

UNESP

Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**Soluções do Tipo Vórtice em um  
Modelo de  
Maxwell-Chern-Simons-Higgs com  
Campos de Gauge Distintos**

Thiago Vinícius Moreira Guimarães

# Soluções do Tipo Vórtice em um Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs com Campos de Gauge Distintos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos

**Orientador: Prof. Dr. Marcelo Batista Hott**

Guaratinguetá

2015

## DADOS CURRICULARES

Thiago Vinícius Moreira Guimarães

NASCIMENTO 29.11.1988 / São Paulo-Brasil

FILIAÇÃO Eduardo Luiz Guimarães Junior  
Silvia de Fátima A. M. Lima

2008 / 2013 Curso de Graduação - Licenciatura em Física  
Universidade Estadual de Maringá-Maringá, PR

2013 / 2015 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado,  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá  
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP  
Brasil.

*THIAGO VINICIUS MOREIRA GUIMARÃES*

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

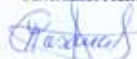
  
Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*

  
Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT  
Orientador / UNESP/FEG

  
Prof. Dr. ALVARO DE SOUZA DUTRA  
UNESP/FEG

Prof. Dr. RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES  
Universidade Federal do Maranhão



*Fevereiro de 2015*

## AGRADECIMENTOS

É difícil resumir os agradecimentos de toda uma jornada em apenas uma página sem correr o risco de ser injusto. Muitos contribuíram para essa pesquisa e para minha formação como físico, mas como isso há de ser feito não caberá aqui omissões óbvias. O principal agradecimento é sem dúvida a meus pais, Sílvia e Euclides, e aos meus segundos pais, meu avô Jaime e Amadeu, aos quais devo o surgimento de minha curiosidade científica e em memória deles dedico esse trabalho. Devo agradecer sem sombra de dúvidas a minha namorada Rúbia, pelo apoio e amor dedicados... e também por entender a minha falta de tempo. Ainda agradeço as minhas avós e todos os meus 6 irmãos de sangue. Agradeço ao meu orientador, Marcelo Hott, pela paciência e pelas broncas que muito me ajudaram. Não posso esquecer, é claro, dos amigos que fiz aqui em Guaratinguetá que ajudaram a fazer essa caminhada parecer mais amena, dos quais cito; Helton (que foi quase um mentor espiritual sobre assuntos da FEG), Gabriel, Barbara e Rafael (pelas cervejas, comidas e boas conversas). Agradeço também ao meu professor de Física do Ensino Médio, Tino, grande pessoa que me direcionou e me apoio em seguir a carreira de físico quando eu ainda era adolescente (agora já sei demonstrar que  $a_c = \frac{v^2}{r}$ ). Agradeço ao Queens of the Stone Age por ter feito minha bolsa valer a pena dois anos seguidos e ao Groove Armada, grupo que nem gosto tanto, mas era a única coisa que me animava para trabalhar aos domingos - "*Sometime... Can you feel the pressure does unwind*". Por último, agradeço a Salsa Desidratada (por me mostrar o sentido da vida) e a Cthulhu.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

Dedico essa dissertação aos meus  
velhos e indivisíveis...

Ph'nglui mglw'nafh Cthulhu R'lyeh wgah'nagl fhtagnr  
**chants of the Cthulhu's worshipers.**



Guimarães, T. M. **Busca por Soluções do Tipo Vórtice em um Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs** 2015. 80 f . Dissertação de Mestrado em Física – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## RESUMO

Nessa dissertação temos o intuito de buscar soluções do tipo vórtice em um modelo não encontrado na literatura, que consiste em um densidade de lagrangiana formada por um termo de Maxwell gerado por um campo de gauge  $A_\mu$ , e um termo de Chern-Simons gerado por outro campo de gauge  $\mathcal{A}_\mu$ , fazendo uso de um potencial autodual com vácuo não trivial de sexta ordem. Tal modelo apresenta uma interessante equação de primeira ordem nas derivadas para  $\phi$ , com solução exata, porém ela não é consistente com a equação de segunda ordem, sendo portanto inválida. Além disso não foi possível minimizar a energia do sistema, pois a contribuição do campo elétrico não pode ser eliminada sem causar inconsistências nas equações de movimento. Para tentar contornar esse problema, foi tentado introduzir um novo termo de Chern-Simons, misto, composto pelos dois campos  $A_\mu$  e  $\mathcal{A}_\mu$ . Nesse contexto a energia pôde ser minimizada sem causar problemas às equações de movimento, porém ainda não foi possível obter soluções do tipo vórtice, pois as soluções para  $\phi$  encontradas divergiam. Novamente sem soluções do tipo vórtice, o modelo original foi alterado, de forma a conter um campo escalar real  $N$  e um potencial também de sexta ordem. Com isso, a energia do sistema foi minimizada e soluções topológicas do tipo vórtice foram encontradas.

Ainda desenvolvemos uma forma idiossincrática de abordar o mecanismo de Bogomol'nyi sem a necessidade direta de completar quadrado e se baseando naturalmente na consistência entre as equações autoduais e as de movimento.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equações de Bogomol'nyi, Vórtices, Limite de Bradlow, Defeitos Topológicos, Maxwell, Higgs, Chern-Simons.

Guimarães, T. M. Busca por Soluções do Tipo Vórtice em um Modelo de Maxwell Chern-Simons-Higgs. 2015. 80 f. Dissertation (Master degree in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## ABSTRACT

In this dissertation we mean to seek vortex solutions in a model not found in literature, consisting in Lagrangian density given by a Maxwell term generated by a field gauge  $A_{\mu}$ , and Chern-Simons term generated by another field gauge  $\mathcal{A}_{\mu}$ , using a self-dual potential with nontrivial sixth-order vacuum. This model features an interesting first order equation for  $\phi$ , with solution exact, but it is not consistent with the second order equation, and therefore invalid. Moreover, it was not possible to minimize the model's energy, since the contribution of the electric field can not be eliminated without causing inconsistencies in the equations of motion. To try work around this problem, we tried to introduce a new mixed Chern-Simons term, composed of two fields  $A_{\mu}$  and  $\mathcal{A}_{\mu}$ . In this context the energy was minimized without causing problems the equations of motion, but has not yet been possible to obtain vortex solutions, because the solutions to  $\phi$  diverges. Again, without the vortex solutions, the original model has changed, to contain a real scalar field  $\mathcal{N}$ . Thus, the energy of the system was minimized and topological vortex solutions were found.

Yet, we developed an idiosyncratic approach to the Bogomol'nyi's mechanism without the direct need to complete square and naturally based on the consistency between the self-dual equations and equations of motion.

**KEYWORDS:** Bogomol'nyi equations, Vortices, Bradlow limit, Topological defects, Maxwell, Higgs, Chern-Simons.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Vórtices</b>	<b>15</b>
1.1	Soluções do tipo vórtice . . . . .	15
1.1.1	Tentativa de obter soluções em um modelo com simetria $U(1)$ global . . .	15
1.1.2	Vórtice no modelo de Maxwell-Higgs Abeliano . . . . .	17
1.2	Mecanismo de Bogomol'nyi . . . . .	22
1.2.1	Uma Outra Abordagem ao Mecanismo de Bogomol'nyi . . . . .	31
1.2.1.1	Soluções das equações autoduais . . . . .	35
1.2.1.2	Limite de Bradlow . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Vórtices Carregados</b>	<b>37</b>
2.1	Modelo Chern-Simons-Higgs Abeliano . . . . .	38
2.1.1	Equações de movimento . . . . .	39
2.1.2	Saturando a energia . . . . .	39
2.1.2.1	Soluções para as equações autoduais . . . . .	41
2.1.3	Carga e fluxo magnético . . . . .	43
2.2	Modelo de Maxwell-Higgs com termo de Chern-Simons . . . . .	44
2.2.1	Equações de Movimento . . . . .	45
2.2.2	Energia do Sistema . . . . .	46
2.2.3	Solução das equações de movimento . . . . .	47
2.2.4	Fluxo magnético e carga . . . . .	49
2.3	Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs com campo escalar real . . . . .	50
2.3.1	Equações de Movimento. . . . .	50
2.3.2	Saturando a Energia . . . . .	52
2.3.2.1	Soluções para as equações autoduais . . . . .	53

<b>3</b>	<b>Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs com campos de gauge distintos</b>	<b>56</b>
3.1	Equações de movimento . . . . .	57
3.1.1	A energia do sistema . . . . .	60
3.1.2	Buscando por soluções para o campo escalar. . . . .	62
3.2	Modificando o modelo com dois campos de gauge . . . . .	64
3.2.1	A energia do sistema . . . . .	67
3.2.2	Buscando por soluções para as equações autoduais . . . . .	68
3.3	Alterando o modelo com a inserção de um campo auxiliar escalar real . . . . .	70
3.3.1	Equações de movimento . . . . .	71
3.3.2	A energia do sistema . . . . .	72
3.3.3	Buscando por soluções para os campos escalares . . . . .	73
	Referências . . . . .	79

# Introdução

Vórtices são lugares-comuns no imaginário humano, uma vez que se fazem presentes em muitos fenômenos corriqueiros como redemoinhos e furacões. Em teorias físicas modernas a noção da existência de vórtices remonta a cosmologia de Descartes [1], na qual planetas vagavam pelo espaço através de linhas de vórtices gigantes. Embora a visão Newtoniana tenha prevalecido sobre esta, a concepção de vórtices ressurgiu em teorias de gauge em  $2 + 1$  dimensões do espaço tempo, na qual se faz presente o mecanismo de quebra espontânea de simetria. Nesse contexto, vórtices são soluções do tipo sólitons torvelinhos, que por sua vez, podem ser definidos como configurações de campo com energia finita e localizada, e que se movem uniformemente.

O estudo de modelos que suportam soluções do tipo vórtice possuem amplo espectro de estudo, indo da matéria condensada, como no contexto de supercondutores do tipo II, à cosmologia, abordada em transições de fase no universo primordial.

No âmbito dessa dissertação, faremos um desenvolvimento gradual do assunto proposto, de forma a tentar elencar da maneira mais natural possível os modelos abordados. Com esse intuito iniciaremos nosso estudo mostrando que soluções do tipo vórtice com energia finita não existem em modelos com simetria  $U(1)$  global com apenas o campo de matéria  $\phi$ . Tal impossibilidade é assegurada pelo teorema de Derrick. Em seguida trataremos de uma forma de evadir esse teorema incluindo um campo de gauge  $A_\mu$  com simetria  $U(1)$  local, e a partir daí mostraremos que é possível obter soluções do tipo vórtice com energia finita para esse modelo, que a essa altura é chamado de modelo de Maxwell-Higgs Abelian.

Na seção 1.2 é abordado o mecanismo de Bogomoln'yi, que implementa a noção de auto-dualidade, a qual estabelece compatibilidade entre as equações de movimento do modelo com equações de primeira ordem que minimizam a energia do sistema, deixando-a proporcional ao fluxo magnético. A posteriori, o mecanismo de Bogomol'nyi é desenvolvido de forma idiosincrática e então aplicado ao modelo de Maxwell-Higgs, provendo equações autoduais que possuem apenas solução numérica.

Iniciamos o Capítulo 2, apresentando o modelo de Chern-Simons-Higgs fazendo uso de um potencial autodual de sexta ordem em  $|\phi|$ . Tal modelo, além de apresentar soluções do tipo vórtice de energia finita, vincula um fluxo magnético à partículas carregadas que interagem com o potencial  $A_\mu$ , com isso ele dá suporte à existência de vórtices carregados. De fato veremos que fazendo a inserção do termo de Chern-Simons no modelo Maxwell-Higgs, somos levados a vórtices carregados, o que era uma impossibilidade para o modelo puro de Maxwell-Higgs [22]. Notamos de imediato, na seção 2.2, que não é possível utilizar o mecanismo de Bogomol'ny na saturação da energia do modelo de Maxwell-Higgs com termo de Chern-Simons, essa incapacidade se dá devido à existência de um campo elétrico no funcional da energia, porém as condições de energia finita são asseguradas impondo restrições ao comportamento do campo de gauge  $A_\mu$  e do campo escalar  $\phi$ , tanto em  $r = 0$ , quanto para  $r \rightarrow \infty$ . A fim de trazer a noção de autodualidade de volta, na seção 2.3 fazemos uso de um campo escalar auxiliar na lagrangiana de Maxwell-Higgs com termo de Chern-Simons, com a intenção de saturar a energia do campo elétrico, obtendo as equações autoduais via minimização do funcional da energia. Esses modelos ditos *carregados* possuem soluções estáveis do tipo vórtice de energia finita.

Uma vez que tais modelos carregados suportavam vórtices, fomos levados a pensar em um novo modelo, cujo campo de gauge  $A_\mu$  tem sua dinâmica governada pelo termo de Maxwell, enquanto que outro campo de gauge  $\mathcal{A}_\mu$  seria governado por Chern-Simons, em conjunto com um potencial de sexta ordem com três vácuos. Dessa forma, as equações de movimento relacionadas ao campo elétrico e magnético de Maxwell se desacoplam das equações de movimento para os campos de Chern-Simons, aumentando o número de equações de movimento. Tal modelo foi abordado na seção 3, entretanto ele não suporta soluções de vórtices e sua energia não pode ser minimizada devido à existência do campo elétrico  $E$  relacionado ao termo de Maxwell. Para saturar essa energia foi tentado adicionar um termo misto de Chern-Simons, composto por ambos os campos de gauge à densidade de lagrangiana, dessa vez a energia pôde ser corretamente minimizada, embora as soluções obtidas não fossem compatíveis com as demais equações de movimento, levando novamente a um sistema que não possui soluções do tipo vórtice de energia finita. Por último, o modelo original foi alterado, de forma a conter um campo escalar real  $\mathcal{N}$ . Tal alteração levou a uma configuração de energia finita e mínima, além disso soluções topológicas do tipo vórtice foram encontradas.

