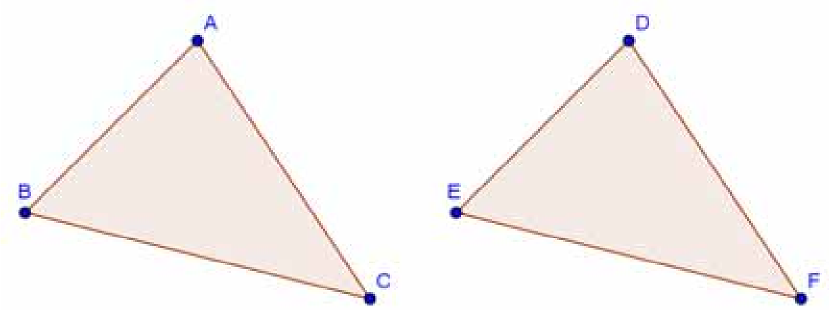


Figura 10: triângulos semelhantes.

Com isto queremos dizer que, se *ABC* e *DEF* são dois triângulos semelhantes e se $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$ e $C \rightarrow F$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes igualdades:

$\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$

e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$$

A razão k é chamada de constante de proporcionalidade. Pode ser observado que dois triângulos congruentes são semelhantes, com $k = 1$.

As propriedades reflexiva, simétrica e transitiva são válidas para a semelhança de triângulos.

Teorema 3.4.2 (caso de semelhança - AA): Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

Demonstração:

Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180º, a congruência dos dois ângulos acarreta na congruência dos demais. Resta provar que os lados são proporcionais.

No caso dos dois triângulos serem congruentes, nada há a demonstrar, pois por definição de congruência os triângulos são necessariamente semelhantes. Considere os triângulos *ABC* e *DEF*, com $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\overline{AB} > \overline{ED}$. Seja G em AB com $\overline{AG} = \overline{DE}$ e $\hat{G} = \hat{E}$ (Figura 11).

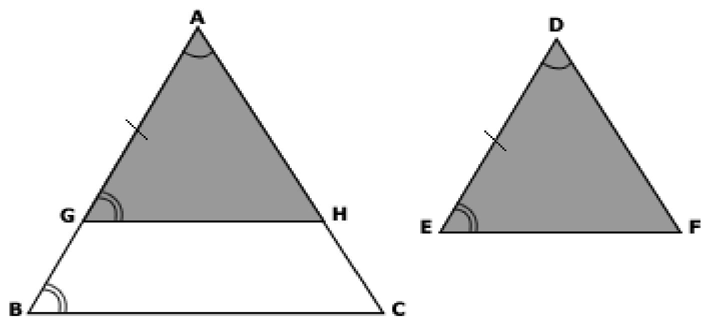


Figura 11: Configuração dos triângulos.

O triângulo *AGH* é congruente ao triângulo *DEF*, pelo critério ALA ($\hat{A} = \hat{D}$ $\overline{AG} = \overline{DE}$ e $\hat{G} = \hat{E}$).

De $\hat{E} = \hat{G}$ (construção) e $\hat{B} = \hat{E}$ (hipótese), $\hat{G} = \hat{B}$ (ângulos correspondentes). Logo, pela proposição 3.3.3, *GH* é paralelo a *BC*.

Portanto,

$$\hat{H} = \hat{C} \text{ e pelo teorema 3.3.4 , } \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}}.$$

Substituindo $\overline{AH} = \overline{DF}$ e $\overline{AG} = \overline{DE}$,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

De maneira análoga, demonstra-se que $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$.

3.5. Área – regiões poligonais

Definição 3.5.1: Uma região triangular é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de fronteira da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertencem a sua fronteira é chamado de interior da região triangular (Figura 12).

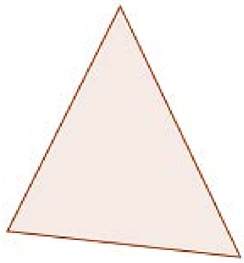


Figura 12: Região triangular.

Definição 3.5.2: Uma região poligonal é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não tem pontos interiores em comum (Figura 13).

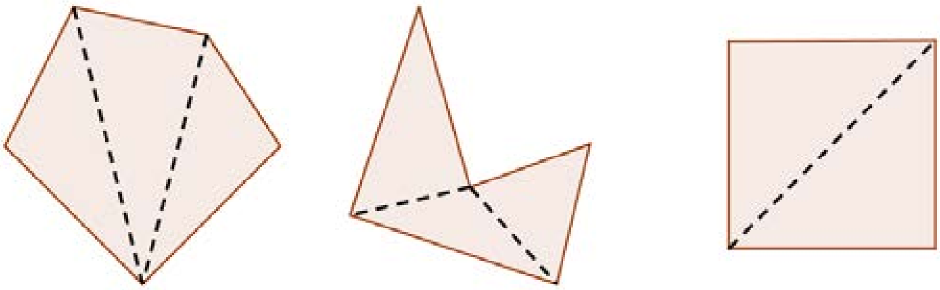


Figura 13: Regiões poligonais.

Definição 3.5.3: Um ponto é interior a uma região poligonal se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto no seu interior. O interior da região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A fronteira da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:

Axioma 3.5.4: A toda região poligonal corresponde um número maior que zero.

O número a que se refere este axioma é chamado de área da região.

Axioma 3.5.5: Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

Axioma 3.5.6: Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.

Expressões do tipo "área de um quadrado" quer dizer realmente "a área da região poligonal cuja fronteira é um quadrado". Em geral, a "área de um dado polígono", referirá a área da região cuja fronteira é aquele polígono. Assim, o axioma 3.3.3 poderia ter sido enunciado como: "triângulos congruentes possuem áreas iguais".

Axioma 3.5.7: Se *ABCD* é um retângulo então sua área é dada pelo produto: $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

Teorema 3.5.8: A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.

Prova: Dado um triângulo *ABC*, considere a altura CD relativa ao lado AB, a reta s paralela ao lado *AB* passando pelo vértice *C*, e as perpendiculares a reta s pelos vértices *A* e *B* (Figura 14).

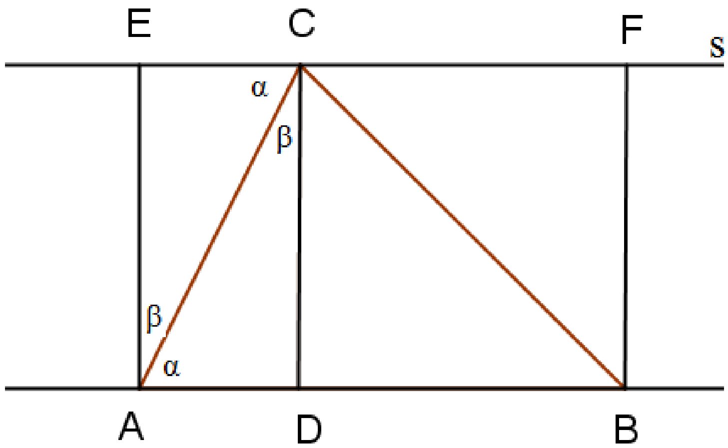


Figura 14: A reta s e as perpendiculares AE e BF.

Pelas considerações,

$A\hat{D}C = A\hat{E}C = 90°$;

α+β=90°.

Pela proposição 3.3.3, os lados opostos do quadrilátero são paralelos, ou seja, *ADCE* é um retângulo. Portanto, $\overline{AE} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{CE}$ e $\overline{AC}$ é lado comum aos triângulos ADC e AEC. Pelo caso LLL o triângulo ADC é congruente ao triângulo AEC.

Pelo axioma 3.5.7, o retângulo *ADCE* tem área igual a $\overline{AD} \cdot \overline{DC}$. Pelo axioma 3.5.5 essa área pode ser dada pela soma das áreas dos triângulos *ADC* e *AEC*, os quais tem a mesma área, pelo axioma 3.5.6. Logo,

Àrea de $ADC = \frac{1}{2}$ da área de $ADCE = \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{DC}$.

Analogamente, temos área de $BDC = \frac{1}{2}$ da área de $BDCF = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{DC}$.

Pelo axioma 3.5.5.:

Área de ABC = área de ADC + área de BDC =

$\frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{DC} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BD}) \cdot \overline{DC}$;

Como A, B e D são colineares, $(\overline{AD} + \overline{BD}) = \overline{AB}$. Portanto,

Área de $ABC = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{DC}$.

Observamos que neste caso foi considerado o lado AB e a altura do triângulo relativo a esse lado. As demonstraços para as outros lados são análogas.

4. DEMONSTRAÇÕES

Na Matemática para que uma proposição seja verdadeira é necessário demonstrá-la. O mesmo se aplica ao Teorema de Pitágoras.

Nesse capítulo são apresentadas seis demonstrações do Teorema de Pitágoras utilizando os conceitos de áreas, semelhança entre triângulos e congruências.

4.1. Demonstração do Teorema de Pitágoras segundo Euclides

Para Euclides, duas figuras geométricas são iguais se têm a mesma área. Esta noção estará patente em sua demonstração.

A Proposição 47 do Livro I dos Elementos de Euclides trata da demonstração do Teorema de Pitágoras, conforme segue.

Proposição 4.1.1 (Proposição I-47 do Livro I): Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que forma o ângulo reto.

> *"Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto" (EUCLIDES, 2009, p. 132.).*

Demonstração: Seja ABC um triângulo retângulo, com ângulo reto em A. Deve ser mostrado que o quadrado feito sobre BC é igual à soma dos quadrados feitos sobre AB e AC.

Construa o quadrado $BDEC$ sobre BC e os quadrados $ABFG$ e $ACKH$ sobre AB e AC, respectivamente (Figura 15).

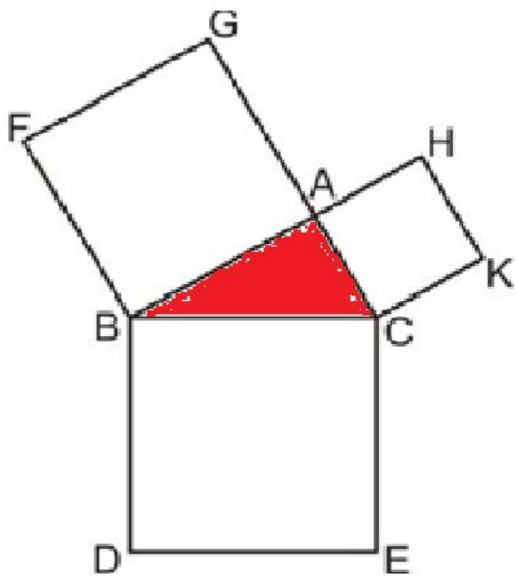


Figura 15: Triângulo ABC e os quadrados sobre seus lados.

