



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/15

Equações de Painlevé mistas e modelo PIII-PV simétrico

Danilo Virges Ruy

Orientador

Prof. Dr. Abraham Hirsz Zimmerman

Março de 2015

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Abraham Hirsz Zimmerman pela oportunidade de realizar este trabalho em conjunto, pela experiência que adquiri ao longo do processo e, em especial, por sua marcante personalidade com que tive o prazer de conviver. Agradeço também aos professores Prof. José Francisco Gomes (IFT-UNESP) e Prof. Henry Aratyn (University of Illinois at Chicago) pelas discussões, além da hospitalidade agradável que recebi em Chicago pelo prof. H. Aratyn.

Agradeço a todos meus amigos que me acompanharam ao longo desses anos e por todas discussões filosóficas que tivemos em mesas de bares; em especial, ao Mario Cezar Bertin pela indicação de referências importantes para o trabalho.

Agradeço especialmente a minha família pela motivação e apoio incondicional em todos os momentos.

Agradeço também a Fapesp (2010/18110-9) pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta tese aborda a conexão entre modelos integráveis e as equações de Painlevé. Começamos estendendo o método do truncamento modificado afim de encontrar transformações de Bäcklund para a hierarquia mKdV-Liouville e sua redução por auto-similaridade. Com este método, resolvemos parcialmente a conjectura de Kudryashov. Em seguida, estudamos o modelo misto AKNS-Lund-Regge estendido e mostramos que este modelo pode ser reduzido às equações PIV e PV para valores particulares dos parâmetros. Nós também construímos o modelo PIII-PV simétrico afim de unificar alguns casos da equação PIII com a equação PV. Posteriormente, buscamos os vínculos canônicos apropriados que reduzem o modelo 4-bósons ao modelo PIII-PV simétrico. Para isso, elaboramos o método do ansatz de vínculos. Complementarmente, apresentamos um método para encontrar soluções de equações diferenciais em D dimensões no adendo e aplicamos ao modelo $\lambda\phi^4$.

Palavras Chaves: modelos integráveis; equações de Painlevé; vínculos; modelos exatamente solúveis; mKdV-sinh-Gordon; mKdV-Liouville; AKNS-Lund-Regge; modelo simétrico; $\lambda\phi^4$

Áreas do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra/Área: Física/Subárea: Física das Partículas Elementares e Campos; Ciências Exatas e da Terra/Área: Física/Subárea:Física Geral/Especialidade: Métodos Matemáticos da Física

Abstract

This thesis studies the connection among integrable models and Painlevé equations. We begin by extending the modified truncation approach in order to find Bäcklund transformations for the mKdV-Liouville hierarchy and its self-similarity reduction. With this method, we solve Kudryashov's conjecture partially. Then we study the extended mixed AKNS-Lund-Regge model and show this model can be reduced to PIV and PV equation for particular values of the parameters. We also construct the symmetric PIII-PV model in order to unify some cases of the PIII equation with the PV equation. After, we search for canonical constraints for reduce the 4-bose model to the symmetric PIII-PV model. For find the correct constraints, we construct the method of ansatz of constraints. In addition, we show a method for finding solutions for differential equations in D dimensions in the addendum. We also apply this method for the $\lambda\phi^4$ model.

Sumário

1	Introdução	2
2	Hierarquia mista mKdV-sinh-Gordon generalizada	7
2.1	Construção algébrica do modelo misto mKdV-sinh-Gordon generalizado	7
2.2	Propriedades da hierarquia mKdV-sinh-Gordon generalizada	10
2.3	Transformação para a hierarquia mKdV-Liouville	13
2.3.1	De soluções do tipo sóliton da hierarquia mKdV a soluções da hierarquia mKdV-Liouville	14
2.3.2	Redução por auto-similaridade	17
3	Modelo misto AKNS-Lund-Regge estendido	20
3.1	Construção algébrica do modelo AKNS-Lund-Regge estendido	20
3.2	Redução por auto-similaridade do modelo AKNS-Lund-Regge estendido	25
4	Modelo PIII-PV simétrico	29
4.1	Modelo PIII-PV simétrico	29
4.1.1	Caso (i)	32
4.1.2	Caso (ii)	34
4.1.3	Caso (iii)	35
4.2	Simetrias ocultas	37
4.2.1	Caso ii) $C_0 = 1$ e $C_1 = 0$	37
4.2.2	Case iii) $C_0 = 0$ e $C_1 = 1$	38
5	O método do ansatz de vínculos	40
5.1	Vínculos canônicos genéricos	40
5.1.1	Imposição dos vínculos canônicos	41
5.1.2	Nota sobre o formalismo lagrangiano	47
5.2	Ansatz de vínculos	48
5.3	Do modelo 4-bósons ao modelo PIII-PV simétrico	50
5.4	Parênteses de Dirac para solução (i) da tabela 5.1	55

5.5	Parênteses de Dirac para solução (ii) da tabela 5.1	59
6	Um método para resolver equações diferenciais não-lineares em D	
	dimensões: uma aplicação ao modelo $\lambda\phi^4$.	64
6.1	Introdução	64
6.2	O método	65
6.2.1	Aproximantes de Padé homogêneos para várias variáveis . . .	65
6.2.2	O ansatz funcional	66
6.3	Uma aplicação ao modelo $\lambda\phi^4$ em 4 dimensões	68
6.3.1	Ansatz (i)	68
6.3.2	Ansatz (ii)	70
7	Conclusão	75
A	Hierarquia PII	77
A.1	Hierarquias KdV e mKdV	77
A.2	Redução à hierarquia PII	79
B	Transformação de Bäcklund para a equação PIII e PV	81
C	Método de Dirac para sistemas hamiltonianos com vínculos	83
	Referências	86

Capítulo 1

Introdução

As equações de Painlevé foram descobertas na virada para o século XX pelo matemático francês Paul Painlevé enquanto analisava as singularidades de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem no plano complexo do tipo

$$u_{zz} = F(z, u, u_z) \quad (1.1)$$

sendo F analítico em z e racional em u e u_z .

As singularidades das soluções de uma equação diferencial podem ser classificadas por duas propriedades: o comportamento da solução ao redor da singularidade e a sua dependência pelas condições iniciais. O comportamento da solução ao redor de uma singularidade pode ser classificado como: pólo, singularidade essencial ou ponto de ramificação; enquanto que a dependência com as condições iniciais pode ser classificada como móvel ou fixa. Pontos de ramificação são pontos do domínio de uma função definida no plano complexo, tal que a função seja descontínua se consideramos uma pequena trajetória circular em volta deste ponto. Pólos são singularidades onde a função possui um comportamento contínuo ao seu redor e que podem ser removidas pela multiplicação de um polinômio; enquanto que singularidades essenciais são similares a Pólos, mas não podem ser removidas pela multiplicação de polinômios. A fim de explicar melhor o que seria um ponto de singularidade móvel, considere as duas equações diferenciais não-lineares de primeira ordem a seguir:

$$\text{i) } u_z + 2zu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{z^2 + u_0^{-1}}$$

$$\text{ii) } u_z + \frac{u}{z-\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{u_0\alpha}{z-\alpha}.$$

No primeiro caso, a condição inicial $u(z=0) = u_0$ determina o local da singularidade, sendo assim uma singularidade móvel; enquanto que temos uma singularidade

fixa em $z = \alpha$ no segundo caso, isto é, independentemente da condição inicial.

O interesse pelo estudo das singularidades das equações diferenciais surgiu devido a uma questão levantada por L. Fuchs e H. Poincaré no final do século XIX. Eles notaram que algumas funções especiais podiam ser definidas a partir de EDO (equações diferenciais ordinárias) lineares. Em vista disso, eles conjecturaram que certas EDO não-lineares pudessem definir novas funções transcendentais*analogamente ao caso linear. Afim de selecionar EDOs que fossem boas candidatas para se definir tais funções, Painlevé e colegas de sua época buscaram classificar todas as equações do tipo (1.1) cujas soluções não possuíssem pontos de ramificação móveis. Esta propriedade ficou conhecida posteriormente como propriedade de Painlevé e se estendeu a equações diferenciais não-lineares de ordens superiores a 2. A motivação para buscarmos EDO que satisfazem esta propriedade é que as soluções gerais das equações podem ser extendidas analiticamente para todo plano complexo, excluindo os pontos de singularidades.

Para as EDOs de segunda ordem, foi mostrado que existem 50 equações na forma canônica que satisfazem a propriedade de Painlevé (uma exposição detalhada pode ser vista em [1]) e entre elas, apenas 6 equações não podem ser reduzidas em outras EDOs cujas soluções são conhecidas. Estas equações ficaram conhecidas como equações de Painlevé e são mostradas na tabela 1.1. No final dos anos 90, H. Umemura [2] mostrou que as soluções gerais das 6 equações de Painlevé, de fato, não podiam ser expressas em termos de funções já conhecidas, embora houvesse uma função analítica que as descrevessem. Assim, definiram-se novas funções transcendentais a partir das soluções gerais destas equações. Atualmente, as equações de Painlevé desempenham na física não-linear o mesmo papel que outras funções especiais, como Bessel e Airy, desempenham na física linear e têm sido aplicadas em diversas áreas, como: matrizes aleatórias [3], gravitação quântica em 2 dimensões [4], função de correlação [5], cosmologia [6], transporte quântico [7], entre outros.

Em meados dos anos 70, o estudo das equações de Painlevé passou por um renascimento devido a descoberta de M. J. Ablowitz e H. Segur [8] de que a equação PII[†]é obtida através de uma redução de auto-similaridade (através da qual elimina-se uma variável do problema) do modelo mKdV. O estudo da conexão entre modelos integráveis e equações com a propriedade de Painlevé, levou Ablowitz, Ramani e Segur [9] a formular a seguinte conjectura

Conjectura 1 (Ablowitz-Ramani-Segur). *Toda redução a uma EDO de uma EDP*

*Função transcendental é toda função que não é algébrica.

[†]Identificaremos as equações de Painlevé por P_n; ou seja, equação PI, equação PII e assim por diante.

Tabela 1.1: Equações de Painlevé

PI	$u_{zz} = 6u^2 + z$
PII	$u_{zz} = zu + 2u^3 + \alpha$
PIII	$u_{zz} = \frac{1}{u}u_z^2 - \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z}(au^2 + b) + cu^3 + \frac{d}{u}$
PIV	$u_{zz} = \frac{1}{2u}u_z^2 + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u}$
PV	$u_{zz} = \frac{3u-1}{2u(u-1)}u_z^2 - \frac{1}{z}u_z + \frac{(u-1)^2}{z^2}(\alpha u + \frac{\beta}{u}) + \frac{\gamma u}{z} + \frac{\delta u(u+1)}{u-1}$
PVI	$u_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-z}\right)u_z^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{u-z}\right)u_z + \frac{u(u-1)(u-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{z}{u^2}\right) + \gamma\frac{z-1}{(u-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(u-z)^2}$

(equação diferencial parcial) integrável por algum método espectral, terá a propriedade de Painlevé após uma transformação de coordenadas apropriadas.

Esta conjectura conduziu ao estudo das hierarquias de modelos integráveis[‡] com o objetivo de buscar EDOs de ordens maiores que 2 e que possuíssem a propriedade de Painlevé ([10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]). Em [12], Kudryashov encontrou uma hierarquia de EDOs cuja primeira equação se reduzia às equações PII e PIII para valores particulares dos parâmetros, isto é

$$\frac{1}{2}(y_z + zy_{zz}) + \epsilon_0(y_{zzzz} - \frac{3}{2}y_z^2y_{zz}) + Ae^y + Be^{-y} = 0. \quad (1.2)$$

Na expressão (1.2), temos a equação PII quando $A = B = 0$ e $\epsilon_0 = -1/2$ através da transformação $v = y_z/2$; enquanto que temos um caso particular da equação PIII quando $\epsilon_0 = 0$ através da transformação $y = \ln v$, ou seja

$$v_{zz} = zv + 2v^3 + C, \quad C \equiv \text{constante de integração} \quad (PII)$$

$$v_{zz} = \frac{v_z^2}{v} - \frac{v_z}{z} - \frac{2}{z}(Av^2 + B), \quad (PIII)$$

A partir deste modelo, Kudryashov conjecturou que a equação (1.2) com A , B e ϵ_0 arbitrários poderia ser uma boa candidata para se definir uma nova função transcendental. Em [19], foi mostrado que a equação (1.2) era a redução por auto-similaridade do modelo integrável bi-dimensional mKdV-sinh-Gordon generalizado,

[‡]Hierarquias de modelos integráveis são conjuntos de equações diferenciais que são construídas a partir de alguma propriedade algébrica do modelo.

isto é

$$\epsilon_0(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_x \right) \mathcal{L}_n \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + y_{xt} + \beta(t) e^y + \delta(t) e^{-y} = 0 \quad (1.3)$$

quando $n = 1$, sendo que $\mathcal{L}_n[x; u]$ é obtido a partir da relação de recorrência de Lenard (apêndice A). Um modelo misto para o modelo mKdV que também incluisse o modelo sinh-Gordon foi originalmente proposto em [20] e, posteriormente, este modelo misto se mostrou adequado para descrever pulsos em um meio transparente com poucos ciclos ópticos [21]. O modelo (2.15) foi chamado de mKdV-sinh-Gordon generalizado, pois ele se reduz ao modelo mKdV-sinh-Gordon quando $\delta(t) = -\beta(t)$ e ao modelo mKdV-Liouville quando $\delta(t) = 0$.

A abordagem do truncamento modificado foi introduzida em [22] como uma técnica para encontrar transformações de Bäcklund para a hierarquia de EDOs da equação PII (apresentada no apêndice A). No capítulo 2, apresentaremos o trabalho [23] onde estendemos o método do truncamento modificado afim de obtermos transformações de Bäcklund para a hierarquia de EDPs do modelo mKdV-Liouville. Além disso, encontramos soluções para o modelo mKdV diferentes das já conhecidas na literatura [24, 25, 26, 27]. Nós também estudamos a redução de auto-similaridade do modelo mKdV-Liouville e resolvemos a conjectura de Kudryashov para um caso particular da equação (1.2). No capítulo 3, apresentamos o trabalho [19] onde estudamos o modelo misto AKNS-Lund-Regge estendido. Este modelo de dois campos pode ser reduzido às equações PIV e PV para diferentes valores dos parâmetros.

No capítulo 4, apresentamos um modelo simétrico afim de unificar alguns casos da equação PIII e a equação PV em um único modelo. A relação da equação PIII com $cd \neq 0$ (ver tabela 1.1) e a equação PV com $\delta = 0$ (ver tabela 1.1) é conhecida na literatura [28]; no entanto, o modelo PIII-PV simétrico do capítulo 4 unifica a equação PV com $\delta \neq 0$, a equação PIII com $b = d = 0$, a equação PIII com $cd \neq 0$ e a equação PV com $\delta = 0$ no mesmo modelo. Diferentemente de um modelo misto, o modelo PIII-PV simétrico não possui nenhuma região em seu espaço de parâmetros que não esteja conectada com a equação PIII ou PV. Chamaremos esta propriedade de quebra espontânea de simetria para equações de Painlevé.

No capítulo 5, apresentamos o método do ansatz de vínculos. Este método é capaz de encontrar os vínculos corretos para se reduzir um sistema hamiltoniano a outro usando a abordagem de Dirac. Usando este método, mostramos que o modelo integrável de 4-bósons pode ser reduzido ao modelo PIII-PV simétrico através da imposição de dois conjuntos de vínculos diferentes.

Complementarmente aos tópicos desenvolvidos ao longo da tese, apresentamos também um algoritmo para encontrar soluções de equações diferenciais em D dimensões no capítulo 6. Tal algoritmo foi apresentado em [29] afim de simplificar

o método das múltiplas exponenciais [30]. Por fim, aplicamos esta técnica para encontrar soluções exatas do modelo $\lambda\phi^4$ em 4 dimensões.

Capítulo 2

Hierarquia mista mKdV-sinh-Gordon generalizada

2.1 Construção algébrica do modelo misto mKdV-sinh-Gordon generalizado

O par de Lax é um elemento central para garantir a integrabilidade espectral de um modelo matemático em duas dimensões. Nesta seção, consideremos a construção do par de Lax para o modelo mKdV-sinh-Gordon generalizado. Para isso, considere a algebra de Lie $\mathcal{G} = sl(2)$ cujos geradores satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[H, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha}, \quad [E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = H.$$

Usando o operador de graduação $Q = 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}H$, podemos construir uma algebra de Lie afim correspondente a \mathcal{G} cujos elementos sejam divididos em subespaços graduados. Desta forma, temos a algebra de Lie afim $\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_i \hat{\mathcal{G}}_i$ com os subespaços

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_{2m+1} &\equiv \{E_+^{(2m+1)} \equiv \lambda^m(E_{\alpha} + \lambda E_{-\alpha}), E_-^{(2m+1)} \equiv \lambda^m(E_{\alpha} - \lambda E_{-\alpha})\}, \\ \hat{\mathcal{G}}_{2m} &\equiv \{H^{(2m)} \equiv \lambda^m H\}, \end{aligned}$$

tal que todo elemento $g^{(m)} \in \hat{\mathcal{G}}_m$ satisfará a relação

$$[Q, g^{(m)}] = mg^{(m)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Observe também que

$$[H^{(2m_1)}, E_{\pm}^{(2m_2+1)}] = 2E_{\mp}^{(2(m_1+m_2)+1)}, \quad [E_+^{(2m_1+1)}, E_-^{(2m_2+1)}] = -2H^{(2(m_1+m_2)+2)}$$

Agora considere o sistema linear

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} = -\mathcal{B}_1 \hat{\Psi}, \quad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t_N} = -\mathcal{B}_N \hat{\Psi},$$

onde \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_N formam o par de Lax, t_N é o tempo da n-ésima equação da hierarquia generalizada mKdV-sinh-Gordon e $\hat{\Psi}$ é uma função vetorial auxiliar. Afim de construirmos a hierarquia do modelo, vamos parametrizar o par de Lax como

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= E_+^{(1)} + vH^{(0)} \\ \mathcal{B}_N &= D_N^{(N)} + D_N^{(N-1)} + D_N^{(N-2)} + \dots + D_N^{(1)} + D_N^{(0)} + D_N^{(-1)}\end{aligned}$$

tal que

$$D_N^{(2k+1)} = a_{2k+1}E_+^{(2k+1)} + b_{2k+1}E_-^{(2k+1)}, \quad D_N^{(2k)} = c_{2k}H^{(2k)},$$

sendo $v = v(x, t_N)$, $a_{2k+1} = a_{2k+1}(x, t_N)$, $b_{2k+1} = b_{2k+1}(x, t_N)$ e $c_{2k} = c_{2k}(x, t_N)$.

A condição para que as derivadas de $\hat{\Psi}$ nas variáveis x e t_N comutem, isto é

$$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial x \partial t_N} = \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial t_N \partial x},$$

dá origem a equação de curvatura nula

$$\begin{aligned}[\partial_x + \mathcal{B}_1, \partial_{t_N} + \mathcal{B}_N] \hat{\Psi} &= [\partial_x + E_+^{(1)} + vH^{(0)}, \partial_{t_N} + D_N^{(N)} + D_N^{(N-1)} + D_N^{(N-2)} + \dots + D_N^{(1)} \\ &+ D_N^{(0)} + D_N^{(-1)}] \hat{\Psi} = 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

A equação (2.1) pode ser decomposta em elementos de mesma graduação, dando origem ao seguinte sistema:

$$[E_+^{(1)}, D_N^{(N)}] = 0 \quad (2.2)$$

$$[E_+^{(1)}, D_N^{(N-1)}] + v[H^{(0)}, D_N^{(N)}] + \frac{\partial D_N^{(N)}}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$$[E_+^{(1)}, D_N^{(N-2)}] + v[H^{(0)}, D_N^{(N-1)}] + \frac{\partial D_N^{(N-1)}}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

⋮

$$[E_+^{(1)}, D_N^{(0)}] + v[H^{(0)}, D_N^{(1)}] + \frac{\partial D_N^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

$$[E_+^{(1)}, D_N^{(-1)}] + v[H^{(0)}, D_N^{(0)}] + \frac{\partial D_N^{(0)}}{\partial x} - v t_N H^{(0)} = 0 \quad (2.6)$$

$$v[H^{(0)}, D_N^{(-1)}] + \frac{\partial D_N^{(-1)}}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Independentemente do valor escolhido para N , a equação (2.7) gerará o sistema

$$\frac{\partial a_{-1}}{\partial x} + 2vb_{-1} = 0, \quad \frac{\partial b_{-1}}{\partial x} + 2va_{-1} = 0. \quad (2.8)$$

Este sistema também pode ser desacoplado em

$$\frac{\partial^2 a_{-1}}{\partial x^2} - \frac{v_x}{v} \frac{\partial a_{-1}}{\partial x} - 4v^2 a_{-1} = 0, \quad \frac{\partial^2 b_{-1}}{\partial x^2} - \frac{v_x}{v} \frac{\partial b_{-1}}{\partial x} - 4v^2 b_{-1} = 0, \quad (2.9)$$

cuja solução geral é dada por

$$a_{-1} = \frac{1}{4} \left(\beta(t_N) e^{2 \int^x v} - \gamma(t_N) e^{-2 \int^x v} \right) \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \left(\beta(t_N) e^{2 \int^x v} + \gamma(t_N) e^{-2 \int^x v} \right), \quad (2.10)$$

sendo $\beta(t_N)$ e $\delta(t_N)$ funções arbitrárias dependentes apenas de t_N . Desta forma, a equação (2.6) se reduzirá a

$$v_{t_N} - \frac{\partial c_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\beta(t_N) e^{2f^x v} + \gamma(t_N) e^{-2f^x v} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Para $N = 3$, o sistema (2.2)-(2.5) gerará:

$$\begin{array}{l|l} \text{graduação 4)} & b_3 = 0, \\ \text{graduação 3)} & \frac{\partial a_3}{\partial x} = -2vb_3, \quad \frac{\partial b_3}{\partial x} = -2(va_3 - c_2), \\ \text{graduação 2)} & \frac{\partial c_2}{\partial x} = 2b_1, \\ \text{graduação 1)} & \frac{\partial a_1}{\partial x} = -2vb_1, \quad \frac{\partial b_1}{\partial x} = -2(va_1 - c_0), \end{array}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} a_1 &= 2v^2 \epsilon_0(t_3) + \epsilon_1(t_3), & b_1 &= -2v_x \epsilon_0(t_3), & c_2 &= -4v \epsilon_0(t_3), & a_3 &= -4\epsilon_0(t_3), \\ b_3 &= 0, & c_0 &= -\epsilon_0(t_3)(v_{xx} - 2v^3) + \epsilon_1(t_3)v, \end{aligned}$$

sendo $\epsilon_0(t_3)$ e $\epsilon_1(t_3)$ funções arbitrárias dependentes apenas de t_3 . Substituindo a solução acima em (2.11) e fazendo a transformação $v = y_x/2$, temos a equação mKdV-sinh-Gordon generalizada, isto é

$$\epsilon_0(t_3) \left(y_{xxxx} - \frac{3}{2} y_{xx} y_x^2 \right) + y_{x,t_3} - \epsilon_1(t_3) y_{xx} + \beta(t_3) e^y + \gamma(t_3) e^{-y} = 0 \quad (2.12)$$

Se consideramos $N = 4$, a equação resultante será (2.12) novamente. No entanto, se consideramos $N = 5$, (2.2)-(2.5) gerará o sistema

$$\begin{array}{l|l} \text{graduação 6)} & b_5 = 0, \\ \text{graduação 5)} & \frac{\partial a_5}{\partial x} = -2vb_5, \quad \frac{\partial b_5}{\partial x} = -2(va_5 - c_4), \\ \text{graduação 4)} & \frac{\partial c_4}{\partial x} = 2b_3, \\ \text{graduação 3)} & \frac{\partial a_3}{\partial x} = -2vb_3, \quad \frac{\partial b_3}{\partial x} = -2(va_3 - c_2), \\ \text{graduação 2)} & \frac{\partial c_2}{\partial x} = 2b_1, \\ \text{graduação 1)} & \frac{\partial a_1}{\partial x} = -2vb_1, \quad \frac{\partial b_1}{\partial x} = -2(va_1 - c_0), \end{array}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} a_1 &= \epsilon_0(t_5)(-6v^4 + 4vv_{xx} - 2v_x^2) + 2\epsilon_3(t_5)v^2 + \epsilon_1(t_5), \\ b_1 &= \epsilon_0(t_5)(12v^2v_x - 2v_{xxx}) - 2\epsilon_3(t_5)v_x, \\ c_2 &= 4\epsilon_0(t_5)(2v^3 - v_{xx}) - 4\epsilon_3(t_5)v, & a_3 &= 8v^2\epsilon_0(t_5) - 4\epsilon_3(t_5), & b_3 &= -8v_x\epsilon_0(t_5), \\ c_4 &= -16v\epsilon_0(t_5), & a_5 &= -16\epsilon_0(t_5), & b_5 &= 0, \\ c_0 &= \epsilon_0(t_5)(10vv_x^2 + 10v^2v_{xx} - 6v^5 - v_{xxxx}) - \epsilon_3(t_5)(v_{xx} - 2v^3) + \epsilon_1(t_5)v, \end{aligned}$$

sendo $\epsilon_0(t_5)$, $\epsilon_1(t_5)$ e $\epsilon_3(t_5)$ funções arbitrárias dependentes apenas de t_5 . Substituindo a solução acima em (2.11) e fazendo novamente a transformação $v = y_x/2$,

temos a segunda equação da hierarquia, isto é

$$\begin{aligned} \epsilon_0(t_5) \left(\frac{15}{8} y_x^4 y_{xx} - \frac{5}{2} y_{xx}^3 - 10 y_x y_{xx} y_{xxx} - \frac{5}{2} y_x^2 y_{xxxx} + y_{xxxxx} \right) + \epsilon_3(t_5) \left(y_{xxxx} - \frac{3}{2} y_{xx} y_x^2 \right) \\ + y_{x,t_5} - \epsilon_1(t_5) y_{xx} + \beta(t_5) e^y + \gamma(t_5) e^{-y} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Continuando o cálculo para N maiores veremos a mesma estrutura da hierarquia mKdV com a adição dos termos de graduação negativa. Desta forma, a hierarquia pode ser escrita com a ajuda da relação de recorrência de Lenard*, isto é

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{n+1}[x; u] = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 2u \frac{\partial}{\partial x} + u_x \right) \mathcal{L}_n[x; u], \quad \mathcal{L}_0[x; u] = 1,$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \epsilon_0(t_{2n+1}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_x \right) \mathcal{L}_n \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_{2k+1}(t_{2n+1}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right. \\ \left. + y_x \right) \mathcal{L}_k \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + y_{xt_{2n+1}} - \epsilon_1(t_{2n+1}) y_{xx} + \beta(t_{2n+1}) e^y + \delta(t_{2n+1}) e^{-y} = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

O termo $\epsilon_1(t_{2n+1}) y_x$ da expressão acima pode ser absorvido na derivada de t_{2n+1} através da transformação $y(x, t_{2n+1}) \rightarrow y(x - \int^{t_{2n+1}} \epsilon_1(t') dt', t_{2n+1})$. Logo, podemos considerar $\epsilon_1(t_{2n+1}) = 0$ sem perda de generalidade. De acordo com a nomenclatura usada em [23], chamaremos de hierarquia mKdV-sinh-Gordon generalizada a hierarquia (2.14) com $\epsilon_{2k+1}(t_{2n+1}) = 0$ para todo $k = 1, \dots, n-1$. Assim, omitindo o índice do tempo (isto é $t_{2n+1} \rightarrow t$), temos

$$E_n(y; \epsilon_0(t), \beta(t), \delta(t)) : \quad \epsilon_0(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_x \right) \mathcal{L}_n \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + y_{xt} + \beta(t) e^y + \delta(t) e^{-y} = 0 \quad (2.15)$$

2.2 Propriedades da hierarquia mKdV-sinh-Gordon generalizada

Nesta seção, mostraremos que a hierarquia mKdV-sinh-Gordon generalizada pode ser reduzida a dois casos mais simples, isto é, a hierarquia mKdV-sinh-Gordon e a hierarquia mKdV-Liouville. Afim de mostrarmos isto, vamos dividir $\mathcal{L}_n[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2]$ em duas partes, de modo que

$$\mathcal{L}_n \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = \mathcal{L}_n^{(e)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + \mathcal{L}_n^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right], \quad (2.16)$$

*ver apêndice A.1 para mais detalhes sobre a relação de Lenard empregada à hierarquia mKdV

onde definiremos $\mathcal{L}_n^{(e)}[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2]$ e $\mathcal{L}_n^{(o)}[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2]$ como sendo as partes de $\mathcal{L}_n[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2]$ com dimensões pares e ímpares do campo, respectivamente. Por exemplo

$$\mathcal{L}_1\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] = y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2 \Rightarrow \mathcal{L}_1^{(e)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] = -\frac{1}{2}y_x^2, \quad \mathcal{L}_1^{(o)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] = y_{xx}.$$

Da definição da expressão (2.16), observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{(e)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] &= \mathcal{L}_n^{(e)}\left[x; -y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] \\ \mathcal{L}_n^{(o)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] &= -\mathcal{L}_n^{(o)}\left[x; -y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] \end{aligned}$$

Portanto, a relação de recorrência de Lenard é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{n+1}^{(e)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] &= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - y_x^2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}(y_x^2)_x\right) \mathcal{L}_n^{(e)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] + \left(2y_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + y_{xxx}\right) \mathcal{L}_n^{(o)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{n+1}^{(o)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] &= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - y_x^2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}(y_x^2)_x\right) \mathcal{L}_n^{(o)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] + \left(2y_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + y_{xxx}\right) \mathcal{L}_n^{(e)}\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Com a ajuda da propriedade acima, podemos provar a seguinte transformação do tipo auto-Bäcklund:

Teorema 1. *Considere $y = y(x, t)$ sendo uma solução de $E_n(y; \epsilon_0(t), \beta(t), \delta(t))$ em (2.15), então $\tilde{y} = -y$ será uma solução de $E_n(\tilde{y}; \epsilon_0(t), -\delta(t), -\beta(t))$.*

Demonstração. Considere a hierarquia

$$E_n(\tilde{y}; \tilde{\epsilon}_0(t), \tilde{\beta}(t), \tilde{\delta}(t)) : \quad \tilde{\epsilon}_0(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{y}_x \right) \mathcal{L}_n\left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2}\tilde{y}_x^2\right] + \tilde{y}_{xt} + \tilde{\beta}(t)e^{\tilde{y}} + \tilde{\delta}(t)e^{-\tilde{y}} = 0 \quad (2.19)$$

Pela transformação $\tilde{y} = -y$, temos

$$\tilde{\epsilon}_0(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - y_x \right) \mathcal{L}_n\left[x; -y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] - y_{xt} + \tilde{\beta}(t)e^{-y} + \tilde{\delta}(t)e^y = 0$$

Vamos assumir $\tilde{\epsilon}_0(t) = \epsilon_0(t) \neq 0$, $\tilde{\beta}(t) = -\delta(t)$ e $\tilde{\delta}(t) = -\beta(t)$. Afim de mostrarmos que y satisfaz (2.15), precisamos mostrar que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - y_x \right) \mathcal{L}_n\left[x; -y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + y_x \right) \mathcal{L}_n\left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2\right] \quad (2.20)$$

Observe que podemos reescrever a equação (2.20) como

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_n^{(e)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + y_x \mathcal{L}_n^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = 0 \quad (2.21)$$

Derivando duas vezes a equação acima, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3}{\partial x^3} \mathcal{L}_n^{(e)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + y_{xxx} \mathcal{L}_n^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + 2y_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_n^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] \\ & + y_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}_n^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Verificaremos a expressão (2.21) por indução. Podemos facilmente verificar que (2.21) vale para $n = 0$ e $n = 1$, isto é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = 1 & \Rightarrow \mathcal{L}_0^{(e)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = 1, \quad \mathcal{L}_0^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = 0 \\ \mathcal{L}_1 \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 & \Rightarrow \mathcal{L}_1^{(e)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = -\frac{1}{2} y_x^2, \quad \mathcal{L}_1^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] = y_{xx}. \end{aligned}$$

Agora assumiremos que (2.21) é válida para $n = k - 1$. Usando (2.17) e (2.18) na expressão (2.21) com $n = k$, temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - y_x^2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} (y_x^2)_x \right) \mathcal{L}_{k-1}^{(e)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + \left(2y_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + y_{xxx} \right) \mathcal{L}_{k-1}^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + \\ & y_x \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - y_x^2 \right) \mathcal{L}_{k-1}^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + y_{xx} \mathcal{L}_{k-1}^{(e)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + \right. \\ & \left. \int^x y_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{k-1}^{(e)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + y_x \mathcal{L}_{k-1}^{(o)} \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] \right) dx \right\} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, usando (2.21) e (2.22) com $n = k - 1$, a expressão acima é verificada. \square

Teorema 2. *Considere $y = y(x, t)$ sendo uma solução de $E_n(y; \epsilon_0(t), \beta(t), \delta(t))$, então a transformação*

$$\tilde{y} = y(x, \tilde{t}) + \ln f(\tilde{t}), \quad \tilde{t} = \int^t \frac{dt'}{\epsilon_0(t')}$$

gerará uma solução para $E_n(\tilde{y}; 1, \frac{\beta(t)f(\tilde{t})}{\epsilon_0(t)}, \frac{\delta(t)}{f(\tilde{t})\epsilon_0(t)})$, com $t = t(\tilde{t})$, desde que $\epsilon_0(t) \neq 0$ e $f(\tilde{t}) \neq 0$.

Demonstração. É uma substituição direta. \square

Usando teorema 2 com $f(\tilde{t}) = \pm i \sqrt{\frac{\delta(t)}{\beta(t)}}$, podemos reduzir a hierarquia (2.15), com $\epsilon_0(t)$, $\beta(t)$ e $\delta(t)$ não nulos para a hierarquia mKdV-sinh-Gordon usual, isto é

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{y}_x \right) \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] + \tilde{y}_{x\tilde{t}} + \eta(\tilde{t}) \sinh \tilde{y} = 0, \quad \eta(\tilde{t}) = \pm \frac{2i \sqrt{\delta(t)\beta(t)}}{\epsilon_0(t)} \quad (2.23)$$

A hierarquia (2.15) com $\delta(t) = 0$ chamaremos de hierarquia mKdV-Liouville. Pelo teorema 2, podemos reduzi-la a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{y}_x \right) \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] + \tilde{y}_{x\tilde{t}} + \tilde{\beta}(\tilde{t}) e^{\tilde{y}} = 0, \quad \tilde{\beta}(\tilde{t}) = \frac{\beta(t)f(\tilde{t})}{\epsilon_0(t)} \quad (2.24)$$

Observe que o caso quando a expressão (2.15) possui $\beta(t) = 0$ e $\delta(t) \neq 0$ pode ser mapeados na hierarquia (2.24) pelo teorema 1.