No decorrer dessa dissertação tentamos manter um padrão único de notação para que houvesse a possibilidade de uma clara comparação entre os modelos de diferentes capítulos e seções.

# Capítulo 1

## Vórtices

Nesse capítulo estudamos como soluções do tipo vórtice, que consistem em sólitons torvelinhos, emergem em teorias de gauge do grupo  $U(1)$ , em  $2 + 1$  dimensões do espaço-tempo, com quebra espontânea de simetria. Nos modelos que vamos tratar, os vácuos possuem simetria circular nos quais se faz presente o mecanismo de Higgs [3, 2]. Tais soluções possuem aplicações em áreas que vão desde supercondutividade [4, 5], teoria eletrofraca [6] a cosmologia [1].

Revisamos também o mecanismo de Bogomoln'yi, que se baseia em estabelecer uma relação entre a vorticidade dessas soluções e a energia mínima do sistema. Ainda, esse mecanismo fornece equações autoduais de primeira ordem que são consistentes com as equações de Euler-Lagrange desses modelos, tornando mais simples a análise das soluções do tipo vórtice.

### 1.1 Soluções do tipo vórtice

#### 1.1.1 Tentativa de obter soluções em um modelo com simetria $U(1)$ global

Na presente subseção mostraremos que não é possível obter soluções do tipo vórtice com energia finita para um modelo em  $(2 + 1)D$  constituído apenas de um campo escalar complexo  $\phi$  com simetria  $U(1)$  global.

Partimos da densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - V(\phi), \tag{1.1}$$

na qual  $\mu = 0, 1, 2$  e o potencial  $V(\phi)$  é de quarta ordem dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2, \quad (1.2)$$

cujo o vácuo está em  $|\phi| = a$ .

Como buscamos por soluções do tipo vórtice em um espaço de 2-dimensões, cujo limite desse espaço no infinito é um círculo  $S^1$ , construímos um campo  $\phi$  com os seguintes comportamentos no limite e na origem desse espaço:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &\rightarrow ae^{in\theta} & r \rightarrow \infty, \\ \phi(0) &= 0 & r = 0. \end{aligned}$$

Sendo  $r$  e  $\theta$  coordenadas polares no plano, enquanto que  $a$  é o valor esperado no vácuo e  $n$  deve ser um número inteiro para garantir a univocidade da solução. A escolha de um campo com esses comportamentos é também guiada por uma tentativa de generalizar, em duas dimensões espaciais, soluções do tipo sólitons que naturalmente existem em modelos de uma dimensão espacial (*kinks*) [7]. Essa configuração para o campo  $\phi$  é comumente chamada de vórtice.

Considerando o limite estático, vamos analisar a energia obtida a partir da densidade de lagrangiana (1.1), utilizando o componente  $T^{00}$  do tensor energia-momento:

$$H = 2\pi \int \left\{ |\partial_r \phi|^2 + \frac{n^2}{r^2} |\phi(r)|^2 + V(\phi) \right\} r dr. \quad (1.3)$$

Para  $r \rightarrow \infty$ , tanto o potencial  $V(\phi)$  quanto  $\partial_r \phi$  devem se anular, restando apenas o termo  $\frac{n^2}{r^2} |\phi(r)|^2$ , o qual faz a energia do sistema divergir logaritmicamente, mostrando que a solução para  $\phi$  representa um *kink* [8] que não pode ser generalizado para modelos em duas ou mais dimensões espaciais.

De fato, existe um teorema bem conhecido, chamado teorema de Derrick que prevê a não existência de sólitons estáveis em modelos de teoria de campo com mais de uma dimensão espacial. Derrick demonstra que a contribuição do termo cinético e do potencial são iguais para a energia do sóliton em 1 dimensão espacial, assim o sistema terá soluções estáveis. Por sua vez, para 2 dimensões espaciais, o sistema só teria soluções estáveis se não possuir dinâmica [9]. Tal fato inviabiliza a busca por soluções do tipo vórtices de energia finita no modelo em questão.

Por outro lado existem propostas para evadir o teorema de Derrick, como o trabalho de-



desenvolvido em [10], no qual o potencial utilizado depende explicitamente da coordenada radial possibilitando a obtenção de soluções estáveis em  $2D$ . Uma outra proposta é a adição de campos de gauge ao modelo, com o grupo  $U(1)$  local, como será desenvolvido na subseção seguinte.

### 1.1.2 Vórtice no modelo de Maxwell-Higgs Abeliano

Esse modelo é uma generalização relativística da teoria de supercondutividade de Ginzburg-Landau realizada primeiramente por Nielsen e Olesen [11], utilizando um modelo abeliano de Higgs em  $(2+1)D$  que fornece soluções do tipo vórtice que podem ser identificadas como cordas de Nambu eletricamente neutras<sup>1</sup>. A obtenção de tais soluções está relacionada com a relação de massas  $\beta = \frac{m_s^2}{m_v^2}$ , que veremos no decorrer dessa subseção. Para o caso em que  $\beta = 1$  é possível obter soluções exatas para os vórtices, enquanto que para  $\beta \neq 1$  elas podem ser obtidas apenas numericamente a partir das equações de campo.

O modelo agora possui dois campos, o campo de gauge  $A_\mu$ , e o campo escalar de matéria  $\phi$ . A nova densidade de lagrangiana do modelo é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2. \quad (1.4)$$

Sendo  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  o tensor de intensidade de campo, e  $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ . A forma do potencial é dada na Figura (1.1)

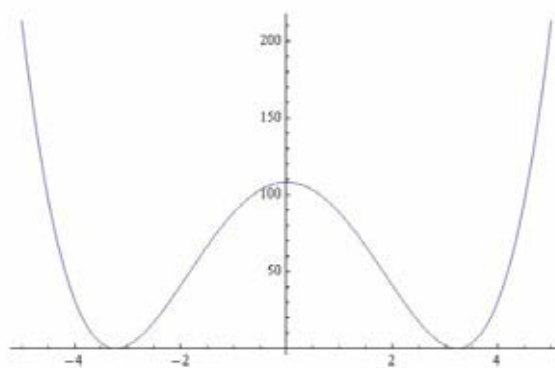


Figura 1.1: Gráfico do Potencial de Higgs por  $\phi \times r$

Por sua vez, as equações de movimento no limite estático, obtidas via equação de Euler-

<sup>1</sup>Julia e Zee [22] mostraram que não existem vórtices carregados no modelo Abeliano de Higgs com energia finita.

Lagrange, são

$$D_i D_i \phi = \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - a^2) \phi, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{ij} \partial_j B = -e J_i. \quad (1.6)$$

Tomando  $A_0 = 0$  temos a liberdade de implementar transformações de gauge independentes do tempo e também o campo elétrico  $E$  associado é nulo. Com isso a energia do sistema fica

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{2} B^2 + |\vec{D}\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - a^2)^2 \right). \quad (1.7)$$

Esse funcional da energia (1.7) é conhecido como Hamiltoniana de Ginzburg-Landau [12] e para que seja finita é necessário que o potencial  $V(\phi)$  vá a zero quando  $|r| \rightarrow \infty$ . Porém esse requerimento não é suficiente para garantir que toda a energia seja finita, mas fixa que para  $|r| \rightarrow \infty$  devemos ter  $|\phi| \rightarrow a$ . Assim, para  $r \rightarrow \infty$ ,  $\phi$  possui a forma

$$\phi = a e^{i\omega(\theta)}, \quad (1.8)$$

sendo que sua fase depende do angulo polar  $\theta$  e não é invariante por transformações de gauge, porém sua vorticidade o é, uma vez que ela não depende especificamente da função  $\omega(\theta)$ , mas sim de suas propriedades topológicas. Escolhendo a função de fase  $\omega(\theta)$  para pertencer a uma classe  $n \neq 1$ , qualquer função contínua que satisfaça a condição  $\omega(0) = 0$  e  $\omega(2\pi) = 2n\pi$  pode ser transformada de modo que  $\omega(\theta) = n\theta$ , então

$$\phi(r) \rightarrow a e^{in\theta} \quad (1.9)$$

Uma vez que o requerimento de energia finita levou a fixar a forma de  $\phi$  no infinito, é necessário lembrar que era o termo  $\frac{n^2}{r^2} |\phi(r)|^2$  que causava a divergência na energia (1.3), portanto precisamos que  $D_i \phi$  decresça mais rapidamente que  $1/r$ . Uma vez que com o campo de gauge acrescentamos o termo  $\vec{A}^2 |\phi|^2$ , para compensar o decaimento da ordem de  $1/r^2$ , o componente espacial  $A_i$  do campo de gauge deve ter a forma

$$A_i = -\frac{n}{er} \varepsilon_{ij} n_j. \quad (1.10)$$

Na qual  $n_j$  é um vetor unitário na direção  $\vec{x}$ . Assim o campo de gauge  $A_i$  decai com  $1/r$ , enquanto

que o componente espacial do tensor de Maxwell  $F_{ij}$  decai com  $1/r^2$ . Uma vez que fixamos essas propriedades, a energia não mais diverge e então podemos partir em busca de soluções do tipo vórtice sem maiores preocupações, desde que essas soluções respeitem os comportamentos assintóticos obtidos em (1.9) e (1.10).

É necessário que notemos que o comportamento assintótico das soluções é invariante sob rotações espaciais e complementado por transformações de fase globais do campo  $\phi$ , ou seja,

$$\phi(\theta) = e^{i\omega} \phi(\theta + \omega). \quad (1.11)$$

Fazendo  $n = 1$  por simplicidade, a forma mais geral dos campos expondo a invariância sobre rotações espaciais generalizadas, é

$$\phi(r, \theta) = ae^{i\theta} F(r), \quad (1.12)$$

$$A_i(r, \theta) = -\frac{1}{er} \varepsilon_{ij} n_j A(r) + n_i G(r). \quad (1.13)$$

A contribuição de  $G(r)$  é um gauge puro, logo  $G(r) = 0$ , simplificando em grande monta o processo de obtenção de soluções. Segue da (1.9) e (1.10) que as funções  $F(r)$  e  $A(r)$  obedecem a

$$F(r) \rightarrow 1, \quad A(r) \rightarrow 1 \quad r \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

Usando (1.12) e (1.13) nas equações de movimento obtemos apenas duas equações diferenciais ordinárias;

$$-\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} \right) - 2e^2 a^2 \frac{F^2}{r} (1 - A) = 0, \quad (1.15)$$

$$-\frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) + \lambda a^2 r F (F^2 - 1) + \frac{F}{r} (1 - A)^2 = 0, \quad (1.16)$$

com  $r \rightarrow \infty$ . Além disso, o requisito de suavidade dos campos em  $r = 0$  impõe a condição de que  $F(r) \rightarrow 0$ ,  $A(r) \rightarrow 0$ . E aqui nos deparamos com uma situação que nos perseguirá no decorrer dessa dissertação, que é o fato de ser impossível encontrar soluções exatas para as equações  $F(r)$  e  $A(r)$  com essas duas condições de contorno, nos obrigando a recorrer a soluções numéricas. Embora isso não seja realmente um problema, acaba por limitar a nos convencer da existência de soluções de equações (1.15) e (1.16) com os comportamentos requeridos para  $r \rightarrow \infty$  e  $r = 0$ , apenas usando de argumentos confiáveis.

Porém é possível caminhar um pouco mais adiante de forma a vislumbrar a existência dessas soluções. Inicialmente mostramos que há uma família de soluções de dois parâmetros das equações (1.15) e (1.16) que satisfaz a condição para  $r \rightarrow \infty$ . Para  $r$  grande, escrevemos  $A(r) = 1 - v(r)$ ,  $F = 1 - f(r)$ , na qual é necessário  $v(r) \rightarrow 0$  e  $f(r) \rightarrow 0$ , para  $r \rightarrow \infty$ . Com isso a equação (1.15) é linearizada na forma

$$r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) - 2e^2 a^2 v = 0. \quad (1.17)$$

Na qual desprezamos os termos  $vf$  e  $vf^2$  por serem muito pequenos para  $r \rightarrow \infty$ . Ainda  $2e^2 a^2$  é o quadrado da massa do campo vetorial,  $m_V^2$ . Assim a solução para  $v(r)$  que respeita o comportamento assintótico, para  $r \rightarrow \infty$ , é

$$v(r) = C_a \sqrt{r} e^{-m_V r}. \quad (1.18)$$

em que  $C_a$  é um parâmetro arbitrário.

Adicionalmente, a equação (1.16) é linearizada para

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) - 2\lambda a^2 f = 0. \quad (1.19)$$

Na qual  $2\lambda a^2$  é o quadrado da massa do campo de Higgs,  $m_H^2$ . A solução para  $f(r)$  que satisfaz a condição  $f(r) \rightarrow 0$ , para  $r \rightarrow \infty$ , é

$$f(r) = C_f \frac{e^{-m_H r}}{\sqrt{r}}. \quad (1.20)$$

Como  $C_f$  é outro parâmetro arbitrário, temos uma família de soluções com dois parâmetros,  $C_a$  e  $C_f$ .

Embora essas soluções satisfaçam os limites assintóticos, devemos também observar as condições que as soluções devem satisfazer na origem ( $r = 0$ ), tendo em vista o mapeamento do círculo no espaço real. Para  $r$  pequeno escrevemos

$$F(r) = \alpha_f r + \beta_f r^3 + \dots, \quad (1.21)$$

$$A(r) = \alpha_a r^2 + \beta_a r^4 + \dots, \quad (1.22)$$

nas quais  $\alpha_f, \dots, \beta_a$  são constantes a serem determinadas. Substituindo estas expressões nas

equações (1.15) e (1.16), e igualando os termos, obtemos que  $\alpha_f$  e  $\alpha_a$  são arbitrárias, enquanto  $\beta_f$  e  $\beta_a$  são expressos em termos dos  $\alpha$ 's como segue

$$\begin{aligned}\beta_f &= -\frac{m_V^2}{8}\alpha_f^2, \\ \beta_a &= -\frac{m_H^2}{16}\alpha_f - \frac{\alpha_a\alpha_f}{8}.\end{aligned}$$

Assim, a segunda família de soluções também possui dois parâmetros,  $\alpha_f$  e  $\alpha_a$ .