Trace, a partir de *A*, a reta *AL*, paralela a *CE* ou a *BD*, e as retas *AD* e *CF* (Figura 16).

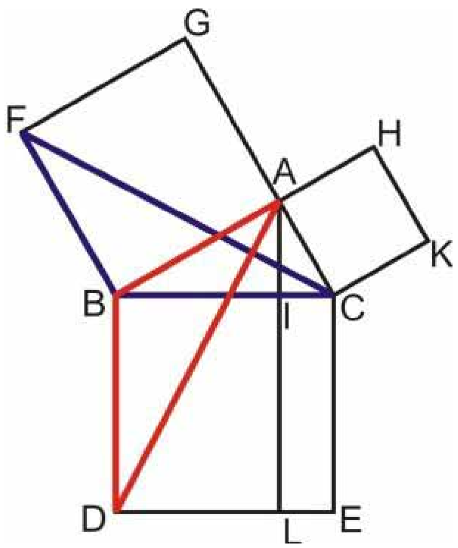


Figura 16: retas AL, AD e CF.

Como $B\hat{A}G$ e $C\hat{A}B$ são retos, os pontos *A, C* e *G* são colineares, do mesmo modo, se tem *A,B* e *H* colineares.

Por $F\hat{B}A$ e $C\hat{B}D$ serem retos, os ângulos $F\hat{B}C$ e $A\hat{B}D$ são congruentes, já que ambos resultam da soma de um ângulo reto e do ângulo $A\hat{B}C$ e, como $\overline{BD} = \overline{CB}$ e $\overline{FB} = \overline{AB}$, pelo caso LAL, os triângulos *FBC* e *ABD* são congruentes.

Por estarem entre as mesmas paralelas *BD* e *AL* e terem a base *BD* comum, o paralelogramo *BDLI* é o dobro do triângulo *ABD* (Figura 17).

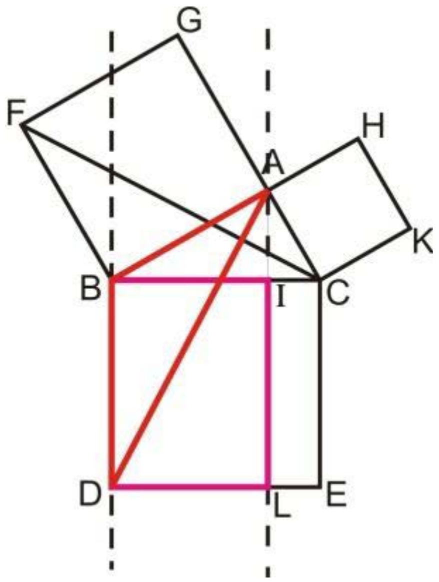


Figura 17: paralelogramo BDLI e triângulo ABD.

De fato:

$$A_{\Delta} = \frac{\overline{BD} \times \overline{BI}}{2}$$

e

$$A_{\square} = \overline{BD} \times \overline{BI} .$$

Logo,

$$A_{\square} = 2A_{\Delta} .$$

De maneira análoga, o paralelogramo *GFBA* é o dobro do triângulo *FBC*, considerando as paralelas *FB* e *GC* e a base *FB* (Figura 18).

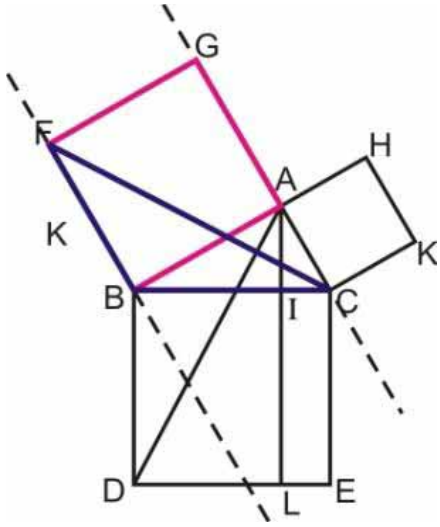


Figura 18: Paralelogramo GFBA e triângulo FBC.

Deste modo, como *ABD* = *FBC*, os paralelogramos *BDLI* e *GFBA* possuem a mesma área.

Analogamente, se mostra que os paralelogramos *HACK* e *ILEC* possuem mesma área (Figura 19).

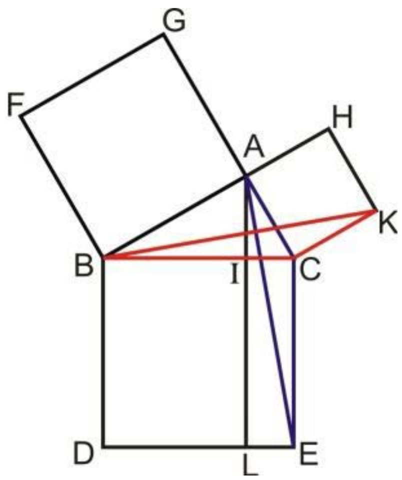


Figura 19: Paralelogramos HACK e ILEC.

Trace-se *AE* e *KB*. Por $E\hat{C}B$ e $A\hat{C}K$ serem ângulos retos, os ângulos $E\hat{C}A$ e $B\hat{C}K$ são iguais. Por esta razão e por $\overline{AC} = \overline{CK}$ e $\overline{EC} = \overline{BC}$, pelo caso LAL os triângulos *AEC* e *BCK* são congruentes (Figura 19).

Devido *AEC* e *ILEC* estarem entre as mesmas paralelas *AL* e *CE* e terem a mesma base *CE*, *ILEC* é o dobro de *AEC*.

Do mesmo modo, *HACK* é o dobro de *BCK* (Figura 20).

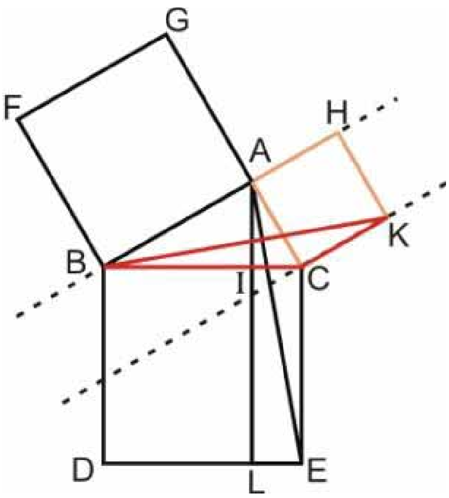


Figura 20: $A_{HACK} = 2A_{BCK}$.

Como $AEC = BCK$ pelo caso LAL, pelo axioma 3.5.6 $ILEC$ tem a mesma área que $HACK$.

Como provado que $GFBA = BDLI$ e $HACK = ILEC$, temos que o quadrado $BDEC$ feito sobre BC, lado oposto ao ângulo reto CAB, é igual à soma dos quadrados $HACK$ e $BAGF$, feito sobre AC e AB, respectivamente.

4.2. Demonstração clássica – pelo cálculo de áreas

Teorema 4.2.1 (Teorema de Pitágoras): Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

A expressão o quadrado da hipotenusa, tem como significado exato quadrado da medida da hipotenusa, analogamente para os catetos.

Demonstração:

Considere o triângulo retângulo IJK (Figura 21).

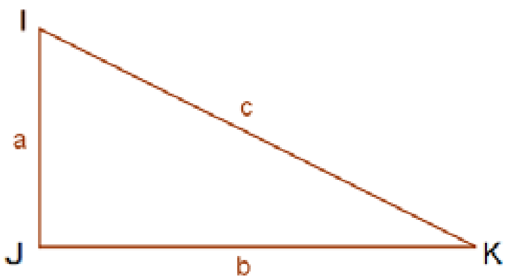


Figura 21: triângulo IJK.

Construa um quadrado *ABCD* de lado $a + b$, sobre os lados desse quadrado marque os pontos *E, F, G* e *H*, de modo que: $\overline{AH} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DG} = a$ e $\overline{AG} = \overline{DF} = \overline{CE} = \overline{BH} = \text{b}$ (Figura 22).

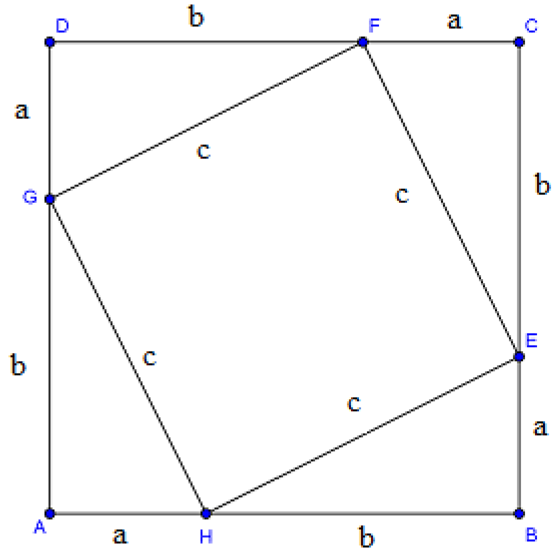


Figura 22: Divisão do quadrado de lado a+b.

Pelo caso LAL, os triângulos retângulos *AHG, BEH, CFE* e *DGF* são congruentes ao triângulo retângulo *IJK*. Portanto, congruentes entre si. Logo, a hipotenusa desses triângulos são congruentes e medem c.

O quadrilátero *EFGH* é um paralelogramo. Resta mostrar que seus ângulos internos medem 90º.

Sejam *α e β* os ângulos agudos desses triângulos, conforme figura 23.

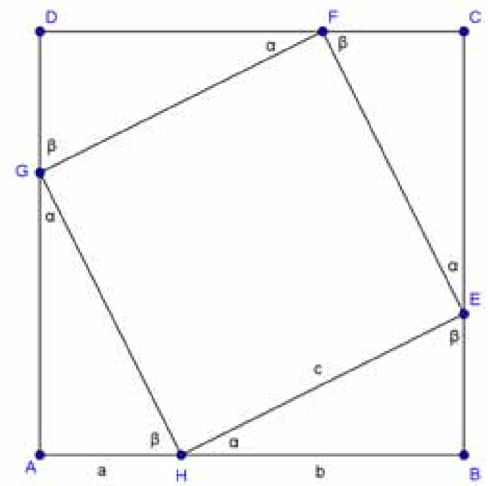


Figura 23: ângulos α e β.

Como $\alpha + \beta = 90°$ segue que cada ângulo interno do quadrilátero *EFGH* deve ser reto. Logo, *EFGH* é um quadrado de lado c .

A área do quadrado de lado $a + b$ é igual a soma da área do quadrado de lado c com a área de quatro triângulos retângulos de catetos a e b.

Pelo axioma 3.5.5:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4ab/2.$$

Substituindo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$$

Portanto, $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$.