2.3 Transformação para a hierarquia mKdV-Liouville

Vamos considerar a hierarquia (2.15) com $\delta(t) = 0$ e $\epsilon_0(t) \neq 0$. Devido ao teorema 2, podemos escolher $\epsilon_0(t) = 1$ sem perda de generalidade. Desta forma, consideraremos a hierarquia mKdV-Liouville como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_x \right) \mathcal{L}_n \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right] + y_{xt} + \beta(t) e^y = 0. \quad (2.25)$$

Definindo

$$y = \ln[g(t)\sigma_x], \quad (2.26)$$

sendo $g(t)$ uma função arbitrária, a expressão $\mathcal{L}_n \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2} y_x^2 \right]$ se torna um elemento invariante de Möbius. Assim, a hierarquia (2.25) se torna

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_x} \right) \mathcal{L}_n[x; S(\sigma)] + \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_x} \right) + \beta(t)g(t)\sigma_x = 0 \quad (2.27)$$

onde $S(\sigma)$ é a derivada Schwarziana, isto é

$$S(\sigma) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_x} \right)^2.$$

Fazendo a transformação de Möbius $\sigma = -1/\phi$ e definindo $\tilde{y} = \ln[g(t)\phi_x]$, obtemos a relação

$$y = \ln \left[g(t) \frac{\phi_x}{\phi^2} \right] = \ln[g(t)\phi_x] - 2 \ln \phi \equiv \tilde{y} - 2 \ln \phi. \quad (2.28)$$

Usando (2.28) a hierarquia (2.27) é transformada em

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\phi_{xx}}{\phi_x} - 2 \frac{\phi_x}{\phi} \right) \mathcal{L}_n[x; S(\phi)] + \frac{d}{dt} \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} - 2 \frac{\phi_x}{\phi} \right) + \beta(t)g(t) \frac{\phi_x}{\phi^2} = 0, \quad (2.29)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{y}_x - 2 \frac{\phi_x}{\phi} \right) \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] + \frac{d}{dt} \left(\tilde{y}_x - 2 \frac{\phi_x}{\phi} \right) + \beta(t)g(t) \frac{\phi_x}{\phi^2} = 0 \quad (2.30)$$

Nas seções seguintes, usaremos a expressão (2.30) para construir soluções de (2.25) assim como de sua redução por auto-similaridade.

2.3.1 De soluções do tipo sólton da hierarquia mKdV a soluções da hierarquia mKdV-Liouville

Observe que $g(t)$ aparece apenas multiplicando $\beta(t)$ em (2.30). Como podemos redefinir $\beta(t)$ usando o teorema 2, podemos assumir $g(t) = 1$ sem perda de generalidade.

Assumindo $\tilde{y}_x = 2v$ de modo que v satisfaça a hierarquia mKdV, isto é

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) \mathcal{L}_n \left[x; 2(v_x - v^2) \right] + 2v_t = 0, \quad (2.31)$$

então a expressão (2.30) gerará a seguinte condição sobre ϕ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-2 \frac{\phi_x}{\phi} \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] \right) + \frac{d}{dt} \left(-2 \frac{\phi_x}{\phi} \right) + \beta(t) \frac{\phi_x}{\phi^2} = 0 \quad (2.32)$$

Integrando a expressão acima em x , temos

$$2\phi_x \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] + 2\phi_t + \beta(t) + \alpha(t)\phi = 0, \quad (2.33)$$

onde $\alpha(t)$ é uma função arbitrária de t . A condição (2.33) é similar a encontrada em [31] para a equação mKdV, embora não tenha sido obtida nenhuma solução explicita lá.

A fim de verificar que a equação (2.33) é compatível com (2.31), vamos isolar $\mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right]$, isto é

$$\mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] = -\frac{\phi_t}{\phi_x} - \frac{(\beta(t) + \alpha(t)\phi)}{2\phi_x} \quad (2.34)$$

A expressão acima, juntamente com a definição $\tilde{y} = \ln[\phi_x]$, resulta em

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] = -\frac{\phi_{xt}}{\phi_x} + \frac{\phi_t \phi_{xx}}{\phi_x^2} + \frac{(\beta(t) + \alpha(t)\phi)\phi_{xx}}{2\phi_x^2} - \frac{\alpha(t)}{2} \quad (2.35)$$

$$\tilde{y}_x \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] = -\frac{\phi_t \phi_{xx}}{\phi_x^2} - \frac{(\beta(t) + \alpha(t)\phi)\phi_{xx}}{2\phi_x^2} \quad (2.36)$$

Somando (2.35) e (2.36), temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{y}_x \right) \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] + \tilde{y}_t + \frac{\alpha(t)}{2} = 0, \quad (2.37)$$

que resulta em (2.31) através de uma derivação e da transformação $\tilde{y}_x = 2v$. Observe que \tilde{y} é dado em termos de v por

$$\tilde{y} = 2 \int^x v(x', t) dx' + \Gamma(t) \quad (2.38)$$

onde $\Gamma(t)$ é uma função arbitrária. Se considerarmos uma solução do tipo sólito para v , precisamos escolher $\alpha(t) = -2\Gamma'(t)$ para (2.31), (2.37) e (2.38) serem compatíveis. Assim, podemos reescrever equação (2.33) como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\Gamma(t)} \phi \right) + \frac{\beta(t)e^{-\Gamma(t)}}{2} = -e^{\tilde{y}-\Gamma(t)} \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] \quad (2.39)$$

Como o lado direito da equação (2.39) é expresso em termos de elementos conhecidos, nós podemos integrar afim de determinar ϕ , isto é

$$\phi = -e^{\Gamma(t)} \left(\int_{-\infty}^t e^{\tilde{y}-\Gamma(t')} \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] dt' + \int_{-\infty}^t \frac{\beta(t')e^{-\Gamma(t')}}{2} dt' + \Phi_0(x) \right) \quad (2.40)$$

onde $\Phi_0(x)$ precisa ser determinado tal que (2.40) seja consistente com a definição $\tilde{y} = \ln \phi_x$. Vamos derivar (2.40) em x e usar (2.37) de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -e^{\Gamma(t)} \left(\int_{-\infty}^t e^{\tilde{y}-\Gamma(t')} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{y}_x \right) \mathcal{L}_n \left[x; \tilde{y}_{xx} - \frac{1}{2} \tilde{y}_x^2 \right] dt' + \Phi_0'(x) \right) \\ &= e^{\tilde{y}} - e^{\Gamma(t)} \left(\lim_{t' \rightarrow -\infty} e^{\tilde{y}(x,t')-\Gamma(t')} + \Phi_0'(x) \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Usando a definição de \tilde{y} , a expressão acima dá origem à condição

$$\Phi_0(x) = - \int_{-\infty}^x \lim_{t' \rightarrow -\infty} e^{\tilde{y}(x',t')-\Gamma(t')} dx' + c_1, \quad c_1 \equiv \text{constante}$$

Observe que toda solução do tipo sólito da hierarquia mKdV gera a condição $\Phi_0(x) = -x + c_1$. Vamos analisar três exemplos da hierarquia mKdV dando origem a soluções da hierarquia mKdV-Liouville:

Exemplo 1) A solução de vácuo da hierarquia mKdV, $v = 0$, gera

$$\begin{aligned} \phi &= e^{\Gamma(t)} \left(- \int_{-\infty}^t \frac{\beta(t')e^{-\Gamma(t')}}{2} dt' + x - c_1 \right) \\ y &= -2 \ln \left(- \int_{-\infty}^t \frac{\beta(t')e^{-\Gamma(t')}}{2} dt' + x - c_1 \right) - \Gamma(t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Exemplo 2) As soluções 1-sólito da hierarquia mKdV,

$$v = \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{2 - e^\eta}{2 + e^\eta} \right) \quad \eta = kx - k^{2n+1}t,$$

geram

$$\begin{aligned} \phi &= e^{\Gamma(t)} \left(- \frac{4e^\eta}{k(2 + e^\eta)} - \int_{-\infty}^t \frac{\beta(t')e^{-\Gamma(t')}}{2} dt' + x - c_1 \right) \\ y &= 2 \ln \left(\frac{2 - e^\eta}{2 + e^\eta} \right) - 2 \ln \left(- \frac{4e^\eta}{k(2 + e^\eta)} - \int_{-\infty}^t \frac{\beta(t')e^{-\Gamma(t')}}{2} dt' + x - c_1 \right) - \Gamma(t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Exemplo 3) As soluções 2-sólitons da hierarquia mKdV,

$$v = \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{4+2(e^{\eta_1+e^{\eta_2}})+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 e^{\eta_1+\eta_2}}{4-2(e^{\eta_1+e^{\eta_2}})+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 e^{\eta_1+\eta_2}} \right), \quad \eta_j = k_j x - k_j^{2n+1} t, \quad j = 1, 2$$

geram

$$\begin{aligned} \phi &= e^{\Gamma(t)} \left(-\frac{4(k_1+k_2)}{k_1 k_2} \left(k_1^2 e^{\eta_2} (e^{\eta_1} - 2) - 2k_1 k_2 (e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2}) + k_2^2 e^{\eta_1} (e^{\eta_2} - 2) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(k_1^2 (e^{\eta_1} - 2) (e^{\eta_2} - 2) - 2k_1 k_2 (2e^{\eta_1} + 2e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2} - 4) + k_2^2 (e^{\eta_1} - 2) (e^{\eta_2} - 2) \right) \right. \\ &\quad \left. - \int^t \frac{\beta(t') e^{-\Gamma(t')}}{2} dt' + x - c_1 \right) \\ y &= 2 \ln \left(\frac{4+2(e^{\eta_1+e^{\eta_2}})+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 e^{\eta_1+\eta_2}}{4-2(e^{\eta_1+e^{\eta_2}})+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 e^{\eta_1+\eta_2}} \right) - 2 \ln \left(-\frac{4(k_1+k_2)}{k_1 k_2} \left(k_1^2 e^{\eta_2} (e^{\eta_1} - 2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2k_1 k_2 (e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2}) + k_2^2 e^{\eta_1} (e^{\eta_2} - 2) \right) \right) / \left(k_1^2 (e^{\eta_1} - 2) (e^{\eta_2} - 2) - 2k_1 k_2 (2e^{\eta_1} \right. \\ &\quad \left. + 2e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2} - 4) + k_2^2 (e^{\eta_1} - 2) (e^{\eta_2} - 2) \right) - \int^t \frac{\beta(t') e^{-\Gamma(t')}}{2} dt' + x - c_1 \Big) - \Gamma(t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Se escolhermos $\beta(t) = 0$, o formalismo desta seção dá origem a uma transformação da hierarquia mKdV nela mesma. Desta forma, definindo $\tilde{v} = y_x/2$, temos soluções novas para a hierarquia mKdV[†]. Abaixo, mostramos as soluções da hierarquia mKdV que são obtidas a partir dos exemplos que usamos acima:

Exemplo 1) $\tilde{v} = \frac{1}{c_1 - x}$

Exemplo 2) $\tilde{v} = \frac{k[4 + 4e^\eta(k(x - c_1) - 2) - e^{2\eta}]}{4k(c_1 - x) + 8e^\eta + e^{2\eta}(k(x - c_1) - 4)}$

Exemplo 3) $\tilde{v} = \left[-4 + 4e^{\eta_1}(k_1(x - c_1) - 2) + 4e^{\eta_2}(k_2(x - c_1) - 2) + e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2} \right. \\ \left. + \frac{8(k_1^4 - k_1^2 k_2^2 + k_2^4)}{k_1 k_2 (k_1 + k_2)^2} e^{\eta_1 + \eta_2} - \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{k_1 k_2 (k_1 + k_2)^2} [k_1 e^{\eta_1 + 2\eta_2} (k_1 k_2 (x - c_1) \right. \\ \left. - 4k_1 - 2k_2) + k_2 e^{2\eta_1 + \eta_2} (k_1 k_2 (x - c_1) - 2k_1 - 4k_2)] - \frac{(k_1 - k_2)^4}{4(k_1 + k_2)^4} e^{2(\eta_1 + \eta_2)} \right] / \\ \left[4(x - c_1) + \frac{8e^{\eta_1}}{k_1} + \frac{8e^{\eta_2}}{k_2} + e^{2\eta_1} \left(c_1 - x + \frac{4}{k_1} \right) + e^{2\eta_2} \left(c_1 - x + \frac{4}{k_2} \right) \right]$

[†]Que seja do conhecimento do autor, tais soluções foram apresentadas pela primeira vez em [23].

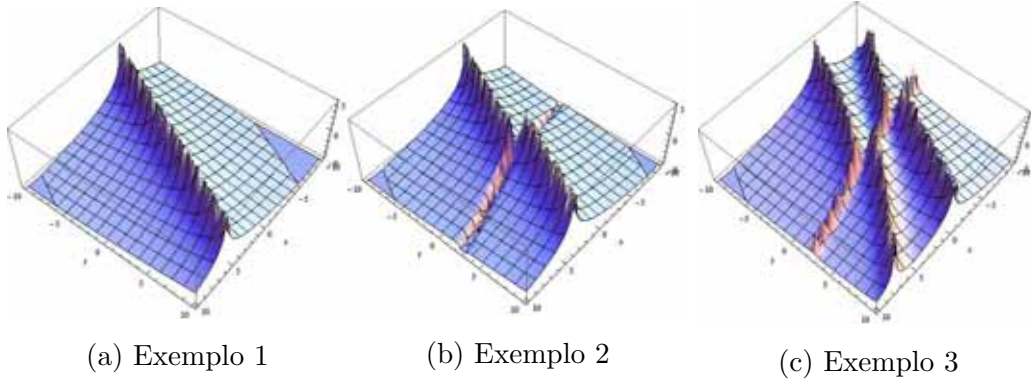


Figura 2.1: Foi mostrado que podemos obter soluções da hierarquia mKdV-Liouville a partir de soluções da hierarquia mKdV. Nestas figuras, ilustramos algumas soluções para a primeira equação da hierarquia mKdV-Liouville ($n = 1$) com $\beta(t) = 1$. Figura 2.1a mostra a solução (2.42) com $\Gamma(t) = 0$ e $c_1 = 1$. Figura 2.1b mostra a solução (2.43) com $\Gamma(t) = 0$, $c_1 = 1$ e $k = -2$. Figura 2.1c mostra solução (2.44) com $\Gamma(t) = 0$, $c_1 = 1$, $k_1 = -1$ e $k_2 = -2$.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{8k_1k_2(c_1 - x) + 2(k_1 + k_2)}{(k_1 + k_2)^2} e^{\eta_1 + \eta_2} - \frac{2(k_1 - k_2)^2}{k_1(k_1 + k_2)^2} e^{\eta_1 + 2\eta_2} \\
 & - \frac{2(k_1 - k_2)^2}{k_2(k_1 + k_2)^2} e^{2\eta_1 + \eta_2} + \frac{(k_1 - k_2)^4(k_1k_2(x - c_1) - 4(k_1 + k_2))}{4k_1k_2(k_1 + k_2)^4} e^{2(\eta_1 + \eta_2)} \Big]
 \end{aligned}$$

2.3.2 Redução por auto-similaridade

Vamos considerar a expressão (2.31) novamente. Pelo teorema 2, podemos escolher

$$\beta(t) = \beta_0[(2n + 1)t]^{-(2n+2)/(2n+1)}.$$

Desta forma, assumindo a redução por auto-similaridade

$$\begin{aligned}
 z &= x[(2n + 1)t]^{-1/(2n+1)} & y(x, t) &= y(z), \\
 \mathcal{L}_k \left[x; y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2 \right] &= [(2n + 1)t]^{-2k/(2n+1)} \mathcal{L}_k \left[z; y_{zz} - \frac{1}{2}y_z^2 \right],
 \end{aligned}$$

podemos reduzir a hierarquia mKdV-Liouville para

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} + y_z \right) \mathcal{L}_n \left[z; y_{zz} - \frac{1}{2}y_z^2 \right] - (zy_z)_z + \beta_0 e^y = 0 \quad (2.45)$$

A hierarquia (2.45) é um caso particular da hierarquia proposta em [12]. Se escolhermos $g(t) = [(2n + 1)t]^{1/(2n+1)}$, a definição (2.28) se reduz a

$$\tilde{y}(x, t) = \tilde{y}(z), \quad \phi(x, t) = \phi(z).$$

Assim, a redução de auto-similaridade de (2.30) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \tilde{y}_z - 2 \frac{\phi_z}{\phi} \right) \mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right] - \frac{d}{dz} \left(z \tilde{y}_z - 2z \frac{\phi_z}{\phi} \right) + \beta_0 \frac{\phi_z}{\phi^2} = 0 \quad (2.46)$$

que pode ser integrado e a constante de integração definida como $2(\alpha - 1)$, isto é

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \tilde{y}_z - 2 \frac{\phi_z}{\phi} \right) \mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right] - z \tilde{y}_z + 2z \frac{\phi_z}{\phi} - \frac{\beta_0}{\phi} + 2(\alpha - 1) = 0 \quad (2.47)$$

Vamos assumir que \tilde{y} satisfaça

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \tilde{y}_z \right) \mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right] - z \tilde{y}_z - 2\alpha = 0, \quad (2.48)$$

tal que (2.47) seja simplificada a

$$-2 \frac{\phi_z}{\phi} \mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right] + 2z \frac{\phi_z}{\phi} - \frac{\beta_0}{\phi} + 2(2\alpha - 1) = 0 \quad (2.49)$$

A fim de verificar a compatibilidade entre (2.48) e (2.49), vamos isolar $\mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right]$, isto é

$$\mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right] = z - \frac{\beta_0}{2\phi_z} + (2\alpha - 1) \frac{\phi}{\phi_z} \quad (2.50)$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right] &= \frac{\beta_0 \phi_{zz}}{2\phi_z^2} + 2\alpha - (2\alpha - 1) \frac{\phi \phi_{zz}}{\phi_z^2} \\ \tilde{y}_z \mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right] &= z \tilde{y}_z - \frac{\beta_0 \phi_{zz}}{2\phi_z^2} + (2\alpha - 1) \frac{\phi \phi_{zz}}{\phi_z^2} \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que a equação (2.48) é satisfeita com a ajuda das expressões acima. A transformação

$$\tilde{y} = 2 \int^z v(z') dz' + C$$

mapeia a hierarquia (2.48) na hierarquia PII (ver apêndice A.2), isto é

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + 2v \right) \mathcal{L}_n \left[z; 2(v_z - v^2) \right] - 2zv - 2\alpha = 0. \quad (2.51)$$

De (2.49), temos

$$\phi = \frac{e^{\tilde{y}} \left(\mathcal{L}_n \left[z; \tilde{y}_{zz} - \frac{1}{2} \tilde{y}_z^2 \right] - z \right) + \beta_0/2}{(2\alpha - 1)},$$

desde que $\alpha \neq 1/2$. Portanto, a solução para (2.45) está relacionada com a solução da hierarquia PII pela transformação

$$y = 2 \int^z v(z') dz' + C + 2 \ln(2\alpha - 1) - 2 \ln \left[e^{\tilde{y}} \left(\mathcal{L}_n \left[z; 2(v_z - v^2) \right] - z \right) + \beta_0/2 \right] \quad (2.52)$$

Observe que a primeira equação da hierarquia (2.45) é uma equação de quarta ordem, isto é

$$y_{zzzz} - \frac{3}{2}y_z^2 y_{zz} - zy_{zz} - y_z + \beta_0 e^y = 0, \quad (2.53)$$

que é uma forma particular da equação proposta em [12] como sendo uma possibilidade para se definir novas funções transcendentais.

A solução geral da equação PII define uma função transcendental com duas constantes arbitrárias mais um parametro α . A solução (2.52) para $n = 1$ possui as constantes arbitrárias C , α e duas constantes de integração da solução geral da equação PII. Assim, a solução (2.52) representa a solução geral da equação (2.53).

Como exemplos, mostraremos algumas soluções da equação (2.53) baseando-se em soluções racionais da equação PII na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Soluções da equação (2.53) a partir de soluções racionais da equação PII

$\alpha = -2$	$v = \frac{2(z^3-2)}{z(z^3+4)}$	$y = C - 2 \ln\left(\frac{2e^C(z^6+20z^3-80)-\beta_0z}{10(z^3+4)}\right)$
$\alpha = -1$	$v = \frac{1}{z}$	$y = C - 2 \ln\left(\frac{2e^C(z^3+4)-\beta}{6z}\right)$
$\alpha = 0$	$v = 0$	$y = C - 2 \ln\left(e^C z - \frac{\beta_0}{2}\right)$
$\alpha = 1$	$v = -\frac{1}{z}$	$y = C - 2 \ln\left(\frac{\beta_0z}{2} - e^C\right)$
$\alpha = 2$	$v = -\frac{2(z^3-2)}{z(z^3+4)}$	$y = C - 2 \ln\left(\frac{\beta_0(z^3+4)-2e^C}{6z}\right)$

Capítulo 3

Modelo misto AKNS-Lund-Regge estendido

3.1 Construção algébrica do modelo AKNS-Lund-Regge estendido

Nesta seção, vamos construir o modelo misto AKNS-Lund-Regge baseando-se na álgebra de Lie $\mathcal{G} = sl(2)$ e usando um operador de graduação homogêneo, $Q = \lambda \frac{d}{d\lambda}$. Desta forma, a álgebra de Lie afim $\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_i \hat{\mathcal{G}}_i$ será formada pelos subespaços

$$\hat{\mathcal{G}}_m \equiv \{H^{(m)} \equiv \lambda^m H, E_{\alpha}^{(m)} \equiv \lambda^m E_{\alpha}, E_{-\alpha}^{(m)} \equiv \lambda^m E_{-\alpha}\},$$

cujos elementos satisfarão as seguintes relações de comutação:

$$[H^{(m_1)}, E_{\pm\alpha}^{(m_2)}] = \pm 2E_{\pm\alpha}^{(m_1+m_2)}, \quad [E_{\alpha}^{(m_1)}, E_{-\alpha}^{(m_2)}] = H^{(m_1+m_2)}.$$

Agora considere o par de Lax

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} = -\mathcal{B}_1 \hat{\Psi}, \quad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t_N} = -\mathcal{B}_N \hat{\Psi},$$

sendo \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_N parametrizados por

$$\mathcal{B}_1 = H^{(1)} + A_0 \tag{3.1}$$

$$\mathcal{B}_N = D_N^{(N)} + D_N^{(N-1)} + \dots + D_N^{(1)} + D_N^{(0)} + D_N^{(-1)}, \tag{3.2}$$

tal que

$$A_0 = qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)} \tag{3.3}$$

$$D_N^{(j)} = \alpha_j E_{\alpha}^{(j)} + \beta_j E_{-\alpha}^{(j)} + \sigma_j H^{(j)}, \tag{3.4}$$

$r = r(x, t_2)$, $q = q(x, t_2)$, $\alpha_j = \alpha_j(x, t_2)$, $\beta_j = \beta_j(x, t_2)$, $\sigma_j = \sigma_j(x, t_2)$. Vejamos o caso $N = 2$ primeiro. A decomposição da equação de curvatura nula, isto é

$$[\partial_x + H^{(1)} + A_0, \partial_{t_2} + D_2^{(2)} + D_2^{(1)} + D_2^{(0)} + D_2^{(-1)}]\hat{\Psi} = 0, \quad (3.5)$$

em elementos de mesma graduação, dá origem ao sistema

$$[H^{(1)}, D_2^{(2)}] = 0 \quad (3.6)$$

$$[H^{(1)}, D_2^{(1)}] + [A_0, D_2^{(2)}] + \frac{\partial D_2^{(2)}}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

$$[H^{(1)}, D_2^{(0)}] + [A_0, D_2^{(1)}] + \frac{\partial D_2^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

$$[H^{(1)}, D_2^{(-1)}] + [A_0, D_2^{(0)}] + \frac{\partial D_2^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial A_0}{\partial t_2} = 0 \quad (3.9)$$

$$[A_0, D_2^{(-1)}] + \frac{\partial D_2^{(-1)}}{\partial x} = 0. \quad (3.10)$$

A projeção do sistema (3.6)-(3.10) nos elementos da álgebra resulta no sistema

graduação 3)	$\alpha_2 = \beta_2 = 0,$	
graduação 2)	$\partial_x \alpha_2 = 2(\sigma_2 q - \alpha_1),$	$\partial_x \beta_2 = 2(\beta_1 - \sigma_2 r),$
	$\partial_x \sigma_2 = r \alpha_2 - q \beta_2,$	
graduação 1)	$\partial_x \alpha_1 = 2(\sigma_1 q - \alpha_0),$	$\partial_x \beta_1 = 2(\beta_0 - \sigma_1 r),$
	$\partial_x \sigma_1 = r \alpha_1 - q \beta_1,$	
graduação 0)	$\partial_{t_2} q = \partial_x \alpha_0 - 2\sigma_0 q + 2\alpha_{-1},$	$\partial_{t_2} r = \partial_x \beta_0 + 2\sigma_0 r - 2\beta_{-1},$
	$\partial_x \sigma_0 = r \alpha_0 - q \beta_0,$	
graduação -1)	$\partial_x \alpha_{-1} = 2\sigma_{-1} q,$	$\partial_x \beta_{-1} = -2\sigma_{-1} r,$
	$\partial_x \sigma_{-1} = r \alpha_{-1} - q \beta_{-1}.$	

A solução do sistema proveniente da graduação positive é

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = c_2(t_2)q, \quad \alpha_0 = -\frac{c_2(t_2)}{2}q_x + c_1(t_2)q,$$

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_1 = c_2(t_2)r, \quad \beta_0 = \frac{c_2(t_2)}{2}r_x + c_1(t_2)r,$$

$$\sigma_2 = c_2(t_2), \quad \sigma_1 = c_1(t_2), \quad \sigma_0 = -\frac{c_2(t_2)}{2}r q - \frac{c_0(t_2)}{2},$$

sendo $c_0(t_2)$, $c_1(t_2)$ e $c_2(t_2)$ funções arbitrárias de t_2 , juntamente ao sistema

$$qt_2 - c_0(t_2)q - c_1(t_2)q_x + \frac{c_2(t_2)}{2}[q_{xx} - 2q^2r] + 2\alpha_{-1} = 0 \quad (3.11)$$

$$rt_2 + c_0(t_2)r - c_1(t_2)r_x - \frac{c_2(t_2)}{2}[r_{xx} - 2qr^2] - 2\beta_{-1} = 0, \quad (3.12)$$

Independentemente do valor escolhido para N , os coeficientes do elemento de graduação negativa sempre serão determinados por (3.10), cujas projeções em relação aos elementos da álgebra são equivalentes ao sistema

$$\partial_x \alpha_{-1} = 2\sigma_{-1}q, \quad \partial_x \beta_{-1} = -2\sigma_{-1}r, \quad \partial_x \sigma_{-1} = r\alpha_{-1} - q\beta_{-1}. \quad (3.13)$$

Nas coordenadas r e q , o sistema acima não pode ser resolvido. Assim, baseando-se na referência [32], introduziremos os campos $\tilde{\Psi}$ e $\tilde{\chi}$ de tal modo que

$$B = e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_{\alpha}^{(0)}}, \quad A_0 = -(\partial_x B)B^{-1}, \quad D_2^{(-1)} = \eta B H^{(-1)} B^{-1}. \quad (3.14)$$

Para encontrar a relação entre os campos r e q com $\tilde{\chi}$ e $\tilde{\Psi}$, precisaremos usar a relação

$$e^L T e^{-L} = T + [L, T] + \frac{1}{2!}[L, [L, T]] + \frac{1}{3!}[L, [L, [L, T]]] + \dots,$$

de modo que a expressão $\partial_x B$ possa ser calculada como

$$\begin{aligned} \partial_x B &= \tilde{\chi}_x E_{-\alpha}^{(0)} e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_{\alpha}^{(0)}} + \phi_x e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} H^{(0)} e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_{\alpha}^{(0)}} + \tilde{\Psi}_x e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} E_{\alpha}^{(0)} e^{\tilde{\Psi}E_{\alpha}^{(0)}} \\ &= \tilde{\chi}_x E_{-\alpha}^{(0)} B + \tilde{\Phi}_x e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} H^{(0)} e^{-\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} B + \tilde{\Psi}_x e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} E_{\alpha}^{(0)} e^{-\phi H^{(0)}} e^{-\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} B \\ &= \left(\tilde{\chi}_x E_{-\alpha}^{(0)} + \phi_x (H^{(0)} + \tilde{\chi}[E_{-\alpha}^{(0)}, H^{(0)}] + \frac{\tilde{\chi}^2}{2!}[E_{-\alpha}^{(0)}, [E_{-\alpha}^{(0)}, H^{(0)}]] + \dots) + \tilde{\Psi}_x e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} (E_{\alpha}^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \phi[H^{(0)}, E_{-\alpha}^{(0)}] + \frac{\phi^2}{2!}[H^{(0)}, [H^{(0)}, E_{\alpha}^{(0)}]] + \dots) e^{-\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} \right) B \\ &= \left(\tilde{\chi}_x E_{-\alpha}^{(0)} + \phi_x (H^{(0)} + 2\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}) + \tilde{\Psi}_x e^{2\phi} e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} E_{\alpha}^{(0)} e^{-\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} \right) B \\ &= \left(\tilde{\chi}_x E_{-\alpha}^{(0)} + \phi_x (H^{(0)} + 2\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}) + \tilde{\Psi}_x e^{2\phi} (E_{\alpha}^{(0)} + \tilde{\chi}[E_{-\alpha}^{(0)}, E_{\alpha}^{(0)}] + \frac{\tilde{\chi}^2}{2!}[E_{-\alpha}^{(0)}, [E_{-\alpha}^{(0)}, E_{\alpha}^{(0)}]] \right. \\ &\quad \left. + \dots \right) B = \left(\tilde{\chi}_x E_{-\alpha}^{(0)} + \phi_x (H^{(0)} + 2\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}) + \tilde{\Psi}_x e^{2\phi} (E_{\alpha}^{(0)} - \tilde{\chi}H^{(0)} - \tilde{\chi}^2 E_{-\alpha}^{(0)}) \right) B \\ &= \left((\phi_x - \tilde{\chi}\tilde{\Psi}_x e^{2\phi}) H^{(0)} + (\tilde{\Psi}_x e^{2\phi}) E_{\alpha}^{(0)} + (\tilde{\chi}_x + 2\tilde{\chi}\phi_x - \tilde{\chi}^2 \tilde{\Psi}_x e^{2\phi}) E_{-\alpha}^{(0)} \right) B \end{aligned}$$

A compatibilidade da definição de A_0 entre as expressões (3.3) e (3.14) dá origem à transformação

$$q = -\tilde{\Psi}_x e^{2\phi}, \quad r = -\tilde{\chi}^2 \tilde{\Psi}_x e^{2\phi} - \tilde{\chi}_x \quad (3.15)$$

e à condição

$$\phi_x - \tilde{\chi}\tilde{\Psi}_x e^{2\phi} = 0. \quad (3.16)$$

O campo ϕ é um campo auxiliar que será eliminado do cálculo posteriormente; logo, precisamos buscar uma relação para ϕ_{t_2} . Substituindo $A_0 = qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)} = -(\partial_x B)B^{-1}$, $D_2^{(-1)} = \eta B H^{(-1)} B^{-1}$ e $D_2^{(0)} = \alpha_0 E_{\alpha}^{(0)} + \beta_0 E_{-\alpha}^{(0)} + \sigma_0 H^{(0)}$ em (3.9), temos

$$\begin{aligned} &\eta[H^{(1)}, BH^{(-1)}B^{-1}] + [qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}, \alpha_0 E_{\alpha}^{(0)} + \beta_0 E_{-\alpha}^{(0)} + \sigma_0 H^{(0)}] + \partial_x[\alpha_0 E_{\alpha}^{(0)} \\ &\quad + \beta_0 E_{-\alpha}^{(0)} + \sigma_0 H^{(0)}] + \partial_{t_2}[(\partial_x B)B^{-1}] = 0 \quad \Rightarrow \\ &\eta(H^{(1)}BH^{(-1)}B^{-1} - BH^{(-1)}B^{-1}H^{(1)}) + (\partial_x \alpha_0 - 2q\sigma_0)E_{\alpha}^{(0)} + (\partial_x \beta_0 + 2r\sigma_0)E_{-\alpha}^{(0)} \\ &\quad + (\partial_x \sigma_0 + q\beta_0 - r\alpha_0)H^{(0)} + \partial_{t_2}(B)(\partial_x B^{-1}) + B(\partial_{t_2}\partial_x B^{-1}) = 0 \end{aligned}$$

Em seguida, multiplicamos a expressão acima por B pela direita e B^{-1} pela esquerda, tal que podemos manipular a expressão da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \eta[B^{-1}H^{(1)}B, H^{(-1)}] + (\partial_x\alpha_0 - 2q\sigma_0)B^{-1}E_\alpha^{(0)}B + (\partial_x\beta_0 + 2r\sigma_0)B^{-1}E_{-\alpha}^{(0)}B \\ & + (\partial_x\sigma_0 + q\beta_0 - r\alpha_0)B^{-1}H^{(0)}B + \partial_x(B^{-1}\partial_{t_2}B) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agora observe que $B^{-1} = e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} e^{-\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} B^{-1}H^{(m)}B &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} e^{-\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} H^{(m)} e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} (H^{(m)} - \tilde{\chi}[E_{-\alpha}^{(0)}, H^{(m)}] + \frac{\tilde{\chi}^2}{2!}[E_{-\alpha}^{(0)}, [E_{-\alpha}^{(0)}, H^{(m)}]] \\ &+ \dots) e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} = e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} (H^{(m)} - 2\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(m)}) e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} (H^{(m)} - 2\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(m)} - \phi[H^{(0)}, H^{(m)} - 2\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(m)}] \\ &+ \frac{\phi^2}{2!}[H^{(0)}, [H^{(0)}, H^{(m)} - 2\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(m)}]] + \dots) e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} (H^{(m)} - 2\tilde{\chi}e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(m)}) e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= H^{(m)} - 2\tilde{\chi}e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(m)} - \tilde{\Psi}[E_\alpha^{(0)}, H^{(m)} - 2\tilde{\chi}e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(m)}] \\ &+ \frac{\tilde{\Psi}^2}{2!}[E_\alpha^{(0)}, [E_\alpha^{(0)}, H^{(m)} - 2\tilde{\chi}e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(m)}]] + \dots \\ &= (1 + 2\tilde{\Psi}\tilde{\chi}e^{2\phi})H^{(0)} + 2(\tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^2\tilde{\chi}e^{2\phi})E_\alpha^{(m)} - 2\tilde{\chi}e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(m)}, \quad m = 0, 1 \\ B^{-1}E_\alpha^{(0)}B &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} e^{-\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} E_\alpha^{(0)} e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} (E_\alpha^{(0)} - \tilde{\chi}[E_{-\alpha}^{(0)}, E_\alpha^{(0)}] + \frac{\tilde{\chi}^2}{2!}[E_{-\alpha}^{(0)}, [E_{-\alpha}^{(0)}, E_\alpha^{(0)}]] \\ &+ \dots) e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} = e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} (E_\alpha^{(0)} + \tilde{\chi}H^{(0)} - \tilde{\chi}^2E_{-\alpha}^{(0)}) e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} (E_\alpha^{(0)} + \tilde{\chi}H^{(0)} - \tilde{\chi}^2E_{-\alpha}^{(0)} - \phi[H^{(0)}, E_\alpha^{(0)} + \tilde{\chi}H^{(0)} - \tilde{\chi}^2E_{-\alpha}^{(0)}] \\ &+ \frac{\phi^2}{2!}[H^{(0)}, [H^{(0)}, E_\alpha^{(0)} + \tilde{\chi}H^{(0)} - \tilde{\chi}^2E_{-\alpha}^{(0)}]] + \dots) e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} (e^{-2\phi}E_\alpha^{(0)} + \tilde{\chi}H^{(0)} - \tilde{\chi}^2e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(0)}) e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-2\phi}E_\alpha^{(0)} + \tilde{\chi}H^{(0)} - \tilde{\chi}^2e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(0)} - \tilde{\Psi}[E_\alpha^{(0)}, e^{-2\phi}E_\alpha^{(0)} + \tilde{\chi}H^{(0)} \\ &- \tilde{\chi}^2e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(0)}] + \frac{\tilde{\Psi}^2}{2!}[E_\alpha^{(0)}, [E_\alpha^{(0)}, e^{-2\phi}E_\alpha^{(0)} + \tilde{\chi}H^{(0)} - \tilde{\chi}^2e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(0)}]] + \dots \\ &= (\tilde{\chi} + \tilde{\chi}^2\tilde{\Psi}e^{2\phi})H^{(0)} + (e^{-2\phi} + 2\tilde{\chi}\tilde{\Psi} + \tilde{\chi}^2\tilde{\Psi}^2e^{2\phi})E_\alpha^{(0)} - \tilde{\chi}^2e^{2\phi}E_{-\alpha}^{(0)} \\ B^{-1}E_{-\alpha}^{(0)}B &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} e^{-\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} E_{-\alpha}^{(0)} e^{\tilde{\chi}E_{-\alpha}^{(0)}} e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} e^{-\phi H^{(0)}} E_{-\alpha}^{(0)} e^{\phi H^{(0)}} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} (E_{-\alpha}^{(0)} - \phi[H^{(0)}, E_{-\alpha}^{(0)}] + \frac{\phi^2}{2!}[H^{(0)}, [H^{(0)}, E_{-\alpha}^{(0)}]] + \dots) e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{2\phi}e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} E_{-\alpha}^{(0)} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} = (1 + 2\phi)e^{-\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} E_{-\alpha}^{(0)} e^{\tilde{\Psi}E_\alpha^{(0)}} \\ &= e^{2\phi}(E_{-\alpha}^{(0)} - \tilde{\Psi}[E_\alpha^{(0)}, E_{-\alpha}^{(0)}] + \frac{\tilde{\Psi}^2}{2!}[E_\alpha^{(0)}, [E_\alpha^{(0)}, E_{-\alpha}^{(0)}]] + \dots) \end{aligned}$$

$$= e^{2\phi} E_{-\alpha}^{(0)} - e^{2\phi} \tilde{\Psi} H^{(0)} - e^{2\phi} \tilde{\Psi}^2 E_{\alpha}^{(0)}$$

