unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Ações de Semigrupos em Fibrados

Rafael Paulino Silva

Orientador: Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente-SP, Setembro de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Ações de Semigrupos em Fibrados

Rafael Paulino Silva

Orientador: Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente-SP, Setembro de 2014

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à Deus e a minha família Donisete, Sueli e Guilherme, pela força em momentos difíceis e apoio incondicional. Aos meus amigos Camila, João, José Roberto e Silvia por nunca deixarem eu desistir desse projeto.

Aos professores do Pós-MAC pela oportunidade e pelo conhecimento repassado ao longo do mestrado. E, em especial, ao Professor Ronan Antonio dos Reis pela orientação, sem o qual todos os esforços na realização deste trabalho teriam sido em vão.

A todos os amigos do Pós-MAC, pelos momentos de estudo e descontração.

Finalmente, agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

“Ainda que eu ande por um vale
escuro como a morte, não terei medo de nada.
Pois tu, ó Senhor estás comigo,
tu me proteges e me diriges.”
Salmos 23:4

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar ações de semigrupos em fibrados. O trabalho está ordenado do seguinte modo:

No capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados preliminares necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2, estudamos alguns tópicos da Teoria de Controle, tais como, os conceitos de sistema de controle, semigrupo de controle, órbitas, entre outros. Em seguida, apresentamos propriedades referentes a acessibilidade e controlabilidade de tais sistemas.

Posteriormente, no capítulo 3, estudamos os conjuntos de controle para ações de semigrupos, em que apresentamos exemplos, propriedades, e bem como, alguns resultados.

E, no último capítulo, estudamos o comportamento dos conjuntos de controle nos fibrados principais e nos seus fibrados associados, e bem como, dos conjuntos de controle invariantes sobre as fibras.

Sumário

Resumo **5**

Capítulos

1 Preliminares **9**
1.1 Grupos Topológicos 9
1.2 Espaços Homogêneos 12
1.3 Semigrupos 17
1.4 Grupos de Lie 19
1.5 Fibrados 21
1.5.1 Fibrados Principais 21
1.5.2 Fibrados Associados 24

2 Teoria de Controle **27**
2.1 Sistemas de Controle 27
2.2 Acessibilidade e Controlabilidade 31

3 Conjuntos de Controle **33**
3.1 Conjuntos de Controle para Sistemas de Controle 33
3.2 Conjuntos de Controle para Ações de Semigrupos 35

4 Ações de Semigrupos em Fibrados e Conjuntos de Controle **41**
4.1 Acessibilidade 41
4.2 Conjuntos de Controle em Fibrados 44
4.3 Conjuntos de Controle Invariantes 48

Referências **50**

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos conceitos e resultados básicos para o desenvolvimento deste trabalho. Para outros detalhes, nos referimos a [13], [14], [17], [22], [21] e [24].

1.1 Grupos Topológicos

Comecemos com o seguinte conceito:

Definição 1 *Um* grupo topológico *é um grupo munido de uma topologia compatível com o produto do grupo, no sentido que:*
(i) O produto $p : G \times G \to G$, $p(g,h) = gh$ é uma aplicação contínua, quando se considera $G \times G$ com a topologia produto.
(ii) A aplicação $i : G \to G$, $i(g) = g^{-1}$ é contínua

Note que no item (ii) se i for contínua ela é um homeomorfismo, uma vez que $i = i^{-1}$. Note ainda que essas propriedades podem ser reunidas em uma só aplicação $q : G \times G \to G$ definida como $q(g,h) = gh^{-1}$.

Cada elemento g de um grupo G define naturalmente as aplicações E_g, D_g, $C_g : G \to G$ que chamamos de translação à esquerda, translação à direita e conjugação ou automofismo interno, respectivamente, que são definidas como:

Essas aplicações são bijeções, uma vez que $E_g \circ E_{g^{-1}} = D_g \circ D_{g^{-1}} = id_G$, e ainda $C_g = E_g \circ D_{g^{-1}}$.

No caso de grupos topológicos essas aplicações são contínuas. De fato, como $E_g = p \circ i_{g,1}$, onde $i_{g,1}(h) : G \to G \times G$ é a inclusão dada por $i_{g,1}(h) = (g,h)$, segue que E_g é contínua, uma vez que p e $i_{g,1}$ são contínuas. Analogamente, $D_g = p \circ i_{g,2}$, onde $i_{g,2}$ é a inclusão dada por $i_{g,2}(h) = (h,g)$, logo, D_g é contínua. E, consequentemente, C_g é contínua.

Agora daremos alguns exemplos de grupos topológicos relacionando os conceitos vistos acima.

Exemplo 1 *Afirmamos que $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo topológico com a topologia da ordem gerada pelos abertos da forma (a,b). Com efeito, dado $(a,b) \subset \mathbb{R}$ um aberto, mostraremos que $p^{-1}(a,b)$ é aberto. Seja $(x,y) \in p^{-1}(a,b)$. Então, $p(x,y) = x + y \in (a,b)$. Como (a,b) é aberto segue que $p^{-1}(a,b)$ é aberto. E ainda, $i(x) = -x$, então se $-x \in (a,b) \Rightarrow x \in (-a,-b) \in G$. Portanto p e i são contínuas, segue que $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo topológico.*

O resultado a seguir caracteriza alguns grupos topológicos importantes

Proposição 1 *Se G é um grupo e H um subgrupo de G então, H é um grupo topológico com respeito ao subespaço topológico.*
Demonstração: *Segue diretamente do fato de que a restrição de um aplicação contínua é uma aplicação contínua. De fato, como $p : G \times G \to G$ e $i : G \to G$ são contínuas segue que $p : H \times H \to G$ e $i : H \to G$ são contínuas, e, portanto H é um grupo topológico.* □

Exemplo 2 *O grupo $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ com a operação de multiplicação, é um grupo topológico com respeito a topologia induzida em $\mathbb{R}^{n^2}$, uma vez que $Gl_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$. Logo, pela Proposição 1 todos os subgrupos de $Gl_n(\mathbb{R})$ são grupos topológicos.*

Exemplo 3 *Seja $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$. Então, $\mathbb{S}^1$ é um grupo topológico com respeito a multiplicação e o subespaço topológico de $\mathbb{C}$.*

Definiremos agora o que chamamos de Ação de Grupos.

Definição 2 *Uma* ação à esquerda *de um grupo G num conjunto X é uma função que associa a $g \in G$ uma aplicação $a(g) : X \to X$ e que satisfaz as propriedades:*
(i) $a(1) = id_X$, isto é, $a(1)(x) = x$, $\forall x \in X$
(ii) $a(gh) = a(g) \circ a(h)$

Essas propriedades garantem que cada $a(g)$ é uma bijeção, já que

$$a(g^{-1}) \circ a(g) = a(g^{-1}g) = a(1) = a(g) \circ a(g^{-1}) = id_X$$

Visto de outra maneira, uma ação à esqueda $a : G \to B(X)$ é um homomorfismo, onde $B(X)$ é o grupo das bijeções de X, com o produto dado pela composta de duas aplicações. Uma ação à direita é definida de maneira análoga.

De forma alternativa, uma ação à esquerda é definida como $\phi : G \times X \to X$ satisfazendo $\phi(1, x) = x$ e $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$, para g, $h \in G$ e $x \in X$. Mas, normalmente, os símbolos a ou ϕ são suprimidos na notação para ações de grupos. Assim, uma ação à esquerda escreve-se apenas por $g(x) = gx$ ao invés de $a(g)(x)$. Se a é uma ação à esquerda de G em X, então a aplicação a' definida por $a'(g) = a(g^{-1})$ é uma ação à direita, e vice-versa. De fato, $a'(1) = a\left((1)^{-1}\right) = id_X$ e

$$a'(gh) = a\left((gh)^{-1}\right) = a\left(h^{-1}g^{-1}\right) = a\left(h^{-1}\right) \circ a\left(g^{-1}\right) = a'(g) \circ a'(h).$$

Assim, trataremos apenas de ações à esquerda, uma vez que por a' elas são equivalentes.

Definição 3 *Dado $x \in X$, sua* órbita por G, *denotada por Gx é definida pelo conjunto*

$$Gx = \{gx \in X | g \in G\}.$$

Mais geralmente, se $A \subset G$ então, $Ax = \{gx | g \in A\}$.

Em outras palavras, $Ax = \phi_x(A)$. Cada órbita é uma classe de equivalência da relação de equivalência,

$$x \sim y \text{ se existe } g \in G \text{ tal que } y = gx.$$

De fato, a relação $\sim$ é relação de equivalência. Como $1 \in G$, temos que $y = 1y$, ou seja, $y \sim y$. E, portanto, a relação é reflexiva. Uma vez que $y = gx$, então $x = g^{-1}y$, o que mostra que $x \sim y$ e, então $y \sim x$, ou seja, a relação é simétrica. E por fim, se $x \sim y$ e $y \sim z$ então existem g, $h \in G$ tal que $y = gx$ e $z = hy$. Assim, $z = (hg)x$ implica que $x \sim z$, o que mostra que a relação $\sim$ também é transitiva. Portanto, $\sim$ é relação de equivalência. Assim, esta afirmação implica que duas órbitas são disjuntas ou coincidem.

Definição 4 *O conjunto G_x dos elementos de G que fixam x é denominado de* subgrupo de isotropia *ou* estabilizador *de x.*

$$G_x = \{g \in G | gx = x\}.$$

Os subgrupos de isotropia são obtidos um dos outros pela seguinte relação:

Proposição 2 *Dados x, $y \in X$, suponha que $y = gx$ com $g \in G$. Então $G_y = gG_xg^{-1}$, onde G_x e G_y denotam os subgrupos de isotropia de x e y.*
Demonstração: *Por definição $h \in G_y$ se, e só se, $hy = y$, ou seja, $h(gx) = gx$, com $gx \in X$. Aplicando g^{-1} a essa igualdade segue que $(g^{-1}hg)(x) = x$, isto é, $g^{-1}hg \in G_x$ se, e somente se, $h \in gG_xg^{-1}$.* □

As ações de um grupo G são distinguidas em classes de acordo com as propriedades de suas órbitas e grupos de isotropia.

Definição 5 *Seja a uma ação de G em X*
(i) A ação é dita efetiva *se*

$$Ker\,(a) = \{g \in G|\ a\,(g) = id_x\} = \{1\}.$$

(ii) A ação é dita *livre* se os subgrupos de isotropia se reduzem ao elemento neutro de G, isto é, $gx = x$, para algum $x \in X$, se $g = 1$.
(iii) A ação é dita *transitiva* se X é uma órbita de G, isto é, para todo par de elementos x, $y \in X$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

É claro, a partir das definições, que ações livres são efetivas, no entanto nem toda ação efetiva é livre. Em termos de homomorfismo $a : G \to B(X)$, uma ação é efetiva se, e só se, $Ker\,(a) = \{1\}$, isto é, se a é injetora. Portanto, em uma ação efetiva, G é isomorfo à sua imagem $a\,(G)$ por a. Por essa razão, uma ação efetiva é também denominada de ação fiel.

Deve-se observar que a restrição da ação a uma órbita é uma ação transitiva. Portanto, toda afirmação sobre ações transitivas se aplica à restrição da ação a uma órbita.

Definiremos agora o que é a vizinhança do elemento neutro de um grupo topológico G. Essas vizinhanças são importantes pois nelas estão todas as informações necessárias da topologia de G.

Definição 6 *Seja $U \subset G$ um aberto não vazio e tome $g \in U$. Então $g^{-1}U$ e Ug^{-1} são* vizinhanças do elemento neutro de G. *Reciprocamente, se V é uma vizinhança do elemento neutro de G, gV e Vg são vizinhanças de g, onde $g \in G$. Denotaremos o conjunto das vizinhanças do elemento neutro por $\mathcal{V}$.*

Proposição 3 *Seja G um grupo topológico e denote por $\mathcal{V}$ o conjunto das vizinhanças abertas do elemento neutro 1. Então, valem as seguintes propriedades:*
T_1) O elemento neutro 1 pertence a todos os subconjuntos $U \in \mathcal{V}$.
T_2) Dados dois conjuntos U, V em $\mathcal{V}$ então $U \cap V$ está em $\mathcal{V}$.
GT_1) Para todo $U \in \mathcal{V}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subset U$.
GT_2) Dado $U \in \mathcal{V}$ então $U^{-1} \in \mathcal{V}$.
GT_3) Para todo $g \in G$ e $U \in \mathcal{V}$ temos que $gUg^{-1} \in \mathcal{V}$.

Essa proposição gera a seguinte definição.

Definição 7 *Um* sistema de vizinhanças da identidade *(ou do elemento neutro) em um grupo G é uma família de conjuntos $\mathcal{V}$ satisfazendo as propriedades da proposição anterior.*

Uma topologia Γ num grupo G é dita invariante à esquerda se gA é um aberto de Γ, para todo $g \in G$ e $A \in \Gamma$. Isso implica que uma topologia é invariante à esquerda se, e só se, as translações à esquerda são contínuas (e portanto homeomorfismos). De maneira semelhante definimos uma topologia invariante à direita.

Um resultado que segue diretamente da afirmação acima é que se Γ é uma topologia invariante à esquerda em G, então a topologia produto em $G \times G$ é invariante à esquerda. De fato, basta ver que se A e B são abertos de G e $g, h \in G$ temos $(g,h)(A \times B) = gA \times hB$ que é um aberto da topologia produto.

A principal propriedade para sistemas de vizinhanças da identidade é que ela gera a topologia de grupos topológicos. Para mostrar isso, precisaremos do seguinte lema.

Lema 1 *Suponha que Γ seja uma topologia em G invariante à esquerda e à direita. Então, G é um grupo topológico se, e só se,*
(i) p é contínua em $(1,1)$
(ii) $i : G \to G$, $i(g) = g^{-1}$, é contínua em 1.

A demonstração desse lema é encontrada em [22].

Para caracterizar a topologia de G a partir dos sistemas de vizinhanças da identidade deve-se lembrar que um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto x num espaço topológico X é uma família $\mathcal{F}$ de abertos de X, tal que cada elemento $\mathcal{F}$ contém x e se $A \subset X$ é um aberto com $x \in A$ então, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset A$. Mais precisamente, podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 4 *Seja G um grupo e suponha que $\mathcal{V}$ é um sistema de vizinhanças da identidade em G. Então, existe uma única topologia Γ que torna G um grupo topológico de tal forma que $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do elemento neutro em relação a Γ.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [22].

A Proposição 4 mostra que para conhecermos a topologia de um grupo topológico basta estudarmos as vizinhanças de seu elemeneto neutro, assim temos as informações necessárias para trabalhar com tal grupo. A seguir, envolvendo as vizinhanças do elemento neutro de um grupo topológico, temos o seguinte resultado.

Proposição 5 *Seja G um grupo topológico. Então, as seguintes condições são equivalentes:*
(i) A topologia de G é Hausdorff
(ii) $\{1\}$ é um conjunto fechado
(iii) $\bigcap_{U \in \mathcal{V}(\infty)} U = \{1\}$

1.2 Espaços Homogêneos

Um caso particular de ação de grupos ocorre nos espaços quocientes. Seja $H \subset G$ um subgrupo e denote por $\frac{G}{H}$ o conjunto das classes laterais gH, $g \in G$. Então, a aplicação

$$(g, g_1H) \mapsto g\,(g_1H) = (gg_1)\,H$$

define uma ação à esquerda natural de G em $\frac{G}{H}$. Denotando por

$$\pi : G \to \frac{G}{H}$$

a aplicação sobrejetora (projeção canônica) $\pi(g) = gH$, essa ação fica definida como $g\pi(g_1) = \pi(gg_1)$.

Evidentemente, a ação de G em $\frac{G}{H}$ é transitiva. Assim, toda ação transitiva se indentifica (ou melhor, está em bijeção) com o espaço quociente de G, ou mais precisamente, tem-se o seguinte resultado.

Proposição 6 *Suponha que a ação de G em X é transitiva e tome $x \in X$. Então, a aplicação*

$$\xi_x : gG_x \in \frac{G}{G_x} \mapsto gx \in X$$

é uma bijeção entre $\frac{G}{G_x}$ e X. A aplicação ξ_x é equivalente no sentido que $g\ \xi_x(g_1 H) = \xi_x((gg_1)H)$, para g, $g_1 \in G$, isto é, ξ_x comuta com as ações de G em $\frac{G}{H}$ e X respectivamente, além do mais, se $y = gx$ então $\xi_y = \xi_x \circ D_x$.

A aplicação ξ_x da proposição acima está relacionada com a aplicação parcial ϕ_x através do seguinte diagrama comutativo 1.1.

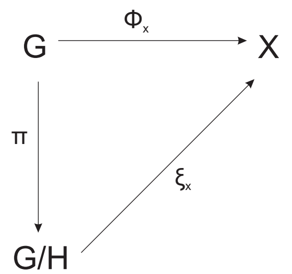

Figura 1.1: Diagrama Comutativo

Em virtude dessa identificação, um quociente $\frac{G}{H}$ é também chamado de *espaço homogêneo* como são chamados normalmente os conjuntos onde os grupos agem transitivamente. O ponto x escolhido para estabelecer a identificação entre X e $\frac{G}{G_x}$ é denominado de origem ou base do espaço homogêneo X. A identificação de X com $\frac{G}{G_x}$ depende da escolha da origem. Mas, alterando x não muda substancialmente o espaço quociente, pois numa ação transitiva os subgrupos de isotropia são conjugados entre si, ou mais precisamente, como mostra a Proposição 2. De fato, se $H \subset G$ é um subgrupo, então para todo $g \in G$ a aplicação

$$hH \mapsto g(hH)g^{-1} = \left(ghg^{-1}\right)\left(gHg^{-1}\right)$$

estabelece uma bijeção entre $\frac{G}{H}$ e $\frac{G}{gHg^{-1}}$.

Observamos que os fatos descritos acima sobre ações transitivas se aplicam de imediato às órbitas de uma ação qualquer $G \times X \to X$. Neste caso, a restrição da ação sobre uma órbita Gx é transitiva o que permite identificar Gx com $\frac{G}{G_x}$.

De forma análoga, toda discussão acima se estende a ações à direita, onde os espaços homogêneos são os quocientes $\frac{G}{H}$, formado pelas classes laterais Hg, com $g \in G$.

Observemos também que num espaço homogêneo $\frac{G}{H}$, isto é, na presença de uma ação transitiva, as ações livres são aquelas em que o subgrupo de isotropia H se reduz a $\{1\}$. Nesse caso, o espaço homogêneo $\frac{G}{H}$ se identifica a G. Já as ações transitivas e efetivas são descritas pelos subgrupos normais contidos no grupo de isotropia (Para mais detalhes veja [22]).