4.3. Demonstração de Bháskara

> *Bháskara (1114-1185), matemático hindu, ensinou no maior centro do país, em Ujjain, e seu mais celebre trabalho foi o manuscrito Lilavati.... Não ofereceu para a sua figura qualquer explicação além de uma palavra de significado veja ou contemple, talvez sugerindo que em seu diagrama (Figura 24), a disposição induzia a uma bela prova do Teorema de Pitágoras. (BARBOSA 1998, p.7)*

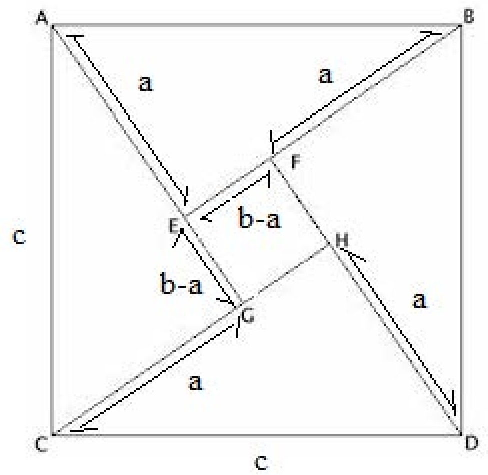


Figura 24: Configuração de Bháskara.

Considere um quadrado *ABCD* de lado *c,* construa no interior desse quadrado quatro triângulos retângulos congruentes, com hipotenusa sobre os lados do quadrado *ABCD* e catetos *a* e *b,* obtendo o quadrilátero *EFHG* (Figura 24).

Sejam os catetos maiores tal que, $\overline{CH} = \overline{DF} = \overline{BE} = \overline{AG} = b$ *e* $\overline{CG} = \overline{DH} = \overline{BF} = \overline{AE} = a.$

Como os ângulos internos de *EFHG* são retos, suplementares de ângulo reto, e $\overline{GH} = \overline{CH} - \overline{CG} = b - a$, $\overline{HF} = \overline{DF} - \overline{DH} = b - a$, $\overline{FE} = \overline{BE} - \overline{BF} = b - a$ e $\overline{EG} = \overline{AG} - \overline{AE} = b - a$, *EFHG* é um quadrado de lado (b – a).

Assim, a área do quadrado *ABCD* é igual a:

$$c^2 = (b - a)^2 + 4ab/2 = b^2 - 2ab + a^2 + 4ab/2.$$

Portanto,

$$\mathbf{c^2 = b^2 + a^2.}$$

4.4. Demonstração por semelhança de triângulos

Considere o triângulo *ABC*, retângulo em C (Figura 25). A altura *CD* relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo *ABC*.

De fato,

$$\beta + \eta = 90^{\circ} \text{ ou } \eta = 90^{\circ} - \beta.$$

$$\theta + \eta = 90^{\circ} \text{ ou } \eta = 90^{\circ} - \theta.$$

$$\alpha + \theta = 90^{\circ} \text{ ou } \alpha = 90^{\circ} - \theta.$$

Logo, $\theta = \beta$ e $\eta = \alpha$.

Pelo Teorema 3.4.2(caso AA), os triângulos ABC e CBD são semelhantes, assim como ABC e ACD. Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos desses triângulos.

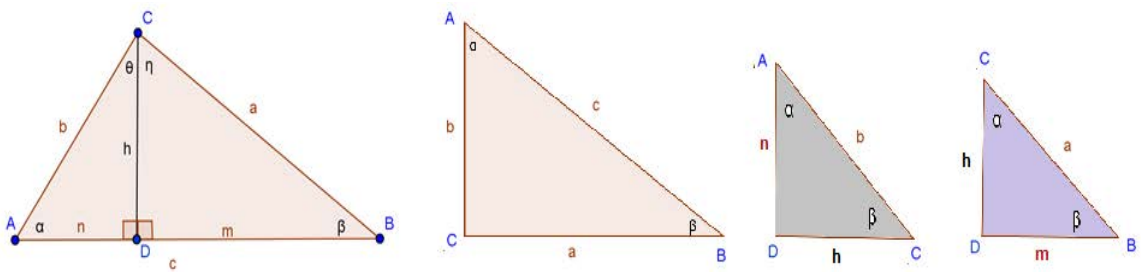


Figura 25: Triângulo retângulo com as projeções dos catetos e a altura.

Da semelhança dos triângulos *ABC* e *CBD*,

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{m}.$$

Da semelhança dos triângulos ABC e ACD,

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{n} \ .$$

Logo, a² = cm e b² = cn. Assim,

$$a^2 + b^2 = cn + cm = c(m + n).$$

Como, m + n = c,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Esta demonstração é a normalmente proposta nos livros didáticos das escolas do ensino fundamental, embora nem sempre é apresentada aos alunos. Ela permite não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como obter outras relações métricas no triângulo retângulo úteis nas aplicações. Reforça também o conceito de semelhança de triângulos.

4.5. Demonstração via quadriláteros equivalentes

Esta demonstração se baseia na congruência de triângulos e na comparação de quadriláteros de mesma área.

Considere o triângulo ABC retângulo em C e os quadrados construídos sobre seus lados. Seja CH a altura relativa à hipotenusa e F um ponto na semirreta, tal que $\overline{HF} = \overline{AB}$ (Figura 26).

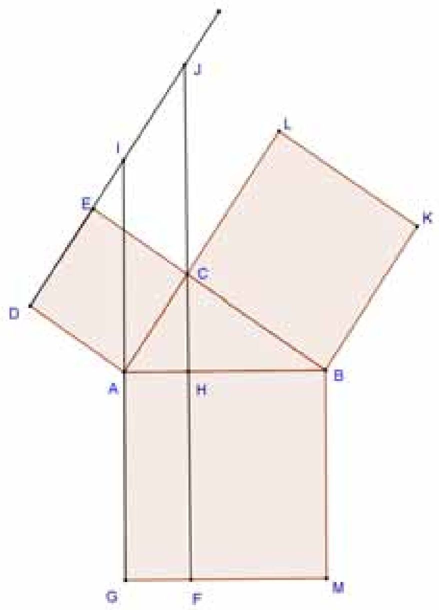


Figura 26: Triângulo ABC com altura CH.

Com isso, construímos o retângulo *AHFG* (*AH* é a projeção ortogonal de *AC* sobre *AB*) e o quadrilátero *ABED*.

A semirreta *DE* intercepta a semirreta *GA* em um ponto *I*, e intercepta a semirreta *HF* em um ponto *J*, formando o paralelogramo *ACJI*, uma vez que *IJ* é paralela a *AC* e *AI* é paralela a *CJ*.

Como *ACED* e *ACJI* são paralelogramos de mesma base e mesma altura, ambos tem a mesma área.

Por definição de quadrado, $\overline{AD} = \overline{AC}$, e também que o ângulo $A\hat{D}E$ é reto. Portanto, os ângulos $A\hat{D}E = A\hat{C}B$.

Os ângulos $D\hat{A}I$ e $C\hat{A}B$ são ambos complementares de $I\hat{A}C$, ou seja, $D\hat{A}I + I\hat{A}C = 90°$ e $C\hat{A}B + I\hat{A}C = 90°$.

Logo, $D\hat{A}I = C\hat{A}B$.

Pelo caso ALA, os triângulos *ABC* e *AID* são congruentes. Segue que $\overline{AI} = \overline{AB}$. Como $\overline{AB} = \overline{HF}$, $\overline{AI} = \overline{HF}$.

Como *ACJI* e *AHGF* são paralelogramos de mesma base ($\overline{AI} = \overline{HF}$) e mesma altura($\overline{AH}$), ambos têm a mesma área.

Analogamente, *ACDE* tem a mesma área de *ACIJ*. Logo, a área do quadrado *ACDE* é igual à área do retângulo *AHFG*.

De forma análoga, a área do quadrado *CBKL* é igual a área do retângulo *ABFM*.

Como a união do retângulo determinado por *AH* e *HF* com o retângulo determinado por *HB* e *HF* é igual ao quadrado sobre *AB*, segue que a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos é igual a área do quadrado sobre a hipotenusa.

4.6. Demonstração do Presidente Garfield

O Presidente James Abram Garfield usou em sua demonstração comparação entre áreas. Com exceção da demonstração por semelhança, as demais utilizaram o conceito de área, mas diferem da demonstração de Garfield por trabalharem com figuras planas distintas (não apenas triângulos).

Para mostrar que $c^2 = a^2 + b^2$, para o triângulo retângulo de hipotenusa c e catetos a e b foi utilizado um trapézio (Figura 27), formado por dois triângulos retângulos congruentes, com catetos *a, b* e hipotenusa *c*, e um triângulo isósceles, conforme segue.

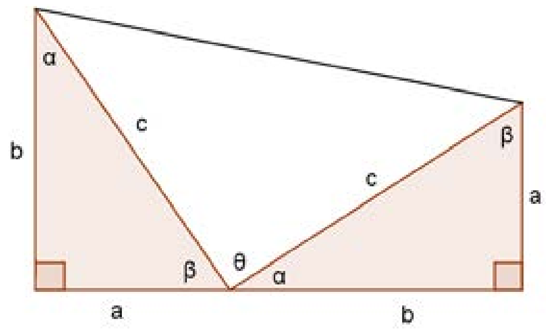


Figura 27: Configuração proposta por James Abram Garfield.

A soma dos ângulos agudos do triângulo retângulo com o ângulo formado pelos lados homólogos do triângulo isósceles é 180°, isto é, $\alpha + \beta + \theta = 180°$.

Como $\alpha + \beta = 90°$, $\theta = 90°$. Portanto, o triângulo isósceles é retângulo de catetos iguais a *c*.

A área desse trapézio é dada por: $\frac{a+b}{2}.(a+b) = \frac{a^2+2.a.b+b^2}{2}$.

Pelo Axioma 3.5.5, pode também ser obtida pela soma das áreas dos três triângulos retângulos: $\frac{a.b}{2} + \frac{a.b}{2} + \frac{c.c}{2} = a.b + \frac{c^2}{2}$.

Assim, $\frac{a^2+2.a.b+b^2}{2} = a.b + \frac{c^2}{2}$. Multiplicando os dois membros da equação por 2, $a^2 + 2.a.b + b^2 = 2a.b + c^2$.

Portanto,

$$a^2 + b^2 = c.$$

5. PROPOSTA DE ATIVIDADES – MOSTRAÇÕES E DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

5.1 Proposta de atividade para alunos

Dividir a classe em grupos de até seis alunos.

O objetivo é fazer com que os próprios alunos obtenham a relação de Pitágoras e que conheçam formas distintas de obtê-la e demonstrá-la. Para isso, devem resolver o problema: Qual a relação entre os lados do triângulo retângulo dado?