Usando a seguinte representação da álgebra de Lie:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

podemos ver facilmente que $\text{tr}(E_{\alpha}^{(0)} H^{(0)}) = \text{tr}(E_{-\alpha}^{(0)} H^{(0)}) = 0$ e $\text{tr}(H^{(0)} H^{(0)}) = 2$. Assim, após usarmos as relações acima, podemos multiplicar a expressão (3.17) por $H^{(0)}$ pela direita e calcular o traço. Desta forma, nós obtemos a equação

$$\partial_x(\phi_{t_2} - \tilde{\Psi} \tilde{\chi}_{t_2} e^{2\phi}) + (\partial_x \alpha_0 - 2q\sigma_0) \tilde{\chi}(1 + \tilde{\Psi} \tilde{\chi} e^{2\phi}) - (\partial_x \beta_0 + 2r\sigma_0) \tilde{\Psi} e^{2\phi} = 0. \quad (3.18)$$

As expressões (3.16) e (3.18) nos levam a considerar as coordenadas

$$\Psi = \tilde{\Psi} e^{\phi}, \quad \chi = \tilde{\chi} e^{\phi}.$$

Nas coordenadas Ψ e χ , os campos r e q são escritos como

$$q = -\frac{\Psi_x}{1 + \Psi\chi} e^{\phi}, \quad r = -\chi_x e^{-\phi}. \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.13), podemos verificar que a solução dos coeficientes de graduação negativa é

$$\alpha_{-1} = -2\eta(t_2) \Psi e^{\phi}, \quad \beta_{-1} = 2\eta(t_2) (\chi + \Psi\chi^2) e^{-\phi}, \quad \sigma_{-1} = \eta(t_2) (1 + 2\Psi\chi)$$

sendo $\eta(t_2)$ uma função arbitrária de t_2 . Assim, de (3.11) e (3.12), ficamos com o sistema

$$\partial_{t_2} q - c_0(t_2) q - c_1(t_2) q_x + \frac{c_2(t_2)}{2} [q_{xx} - 2q^2 r] + 4\eta(t_2) \Psi e^{\phi} = 0 \quad (3.20)$$

$$\partial_{t_2} r + c_0(t_2) r - c_1(t_2) r_x - \frac{c_2(t_2)}{2} [r_{xx} - 2qr^2] + 4\eta(t_2) (\chi + \Psi\chi^2) e^{-\phi} = 0, \quad (3.21)$$

que chamaremos de modelo AKNS-Lund-Regge estendido. No sistema acima, os campos r , q , Ψ , χ e ϕ estão misturados apenas para podermos comparar com os modelos bem conhecidos. As condições (3.16) e (3.18) em termos de Ψ e χ tornam-se

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{\chi \Psi_x}{1 + \chi \Psi} \\ \phi_{t_2} &= \frac{\Psi \chi_{t_2}}{1 + \chi \Psi} + c_0(t_2) \left(\frac{\Psi \chi}{1 + \chi \Psi} \right) + c_1(t_2) \left(\frac{\chi \Psi_x - \Psi \chi_x}{1 + \chi \Psi} \right) \\ &\quad + c_2(t_2) \left(\frac{(1 + 4\Psi\chi) \chi_x \Psi_x - (1 + \chi\Psi) (\chi_{xx} \Psi + \chi \Psi_{xx})}{2(1 + \chi\Psi)^2} \right). \end{aligned}$$

Nas referencias [32, 33], as equações (3.20) e (3.21) foram tratadas com $c_0(t) = c_1(t) = 0$, $c_2(t) = c_2$ e $\eta(t) = \eta$. Entretanto, as soluções podem ser facilmente estendidas. Por exemplo, a solução do tipo 1-sóliton*será

$$\Psi = \frac{b}{\rho_2(1 + \frac{k_1}{k_2}\Gamma\rho_1\rho_2^{-1})}, \quad \chi = \frac{a\rho_1}{1 + \frac{k_1}{k_2}\Gamma\rho_1\rho_2^{-1}}, \quad e^{-\phi} = \frac{1 + \frac{k_1}{k_2}\Gamma\rho_1\rho_2^{-1}}{1 + \Gamma\rho_1\rho_2^{-1}} \quad (3.22)$$

com

$$\rho_i = \exp 2\left(k_i x + k_i^{-1} \int^{t_2} \eta(t) dt + \int^{t_2} c_0(t) dt + k_i \int^{t_2} c_1(t) dt + k_i^2 \int^{t_2} c_2(t) dt\right)$$

e a , b , k_i , $\Gamma = \frac{abk_2^2}{(k_1 - k_2)^2}$ constantes. Observe que Ψ e χ são os campos mais fundamentais e de suas soluções podemos obter soluções de r e q .

Este é o modelo misto AKNS-Lund-Regge estendido, pois impondo $c_0(t_2) = c_1(t_2) = \eta(t_2) = 0$ e $c_2(t_2) = -2$, teremos o modelo AKNS. Por outro lado, se pusermos $c_0(t_2) = c_1(t_2) = c_2(t_2) = 0$ e fizermos a transformação

$$\Psi = -ie^{i\beta/2} \sin(\alpha/2), \quad \chi = -ie^{-i\beta/2} \sin(\alpha/2),$$

teremos

$$\alpha_{xt_2} - 4\eta(t_2) \sin \alpha - \frac{\tan^2(\alpha/2)}{\sin \alpha} \beta_x \beta_{t_2} = 0 \quad (3.23)$$

$$\beta_{xt_2} + \csc \alpha (\alpha_x \beta_{t_2} + \alpha_{t_2} \beta_x) = 0, \quad (3.24)$$

que é o modelo Lund-Regge relativístico quando $\eta(t_2) = -1/4$, em concordância com [34, 35].

3.2 Redução por auto-similaridade do modelo AKNS-Lund-Regge estendido

Nesta seção, trabalharemos o modelo AKNS-Lund-Regge com coeficientes arbitrários. Observe que α e β são os campos mais fundamentais, logo, escreveremos as equações em termos deles. Pela transformação

$$q = -\frac{\partial_x \Psi}{1 + \Psi \chi} e^\phi, \quad r = -\partial_x \chi e^{-\phi}$$

$$\Psi = -ie^{i\beta/2} \sin(\alpha/2), \quad \chi = -ie^{-i\beta/2} \sin(\alpha/2),$$

*aqui, usaremos o termo sóliton em um sentido generalizado, de modo que a redução de ondas viajantes não precisará ser necessariamente linear em t_2 .

as equações (3.20) e (3.21) se tornam

$$\begin{aligned} \alpha_{xt_2} = & \frac{\tan^2(\alpha/2)}{\sin \alpha} \beta_x \beta_{t_2} + 4\eta(t_2) \sin \alpha + 2ic_0(t_2) \frac{\tan^2(\alpha/2)}{\sin \alpha} \beta_x + c_1(t_2) \left(-\frac{\tan^2(\alpha/2)}{\sin \alpha} \beta_x^2 + \alpha_{xx} \right) \\ & - \frac{ic_2(t_2)}{4(1+\cos \alpha)} \left[\tan(\alpha/2) \alpha_x^2 \beta_x + \left(\frac{1-3\cos \alpha}{1+\cos \alpha} \right) \tan(\alpha/2) \beta_x^3 + 2(1+2\cos \alpha) \alpha_{xx} \beta_x \right. \\ & \left. + 2(2+\cos \alpha) \alpha_x \beta_{xx} + 2 \sin \alpha \beta_{xxx} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_{xt_2} = & -\csc \alpha (\alpha_x \beta_{t_2} + \alpha_{t_2} \beta_x) - 2ic_0(t_2) \csc \alpha \alpha_x + c_1(t_2) \left(2 \csc \alpha \alpha_x \beta_x + \beta_{xx} \right) \\ & + \frac{ic_2(t_2)}{4} \left[\csc \alpha \alpha_x^3 + \alpha_x \left(3 \left(\frac{1-3\cos \alpha}{1+\cos \alpha} \right) \csc \alpha \beta_x^2 + 2\alpha_{xx} \right) - \frac{6\cos \alpha \beta_x \beta_{xx}}{1+\cos \alpha} + 2 \cot(\alpha/2) \alpha_{xxx} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Quando as condições

$$\begin{aligned} \eta(t_2) &= (nt_2)^{\mu/n-1} \mu \eta, & c_0(t_2) &= (nt_2)^{-1} \mu c_0, & c_1(t_2) &= (nt_2)^{-\mu/n-1} \mu c_1, \\ c_2(t_2) &= (nt_2)^{-2\mu/n-1} \mu c_2, \end{aligned}$$

forem satisfeitas, poderemos usar a transformação por auto-similaridade

$$z = x(nt_2)^{\mu/n}, \quad \alpha(x, t_2) = \alpha(z), \quad \beta(x, t_2) = \beta(z)$$

para reduzir as equações (3.25) e (3.26) a

$$\begin{aligned} \alpha_z + z \alpha_{zz} - z \frac{\tan^2(\alpha/2)}{\sin \alpha} \beta_z^2 - 4\eta \sin \alpha - 2ic_0 \frac{\tan^2(\alpha/2)}{\sin \alpha} \beta_z - c_1 \left(-\frac{\tan^2(\alpha/2)}{\sin \alpha} \beta_z^2 + \alpha_{zz} \right) \\ + \frac{ic_2}{4(1+\cos \alpha)} \left[\tan(\alpha/2) \alpha_z^2 \beta_z + \left(\frac{1-3\cos \alpha}{1+\cos \alpha} \right) \tan(\alpha/2) \beta_z^3 + 2(1+2\cos \alpha) \alpha_{zz} \beta_z \right. \\ \left. + 2(2+\cos \alpha) \alpha_z \beta_{zz} + 2 \sin \alpha \beta_{zzz} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_z + z \beta_{zz} + 2 \csc \alpha \alpha_z \beta_z + 2ic_0 \csc \alpha \alpha_z - c_1 \left(2 \csc \alpha \alpha_z \beta_z + \beta_{zz} \right) \\ - \frac{ic_2}{4} \left[\csc \alpha \alpha_z^3 + \alpha_z \left(3 \left(\frac{1-3\cos \alpha}{1+\cos \alpha} \right) \csc \alpha \beta_z^2 + 2\alpha_{zz} \right) - \frac{6\cos \alpha \beta_z \beta_{zz}}{1+\cos \alpha} + 2 \cot(\alpha/2) \alpha_{zzz} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Afim de transformar o sistema de equações acima em uma forma racional, fazemos a mudança $y = -\cot^2(\alpha/2)$. Nosso sistema se escreve então como

$$\begin{aligned} \frac{y_z}{(1-y)} + (z - c_1) \left(\frac{(3y-1)y_z^2}{2y(y-1)^2} - \frac{(y-1)\beta_z^2}{2y} - \frac{y_{zz}}{(y-1)} \right) - \frac{8\eta y}{(y-1)} - \frac{ic_0(y-1)\beta_z}{y} \\ + ic_2 \left(\frac{(9y^2-7y+2)y_z^2\beta_z}{8(y-1)^2y^2} - \frac{(y-1)(y+2)\beta_z^3}{8y^2} + \frac{(3y-1)(\beta_z y_{zz} + \beta_{zz} y_z)}{12(y-1)y} + \frac{\beta_{zzz}}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_z + (c_1 - z) \left(\frac{y_z \beta_z}{y} - \beta_{zz} \right) - \frac{ic_0 y_z}{y} + ic_2 \left(\frac{(15y^2-17y+6)y_z^3}{8(y-1)^3y^2} - \frac{3(y+2)y_z \beta_z^2}{8y^2} - \frac{(9y-5)y_z y_{zz}}{4(y-1)^2y} \right. \\ \left. + \frac{3(y+1)\beta_z \beta_{zz}}{4y} + \frac{y_{zzz}}{2(y-1)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Podemos multiplicar (3.30) por y^{-1} e integrar, tal que

$$\frac{(z-c_1)\beta_z}{y} + \frac{ic_0}{y} + ic_2 \left(\frac{(3-5y)y_z^2}{8(y-1)^2y^2} + \frac{3(y+1)\beta_z^2}{8y^2} + \frac{y_{zz}}{2(y-1)y} \right) + C = 0, \quad (3.31)$$

sendo C uma constante de integração. A partir do sistema (3.29) e (3.31), vemos que a constante c_1 pode ser absorvida por uma transformação nas variáveis independentes. Desta forma, usaremos $c_1 = 0$ sem perda de generalidade. Quando $c_2 = 0$, as equações (3.29) e (3.31) resultam em

$$\frac{y_z}{(1-y)} + z \left(\frac{(3y-1)y_z^2}{2y(y-1)^2} - \frac{(y-1)\beta_z^2}{2y} - \frac{y_{zz}}{(y-1)} \right) - \frac{8\eta y}{(y-1)} - \frac{ic_0(y-1)\beta_z}{y} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{z\beta_z}{y} + \frac{ic_0}{y} + C = 0. \quad (3.33)$$

Estas equações podem ser desacopladas em

$$y_{zz} = \frac{(3y-1)y_z^2}{2y(y-1)} - \frac{y_z}{z} + \frac{(y-1)^2}{z^2} \left(-\frac{C^2}{2}y - \frac{c_0^2}{2y} \right) + \frac{(-8\eta)}{z}y, \quad (3.34)$$

$$\beta_z = -\frac{Cy}{z} - \frac{ic_0}{z}, \quad (3.35)$$

onde a equação para y é a quinta equação de Painlevé com uma das constantes nula. Entretanto, quando $c_2 \neq 0$, o sistema (3.29) e (3.31) pode se desacoplar em

$$\left(\frac{\mathcal{A}_0(u_z^2 - 2uu_{zz}) + \mathcal{A}_1uu_z + \mathcal{A}_2u^3 + \mathcal{A}_3u^2}{\mathcal{A}_4u^2 + \mathcal{A}_5u} \right)^2 + \frac{uy}{3(y-1)} = 0 \quad (3.36)$$

$$\beta_z = \frac{4izy}{3c_2(y+1)} + 2\mu \sqrt{\frac{uy}{3(y-1)}}, \quad (3.37)$$

sendo $\mu = \pm 1$. \mathcal{A}_j e u são

$$\begin{aligned} u &= -y_{zz} + \frac{(5y-3)y_z^2}{4y(y-1)} - \frac{4z^2(y-1)y}{3c_2^2(y+1)} + \frac{2(y-1)(iCy - c_0)}{c_2} \\ \mathcal{A}_0 &= 9c_2^3y^2(y^2-1)^2 \\ \mathcal{A}_1 &= 9c_2^3yy_z(5y^4+2y^3-4y^2-2y-1) \\ \mathcal{A}_2 &= 12c_2^3y(y^2+3y+2)(y-1)^2 \\ \mathcal{A}_3 &= 36c_2^3y^2(2y^3+y^2-2y-1)y_{zz} - 9c_2^3y(15y^3+13y^2+9y-1)y_z^2 \\ &\quad + 72c_2^2y(y-1)^3(y+1)^2 + 48c_2z^2(y-1)^3y^3 \\ \mathcal{A}_4 &= 72c_2^2zy(y-1)^3(y+1) \\ \mathcal{A}_5 &= -72c_2^2zy(y-1)^2(3y^2+4y+1)y_{zz} + 18c_2^2z(27y^4-24y^3+2y^2-8y+3)y_z^2 \\ &\quad - 288c_2^2y^2(y-1)^2(y+1)y_z + 144c_0c_2zy(y+1)^2(y-1)^4 \\ &\quad - 864c_2^2\eta y^2(y+1)^3(y-1)^2 + 32z^3y^2(2y+1)(y-1)^4. \end{aligned}$$

Observe que u e \mathcal{A}_j não dependem de β_z . Portanto, a equação (3.36) é uma EDO de quarta ordem e segundo grau. De acordo com a conjectura de Ablowitz-Ramani-Segur, esta equação possui a propriedade de Painlevé a menos de uma transformação. Embora estudos adicionais sejam necessários sobre (3.36), existem poucos exemplos na literatura de equações de quarta ordem e segundo grau com a propriedade de Painlevé (por exemplo, temos a equação (3.17) da referência [16] com tal propriedade).

Capítulo 4

Modelo PIII-PV simétrico

4.1 Modelo PIII-PV simétrico

Nos capítulos 2 e 3, estudamos modelos que poderiam ser reduzidos a duas equações de Painlevé distintas para valores particulares de seus parâmetros. Tais modelos seriam bons candidatos para definir novas funções transcendentais pela conjectura de Kudryashov [12]. Neste capítulo, construiremos um modelo afim de unificar as equações PIII e PV em um único modelo e estudaremos suas propriedades. Diferentemente do que ocorre nos modelos mistos dos capítulos 2 e 3, o modelo PIII-PV simétrico não possui nenhuma região em seu espaço de parâmetros que não esteja conectada com a equação PIII ou PV. Chamaremos esta propriedade de quebra espontânea de simetria para equações de Painlevé.

Consideremos o seguinte sistema simétrico:

$$t \frac{df_0}{dt} = f_0 f_2 (f_1 - f_3) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_2 \right) f_0 + \alpha_0 f_2 + \epsilon_1 (f_1 + f_3), \quad (4.1)$$

$$t \frac{df_1}{dt} = f_1 f_3 (f_2 - f_0) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_3 \right) f_1 + \alpha_1 f_3 - \epsilon_0 (f_0 + f_2), \quad (4.2)$$

$$t \frac{df_2}{dt} = f_2 f_0 (f_3 - f_1) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_0 \right) f_2 + \alpha_2 f_0 - \epsilon_1 (f_1 + f_3), \quad (4.3)$$

$$t \frac{df_3}{dt} = f_3 f_1 (f_0 - f_2) + \left(\frac{1}{2} - \alpha_1 \right) f_3 + \alpha_3 f_1 + \epsilon_0 (f_0 + f_2) \quad (4.4)$$

tal que $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Se somarmos a equação (4.1) com (4.3) e (4.2) com (4.4), nós podemos integrar as expressões de modo que

$$t \frac{d(f_0 + f_2)}{dt} = \frac{1}{2} (f_0 + f_2) \quad \Rightarrow \quad f_0 + f_2 = C_0 \sqrt{t}, \quad (4.5)$$

$$t \frac{d(f_1 + f_3)}{dt} = \frac{1}{2} (f_1 + f_3) \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_3 = C_1 \sqrt{t}, \quad (4.6)$$

sendo C_0 e C_1 as constantes de integração. Além disso, se somarmos as equações (4.1)-(4.4) e integrarmos, temos

$$t \frac{d(f_0 + f_1 + f_2 + f_3)}{dt} = \frac{1}{2}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) \Rightarrow f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = C\sqrt{t}, \quad C = C_0 + C_1$$

Com a ajuda de (4.5) e (4.6), o sistema (4.1)-(4.4) é invariante pelas seguintes transformações de Bäcklund:

$$\begin{aligned} s_i(f_j) &= f_j \quad (j = i, i+2), \quad s_i(f_j) = f_j \pm \frac{\alpha_i}{f_i} \pm \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{4}\right) \epsilon_{i+1} C_{i-1}}{f_i C_i} \quad (j = i \pm 1), \\ s_i(\alpha_i) &= -\alpha_i - 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{4}\right) \frac{\epsilon_{i+1} C_{i-1}}{C_i}, \quad s_i(\alpha_{i+2}) = \alpha_{i+2}, \\ s_i(\alpha_j) &= \alpha_i + \alpha_j + \sqrt{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{4}\right) \frac{\epsilon_{i+1} C_{i-1}}{C_i} \quad (j = i \pm 1), \quad s_i(\epsilon_j) = \epsilon_j, \\ s_i(C_j) &= C_j, \end{aligned}$$

$$\pi(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \quad \pi(f_j) = f_{j+1}, \quad \pi(\epsilon_j) = (-1)^j \epsilon_{j+1}, \quad \pi(C_j) = C_{j+1},$$

sendo, $i = 0, \dots, 3$, $j = 0, \dots, 3$, $\epsilon_{j+2} = \epsilon_j$ e $C_{j+2} = C_j$. Estas simetrias satisfazem as relações fundamentais do grupo de Weyl afim $A_3^{(1)}$, que são:

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1, & s_i s_j &= s_j s_i \quad (j = i+2), & s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j \quad (j = i \pm 1), \\ \pi^4 &= 1, & \pi s_j &= s_{j+1} \pi. \end{aligned}$$

Observe também que o sistema (4.1)-(4.4) possui a seguinte invariância por escala:

$$t \rightarrow \nu t, \quad \epsilon_0 \rightarrow \frac{\epsilon_0}{\mu^2}, \quad \epsilon_1 \rightarrow \mu^2 \epsilon_1, \quad \alpha_j \rightarrow \alpha_j, \quad f_{2k} \rightarrow \mu f_{2k}, \quad f_{2k+1} \rightarrow \frac{1}{\mu} f_{2k+1}, \quad k = 0, 1.$$

Assim, podemos usar esta invariância para reduzir o modelo com C_0 e C_1 arbitrários às seguintes quatro possibilidades irreduzíveis:

$$(i) \quad C_0 = C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_0 + f_2 = \sqrt{t}, \quad f_1 + f_3 = \sqrt{t}, \quad (4.7)$$

$$(ii) \quad C_0 = 1 \text{ and } C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_0 + f_2 = \sqrt{t}, \quad f_1 + f_3 = 0, \quad (4.8)$$

$$(iii) \quad C_0 = 0 \text{ and } C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_0 + f_2 = 0, \quad f_1 + f_3 = \sqrt{t}, \quad (4.9)$$

$$(iv) \quad C_0 = C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_0 + f_2 = 0, \quad f_1 + f_3 = 0. \quad (4.10)$$

Quando $C_j \neq 0$ para $j = 0, 1$, podemos escolher $\mu = \sqrt{C_0/C_1}$ e $\nu = 1/(C_0 C_1)$ tal que o sistema transformado por escala seja equivalente a um sistema com $C_0 = C_1 = 1$. Similarmente, quando $C_0 = 0$ ou $C_1 = 0$, podemos escolher $\mu = 1/C_1$ ou $\mu = C_0$, respectivamente, para simplificar o modelo.

Agora, vamos definir coordenadas canônicas q e p como

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{t}}(C_0 t + p), \quad f_1 = \sqrt{t}q, \quad f_2 = -\frac{p}{\sqrt{t}}, \quad f_3 = \sqrt{t}(C_1 - q),$$

tal que as expressões (4.5) e (4.6) sejam satisfeitas. Nestas variáveis, o sistema (4.1)-(4.4) se reduz a

$$tq' = -C_0 C_1 tq - 2C_1 qp - (\alpha_1 + \alpha_3)q + q^2(C_0 t + 2p) + \alpha_1 C_1 - \epsilon_0 C_0 \quad (4.11)$$

$$tp' = C_0 C_1 tp - 2C_0 tq + (1 - \alpha_0 - \alpha_2)p + p^2(C_1 - 2q) + (C_1 \epsilon_1 - C_0 \alpha_2)t \quad (4.12)$$

Podemos interpretar (4.11) e (4.12) como um sistema proveniente do hamiltoniano

$$H_c = \frac{1}{t} \left[-qp(1 - \alpha_0 - \alpha_2 + C_0 C_1 t + C_1 p) + q^2 p(C_0 t + p) + (\alpha_1 C_1 - C_0 \epsilon_0)p + (C_0 \alpha_2 - C_1 \epsilon_1)tq \right], \quad (4.13)$$

tal que

$$q' = \frac{\partial H_c}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H_c}{\partial q}.$$

Das equações (4.11) e (4.12), nós também obtemos relações que serão usadas para eliminar uma das coordenadas canônicas do sistema nas seções a seguir, ou seja

$$p = \frac{q(\alpha_0 + \alpha_2 - 1 - C_0 C_1 t + C_0 tq) - tq' + \alpha_1 C_1 - \epsilon_0 C_0}{2q(C_1 - q)} \quad (4.14)$$

$$q = \frac{p(C_0 C_1 t + 1 - \alpha_0 - \alpha_2 + C_1 p) - t(\alpha_2 C_0 - \epsilon_1 C_1 + p')}{2p(C_0 t + p)} \quad (4.15)$$

Quando consideramos o caso mais simples com $C_0 = C_1 = 0$, as equações (4.11) e (4.12) se desacoplam em

$$q'' = \frac{q'^2}{q} - \frac{q'}{t}, \quad p'' = \frac{p'^2}{p} - \frac{p'}{t}.$$

Como estas equações possuem soluções gerais bem conhecidas, isto é

$$q = p = at^b, \quad a, b = \text{constantes arbitrárias};$$

portanto, nós não trataremos este caso adiante.

Devido as propriedades do grupo de Weyl afim $A_3^{(1)}$, precisamos considerar em detalhes apenas as transformações s_0 e π quando $C_0 \neq 0$, pois as demais transformações serão:

$$s_1 = \lim_{(C_0, C_1)} (\pi^3 s_0 \pi), \quad s_2 = \lim_{(C_0, C_1)} (\pi^2 s_0 \pi^2), \quad s_3 = \lim_{(C_0, C_1)} (\pi s_0 \pi^3),$$

onde definimos $\lim_{(C_0, C_1)}$ como sendo o limite das constantes C_0 and C_1 para algum dos casos (4.7)-(4.10). Por outro lado, quando $C_0 = 0$ e $C_1 \neq 0$, precisaremos considerar apenas s_1 e π , pois as demais transformações serão:

$$s_0 = \lim_{(C_0, C_1)} (\pi^3 s_1 \pi), \quad s_3 = \lim_{(C_0, C_1)} (\pi^2 s_1 \pi^2), \quad s_2 = \lim_{(C_0, C_1)} (\pi s_1 \pi^3),$$

Nas coordenadas q e p , as transformações de Bäcklund s_0 , s_1 e π são:

$$s_0(q) = q + \frac{(C_0\alpha_0 + C_1\epsilon_1)}{C_0(C_0t + p)} = q - \frac{2(C_0\alpha_0 + C_1\epsilon_1)(C_1 - q)q}{C_0[C_0\epsilon_0 - C_1\alpha_1 + q(C_0tq - C_0C_1t + \alpha_1 + \alpha_3) + tq']},$$

$$s_0(p) = p, \quad s_0(\epsilon_0) = \epsilon_0, \quad s_0(\epsilon_1) = \epsilon_1, \quad s_0(C_0) = C_0, \quad s_0(C_1) = C_1$$

$$s_0(\alpha_0) = -\alpha_0 - \frac{2C_1\epsilon_1}{C_0}, \quad s_0(\alpha_1) = \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{C_1\epsilon_1}{C_0}, \quad s_0(\alpha_2) = \alpha_2,$$

$$s_0(\alpha_3) = \alpha_0 + \alpha_3 + \frac{C_1\epsilon_1}{C_0}$$

$$s_1(p) = p + \frac{(C_0\epsilon_0 - C_1\alpha_1)}{C_1q} = p + \frac{2(C_0\epsilon_0 - C_1\alpha_1)(C_0t + p)p}{C_1[(C_1\epsilon_1 - C_0\alpha_2)t + p(1 - \alpha_0 - \alpha_2 + C_0C_1t + C_1p) - tp']},$$

$$s_1(q) = q, \quad s_1(\epsilon_0) = \epsilon_0, \quad s_1(\epsilon_1) = \epsilon_1, \quad s_1(C_0) = C_0, \quad s_1(C_1) = C_1$$

$$s_1(\alpha_0) = \alpha_0 + \alpha_1 - \frac{C_0\epsilon_0}{C_1}, \quad s_1(\alpha_1) = -\alpha_1 + \frac{2C_0\epsilon_0}{C_1}, \quad s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{C_0\epsilon_0}{C_1},$$

$$s_1(\alpha_3) = \alpha_3$$

$$\pi(q) = -\frac{p}{t} = \frac{C_0\epsilon_0 - C_1\alpha_1 + q(C_0C_1t - C_0tq + \alpha_1 + \alpha_3) + tq'}{2t(C_1 - q)q}$$

$$\pi(p) = t(q - C_1) = -\frac{t[C_1p^2 + (C_0C_1t + \alpha_0 + \alpha_2 - 1)p + t(C_0\alpha_2 - C_1\epsilon_1 + p')]}{2p(C_0t + p)},$$

$$\pi(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \quad \pi(\epsilon_j) = (-1)^j \epsilon_{j+1}, \quad \pi(C_j) = C_{j+1}$$

4.1.1 Caso (i)

Vamos considerar o caso (i), isto é $C_0 = C_1 = 1$. Se eliminamos p do sistema (4.11)-(4.12) e fazemos a transformação $q = \frac{1}{1-y}$, teremos a equação PV com os parâmetros

$$\alpha = (\alpha_1 - \epsilon_0)^2/2, \quad \beta = -(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \epsilon_0 - 1)^2/2, \quad \gamma = \alpha_0 - \alpha_2 + 2\epsilon_1, \quad \delta = -1/2, \quad (4.16)$$

ou seja,

$$y'' = \frac{(3y-1)}{2y(y-1)}(y')^2 - \frac{y'}{t} + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left(\frac{(\alpha_1 - \epsilon_0)^2}{2} y - \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \epsilon_0 - 1)^2}{2y} \right) + \frac{(\alpha_0 - \alpha_2 + 2\epsilon_1)y}{t} - \frac{y(y+1)}{2(y-1)}. \quad (4.17)$$

A transformação s_0 aplicada à coordenada y é

$$s_0(y) = \left(y[\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \epsilon_0 + 2\epsilon_1 + 1 + ty' + y(-\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\epsilon_0 - 2\epsilon_1 - 1 + (\epsilon_0 - \alpha_1)y + t)] \right) / \left(-\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \epsilon_0 + 1 + ty' + y(3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\epsilon_0 + 2\epsilon_1 - 1 - y(2\alpha_0 + \alpha_1 - \epsilon_0 + 2\epsilon_1) + t) \right),$$

tal que os novos parâmetros da equação PV são escritos em termos dos parâmetros antigos como

$$s_0(\alpha) = \frac{1}{8} \left[\gamma + 1 - \mu_1 \sqrt{2\alpha} - \mu_2 \sqrt{-2\beta} \right]^2, \quad s_0(\beta) = -\frac{1}{8} \left[\gamma + 1 + \mu_1 \sqrt{2\alpha} + \mu_2 \sqrt{-2\beta} \right]^2, \\ s_0(\gamma) = -\mu_1 \sqrt{2\alpha} + \mu_2 \sqrt{-2\beta} - 1,$$

sendo $\mu_j = \pm 1$. A transformação π aplicada a y é

$$\pi(y) = 1 + \frac{2ty}{ty' + (\epsilon_0 - \alpha_1)y^2 - \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1 + \epsilon_0 + y(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\epsilon_0 - 1 - t)},$$

tal que os parâmetros para a equação PV se transformam como

$$\pi(\alpha) = \frac{1}{8} \left[\gamma - 1 + \mu_1 \sqrt{2\alpha} + \mu_2 \sqrt{-2\beta} \right]^2, \quad \pi(\beta) = -\frac{1}{8} \left[\gamma + 1 - \mu_1 \sqrt{2\alpha} - \mu_2 \sqrt{-2\beta} \right]^2, \\ \pi(\gamma) = \mu_1 \sqrt{2\alpha} - \mu_2 \sqrt{-2\beta}.$$

Similarmente, se eliminamos q do sistema (4.11)-(4.12) e fazemos a transformação $p = t/(w - 1)$, teremos a equação PV novamente, mas desta vez com os parâmetros

$$\alpha = (\alpha_2 - \epsilon_1)^2/2, \quad \beta = -(\alpha_0 + \epsilon_1)^2/2, \quad \gamma = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 - 1 - 2\epsilon_0, \quad \delta = -1/2, \quad (4.18)$$

isto é

$$w'' = \frac{(3w - 1)}{2w(w - 1)} (w')^2 - \frac{w'}{t} + \frac{(w - 1)^2}{t^2} \left(\frac{(\alpha_2 - \epsilon_1)^2}{2} w - \frac{(\alpha_0 + \epsilon_1)^2}{2w} \right) \\ + \frac{(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 - 1 - 2\epsilon_0)w}{t} - \frac{w(w + 1)}{2(w - 1)}. \quad (4.19)$$

A transformação s_0 aplicada à coordenada w não gera nenhuma mudança, i. e. $s_0(w) = w$, enquanto que a transformação π é expressa como

$$\pi(w) = 1 + \frac{2tw}{tw' + (\epsilon_1 - \alpha_2)w^2 + \alpha_0 + \epsilon_1 + w(-\alpha_0 + \alpha_2 - 2\epsilon_1 - t)},$$

sendo que os novos parâmetros da equação PV são escritos em termos dos parâmetros antigos como

$$\pi(\alpha) = \frac{1}{8} \left[\gamma - 1 + \mu_1 \sqrt{2\alpha} + \mu_2 \sqrt{-2\beta} \right]^2, \quad \pi(\beta) = -\frac{1}{8} \left[\gamma + 1 - \mu_1 \sqrt{2\alpha} - \mu_2 \sqrt{-2\beta} \right]^2, \\ \pi(\gamma) = -\mu_1 \sqrt{2\alpha} + \mu_2 \sqrt{-2\beta}.$$

As transformações de Bäcklund s_0 e π acima foram construídas a partir do sistema simétrico (4.1)-(4.4), mas podemos compara-las também com as transformações de Bäcklund da equação PV (presentes no apêndice B). Desta forma, é possível verificar que a simetria π atua sobre a equação (4.17) da mesma forma que $\mathcal{T}_{\mu_1, \mu_2, -1}^{[PV]}$, enquanto que ela age sobre (4.19) como $\mathcal{S}_2^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{\mu_1, \mu_2, -1}^{[PV]} \circ \mathcal{S}_1^{[PV]}$. Por sua vez, a simetria s_0 atuando sobre (4.17) é equivalente a $\mathcal{T}_{1,1,1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{1,1,1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{1,-1,1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{\mu_1, \mu_2, 1}^{[PV]}$.