Embora tenhamos sucesso em dividir as soluções em duas famílias, a solução que interessa é a que satisfaz ambas as condições, isto é, devem pertencer a ambas as famílias simultaneamente. Para tanto o que buscamos são soluções da primeira família, caracterizadas por valores de  $C_a$  e  $C_f$ , que possam ser combinados com soluções da segunda família para determinados  $\alpha_a$  e  $\alpha_f$ . Essa combinação entre soluções só é possível se assegurarmos que em um ponto  $r_0$  as funções  $F(r_0)$  e  $A(r_0)$  sejam iguais as suas derivadas  $F'(r_0)$  e  $A'(r_0)$ . Com isso obtemos quatro equações algébricas para quatro parâmetros  $C_a$ ,  $C_f$ ,  $\alpha_a$  e  $\alpha_f$ , de forma que podemos obter um conjunto discreto de soluções. Tal fato é um forte apoio à existência de soluções que possuam o comportamento que esperamos e assim descrevam vórtices. Mas é importante ressaltar que essas soluções não são exatas cabendo apenas uma análise numérica.

Apesar da ausência de soluções analíticas, algumas propriedades desses vórtices podem ser observadas de forma mais simples, como a massa do sóliton e seu tamanho que podem ser estimados assumindo que  $\frac{m_H}{m_V} \approx 1$ . Para tanto, vamos realizar uma mudança de variáveis, de forma que os três termos na de energia(1.7) possuam a mesma ordem de  $\phi \sim 1$ ,  $C_i \sim 1$ ,  $y \sim 1$ , sendo  $\vec{y} = m_V \vec{x}$ . As variáveis podem ser alteradas para

$$\begin{aligned}\phi(x) &= a\psi(y), \\ A_i(x) &= \frac{m_V}{e}C_i(y),\end{aligned}$$

assim temos para os termos da densidade de energia;

$$\begin{aligned}F_{ij}^2 &= \left(\frac{m_V^2}{e}\right)^2 C_{ij}^2, \\ |D_i\phi|^2 &= (m_V a)^2 |\mathcal{D}_i\psi|^2 = \left(\frac{m_V^2}{e}\right)^2 \frac{1}{2} |\mathcal{D}_i\psi|^2, \\ \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - a^2)^2 &= \frac{\lambda a^4}{2} (|\phi|^2 - 1)^2 = \left(\frac{m_V^2}{e}\right)^2 \frac{m_H^2}{8m_V^2} (|\phi|^2 - 1)^2,\end{aligned}$$

com  $C_{ij} = \frac{\partial C_j}{\partial y^i} - \frac{\partial C_i}{\partial y^j}$ ,  $\mathcal{D}_i \psi = \left( \frac{\partial}{\partial y^i} + iC_i \right) \psi$ . Substituindo no funcional da energia (1.7) temos

$$H = \frac{m_V^2}{e^2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{4} C_{ij}^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_i \psi)^2 + \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{m_V^2} (|\psi|^2 - 1)^2 \right] d^2 y. \quad (1.23)$$

Como  $\frac{m_H}{m_V} \approx 1$ , o mınimo do funcional da energia e obtido em  $\psi \sim 1$  e  $C_i \sim 1$ , e o tamanho caracterıstico do vortice no espaco e da ordem  $r_{vor} \approx \frac{1}{m_V}$ , enquanto que sua massa e da ordem de  $M_{vor} \approx \frac{m_V^2}{e^2}$ . Podemos expressar a dependência da massa em relação aos parâmetros do modelo, a partir da (1.23), de forma mais precisa como

$$M_{vor} = \frac{m_V^2}{e^2} M \left( \frac{m_H}{m_V} \right), \quad (1.24)$$

na qual a função  $M \left( \frac{m_H}{m_V} \right)$  pode ser obtida numericamente. Essa expressão (1.24) representa a massa do vortice por unidade de comprimento.

Por fim cabe-nos notar que a inserção de um campo gauge  $A_\mu$  atrela o vortice a um fluxo magnético. Considerando a integral  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$  em torno do círculo  $S^1$  no infinito e utilizando o teorema de Stokes, temos  $\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\Phi}{e}$ . Tomando como ansatz  $A_\theta = \frac{v(r)-n}{er}$ , temos que

$$\Phi = e \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = e \oint A_\theta r d\theta = -2n\pi. \quad (1.25)$$

Com isso o fluxo magnético e quantizado em múltiplos inteiros de  $2\pi$ .

Aqui encerramos essa subseção na qual vimos soluções do tipo vortices, tais soluções ocorrem em supercondutores tipo-2, em Física de Partículas e a existência desses vortices também e considerada no Modelo Padrão Estendido (MPE), embora não tenham sido observadas e no contexto cosmológico elas são chamados de cordas cósmicas.

## 1.2 Mecanismo de Bogomol'nyi

O mecanismo de Bogomol'nyi [13] e a peça chave por trs das soluções do tipo vortices, parede de domínio e monopolo magnético, uma vez que fornece um conjunto equações diferenciais de primeira ordem nas derivadas compatíveis com as equações de Euler-Lagrange que descrevem sistemas, tal característica e chamada de autodualidade. As equações de primeira ordem são chamadas de equações de Bogomol'nyi e são responsáveis pela saturação de energia, reduzindo-a a um mínimo proporcional ao fluxo magnético

A priori, o mecanismo de Bogomol'nyi consiste em reescrever a energia do sistema como uma soma entre um termo relacionado à carga topológica e quadrados perfeitos, de forma a levar a energia a valores mínimos proporcionais a essa carga.

Para efeito de introdução ao assunto, nos focaremos em soluções do tipo vórtice, nas quais a distribuição do campo no seu interior é obtida via minimização da energia do sistema.

A densidade de lagrangiana que utilizaremos é a mesma do modelo anterior, dada em (1.4). Uma vez que buscamos soluções que minimizam a energia, precisamos primeiramente encontrar o funcional da mesma através do tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ ;

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} + F_{\nu\alpha}F_{\mu}^{\alpha}) + \frac{1}{2} (D_{\mu}\phi^*D_{\nu}\phi + D_{\nu}\phi^*D_{\mu}\phi) - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

A sua componente  $T^{00}$  é a densidade de hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_{\mu}\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2.$$

Tomando a integral de  $\mathcal{H}$  na área, obtemos o funcional da energia do sistema

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_{\mu}\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 \right). \quad (1.26)$$

O qual, no regime estático, se reduz a

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{4}F_{ij}^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 \right), \quad (1.27)$$

sendo  $i, j = 1, 2$ . Buscaremos soluções do tipo vórtice com propriedades específicas, a primeira delas é que o campo de matéria  $\phi$  saia de zero, em  $r = 0$  e tenha comportamento assintótico para  $r \rightarrow \infty$ . Assumindo um parâmetro constante  $a$  que representa o valor esperado do campo  $\phi$  no vácuo do potencial, temos

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow 0, & r &= 0, \\ \phi &\rightarrow ae^{in\theta}, & r &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.28)$$

O campo de gauge  $A_{\mu}$ , também possui comportamento definido, o qual, em coordenadas

polares, escolhemos

$$\begin{aligned} A_r &= 0 \\ A_\theta &\rightarrow \frac{v(r) - n}{er}, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.29)$$

O parâmetro  $n$  que aparece em  $A_\theta$  é a vorticidade associada ao sistema. Devemos introduzir uma nova forma para o campo de matéria  $\phi$  de maneira que ele seja escrito como a combinação de dois campos escalares reais. Assim

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2).$$

Sendo  $\phi_a$  ( $a = 1, 2$ ) o campo real, temos

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{4} F_{ij}^2 + |\overline{D}_i \phi_a|^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_a \phi_a - a^2)^2 \right). \quad (1.30)$$

Na qual  $\overline{D}_i \phi_a = \partial_i \phi_a + e \varepsilon_{ab} A_i \phi_b$ , como  $a, b = 1, 2$ , o tensor antissimétrico é dado por  $\varepsilon_{a,b} = \varepsilon_{1,2} = 1$ .

A integral (1.30) pode ser simplificada por uma troca para variáveis adimensionais, da seguinte forma

$$\phi_a = a Q_a, \quad A_i = \frac{a}{\sqrt{2}} v_i, \quad x_i = \frac{\sqrt{2}}{ea} y_i \quad (1.31)$$

com isso temos o Jacobiano

$$d^2y = \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| d^2x,$$

que fornece

$$d^2x = \frac{2}{e^2 a^2} d^2y. \quad (1.32)$$

Além disso a mudança de variáveis obviamente afeta o tensor de intensidade de campo bem como a derivada covariante, como segue

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i, \\ &= \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^i} A_j - \frac{\partial}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^j} A_i, \\ &= \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^i} \left( \frac{a}{\sqrt{2}} v_j \right) - \frac{\partial}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^j} \left( \frac{a}{\sqrt{2}} v_i \right). \end{aligned}$$



Como  $\frac{\partial y^i}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^j} = \frac{ea}{\sqrt{2}}$ , temos

$$F_{ij} = \frac{ea^2}{2} (\partial_i v_j - \partial_j v_i) = \frac{ea^2}{2} f_{ij}, \quad (1.33)$$

com  $f_{ij} = (\partial_i v_j - \partial_j v_i)$ . Por sua vez a derivada covariante fica

$$\bar{D}_i = \partial_i + e\varepsilon_{ab}A_i = \frac{ea}{\sqrt{2}} (\partial_i + \varepsilon_{ab}v_i). \quad (1.34)$$

Devemos então substituir (1.31), (1.32), (1.33), (1.34), em (1.30), obtendo

$$H = \int \frac{2}{e^2 a^2} d^2 y \left[ \frac{1}{4} \frac{e^2 a^4}{4} f_{ij}^2 + \frac{e^2 a^4}{4} |\bar{D}_i Q_a|^2 + \frac{\lambda a^4}{4} (Q_a Q_a - 1)^2 \right]. \quad (1.35)$$

Considerando

$$\frac{2\lambda}{e^2} = \beta = \frac{m_s^2}{m_v^2}, \quad \frac{e^2}{4\pi} = \alpha, \quad \frac{H}{a^2 2\pi} = \mathcal{E}, \quad (1.36)$$

na qual  $m_s = \sqrt{2\lambda}a$  é a massa do campo escalar, e por sua vez,  $m_v = ea$  é a massa do campo vetorial. Dessa forma temos

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 y \left[ \frac{1}{4} f_{ij}^2 + (D_i Q_a)^2 + \frac{\beta}{2} (Q_a Q_a - 1)^2 \right]. \quad (1.37)$$

Nesse momento estamos na iminência do ponto chave do método de Bogomol'nyi, que consiste em completar quadrados na expressão da energia, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 y \left\{ \frac{1}{4} (f_{ij} - \varepsilon_{ij}(1 - Q_a Q_a))^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} D_j Q_a + \varepsilon_{ab} D_i Q_b)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\beta - 1}{2} (Q_a Q_a - 1)^2 + \left[ \frac{1}{2} f_{ij} \varepsilon_{ij} (1 - Q_a Q_a) - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ab} D_j Q_a D_i Q_b \right] \right\}. \quad (1.38) \end{aligned}$$

Ainda que de maneira não intuitiva e, menos ainda, trivial, podemos mostrar que o último termo da integral (1.38) é uma divergência de um vetor que chamaremos de  $S$ , assim

$$\frac{1}{2} f_{ij} \varepsilon_{ij} (1 - Q_a Q_a) - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ab} D_j Q_a D_i Q_b = \nabla_d S_d. \quad (1.39)$$

O vetor  $S_d$ , possui a seguinte forma

$$S_d = \varepsilon_{di} (Q_a D_i Q_b \varepsilon_{ab} + v_i). \quad (1.40)$$

Há uma importância fundamental na igualdade (1.39), uma vez que sua integral é igual a vorticidade do campo vetorial, portanto, para um vórtice com circulação  $n$ , temos

$$\frac{1}{2\pi} \int d^2y \nabla_d S_d = n. \quad (1.41)$$

Porém, antes de prosseguirmos é válido voltarmos nossa atenção a uma demonstração mais detalhada da (1.41) e para isso precisamos inicialmente decompor o vetor  $S_d$  em coordenadas polares, assim

$$S_d = S_r \hat{r} + S_\theta \hat{\theta} = -(Q_r D_\theta Q_\theta + Q_\theta D_\theta Q_r - v_\theta) \hat{r} - (Q_a D_r Q_b \varepsilon_{ab} + v_r) \hat{\theta}. \quad (1.42)$$

A componente radial,  $S_r$ , nos fornece

$$S_r = Q_r (\partial_\theta Q_\theta - v_\theta Q_r) - Q_\theta (\partial_\theta Q_r + v_\theta Q_\theta) + v_\theta, \quad (1.43)$$

enquanto a componente angular,  $S_\theta$ , fica

$$S_\theta = -Q_r \partial_r Q_\theta + Q_r^2 v_r + Q_\theta \partial_r Q_r + v_r Q_\theta^2 - v_r = (Q_r^2 + Q_\theta^2) v_r - v_r. \quad (1.44)$$

Tendo em mente que a relação (1.28) estabelece um comportamento assintótico sobre o campo escalar  $\phi$ , enquanto a (1.31) estabelece a relação entre  $\phi$  e  $Q_a$ , logo é extremamente intuitivo notar que o comportamento assintótico de  $\phi$  está contido em  $Q_a$ . Uma vez que

$$\begin{aligned} Q_r &= Q_\theta \rightarrow \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2}} & r \rightarrow \infty, \\ Q_r &= Q_\theta \rightarrow 0 & r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Assim temos que

$$Q_r^2 + Q_\theta^2 = 1, \quad (1.46)$$

fazendo com que  $S_\theta = 0$ . Com isso a integral (1.41) depende apenas da componente radial de