Etapa 1 – Cada grupo recebe uma ficha de atividades (Apêndice) com proposta de quebra-cabeças, com peças enumeradas, as quais deverão ser reorganizadas para formar um quadrado maior (Figuras 28, 29, 30 e 31).

Etapa 2 – Cada grupo apresenta a solução do quebra-cabeça.

Etapa 3 – O grupo deve comparar as áreas dos quadrados com a área do quadrado obtido pela reorganização das peças.

Etapa 4 – Relacionar os lados do triângulo com a relação obtida na etapa 3.

Etapa 5 – Instigar os alunos a demonstrar formalmente a solução do quebra-cabeça, pois uma demonstração matemática não pode ser dada exclusivamente através da interpretação de uma ilustração. Somente as atividades de recortar e colar, não constitui demonstrações completas para o Teorema de Pitágoras e sim é chamado de mostrações. É importante demonstrar que as peças se encaixam perfeitamente para formar um quadrado, por exemplo, e que não existe falha ou sobreposição de peças.

Etapa 6 – Cada grupo deve apresentar o seu resultado para os demais alunos.

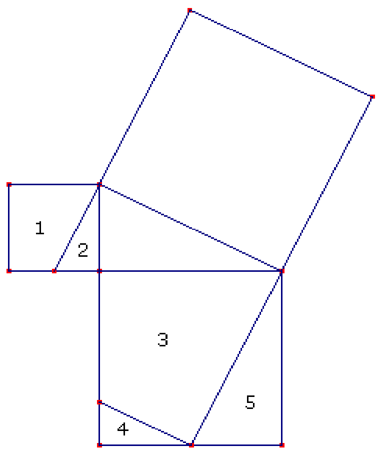


Figura 28: Configuração para o grupo I.

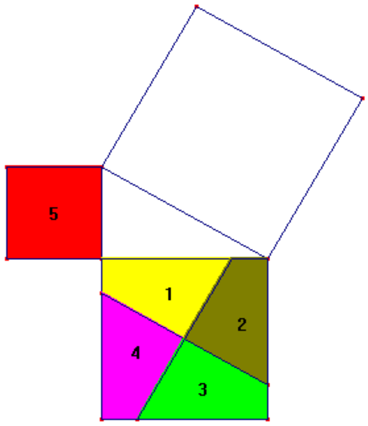


Figura 29: Configuração para o grupo II.

.

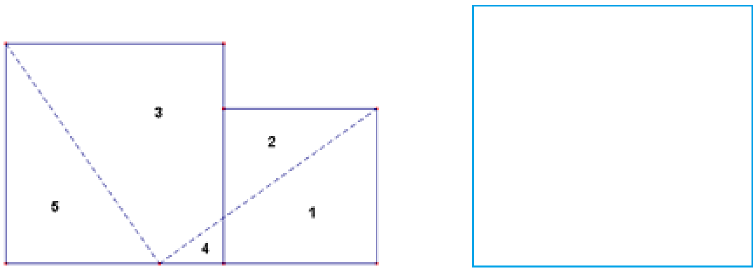


Figura 30: Configuração para o grupo III.

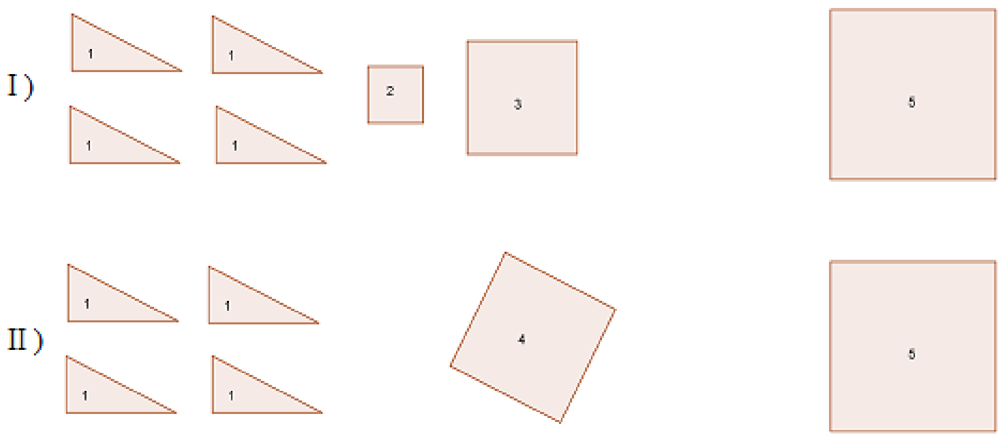


Figura 31: *Configuração para o grupo IV*.

5.2. Uma solução para o quebra-cabeça e a demonstração correspondente

Ao utilizarmos as peças de um quebra cabeça podemos montar uma figura e conjecturar uma determinada propriedade matemática com o que estamos visualizando. Com isso, se obtém apenas uma mostração da propriedade. Para que tal propriedade seja realmente válida é preciso mostrá- la utilizando conceitos matemáticos, ou seja, é preciso fazer a demonstração da propriedade. O anexo 1 mostra um exemplo onde não é válida a propriedade obtida na mostração.

Com as soluções propostas para cada quebra cabeça a seguir, é possível obter mostrações do Teorema de Pitágoras. As suas demonstrações são apresentadas em 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3 e foram baseadas em Oliveira (2008) e 5.2.4 em Barbosa (1998).

5.2.1 Uma solução para o quebra cabeça do grupo I

As peças 1, 2, 3, 4 e 5 formam o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos *a* e *b* e hipotenusa *c* (Figura 32).

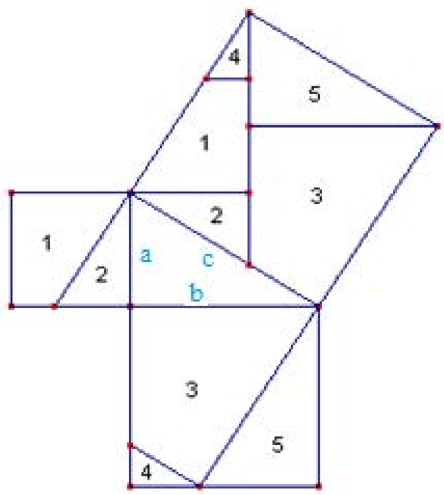


Figura 32: Uma solução para o quebra cabeça do grupo I.

Uma possível demonstração segue.

Sejam *P, Q* e *R* os pontos que definem o corte das peças (Figura 33), com *G, C* e *P* pontos colineares, *F, A* e *R* também colineares, e *PQ* perpendicular a *PC*. Desta forma, *PQ* é paralela a *AC*.

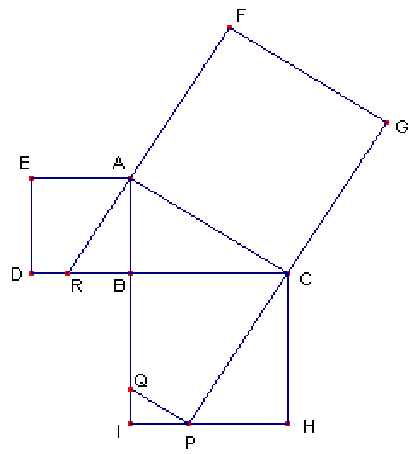


Figura 33: pontos de corte das peças.

Prolongando-se PQ e AR esses se encontram num ponto J, obtendo o quadrilátero ACPJ (Figura 34). Esse quadrilátero é um quadrado congruente ao quadrado AFGC. De fato, sejam **α** e **β** os ângulos agudos do triângulo retângulo ABC, conforme a figura 34.

Do fato de α + β = 90º e observando os ângulos retos já existentes, alguns dos ângulos que aparecem na figura 33, são iguais a **α** ou **β,** conforme pode ser observado na figura 34. Desta forma, os ângulos internos do quadrilátero ACPJ são retos.

Como:

$\hat{H} = \hat{B} = 90°$; $\overline{BC} = \overline{CH}$ e $H\hat{C}P = B\hat{C}A$,

pelo caso ALA, os triângulos ABC e PHC são congruentes. Logo, $\overline{AC} = \overline{CP}$ e o quadrilátero $ACPJ$ é um quadrado congruente ao quadrado $AFGC$.

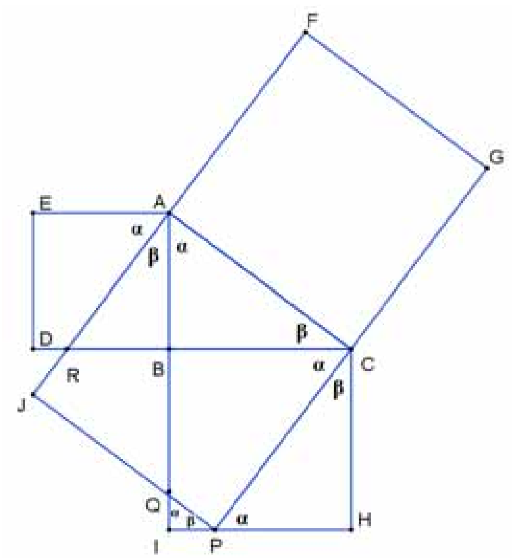


Figura 34: ângulos α e β.

Resta mostrar que as suas cinco peças indicadas na figura 32 se encaixam perfeitamente no quadrado ACPJ e consequentemente em AFGC.

A peça 3, o quadrilátero *BCPQ*, não será movida. Os triângulos *ABC* e *PHC* são congruentes. Assim a peça 5 se encaixa sobre o triângulo *ABC*.

Para provar que as peças 1, 2 e 4 se encaixam perfeitamente sobre o triângulo *AQJ*, será utilizado o triângulo construído AEJ.

Os pontos *E, D* e *J* são colineares. De fato, considere os triângulos *AEJ* e *ABC*. Como $\overline{EA} = \overline{AB}$, $E\hat{A}J = B\hat{A}C$ e $\overline{AJ} = \overline{AC}$, pelo caso LAL, os triângulos *AEJ* e *ABC* são congruentes. Logo, $A\hat{E}J = 90^o$. Portanto, a reta por *E* e *J* é perpendicular a reta por *E* e *A* em *E*. Como *D* pertence a essa perpendicular, pois *ED* é lado do quadrado e a perpendicular a reta por *E* e *A* em *E* é única, *E, D* e *J* são colineares. Por *J*, considere a reta perpendicular a reta por *A* e *I*. Seja S a interseção destas duas retas. Desta forma, $\overline{JS} = \overline{AB}$. Observando os ângulos em *JSQ* e *ABR* (Figura 35), os triângulos *RBA* e *QSJ* são congruentes. Logo, a peça **2** do quebra-cabeça se encaixa perfeitamente sobre o triângulo *QSJ*.