4.1.2 Caso (ii)

Vamos considerar agora o caso cujas constantes de integração são: $C_0 = 1$ e $C_1 = 0$. Se eliminamos p do sistema (4.11)-(4.12) e fazemos a transformação

$$\tau = \sqrt{t}, \quad q(t) = \frac{y(\tau)}{\tau},$$

ficaremos com a equação PIII com os parametros $a = 4(\alpha_0 - \alpha_2)$, $b = 4\epsilon_0(\alpha_0 + \alpha_2 - 1)$, $c = 4$ e $d = -4\epsilon_0^2$, ou seja

$$y_{\tau\tau} = \frac{y_\tau^2}{y} - \frac{y_\tau}{\tau} + \frac{4(\alpha_0 - \alpha_2)y^2}{\tau} + \frac{4\epsilon_0(\alpha_0 + \alpha_2 - 1)}{\tau} + 4y^3 - \frac{4\epsilon_0^2}{y},$$

Quando $\epsilon_0 = 0$, a equação PIII acima possui uma solução geral conhecida (ver páginas 146-148 de [28]). Portanto, consideraremos apenas o caso $\epsilon_0 \neq 0$. Fazendo as transformações $\tau = \frac{\bar{\tau}}{2\sqrt{\epsilon_0}}$ e $y = \sqrt{\epsilon_0}\bar{y}(\bar{\tau})$, a equação PIII é simplificada em

$$\bar{y}_{\bar{\tau}\bar{\tau}} = \frac{\bar{y}_{\bar{\tau}}^2}{\bar{y}} - \frac{\bar{y}_{\bar{\tau}}}{\bar{\tau}} + \frac{2(\alpha_0 - \alpha_2)\bar{y}^2}{\bar{\tau}} + \frac{2(\alpha_0 + \alpha_2 - 1)}{\bar{\tau}} + \bar{y}^3 - \frac{1}{\bar{y}}, \quad (4.20)$$

de modo que os parâmetros desta equação PIII agora são:

$$a = 2(\alpha_0 - \alpha_2), \quad b = 2(\alpha_0 + \alpha_2 - 1), \quad c = 1, \quad d = -1. \quad (4.21)$$

Neste caso, as transformações π , s_1 e s_3 não são mais simetrias nem de PIII nem de PV, mas π^2 , s_0 e s_2 permanecem sendo simetrias. As transformações s_0 e π^2 atuando sobre \bar{y} e os parâmetros (4.21) serão

$$s_0(\bar{y}) = \frac{\bar{y}[\bar{\tau} + \bar{\tau}\bar{y}_{\bar{\tau}} + \bar{y}(2\alpha_0 - 2\alpha_2 + 1) + \bar{\tau}\bar{y}^2]}{\bar{\tau} + \bar{\tau}\bar{y}_{\bar{\tau}} + \bar{y}(-2\alpha_0 - 2\alpha_2 + 1) + \bar{\tau}\bar{y}^2}, \quad s_0(a) = -b - 2, \quad s_0(b) = -a - 2.$$

$$\pi^2(\bar{y}(\bar{\tau})) = -i\bar{y}(-i\bar{\tau}), \quad \pi^2(a) = -a, \quad \pi^2(b) = b$$

Se ao invés de p , eliminamos q do sistema (4.11)-(4.12) e fazemos a transformação $p = t/(w - 1)$, temos a equação PV com os parâmetros

$$\alpha = \alpha_2^2/2, \quad \beta = -\alpha_0^2/2, \quad \gamma = -\epsilon_0, \quad \delta = 0; \quad (4.22)$$

isto é

$$w'' = \frac{(3w-1)}{2w(w-1)}(w')^2 - \frac{w'}{t} + \frac{(w-1)^2}{t^2} \left(\frac{\alpha_2^2}{2}w - \frac{\alpha_0^2}{2w} \right) - \frac{\epsilon_0 w}{t}. \quad (4.23)$$

A equação PV com $\delta = \gamma = 0$ possui uma solução geral bem conhecida (ver página 179 de [28]) enquanto que podemos fixar $\gamma = \pm 1$ quando $\delta = 0$ e $\gamma \neq 0$ por uma transformação de escala sobre t . Portanto, podemos considerar $\epsilon_0 = 0$ ou $\epsilon_0 = \pm 1$ sem perda de generalidade quando estudarmos as transformações de Bäcklund da equação PV acima.

Ao examinarmos s_0 na coordenada w , vemos que esta transformação deixa w invariante, isto é $s_0(w) = w$. Entretanto, a aplicação π^2 sobre w e os parâmetros da (4.23) resulta em

$$\pi^2(w) = \frac{1}{w}, \quad \pi^2(\alpha) = -\beta, \quad \pi^2(\beta) = -\alpha, \quad \pi^2(\gamma) = -\gamma$$

Comparando as transformações acima com as transformações de Bäcklund do apêndice B, vemos que s_0 e π^2 transformam as soluções de (4.20) de forma equivalente a $\mathcal{S}_2^{[PIII]} \circ \mathcal{T}_1^{[PIII]}$ e $\mathcal{S}_{-i,-i}^{[PIII]}$ respectivamente; enquanto que a transformação π^2 transforma as soluções de (4.23) da mesma forma que $\mathcal{S}_2^{[PV]}$.

Observe que também podemos usar (4.14) para expressar a transformação de (4.20) para (4.23) como

$$w(t) = \frac{\bar{\tau}(\bar{y}_{\bar{\tau}} + 1) - (2\alpha_0 + 2\alpha_2 - 1)\bar{y} + \bar{\tau}\bar{y}^2}{\bar{\tau}(\bar{y}_{\bar{\tau}} + 1) - (2\alpha_0 + 2\alpha_2 - 1)\bar{y} - \bar{\tau}\bar{y}^2}, \quad \bar{\tau} = 2\sqrt{\epsilon_0 t}, \quad (4.24)$$

ou usar (4.15) para expressar a transformação de (4.23) para (4.20) como

$$\bar{y}(\bar{\tau}) = \frac{t w_t + (1-w)(\alpha_0 + \alpha_2 w)}{2\sqrt{\epsilon_0 t} w}, \quad \bar{\tau} = 2\sqrt{\epsilon_0 t} \quad (4.25)$$

4.1.3 Caso (iii)

No caso (iii) ($C_0 = 0$ e $C_1 = 1$), podemos eliminar p do sistema (4.11)-(4.12) e fazer uma transformação $q = \frac{1}{1-y}$ afim de obtermos a equação PV com os parâmetros

$$\alpha = \frac{\alpha_1^2}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1)^2, \quad \gamma = \epsilon_1, \quad \delta = 0, \quad (4.26)$$

ou seja,

$$y'' = \frac{(3y-1)}{2y(y-1)}(y')^2 - \frac{y'}{t} + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left(\frac{\alpha_1^2}{2}y - \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1)^2}{2y} \right) + \frac{\epsilon_1 y}{t}. \quad (4.27)$$

Pelo mesmo argumento apresentado na seção 4.1.2, podemos considerar $\epsilon_1 = 0$ ou $\epsilon_1 = \pm 1$ sem perda de generalidade quando estudarmos as transformações de Bäcklund da equação PV acima.

Similarmente, podemos eliminar q e fazer as transformações $\tau = \sqrt{t}$ e $p(t) = \tau w(\tau)$ para obtermos a equação PIII com os parâmetros $a = 4(1 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - \alpha_2)$, $b = 4\epsilon_1(\alpha_0 + \alpha_2)$, $c = 4$ e $d = -4\epsilon_1^2$, isto é

$$w_{\tau\tau} = \frac{w_\tau^2}{w} - \frac{w_\tau}{\tau} + 4(1 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - \alpha_2)\frac{w^2}{\tau} + \frac{4\epsilon_1(\alpha_0 + \alpha_2)}{\tau} + 4w^3 - \frac{4\epsilon_1^2}{w}$$

Se $\epsilon_1 \neq 0$, podemos fazer também a transformação $w = \sqrt{\epsilon_1}\bar{w}(\bar{\tau})$ e $\tau = \bar{\tau}/(2\sqrt{\epsilon_1})$ tal que a equação PIII seja simplificada em

$$\bar{w}_{\bar{\tau}\bar{\tau}} = \frac{\bar{w}_{\bar{\tau}}^2}{\bar{w}} - \frac{\bar{w}_{\bar{\tau}}}{\bar{\tau}} + 2(1 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - \alpha_2)\frac{\bar{w}^2}{\bar{\tau}} + \frac{2(\alpha_0 + \alpha_2)}{\bar{\tau}} + \bar{w}^3 - \frac{1}{\bar{w}}, \quad (4.28)$$

sendo que os parâmetros desta equação PIII ficam:

$$a = 2(1 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - \alpha_2), \quad b = 2(\alpha_0 + \alpha_2), \quad c = 1, \quad d = -1. \quad (4.29)$$

A transformação s_1 agindo sobre y não altera a forma da solução de (4.27), ou seja $s_1(y) = y$, enquanto que a transformação π^2 gera

$$\pi^2(y) = \frac{1}{y}, \quad \pi^2(\alpha) = -\beta, \quad \pi^2(\beta) = -\alpha, \quad \pi^2(\gamma) = -\gamma,$$

que é equivalente a transformação $\mathcal{S}_2^{[PV]}$ do apêndice B. A transformação π^2 agindo sobre as soluções de (4.28) e os parâmetros da equação PIII resulta em

$$\pi^2(\bar{w}(\bar{\tau})) = -i\bar{w}(-i\bar{\tau}), \quad \pi^2(a) = -a, \quad \pi^2(b) = b$$

que é equivalente à transformação $\mathcal{S}_{-i,-i}^{[PIII]}$ do apêndice B. Por sua vez, a transformação s_1 agindo sobre as soluções de (4.28) resulta em

$$s_1(\bar{w}) = \frac{\bar{w}[\bar{\tau}(\bar{w}_{\bar{\tau}} - \bar{w}^2) + (2\alpha_0 + 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 1)\bar{w} - \bar{\tau}]}{\bar{\tau}(\bar{w}_{\bar{\tau}} - \bar{w}^2) + (2\alpha_0 + 2\alpha_2 - 1)\bar{w} - \bar{\tau}}, \quad s_1(a) = 2-b, \quad s_1(b) = 2-a,$$

que é equivalente à transformação $\mathcal{S}_2^{[PIII]} \circ \mathcal{T}_4^{[PIII]}$ da equação PIII.

Similarmente ao caso da seção anterior (ii), podemos usar (4.14) para escrever a transformação da equação (4.27) para a equação (4.28) como

$$\bar{w}(\bar{\tau}) = \frac{ty_t + (y-1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1 - \alpha_1y)}{2\sqrt{\epsilon_1}ty}, \quad \bar{\tau} = 2\sqrt{\epsilon_1}t.$$

Também podemos usar (4.15) para expressar a transformação de (4.28) para (4.27) como

$$y(t) = 1 - \frac{2\bar{\tau}\bar{w}^2}{\bar{\tau}(1 - \bar{w}_{\bar{\tau}} + \bar{w}^2) + \bar{w}(1 - 2\alpha_0 - 2\alpha_2)}, \quad \bar{\tau} = 2\sqrt{\epsilon_1}t$$

4.2 Simetrias ocultas

4.2.1 Caso ii) $C_0 = 1$ e $C_1 = 0$

Embora temos uma quebra espontânea de simetria quando $C_1 = 0$, o modelo simétrico PIII-PV também possui simetrias ocultas que evitam o colapso de s_1 e s_3 neste limite. Se definimos a simetria $\rho_0 = \lim_{(C_0 \rightarrow 1, C_1 \rightarrow 0)}(s_1 s_3 s_0 s_1 s_3)$, temos

$$\begin{aligned} \rho_0(q) &= q - \frac{(\alpha_2 - 1)q^2}{q(\alpha_0 + \alpha_2 - 1 + qp) + (tq^2 - \epsilon_0)}, \\ \rho_0(p) &= p + \frac{(\alpha_2 - 1)^2 \epsilon_0}{[q(\alpha_0 + qp) + (tq^2 - \epsilon_0)]^2} + \frac{(\alpha_2 - 1)[q(\alpha_2 - \alpha_0 - 1) + 2\epsilon_0]}{q[q(\alpha_0 + qp) + (tq^2 - \epsilon_0)]} + \frac{2(\alpha_2 - 1)}{q} \\ \rho_0(\alpha_0) &= \alpha_0, \quad \rho_0(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \quad \rho_0(\alpha_2) = 2 - \alpha_2, \quad \rho_0(\alpha_3) = -\alpha_0 - \alpha_1. \end{aligned}$$

Esta transformação atua na coordenada \bar{y} da seção 4.1.2 e nos parâmetros (4.21) da equação PIII, isto é $a = 2(\alpha_0 - \alpha_2)$ e $b = 2(\alpha_0 + \alpha_2 - 1)$, como

$$\rho_0(\bar{y}) = \bar{y} - \frac{4(\alpha_2 - 1)\bar{y}^2}{\bar{\tau}(\bar{y}_{\bar{\tau}} + \bar{y}^2 - 1) + (2\alpha_0 + 2\alpha_2 - 3)\bar{y}}, \quad \rho_0(a) = b - 2, \quad \rho_0(b) = a + 2, \quad (4.30)$$

Similarmente, a transformação ρ_0 atua sobre a coordenada w e os parâmetros (4.22) da equação PV, isto é $\alpha = \alpha_0^2/2$, $\beta = -\alpha_0^2/2$ e $\gamma = -\epsilon_0$, como

$$\begin{aligned} \rho_0(w) &= \left[-w[t^2 w_t^2 - 2t(w-1)(1-\alpha_2 + \alpha_2 w)w_t + (w-1)(\alpha_0(\alpha_0 + 2\alpha_2 - 2) \right. \\ &+ w(-\alpha_0^2 + 2(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_2 - 1) + \alpha_2 w(2 - 3\alpha_2 + \alpha_2 w) - 4\epsilon_0 t))] [t^2 w_t^2 \\ &- 2t(w-1)(1-\alpha_2 + \alpha_2 w)w_t + (w-1)(\alpha_0(\alpha_0 - 2\alpha_2 - 2) + w(-\alpha_0^2 + 2(\alpha_2 \\ &+ \alpha_0)(\alpha_2 - 1) + \alpha_2 w(2 - 3\alpha_2 + \alpha_2 w) - 4\epsilon_0 t))] \Big] / \left[-t^4 w_t^4 + 4t^3 w(w-1)w_t^3 \right. \\ &+ w_t^2 [8t^3 \epsilon_0 (w-1)w + 2t^2 (w-1)^2 (\alpha_0^2 + 3(\alpha_2 - 2)\alpha_2 w^2 - 2(\alpha_2 - 1)^2 w)] \\ &+ w_t [-16t^2 \epsilon_0 w^2 (w-1)^2 - 4tw(w-1)^3 [\alpha_0^2 + \alpha_2 w(\alpha_2(2\alpha_2 - 3)w - 2(\alpha_2 - 1)^2)] \\ &- 16t^2 \epsilon_0 w^2 (w-1)^2 - 8t\epsilon_0 w(w-1)^3 (\alpha_0^2 + (\alpha_2 - 2)\alpha_2 w^2) + (w-1)^4 (\alpha_2 w - \alpha_0) \\ &\left. (\alpha_2 w + \alpha_0) [\alpha_0 + \alpha_2(3\alpha_2 - 4)w^2 - 4(\alpha_2 - 1)^2 w] \right] \quad (4.31) \end{aligned}$$

$$\rho_0(\alpha) = \alpha - 2\mu_1 \sqrt{2\alpha} + 2, \quad \rho_0(\beta) = \beta, \quad \rho_0(\gamma) = \gamma$$

Se compararmos ρ_0 com as transformações de Bäcklund do apêndice B, vemos que a transformação (4.30) é equivalente à combinação $\mathcal{S}_2^{[PIII]} \circ \mathcal{T}_2^{[PIII]} \circ \mathcal{S}_{-1,1}^{[PIII]}$, enquanto que (4.31) é equivalente à combinação $\mathcal{T}_{1,-1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{\mu_1, \mu_2}^{[PV]}$ quando $\epsilon_0 = \pm 1$.

4.2.2 Case iii) $C_0 = 0$ e $C_1 = 1$

Quando $C_0 = 0$ e $C_1 = 1$, temos uma simetria oculta que evita o colapso de s_0 e s_2 .

Tal simetria é $\sigma_0 = \lim_{C_0 \rightarrow 0, C_1 \rightarrow 1} (s_0 s_2 s_1 s_0 s_2)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\sigma_0(q) &= \frac{[p(\alpha_0 + \alpha_2 + qp) - \epsilon_1 t][qp - \alpha_1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + qp) - \epsilon_1 t q]}{[p(\alpha_1 - qp) + \epsilon_1 t]^2} \\ \sigma_0(p) &= \frac{p(qp^2 - \alpha_1 p - \epsilon_1 t)}{p(\alpha_0 + \alpha_2 + qp) - \epsilon_1 t}, \quad \rho_0(\epsilon_j) = \rho_j, \\ \sigma_0(\alpha_0) &= -\alpha_1 - \alpha_2, \quad \sigma_0(\alpha_1) = \alpha_1, \quad \sigma_0(\alpha_2) = -\alpha_0 - \alpha_1, \\ \sigma_0(\alpha_3) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1.\end{aligned}$$

Esta transformação atua na coordenada y da seção 4.1.3 e nos parâmetros (4.26) da equação PV, isto é $\alpha = \alpha_1^2/2$, $\beta = -(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1)^2/2$ e $\gamma = \epsilon_1$, como

$$\begin{aligned}\sigma_0(y) &= \left[t^4 y y_t^4 - 4t^3 (y-1) y y_t^3 + y_t^2 [8t^3 \epsilon_1 (y-1) y^3 + 2t^2 (y-1)^2 y [-3(\alpha_0 + \alpha_1 \right. \\ &+ \alpha_2 - 1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1) + 2y(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 - \alpha_1^2 y^2]] + y_t [4t(y-1)^3 \\ &+ \alpha_1 + \alpha_2 - 1) + \alpha_1^2 y^2] - 16t^2 \epsilon_1 (y-1)^2 y^3 + 16t^2 \epsilon_1^2 (y-1)^2 y^5 - 8t \epsilon_1 (y-1)^3 \\ &+ \alpha_1 + \alpha_2 - 1) + \alpha_1^2 y^2] + (y-1)^4 y ((\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1)^2 - \alpha_1^2 y^2) \\ &\left. [- (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1)(3\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1) + 4y(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 - \alpha_1^2 y^2] \right] / \\ &\left[y^2 [-5\alpha_0^2 - 2\alpha_0(4\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3) - 8\alpha_1 \alpha_2 - 2(\alpha_1 - 3)\alpha_1 - 5\alpha_2^2 + 6\alpha_2 \right. \\ &+ 2t(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) y_t + 4t \epsilon_1 - 1] + 2y(2\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ &- 1 - t y_t) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1 - t y_t)^2 - 2y^3 (-\alpha_0^2 - 2\alpha_0 \alpha_2 + \alpha_0 + 2\alpha_1^2 + \alpha_1 \\ &- \alpha_2^2 + \alpha_2 + 2t \epsilon_1) + \alpha_1(2\alpha_0 + 3\alpha_1 + 2\alpha_2) y^4 [y^2 [-5\alpha_0^2 - 2\alpha_0(6\alpha_1 + 5\alpha_2 - 3) \\ &- 12\alpha_1 \alpha_2 - 6(\alpha_1 - 1)\alpha_1 - 5\alpha_2^2 + 6\alpha_2 + 2t(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) y_t + 4t \epsilon_1 - 1] + 2y(2\alpha_0 \\ &+ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1 - t y_t) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1 - t y_t)^2 + 2y^3 (\alpha_0^2 \\ &+ \alpha_0(4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 1) + \alpha_1(2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 1) + \alpha_2(\alpha_2 - 1) - 2t \epsilon_1) - \alpha_1(2\alpha_0 \\ &+ \alpha_1 + 2\alpha_2) y^4] \left. \right], \\ \sigma_0(\alpha) &= \alpha, \quad \sigma_0(\beta) = \beta + 2\mu_2 \sqrt{-2\beta} - 2, \quad \sigma_0(\gamma) = \gamma.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Similarmente, a transformação σ_0 atua sobre a coordenada \bar{w} e os parâmetros (4.29) da equação PIII mostrados na seção 4.1.3, isto é $a = 2(1 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - \alpha_2)$ e $b = 2(\alpha_0 + \alpha_2)$, como

$$\sigma_0(\bar{w}) = \bar{w} - \frac{4\bar{w}^2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)}{\bar{\tau}(\bar{w}^2 - \bar{w}_{\bar{\tau}} - 1) + (2\alpha_0 + 2\alpha_2 + 1)\bar{w}}, \quad \sigma_0(a) = b+2, \quad \sigma_0(b) = a-2\tag{4.33}$$

Se compararmos σ_0 com as transformações de Bäcklund do apêndice B, vemos que a transformação (4.32) é equivalente à combinação $\mathcal{T}_{-1,1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{\mu_1, \mu_2}^{[PV]}$, enquanto que (4.33) é equivalente à combinação $\mathcal{S}_2^{[PIII]} \circ \mathcal{T}_3^{[PIII]} \circ \mathcal{S}_{-1,1}^{[PIII]}$ quando $\epsilon_1 = \pm 1$.

Capítulo 5

O método do ansatz de vínculos

5.1 Vínculos canônicos genéricos

No método de Dirac para sistemas hamiltonianos com vínculos [36, 37, 38], o ponto de partida é um lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$, onde $q \equiv (q_1, \dots, q_D)$ e $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_D)$, cujo determinante da matriz hessiana seja nulo, ou seja*

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) = 0.$$

Este lagrangiano daria origem à vínculos primários e secundários que modificariam as equações de Hamilton. Um conjunto de N vínculos independentes $\phi_k(q, \dot{q}, t) = 0$ também poderia ser imposto "a priori" a um lagrangiano regular $L_0(q, \dot{q}, t)$ (isto é, o determinante da matriz hessiana não é nulo) usando multiplicadores de Lagrange (ver [39]) como

$$L(q, \dot{q}, \lambda, t) = L_0(q, \dot{q}, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \phi_k(q, \dot{q}, t). \quad (5.1)$$

Aqui, $\lambda \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ é considerado um conjunto de coordenadas independentes, tal que o determinante da matriz hessiana de $L(q, \dot{q}, \lambda, t)$ é nulo. Afim de prepararmos os fundamentos para o método da seção 5.2, mostraremos que podemos impor um conjunto genérico de vínculos $\phi_k(q, p, t) = 0$ diretamente ao formalismo hamiltoniano[†], de modo que ainda teremos um lagrangiano satisfazendo o princípio de Hamilton.

*Na notação que estamos usando, $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j})$ representa uma matrix formada pelos elementos $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ na i -ésima linha e j -ésima coluna.

[†]chamaremos tais vínculos de vínculos canônicos

5.1.1 Imposição dos vínculos canônicos

Vamos considerar um sistema descrito pelo lagrangiano regular $L_0(q, \dot{q}, t)$, tal que a transformação de Legendre deste lagrangiano gere o hamiltoniano

$$H_0(q, p, t) = \sum_{j=1}^D \dot{q}_j p_j - L_0(q, \dot{q}, t), \quad p_k = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_k},$$

sendo $p \equiv (p_1, \dots, p_D)$ e $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$. Observe que o lagrangiano $L_0(q, \dot{q}, t)$ pode ser considerado um funcional de um sistema de coordenadas maior do que q de forma auto-consistente; isto é, se definimos um conjunto de coordenadas independentes $\lambda \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_{2N})$ que seja ortogonal a $q \equiv (q_1, \dots, q_D)$, podemos escrever

$$\hat{L}_0(q, \dot{q}, \lambda, t) = L_0(q, \dot{q}, t), \quad (5.2)$$

tal que as equações de Euler-Lagrange das coordenadas λ resultam obviamente em $0 = 0$. Esta generalização das coordenadas será justificada adiante. Uma transformação de Legendre sobre o lagrangiano $\hat{L}_0(q, \dot{q}, \lambda, t)$ é igual a

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(q, p, \lambda, \pi, t) &= \sum_{j=1}^D \dot{q}_j p_j + \sum_{j=1}^{2N} \dot{\lambda}_j \pi_j - \hat{L}_0(q, \dot{q}, \lambda, t) = H_0(q, p, t) + \sum_{j=1}^{2N} \dot{\lambda}_j \pi_j, \\ p_k &= \frac{\partial \hat{L}_0}{\partial \dot{q}_k}, \quad \pi_k = \frac{\partial \hat{L}_0}{\partial \dot{\lambda}_k} = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $\pi_k = 0$ são vínculos que surgem naturalmente e serão chamados de vínculos primários. Veja também que a dinâmica de \hat{H}_0 não depende de forma explícita de $\dot{\lambda}$ pois

$$\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \dot{\lambda}_j} = \pi_j - \frac{\partial \hat{L}_0}{\partial \dot{\lambda}_k} = 0.$$

No entanto $\dot{\lambda}_j$ depende de q, p, λ e t ; assim, definiremos a notação

$$\dot{\lambda}_j = \hat{\lambda}_j(q, p, \lambda, t). \quad (5.4)$$

Considere agora o espaço vetorial \mathcal{V} de dimensão $2(D+2N)$ composto por funções de classe C^2 no domínio $t \in [t_1, t_2]$. Assim, sendo $f = (f_1, \dots, f_{2(D+2N)})$ e $g = (g_1, \dots, g_{2(D+2N)})$ dois elementos de \mathcal{V} , vamos definir o produto interno como

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{2(D+2N)} \int_{t_1}^{t_2} f_j g_j dt.$$

Nesta notação, o princípio de Hamilton nas coordenadas canônicas pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^D \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] + \sum_{i=1}^{2N} \left[\left(-\dot{\pi}_i - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \lambda_i} \right) \delta \lambda_i \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\dot{\lambda}_i - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \pi_i} \right) \delta \pi_i \right] \right] dt = \langle \chi, \delta \rho \rangle = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

sendo $\delta \rho = (\delta q_1, \dots, \delta q_D, \delta p_1, \dots, \delta p_D, \delta \lambda_1, \dots, \delta \lambda_{2N}, \delta \pi_1, \dots, \delta \pi_{2N})$ e

$$\begin{aligned} \chi \equiv & \left(-\dot{p}_1 - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial q_1}, \dots, -\dot{p}_D - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial q_D}, \dot{q}_1 - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_1}, \dots, \dot{q}_D - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_D}, -\dot{\pi}_1 - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \lambda_1}, \dots, \right. \\ & \left. -\dot{\pi}_{2N} - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \lambda_{2N}}, \dot{\lambda}_1 - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \pi_1}, \dots, \dot{\lambda}_{2N} - \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \pi_{2N}} \right). \end{aligned}$$

Agora considere um conjunto de $2N$ vínculos linearmente independentes $\phi_k(q, p, t) = 0$. Isto é, se definimos $2N$ vetores em \mathcal{V} como

$$\partial \phi_k \equiv \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \phi_k}{\partial q_D}, \frac{\partial \phi_k}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \phi_k}{\partial p_D}, 0, \dots, 0 \right), \quad k = 1, \dots, 2N,$$

então os vínculos $\phi_k = 0$ serão linearmente independentes no sentido de que

$$\sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \partial \phi_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_k = 0 \text{ para todo } k.$$

Estes vínculos, juntamente com $\pi_k = 0$, restringem as possibilidades de $\delta \rho$ pois temos as seguintes condições:

$$\delta \phi_k = \sum_{j=1}^D \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \phi_k}{\partial p_j} \delta p_j \right) = 0, \quad \delta \pi_k = 0, \quad k = 1, \dots, 2N.$$

Assim, ao invés de $\delta \rho$ poder ser qualquer vetor no espaço \mathcal{V} , ele pertence a um subespaço de dimensão $2(D + 2N) - 4N = 2D$.

Primeiramente, vamos mostrar que a imposição "a priori" dos vínculos canônicos $\phi_k(q, p, t) = 0$ sobre H_0 é equivalente a definir o hamiltoniano

$$H(q, p, \lambda, \pi, t) = H_0(q, p, t) + \sum_{k=1}^{2N} \left(\lambda_k \phi_k(q, p, t) + \hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) \pi_k \right). \quad (5.6)$$

Para isto, considere um conjunto de $4N$ funções μ_k de classe C^2 e defina $\hat{\sigma}_k = \phi_k$, para $k = 1, \dots, 2N$, e $\hat{\sigma}_k = \pi_{k-2N}$, para $k = 2N + 1, \dots, 4N$, de modo que podemos construir a integral

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{2N} [\mu_k \delta \phi_k + \mu_{k+2N} \delta \pi_k] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{2N} \left[\mu_k \sum_{j=1}^D \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \phi_k}{\partial p_j} \delta p_j \right) + \mu_{k+2N} \delta \pi_k \right] dt \\ &= \langle \sum_{k=1}^{4N} \mu_k \partial \sigma_k, \delta \rho \rangle = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde foi usado a notação

$$\partial\sigma_k \equiv \left(\frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial q_D}, \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial p_D}, \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial \lambda_{2N}}, \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial \pi_1}, \dots, \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial \pi_{2N}} \right). \quad (5.8)$$

Como nós supomos os vínculos $\phi_k = 0$ sendo linearmente independentes, então os vetores $\partial\sigma_k$ também serão. Logo, os vetores $\partial\sigma_k$ formam uma base para o subespaço vetorial de dimensão $4N$ ortogonal a $\delta\rho$. Agora observe que χ também deve ser ortogonal a $\delta\rho$ devido a expressão (5.5). Logo, a trajetória no espaço \mathcal{V} determinada por χ será qualquer combinação linear dos vetores $\partial\sigma_k$ e de funções α_k de classe C^2 , ou seja,

$$\chi = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \partial\sigma_k. \quad (5.9)$$

As componentes de (5.9) formam o sistema

$$-\dot{p}_j - \frac{\partial\hat{H}_0}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial q_j} \Rightarrow \dot{p}_j \approx -\frac{\partial H_0}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, D \quad (5.10)$$

$$\dot{q}_j - \frac{\partial\hat{H}_0}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial p_j} \Rightarrow \dot{q}_j \approx \frac{\partial H_0}{\partial p_j} + \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \frac{\partial\phi_k}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, D \quad (5.11)$$

$$-\dot{\pi}_j - \frac{\partial\hat{H}_0}{\partial \lambda_j} = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial \lambda_j} \Rightarrow \dot{\pi}_j \approx 0, \quad j = 1, \dots, 2N \quad (5.12)$$

$$\dot{\lambda}_j - \frac{\partial\hat{H}_0}{\partial \pi_j} = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \frac{\partial\hat{\sigma}_k}{\partial \pi_j} \Rightarrow \alpha_{2N+j} = 0, \quad j = 1, \dots, 2N, \quad (5.13)$$

onde o símbolo \approx é chamado de "fracamente igual", que significa que a expressão será igual quando $\pi_k = 0$.

Note que, até aqui, as coordenadas λ e π foram introduzidas de forma auto-consistente e sem interferir na dinâmica do sistema de coordenadas q e p ; por isso, temos liberdade para definir λ de forma apropriada. Como a dinâmica de (5.10) e (5.11) vale para qualquer conjunto de α_k , podemos escolher $\alpha_k = \lambda_k$ para $k = 1, \dots, 2N$ sem perda de generalidade; ou seja, usando (5.13) temos

$$\chi = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \partial\sigma_k. \quad (5.14)$$

Portanto, a dinâmica do hamiltoniano H_0 definido no espaço $(q, p) \equiv (q_1, \dots, q_D, p_1, \dots, p_D)$ com a imposição dos vínculos $\phi_k(q, p, t) = 0$ será fracamente equivalente[†]a dinâmica

do hamiltoniano

$$\begin{aligned} H(q, p, \lambda, \pi, t) &= \hat{H}_0(q, p, \lambda, \pi, t) + \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \phi_k(q, p, t) \\ &= H_0(q, p, t) + \sum_{k=1}^{2N} \left(\lambda_k \phi_k(q, p, t) + \hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) \pi_k \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

definido no espaço $(q, p, \lambda, \pi) \equiv (q_1, \dots, q_D, p_1, \dots, p_D, \lambda_1, \dots, \lambda_{2N}, \pi_1, \dots, \pi_{2N})$ com a imposição dos vínculos $\pi_k = 0$, de modo que as condições de consistência $\dot{\pi}_k \approx 0$ geram os vínculos $\phi_k(q, p, t) = 0$. Assim, ao considerarmos λ como um conjunto de coordenadas independente, conectamos o formalismo desta seção ao formalismo de Dirac apresentado no apêndice C. Observe que a imposição apenas dos vínculos $\pi_k = 0$ é equivalente a redefinir $\hat{\sigma} \rightarrow \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{4N})$ em (5.8), tal que

$$\sigma_k = 0, \quad k = 1, \dots, 2N \quad e \quad \sigma_k = \pi_{k-2N}, \quad k = 2N + 1, \dots, 4N. \quad (5.16)$$

Assim, a imposição dos vínculos $\pi_k = 0$ sobre H gera o sistema

$$-\dot{p}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial q_j} \Rightarrow \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \approx -\frac{\partial H_0}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, D \quad (5.17)$$

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial p_j} \Rightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \approx \frac{\partial H_0}{\partial p_j} + \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \frac{\partial \phi_k}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, D \quad (5.18)$$

$$-\dot{\pi}_j - \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_j} \Rightarrow \dot{\pi}_j = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \approx -\phi_j, \quad j = 1, \dots, 2N \quad (5.19)$$

$$\dot{\lambda}_j - \frac{\partial H}{\partial \pi_j} = \sum_{k=1}^{4N} \alpha_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial \pi_j} \Rightarrow \alpha_{2N+j} = 0, \quad j = 1, \dots, 2N \quad (5.20)$$

Observe também que os vínculos $\pi_k = 0$ nos dão liberdade para redefinir H com a adição de uma combinação linear de π_k , isto é

$$\hat{H} = H + \sum_{k=1}^{2N} \hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) \pi_k = H_0 + \sum_{k=1}^{2N} \left[\lambda_k \phi_k + \left(\hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) + u_k(q, p, \lambda, t) \right) \pi_k \right], \quad (5.21)$$

onde $u_k(q, p, \lambda, t)$ são funcionais arbitrários. Isto porque podemos considerar uma definição alternativa a (5.3) como

$$\hat{H}_0(q, p, \lambda, \pi, t) \rightarrow \hat{\hat{H}}_0(q, p, \lambda, \pi, t) = H_0(q, p, t) + \sum_{j=1}^{2N} \left(\hat{\lambda}_j(q, p, \lambda, t) + u_j(q, p, \lambda, t) \right) \pi_j. \quad (5.22)$$

[‡]O termo "fracamente equivalente" significa que as equações de movimento serão equivalente quando $\pi_j = 0$

No entanto, esta ambiguidade não interfere na dinâmica e podemos considerar $u_j(q, p, \lambda, t) = 0$ sem perda de generalidade.

Assim, definindo o parêntese de Poisson de duas quantidades dinâmicas A e B como

$$\{A, B\} = \sum_{j=1}^D \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial q_j} \frac{\partial A}{\partial p_j} \right) + \sum_{j=1}^{2N} \left(\frac{\partial A}{\partial \lambda_j} \frac{\partial B}{\partial \pi_j} - \frac{\partial B}{\partial \lambda_j} \frac{\partial A}{\partial \pi_j} \right),$$

temos que a evolução temporal de uma variável dinâmica A será

$$\dot{A} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

A evolução temporal dos vínculos primários pelo hamiltoniano H devem ser fracamente nula por consistência, logo temos

$$\dot{\pi}_j = \{\pi_j, H\} \approx -\phi_j = 0. \quad (5.23)$$

Os vínculos que não são vínculos primários, como $\phi_j = 0$, serão chamados de vínculos secundários. Estes vínculos secundários também precisam ter a evolução temporal nula, ou seja

$$\dot{\phi}_j = \{\phi_j, H\} + \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \approx \{\phi_j, H_0\} + \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \{\phi_j, \phi_k\} + \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = 0. \quad (5.24)$$

Desta forma, precisamos definir os seguintes vínculos secundários adicionais:

$$\psi_j \equiv \{\phi_j, H_0\} + \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \{\phi_j, \phi_k\} + \frac{\partial \phi_j}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, 2N. \quad (5.25)$$

A evolução temporal dos vínculos ψ_j também devem ser fracamente nula, ou seja

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_j &= \{\psi_j, H\} + \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \\ &\approx \{\{\phi_j, H_0\}, H_0\} + \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k (\{\{\phi_j, H_0\}, \phi_k\} + \{\{\phi_j, \phi_k\}, H_0\}) \\ &+ \sum_{k=1}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} \lambda_k \lambda_m \{\{\phi_j, \phi_k\}, \phi_m\} + \sum_{k=1}^{2N} \hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) \{\phi_j, \phi_k\} + \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para dois conjuntos genéricos de vínculos Θ e Ξ com $2N$ vínculos cada, vamos definir a notação

$$(\{\Theta, \Xi\}) \equiv \begin{pmatrix} \{\Theta_1, \Xi_1\} & \cdots & \{\Theta_1, \Xi_{2N}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\Theta_{2N}, \Xi_1\} & \cdots & \{\Theta_{2N}, \Xi_{2N}\} \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Assim, se $\det(\{\phi, \phi\}) = 0$, a expressão (5.26) daria origem a mais vínculos secundários e deveríamos continuar checando a consistência dos vínculos. Aqui, suporemos $\det(\{\phi, \phi\}) \neq 0$ para aplicar o método desenvolvido na próxima seção. Os vínculos ϕ_k e ψ_k precisam ser introduzidos no hamiltoniano usando multiplicadores de Lagrange diferentes. Desta forma, definiremos o hamiltoniano total

$$H_T = H_0 + \sum_{k=1}^{2N} \left[\left(\lambda_k + \hat{\lambda}_{k+2N}(q, p, \lambda, t) \right) \phi_k + \hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) \pi_k + \hat{\lambda}_{k+4N}(q, p, \lambda, t) \psi_k \right] \quad (5.28)$$

Definindo o conjunto $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{6N}) \equiv (\pi_1, \dots, \pi_{2N}, \phi_1, \dots, \phi_{2N}, \psi_1, \dots, \psi_{2N})$, a equação de movimento para uma variável dinâmica A será[§]

$$\dot{A} = \{A, H_T\} + \frac{\partial A}{\partial t} \approx \{A, H_0\} + \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \{A, \phi_k\} + \sum_{k=1}^{6N} \hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) \{A, \Phi_k\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (5.29)$$

Note que usando a expressão acima temos $\dot{\lambda}_j = \hat{\lambda}_j(q, p, \lambda, t)$, que é consistente com a definição que havíamos feito em (5.4).