Agora definiremos tais conceitos no contexto de ações contínuas.

Definição 8 *Seja G um grupo topológico. Uma ação de G em X é* contínua *se a aplicação $\phi : G \times X \to X$, $\phi(g,x) = gx$ é contínua.*

Um resultado bastante conhecido sobre ações contínuas é que se o espaço em que trabalhamos é Hausdorff, então o subgrupo de isotropia é fechado, ou seja:

Proposição 7 *Seja X um espaço de Hausdorff, e suponha que a ação de G em X seja contínua. Então, qualquer subgrupo de isotropia G_x, $x \in X$ é fechado.*

Demonstração: *Em termos da aplicação ϕ, o subgrupo de isotropia é dado por*

$$\phi^{-1}(\{x\}) = \{g \in G | \phi(g,x) = x\} = G_x$$

E, portanto, como em todo Hausdorff conjuntos com um ponto são fechados, G_x é fechado. $\square$

Definição 9 *Seja Y um espaço topológico e $\backsim$ uma relação de equivalência em Y. Denote por $\frac{Y}{\sim}$ o conjunto das classes de equivalência de $\backsim$ e por*

$$\pi : Y \to \frac{Y}{\sim}$$

a aplicação sobrejetora canônica, que a cada $y \in Y$ associa sua classe de equivalência. A topologia quociente em $\frac{Y}{\sim}$ é aquela em que um subconjunto $A \subset \frac{Y}{\backsim}$ é aberto se, e só se, $\pi^{-1}(A)$ é um aberto em Y.

No caso em que G é um grupo e $H \subset G$ um subgrupo, o quociente $\frac{G}{H}$ é o conjunto das classes de equivalência da relação de equivalência em G, onde $x \backsim y$ se, e só se, $xH = yH$. E, portanto, $\frac{G}{H}$ pode ser munido da topologia quociente, quando G é um grupo topológico. Em particular, temos o seguinte resultado.

Proposição 8 *Seja um $\frac{G}{H}$ o conjunto de classes laterais da aplicação canônica $\pi : G \to \frac{G}{H}$. Então, π é uma aplicação aberta.*

A topologia quociente tem um bom comportamento em relação ao produto cartesiano de grupos, ou seja, temos a seguinte proposição.

Proposição 9 *Sejam G_1 e G_2 grupos topológicos e $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$ subgrupos. Então, o produto $H_1 \times H_2$ é um subgrupo de $G_1 \times G_2$ e o quociente $\frac{(G_1 \times G_2)}{(H_1 \times H_2)}$ se identifica com $\left(\frac{G_1}{H_1}\right) \times \left(\frac{G_2}{H_2}\right)$ através da bijeção*

$$\phi : (g_1, g_2)(H_1 \times H_2) \to (g_1 H_1, g_2 H_2).$$

Essa bijeção é um homeomorfismo em relação às topologias quocientes nos espaços homogêneos.

Voltando agora a uma ação geral $G \times X \to X$, cada órbita Gx está em bijeção com o quociente $\frac{G}{G_x}$. Por intermédio dessa bijeção pode-se colocar uma topologia na órbita Gx declarando que um subconjunto $A \subset Gx$ é aberto se o conjunto correspondente em $\frac{G}{G_x}$ for um aberto da topologia quociente.

No entanto, se a ação $G \times X \to X$ for contínua então, a órbita $Gx \subset X$ admite também a topologia induzida de X.

Proposição 10 *Seja $\phi : G \times X \to X$ uma ação contínua e transitiva de G em X. Fixe $x \in X$ e considere a bijeção $\xi_x : \frac{G}{G_x} \to X$ dada por $\xi_x(gG_x) = gx$. Então, ξ_x é contínua em relação à topologia quociente em $\frac{G}{G_x}$.*

Demonstração: *Note que $\xi_x \circ \pi = \phi_x$. De fato, $\xi_x \circ \pi(g) = \xi_x(gH) = gx = \phi_x(g)$. Como ϕ_x é contínua segue que $\xi_x \circ \pi$ é contínua, e portanto, ξ_x é contínua.* □

A situação ideal seria poder identificar como espaços topológicos, o espaço X, onde se dá uma ação transitiva com o quociente $\frac{G}{G_x}$. Em geral isso não é possível, pois a aplicação ξ_x não é homeomorfismo por não ser aplicação aberta. O resultado geral a seguir sobre o homeomorfismo $\frac{G}{G_x} \to X$ vale quando X é um espaço de Baire, isto é, a união enumerável de conjuntos de interior vazio ainda tem interior vazio, ou seja, temos o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [22].

Proposição 11 *Seja $G \times X \to X$ uma ação contínua e transitiva. Suponha que G seja separável e que X seja um espaço de Baire, $x \in X$. Então a aplicação $\xi_x : \frac{G}{G_x} \to X$ é homeomorfismo.*

Uma situação especial dos quocientes considerados acima acontece quando o subgrupo H é normal em G. Nesse caso o quociente $\frac{G}{H}$ tem uma estrutura de grupo definida por $(gH)(hH) = (gh)H$ e a projeção canônica $\pi : G \to \frac{G}{H}$ é um homomorfismo. Com a topologia quociente esse grupo passa a ser um grupo topológico. Para ver isso basta recorrer ao diagrama 1.2.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "\pi"'] \arrow[d, shift left, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\
G/H \times G/H \arrow[r, "\Phi"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2: Diagrama Comutativo

A aplicação ϕ denota o produto em $\frac{G}{H}$. Disto segue que ϕ é contínua uma vez que estamos trabalhando com a topologia quociente em $\frac{G}{H}$. Por outro lado, a continuidade da inversa em $\frac{G}{H}$ provém da comutatividade do diagrama 1.3 juntamente com o fato da topologia ser a topologia quociente.

Em relação a topologia quociente, a projeção $\pi : G \to \frac{G}{H}$ é um homomorfismo contínuo e uma aplicação aberta.

Exemplo 4 *Tomemos o grupo $G = Gl(n, \mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^n$ com a seguinte ação*

$$\phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dada por $\phi(g, x) = gx$, com $g \in G$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Essa ação é contínua, e as órbitas dessa ação são 0 e seu complementar $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Para calcular a órbita $\mathbb{R}^n - \{0\}$, basta tomar um elemento da base canônica de $\mathbb{R}^n$, tomemos $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$. Então, existe uma matriz $g \in G$ tal que $ge_1 = x$. É fácil ver que

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "i"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Figura 1.3: Diagrama Comutativo

o subgrupo de isotropia em 0 *é todo* $Gl(n, \mathbb{R}^n)$*, já o subgrupo de isotropia* G_{e_1} *é formado pelas matrizes*

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

com b *uma matriz linha* $1 \times (n-1)$ *e* $C \in Gl(n-1, \mathbb{R})$*. Pela Proposição 2, temos que os outros grupos de isotropia com* $x \neq 0$ *são conjugados a* G_{e_1}*. Assim, basta calcular este grupo de isotropia. Logo, podemos ver que o quociente* $\frac{G}{G_{e_1}}$ *é homeomorfo ao cilindro* $\mathbb{R}^n - \{0\}$*.*

A restrição da ação do Exemplo 4, aos subgrupos de $Gl(n, \mathbb{R})$ induzem outras órbitas de acordo com o subgrupo usado, como vemos abaixo.

Exemplo 5 *Seja* $O(n) \subset Gl(n, \mathbb{R})$*. Tomando a ação*

$$\phi : O(n) \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$$

dada por $\phi(g, x) = gx$*, com* $g \in O(n)$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$*. Esta ação é contínua, uma vez que ela é restrição da aplicação do exemplo anterior. Segue ainda que, o grupo de isotropia em* $e_1 \in \mathbb{R}^n$*, é dado pelas matrizes ortogonais*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

com $C \in O(n-1)$*. Este grupo é isomorfo a* $O(n-1)$*. Logo, o quociente* $\frac{O(n)}{O(n-1)}$ *é homeomorfo à esfera de dimensão* $n-1$*.*

Exemplo 6 *Considere o espaço projetivo*

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{x \in \mathbb{S}^n | x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

e a ação ϕ *de* $G = Gl(n, \mathbb{R})$ *em* $\mathbb{P}^{n-1}$

$$\phi : G \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$$

dada por $\phi(V) = gV$*, onde* $g \in G$ *e* $V \in \mathbb{P}^{n-1}$*. Tal ação é contínua em relação a topologia quociente em* $\mathbb{P}^{n-1}$*. Dado* $v \in \mathbb{R}^n$*, denote por* $[v]$ *o subespaço gerado por* v*. Se* $v \neq 0$*,* $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}$*. Existe portanto uma aplicação sobrejetora* $\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$*, definida por* $\pi(v) = [v]$*. Essa ação é transitiva e o grupo de isotropia em* $[e_1]$ *é o subgrupo* $H_{[e_1]}$ *formado pelas matrizes do tipo*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

com $a \in \mathbb{R}$*,* b *uma matriz linha* $(n-1) \times (n-1)$ *e* $C \in Gl(n-1, \mathbb{R})$*. A projeção* π *é equivalente em relação às ações de* G *em* $\mathbb{R} - \{0\}$ *e* $\mathbb{P}^{n-1}$*. Como no caso da ação em* $\mathbb{R}^n$*, essa ação induz ações de todos os grupos lineares, isto é, dos subgrupos de* $Gl(n, \mathbb{R})$*. Essas ações são denominadas de ações projetivas.*

1.3 Semigrupos

Nesta seção, faremos um estudo sobre semigrupos em grupos e em grupos topológicos. Para mais detalhes nos referimos à [14].

Definição 10 *Seja S um conjunto munido de uma operação interna. Dizemos que S é um* semigrupo *se a propriedade associativa é satisfeita para os elementos de S.*

Exemplo 7 *O conjunto dos números inteiros com a operação de multiplicação $(\mathbb{Z}, \cdot)$ é um semigrupo.*

Exemplo 8 *O conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a,\ b,\ c,\ d \text{ são números reais } \geq 0 \right\}$ é um semigrupo com o produto usual de matrizes.*

Exemplo 9 *O conjunto dos números reais com a operação interna de produto de números reais $(\mathbb{R}, \cdot)$ é um semigrupo.*

Um caso particular de semigrupo que será muito utilizado daqui em diante é quando o semigrupo está contido em um grupo. Neste caso, chamamos este semigrupo de subsemigrupo.

Definição 11 *Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto S de G é um* subsemigrupo *de G se $(S, *)$ é um semigrupo.*

Proposição 12 *Suponhamos que $(G, *)$ é um grupo. Então, S é um subsemigrupo de G se, e somente se, para quaisquer elementos $x,\ y \in S$, $x * y \in S$.*

Exemplo 10 *Seja G o grupo abelino $\mathbb{R}^2$ com a operação dada pela soma usual. O conjunto*

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq x \text{ e } y \geq 0 \right\}$$

é um subsemigrupo de G. De fato, tome (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in S$. Então, temos que $y_1 \leq x_1$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \leq x_2$ e $y_2 \geq 0$. Logo, $y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2$ e $y_1 + y_2 \geq 0$, mostrando que $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in S$.

Exemplo 11 *Seja G o grupo de Heisenberg das matrizes reais 3×3 da forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definimos $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G | a, b \geq 0 \text{ e } 0 \leq c \leq ab \right\}$. Mostraremos que S é um subsemigrupo de G. Para isto, tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elementos em S. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 & a_1 b_2 + c_1 + c_2 \\ 0 & 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e teremos que $(a_1 + a_2)$, $(b_1 + b_2) \geq 0$ e

$$0 \leq a_1 b_2 + c_1 + c_2 \leq a_1 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2).$$

Definição 12 *Se S é um subsemigrupo de um grupo G, podemos definir um* ideal à esquerda do subsemigrupo *(resp.,* ideal à direita do subsemigrupo*) de S como um subconjunto não vazio I de S que satisfaz $SI \subset I$ (resp., $IS \subset S$).*

Se I é tanto um ideal à direita quanto à esquerda do subsemigrupo dizemos que I é um ideal do subsemigrupo S. Observe que se S é um subsemigrupo de G e $s \in S$, temos que seu oposto $s^{-1} \in G$, embora possa não pertencer a S. Usaremos a notação $S^{-1} = \{g^{-1} | g \in S\}$.

Proposição 13 *Suponha que S é um subsemigrupo de um grupo G. Então, S^{-1} também é um subsemigrupo de G.*
Demonstração: *Tomemos $g, h \in S^{-1}$. Pela definição de S^{-1} temos que*

$$g = x^{-1} e h = y^{-1}, \text{ para } x, y \in S.$$

E, portanto, $g * h = x^{-1} * y^{-1} = (y * x)^{-1} \in S^{-1}$, uma vez que S é subsemigrupo de G. □

Claramente, se $1 \in S$ então $1 \in S^{-1}$, pois, $(1)^{-1} = 1$.
Em particular, o próximo resultado nos mostra que o interior de um semigrupo é um ideal, cuja demonstração pode ser feita utilizando técnicas conforme em [14].

Proposição 14 *Seja S um subsemigrupo de um grupo topológico G, e suponha que* $\mathrm{int}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$*. Então,*
(i) $(\mathrm{int}(\mathrm{S}))\, S \cup S\, (\mathrm{int}(\mathrm{S})) \subset \mathrm{int}(\mathrm{S})$. *Em outras palavras,* $\mathrm{int}(\mathrm{S})$ *é um ideal de S.*
(ii) *Se* $1 \in \mathrm{int}(\mathrm{S})$, *então* $\mathrm{int}(\mathrm{S}) = \mathrm{int}(\mathrm{fe}(\mathrm{S}))$ *e* $\mathrm{int}(\mathrm{S})$ *é denso em S.*

Proposição 15 *Suponha que G é um grupo topológico metrizável. Seja S um semigrupo compacto então, $1 \in S$.*
Demonstração: *Seja $s \in S$. Como S é compacto dada a sequência $\{s^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de S, esta possui uma subsequência $\{s^{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ que converge em S, ou seja, existe $s_0 \in S$ tal que $s^{n_k} \to s_0$ quando $n_k \to \infty$. Pela continuidade da aplicação i, temos que se $s^{n_k} \to s_0$ quando $n_k \to \infty$. E, então,*

$$i(s^{n_k}) \to i(s_0), \text{ ou seja, } (s^{n_k})^{-1} \to s_0^{-1} \text{ quando } n_k \to \infty$$

Agora, consideremos a subsequência $\{s^{n_{k+1} - n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de S. Temos que $s^{n_{k+1} - n_k} = s^{n_{k+1}} s^{-n_k} \in S$. Tomando novamente $n_k \to \infty$ segue que $s^{n_{k+1} - n_k} \to s_0 s_0^{-1} = 1$. Logo $1 \in \mathrm{fe}(\mathrm{S})$. *Como S é um compacto em um espaço Hausdorff, segue que S é fechado e $1 \in S$.* □

Como consequência da Proposição 15, temos o seguinte resultado:

Corolário 1 *Seja G um grupo topológico metrizável. Se $S \subset G$ é um semigrupo compacto de G, então S é um grupo compacto.*
Demonstração: *Pela Proposição 15, $1 \in S$. Seja $g \in S$. Como a translação à esquerda E_g é contínua e $E_g(S) = gS$ então, gS é um semigrupo compacto de G. E, novamente, pela Proposição 15 temos que $1 \in gS$, o que implica que $gs = 1$ para algum $s \in S$, ou seja, g tem um inverso $g^{-1} = s \in S$. Como a operacão em S é associativa, concluímos a demonstração.* □

Proposição 16 *Seja G um grupo topológico compacto metrizável. Seja S um subsemigrupo de G com* $\operatorname{int}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$. *Então,*

(i) $\operatorname{fe}(\mathrm{S})$ *é um subsemigrupo de G.*

(ii) *S é um subgrupo compacto e aberto de G.*

Demonstração: (i) *Seja g, $h \in \operatorname{fe}(\mathrm{S})$. Então, existem sequências $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$ em S tais que $g_n \to g$ e $h_n \to h$. Disto segue que $\{g_n h_n\}$ é uma sequência em S (S é semigrupo) tal que $g_n h_n \to gh$ e, portanto, $gh \in \operatorname{fe}(\mathrm{S})$.* (ii) *Como $\operatorname{fe}(\mathrm{S})$ é um semigrupo compacto de G, então, pela Proposição 15 $\operatorname{fe}(\mathrm{S})$ é um subgrupo compacto de G. Assim, basta mostrar que $S \subset \operatorname{int}(\mathrm{S})$. Para isto, seja U um subconjunto aberto e não vazio tal que $U \subset S$. Então, $U^{-1} \subset (\operatorname{fe}(\mathrm{S}))^{-1} = \operatorname{fe}(\mathrm{S})$. Como U^{-1} é aberto, então $U^{-1} \cap S \neq \varnothing$, isto implica que existe $a^{-1} \in U^{-1} \cap S$, ou seja,*

$$1 = a^{-1}a \in a^{-1}U \subset SS \subset S$$

onde $a^{-1}U$ é um aberto que contém 1. Logo, $1 \in \operatorname{int}(\mathrm{S})$ e assim para todo $s \in S$, $s = s1 \in s(\operatorname{int}(\mathrm{S})) \subset \operatorname{int}(\mathrm{S})$, pois o $\operatorname{int}(\mathrm{S})$ é um ideal de S. □

A seguir, enunciamos um resultado importante que diz que se S é um subsemigrupo de um grupo compacto então, sob certas hipóteses, S é um subgrupo aberto e compacto. Para mais informações nos referimos à [14].

Proposição 17 *Seja S um subsemigrupo de um grupo compacto e metrizável G, e suponha que* $\operatorname{int}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$. *Então S é um subgrupo compacto e aberto de G. E, ainda, se G é conexo então $S = G$.*

1.4 Grupos de Lie

Definição 13 *Um* grupo de Lie *é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação produto*

$$p : (g, h) \in G \times G \to gh \in G$$

é diferenciável.

Tanto a estrutura de variedade diferenciável de G, quanto a diferenciabilidade de p, pressupõem um grau de diferenciabilidade $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq \omega$. Para desenvolver boa parte da teoria, é necessário tomar apenas derivadas de primeira ordem em G e no fibrado tangente TG, e assim supor que G e p são de classe $\mathcal{C}^2$. No entanto, não existe perda de generalidade em assumir que G e p são analíticas $(\mathcal{C}^\omega)$, pois é possível provar que se p é de classe $\mathcal{C}^\infty$ então, p é analítica em relação a estrutura de variedade analítica contida na estrutura $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$. De qualquer maneira será assumido que G é de classe $\mathcal{C}^\infty$ assim como o produto p.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de grupos de Lie.