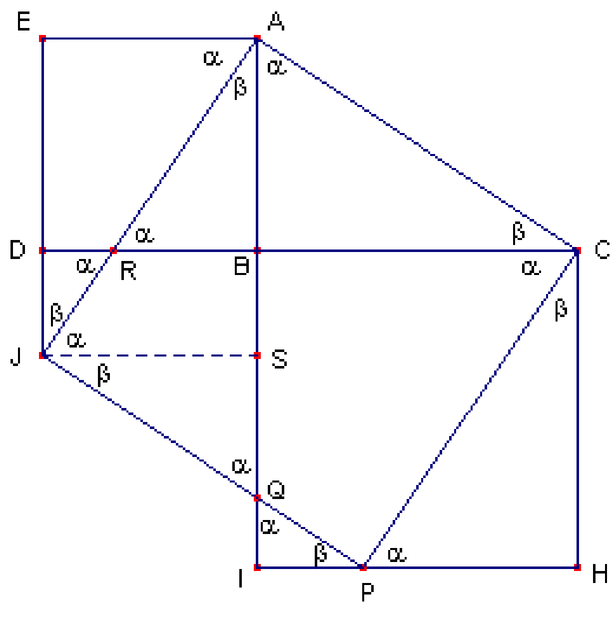


Figura 35: ângulos e segmento JS.

Resta mostrar que as peças 1 e 4 se encaixam sobre o triângulo *ASJ* .

Pelo caso ALA, os triângulos *ASJ* e *JEA* são congruentes. Desta forma, resta mostrar que as peças 1 e 4 se encaixam sobre o triângulo *JEA*. Para isto, basta provar que a peça 4 se encaixa sobre o triângulo *RDJ* , ou seja, que os triângulos *QIP* e *RDJ* são congruentes. Pelas propriedades de ângulos complementares e ângulos opostos pelo vértice, esses triângulos possuem os mesmos ângulos (α, β e 90º) e

$$\overline{IP} = \overline{IH} - \overline{PH} = \overline{BC} - \overline{AB} \text{ e } \overline{DJ} = \overline{EJ} - \overline{ED} = \overline{BC} - \overline{AB}.$$

Logo, $\overline{IP} = \overline{DJ}$. Pelo caso ALA, *QIP* e *RDJ* são, de fato, congruentes.

Para obtenção da solução, basta transladar o lado *JP* sobre *AC*.

Portanto a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$.

5.2.2 Uma solução para o quebra cabeça do grupo II

As peças 1, 2, 3, 4 e 5 (Figura 29), formam o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, conforme a figura 36.

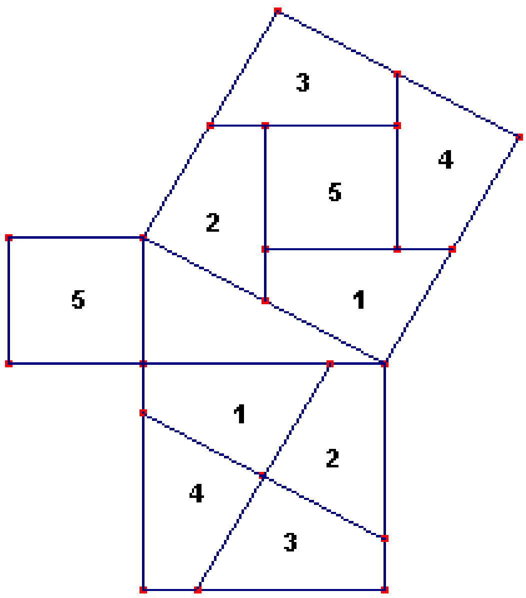


Figura 36: Uma solução para o quebra cabeça do grupo II.

Uma possível demonstração segue.

Seja o triângulo retângulo *ABC*, com os quadrados *ABDE, BCHI* e *AFGC* construídos sobre seus lados. Através da interseção das diagonais do quadrado *BCHI*, obtemos o ponto *M* (centro do quadrado).

Pelo ponto *M*, traçamos os segmentos *PQ* e *RS* paralelos aos lados do quadrado *AFGC* obtendo os pontos *P, Q, R* e *S* (Figura 37).

A peça 5 é simplesmente o quadrado *ABDE*.

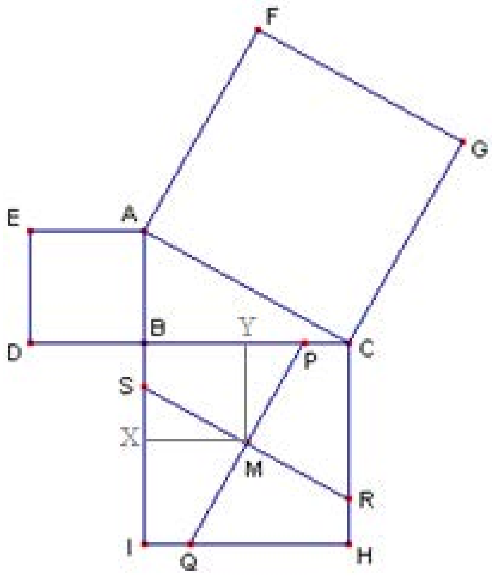


Figura 37: Segmentos PQ e RS.

Os segmentos *PQ* e *RS* são perpendiculares. Logo, as peças 1, 2, 3 e 4 possuem um ângulo reto em *M.*

Vamos mostrar que *M* é o ponto médio dos segmentos *PQ* e *RS*, e que são segmentos congruentes. Sejam *X* e *Y* pontos tais que os segmentos *XM* e *YM* são perpendiculares aos lados *BI* e *BC*, respectivamente, do quadrado *BCHI* (Figura 37).

Como $M\hat{X}S = M\hat{Y}P$, $\overline{MX} = \overline{MY}$ e $X\hat{M}S = Y\hat{M}P$, pelo caso ALA, *MYP* = *MXS* e $\overline{MP} = \overline{MS}$.

Analogamente, $\overline{MP} = \overline{MQ}$ e $\overline{MP} = \overline{MR}$.

Logo, $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR} = \overline{MS}$ e daí segue que M é o ponto médio dos segmentos congruentes *PQ* e *RS*.

Como o quadrilátero *ACRS* é um paralelogramo (pois seus lados opostos são paralelos), implica que os segmentos *RS* e *AC* são congruentes, logo: $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR} = \overline{MS} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$.

Dessa igualdade e do fato das peças 1, 2, 3 e 4 possuírem ângulo reto no vértice *M*, implicam que estas peças podem ser deslocadas sobre o quadrado *AFGC*, se encaixando perfeitamente, como ilustrado na figura 38. Logo, as peças 1, 2, 3 e 4 cobrem todo o quadrado *AFGC*, restando um quadrilátero central (Figura 38). Basta mostrar que este quadrilátero central é congruente a peça 5 do quebra cabeça, isto é, que é congruente ao quadrado *ABDE*. Este possui somente ângulos retos, pelo fato de serem formados por complementares de ângulos retos.

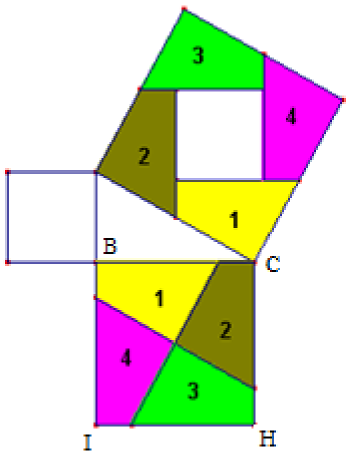


Figura 38: Configuração das peças.

Como o quadrilátero *ACRS* é um paralelogramo (Figura 39), temos que $\overline{CR} = \overline{AS}$. Também $\overline{UV} = \overline{BS}$, pois é lado da mesma peça.

Desta forma, são válidas as igualdades:

$$\overline{TU} = \overline{TV} - \overline{UV} = \overline{CR} - \overline{BS} = \overline{AS} - \overline{BS} = \overline{AB}.$$

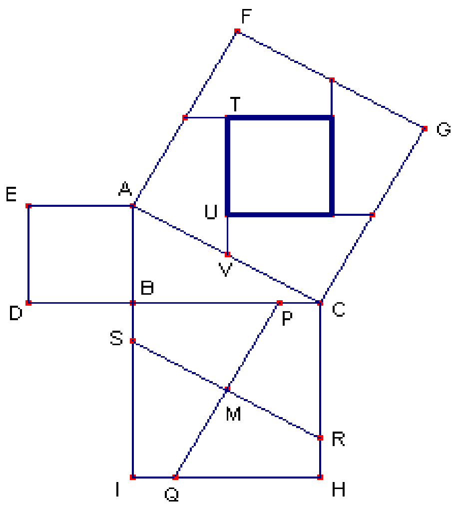


Figura 39: Solução do quebra- cabeça.

De modo análogo provamos que todos os lados do quadrilátero central são iguais aos lados do quadrado ABDE. Logo, a peça 5 encaixa-se perfeitamente sobre o quadrado central, entre as peças 1, 2, 3 e 4, resolvendo o quebra-cabeça.

Portanto, a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

5.2.3 Uma solução para o quebra cabeça do grupo III

As peças 1, 2, 3, 4 e 5 (Figura 40), formam um quadrado maior.

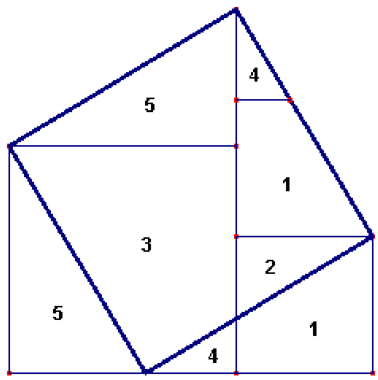


Figura 40: Uma solução para o quebra cabeça do grupo III.

Uma possível demonstração segue.

Considere o triângulo retângulo *IJK* de catetos *a* e *b*, e dois quadrados *ABCD*, de lado *a*, e *DEFG,* de lado *b,* posicionados conforme figura 41. Sem perda de generalidade, foi considerado a> b.

Seja o ponto *P* sobre o segmento *AD* tal que $\overline{AP} = b$.

Assim,

$$\overline{AE} = \overline{AP} + \overline{PE},$$

ou seja,

$$a + b = b + \overline{PE},$$

e $\overline{PE} = a$.

