



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/15

**Transformações de Bäcklund para hierarquias integráveis abelianas.**

Ana Lúcia Retore

Orientador

*José Francisco Gomes*

Coorientador

*Abraham Hirsch Zimmerman*

Fevereiro de 2015

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu orientador prof. Dr. José Francisco Gomes pela orientação, pela disposição em compartilhar seus conhecimentos e por todas as inúmeras vezes em que tirou minhas dúvidas. Frank, espero um dia ter um pouco da sua objetividade e clareza em tratar os problemas. Ao prof. Abraham Zimmerman por estar sempre presente nas discussões dividindo seu conhecimento e tornando-as muito mais ricas.

Gostaria de agradecer a minha família, pelo apoio e carinho. Agradeço ao meu pai pelos valores que me passou e por sempre estar disposto a me ajudar. Mãe, obrigada por sempre se aventurar por aí comigo, mesmo quando não conhecíamos direito o lugar para o qual estávamos indo. À minha querida irmã Luciana, por todas as conversas e histórias que compartilhamos. Que a Faylin ainda possa ter muitas aventuras. E vó, obrigada por todo amor e carinho.

Agradeço ainda à Nathaly pelas várias discussões que tivemos. Ao Luan, eu queria dizer obrigada por todas as muitas conversas e momentos de descontração.

Ao meu namorado Henrique, obrigada por todo seu carinho, amor e compreensão. Estar contigo é a melhor coisa que já me aconteceu. Te amo mais a cada dia.

Agradeço ainda ao CNPq cujo apoio financeiro tornou este trabalho possível.



# Resumo

Estudamos a construção de hierarquias integráveis. Essas hierarquias possuem infinitas equações de movimento que surgem de uma mesma estrutura algébrica. E por consequência dessa estrutura comum conseguimos encontrar soluções solitônicas para todas essas equações simultânea e sistematicamente, através do método de Dressing. Neste trabalho estudamos as hierarquias mKdV e KdV e calculamos explicitamente equações de movimento para os primeiros graus de ambas. Para a KdV, o Lax obtido, parece funcionar apenas para os graus positivos. Encontramos uma maneira de determinar as transformações de Bäcklund para os graus positivos da hierarquia mKdV e KdV usando o fato das equações de movimento poderem ser escritas como derivadas totais. Obtemos uma maneira sistemática de construir as transformações de Bäcklund das equações da hierarquia mKdV explorando a invariância da equação de curvatura nula por transformações de gauge. Determinamos as transformações de Bäcklund Tipo-I e Tipo-II para as equações de graus ímpares da hierarquia mKdV. Fizemos o cálculo explícito para os três primeiros graus positivos e os três primeiros graus negativos.

**Palavras chave:** Hierarquias integráveis, método de Dressing, Transformações de Bäcklund, mKdV, KdV, sólitons



# Abstract

We study the construction of integrable hierarchies. These hierarchies have infinite equations of motion which arise from the same algebraic structure, and, as a consequence, we can find simultaneously and systematically its solitonic solutions using the Dressing method. In this work, we study the mKdV and KdV hierarchies and calculate explicitly the first few equations of motion for both of them. To the KdV, the Lax operator seems to work only in positive degrees. We determine the Bäcklund Transformations to the positive degrees of mKdV and KdV hierarchies using the fact that equations of motion can be written as total derivatives. We obtain a systematic way to construct the Bäcklund Transformations for the equations of the mKdV hierarchy exploring the gauge invariance of zero curvature equation. We determine the Bäcklund Transformations of Type-I and Type-II for the odd-degrees equations of mKdV hierarchy. We make the explicit calculation for first three positive degrees and also for the next three negative ones.

**Keywords:** Integrable hierarchies, Dressing method, Bäcklund transformations, mKdV, KdV, solitons



# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Equações de movimento e suas soluções</b>	<b>5</b>
2.1 Integrabilidade e a equação de curvatura nula . . . . .	5
2.2 Transformações de Gauge . . . . .	6
2.3 Hierarquias Integráveis . . . . .	7
2.3.1 Construção da hierarquia . . . . .	8
2.3.2 Exemplo 1: Gradação Principal . . . . .	10
2.3.3 Exemplo 2: Gradação Homogênea . . . . .	14
2.4 Soluções das equações de movimento . . . . .	16
2.4.1 Método de Dressing . . . . .	16
2.4.2 Hierarquia KdV . . . . .	24
<b>3 Transformações de Bäcklund – Método da derivada total</b>	<b>25</b>
3.1 Primeiros conceitos . . . . .	25
3.1.1 Equação de Sinh-Gordon . . . . .	26
3.1.2 Equação KdV . . . . .	27
3.2 Método da Derivada Total – Hierarquia mKdV . . . . .	27
3.2.1 Verificações . . . . .	30
3.3 Método da Derivada Total – Hierarquia KdV . . . . .	31
3.3.1 Verificações . . . . .	34



<b>4</b>	<b>Transformações de Bäcklund via Transformações de Gauge</b>	<b>37</b>
4.1	Construção das transformações de Bäcklund . . . . .	37
4.1.1	Transformações de Bäcklund Tipo I . . . . .	38
4.1.2	Transformações de Bäcklund Tipo-II . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Álgebra de Kac-Moody <math>\hat{sl}(2)</math></b>	<b>55</b>
<b>B</b>	<b>Equações de movimento – Hierarquia mKdV</b>	<b>57</b>
B.1	Equações para graus positivos . . . . .	57
B.2	Equações para graus negativos . . . . .	59
<b>C</b>	<b>Equações de movimento – Hierarquia KdV</b>	<b>63</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Quando trata-se de modelos integráveis, um conceito muito importante é o de hierarquias integráveis, que consistem de um conjunto de equações diferenciais não lineares integráveis construídas a partir de uma representação da curvatura nula e que apresentam uma estrutura algébrica comum. Esse conjunto é formado por infinitas equações de evolução com relação a diferentes tempos, tendo em comum a parte espacial do seu par de Lax. A vantagem da utilização do Lax espacial se traduz em soluções de sóliton com uma estrutura universal[1].

As soluções citadas podem ser obtidas através do método de Dressing, o qual consiste basicamente de transformações de Gauge que levam uma solução de vácuo em uma outra solução fora do vácuo. Esse método permite obter soluções de todas as equações da hierarquia simultaneamente [1].

O interessante é que quando estudamos uma dada hierarquia acabamos percebendo que algumas equações, que já eram conhecidas há muito tempo e eram estudadas separadamente, pertencem a uma mesma hierarquia. Um exemplo disso são as equações de Sinh-Gordon e mKdV pertencentes a mesma hierarquia chamada Hierarquia mKdV.

Outro conceito que aparece, quando estudamos modelos integráveis, é o de Transformações de Bäcklund. Essas transformações interpolam de forma não-linear duas equações de movimento e são importantes pois permitem, dadas duas soluções de uma equação de movimento não linear integrável, obter uma outra solução algebricamente. Este resultado refere-se ao Teorema da Permutabilidade e pode ser usado para gerar outras soluções para uma dada equação diferencial não linear.

São conhecidas na literatura várias destas transformações sendo as mais bem estudadas referentes as seguintes equações: Sine-Gordon, Sinh-Gordon e KdV[2]. Outras também conhecidas são as transformações de Bäcklund das equações de Schrödinger não-linear[3] e mKdV[2].

Recentemente em [4, 5], foi obtido outro tipo de transformações de Bäcklund, chamadas de Tipo-II, via formulação de Defeitos e que contém um campo auxiliar inexistente no Tipo-I. A ideia de defeitos vem do fato de que uma dada solução sóliton pode se transformar numa outra solução a partir de uma certa posição espacial, digamos  $x = 0$  (posição do defeito), desde que a equação de movimento naquele ponto seja descrita através de transformações de Bäcklund. O formalismo lagrangiano que descreve um modelo integrável fora do defeito (i.e. para  $x \neq 0$ ) e na posição de defeito ( $x = 0$ ) foi desenvolvido em [4, 5] para o caso do modelo de Sinh-Gordon e equação Tzitzéica e em [6, 7] para a extensão supersimétrica da Sinh-Gordon. A generalização para outros modelos como mKdV e Schrödinger não linear também foram desenvolvidos em [8] de forma que a classificação de defeitos integráveis, resume-se na construção e classificação de transformações de Bäcklund. Além disso, em [9], foi proposto um método para obter as transformações de Bäcklund da equação de Sinh-Gordon e da equação Tzitzéica usando transformações de Gauge.

Como citamos anteriormente, as equações de uma dada hierarquia integrável possuem várias propriedades comuns entre si, que resultam da estrutura algébrica a que pertencem. É esperado então, que as transformações de Bäcklund das equações de uma hierarquia também tenham propriedades comuns entre si. Neste trabalho usamos o fato da parte espacial do par de Lax ser comum a toda a hierarquia mKdV para construir um método que permite encontrar todas as transformações de Bäcklund das equações de graus positivos das hierarquias mKdV e KdV. Propomos ainda outro método, que usa a invariância da equação de curvatura nula por transformações de Gauge e novamente o fato da parte espacial do par de Lax ser comum a todos os membros da hierarquia, para obter qualquer transformação de Bäcklund das equações referentes a graus ímpares da hierarquia mKdV.

Organizamos o trabalho da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos a construção das hierarquias integráveis através da equação de curvatura nula e calculamos explicitamente várias destas equações, incluindo algumas referentes a graus negativos. Apresentamos ainda o método de Dressing para obter soluções de sóliton das equações da hierarquia

e calculamos explicitamente as soluções das equações da hierarquia mKdV. São também apresentadas as soluções das equações da hierarquia KdV.

No capítulo 3, construímos um método[10] para obter as transformações de Bäcklund das equações de graus positivos das hierarquias mKdV e KdV. Calculamos explicitamente algumas dessas transformações e verificamos o que acontece quando substituímos algumas soluções de sóliton das equações de movimento nessas transformações.

No capítulo 4, propomos um método[10] que permite obter as transformações de Bäcklund de qualquer evolução temporal  $t_N$  com  $N$  ímpar, incluindo  $N$  negativo, da hierarquia mKdV, usando a invariância da equação de curvatura nula por transformações de Gauge. São apresentadas duas transformações de Gauge diferentes, uma que gera as Transformações de Bäcklund do Tipo I e outra que gera as do Tipo II. São calculadas as transformações para algumas equações de movimento explicitamente.

No capítulo 5, apresentamos a conclusão do nosso trabalho, mostrando os principais resultados e o que ainda pode ser feito.



## Capítulo 2

# Equações de movimento e suas soluções

Apresentamos o conceito de integrabilidade por meio da equação de curvatura nula[11, 12] e destacamos sua invariância por transformações de Gauge. Explicamos como uma hierarquia integrável pode ser construída a partir dessa equação; em especial, apresentamos o conceito de gradação de uma estrutura algébrica, e como usá-lo para obter as equações de movimento. Para algumas evoluções temporais das hierarquias mKdV e KdV, calculamos explicitamente as equações de movimento e obtemos a solução de sóliton relativa à mKdV pelo método de Dressing. Ressaltamos a importância do método aplicado, dado que as soluções apresentam uma forma comum a todos os membros da hierarquia. Soluções da hierarquia KdV são também apresentadas.

### 2.1 Integrabilidade e a equação de curvatura nula

Dado um modelo em 1+1 dimensões, com coordenadas  $(x, t_N)$  consideramos que um modelo é dito integrável se ele pode ser descrito por meio da equação de curvatura nula. Consideremos um sistema linear,

$$(\partial_x + A_x)\psi = 0, \tag{2.1a}$$

$$(\partial_t + A_{t_N})\psi = 0, \tag{2.1b}$$

no qual  $A_x$  e  $A_{t_N}$  são potenciais de Gauge, também conhecidos como par de Lax. Nesta equação,  $A_x$  e  $A_{t_N}$  são matrizes cujas entradas são funções dos  $n$  campos da teoria  $v_i(x, t_N)$ , e de suas derivadas de qualquer ordem, e pertencem a álgebra. Verificando a compatibilidade entre as equações (2.1a) e (2.1b) obtemos

$$[\partial_x + A_x, \partial_t + A_{t_N}] = 0, \quad (2.2)$$

que é conhecida como equação de curvatura nula. Podemos construir um conjunto de equações de evolução temporal com respeito a diferentes tempos  $t_N$ , que são soluções da condição de curvatura nula (2.2). Este conjunto de equações é chamado Hierarquia Integrável.

## 2.2 Transformações de Gauge

A equação de curvatura nula é invariante por transformações de Gauge, ou seja,

$$[\partial_x + A'_x, \partial_{t_N} + A'_{t_N}] = 0, \quad (2.3)$$

se reduz a

$$[\partial_x + A_x, \partial_{t_N} + A_{t_N}] = 0, \quad (2.4)$$

se fizermos

$$A'_x = UA_xU^{-1} - \partial_xUU^{-1} \quad e \quad A'_{t_N} = UA_{t_N}U^{-1} - \partial_{t_N}UU^{-1}, \quad (2.5)$$

onde  $U$  é uma matriz  $2 \times 2$  que depende dos campos da teoria e pertence ao grupo. A invariância da equação de curvatura nula por transformações de Gauge é uma propriedade muito importante. Através dela podemos obter tanto soluções de sóliton das equações diferenciais não lineares envolvidas, como transformações de Bäcklund, que nos permitem gerar ainda outras soluções dessas equações. Falaremos mais sobre a importância dessa invariância na seção (2.4.1) e no capítulo (3) quando construirmos as transformações de Bäcklund.

## 2.3 Hierarquias Integráveis

A equação de curvatura nula é importante no contexto de modelos integráveis, pois permite construir várias classes de modelos, as chamadas hierarquias integráveis. As hierarquias integráveis correspondem a um conjunto com um número infinito (uma para cada  $t_N$ ) de equações integráveis que possuem propriedades comuns entre si. Como veremos no decorrer deste capítulo, as equações pertencentes a uma mesma hierarquia possuem a parte em  $x$  do par de Lax em comum. Para cada tempo  $t_N$ , obtemos então uma equação de movimento diferente. Essas equações apresentam soluções sólon com uma estrutura universal, já que possuem o mesmo operador de Lax espacial. Ou seja, obtemos simultaneamente e sistematicamente a solução de infinitas equações diferenciais não lineares. Vejamos agora como se dá esta construção.

A construção das hierarquias integráveis através da equação de curvatura nula se inicia com duas escolhas: a álgebra e a gradação. Com relação a álgebra, escolhemos neste trabalho, a álgebra  $\hat{\mathcal{G}}$  de Kac-Moody  $\hat{sl}(2)$ <sup>1</sup>.

O operador de gradação  $Q$  é um operador que decompõe a álgebra em subespaços graduados de forma que

$$\hat{\mathcal{G}} = \oplus \hat{\mathcal{G}}^{(n)}. \quad (2.6)$$

onde

$$[Q, \hat{\mathcal{G}}^{(n)}] = n\hat{\mathcal{G}}^{(n)}, \quad (2.7)$$

e  $n$  é chamado de grau e pertence a  $\mathbb{Z}$ . Além disso, da identidade de Jacobi, temos

$$[\hat{\mathcal{G}}^{(n)}, \hat{\mathcal{G}}^{(m)}] \subset \hat{\mathcal{G}}^{(n+m)}. \quad (2.8)$$

Na gradação homogênea o operador  $Q$  é dado por  $Q = \lambda \frac{d}{d\lambda}$  e essa é a gradação que dá origem a hierarquia AKNS e em um limite a Hierarquia da KdV. A gradação principal, por sua vez, é composta de  $Q = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}H^{(0)}$  e dá origem a hierarquia mKdV. Nestas equações

---

<sup>1</sup>Para mais informações sobre a álgebra de Kac-Moody  $\hat{sl}(2)$  ver no apêndice A



$\lambda$  está diretamente ligado ao grau, no sentido que  $T^{(n)} = \lambda^n T^{(0)}$ , com  $T^{(n)}$  representando os geradores da álgebra de Kac-Moody. A maneira como essas gradações são obtidas pode ser encontrada em [13].

### 2.3.1 Construção da hierarquia

Após a escolha da gradação, devemos construir o par de Lax do modelo. Como vimos, o operador de gradação nos permite separar a álgebra em graus diferentes. Podemos então, escrever, para cada o operador de gradação, todos os geradores de uma álgebra que possuem determinado grau. Vamos definir o Lax como,  $A_x = A_0 + E^{(1)}$ , com  $A_0$  contendo os campos da teoria e possuindo grau zero, e  $E^{(1)}$  tendo gradação igual a um.

Mas como sabemos o que exatamente são exatamente  $E^{(1)}$  e  $A_0$ ? Fazemos uma outra decomposição da álgebra:  $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ , onde  $\mathcal{K}$  é chamado de Kernel e  $\mathcal{M}$  é chamado de Imagem.

Definimos o Kernel de  $E^{(1)}$  como

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \hat{\mathcal{G}} / [f, E^{(1)}] = 0 \right\} \quad (2.9)$$

sendo a Imagem  $\mathcal{M}$  o seu complemento, e temos que  $[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}$ ,  $[\mathcal{K}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}$  e  $[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{K}$ .

Com estas informações podemos construir o operador de Lax em  $x$  e determinar o operador de Lax em  $t_N$  para qualquer  $N$ .