Exemplo 12 *Seja $Gl(n, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes inversíveis $n \times n$, denomimado o conjunto das transformações lineares inversíveis em $\mathbb{R}^n$. Esse grupo é um subconjunto aberto do espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$. De fato, podemos definir $Gl(n, \mathbb{R})$ como o conjunto das matrizes cujo o deteminante é diferente de zero, ou seja:*

$$Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \det A \neq 0\}.$$

Logo, $Gl(n, \mathbb{R})$ *é um conjunto aberto em* $M_n(\mathbb{R})$, *e portanto, é uma variedade diferenciável. O produto no grupo* $Gl(n, \mathbb{R})$ *é proveniente do produto usual de matrizes, logo, se* $X = (x_{ij})$ *e* $Y = (y_{ij})$ *são matrizes* $n \times n$ *então,* $Z = XY = (z_{ij})$ *tal que*

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}$$

que é um polinômio de grau 2 nas variáveis x_{ij}, y_{ij} *e, portanto, é uma aplicação diferenciável. E, assim,* $Gl(n, \mathbb{R})$ *é um Grupo de Lie. E, também, o grupo* $Gl(V)$ *das transformações lineares inversíveis em* V *é um Grupo de Lie. De fato, podemos definir um isomorfismo entre* $Gl(V)$ *e* $Gl(n, \mathbb{R})$ *por* $h \in Gl(V) \to [h] \in Gl(n, \mathbb{R})$, *onde* $[h]$ *denota a matriz em relação a base fixada.*

Exemplo 13 *Considere agora o grupo* G *das matrizes* $n \times n$ *triangulares superiores cuja diagonal é igual a 1. Como* G *está em bijeção com* $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, *temos que* G *tem estrutura de variedade diferenciável. Utilizando o produto usual de matrizes vemos que* G *também é um Grupo de Lie.*

Definiremos agora outro conceito importante, o conceito de Álgebra de Lie.

Definição 14 *Uma* Álgebra de Lie *é um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido de uma operação*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (X, Y) & \to & [X, Y] \end{array}$$

chamada colchete de Lie, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) *O colchete de Lie é bilinear, ou seja,*

$$\begin{array}{rcl} [aX + bY, Z] & = & a[X, Z] + b[Y, Z] \\ [Z, aX + bY] & = & a[Z, X] + b[Z, Y] \end{array}$$

para quaisquer números reais a, b *e* X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$.

(ii) *O colchete é anti-simétrico, ou seja,* $[X, X] = 0$, *para qualquer* $X \in \mathfrak{g}$.

(iii) *O colchete satisfaz a identidade de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

para quaisque X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$.

Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Lie se for fechado pelo colchete. Nesse caso, $\mathfrak{h}$ também é uma Álgebra de Lie.

Exemplo 14 *O espaço vetorial das matrizes quadradas* $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ *é uma Álgebra de Lie com o colchete definido por*

$$[A, B] = AB - BA$$

Exemplo 15 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie e denotamos*

$$gl(\mathfrak{g}) = \{\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} | \phi \text{ é transformação linear}\}.$$

Sabemos que com as operações de soma e multiplicação por um número real definidas por

$$\begin{array}{rcl} (\phi_1 + \phi_2)(X) & = & \phi_1(X) + \phi_2(X) \\ a\phi(X) & = & a(\phi(X)) \end{array}$$

para $X \in \mathfrak{g}$ *e* $a \in \mathbb{R}$, $gl(\mathfrak{g})$ *é um espaço vetorial. Logo, tomando* ϕ_1, $\phi_2 \in gl(\mathfrak{g})$, *definimos o seguinte colchete*

$$[\phi_1, \phi_2] = \phi_1 \circ \phi_2 - \phi_2 \circ \phi_1$$

Assim, temos que $gl(\mathfrak{g})$ *é uma Álgebra de Lie.*

A principal pergunta que se faz nesse momento é, será que existe algum meio de ligar as álgebras de Lie aos grupos de Lie? A resposta para essa pergunta é sim. A aplicação Exponencial é o principal objeto para estudar a correnspondência entre Álgebras de Lie e os Grupos de Lie, onde

$$\exp : \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}.$$

A idéia básica desta construção esta baseada no fato que, por definição, os elementos de $\mathfrak{g}$ são equações diferenciais ordinárias em G (campos invariantes), que possuem fluxos, os quais são formados por difeomorfismos locais de G.

No contexto diferenciável em que G é um grupo de Lie, o teorema de Cartan (Veja por exemplo em [22]) garante que se $H \subset G$ é fechado, então H é um subgrupo de Lie. Nesse caso, existe uma estrutura de variedade diferenciável em $\frac{G}{H}$ compatível com a topologia quociente. Mais detalhes desta construção podem ser encontrados em [22]. Em particular, enunciamos o seguinte resultado.

Teorema 1 *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então, existe uma estrutura diferenciável em $\frac{G}{H}$ com $\dim \frac{G}{H} = \dim G - \dim H$, que é compatível com a topologia quociente de maneira que a projeção canônica $\pi : G \to \frac{G}{H}$ é uma submersão.*

A estrutura diferenciável definida neste teorema é denominada de estrutura quociente.

1.5 Fibrados

1.5.1 Fibrados Principais

Nesta seção, recordaremos os conceitos de fibrados principais e seus fibrados associados. Para mais detalhes sobre esta teoria nos referimos a [13], [22].

Definiremos agora o que chamamos de Fibrado Principal. Seja Q um espaço total, M um espaço topológico que chamaremos de base do fibrado e G um grupo estrutural. Temos a seguinte definição:

Definição 15 *Sejam Q, M e G como acima, dizemos que $Q(M,G)$ é um* Fibrado Principal *se satisfaz as três condições abaixo:*

(i) G age livremente à direita em $Q : (q,a) \to qa$, $q \in Q$, $a \in G$, ou seja, $qa = q$ se, $a = 1$, onde 1 é o elemento neutro de G.

(ii) O espaço das órbitas dessa ação é M. Isso significa que existe uma aplicação sobrejetora

$$\pi : Q \to M$$

tal que as órbitas de G são os conjuntos $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$.

(iii) Q é localmente trivial no sentido em que para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma aplicação bijetora

$$\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$$

que é da forma

$$\psi(q) = (\pi(q), \phi(q))$$

onde $\phi : \pi^{-1}(U) \to G$ é uma aplicação que satisfaz

$$\phi(qa) = \phi(q)\,a$$

para todo $q \in \pi^{-1}(U)$ e $a \in G$.

Observamos que se os espaços envolvidos são espaços topológicos e as aplicações contínuas (e homeomorfismos quando bijetoras), chamamos $Q(M,G)$ de fibrado topológico. O fibrado principal é de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, se os espaços envolvidos são variedades diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^k$, em particular G deve ser um grupo de Lie, e as aplicações envolvidas diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^k$ (difeomorfismos no caso das bijeções). Nesse caso, a projeção $\pi : Q \to M$ torna-se uma submersão, pois através do difeomorfismo ψ ela se identifica com a projeção na primeira coordenada $U \times G \to U$. Denotaremos as fibras do fibrado principal por $Q_x = \pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$.

A condição de trivialidade local na definição de um fibrado principal $Q(M,G)$ é para que Q seja um feixe bem organizado de grupos (ou grupos de Lie no caso diferenciável).

Essa condição também está ligada à idéia básica da definição de variedade diferenciável. Esta é feita tomando as cartas e o ponto principal é o tipo de condição que deve satisfazer as funções de mudança de coordenadas (de cartas, isto é, $\alpha_1\alpha_2^{-1}$ onde α_1 e α_2 são cartas da variedade). Por exemplo, o grau de diferenciabilidade de uma variedade é determinada pelo grau de diferenciabilidade dessas funções de mudança de coordenadas.

De forma análoga, um fibrado principal também pode ser definido como uma variedade em que as funções de mudança de coordenadas pertencem a uma determinada classe de transformações. Veja por exemplo em [22].

Notemos agora que a ação descrita na Definição 15 é livre e transitiva nas fibras. De fato, fixando $q \in \pi^{-1}\{x\}$, com $x \in M$. Como a Q é localmente trivial, segue que a fibra é difeomorfa ao grupo estrutural G via aplicação

$$i : a \in G \to qa \in \pi^{-1}\{x\}.$$

E, portanto, $\pi^{-1}\{x\} = qG$.

Exemplo 16 *O produto $M \times G$ é um fibrado principal com o grupo estrutural G, onde definimos a ação à direita como $R_h(x,g) = (x,gh)$. De fato, é fácil ver que a ação é livre pois, se $g,h \in G$, então $(x,gh) = (x,g)$ se, e só se, $gh = g$, consequentemente $h = 1_G$. Por outro lado, tomando a projeção na primeira coordenada temos que $\pi : M \times G \to M$, está bem definida. Tomando a projeção na segunda coordenada, temos que $\phi(x,g)h = \pi_2(x,g)h = gh = \pi_2(x,gh)$, para todo $x \in M$. Em particular, um grupo G pode ser visto como fibrado principal em que a base se reduz a um ponto $M = \{x\}$. Esse produto é chamado de fibrado trivial.*

Exemplo 17 *Seja M uma variedade diferenciável e TM seu fibrado tangente. O fibrado das bases ou fibrado dos referenciais de M é o conjunto BM de todas as bases de TM. Isto é, um elemento p de BM é uma base*

$$\{f_1, \ldots, f_n\}$$

de algum fibrado tangente T_xM, $x \in M$. De forma equivalente, $p \in BM$ pode ser visto como uma aplicação linear inversível (referencial) $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$, $x \in M$. Dado a aplicação p, o conjunto

$$\{p(e_1), \ldots, p(e_n)\}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base canônica de $\mathbb{R}^n$, é uma base de T_xM. Vice-versa, a base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ determina a aplicação $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$ dada por

$$p(x_1, \ldots, x_n) = x_1f_1 + x_2f_2 + \ldots + x_nf_n.$$

A projeção $BM \to M$ associa a $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$ o ponto $x \in M$, de tal forma que a fibra BM_x é o conjunto de referenciais de T_xM. O grupo $Gl(n,\mathbb{R})$ age à direita em BM por

$$(p,g) \to pg = p \circ g$$

com $p \in BM$ e $g \in Gl(n,\mathbb{R})$. Essa ação é livre pois os elementos de BM são transformações lineares inversíveis ($p \circ g = p$ se, e só se $g = 1$) e transitiva nas fibras pois dada a transformação linear $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$ as demais são da forma $q = p \circ g$, para algum $g \in Gl(n,\mathbb{R})$. Essa construção define BM como um fibrado principal de grupo estrutural $Gl(n,\mathbb{R})$ e base M. A condição de trivialização local se obtém tomando cartas de M. Através das cartas se obtém, para todo $x \in M$, uma vizinhança U e campos de vetores $X_1, \ldots, X_n$ definido em U (campos coordenados) que são linearmente independentes em todo ponto de U, esse fibrado é localmente trivial (os campos definem seções de BM). Essas seções são suficientes para garantir que BM é localmente trivial.

Exemplo 18 *Seja*

$$G = O(n,\mathbb{R}) = \left\{ A \in Gl(n,\mathbb{R}) \,|\, A^T A = AA^T = I \right\}$$

e o conjunto $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n |\, ||x|| = 1\}$. Definimos a seguinte ação

$$\eta : G \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$$

dada por $\eta(g,x) = gx$, com $g \in G$ e $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Claramente essa ação é livre, e ainda tomando a projeção $\pi : \mathbb{S}^{n-1} \to \frac{\mathbb{S}^{n-1}}{\sim} = \mathbb{RP}^{n-1}$, onde $\sim$ é a relação de equivalência dada por

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

temos que $\mathbb{S}^{n-1}\left(\mathbb{RP}^{n-1}, O(n,\mathbb{R})\right)$ é um fibrado principal. A condição de triavilidade local segue tomando as cartas de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Exemplo 19 *Considere o conjunto*

$$B_k(n) = \left\{ T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n |\ T \text{ é transformação linear injetora, com } n > k \right\}$$

e tome $G = Gl(k,\mathbb{R})$, definimos a seguinte ação

$$\eta : G \times B_k(n) \to B_k(n)$$

dada por $\eta(g,x) = gx$, com $g \in G$ e $x \in B_k(n)$. A ação está bem definida, uma vez que podemos ver os elementos do conjunto $B_k(n)$ como matrizes de dimensão $n \times k$ de posto k. É fácil ver que essa ação é livre. Assim, seja $B_k(n)$ o conjunto das matrizes $n \times k$ de posto k e consideramos a relação de equivalência $\sim$ em $B_k(n)$ onde $p \sim q$ se, e somente se, existe uma matriz inversível $a \in G$ de ordem $k \times k$ tal que $p = qa$. Observe que duas matrizes p e q definem o mesmo subespaço k-dimensional se, e somente se, as colunas de p são combinações lineares das colunas de q, ou seja, p e q estão na mesma classe de equivalência. Logo, definimos a projeção

$$\pi : B_k(n) \to \frac{B_k(n)}{\sim}.$$

Essa aplicação é sobrejetora e o conjunto $\frac{B_k(n)}{\sim}$ coincide com a variedade Grassmanniana $G_k(n)$ dos subespaços de dimensão k em $\mathbb{R}^n$. As fibras dessa aplicação coincidem com as órbitas de G e o fato da trivialidade local pode ser visto através da construção das seções locais. Assim, fica definido o fibrado principal $B_k(n)(G_k(n), Gl(n,\mathbb{R}))$.

1.5.2 Fibrados Associados

Iniciamos estabelecendo algumas notações. Seja $Q(M,G)$ um fibrado principal e F um espaço topológico, tal que o grupo estrutural G age à esquerda em F. O grupo G age à direita no produto $Q \times F$, tal que $g(q,v) = (qg, g^{-1}v)$, com $g \in G$ e $(q,v) \in Q \times F$.

Assim, podemos definir em $Q \times F$ a seguinte relação de equivalência dada por $(q,v) \sim (p,w)$ se, e só se, existe $g \in G$ tal que $p = qg$ e $w = g^{-1}v$. De fato, temos que a relação é reflexiva uma vez que $1 \in G$. Por outro lado, se $(q,v) \sim (p,w)$, então $p = qg$, o que implica em $q = pg^{-1}$, com $g^{-1} \in G$, pois G é grupo. E, pelo mesmo motivo temos que, se $v = g^{-1}w$ então $w = gv$, com $g \in G$. Logo, $(p,w) \sim (q,v)$, e assim, a relação é simétrica para todo $(q,v) \in Q \times F$. Finalmente, a relação é transitiva, uma vez que dados $(q,v), (p,w)$ e $(r,z) \in Q \times F$, tal que $(q,v) \sim (p,w)$ e $(p,w) \sim (r,z)$, temos que existem $g, h \in G$ de forma que $p = qg$ e $r = ph$. Logo, $r = ph = (qg)h = q(gh)$, e como G é grupo, temos que $gh \in G$. Analogamente, segue que $z = (gh)^{-1}v$. E, portanto, $(q,v) \sim (r,z)$, completanto assim à afirmação acima. Denotaremos essas classes de equivalência por qv. Com isso, definimos o chamado Fibrado Associado, ou seja, temos a seguinte definição:

Definição 16 *Seja $Q(M,G)$ um fibrado principal e F um espaço topológico. Considere a relação de equivalência descrita acima. O conjunto quociente $E = \frac{Q \times F}{\sim}$ das classes de equivalência de $\sim$ é chamado de* Fibrado Associado *a Q com fibra F e base M. Denotamos esse fibrado por $E(M,G,F,Q)$, ou ainda, $E = Q \times_G F$.*

Observação: *Notemos que se $(q,v) \sim (p,w)$ então, q e p pertencem a mesma fibra em Q. Segue que a aplicação $\pi_E : Q \times_G F \to M$ dada por $\pi_E(qv) = \pi(q)$, está bem definida, o que torna $E = Q \times_G F$ um fibrado sobre M. As fibras de E serão denotadas $E_x = \pi^{-1}\{x\}$. Agora, dado $q \in Q$ os pares (q,v) e (q,w) são equivalentes se, e somente se, $v = w$. De fato, $(q,v) \sim (q,w)$ se existe $g \in G$ tal que $q = qg$ e $w = g^{-1}v$. Como a aplicação no fibrado principal é livre segue que $g = 1$, e consequentemente, $w = v$, ou seja, fixado um $q \in Q$, as classes de equivalência em E são determinadas por um único $v \in F$. Assim, para cada $q \in Q$ (fixo) podemos determinar a bijeção*

$$v \in F \to qv \in E_x, \text{ com } x = \pi(q).$$

Pelos comentários acima segue que esta aplicação é injetiva, mostraremos que essa aplicação também é sobrejetiva. De fato, dado um elemento em E_x temos que ele é da forma pw, onde p pertencente ao fibrado principal. Uma vez que, $p = qg$, com $g \in G$, temos que, $pw = (qg)w = (qg)g^{-1}gw = q(gw)$, que está na classe de equivalência de qv, portanto a aplicação é sobrejetora.

A bijeção acima mostra que as fibras do fibrado associado $E = Q \times_G F$ são parametrizadas pelos elementos do fibrado principal $Q(M,G)$, isto é, cada $q \in Q$ parametriza uma fibra E_x, com $\pi(q) = x$ pela fibra tipo F. Dois elementos q e p na mesma fibra fornecem diferentes parametrizações, que mudam de acordo com a ação de G em F. Com efeito, se $p = qg$, com $g \in G$, então $pv = (qg)v = q(gv)$. E, logo, a bijeção definida por p se obtém daquela definida por q compondo com a ação de $g \in G$.

Como os fibrados principais, os fibrados associados também admitem trivializações locais. De fato, seja $\beta : U \to Q$ uma seção local de Q. Então, a aplicação $\psi_\beta : U \times F \to \pi_E^{-1}(U)$ definida por $(x,v) \to \beta(x)v$ é uma bijeção, o que trivializa o fibrado sobre U. Se β_1 é outra seção local então na intersecção dos domínios das seções vale $\beta_1(x) = \beta(x)a(x)$, com $a(x) \in G$. Portanto, $\beta_1(x)v = \beta(x)av$ e se ψ_{β_1} é uma trivialização correspondente a β_1 então ψ_{β_1} e ψ_β estão relacionados por

$$\psi_\beta \circ \psi_{\beta_1}(x,v) = (x, av)$$

Essa aplicação leva fibra em fibra e a aplicação entre as fibras é proveniente da ação de G. Para mais detalhes ver [22].