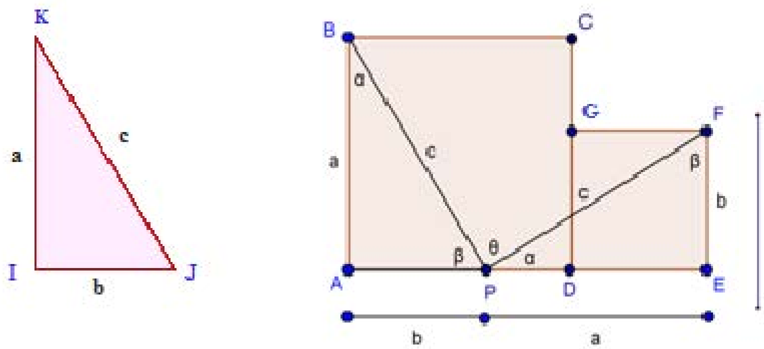


Figura 41: Quadrados de lado a e lado b.

Os triângulos retângulos *ABP* e *EPF* são congruentes pois, possuem os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ são congruentes (90º) assim como os catetos *a* e *b* correspondentes (caso LAL). Isso também justifica a congruência desses triângulos com o triângulo *IJK*.

Logo, os ângulos correspondentes são congruentes (Figura 41) e $\overline{BP} = \overline{PF} = \overline{JK} = c$.

De:

$$\alpha + \beta = 90° \quad \text{e} \quad \alpha + \beta + \theta = 180°,$$

$\theta = 90º$.

Sobre o lado *BC* do quadrado *ABCD, c*onsidere um triângulo retângulo *BCQ* em C, congruente ao triângulo *BAP* (Figura 42). Traçando o segmento *QF,* obtém-se o quadrilátero *BQFP* .

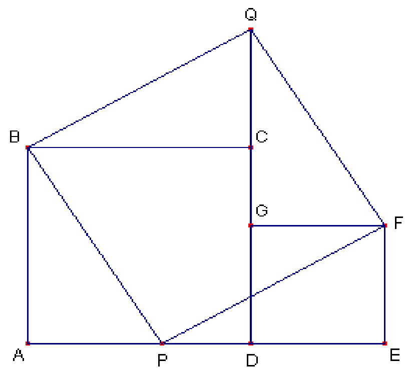


Figura 42: Ttriângulo BCQ e quadrilátero BQFP.

Resta mostrar que o quadrilátero *BQFP* é um quadrado formado com peças congruentes as peças de 1 a 5.

Tem-se que*:* $\overline{FP} = \overline{PB} = \overline{BQ} = c$.

Os triângulos *FEP* e *FGQ* são congruentes, pois são retângulos com catetos congruentes,

$$\overline{QG} = \overline{QC} + \overline{CG} = \overline{QC} + (\overline{CD} - \overline{GD}) = b + (a - b) = a = \overline{PE}$$

e

$$\overline{FG} = \overline{FE}.$$

Logo, $\overline{FQ} = \overline{FP} = c$. Portanto, o quadrilátero *BQFP* possui todos os lados congruentes (é um paralelogramo). Como $\hat{P}$ = 90º, os demais também serão. Portanto, *BQFP* é um quadrado.

As cinco peças do quebra-cabeça proposto podem ser reorganizadas para se encaixarem perfeitamente sobre ele (Figura 40). Observe que as peças 2 e 3 não precisam ser mexidas, as peças 1 e 4 se encaixam no triângulo *FGQ*, pois *FEP* e *FGQ* são congruentes, e a peça 5 se encaixa, por construção, sobre o triângulo *BCQ*.

Portanto a soma das áreas dos quadrados de lado *a* e lado *b* é igual a área do quadrado maior de lado c, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$.

Observa-se que para a= b teremos apenas quatro peças, sendo essa demonstração trivial.

5.2.4 Uma solução para o quebra cabeça do grupo IV

No grupo IV, dois conjuntos de peças foram propostos para cobrir o quadrado maior (I e II), cujo lado mede a + b. Os quadrados menores possuem lados medindo a, b e c, respectivamente, e os triângulos retângulos são congruentes de hipotenusa medindo c e catetos a e b.

A figura 43 mostra uma solução para o quebra-cabeça nos conjuntos I e II.

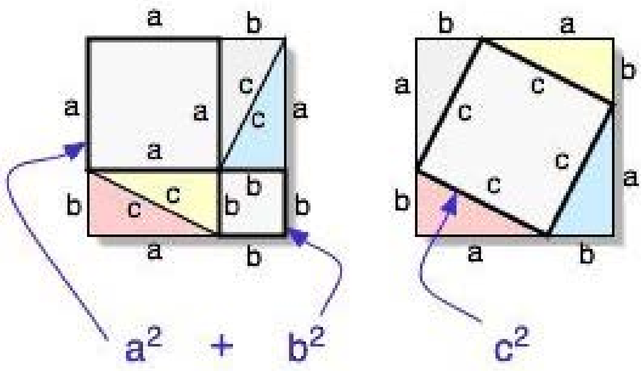


Figura 43: Uma solução para os conjuntos I e II.

Uma possível demonstração segue.

O quadrado de lado medindo a+b tem área $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ou seja, sua área é a soma das áreas de um quadrado de lado medindo a, um quadrado de lado medindo b e dois retângulos de medidas a e b, os quais podem ser divididos em quatro triângulos retângulos de catetos a e b. Logo, o quadrado de lado medindo a+b pode ser formado com as peças do conjunto I (Figura 43 à esquerda).

Uma solução para o conjunto II é dada na figura 43 à direita. Para demonstrar tal afirmação, os quadrados e triângulos foram nomeados conforme a figura 44.

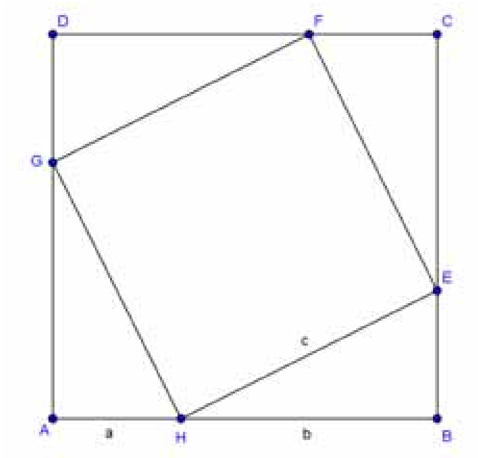


Figura 44: Divisão do quadrado de lado a+b.

Por construção, os 4 triângulos retângulos são congruentes. Logo, as hipotenusas desses triângulos são congruentes, com medida c, e o quadrilátero *HEFG* é um paralelogramo.

Sejam α *e* β os ângulos agudos dos triângulos retângulos. Logo, $\alpha + \beta = 90°$ e cada ângulo interno do quadrilátero é reto. Portanto, o quadrilátero é um quadrado de lado *c* .

Assim,

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab.$$

Comparando esses dois resultados, $a^2 + b^2 = c^2$.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho contribuiu para o professor enriquecer seu conhecimento sobre temas interessantes e relevantes da matemática, e transmitir esse conhecimento aos alunos do primeiro ano do ensino médio, de forma que os mesmos percebessem que um problema pode ser resolvido de maneiras distintas.

Ficou evidente que ao utilizar estratégias e atividades diferenciadas em sala de aula, além da motivação em aprender matemática, os alunos se beneficiam das metodologias utilizadas pelo professor, assimilando melhor os conteúdos e melhorando seu resultado na aprendizagem da matemática.

A realização da atividade experimental em sala de aula (Figura 45) proporcionou um desafio na busca de novas formas de trabalhar os conhecimentos matemáticos, em específico, o Teorema de Pitágoras. A proposta teve por objetivo a participação ativa do aluno em sala de aula.

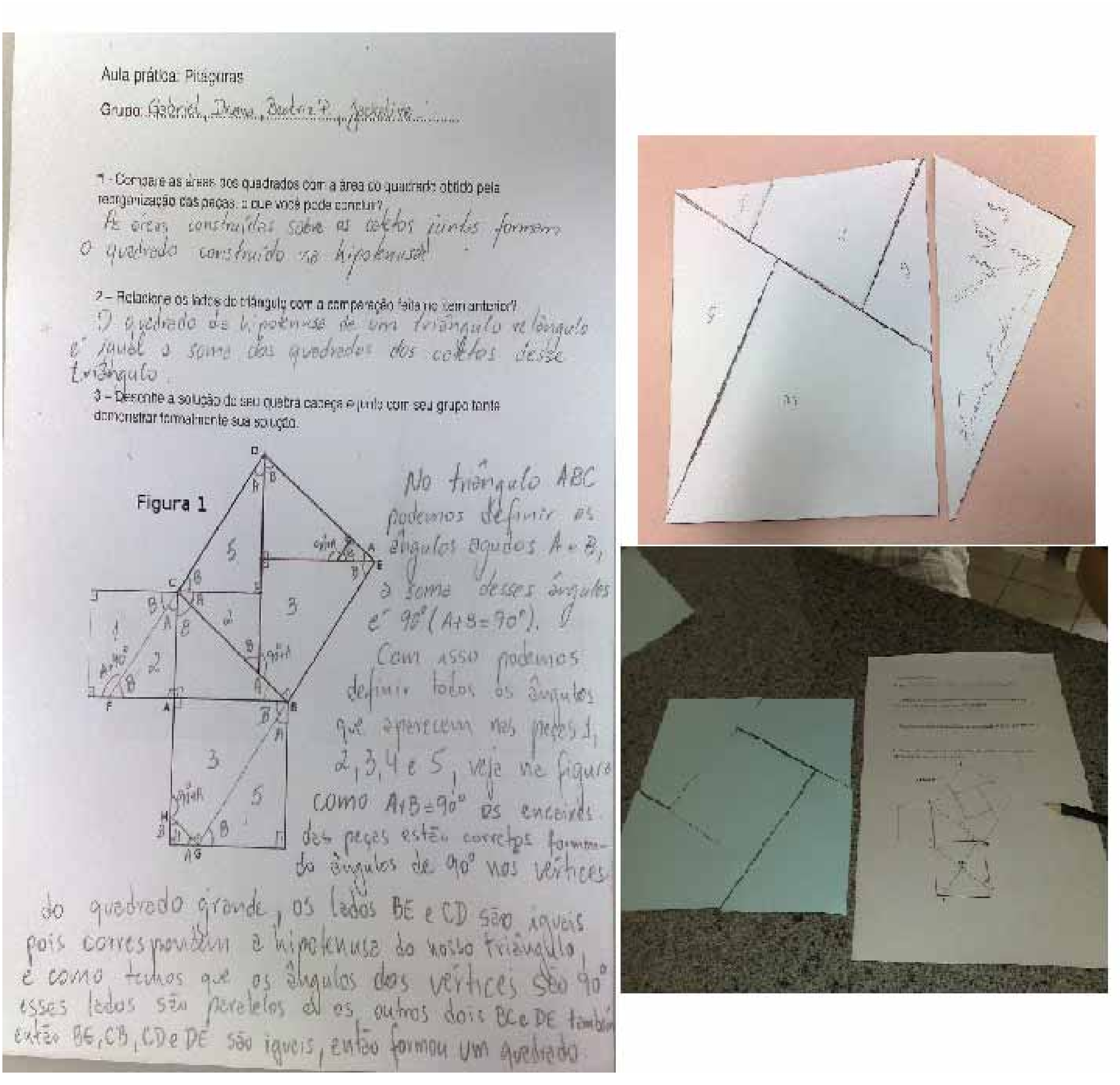
Com esta atividade os alunos aprofundaram os conhecimentos sobre o Teorema de Pitágoras, e entenderam sobre a necessidade de uma demonstração matemática, na qual utiliza-se afirmações que se supõe verdadeiras (hipóteses), e através de uma sequência lógica de novas afirmações, chega-se ao que se quer demonstrar (tese).