Para os vínculos serem consistentes, a evolução temporal por H_T para todos os elementos do conjunto Φ precisam ser nulos, isto é

$$\dot{\Phi}_j = \{\Phi_j, H_T\} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \approx \{\Phi_j, H_0\} + \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \{\Phi_j, \phi_k\} + \sum_{k=1}^{6N} \hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) \{\Phi_j, \Phi_k\} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = 0. \quad (5.30)$$

Desde que $\det(\{\Phi, \Phi\}) \neq 0$, nós podemos determinar todos $\hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t)$ para (5.30). Agora observe que podemos dividir a matriz $(\{\Phi, \Phi\})$ em blocos como

$$(\{\Phi, \Phi\}) = \begin{pmatrix} (\{\pi, \pi\}) & (\{\pi, \phi\}) & (\{\pi, \psi\}) \\ (\{\phi, \pi\}) & (\{\phi, \phi\}) & (\{\phi, \psi\}) \\ (\{\psi, \pi\}) & (\{\psi, \phi\}) & (\{\psi, \psi\}) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 0_{2N \times 2N} & 0_{2N \times 2N} & (\{\phi, \phi\}) \\ \hline 0_{2N \times 2N} & (\{\phi, \phi\}) & (\{\phi, \psi\}) \\ (\{\phi, \phi\}) & (\{\psi, \phi\}) & (\{\psi, \psi\}) \end{array} \right)$$

Considere uma matriz anti-diagonal $\mathcal{D}^{(N_d)}$ de dimensão $N_d \times N_d$, cujos elementos sejam dados por $\mathcal{D}_{ij}^{(N_d)} = \delta_{i, N_d+1-i}$ e $\det(\mathcal{D}^{(N_d)}) = \pm 1$ dependendo do valor de N_d . Nós podemos manipular $\det(\{\Phi, \Phi\})$ usando a seguinte propriedade de matrizes divididas em blocos:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & 0_{m \times n} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \right) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{C}),$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são matrizes genéricas de dimensões $m \times m$, $m \times n$ e $n \times n$ respectivamente. Usando esta relação, obtemos

$$\det(\{\Phi, \Phi\}) \propto \det[(\{\Phi, \Phi\})\mathcal{D}^{(6N)}]$$

[§]Na evolução temporal do hamiltoniano H_T , o símbolo \approx significará que temos uma igualdade quando $\Phi = 0$.

$$\begin{aligned}
 &= \det \left(\begin{array}{cc|c} (\{\phi, \phi\})\mathcal{D}^{(2N)} & 0_{2N \times 2N} & 0_{2N \times 2N} \\ (\{\phi, \psi\})\mathcal{D}^{(2N)} & (\{\phi, \phi\})\mathcal{D}^{(2N)} & 0_{2N \times 2N} \\ (\{\psi, \psi\})\mathcal{D}^{(2N)} & (\{\psi, \phi\})\mathcal{D}^{(2N)} & (\{\phi, \phi\})\mathcal{D}^{(2N)} \end{array} \right) \\
 &= \det \left(\begin{array}{c|c} (\{\phi, \phi\})\mathcal{D}^{(2N)} & 0_{2N \times 2N} \\ (\{\phi, \psi\})\mathcal{D}^{(2N)} & (\{\phi, \phi\})\mathcal{D}^{(2N)} \end{array} \right) \det[(\{\phi, \phi\})\mathcal{D}^{(2N)}] \\
 &= \det[(\{\phi, \phi\})\mathcal{D}^{(2N)}]^3 \propto \det[(\{\phi, \phi\})]^3 \neq 0
 \end{aligned}$$

Logo, a condição $\det(\{\phi, \phi\}) \neq 0$ é suficiente para $\det(\{\Phi, \Phi\}) \neq 0$. De (5.30), temos

$$\hat{\lambda}_k(q, p, \lambda, t) = - \sum_{j=1}^{6N} (\{\Phi, \Phi\})_{kj}^{-1} \left(\{\Phi_j, H_0\} + \sum_{m=1}^{2N} \lambda_m \{\Phi_j, \phi_m\} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \right), \quad (5.31)$$

para $k = 1, \dots, 6N$. Substituindo (5.31) em (5.29), temos

$$\dot{A} \approx \{A, H_T\}^D + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (5.32)$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
 \{A, H_T\}^D &\equiv \{A, H_0\} + \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \{A, \phi_k\} - \sum_{k,j=1}^{6N} \{A, \Phi_k\} (\{\Phi, \Phi\})_{kj}^{-1} \left(\{\Phi_j, H_0\} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{2N} \lambda_m \{\Phi_j, \phi_m\} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \right) \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

Observe também que os vínculos ϕ_k são usados para eliminar $2N$ coordenadas (q, p) , enquanto que os vínculos ψ_k são usados para eliminar as coordenadas λ_k .

5.1.2 Nota sobre o formalismo lagrangiano

Na seção 5.1, elaboramos uma abordagem para a imposição de vínculos canônicos diretamente no formalismo hamiltoniano. No entanto, esta abordagem também terá uma correspondência no formalismo lagrangiano. Abordaremos brevemente esta correspondência nesta seção.

Se compararmos a lagrangiana obtida de (5.22) com L_0 , vemos que a dinâmica do lagrangiano $L_0(q, \dot{q}, t)$ seria fracamente equivalente a do lagrangiano

$$\hat{L}_0 = \sum_{j=1}^D \dot{q}_j p_j + \sum_{j=1}^{2N} \dot{\lambda}_j \pi_j - \hat{H}_0(q, p, \lambda, \pi, t) = L_0 - \sum_{j=1}^{2N} u_k(q, p, \lambda, t) \pi_k \approx L_0.$$

Aqui usaremos $u_k(q, p, \lambda, t) = 0$ sem perda de generalidade. Se os vínculos $\phi_k(q, p, t) = 0$ forem tais que[¶]

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right) \neq 0, \quad (5.34)$$

então podemos definir um lagrangiano para (5.15) como

$$L(q_i, \dot{q}_i, \lambda_i, t) = \sum_{j=1}^D \dot{q}_j p_j + \sum_{j=1}^{2N} \dot{\lambda}_j \pi_j - H(q, p, \lambda, \pi, t) = L_0(q, \dot{q}, t) - \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \phi_k(q, p, t), \quad (5.35)$$

onde as coordenadas $p_j = p_j(q, \dot{q}, \lambda, t)$ no lado direito da expressão acima são obtidas do sistema

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p, \lambda, t), \quad j = 1, \dots, D.$$

O lagrangiano $L(q, \dot{q}, \lambda, t)$ possui a propriedade $L_0(q, \dot{q}, t) = \lim_{\lambda_j \rightarrow 0} L(q, \dot{q}, \lambda, t)$, mas ele não é necessariamente igual a (5.1), pois não é necessariamente linear nas coordenadas λ . A equação de Euler-Lagrange para o lagrangiano (5.35) resulta em

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, D \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} \equiv \hat{\phi}_k(q, \dot{q}, \lambda, t) = 0, \quad k = 1, \dots, 2N, \quad (5.37)$$

onde $\hat{\phi}_k(q, \dot{q}, \lambda, t) = 0$ são vínculos que também dependem das coordenadas λ . Os momentos canonicamente conjugados definidos por esta lagrangiana são

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, \lambda, t), \quad j = 1, \dots, D, \quad \pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, 2N,$$

Assim, vemos que a imposição de um conjunto de vínculos canônicos $\phi_k(q, p, t) = 0$ sobre um hamiltoniano H_0 é equivalente a um conjunto de vínculos que podem acoplar as coordenadas (q, p) com λ no formalismo lagrangiano.

5.2 Ansatz de vínculos

Quando tentamos reduzir um hamiltoniano polinômial H_0 com $2D$ coordenadas canônicas e um conjunto \mathcal{S}_0 de parâmetro a outro hamiltoniano H_c com $2(D - N)$ coordenadas canônicas e um conjunto \mathcal{S}_c de parâmetros, nós normalmente encontramos dois desafios: encontrar a transformação canônica correta e os vínculos corretos.

[¶]Na notação que estamos usando, $(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j})$ representa uma matrix formada pelos elementos $\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}$ na i -ésima linha e j -ésima coluna.

Nesta seção, apresentaremos um método prático para obter o conjunto de vínculos desejados.

Na seção anterior, nós mostramos que podemos começar com um conjunto bastante geral de vínculos canônicos, desde que as condições (5.34) e $\det(\{\phi, \phi\}) \neq 0$ sejam satisfeitas. Assim, vamos selecionar N pares de coordenadas canônicas de H_0 . Podemos renomear estas coordenadas sem perda de generalidade, tal que estes pares formem o conjunto $(q, p)_c \equiv (q_{D-N+1}, \dots, q_D, p_{D-N+1}, \dots, p_D)$. Agora vamos considerar um ansatz na forma polinomial para os $2N$ vínculos canônicos

$$\begin{aligned}\phi_k &= q_{D-N+k} + \mathcal{F}_k(q_1, \dots, q_{D-N}, p_1, \dots, p_{D-N}, t) = 0 \\ \phi_{k+N} &= p_{D-N+k} + \mathcal{G}_k(q_1, \dots, q_{D-N}, p_1, \dots, p_{D-N}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k &= \sum_{r_1=0}^{R_1} \dots \sum_{r_{D-N}=0}^{R_{D-N}} \sum_{s_1=0}^{S_1} \dots \sum_{s_{D-N}=0}^{S_{D-N}} a_{k;r_1, \dots, r_{D-N}, s_1, \dots, s_{D-N}}(t) \prod_{l=1}^{D-N} q_l^{r_l} p_l^{s_l} \\ \mathcal{G}_k &= \sum_{r_1=0}^{R_1} \dots \sum_{r_{D-N}=0}^{R_{D-N}} \sum_{s_1=0}^{S_1} \dots \sum_{s_{D-N}=0}^{S_{D-N}} b_{k;r_1, \dots, r_{D-N}, s_1, \dots, s_{D-N}}(t) \prod_{l=1}^{D-N} q_l^{r_l} p_l^{s_l},\end{aligned}$$

$a_{k;r_1, \dots, r_{D-N}, s_1, \dots, s_{D-N}}(t)$ e $b_{k;r_1, \dots, r_{D-N}, s_1, \dots, s_{D-N}}(t)$ são coeficientes indeterminados, cujo conjunto chamaremos de \mathcal{U} . Os valores R_j e S_j são escolhidos. Se impusermos que os coeficientes indeterminados de ϕ_k sejam tais que as condições (5.34) e $\det(\{\phi, \phi\}) \neq 0$ sejam satisfeitas, nós podemos construir o hamiltoniano (5.28). As equações de movimento para q_j e p_j (para $j = 1, \dots, D - N$) obtidas de (5.32) precisam ser equivalentes às equações obtidas eliminando as coordenadas canônicas $(q, p)_c$ de H_0 , isto é

$$\dot{q}_j = \{q_j, \mathcal{H}\} \approx \{q_j, H_T\}^D, \quad \dot{p}_j = \{p_j, \mathcal{H}\} \approx \{p_j, H_T\}^D,$$

sendo $\mathcal{H} = H_0|_{\substack{q_{D-N+k} = -\mathcal{F}_k \\ p_{D-N+k} = -\mathcal{G}_k}}$. Portanto, afim de determinarmos os elementos de \mathcal{U} , precisamos comparar \mathcal{H} com H_c tal que

$$\mathcal{H} - H_c + g(t) = \sum_{r_1=0} \dots \sum_{r_{D-N}=0} \sum_{s_1=0} \dots \sum_{s_{D-N}=0} \Lambda_{k;r_1, \dots, r_{D-N}, s_1, \dots, s_{D-N}}(\mathcal{U}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_c, t) \prod_{l=1}^{D-N} q_l^{r_l} p_l^{s_l} = 0 \quad (5.38)$$

onde $g(t)$ é um termo dependente apenas de t que não altera as equações de movimento. Embora o termo $g(t)$ não seja importante para a forma particular dos vínculos, ele é crucial para ignorarmos o termo independente das coordenadas canônicas. As projeções sobre as coordenadas canônicas, isto é

$$\Lambda_{k;r_1, \dots, r_{D-N}, s_1, \dots, s_{D-N}}(\mathcal{U}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_c, t) = 0, \quad (5.39)$$

formam um sistema de equações algébricas dependentes dos coeficientes indeterminados e dos parâmetros. Normalmente, o sistema (5.39) possui mais equações do que coeficientes indeterminados; logo, precisamos resolver (5.39) em dois passos. Primeiro determinamos todos os elementos de \mathcal{U} e $g(t)$. As equações restantes formarão um sistema menor dependente apenas dos parâmetros e de t , isto é

$$\tilde{\Lambda}_{k;r_1,\dots,r_{D-N},s_1,\dots,s_{D-N}}(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_c, t) = \sum_m \tilde{\Lambda}_{k;r_1,\dots,r_{D-N},s_1,\dots,s_{D-N}}^{(m)}(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_c) t^m = 0,$$

de modo que as projeções em todas as potências de t formam o sistema algébrico

$$\tilde{\Lambda}_{k;r_1,\dots,r_{D-N},s_1,\dots,s_{D-N}}^{(m)}(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_c) = 0. \quad (5.40)$$

Resolvendo o sistema (5.40), podemos determinar as relações entre os parâmetros \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_c . Se os sistemas (5.39) e (5.40) não puderem ser resolvidos, significa que não existe um conjunto de vínculos na forma proposta que possa relacionar H_0 e H_c . Em tal caso, deve-se considerar um ansatz diferente ou uma transformação canônica conveniente para H_0 .

5.3 Do modelo 4-bósons ao modelo PIII-PV simétrico

Nesta seção, mostraremos que o modelo 4-bósons pode ser reduzido ao modelo simétrico PIII-PV, cuja Hamiltoniana é

$$H_c = \frac{1}{t} \left[-q_1 p_1 (1 - \alpha_0 - \alpha_2 + C_0 C_1 t + C_1 p_1) + q_1^2 p_1 (C_0 t + p_1) + (\alpha_1 C_1 - C_0 \epsilon_0) p_1 + (C_0 \alpha_2 - C_1 \epsilon_1) t q_1 \right], \quad (5.41)$$

através da imposição de vínculos apropriados.

O modelo bi-dimensional 4-bósons é dado pelos campos $e_i = e_i(x, t)$ e $c_i = c_i(x, t)$, para $i = 1, 2$, e possui um Lax pseudo-diferencial dado por

$$L = (D - e_2)(D - e_1 - c_2)(D - c_1 - c_2)(D - e_1 - c_1 - c_2)^{-1}(D - e_2 - c_2)^{-1},$$

sendo D operadores diferenciais. Em [42], foi mostrado que este modelo pode se reduzir à equação PV através da imposição de certos vínculos. O sistema de equações deste modelo é

$$\frac{\partial c_1}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c_{1,x} - c_1^2 - 2e_1 c_1 + 2c_{2,x} - 2c_1 c_2 \right) \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-e_{1,x} - e_1^2 - 2e_1 c_1 - 2e_1 c_2 \right) \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c_{2,x} - c_2^2 - 2e_2 c_2 \right) \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-e_{2,x} - e_2^2 - 2e_2 c_2 - 2(e_{1,x} + c_1 e_1) \right) \quad (5.45)$$

Afim de reduzirmos o modelo a uma dimensão, vamos fazer a redução de auto-similaridade

$$z = \frac{x}{\sqrt{t_2}}, \quad c_j(x, t_2) = \frac{\tilde{c}_j(z)}{\sqrt{t_2}}, \quad e_j(x, t_2) = \frac{\tilde{e}_j(z)}{\sqrt{t_2}},$$

de modo que temos o sistema

$$-\frac{z\tilde{c}_1}{2} = \tilde{c}_{1,z} - \tilde{c}_1^2 - 2\tilde{e}_1\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_{2,z} - 2\tilde{c}_1\tilde{c}_2 + k_1 \quad (5.46)$$

$$-\frac{z\tilde{e}_1}{2} = -\tilde{e}_{1,z} - \tilde{e}_1^2 - 2\tilde{e}_1\tilde{c}_1 - 2\tilde{e}_1\tilde{c}_2 + \bar{k}_1 \quad (5.47)$$

$$-\frac{z\tilde{c}_2}{2} = \tilde{c}_{2,z} - \tilde{c}_2^2 - 2\tilde{e}_2\tilde{c}_2 + k_2 \quad (5.48)$$

$$-\frac{z\tilde{e}_2}{2} = -\tilde{e}_{2,z} - \tilde{e}_2^2 - 2\tilde{e}_2\tilde{c}_2 - 2(\tilde{e}_{1,z} + \tilde{c}_1\tilde{e}_1) + \bar{k}_2, \quad (5.49)$$

onde k_1 , k_2 , \bar{k}_1 e \bar{k}_2 são constantes de integrações. Vamos introduzir as variáveis canônicas $\tilde{Y}_1 = \tilde{e}_1 + \tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2$ e $\tilde{Y}_2 = \tilde{e}_2 + \tilde{c}_2$ tal que $\{\tilde{e}_i, \tilde{Y}_j\} = \delta_{ij}$. Esta transformação resulta no sistema

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{1,z} &= -\tilde{e}_1(2\tilde{Y}_1 - \tilde{e}_1 - \frac{z}{2} - 2\tilde{Y}_2 + 2\tilde{e}_2) + \bar{k}_1 \\ \tilde{Y}_{1,z} &= (\tilde{Y}_1 - \frac{z}{2})(\tilde{Y}_1 - 2\tilde{e}_1 - 2\tilde{Y}_2 + 2\tilde{e}_2) + \bar{k}_1 - k_1 \\ \tilde{e}_{2,z} &= -\tilde{e}_2(2\tilde{Y}_2 - \tilde{e}_2 - \frac{z}{2}) + 2\tilde{e}_1(\tilde{Y}_1 - \frac{z}{2}) + \bar{k}_1 + \bar{k}_2 \\ \tilde{Y}_{2,z} &= (\tilde{Y}_2 - \frac{z}{2})(\tilde{Y}_2 - 2\tilde{e}_2) + 2\tilde{e}_1(\tilde{Y}_1 - \frac{z}{2}) + \bar{k}_1 + \bar{k}_2 - k_2 \end{aligned}$$

Este sistema pode ser interpretado como um sistema hamiltoniano, isto é

$$\tilde{e}_{j,z} = \frac{\partial \mathcal{H}_{A_4^{(1)}}}{\partial \tilde{Y}_j}, \quad \tilde{Y}_{j,z} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{A_4^{(1)}}}{\partial \tilde{e}_j}, \quad j = 1, 2$$

com a Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{A_4^{(1)}} &= -\sum_{j=1}^2 \tilde{e}_j(\tilde{Y}_j - \frac{z}{2})(\tilde{Y}_j - \tilde{e}_j) + 2\tilde{e}_1(\tilde{Y}_1 - \frac{z}{2})(\tilde{Y}_2 - \tilde{e}_2) + \bar{k}_1\tilde{Y}_1 + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\tilde{Y}_2 \\ &\quad - (\bar{k}_1 - k_1)\tilde{e}_1 - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2 - k_2)\tilde{e}_2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Além dos vínculos que buscamos nesta seção para reduzir o modelo 4-bósons ao modelo PIII-PV simétrico, também temos a liberdade de fazer uma transformação canônica e de coordenadas sobre os modelos. Estas transformações são importantes, mas requerem um poder computacional muito grande para serem deduzidas de forma sistemática. Portanto, apresentaremos as transformações corretas sem deduzi-las. Assim, considere a transformação canônica

$$\tilde{e}_1(z) = -\frac{\tilde{p}_1(z)}{z}, \quad \tilde{Y}_1(z) = \frac{z}{2} + z\tilde{q}_1(z), \quad \tilde{e}_2(z) = -\frac{\tilde{p}_2(z)}{z}, \quad \tilde{Y}_2(z) = z\tilde{q}_2(z). \quad (5.51)$$

Esta transformação possui uma função geratriz dada por

$$F = F_4(p_1, p_2, Y_1, Y_2, z) + \sum_{j=1}^2 (e_j Y_j - p_j q_j), \quad F_4(p_1, p_2, Y_1, Y_2, z) = \sum_{j=1}^2 \frac{p_j Y_j}{z} - \frac{p_1}{2},$$

tal que as transformações (5.51) são equivalentes ao sistema

$$e_j = -\frac{\partial F_4}{\partial Y_j}, \quad q_j = \frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2.$$

Fazemos também a transformação $z = \sqrt{t}$ e redefinimos $\tilde{q}_j(z) = q_j(t)$ e $\tilde{p}_j(z) = p_j(t)$, de modo que a nova Hamiltoniana se torna

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathcal{H}_{A_4^{(1)}}(\tilde{e}_j = \tilde{e}_j(q_i, p_i, t), \tilde{Y}_j = \tilde{Y}_j(q_i, p_i, t), z = \sqrt{t}) - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^2 q_j p_j - \frac{p_1}{4t} \\ &= \frac{1}{4t} \left[p_1 [2(\bar{k}_1 - k_1) + q_1(t - 2 - 4tq_2 - 4p_2) + 2tq_1^2 - 1] + p_2 [2(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 - k_2) \right. \\ &\quad \left. + 2tq_2^2 - (t + 2)q_2] + t[\bar{k}_1(2q_1 + 2q_2 + 1) + 2\bar{k}_2q_2] + 2q_1p_1^2 + p_2^2(2q_2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

Afim de determinarmos os vínculos corretos que reduzem o modelo 4-bósons ao modelo PIII-PV simétrico, vamos propor o seguinte ansatz para os vínculos:

$$\phi_1 = q_2 + \mathcal{F}_1(q_1, p_1, t) = 0, \quad \phi_2 = p_2 + \mathcal{G}_1(q_1, p_1, t) = 0 \quad (5.53)$$

sendo

$$\mathcal{F}_1(q_1, p_1, t) = \sum_{i,j=0}^1 a_{i,j}(t) q_1^i p_1^j, \quad \mathcal{G}_1(q_1, p_1, t) = \sum_{i,j=0}^1 b_{i,j}(t) q_1^i p_1^j. \quad (5.54)$$

Substituindo estes vínculos em H_0 e comparando com (5.41) por meio da expressão (5.38), temos as seguintes projeções nas coordenadas q_1 e p_1 :

$$\begin{aligned} \Lambda_{00} &= \frac{-a_{00}(2b_{00} + (1 + 2b_{00})(a_{00} + b_{00}t)) + 2a_{00}k_2 + (-2a_{00} + (1 - 2b_{00})t)\bar{k}_1 - (a_{00} + b_{00}t)\bar{k}_2}{4t} \\ &\quad + g(t) = 0 \\ \Lambda_{10} &= -\frac{1}{4t} \left[2a_{00}^2 b_{10} + 2a_{00}((1 + 2b_{00})a_{10} + b_{10}) + a_{00}(1 + 4b_{00})b_{10}t + a_{10}b_{00}(2 + (1 + 2b_{00})t) \right. \\ &\quad \left. + 4t(C_0\alpha_2 - C_1\epsilon_1) + 2((\bar{k}_1 + \bar{k}_2 - k + 2)a_{10} + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)tb_{10} - \bar{k}_1)t \right] = 0 \\ \Lambda_{20} &= -\frac{1}{4t} \left[a_{10}(a_{10} + 2a_{10}b_{00} + 2b_{10} + 4a_{00}b_{10}) + b_{10}(a_{10} + 4a_{10}b_{00} + 2a_{00}b_{10})t \right] = 0 \\ \Lambda_{30} &= -\frac{1}{2t} \left[a_{10}b_{10}(a_{10} + b_{10}t) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{01} &= -\frac{1}{4t} \left[1 + 2a_{01}(a_{00} + b_{00} + 2a_{00}b_{00}) + 2a_{00}(1 + a_{00})b_{01} + (a_{00}b_{01} + b_{00}(a_{01} + 2a_{01}b_{00} \right. \\
&\quad \left. + 4a_{00}b_{01}))t - 2a_{01}k_2 + 2(a_{01} + b_{01}t)\bar{k}_1 + 2(a_{01} + b_{01}t)\bar{k}_2 + 4C_1\alpha_1 - 4C_0\alpha_2 + 2k_1 - 2\bar{k}_1 \right] = 0 \\
\Lambda_{11} &= -\frac{1}{4t} \left[-2 + 2(a_{11}b_{00} + a_{10}b_{01} + a_{01}(a_{10} + 2a_{10}b_{00} + b_{10})) + 2a_{00}^2b_{11} + 2a_{00}(-2 + a_{11} \right. \\
&\quad \left. + 2a_{11}b_{00} + 2a_{10}b_{01} + 2a_{01}b_{10} + b_{11}) - t + a_{00}(4b_{01}b_{10} + b_{11} + 4b_{00}b_{11})t + (a_{10}b_{01} + a_{01}b_{10} \right. \\
&\quad \left. + b_{00}(-4 + a_{11} + 2a_{11}b_{00} + 4a_{10}b_{01} + 4a_{01}b_{10}) - 4C_0C_1)t + 4(\alpha_0 + \alpha_2) - 2a_{11}k_2 + 2(a_{11} \right. \\
&\quad \left. + b_{11}t)(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) \right] = 0 \\
\Lambda_{21} &= -\frac{1}{4t} \left[2a_{10}^2b_{01} + 2a_{10}(-2 + a_{11} + 2a_{11}b_{00} + 2a_{01}b_{10} + b_{11} + 2a_{00}b_{11}) + a_{10}(4b_{01}b_{10} + b_{11} \right. \\
&\quad \left. + 4b_{00}b_{11})t + 2(-1 + a_{01}b_{10} + 2a_{00}b_{11}) + 2C_0)t + a_{11}b_{10}(2 + 4a_{00} + t + 4b_{00}t) \right] = 0 \\
\Lambda_{31} &= -\frac{1}{2t} \left[a_{10}^2b_{11} + a_{11}b_{10}^2t + 2a_{10}b_{10}(a_{11} + b_{11}t) \right] = 0 \\
\Lambda_{02} &= -\frac{1}{4t} \left[a_{01}(a_{01} + 2a_{01}b_{00} + 2b_{01} + 4a_{00}b_{01}) + b_{01}(a_{01} + 4a_{01}b_{00} + 2a_{00}b_{01})t \right] = 0 \\
\Lambda_{12} &= \frac{1}{4t} \left[2 - 2((1 + 2a_{00})a_{11}b_{01} + a_{01}^2b_{10} + a_{01}(-2 + 2a_{11} + 2a_{11}b_{00} + 2a_{10}b_{01} + b_{11} + 2a_{00}b_{11})) \right. \\
&\quad \left. + 4C_1 - (b_{01}(-4 + a_{11} + 4a_{11}b_{00} + 2a_{10}b_{01} + 4a_{01}b_{10}) + (a_{01} + 4a_{01}b_{00} + 4a_{00}b_{01})b_{11})t \right] = 0 \\
\Lambda_{22} &= -\frac{1}{4t} \left[4 + a_{11}^2(1 + 2b_{00}) + 2b_{11}(-2 + 2a_{10}b_{01} + a_{00}b_{11})t + 4a_{01}b_{11}(a_{10} + b_{10}t) + a_{11}(-4 \right. \\
&\quad \left. + 4a_{10}b_{01} + 4a_{01}b_{10} + 4b_{01}b_{10}t + b_{11}(2 + 4a_{00} + t(1 + 4b_{00}))) \right] = 0 \\
\Lambda_{32} &= -\frac{1}{2t} \left[a_{11}^2b_{10} + a_{10}b_{11}^2t + 2a_{11}b_{11}(a_{10} + b_{10}t) \right] = 0 \\
\Lambda_{03} &= -\frac{1}{2t} \left[a_{01}b_{01}(a_{01} + b_{01}t) \right] = 0 \\
\Lambda_{13} &= -\frac{1}{2t} \left[a_{01}^2b_{11} + a_{11}b_{01}^2t + 2a_{01}b_{01}(a_{11} + b_{11}t) \right] = 0 \\
\Lambda_{23} &= -\frac{1}{2t} \left[a_{11}^2b_{01} + a_{01}b_{11}^2t + 2a_{11}b_{11}(a_{01} + b_{01}t) \right] = 0 \\
\Lambda_{33} &= -\frac{1}{2t} \left[a_{11}b_{11}(a_{11} + b_{11}t) \right] = 0
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima, conforme foi explicado em (5.39) e (5.40), com as condições (5.34) e $\det(\{\phi, \phi\}) \neq 0$ sendo satisfeitas, temos duas soluções possíveis que podem ser vistas na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Soluções do sistema $\Lambda_{mn} = 0$ para determinação dos coeficientes dos vínculos

Solução (i)	$a_{00} = -\left(\frac{1}{2} + C_0 C_1\right) + \frac{[3-2\bar{k}_2-6(\alpha_0+\alpha_2)+C_0(4\alpha_0-2)+4C_1\epsilon_1]}{(4C_0-6)t},$ $a_{10} = C_0 - \frac{1}{2}, \quad a_{01} = -\frac{(2C_1+1)}{2t}, \quad a_{11} = \frac{1}{t}$ $b_{00} = 0, \quad b_{10} = 0, \quad b_{01} = 0, \quad b_{11} = 0$ $k_1 = \frac{3+12C_1\alpha_1+8C_0^2\epsilon_0-2C_0(1+6\alpha_2+4C_1(\alpha_1+\alpha_2)+6\epsilon_0)+12C_1\epsilon_1+8C_1^2\epsilon_1-4(C_0+C_1)\bar{k}_2}{4C_0-6}$ $\bar{k}_1 = \frac{4C_1\epsilon_1-4C_0\alpha_2+(1-2C_0)\bar{k}_2}{2C_0-3}$
Solução (ii)	$a_{00} = -\frac{1}{2}, \quad a_{10} = 0, \quad a_{01} = 0, \quad a_{11} = 0$ $b_{00} = \left(\frac{1}{4} - C_0 C_1\right) + \frac{2+k_2-\bar{k}_2-3(\alpha_0+\alpha_2)+C_0(2\alpha_0-1)+2C_1\epsilon_1}{2C_0-3}$ $b_{10} = \left(C_0 - \frac{1}{2}\right)t, \quad b_{01} = -\frac{(2C_1+1)}{2}, \quad b_{11} = 1$ $k_1 = \frac{3+2(1+6(\alpha_1+\epsilon_1))C_1-8C_0C_1(\alpha_1+\alpha_2)-12(\alpha_2+\epsilon_0)C_0+4(C_0+C_1)(k_2-\bar{k}_2)+8C_0^2\epsilon_0+8C_1^2\epsilon_1}{4C_0-6}$ $\bar{k}_1 = \frac{(2C_0-1)(1+2k_2-2\bar{k}_2)-8C_0\alpha_2+8C_1\epsilon_1}{4C_0-6}$

5.4 Parênteses de Dirac para solução (i) da tabela 5.1

Nesta seção, usaremos os coeficientes da solução (i) da tabela 5.1 para obter as equações de movimento do modelo via os parênteses de Dirac (5.33). Substituindo estes coeficientes nos ansatz (5.53)-(5.54), temos

$$\begin{aligned}\phi_1 &= q_2 - \left(\frac{1}{2} + C_0 C_1\right) + \frac{[3 - 2\bar{k}_2 - 6(\alpha_0 + \alpha_2) + C_0(4\alpha_0 - 2) + 4C_1\epsilon_1]}{(4C_0 - 6)t} + q_1 \left(C_0\right. \\ &\quad \left. + \frac{p_1}{t} - \frac{1}{2}\right) - \frac{(2C_1 + 1)p_1}{2t} = 0, \\ \phi_2 &= p_2\end{aligned}$$

sendo os parâmetros dos modelos 4-bósons e PIII-PV simétrico relacionados por

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{1}{4C_0 - 6} \left[3 + 12C_1\alpha_1 + 8C_0^2\epsilon_0 - 2C_0(1 + 6\alpha_2 + 4C_1(\alpha_1 + \alpha_2) + 6\epsilon_0) + 12C_1\epsilon_1 \right. \\ &\quad \left. + 8C_1^2\epsilon_1 - 4(C_0 + C_1)\bar{k}_2 \right] \quad (5.55)\end{aligned}$$

$$\bar{k}_1 = \frac{4C_1\epsilon_1 - 4C_0\alpha_2 + (1 - 2C_0)\bar{k}_2}{2C_0 - 3}. \quad (5.56)$$

Observe que os vínculos ψ_j não são necessários para obter ϕ_j . Entretanto, se quisermos calcular os parênteses de Dirac, precisaremos calculá-los. Lembrando que os vínculos ψ_j foram definidos em (5.25) como

$$\psi_j \equiv \{\phi_j, H_0\} + \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \{\phi_j, \phi_k\} + \frac{\partial \phi_j}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, 2N.$$

Para os vínculos $\phi_j = 0$ que estamos considerando nesta seção, os vínculos $\psi_j = 0$ terão a seguinte forma explícita:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{(2C_0 - 1)}{8} q_1 + \frac{(2C_0 - 1)}{4} q_1^2 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{(1 - 2C_0)}{2} q_1\right) q_2 + \frac{q_2^2}{2} + \frac{1}{t^2} \left(\frac{(1 + 2C_1)}{4} p_1^2\right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 + 2C_1)}{2} p_1 p_2 + (-p_1 + \frac{p_1^2}{2}) q_1 + \frac{(-3 + 2\bar{k}_2 + C_0(2 - 4\alpha_0) + 6(\alpha_0 + \alpha_2) - 4C_1\epsilon_1)}{4C_0 - 6}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(8C_0 - 12)} \left(-3 + 2\bar{k}_2 - 8C_0^2\epsilon_0 + 2C_0(1 + 2\alpha_2 + C_1(2 + 4\alpha_1 + 4\alpha_2) + 6\epsilon_0) - 2C_1(3\right. \\ &\quad \left. - 2\bar{k}_2 + 6\alpha_1 + 2\epsilon_1 + 4C_1\epsilon_1)\right) p_1 + \frac{1}{t} \left(\frac{(2C_1 + 1)}{8} p_1 - \frac{q_1^2 p_1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{(1 - 2C_0)}{2} q_1\right) p_2\right) \\ &\quad + \left((-1 + C_0 + C_1) p_1 + \frac{(-3 - 2\bar{k}_2 + 4C_0(2 - C_0 + \bar{k}_2 + 2\alpha_2) - 8C_1\epsilon_1)}{8C_0 - 12}\right) q_1 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} - \frac{(1 + 2C_1)}{2} p_1 + p_2\right) q_2 + \frac{1}{(4C_0 - 6)} \left((3 - 2C_0)k_2 - \bar{k}_2 + 3C_1\alpha_1 - 4C_0^3\epsilon_0\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2C_0^2(\alpha_2 + 2C_1(\alpha_1 + \alpha_2) + 4\epsilon_0) + C_1(7 + 6C_1)\epsilon_1 - C_0(7\alpha_2 + 3\epsilon_0 + 2C_1(4\alpha_1 + 3\alpha_2 \\
& + \epsilon_1 + 2C_1\epsilon_1))) + \lambda_2 = 0 \\
\psi_2 & = \frac{p_2}{4} + p_1q_1 - p_2q_2 + \frac{p_2(1-p_2)}{2t} + \frac{(\bar{k}_2 + 2C_0\alpha_2 - 2C_1\epsilon_1)}{2C_0 - 3} - \lambda_1 = 0
\end{aligned}$$