$S_d$ ;

$$\begin{aligned}
\int d^2y(\partial_d S_d) &= \int \int drd\theta r(\partial_r S_r) + 0 \\
&= \int \int dr[\partial_r(rS_r) - S_r]d\theta = \\
&= \int d\theta [rS_r]_{ext.} - \int \int drd\theta S_r = \\
&= \int d\theta r [Q_r \partial_\theta Q_\theta - Q_r v_\theta Q_r + \\
&\quad - Q_\theta \partial_\theta Q_r - Q_\theta v_\theta Q_\theta + v_\theta]_{ext.} \\
&\quad - \int \int drd\theta [Q_r \partial_\theta Q_\theta - Q_r v_\theta Q_r - Q_\theta \partial_\theta Q_r + \\
&\quad - Q_\theta v_\theta Q_\theta + v_\theta].
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Tomando sua derivada em relação a  $\theta$ , temos

$$\partial_\theta Q_r = \partial_\theta Q_\theta = \frac{in e^{in\theta}}{\sqrt{2}}.$$

Essas considerações levam a integral (1.47) a

$$\begin{aligned}
\int d^2y(\partial_d S_d) &= - \int \int drd\theta \left( \frac{in}{\sqrt{2}} e^{2in\theta} - v_\theta Q_r^2 - \frac{in}{\sqrt{2}} e^{2in\theta} - v_\theta Q_\theta^2 + v_\theta \right) + \\
&\quad + \int d\theta \left( \frac{n\sqrt{2}}{ae} \right) = \frac{2n\pi\sqrt{2}}{ae} + 0.
\end{aligned}$$

Com isso a equação (1.38), toma a forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= n + \frac{1}{2\pi} \int d^2y \left[ \frac{1}{4} (f_{ij} - \varepsilon_{ij}(1 - Q_a Q_a))^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} D_j Q_a + \varepsilon_{ab} D_i Q_b)^2 + \frac{\beta - 1}{2} (Q_a Q_a - 1)^2 \right].
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Esse é o momento em que o funcional da energia já possui os quadrados completados, como era uma de nossas metas. É preciso agora minimizar esse funcional e a forma mais direta é tendo

$$f_{ij} - \varepsilon_{ij}(1 - Q_a Q_a) = 0, \tag{1.49}$$

$$\varepsilon D_j Q_a + \varepsilon_{ab} D_j Q_b = 0. \tag{1.50}$$

Levando a

$$\mathcal{E} = n + \frac{1}{2\pi} \int d^2y \left[ \frac{\beta - 1}{2} (Q_a Q_a - 1)^2 \right]. \quad (1.51)$$

O parâmetro  $\beta$  está associado a relação entre as massas do campo escalar e do campo vetorial. Como mostrado em (1.36), se ambas as massas forem iguais,  $m_s = m_v$  ( $\beta = 1$ ), a integral restante vai a zero e a energia fica apenas relacionada à vorticidade  $n$ , ou seja

$$\mathcal{E} = n, \quad (1.52)$$

assim a energia do sistema é finalmente minimizada e as equações (1.49) e (1.50) são conhecidas como equações de Bogomol'nyi. Embora já tenhamos esse belo resultado, o trabalho ainda não está acabado, uma vez que nos resta analisar as equações de campo (1.49) e (1.50) para expor as equações de primeira ordem citadas no começo dessa seção. Nós procuramos por soluções com comportamento assintótico na seguinte forma

$$Q_1 = f(r) \cos(n\theta), \quad Q_2 = f(r) \sin(n\theta), \quad (1.53)$$

e

$$v_\theta = \frac{n}{r} v(r), \quad v_r = 0. \quad (1.54)$$

Claramente  $r$  e  $\theta$  são coordenadas polares no plano. Agora basta substituir (1.53) e (1.54) em (1.49) e (1.50) para obtermos um sistema de equações para as funções  $f(r)$  e  $v(r)$ . Assim pela (1.49), temos

$$f_{ij} = \varepsilon_{ij} (1 - Q_a Q_a), \quad (1.55)$$

e como  $f_{ij} = (\partial_i v_j - \partial_j v_i)$ , somos levados a

$$(\partial_i v_j - \partial_j v_i) = \varepsilon_{ij} (1 - Q_a Q_a). \quad (1.56)$$

Deixaremos para substituir a forma de  $Q_a$  mais a frente a fim de permanecer com uma

notação mais compacta. Nesse momento faremos apenas  $i = 1$  e  $j = 2$ , assim

$$\begin{aligned}(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) &= \varepsilon_{12}(1 - Q_a Q_a), \\ \partial_1 v_2 &= (1 - Q_a Q_a),\end{aligned}\tag{1.57}$$

a derivada  $\partial_2 v_1$  é eliminada fazendo  $2 \rightarrow \theta$ ,  $1 \rightarrow r$  e considerando o comportamento de  $A_\theta$  em (1.29), por último temos que  $\varepsilon_{12} = 1$  e  $\varepsilon_{21} = -1$ . Para  $i = 2$  e  $j = 1$  procedemos da mesma forma. Considerando (1.53), a equação (1.57) fica

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r v_\theta) &= 1 - f^2(r)[\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)], \\ &= 1 - f^2(r).\end{aligned}\tag{1.58}$$

Fazendo uso da equação (1.54) na (1.58) temos

$$\begin{aligned}\frac{n}{r} \frac{d}{dr} v &= 1 - f^2(r) \rightarrow \\ \frac{d}{dr} v &= \frac{r}{n}(1 - f^2(r)),\end{aligned}\tag{1.59}$$

que é uma equação de primeira ordem nas derivadas, consistente com as equações de movimento advindas da densidade de lagrangiana (1.4).

Nos resta analisar a equação (1.50). Como  $D_j Q_a = \partial_j Q_a + \varepsilon_{ab} v_j Q_b$  e  $D_j Q_b = \partial_j Q_b + \varepsilon_{ab} v_j Q_a$ , a equação (1.50) fica

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(\partial_j Q_a + \varepsilon_{ab} v_j Q_b) &= \varepsilon_{1j}(\partial_j Q_a + \varepsilon_{ab} v_j Q_b) + \varepsilon_{2j}(\partial_j Q_a + \varepsilon_{ab} v_j Q_b), \\ &= (\partial_2 Q_1 + \varepsilon_{12} v_2 Q_2 + \partial_2 Q_2 + \varepsilon_{21} v_2 Q_1) + \\ &- (\partial_1 Q_1 + \varepsilon_{12} v_1 Q_2 + \partial_1 Q_2 + \varepsilon_{21} v_1 Q_1), \\ &= (\partial_2 - \partial_1)(Q_1 + Q_2) + (v_2 - v_1)(Q_2 - Q_1).\end{aligned}\tag{1.60}$$

Fazendo exatamente o mesmo para o segundo termo  $\varepsilon_{ab}(\partial_i Q_b + \varepsilon_{ba} v_j Q_b)$ , temos que

$$\varepsilon_{ab}(\partial_i Q_b + \varepsilon_{ba} v_j Q_b) = \partial_2(Q_2 - Q_1) - (Q_1 + Q_2)(v_1 + v_2).\tag{1.61}$$

Assim a equação (1.50) fica

$$\begin{aligned}\varepsilon D_i Q_a + \varepsilon_{ab} D_j Q_b &= (\partial_2 - \partial_1)(Q_1 + Q_2) + (v_2 - v_1)(Q_2 - Q_1) + \\ &+ \partial_2(Q_2 - Q_1) - (Q_1 + Q_2)(v_1 + v_2) = \\ &= \partial_2 Q_2 - \partial_1 Q_1 - Q_1 v_2 - Q_2 v_1 = 0.\end{aligned}$$

Na qual substituímos (1.53) e (1.54), e usando coordenadas cilíndricas temos,

$$\begin{aligned}\varepsilon D_j Q_a + \varepsilon_{ab} D_i Q_b &= \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} [f(r) \sin n\theta] - \frac{d}{dr} [f(r) \cos n\theta] - \frac{nv}{r} \cos n\theta \\ &= \frac{n}{r} (1 - v) f(r) - \frac{df(r)}{dr} = 0.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{n}{r} (1 - v) f(r) = \frac{df(r)}{dr}, \quad (1.62)$$

que por sua vez também é uma equação de primeira ordem compatível com as equações de movimentos da densidade de lagrangiana (1.4).

Uma vez que o trabalho se mostra concluído, cabe ressaltar a possibilidade de mostrar que as soluções obtidas a partir das equações diferenciais de primeira ordem (1.59) e (1.62), considerando as condições de contorno para  $r \rightarrow \infty$ , existem e sua forma é dada na Figura (1.2).

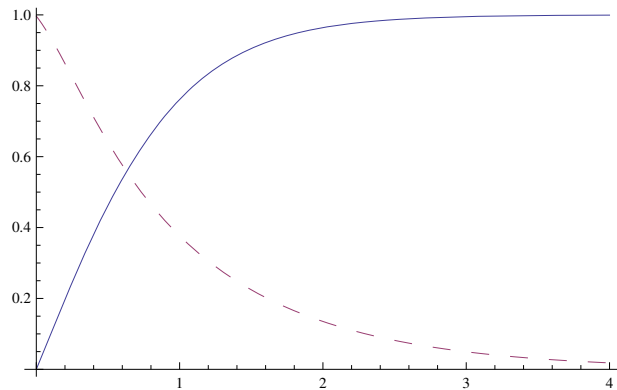


Figura 1.2:  $f(r)$  em linha sólida e  $v(r)$  em pontilhado, por  $r$

Uma vez abordado o mecanismo de Bogomol'nyi iremos aplicá-lo, nas seções seguintes, a modelos de vórtices como de Abrikosov-Nielsen-Olesen visto na seção anterior, com isso obteremos equações de primeira ordem nas derivadas, consistentes com as equações de movimento,

que irão facilitar uma análise mais clara do sistema, ainda que não haja solução exata para essas equações.

### 1.2.1 Uma Outra Abordagem ao Mecanismo de Bogomol'nyi

Acabamos de ver a abordagem tradicional do mecanismo de Bogomol'nyi, utilizando o mesmo formalismo do trabalho original [13]. Nessa subseção iremos desenvolver o mesmo mecanismo aplicado ao modelo de Maxwell-Higgs Abeliano (subseção 1.1.2), porém de um ponto de vista idiossincrático, que consiste em não completar quadrado diretamente na energia, mas sim em fazer uso da consistência entre a equação autodual  $|D_{\pm}\phi|^2 = 0$  e as equações de movimento. Claramente isso não deve causar espécie ao leitor, uma vez que leva aos mesmos resultados obtidos originalmente por Bogomol'nyi.

Lembremos da hamiltoniana (1.7)

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{2}B^2 + |\vec{D}\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 \right). \quad (1.63)$$

Primeiramente temos a identidade fundamental

$$|\vec{D}\phi|^2 = |D_{\pm}\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \mp \varepsilon^{ij}\partial_i J_j, \quad (1.64)$$

a qual provaremos antes de prosseguir.

Para demonstrar a identidade fundamental (1.64), começaremos abrindo o termo  $|D_{\pm}\phi|^2$ , da seguinte forma

$$\begin{aligned} |D_{\pm}\phi|^2 &= (D_{\pm}\phi)(D_{\pm}\phi)^*, \\ &= [(D_1 \pm iD_2)\phi][(D_1 \pm iD_2)\phi]^*, \\ &= |D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2 \mp i[(D_1\phi)(D_2\phi)^* - (D_2\phi)(D_1\phi)^*], \\ &= |\vec{D}\phi|^2 \mp i\varepsilon_{ij}(D_i\phi)(D_j\phi)^*. \end{aligned}$$

Com isso, vemos claramente que

$$|\vec{D}\phi|^2 = |D_{\pm}\phi|^2 \pm i\varepsilon_{ij}(D_i\phi)(D_j\phi)^*. \quad (1.65)$$

Agora basta mostrar que  $i\varepsilon_{ij}(D_i\phi)(D_j\phi)^* = -eB|\phi|^2 + \varepsilon_{ij}\partial_i J_j$ . Uma vez que  $J_j = -i\varepsilon_{ij}[\phi(D_j\phi)^* -$

$\phi^*(D_j\phi)]$  temos

$$\begin{aligned}
\pm\varepsilon_{ij}\partial_i J_j &= \mp i\varepsilon_{ij}[(\partial_i\phi)(D_j\phi)^* + \phi\partial_i(D_j\phi)^* - (\partial_i\phi^*)(D_j\phi) - \phi^*\partial_i(D_j\phi)] \\
&= \mp i\varepsilon_{ij}(D_i\phi)(D_j\phi)^* \pm \varepsilon_{ij}e\partial_i A_j |\phi|^2 \\
\therefore \pm i\varepsilon_{ij}(D_i\phi)(D_j\phi)^* &= \pm\varepsilon_{ij}\partial_i J_j \mp eB|\phi|^2.
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Na qual usamos  $\varepsilon_{ij}\partial_i A_j = -B$ . Finalmente, substituindo (1.66) em (1.65), temos que

$$|\vec{D}\phi|^2 = |D_{\pm}\phi|^2 + \pm\varepsilon_{ij}\partial_i J_j \mp eB|\phi|^2. \tag{1.67}$$

Agora vamos averiguar o funcional da energia (1.63), que toma a forma

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{2}B^2 + |D_{\pm}\phi|^2 \mp eB|\phi|^2 \pm \varepsilon^{ij}\partial_i J_j + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 \right). \tag{1.68}$$

Dá maneira como está o integrando de (1.68) a energia não é positivo-definida, assim primariamente assumimos que  $|D_{\pm}\phi|^2 = 0$ , levando a

$$D_{\pm}\phi = D_i\phi \pm i\varepsilon_{ij}D_j\phi = 0 \tag{1.69}$$

$$D_i\phi = \mp i\varepsilon_{ij}D_j\phi, \tag{1.70}$$

essa equação é chamada de equação autodual e é equivalente à equação (1.50) [32]. Ainda no limite estático, utilizando (1.69) em  $J_i$ , temos

$$J_i = \pm\varepsilon_{ij}\partial_j |\phi|^2. \tag{1.71}$$

Assim a equação de movimento (1.6) toma a forma

$$\varepsilon_{ij}\partial_j B = \mp e\varepsilon_{ij}\partial_j |\phi|^2,$$

cuja integral fornece

$$B = \mp e|\phi|^2 + c. \tag{1.72}$$

A constante de integração  $c$  pode ser determinada utilizando a equação de movimento (1.5), uma vez que elas devem ser compatíveis. Para que a solução de (1.69) seja também solução de



(1.5), devemos usar a primeira na última, de forma que a equação (1.5) pode ser reescrita como

$$\mp i\varepsilon_{ij}D_iD_j\phi = \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - a^2)\phi. \quad (1.73)$$

Sendo  $i\varepsilon_{ij}D_iD_j\phi = eB\phi$ , chegamos a

$$+e^2|\phi|^2 \mp ec = \frac{\lambda}{2}|\phi|^2 - \frac{\lambda}{2}a^2. \quad (1.74)$$

Concluimos que para a equação (1.72) ser compatível com (1.5), precisamos que

$$\begin{aligned} 2e^2 &= \lambda, \\ c &= \pm ea^2. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Com isso o campo magnético  $B$  assume a forma

$$B = \mp e(|\phi|^2 - a^2). \quad (1.76)$$

A qual é a segunda equação autodual obtida, que é equivalente a equação (1.59) tomando-se o ansatz adequado para  $A_\theta$  e  $\phi$ .

