

## Separação de Isótopos por Ressonância

**Masayoshi Tsuchida,** **José Márcio Machado,**  
 Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP  
 15054-000, São José do Rio Preto, SP  
 E-mail: tsuchida@ibilce.unesp.br

**Resumo:** *Devido a grande demanda do uso da energia atômica, as pesquisas sobre o processo de separação de isótopos tornam-se cada vez mais importantes. Neste trabalho mostramos uma técnica de separação de isótopos usando o efeito da ressonância.*

**Palavras-chave:** *Isótopos, Separação, Ressonância*

### Introdução

Existem muitas técnicas para separar líquidos e gases, mas em geral são procedimentos muito caros. No caso de gases, a difusão e a centrifugação são dois processos usados para produções em grandes escalas. Para esses métodos, uma única unidade de separação não é suficiente, então várias unidades são conectadas para formar um sistema conhecido como cascata [2].

Para a separação de isótopos estáveis com a centrifugação, a cascata convencional, isto é, uma alimentação e duas saídas, não é eficiente. Portanto várias técnicas não convencionais têm sido desenvolvidas [3]. Por outro lado, alguns isótopos não podem ser separados por centrifugação, por causa da ausência de material volátil. Nesses casos podem ser usadas técnicas eletromagnéticas ou separação por vapor atômico [1].

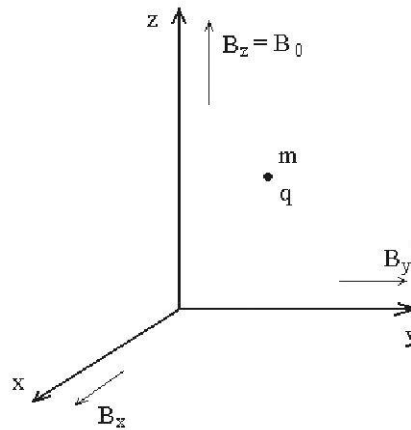
Todos esses processos são muito caros, então pesquisas e desenvolvimentos de novas técnicas sobre separação de líquidos e gases constituem assuntos atuais e importantes para a ciência e tecnologia. Neste trabalho usamos campos magnéticos periódicos para capturar isótopos estáveis através do efeito de ressonância. Esse efeito é mostrado descrevendo as trajetórias livre e sujeito à ressonância do isótopo em coordenadas cilíndricas. Simulações numéricas com  $U_{235}$  e  $U_{238}$  confirmam que esses isótopos podem ser separados de outros elementos.

### Trajétoria livre do isótopo

Os campos magnéticos necessários para construir o sistema são dispostos convenientemente no espaço tri retangular (Figura 1). Ao longo do eixo  $z$  colocamos o campo magnético primário  $B_z = B_0$ , e sobre os eixos  $x$  e  $y$  dispomos os campos magnéticos secundários  $B_x$  e  $B_y$ . Sendo  $m$ ,  $q$  e  $v$  respectivamente a massa, carga e a velocidade do isótopo, e  $E$  e  $B$  os campos elétrico e magnético respectivamente, a equação vetorial do movimento é dada por

$$m\dot{v} = qE + qv \times B.$$

Neste trabalho consideramos que o campo elétrico  $E$  é desprezível, então as equações de movimento em cada eixo coordenado ficam


 Figura 1: Campos magnéticos primário  $B_z$  e secundários  $B_x$  e  $B_y$ .

$$\ddot{x} = \frac{q}{m} (B_z \dot{y} - B_y \dot{z}),$$

$$\ddot{y} = \frac{q}{m} (B_x \dot{z} - B_z \dot{x}),$$

$$\ddot{z} = \frac{q}{m} (B_y \dot{x} - B_x \dot{y}).$$

Os campos magnéticos secundários devem ser periódicos para obtermos o efeito desejado, e então são definidos como sendo

$$B_x = B_1 \text{sen} w_p t \quad \text{e} \quad B_y = B_2 \text{sen} w_q t$$

Com as condições de que  $B_1 < B_0$  e  $B_2 < B_0$ . Definimos ainda as frequências

$$w_0 = \frac{q}{m} B_0, \quad w_1 = \frac{q}{m} B_1 \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{q}{m} B_2,$$

e portanto as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= w_0 \dot{y} - (w_2 \text{sen} w_q t) \dot{z}, \\ \ddot{y} &= (w_1 \text{sen} w_p t) \dot{z} - w_0 \dot{x}, \\ \ddot{z} &= (w_2 \text{sen} w_q t) \dot{x} - (w_1 \text{sen} w_p t) \dot{y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Se os campos magnéticos secundários são desligados, as soluções desse sistema de equações diferenciais são

$$\begin{aligned} x(t) &= -r \cos(w_0 t + f), \\ y(t) &= r \text{sen}(w_0 t + f), \\ z(t) &= at + b, \end{aligned}$$

ou seja, a trajetória livre do isótopo é uma espiral com raio  $r$  e fase  $f$  constantes.