Exemplo 20 *Dada uma variedade diferenciável M, com $\dim M = n$, o fibrado das bases BM foi construído como referênciais do fibrado tangente TM, no Exemplo 17. O grupo estrutural de BM é $Gl(n,\mathbb{R})$. Reciprocamente, TM se obtém de BM identificando-o como o fibrado associado $BM \times_{Gl(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$, construído a apartir da ação linear canônica de $Gl(n,\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$. De fato, existe uma bijeção entre TM e $BM \times_{Gl(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$, que é definida, associando à classe de $(p,v) \in BM \times \mathbb{R}^n$ o vetor tangente $p(v) \in T_xM$, $x = \pi(p)$ (onde $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$, vem da definição de BM). Essa aplicação é bem definida pelo fato de que o fibrado associado foi construído a partir da ação canônica de $Gl(n,\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$. Com isso, se (p,v) e $(q,w) = (pa, a^{-1}v)$ pertencem a mesma classe de equivalência então $q(w) = pa(a^{-1}v) = pv$.*

Enunciaremos agora alguns resultados sobre fibrados associados.

Proposição 18 *Sejam $Q(M,G)$ um fibrado principal e $\frac{G}{H}$ um espaço homogêneo de G. O subgrupo H age à direita em Q. Denote por $\frac{Q}{H}$ o conjunto das órbitas dessa ação. Então, $\frac{Q}{H}$ se identifica ao fibrado associado $Q \times_G \frac{G}{H}$.*

Demonstração: *Seja $x_0 = 1H$ a origem de $\frac{G}{H}$. Um elemento de $\frac{Q}{H}$ é uma órbita à direita qH, $q \in Q$. Definimos a aplicação que toma $\eta : \frac{Q}{H} \to Q \times_G \frac{G}{H}$, dada por $\eta(qH) = qx_0$. Assim, valem as seguintes afirmações sobre essa aplicação:*

(i) A aplicação η está bem definida, uma vez que se $p = qh \in qH$ então, $px_0 = (qh)x_0 = q(hx_0) = qx_0$.

(ii) η é injetora, pois se $\eta(qH) = \eta(pH)$ então, $qx_0 = px_0$ logo, $p = qg$ e $x_0 = g^{-1}x_0$. A última igualdade significa que $g^{-1} \in H$ e, portanto, $g \in H$. Da primeira igualdade segue que $qH = pH$.

(iii) η é sobrejetora, uma vez que dado $px \in Q \times_G \frac{G}{H}$ então existe $g \in G$ tal que $g^{-1}x = x_0$. Isso implica que $qx_0 = px$ se $q = pg^{-1}$, mostrando que px está na imagem da aplicação η, concluindo a demonstração. □

Observação: *Observemos que identificação obtida na proposição anterior se escreve em coordenadas locais de forma bastante simples: se $U \times G \approx \pi^{-1}(U)$ é uma trivialização local de Q então, obtém-se uma ação à direita de H em $U \times G$, que por definição é dada por $(z,g)h \to (z,gh)$, $z \in U$, $g \in G$ e $h \in H$. O conjunto das órbitas em $\pi^{-1}(U)$ se identifica então a $U \times \frac{G}{H}$. Por outro lado, os elementos de $\pi_E^{-1}(U)$ podem ser escritos como $(z,1)x$ com $z \in U$ e $x \in \frac{G}{H}$, pois $(z,1) \in U \times G$ se identifica a um elemento de $\pi^{-1}(U)$. No fibrado trivial $U \times G$ a bijeção entre $\frac{Q}{H}$ e $Q \times_G \frac{G}{H}$ é dada por*

$$(z,gH) \in \frac{U \times G}{H} \to (z,1)\,gH \in (U \times G) \times_G \frac{G}{H}$$

Através dessa descrição local da identificação $\frac{Q}{H} \approx Q \times_G \frac{G}{H}$, segue de imediato que ela é um difeomorfismo no caso de fibrados diferenciáveis.

Na próxima proposição, usaremos o seguinte conceito na demonstração.

Definição 17 *Sejam G e H dois grupos de Lie. Um homomorfismo $\phi : G \to H$ diferenciável entre G e H é chamado de* homomorfismo de grupos de Lie. *A mesma terminologia se aplica a isomorfismos e automorfismos de grupos de Lie.*

A condição de ser diferenciável faz parte da definição de homomorfismo de grupos de Lie. Para verificar se um homomorfismo $\phi : G \to H$ entre grupos de Lie é diferenciável basta verificar a diferenciabilidade em um único ponto. Com efeito, valem as igualdades

$$\phi \circ D_g = D_{\phi(g)} \circ \phi \text{ e } \phi \circ E_g = E_{\phi(g)} \circ \phi$$

Da primeira se obtém $\phi = D_{\phi(g)} \circ \phi \circ D_{g^{-1}}$. Aplicando a regra da cadeia, se vê que ϕ é diferenciável no elemento neutro de G, portanto ϕ também é diferenciável para todo $g \in G$. Assim, podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 19 *Suponha que $Q(M,G)$ seja um fibrado principal e $\phi : G \to H$ seja um homomorfismo de grupos (de Lie). O grupo age à esquerda em H por $(g,h) \to \phi(g)^{-1} h$. Denote por $Q \times_\phi H$ o fibrado associado obtido dessa ação. Então, $Q \times_\phi H$ é um fibrado principal com grupo estrutural H.*

Demonstração: *Definimos a ação à direita $\phi : (Q \times_\phi H) \times H \to Q \times_\phi H$ por $\phi(qh, h_1) = (qh) h_1 = q(hh_1)$. A ação é livre, pois se $q(hh_1) = qh$ então existe $g \in G$ tal que $q = qg$ e $hh_1 = \phi(g)^{-1} h$. A primeira igualdade implica que $g = 1$. Substituindo isso na segunda igualdade, segue que $hh_1 = h$, isto é, $h_1 = 1$. Além disso, a ação é transitiva nas fibras pois $q : h \in H \to qh$ é uma bijeção entre H e a fibra. Para concluir que essa ação à direita define um fibrado, só falta verificar as condições de trivialização local. Mas, isso segue das trivializações dos fibrados associados em geral.* □

Capítulo

2

Teoria de Controle

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos básicos sobre a Teoria de Controle. Para outros detalhes nos referimos a [6], [12] e [23].

2.1 Sistemas de Controle

Definição 18 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d. Sejam $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{U} | u$ é localmente integrável$\}$. Um* sistema de controle *é uma família de equações diferenciáveis,*

$$x' = X(x, u(t))$$

onde $X : M \times \mathbb{U} \to \mathbb{TM}$ é uma aplicação de classe C^∞ e TM é o espaço tangente a variedade M. M é dito espaço de fase*,* $\mathbb{U}$ conjunto de controle *e $\mathcal{U}$ é dito* conjunto de funções de controle admissíveis.

O conjunto $\mathcal{U}$ será, em geral, assumido como uma das seguintes formas:

$$(i)\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n | u \text{ é mensurável}\}$$

$$(ii)\mathcal{U}_b = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n | u \text{ é limitada e mensurável, com } u(t) \in [0,1]^n\},$$

onde $[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{n \text{ vezes}}$, e

$$(iii)\mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{U} | u \text{ é constante por partes}\}$$

Para todo $x \in M$ e $u \in \mathcal{U}$, assumimos que a equação diferencial $x' = X(x, u(t))$ tem solução única da forma $\varphi(t, x, u)$, onde a solução está definida $\forall t \in \mathbb{R}$. E, ainda $\varphi(0, x, u) = x$, ou seja, os campos de vetores $X_u : M \to TM$ são diferenciáveis e completos.

Um sistema de controle é determinado pela família de campos de vetores $\Sigma = \{X_u | u \in \mathcal{U}\}$ a variedade M e o controle $\mathbb{U}$, formando assim a tripla $(\Sigma, M, \mathbb{U})$. Dessa forma, a teoria de controle pode ser vista como uma teoria de famílias de campos de vetores, o qual generaliza a teoria de Equações Diferenciais, onde consideramos somente um campo vetorial. Observamos que, dado um campo $X_u \in \Sigma$, denotemos o seu fluxo φ_t^u. Observamos agora que dados n campos de vetores X_{u_1}, X_{u_2}, $\ldots, X_{u_n}$ em Σ, definimos a aplicação $\psi : [0,1] \to \Sigma$, dado por $\psi(t) = X_{u_i}$, onde $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, com $t_0 = 0$, $t_n = T$.

Assim, consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \psi(t)(x(t)) \\ x(0) = x \end{cases} \quad \text{para } t \in [0, T]$$

A solução desse PVI é dada por

$$\varphi(t) = \varphi_{t-t_{i-1}}^{u_i} \circ \ldots \circ \varphi_{t_2}^{u_2} \circ \varphi_{t_1}^{u_1}$$

para cada $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, com $t_0 = 0$, $t_n = T$, ou seja, dada pela concatenação de soluções ou trajetórias de n campos X_{u_1}, X_{u_2}, $\ldots, X_{u_n}$ em Σ.

A seguir, mostraremos alguns exemplos de sistemas de controle.

Exemplo 21 *Consideremos a família de equações diferenciais dada por:*

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + u \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$. Em particular, seja $u \in \{-1, 1\}$. Assim, teremos duas equações diferenciaveis.

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x \pm \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

As trajetórias deste sistema podem ser representadas através do retrato de fase 21.

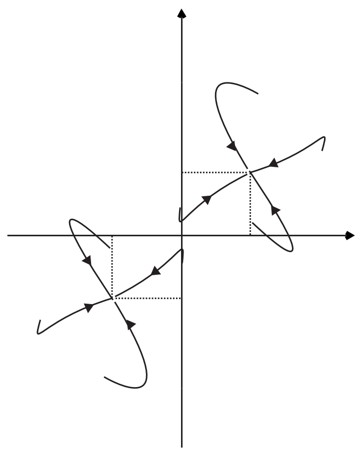

Figura 2.1: Retrato de Fase

Para isto, observe que a solução desta equação é dada por

$$\varphi_t(x, u) = (\varphi_t^1(x_1, u), \varphi_t^2(x_2, u))$$

onde $x = (x_1, x_2)$. No caso em que $u = 1$, temos que

$$\varphi_t^1(x_1, u) = x_1 e^{-t} - 3e^{-t} + 3 \text{ e } \varphi_t^2(x_2, u) = x_2 e^{-2t} - \frac{5}{2} e^{-2t} + \frac{5}{2}$$

Estudando o limite destas soluções e tendo em vista que as singularidades são $(3, \frac{5}{2})$, temos que as soluções tendem a estas singularidades quando $t \to \infty$. Analogamente, podemos fazer a mesma análise no caso $u = -1$, onde as singularidades do sistema são $(-3, -\frac{5}{2})$.

O sistema acima é chamado de um sistema de controle linear. Estes sistemas são dados pela família de equações diferenciais do seguinte tipo:

$$x' = Ax + u(t)B$$

onde $x = x(t) \in \mathbb{R}^d$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ com $A \in \mathbb{M}(d \times d, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}(d \times m, \mathbb{R})$ e $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$.

Exemplo 22 *Considere o sistema de controle dado por*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + u(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

com $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Sabemos que o fluxo do sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

é dado por $\alpha(t) = (x_1 \cos t + x_2 sent, x_2 \cos t - x_1 sent)$ e o do sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

é dado por $\beta(t) = (x_1 e^t, x_2 e^{-t})$. Logo, as trajetórias são dadas pelas concatenações das trajetórias destes dois campos que são respectivamente círculos e hipérboles ambos centrados na origem. Podemos representar este sistema através do retrato de fase 22.

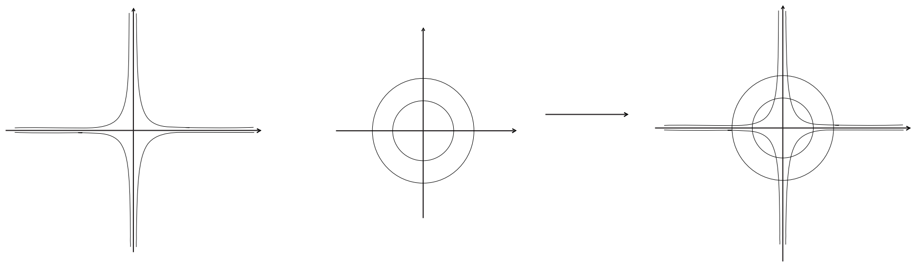

Figura 2.2: Retrato de Fase

Em geral, tais tipos de sistemas de controle são chamados de *bilineares*. Estes sistemas são dados pela seguinte família de equações diferenciais

$$x' = A_0 x + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_i x$$

onde $x = x(t) \in \mathbb{R}^d$, $A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{M}(d \times d, \mathbb{R})$, e $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 19 *Com as notações acima, seja $(\Sigma, M, \mathbb{U})$ um sistema de controle e considere os seguintes conjuntos de difeomorfismos em M*

$$G_\Sigma = \{\varphi_{t_k}^{u_k} \circ \ldots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} | X_{u_i} \in \Sigma, t_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$$

$$S_\Sigma = \{\varphi_{t_k}^{u_k} \circ \ldots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} | X_{u_i} \in \Sigma, t_i \geq 0, i \in \mathbb{N}\}$$

onde cada $\varphi_{t_i}^{u_i}$ é o fluxo de $X_{u_i} \in \Sigma$ e $u_i \in \mathcal{U}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Observação: *Observemos que o conjunto* G_Σ *da Definição 19 tem estrutura de grupo com a operação de composição. De fato, Em* G_Σ essa *operação é associativa, tem elemento neutro, e todo elemento* $\varphi = \varphi_{t_k}^{u_k} \circ \ldots \circ \varphi_{t_1}^{u_1}$ *tem simétrico* $\varphi^{-1} = \varphi_{-t_1}^{u_1} \circ \ldots \circ \varphi_{-t_k}^{u_k}$. *E, ainda como* $S_\Sigma \subset G_\Sigma$ *a operação de composição em* S_Σ *é associativa, e portanto,* S_Σ *é um semigrupo. Observemos ainda que o que difere* S_Σ *de* G_Σ *é que em geral* G_Σ *sempre admite elemento inverso, (uma vez que tem estrutra de grupo) enquanto* S_Σ *não, ou seja, existem sistemas em que temos* $\varphi \in S_\Sigma$, *mas* $\varphi^{-1} \notin S_\Sigma$.

A seguir, definimos as órbitas positivas e negativas de um sistema de controle, ou seja:

Definição 20 *Dado um sistema de controle* $(\Sigma, M, \mathbb{U})$ *e* $x \in M$, *dizemos que o conjunto*

$$G_\Sigma(x) = \{\varphi(x) | \varphi \in G_\Sigma\}$$

é a órbita através do ponto x. *O conjunto*

$$S_\Sigma(x) = \{\varphi(x) | \varphi \in S_\Sigma\}$$

é chamado de órbita positiva *de* x. *E o conjunto*

$$S_\Sigma^-(x) = \{\varphi^{-1}(x) | \varphi \in S_\Sigma\}$$

é chamado de óbita negativa *de* x.

Observação: *A órbita positiva também é dita* conjunto dos pontos acessíveis ou atíngiveis *a partir de* x *em um tempo positivo. E a órbita negativa, recebe o nome de* conjunto dos pontos controláveis *a partir de* x. *De forma alternativa, podemos ver que*

$$G_\Sigma(x) = \{y \in M | y = \varphi(x), \text{ para algum } \varphi \in G_\Sigma\}$$

$$S_\Sigma(x) = \{y \in M | y = \varphi(x), \text{ para algum } \varphi \in S_\Sigma\}$$
$$S_\Sigma^-(x) = \{y \in M | x = \varphi(y), \text{ para algum } \varphi \in S_\Sigma\}.$$

Dados $x, y \in M$, podemos definir uma relação de equivalência em M da seguinte forma:

$$x \backsim y \Leftrightarrow y \in G_\Sigma(x).$$

Proposição 20 *A relação* $\backsim$ *acima é relação de equivalência.*
Demonstração: *De fato, temos que a relação é reflexiva uma vez que* $\varphi_0^u(x) = x$, *e, portanto* $x \in G_\Sigma(x)$. *A relação é simétrica, pois, se* $x \backsim y$ *então* $y \in G_\Sigma(x)$, *ou seja, existe* $\varphi \in G_\Sigma$ *tal que* $\varphi(x) = y$. *Como* G_Σ *é grupo temos que existe* $\psi \in G_\Sigma$ *tal que* $\psi \circ \varphi = id_X$. *E, disto implica que* $x = \psi(y)$, *ou seja,* $y \backsim x$. *E finalmente, a relação é transitiva uma vez que dados* x, y, $z \in M$ *se* $x \backsim y$ *e* $y \backsim z$ *então* $y \in G_\Sigma(x)$ *e* $z \in G_\Sigma(y)$. *Logo, existem* $\varphi \in G_\Sigma(x)$ *e* $\psi \in G_\Sigma(y)$ *tal que* $\varphi(x) = y$ *e* $\psi(y) = z$. *Como* G_Σ *é grupo temos que existe* $\psi^{-1} \in G_\Sigma(y)$, *assim,* $\psi^{-1}(z) = y$. *Segue que* $\psi^{-1}(z) = \varphi(x)$ *o que implica* $\psi \circ \varphi(x) = z$, *ou seja,* $z \in G_\Sigma(x)$ *e, então* $x \backsim z$. $\square$

Observação: *Um resultado conhecido, é que as órbitas $G_\Sigma(x)$ de um sistema de controle $(\Sigma, M, \mathbb{U})$ são subvariedades. Assim, podemos considerar o conjunto $G_\Sigma(x)$ como um espaço de fase. Como S_Σ não é um grupo, a relação definida em M por $x \backsim y$* se *$y \in S_\Sigma(x)$ não é uma relação de equivalência, mas sim uma relação de pré-ordem em M, isto quer dizer que se $y \in S_\Sigma(x)$ então, $S_\Sigma(y) \subset S_\Sigma(x)$. De fato, dado $z \in S_\Sigma(y)$ então existe $\varphi \in S_\Sigma$ tal que $\varphi(y) = z$. Por outro lado, como $y \in S_\Sigma(x)$ existe $\psi \in S_\Sigma$ tal que $\psi(x) = y$. Disto segue que $\varphi(\psi(x)) = z$, com $\varphi \circ \psi \in S_\Sigma$, ou seja, $z \in S_\Sigma(x)$. Observamos ainda que $S_\Sigma(x) \neq S_\Sigma(y)$, uma vez que S_Σ não tem elemento inverso. E ainda, que $S_\Sigma(x) \subset G_\Sigma(x)$, para todo $x \in M$, uma vez que S_Σ é um semigrupo de G_Σ.*

2.2 Acessibilidade e Controlabilidade

Começaremos essa seção definindo o conceito de transitividade.