Para calcular (5.32), nós também precisamos da matrix $(\{\Phi, \Phi\})^{-1}$, cujos elementos são:

$$\begin{aligned}
(\{\Phi, \Phi\})_{11}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{12}^{-1} & = \frac{1}{8t^3(-3 + 2C_0)}(2(-3 + 2C_0)p_1^2(4tC_1^2 - 6C_1p_2 - t(1 + 2q_1) - p_2(3 + 2q_1)) \\
& + p_1(4(-3 + 2C_0)(1 + 2C_1)p_2^2 - 4t(-t(3 - 8C_0 + 4C_0^2)(1 + 2C_1)q_1 + t(-3 \\
& + 2C_0)q_1^2 + 2C_0\alpha_2 + 6C_0\epsilon_0 - 4C_0^2\epsilon_0 - 4C_1^2\epsilon_1 + \bar{k}_2 + 2C_1((-3 + 2C_0)\alpha_1 + 2C_0\alpha_2 \\
& - \epsilon_1 + \bar{k}_2)) - p_2(6 + 15t + 24tq_1 - 12tq_1^2 + 12tq_2 + 16C_0^2(t + 2tC_1 + tq_1 - \epsilon_0) \\
& + 2C_0(-2 - 17t + 8tC_1^2 - 20tq_1 + 4tq_1^2 - 4tq_2 - 2C_1(2 + 15t + 4tq_1 + 4tq_2 - 4\alpha_1 \\
& - 4\alpha_2) + 4\alpha_2 + 12\epsilon_0) - 8C_1^2(3t + 2\epsilon_1) + 4\bar{k}_2 + 2C_1(6 + 9t + 12tq_1 + 12tq_2 - 12\alpha_1 \\
& - 4\epsilon_1 + 4\bar{k}_2))) + t(4(3 - 8C_0 + 4C_0^2)p_2^2(1 + 2C_1 - q_1) + 2tq_1(3t + 3tq_1 \\
& + 8tC_0^3q_1 - 12tq_2 - 4tC_0^2(-1 + 3q_1 + 4q_2) - 8C_1\epsilon_1 - 2\bar{k}_2 + C_0(-2tq_1 \\
& + 4(-2t + 8tq_2 + 2\alpha_2 + \bar{k}_2))) + p_2(-3t + 6q_1 - 15tq_1 + 18tq_1^2 + 12tq_2 - 12tq_1q_2 \\
& - 16C_0^3(tq_1 - \epsilon_0) - 4C_0^2(t - 6tq_1^2 - 4tq_2 + q_1(-2 - 3t + 4tq_2) + 2\alpha_2 + 2C_1(t \\
& + 4tq_1 - 4tq_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2) + 8\epsilon_0) + 8C_1^2\epsilon_1 - 2C_1(3t - 12tq_2 + 6\alpha_1 - 2\epsilon_1 \\
& + 4q_1(3t + 2\epsilon_1) - 4\bar{k}_2) + 4\bar{k}_2 - 4q_1\bar{k}_2 + 4C_0(2t - 12tq_1^2 - 8tq_2 - \alpha_2 + 3\epsilon_0 \\
& + 4C_1^2\epsilon_1 + 2C_1(2t + 8tq_1 - 8tq_2 + 4\alpha_1 - \alpha_2 + \epsilon_1 - 2\bar{k}_2) - 2\bar{k}_2 + q_1(-4 + 7t \\
& + 8tq_2 + 4\alpha_2 + 2\bar{k}_2)))))) \\
(\{\Phi, \Phi\})_{13}^{-1} & = -p_2 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{14}^{-1} & = \frac{2 + t + (2 + 4C_1)p_1 - 4p_2 - 2tq_1 + 4tC_0q_1 - 4tq_2}{4t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{15}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{16}^{-1} & = -1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{21}^{-1} & = \frac{1}{8t^3(-3 + 2C_0)}(-2(-3 + 2C_0)p_1^2(4tC_1^2 - 6C_1p_2 - t(1 + 2q_1) - p_2(3 + 2q_1)) \\
& + p_1(-4(-3 + 2C_0)(1 + 2C_1)p_2^2 + 4t(-t(3 - 8C_0 + 4C_0^2)(1 + 2C_1)q_1 + t(-3 \\
& + 2C_0)q_1^2 + 2C_0\alpha_2 + 6C_0\epsilon_0 - 4C_0^2\epsilon_0 - 4C_1^2\epsilon_1 + \bar{k}_2 + 2C_1((-3 + 2C_0)\alpha_1 + 2C_0\alpha_2 \\
& - \epsilon_1 + \bar{k}_2)) + p_2(6 + 15t + 24tq_1 - 12tq_1^2 + 12tq_2 + 16C_0^2(t + 2tC_1 + tq_1 - \epsilon_0) \\
& + 2C_0(-2 - 17t + 8tC_1^2 - 20tq_1 + 4tq_1^2 - 4tq_2 - 2C_1(2 + 15t + 4tq_1 + 4tq_2 - 4\alpha_1 \\
& - 4\alpha_2) + 4\alpha_2 + 12\epsilon_0) - 8C_1^2(3t + 2\epsilon_1) + 4\bar{k}_2 + 2C_1(6 + 9t + 12tq_1 + 12tq_2 - 12\alpha_1 \\
& - 4\epsilon_1 + 4\bar{k}_2))) + t(-4(3 - 8C_0 + 4C_0^2)p_2^2(1 + 2C_1 - q_1) - 2tq_1(3t + 3tq_1 + 8tC_0^3q_1 \\
& - 12tq_2 - 4tC_0^2(-1 + 3q_1 + 4q_2) - 8C_1\epsilon_1 - 2\bar{k}_2 + C_0(-2tq_1 + 4(-2t + 8tq_2 + 2\alpha_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{k}_2))) + p_2(3t - 6q_1 + 15tq_1 - 18tq_1^2 - 12tq_2 + 12tq_1q_2 + 16C_0^3(tq_1 - \epsilon_0) + 4C_0^2(t \\
& - 6tq_1^2 - 4tq_2 + q_1(-2 - 3t + 4tq_2) + 2\alpha_2 + 2C_1(t + 4tq_1 - 4tq_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2) \\
& + 8\epsilon_0) - 8C_1^2\epsilon_1 + 2C_1(3t - 12tq_2 + 6\alpha_1 - 2\epsilon_1 + 4q_1(3t + 2\epsilon_1) - 4\bar{k}_2) - 4\bar{k}_2 \\
& + 4q_1\bar{k}_2 - 4C_0(2t - 12tq_1^2 - 8tq_2 - \alpha_2 + 3\epsilon_0 + 4C_1^2\epsilon_1 + 2C_1(2t + 8tq_1 - 8tq_2 \\
& + 4\alpha_1 - \alpha_2 + \epsilon_1 - 2\bar{k}_2) - 2\bar{k}_2 + q_1(-4 + 7t + 8tq_2 + 4\alpha_2 + 2\bar{k}_2)))))) \\
(\{\Phi, \Phi\})_{22}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{23}^{-1} &= \frac{2 + t + (2 + 4C_1)p_1 - 4p_2 - 2tq_1 + 4tC_0q_1 - 4tq_2}{4t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{24}^{-1} &= -\frac{1}{8t^3(-3 + 2C_0)}(15t^2 + 6p_1 + 27tp_1 - 18p_1^2 - 12tp_2 + 12p_1p_2 - 6tq_1 - 21t^2q_1 \\
& + 24tp_1q_1 - 12p_1^2q_1 + 12tp_2q_1 - 18t^2q_1^2 - 12tp_1q_1^2 - 36t^2q_2 + 12tp_1q_2 + 12t^2q_1q_2 \\
& + 16tC_0^3(tq_1 - \epsilon_0) + 4C_0^2(2tC_1(t + 4p_1 - 4p_2 + 4tq_1 - 4tq_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2) + 4p_1(t \\
& + tq_1 - \epsilon_0) + t(t + 4p_2(-1 + q_1) - 6tq_1^2 - 4tq_2 + q_1(-2 - 15t + 4tq_2) + 2\alpha_2 + 8\epsilon_0)) \\
& - 8C_1^2(t\epsilon_1 + p_1(3t + 2\epsilon_1)) - 4t\bar{k}_2 + 4p_1\bar{k}_2 + 4tq_1\bar{k}_2 - 2C_0(-2p_1^2(3 + 2q_1) + p_1(2 \\
& + 21t + 4p_2 + 20tq_1 - 4tq_1^2 + 4tq_2 - 4\alpha_2 - 12\epsilon_0) + 8tC_1^2(-p_1 + \epsilon_1) + 2C_1(-6p_1^2 \\
& + p_1(2 + 19t + 4p_2 + 4tq_1 + 4tq_2 - 4\alpha_1 - 4\alpha_2) + 2t(2t - 8p_2 + 8tq_1 - 8tq_2 \\
& + 4\alpha_1 - \alpha_2 + \epsilon_1 - 2\bar{k}_2)) - 2t(-4t - 8p_2(-1 + q_1) + 12tq_1^2 + 12tq_2 + \alpha_2 - 3\epsilon_0 \\
& + q_1(4 + 17t - 8tq_2 - 4\alpha_2 - 2\bar{k}_2) + 2\bar{k}_2)) + 2C_1(-18p_1^2 + t(3t - 12p_2 - 12tq_2 + 6\alpha_1 \\
& - 2\epsilon_1 + 4q_1(3t + 2\epsilon_1) - 4\bar{k}_2) + p_1(6 + 21t + 12p_2 + 12tq_1 + 12tq_2 - 12\alpha_1 - 4\epsilon_1 \\
& + 4\bar{k}_2))) \\
(\{\Phi, \Phi\})_{25}^{-1} &= 1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{26}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{31}^{-1} &= p_2 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{32}^{-1} &= -\frac{2 + t + (2 + 4C_1)p_1 - 4p_2 - 2tq_1 + 4tC_0q_1 - 4tq_2}{4t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{33}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{34}^{-1} &= -1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{35}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{36}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{41}^{-1} &= -\frac{2 + t + (2 + 4C_1)p_1 - 4p_2 - 2tq_1 + 4tC_0q_1 - 4tq_2}{4t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{42}^{-1} &= \frac{1}{8t^3(-3 + 2C_0)}(15t^2 + 6p_1 + 27tp_1 - 18p_1^2 - 12tp_2 + 12p_1p_2 - 6tq_1 - 21t^2q_1 \\
& + 24tp_1q_1 - 12p_1^2q_1 + 12tp_2q_1 - 18t^2q_1^2 - 12tp_1q_1^2 - 36t^2q_2 + 12tp_1q_2 + 12t^2q_1q_2 \\
& + 16tC_0^3(tq_1 - \epsilon_0) + 4C_0^2(2tC_1(t + 4p_1 - 4p_2 + 4tq_1 - 4tq_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2) + 4p_1(t \\
& + tq_1 - \epsilon_0) + t(t + 4p_2(-1 + q_1) - 6tq_1^2 - 4tq_2 + q_1(-2 - 15t + 4tq_2) + 2\alpha_2 + 8\epsilon_0)) \\
& - 8C_1^2(t\epsilon_1 + p_1(3t + 2\epsilon_1)) - 4t\bar{k}_2 + 4p_1\bar{k}_2 + 4tq_1\bar{k}_2 - 2C_0(-2p_1^2(3 + 2q_1) + p_1(2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 21t + 4p_2 + 20tq_1 - 4tq_1^2 + 4tq_2 - 4\alpha_2 - 12\epsilon_0) + 8tC_1^2(-p_1 + \epsilon_1) + 2C_1(-6p_1^2 \\
& + p_1(2 + 19t + 4p_2 + 4tq_1 + 4tq_2 - 4\alpha_1 - 4\alpha_2) + 2t(2t - 8p_2 + 8tq_1 - 8tq_2 + 4\alpha_1 \\
& - \alpha_2 + \epsilon_1 - 2\bar{k}_2)) - 2t(-4t - 8p_2(-1 + q_1) + 12tq_1^2 + 12tq_2 + \alpha_2 - 3\epsilon_0 + q_1(4 + 17t \\
& - 8tq_2 - 4\alpha_2 - 2\bar{k}_2) + 2\bar{k}_2)) + 2C_1(-18p_1^2 + t(3t - 12p_2 - 12tq_2 + 6\alpha_1 - 2\epsilon_1 \\
& + 4q_1(3t + 2\epsilon_1) - 4\bar{k}_2) + p_1(6 + 21t + 12p_2 + 12tq_1 + 12tq_2 - 12\alpha_1 - 4\epsilon_1 + 4\bar{k}_2))) \\
(\{\Phi, \Phi\})_{43}^{-1} & = 1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{44}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{45}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{46}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{51}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{52}^{-1} & = -1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{53}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{54}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{55}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{56}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{61}^{-1} & = 1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{62}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{63}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{64}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{65}^{-1} & = 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{66}^{-1} & = 0
\end{aligned}$$

Assim, podemos calcular computacionalmente os parênteses de Dirac (5.33) usando os elementos da matriz $(\{\Phi, \Phi\})^{-1}$ acima, as expressões (5.55) e (5.56), além do conjunto de vínculos $\Phi = (\pi_1, \pi_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = 0$ para eliminar as coordenadas $q_2, p_2, \lambda_1, \lambda_2, \pi_1$ e π_2 . Desta forma, as equações de movimento são:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 \approx \{q_1, H_0\}^D & = \frac{1}{t} \left(-C_0C_1tq_1 - 2C_1q_1p_1 - (1 - \alpha_0 - \alpha_2)q_1 + q_1^2(C_0t + 2p_1) + \alpha_1C_1 \right. \\
& \left. - \epsilon_0C_0 \right) \tag{5.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 \approx \{p_1, H_0\}^D & = \frac{1}{t} \left(C_0C_1tp_1 - 2C_0tq_1p_1 + (1 - \alpha_0 - \alpha_2)p_1 + p_1^2(C_1 - 2q_1) + (C_1\epsilon_1 \right. \\
& \left. - C_0\alpha_2)t \right) \tag{5.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_2 \approx \{q_2, H_0\}^D & = \frac{1}{2t^2} \left(C_1(1 + 2C_1)p_1^2 + q_1^2t(2(1 - C_0)p_1t + C_0(1 - 2C_0)t^2) \right. \\
& \left. + p_1(C_0C_1(1 + 2C_1)t - (1 + 2C_1)\alpha_0 - \alpha_2 - 2C_1(\alpha_1 + \alpha_2) + 2C_0\epsilon_0) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_1(-2(1+C_1)p_1^2 + C_0(2C_0-1)C_1t^2 + 2p_1(1-(C_0+C_1)t) + t(-1 \\
& - 2C_0(\alpha_0-1) + \alpha_0 + \alpha_2 - 2C_1\epsilon_1)) + t[C_0(-\alpha_2 + (2C_0-1)\epsilon_0) + 2C_1^2\epsilon_1 \\
& + C_1(\alpha_1 - 2C_0(\alpha_1 + \alpha_2) + \epsilon_1)] \\
& + \frac{(3 - 2\bar{k}_2 - 6\alpha_0 + C_0(4\alpha_0 - 2) - 6\alpha_2 + 4C_1\epsilon_1)}{2C_0 - 3}
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\dot{p}_2 \approx \{p_2, H_0\}^D = 0 \tag{5.60}$$

$$\dot{\pi}_1 \approx \{\pi_1, H_0\}^D = 0 \tag{5.61}$$

$$\dot{\pi}_2 \approx \{\pi_2, H_0\}^D = 0 \tag{5.62}$$

O sistema para q_1 e p_1 é o mesmo sistema canônico obtido a partir da Hamiltoniana do modelo PIII-PV simétrico. Desta forma, nós conectamos o modelo 4-bósons com o modelo PIII-PV simétrico.

5.5 Parênteses de Dirac para solução (ii) da tabela 5.1

Nesta seção, usaremos os coeficientes da solução (ii) da tabela 5.1 para obter as equações de movimento do modelo. Substituindo estes coeficientes nos ansatz (5.53)-(5.54), temos

$$\begin{aligned}
\phi_1 & = q_2 - \frac{1}{2} = 0 \\
\phi_2 & = p_2 + \left(\frac{1}{4} - C_0C_1\right) + \frac{2 + k_2 - \bar{k}_2 - 3(\alpha_0 + \alpha_2) + C_0(2\alpha_0 - 1) + 2C_1\epsilon_1}{2C_0 - 3} \\
& + q_1 \left(\left(C_0 - \frac{1}{2}\right)t + p_1 \right) - \frac{(2C_1 + 1)p_1}{2} = 0
\end{aligned}$$

sendo os parâmetros dos modelos 4-bósons e PIII-PV simétrico relacionados por

$$\begin{aligned}
k_1 & = \frac{1}{4C_0 - 6} \left(3 + 2(1 + 6(\alpha_1 + \epsilon_1))C_1 - 8C_0C_1(\alpha_1 + \alpha_2) - 12(\alpha_2 + \epsilon_0)C_0 \right. \\
& \left. + 4(C_0 + C_1)(k_2 - \bar{k}_2) + 8C_0^2\epsilon_0 + 8C_1^2\epsilon_1 \right)
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\bar{k}_1 = \frac{(2C_0 - 1)(1 + 2k_2 - 2\bar{k}_2) - 8C_0\alpha_2 + 8C_1\epsilon_1}{4C_0 - 6} \tag{5.64}$$

Para os vínculos $\phi_j = 0$ que estamos considerando nesta seção, os vínculos $\psi_j = 0$ terão a seguinte forma explicita:

$$\begin{aligned}
\psi_1 & = -\frac{p_2}{2t} - \frac{p_1q_1}{t} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2t} + \frac{p_2}{t}\right)q_2 + \frac{q_2^2}{2} + \frac{1 - 2C_0 - 4k_2 + 8C_0\alpha_2 - 8C_1\epsilon_1 + 4\bar{k}_2}{t(12 - 8C_0)} \\
& + \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 = & \frac{(1+2C_1)p_1^2}{4t} - \frac{p_2^2}{2t} + \left(\frac{1}{4}t(-1+2C_0) - \frac{p_1}{2}\right)q_1^2 + p_2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2t} - \frac{(1+2C_1)p_1}{2t}\right. \\
& + \left.\left(\frac{1}{2} - C_0\right)q_1\right) + \left(\left(-\frac{1}{2} - C_1\right)p_1 - p_2 + t\left(\frac{1}{2} - C_0\right)q_1\right)q_2 + \frac{1}{-6+4C_0}(-1+k_2+3C_1\alpha_1 \\
& - 4C_0^3\epsilon_0 + 2C_0^2(\alpha_2 + 2C_1(-1+\alpha_1+\alpha_2) + 4\epsilon_0) - C_1\epsilon_1 + 6C_1^2\epsilon_1 - C_0(2k_2 - \alpha_2 + 3\epsilon_0 \\
& + 4C_1^2\epsilon_1 + 2C_1(-3+4\alpha_1+3\alpha_2+\epsilon_1)) + 2\bar{k}_2) + p_1\left(\frac{1}{8}(1+2C_1) + \frac{1}{t(-6+4C_0)}(1-k_2\right. \\
& - 4C_0^2\epsilon_0 + C_0(-1+2\alpha_2 + C_1(-2+4\alpha_1+4\alpha_2) + 6\epsilon_0) - 4C_1^2\epsilon_1 - 2C_1(-1+k_2+3\alpha_1 \\
& + \epsilon_1 - \bar{k}_2) + \bar{k}_2)) + q_1\left(\frac{1}{8}t(-1+2C_0) + (1+C_0+C_1)p_1\right. \\
& + \left.\frac{2+2C_0^2+k_2-4C_1\epsilon_1-\bar{k}_2+C_0(-5-2k_2+4\alpha_2+2\bar{k}_2)}{-6+4C_0}\right) \\
& + \left.\frac{p_1^2}{2t}\right) - \lambda_1 = 0
\end{aligned}$$

Os elementos da matrix $(\{\Phi, \Phi\})^{-1}$ serão:

$$\begin{aligned}
(\{\Phi, \Phi\})_{11}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{12}^{-1} &= \frac{1}{16t^2(-3+2C_0)}(2(-3+2C_0)p_1^2(1+8C_1^2+C_1(6-12q_2)-6q_2-2q_1(1 \\
& + 2q_2)) + t(2+3t+4C_1+6tC_1+4k_2+8C_1k_2-12p_2-24C_1p_2-4q_1 \\
& + 15tq_1+24tC_1q_1+4k_2q_1+12p_2q_1-6tq_1^2-4q_2-18tq_2-8C_1q_2-36tC_1q_2 \\
& - 8k_2q_2-16C_1k_2q_2+24p_2q_2+48C_1p_2q_2+16q_1q_2-18tq_1q_2-48tC_1q_1q_2 \\
& + 8k_2q_1q_2-24p_2q_1q_2+36tq_1^2q_2+24tq_2^2+48tC_1q_2^2-24tq_1q_2^2+12C_1\alpha_1 \\
& - 24C_1q_2\alpha_1+16C_0^3(2tq_1^2+q_1(t-2tq_2))+(-1+2q_2)\epsilon_0)+4C_0^2(6tq_1^2(-3+2q_2) \\
& + 4p_2(1+2C_1-q_1)(-1+2q_2)-q_1(-1+2q_2)(-2+t(-3+8C_1+4q_2)) \\
& + (-1+2q_2)(t(1+2C_1)(-1+4q_2)-2(\alpha_2+2C_1(\alpha_1+\alpha_2)+4\epsilon_0))) - 4C_1\epsilon_1 \\
& - 8C_1^2\epsilon_1-16C_1q_1\epsilon_1+8C_1q_2\epsilon_1+16C_1^2q_2\epsilon_1-32C_1q_1q_2\epsilon_1-4\bar{k}_2-8C_1\bar{k}_2 \\
& - 4q_1\bar{k}_2+8q_2\bar{k}_2+16C_1q_2\bar{k}_2-8q_1q_2\bar{k}_2+4C_0(-1-2t+8p_2+3q_1-7tq_1 \\
& - 8p_2q_1+10tq_1^2+2q_2+12tq_2-16p_2q_2-10q_1q_2+6tq_1q_2+16p_2q_1q_2 \\
& - 24tq_1^2q_2-16tq_2^2+16tq_1q_2^2-2k_2(1+q_1-2q_2+2q_1q_2)+\alpha_2+4q_1\alpha_2 \\
& - 2q_2\alpha_2+8q_1q_2\alpha_2-3\epsilon_0+6q_2\epsilon_0+4C_1^2(-1+2q_2)\epsilon_1+2C_1(-1+2q_2)(1 \\
& + 2t+2k_2-8p_2+8tq_1-8tq_2+4\alpha_1-\alpha_2+\epsilon_1-2\bar{k}_2)+2\bar{k}_2+2q_1\bar{k}_2 \\
& - 4q_2\bar{k}_2+4q_1q_2\bar{k}_2)) + p_1(8+3t+4k_2-36p_2+48tq_1+12tq_1^2-8q_2-18tq_2 \\
& + 8k_2q_2-24p_2q_2-48tq_1q_2+24tq_1^2q_2-24tq_2^2+16C_0^2(t(1+3q_1+C_1(2 \\
& + 4q_1-4q_2)-2q_2-2q_1q_2)+\epsilon_0+2q_2\epsilon_0)-2C_0(2+13t-12p_2+52tq_1 \\
& + 4tq_1^2-4q_2-30tq_2-8p_2q_2-40tq_1q_2+8tq_1^2q_2-8tq_2^2+8tC_1^2(-1+2q_2) \\
& - 2C_1(-2-11t-36tq_1+8tq_2^2+4p_2(3+2q_2)-4\alpha_1+q_2(4+26t+8tq_1 \\
& - 8\alpha_1-8\alpha_2)-4\alpha_2)+4\alpha_2+8q_2\alpha_2+12\epsilon_0+24q_2\epsilon_0)+8C_1^2(-3t+6tq_2 \\
& + 2\epsilon_1+4q_2\epsilon_1)-4\bar{k}_2-8q_2\bar{k}_2-2C_1(-8+3t+36p_2-36tq_1+8q_2+6tq_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 24p_2q_2 + 24tq_1q_2 + 24tq_2^2 - 4k_2(1 + 2q_2) - 12\alpha_1 - 24q_2\alpha_1 - 4\epsilon_1 - 8q_2\epsilon_1 \\
& + (4 + 8q_2)\bar{k}_2))) \\
(\{\Phi, \Phi\})_{13}^{-1} &= \frac{1}{8t(-3 + 2C_0)}(-2(-3 + 2C_0)p_1^2(3 + 6C_1 + 2q_1) + p_1(-4 + 21t + 4k_2 \\
& - 12p_2 - 24tq_1 + 12tq_1^2 - 12tq_2 - 16C_0^2(t + 2tC_1 + tq_1 - \epsilon_0) - 2C_0(-2 - 5t \\
& + 8tC_1^2 - 4p_2 - 20tq_1 + 4tq_1^2 - 4tq_2 - 2C_1(2 + 4p_2 + t(3 + 4q_1 + 4q_2) - 4\alpha_1 \\
& - 4\alpha_2) + 4\alpha_2 + 12\epsilon_0) + 8C_1^2(3t + 2\epsilon_1) + C_1(-8 + 54t + 8k_2 - 24p_2 - 24tq_1 \\
& - 24tq_2 + 24\alpha_1 + 8\epsilon_1 - 8\bar{k}_2) - 4\bar{k}_2) + t(-2 - 3t - 4k_2 + 36p_2 + 8q_1 - 27tq_1 \\
& + 4k_2q_1 - 12p_2q_1 + 18tq_1^2 + 12tq_2 - 12tq_1q_2 - 16C_0^3(tq_1 - \epsilon_0) - 4C_0^2(t + 4p_2(-1 \\
& + q_1) - 2q_1 + tq_1 - 6tq_1^2 - 4tq_2 + 4tq_1q_2 + 2\alpha_2 + 2C_1(t - 4p_2 + 4tq_1 - 4tq_2 \\
& + 2\alpha_1 + 2\alpha_2) + 8\epsilon_0) + 8C_1^2\epsilon_1 - 2C_1(2 + 3t + 4k_2 - 12p_2 + 12tq_1 - 12tq_2 + 6\alpha_1 \\
& - 2\epsilon_1 + 8q_1\epsilon_1 - 4\bar{k}_2) + 4\bar{k}_2 - 4q_1\bar{k}_2 + 4C_0(1 + 2t - 12p_2 - 2k_2(-1 + q_1) - 5q_1 \\
& + 15tq_1 + 8p_2q_1 - 12tq_1^2 - 8tq_2 + 8tq_1q_2 - \alpha_2 + 4q_1\alpha_2 + 3\epsilon_0 + 4C_1^2\epsilon_1 + 2C_1(1 \\
& + 2t + 2k_2 - 8p_2 + 8tq_1 - 8tq_2 + 4\alpha_1 - \alpha_2 + \epsilon_1 - 2\bar{k}_2) - 2\bar{k}_2 + 2q_1\bar{k}_2))) \\
(\{\Phi, \Phi\})_{14}^{-1} &= \frac{2 + t - 2(1 + 2C_1)p_1 - 4p_2 + 2tq_1 - 4tC_0q_1 - 4tq_2}{4t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{15}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{16}^{-1} &= -1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{21}^{-1} &= \frac{1}{16t^2(-3 + 2C_0)}(-2(-3 + 2C_0)p_1^2(1 + 8C_1^2 + C_1(6 - 12q_2) - 6q_2 - 2q_1(1 + 2q_2)) \\
& - t(2 + 3t + 4C_1 + 6tC_1 + 4k_2 + 8C_1k_2 - 12p_2 - 24C_1p_2 - 4q_1 + 15tq_1 + 24tC_1q_1 \\
& + 4k_2q_1 + 12p_2q_1 - 6tq_1^2 - 4q_2 - 18tq_2 - 8C_1q_2 - 36tC_1q_2 - 8k_2q_2 - 16C_1k_2q_2 \\
& + 24p_2q_2 + 48C_1p_2q_2 + 16q_1q_2 - 18tq_1q_2 - 48tC_1q_1q_2 + 8k_2q_1q_2 - 24p_2q_1q_2 + 36tq_1^2q_2 \\
& + 24tq_2^2 + 48tC_1q_2^2 - 24tq_1q_2^2 + 12C_1\alpha_1 - 24C_1q_2\alpha_1 + 16C_0^3(2tq_1^2 + q_1(t \\
& - 2tq_2) + (-1 + 2q_2)\epsilon_0) + 4C_0^2(6tq_1^2(-3 + 2q_2) + 4p_2(1 + 2C_1 - q_1)(-1 \\
& + 2q_2) - q_1(-1 + 2q_2)(-2 + t(-3 + 8C_1 + 4q_2)) + (-1 + 2q_2)(t(1 + 2C_1) \\
& (-1 + 4q_2) - 2(\alpha_2 + 2C_1(\alpha_1 + \alpha_2) + 4\epsilon_0))) - 4C_1\epsilon_1 - 8C_1^2\epsilon_1 - 16C_1q_1\epsilon_1 \\
& + 8C_1q_2\epsilon_1 + 16C_1^2q_2\epsilon_1 - 32C_1q_1q_2\epsilon_1 - 4\bar{k}_2 - 8C_1\bar{k}_2 - 4q_1\bar{k}_2 + 8q_2\bar{k}_2 \\
& + 16C_1q_2\bar{k}_2 - 8q_1q_2\bar{k}_2 + 4C_0(-1 - 2t + 8p_2 + 3q_1 - 7tq_1 - 8p_2q_1 + 10tq_1^2 \\
& + 2q_2 + 12tq_2 - 16p_2q_2 - 10q_1q_2 + 6tq_1q_2 + 16p_2q_1q_2 - 24tq_1^2q_2 - 16tq_2^2 \\
& + 16tq_1q_2^2 - 2k_2(1 + q_1 - 2q_2 + 2q_1q_2) + \alpha_2 + 4q_1\alpha_2 - 2q_2\alpha_2 + 8q_1q_2\alpha_2 \\
& - 3\epsilon_0 + 6q_2\epsilon_0 + 4C_1^2(-1 + 2q_2)\epsilon_1 + 2C_1(-1 + 2q_2)(1 + 2t + 2k_2 - 8p_2 + 8tq_1 \\
& - 8tq_2 + 4\alpha_1 - \alpha_2 + \epsilon_1 - 2\bar{k}_2) + 2\bar{k}_2 + 2q_1\bar{k}_2 - 4q_2\bar{k}_2 + 4q_1q_2\bar{k}_2)) + p_1(-8 \\
& - 3t - 4k_2 + 36p_2 - 48tq_1 - 12tq_1^2 + 8q_2 + 18tq_2 - 8k_2q_2 + 24p_2q_2 + 48tq_1q_2 \\
& - 24tq_1^2q_2 + 24tq_2^2 - 16C_0^2(t(1 + C_1(2 + 4q_1 - 4q_2) + q_1(3 - 2q_2) - 2q_2) + \epsilon_0 \\
& + 2q_2\epsilon_0) + 2C_0(2 + 13t - 12p_2 + 52tq_1 + 4tq_1^2 - 4q_2 - 30tq_2 - 8p_2q_2 - 40tq_1q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8tq_1^2q_2 - 8tq_2^2 + 8tC_1^2(-1 + 2q_2) - 2C_1(-2 - 11t - 36tq_1 + 8tq_2^2 + 4p_2(3 + 2q_2)) \\
& - 4\alpha_1 + q_2(4 + 26t + 8tq_1 - 8\alpha_1 - 8\alpha_2) - 4\alpha_2 + 4\alpha_2 + 8q_2\alpha_2 + 12\epsilon_0 + 24q_2\epsilon_0) \\
& - 8C_1^2(-3t + 2\epsilon_1 + q_2(6t + 4\epsilon_1)) + 4\bar{k}_2 + 8q_2\bar{k}_2 + 2C_1(-8 + 3t + 36p_2 - 36tq_1 \\
& + 8q_2 + 6tq_2 + 24p_2q_2 + 24tq_1q_2 + 24tq_2^2 - 4k_2(1 + 2q_2) - 12\alpha_1 - 24q_2\alpha_1 - 4\epsilon_1 \\
& - 8q_2\epsilon_1 + (4 + 8q_2)\bar{k}_2))) \\
(\{\Phi, \Phi\})_{22}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{23}^{-1} &= \frac{2 + t - 2(1 + 2C_1)p_1 - 4p_2 + 2tq_1 - 4tC_0q_1 - 4tq_2}{4t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{24}^{-1} &= \frac{1 - 2q_2}{2t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{25}^{-1} &= 1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{26}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{31}^{-1} &= \frac{1}{8t(-3 + 2C_0)}(2(-3 + 2C_0)p_1^2(3 + 6C_1 + 2q_1) + p_1(4 - 21t - 4k_2 + 12p_2 \\
& + 24tq_1 - 12tq_1^2 + 12tq_2 + 16C_0^2(t + 2tC_1 + tq_1 - \epsilon_0) + 2C_0(-2 - 5t + 8tC_1^2 \\
& - 4p_2 - 20tq_1 + 4tq_1^2 - 4tq_2 - 2C_1(2 + 4p_2 + t(3 + 4q_1 + 4q_2) - 4\alpha_1 - 4\alpha_2) \\
& + 4\alpha_2 + 12\epsilon_0) - 8C_1^2(3t + 2\epsilon_1) + 4\bar{k}_2 + C_1(8 - 54t - 8k_2 + 24p_2 + 24tq_1 + 24tq_2 \\
& - 24\alpha_1 - 8\epsilon_1 + 8\bar{k}_2)) + t(2 + 3t + 4k_2 - 36p_2 - 8q_1 + 27tq_1 - 4k_2q_1 + 12p_2q_1 \\
& - 18tq_1^2 - 12tq_2 + 12tq_1q_2 + 16C_0^3(tq_1 - \epsilon_0) + 4C_0^2(t + 4p_2(-1 + q_1) - 2q_1 + tq_1 \\
& - 6tq_1^2 - 4tq_2 + 4tq_1q_2 + 2\alpha_2 + 2C_1(t - 4p_2 + 4tq_1 - 4tq_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2) + 8\epsilon_0) \\
& - 8C_1^2\epsilon_1 + 2C_1(2 + 3t + 4k_2 - 12p_2 + 12tq_1 - 12tq_2 + 6\alpha_1 - 2\epsilon_1 + 8q_1\epsilon_1 - 4\bar{k}_2) \\
& - 4\bar{k}_2 + 4q_1\bar{k}_2 - 4C_0(1 + 2t - 12p_2 - 2k_2(-1 + q_1) - 5q_1 + 15tq_1 + 8p_2q_1 - 12tq_1^2 \\
& - 8tq_2 + 8tq_1q_2 - \alpha_2 + 4q_1\alpha_2 + 3\epsilon_0 + 4C_1^2\epsilon_1 + 2C_1(1 + 2t + 2k_2 - 8p_2 + 8tq_1 \\
& - 8tq_2 + 4\alpha_1 - \alpha_2 + \epsilon_1 - 2\bar{k}_2) - 2\bar{k}_2 + 2q_1\bar{k}_2))) \\
(\{\Phi, \Phi\})_{32}^{-1} &= \frac{-2 - t + (2 + 4C_1)p_1 + 4p_2 - 2tq_1 + 4tC_0q_1 + 4tq_2}{4t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{33}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{34}^{-1} &= -1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{35}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{36}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{41}^{-1} &= \frac{-2 - t + (2 + 4C_1)p_1 + 4p_2 - 2tq_1 + 4tC_0q_1 + 4tq_2}{4t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{42}^{-1} &= \frac{2q_2 - 1}{2t} \\
(\{\Phi, \Phi\})_{43}^{-1} &= 1 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{44}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{45}^{-1} &= 0 \\
(\{\Phi, \Phi\})_{46}^{-1} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\{\Phi, \Phi\})_{51}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{52}^{-1} &= -1 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{53}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{54}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{55}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{56}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{61}^{-1} &= 1 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{62}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{63}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{64}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{65}^{-1} &= 0 \\
 (\{\Phi, \Phi\})_{66}^{-1} &= 0
 \end{aligned}$$

Assim, podemos calcular computacionalmente os parênteses de Dirac (5.33) usando os elementos da matriz $(\{\Phi, \Phi\})^{-1}$ acima, as expressões (5.63) e (5.64), além do conjunto de vínculos $\Phi = (\pi_1, \pi_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = 0$ para eliminar as coordenadas $q_2, p_2, \lambda_1, \lambda_2, \pi_1$ e π_2 . Desta forma, as equações de movimento são:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 \approx \{q_1, H_0\}^D &= \frac{1}{t} \left(-C_0 C_1 t q_1 - 2C_1 q_1 p_1 - (1 - \alpha_0 - \alpha_2) q_1 + q_1^2 (C_0 t + 2p_1) + \alpha_1 C_1 \right. \\
 &\quad \left. - \epsilon_0 C_0 \right) \tag{5.65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1 \approx \{p_1, H_0\}^D &= \frac{1}{t} \left(C_0 C_1 t p_1 - 2C_0 t q_1 p_1 + (1 - \alpha_0 - \alpha_2) p_1 + p_1^2 (C_1 - 2q_1) + (C_1 \epsilon_1 \right. \\
 &\quad \left. - C_0 \alpha_2) t \right) \tag{5.66}
 \end{aligned}$$

$$\dot{q}_2 \approx \{q_2, H_0\}^D = 0 \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_2 \approx \{p_2, H_0\}^D &= \frac{1}{4t} \left(-t + 2p_1 + 2(-(p_1 - tq_1)(2p_1 q_1 + \alpha_0 + \alpha_2) + 2tC_0^2(t(C_1 - q_1)q_1 \right. \\
 &\quad + \epsilon_0) + C_0(-t(-2C_1^2 p_1 + q_1(-tq_1 + 2p_1(1 + q_1) + 2\alpha_0) + \alpha_2 + C_1(-p_1 \\
 &\quad + tq_1 + 2(-1 + \alpha_1 + \alpha_2))) - (t - 2p_1)\epsilon_0) + 2C_1^2(p_1^2 + t\epsilon_1) + C_1(p_1^2(1 \\
 &\quad \left. - 2q_1) - 2p_1(-1 + tq_1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + t(\alpha_1 + \epsilon_1 - 2q_1\epsilon_1)) \right) \tag{5.68}
 \end{aligned}$$

$$\dot{\pi}_1 \approx \{\pi_1, H_0\}^D = 0 \tag{5.69}$$

$$\dot{\pi}_2 \approx \{\pi_2, H_0\}^D = 0 \tag{5.70}$$

O sistema para q_1 e p_1 é o mesmo sistema canônico obtido a partir da Hamiltoniana do modelo PIII-PV simétrico. Assim, verificamos o segundo sistema de vínculos que conecta o modelo 4-bósons com o modelo PIII-PV simétrico.