#### Parte positiva da hierarquia

A parte positiva da hierarquia integrável pode ser construída, escrevendo  $A_t = D^{(N)} + D^{(N-1)} + \dots + D^{(0)}$ , de modo que a equação de curvatura nula fica

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_N} + D^{(N)} + D^{(N-1)} + \dots + D^{(0)} \right] = 0 \quad (2.10)$$

na qual,  $D^{(N)}$  possui grau  $N$  e deverá ser determinado para que a equação de movimento para o grau  $N$  seja obtida. Uma das vantagens da utilização do operador gradação é que

podemos separar a equação (2.10) grau a grau como

$$\begin{aligned}
(N+1) \quad & [E^{(1)}, D^{(N)}] = 0 \\
(N) \quad & \partial_x D^{(N)} + [A_0, D^{(N)}] + [E^{(1)}, D^{(N-1)}] = 0 \\
(N-1) \quad & \partial_x D^{(N-1)} + [A_0, D^{(N-1)}] + [E^{(1)}, D^{(N-2)}] = 0 \\
& \dots \\
(1) \quad & \partial_x D^{(1)} + [A_0, D^{(1)}] + [E^{(1)}, D^{(0)}] = 0 \\
(0) \quad & \partial_x D^{(0)} + [A_0, D^{(0)}] - \partial_{t_N} A_0 = 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

O que fazemos então para encontrar as equações de movimento é começar resolvendo a equação de maior grau e ao ir obtendo os resultados substituir estes na equação de grau imediatamente abaixo. Na seção (2.3.2) são apresentados alguns exemplos.

### Parte Negativa da hierarquia

A parte negativa da hierarquia, por sua vez, tem  $A_{t_N} = D^{(-N)} + D^{(-N+1)} + D^{(-N+2)} + \dots + D^{(-1)}$ , de modo que a equação de curvatura nula possui a forma

$$[\partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_N} + D^{(-N)} + D^{(-N+1)} + D^{(-N+2)} + \dots + D^{(-1)}] = 0 \tag{2.12}$$

que separada em graus fornece

$$\begin{aligned}
(-N) \quad & \partial_x D^{-N} + [A_0, D^{(-N)}] = 0 \\
(-N+1) \quad & \partial_x D^{(-N+1)} + [A_0, D^{(-N+1)}] + [E^{(1)}, D^{(-N)}] = 0 \\
& \dots \\
(-1) \quad & \partial_x D^{(-1)} + [A_0, D^{(-1)}] + [E^{(1)}, D^{(-2)}] = 0 \\
(0) \quad & [E^{(1)}, D^{(-1)}] - \partial_{t_N} A_0 = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Novamente, para obter a equação de movimento é só ir resolvendo as equações grau a grau até a de grau zero.

### 2.3.2 Exemplo 1: Gradação Principal

A gradação principal, como já citada anteriormente, é dada por

$$Q = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}H^{(0)}, \quad (2.14)$$

que resulta em

$$\left[ Q, E_{\pm\alpha}^{(n)} \right] = (2n \pm 1) E_{\pm\alpha}^{(n)}, \quad \left[ Q, H^{(n)} \right] = 2nH^{(n)}. \quad (2.15)$$

Sendo assim, o conjunto dos geradores que tem graus pares é dado por

$$\hat{\mathcal{G}}_{(2n)} : \left\{ H^{(n)} \right\} \quad (2.16)$$

e o conjunto os geradores que possuem graus ímpares, por sua vez, é dado por

$$\hat{\mathcal{G}}_{(2n+1)} : \left\{ E_{\alpha}^{(n)}, E_{-\alpha}^{(n+1)} \right\}. \quad (2.17)$$

Portanto, se escolhermos  $E^{(1)}$  como uma combinação linear dos geradores que possuem grau (1), podemos defini-lo como

$$E^{(1)} = E_{\alpha}^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}, \quad (2.18)$$

e o  $A_0$ , por sua vez, é dado por

$$A_0 = v(x, t)H^{(0)} \quad (2.19)$$

onde  $v(x, t)$  é o campo do modelo. Quando construímos uma hierarquia usando a álgebra de Kac-Moody  $\hat{sl}(2)$  e a gradação principal, esta é chamada Hierarquia mKdV. Apresentamos como exemplo algumas equações de movimento que fazem parte dessa hierarquia e como obtê-las.

#### 1. Equação de Sinh-Gordon

A equação de Sinh-Gordon é a equação da Hierarquia mKdV para grau  $(-1)$ . Para obtê-la, escrevemos a equação de curvatura nula como

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_{-1}} + D^{(-1)} \right] = 0. \quad (2.20)$$

Pela regra da equação (2.15) vemos que os geradores que possuem grau  $(-1)$  são  $E_\alpha^{(-1)}$  e  $E_{-\alpha}^{(0)}$ . E portanto,  $D^{(-1)} = a_{-1}E_\alpha^{(-1)} + b_{-1}E_{-\alpha}^{(0)}$  onde  $a_{-1}$  e  $b_{-1}$  devem ser determinados, sendo funções dos campos e possivelmente de suas derivadas. Como explicado anteriormente podemos separar a equação (2.20) em graus de modo que

$$\begin{aligned} (-1) \quad & \partial_x D^{(-1)} + [A_0, D^{(-1)}] = 0 \\ (0) \quad & [E^{(1)}, D^{(-1)}] - \partial_{t_{-1}} A_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Resolvendo a equação de grau  $(-1)$  obtemos que

$$a_{-1} = e^{-2\phi} \quad e \quad b_{-1} = e^{2\phi} \quad (2.22)$$

e substituindo estes resultados na equação de grau  $(0)$ , usando também que  $v(x, t) = \partial_x \phi$  obtemos que

$$\partial_{t_{-1}} \partial_x \phi = 2 \sinh(2\phi), \quad (2.23)$$

que é conhecida como equação de Sinh-Gordon.

## 2. mKdV

A equação mKdV, que é a equação que dá nome a essa hierarquia, é obtida para  $N = 3$ . A fim de encontrar essa equação, substituímos  $N = 3$  na equação (2.10) obtendo a seguinte equação de curvatura nula

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_3} + D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} \right] = 0 \quad (2.24)$$

Temos que calcular cada um dos  $D^{(N)}$ . Para fazer isso é importante vermos o que pertence

a qual grau. Usando as equações (2.16) e (2.17) vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_3 &: \{E_\alpha^{(1)}, E_{-\alpha}^{(2)}\} \\
\mathcal{G}_2 &: \{H^{(1)}\} \\
\mathcal{G}_1 &: \{E_\alpha^{(0)}, E_{-\alpha}^{(1)}\} \\
\mathcal{G}_0 &: \{H^{(0)}\}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

com  $\mathcal{G}_i$  sendo o conjunto dos geradores que possuem grau  $i$ . Podemos escrever  $D^{(n)}$  como uma combinação linear de todos os geradores que tem grau  $n$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned}
D^{(3)} &= a_3 E_\alpha^{(1)} + b_3 E_{-\alpha}^{(2)} \\
D^{(2)} &= a_2 H^{(1)} \\
D^{(1)} &= a_1 E_\alpha^{(0)} + b_1 E_{-\alpha}^{(1)} \\
D^{(0)} &= a_0 H^{(0)}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde  $a_i$  e  $b_i$  devem ser determinados e podem depender dos campos e de suas derivadas de qualquer ordem. Após colocarmos estas expressões na equação de curvatura nula e resolvermos grau a grau, obtemos que

$$\begin{aligned}
D^{(3)} &= E_\alpha^{(1)} + E_{-\alpha}^{(2)}; \\
D^{(2)} &= v H^{(1)} \\
D^{(1)} &= \left(-\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\partial_x v\right) E_\alpha^{(0)} - \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\partial_x v\right) E_{-\alpha}^{(1)} \\
D^{(0)} &= \frac{1}{4}(\partial_{2x} v - 2v^3) H^{(0)}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

e colocando o  $D^{(0)}$  na equação de grau (0) obtemos que a equação de movimento é

$$4\partial_{t_3} v = \partial_{3x} v - 6v^2 \partial_x v. \tag{2.28}$$

que é conhecida como equação mKdV.

### 3. Equações para N=5 e N=7

Podemos obter as equações para graus superiores da hierarquia mKdV seguindo este mesmo processo<sup>2</sup>. Se fizermos isso para  $N = 5$  obtemos a seguinte equação de movimento

$$16\partial_{t_5}v = \partial_{5x}v - 10(\partial_x v)^3 - 40v(\partial_x v)(\partial_{2x}v) - 10v^2(\partial_{3x}v) + 30v^4(\partial_x v), \quad (2.29)$$

e para  $N = 7$  obtemos

$$\begin{aligned} 64\partial_{t_7}v = & \partial_{7x}v - 182(\partial_x v)(\partial_{2x}v)^2 - 126(\partial_x v)^2(\partial_{3x}v) - 140v(\partial_{2x}v)(\partial_{3x}v) + \\ & - 84v(\partial_x v)(\partial_{4x}v) - 14v^2(\partial_{5x}v) + 420v^2(\partial_x v)^3 + 560v^3(\partial_x v)(\partial_{2x}v) + \\ & + 70v^4(\partial_{3x}v) - 140v^6(\partial_x v). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para obter equações de graus maiores basta seguir o mesmo procedimento.

#### 4. Equações para graus mais negativos

Podemos também usar a equação (2.12) para obter as equações de graus mais negativos. Fizemos este cálculo para os graus (-2), (-3), (-4) e (-5).<sup>3</sup> Colocando então,  $N = 2$  na equação (2.12) e resolvendo grau a grau obtemos a seguinte equação de movimento

$$\partial_{t_{-2}}\partial_x\phi = 4e^{2\phi} \int^x e^{-2\phi} dx' + 4e^{-2\phi} \int^x e^{2\phi} dx' \quad (2.31)$$

Já para grau (-3) obtemos

$$\partial_{t_{-3}}\partial_x\phi = 4e^{2\phi} \int^x e^{-2\phi} I(\phi) dx' + 4e^{-2\phi} \int^x e^{2\phi} I(\phi) dx', \quad (2.32)$$

onde  $I(\phi) = \int^x \sinh(2\phi) dx'$ . Para o grau (-4) por sua vez, obtemos E finalmente, para grau (-5) obtemos

$$\partial_{t_{-5}}\partial_x\phi = 8e^{2\phi} \int^x e^{-2\phi} Y(\phi) dx' + 8e^{-2\phi} \int^x e^{2\phi} Y(\phi) dx', \quad (2.33)$$

onde  $Y = \int^x \left( e^{2\phi} \int^{x'} I(\phi) e^{-2\phi} dx'' + e^{-2\phi} \int^{x'} I(\phi) e^{2\phi} dx'' \right) dx'$ . Poderia-se, no entanto, perguntar: por que escrevemos graus pares apenas para a parte negativa da hierarquia?

<sup>2</sup>Para mais detalhes olhar no Apêndice B

<sup>3</sup>Para mais detalhes olhar no Apêndice B

Para entender isso, precisamos observar a equação de grau mais alto de (2.11). Temos uma relação de comutação entre  $E^{(1)} \in \mathcal{K}$  e  $D^{(N)}$ , que é igual a zero, e quando  $N$  é par temos que  $D^{(N)} \in \mathcal{M}$ , mas isso é uma contradição, porque se algo comuta com  $E^{(1)}$  ele está por definição no  $\mathcal{K}$ . Desta maneira, os graus pares positivos, não podem existir para a hierarquia mKdV. A parte negativa não tem esse problema porque a equação (2.13) não apresenta nenhuma restrição nesse sentido. No entanto, mostraremos na seção (2.4.1) que as equações para  $N$ 's pares negativos possuem também algumas características diferentes das ímpares.

### 2.3.3 Exemplo 2: Gradação Homogênea

O operador de gradação homogênea é dado por

$$Q = \lambda \frac{d}{d\lambda} \quad (2.34)$$

de modo que

$$\left[ Q, E_{\pm\alpha}^{(n)} \right] = nE_{\pm\alpha}^{(n)}, \quad \left[ Q, H^{(n)} \right] = nH^{(n)}. \quad (2.35)$$

Sendo assim podemos escrever o conjunto dos geradores que possuem grau  $n$  como

$$\mathcal{G}_n : \left\{ E_{\alpha}^{(n)}, E_{-\alpha}^{(n)}, H^{(n)} \right\}. \quad (2.36)$$

Desta forma, se definirmos  $E^{(1)}$  como

$$E^{(1)} = H^{(1)}, \quad (2.37)$$

de forma que  $A_0$  fica

$$A_0 = qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}, \quad (2.38)$$

onde  $q = q(x, t)$  e  $r = r(x, t)$  são os campos da teoria. E podemos escrever, usando (2.36), os  $D$ 's da equação de curvatura nula que possuem determinado grau apenas como uma combinação linear dos geradores que possuem aquele grau. Notemos ainda que nessa

hieraquia facilita bastante os cálculos separamos os  $D$ 's em Kernel e Imagem, ou seja,

$$D^{(n)} = D_{\mathcal{K}}^{(n)} + D_{\mathcal{M}}^{(n)}. \quad (2.39)$$

Se seguíssemos esse raciocínio e calculássemos as equações de movimento teríamos a chamada hierarquia AKNS. No entanto, no momento, nosso interesse está na hierarquia KdV, que pode ser obtida (somente para graus positivos) [3] se fizermos  $q = -1$  e  $r = J$ , onde  $J = J(x, t_N)$  é agora o campo da teoria.

Isso significa que para construirmos a hierarquia KdV consideramos

$$E^{(1)} = H^{(1)} \quad e \quad A_0 = -E_{\alpha}^{(0)} + JE_{-\alpha}^{(0)}. \quad (2.40)$$

### **N=3 (equação KdV)**

Colocando  $N = 3$  na equação de curvatura nula (2.10), com  $E^{(1)}$  e  $A_0$  dados por (2.40), e calculando grau a grau obtemos

$$4\partial_{t_3}J = \partial_{3x}J + 6J(\partial_xJ), \quad (2.41)$$

que é a chamada equação KdV<sup>4</sup>.

### **N=5 e N=7**

Se, no entanto, colocarmos  $N = 5$  na equação (2.10) obtemos<sup>5</sup>

$$16\partial_{t_5}J = \partial_{5x}J + 20(\partial_xJ)(\partial_{2x}J) + 10J(\partial_{3x}J) + 30J^2(\partial_xJ), \quad (2.42)$$

e para  $N = 7$  encontramos

$$\begin{aligned} 64\partial_{t_7}J = & \partial_{7x}J + 70(\partial_{2x}J)(\partial_{3x}J) + 42(\partial_xJ)(\partial_{4x}J) + 70(\partial_xJ)^3 + \\ & + 14J(\partial_{5x}J) + 280J(\partial_xJ)(\partial_{2x}J) + 70J^2(\partial_{3x}J) + 140J^3(\partial_xJ). \end{aligned} \quad (2.43)$$

---

<sup>4</sup>Mais detalhes no Apêndice C

<sup>5</sup>Mais detalhes no Apêndice C



## 2.4 Soluções das equações de movimento

### 2.4.1 Método de Dressing

O método de Dressing é um método que permite encontrar soluções de sóliton das equações de uma hierarquia integrável através de transformações de Gauge. Isso é possível devido a invariância da equação de curvatura nula por transformações de Gauge.

O método consiste em usarmos uma solução conhecida, chamada solução de vácuo, da equação de curvatura nula, para gerar através de transformações de gauge novas soluções.

Além disso, o método fornece soluções cuja forma é comum a todas as equações da hierarquia integrável, usando o Lax em  $x$ .

Dado um par de Lax,  $A_x$  e  $A_{t_N}$  qualquer, quando no vácuo chamaremos de  $A_{x0}$  e  $A_{t_N0}$ . E podemos escrever

$$A_{x0} = -\partial_x T_0 T_0^{-1} \quad e \quad A_{t_N0} = -\partial_{t_N} T_0 T_0^{-1} \quad (2.44)$$

das quais obtemos a forma explícita de  $T_0$  para cada modelo, dado que em cada modelo temos  $A_{x0}$  e  $A_{t_N0}$  diferentes. Definimos então

$$\Theta = \Theta_-^{-1} \Theta_+ = T_0 g T_0^{-1} \quad (2.45)$$

onde

$$\Theta_+ = e^{m(0)} e^{m(1)} e^{m(2)} \dots \quad e \quad \Theta_- = e^{m(-1)} e^{m(-2)} \dots, \quad (2.46)$$

ou seja,  $\Theta_+$  contém os operadores de graus positivos e  $\Theta_-$  contém os operadores de graus negativos. Levando isso em consideração escrevemos as transformações de Gauge que caracterizam o método de Dressing da seguinte maneira

$$A_x = \Theta_{\pm} A_{x0} \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_x \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1} \quad (2.47)$$

$$A_{t_N} = \Theta_{\pm} A_{t_N0} \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_{t_N} \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1} \quad (2.48)$$

e como  $A_x$  pode ser escrito como  $A_x = E^{(1)} + A_0$  e o campo da teoria está em  $A_0$ , que

tem grau zero, podemos olhar só para os termos de grau zero da equação. Desta maneira obtemos uma nova solução que depende da solução no vácuo e de  $x$  e  $t_N$ .

Para obter explicitamente a solução, será necessário projetar alguns geradores da álgebra nos estados de peso mais alto. Por esta razão a álgebra que estivermos considerando precisa ter representação de peso mais alto<sup>6</sup>. A álgebra de Kac-Moody  $\hat{sl}(2)$  com termo central possui essa representação e será utilizada nesse trabalho.