Definição 21 *Seja $(\Sigma, M, \mathbb{U})$ um sistema de controle. Dizemos que o sistema de controle é* transitivo *se, $G_\Sigma(x) = M$ para algum $x \in M$ (e portanto para todo $x \in M$).*

Exemplo 23 *Seja $\Sigma = \{X, Y\}$ em $\mathbb{R}^2$, com $X = \frac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y} = (0, 1)$ restrito ao semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\}$. Então, $G_\Sigma(x) = \mathbb{R}^2$, uma vez que dado qualquer ponto $y \in \mathbb{R}^2$ sempre existe uma órbita de $G_\Sigma(x)$ que passa por este ponto.*

Dizer que o sistema de controle é transitivo é equivalente à dizer dados quaisquer dois pontos de M, sempre podemos ir de um ponto ao outro através de uma órbita do sistema, ou mais precisamente:

Proposição 21 *Com as notações acima, o sistema de controle $(\Sigma, M, \mathbb{U})$ e transitivo se, e somente se, dados $z, y \in M$, existe $\varphi \in G_\Sigma(x)$, tal que $\varphi(x) = y$.*
Demonstração: *De fato, se $G_\Sigma(x) = M$, então dados y, $z \in M$ existem φ_1, $\varphi_2 \in G_\Sigma$ tal que $\varphi_1(x) = y$ e $\varphi_2(x) = z$. Como G_Σ é grupo existem φ_1^{-1}, $\varphi_2^{-1} \in G_\Sigma$, logo podemos dizer que $\varphi_1^{-1}(y) = x$ e $\varphi_2^{-1}(z) = x \Rightarrow \varphi_1^{-1}(y) = \varphi_2^{-1}(z)$, segue daí que $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(y)) = z \Rightarrow \varphi(y) = z$. Onde $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in G_\Sigma$.* □

Definição 22 *O sistema Σ é* acessível a partir de *$x \in M$ se,* $\mathrm{int}(S_\Sigma x) \neq \emptyset$. *E, Σ é* acessível *se o for a partir de todo $x \in M$.*

Observação: *O exemplo 23 mostra um sistema Σ que é transitivo, mas não é acessível uma vez que dado qualquer ponto no semi-plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ as trajetórias são retas em $\mathbb{R}^2$.*
Observação: *Notemos que se Σ é acessível a partir de x* e *M* é conexo, *então Σ é transitivo. De fato, Como Σ é acessível a partir de x, então o* $\mathrm{int}(G_\Sigma(x)) \neq \emptyset$. Por outro lado, como $\mathrm{int}(S_\Sigma(x)) \subset \mathrm{int}(G_\Sigma(x))$, temos que $\dim G_\Sigma(x) = \dim M$, *já que neste caso, temos que $G_\Sigma(x)$ é uma subvariedade aberta de M. Logo, Σ é transitivo, isto é, $G_\Sigma(x) = M$.*

Definiremos agora o que chamamos de sistema controlável e aproximadamente controlável.

Definição 23 *(i) O sistema Σ é dito* controlável a partir de *$x \in M$ se $S_\Sigma(x) = M$. E, Σ é* controlável *se, o for a partir de todo $x \in M$.*

(ii) O sistema Σ é dito aproximadamente controlável a partir de *$x \in M$ se,* $\mathrm{fe}(S_\Sigma(x)) = M$. *E, Σ é* aproximadamente controlável *se o for a partir de todo $x \in M$.*

Observação: *Observemos que se Σ é controlável a partir de x então, Σ é transitivo. De fato, temos que $S_\Sigma(x) \subset G_\Sigma(x) \subset M$. Como Σ é controlável a partir de x segue que $S_\Sigma(x) = M$* e, então, *$G_\Sigma(x) = M$. E, observemos também que se Σ é controlável a partir de x então Σ é acessível, pois se $S_\Sigma(x) = M$ então, $\mathrm{int}(S_\Sigma(x)) \neq \varnothing$. A recíproca desse fato nem sempre é verdadeira, ou seja, acessibilidade de Σ não implica controlabilidade de Σ a partir de um ponto, como podemos ver no seguinte exemplo.*

Exemplo 24 *Seja $\Sigma = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ um sistema definido em $\mathbb{R}^2$. Temos que $S_\Sigma(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0\}$, e portanto, $\mathrm{int}(S_\Sigma(x)) \neq \varnothing$ e $S_\Sigma(0,0) \neq \mathbb{R}^2$. Disto segue que, Σ é acessível a partir de $(0,0)$ e transitivo, uma vez que podemos alcançar qualquer ponto do espaço de fase M através de uma órbita de G_Σ, mas não é controlável a partir de $(0,0)$. Como podemos ver no retrato de fase 2.3.*

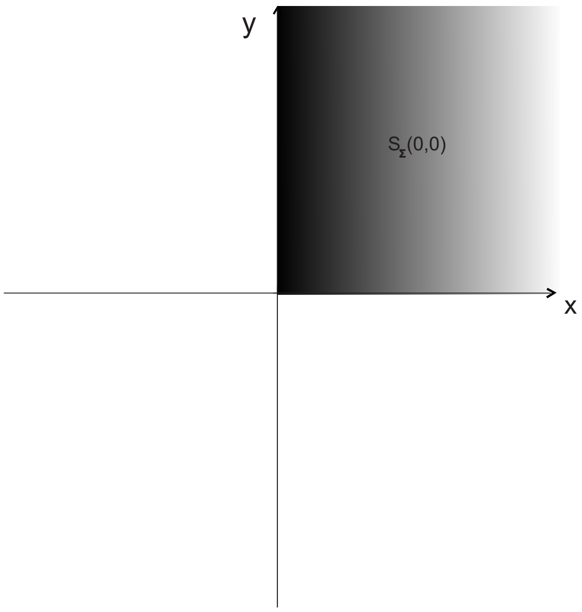

Figura 2.3: Retrato de Fase

Notemos agora que se Σ é controlável a partir de x então, Σ é aproximadamente controlável a partir de x. De fato, como M é fechado, segue que $M = S_\Sigma(x) = \mathrm{fe}(S_\Sigma(x))$. Em geral, a recíproca não vale, como pode ser visto em [23]. O resultado a seguir nos mostra que sob certas hipóteses, controlabilidade aproximada implica em controlabilidade, ou seja:

Proposição 22 *Se Σ é aproximadamente controlável e $-\Sigma$ é acessível então Σ é controlável.*

Demonstração: *Sejam x, $y \in M$. Como $S_\Sigma(x)$ é denso em M, segue que*

$$S_{-\Sigma}(y) \cap S_\Sigma(x) \supset \mathrm{int}(S_{-\Sigma}(y)) \cap S_\Sigma(x) \neq \varnothing.$$

Logo, se $z \in S_{-\Sigma}(y) \cap S_\Sigma(x)$ então, $z = \varphi_1^{-1}(y) = \varphi_2(x)$ com φ_1^{-1}, $\varphi_2 \in S_\Sigma$. Daí, segue que $y = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(x)$ e $y \in S_\Sigma(x)$, concluindo a demonstração. $\square$

Capítulo

3

Conjuntos de Controle

Utilizando os conceitos dos capítulos anteriores, neste capítulo, estudaremos algumas propriedades referentes aos chamados conjuntos de controle para ação de semigrupos. Inicialmente, definiremos estes conjuntos para um semigrupo de controle e, posteriormente, para ações de semigrupos, em que apresentamos exemplos e, bem como, algumas de suas propriedades. Para outros detalhes damos como referÃªncia [2], [6], [20] e [23].

3.1 Conjuntos de Controle para Sistemas de Controle

Comecemos esta seção definindo o que chamamos de Conjuntos de Controle para Sistemas de Controle.

Definição 24 *Dado um sistema de controle* $(\mathcal{U}, M, \Sigma)$, *dizemos que um conjunto* $D \subset M$ *é um* conjunto de controle para S_Σ *se,*

(*i*) $\forall x \in D$, *existe uma trajetória* $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tal que* $\varphi \in S_\Sigma$, $\varphi(0) = x$ *e existe uma função de controle* $u \in U$ *tal que* $\varphi(t, x, u) \in D$, $\forall t \geq 0$.

(*ii*)$\forall x \in D$, $D \subset \mathrm{fe}(S_\Sigma(x))$.

(*iii*)D *é um conjunto maximal, ou seja, se existe* $D' \subset M$ *tal que* D' *satisfaz* (*i*) *e* (*ii*) *com* $D \subset D'$ *então,* $D = D'$.

Definição 25 *Um conjunto de controle* $C \subset M$ *é chamado de* conjunto de controle invariante para S_Σ *se,* $\mathrm{fe}(C) = \mathrm{fe}(S_\Sigma(x))$, $\forall x \in C$.

Exemplo 25 *Consideremos* $M = \mathbb{R}^2$ *e o sistema*

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & u(t) \\ -u(t) & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

com $u(t) \in U \subset \mathbb{R}$, $U \neq \{0\}$. *Então, o conjunto das circunferências com centro na origem são conjuntos de controle. De fato, seja* D *tal circunferência. Então:*

(*i*) *Dado* $x \in D$, *temos que* x *pertence a uma órbita periódica* $\varphi(t) = (r \sin \sigma(t), r \cos \sigma(t))$, *onde* $\sigma(t) = \int u(t)\, dt$ *e* r *é a distância de* x *ao ponto de origem, gerada pela solução do sistema. Logo, dado* $\varphi \in S_\Sigma$ *então* $\varphi(t, x, u) \in D$, $\forall t \geq 0$.

(*ii*) *Dado* $x \in D$, *temos que* $\varphi(t, x, u) \in D$, $\forall t \geq 0$. *Em particular,* $\varphi(0, x, u) \in S_\Sigma(x)$. *Logo,* $x \in \mathrm{fe}(S_\Sigma(x))$, *e portanto* $D \subset \mathrm{fe}(S_\Sigma(x))$.

(*iii*) *Se existe* $D' \subset \mathbb{R}^2$ *satisfazendo* (*i*) *e* (*ii*) *tal que* $D \subset D'$, *mostraremos que* $D = D'$. *De fato, seja* $x \in D'$. *Então,* $D' \subset \mathrm{fe}(S_\Sigma(x))$, *em particular,* $\forall x \in D$, $x \in D'$, *e* *então, $D' \subset \mathrm{fe}\,(S_\Sigma\,(x)) = D$. E, portanto, $D = D'$. Assim, o conjunto D é um conjunto de controle.*

O sistema acima pode ser representado pelo retrato de fase 3.1.

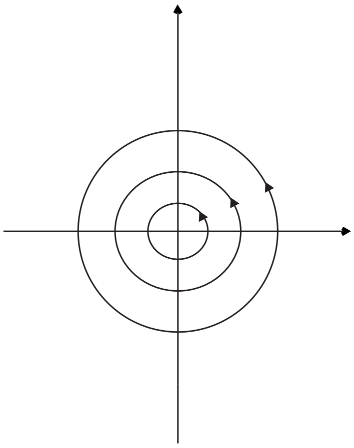

Figura 3.1: Retrato de Fase

Observamos que o conjunto D acima é um conjunto de controle invariante, uma vez que se $D \subset \mathrm{fe}(S_\Sigma\,(x))$ então, $\mathrm{fe}(D) \subset \mathrm{fe}(S_\Sigma\,(x))$. Agora, dado $y \in \mathrm{fe}(S_\Sigma\,(x))$ existe uma sequência $\varphi(t, x_n, u)$, tal que $\varphi(t, x_n, u) \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow \infty$. Como as trajetórias são fechadas, segue que $y \in D$. E, portanto, concluímos que D é um conjunto de controle invariante.

Proposição 23 *Sejam D_1 e D_2 conjuntos de controle para S_Σ. Então, $D_1 = D_2$ ou $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.*

Demonstração: Suponha que $x \in D_1 \cap D_2$ e tome $y \in D_1$ e $z \in D_2$. Então, $x \in \mathrm{fe}\,(S_\Sigma y)$ e $z \in \mathrm{fe}(S_\Sigma x)$. Isso significa que existem sequências $g_n, h_n \in S_\Sigma$ tais que $g_n y \longrightarrow x$ e $h_n x \longrightarrow z$ quando $n \longrightarrow \infty$. Considere a sequência das composições $h_n g_n \in S_\Sigma$. Pela continuidade dos elementos de S_Σ, $h_n g_n \longrightarrow z$, garantindo que $z \in \mathrm{fe}(S_\Sigma y)$. De maneira análoga, $y \in \mathrm{fe}(S_\Sigma z)$. Portanto, se $D = D_1 \cup D_2$ então, $\mathrm{fe}(S_\Sigma x) = \mathrm{fe}\,(D)$ para todo $x \in D$. Mas, D_1 e D_2 são maximais com essa propriedade e, assim $D_1 = D_2$, concluindo a demonstração. □

Mostraremos agora um resultado que diz que o fecho de um conjunto controle invariante é invariante por órbitas positivas, ou seja:

Proposição 24 *Seja C um conjunto de controle invariante para S_Σ. Então, $S_\Sigma x \subset \mathrm{fe}\,(C)$, para todo $x \in \mathrm{fe}\,(C)$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $S_\Sigma x$ não está contido em $\mathrm{fe}\,(C)$ para algum $x \in \mathrm{fe}\,(C)$. Então, existem $y \in S_\Sigma x$ e uma vizinhança $y \in U$ tal que $U \cap \mathrm{fe}\,(C) = \emptyset$. Seja $\phi \in S_\Sigma$ tal que $y = \phi(x)$. Então, $\phi(U) \cap C \neq \emptyset$. Logo, existe $z \in C$ tal que $\phi(z) \in U$ o que implica que $\phi(z) \in \mathrm{fe}\,(C)$ contradizendo a hipótese de que C é um conjunto de controle invariante. □

3.2 Conjuntos de Controle para Ações de Semigrupos

Motivados pelos os conceitos acima, definiremos agora o que chamamos de conjuntos de controle para ações de semigrupos. A seguir, seja S um semigrupo agindo num espaço topológico de Hausdorff M.

Definição 26 *Um conjunto $D \subset M$ é dito um* conjunto de controle para *S em M se satisfaz as seguintes condições:*
(i) $\operatorname{int}(D) \neq \emptyset$
(ii)$\forall x \in D$, $D \subset \operatorname{fe}(Sx)$.
(iii)D é um conjunto maximal, ou seja, se existe $D' \subset M$ tal que D' satisfaz (i) e (ii) com $D \subset D'$ então $D = D'$.

Definição 27 *Um conjunto de controle $D \subset M$ é chamado de* conjunto de controle invariante *se satisfaz* $\operatorname{fe}(D) = \operatorname{fe}(Sx)$, $\forall x \in D$.

Exemplo 26 *Seja $G = (\mathbb{R}, +)$ e tomemos $S = \mathbb{R}^+$, o semigrupo dos reais positivos. Consideremos a ação*

$$\phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por $\phi(x, y) = x + y$. Temos que não existe conjunto de controle para S em $\mathbb{R}$. De fato, suponha que D seja um conjunto de controle para S em $\mathbb{R}$. Uma vez que $\operatorname{int}(D) \neq \varnothing$, *e como estamos na reta, existe um intervalo aberto e limitado totalmente contido em D. Logo, seja y o ponto médio desse intervalo. Então tomando qualquer x_0 desse intervalo tal que $x_0 > y$, segue que*

$$\operatorname{fe}(Sx_0) = \{z \in \mathbb{R} | z \geq x_0\}$$

Assim, $D \subset \operatorname{fe}(Sx_0)$ para todo $x \in D$, o que é um absurdo, uma vez que existem elementos menores que y que estão em D e não pertencem a órbita positiva de x_0. E, portanto, não existem conjuntos de controle para S em $\mathbb{R}$.

A seguir, mostraremos alguns resultados importantes que serão utilizados durante o texto, que permitem entender algumas propriedades relacionadas aos conjuntos de controle.