## Trajétoria do isótopo sob efeito dos campos magnéticos secundários

Nesta seção analisamos a trajetória do isótopo quando os campos magnéticos secundários estão ligados. Como supomos que  $B_1 < B_0$  e  $B_2 < B_0$ , a análise é feita usando o método da variação dos parâmetros. Assim, a trajetória é descrita por

$$\begin{aligned}x(t) &= -r(t)\cos(w_0t + f(t)), \\y(t) &= r(t)\text{sen}(w_0t + f(t)), \\z(t) &= a(t)t + b(t),\end{aligned}\quad (2)$$

com velocidades dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= r(t)w_0\text{sen}(w_0t + f(t)), \\ \dot{y}(t) &= r(t)w_0\cos(w_0t + f(t)), \\ \dot{z}(t) &= a(t).\end{aligned}\quad (3)$$

Diferenciando as equações (2) e comparando com as equações (3) obtemos

$$\begin{aligned}-\dot{r}\cos(w_0t + f) + r\dot{f}\text{sen}(w_0t + f) &= 0, \\ \dot{r}\text{sen}(w_0t + f) + r\dot{f}\cos(w_0t + f) &= 0, \\ \dot{a}t + \dot{b} &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Por outro lado, diferenciando as equações (3) e substituindo nas equações (1) obtemos

$$\begin{aligned}\dot{r}w_0\text{sen}(w_0t + f) + rw_0(w_0 + \dot{f})\cos(w_0t + f) &= rw_0^2\cos(w_0t + f) - aw_2\text{sen}w_qt, \\ \dot{r}w_0\cos(w_0t + f) - rw_0(w_0 + \dot{f})\text{sen}(w_0t + f) &= -rw_0^2\text{sen}(w_0t + f) + aw_1\text{sen}w_pt, \\ \dot{a} &= rw_0[w_2\text{sen}(w_0t + f)\text{sen}w_qt - w_1\cos(w_0t + f)\text{sen}w_pt].\end{aligned}\quad (5)$$

Das equações (4) e (5) decorrem as equações variacionais

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{a}{w_0}(P_1 + Q_2), \\ \dot{f} &= \frac{a}{rw_0}(Q_1 - P_2), \\ \dot{a} &= rw_0(Q_2 - P_1), \\ \dot{b} &= -\dot{a}t\end{aligned}\quad (6)$$

onde

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{w_1}{2}\{\text{sen}[(w_p + w_0)t + f] + \text{sen}[(w_p - w_0)t - f]\}, \\ P_2 &= \frac{w_1}{2}\{\cos[(w_p - w_0)t - f] - \cos[(w_p + w_0)t + f]\}.\end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{w_2}{2} \{ \text{sen}[(w_q + w_0)t + f] + \text{sen}[(w_q - w_0)t - f] \},$$

$$Q_2 = \frac{w_2}{2} \{ \text{cos}[(w_q - w_0)t - f] - \text{cos}[(w_q + w_0)t + f] \}$$

Tendo as soluções  $r(t)$ ,  $f(t)$ ,  $a(t)$  e  $b(t)$  do sistema de equações diferenciais (6), substituindo-as nas equações (2) obtemos a trajetória do isótopo perturbada pelos campos secundários.

### Efeito de ressonância

A solução do sistema diferencial (6) não é trivial, então analisamos numericamente a trajetória perturbada, usando o isótopo  $U_{235}$  cuja frequência  $w_0$  vale  $1.23 \text{ kHz}$ . Os valores das demais frequências  $w_1$  e  $w_2$  são tomadas como sendo  $w_0 \cdot 10^{-2}$ . Valores muito menores que esse não produzem o efeito de ressonância. Inicialmente mostramos as soluções sem o efeito da ressonância, isto é, ajustando as frequências  $w_p$  e  $w_q$  diferentes de  $w_0$ . A Figura 2 mostra o comportamento de  $a(t)$  e de  $b(t)$  para  $w_p = 1.0 \text{ kHz}$  e  $w_q = 0$ . Esses coeficientes exibem oscilações de alta frequência, sendo que  $a(t)$  tem amplitude limitada, mas a amplitude de  $b(t)$  aumenta com  $t$ , como era de se esperar, pois temos que  $\dot{b}(t) = -\dot{a}(t)t$ .