Os estados de peso mais alto da álgebra de Kac-Moody são chamados  $|\mu_0\rangle$  e  $|\mu_1\rangle$  e têm as seguintes propriedades:

$$H^{(n)}|\mu_0\rangle = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \quad (2.49)$$

$$E_{\pm\alpha}^n|\mu_i\rangle = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } i=0,1 \quad (2.50)$$

$$H^{(n)}|\mu_1\rangle = 0 \text{ para todo } n \neq 0 \text{ (} n \in \mathbb{Z} \text{)} \quad (2.51)$$

$$H^{(0)}|\mu_1\rangle = |\mu_1\rangle \quad (2.52)$$

$$\hat{c}|\mu_i\rangle = c|\mu_i\rangle \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } i=0,1 \quad (2.53)$$

Escrevemos então a equação (2.45) atuada nos estados de peso mais alto

$$\tau_{ij} \equiv \langle \mu_i | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \mu_j \rangle = \langle \mu_i | T_0 g T_0^{-1} | \mu_j \rangle, \quad (2.54)$$

com  $i, j = 0, 1$ . Calculamos primeiramente da equação (2.54)  $\langle \mu_i | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \mu_j \rangle$ . Escrevemos

$$\tau_{ij} = \langle \mu_i | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \mu_j \rangle = \langle \mu_i | \dots e^{-m(-2)} e^{-m(-1)} e^{m(0)} e^{m(1)} e^{m(2)} \dots | \mu_j \rangle, \quad (2.55)$$

e como  $m(s > 0) |\mu_i\rangle = 0$  e  $\langle \mu_i | -m(-s < 0) = 0$ , obtemos

$$\tau_{ij} = \langle \mu_i | \Theta_-^{-1} \Theta_+ | \mu_j \rangle = \langle \mu_i | e^{m(0)} | \mu_j \rangle, \quad (2.56)$$

já que o grau zero é o único que não anula o estado de peso mais alto.

---

<sup>6</sup>Para mais detalhes ver o Apêndice A.

A solução pode então ser tirada de

$$\frac{\tau_{ij}}{\tau_{00}} = \frac{\langle \mu_i | e^{m(0)} | \mu_j \rangle}{\langle \mu_0 | e^{m(0)} | \mu_0 \rangle}. \quad (2.57)$$

Mas para resolver isso e isolar o(s) campo(s) da teoria precisamos determinar quem são  $\tau_{ij}$  e  $\tau_{00}$ . Fazemos isso calculando o outro lado da equação (2.54) que é  $\tau_{ij} = \langle \mu_i | T_0 g T_0^{-1} | \mu_j \rangle$ .

Para isso definimos  $g$  em termos dos chamados operadores de vértice  $F_i$

$$g = \prod_{l=0}^s \exp(F_l), \quad (2.58)$$

e os operadores de vértice devem ser autoestados simultâneos dos operadores de Lax no vácuo  $A_{x0}$  e  $A_{t_N 0}$ , ou seja,

$$[A_{x0}, F_i] = -\kappa_i F_i \quad e \quad [A_{t_N 0}, F_i] = -\gamma_i F_i. \quad (2.59)$$

Precisamos escrever  $T_0 g T_0^{-1}$  em termos de  $F_i$ . Para fazer isso basta usar que  $e^x y e^{-x} = y + [x, y] + \frac{1}{2!}[x, [x, y]]$  e obtemos

$$T_0 g T_0^{-1} = \prod_{l=0}^s \exp(e^{\eta_l} F_l), \quad (2.60)$$

onde  $\eta_i$  depende de  $x$ ,  $t_N$  e do autovalores de  $F_i$ .

Como os operadores de vértice são nilpotentes, ou seja,  $\langle \mu_i | F_i^2 | \mu_j \rangle = 0$  então podemos escrever que

$$\tau_{ij} = \langle \mu_i | T_0 g T_0^{-1} | \mu_j \rangle = \langle \mu_i | \prod_{l=0}^s (1 + e^{\eta_l} F_l) | \mu_j \rangle \quad (2.61)$$

O índice  $s$  indica qual solução estamos obtendo, para solução de 1-sóliton escrevemos  $s = 1$ , para solução de 2-sóliton usamos  $s = 2$  e assim por diante.

A hierarquia mKdV tem uma característica muito interessante no que se refere as soluções das equações que a ela pertencem: as equações oriundas de graus ímpares da hierarquia admitem  $\phi = 0$  como solução, enquanto as resultantes de graus pares não o fazem. Na verdade, as equações que vêm de graus pares possuem soluções constantes

desde que diferentes de zero.

Vamos agora usar o método para obter as soluções das equações pertencentes a hierarquia mKdV. Para isso levaremos em conta essa diferença nas soluções, dado que alteram o par de Lax no vácuo, resultando em soluções diferentes geradas pelo método de Dressing. Separaremos então a próxima seção em soluções com condição de contorno nula e soluções com condição de contorno não-nula.

### Exemplo: Hierarquia mKdV

#### Com condição de Contorno Nula

Quando temos condição de contorno nula o par de Lax no vácuo é dado por

$$A_{x0} = E^{(1)} \quad e \quad A_{t_N0} = E^{(N)}, \quad (2.62)$$

que juntamente com a equação (2.44) nos dá que  $T_0 = \exp(-E^1 x - E^N t_N)$ .

Temos ainda que  $A_x = E^{(1)} + A_0 - \partial_x \nu \hat{c}$ . Colocando este resultado juntamente com a equação (2.62) na equação (2.47) obtemos a seguinte equação

$$E^{(1)} + A_0 - \partial_x \nu \hat{c} = \Theta_+ E^{(1)} \Theta_+^{-1} - \partial_x \Theta_+ \Theta_+^{-1}. \quad (2.63)$$

Substituindo a forma explícita de  $\Theta_+$  na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned} E^{(1)} + A_0 - \partial_x \nu \hat{c} &= e^{m(0)} e^{m(1)} e^{m(2)} \dots E^{(1)} \dots e^{-m(2)} e^{-m(1)} e^{-m(0)} + \\ &\quad - \partial_x \left( e^{m(0)} e^{m(1)} e^{m(2)} \dots \right) \dots e^{-m(2)} e^{-m(1)} e^{-m(0)} \\ &= e^{m(0)} e^{m(1)} e^{m(2)} \dots E^{(1)} \dots e^{-m(2)} e^{-m(1)} e^{-m(0)} + \\ &\quad - \partial_x (e^{m(0)}) e^{-m(0)} - e^{m(0)} \partial_x (e^{m(1)}) e^{-m(1)} e^{-m(0)} + \\ &\quad - e^{m(0)} e^{m(1)} \partial_x (e^{m(2)}) e^{-m(2)} e^{-m(1)} e^{-m(0)} + \dots \end{aligned} \quad (2.64)$$

O próximo passo consiste em selecionar apenas os termos que possuem grau zero já que o campo da teoria está em  $A_0$ . A equação para grau zero fica então

$$A_0 - \partial_x \nu \hat{c} = -\partial_x \left( e^{m(0)} \right) e^{-m(0)}, \quad (2.65)$$

Escolhemos então  $A_0$  com uma forma puro gauge

$$A_0 = -\partial_x B B^{-1} \quad (2.66)$$

onde  $B$  é um elemento do grupo que possui apenas geradores da álgebra que possuem grau zero. Usando as equações (2.65) e (2.66) em conjunto obtemos então que

$$e^{m(0)} = B e^{\nu \hat{c}}. \quad (2.67)$$

Escolho então

$$B = e^{\phi H^{(0)}} \quad (2.68)$$

e como  $A_0 = u H^{(0)}$ , da equação (2.67) encontramos

$$u = -\partial_x \phi. \quad (2.69)$$

Para determinarmos então o  $\phi$  e conseqüentemente o  $u$  substituímos a equação (2.67), com  $B$  dado pela equação (2.68), na equação (2.57). Desta maneira, obtemos

$$\frac{\tau_{11}}{\tau_{00}} = \frac{\langle \mu_1 | e^{\phi H^{(0)} + \nu \hat{c}} | \mu_1 \rangle}{\langle \mu_0 | e^{\phi H^{(0)} + \nu \hat{c}} | \mu_0 \rangle} = \frac{e^{\nu + \phi}}{e^{\nu}} = e^{\phi}, \quad (2.70)$$

que implica

$$\phi = \ln \left( \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}} \right). \quad (2.71)$$

Para termos a solução só falta obter as funções  $\tau_{ij}$ , o que pode ser feito através da equação (2.61). Porém, para fazer isso precisamos do operador de vértice do modelo. No caso da hierarquia mKdV o operador de vértice é dado por

$$F_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_i k_i^{-2n} \left( H^{(n)} - \frac{1}{2} \delta_{n0} \hat{c} + k_i^{-1} E_{\alpha}^{(n)} - k_i^{-1} E_{-a}^{(n+1)} \right) \quad (2.72)$$

de modo que

$$\left[ E^{(N)}, F_i \right] = -2k^N F_i \quad (2.73)$$

de modo que  $\eta_i = 2k_i x + 2k_i^N t_N$ . Assim, usando a equação (2.61) para  $s = 1$  obtemos

$$\tau_{11} = 1 + \frac{1}{2} b_1 \rho_1 \quad e \quad \tau_{00} = 1 - \frac{1}{2} b_1 \rho_1, \quad (2.74)$$

de maneira que, usando  $\rho_i \equiv e^{\eta_i}$  e  $a_i \equiv \frac{1}{2} b_i$ , a equação (2.71) fica

$$\phi_1 = \ln \left( \frac{1 + a_1 \rho_1}{1 - a_1 \rho_1} \right) \quad (2.75)$$

que é a solução de 1-sóliton das equações da hierarquia mKdV.

Para obter a solução de 2-sóliton, basta substituir  $s = 2$  na equação (2.61) e substituir os resultados obtidos na equação (2.71) que obtemos a seguinte expressão

$$\phi_2 = \ln \left( \frac{1 + a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2 + a_{12} a_1 a_2 \rho_1 \rho_2}{1 - a_1 \rho_1 - a_2 \rho_2 + a_{12} a_1 a_2 \rho_1 \rho_2} \right), \quad (2.76)$$

onde  $a_{12} = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$ .

### Com condição de Contorno Não-Nula

No caso da hierarquia mKdV, as equações diferenciais não lineares que são soluções da condição de curvatura nula para  $N$  par, não admitem  $\phi = 0$  como solução. Por essa razão, não podemos determinar suas soluções da maneira apresentada anteriormente. Encontramos as soluções para essas equações assumindo como solução de vácuo  $v = v_0 \neq 0$  [11]. Considerando condição de contorno não-nula, temos então, que o par de Lax no vácuo é dado por

$$A_{x0} = E_1 + A_0^0 \quad e \quad A_{t-2m0} = \frac{1}{v_0} \left( E_\alpha^{(-m)} + E_{-\alpha}^{(1-m)} \right) + H^{(-m)} \quad (2.77)$$

onde  $m \in \mathbb{N}$  e  $A_0^0 = v_0 H^{(0)}$ . Temos ainda que  $A_x = E^{(1)} + A_0 - \partial_x \nu \hat{c}$ . Se colocarmos este

resultado juntamente com (2.77) na equação (2.47) obtemos

$$E^{(1)} + A_0 - \partial_x \nu \hat{c} = \Theta_+ \left( E^{(1)} + v_0 H^{(0)} \right) \Theta_+^{-1} - \partial_x \Theta_+ \Theta_+^{-1} \quad (2.78)$$

e usando a definição para  $\Theta_+$  apresentada em (2.46) e pegando todos os termos que possuem grau zero encontramos a seguinte equação

$$-\partial_x B B^{-1} - \partial_x \nu \hat{c} = -\partial_x (e^{m(0)}) e^{-m(0)} + v_0 H^{(0)} \quad (2.79)$$

onde usamos que  $A_0 = -\partial_x B B^{-1}$ . Temos então que

$$e^{m(0)} = B e^{v_0 x H^{(0)}} e^{\nu \hat{c}}, \quad (2.80)$$

e assumimos que  $B = e^{\phi H^{(0)}}$ . Usando então a equação (2.57) tenho que

$$\tau_{00} = \langle \mu_0 | e^{\phi H^{(0)}} e^{v_0 x H^{(0)}} e^{\nu \hat{c}} | \mu_0 \rangle = e^\nu \quad (2.81)$$

e

$$\tau_{11} = \langle \mu_1 | e^{\phi H^{(0)}} e^{v_0 x H^{(0)}} e^{\nu \hat{c}} | \mu_1 \rangle = e^{\phi + v_0 x + \nu} \quad (2.82)$$

e dividindo uma pela outra obtemos

$$\frac{\tau_{11}}{\tau_{00}} = e^{\phi + v_0 x} \rightarrow \phi = -v_0 x + \ln \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}}, \quad (2.83)$$

e como  $v = -\partial_x \phi$  então

$$v = v_0 - \partial_x \ln \left( \frac{\tau_{11}}{\tau_{00}} \right). \quad (2.84)$$

Esta será então a solução das equações diferenciais oriundas de graus pares da hierarquia mKdV. Para obter a solução explícita precisamos agora encontrar  $\tau_{11}$  e  $\tau_{00}$  usando operadores de vértice. Precisamos de um operador de vértice que seja autoestado simultâneo de

$A_{x0}$  e  $A_{t-2m}$ . Este operador será o seguinte

$$F_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_i^2 - v_0^2)^{-n} \left[ H^{(n)} + \frac{v_0 - \gamma}{2\gamma_i} \delta_{n,0} \hat{c} + E_{\alpha}^{(n)} (\gamma_i + v_0)^{-1} - E_{-\alpha}^{(n+1)} (\gamma_i - v_0)^{-1} \right] \quad (2.85)$$

de modo que

$$[A_{x0}, F_i] = 2\gamma_i F_i \quad e \quad [A_{t-2m}, F_i] = -2\gamma_i (\gamma_i^2 - v_0^2)^{-m} F_i. \quad (2.86)$$

Definimos então  $\rho_i = e^{\eta_i} = \exp \left[ 2\gamma_i x + \frac{2\gamma_i}{(\gamma_i^2 - v_0^2)^m} t - 2m \right]$ . Usando então a equação (2.56) obtemos para 1-sóliton

$$\tau_{00} = \langle \mu_0 | (1 + \rho_1 F_1) | \mu_0 \rangle = 1 + c_1^- \rho_1, \quad (2.87)$$

onde  $c_i^- = \frac{v_0 - \gamma_i}{2\gamma_i}$ . E ainda

$$\tau_{11} = \langle \mu_1 | (1 + \rho_1 F_1) | \mu_1 \rangle = 1 + c_1^+ \rho_1, \quad (2.88)$$

onde  $c_i^+ = \frac{v_0 + \gamma_i}{2\gamma_i}$ . Substituindo estes resultados na equação (2.84) obtemos a solução de 1-sóliton para  $N$  par da hierarquia mKdV. Se fizermos o mesmo para 2-sóliton obtemos

$$\tau_{00} = 1 + c_1^- \rho_1 + c_2^- \rho_2 + c_1^- c_2^- a_{12} \rho_1 \rho_2 \quad (2.89)$$

e

$$\tau_{11} = 1 + c_1^+ \rho_1 + c_2^+ \rho_2 + c_1^+ c_2^+ a_{12} \rho_1 \rho_2 \quad (2.90)$$

onde  $a_{ij} = \left( \frac{\gamma_i - \gamma_j}{\gamma_i + \gamma_j} \right)^2$ . Para obter a solução basta então substituir estes resultados na equação (2.84).



### 2.4.2 Hierarquia KdV

#### Soluções 1-Sóliton para as equações de movimento

De [14] temos que a solução de 1-sóliton para a equação KdV é

$$J = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx + k^3t). \quad (2.91)$$

Escrevemos então a solução das equações da hierarquia da KdV como

$$J = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx + \alpha t), \quad (2.92)$$

e substituímos nas equações de movimento para  $N = 3$  (KdV),  $N = 5$  e  $N = 7$ , e obtivemos que para que estas equações sejam satisfeitas, temos que ter  $\alpha = k^N$ . Como  $J = \partial_x \omega$ , então integrando a equação (2.92), já com os  $k$ 's obtemos

$$\omega = 2k \tanh(kx + k^N t). \quad (2.93)$$

#### Soluções 2-Sóliton para as equações de movimento

Novamente utilizando [14] e colocando um  $\alpha$  aonde ele coloca  $k^3$  substituímos a solução de 2-sólitons nas equações para  $N = 3$ ,  $N = 5$  e  $N = 7$  e obtivemos que  $\alpha = k^N$ . Sendo assim a solução de 2-sóliton é

$$J = \frac{(k_2^2 - k_1^2)(k_2^2 - k_1^2 + k_2^2 \cosh(2k_1x + 2k_1^N t) + k_1^2 \cosh(k_2x + k_2^N t))}{[k_2 \cosh(k_1x + k_1^N t) \cosh(k_2x + k_2^N t) - k_1 \sinh(k_1x + k_1^N t) \sinh(k_2x + k_2^N t)]^2}, \quad (2.94)$$

e como  $J = \partial_x \omega$  temos que

$$\omega = 2 \frac{(k_2^2 - k_1^2) \cosh(k_1x + k_1^N t) \sinh(k_2x + k_2^N t)}{k_2 \cosh(k_1x + k_1^N t) \cosh(k_2x + k_2^N t) - k_1 \sinh(k_1x + k_1^N t) \sinh(k_2x + k_2^N t)}. \quad (2.95)$$

## Capítulo 3

# Transformações de Bäcklund – Método da derivada total

Neste capítulo obtemos as transformações de Bäcklund de graus positivos da hierarquia mKdV e KdV usando o método da derivada total[10]. Apresentamos a transformação de Bäcklund da equação de Sinh-Gordon e da equação KdV. Usamos suas equações em  $x$  para obter explicitamente as transformações de Bäcklund de alguns graus positivos dessas hierarquias.

### 3.1 Primeiros conceitos

Dada uma equação de movimento não linear, definimos as transformações de Bäcklund como um sistema de equações diferenciais parciais de ordem menor do que a equação original e que relacionam duas soluções diferentes dessa equação.