Os alunos apresentaram grande dificuldade em demonstrar o Teorema, pois não tinham esse hábito, mas conseguiram obter a relação de Pitágoras experimentalmente e compreender as demonstrações. Com isso, os alunos conseguinram perceber a diferença entre mostrações e demonstrações do Teorema. No entanto, alguns alunos manifestaram interesse em demonstrá-lo (Figura 46). Dois deles procuraram provas alternativas na internet por conta própria.

Deste modo, posso dizer que a atividade experimental contribuiu de maneira positiva para um melhor entendimento do Teorema de Pitágoras por parte dos alunos e para despertar o interesse deles.

Após as atividades experimentais foram propostos problemas (Anexo II), que requeriam a aplicação do Teorema de Pitágoras. Com a análise do desempenho dos alunos nesses problemas e na avaliação diagnóstica aplicada no início de 2014, ficou evidente que melhoraram o entendimento sobre o Teorema de Pitágoras. A maioria dos alunos aplicou corretamente o Teorema, embora alguns tenham errado a resposta dos problemas por falha na interpretação da pergunta. De maneira geral, o aproveitamento foi muito bom.

Figura 45: Fotos obtidas durante a atividade experimental.



Aula prática: Pitágoras

Grupo: Gabriel, Diana, Beatriz P., Jacqueline

1 - Compare as áreas dos quadrados com a área do quadrado obtido pela reorganização das peças: o que você pode concluir?

As áreas construídas sobre os catetos juntas formam o quadrado construído na hipotenusa.

2 – Relacione os lados do triângulo com a comparação feita no item anterior?

O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos catetos desse triângulo.

3 – Desenhe a solução do seu quebra cabeça e junto com seu grupo tente demonstrar formalmente sua solução.

Figura 1

No triângulo ABC podemos definir os ângulos agudos A e B, a soma desses ângulos é 90° (A+B=90°). Com isso podemos definir todos os ângulos que aparecem nas peças 1, 2, 3, 4 e 5, veja na figura como A+B=90° os encaixes das peças estão corretos formando ângulos de 90° nos vértices do quadrado grande, os lados BE e CD são iguais pois correspondem à hipotenusa do nosso triângulo, e como temos que os ângulos dos vértices são 90° esses lados são paralelos e os outros dois BC e DE também então BE, CB, CD e DE são iguais, então formou um quadrado.

Figura 46: Soluções apresentadas.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. ***Geometria euclidiana plana.*** 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

BARBOSA, R. M. ***Descobrindo padrões pitagóricos***. São Paulo: Atual, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais:*** Matemática: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998a.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. ***PCNs + Ensino Médio:*** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 1998b.

EUCLIDES. ***Os elementos.*** Tradução e introdução Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. da UNESP, 2009.

EVES, H. W. ***Introdução à história da matemática***. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da UNICAMP, 1997.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. ***Descobrindo o teorema de Pitágoras.*** 2.ed. São Paulo: Scipione, 2000.

LIMA, E. L. et al. ***Teoremas e problemas elementares***. 2.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. Cap.4.

LIMA, E. L. ***Meu professor de matemática e outras histórias***. 5.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

OLIVEIRA, J. A. de. ***Teorema de Pitágoras***. 2008. 47f. Monografia (Especialização em Matemática)-Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Juliane.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2013.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. ***Experiências matemáticas***: **7. série**. São Paulo, 1998.

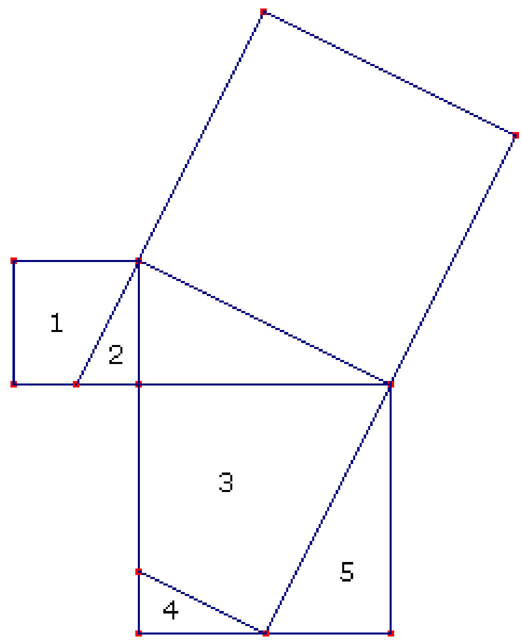
WAGNER, E. ***Teorema de Pitágoras e áreas***. Rio de Janeiro: Estilo OBMEP, 2009. 94p. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila3-Teorema_de_pitagoras.pdf> Acesso em: 23 out. 2013

APÊNDICE

FICHAS DE ATIVIDADES PARA OS GRUPOS DE ALUNOS

ATIVIDADE

Grupo I – Desenhe em Cartolina ou EVA a figura a seguir. Em seguida recorte as peças 1,2,3,4 e 5 e cubra o quadrado construído sobre a hipotenusa, sem sobreposição.



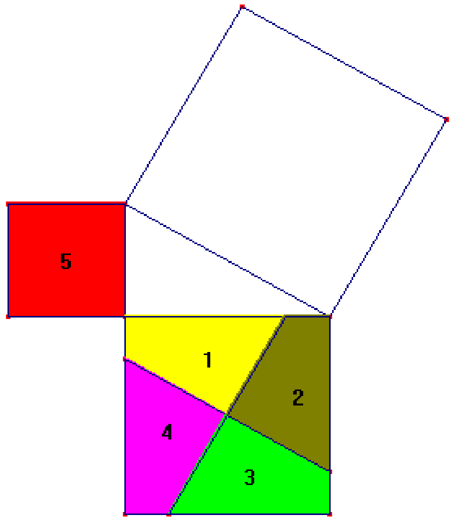
1 - Compare as áreas dos quadrados com a área do quadrado obtido pela reorganização das peças.

2 – Relacione os lados do triângulo com a comparação feita no item anterior.

3 – Pesquise e junto com seu grupo tente demonstrar formalmente essa relação.

ATIVIDADE

Grupo II - Desenhe em Cartolina ou EVA a figura a seguir. Em seguida recorte as peças 1,2,3,4 e 5 e reorganize-as sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa, sem sobreposição.



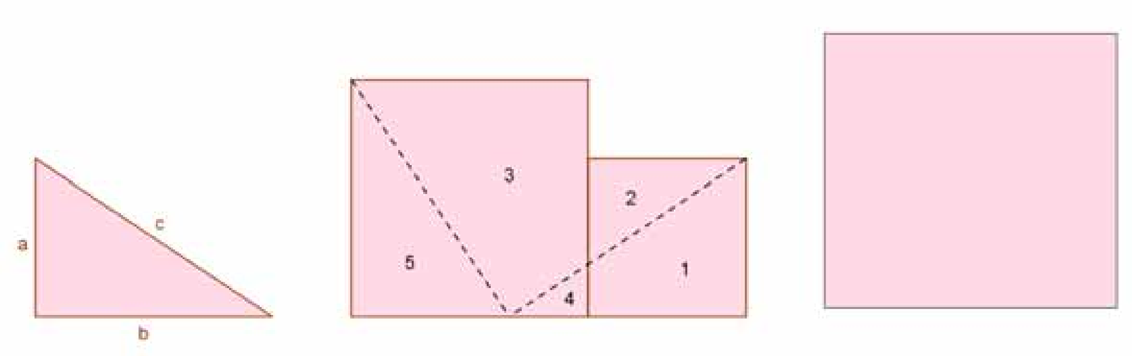
1 - Compare as áreas dos quadrados com a área do quadrado obtido pela reorganização das peças.

2 – Relacione os lados do triângulo com a comparação feita no item anterior.

3 – Pesquise e junto com seu grupo tente demonstrar formalmente essa relação.

ATIVIDADE

Grupo III – Considere um triângulo retângulo de lados *a*, *b* e *c*. Desenhe em cartolina ou EVA dois quadrados, um de lado *a* e outro de lado *b*, como na figura a seguir. Em seguida recorte as peças 1,2,3,4 e 5 e reorganize-as para formar o quadrado maior, sem sobreposição.



1 - Compare as áreas dos quadrados com a área do quadrado obtido pela reorganização das peças.

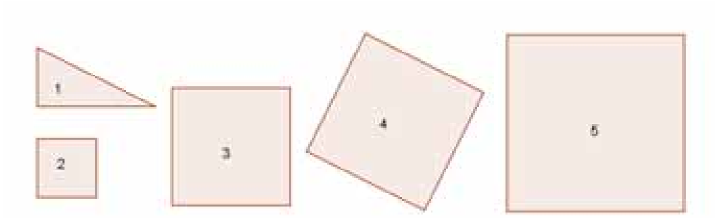
2 – Relacione os lados do triângulo com a comparação feita no item anterior.

3 – Pesquise e junto com seu grupo tente demonstrar formalmente essa relação.

ATIVIDADE

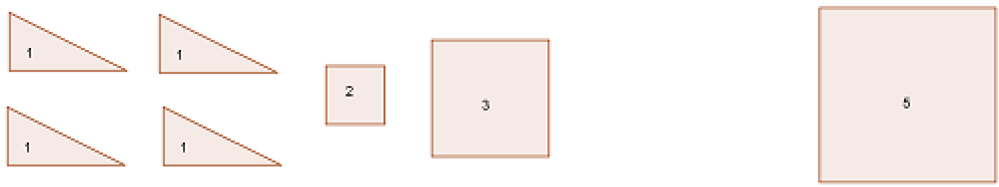
Grupo IV – Corte em uma folha de cartolina (ou papel cartão), as seguintes peças:

- 4 triângulos retângulos congruentes quaisquer (peça 1)
- 1 quadrado de lado congruente a um dos catetos (peça 2)
- 1 quadrado de lado congruente a outro cateto (peça 3)
- 1 quadrado de lado congruente a hipotenusa (peça 4)
- 2 quadrados de lado igual à soma dos catetos (peça 5)

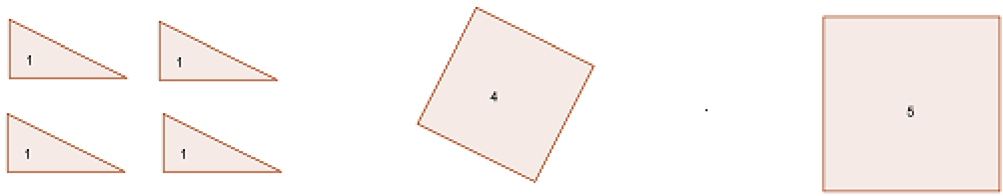


Cubram as peças com o número 5 de duas formas distintas:

I – Utilize os quadrados (peças com 2 e 3) e quatro triângulos (peça com o 1) para cobrir o quadrado com o 5.