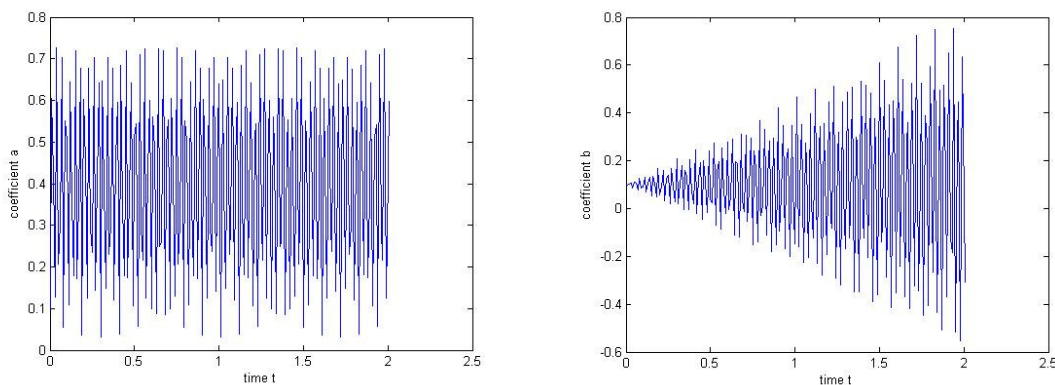


Figura 2: Variação dos coeficientes  $a$  e  $b$  em função do tempo  $t$ .

Como  $z(t) = a(t)t + b(t)$ , na Figura 3 mostramos a evolução de  $z(t)$ .

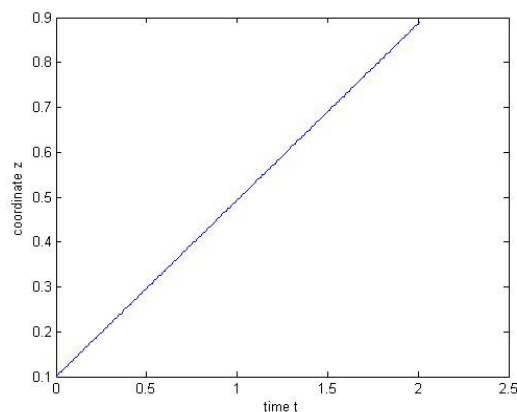


Figura 3: Comportamento linear de  $z(t)$ .

Ajustando agora  $w_p$  para  $w_p = 1.23 \text{ kHz}$  e mantendo  $w_q = 0$ , podemos notar na Figura 4 como os coeficientes  $a(t)$  e  $b(t)$  se comportam na ressonância. A oscilação de alta frequência é substituída pela oscilação de baixa frequência, e a solução  $z(t) = a(t)t + b(t)$  torna-se periódica (Figura 5).

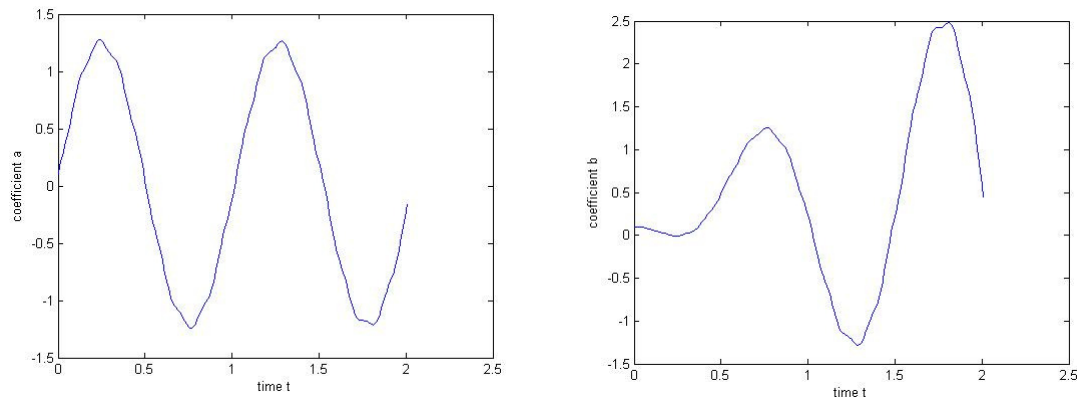


Figura 4: Variação dos coeficientes  $a$  e  $b$  sob o efeito da ressonância.