As transformações de Bäcklund aparecem no contexto de modelos integráveis. Elas são importantes pois permitem, dadas duas soluções de uma equação de movimento não linear integrável, obter uma terceira solução por métodos puramente algébricos. Este é um resultado importante do Teorema da Permutabilidade [2] e seguindo este processo podemos, então, obter várias outras soluções desta mesma equação.

São bem conhecidas na literatura [2] as transformações de Bäcklund da equação de Sinh-Gordon e da equação KdV. Apresentamos agora um pouco sobre cada uma delas.

### 3.1.1 Equação de Sinh-Gordon

Como vimos no capítulo (2), a equação de Sinh-Gordon é dada por

$$\partial_x \partial_{t_{-1}} \phi = 2 \sinh(2\phi), \quad (3.1)$$

onde  $\phi = \phi(x, t_N)$  é o campo da teoria. Suas transformações de Bäcklund são dadas por

$$\partial_x(\phi_2 - \phi_1) = \beta \sinh(\phi_1 + \phi_2), \quad (3.2a)$$

$$\partial_{t_{-1}}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{4}{\beta} \sinh(\phi_2 - \phi_1). \quad (3.2b)$$

Pode ser facilmente verificado que essas transformações de Bäcklund realmente são as transformações corretas para a equação de Sinh-Gordon, observando dois pontos. O primeiro deles é a compatibilidade entre as equações (3.2a) e (3.2b) e a equação (3.1). O outro é que as soluções da equação Bäcklund são também soluções das equações de movimento. Por exemplo, se substituirmos nas equações (3.2),  $\phi_1 = 0$  e  $\phi_2$  pela solução de 1-sóliton, as transformações de Bäcklund devem ser satisfeitas.

Verificamos então a primeira destas condições. Começamos derivando a equação (3.2a) em relação a  $t_{-1}$

$$\partial_{t_{-1}} \partial_x(\phi_2 - \phi_1) = \beta \partial_{t_{-1}}(\phi_1 + \phi_2) \cosh(\phi_1 + \phi_2) \quad (3.3)$$

e então substituindo em (3.3) a equação (3.2b) obtemos

$$\begin{aligned} \partial_{t_{-1}} \partial_x \phi_2 - \partial_{t_{-1}} \partial_x \phi_1 &= \beta \frac{4}{\beta} \sinh(\phi_2 - \phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) \\ &= [e^{(\phi_2 - \phi_1)} - e^{-(\phi_2 - \phi_1)}][e^{(\phi_1 + \phi_2)} + e^{-(\phi_1 + \phi_2)}] \\ &= (e^{2\phi_2} + e^{-2\phi_1} - e^{2\phi_1} - e^{-2\phi_2}) \\ &= 2 \sinh(2\phi_2) - 2 \sinh(2\phi_1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vemos então, que as transformações de Bäcklund (3.2) se reduzem a duas equações equações de Sinh-Gordon, uma para  $\phi_1$  e uma para  $\phi_2$ . Esta transformação de Bäcklund é talvez a mais conhecida na literatura [2, 15, 4]. Ela é muito bem estudada, inclusive no

caso supersimétrico [6, 7].

### 3.1.2 Equação KdV

Outra transformação de Bäcklund bem estudada é a referente a equação KdV [2]. A equação de movimento KdV é dada por

$$4\partial_{t_3}J = \partial_{3x}J + 6J(\partial_x J), \quad (3.5)$$

e suas transformações de Bäcklund são

$$\partial_x(\omega_1 + \omega_2) = \beta - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)^2 \quad (3.6)$$

$$\partial_{t_3}(\omega_1 + \omega_2) = -(\omega_1 - \omega_2)(\partial_{2x}\omega_1 - \partial_{2x}\omega_2) + 2((\partial_x\omega_1)^2 + (\partial_x\omega_1)(\partial_x\omega_2) + (\partial_x\omega_2)^2) \quad (3.7)$$

onde assumimos que  $J(x, t_N) = \partial_x\omega(x, t_N)$ .

## 3.2 Método da Derivada Total – Hierarquia mKdV

A ideia para encontrar as transformações de Bäcklund vem do fato de que o  $A_x$  de uma hierarquia é o mesmo para todas as equações que a compõem. Por esse motivo a transformação em  $x$  do Bäcklund de uma dada hierarquia é a mesma para todas as suas equações. Isso, juntamente com o fato do Bäcklund da equação de Sinh-Gordon (que pertence a hierarquia mKdV) ser conhecido e com o método da Derivada total que apresentamos abaixo, nos permite determinar essas transformações para qualquer equação de grau positivo dessa hierarquia.

Para entender em que consiste o que chamamos de Método da Derivada Total precisamos olhar para a equação (2.11), mais especificamente para a equação de grau zero que é dada por

$$\partial_x D^{(0)} + [A_0, D^{(0)}] - \partial_{t_N} A_0 = 0. \quad (3.8)$$

Na hierarquia mKdV  $A_0 = v(x, t_N)H^{(0)} = \partial_x\phi(x, t_N)H^{(0)}$ , e ainda  $D^{(0)} \propto H^{(0)}$ . Desta

maneira, temos que, independente de qual equação (para graus positivos) da hierarquia estamos tratando,  $[A_0, D^{(0)}] = 0$ . Com isso, e  $D^{(0)} \equiv d^{(0)}H^{(0)}$ , obtemos

$$\partial_{t_N} \partial_x \phi = \partial_x d^{(0)}. \quad (3.9)$$

Podemos, portanto, tirar uma derivada total e obtemos

$$\partial_{t_N} \phi = d^{(0)}. \quad (3.10)$$

Para cada equação da hierarquia podemos então, calcular  $d^{(0)}$ , e subtraindo uma equação (3.10) para  $\phi_2$  de uma para  $\phi_1$  obtemos uma equação do tipo

$$\partial_{t_N}(\phi_2 - \phi_1) = d^{(0)}(\phi_2) - d^{(0)}(\phi_1). \quad (3.11)$$

Basta então usar a equação de Bäcklund em  $x$

$$\partial_x(\phi_2 - \phi_1) = \beta \sinh(\phi_1 + \phi_2) \quad (3.12)$$

na equação (3.11) e obtemos o Bäcklund desejado. Vejamos agora como isso se aplica em exemplos concretos.

### **N=3 (equação mKdV)**

Para a equação mKdV, temos que

$$d^{(0)} = \frac{1}{4} \partial_{3x} \phi - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^3. \quad (3.13)$$

Substituímos a equação (3.13) na equação (3.10) e a escrevemos para  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Subtraindo as duas obtemos

$$4\partial_{t_3}(\phi_2 - \phi_1) = \partial_{3x}(\phi_2 - \phi_1) - 2(\partial_x \phi_2)^3 + 2(\partial_x \phi_1)^3. \quad (3.14)$$

e usando a equação (3.12) obtemos

$$4\partial_{t_3}(\phi_2 - \phi_1) = 2\beta(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 2\beta(\partial_x\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + 2\beta^2(\partial_x\phi_1) + \beta^3 \sinh(\phi_1 + \phi_2), \quad (3.15)$$

que reproduz o resultado apresentado em [2].

### N=5

Em  $N = 5$  temos que

$$d^{(0)} = \partial_{t_5}\phi = \left( \frac{1}{16}\partial_{5x}\phi - \frac{5}{8}(\partial_x\phi)(\partial_{2x}\phi)^2 - \frac{5}{8}(\partial_x\phi)^2(\partial_{3x}\phi) + \frac{3}{8}(\partial_x\phi)^5 \right). \quad (3.16)$$

Escrevemos a equação (3.16) para  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e substraimos as duas. Usando então a equação (3.12) encontramos a seguinte equação de Bäcklund para  $N = 5$

$$\begin{aligned} 16\partial_{t_5}(\phi_2 - \phi_1) = & 2\beta(\partial_{4x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 4\beta(\partial_x\phi_1)(\partial_{3x}\phi_1) \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\ & - 12\beta(\partial_x\phi_1)^2(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 2\beta^3(\partial_x\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\ & + 2\beta(\partial_{2x}\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + 2\beta^3(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) + \\ & + 6\beta(\partial_x\phi_1)^4 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \beta^5 \sinh(\phi_1 + \phi_2) - 4\beta^2(\partial_x\phi_1)^3 + \\ & + 2\beta^2(\partial_{3x}\phi_1) + 2\beta^4(\partial_x\phi_1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

### N=7

A equação para  $d^{(0)}$  para  $N = 7$  é

$$\begin{aligned} d^{(0)} = \partial_{t_7}\phi = & \frac{1}{64}(\partial_{7x}\phi) + \frac{35}{32}(\partial_{2x}\phi)^2(\partial_{3x}\phi) + \frac{21}{32}(\partial_x\phi)(\partial_{3x}\phi)^2 + \frac{7}{8}(\partial_x\phi)(\partial_{2x}\phi)(\partial_{4x}\phi) + \\ & + \frac{7}{32}(\partial_x\phi)^2(\partial_{5x}\phi) - \frac{35}{16}(\partial_x\phi)^3(\partial_{2x}\phi)^2 - \frac{35}{32}(\partial_x\phi)^4(\partial_{3x}\phi) + \frac{5}{16}(\partial_x\phi)^7 \end{aligned} \quad (3.18)$$

e usando o mesmo método de  $N = 3$  e  $N = 5$  obtemos para  $N = 7$

$$\begin{aligned}
 64\partial_{t_7}(\phi_2 - \phi_1) = & -20\beta(\partial_x\phi_1)^6 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + 20\beta(\partial_x\phi_1)^2(\partial_{2x}\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 & -20\beta(\partial_{2x}\phi_1)^3 \cosh(\phi_1 + \phi_2) + 40\beta(\partial_x\phi_1)^3(\partial_{3x}\phi_1) \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 & -80\beta(\partial_x\phi_1)(\partial_{2x}\phi_1)(\partial_{3x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 2\beta(\partial_{3x}\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 & -20\beta(\partial_x\phi_1)^2(\partial_{4x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) + 4\beta(\partial_{2x}\phi_1)(\partial_{4x}\phi_1) \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 & +60\beta(\partial_x\phi_1)^4(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 4\beta(\partial_x\phi_1)(\partial_{5x}\phi_1) \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 & +2\beta(\partial_{6x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) + 12\beta^2(\partial_x\phi_1)^5 - 20\beta^2(\partial_x\phi_1)(\partial_{2x}\phi_1)^2 + \\
 & -20\beta^2(\partial_x\phi_1)^2(\partial_{3x}\phi_1) + 2\beta^2(\partial_{5x}\phi_1) - 4\beta^4(\partial_x\phi_1)^3 + 2\beta^4(\partial_{3x}\phi_1) + 2\beta^6(\partial_x\phi_1) + \\
 & +6\beta^3(\partial_x\phi_1)^4 \sinh(\phi_1 + \phi_2) - 12\beta^3(\partial_x\phi_1)^2(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 & +2\beta^3(\partial_{2x}\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) - 4\beta^3(\partial_x\phi_1) \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 & +2\beta^3(\partial_{4x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 2\beta^5(\partial_x\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 & +2\beta^5(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) + \beta^7 \sinh(\phi_1 + \phi_2), \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

que é a transformação de Bäcklund para  $t_7$ .

### 3.2.1 Verificações

#### Vácuo e 1-sóliton

Substituímos nas transformações de Bäcklund calculadas de graus  $N = 3, 5, 7$  as soluções

$$\phi_1 = \phi_{vac} = 0 \tag{3.20}$$

$$\phi_2 = \ln \left( \frac{1 + R\rho}{1 - R\rho} \right) \tag{3.21}$$

onde  $\rho = \exp(2kx + 2k^N t_N)$  e  $R$  é uma constante. Encontramos então, que essas equações são satisfeitas, se  $\beta = 2k$ . Observemos que se tivéssemos colocado  $\rho = \rho_1$  obteríamos que  $\beta = 2k_1$  e se tivéssemos colocado  $\rho = \rho_2$  obteríamos que  $\beta = 2k_2$ .

#### 1-sóliton e 1-sóliton com uma fase

Consideramos então o caso de duas soluções de 1-sóliton com uma fase entre elas. As

soluções são

$$\phi_1 = \ln \left( \frac{1 + R_1 \rho_1}{1 - R_1 \rho_1} \right) \quad e \quad \phi_2 = \ln \left( \frac{1 + R_2 \rho_2}{1 - R_2 \rho_2} \right), \quad (3.22)$$

onde  $\rho_i = \exp(2k_i x + 2k_i^N t_N)$ . Consideramos então a situação em que  $k_1 = k_2 = k$ , o que implica que  $\rho_1 = \rho_2$ . Substituímos estas informações nas transformações de Bäcklund calculadas e obtemos que elas só são satisfeitas se

$$R_2 = \left( \frac{2k + \beta}{2k - \beta} \right) R_1. \quad (3.23)$$

Este resultado é interessante no sentido de que para estas soluções, já era conhecido que a fase é dada pela equação (4.42) para a transformação de Bäcklund da equação de Sinh-Gordon. Mostramos agora que a fase é a mesma para as equações de todos os graus que calculamos explicitamente. Este é um indício de que este é um resultado geral.

### 1-sóliton e 2-sóliton

Colocamos as soluções de 1-sóliton e 2-sóliton

$$\phi_1 = \ln \left( \frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1} \right) \quad e \quad \phi_2 = \ln \left( \frac{1 + \delta(\rho_1 - \rho_2) - \rho_1 \rho_2}{1 - \delta(\rho_1 - \rho_2) - \rho_1 \rho_2} \right) \quad (3.24)$$

onde  $\delta = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}$  e  $\rho_i = \exp(2k_i x + 2k_i^N t_N)$ , nas transformações de Bäcklund para  $N = 3$ ,  $N = 5$  e  $N = 7$ . Observemos que a solução de 2-sóliton mais geral que tínhamos na seção (2.4.1) não é uma solução do Bäcklund e que tivemos que considerar uma solução de 2-sóliton particular. Colocando as soluções (3.24) nas transformações de Bäcklund citadas obtemos que as mesmas são satisfeitas se  $\beta = 2k_2$ . Se colocarmos  $\rho_2$  ao invés de  $\rho_1$  na solução de 1-sóliton obtemos que  $\beta = 2k_1$ . Isso juntamente com o caso apresentado no item *Vácuo-1-sóliton* nos dá o Teorema da Permutabilidade (ver Figura (3.1)).

## 3.3 Método da Derivada Total – Hierarquia KdV

No que refere-se a hierarquia KdV o método não é tão geral como no caso da hierarquia mKdV. Isso ocorre porque aqui  $[A_0, D^{(0)}]$  não é zero. A princípio isso parece nos impedir de obter as transformações de Bäcklund, mesmo tendo a equação em  $x$  para o Bäcklund



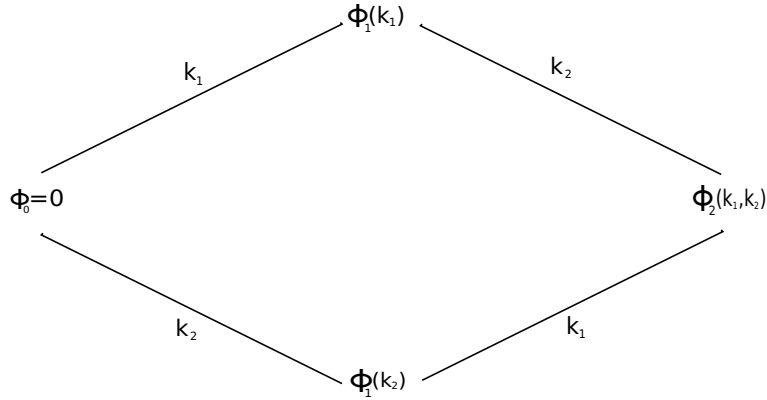


Figura 3.1: Teorema da Permutabilidade para soluções de 1-sóliton e 2-sóliton

(obtida em [2]). Isso, no entanto, não ocorre. Se supormos que  $J = \partial_x \omega$ , onde  $\omega = \omega(x, t_N)$ , podemos escrever as equações de movimento, para  $N = 3$ ,  $N = 5$  e  $N = 7$  como derivadas totais e aplicar o método.

A equação para o Backlund em  $x$  da KdV [2] é

$$\partial_x(\omega_1 + \omega_2) = \beta - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)^2. \quad (3.25)$$

e vamos agora usá-la para obter as transformações de Bäcklund em  $t_N$ .