Agora que conhecemos a forma do campo magnético  $B$ , podemos voltar ao funcional da energia e analisar a integral sobre cada termo.

A contribuição de  $B^2$  para a energia é

$$\frac{1}{2} \int B^2 d^2x = \frac{1}{2} e^2 \int d^2x (|\phi|^4 + a^4 - 2a^2|\phi|^2). \quad (1.77)$$

Enquanto que a contribuição de  $B|\phi|^2$  fica

$$\pm e \int d^2x B|\phi|^2 = -e^2 \int (|\phi|^4 - a^2|\phi|^2) d^2x. \quad (1.78)$$

Por sua vez o potencial contribui com

$$\frac{\lambda}{4} \int d^2x (|\phi|^4 + a^4 - 2a^2|\phi|^2). \quad (1.79)$$

Por último temos a contribuição do termo  $\pm\varepsilon_{ij}\partial_i J_j$ . Utilizando (1.71) temos

$$\begin{aligned}\pm\varepsilon_{ij} \int \partial_i J_j d^2x &= \pm\varepsilon_{ij} \int \partial_i (\pm\varepsilon_{jk} \partial_k |\phi|^2) d^2x, \\ &= \int \nabla^2 |\phi|^2 d^2x, \\ &= \int \nabla \cdot (\nabla |\phi|^2) d^2x, \\ &= \oint \nabla |\phi|^2 d\ell,\end{aligned}$$

como  $\phi$  possui comportamento assintótico na fronteira,  $|\phi| \rightarrow a$  para  $r \rightarrow \infty$ , essa integral deve ser nula.

Utilizando a relação (1.75), a energia fica

$$\begin{aligned}H &= \int d^2x \left( \frac{1}{2} e^2 (|\phi|^4 + a^4 - 2a^2 |\phi|^2) - e^2 (|\phi|^4 - a^2 |\phi|^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2}{2} (|\phi|^4 + a^4 - 2a^2 |\phi|^2) \right).\end{aligned}\tag{1.80}$$

Claramente os termos de  $|\phi|^4$  se cancelam, restando

$$\begin{aligned}H &= e^2 a^2 \int d^2x (a^2 - |\phi|^2), \\ &= -e a^2 \int d^2x B,\end{aligned}\tag{1.81}$$

$$= -e a^2 \int d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i A^j.\tag{1.82}$$

Usando o ansatz (1.10) para qualquer  $n$  inteiro, temos que

$$\int d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i A^j = -\frac{2\pi}{e} n = -\frac{\Phi}{e}$$

Com isso a energia do sistema é proporcional ao fluxo magnético,

$$H = a^2 \Phi.\tag{1.83}$$

Esse resultado está claramente em acordo com (1.52), pois a relação (1.36) faz com que a energia (1.83) fique

$$\mathcal{E} = n.\tag{1.84}$$

Assim tanto o método tradicional do mecanismo de Bogomol'nyi, quanto essa forma alternativa são perfeitamente equivalentes.

### 1.2.1.1 Soluções das equações autoduais

Após a saturação da energia é interessante analisar as soluções advindas das equações autoduais.

A equação (1.69), fornece uma equação de primeira ordem para o campo  $|\phi|$ . Assumindo  $\phi = |\phi|e^{i\omega}$ , tem-se

$$eA_i = -\partial_i\omega \mp \varepsilon_{ij}\partial_j \ln |\phi|, \quad (1.85)$$

que é equivalente a equação (1.62). Tomando seu rotacional e usando a equação (1.76), chega-se

$$\nabla^2 \ln |\phi| = e^2(|\phi|^2 - a^2). \quad (1.86)$$

Essa equação não possui solução exata. No entanto é fácil encontrar soluções numéricas do tipo vórtice com  $\phi = af(r)e^{\pm in\theta}$ , na qual  $f(r)$  satisfaz

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} f^2(r) \right) = 2e^2 a^2 (f^2 - 1). \quad (1.87)$$

A título de compatibilidade, as soluções de energia finita das equações de segunda ordem devem ser também soluções das equações autoduais, que são de primeira ordem. Com isso é possível obter soluções topológicas de energia finita para o modelo de Maxwell-Higgs.

### 1.2.1.2 Limite de Bradlow

Por fim, podemos notar que a integral da equação (1.81) nos leva naturalmente a um limite superior na vorticidade para uma determinada área da superfície, válido para soluções topológicas. Com isso

$$2\pi n = e^2 a^2 \int d^2x - \int d^2x |\phi|^2. \quad (1.88)$$

A primeira integral é proporcional à área, enquanto a segunda é sempre positiva, portanto

$$2\pi n \leq e^2 a^2 A_{rea}. \quad (1.89)$$

Sendo  $A_{rea}$  a área obtida na primeira integral. Essa característica é conhecida como *limite de*

*Bradlow.*

É interessante ressaltar que esse limite pode ser estendido para modelos mais complexos, como aqueles com quebra de simetria de Lorentz no setor  $CPT_{par}$  [14, 15, 16]. Por exemplo, no caso apresentado em [16], o modelo é construído para generalizar o caso Maxwell-Higgs incluindo o termo  $\frac{1}{4}(\kappa_F)_{\mu\gamma\alpha\beta}F^{\mu\gamma}F_{\alpha\beta}$  que é responsável pela quebra de simetria Lorentz, nesse caso o limite da Bradlow é dado por

$$2\pi n \leq \frac{e^2 a^2}{1-s} A, \quad (1.90)$$

na qual  $s = \kappa_{rr} - \kappa_{\theta\theta}$ , sendo a contração  $\kappa^{\mu\nu} = (\kappa_F)_{\alpha}^{\mu\alpha\nu}$ . Assim a vorticidade passa a depender do termo que viola a simetria de Lorentz e, se  $s = 0$ , claramente reavemos o limite (1.89).

Assim vimos que o mecanismo de Bogomol'nyi pode ser abordado de outra maneira, que não aquela por meio de completar quadrados no funcional da energia, obtendo exatamente as mesmas equações de primeira ordem e fixando a energia mínima proporcional ao fluxo magnético de forma mais natural. Além disso, foi mostrado que é possível obter soluções do tipo vórtice com energia finita em modelo de Maxwell-Higgs.

# Capítulo 2

## Vórtices Carregados

Na seção 1 do primeiro capítulo estudamos um modelo simples de Maxwell-Higgs com potencial de quarta ordem no qual era possível obter, a partir das equações de movimento, soluções do tipo vórtice com energia finita. Tais soluções não apresentavam tratamento analítico, embora fossem passivas de tratamento numérico. Na seção 2 desse mesmo capítulo vimos um método poderoso, chamado de mecanismo de Bogomol'nyi, que estabelece uma relação entre a vorticidade dessas soluções com a energia mínima do sistema, de forma que as equações diferenciais de primeira ordem que saturam essa energia sejam compatíveis com as equações de movimento.

De agora em diante focaremos nossa atenção na busca por soluções do tipo vórtice em diversos modelos utilizando o mecanismo de Bogomol'nyi sempre que possível, já que a saturação da energia leva a soluções de vórtices estáveis não interagentes, uma vez que elas não tomam em conta a energia de interação em um sistema de  $n$ -vórtices.

No presente capítulo estudamos um outro modelo de gauge, que possui rica topologia e também possui soluções autoduais do tipo vórtice de energia finita. Nesse modelo a dinâmica do campo de gauge  $A_\mu$  é governada pelo termo de Chern-Simon (CS),  $\frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}$ , apresentando peculiaridades topológicas que o torna extremamente útil em física, uma vez que foi cogitado ter aplicações em áreas diversas que vão desde a matéria condensada à cosmologia, sendo seu uso mais citado na explicação do efeito Hall quântico e ainda na supercondutividade a altas temperaturas críticas.

Há diversas motivações para o estudo do modelo de gauge de CS em conjunto com outros modelos. Na seção 2.1 temos o modelo de CS em conjunto com o de Higgs, dessa forma o campo de gauge de CS herda sua dinâmica do campo de matéria  $\phi$  ao qual se acopla e, ainda, vincula

um fluxo magnético à partículas carregadas que interagem com o potencial  $A_\mu$  - A grosso modo é como se obtivéssemos uma carga revestida por um fluxo magnético.

Nesse contexto é também natural se pensar em modelos que agreguem termos tanto de Maxwell quanto de Chern-Simons. Os quais possuem características interessantes como a geração de massa para o fóton, o qual tem sua dinâmica governada não apenas pelo termo de Maxwell, mas também pelo termo Chern-Simons, dando origem a uma eletrodinâmica massiva em  $(2 + 1)D$ . Ainda, tais modelos são de interesse, pois, além da curiosa e rica topologia, sustentam vórtices que carregam tanto carga elétrica quanto magnética, recebendo assim o nome de vórtices carregados. Ainda, esses vórtices poderiam ser observados em alguns sistemas de matéria condensada e poderiam ser as quasi-partículas responsáveis pelo efeito Hall quântico fracionário.

## 2.1 Modelo Chern-Simons-Higgs Abeliano

Apesar dessa seção constar em um Capítulo intitulado de *Vórtices Carregados*, cabe a menção de que o modelo de Chern-Simons-Higgs (CSH) que abordaremos agora não é obrigatoriamente carregado, uma vez que a carga relacionada ao fluxo magnético  $\Phi$  não é necessariamente elétrica, podendo ser, como citam alguns autores, uma carga estatística. Entretanto o termo de CS é fundamental para dar suporte a vórtices carregados nos modelos subsequentes.

O modelo CSH [18, 20, 25], em  $(2 + 1)D$  do espaço-tempo de Minkowski e cuja métrica é  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ , possui a seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi). \quad (2.1)$$

Sendo  $\frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho}$ , conhecido como *termo de Chern-Simons*, responsável por guiar a dinâmica do campo de gauge. O potencial  $V(\phi)$  é de no máximo sexta ordem para garantir renormalização e deve admitir quebra espontânea de simetria com um vácuo não trivial.

### 2.1.1 Equações de movimento

As equações de movimento provenientes dessa densidade de lagrangiana, via equação de Euler-Lagrange, são

$$D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = -gJ^\mu, \quad (2.3)$$

em que  $g$  é a carga elétrica<sup>1</sup> do campo  $\phi$  e  $J_\mu$  é a corrente de matéria

$$J_\mu = (J^0, \vec{J}) = i(\phi^* D_\mu \phi - \phi D_\mu \phi^*). \quad (2.4)$$

A componente temporal da equação de movimento (2.3) é dada por

$$B = -\frac{g}{\kappa} J^0 = -\frac{g}{\kappa} i(\phi^* D_0 \phi - \phi D_0 \phi^*), \quad (2.5)$$

e expõe a dependência do campo magnético  $B$  em relação à densidade de carga conservada  $J_0$ , assim é necessário que  $A_0 \neq 0$ , pois caso contrário o campo magnético seria nulo no limite estático.

### 2.1.2 Saturando a energia

Com o intuito de buscar soluções com energia finita, iremos saturar o limite de Bogomol'nyi. Para tanto começamos averiguando o tensor energia momento, cujos elementos podem ser expressos por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta_{\mu\nu}}.$$

Como o termo de CS não depende da métrica  $\eta_{\mu\nu}$ , sua contribuição é nula na construção do funcional da energia. Portanto, no limite estático a integral na área da componente  $T^{00}$  é

$$H = \int d^2x [|\vec{D}\phi|^2 + g^2 A_0^2 |\phi|^2 + V(|\phi|)]. \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>chamamos a carga elétrica de  $g$  e não como usualmente definido,  $e$ , apenas para facilitar eventuais comparações com os resultados do modelo estudado no capítulo 3.