Capítulo 6

Um método para resolver equações diferenciais não-lineares em D dimensões: uma aplicação ao modelo $\lambda\phi^4$.

6.1 Introdução

Nos últimos anos tem havido um grande interesse no desenvolvimento de técnicas que permitem obter soluções de equações diferenciais sem a necessidade de outras propriedades da equação (por exemplo [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 30, 55, 56, 57, 58, 59]). Em [30], foi proposto o método das múltiplas funções exponenciais para encontrar soluções de EDPs sem a necessidade de reduzir o modelo a uma dimensão. Embora este método seja poderoso, ele possui um grande número de parâmetros a ser determinado que costuma inviabilizar o uso do método para certos modelos.

Neste capítulo, apresentaremos um algoritmo mais simples utilizando aproximantes de Padé e aplicaremos ele à equação do modelo $\lambda\phi^4$ com $m \neq 0$. Existem vários artigos generalizando os aproximantes de Padé para funções de várias variáveis [60, 61, 62, 63, 64, 65, 66]. Aqui, focaremos nos aproximantes de Padé homogêneos, introduzidos em [62] (ver também [65]).

O modelo $\lambda\phi^4$ é um dos modelos escalares mais simples em teoria de campos e é definido pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (6.1)$$

sendo que estamos usando a métrica $\eta = (-+++)$ e a notação em que índices

repetidos são somados. A equação de Euler-Lagrange, isto é

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0,$$

aplicada em (6.1) dá origem à equação

$$-\partial_t^2 \phi + \nabla^2 \phi + m^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0. \quad (6.2)$$

Soluções estáticas para o modelo $\lambda \phi^4$ em duas dimensões já foram obtidas em [67] e [68]. Aqui, obteremos algumas soluções para a equação (6.2) representando uma onda viajante e o espalhamento entre duas ondas viajantes num espaço de 4 dimensões. Na seção 6.2, faremos uma introdução ao método dos aproximantes de Padé homogêneos para várias variáveis e apresentaremos uma nova abordagem para se resolver EDPs. A seção 6.3 será dedicada ao modelo $\lambda \phi^4$.

6.2 O método

6.2.1 Aproximantes de Padé homogêneos para várias variáveis

Considere uma função $f(\mathbf{z}) = f(z_1, \dots, z_D)$ regular na origem e com uma expansão de Taylor em $\mathbf{z} = 0$ dada por

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{J}=0}^{\infty} c_{\mathbf{J}} \mathbf{z}^{\mathbf{J}} \equiv \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_D=0}^{\infty} c_{j_1, j_2, \dots, j_D} \prod_{d=1}^D z_d^{j_d}.$$

Os aproximantes de Padé homogêneos para várias variáveis consistem em rearranjar os coeficientes da expansão de Taylor de modo que possamos usar aproximantes de Padé em uma dimensão. Assim, através do mapeamento $\mathbf{z} \rightarrow \xi \mathbf{z}$, a expansão de Taylor pode ser rearranjada como

$$f(\xi \mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{L+M} a_n(\mathbf{z}) \xi^n + \mathcal{O}(\xi^{L+M+1})$$

onde

$$a_n(\mathbf{z}) = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \dots \sum_{j_{D-1}=0}^{n-\sum_{r=1}^{D-2} j_r} c_{j_1, j_2, \dots, j_{D-1}, n-\sum_{r=1}^{D-1} j_r} \left(\prod_{d=1}^{D-1} z_d^{j_d} \right) z_D^{n-\sum_{r=1}^{D-1} j_r}$$

Este arranjo dos termos nos permite calcular os aproximantes de Padé para $f(\xi \mathbf{z})$ usando o parâmetro ξ como variável, isto é

$$[L/M]_{\mathbf{z}}(\xi) \equiv \frac{P_{\mathbf{z},L}(\xi)}{Q_{\mathbf{z},M}(\xi)} = \frac{\sum_{j=0}^L p_j(\mathbf{z}) \xi^j}{1 + \sum_{j=1}^M q_j(\mathbf{z}) \xi^j},$$

onde os coeficientes $p_j(\mathbf{z})$ e $q_j(\mathbf{z})$ são determinados tal que os aproximantes de Padé concordem com $f(\xi\mathbf{z})$ até o grau $L + M$, isto é, $f(\xi\mathbf{z}) = [L/M]_{\mathbf{z}}(\xi) + \mathcal{O}(\xi^{L+M+1})$. Para isso, precisamos resolver o sistema de equações

$$\sum_{r+s=j} a_r(\mathbf{z})q_s(\mathbf{z}) - p_j(\mathbf{z}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, L + M.$$

Este sistema pode ser facilmente resolvido por um programa de computação simbólica. Por fim, os aproximantes de Padé homogêneos para $f(\mathbf{z})$ são obtidos fazendo $f(\mathbf{z}) = f(\xi\mathbf{z}) \Big|_{\xi=1}$.

6.2.2 O ansatz funcional

Considere agora um sistema de N_e equações e N_e campos em um espaço de D dimensões, isto é

$$E_k(x^\alpha, \phi_i, \partial_\alpha \phi_i, \dots; \mathcal{S}_0) = 0, \quad k = 1, \dots, N_e,$$

sendo \mathcal{S}_0 o espaço formado pelo produto cartesiano do conjunto dos parâmetros do sistema. Os índices μ e i no domínio de E_k significam que este sistema depende de todas as dimensões e todos os campos. Suponha que pelo menos uma solução deste sistema possa ser expressa como um funcional de um conjunto de funções $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{N_\rho})$, isto é

$$\phi_i(x^\alpha) = \hat{\phi}_i(\rho_1, \dots, \rho_{N_\rho}), \quad i = 1, \dots, N_e$$

onde $\rho_k = \rho_k(x^\alpha)$ para $k = 1, \dots, N_\rho$. Além disso, suponha que a derivada de todo ρ_k seja conhecida em termos de ρ , isto é

$$\partial_\alpha \rho_k = \mathcal{F}_{\alpha,k}(\rho_1, \dots, \rho_{N_\rho}; \mathcal{S}_1), \quad \mu = 1, \dots, D, \quad k = 1, \dots, N_\rho, \quad (6.3)$$

sendo \mathcal{S}_1 o espaço formado pelo produto cartesiano do conjunto de parâmetros introduzidos por ρ . A escolha de ρ será o primeiro ansatz do algoritmo e gera a transformação

$$E_k(x^\alpha, \phi_i, \partial_\alpha \phi_i, \dots; \mathcal{S}_0) = \hat{E}_k(\rho_k, \hat{\phi}_i, \partial_k \hat{\phi}_i, \dots; \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1) = 0, \quad k = 1, \dots, N_e, \quad (6.4)$$

onde \hat{E}_k será polinomial ou racional em ρ_k , $\hat{\phi}_i$ e suas derivadas. Agora, o sistema (6.4) pode ser trabalhado como um sistema em N_ρ dimensões. Se pelo menos uma solução particular para o conjunto de campos $\hat{\phi}_i$ for regular na origem, então podemos considerar uma expansão de Taylor em várias variáveis em $\rho = 0$, isto é

$$\hat{\phi}_i(\rho) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_\rho}=0}^{\infty} c_{i;j_1,j_2,\dots,j_{N_\rho}} \prod_{d=1}^{N_\rho} \rho_d^{j_d}, \quad i = 1, \dots, N_e \quad (6.5)$$

sendo $c_{i;j_1,j_2,\dots,j_{N_\rho}} = c_{i;j_1,j_2,\dots,j_{N_\rho}}(\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1)$. Observe que a expansão (6.5) pode ser dramaticamente alterada devido alguma combinação entre os parâmetros no espaço formado por $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1$. Portanto, para obter soluções particulares, podemos considerar conjuntos de vínculos sobre os parâmetros, isto é $\psi_i = \psi_i(\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1) = 0$, atuando sobre ρ e $\hat{E}_k(\rho_k, \hat{\phi}_i, \partial_k \hat{\phi}_i, \dots; \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1) = 0$. Quando os vínculos ψ são considerados, a notação $\bar{\rho} \equiv \rho|_{\psi=0}$ será empregada.

Vamos chamar de \mathcal{S}_2 o espaço formado pelo produto cartesiano de todos coeficientes indeterminados $c_{i;j_1,j_2,\dots,j_{N_\rho}}$ e definir $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Agora, podemos usar aproximantes de Padé homogêneos para várias variáveis em $\hat{\phi}_i(\rho)$. Mapeando $\rho \rightarrow \xi\rho$, podemos rearranjar a expansão (6.5) como

$$\hat{\phi}_i(\xi\rho) = \sum_{n=0}^{L_i+M_i} a_{i;n}(\rho)\xi^n + \mathcal{O}(\xi^{L_i+M_i+1}), \quad i = 1, \dots, N_e,$$

$$a_{i;n}(\rho) = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \dots \sum_{j_{N_\rho-1}=0}^{n-\sum_{r=1}^{N_\rho-2} j_r} c_{i;j_1,j_2,\dots,j_{N_\rho-1},n-\sum_{r=1}^{N_\rho-1} j_r} \left(\prod_{d=1}^{N_\rho-1} \rho_d^{j_d} \right) \rho_{N_\rho}^{n-\sum_{r=1}^{N_\rho-1} j_r}$$

Assim, podemos calcular um aproximante de Padé usando o parâmetro ξ como variável afim de obter uma aproximação da solução, isto é

$$\hat{\phi}_i(\xi\rho) = \frac{P_{\rho,L_i}(\xi; \mathcal{S})}{Q_{\rho,M_i}(\xi; \mathcal{S})} + \mathcal{O}(\xi^{L_i+M_i+1}). \quad (6.6)$$

Por fim, podemos usar o segundo ansatz. Vamos assumir que haja um subconjunto $\hat{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$, tal que a expressão (6.6) gere uma solução exata quando $\xi = 1$, isto é

$$\hat{\phi}_i(\rho) = \left. \frac{P_{\rho,L_i}(\xi; \hat{\mathcal{S}})}{Q_{\rho,M_i}(\xi; \hat{\mathcal{S}})} \right|_{\xi=1}. \quad (6.7)$$

Esta idéia foi usada em [59] para um caso mais simples quando $D = N_e = N_\rho = 1$ e $\rho_1 = z$ (onde z era a única variável do modelo). Afim de determinar $\hat{\mathcal{S}}$, vamos substituir (6.7) em (6.4). Isto gera

$$\hat{E}_k(\rho_k, \hat{\phi}_i, \partial_k \hat{\phi}_i, \dots; \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1) = \frac{\sum_{n=0}^{\Lambda} \hat{E}_{k;n}(\hat{\mathcal{S}})}{D_k(\hat{\mathcal{S}})} = 0,$$

$$\hat{E}_{k;n}(\hat{\mathcal{S}}) = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{n-j_1} \dots \sum_{j_{N_\rho-1}=0}^{n-\sum_{r=1}^{N_\rho-2} j_r} \tilde{E}_{k;j_1,j_2,\dots,j_{N_\rho-1},n-\sum_{r=1}^{N_\rho-1} j_r} \left(\prod_{d=1}^{N_\rho-1} \rho_d^{j_d} \right) \rho_{N_\rho}^{n-\sum_{r=1}^{N_\rho-1} j_r}. \quad (6.8)$$

onde Λ é determinado pelas escolhas de L_i , M_i , do conjunto ρ e da equação diferencial em consideração. Portanto, para determinarmos todos os elementos de $\hat{\mathcal{S}}$, precisamos

resolver o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\tilde{E}_{k;j_1,j_2,\dots,j_{N_e}}(\hat{S}) = 0, \quad k = 1, \dots, N_e, \quad n = 0, \dots, \Lambda, \quad j_l = 0, \dots, n - \sum_{r=1}^{l-1} j_r \quad (6.9a)$$

$$D_k(\hat{S}) \neq 0, \quad k = 1, \dots, N_e \quad (6.9b)$$

Para a resolução de (6.9a) pode ser necessario um grande poder computacional dependendo do modelo, mas este sistema algébrico será menor do que o sistema que teríamos obtido usando o método das multiplas funções exponenciais [30].

6.3 Uma aplicação ao modelo $\lambda\phi^4$ em 4 dimensões

Nesta seção, aplicaremos o algoritmo apresentado na seção 6.2.2 para o modelo $\lambda\phi^4$, isto é

$$-\partial_t^2\phi + \nabla^2\phi + m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0, \quad (6.10)$$

usando dois ansatz funcionais diferente:

$$(i) \quad \phi(x^\alpha) = \hat{\phi}(\rho_1), \quad \rho_1 = e^{i(k_{1,0}t + k_{1,1}x + k_{1,2}y + k_{1,3}z)} \quad (6.11)$$

$$(ii) \quad \phi(x^\alpha) = \hat{\phi}(\rho_1, \rho_2), \quad \rho_1 = e^{i(k_{1,0}t + k_{1,1}x + k_{1,2}y + k_{1,3}z)}, \quad \rho_2 = e^{i(k_{2,0}t + k_{2,1}x + k_{2,2}y + k_{2,3}z)} \quad (6.12)$$

Por simplicidade, usaremos a notação $\mathbf{k}_j = (k_{j,1}, k_{j,2}, k_{j,3})$, sendo $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j = k_{i,1}k_{j,1} + k_{i,2}k_{j,2} + k_{i,3}k_{j,3}$.

6.3.1 Ansatz (i)

Primeiramente, considere o ansatz (i) em (6.11). Obviamente, este conjunto para ρ satisfaz a condição (6.3), ou seja

$$\partial_t\rho_1 = ik_{1,0}\rho_1, \quad \partial_x\rho_1 = ik_{1,1}\rho_1, \quad \partial_y\rho_1 = ik_{1,2}\rho_1, \quad \partial_z\rho_1 = ik_{1,3}\rho_1,$$

e dá origem a equação

$$\hat{E}(\rho_1, \hat{\phi}, \partial_{\rho_1}\hat{\phi}, \partial_{\rho_1}^2\hat{\phi}; \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1) \equiv (k_{1,0}^2 - \mathbf{k}_1^2)(\rho_1^2\partial_{\rho_1}^2\hat{\phi} + \rho_1\partial_{\rho_1}\hat{\phi}) + m^2\hat{\phi} + \lambda\hat{\phi}^3 = 0. \quad (6.13)$$

Calculando a expansão de Taylor para $\hat{\phi}$, isto é $\hat{\phi} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\rho_1^j$, vemos que a série pode começar com $c_0 = 0$ ou $c_0 = \frac{i\mu m}{\sqrt{\lambda}}$, sendo $\mu = \pm 1$. Sem a imposição de um

vínculo ψ sobre os parâmetros, esta expansão irá truncar e dará origem as seguintes soluções triviais:

$$\hat{\phi} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\phi} = \frac{i\mu m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mu = \pm 1. \quad (6.14)$$

Entretanto, uma escolha conveniente para ψ nos leva a uma expansão mais interessante. Se for imposto que

$$\psi = -k_{1,0}^2 + \mathbf{k}_1^2 - m^2 = 0 \quad (6.15)$$

sobre a equação (6.13) e as constantes de ρ por meio da eliminação de $k_{1,0}$, nós ficamos com

$$-m^2(\bar{\rho}_1^2 \partial_{\rho_1}^2 \hat{\phi} + \bar{\rho}_1 \partial_{\rho_1} \hat{\phi}) + m^2 \hat{\phi} + \lambda \hat{\phi}^3 = 0, \quad (6.16)$$

sendo $\bar{\rho}_1 = e^{i(\nu\sqrt{(\mathbf{k}_1^2 - m^2)t + k_{1,1}x + k_{1,2}y + k_{1,3}z})}$ e $\nu = \pm 1$. Desta forma, a expansão de $\hat{\phi}$ com $c_0 = 0$ possuirá a forma

$$\hat{\phi} = (c_1 \bar{\rho}_1) \xi + \left(\frac{c_1^3 \lambda}{8m^2} \bar{\rho}_1^3 \right) \xi^3 + \left(\frac{c_1^5 \lambda^2}{64m^4} \bar{\rho}_1^5 \right) \xi^5 + \left(\frac{c_1^7 \lambda^3}{512m^6} \bar{\rho}_1^7 \right) \xi^7 + \dots, \quad m \neq 0 \quad (6.17)$$

enquanto que a expansão com $c_0 = \frac{i\mu m}{\sqrt{\lambda}}$ permanecerá sendo truncada no termo constante, ou seja $\hat{\phi} = \frac{i\mu m}{\sqrt{\lambda}}$.

Usando o aproximante de Padé $[1/1]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$ da expansão (6.17), temos que o ansatz (6.7) será igual a

$$\hat{\phi} = c_1 \bar{\rho}_1, \quad (6.18)$$

cuja substituição em (6.20) nos leva a condição:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1,3}(\hat{S}) &= c_1^3 \lambda = 0, \\ D_1(\hat{S}) &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Aqui, podemos ver que a condição para que (6.18) seja uma solução de (6.16) é $c_1 = 0$ ou $\lambda = 0$, que representa uma solução de vácuo e o limite da equação de Klein-Gordon respectivamente. Agora, vamos considerar os aproximantes de Padé $[2/2]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$. Neste caso, o ansatz (6.7) gera

$$\hat{\phi} = \frac{8c_1 m^2 \bar{\rho}_1}{8m^2 - c_1^2 \lambda \bar{\rho}_1^2}. \quad (6.19)$$

Substituindo (6.19) em (6.16), podemos checar que a expressão (6.19) já é uma solução exata sem a necessidade de condições extras. Nós também obtemos (6.19) se usamos os ansatzes $[3/3]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$, $[4/4]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$ ou $[5/5]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$.

Agora, considere o vínculo

$$\psi = -k_{1,0}^2 + \mathbf{k}_1^2 + 2m^2 = 0.$$

Eliminando $k_{1,0}$, a equação (6.13) fica com a forma

$$2m^2(\bar{\rho}_1^2 \partial_{\bar{\rho}_1}^2 \hat{\phi} + \bar{\rho}_1 \partial_{\bar{\rho}_1} \hat{\phi}) + m^2 \hat{\phi} + \lambda \hat{\phi}^3 = 0, \quad (6.20)$$

sendo $\bar{\rho}_1 = e^{i(\nu \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + 2m^2})t + k_{1,1}x + k_{1,2}y + k_{1,3}z}$ para $\nu = \pm 1$. Usando este vínculo sobre os parâmetros, a expansão de $\hat{\phi}$ quando $c_0 = 0$ trunca no termo constante, enquanto que a expansão com $c_0 = \frac{i\mu m}{\sqrt{\lambda}}$ possui a forma

$$\hat{\phi} = \frac{i\mu m}{\sqrt{\lambda}} + (c_1 \bar{\rho}_1) \xi - \left(\frac{i\mu c_1^2 \sqrt{\lambda}}{2m} \bar{\rho}_1^2 \right) \xi^2 - \left(\frac{c_1^3 \lambda}{4m^2} \bar{\rho}_1^3 \right) \xi^3 + \left(\frac{i\mu c_1^4 \lambda^{3/2}}{8m^3} \bar{\rho}_1^4 \right) \xi^4 + \dots \quad m \neq 0. \quad (6.21)$$

Usando os aproximantes de Padé $[1/1]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$ e $[2/2]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$ da expansão (6.21), o ansatz (6.7) dá origem a

$$\hat{\phi} = [1/1]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1} = \frac{m(c_1 \sqrt{\lambda} \bar{\rho}_1 + 2i\mu m)}{\sqrt{\lambda}(2m + i\mu c_1 \sqrt{\lambda} \bar{\rho}_1)}, \quad (6.22)$$

$$\hat{\phi} = [2/2]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1} = \frac{4c_1 \sqrt{\lambda} m^2 \bar{\rho}_1 + i\mu(4m^3 - c_1^2 \lambda m \bar{\rho}_1^2)}{\sqrt{\lambda}(4m^2 + c_1^2 \lambda \bar{\rho}_1^2)}. \quad (6.23)$$

Ambos (6.22) e (6.23) são soluções exatas sem que seja necessário nenhuma condição extra sobre o espaço de constantes \mathcal{S} . A solução (6.23) também é obtida se consideramos os ansatzes $[3/3]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$, $[4/4]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$ ou $[5/5]_{(\rho_1)}(\xi)|_{\xi=1}$.

6.3.2 Ansatz (ii)

Agora, considere o ansatz (ii) em (6.12). Obviamente, este conjunto de funções para ρ também satisfaz a condição (6.3), ou seja

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_1 &= ik_{1,0} \rho_1, & \partial_x \rho_1 &= ik_{1,1} \rho_1, & \partial_y \rho_1 &= ik_{1,2} \rho_1, & \partial_z \rho_1 &= ik_{1,3} \rho_1, \\ \partial_t \rho_2 &= ik_{2,0} \rho_2, & \partial_x \rho_2 &= ik_{2,1} \rho_2, & \partial_y \rho_2 &= ik_{2,2} \rho_2, & \partial_z \rho_2 &= ik_{2,3} \rho_2, \end{aligned}$$

e dará origem a equação

$$\begin{aligned} \hat{E}(\rho_1, \rho_2, \hat{\phi}, \dots; \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1) &\equiv (k_{1,0}^2 - \mathbf{k}_1^2)(\rho_1^2 \partial_{\rho_1}^2 \hat{\phi} + \rho_1 \partial_{\rho_1} \hat{\phi}) + (k_{2,0}^2 - \mathbf{k}_2^2)(\rho_2^2 \partial_{\rho_2}^2 \hat{\phi} \\ &+ \rho_2 \partial_{\rho_2} \hat{\phi}) + 2(k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_1 \rho_2 \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi} \\ &+ \lambda \hat{\phi}^3 = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Sem que seja imposto nenhum vínculo sobre os parâmetros do ansatz (6.12), a equação (6.24) possuirá apenas as soluções triviais (6.14). No entanto, se impusermos o vínculo

$$\psi_1 = -k_{1,0}^2 + \mathbf{k}_1^2 - m^2 = 0 \quad (6.25)$$

ou

$$\psi_2 = -k_{1,0}^2 + \mathbf{k}_2^2 - m^2 = 0 \quad (6.26)$$

sobre os parâmetros, nós obtemos a solução (6.19) a menos de uma redefinição das constantes arbitrárias. Entretanto, se usarmos os vínculos (6.25) e (6.26) sobre os parâmetros e eliminarmos $k_{1,0}$ e $k_{2,0}$, a equação (6.24) se transforma em

$$-m^2(\rho_1^2 \partial_{\rho_1}^2 \hat{\phi} + \rho_1 \partial_{\rho_1} \hat{\phi} + \rho_2^2 \partial_{\rho_2}^2 \hat{\phi} + \rho_2 \partial_{\rho_2} \hat{\phi}) + 2(k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_1 \rho_2 \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi} + \lambda \hat{\phi}^3 = 0 \quad (6.27)$$

Observe que não eliminamos os termos lineares de $k_{1,0}$ e $k_{2,0}$ por enquanto afim de evitar erros com o sinal da raiz quadrada, mas eles serão substituídos no final. A expansão de Taylor em várias variáveis de (6.27) é

$$\hat{\phi} = (c_{1,0} \bar{\rho}_1 + c_{0,1} \bar{\rho}_2) \xi + \left(\frac{\lambda(c_{1,0}^3 \bar{\rho}_1^3 + c_{0,1}^3 \bar{\rho}_2^3)}{8m^2} - \frac{3\lambda(c_{1,0}^2 c_{0,1} \bar{\rho}_1^2 \bar{\rho}_2 + c_{1,0} c_{0,1}^2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2^2)}{4(k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)} \right) \xi^3 + \dots, \quad (6.28)$$

para $m \neq 0$ e $k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2 \neq 0$.

O aproximante de Padé $[1/1]_{(\rho_1, \rho_2)}(\xi)|_{\xi=1}$ da expansão (6.28) dá origem ao ansatz

$$\hat{\phi} = c_{1,0} \bar{\rho}_1 + c_{0,1} \bar{\rho}_2, \quad (6.29)$$

de modo que as condições para que (6.29) seja uma solução exata são

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1;3,0}(\hat{S}) &= c_{1,0}^3 \lambda = 0, \\ \tilde{E}_{1;2,1}(\hat{S}) &= 3c_{1,0}^2 c_{0,1} \lambda = 0, \\ \tilde{E}_{1;1,2}(\hat{S}) &= 3c_{1,0} c_{0,1}^2 \lambda = 0, \\ \tilde{E}_{1;0,3}(\hat{S}) &= c_{0,1}^3 \lambda = 0, \\ D_1(\hat{S}) &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, a única possibilidade para (6.29) ser uma solução não nula de (6.24) será no limite de Klein-Gordon, isto é $\lambda = 0$. Empregando o ansatz $[2/2]_{(\rho_1, \rho_2)}(\xi)|_{\xi=1}$, nós obtemos

$$\hat{\phi} = \frac{8m^2(-k_{1,0} k_{2,0} + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)(c_{1,0} \bar{\rho}_1 + c_{0,1} \bar{\rho}_2)}{(k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)(\lambda(c_{1,0}^2 \bar{\rho}_1^2 - c_{1,0} c_{0,1} \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + c_{0,1}^2 \bar{\rho}_2^2) - 8m^2) - 6m^2 c_{1,0} c_{0,1} \lambda \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2} \quad (6.30)$$

Substituindo o ansatz (6.30) em (6.24), obtemos as condições

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{1;4,1}(\hat{S}) &= 64c_{1,0}^4 c_{0,1} \lambda^2 m^2 (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)^2 (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2) \\
 &\quad (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + 2m^2) = 0, \\
 \tilde{E}_{1;3,2}(\hat{S}) &= -96c_{1,0}^3 c_{0,1}^2 \lambda^2 m^2 (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)^3 (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2) = 0, \\
 \tilde{E}_{1;2,3}(\hat{S}) &= -96c_{1,0}^2 c_{0,1}^3 \lambda^2 m^2 (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)^3 (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2) = 0, \\
 \tilde{E}_{1;1,4}(\hat{S}) &= 64c_{1,0} c_{0,1}^4 \lambda^2 m^2 (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)^2 (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2) \\
 &\quad (k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + 2m^2) = 0, \\
 D_1(\hat{S}) &= [(k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)(c_{1,0}^2 \lambda \bar{\rho}_1^2 - c_{1,0} c_{0,1} \lambda \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + c_{0,1}^2 \lambda \bar{\rho}_2^2 - 8m^2) \\
 &\quad - 6m^2 c_{1,0} c_{0,1} \lambda \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2]^3 \neq 0.
 \end{aligned}$$

O sistema acima possui quatro soluções possíveis, isto é: $c_{1,0} = 0$, $c_{0,1} = 0$, $\lambda = 0$ ou

$$k_{1,0} k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2 = 0. \quad (6.31)$$

Podemos ver facilmente que as condições $c_{1,0} = 0$ e $c_{0,1} = 0$ geram a mesma solução (6.19) a menos de uma redefinição das constantes, enquanto que a condição $\lambda = 0$ gera uma solução idêntica a solução (6.29). Podemos usar também a condição (6.31) e os vínculos (6.25) e (6.26) sobre os parâmetros para eliminar três constantes, por exemplo

$$\begin{aligned}
 k_{1,0} &= \frac{1}{\sum_{j=2}^3 k_{2,j}^2 - m^2} \left[\nu_1 k_{2,1} \sqrt{m^2 \sum_{j=2}^3 (k_{1,j} - k_{2,j})^2 - (k_{1,3} k_{2,2} - k_{1,2} k_{2,3})^2} \right. \\
 &\quad \left. + \nu_2 \sqrt{\mathbf{k}_2^2 - m^2} \left(\sum_{j=2}^3 k_{1,j} k_{2,j} - m^2 \right) \right] \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

$$k_{2,0} = \nu_2 \sqrt{\mathbf{k}_2^2 - m^2} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned}
 k_{1,1} &= \frac{1}{\sum_{j=2}^3 k_{2,j}^2 - m^2} k_{2,1} \left(\sum_{j=2}^3 k_{1,j} k_{2,j} - m^2 \right) \\
 &\quad + \nu_1 \nu_2 \sqrt{(\mathbf{k}_2^2 - m^2) \left[m^2 \sum_{j=2}^3 (k_{1,j} - k_{2,j})^2 - (k_{1,3} k_{2,2} - k_{1,2} k_{2,3})^2 \right]} \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

sendo $\nu_1 = \pm 1$ e $\nu_2 = \pm 1$. Portanto, a expressão (6.30) é uma solução de (6.10) com $\bar{\rho}_1 = e^{i(k_{1,0}t + k_{1,1}x + k_{1,2}y + k_{1,3}z)}$, $\bar{\rho}_2 = e^{i(k_{2,0}t + k_{2,1}x + k_{2,2}y + k_{2,3}z)}$, além das constantes (6.32), (6.33) e (6.34).

Agora, vamos considerar a equação (6.24) e o conjunto de funções ρ com os seguintes vínculos sobre os parâmetros:

$$\psi_1 = -k_{1,0}^2 + \mathbf{k}_1^2 + 2m^2 = 0, \quad (6.35)$$

$$\psi_2 = -k_{2,0}^2 + \mathbf{k}_2^2 + 2m^2 = 0. \quad (6.36)$$

Se considerássemos apenas um dos vínculos acima, então obteríamos a solução (6.22) novamente, a menos de uma redefinição das constantes arbitrárias. No entanto, se ambas as constantes forem consideradas, então podemos eliminar os parâmetros $k_{1,0}$ e $k_{2,0}$ tal que (6.24) gere

$$2m^2(\rho_1^2 \partial_{\rho_1}^2 \hat{\phi} + \rho_1 \partial_{\rho_1} \hat{\phi} + \rho_2^2 \partial_{\rho_2}^2 \hat{\phi} + \rho_2 \partial_{\rho_2} \hat{\phi}) + 2(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_1 \rho_2 \partial_{\rho_1} \partial_{\rho_2} \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi} + \lambda \hat{\phi}^3 = 0. \quad (6.37)$$

Observe que não substituiremos os termos lineares de $k_{1,0}$ e $k_{2,0}$ em (6.37), mas a substituição será feita no final. A expansão de Taylor em várias variáveis de (6.37) é

$$\hat{\phi} = \frac{i\mu m}{\sqrt{\lambda}} + (c_{1,0}\bar{\rho}_1 + c_{0,1}\bar{\rho}_2)\xi - \left(\frac{i\mu\sqrt{\lambda}(c_{1,0}^2\bar{\rho}_1^2 + c_{0,1}^2\bar{\rho}_2^2)}{2m} + \frac{3i\mu m \lambda c_{1,0}c_{0,1}\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2}{(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)} \right) \xi^2 + \dots, \quad (6.38)$$

para $m \neq 0$, $\lambda \neq 0$ e $k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2 \neq 0$. Os aproximantes de Padé $[2/2]_{(\rho_1, \rho_2)}(\xi)|_{\xi=1}$ de (6.38) geram o ansatz

$$\begin{aligned} \hat{\phi} = & m \left((k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)(\sqrt{\lambda}(c_{1,0}^2\bar{\rho}_1^2 + c_{0,1}^2\bar{\rho}_2^2 + 4c_{1,0}c_{0,1}\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2) + 2im\mu(c_{1,0}\bar{\rho}_1 \right. \\ & \left. + c_{0,1}\bar{\rho}_2)) - 6m^2\sqrt{\lambda}c_{1,0}c_{0,1}\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 \right) / \left((k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)(i\mu\lambda(c_{1,0}^2\bar{\rho}_1^2 + c_{0,1}^2\bar{\rho}_2^2) \right. \\ & \left. + 2m\sqrt{\lambda}(c_{1,0}\bar{\rho}_1 + c_{0,1}\bar{\rho}_2)) + 6i\mu\lambda m^2 c_{1,0}c_{0,1}\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 \right). \end{aligned} \quad (6.39)$$

As condições para (6.39) se tornar soluções exatas são

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1;5,1}(\hat{S}) &= 8c_{1,0}^5 c_{0,1} \lambda^{3/2} m (k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)^2 \\ & \quad (k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - 2m^2) = 0 \\ \tilde{E}_{1;4,2}(\hat{S}) &= -96c_{1,0}^4 c_{0,1}^2 \lambda^{3/2} m^5 (k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - 2m^2) = 0 \\ \tilde{E}_{1;3,3}(\hat{S}) &= 16c_{1,0}^3 c_{0,1}^3 \lambda^{3/2} m (k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - 2m^2) \\ & \quad [8m^2(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) - 3((k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2))^2 + 5m^4] = 0 \\ \tilde{E}_{1;2,4}(\hat{S}) &= -96c_{1,0}^2 c_{0,1}^4 \lambda^{3/2} m^5 (k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - 2m^2) \\ \tilde{E}_{1;1,5}(\hat{S}) &= 8c_{1,0} c_{0,1}^5 \lambda^{3/2} m (k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - m^2)(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)^2 \\ & \quad (k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - 2m^2) = 0 \\ D_1(\hat{S}) &= [(k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + m^2)(i\mu\lambda(c_{1,0}^2\lambda\bar{\rho}_1^2 + c_{0,1}^2\lambda\bar{\rho}_2^2) + 2m\sqrt{\lambda}(c_{1,0}\bar{\rho}_1 + c_{0,1}\bar{\rho}_2) \\ & \quad + 6i\mu\lambda m^2 c_{1,0}c_{0,1}\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2)] \neq 0. \end{aligned}$$

O sistema acima possui as seguintes soluções: $c_{1,0} = 0$, $c_{0,1} = 0$ e

$$k_{1,0}k_{2,0} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - 2m^2 = 0. \quad (6.40)$$

As soluções $c_{1,0} = 0$ e $c_{0,1} = 0$ dão origem a solução (6.22) a menos de uma redefinição das constantes arbitrárias, enquanto que a solução (6.40) juntamente com (6.35) e (6.36) eliminam três constantes, por exemplo,

$$k_{1,0} = \frac{1}{\sum_{j=2}^3 k_{2,j}^2 + 2m^2} \left[\nu_1 k_{2,1} \sqrt{-2m^2 \sum_{j=2}^3 (k_{1,j} - k_{2,j})^2 - (k_{1,3}k_{2,2} - k_{1,2}k_{2,3})^2} + \nu_2 \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + 2m^2} \left(\sum_{j=2}^3 k_{1,j}k_{2,j} + 2m^2 \right) \right] \quad (6.41)$$

$$k_{2,0} = \nu_2 \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + 2m^2} \quad (6.42)$$

$$k_{1,1} = \frac{1}{\sum_{j=2}^3 k_{2,j}^2 + 2m^2} \left[k_{2,1} \left(\sum_{j=2}^3 k_{1,j}k_{2,j} + 2m^2 \right) + \nu_1 \nu_2 \sqrt{(\mathbf{k}_2^2 + 2m^2) \left[-2m^2 \sum_{j=2}^3 (k_{1,j} - k_{2,j})^2 - (k_{1,3}k_{2,2} - k_{1,2}k_{2,3})^2 \right]} \right] \quad (6.43)$$

sendo $\nu_1 = \pm 1$ e $\nu_2 = \pm 1$. Portanto, a expressão (6.39) é uma solução do modelo $\lambda\phi^4$ com $\bar{\rho}_1 = e^{i(k_{1,0}t + k_{1,1}x + k_{1,2}y + k_{1,3}z)}$, $\bar{\rho}_2 = e^{i(k_{2,0}t + k_{2,1}x + k_{2,2}y + k_{2,3}z)}$, juntamente com as constantes (6.41), (6.42) e (6.43).