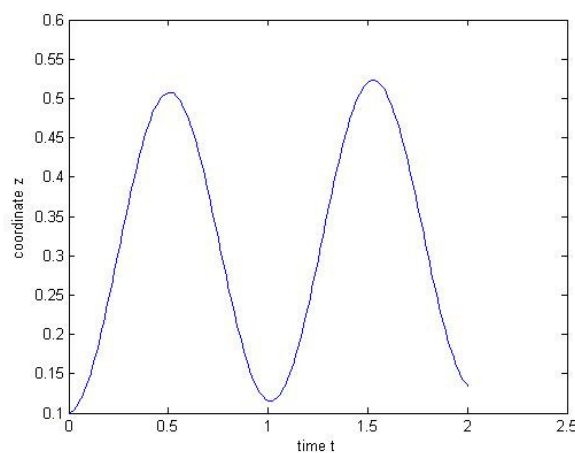


Figura 5: Comportamento periódico de  $z(t)$ .

Esse resultado mostra que, na ressonância a trajetória espiral do isótopo  $U_{235}$  passa a ser uma órbita limitada em  $z(t)$ , embora mantenha a forma espiral. Assim, numa mistura de vários isótopos, aquele que tem a frequência  $w_0$  igual a  $w_p$  ou  $w_q$  é separado dos demais. Se os campos magnéticos secundários não se interagem, então é possível separar dois isótopos que tenham  $w_0$  iguais a  $w_p$  e  $w_q$ .

A Figura 6 mostra uma simulação numérica com 5000 isótopos  $U_{235}$ , onde o gráfico do lado esquerdo corresponde a  $w_p = w_q = 1.2 \text{ kHz}$  e o do direito na ressonância. Fora da ressonância os isótopos se espalham, mas na ressonância os mesmos são capturados. A Figura 7 mostra os mesmos resultados para igual número de isótopos  $U_{238}$ , cuja frequência é  $1.215 \text{ kHz}$ .

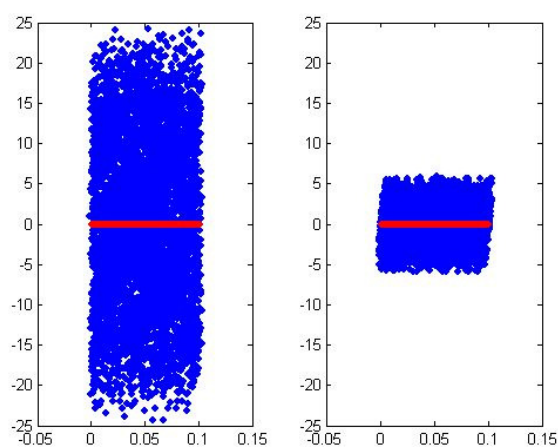


Figura 6: Efeito de captura dos isótopos  $U_{235}$  pela ressonância.

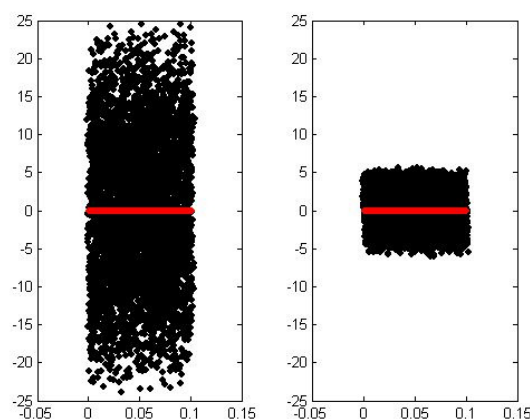


Figura 7: Efeito de captura dos isótopos  $U_{238}$  pela ressonância.

## Referências

- [1] Kim, Proliferation-resistant stable isotope separation based on optical pumping, em “Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases” (N. A. S. Rodrigues, ed.) pp. 86-90, Angra dos Reis, 2008.
- [2] Wood, Minor isotopes in gas centrifuge and gaseous diffusion cascades, em “Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases” (N. A. S. Rodrigues, ed.) pp. 24-30, Angra dos Reis, 2008.
- [3] Zeng, A non conventional cascade in isotope separation: pulse cascade, em “Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases” (N. A. S. Rodrigues, ed.) pp. 31-36, Angra dos Reis, 2008.