Proposição 25 *Sejam $a, b, c \in M$. Se $a \in \operatorname{fe}(Sb)$ e $b \in \operatorname{fe}(Sc)$ então, $a \in \operatorname{fe}(Sc)$.*
Demonstração: *Uma vez que $a \in \operatorname{fe}(Sb)$, existe uma sequência, digamos $(g_n) \subset S$, tal que $g_n b \to a$, quando $n \to \infty$. Analogamente, podemos definir $(h_n) \subset S$ tal que $h_n c \to b$, quando $n \to \infty$. Então, para toda vizinhança V de a, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $g_{n_0} b \in V$. Como a ação é contínua e $h_n c \to b$, temos que $g_{n_0} h_n c \to g_{n_0} b$. Logo, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_0} h_{n_1} c \in V$. E, portanto, $a \in \operatorname{fe}(Sc)$.* □

Proposição 26 *Sejam D_1 e D_2 conjuntos de controle. Então, $D_1 = D_2$ ou $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.*
Demonstração: *Suponha que $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ e tome $x \in D_1 \cap D_2$. Uma vez que* $\operatorname{int}(D_1) \neq \varnothing$, *pois D_1 é conjunto de controle, temos que* $\operatorname{int}(D_1 \cup D_2) \neq \varnothing$. *Considere $a, b \in D_1 \cup D_2$ tal que $a \in \operatorname{fe}(Sx)$ e $x \in \operatorname{fe}(Sb)$. Logo, segue que da Proposição 25 que $a \in \operatorname{fe}(Sb)$. Isto implica que $D_1 \cup D_2 \subset \operatorname{fe}(Sb)$, para todo $b \in D_1 \cup D_2$. Portanto, $D_1 \cup D_2$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 26 mas, sabemos que $D_1 \subset D_1 \cup D_2$, e pela maximilidade de D_1 temos que $D_1 = D_1 \cup D_2$, ou seja, $D_2 \subset D_1$. Pelo mesmo argumento, segue que $D_1 \subset D_2$. E, portanto, $D_1 = D_2$.* □

Proposição 27 *Todo conjunto $D \subset M$ que satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 26 está contido em um conjunto de controle.*
Demonstração: *Considere a família de conjuntos*

$$\mathcal{A} = \{C \subset M | D \subset C \text{ e } C \text{ satisfaz (i) e (ii) da Definição 26}\}$$

ordenado pela inclusão. Como $D \in \mathcal{A}$, segue que $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Consideramos em $\mathcal{A}$ uma cadeia arbitrária $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$, e seja

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha,$$

observemos que $\operatorname{int}(U) \neq \varnothing$, pois $\operatorname{int}(C_\alpha) \neq \varnothing$, para todo $C_\alpha \in \mathcal{A}$. Tomando $x, y \in U$, existem $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ tal que $x \in C_{\alpha_1}$ e $y \in C_{\alpha_2}$. Como os conjuntos são ordenados pela inclusão temos que $C_{\alpha_1} \subset C_{\alpha_2}$ ou $C_{\alpha_2} \subset C_{\alpha_1}$, então segue que $y \in \operatorname{fe}(Sx)$. Como x, y são arbitrários, temos que $U \subset \operatorname{fe}(Sx)$, para todo $x \in U$. Logo, pela definição de U e uma vez que este satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 26, temos que $U \in \mathcal{A}$. Assim, todo conjunto totalmente ordenado de $\mathcal{A}$ é limitado superiormente. Pelo lema de Zorn, existem elementos maximais em $\mathcal{A}$. Tome K sendo um destes conjuntos maximais. Assim, temos que $D \subset K$ e K é o conjunto de controle procurado. □

Proposição 28 *Seja $C \subset M$ é um conjunto fechado não vazio que satistaz a condição $\operatorname{fe}(C) = \operatorname{fe}(Sx)$, para todo $x \in M$. Então, C é um conjunto de controle invariante para S.*
Demonstração: *É necessário apenas mostrar que C é maximal. Suponha que exista um conjunto $D \subset M$ satisfazendo a condição acima, com $C \subset D$. Tomando $x \in C$, temos que $x \in D$ e, assim,*

$$C \subset D \subset \operatorname{fe}(Sx) = \operatorname{fe}(C) = C.$$

Portanto, $D = C$. □

Proposição 29 *Se $C = \bigcap_{a \in M} \operatorname{fe}(Sa) \neq \varnothing$ então, C é o único conjunto de controle invariante para S em M.*
Demonstração: *Inicialmente, mostremos que C é conjunto de controle invariante. Note que $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing$, e, ainda que C é fechado, uma vez que a intersecção de conjuntos fechados é fechado. Logo, pela Proposição 28 basta mostrar que $\operatorname{fe}(Sy) = \operatorname{fe}(C)$, para todo $y \in C$. Sendo assim, tome $y \in C = \bigcap_{x \in M} \operatorname{fe}(Sx)$. Segue que $y \in \operatorname{fe}(Sx)$, para todo $x \in C$. Agora, seja $y \in \operatorname{fe}(Sw)$ para algum $w \in C$. Como $w \in Sx$ para todo $x \in M$ segue que $\operatorname{fe}(Sw) \subset \operatorname{fe}(Sx)$ para todo $x \in M$, o que implica que $y \in \operatorname{fe}(Sx)$ para todo $x \in M$. E, portanto, $y \in C = \bigcap_{x \in M} \operatorname{fe}(Sx)$. Agora, sejam C_1 e C_2 dois conjuntos de controle invariantes para S em M. Então, para todo $x \in C_1$, temos que $\operatorname{fe}(Sx) = \operatorname{fe}(C_1)$. Analogamente, para todo $y \in C_2$ temos que $\operatorname{fe}(Sy) = \operatorname{fe}(C_2)$. Então, $\operatorname{fe}(Sx) \cap \operatorname{fe}(Sy) \neq \varnothing$ e isto implica que $\operatorname{fe}(C_1) \cap \operatorname{fe}(C_2) \neq \varnothing$. Agora, como $\operatorname{int}(Sy) \neq \varnothing$ então, C_1 e C_2 são fechados e, portanto, $C_1 \cap C_2$ diferente do vazio. Então, pela Proposição 26, $C_1 = C_2$, concluindo a demonstração.* □

Proposição 30 *Se S é acessível, então todo conjunto de controle invariante para S é fechado. Além disso, se C é um desses conjuntos então, $\operatorname{int}(C) \neq \varnothing$ e $\operatorname{fe}(\operatorname{int}(C)) = C$.*
Demonstração: *Sejam C um conjunto de controle invariante e $x \in \operatorname{fe}(C)$. Tomando $y \in C$, temos que $\operatorname{fe}(Sy) = \operatorname{fe}(C)$, então $x \in \operatorname{fe}(Sy)$. Sabemos que $S(\operatorname{fe}(Sy)) \subset \operatorname{fe}(Sy)$,*

então $Sx \subset \mathrm{fe}\,(Sy) = \mathrm{fe}\,(C)$. *Como* $\mathrm{int}\,(Sx) \neq \varnothing$, *temos que* Sx *possui pontos interiores, o que implica que* Sx *não pode estar contido apenas na fronteira de* C. *E, assim,* $Sx \cap C \neq \varnothing$. *Tomemos* $x' \in Sx \cap C$. *Temos que*

$$\mathrm{fe}\,(C) = \mathrm{fe}\,(Sx') \subset \mathrm{fe}\,(Sx) \subset \mathrm{fe}\,(C)\,.$$

Assim, $\mathrm{fe}\,(Sx) = \mathrm{fe}\,(C) = \mathrm{fe}\,(\mathrm{fe}\,(C))$, *para todo* $x \in \mathrm{fe}\,(C)$, *ou seja,* $\mathrm{fe}\,(C) = \mathrm{fe}\,(Sx)$ *e ainda,* $C \subset \mathrm{fe}\,(C)$. *Como* C *é maximal, com relação a condição dos conjuntos de controle invariantes, temos que* $C = \mathrm{fe}\,(C)$, *ou seja,* C *é fechado. E, ainda temos que* $Sx \subset \mathrm{fe}\,(C) = C$, *e como* $\mathrm{int}\,(Sx) \neq \varnothing$ *é um aberto em* C, *segue que* $\mathrm{int}\,(C) \neq \varnothing$. *Mostremos que o* $\mathrm{int}\,(C)$ *é denso em* C. *Como* C *é fechado, segue que* $\mathrm{fe}\,(\mathrm{int}\,(C)) \subset \mathrm{fe}\,(C) = C$. *Para a inclusão contrária, tomemos* $x \in C$. *Como* $\mathrm{fe}\,(Sx) = \mathrm{fe}\,(C) = C$, *temos que* $Sx \subset C$. *Disto segue que* $\mathrm{int}\,(Sx) \subset Sx \subset C$ *e, então,* $\mathrm{int}\,(Sx)$ *é um aberto não vazio contido em* C. *Assim, dado* $sx \in \mathrm{int}\,(Sx)$, *temos que* $\mathrm{int}\,(Sx)$ *é um aberto contendo* sx *e contido em* C. *Assim, temos que* $sx \in \mathrm{int}\,(C)$, *e, portanto,*

$$\mathrm{int}\,(Sx) \subset \mathrm{int}\,(C)\,.$$

Por outro lado, sabemos que o $\mathrm{int}\,(Sx)$ *é denso em* Sx *(para mais detalhes, ver [6]) e* Sx *é denso em* C, *pela definição de conjunto de controle invariante. Assim,* $\mathrm{int}\,(Sx)$ *é denso em* C. *Portanto,*

$$\mathrm{fe}\,(C) = C = \mathrm{fe}\,(\mathrm{int}\,(Sx)) \subset \mathrm{fe}\,(\mathrm{int}\,(C))$$

concluindo assim a demonstração. □

Exemplo 27 *Considere* $G = Sl\,(2,\mathbb{R})$ *e o semigrupo* $S = Sl^{+}\,(2,\mathbb{R})$. *Definimos a seguinte ação sobre* $\mathbb{RP}^1$

$$\phi : G \times \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$$

dada por, $\phi\,(g,[x]) = g\,[x] = [gx]$. *Temos que o conjunto*

$$C = \left\{[(x_1,x_2)] \in \mathbb{RP}^1 | x_1, x_2 \geq 0\right\}$$

é um conjunto de controle invariante para S *em* $\mathbb{RP}^1$. *De fato, sejam* $x = (x_1,x_2)$ *e* $y = (y_1,y_2)$ *elementos de* $\mathbb{R}^2$, *tal que* $[x]\,,[y] \in \mathrm{int}\,(C)$, *e assim,* $x_i, y_i \geq 0$, *para* $i = 1,2$. *Logo,*

$$g = \sqrt{\frac{x_1x_2}{y_1y_2}} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} \end{pmatrix} \in S$$

e ainda,

$$\begin{aligned} g\,[x] &= \left[\sqrt{\frac{x_1x_2}{y_1y_2}} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \\ \left[\sqrt{\frac{x_1x_2}{y_1y_2}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] &= \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Isto mostra que $g\,[x] = [y]$ *e* $[y] \in \mathrm{int}\,(C)$, *e consequentemente* $\mathrm{int}\,(C) \subset S\,[x]$ *para todo* $[x] \in \mathrm{int}\,(C)$. *Tomemos agora* $[x] \in C - \mathrm{int}\,(C)$. *Segue que,* $[x] = [(x_1,x_2)]$ *deve ter ao menos um coordenada nula e, portanto, se* $g \in S$ *tal que* g *tenha todas as entradas positivas, temos que* $g\,[x] \in \mathrm{int}\,(C)$. *Assim, garantimos que* $\mathrm{int}\,(C) \subset S\,[x]$, *para todo* $[x] \in C$. *Desse fato temos que,* $\mathrm{fe}\,(\mathrm{int}\,(C)) = \mathrm{fe}\,(C) \subset \mathrm{fe}\,(Sx)$, *para todo* $x \in C$. *Para a inclusão contrária, seja* $g \in S$ *e* $[x] \in C$, *segue que* $g\,[x] \in C$, *uma vez que todas as entradas de* g *são não negativas. Assim,* $S\,[x] \subset C$, *para todo* $[x] \in C$, *e consequentemente,* $\mathrm{fe}\,(S\,[x]) \subset \mathrm{fe}\,(C)$, *para todo* $[x] \in C$. *Logo,* $\mathrm{fe}\,(S\,[x]) = \mathrm{fe}\,(C)$, *para todo* $[x] \in C$. *Como* C *é fechado, segue da Proposição 28 que* C *é um conjunto de controle invariante.*

Definiremos a seguir e apresentaremos algumas propriedades sobre o que chamamos de conjunto de controle efetivo.

Definição 28 *Seja D um conjunto de controle para S e considere o seguinte conjunto*

$$D_0 = \left\{x \in D | x \in \mathrm{int}(Sx) \cap \mathrm{int}(S^{-1}x)\right\}.$$

Dizemos que D é um conjunto de controle efetivo*, se $D_0 \neq \emptyset$.*

Dizemos que D_0 é o *conjunto de transitividade* de D.

Proposição 31 *Considere D um conjunto de controle efetivo. Então*

(i) $D \subset \mathrm{int}(S^{-1}x)$, para todo $x \in D_0$.
(ii) $D_0 = \mathrm{int}(S^{-1}x) \cap \mathrm{int}(Sx)$, para todo $x \in D_0$.
(iii) Para todo $x, y \in D_0$, existe $g \in S$ com $gx = y$.
(iv) D_0 é denso em D.
(v) D_0 é S-invariante em D, no sentido que $hx \in D_0$ se $h \in S$, $x \in D_0$ e $hx \in D$.

Demonstração: (i) Tome $y \in D$ e $x \in D_0$. Como $x \in D$ e $x \in \mathrm{int}(S^{-1}x)$, segue que $D \cap \mathrm{int}\left(S^{-1}x\right) \neq \varnothing$. Uma vez que $y \in D$ e $\mathrm{int}\left(S^{-1}x\right)$ é uma vizinhança de x, temos pelo item (ii) Definição 26 que existe $g \in S$ tal que $gy \in \mathrm{int}(S^{-1})$. Então, $y \in g^{-1}\mathrm{int}(S^{-1}x) \subset \mathrm{int}(S^{-1}x)$.

(ii) Suponha que $x \in D_0$ e $y \in \mathrm{int}(Sx) \cap \mathrm{int}(S^{-1}x)$. Então, $x \in Sy$ e $x \in S^{-1}y$. Segue que $Sx \subset Sy$ e $S^{-1}x \subset Sy$, e assim, $\mathrm{int}(Sx) \subset \mathrm{int}(Sy)$ e $\mathrm{int}(S^{-1}x) \subset \mathrm{int}(S^{-1}y)$. Logo,

$$y \in \mathrm{int}(Sx) \cap \mathrm{int}(S^{-1}x) \subset \mathrm{int}(Sy) \cap \mathrm{int}(S^{-1}y).$$

E, portanto, $y \in D_0$. Por outro lado, se $x, y \in D_0$ temos por (i) que $y \in \mathrm{int}(S^{-1}x)$ e $x \in \mathrm{int}(S^{-1}y)$. Então, existe $g \in S$ tal que $gx = y$. Então, segue que $x \in \mathrm{int}(Sx)$ e assim, $y = gx \in g\mathrm{int}(Sx) \subset \mathrm{int}(Sx)$. Portanto, $y \in \mathrm{int}(Sx) \cap \mathrm{int}(S^{-1}x)$.

(iii) Claramente se $x \in D_0$ então, $x \in \mathrm{int}\left(Sx\right) \cap \mathrm{int}\left(S^{-1}x\right)$. Assim, $D_0 \subset \mathrm{int}\left(Sx\right) \cap \mathrm{int}\left(S^{-1}x\right)$. Por outro lado, dado $x \in \mathrm{int}\left(Sx\right) \cap \mathrm{int}\left(S^{-1}x\right)$, temos por hipótese que $x \in D_0$. Logo, segue que $D_0 = \mathrm{int}\left(Sx\right) \cap \mathrm{int}\left(S^{-1}x\right)$.

(iv) Tome $x \in D_0$. Como o $\mathrm{int}(Sx)$ e $\mathrm{int}(S^{-1}x)$ são abertos temos,

$$\mathrm{fe}(D_0) = \mathrm{fe}(\mathrm{int}(Sx)) \cap \mathrm{int}(S^{-1}x)$$

Agora, por (i) temos $D \subset \mathrm{int}(S^{-1}x)$. Por outro lado,

$$D \subset \mathrm{fe}(Sx) \subset \mathrm{fe}(S\mathrm{int}(Sx)) \subset \mathrm{fe}(\mathrm{int}(Sx))$$

Consequentemente $D \subset \mathrm{fe}(D_0)$ e, portanto, D é denso em D_0.

(v) Tome $h \in S$ e $x \in D_0$, e suponha que $hx \in D$. Como $x \in \mathrm{int}(Sx)$ temos que $hx \in \mathrm{int}(Sx)$. Por (i) temos que, $hx \in \mathrm{int}(S^{-1}x)$. Logo, $hx \in D_0$. □

Em particular se M é um espaço homogêneo e S é um subsemigrupo de um grupo de Lie G com o interior não vazio, definimos $C_0 = \{x \in D | x \in (\mathrm{int}S)\, x\}$. Existem resultados parecidos com o descrito acima que podem ser encontrados mais detalhadamentes em [20].

Exemplo 28 *Considerando novamente a ação do Exemplo 27 e o conjunto de controle $C = \left\{[(x_1, x_2)] \in \mathbb{RP}^1 | x_1, x_2 \geq 0\right\}$. O conjunto de transitividade de C será dado por $C_0 = Sx$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, como $G = Sl\left(2, \mathbb{R}\right)$ é um grupo de Lie e o espaço projetivo*

$\mathbb{RP}^1$ pode ser visto como o espaço homogêneo $\frac{\mathbb{S}^1}{\sim}$, onde $\sim$ é a relação de equivalência definida por,

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Assim, como C_0 é denso em C, tomemos $[x] \in C_0 \cap \operatorname{int}(C)$. Então, dado $g \in S$ temos

$$C_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \right\} = \{[ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2]\} = \operatorname{int}(C).$$

E, portanto, $C_0 = \operatorname{int}(C)$.

Proposição 32 *Seja $x \in M$ tal que*

$$x \in \operatorname{int}(Sx) \cap \operatorname{int}\left(S^{-1}x\right).$$

Então, existe um único conjunto de controle D tal que $x \in D_0$, que é efetivo.
Demonstração: *É fácil ver que o subconjunto $\operatorname{int}(Sx) \cap \operatorname{int}(S^{-1}x)$ satisfaz as condições i) e ii) da Definição 26. Se aplicarmos o Lema de Zorn, para os conjuntos que satisfazem essa propriedade e contém x, segue que existe um elemento maximal, digamos D, que é um conjunto de controle. Este conjunto de controle contém x em seu conjunto de transitividade. Quanto a unicidade, segue da Proposição 26.* □

Capítulo

4

Ações de Semigrupos em Fibrados e Conjuntos de Controle

Neste capítulo, estudaremos o comportamento dos conjuntos de controle nos fibrados principais e nos seus fibrados associados. Sob algumas condições, mostramos que a projeção de um conjunto de controle é um conjunto de controle, e bem como, a imagem inversa de um conjunto de controle é um conjunto de controle. Mostraremos também que a intersecção do conjunto de transitividade do conjunto de controle no espaço total do fibrado associado com uma fibra é o conjunto de transitividade de algum conjunto controle na fibra. Sob certas condições, mostraremos que o número de conjuntos de controle invariantes para um semigrupo agindo nas fibras de um fibrado é constante. Para outros detalhes, damos como referência [2].

4.1 Acessibilidade

Inicialmente vamos estudar a acessibilidade para ações de semigrupos agindo em fibrados principais e nos seus fibrados associados. Como no capítulo 1, seção 1.5, consideremos $Q(M,G)$ ou simplesmente, Q um fibrado principal, onde Q é o espaço total, M é o espaço base e G é o grupo estrutural, e $\pi : Q \to M$ a projeção canônica. Denotaremos por $E(M,G,F,Q)$, ou simplesmente por E, o fibrado associado ao fibrado principal Q com fibra típica F. Assumiremos que os espaços envolvidos Q, M, e F são variedades diferenciáveis e G um grupo de Lie. A ação á direita de G em Q será denotada por qa, com $q \in Q$, $a \in G$. Assim, seja S_Q um semigrupo de difeomorfismos de Q que comuta com a ação à direita, ou seja, se $\phi_Q \in S_Q$ então,

$$\phi_Q(qa) = \phi_Q(q)\,a, \ \forall a \in G,$$

onde assumiremos que $\phi_Q : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(V)$, com U e V abertos de M.

Assim, segue que S_Q induz um semigrupo S_M de difeomorfismos em M, através de $\phi_Q \in S_Q$, dado por

$$\phi_M(\pi(q)) = \pi(\phi_Q(q)).$$

De modo análogo, $\phi_Q \in S_Q$ induz um difeomorfismo local no fibrado associado, através da aplicação

$$v \in F \to qv \in E_x, \ \text{com } x = \pi(q).$$

Denotaremos esse difeomorfismo por $\phi_E \in S_E$, e assim,

$$\phi_E(qv) = \phi_Q(q)\,v.$$

O semigrupo de difeomorfismos agindo em E será denotado por S_E.