O algoritmo apresentado aqui pode ser usado com aproximantes de Padé maiores ou diferentes ansatz funcionais, mas não consideraremos tais casos devido limitações computacionais.

Capítulo 7

Conclusão

Esta tese teve como objetivo o estudo da conexão entre modelos integráveis e as equações de Painlevé. Ao longo do trabalho, nós estendemos o método do truncamento modificado, construímos o método do ansatz de vínculos e apresentamos um método direto para encontrar soluções de equações diferenciais em D dimensões.

No capítulo 2, apresentamos o trabalho [23] onde o método do truncamento modificado foi estendido afim de obtermos transformações de Bäcklund para a hierarquia de EDPs do modelo mKdV-Liouville. Além disso, encontramos soluções para o modelo mKdV diferentes das já conhecidas na literatura. Nós também estudamos a redução de auto-similaridade do modelo mKdV-Liouville e resolvemos a conjectura de Kudryashov para um caso particular da equação (1.2). No capítulo 3, apresentamos o trabalho [19] onde foi estudado o modelo misto AKNS-Lund-Regge estendido. Foi mostrado também que este modelo pode ser reduzido às equações PIV e PV para valores particulares dos parâmetros.

No capítulo 4, apresentamos um modelo simétrico afim de unificar alguns casos da equação PIII e a equação PV em um único modelo. A relação da equação PIII com $cd \neq 0$ e a equação PV com $\delta = 0$ é conhecida na literatura [28]; no entanto, o modelo PIII-PV simétrico do capítulo 4 unifica a equação PV com $\delta \neq 0$, a equação PIII com $b = d = 0$, a equação PIII com $cd \neq 0$ e a equação PV com $\delta = 0$ no mesmo modelo. Diferentemente de um modelo misto, o modelo PIII-PV simétrico não possui nenhuma região em seu espaço de parâmetros que não esteja conectada com a equação PIII ou PV.

No capítulo 5, apresentamos o método do ansatz de vínculos. Este método é capaz de encontrar os vínculos corretos para se reduzir um sistema hamiltoniano a outro usando a abordagem de Dirac. Usando este método, mostramos que o modelo integrável de 4-bósons pode ser reduzido ao modelo PIII-PV simétrico através da imposição de dois conjuntos de vínculos diferentes.

Complementarmente aos tópicos desenvolvidos ao longo da tese, apresentamos também um algoritmo para encontrar soluções de equações diferenciais em D dimensões no capítulo 6. Tal algoritmo foi apresentado em [29] afim de simplificar o método das múltiplas exponenciais [30]. Por fim, aplicamos esta técnica para encontrar soluções exatas do modelo $\lambda\phi^4$ em 4 dimensões.

Ao longo da tese, trabalhamos com uma grande variedade de métodos matemáticos interessantes e que deixaram em aberto a possibilidade de estudos adicionais. Assim, como uma das linhas de continuidade, investigaremos novas abordagens matemáticas nas seguintes linhas gerais: obter transformações de Bäcklund, tratar vínculos canônicos e encontrar soluções de EDPs. Além disso, estudaremos a conexão entre os modelos 6-bósons e 8-bósons com as equações de Painlevé usando o método do ansatz de vínculos. Complementarmente, aplicaremos o método do ansatz funcional a outros modelos e buscaremos interpretar as soluções fisicamente.

Apêndice A

Hierarquia PII

Históricamente, M.J.Ablowitz and H.Segur (em [40]) foram os primeiros a sugerir a construção da hierarquia PII. Neste apêndice, nos basearemos na referência [41] e veremos como a hierarquia PII pode ser obtida a partir do modelo mKdV através de uma redução por auto-similaridade.

A.1 Hierarquias KdV e mKdV

A hierarquia KdV é um modelo integrável bastante conhecido que possui uma estrutura bi-hamiltoniana; ou seja, há dois parênteses de Poisson que dão origem às equações de movimento. Assim, se $u = u(x, t)$ for o campo da hierarquia KdV e t for o conjunto dos tempos de todas as equações, as equações de movimento serão

$$\frac{\partial u}{\partial t_{2n+1}} = \{u(x, t), H_{2n+1}\}_1 = \{u(x, t), H_{2n-1}\}_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O modelo KdV possui os parênteses de Poisson

$$\begin{aligned} \{u(x, t), u(y, t)\}_1 &= -\delta_x(x - y) \\ \{u(x, t), u(y, t)\}_2 &= -\delta_{xxx}(x - y) - 2u(x, t)\delta_x(x - y) - u_x(x, t)\delta(x - y) \end{aligned}$$

e a hamiltoniana

$$H_{-1} = \int u dy$$

Desta forma, da relação

$$\{u(x, t), H_{2n+1}\}_1 = \{u(x, t), H_{2n-1}\}_2,$$

surge a relação de recorrência de Lenard, isto é

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 2u \frac{\partial}{\partial x} + u_x \right] \frac{\delta H_{2n-1}}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_{2n+1}}{\delta u}, \quad \frac{\delta H_{-1}}{\delta u} = 1$$

Afim de simplificar a notação, usaremos $\mathcal{L}_n[x, u] \equiv \frac{\delta H_{2n-1}}{\delta u}$. Assim, as equações de movimento da hierarquia do modelo KdV são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial t_{2n+1}} + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{n+1}[x, u] = 0. \quad (\text{A.1})$$

As primeiras equações da hierarquia podem ser vistas explicitamente na tabela A.1.

Tabela A.1: Hierarquia KdV

n=0	$\mathcal{L}_1[x, u] = u$	$u_{t_1} + u_x = 0$
n=1	$\mathcal{L}_2[x, u] = u_{xx} + \frac{3}{2}u^2$	$u_{t_3} + 3uu_x + u_{xxx} = 0$ (Equação KdV)
n=2	$\mathcal{L}_3[x, u] = u_{4x} + \frac{5}{2}u^3 + \frac{5}{2}u_x^2 + 5uu_{xx}$	$u_{t_5} + 5uu_{xxx} + 10u_xu_{xx} + \frac{15}{2}u^2u_x + u_{5x} = 0$

A hierarquia mKdV surge da hierarquia KdV através de uma transformação de Miura, ou seja

$$u = 2(v_x - v^2)$$

Sob esta transformação, a relação de recorrência de Lenard se torna

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2v\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2v\frac{\partial}{\partial x} + 2v_x\right) \mathcal{L}_n[x, 2(v_x - v^2)] = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{n+1}[x, 2(v_x - v^2)] \quad (\text{A.2})$$

A equação de movimento (A.1) com os campos transformados fica

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2v\right) \frac{\partial v}{\partial t_{2n+1}} + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{n+1}[x, 2(v_x - v^2)] = 0$$

Usando (A.2), a equação acima pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2v\right) \left[2\frac{\partial v}{\partial t_{2n+1}} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2v\frac{\partial}{\partial x} + 2v_x\right) \mathcal{L}_n[x, 2(v_x - v^2)]\right] = 0$$

Assim, as equações de movimento da hierarquia mKdV são dadas por

$$2\frac{\partial v}{\partial t_{2n+1}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v\right) \mathcal{L}_n[x, 2(v_x - v^2)] = 0 \quad (\text{A.3})$$

Explicitamente, as primeiras equações de movimento da hierarquia mKdV são

Tabela A.2: Hierarquia mKdV

n=0	$\mathcal{L}_0[x, 2(v_x - v^2)] = 1$	$v_{t_1} + v_x = 0$
n=1	$\mathcal{L}_1[x, 2(v_x - v^2)] = 2(v_x - v^2)$	$v_{t_3} - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$ (Equação mKdV)
n=2	$\mathcal{L}_2[x, 2(v_x - v^2)] = v_{xxx} - 2vv_{xx}$ $+v_x^2 + 3v^4 - 6v^2v_x$	$v_{t_5} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{xxxx} - 10vv_x^2 - 10v^2v_{xx} + 6v^5) = 0$

A.2 Redução à hierarquia PII

Veremos agora que a hierarquia PII é obtida a partir da hierarquia mKdV através de uma redução de auto-similaridade dada pelo seguinte lema:

Lema 1. *Sob a redução por auto-similaridade*

$$z_n = \frac{x}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{1}{(2n+1)}}, \quad v(x, t_{2n+1}) = \frac{w(z_n)}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{1}{(2n+1)}}, \quad (\text{A.4})$$

os funcionais $\mathcal{L}_i[x, 2(v_x - v^2)]$ se transformam como

$$\mathcal{L}_i[x, 2(v_x - v^2)] = \frac{1}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{(2i)}{(2n+1)}} \mathcal{L}_i[z_n, 2(w_{z_n} - w^2)]$$

Demonstração. A prova segue por indução. É fácil ver que o lema vale para $\mathcal{L}_0[x, 2(v_x - v^2)]$ e $\mathcal{L}_1[x, 2(v_x - v^2)]$, isto é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0[x, 2(v_x - v^2)] &= 1 = \mathcal{L}_0[z_n, 2(w_{z_n} - w^2)] \\ \mathcal{L}_1[x, 2(v_x - v^2)] &= 2(v_x - v^2) = \frac{2}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{2}{(2n+1)}} (w_{z_n} - w^2) \\ &= \frac{2}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{2}{(2n+1)}} \mathcal{L}_1[z_n, 2(w_{z_n} - w^2)] \end{aligned}$$

Agora, supondo que o lema vale para m , usaremos (A.2) para mostrar que vale também para $m+1$, isto é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m+1}[x, 2(v_x - v^2)] &= \int \left(\frac{\partial}{\partial x} - 2v \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial}{\partial x} + 2v_x \right) \mathcal{L}_m[x, 2(v_x - v^2)] dx \\ &= \int \left(\frac{d}{dz_n} - 2w \right) \left(\frac{d^2}{dz_n^2} + 2w \frac{d}{dz_n} + 2w_{z_n} \right) \frac{\mathcal{L}_m[z_n, 2(w_{z_n} - w^2)]}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{(2m+2)}{(2n+1)}} dz_n \\ &= \frac{1}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{(2m+2)}{(2n+1)}} \mathcal{L}_{m+1}[z_n, 2(w_{z_n} - w^2)] \end{aligned}$$

Encerrando assim nossa demonstração.

□

Usando o lema acima para fazer uma transformação por auto-similaridade nas equações de movimento do mKdV, isto é (A.3), obtemos

$$\frac{d}{dz_n} \left(\frac{d}{dz_n} + 2w \right) \mathcal{L}_n[z_n, 2(w_{z_n} - w^2)] = z_n w_{z_n} + w$$

Integrando a equação acima e omitindo os índices dos z_n , temos a hierarquia PII, isto é

$$\left(\frac{d}{dz} + 2w \right) \mathcal{L}_n[z, 2(w_z - w^2)] = zw - \alpha_n \quad (\text{A.5})$$

Note que a hierarquia PII possui apenas um parâmetro e as primeiras equações são dadas na tabela A.3.

Tabela A.3: Hierarquia PII

n=0	$w = zw - \alpha_0 \Rightarrow w = \frac{\alpha_0}{z-1}$
n=1	$w_{zz} = 2w^3 + zw - \alpha_1$
n=2	$w_{zzzz} = 10ww_z^2 + 10w^2w_{zz} - 6w^5 + zw - \alpha_2$

Veja que para $n = 0$ obtemos uma equação algébrica e não uma equação diferencial, assim podemos excluí-la da hierarquia PII. Já para $n = 1$, obtemos de fato a equação PII que caracteriza a hierarquia.

Apêndice B

Transformação de Bäcklund para a equação PIII e PV

Neste apêndice, listaremos as transformações de Bäcklund das equações PIII e PV de acordo com [28]. Estas transformações são comparadas com as transformações de Bäcklund do modelo PIII-PV simétrico nas seções 4.1 e 4.2. A notação usada nesta seção para representar os parâmetros das equações PIII e PV será tal que estas equações sejam:

$$u_{zz} = \frac{1}{u}u_z^2 - \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z}(au^2 + b) + cu^3 + \frac{d}{u} \quad (\text{PIII})$$

$$u_{zz} = \frac{3u-1}{2u(u-1)}u_z^2 - \frac{1}{z}u_z + \frac{(u-1)^2}{z^2}(\alpha u + \frac{\beta}{u}) + \frac{\gamma u}{z} + \frac{\delta u(u+1)}{u-1} \quad (\text{PV})$$

A equação PIII possui as seguintes transformações de Bäcklund quando $cd \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}^{[PIII]}(u(z)) &= \theta_1 u(\theta_2 z), & \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}^{[PIII]}(a) &= \theta_1 \theta_2 a, & \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}^{[PIII]}(b) &= \frac{\theta_2 b}{\theta_1}, \\ \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}^{[PIII]}(c) &= \theta_1^2 \theta_2^2 c, & \mathcal{S}_{\theta_1, \theta_2}^{[PIII]}(d) &= \frac{\theta_2^2 d}{\theta_1^2} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2^{[PIII]}(u) &= \frac{1}{u}, & \mathcal{S}_2^{[PIII]}(a) &= -b, & \mathcal{S}_2^{[PIII]}(b) &= -a, & \mathcal{S}_2^{[PIII]}(c) &= -d, \\ \mathcal{S}_2^{[PIII]}(d) &= -c \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Além destas, quando $c = 1$ e $d = -1$, nós também temos as transformações

$$\mathcal{T}_1^{[PIII]}(u) = \frac{z(u_z + u^2) - (b+1)u + z}{u[z(u_z + u^2) + (a+1)u + z]}, \quad \mathcal{T}_1^{[PIII]}(a) = a+2, \quad \mathcal{T}_1^{[PIII]}(b) = b+2 \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{T}_2^{[PIII]}(u) = -\frac{z(u_z - u^2) - (b+1)u + z}{u[z(u_z - u^2) + (-a+1)u + z]}, \quad \mathcal{T}_2^{[PIII]}(a) = a-2, \quad \mathcal{T}_2^{[PIII]}(b) = b+2 \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{T}_3^{[PIII]}(u) \equiv \mathcal{S}_{1,-1}^{[III]} \mathcal{T}_2^{[PIII]} \mathcal{S}_{1,-1}^{[III]}(u), \quad \mathcal{T}_3^{[PIII]}(a) = a + 2, \quad \mathcal{T}_3^{[PIII]}(b) = b - 2 \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{T}_4^{[PIII]}(u) \equiv \mathcal{S}_{1,-1}^{[III]} \mathcal{T}_1^{[PIII]} \mathcal{S}_{1,-1}^{[III]}(u), \quad \mathcal{T}_4^{[PIII]}(a) = a - 2, \quad \mathcal{T}_4^{[PIII]}(b) = b - 2 \quad (\text{B.6})$$

A equação PV possui as seguintes transformações de Bäcklund independentemente dos valores dos parâmetros:

$$\mathcal{S}_1^{[PV]}(u) = u(-z), \quad \mathcal{S}_1^{[PV]}(\alpha) = \alpha, \quad \mathcal{S}_1^{[PV]}(\beta) = \beta, \quad \mathcal{S}_1^{[PV]}(\gamma) = -\gamma, \quad \mathcal{S}_1^{[PV]}(\delta) = \delta \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{S}_2^{[PV]}(u) = \frac{1}{u}, \quad \mathcal{S}_2^{[PV]}(\alpha) = -\beta, \quad \mathcal{S}_2^{[PV]}(\beta) = -\alpha, \quad \mathcal{S}_2^{[PV]}(\gamma) = -\gamma, \quad \mathcal{S}_2^{[PV]}(\delta) = \delta \quad (\text{B.8})$$

Quando $\delta = 0$ e $\gamma = \pm 1$, a equação PV também possui as transformações

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{[PV]}(u) &= 1 - \frac{2\Phi^2}{2zu\Phi_z + \Phi^2 - [2zu_z - 2(\varepsilon_1\sqrt{2\alpha} - \varepsilon_2\sqrt{-2\beta} - 2)u]\Phi + 2z\gamma u^2} \\ \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{[PV]}(\alpha) &= \frac{(\varepsilon_1\sqrt{2\alpha} - 1)^2}{2}, \quad \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{[PV]}(\beta) = -\frac{(\varepsilon_2\sqrt{-2\beta} + 1)^2}{2}, \quad \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{[PV]}(\gamma) = \gamma \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

sendo $\varepsilon_j = \pm 1$ e

$$\Phi = zu_z - \varepsilon_1\sqrt{2\alpha}u^2 + (\varepsilon_1\sqrt{2\alpha} + \varepsilon_2\sqrt{-2\beta})u - \varepsilon_2\sqrt{-2\beta} \neq 0$$

Além destas, quando $\delta = -1/2$, nós também temos as transformações

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}^{[PV]}(u) &= 1 - \frac{2\varepsilon_3 zu}{zu_z - \varepsilon_1\sqrt{2\alpha}u^2 + \varepsilon_2\sqrt{-2\beta} + (\varepsilon_1\sqrt{2\alpha} - \varepsilon_2\sqrt{-2\beta} + \varepsilon_3 z)u} \\ \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}^{[PV]}(\alpha) &= \frac{1}{8} \left[\gamma + \varepsilon_3 \left(1 - \varepsilon_2\sqrt{-2\beta} - \varepsilon_1\sqrt{2\alpha} \right) \right]^2, \\ \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}^{[PV]}(\beta) &= -\frac{1}{8} \left[\gamma - \varepsilon_3 \left(1 - \varepsilon_2\sqrt{-2\beta} - \varepsilon_1\sqrt{2\alpha} \right) \right]^2, \\ \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}^{[PV]}(\gamma) &= \varepsilon_3 \left(\varepsilon_2\sqrt{-2\beta} - \varepsilon_1\sqrt{2\alpha} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

sendo $\varepsilon_j = \pm 1$. Observe que $\mathcal{S}_2^{[PV]} = \mathcal{T}_{\varepsilon_3, -\varepsilon_3, \varepsilon_3}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}^{[PV]}$ e que a identidade pode ser escrita como $I = \mathcal{T}_{1, -1, -1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1}^{[PV]}$ ou $I = \mathcal{T}_{1, -1, 1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{1, -1, 1}^{[PV]} \circ \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1}^{[PV]}$ (conforme página 197 de [28]).

Apêndice C

Método de Dirac para sistemas hamiltonianos com vínculos

Neste apêndice, apresentaremos uma introdução concisa ao método de Dirac para sistemas hamiltonianos com vínculos [36, 37, 38]. Com este método, podemos construir o formalismo hamiltoniano a partir de um lagrangiano singular*.

Como ponto de partida, considere um lagrangiano $L = L(q, \dot{q}, t)$, onde t é o parâmetro de evolução temporal, $q \equiv (q_1, \dots, q_N)$ são as coordenadas generalizadas e $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ são as velocidades. Os momentos canonicamente conjugados $p \equiv (p_1, \dots, p_N)$ serão

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (\text{C.1})$$

O hamiltoniano correspondente a este lagrangiano será

$$H_0(q, p, t) = \sum_{j=1}^N p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}, t). \quad (\text{C.2})$$

Se o determinante da matrix hessiana for nulo, isto é

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) = 0,$$

não é possível determinar todas as velocidades em função das coordenadas canônicas a partir de (C.1) afim de substitui-las em (C.2), ou seja $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p, t)$. Isto implica na existência de vínculos primários

$$\phi_j(q, p, t) = 0, \quad j = 1, \dots, M, \quad (\text{C.3})$$

*Um lagrangiano singular é um lagrangiano cujo determinante da matrix hessiana seja nulo.

onde M é o número de velocidades que não puderam ser escritas em termos das coordenadas canônicas. Estes vínculos primários precisam ser incluídos no hamiltoniano afim de construirmos um hamiltoniano efetivo onde as variações δq_j e δp_j sejam independentes. Assim, temos o hamiltoniano efetivo

$$H = H_0 + \sum_{j=1}^M \lambda_j(q, p, t) \phi_j(q, p, t), \quad (\text{C.4})$$

onde $\lambda_j(q, p, t)$ são multiplicadores de Lagrange. A equação de movimento de uma variável dinâmica A pelo hamiltoniano (C.4) será

$$\begin{aligned} \dot{A} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} &= \{A, H_0\} + \sum_{j=1}^M \left(\{A, \lambda_j(q, p, t)\} \phi_j + \lambda_j(q, p, t) \{A, \phi_j\} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \{A, H_0\} + \sum_{j=1}^M \lambda_j(q, p, t) \{A, \phi_j\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned}$$

onde $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ e o simbolo \approx significa que teremos uma igualdade quando $\phi_j(q, p, t) = 0$. Para que o sistema seja consistente, precisamos impor que a evolução temporal dos vínculos primários seja nula, ou seja

$$\dot{\phi}_i \approx \{\phi_i, H_0\} + \sum_{j=1}^M \lambda_j(q, p, t) \{\phi_i, \phi_j\} + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Há três possibilidades que podem ocorrer na expressão (C.5):

- ela pode ser identicamente nula, de modo que os vínculos $\phi_j = 0$ já seriam consistentes;
- pode também impor uma condição sobre os multiplicadores de Lagrange λ_j ;
- ou pode definir novos vínculos secundários

$$\phi_j(q, p, t) = 0, \quad j = M + 1, \dots, K, \quad (\text{C.6})$$

Se for obtido vínculos secundários, devemos impor que a evolução temporal deles também seja nula. Assim, repetimos o passo acima até que nenhum vínculo novo seja gerado. Vamos assumir que ficamos com um conjunto de T vínculos ao todo. Estes vínculos também precisam ser introduzidos na dinâmica do sistema para que as variações δq_j e δp_j sejam independentes. Logo, definimos o hamiltoniano total usando novos multiplicadores de Lagrange como

$$H_T = H_0 + \sum_{j=1}^T \lambda_j(q, p, t) \phi_j, \quad (\text{C.7})$$

tal que a evolução temporal de uma variável dinâmica A por H_T é

$$\dot{A} = \{A, H_T\} + \frac{\partial A}{\partial t} \approx \{A, H_0\} + \sum_{j=1}^T \lambda_j(q, p, t) \{A, \phi_j\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (\text{C.8})$$

Todos os vínculos precisam ser consistentes com o hamiltoniano H_T ; assim, impomos que

$$\dot{\phi}_i \approx \{\phi_i, H_0\} + \sum_{j=1}^T \lambda_j(q, p, t) \{\phi_i, \phi_j\} + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, \dots, T. \quad (\text{C.9})$$

Se $\det(\{\phi_i, \phi_j\}) \neq 0$, então podemos escrever os multiplicadores de Lagrange como

$$\lambda_j(q, p, t) = - \sum_{i=1}^T (\{\phi, \phi\})_{ji}^{-1} \left(\{\phi_i, H_0\} + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right) \quad (\text{C.10})$$

Por fim, substituindo (C.10) em (C.8) ficamos com

$$\dot{A} \approx \{A, H_T\}^D + \frac{\partial A}{\partial t},$$

onde $\{A, H_T\}^D$ é o parêntese de Dirac, ou seja

$$\{A, H_T\}^D \equiv \{A, H_T\} - \sum_{i,j=1}^T \{A, \phi_j\} (\{\phi, \phi\})_{ji}^{-1} \left(\{\phi_i, H_0\} + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right).$$

Referências Bibliográficas

- [1] E. L. Ince, “Ordinary Differential Equations”, DOVER, New York, 1956
- [2] H. Umemura, “Painlevé Equations and Classical Functions”, Sugaku Expositions **11** (1998) 77-100
- [3] P. J. Forrester, N. S. Witte, “Application of the τ -function theory of Painlevé equation to random matrices: PIV, PII and the GUE”, Comm. Math. Phys., **219** (2001) 357-398
- [4] A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Y. Novokshenov, “Painlevé Transcendents - The Riemann-Hilbert Approach”, Mathematical Surveys and Monographs, vol 128
- [5] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, M. Sato; “Density matrix of an impenetrable Bose gas and fifth Painlevé transcendent”, Physica D **1** (1980) 80-158
- [6] K. Esmakhanova, N. Myrzakulov, G. Nugmanova, Y. Myrzakulov, L. Chechin and R. Myrzakulov, “Dark energy in some integrable and nonintegrable FRW cosmological models” Int. J. of Mod. Phys. D **20**, no 12 (2011) 2419-2446
- [7] V. A. I. Osipov and E. Kanzieper, “Integrable theory of quantum transport in chaotic cavities”, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 176804
- [8] M. J. Ablowitz and H. Segur, “Asymptotic solutions of the Korteweg-deVries equation”, Stud. Appl. Math. **57** (1977) 13-44
- [9] M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur, “Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of Painlevé Type”, Lett. Nuovo Cim. **23** (1978) 333-338
- [10] N. A. Kudryashov, “The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them”, Phys. Lett. A **224** (1997) 353-360

- [11] N. A. Kudryashov, “Two hierarchies of ordinary differential equations and their properties”, *Phys. Lett. A* **252** (1999) 173-179
- [12] N. A. Kudryashov, “One generalization of the second Painlevé hierarchy”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **35** (2002) 93-99
- [13] U. Mugãn and F. Jrad, “Painlevé test and the first Painlevé hierarchy”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 7933-7952
- [14] U. Mugãn and F. Jrad, “Painlevé Test and Higher Order Differential Equation”, *J. of Nonlinear Math. Phys.* **9** (2002) 282-310
- [15] P. R. Gordoa, N. Joshi and A. Pickering, “Second and fourth Painlevé hierarchies and Jimbo-Miwa linear problems”, *J. of Math Phys.* **47** (2006) 073504
- [16] A. H. Sakka, “Bäcklund Transformations for First and Second Painlevé Hierarchies”, *SIGMA* **5** (2009) 11 pp.
- [17] C. M. Cosgrove, “Higher-Order Painlevé Equation in the Polynomial Class I. Bureau Symbol P2”, *Studies in Applied Math.* **104** (2000) 1-65
- [18] C. M. Cosgrove, “Higher-order Painlevé equations in the polynomial class II. Bureau symbol P1”, *Studies in Applied Math.* **106** (2006) 321-413
- [19] D. V. Ruy and G. R. Melo, “Extended mixed AKNS-Lund-Regge model and its self-similarity reduction”, *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity* **3(2)** (2014) 161-168
- [20] K. Konno, W. Kameyama and H. Sanuki, “Effect of Weak Dislocation Potential on Nonlinear Wave Propagation in Anharmonic Crystal”, *J. Phys. Soc. Jpn* **37** (1974) 171-176
- [21] H. Leblond and D. Mihalache, “Few-optical-cycles solitons: Modified Korteweg-de Vries sine-Gordon equation versus other non-slowly-varying-envelope approximation models”, *Phys. Rev. A* **79** (2009) 063835
- [22] P. A. Clarkson, N. Joshi and A. Pickering, “Bäcklund transformation for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach”, *Inverse Problems* **15** (1999) 175-187
- [23] D. V. Ruy, “On the mKdV-Liouville hierarchy and its self-similarity reduction”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **20** (2015) 113-120

- [24] G. L. Lamb, Jr., “Elements of Soliton Theory (Pure & Applied Mathematics)”. John Wiley & Sons Inc, New York, 1980
- [25] Deng-yuan CHEN, Da-jun ZHANG and Shu-fang DENG, “The Novel Multi-Solitons of the mKdV-Sine Gordon Equation”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**, no. 2 (2002) 658-659
- [26] S. R. Mousavian, H. Jafari, C. M. Khalique and S. A. Karimi, “New exact analytical solutions for mKdV equation”, *TJMCS* **2** no. 3 (2011) 413-416
- [27] J. F. Gomes, G. S. França, A. H. Zimerman, “Nonvanishing boundary condition for the mKdV hierarchy and the Gardner equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012) 015207
- [28] V. I. Gromak, I. Laine and S. Shimomura, “Painlevé Differential Equations in the Complex Plane”, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 2002
- [29] D. V. Ruy, “A method for solving nonlinear differential equations: an application to $\lambda\phi^4$ model”, arXiv:1404.0053
- [30] W-X. Ma, T. Huang and Y. Zhang, “A multiple Exp - function method for nonlinear differential equations and its application”, *Phys. Scripta* **82** (2010) 005003
- [31] J. Weiss, “The Painlevé property for partial differential equations. II: Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative”, *J. Math. Phys.* **24** (1983) 1405-13
- [32] J. F. Gomes, G. R. Melo and A. H. Zimerman, “A Class of Mixed Integrable Models”, *J. Phys. A: Math Theor.* **42** (2009) 275208
- [33] J. F. Gomes, G. R. Melo, L. H. Ymai and A. H. Zimerman, “Nonautonomous mixed mKdV-sinh-Gordon hierarchy”, *J. of Phys. A: Math Theor.* **43** (2010) 395203
- [34] K. Pohlmeyer, “Integrable Hamiltonian Systems and Interactions through Quadratic Constraints”, *Comm. Math. Phys.* **46** (1976) 207-221
- [35] F. Lund and T. Regge, “Unified approach to strings and vortices with soliton solutions”, *Phys. Rev. D* **14** (1976) 1524-1535
- [36] P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dynamics”, *Canad. J. Math.* **2** (1950) 129-148

- [37] J. L. Anderson, P. G. Bergman, “Constraints in Covariant Field Theories”, *Phys. Rev.* **83**, (1951) 1018-25
- [38] P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dynamics”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **246** (1958) 326-332
- [39] J. V. José and E. J. Saletan, “Classical Dynamics: A Contemporary Approach”, Cambridge University Press, 2013
- [40] M.J.Ablowitz and H.Segur, ’“Asymptotic solution of the Korteweg-de-Vries equation”, *Stud. Appl. Math.*, 57(1977), no.1, 13-44
- [41] Nalini Joshi; “The Second Painlevé Hierarchy and the Stationary KdV Hierarchy”, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **40** (2004), 1039-1061.
- [42] H. Aratyn, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, “Higher order Painlevé equations and their symmetries via reductions of a class of integrable models”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 235202
- [43] E. J. Parkes and B. R. Duffy, “An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations”, *Comput. Phys. Commun.* **98** (1996) 288-300
- [44] W. Malfliet and W. Hereman, “The Tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations”, *Phys. Scripta* **54** (1996) 563-8
- [45] N. A. Kudryashov, “Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation”, *Phys. Lett. A* **147** (1990) 281-91
- [46] N. A. Kudryashov, “Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations”, *Chaos Solitons Fract.* **24** (2005) 1217-1231
- [47] E. J. Parkes, B. R. Duffy and P. C. Abbott, “The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations”, *Phys. Lett. A* **295** (2002) 280-6
- [48] N. K. Vitanov, “Application of simplest equations of Bernoulli and Riccati kind for obtaining exact travelling wave solutions for a class of PDEs with polynomial nonlinearity”, *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** (2010) 2050-60
- [49] N. K. Vitanov, “Modified method of simplest equation: powerful tool for obtaining exact and approximate traveling-wave solutions of nonlinear PDEs”, *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** (2011) 1176-85

- [50] N. K. Vitanov, “On modified method of simplest equation for obtaining exact and approximate of nonlinear PDEs: the role of the simplest equation”, *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** (2011) 4215-31
- [51] A. Biswas, “Solitary wave solution for the generalized Kawahara equation”, *Appl. Math. Lett.* **22** (2009) 208-10
- [52] A. Biswas, M. D. Petkovich and D. Milovich, “Topological and non-topological exact soliton of the power law KdV equation”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15(11)** (2010), 3263-9
- [53] J. H. He and X. H. Wu, “Exp-function method for nonlinear wave equations”, *Chaos Soliton Fract.* **30** (2006) 700-8
- [54] X. H. Wu and J. H. He, “Solitary solutions, periodic solutions and compaction - like solutions using the Exp - function method”, *Comput. Math. Appl.* **54** (2007)
- [55] W-X. Ma and E. Fan, “Linear Superposition principle applying to Hirota bilinear equations”, *Comput. Math. Appl.* **61** (2011) 950-9
- [56] M. L. Wang, X. Li and J. Zhang, “The G'/G - expansion method and evolution equation in mathematical physics”, *Phys. Lett. A* **372** (2008) 417-21
- [57] G. Ebadi, A. Biswas, “The G_0/G method and topological solution of the $K(m,n)$ equation”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** (2011) 2377-82
- [58] W-X. Ma and J.-H. Lee, “A transformed rational function method and exact solutions to the 3+1 dimensional Jimbo - Miwa equation”, *Chaos Soliton Fract.* **42** (2009) 1356-63
- [59] H. Aratyn, J. F. Gomes, D. V. Ruy and A. H. Zimerman, “Rational solutions from Padé approximants for the generalized Hunter-Saxton equation”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **474** (2013) 012006
- [60] C. Chaffy-Camus, “Convergence uniforme d’une nouvelle classe d’approximants de Padé à plusieurs variables”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I* **306** (1988) 387-92
- [61] J. S. R. Chisholm, “Rational approximants defined from double power series”, *Math. Comp.* **27** (1973) 841-8
- [62] A. Cuyt, “Multivariate Padé approximants”, *J. Math. Anal. Appl.* **96** (1983) 283-293

- [63] P. Guillaume, “Nested Multivariate Padé Approximants”, *J. Comput. Appl. Math.* **82** (1997) 149-58
- [64] P. Guillaume, A. Huard, V. Robin, “Generalized Multivariate Padé Approximants”, *J. Approx. Theory* **95** (2) (1998) 203-14
- [65] P. Guillaume, A. Huard, “Multivariate Padé approximation”, *J. Comput. Appl. Math.* **121** (2000) 197-219
- [66] D. Levin, “General order Padé-type rational rational approximants defined from double power series”, *J. Inst. Math. Appl.* **18** (1976) 395-07
- [67] J. A. E. Carrillo, A. Maia Jr., V. M. Mostepanenko, “Jacobi Elliptic Solution of $\lambda\phi^4$ Theory in a Finite Domain”, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 2645
- [68] R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, “Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. II. Two-dimensional models and extended hadrons”, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 4130-8