### **N=3 (KdV)**

Para fazer isso, pegamos a equação (2.41) e a escrevemos como uma derivada total, ou seja,

$$4\partial_{t_3} J = \partial_x(\partial_{2x} J + 3J^2), \quad (3.26)$$

e usando a condição  $J = \partial_x \omega$  obtemos que

$$\partial_x(4\partial_{t_3} \omega) = \partial_x[\partial_{3x} \omega + 3(\partial_x \omega)^2], \quad (3.27)$$

que resulta em

$$4\partial_{t_3} \omega = \partial_{3x} \omega + 3(\partial_x \omega)^2. \quad (3.28)$$

Agora escrevemos a expressão (3.28) para  $\omega_1$  e  $\omega_2$  da seguinte maneira

$$4\partial_{t_3}\omega_1 = \partial_{3x}\omega_1 + 3(\partial_x\omega_1)^2, \quad (3.29a)$$

$$4\partial_{t_3}\omega_2 = \partial_{3x}\omega_2 + 3(\partial_x\omega_2)^2. \quad (3.29b)$$

E somando-as obtemos

$$4\partial_{t_3}(\omega_1 + \omega_2) = \partial_{3x}\omega_1 + \partial_{3x}\omega_2 + 3(\partial_x\omega_1)^2 + 3(\partial_x\omega_2)^2. \quad (3.30)$$

Agora substituímos a equação (3.25) na equação (3.30), obtendo assim a seguinte equação para o Backlund em  $t_3$  da equação KdV

$$4\partial_{t_3}(\omega_1 + \omega_2) = -(\omega_1 - \omega_2)(\partial_{2x}\omega_1 - \partial_{2x}\omega_2) + 2[(\partial_x\omega_1)^2 + (\partial_x\omega_1)(\partial_x\omega_2) + (\partial_x\omega_2)^2]. \quad (3.31)$$

**N=5**

Escrevemos primeiramente a equação (2.42) como uma derivada total

$$16\partial_{t_5}J = \partial_x[\partial_{4x}J + 5(\partial_xJ)^2 + 10J\partial_{2x}J + 10J^3], \quad (3.32)$$

e usando a condição  $J = \partial_x\omega$  obtemos que

$$16\partial_{t_5}\omega = \partial_{5x}\omega + 5(\partial_{2x}\omega)^2 + 10(\partial_x\omega)(\partial_{3x}\omega) + 10(\partial_x\omega)^3. \quad (3.33)$$

Escrevo então a equação (3.33) para  $\omega_1$  e  $\omega_2$

$$16\partial_{t_5}\omega_1 = \partial_{5x}\omega_1 + 5(\partial_{2x}\omega_1)^2 + 10(\partial_x\omega_1)(\partial_{3x}\omega_1) + 10(\partial_x\omega_1)^3, \quad (3.34a)$$

$$16\partial_{t_5}\omega_2 = \partial_{5x}\omega_2 + 5(\partial_{2x}\omega_2)^2 + 10(\partial_x\omega_2)(\partial_{3x}\omega_2) + 10(\partial_x\omega_2)^3, \quad (3.34b)$$

e somando-as obtemos

$$\begin{aligned} 16\partial_{t_5}(\omega_1 + \omega_2) &= \partial_{5x}\omega_1 + \partial_{5x}\omega_2 + 5(\partial_{2x}\omega_1)^2 + 5(\partial_{2x}\omega_2)^2 + 10(\partial_x\omega_1)(\partial_{3x}\omega_1) + \\ &\quad + 10(\partial_x\omega_2)(\partial_{3x}\omega_2) + 10(\partial_x\omega_1)^3 + 10(\partial_x\omega_2)^3. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Agora substituímos a equação (3.25) na equação (3.35), obtendo a seguinte equação em

$t_5$  para o Backlund da equação para  $N = 5$

$$\begin{aligned}
 16\partial_{t_5}(\omega_1 + \omega_2) = & -(\omega_1 - \omega_2)(\partial_{4x}\omega_1 - \partial_{4x}\omega_2) + 2[(\partial_{2x}\omega_1)^2 + 3(\partial_{2x}\omega_1)(\partial_{2x}\omega_2) + \\
 & + (\partial_{2x}\omega_2)^2] + 2[3(\partial_x\omega_1)(\partial_{3x}\omega_1) + 2(\partial_x\omega_1)(\partial_{3x}\omega_2) + \\
 & + 2(\partial_{3x}\omega_1)(\partial_x\omega_2) + 3(\partial_x\omega_2)(\partial_{3x}\omega_2)] + 10(\partial_x\omega_1)^3 + 10(\partial_x\omega_2)^3.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

**N=7**

Escrevo primeiramente a equação (2.43) como uma derivada total da seguinte maneira

$$64\partial_{t_7}J = \partial_x[\partial_{6x}J + 70J(\partial_xJ)^2 + 70J^2(\partial_{2x}J) + 21(\partial_{2x}J)^2 + 28(\partial_xJ)(\partial_{3x}J) + 14J(\partial_{4x}J) + 35J^4]. \tag{3.37}$$

Segundo o mesmo método de  $N = 3$  e  $N = 5$  obtemos o seguinte Backlund em  $t_7$

$$\begin{aligned}
 64\partial_{t_7}(\omega_1 + \omega_2) = & -(\omega_1 - \omega_2)(\partial_{6x}\omega_1 - \partial_{6x}\omega_2) + 11(\partial_{3x}\omega_1)^2 + 20(\partial_{3x}\omega_1)(\partial_{3x}\omega_2) + \\
 & + 11(\partial_{3x}\omega_2)^2 + 13(\partial_{2x}\omega_1)(\partial_{4x}\omega_1) + 15(\partial_{2x}\omega_1)(\partial_{4x}\omega_2) + \\
 & + 15(\partial_{2x}\omega_2)(\partial_{4x}\omega_1) + 13(\partial_{2x}\omega_2)(\partial_{4x}\omega_2) + 2[4(\partial_x\omega_1)(\partial_{5x}\omega_1) + \\
 & + 3(\partial_x\omega_1)(\partial_{5x}\omega_2) + 3(\partial_x\omega_2)(\partial_{5x}\omega_1) + 4(\partial_x\omega_2)(\partial_{5x}\omega_2)] + \\
 & + 70(\partial_x\omega_1)(\partial_{2x}\omega_1)^2 + 70(\partial_x\omega_2)(\partial_{2x}\omega_2)^2 + 70(\partial_x\omega_1)^2(\partial_{3x}\omega_1) + \\
 & + 70(\partial_x\omega_2)^2(\partial_{3x}\omega_2) + 35(\partial_x\omega_1)^4 + 35(\partial_x\omega_2)^4.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

### 3.3.1 Verificações

Substituímos agora algumas soluções de sóliton das equações de movimento nas transformações de Bäcklund obtidas.

#### Soluções de Vácuo e 1-sóliton no Backlund

Verificamos então se as soluções de vácuo e 1-sóliton satisfazem o Backlund. Para  $N=3$ , se colocarmos

$$\omega_1 = 0 \tag{3.39}$$

$$\omega_2 = 2k_2 \tanh(k_2x + k_2^3t) \tag{3.40}$$

na equação (3.25) que  $\beta = 2k_2^2$ , e notamos que a equação (3.31) é satisfeita sem nenhuma condição adicional.

No caso de  $N = 5$  e  $N = 7$  o procedimento foi o mesmo. Apenas trocamos  $k_2^3$  por  $k_2^5$  e  $k_2^7$ , respectivamente. Para a equação (3.25) obtemos novamente  $\beta = 2k_2^2$  para os dois casos. E as equações (3.36) e (3.38), para  $N = 5$  e  $N = 7$  respectivamente, foram satisfeitas sem nenhuma condição adicional.

### Soluções de 1-sóliton e 2-sóliton no Bäcklund

Verificamos agora se as soluções de 1-sóliton e 2-sóliton satisfazem o Bäcklund.

Começando com a  $N=3$ , temos que

$$\omega_1 = 2k_1 \tanh(k_1 x + k_1^3 t) \quad (3.41)$$

$$\omega_2 = \frac{2(k_2^2 - k_1^2) \cosh(k_1 x + k_1^3 t) \sinh(k_2 x + k_2^3 t)}{k_2 \cosh(k_1 x + k_1^3 t) \cosh(k_2 x + k_2^3 t) - k_1 \sinh(k_1 x + k_1^3 t) \sinh(k_2 x + k_2^3 t)}. \quad (3.42)$$

Substituindo  $\omega_1$  e  $\omega_2$  na equação (3.25) obtenho que  $\beta = 2k_2^2$ . E substituindo estas equações na equação (3.31) vejo que ela é satisfeita sem nenhuma condição adicional. O mesmo ocorre para  $N = 5$  e para  $N = 7$ . Obtemos na equação que (3.25)  $\beta = 2k_2^2$  e as equações (3.36) e (3.38) são satisfeitas sem qualquer condição adicional.



## Capítulo 4

# Transformações de Bäcklund via Transformações de Gauge

Neste capítulo construímos uma maneira sistemática[10] de obter as transformações de Bäcklund das equações da hierarquia mKdV através de Transformações de Gauge. Apresentamos o método e encontramos as transformações de Bäcklund do Tipo-I e do Tipo-II. Calculamos explicitamente para vários graus da hierarquia mKdV.

### 4.1 Construção das transformações de Bäcklund

Na seção 2.2 falamos da invariância da equação de curvatura nula por transformações de Gauge. A importância dessa invariância no nosso trabalho é que através dela podemos encontrar as transformações de Bäcklund das equações de movimento pertencentes a hierarquia mKdV. Primeiramente observemos apenas a parte em  $x$  onde  $A'_x = UA_xU^{-1} - \partial_xUU^{-1}$ . Como a equação de curvatura nula não muda se escolhermos uma dada transformação de Gauge, fizemos  $A_x = A_x(\phi_1)$  e  $A'_x = A_x(\phi_2)$  obtendo então

$$A_x(\phi_2) = UA_x(\phi_1)U^{-1} - \partial_xUU^{-1}, \quad (4.1)$$

que pode ser reescrita como

$$\partial_xU = UA_x(\phi_1) - A_x(\phi_2)U. \quad (4.2)$$

Para cada hierarquia temos um  $A_x$  dado por  $A_x = A_0 + E^{(1)}$ , que pode ser colocado na expressão (4.2). Podemos então, para cada hierarquia, ou seja, para cada  $A_x$ , obter um  $U$  que nos dê a equação em  $x$  para o Bäcklund dessa hierarquia. A vantagem é que como o  $A_x$  é comum a todos os membros da hierarquia, e o  $U$  da transformação de gauge em  $t_N$  tem que ser o mesmo da transformação em  $x$ , obtendo o  $U$  temos um método para encontrar a transformação de Bäcklund para qualquer equação da hierarquia.

O foco nesse trabalho é obter os Bäcklunds para a hierarquia mKdV, por isso, nosso  $A_x$  é  $A_x = \partial_x \phi(x, t)H^{(0)} + E_\alpha^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}$  que na forma matricial pode ser escrito como

$$A_x = \begin{pmatrix} \partial_x \phi & 1 \\ \lambda & -\partial_x \phi \end{pmatrix}.$$

A ideia é então obter um  $U$  que satisfaça a equação (4.2). Conseguimos encontrar duas opções para  $U$  que se encaixam nessa equação, e esses  $U$ 's geram as transformações de Bäcklund do Tipo-I e do Tipo-II para essa hierarquia.

#### 4.1.1 Transformações de Bäcklund Tipo I

O Bäcklund Tipo I é o mais comum e menos restritivo desse tipo de transformação. Ele não depende de nenhum campo auxiliar, dependendo apenas dos campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Se, para  $q \equiv \phi_1 - \phi_2$  e  $p \equiv \phi_1 + \phi_2$ , escolhermos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{2\lambda}e^{-p} \\ -\frac{\beta}{2}e^p & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

esse tipo de transformação é obtida. Mostremos então que se colocarmos esse  $U$  na equação (4.2) obtemos a parte em  $x$  do Bäcklund

$$\partial_x U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta}{2\lambda}\partial_x p e^{-p} \\ -\frac{\beta}{2}\partial_x p e^p & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
UA_x(\phi_1) &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{2\lambda}e^{-p} \\ -\frac{\beta}{2}e^p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x\phi_1 & 1 \\ \lambda & -\partial_x\phi_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_x\phi_1 - \frac{\beta}{2}e^{-p} & 1 + \frac{\beta}{2\lambda}\partial_x\phi_1e^{-p} \\ \lambda + \frac{\beta}{2}\partial_x\phi_2e^p & -\frac{\beta}{2}e^p - \partial_x\phi_1 \end{bmatrix}, \tag{4.5}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_x(\phi_2)U &= \begin{bmatrix} \partial_x\phi_2 & 1 \\ \lambda & -\partial_x\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{2\lambda}e^{-p} \\ -\frac{\beta}{2}e^p & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_x\phi_2 - \frac{\beta}{2}e^p & -\frac{\beta}{2\lambda}\partial_x\phi_2e^{-p} + 1 \\ \lambda + \frac{\beta}{2}\partial_x\phi_2e^p & -\frac{\beta}{2}e^{-p} - \partial_x\phi_2 \end{bmatrix}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Igualando as entradas da matriz obtemos as seguintes equações

$$0 = \partial_x(\phi_1 - \phi_2) + \frac{\beta}{2}(e^p - e^{-p}), \tag{4.7a}$$

$$\frac{\beta}{2\lambda}\partial_xpe^{-p} = \frac{\beta}{2\lambda}\partial_x(\phi_1 + \phi_2)e^{-p}, \tag{4.7b}$$

$$-\frac{\beta}{2}\partial_xpe^p = -\frac{\beta}{2}\partial_x(\phi_1 + \phi_2)e^p, \tag{4.7c}$$

$$0 = -\frac{\beta}{2}(e^p - e^{-p}) - \partial_x(\phi_1 - \phi_2). \tag{4.7d}$$

Observamos, que as equações (4.7b) e (4.7c) resultam em identidades. E as equações (4.7a) e (4.7d) se reduzem a

$$\partial_x(\phi_2 - \phi_1) = \beta \sinh(\phi_1 + \phi_2), \tag{4.8}$$

que corresponde a equação em  $x$  para o Backlund da Sinh-Gordon (3.2a). No entanto, pelos motivos citados anteriormente, ela não é apenas a equação em  $x$  para a transformação de Backlund da Sinh-Gordon, mas sim de todas as equações, com  $N$  ímpar da hierarquia mKdV (incluindo a parte negativa). As equações para  $N$ 's pares, por não ter  $\phi = 0$  como solução, não tem as mesmas soluções e nem a mesma transformação de Backlund em  $x$  e ainda estamos procurando uma maneira de adaptar o método para esta situação.

Mas vejamos agora como fazemos para obter a equação em  $t_N$  da transformação



de Bäcklund. A ideia consiste basicamente de escrever  $A_t$  para o tempo desejado e aplicar na transformação de Gauge usando o  $U$  obtido para  $x$ . Calculamos então o Backlund Tipo I explicitamente para alguns casos.

## Exemplos

### $t = t_{-1}$ – Equação de Sinh-Gordon

Começando pela Sinh-Gordon, que corresponde a  $N = -1$ , escrevemos

$A_{t_{-1}} = D^{(-1)} = \frac{1}{4}e^{-2\phi}E_{\alpha}^{(-1)} + \frac{1}{4}e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(0)}$  que pode ser reescrito como

$$A_{t_{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda}e^{-2\phi} \\ e^{2\phi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Colocamos então, a equação (4.53) e o  $U$  dado na equação (4.69) na equação

$$\partial_{t_{-1}}U = UA_{t_{-1}}(\phi_1) - A_{t_{-1}}(\phi_2)U, \quad (4.10)$$

de modo que

$$\partial_{t_{-1}}U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta}{2\lambda}\partial_{t_{-1}}pe^{-p} \\ -\frac{\beta}{2}\partial_{t_{-1}}pe^p & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} UA_{t_{-1}}(\phi_1) &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{2\lambda}e^{-p} \\ -\frac{\beta}{2}e^p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda}e^{-2\phi_1} \\ e^{2\phi_1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{2\lambda}e^{2\phi_1-p} & \frac{1}{\lambda}e^{-2\phi_1} \\ e^{2\phi_1} & -\frac{\beta}{2\lambda}e^{-2\phi_1+p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

e

$$\begin{aligned}
A_{t_{-1}}(\phi_2)U &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4\lambda}e^{-2\phi_2} \\ \frac{1}{4}e^{2\phi_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{2\lambda}e^{-p} \\ -\frac{\beta}{2}e^p & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{2\lambda}e^{-2\phi_2+p} & \frac{1}{\lambda}e^{-2\phi_2} \\ e^{2\phi_2} & -\frac{\beta}{2\lambda}e^{2\phi_2-p} \end{bmatrix}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Colocamos as equações (4.11), (4.12) e (4.13) na equação (4.10), e igualando as entradas da matriz obtemos

$$0 = -\frac{\beta}{2}e^{2\phi_1-p} + \frac{\beta}{2}e^{p-2\phi_2}, \tag{4.14a}$$

$$\frac{\beta}{2}\partial_{t_{-1}}pe^{-p} = e^{-2\phi_1} - e^{-2\phi_2}, \tag{4.14b}$$

$$-\frac{\beta}{2}\partial_{t_{-1}}pe^p = e^{2\phi_1} - e^{2\phi_2}, \tag{4.14c}$$

$$0 = -\frac{\beta}{2}e^{-2\phi_1+p} + \frac{\beta}{2}e^{2\phi_2-p}, \tag{4.14d}$$

das quais podemos ver que (4.14a) e (4.14d) resultam em identidades e (4.14b) e (4.14c) resultam na equação

$$\partial_{t_{-1}}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{4}{\beta} \sinh(\phi_2 - \phi_1) \tag{4.15}$$

que é exatamente a equação (3.2b). É importante destacar, que neste método, ao contrário do método apresentado no capítulo anterior não precisamos saber a priori, a transformação de Bäcklund em  $x$  para determinar a em  $t_N$ , já que a equação em  $x$  também é obtida da transformação de Gauge.