Pelas afirmações acima, a acessibilidade de S_Q implica que S_M é acessível, como mostramos abaixo.

Proposição 33 *Seja S_Q um conjunto de difeomorfismos em Q. Se S_Q é acessível em Q então, S_M é acessível em M.*

Demonstração: *Mostraremos que* $\text{int}\,(S_M y) \neq \varnothing$, *para todo* $y \in M$. *Como* S_Q *é acessível, temos que* $\text{int}\,(S_Q x) \neq \varnothing$, *para todo* $x \in Q$. *Logo, sabendo que a projeção é uma aplicação aberta e* $\phi_M(\pi(q)) = \pi(\phi_Q(q))$, *para todo* $\phi_M \in S_M$ *e* $\phi_Q \in S_Q$, *segue que*

$$\pi(\text{int}\,(S_Q x)) = \text{int}\,(\pi(S_Q x)) = \text{int}\,(S_M \pi(x)) = \text{int}\,(S_M y)$$

com $y = \pi(x)$. *E, portanto,* $\text{int}\,(S_M y) \neq \varnothing$. □

Definimos a seguir o conceito de acessibilidade sobre um conjunto de controle.

Definição 29 *Seja D um conjunto de controle efetivo para S_M. O semigrupo S_Q é dito* acessível *sobre D, se para todo $q \in \pi^{-1}(D_0)$*

$$\text{int}\,(S_Q q) \cap \pi^{-1}(D_0) \neq \varnothing.$$

Analogamente, S_E é acessível *sobre D, se para todo $u \in \pi^{-1}(D_0)$*

$$\text{int}\,(S_E u) \cap \pi^{-1}(D_0) \neq \varnothing.$$

Observemos que fixando $q \in Q$, a intersecção $S_Q(q) \cap Q_x$, com $\pi(q) = x$, pode ser vista como o seguinte subconjunto de G

$$S_q = \{a \in G | \exists \phi \in S_Q,\ \phi(q) = qa\}.$$

De fato, sejam a_1, $a_2 \in S_q$. Então, $\phi(q) = qa_1$ e $\psi(q) = qa_2$. Segue que,

$$q = \psi(q)\, a_2^{-1}$$

e assim,

$$\phi(q) = \phi\left(\psi(q)\, a_2^{-1}\right) = qa_1.$$

E, portanto, $\phi(\psi(q)) = q(a_1 a_2)$, o que implica que $a_1 a_2 \in S_q$. E assim, segue que S_q é um subsemigrupo de G, se $S_q \neq \varnothing$, ou seja, vale a seguinte proposição:

Proposição 34 *Se $S_q \neq \varnothing$ então, S_q é um subsemigrupo de G.*

De forma semelhante, o subconjunto

$$T_q = \{a \in G | \exists \phi \in S_Q,\ \phi(q) = qa \in \text{int}\,(S_Q q)\}$$

é identificado com $\text{int}\,(S_Q q) \cap Q_x$ é um semigrupo em G. Podemos relacionar esses dois conjuntos através da proposição abaixo.

Proposição 35 *Seja $q \in Q$ fixo. Se $\pi(q) = x$ então, $T_q \subset \operatorname{int}(S_q)$.*
Demonstração: *Seja $a \in T_q$. Então, existe $\phi \in S_Q$ tal que*

$$\phi(q) \in \operatorname{int}(S_Q q) \cap Q_x \subset S_Q q \cap Q_x.$$

Uma vez que $\operatorname{int}(S_Q q) \cap Q_x$ *é aberto, temos que*

$$\operatorname{int}(S_Q q) \cap Q_x \subset \operatorname{int}((S_Q q) \cap Q_x)$$

para todo $a \in G$. Assim, segue que $T_q \subset \operatorname{int}(S_q)$. □

O lema a seguir mostra a presença da acessibilidade para S_q, se $T_q \neq \varnothing$.

Lema 2 *Seja $D \subset M$ um conjunto de controle efetivo para S_M, e suponha que S_Q é acessível sobre D. Seja $q \in \pi^{-1}(D_0)$. Então, $T_q \neq \varnothing$, o que implica que* $\operatorname{int}(S_q) \neq \varnothing$.
Demonstração: *Tome $\phi_Q \in S_Q$ tal que $\phi_Q(q) \in \operatorname{int}(S_Q q) \cap \pi^{-1}(D_0)$. Então, segue que $\pi(\phi_Q(q)) \in D_0$, e bem como, $x = \pi(q)$. Então, existe $\psi_Q \in S_Q$ tal que corresponde a um difeomorfismo ψ_M de M que toma $\pi(\phi(q))$ e leva este a x, ou seja,*

$$x = \psi_M(\pi(\phi_Q(q))) = \pi(\psi_Q(\phi_Q(q)))$$

de modo que $\psi_Q \circ \phi_Q$ pertence a mesma fibra q. Pela escolha de ϕ_Q segue que $\psi_Q(\phi_Q(q)) \in$ $\operatorname{int}(S_Q(q))$, *uma vez que ψ_Q é difeomorfismo, mostrando $T_q \neq \varnothing$, e então, S_q tem interior não vazio.* □

Uma consequência relacionada ao Lema 2 é que a acessibilidade de S_Q sobre D implica na acessibilidade de S_Q^{-1} sobre D. De fato, o conjunto

$$T_q^{-1} = \left\{a^{-1} | a \in T_q\right\}$$

se identifica com o conjunto $\operatorname{int}\left(S_Q^{-1}q\right) \cap Q_x$, onde $\operatorname{int}\left(S_Q^{-1}q\right)$ é não vazio se, $T_q \neq \varnothing$.

Consideremos agora q e $q' = qa$ com $a \in G$, de tal forma que q e q' estejam na mesma fibra. Logo, teremos o seguinte resultado.

Proposição 36 *Se q e q' estão na mesma fibra então, os semigrupos S_q e $S_{q'}$ são conjugados, ou seja,*

$$S_{q'} = a^{-1} S_q a$$

com $a \in G$.
Demonstração: *Tome $d \in S_q$ e consideremos $q = q'a^{-1}$. Temos que, $a^{-1}S_q a \subset S_{q'}$. De fato, pela Definição 29, existe $\phi_Q \in S_Q$ tal que $\phi_Q(q) = qd$. Assim, como q e q' estão na mesma fibra, segue que*

$$qd = \phi_Q(q) = \phi_Q\left(q'a^{-1}\right) = \phi_Q(q')\, a^{-1}$$

segue da igualdade que

$$q'a^{-1}d = \phi_Q(q')\, a^{-1}$$

ou seja, $q'(a^{-1}da) = \phi_Q(q')$, e portanto, $a^{-1}da \in S_{q'}$. Logo, $S_q \subset a^{-1}S_{q'}a$, o que implica $aS_q a^{-1} \subset S_{q'}$. A inclusão inversa é feita da mesma forma tomando $q' = qa$. □

De modo análogo a resultado anterior, segue a demonstração do corolário abaixo.

Corolário 2 *Se q e q' estão na mesma fibra então, os semigrupos T_q e $T_{q'}$ são conjugados, ou seja,*

$$T_{q'} = a^{-1} T_q a$$

com $a \in G$.

A seguir, consideremos o fibrado associado $E = Q \times_G F$ da Definição 16. Temos que S_Q induz um semigrupo de difeomorfismos em E, digamos S_E. Assumiremos aqui que a ação de G na fibra é transitiva. Neste caso, a aplicação

$$v \in F \to qv \in E_x, \text{ com } x = \pi(q)$$

é uma submersão. Logo, teremos o seguinte resultado.

Proposição 37 *Seja S_Q um conjunto de difeomorfismos em Q. Se S_Q é acessível então, S_E é acessível.*

Demonstração: *Como a aplicação*

$$v \in F \to qv \in E_x, \text{ com } x = \pi(q)$$

é uma submersão segue que

$$\operatorname{int}(S_E(qv)) = \operatorname{int}(S_Q(q)\, v) = \operatorname{int}(S_Q(q))\, v$$

para todo $x \in Q$ e $v \in F$. Logo, como S_Q é acessível, temos que S_E é acessível. □

4.2 Conjuntos de Controle em Fibrados

Nessa seção estudaremos o comportamento dos conjuntos de controle nos fibrados principais e nos seus fibrados associados. Com as notações da seção anterior, comecemos apresentando o seguinte resultado o qual nos diz que conjuntos de controle são projetados em conjuntos de controle, e também, o conjunto de transitividade é projetado dentro de conjunto de transitividade, ou mais especificamente, temos:

Proposição 38 *Como antes, sejam E um fibrado associado com projeção $\pi : E \to M$ e S_Q, S_E e S_M semigrupos de Q, E e M, respectivamente. Se $D \subset E$ é um conjunto de controle para S_E, então,*

(i) Existe um único conjunto de controle $C \subset M$ para S_M tal que, $\pi(D) \subset C$. Se D é invariante então, C é invariante.

(ii) Se D é efetivo então, C também é efetivo e $\pi(D_0) \subset C_0$.

Demonstração: *Para ver o item (i), sejam $x, y \in \pi(D)$ e $u, v \in D$, tal que $\pi(u) = x$ e $\pi(v) = y$. Logo, existe uma sequência $\phi_n^E \in S_E$, tal que $\phi_n^E(u) \to v$, quando $n \to \infty$. Consequentemente,*

$$\phi_n^E(\pi(u)) = \pi\left(\phi_n^M(u)\right) \to \pi(v) = y.$$

Então, $y \in \operatorname{fe}(S_M x)$. Como x e y foram tomados arbitrariamente, $\pi(D)$ satisfaz a segunda da Definição 26. E, como π é uma aplicação aberta, $\pi(D)$ tem interior não vazio. Assim, pela Proposição 27, segue que $\pi(D)$ está contido em um conjunto de controle para S_M, digamos C. A unicidade de C segue da Proposição 26, uma vez que a interseção de dois ou mais conjuntos de controle é vazia. Se D é um conjunto de controle invariante então, *dado $y \in \mathrm{fe}(S_M x)$ existe uma sequência $\phi_n^M \in S_M$, tal que $\phi_n^M(y) \to x$, quando $n \to \infty$. Como $y = \pi(v)$ segue que*

$$\phi_n^M(y) = \phi_n^M(\pi(v)) = \pi\left(\phi_n^E(v)\right)$$

onde, $\phi_n^E(v) \to u \in \mathrm{fe}(S_E u) = \mathrm{fe}(D)$, uma vez que D é invariante. Assim, segue que $\phi_n^M(y) \to x \in \mathrm{fe}(C)$. Portanto, C é invariante.

Para ver o item (ii), tome $v \in D_0$. Então,

$$v \in \mathrm{int}(S_E v) \cap \mathrm{int}\left(S_E^{-1} v\right).$$

Isto implica que $\pi(v) \in \mathrm{int}(S_M \pi(v)) \cap \mathrm{int}\left(S_M^{-1}\pi(v)\right)$, o que mostra que $\pi(v) \in C_0$. Logo, C_0 é não vazio, e C é efetivo. □

A recíproca da Proposição 38 é válida se acrescentarmos algumas hipóteses.

Proposição 39 *Seja $C \subset M$ um conjunto de controle efetivo para S_M. Suponha que a fibra típica F é compacta e que S_Q é acessível sobre C. Então, existe um conjunto de controle efetivo $D \subset E$ para S_E, com $\pi(D) \subset C$ e $\pi(D_0) \subset C_0$.*

Demonstração: *Seja $x \in C_0$ e $q \in Q_x$. Sabemos pelo Lema 2, que T_q é um semigrupo aberto e não vazio de G. Por outro lado, como F é compacto segue que existe um conjunto de controle efetivo para T_q em F. Assim, existe $a \in T_q$ e $v \in F$, tal que $av = v$. Como $qa \in \mathrm{int}(S_Q q)$, e a aplicação $v \in F \to qv \in E_x$, é aberta, segue que $(qa)v \in \mathrm{int}(S_E(qv))$. Daí,*

$$(qa)v = q(av) = qv$$

onde $qv \in \mathrm{int}(S_E(qv))$. De maneira análoga, mostramos que $qv \in \mathrm{int}\left(S_E^{-1}(qv)\right)$, e assim,

$$qv \in \mathrm{int}(S_E(qv)) \cap \mathrm{int}\left(S_E^{-1}(qv)\right).$$

Consequentemente, pela Proposição 32 segue que qv pertence a um conjunto de controle efetivo, digamos D, para S_E. Assim, pela Poposição 26 segue que a projeção $\pi(qv) = x \in C_0$, concluindo o resultado. □

Exemplo 29 *Consideremos a fibração*

$$\pi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{RP}^1.$$

Sabemos pelo Exemplo 27, que existe um conjunto de controle em $\mathbb{RP}^1$ para $S = Sl^+(2, \mathbb{R})$, dado por

$$C = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{RP}^1 | x_1, x_2 \geq 0\right\}.$$

Da forma que foi construído o fibrado, temos que S_Q é acessível sobre C. Logo, pela Proposição 39, segue que existe um conjunto de controle em $\mathbb{S}^1$, digamos D, tal que $\pi(D) \subset C$. E ainda, como C é efetivo, (ver Exemplo 28) segue que D é efetivo e ainda $\pi(D_0) \subset C_0$.

O resultado a seguir mostra como serão os conjuntos de controle na fibra F.

Teorema 2 *Seja $D \subset E$ um conjunto de controle efetivo para S_E. Tome $x \in M$ tal que $D \cap E_x \neq \varnothing$ e $q \in Q_x$. Então, existe um conjunto de controle efetivo A para S_q em F tal que*

$$D_0 \cap E_x = qA_0$$

Demonstração: Consideremos o subconjunto $B_0 \subset F$, dado por $D_0 \cap E_x = qB_0$. Pela definição temos que B_0 é aberto em F, uma vez que D_0 é um aberto de E e $v \in F \to qv \in E_x$, com $x = \pi(q)$ define um difeomorfismo entre E_x e F. Então, dados v_1, $v_2 \in B$ tome $u = qv_1$ e $w = qv_2$, com $u, w \in D_0 \cap E_x$. Segue que $u, w \in D_0$, e pelo item (v) da Proposição 31, existe $\phi_E \in S_E$ tal que $\phi_E(qv_1) = qv_2$. É fácil ver que essa aplicação fixa x ao longo da fibra do fibrado principal, então $\phi_Q(q) = qa$, para algum $a \in G$. Como, em particular, $\phi_Q \in S_Q$ pela afirmação acima, segue que $a \in S_q$. Consequentemente,

$$qv_2 = \phi_E(qv_1) = \phi_Q(q)v_1 = (qa)v_1 = q(av_1).$$

Assim, $av_1 = v_2$ mostrando que $B_0 \subset S_q x$, para todo $x \in B$. E, portanto, existe um conjunto de controle A para S_q, tal que $B_0 \subset A$, isto é, $D_0 \cap E_x \subset qA$. Mostraremos agora que A é efetivo e $D_0 \cap E_x \subset qA_0$. De fato, tome $v \in B_0$, então pela construção acima $v \in A$ e para todo $v_1 \in B_0$ temos que existe $\phi_E \in \operatorname{int}(S_E)$ e $\psi_E \in \operatorname{int}\left(S_E^{-1}\right)$ tal que $\phi_E(qv) = qv_1$ e $\psi_E(qv) = qv_1$. Como cada uma dessas aplicações fixa x ao longo da fibrado principal então, podemos escrever $\phi_Q(q) = qa$ e $\psi_Q(q) = qb$ com $a \in T_q$ e $b \in T_q^{-1}$. Consequentemente, colocando a e b como a aplicação leva v em v_1 temos, $B_0 \subset \operatorname{int}(S_q v) \cap \operatorname{int}\left(S_q^{-1}v\right)$ e

$$v \in \operatorname{int}(S_q v) \cap \operatorname{int}\left(S_q^{-1}v\right).$$

Então, A é efetivo e $B_0 \subset qA_0$. Para a inclusão contrária, mostraremos que para algum $z \in S_E u$ existe $u \in D_0$ tal que $z \in S_E w$ e $u \in S_E z$. De fato, neste caso temos que

$$D \subset \operatorname{fe}(S_E u) \subset \operatorname{fe}(S_E z),$$

uma vez que $u \in S_E z$, e reciprocamente, para algum $w \in D$, $u \in \operatorname{fe}(S_E w)$ tal que

$$z \in S_E u \subset \operatorname{fe}(S_E w).$$

Consequentemente, a condição de maximilidade dos conjuntos de controle garante que $z \in D$. Além disso, o fato que $z \in S_E u$, $u \in D_0$ implica, pela Proposição 32, que $z \in D_0$. Agora, dado $z = qv \in qA_0$, tome $u \in D_0 \cap E_x$. Logo, existem a e $b \in S_q$, tal que $av = v_1$ e $bv_1 = v$. Assim, pela definição de S_q, segue que $\phi_Q(q) = qa$ e $\psi_Q(q) = qb$, para algum $\phi_Q, \psi_Q \in S_Q$. E, portanto, se considerarmos as correspondencias $\phi_E, \psi_E \in S_E$, nos temos

$$\phi_E(z) = \phi_E(qv) = \phi_Q(q)v = (qa)v = q(av) = qv_1 = u$$

e

$$\psi_E(u) = \psi_E(qv_1) = \psi_Q(q)v_1 = (qb)v_1 = qv = z$$

concluindo a demonstração. □

Proposição 40 *Seja E um fibrado associado e suponha que para cada $q \in Q$, $T_q \neq \emptyset$. Seja B um conjunto de controle efetivo para T_q em F. Então, existe um conjunto de controle efetivo D para S_E em E, tal que*

$$qB_0 = D_0 \cap E_x$$

Demonstração: *Seja $qv \in B_0$ e tome $u = qv$. Então, como na demonstração da Proposição 39, seja D um conjunto de controle para S_E, tal que $u \in D_0$. Logo, pelo Teorema 2, segue que $qB_0 = D_0 \cap E_x$.* □

Proposição 41 *Suponha que S_M é acessível, e seja $C \subset M$ um conjunto de controle efetivo. Assuma que para algum $x \in C_0$, existe $q \in Q_x$ tal que S_q age transitivamente em F. Então, para algum $p \in Q$ tal que $\pi(p) \in C_0$ temos que S_p é transitivo em F. Além disso, S_E é acessível sobre C e $D = \pi^{-1}(C)$ é um conjunto de controle efetivo em E e S_E é transitivo sobre C_0.*

Demonstração: *Seja $y \in C_0$. Então, existem $\phi_M, \psi_M \in S_M$ tal que $\phi_M(x) = y$ e $\psi_M(y) = x$. Considerando as ações no fibrado principal $Q(M,G)$ colocamos $\phi_Q(q) = p$. Então, $\psi_Q(p)$ está sobre a fibra q, e, logo, existe $a \in G$ tal que $\psi_Q(p) = qa$. Demonstremos que S_p é transitivo sobre F. Para isto, sejam $v_1, v_2 \in F$. Então, existe $b \in S_q$ tal que $bav_1 = v_2$, uma vez que S_q é transitivo em F. Representemos esse elemento de S_q por θ tal que $\theta(q) = qb$. Assim, notemos que $\phi_Q \circ \theta \circ \psi_Q$ pertence a S_Q, e ainda,*

$$\phi_Q \circ \theta \circ \psi_Q(p) = \phi_Q \circ \theta(qa) = \phi_Q(qba) = pba$$

segue que $ba \in S_p$. E, consequentemente $v_2 \in S_p v_1$, provando assim que S_p é transitivo. Como $y \in C_0$ foi tomado arbitráriamente e $S_{pa} = a^{-1} S_p a$, segue a primeira parte da Proposição. Agora, como S_E é transitivo em $\pi^{-1}(C_0)$, temos $\pi^{-1}(C_0) \subset S_E u$, para todo $u \in \pi^{-1}(C_0)$. Em particular, S_E é acessível sobre C. Tomando o fecho e usando as igualdades $\mathrm{fe}(C) = \mathrm{fe}(C_0)$ e $\pi^{-1}(\mathrm{fe}(C_0)) = \mathrm{fe}(\pi^{-1}(C_0))$, temos as seguintes inclusões

$$\pi^{-1}(C) \subset \pi^{-1}(\mathrm{fe}(C)) \subset \mathrm{fe}\left(\pi^{-1}(C_0)\right) \subset \mathrm{fe}(S_E u)$$

para todo $u \in \pi^{-1}(C_0)$. Por outro lado, se $\pi(v) \in C$ então,

$$S_E v \cap \pi^{-1}(C_0) \neq \varnothing$$

e a inclusão acima implica que

$$\pi^{-1}(C) \subset \mathrm{fe}(\mathrm{S_E v}).$$

Isto mostra que $\pi^{-1}(C)$ é um conjunto de controle efetivo, digamos D', para S_E. Entretanto, a Proposição 40, garante a existência de um conjunto de controle D, com $E_x \subset D_0$ e $\pi(D) \subset C$, tal que, $D \subset \pi^{-1}(C)$. Assim,

$$D \subset \pi^{-1}(C) \subset D'$$

e portanto, $D = \pi^{-1}(C)$. □

Um caso particular da Proposição 41 se aplica quando o grupo estrutural G é compacto, como vemos no corolário abaixo.