A saturação desse funcional não é trivial e cabe uma demonstração mais cuidadosa. Considerando a identidade fundamental

$$|\vec{D}\phi|^2 = |(D_i \pm \varepsilon_{ij} i D_j)\phi|^2 \pm gB|\phi|^2 \mp \varepsilon^{ij} \partial_i J_j, \quad (2.7)$$

pode-se usar a equação (2.5) para acrescentar uma dependência de  $A_0$  em  $|\vec{D}\phi|^2$ , da seguinte forma

$$|\vec{D}\phi|^2 = |(D_i \pm \varepsilon_{ij} i D_j)\phi|^2 \pm 2\frac{g^3}{\kappa} A_0 |\phi|^4. \quad (2.8)$$

O termo  $\partial_i J_j$  foi descartado assumindo que, para  $r$  muito grande,  $\phi$  tenha comportamento assintótico. A dependência de  $A_0$  que foi acrescentada na identidade (2.7) pode ser absorvida pelo termo  $g^2 A_0^2 |\phi|^2$ , desde que ele seja escrito de forma conveniente como

$$\begin{aligned} g^2 A_0^2 |\phi|^2 &= \left| ig A_0 \phi \pm i \frac{g^2}{\kappa} (|\phi|^2 - a^2) \phi \right|^2 - \frac{g^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - a^2)^2 \\ &\mp 2\frac{g^3}{\kappa} (|\phi|^2 - a^2) A_0 |\phi|^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo (2.8) e (2.9) no funcional da energia (2.6) teremos

$$\begin{aligned} H &= \int d^2x \left[ |g A_0 \phi \pm \frac{g^2}{\kappa} \phi (|\phi|^2 - a^2)|^2 + |(D_i \pm \varepsilon_{ij} i D_j)\phi|^2 + \right. \\ &\quad \left. + V(\phi) - \frac{g^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - a^2)^2 \pm g a^2 B \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Vemos então que o limite de Bogomol'nyi é saturado com

$$|(D_i \pm i\varepsilon_{ij} D_j)\phi|^2 = 0, \quad (2.11)$$

$$A_0 = \mp \frac{g}{\kappa} (|\phi|^2 - a^2), \quad (2.12)$$

$$V(\phi) = \frac{g^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - a^2)^2. \quad (2.13)$$

Fazendo a energia ser limitada por baixo por

$$H = \pm g a^2 \int d^2x B, \quad (2.14)$$

$$= \pm a^2 \Phi. \quad (2.15)$$



Ainda, a lei de Gauss (2.5) combinada com a equação (2.12) fornece

$$B = \pm \frac{2g^3}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - a^2), \quad (2.16)$$

que é um campo magnético deveras similar ao obtido no caso Abelian de Higgs, embora seja de quarta ordem em  $|\phi|$ .

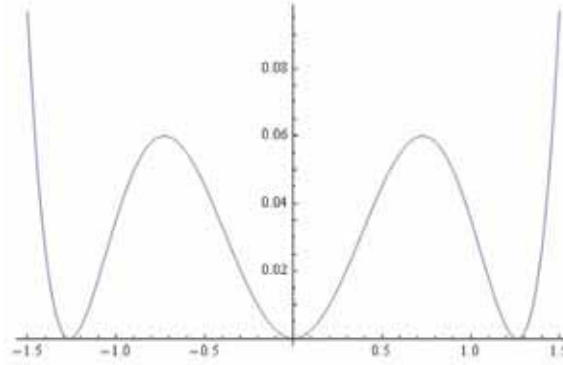


Figura 2.1: Gráfico do Potencial autodual com três vácuos,  $V \times \phi$

### 2.1.2.1 Soluções para as equações autoduais

A fim de investigarmos soluções do tipo vórtice, vamos decompor o campo escalar como

$$\phi = |\phi|e^{i\omega}. \quad (2.17)$$

Por sua vez o campo de gauge é determinado diretamente a partir da equação (2.11) levando em conta a forma de  $\phi$ ,

$$gA_i = -\partial_i\omega \mp \varepsilon_{ij}\partial_j \ln |\phi|. \quad (2.18)$$

Essa é a forma mais simples para  $A_i$ , tal que as equações de Bogomol'nyi sejam satisfeitas.

Tomando o rotacional da equação (2.18) e utilizando a forma do campo magnético (2.16), temos

$$\nabla^2 \ln |\phi| = 2\frac{g^3}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - a^2). \quad (2.19)$$

Embora essa equação seja passível apenas de solução numérica, notamos que há duas soluções que levam a energias finitas, que são aquelas que tendem aos mínimos do potencial autodual

$V(\phi)$  para  $r \rightarrow \infty$ , ou seja

$$|\phi| \rightarrow a,$$

$$|\phi| \rightarrow 0.$$

No primeiro caso as soluções são topologicamente estáveis com quebra de simetria para  $r \rightarrow \infty$ , com isso o fluxo magnético e a energia são dadas, respectivamente, por

$$\Phi = 2\pi n, \tag{2.20}$$

$$H = a^2 |\Phi|. \tag{2.21}$$

No segundo caso, as soluções não apresentam quebra de simetria e sua estabilidade não é assegurada por argumentos topológicos.

Assim o modelo suporta dois tipos de solução de vórtices de energia finita, a primeira é conhecida como solução topológica, enquanto a segunda é dita não topológica.

Entretanto é possível analisar essas soluções de forma mais palpável utilizando um ansatz para vórtices rotacionalmente simétricos [26], dado por<sup>2</sup>

$$\phi = af(r)e^{in\theta}, \tag{2.22}$$

$$A^i = \varepsilon^{ij} \frac{\hat{r}^j}{gr} (v(r) - n). \tag{2.23}$$

Substituindo (2.22) na equação de primeira ordem para  $\phi$  (2.18) chegamos a

$$gA_i = -n\partial_i\theta \mp \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j \ln[(af)^2], \tag{2.24}$$

na qual fizemos  $\omega = n\theta$ . Agora podemos construir um campo magnético a partir do componente espacial do potencial de gauge (2.24), para depois igualá-lo ao campo magnético (2.16) sob a utilização do ansatz (2.22 – 2.23), com isso conseguiremos encontrar uma forma mais simples de esboçar  $f(r)$ . Assim

$$B = \varepsilon^{ki}\partial_k(-n\frac{\partial_i\theta}{2g} \mp \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j \ln[(af)^2]), \tag{2.25}$$

devido à contração do tensor  $\varepsilon^{ki}$  com as derivadas  $\partial_k\partial_i\theta$  o primeiro termo vai a zero e como

---

<sup>2</sup>para uma abordagem semelhante dessas soluções veja [27]

$\varepsilon^{ki}\varepsilon_{ij} = -\delta_j^k$ , resta apenas

$$B = \pm \frac{1}{2g} \partial_k^2 (\ln[(af)^2]).$$

Como a dependência de  $f$  é apenas em  $r$ , tomamos o termo radial do laplaciano em coordenadas cilíndricas

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (2.26)$$

assim, para  $B$  temos

$$B = \pm \frac{1}{2g} \left[ (\ln(af)^2)'' + \frac{1}{r} (\ln(af)^2)' \right],$$

claramente, a fim de deixar a notação mais enxuta, usamos *linha* para denotar a derivada em relação a  $r$ . Essa forma de  $B$  já pode ser comparada com a equação (2.16),

$$\frac{1}{2g} \left[ (\ln(af)^2)'' + \frac{1}{r} (\ln(af)^2)' \right] = \frac{2g^3}{\kappa^2} a^4 f^2 (f^2 - 1).$$

Como  $a$  é o valor do campo do vácuo, podemos dar-lhe um valor arbitrário 1 sem perda de generalidade. No intuito de encontrar uma forma para  $f$ , vamos assumir que  $f(r) = e^{b(r)}$ , o que nos fornece

$$b'' + \frac{1}{r} b' - \frac{2g^4}{\kappa^2} e^{2b} (e^{2b} - 1) = 0.$$

Da forma que se encontra, essa equação não possui solução analítica, porém podemos considerar  $f$  pequeno e assim realizar uma expansão em série para  $b$  de modo que obtemos uma nova forma que pode ser resolvida analiticamente como é feito em [27]. A partir dela podemos traçar o gráfico da Figura (2.2), o qual evidencia o comportamento assintótico de  $f$  para  $r \rightarrow \infty$ , bem como seu comportamento em  $r = 0$ , demonstrando a forma esperada para uma solução do tipo vórtice.

### 2.1.3 Carga e fluxo magnético

Devido ao fato de que  $A_0 \neq 0$  e considerando a equação (2.5), o campo magnético fica relacionado à densidade de carga  $J_0$ , com isso obtemos uma relação entre carga elétrica  $Q$  e o

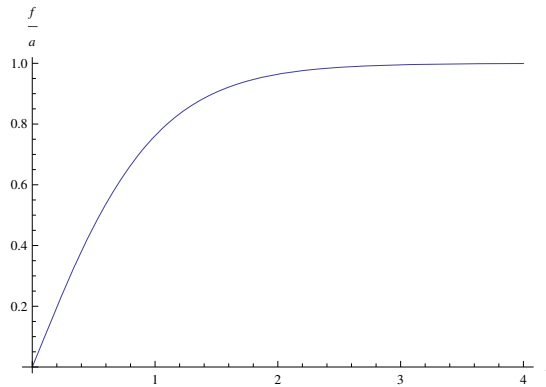


Figura 2.2: Gráfico de  $f/a \times r$ .

fluxo magnético  $\Phi$  a partir da equação (2.5), da seguinte forma

$$Q = \int d^2x J^0 = \kappa \int d^2x B = \frac{\kappa}{g} \Phi. \quad (2.27)$$

Assim, podemos afirmar que soluções de vorticidade  $n$  irão carregar carga elétrica e fluxo magnético, uma vez que ambas estão associadas pela relação (2.27). Existe ainda um análogo do limite de Bradlow dado por

$$\int d^2x B = -\frac{a^4 g^3}{2\kappa^2} \int d^2x - \frac{2g^3}{k^2} \int d^2x \left( |\phi|^2 - \frac{a^2}{2} \right). \quad (2.28)$$

Com isso, a vorticidade é limitada superiormente por

$$n \leq \frac{a^4 g^3}{4\pi \kappa^2} A_{rea}. \quad (2.29)$$

Assim concluimos essa seção, na qual vimos como soluções do tipo vórtice de energia finita emergem de um modelo de Chern-Simons-Higgs com potencial autodual de sexta ordem. Na próxima seção estudamos um modelo mais completo conhecido como modelo de Maxwell-Higgs com termo de Chern-Simons.

## 2.2 Modelo de Maxwell-Higgs com termo de Chern-Simons

Após estudar modelos que propiciam vórtices, nos quais o campo de gauge tem sua dinâmica guiada pelos termos de Maxwell (subseção 1.1.2) e Chern-Simons (seção 2.1), é uma generalização natural pensar em modelos nos quais ambos os termos guiem a dinâmica do campo de gauge, dando origem a vórtices necessariamente carregados em  $(2+1)D$ .

Aqui vamos abordar um modelo de Maxwell-Higgs com termo de Chern-Simons que foi inicialmente estudado por Paul e Khare (1986) [28]. A partir dele mostraremos a existência de soluções do tipo vórtice topológico carregado de energia finita, os quais possuem fluxo magnético quantizado.

### 2.2.1 Equações de Movimento

O modelo possui a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 + \frac{1}{4}\kappa\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha - V(\phi). \quad (2.30)$$

Sendo  $\kappa$  a massa do campo de gauge que consideraremos maior que zero. O potencial adequado é de quarta de ordem, semelhante ao usado no modelo Maxwell-Higgs, portanto é possível obter soluções topológicas advindas desses vácuos degenerados, uma vez que neles  $\phi \neq 0$ ;

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2. \quad (2.31)$$

As equações de Euler-Lagrange [29] a partir da densidade de lagrangiana (2.30) são;

$$D_\mu D^\mu \phi = -\lambda(|\phi|^2 - a^2)\phi, \quad (2.32)$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\mu\sigma\alpha}F_{\sigma\alpha} = -eJ^\mu. \quad (2.33)$$

Em que novamente a corrente de matéria é  $J^\mu = i(\phi^* D^\mu \phi - \phi(D^\mu \phi)^*)$ . Decompondo a corrente em  $J^\mu = (J^0, \vec{J})$ , temos que a densidade de carga  $J^0$  é

$$J^0 = i(\phi^* D^0 \phi - \phi(D^0 \phi)^*) = -2eA_0|\phi|^2. \quad (2.34)$$

A componente temporal da equação de movimento (2.33) fornece

$$\partial_j F^{j0} + \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{0ij}F_{ij} = -eJ^0. \quad (2.35)$$

Essa equação é um análogo da lei de Gauss e ela garante que se  $A_0 = 0$ , tanto o campo magnético quanto o campo elétrico devem ser identicamente nulos. Assim a componente temporal,  $A_0$ , do campo de gauge não é nula, sendo essencial para existência de carga elétrica associada ao vórtice carregado, assim como no modelo CSH.

No regime estático as equações de movimento ficam

$$D_j^2 \phi = \lambda(|\phi|^2 - a^2)\phi - e^2 A_0^2 \phi, \quad (2.36)$$

$$\partial_k F_{jk} + \kappa \varepsilon_{jk} \partial_k A_0 = ie(\phi^* D_j \phi - \phi (D_j \phi)^*). \quad (2.37)$$

Assim como em [18], tomando o seguinte ansatz radial estático para um  $n$ -vórtice

$$A_0 = n\omega_0(r), \quad A_r = 0, \quad A_\theta = nrA(r), \quad \phi(r) = f(r)e^{in\theta}, \quad (2.38)$$

as equações de movimento se tornam,

$$f'' + \frac{f'}{r} - e^2 n^2 \left( A - \frac{1}{er} \right)^2 f + n^2 e^2 \omega_0^2 f - \lambda(f^2 - a^2)f = 0, \quad (2.39)$$

$$A'' - \frac{A'}{r} - \frac{A}{r^2} - e^2 f^2 \left( A - \frac{1}{er} \right) + \kappa \omega_0' = 0, \quad (2.40)$$

$$\omega_0'' + \frac{\omega_0'}{r} - e^2 f^2 \omega_0 + \kappa \left( A' + \frac{A}{r} \right) = 0. \quad (2.41)$$

Note que elas podem ser reduzidas às equações do modelo de Maxwell-Higgs (1.5) e (1.6) se tomarmos  $A_0 = 0$  e  $\kappa = 0$ . Nesse âmbito cabe notar que há uma clara dependência entre  $A_0$  e  $\kappa$ , uma vez que o primeiro vai a zero o segundo é forçado a fazer o mesmo, para não causar inconsistências na equação de movimento (2.33).