$t = t_{-3}$

Aplicamos então o mesmo procedimento para a equação de grau  $(-3)$ . Obtivemos no capítulo (2) a fim de obter as equações de movimento que o  $A_{t_{-3}}$  é dado por

$$\begin{aligned}
A_{t_{-3}} &= D^{(-3)} + D^{(-2)} + D^{(-1)} \\
&= ae^{-2\phi}E_{\alpha}^{(-2)} + e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(-1)} - 2I(\phi)H^{(-1)} + \\
&\quad - 4e^{-2\phi} \int^x I(\phi)e^{2\phi} dx' E_{\alpha}^{(-1)} + 4e^{2\phi} \int^x I(\phi)e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(0)}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

onde  $I(\phi) = \int^x \sinh(2\phi) dx'$ . A equação pode ser reescrita na forma matricial como

$$A_{t_{-3}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\lambda}I(\phi) & \frac{1}{\lambda^2}e^{-2\phi} - \frac{4}{\lambda}e^{-2\phi} \int^x I(\phi)e^{2\phi} dx' \\ \frac{1}{\lambda}e^{2\phi} + 4e^{2\phi} \int^x I(\phi)e^{-2\phi} dx' & \frac{2}{\lambda}I(\phi). \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Se colocarmos este  $A_{t_{-3}}$  na equação

$$\partial_{t_{-3}}U = UA_{t_{-3}}(\phi_1) - A_{t_{-3}}(\phi_2)U \quad (4.18)$$

com o mesmo  $U$  utilizado no caso anterior, e igualarmos as entradas das matrizes resultantes, levando em conta o grau (ou seja, as potências de  $\lambda$ ) obtemos as seguintes equações

$$I(\phi_2) - I(\phi_1) = \beta e^{\phi_1 - \phi_2} \int^x (I(\phi_1)e^{-2\phi_1} + I(\phi_2)e^{2\phi_2}) dx', \quad (4.19)$$

$$I(\phi_2) - I(\phi_1) = \beta e^{\phi_2 - \phi_1} \int^x (I(\phi_1)e^{2\phi_1} + I(\phi_2)e^{-2\phi_2}) dx', \quad (4.20)$$

$$\partial_{t_{-3}}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{8}{\beta} e^{\phi_1 - \phi_2} \int^x I(\phi_2)e^{2\phi_2} dx' - \frac{8}{\beta} e^{\phi_2 - \phi_1} \int^x I(\phi_1)e^{2\phi_1} dx', \quad (4.21)$$

$$\partial_{t_{-3}}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{8}{\beta} e^{\phi_2 - \phi_1} \int^x I(\phi_2)e^{-2\phi_2} dx' - \frac{8}{\beta} e^{\phi_1 - \phi_2} \int^x I(\phi_1)e^{-2\phi_1} dx', \quad (4.22)$$

que são as transformações de Bäcklund da equação para grau  $(-3)$

$t = t_{-5}$

Para grau  $(-5)$  seguimos o mesmo procedimento. Temos que  $A_{t_{-5}}$  é dado por

$$\begin{aligned} A_{t_{-5}} &= D^{(-5)} + D^{(-4)} + D^{(-3)} + D^{(-2)} + D^{(-1)} \\ &= e^{-2\phi} E_{\alpha}^{(-3)} + e^{2\phi} E_{-\alpha}^{(-2)} - 2I(\phi)H^{(-2)} - 4e^{-2\phi} \int^x I(\phi)e^{2\phi} dx' E_{\alpha}^{(-2)} + \\ &\quad + 4e^{2\phi} \int^x I(\phi)e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(-1)} - 4W(\phi)H^{(-1)} - 8e^{-2\phi} \int^x W(\phi)e^{2\phi} dx' E_{\alpha}^{(-1)} + \\ &\quad + 8e^{2\phi} \int^x W(\phi)e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde  $W(\phi) = \int^x \left( e^{2\phi} \int^{x'} e^{-2\phi} dx'' + e^{-2\phi} \int^{x'} e^{2\phi} dx'' \right) dx'$ . Esta definição foi feita apenas para facilitar a visualização dos resultados. Substituímos então o  $U$  e  $A_{t_{-5}}$  na equação

$$\partial_{t_{-5}}U = UA_{t_{-5}}(\phi_1) - A_{t_{-5}}(\phi_2)U \quad (4.24)$$

e chegamos nas seguintes transformações de Bäcklund

$$W(\phi_2) - W(\phi_1) = \beta e^{\phi_1 - \phi_2} \left( \int^x W(\phi_1) e^{-2\phi_1} dx' + \int^x W(\phi_2) e^{2\phi_2} dx' \right), \quad (4.25)$$

$$I(\phi_2) - I(\phi_1) = \beta e^{\phi_1 - \phi_2} \left( \int^x I(\phi_1) e^{-2\phi_1} dx' + \int^x I(\phi_2) e^{2\phi_2} dx' \right), \quad (4.26)$$

$$W(\phi_2) - W(\phi_1) = \beta e^{\phi_2 - \phi_1} \left( \int^x W(\phi_1) e^{2\phi_1} dx' + \int^x W(\phi_2) e^{-2\phi_2} dx' \right), \quad (4.27)$$

$$I(\phi_2) - I(\phi_1) = \beta e^{\phi_2 - \phi_1} \left( \int^x I(\phi_1) e^{2\phi_1} dx' + \int^x I(\phi_2) e^{-2\phi_2} dx' \right), \quad (4.28)$$

$$W(\phi_1) + W(\phi_2) = \frac{2}{\beta} e^{\phi_1 - \phi_2} \int^x I(\phi_2) e^{2\phi_2} dx' - \frac{2}{\beta} e^{\phi_2 - \phi_1} \int^x I(\phi_1) e^{2\phi_1} dx', \quad (4.29)$$

$$\partial_{t-5}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{16}{\beta} e^{\phi_1 - \phi_2} \int^x W(\phi_2) e^{2\phi_2} dx' - \frac{16}{\beta} e^{\phi_2 - \phi_1} \int^x W(\phi_1) e^{2\phi_1} dx', \quad (4.30)$$

$$W(\phi_1) + W(\phi_2) = \frac{2}{\beta} e^{\phi_2 - \phi_1} \int^x I(\phi_2) e^{-2\phi_2} dx' - \frac{2}{\beta} e^{\phi_1 - \phi_2} \int^x I(\phi_1) e^{-2\phi_1} dx', \quad (4.31)$$

$$\partial_{t-5}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{16}{\beta} e^{\phi_2 - \phi_1} \int^x W(\phi_2) e^{-2\phi_2} dx' - \frac{16}{\beta} e^{\phi_1 - \phi_2} \int^x W(\phi_1) e^{-2\phi_1} dx'. \quad (4.32)$$

### $t = t_3$ Equação mKdV

Temos que para  $N = 3$  o  $A_{t_3}$  é dado por

$$\begin{aligned} A_{t_3} = & E_{\alpha}^{(1)} + E_{-\alpha}^{(2)} + vH^{(1)} + \left( -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\partial_x v \right) E_{\alpha}^{(0)} + \\ & - \left( \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\partial_x v \right) E_{-\alpha}^{(1)} + \frac{1}{4}(\partial_{2x}v - 2v^3) H^{(0)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

que em notação matricial pode ser escrita como

$$A_{t_3} = \begin{bmatrix} v\lambda + \frac{1}{4}\partial_{2x}v - \frac{1}{2}v^3 & \lambda - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\partial_x v \\ \lambda^2 - \frac{1}{2}v^2\lambda - \frac{1}{2}\partial_x v\lambda & -v\lambda - \frac{1}{4}\partial_{2x}v + \frac{1}{2}v^3 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Usando então o  $U$  da equação (4.69) e aplicando na equação

$$\partial_{t_3} U = U A_{t_3}(\phi_1) - A_{t_3}(\phi_2) U \quad (4.35)$$

obtemos a seguinte equação

$$\partial_{t_3}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{4}\partial_{2x}(v_1 + v_2) - \frac{1}{2}(v_1^3 + v_2^3) \quad (4.36)$$

além de várias equações que são automaticamente satisfeitas quando usamos a equação em  $x$  da transformação de Bäcklund. Esta equação é interessante no sentido, de que ela é semelhante a equação do capítulo anterior, substituindo apenas  $\phi_2 - \phi_1$  por  $\phi_1 + \phi_2$ . O interessante é que quando substituímos a expressão (4.8) na equação (4.36) as coisas se reorganizam e obtemos exatamente a mesma expressão (3.15) para a transformação de Bäcklund em  $t_3$  que obtivemos no capítulo (3) que é

$$\begin{aligned}
 4\partial_{t_3}(\phi_2 - \phi_1) &= 2\beta(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 2\beta(\partial_x\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 &+ 2\beta^2(\partial_x\phi_1) + \beta^3 \sinh(\phi_1 + \phi_2),
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$t = t_5$  e  $t = t_7$

Seguindo o mesmo método para  $N = 5$  obtemos que, assim como no capítulo (3),

$$\begin{aligned}
 16\partial_{t_5}(\phi_2 - \phi_1) &= 2\beta(\partial_{4x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 4\beta(\partial_x\phi_1)(\partial_{3x}\phi_1) \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 &- 12\beta(\partial_x\phi_1)^2(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) - 2\beta^3(\partial_x\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 &+ 2\beta(\partial_{2x}\phi_1)^2 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + 2\beta^3(\partial_{2x}\phi_1) \cosh(\phi_1 + \phi_2) + \\
 &+ 6\beta(\partial_x\phi_1)^4 \sinh(\phi_1 + \phi_2) + \beta^5 \sinh(\phi_1 + \phi_2) - 4\beta^2(\partial_x\phi_1)^3 + \\
 &+ 2\beta^2(\partial_{3x}\phi_1) + 2\beta^4(\partial_x\phi_1).
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

No caso de  $N = 7$  usando este método, também obtemos o mesmo resultado obtido através do método da derivada total.

É importante destacar que para todos as equações de graus positivos calculados obtemos as mesmas transformações de Bäcklund obtidas com o método da derivada total. Além disso, com esse método conseguimos obter também as transformações de Bäcklund para os graus negativos da hierarquia [10]. E ainda, seguindo este método da transformação de Gauge, podemos obter a transformação de Bäcklund Tipo I para qualquer equação da hierarquia mKdV, bastando para isso termos o  $A_{t_N}$  correspondente.

### Verificações

Assim como no capítulo (2) colocamos agora algumas soluções de sóliton nas transformações de Bäcklund obtidas. É importante destacar que como este método

reproduziu os resultados obtidos via o Método da Derivada Total as verificações feitas no capítulo anterior são igualmente válidas aqui. Vamos, portanto, nos referir aqui apenas aos graus negativos, já que estes ainda não haviam sido testados.

### Vácuo e 1-sóliton

Substituímos nas transformações de Bäcklund, calculadas para os graus

$(-1), (-3)$  e  $(-5)$ , as soluções

$$\phi_1 = \phi_{vac} = 0 \quad (4.39)$$

$$\phi_2 = \ln \left( \frac{1 + R\rho}{1 - R\rho} \right) \quad (4.40)$$

onde  $\rho = \exp(2kx + 2k^N t_N)$  e  $R$  é uma constante. Obtivemos então, que essas equações são satisfeitas, se  $\beta = 2k$ . Observemos que se tivéssemos colocado  $\rho = \rho_1$  obteríamos que  $\beta = 2k_1$  e se tivéssemos colocado  $\rho = \rho_2$  obteríamos que  $\beta = 2k_2$ .

### 1-sóliton e 1-sóliton com uma fase

Consideramos então o caso de duas soluções de 1-sóliton com uma fase entre elas. As soluções são

$$\phi_1 = \ln \left( \frac{1 + R_1\rho_1}{1 - R_1\rho_1} \right) \quad e \quad \phi_2 = \ln \left( \frac{1 + R_2\rho_2}{1 - R_2\rho_2} \right), \quad (4.41)$$

onde  $\rho_i = \exp(2k_i x + 2k_i^N t_N)$ . Consideramos então a situação em que  $k_1 = k_2 = k$ , o que implica que  $\rho_1 = \rho_2$ . Substituímos estas informações nas transformações de Bäcklund calculadas e obtemos que elas são satisfeitas se

$$R_2 = \left( \frac{2k + \beta}{2k - \beta} \right) R_1. \quad (4.42)$$

Tínhamos observado no capítulo anterior, que além da Sinh-Gordon, esta fase era obtida para todas as transformações de graus positivos calculadas. Agora observamos que o mesmo ocorre para as equações de graus negativos ímpares. Isso nos permite conjecturar que essa fase é geral, ou seja, ela é a mesma para qualquer transformação de Bäcklund de graus ímpares da hierarquia mKdV.

É importante citar que não verificamos a substituição da solução de 2-sóliton nas

equações de graus negativos apenas devido a dificuldade de integração das equações.

#### 4.1.2 Transformações de Bäcklund Tipo-II

As Transformações de Bäcklund Tipo-II foram apresentadas pela primeira vez por Edward Corrigan e Cristina Zambom em 2009 em [4] e foram introduzidos utilizando formalismo de defeitos. Essas transformações de Bäcklund além de apresentarem as propriedades do Tipo-I contém ainda um campo auxiliar  $\Lambda(x, t_N)$  e num certo limite se reduzem as transformações do Tipo-I.

Obtemos um  $U$  que satisfaz a equação (4.2), e que nos fornece as tranformações de Bäcklund tipo-II de qualquer equação da hierarquia mKdV. Esse  $U$  é dado por

$$U = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\sigma^2\lambda}e^q & \frac{1}{2\sigma\lambda}e^{\Lambda-p}(e^q + e^{-q} + \eta) \\ -\frac{2}{\sigma}e^{p-\Lambda} & 1 - \frac{1}{\sigma^2\lambda}e^{-q} \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Se substituirmos a equação (4.68), juntamente com o  $A_x$  da hierarquia mKdV na equação

$$\partial_x U = U A_x(\phi_1) - A_x(\phi_2)U \quad (4.44)$$

e igualarmos as entradas das matrizes resultantes, lembrando de separar por graus, obtemos as seguintes equações

$$\partial_x q = -\frac{1}{2\sigma}e^{\Lambda-p}(e^q + e^{-q} + \eta) - \frac{2}{\sigma}e^{p-\Lambda} \quad (4.45)$$

$$\partial_x \Lambda = \frac{1}{2\sigma}e^{\Lambda-p}(e^q - e^{-q}) \quad (4.46)$$

as quais correspondem as equações em  $x$  da transformação de Bäcklund da hierarquia mKdV. É importante ainda, lembrar que como  $A_x$  é o mesmo para toda a hierarquia estas equações são também válidas para toda ela. Logo, podemos usar este  $U$  juntamente com a transformação de gauge

$$\partial_{t_N} U = U A_{t_N}(\phi_1) - A_{t_N}(\phi_2)U, \quad (4.47)$$

para obter as transformações de Bäcklund em  $t_N$ . Para isso, assim como no caso das

transformações de Bäcklund do Tipo I, basta obtermos  $A_{t_N}$  e aplicarmos na equação (4.47).

$$t = t_3$$

Começamos com a transformação de Bäcklund da mKdV. Como vimos na seção anterior o  $A_{t_3}$  dessa equação é dado por

$$A_{t_3} = \begin{bmatrix} v\lambda + \frac{1}{4}\partial_{2x}v - \frac{1}{2}v^3 & \lambda - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\partial_xv \\ \lambda^2 - \frac{1}{2}v^2\lambda - \frac{1}{2}\partial_xv\lambda & -v\lambda - \frac{1}{4}\partial_{2x}v + \frac{1}{2}v^3 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Colocando então, este resultado juntamente com o  $U$  da equação (4.68) na equação (4.47) e igualando as entradas da matriz da mesma maneira que no caso do Tipo II obtemos as seguintes equações em  $t_3$  para as transformações de Bäcklund da equação mKdV

$$4\partial_{t_3}(\phi_2 - \phi_1) = \partial_{3x}(\phi_2 - \phi_1) - 2[(\partial_x\phi_2)^3 - (\partial_x\phi_1)^3], \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_3}\Lambda(e^q + e^{-q} + \eta) &= -\partial_{t_3}q(e^q - e^{-q}) + \sigma(v_1^2 - \partial_xv_1)e^{-\Lambda+q+p} + \\ &\quad - \sigma(v_2^2 - \partial_xv_2)e^{-\Lambda+p-q}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\partial_{t_3}\Lambda = \frac{1}{4\sigma}(v_1^2 + \partial_xv_1)e^{\Lambda-q-p} - \frac{1}{4\sigma}(v_2^2 + \partial_xv_2)e^{\Lambda+q-p}. \quad (4.51)$$

A equação (4.49) é igual a obtida para o  $N = 3$  com o Método da Derivada Total, a diferença aqui é que como estamos considerando a transformação de Bäcklund do Tipo II, a nossa equação em  $x$  do Bäcklund que será substituída na equação (4.49) é diferente. Substituindo a transformação de Bäcklund em  $x$  (4.45) na equação (4.49) obtemos

$$\begin{aligned} 4\partial_{t_3}q &= -\frac{2}{\sigma}\partial_{2x}(p+q)e^{p-\Lambda} + \frac{1}{2\sigma}\partial_{2x}(p+q)e^{\Lambda-p}(e^q + e^{-q} + \eta) + \frac{1}{\sigma}(\partial_xp + \partial_xq)^2e^{p-\Lambda} + \\ &\quad + \frac{1}{4\sigma}(\partial_xp + \partial_xq)^2e^{\Lambda-p}(e^q + e^{-q} + \eta) + \frac{4}{\sigma^2}(\partial_xp + \partial_xq)(e^q + e^{-q} + \eta) + \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^3}(2e^{\Lambda-p} + 2e^{\Lambda-p-2q} + 4e^{-p-q+\Lambda}\eta + 2e^{-p+q+\Lambda}\eta + 2e^{\Lambda-p}\eta^2 + 8e^{p+q-\Lambda} + 8e^{p-\Lambda}\eta) \end{aligned} \quad (4.52)$$

que é a forma explícita da transformação de Bäcklund Tipo-II da equação mKdV.