Corolário 3 *Seja Q um fibrado principal tal que o grupo estrutural G seja compacto. Considere $C \subset M$ um conjunto de controle efetivo para S_M, tal que S_Q é acessível sobre C e $\pi^{-1}(C_0)$ seja conexo. Então, $\pi^{-1}(C)$ é um conjunto de controle efetivo para S_Q em Q e S_Q é transitivo sobre C_0.*

Demonstração: *Seja $q \in Q$ tal que $\pi(q) \in C_0$. Como T_q é um semigrupo com interior não vazio em G então, a componente da identidade de G, digamos G_0, está contida em T_q, ou seja, $G_0 \subset T_q$. Isto implica que $1 \in T_q$ e $q \in \mathrm{int}(S_Q q)$. Visto que $q \in \pi^{-1}(C_0)$ é arbitrário, temos que $S_Q p \cap \pi^{-1}(C_0)$ é aberto, para todo $p \in \pi^{-1}(C_0)$. Consequentemente, como $\pi^{-1}(C_0)$ é conexo, segue que $S_Q p \cap \pi^{-1}(C_0) = \pi^{-1}(C_0)$, para todo $p \in \pi^{-1}(C_0)$. E, portanto, S_Q é transitivo sobre C_0.* □

4.3 Conjuntos de Controle Invariantes

Nesta seção, estudaremos o comportamento dos conjuntos de controle invariantes sobre as fibras. Sabemos que os conjuntos de controle invariantes para S_E são projetados dentro de conjuntos de controle invariantes em M pela Proposição 38. Assim, analisaremos a estrutura desses conjuntos de controle invariantes em M. Admitimos aqui que a fibra típica F é compacta e que os conjuntos de controle invariantes são tomados no espaço base M, ou seja, $C \subset M$. Dado o semigrupo $S_q \subset G$, com $q \in Q$, mostraremos que sob certas hipóteses e, que o número de conjuntos de controle invariantes para S_q é constante sobre a fibra típica, e bem como, que este número é igual ao número de conjuntos de controle invariantes para S_E sobre um conjunto de controle em M. Denotaremos esse número de conjuntos de controle invariantes por $\mathrm{ic}\left(S_q\right)$ e usaremos a notação C_q^j, $j = 1, \ldots, \mathrm{ic}\left(S_q\right)$.

Notemos que a aplicação

$$v \in F \to qv \in E_x, \text{ com } x = \pi\left(q\right)$$

define os seguintes subconjuntos

$$qC_q^j \subset E_x, \ j = 1, \ldots, \mathrm{ic}\left(S_q\right).$$

Esses subconjuntos serão construídos através de blocos de conjuntos de controles invariantes sobre C. Notemos que esses conjuntos são independentes de $q \in Q$ sobre a fibra x. De fato, se $q' = qa$ então, pela Proposição 36 temos que $S_{q'} = a^{-1}S_q a$. Então os conjuntos de controle invariantes para $S_{q'}$ na fibra F são subconjuntos da forma

$$C_{q'}^j = a^{-1}C_q^j.$$

De fato,

$$q'C_{q'}^j = q'a^{-1}C_q^j = qC_q^j$$

e, portanto, para $x \in M$ temos,

$$C_x^j = qC_q^j, \ j = 1, \ldots, ic\left(S_q\right).$$

A seguir, consideremos os seguintes lemas.

Lema 3 *Sejam $x, y \in C_0$ e tome $\phi \in S_Q$ tal que $\phi\left(Q_x\right) = Q_y$. Dado $q_x \in Q$ coloquemos $\phi\left(q_x\right) = q_y$. Seja $C_{q_x}^j$ um conjunto de controle invariante para S_{q_x}. Então, para todo $v \in C_{q_x}^j$, temos $C_{q_x}^j \subset \mathrm{fe}\left(S_{q_y}\left(v\right)\right)$.*

Demonstração: *Seja $w \in C_{q_x}$ e demonstremos que existe uma sequência $\left(b_k\right)_{k\geq 1}$ em S_{q_y} com $b_k v \to w$, quando $k \to \infty$. Como S_M é transitivo em C_0, existe $\psi \in S_Q$ tal que $\psi \circ \phi\left(q_x\right) \in Q_x$. Então, seja $a \in G$ de forma que $\psi \circ \phi\left(q_x\right) = q_x a$. Assim, $a \in S_{q_x}$, com $av \in C_{q_x}^j$. Segue que $w \in C_{q_x}^j$, e assim podemos tomar um sequência $\left(a_k\right)_{k\geq 1} \in S_{q_x}$, com $a_k av \to w$, quando $k \to \infty$. Seja $b_k = a_k a$. Temos que $b_k \in S_{q_y}$, para ver isto definimos $\psi_k\left(q_x\right) = q_x a_k$, com $\psi_k \in S_Q$. Assim,*

$$\phi \circ \psi_k \circ \psi\left(q_y\right) = \phi \circ \psi_k \circ \psi\left(\phi\left(q_x\right)\right) = \phi \circ \psi\left(q_x a\right) = \phi\left(q_x a_k a\right) = q_y a_k a.$$

Logo, $b_k = a_k a \in S_{q_y}$, concluindo a demonstração. □

Lema 4 *Com as notações do Lema 3, C_{q_x} está contido em um conjunto de controle invariante para S_{q_y}.*
Demonstração: *Seja $v \in C^j_{q_x}$. A afirmação de F ser compacto implica na existência de um conjunto de controle invariante para S_{q_y} contido em $\mathrm{fe}\left(S_{q_y}\right)$ (Para outros detalhes veja [1]). Denote esse conjunto de controle invariante por C_{q_y}. Como S_{q_y} tem interior contido em G, C_{q_y} tem interior não vazio, mais precisamente $C_{q_y} \cap S_{q_y}(v) \neq \varnothing$, e existe $b \in S_{q_y}$ com $bv \in C_{q_y}$. Afirmamos que existe b' tal que $b' \in S_{q_y}$ e $b'bv \in C_{q_x}$. De fato,*

$$\phi \circ \psi \circ \psi'(q_y) = q_x b'b = \phi(q_x) b'b = \phi(q_x b'b)$$

então, $\psi \circ \psi' \circ \phi(q_x) = q_x b'b$ e $b'b \in S_{q_x}$. Logo, temos que $b'bv \in C^j_{q_x}$, uma vez que $v \in C^j_q$. Isto mostra a afirmação acima. Assim, a partir da escolha de b segue que $b'bv \in C^j_{q_x} \cap C_{q_y}$. Tomando $w = b'bv$ pelo Lema 3,

$$C^j_{q_x} \subset \mathrm{fe}\left(S_{q_y} w\right) = C_{q_y}$$

provando a existência do conjunto de controle invariante. A unicidade segue diretamente da Proposição 26. □

Lembramos que $\phi_E(qv) = \phi_Q(q)v$ para $q \in Q$ e $v \in F$. Então, se $C^j_x = q_x C^j_{q_x}$ e $C_y = q_y C_{q_y}$ com C_{q_y} um conjunto de controle invariante como no Lema 4, tomemos $\phi \in S_Q$ como no Lema 4, temos

$$\phi\left(C^j_x\right) = \phi(q_x C_{q_x}) = \phi(q_x) C_{q_x} \subset q_y C_{q_y}.$$

Portanto, a aplicação ϕ leva o subconjunto C^j_x dentro de subconjuntos da forma $C^i_y = q_y C^i_{q_y}$ para $i = 1, \ldots, \mathrm{ic}\left(S_{q_y}\right)$.

Lema 5 *Seja $\phi \in S_Q$ como nos lemas anteriores, com $q_y = \phi(q_x)$. Tome C^j_x, e suponha que C^j_y é tal que $\phi(C^j_x) \subset C^j_y$. Então,*
(i) Se $\psi \in S_E$ com $\psi : E_y \to E_x$ então, $\psi\left(C^j_y\right) \subset C^j_x$.
(ii) Se $\phi' \in S_E$ com $\phi' : E_x \to E_y$ então, $\phi'(C^j_x) \subset C^j_y$.
Demonstração: *Como anteriormente sejam q_x e q_y sobre a fibra x e y respectivamente, tal que $\phi(q_x) = q_y$. Se ψ é como em (i) então a aplicação da fibra em y leva sobre a fibra em x, e $\psi \circ \phi$ leva x sobre a sua fibra. Como a aplicação está em S_Q nos temos que existe $a \in S_{q_x}$, tal que $\psi \circ \phi(q_x) = q_x a$. Agora, tomando $w \in C^j_{q_x}$. Temos,*

$$\psi(q_y w) = \psi(q_y) w = \psi \circ \phi(q_x) w = q_x a w.$$

Consequentemente, $\psi(q_y w) \in C^j_x$. Entretanto, $q_y w \in C^j_y$ uma vez que $q_y w = \phi(q_x w)$ e pela afirmação que $\phi(C^j_x) \subset C^j_y$. Então, $\psi\left(C^j_y\right) \cap C^j_x \neq \varnothing$. E, portanto, (i) segue do Lema 4, aplicado a ψ. O item (ii) é análogo a (i) apenas trocando ψ no lugar de ϕ e ϕ' no lugar de ψ. □

Como consequência dos Lemas 4 e 5 temos o seguinte resultado.

Teorema 3 *Seja $C \subset M$ um conjunto de controle invariante para S_M, e assuma que S_Q é acessível sobre C. Assuma também que a fibra F é compacta. Então,*
(i) $\mathrm{ic}(S_q)$ é constante em função de $q \in \pi^{-1}(C_0)$.
(ii) Existem conjuntos de controle invariantes para S_E sobre C, e este número é igual a $ic(S_q)$.

(iii) Para todo conjunto de controle invariante $D \subset \pi^{-1}(C)$ para S_E e $q \in Q$

$$D \cap E_x = qB,$$

onde $x = \pi(q)$ e B é um conjunto de controle invariante para S_q em F.

Demonstração: *Pelo Lema 5, temos que* $\mathrm{ic}(S_{q_x}) = \mathrm{ic}(S_{q_y})$ *então (i) segue da transitividade de S_M em C_0 e a invariância de* $\mathrm{ic}(S_q)$ *com q variando na fibra fixada. Agora, tome $x \in C_0$ e algum $C_x^j \subset E_x$. Se $qv \in C_x^j$ então, pelo Lema 5 para cada $y \in C_0$ existe um único C_y^j com $C_y^j \cap S_E(qv) \neq \varnothing$. Então, tomando*

$$C^j = \bigcup_{y \in C_0} C_y^j$$

segue que C^j é S_E-invariante pelo Lema 5. Consequentemente, $\mathrm{fe}(C^j)$ *é também S_E-invariante e* $\mathrm{fe}(S_E(u)) = \mathrm{fe}(C^j)$ *para todo $u \in \mathrm{fe}(C^j)$. Isto mostra que* $\mathrm{fe}(C^j)$ *é um conjunto de controle invariante. Pelo Teorema 2 sua intersecção com uma a fibra E_x, $x \in C_0$, é imagem da aplicação $v \in F \to qv \in E_x$, de um conjunto de controle para S_q. Assim, pela construção, C_x^j está contido em* $\mathrm{fe}(C^j)$ *se $x \in C_0$ e*

$$\mathrm{fe}\left(C^j\right) \cap E_x = C_x^j$$

e, portanto, temos assim $\mathrm{ic}(S_q)$ *diferentes conjuntos de controle invariantes para S_E. Por fim, seja D um conjunto de controle invariante para S_E tal que $\pi(D) \subset C$. A invariância de implica que $\pi(D) = C$. Tome $u \in D$ tal que $\pi(u) \in C_0$, com $u = qv$, onde $q \in Q$ e $v \in F$. Então, a compacidade de F garante a existência de um conjunto de controle invariante para S_q que satisfaz $S_q v$. Mas, $qS_q v \subset S_E(qv)$, o que implica que para algum C^j acima $S_E(qv) \cap C^j \neq \varnothing$, isto é, $C \cap C^j \neq \varnothing$ então, $C = C^j$, demonstrando assim o resultado.* □

Referências

[1] Arnold, L., Kliemann W. e Oeljeklans E.: *Lyapunov exponents of linear stochastic system*, In Lyapunov Exponents: Proceedings of a Workshop in Bremen (L. Arnold e V. Wihstutz, eds.), Lecture Notes in Mathematics 1186, Springer-Verlag, Berlin, 85-125, 1986.

[2] Braga Barros, C.J. e San Martin L.A.B.: *On the action of semigroups in fiber bundles.* Matemática Contemporânea , vol 13, 1-19, 1997.

[3] Braga Barros, C.J. e San Martin,L.A.B.: *On the number of control sets on projective spaces.* Systems & Control Letters, Elsevier, vol 29, 21-26, 1996.

[4] Braga Barros, C.J. e Reis R. A.: *On the number of control sets on compact homogeneous spaces.* Portugaliae Mathematica, vol 60 fasc. 3, 359-371, 2003.

[5] Colonius, F. e Kliemann,W.: *Linear control semigroups acting on projective spaces.* Journal of Dynamics e Differential Equations, vol 5, 3, 495-528, 1993.

[6] Colonius, F. e Kliemann, W.: *The dynamics of control.* Birkhauser, Boston, 2000.

[7] Lima, E. L.: *Variedades Diferenciáveis.* Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[8] Hilgert, J. e Neeb K. H.: *Lie semigroups and their applications.* LNM-Springer, vol 1552, 1993.

[9] Husemoller, D.: *Fibre bundles. Graduate texts in mathematics.* Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, vol 20, 1975.

[10] Helgason, S.: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.* Academic Press, New York, 1978.

[11] Jacobson, N.: *Lie algebras.* Interscience. 1962.

[12] Jurdjevic, V. e Sussman, H. J.: *Control systems on Lie groups.* J. Of. Diff. Eq. 12, 313-329, 1972.

[13] Kobayashi, S e Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry.* John Wiley & Sons, New York, 1963.

[14] Lawson, J. D., Hilgert J., e Hofmann, K. H.: *Lie groups, convex cones and semigrups.* Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1989.

[15] Lobry, C.: *Controlabilitty of nonlinear systems on compact manifolds.* SIAM. Control, Vol. 12, n^o 1, 1-4. 6, 1974.

[16] Mimura, M. e Toda, H.: *Topology of Lie groups, I and II.* Translations of mathematical monographs, vol 91, 1991.

[17] Pontryagin, L. S.: *Topological groups.* Princeton University Press ed 1, 1946.

[18] Sagle, A. e Walde, R.: *Introduction to Lie groups and Lie algebras.* Academic Press, New York, 1973.

[19] San Martin, L.A.B.: *Control sets and semigroups in semi-simple Lie groups.* In Semigroups in algebra, geometry and analysis. Gruyter Verlag, 1994.

[20] San Martin L.A.B.; *Invariant control sets on flag manifolds.* Mathematics of Control, Signals and Systems 6, 41-61, 1993.

[21] San Martin, L.A.B.: *Álgebras de Lie.* Editora da Unicamp, Campinas, 1999.

[22] San Martin, L. A. B.: *Notas de grupos de Lie.* Unicamp, 2012.

[23] San Martin, L. A. B.: *Órbitas de famílias de campos de vetores.* Unicamp, 1998.

[24] San Martin, L.A.B. e Tonelli, P.A.: *Semigroup actions on homogeneous spaces.* Semigroup Forum vol 50, 59-88, 1995.

[25] Tonelli, P.A.: *Control sets on homogeneous spaces.* Thesis. Bremen University, 1991.

[26] Varadarajan, V.S.: *Lie groups, Lie algebras and their representations.* Prentice-Hall, 1974.

[27] Varadarajan,V.S. : *Harmonic analysis on real reductive groups.* LNM-Springer, 576, 1977.

[28] Vinberg, E.B.: *Invariant convex cones and orderings in Lie groups.* Funct. Anal. and Appl. 14, 1-13, 1980.

[29] Wan, Chê-hsien.: *Lie algebras.* International series of monographs in pure and applied mathematics, vol 104.

[30] Warner, G.: *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups.* Springer-Verlag, 1972.

[31] Warner, F. W.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Company, 1971.