## 2.2.2 Energia do Sistema

Agora vamos analisar a energia do sistema. Integrando na área a componente  $T^{00}$  do tensor energia momento, temos

$$H = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2 + |\vec{D}\phi|^2 + e^2 A_0^2 |\phi|^2 + V(\phi) \right\}. \quad (2.42)$$

É importante notar que existe uma contribuição direta do campo elétrico  $E_i$  e, assim como no Chern-Simons-Higgs, do termo de  $|D_0\phi|^2$ . Essa é uma peculiaridade de modelos de vórtices carregados e, como veremos no próximo modelo, é possível utilizar um campo escalar auxiliar para suprimir a contribuição do termo do campo elétrico ao quadrado para a energia, permitindo a obtenção de equações autoduais.

Com o ansatz (2.38), temos

$$\begin{aligned} |\phi(r)| &= f(r), \\ B(r) &= n \left( A'(r) + \frac{A(r)}{r} \right), \\ E(r) &= n\omega_0'(r). \end{aligned}$$

na qual a *linha* indica uma derivada em relação a  $r$ . Com isso a energia toma a forma

$$H = \pi \int_0^\infty r dr \left\{ \left( n^2 \left( A' + \frac{A}{r} \right)^2 + (f')^2 + e^2 n^2 f^2 \left( A - \frac{A}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda a^4 (f^2 - 1)^2 \right) + n^2 ((\omega_0')^2 + e^2 \omega_0^2 a^2 f^2) \right\}.$$

Como não estamos utilizando o mecanismo de Bogomol'nyi, precisamos ter condições apropriadas para obter soluções de vórtices com energia finita. São elas;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1, \quad (2.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \frac{1}{er}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \omega_0(r) = 0, \quad (2.44)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega_0(r) = \lim_{r \rightarrow 0} A(r) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0. \quad (2.45)$$

Essas condições minimizam a energia, uma vez que os termos que possuem dependência radial, vão a zero no infinito mais rápido que  $1/r^2$ , enquanto que os demais termos são tomados iguais a zero.

### 2.2.3 Solução das equações de movimento

Assim, uma vez que se respeite as condições (2.43, 2.44, 2.45), é possível obter vórtices carregados de energia finita. Portanto as usaremos para simplificar as equações de movimento e facilitar a obtenção de soluções. Iniciaremos a busca considerando  $r$  muito grande (condição (2.44)). Tomando  $F \equiv 1 - f$ , a equação (2.39) fica

$$F'' + F' - \lambda(F^3 - 3aF^2 + 2a^2F) = 0, \quad (2.46)$$

valendo da condição (2.43), podemos eliminar os termos de ordens mais altas, uma vez que  $F$  se torna muito pequeno. Assim somos levados a

$$F'' + F' = 2\lambda a^2 F. \quad (2.47)$$

A solução, com comportamento assintótico, para essa equação é

$$F = \frac{c}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{2\lambda}a},$$

na qual  $c$  é uma constante e  $\sqrt{2\lambda}a$  é a massa,  $m_s$ , do campo escalar  $\phi$ . Podemos fazer o mesmo para as outras duas equações; considerando a condição (2.43), fazemos  $\alpha \equiv -\left(A - \frac{1}{er}\right)r^{1/2}$  e  $\alpha_0 \equiv A_0 r^{1/2}$ , assim, para  $r \rightarrow \infty$ , as equações (2.40) e (2.41) tomam a forma

$$\begin{aligned} \alpha'' - ae^2\alpha &= \kappa\alpha', \\ \alpha_0'' - ae^2\alpha_0 &= \kappa\alpha'. \end{aligned}$$

Desse sistema de equações acopladas apenas as seguintes soluções possuem o comportamento esperado

$$A(r) = \frac{1}{er} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+4ae^2}r}}{\sqrt{r}}(c_1 e^{\frac{\kappa}{2}r} + c_2 e^{-\frac{\kappa}{2}r}), \quad (2.48)$$

$$A_0(r) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+4ae^2}r}}{\sqrt{r}}(c_1 e^{\frac{\kappa}{2}r} - c_2 e^{-\frac{\kappa}{2}r}). \quad (2.49)$$

Notemos que as componentes do campo de gauge se combinam de maneira a formar dois mésons vetoriais distintos de massas  $\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+4ae^2}r \mp \frac{\kappa}{2}r$ , e como elas são sempre positivas as equações decaem exponencialmente para  $r$  muito grande.

Nos resta ainda verificar o comportamento das equações (2.39)–(2.41) para  $r$  muito pequeno. Para tanto faremos uso de uma expansão em série nessas equações, assim obtemos

$$f(r) = f_1 r + \mathcal{O}(r^3), \quad (2.50)$$

$$A(r) = \alpha_1 r + \mathcal{O}(r^3), \quad (2.51)$$

$$A_0(r) = b_0 + \frac{1}{2}\kappa\alpha_1 r^2 + \mathcal{O}(r^4), \quad (2.52)$$

as quais se mostram regulares na origem. Embora as equações (2.39) – (2.41) sejam passíveis



de uma análise relativamente clara, elas não possuem soluções exatas, cabendo apenas análise numérica. Na Figura (2.3) vemos em linha sólida o comportamento de  $f$ , que sai de zero em  $r = 0$  e vai para 1 em  $r \rightarrow \infty$ , demonstrando o comportamento esperado de vórtices topológicos. Por sua vez, em linha tracejada temos o campo magnético  $B$  e, em linhas pontilhadas, o campo elétrico  $E$ .

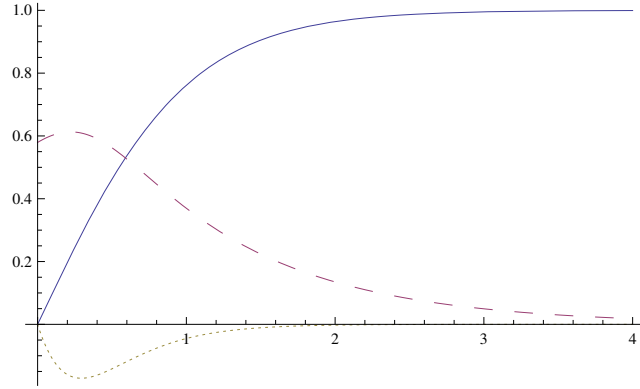


Figura 2.3: Em linha sólida temos o comportamento de  $f$ , em linha tracejada temos o campo magnético  $B$ , enquanto que em pontilhado temos o campo elétrico  $E$ .

## 2.2.4 Fluxo magnético e carga

Assim como nos modelos de vórtices neutros vistos anteriormente, o fluxo magnético é também quantizado em unidades de  $2\pi$ , ou seja,

$$\Phi = e \int B d^2x = e \int d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i A^j = 2\pi n. \quad (2.53)$$

Como o modelo é carregado, o fluxo magnético é relacionado à carga elétrica total  $Q = e \int J^0 d^2x$  pela integral da equação (2.35), da seguinte forma

$$\int d^2x \partial_j F^{j0} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{0ij} \int d^2x F_{ij} = e \int d^2x J^0. \quad (2.54)$$

Como o campo de gauge é massivo e de curto alcance, a primeira integral vai a zero e assim temos

$$\kappa \int d^2x B = Q, \quad (2.55)$$

$$\Phi = \frac{e}{\kappa} Q. \quad (2.56)$$

Agora que já conhecemos soluções para vórtices carregados, na próxima sessão abordaremos a versão autodual desse modelo, para tanto necessitaremos fazer uso de um campo auxiliar neutro  $\mathcal{N}$  que permitirá saturar o limite de Bogomol'nyi a fim de obter equações autoduais explicitamente.

## 2.3 Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs com campo escalar real

No modelo de vórtices carregados abordado anteriormente a energia não foi saturada via mecanismo de Bogomol'nyi, mas sim a partir de imposições sobre os comportamentos do campo escalar  $\phi$  e do campo de gauge. Agora é o momento no qual consideraremos uma versão autodual do modelo de Maxwell-Higgs com termo de Chern-Simons, que originalmente foi abordado por C. Lee, K. Lee e H. Min (1990) [30]. O modelo em questão possui simetria de gauge  $U(1)$  e, a fim de manter uma noção de autodualidade, em que o limite inferior para a energia é saturado por um conjunto de equações autoduais, é necessário introduzir um campo escalar neutro  $\mathcal{N}$  adicional.

### 2.3.1 Equações de Movimento.

A densidade de lagrangiana para esse modelo é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 + \frac{1}{4}\kappa\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\mu\mathcal{N})^2 - V(\phi, \mathcal{N}). \quad (2.57)$$

Por sua vez o potencial usado é de quarta ordem dado por

$$V(\phi, \mathcal{N}) = e^2|\phi|^2 \left( \mathcal{N} - e\frac{a^2}{\kappa} \right)^2 + \frac{e^2}{2} \left( |\phi|^2 - \frac{\kappa}{e}\mathcal{N} \right)^2, \quad (2.58)$$

com vácuos em

$$\begin{aligned} |\phi| = 0; & \quad \mathcal{N} = 0, \\ |\phi| = a; & \quad \mathcal{N} = ea^2/|\kappa|. \end{aligned}$$

No primeiro vácuo o campo escalar  $\phi$  possui massa  $m_s = e^2 a^2 / |\kappa|$ , enquanto que o campo  $\mathcal{N}$  e o campo de gauge possuem massa topológica  $m_{\mathcal{N}} = m_V = |\kappa|$ . Já no segundo vácuo tanto o campo de gauge quanto o campo escalar possuem dois modos de propagação de massa<sup>3</sup>,

$$m_{\pm}^2 = 2e^2 a^2 + \frac{\kappa^2}{2} \pm \frac{\kappa}{2} \sqrt{8e^2 a^2 + \kappa^2}. \quad (2.59)$$

Ainda, esse segundo vácuo, permite a obtenção de soluções topológicas estáveis para vórtices, uma vez que  $\phi$  vai para um valor diferente de zero.

As equações de movimento provenientes da densidade de lagrangiana são

$$D_{\mu} D^{\mu} \phi = e^2 \phi \left( \mathcal{N} - e \frac{a^2}{\kappa} \right)^2 + e^2 (|\phi|^2 - \frac{\kappa}{e} \mathcal{N}),$$

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \mathcal{N} = 2e^2 |\phi|^2 \left( \mathcal{N} - \frac{a^2}{\kappa} \right) - \kappa e^2 \left( |\phi|^2 - \frac{\kappa}{e} \mathcal{N} \right), \quad (2.60)$$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = -e J^{\mu}. \quad (2.61)$$

É fácil notar que a equação de movimento (2.61) é uma generalização das equações de movimento (1.6) e (2.3). Por sua vez a componente temporal da equação (2.61) é dada por

$$-\partial_i F_{0i} + \kappa F_{12} = -e J_0. \quad (2.62)$$

Cuja densidade de carga é  $J_0 = i[\phi^*(D_0\phi) - (D_0\phi)^*\phi]$ .

Antes de fazermos um tratamento da energia, iremos encontrar o fluxo magnético e a carga elétrica a partir da equação (2.62). Integrando ambos os lados temos

$$-\int \partial_i F_{0i} d^2x + \kappa \int F_{12} d^2x = e \int J_0 d^2x.$$

A integral  $\int \partial_i F_{0i} d^2x$  desaparece, já que os modos de gauge são massivos e de curto alcance, com isso obtemos

$$\int J_0 d^2x = Q,$$

$$\int F_{12} d^2x = \frac{\Phi}{e}.$$

---

<sup>3</sup>para uma demonstração mais detalhada remetemos o leitor a [33].

Assim temos o resultado já conhecido

$$Q = \frac{\kappa}{e}\Phi, \quad (2.63)$$

no qual a carga elétrica é atrelada ao fluxo magnético.

### 2.3.2 Saturando a Energia

Como estamos interessados em um modelo autodual, precisamos agora averiguar o funcional da energia para obter as equações autoduais via mecanismo de Bogomol'nyi. A partir da (2.57), o funcional da energia é

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2 + |D_0\phi|^2 + |\vec{D}\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_0\mathcal{N})^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\mathcal{N})^2 + V \right]. \quad (2.64)$$

Ao comparar com o modelo anterior, vê-se que novamente o campo elétrico integra a energia do sistema, que é uma característica de vórtices carregados, mas agora o termo cinético do campo auxiliar  $\mathcal{N}$  também se faz presente, e de forma engenhosa esse campo pode ser usado na saturação da contribuição do campo elétrico para a energia. No regime estático, fazendo uso da identidade fundamental (1.64), obtêm-se

$$H = a^2\Phi + \int d^2x \left[ \frac{1}{2}(\vec{E} \mp \partial_i\mathcal{N})^2 \mp \mathcal{N}\nabla \cdot \vec{E} + \frac{1}{2}B^2 + (iA_0\phi)(-iA_0\phi^*) + |(D_i \pm i\varepsilon_{ij}D_j)\phi|^2 \pm B|\phi| + V \right]. \quad (2.65)$$

Considerando a equação de movimento (2.62), bem como o fato que  $|\Phi| = \frac{e^2}{\kappa} \int d^2x J^0$ , podemos completar quadrado na energia e obter o seguinte funcional;

$$H = a^2\Phi + \int d^2x \left[ \frac{1}{2}(E \mp \partial_i\mathcal{N})^2 + \frac{1}{2} \left[ B \pm e(|\phi|^2 - \frac{\kappa}{e}\mathcal{N}) \right]^2 + \left| ieA_0\phi \mp ie \left( \mathcal{N} - e\frac{a^2}{\kappa} \right) \phi \right|^2 + |(D_i \pm i\varepsilon_{ij}D_j)\phi|^2 + V + -e^2|\phi|^2 \left( \mathcal{N} - e\frac{a^2}{\kappa} \right)^2 - \frac{e^2}{2} \left( |\phi|^2 - \frac{\kappa}{e}\mathcal{N} \right)^2 \right]. \quad (2.66)$$

Note que escolhemos o sinal inferior para o fluxo magnético. Com isso a energia é limitada inferiormente por

$$H = a^2\Phi, \quad (2.67)$$

desde que as equações autoduais satisfaçam

$$(D_i \pm i\varepsilon_{ij} D_j)\phi = 0, \quad (2.68)$$

$$A_0\phi \mp \left(\mathcal{N} - \frac{a^2}{\kappa}\right)\phi = 0, \quad (2.69)$$

$$B \pm e^2(|\phi|^2 - \kappa\mathcal{N}) = 0, \quad (2.70)$$

$$E \mp \partial_i\mathcal{N} = 0. \quad (2.71)$$

Pela (2.71) vemos que  $\partial_i(A_0 \mp \mathcal{N}) = 0$ , e com isso  $A_0 = \pm\mathcal{N} + cte$ . Assim temos um conjunto de equações autoduais, nas quais se fizermos  $A_0 = \mathcal{N} = 0$ , continuam consistentes com a autodualidade.