II - Cubra a outra peça com o 5 com o quadrado (peça com o 4) e quatro triângulos (peças com o 1).



1 - Compare as áreas dos quadrados obtidos em I e II.

2 – Qual a relação entre as áreas dos quadrados com os números 2, 3 e 4?

3 - Relacione os lados do triângulo retângulo. Compare com a relação obtida no item anterior.

4 – Pesquise e junto com seu grupo tente demonstrar formalmente essa relação.

ANEXO I

Importância da demonstração matemática.
Desenhe um quadrado de lado 8, como mostra a figura 1, em seguida recorte as peças coloridas.
Com as peças monte uma figura como a figura 2.

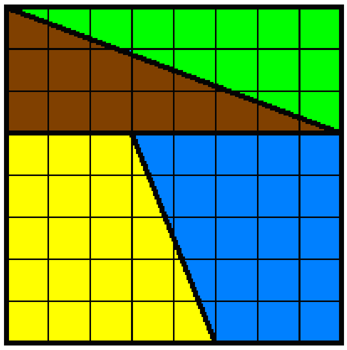


Figura 1

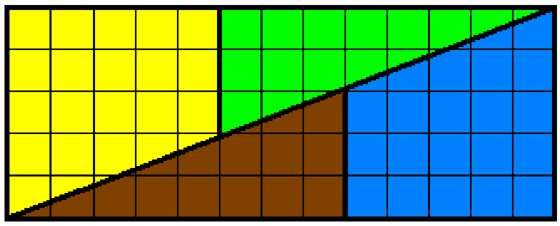
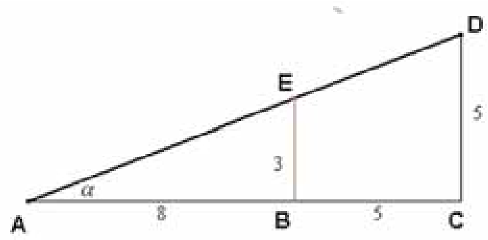
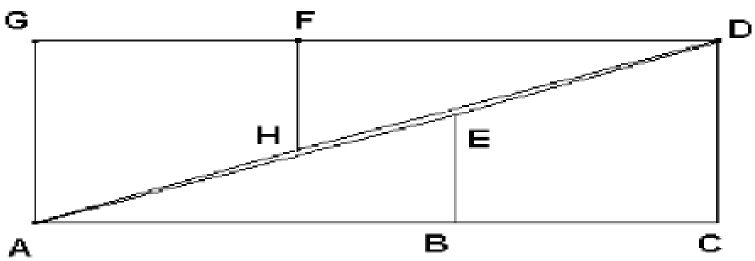


Figura 2

A figura 1 é um quadrado de lado 8, sua área é 64 unidades.
Esse quadrado foi dividido em quatro partes, que reorganizadas formaram a figura 2.
Observe que a figura 2 é um retângulo de lados 13 e 5, sua área é de 65 unidades.
Como podemos explicar esta unidade extra de área? Se ambas as figuras foram construídas com as mesmas peças.
Quando olhamos para a figura 2 temos a impressão de estarmos vendo dois triângulos retângulos, mas só parecem ser retângulos, elas são de fato quadriláteros.
Observe a figura abaixo, os pontos A, E e D não estão alinhados. De fato, no triângulo retângulo ABE a tangente de $B\hat{A}E$ é $\frac{3}{8}$ e no triângulo retângulo ACD a tangente de $D\hat{A}C$ é $\frac{5}{13}$.



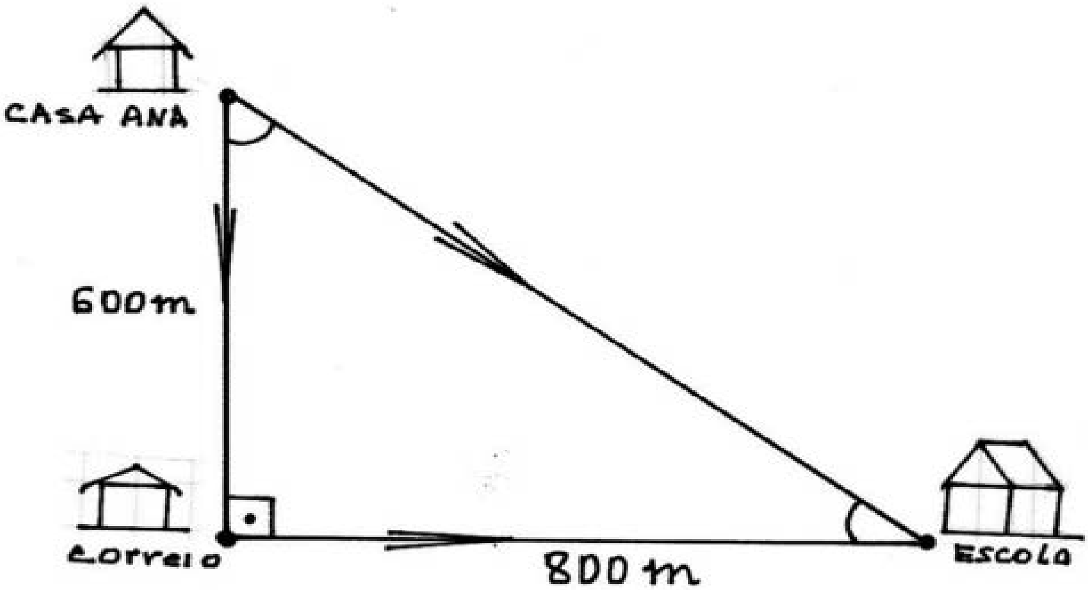
Como $\frac{3}{8} \neq \frac{5}{13}$, $B\hat{A}E \neq D\hat{A}C$ e os pontos A, D e E não estão alinhados.
Assim, as quatro peças do quadrado podem ser colocadas dentro do retângulo, mas sem cobrir o quadrilátero AEDH da figura abaixo.



Anexo II

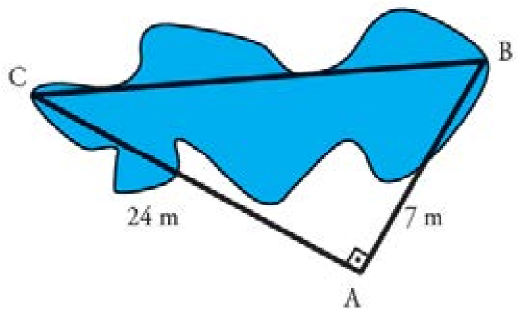
PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

1 - Hélio e Ana partiram da casa dela com destino à escola. Ele foi direto de casa para a escola e ela passou pelo correio e depois seguiu para a escola, como mostra a figura a seguir:

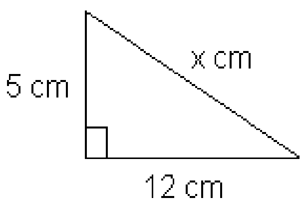


De acordo com os dados apresentados, qual a distância que Ana percorreu a mais do que Hélio?

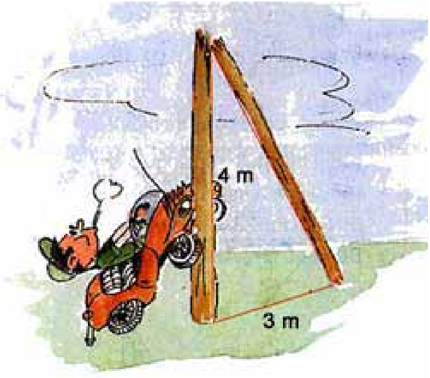
2 - Thiago quer descobrir a medida aproximada da parte mais extensa de uma lagoa (BC). Como não sabe nadar, viu uma forma de resolver seu problema com o uso de seus conhecimentos em Geometria. Lembrando dos egípcios, fixou três estacas na margem da lagoa e esticou cordas de **A** até **B** e de **A** até **C**. Como lhe interessa uma medida aproximada, fez o máximo para formar, no encontro das cordas em **A**, um ângulo reto. Medindo o comprimento dessas cordas obteve AB = 7 m e AC = 24 m. Construiu, então, em seu caderno, um esboço da situação e a resolveu. Qual foi o valor encontrado por Thiago?



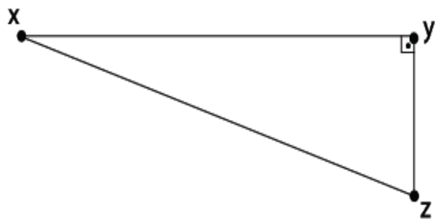
3 – Determine o valor da medida x, em cm, representado no triângulo abaixo.



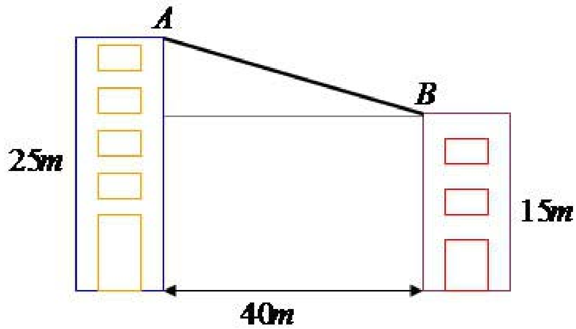
4 – Calcule o comprimento do poste?



5 - Aninha foi visitar suas amigas. Ela dirigiu seu automóvel do ponto x, onde fica sua casa, até a casa de Rosali, no ponto y, percorrendo 12 km. Em seguida, ela dirigiu mais 9 km até a casa de Milena, no ponto z, conforme a figura ao lado.
Quantos quilômetros Aninha teria percorrido, em linha reta, se fosse direto de sua casa para a casa de Milena?



6 - Um ciclista acrobático vai atravessar de um prédio a outro com uma bicicleta especial, percorrendo a distância sobre um cabo de aço, como demonstra o esquema a seguir:
Qual é a medida mínima do comprimento do cabo de aço?



7 - Encontre a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10 km?