$t = t_{-1}$  **Sinh-Gordon**

No caso da equação de Sinh-Gordon para obter a transformação de Bäcklund Tipo II



basta colocarmos o  $A_{t_{-1}}$

$$A_{t_{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda}e^{-2\phi} \\ e^{2\phi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

juntamente com o  $U$  para a transformação Tipo-II na equação (4.47) e igualarmos as entradas das matrizes resultantes para obtermos as seguintes equações

$$\partial_{t_{-1}}q = -2\sigma e^{-\Lambda} - \frac{\sigma}{2}e^{\Lambda}(e^q + e^{-q} + \eta) \quad (4.54)$$

$$\partial_{t_{-1}}(p - \Lambda) = -\frac{\sigma}{2}e^{\Lambda}(e^q - e^{-q}) \quad (4.55)$$

que correspondem as transformações de Bäcklund Tipo-II da equação de Sinh-Gordon.

$t = t_{-3}$

O processo para obtermos a equação de grau  $(-3)$  da Hierarquia mKdV é o mesmo aplicado as equações de outros graus. Tendo a equação para  $A_{t_{-3}}$  dada por

$$A_{t_{-3}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\lambda}I(\phi) & \frac{1}{\lambda^2}e^{-2\phi} - \frac{4}{\lambda}e^{-2\phi} \int^x I(\phi)e^{2\phi}dx' \\ \frac{1}{\lambda}e^{2\phi} + 4e^{2\phi} \int^x I(\phi)e^{-2\phi}dx' & \frac{2}{\lambda}I(\phi). \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

e o  $U$  dado pela equação (4.68) aplicados na equação (4.47) obtemos as seguintes equações

$$I(\phi_1) - I(\phi_2) = \frac{-\sigma}{4} e^\Lambda (e^q + e^{-q} + \eta) - \sigma e^{-\Lambda}, \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_{-3}} q &= 2\sigma^2 (I(\phi_1) - I(\phi_2)) e^{-q} - 2\sigma e^\Lambda (e^q + e^{-q} + \eta) \int^x I(\phi_1) e^{-2\phi_1} dx' + \\ &+ 8\sigma e^{-\Lambda} \int^x I(\phi_2) e^{2\phi_2} dx', \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} (I(\phi_1) + I(\phi_2)) (e^q + e^{-q} + \eta) &= \sigma e^{-\Lambda} (e^q - e^{-q}) - \frac{4}{\sigma} e^{-\Lambda} \int^x I(\phi_1) e^{2\phi_1} dx' + \\ &+ \frac{4}{\sigma} e^{-\Lambda} \int^x I(\phi_2) e^{2\phi_2} dx', \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_{-3}} (\Lambda - p) (e^q + e^{-q} + \eta) &= -\partial_{t_{-3}} q (e^q - e^{-q}) - 8\sigma e^{-\Lambda - q} \int^x I(\phi_1) e^{2\phi_1} dx' + \\ &8\sigma e^{-\Lambda + q} \int^x I(\phi_2) e^{2\phi_2} dx', \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} I(\phi_1) + I(\phi_2) &= -\frac{\sigma}{4} e^\Lambda (e^q - e^{-q}) + \frac{1}{\sigma} e^\Lambda \int^x I(\phi_1) e^{-2\phi_1} dx' + \\ &- \frac{1}{\sigma} \int^x I(\phi_2) e^{-2\phi_2} dx', \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$(4.62)$$

$$\partial_{t_{-3}} (p - \Lambda) = -2\sigma e^{\Lambda + q} \int^x I(\phi_1) e^{-2\phi_1} dx' + 2\sigma e^{\Lambda - q} \int^x I(\phi_2) e^{-2\phi_2} dx', \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_{-3}} q &= 2\sigma^2 (I(\phi_1) - I(\phi_2)) e^q - 2\sigma e^\Lambda (e^q + e^{-q} + \eta) \int^x I(\phi_2) e^{-2\phi_2} dx' + \\ &+ 8\sigma e^{-\Lambda} \int^x I(\phi_1) e^{2\phi_1} dx', \end{aligned} \quad (4.64)$$

que correspondem as transformações de Bäcklund da equação de movimento de grau  $(-3)$  da hierarquia mKdV.

### Verificações

#### Vácuo-Vácuo

Consideremos nas transformações de Bäcklund para  $N = -1$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Desta maneira a equação (4.46) fica

$$\partial_x \Lambda = 0 \quad (4.65)$$

e na equação (4.55) obtemos que

$$\partial_{t_{-1}}\Lambda = 0 \quad (4.66)$$

Concluimos portanto, desses dois resultados que  $\Lambda$  é uma constante, ou seja, não depende de  $x$  e  $t_{-1}$ . E ainda, a equação (4.45) fornece

$$e^{2\Lambda} = -\frac{4}{2+\eta}, \quad (4.67)$$

o que parece restringir os valores que  $\eta$  pode assumir, dado que o argumento do logaritmo deve ser positivo. A equação (4.54) fornece essa mesma equação. Sabemos, desta forma, o comportamento do campo auxiliar  $\Lambda$  no caso de duas soluções de vácuo.

Quando analisamos esta mesma situação, para o caso de  $N = -3$ , acontece um fato interessante. Pois colocando  $\phi_1 = 0$  e  $\phi_2$  nas equações correspondentes, obtemos exatamente o mesmo resultado de  $N = -1$ . No caso de  $N = 3$  também obtemos este mesmo resultado.

Outros testes ainda precisam ser feitos no que se refere ao campo auxiliar  $\Lambda$ . Estes cálculos estão sendo feitos, mas não estão prontos a tempo de colocar neste trabalho.

### Caso limite

Observemos agora que se fizermos

$$\frac{1}{\sigma^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{2\sigma} e^\Lambda \rightarrow 0, \quad -\frac{2}{\sigma} e^{-\Lambda} \rightarrow -\frac{\beta}{2}, \quad \frac{1}{2\sigma} e^\Lambda \eta \rightarrow -\frac{\beta}{2}, \quad \sigma e^\Lambda \rightarrow \frac{4}{\beta},$$

a equação

$$U = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\sigma^2\lambda} e^q & \frac{1}{2\sigma\lambda} e^{\Lambda-p}(e^q + e^{-q} + \eta) \\ -\frac{2}{\sigma} e^{p-\Lambda} & 1 - \frac{1}{\sigma^2\lambda} e^{-q} \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

se reduz a

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{2\lambda} e^{-p} \\ -\frac{\beta}{2} e^p & 1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

ou seja, recuperamos o  $U$  que gera as transformações de Bäcklund Tipo I. Podemos também aplicar este limite diretamente em todas as transformações calculadas explicitamente que obteremos da mesma maneira a sua forma no Tipo I.



## Capítulo 5

# Conclusões e perspectivas

Estudamos a construção de hierarquias integráveis a partir da representação de curvatura nula. Para cada hierarquia podemos construir infinitas equações diferenciais não lineares que são soluções da equação de curvatura nula. Estas equações são deduzidas, portanto, com uma estrutura comum, o que permite obter a solução de todas as equações de uma mesma hierarquia simultaneamente através do método de Dressing. Calculamos explicitamente algumas dessas equações para a hierarquia mKdV e obtivemos suas soluções. É importante destacar que, no que refere-se ao caso negativo, encontramos as equações para os graus (-1), (-2), (-3), (-4) e (-5) e observamos que os graus ímpares admitem  $\phi = 0$  como solução enquanto os pares admitem solução constante não nula apenas. No que refere-se a hierarquia KdV, obtivemos apenas algumas equações de graus positivos, dado que o Lax não mantém-se para graus negativos. Mais ainda, usamos soluções já conhecidas na literatura para essas equações. No momento, buscamos as soluções da hierarquia KdV pelo método de Dressing.

Notamos que o fato do operador de Lax em  $x$  ser o mesmo para toda a hierarquia mKdV implica que a equação de Bäcklund em  $x$  também seria comum à toda hierarquia. Com isso foi possível construir dois métodos para obtenção de transformações de Bäcklund.

Propomos, o que chamamos de método da derivada total, para obter as transformações de Bäcklund do Tipo I de todas as equações oriundas de tempos positivos das hierarquias mKdV e KdV. Calculamos explicitamente algumas delas reproduzindo a transformação de Bäcklund da equação mKdV que já era conhecida[2] e obtendo algumas novas como as referentes a  $N = 5$  e  $N = 7$  [10]. Verificamos, para os casos calculados, que as soluções de

vácuo e 1 sóliton, além de 1-sóliton e 2-sóliton, das equações de movimento são soluções das transformações de Bäcklund. No caso de 1-sóliton e 2-sóliton da mKdV notamos que a solução de 2-sóliton que satisfaz ao Bäcklund é menos geral do que a solução original. Além disso, ao colocarmos duas soluções de 1-sóliton nas transformações de Bäcklund, a fase encontrada entre elas é a mesma já conhecida para o caso da Sinh-Gordon.

Não conseguimos, no entanto, estender o Método da Derivada Total para as equações resultantes de graus negativos da hierarquia mKdV. Para resolver esse problema, construímos as Transformações de Bäcklund por meio de Transformações de Gauge. Usamos a invariância de Gauge da equação de curvatura nula e construímos as transformações de Bäcklund ligando duas soluções diferentes da equação de movimento por meio de uma transformação de Gauge. Para isso, encontramos duas transformações de Gauge possíveis sendo que uma delas gerou Transformações de Bäcklund do Tipo I [10], e a outra gerou do Tipo II. É importante destacar que com esse método podemos construir essas transformações de Bäcklund Tipo I e Tipo II para qualquer equação referente a graus ímpares da hierarquia mKdV. Nós construímos explicitamente o Bäcklund para algumas dessas equações e verificamos que no caso dos graus positivos reproduzimos os resultados encontrados pelo Método da Derivada Total. Verificamos ainda que a fase entre duas soluções de 1-sóliton continua sendo a mesma para as transformações de Bäcklund de graus negativos ímpares, sendo possível com isso conjecturar essa fase deve ser a mesma para qualquer  $N$  ímpar. É importante adicionar que, num certo limite, as transformações de Bäcklund do Tipo II retornam às transformações de Bäcklund Tipo I.

O campo auxiliar que aparece na transformação de Bäcklund do Tipo II apresenta algumas propriedades. Mostramos aqui a condição que esse campo satisfaz quando colocamos duas soluções de vácuo no Bäcklund. Há várias outras soluções e propriedades a serem verificadas.

Pretendemos generalizar o método encontrando uma maneira de aplicá-lo para obter as transformações de Bäcklund das equações oriundas de graus pares da hierarquia mKdV. Isso não foi possível ainda, devido a certas propriedades diferentes que estas equações possuem ainda não bem compreendidas. Além disso, buscamos estender o método para casos não abelianos, como a hierarquia AKNS, por exemplo.

## Apêndice A

# Álgebra de Kac-Moody $\hat{sl}(2)$

A álgebra de Kac-Moody  $\hat{sl}(2)$  possui apenas uma raiz,  $\alpha$ , e tem como geradores  $E_\alpha$ ,  $E_{-\alpha}$  e  $H$  e estamos usando  $\alpha^2 = 1$ . As relações de comutação são

$$\begin{aligned} [H^{(m)}, H^{(n)}] &= 2m\delta_{m+n,0}\hat{c}, \\ [H^{(m)}, E_{\pm\alpha}^{(n)}] &= \pm 2E_{\pm\alpha}^{(m+n)}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$[E_\alpha^{(m)}, E_\beta^{(n)}] = \begin{cases} H^{(m+n)} + m\delta_{m+n,0}\hat{c} & \alpha + \beta = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{A.2}$$

$$[\hat{c}, E_\pm^{(m)}] = [\hat{c}, H^{(m)}] = [\hat{c}, \hat{d}] = 0 \tag{A.3}$$

$$[\hat{d}, E_\pm^{(m)}] = mE_{\pm\alpha}^{(m)} \tag{A.4}$$

$$[\hat{d}, H^{(m)}] = mH^{(m)} \tag{A.5}$$

onde  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

É importante destacar que quando obtemos as equações de movimento via método da curvatura nula não consideramos o termo central, ou seja, fazemos  $\hat{c} = 0$ . No entanto, para obter as soluções das equações de movimento precisamos da álgebra completa, já que precisamos usar os estados de peso mais alto e estes só existem para a álgebra com extensão central.

Os estado de peso mais alto de uma álgebra de Kac-Moody  $\hat{sl}(2)$  são chamados  $|\mu_0\rangle$  e



$|\mu_1\rangle$  e tem a seguinte propriedade

$$E_\alpha^{(m)}|\mu_i\rangle = 0, \tag{A.6}$$

com  $i = 0, 1$ .

## Apêndice B

# Equações de movimento – Hierarquia mKdV

Nesta hierarquia as equações são obtidas usando a gradação principal, ou seja,  $Q = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}H^{(0)}$ , e portanto, considerando  $A_0 = v(x, t)H^{(0)}$  e  $E^{(1)} = E_{\alpha}^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}$ . Além disso, sempre que aparecer  $\phi$  é porque consideramos  $v(x, t) = \partial_x \phi(x, t_N)$ .

### B.1 Equações para graus positivos

#### Equação mKdV (N=3)

A equação de curvatura nula para este caso é

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_3} + D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} \right] = 0 \quad (\text{B.1})$$

e calculando grau a grau as equações obtemos que

$$\begin{aligned} D^{(3)} &= E_{\alpha}^{(1)} + E_{-\alpha}^{(2)}; \\ D^{(2)} &= vH^{(1)}; \\ D^{(1)} &= \left( -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\partial_x v \right) E_{\alpha}^{(0)} - \left( \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\partial_x v \right) E_{-\alpha}^{(1)}; \\ D^{(0)} &= \frac{1}{4} (\partial_{2x} v - 2v^3) H^{(0)}; \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e ao resolvermos a equação de grau zero obtemos a seguinte equação de movimento

$$4\partial_{t_3}v = \partial_{3x}v - 6v^2\partial_xv. \quad (\text{B.3})$$

(N=5)

A equação de curvatura nula para  $N = 5$  é

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_5} + D^{(5)} + D^{(4)} + D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} \right] = 0, \quad (\text{B.4})$$

e resolvendo esta equação grau a grau obtemos que

$$\begin{aligned} D^{(5)} &= E_{\alpha}^{(2)} + E_{-\alpha}^{(3)}; \\ D^{(4)} &= vH^{(2)}; \\ D^{(3)} &= \frac{1}{2}(-v^2 + \partial_xv)E_{\alpha}^{(1)} - \frac{1}{2}(v^2 + \partial_xv)E_{-\alpha}^{(2)}; \\ D^{(2)} &= \left( \frac{1}{4}\partial_{2x}v - \frac{1}{2}v^3 \right) H^{(1)}; \\ D^{(1)} &= \left( \frac{1}{8}\partial_{3x}v - \frac{1}{4}v\partial_{2x}v + \frac{1}{8}(\partial_xv)^2 - \frac{3}{4}v^2\partial_xv + \frac{3}{8}v^4 \right) E_{\alpha}^{(0)} + \\ &\quad + \left( -\frac{1}{8}\partial_{3x}v - \frac{1}{4}v\partial_{2x}v + \frac{1}{8}(\partial_xv)^2 + \frac{3}{4}v^2\partial_xv + \frac{3}{8}v^4 \right) E_{-\alpha}^{(1)} \\ D^{(0)} &= \left( \frac{1}{16}\partial_{4x}v - \frac{5}{8}v(\partial_xv)^2 - \frac{5}{8}v^2\partial_{2x}v + \frac{3}{8}v^5 \right) H^{(0)}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

que resulta em

$$16\partial_{t_5}v = \partial_{5x}v - 10(\partial_xv)^3 - 40v\partial_xv\partial_{2x}v - 10v^2\partial_{3x}v + 30v^4\partial_xv, \quad (\text{B.6})$$

que corresponde a equação de movimento para  $N = 5$ .

(N=7)

A equação de curvatura nula para  $N = 7$  é

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_7} + D^{(7)} + D^{(6)} + D^{(5)} + D^{(4)} + D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} \right] = 0, \quad (\text{B.7})$$

e resolvendo esta equação grau a grau

$$\begin{aligned}
D^{(7)} &= E_{\alpha}^{(3)} + E_{-\alpha}^{(4)}; \\
D^{(6)} &= vH^{(3)}; \\
D^{(5)} &= \frac{1}{2}(-v^2 + \partial_x v) E_{\alpha}^{(2)} - \frac{1}{2}(v^2 + \partial_x v) E_{-\alpha}^{(3)}; \\
D^{(4)} &= \left( \frac{1}{4} \partial_{2x} v - \frac{1}{2} v^3 \right) H^{(2)}; \\
D^{(3)} &= \left( \frac{1}{8} \partial_{3x} v - \frac{1}{4} v \partial_{2x} v + \frac{1}{8} (\partial_x v)^2 - \frac{3}{4} v^2 \partial_x v + \frac{3}{8} v^4 \right) E_{\alpha}^{(1)} + \\
&\quad + \left( -\frac{1}{8} \partial_{3x} v - \frac{1}{4} v \partial_{2x} v + \frac{1}{8} (\partial_x v)^2 + \frac{3}{4} v^2 \partial_x v + \frac{3}{8} v^4 \right) E_{-\alpha}^{(2)}; \\
D^{(2)} &= \left( \frac{1}{16} \partial_{4x} v - \frac{5}{8} v (\partial_x v)^2 - \frac{5}{8} v^2 \partial_{2x} v + \frac{3}{8} v^5 \right) H^{(1)}; \\
D^{(1)} &= \left( \frac{1}{32} \partial_{5x} v - \frac{5}{16} (\partial_x v)^3 - \frac{5}{4} v (\partial_x v) (\partial_{2x} v) - \frac{5}{16} v^2 (\partial_{3x} v) + \frac{15}{16} v^4 (\partial_x v) \right) (E_{\alpha}^{(0)} - E_{-\alpha}^{(1)}) + \\
&\quad \left( -\frac{1}{16} v (\partial_{4x} v) + \frac{1}{16} (\partial_x v) (\partial_{3x} v) - \frac{1}{32} (\partial_{2x} v)^2 + \frac{5}{16} v^2 (\partial_x v)^2 + \frac{5}{8} v^3 (\partial_{2x} v) - \frac{5}{16} v^6 \right) (E_{\alpha}^{(0)} + E_{-\alpha}^{(1)}), \\
D^{(0)} &= \left( \frac{1}{64} \partial_{6x} v - \frac{35}{32} (\partial_x v)^2 (\partial_{2x} v) - \frac{21}{32} v (\partial_x v)^2 - \frac{7}{8} v (\partial_x v) (\partial_{3x} v) \right) H^{(0)} + \\
&\quad + \left( -\frac{7}{32} v^2 (\partial_{4x} v) + \frac{35}{32} v^4 (\partial_{2x} v) + \frac{35}{16} v^3 (\partial_x v)^2 - \frac{5}{16} v^7 \right) H^{(0)}, \tag{B.8}
\end{aligned}$$

de modo que a equação de movimento para o grau  $N = 7$  é

$$\begin{aligned}
64 \partial_{t_7} v &= \partial_{7x} v - 182 (\partial_x v) (\partial_{2x} v)^2 - 126 (\partial_x v)^2 (\partial_{3x} v) - 140 v (\partial_{2x} v) (\partial_{3x} v) + \\
&\quad - 84 v (\partial_x v) (\partial_{4x} v) - 14 v^2 (\partial_{5x} v) + 420 v^2 (\partial_x v)^3 + 560 v^3 (\partial_x v) (\partial_{2x} v) + \\
&\quad + 70 v^4 (\partial_{3x} v) - 140 v^6 (\partial_x v). \tag{B.9}
\end{aligned}$$

## B.2 Equações para graus negativos

$t = t_{-2}$

A equação de curvatura nula é

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_{-2}} + D^{(-2)} + D^{(-1)} \right] = 0, \tag{B.10}$$

e resolvendo grau a grau obtenho

$$\begin{aligned} D^{(-2)} &= -2H^{(-1)} \\ D^{(-1)} &= -4e^{-2\phi} \int^x e^{2\phi} dx' E_{\alpha}^{(-1)} + 4e^{2\phi} \int^x e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(0)}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

o que resulta na equação

$$\partial_{t_{-2}} \partial_x \phi = 4e^{2\phi} \int^x e^{-2\phi} dx' + 4e^{-2\phi} \int^x e^{2\phi} dx' \quad (\text{B.12})$$

que é a equação de movimento para grau (-2).

$t = t_{-3}$

A equação de curvatura nula é

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_{-3}} + D^{(-3)} + D^{(-2)} + D^{(-1)} \right] = 0, \quad (\text{B.13})$$

e resolvendo grau a grau obtenho

$$D^{(-3)} = e^{-2\phi} E_{\alpha}^{(-2)} + e^{2\phi} E_{-\alpha}^{(-1)} \quad (\text{B.14})$$

$$D^{(-2)} = \left( - \int^x e^{2\phi} dx' + \int^x e^{-2\phi} dx' \right) H^{(-1)} \quad (\text{B.15})$$

$$D^{(-1)} = -4e^{-2\phi} \int_x I(\phi) e^{2\phi} dx' E_{\alpha}^{(-1)} + 4e^{2\phi} \int_x I(\phi) e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(0)}, \quad (\text{B.16})$$

onde

$$I(\phi) = \int^x \sinh(2\phi) dx', \quad (\text{B.17})$$

de modo que a seguinte equação de movimento é obtida

$$\partial_{t_{-3}} \partial_x \phi = 4e^{2\phi} \int^x I(\phi) e^{-2\phi} + 4e^{-2\phi} \int^x I(\phi) e^{2\phi}. \quad (\text{B.18})$$

$t = t_{-4}$

A equação de curvatura nula é

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_{-4}} + D^{(-4)} + D^{(-3)} + D^{(-2)} + D^{(-1)} \right] = 0, \quad (\text{B.19})$$

e resolvendo grau a grau obtenho

$$D^{(-4)} = -2H^{(-2)} \quad (\text{B.20})$$

$$D^{(-3)} = -4e^{-2\phi} \int^x e^{2\phi} dx' E_\alpha^{(-2)} + 4e^{2\phi} \int^x e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(-1)} \quad (\text{B.21})$$

$$D^{(-2)} = -4 \left[ \int^x \left( e^{-2\phi} \int^{x'} e^{2\phi} dx'' \right) dx' + \int^x \left( e^{2\phi} \int^{x'} e^{-2\phi} dx'' \right) dx' \right] H^{(-1)} \quad (\text{B.22})$$

$$D^{(-1)} = -4e^{-2\phi} \int^x W(\phi) e^{2\phi} dx' E_\alpha^{(-1)} + 4e^{2\phi} \int^x W(\phi) e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(0)}, \quad (\text{B.23})$$

onde

$$W(\phi) = \int^x \left( e^{2\phi} \int^{x'} e^{-2\phi} dx'' + e^{-2\phi} \int^{x'} e^{2\phi} dx'' \right) dx' \quad (\text{B.24})$$

de modo que a equação de movimento fica

$$\partial_{t_{-4}} \partial_x \phi = 4e^{2\phi} \int^x e^{-2\phi} W(\phi) dx' + 4e^{-2\phi} \int^x e^{2\phi} W(\phi) dx'. \quad (\text{B.25})$$

$t = t_{-5}$

A equação de curvatura nula é

$$\left[ \partial_x + A_0 + E^{(1)}, \partial_{t_{-5}} + D^{(-5)} + D^{(-4)} + D^{(-3)} + D^{(-2)} + D^{(-1)} \right] = 0, \quad (\text{B.26})$$

e resolvendo grau a grau obtenho

$$D^{(-5)} = e^{-2\phi} E_\alpha^{(-3)} + e^{2\phi} E_{-\alpha}^{(-2)}, \quad (\text{B.27})$$

$$D^{(-4)} = \left( - \int^x e^{2\phi} dx' + \int^x e^{-2\phi} dx' \right) H^{(-2)}, \quad (\text{B.28})$$

$$D^{(-3)} = -4e^{-2\phi} \int_x I(\phi)e^{2\phi} dx' E_\alpha^{(-2)} + 4e^{2\phi} \int_x I(\phi)e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(-1)}, \quad (\text{B.29})$$

$$D^{(-2)} = -4 \int^x \left( e^{2\phi} \int^{x'} I(\phi)e^{-2\phi} dx'' + e^{-2\phi} \int^{x'} I(\phi)e^{2\phi} dx'' \right) dx' H^{(-1)}, \quad (\text{B.30})$$

$$D^{(-1)} = -8e^{-2\phi} \int^x Y(\phi)e^{2\phi} dx' E_\alpha^{(-1)} + 8e^{2\phi} \int^x Y(\phi)e^{-2\phi} dx' E_{-\alpha}^{(0)}, \quad (\text{B.31})$$

com

$$Y = \int^x \left( e^{2\phi} \int^{x'} I(\phi)e^{-2\phi} dx'' + e^{-2\phi} \int^{x'} I(\phi)e^{2\phi} dx'' \right) dx'. \quad (\text{B.32})$$

Desta maneira a equação para grau  $(-5)$  é

$$\partial_{t_{-5}} \partial_x \phi = 8e^{2\phi} \int^x e^{-2\phi} Y(\phi) dx' + 8e^{-2\phi} \int^x e^{2\phi} Y(\phi) dx'. \quad (\text{B.33})$$

## Apêndice C

# Equações de movimento – Hierarquia KdV

Considerando  $A_x = E^{(1)} + A_0$  com  $A_0 = -E_\alpha^{(0)} + JE_{-\alpha}^{(0)}$  e  $E^{(1)} = H^{(1)}$  podemos obter as equações de movimento de graus positivos da hierarquia KdV.

### N=3 KdV

A equação de curvatura nula é dada por

$$\left[ \partial_x + E^{(1)} + A_0, \partial_{t_3} + D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} \right] = 0, \quad (\text{C.1})$$

calculando grau a grau obtemos a seguinte

$$D^{(3)} = H^{(3)}, \quad (\text{C.2})$$

$$D^{(2)} = -E_\alpha^{(2)} + JE_{-\alpha}^{(2)}, \quad (\text{C.3})$$

$$D^{(1)} = \frac{1}{2} \partial_x JE_{-\alpha}^{(1)} + \frac{1}{2} JH^{(1)}, \quad (\text{C.4})$$

$$D^{(0)} = -\frac{1}{2} JE_\alpha^{(0)} + \left( \frac{1}{4} \partial_{2x} J + \frac{1}{2} J^2 \right) E_{-\alpha}^{(0)} + \frac{1}{4} \partial_x JH^{(0)}, \quad (\text{C.5})$$

que resulta na seguinte equação de movimento

$$4\partial_{t_3} J = \partial_{3x} J + 6J(\partial_x J). \quad (\text{C.6})$$

### N=5



A equação de curvatura nula é dada por

$$\left[ \partial_x + E^{(1)} + A_0, \partial_{t_5} + D^{(5)} + D^{(4)} + D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} \right] = 0, \quad (\text{C.7})$$

calculando grau a grau obtenho a seguinte

$$\begin{aligned} D^{(5)} &= H^{(5)}, \\ D^{(4)} &= -E_{\alpha}^{(4)} + JE_{-\alpha}^{(4)}, \\ D^{(3)} &= \frac{1}{2} \partial_x JE_{-\alpha}^{(3)} + \frac{1}{2} JH^{(3)}, \\ D^{(2)} &= -\frac{1}{2} JE_{\alpha}^{(2)} + \left( \frac{1}{4} \partial_{2x} J + \frac{1}{2} J^2 \right) E_{-\alpha}^{(2)} + \frac{1}{4} \partial_x JH^{(2)}, \\ D^{(1)} &= \left( \frac{1}{8} \partial_{3x} J + \frac{3}{4} J \partial_x J \right) E_{-\alpha}^{(1)} + \left( \frac{1}{8} \partial_{2x} J + \frac{3}{8} J^2 \right) H^{(1)} \\ D^{(0)} &= \left( -\frac{1}{8} \partial_{2x} J - \frac{3}{8} J^2 \right) E_{\alpha}^{(0)} + \left( \frac{1}{16} \partial_{4x} J + \frac{3}{8} (\partial_x J)^2 + \frac{1}{2} J \partial_{2x} J + \frac{3}{8} J^3 \right) E_{-\alpha}^{(0)} + \\ &\quad + \left( \frac{1}{16} \partial_{3x} J + \frac{3}{8} J \partial_x J \right) H^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

que resulta na seguinte equação de movimento

$$16 \partial_{t_5} J = \partial_{5x} J + 20 (\partial_x J) (\partial_{2x} J) + 10 J (\partial_{3x} J) + 30 J^2 (\partial_x J). \quad (\text{C.9})$$

**N=7**

A equação de curvatura nula é dada por

$$\left[ \partial_x + E^{(1)} + A_0, \partial_{t_7} + D^{(7)} + D^{(6)} + D^{(5)} + D^{(4)} + D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} \right] = 0, \quad (\text{C.10})$$

calculando grau a grau obtenho a seguinte

$$\begin{aligned} D^{(7)} &= H^{(7)}, \\ D^{(6)} &= -E_{\alpha}^{(6)} + JE_{-\alpha}^{(6)}, \\ D^{(5)} &= \frac{1}{2} \partial_x JE_{-\alpha}^{(5)} + \frac{1}{2} JH^{(5)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^{(4)} &= -\frac{1}{2}JE_{\alpha}^{(4)} + \left(\frac{1}{4}\partial_{2x}J + \frac{1}{2}J^2\right)E_{-\alpha}^{(4)} + \frac{1}{4}\partial_x JH^{(4)}, \\
D^{(3)} &= \left(\frac{1}{8}\partial_{3x}J + \frac{3}{4}J\partial_x J\right)E_{-\alpha}^{(3)} + \left(\frac{1}{8}\partial_{2x}J + \frac{3}{8}J^2\right)H^{(3)} \\
D^{(2)} &= \left(-\frac{1}{8}\partial_{2x}J - \frac{3}{8}J^2\right)E_{\alpha}^{(2)} + \left(\frac{1}{16}\partial_{4x}J + \frac{3}{8}(\partial_x J)^2 + \frac{1}{2}J\partial_{2x}J + \frac{3}{8}J^3\right)E_{-\alpha}^{(2)} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{16}\partial_{3x}J + \frac{3}{8}J\partial_x J\right)H^{(2)} \\
D^{(1)} &= \left(\frac{1}{32}\partial_{5x}J + \frac{5}{8}(\partial_x J)(\partial_{2x}J) + \frac{5}{16}J(\partial_{3x}J) + \frac{15}{16}J^2(\partial_x J)\right)E_{-\alpha}^{(1)} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{32}(\partial_{4x}J) + \frac{5}{32}(\partial_x J)^2 + \frac{5}{16}J(\partial_{2x}J) + \frac{5}{16}J^3\right)H^{(1)} \\
D^{(0)} &= \left(-\frac{1}{32}(\partial_{4x}J - \frac{5}{32}(\partial_x J)^2 - \frac{5}{16}J(\partial_{2x}J) - \frac{5}{16}J^3)\right)E_{\alpha}^{(0)} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{64}(\partial_{6x}J) + \frac{5}{16}(\partial_{2x}J)^2 + \frac{15}{32}(\partial_x J)(\partial_{3x}J)\right)E_{-\alpha}^{(0)} + \\
&\quad + \left(\frac{3}{16}J(\partial_{4x}J) + \frac{35}{32}J(\partial_x J)^2 + \frac{25}{32}J^2(\partial_{2x}J) + \frac{5}{16}J^4\right)E_{-\alpha}^{(0)} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{64}(\partial_{5x}J + \frac{5}{16}(\partial_x J)(\partial_{2x}J) + \frac{5}{32}J(\partial_{3x}J) + \frac{15}{32}J^2(\partial_x J)\right)H^{(0)}, \tag{C.11}
\end{aligned}$$

que resulta na seguinte equação de movimento

$$\begin{aligned}
64\partial_{t_7}J &= \partial_{7x}J + 70(\partial_{2x}J)(\partial_{3x}J) + 42(\partial_x J)(\partial_{4x}J) + 70(\partial_x J)^3 + 14J(\partial_{5x}J) + \\
&\quad + 280J(\partial_x J)(\partial_{2x}J) + 70J^2(\partial_{3x}J) + 140J^3(\partial_x J). \tag{C.12}
\end{aligned}$$



# Bibliografia

- [1] D. Bernard O. Babelon. Affine solitons: A relation between tau functions, dressing and bäcklund transformations. *Int. J. Mod. Phys. A*, 8:507, 1993.
- [2] W. F. Shadwick C. Rogers. *Bäcklund Transformations and their applications*. Academic Press, 1<sup>a</sup> edition, 1982.
- [3] Miki Wadati K. Konno. Simple Derivation of Bäcklund Transformation from Riccati Form of Inverse Method. *Progress of Theoretical Physics*, 53(6), 1975.
- [4] C. Zambon E. Corrigan. A new class of integrable defects. *J.Phys. A, Math. Theor.*, 42, 2009.
- [5] E. Corrigan. Aspects of defects in integrable quantum field theory. *Theor.Math.Phys.*, 171:655–665, 2012.
- [6] A. H Zimerman J.F. Gomes, L.H. Ymai. Permutability of Bäcklund Transformation for N=1 Supersymmetric Sinh-Gordon. *Phys.Lett. A*, 373:1401–1404, 2009.
- [7] A. H Zimerman J.F. Gomes, L.H. Ymai. Permutability of Bäcklund Transformations for N=2 Supersymmetric Sine-Gordon. *J.Math.Phys.*, 51, 2010.
- [8] C. Zambon E. Corrigan. Jump-defects in the nonlinear schrödinger model and other non-relativistic field theories. *Nonlinearity*, 19:1447–1469, 2006.
- [9] J. F. Gomes A. H. Zimerman A. R. Aguirre, T. R. Araújo. Type-II Bäcklund Transformations via Gauge Transformations. *Journal of High Energy Physics*, 12:18, 2011.
- [10] A. L. Retore J. F. Gomes N. I. Spano, A. H. Zimerman. Bäcklund Transformation for Integrable Hierarchies: example - mKdV Hierarchy. *Aceito para Publicação Proc.*

do 30<sup>th</sup> International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Ghent, *arXiv:1501.00865 [nlin.SI]*, 2015.

- [11] G.R. de Melo A. H Zimerman J.F. Gomes, G. Starvaggi França. Negative Even Grade mKdV Hierarchy and its Soliton Solutions. *J.Phys.A*, 42, 2009.
- [12] G.S. França. *Estrutura Algébrica de Hierarquias integráveis e problemas de valor de contorno*. São Paulo, 2011. Tese de Doutorado, IFT Unesp.
- [13] Joaquín Sánchez Guillén L. A. Ferreira, J. L. Miramontes. Solitons,  $\tau$ -functions and hamiltonian reduction for non-Abelian conformal affine Toda theories. *Nuclear Physics B*, 449:631,679, 1995.
- [14] C. Rasinariu. *Solitons of KdV equation*. <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=4187view=html>.
- [15] R. M. Miura. edited by. *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering method, solitons, and their applications*. Springer-Verlag, 1976.