### 2.3.2.1 Soluções para as equações autoduais

Tomando o divergente da equação (2.71);

$$\nabla E = \pm\nabla^2\mathcal{N}, \quad (2.72)$$

e substituindo (2.72) e (2.69) na equação (2.62), temos

$$\nabla^2\mathcal{N} = 2e^2|\phi|^2 \left(\mathcal{N} - \frac{a^2}{\kappa}\right) - \kappa e^2 \left(|\phi|^2 - \frac{\kappa}{e}\mathcal{N}\right), \quad (2.73)$$

que é a equação de movimento estática (2.60), assim as equações autoduais são compatíveis [32] com as equações de Euler-Lagrange.

Utilizando a equação (2.68) e fazendo  $\phi = |\phi|e^{i\omega}$ , obtemos

$$eA_i \mp \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j \ln|\phi|^2 = 0. \quad (2.74)$$

Tomando seu rotacional e utilizando o campo magnético de (2.70), obtemos

$$-\nabla^2 \ln|\phi|^2 - 2e^2(|\phi|^2 + \kappa\mathcal{N}) = 0. \quad (2.75)$$

Claramente as equações (2.73) e (2.75) apenas possuem solução numérica. Porém notamos

que há dois tipos de soluções que levam a energias finitas para  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |\phi| \rightarrow a & \quad ; \quad \mathcal{N} \rightarrow \frac{ea^2}{|\kappa|}, \\ |\phi| = 0 & \quad ; \quad \mathcal{N} = 0. \end{aligned}$$

Para o primeiro caso, temos soluções topologicamente estáveis, com quebra de simetria para  $r \rightarrow \infty$ . Assim novamente encontramos um fluxo magnético quantizado dado por

$$\Phi = \pm 2\pi n.$$

Por sua vez, a energia associada a essa solução é

$$E = 2n\pi a^2. \tag{2.76}$$

Assim notamos que tanto o fluxo magnético quanto a energia relacionada às soluções topológicas desse modelo estão em consonância com o caso topológico do modelo de Chern-Simons-Higgs, como deveria.

Para o segundo caso, as soluções são ditas não topológicas. Dessa forma o comportamento do campo  $|\phi|$  para  $r$  muito grande deve ser

$$|\phi| \approx \frac{1}{r^\alpha}, \tag{2.77}$$

com  $\alpha > 1$ , pois se  $|\phi| \neq 0$ , para  $r$  muito grande, as soluções não possuem energia finita.

Para fazer uma análise das soluções no espírito que viemos trabalhando ao longo dessa dissertação, iremos considerar o ansatz com simetria rotacional

$$\phi = af(r)e^{in\theta} \tag{2.78}$$

e

$$eA_i = \pm \frac{\varepsilon_{ij}\hat{r}_j}{r} \left( \frac{1}{f} \frac{df}{dr} - n \right). \tag{2.79}$$

Podemos esperar que a função  $f$  possua comportamento assintótico,  $f \rightarrow 1$ , quando  $r \rightarrow \infty$ , e que  $\mathcal{N} \rightarrow 0$ . Assim, definindo  $f = e^{y(r)}$ , temos a partir da (2.75)

$$-\nabla^2 y - 2e^2(\exp(2y) + \kappa\mathcal{N}) = 0. \tag{2.80}$$

Podemos obter soluções numéricas para  $f(r)$  de forma que satisfaça a equação (2.75). Abaixo traçamos o gráfico da função  $f(r)$  tomando  $\kappa/ea^2 = 1$ , para vórtices topológicos.

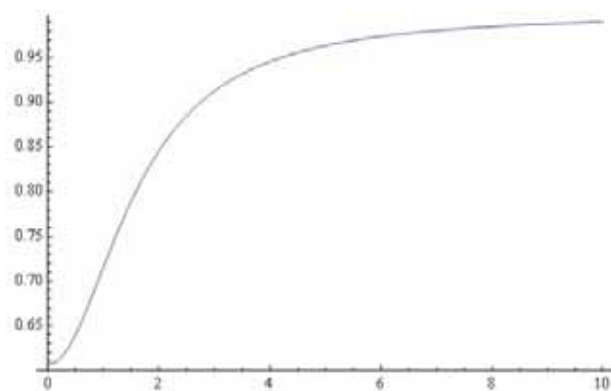


Figura 2.4: Gráfico de  $f(r) \times r$ .

Essa solução para  $f(r)$  é como esperávamos para um vórtice topológico, uma vez que ela sai de zero em  $r = 0$  e vai para uma constante em  $r \rightarrow \infty$ .

Esse capítulo encontra-se em seu fim e gostaríamos de ressaltar alguns pontos relevantes. Primeiramente vimos que em modelos de vórtices carregados há sempre uma carga elétrica associada ao fluxo magnético, graças a permanência da componente temporal do campo de gauge  $A_0$ . Outro aspecto digno de nota é o fato de o campo elétrico contribuir para a energia desses sistemas, podendo ela ser saturada por um campo auxiliar neutro. Nos três modelos estudados nesse capítulo foi possível obter soluções do tipo vórtice topológico e não topológico, isso serviu de motivação na construção de um modelo mais complexo no qual um campo de gauge  $A_\mu$  tem sua dinâmica guiada pelo termo de Maxwell, enquanto um outro campo de gauge  $\mathcal{A}_\mu$ , tem sua dinâmica guiada por Chern-Simons e utilizando um potencial de sexta ordem que suporta quebra de simetria para  $r \rightarrow \infty$ . Tal modelo é tratado no próximo capítulo.

## Capítulo 3

# Modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs com campos de gauge distintos

Inicialmente estudamos um modelo com soluções do tipo vórtice de energia finita cuja dinâmica do campo de gauge era governada pelo termo de Maxwell e como mostrado por Julia e Zee [22], tal modelo não poderia suportar vórtices eletricamente carregados. Adiante, estudamos um modelo cuja dinâmica do campo de gauge era governado pelo termo de Chern-Simons, tal modelo CSH tinha a peculiaridade de vincular o fluxo magnético à uma carga elétrica, podendo assim suportar vórtices carregados. Dessa forma foi natural se pensar em um modelo de Maxwell-Higgs com um termo de Chern-Simons. Tal fato faria com que a dinâmica do campo de gauge fosse governada por ambos os termos, levando à vórtices carregados de energia finita, porém este modelo não suportava saturação da energia via mecanismo de Bogomol'nyi, pois continha um termo do campo elétrico na energia. Para tanto, foi necessário a inserção de um campo escalar auxiliar neutro na densidade de lagrangiana, a fim de que a energia do campo elétrico pudesse ser saturada e com isso tivéssemos um modelo autodual de Maxwell-Higgs com termo de Chern-Simons.

Uma vez que tais modelos carregados suportavam soluções do tipo vórtice topológico e não topológico, fomos levados a pensar em um novo modelo, cujo campo de gauge  $A_\mu$  é governado pelo termo de Maxwell, enquanto que outro campo de gauge  $\mathcal{A}_\mu$  tem sua dinâmica governada por Chern-Simons, em conjunto com um potencial de sexta ordem com três vácuos. Infelizmente, tal modelo não suporta soluções de vórtices e sua energia não pode ser minimizada devido a existência do campo elétrico  $E$  relacionado ao termo de Maxwell. Para sanar essa problemática foi tentado adicionar um termo misto de Chern-Simons, composto por ambos os campos de



gauge, à densidade de lagrangiana, dessa vez a energia pôde ser corretamente saturada, porém as soluções obtidas não foram compatíveis, levando a novamente a um sistema que não possui soluções do tipo vórtice. Por último foi tentado modificar o modelo de forma acrescentar um campo auxiliar escalar neutro, assim como na seção 2.3, nessa ocasião a energia foi saturada e as soluções do tipo vórtice topológico foram encontradas.

### 3.1 Equações de movimento

A densidade de lagrangiana usada no modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs com campos de gauge distintos é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{A}_\alpha + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi). \quad (3.1)$$

Sendo  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ . A derivada covariante agora é diferente dos demais modelos e é dada por  $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu + ig\mathcal{A}_\mu)\phi$ . Uma vez que temos dois campos de gauge,  $A_\mu$  e  $\mathcal{A}_\mu$ , isso acarreta o aumento das equações de movimento, que são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange. No limite estático, temos para o potencial  $\mathcal{A}_\mu$  as equações de movimento

$$\kappa\mathcal{B} = -gJ_0, \quad (3.2)$$

$$\kappa\varepsilon_{ij}\mathcal{E}_j = gJ_i. \quad (3.3)$$

Nas quais assumimos as correntes  $J_0 = -2|\phi|^2(eA_0 + g\mathcal{A}_0)$  e  $J_i = i[\phi^*(D_i\phi) - \phi(D_i\phi)^*]$ . Notamos de imediato, que a equação (3.2), reproduz a equação (2.5) do modelo de Chern-Simons-Higgs.

Para o potencial  $A_\mu$  obtemos as seguintes equações;

$$\partial_j E_j = eJ_0, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ij}\partial_j B = -eJ_i. \quad (3.5)$$

A equação (3.5), fornece a mesma equação de movimento (1.6) obtida no modelo Maxwell-Higgs e, uma vez que  $A_0 = 0$  naquele modelo, a equação (3.4) não existe.

Para o campo de matéria  $\phi$ , obtemos

$$(eA_0 + g\mathcal{A}_0)^2\phi + D_i D_i \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi^*}. \quad (3.6)$$

O potencial autodual  $V(\phi)$  utilizado é de sexta ordem para garantir renormalizabilidade e foi imposto na forma

$$V(|\phi|) = \lambda |\phi|^2 (|\phi|^2 - a^2)^2. \quad (3.7)$$

As constantes  $a$  e  $\lambda$  serão determinadas logo adiante. De imediato, é possível notar que o potencial possui vácuos em  $|\phi| = 0$  e em  $|\phi| = a$  e sua forma foi plotada na Figura (3.1).

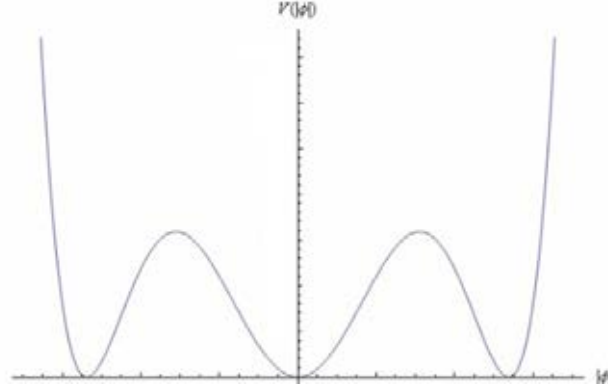


Figura 3.1: Gráfico do potencial  $V(\phi)$  por  $\phi$ .

Nosso intento é encontrar uma forma para os campos magnéticos e para o campo elétrico de Maxwell, para então checar a finitude da energia, uma vez que procederemos pela versão não ortodoxa do mecanismo de Bogomol'nyi apresentada na subseção 1.2.1.

Os campos magnéticos podem ser encontrados via equação (3.6), desde que utilizemos a equação de movimento (3.2) e impondo a condição de autodualidade

$$D_i \phi = \mp i \varepsilon_{ij} D_j \phi. \quad (3.8)$$

Com isso temos

$$\left( \frac{\kappa}{2g} \frac{\mathcal{B}}{|\phi|^2} \right)^2 \phi \mp i \varepsilon_{ij} D_i D_j \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi^*}. \quad (3.9)$$

na qual  $i \varepsilon_{ij} D_i D_j \phi = (eB + g\mathcal{B})\phi$  e derivando o potencial (3.7) em relação a  $\phi^*$ , temos

$$\left( \frac{\kappa}{2g} \frac{\mathcal{B}}{|\phi|^2} \right)^2 \mp (eB + g\mathcal{B}) = \lambda (|\phi|^2 - a^2) (3|\phi|^2 - a^2). \quad (3.10)$$

O campo magnético de Maxwell,  $B$ , é facilmente obtido pela equação (3.5) desde que se faça uso da condição (3.8) na corrente  $J_i$ , da seguinte forma;

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}\partial_j B &= -eJ_i. \\ \varepsilon_{ij}\partial_j B &= \pm e\varepsilon_{ij}\partial_j|\phi|^2.\end{aligned}$$

Logo, obtêm-se

$$B = \mp(e|\phi|^2 + c_0). \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.10), temos

$$\left(\frac{\kappa}{2g}\frac{\mathcal{B}}{|\phi|^2}\right)^2 + e^2|\phi|^2 + ec_0 \mp g\mathcal{B} = \lambda(|\phi|^2 - a^2)(3|\phi|^2 - a^2). \quad (3.12)$$

Como buscamos por um campo magnético  $\mathcal{B}$  com forma semelhante ao do modelo de Chern-Simons-Higgs (2.16), podemos impor que ele possua a seguinte forma;

$$\mathcal{B} = -\alpha|\phi|^4 + \beta|\phi|^2. \quad (3.13)$$

Com isso, e levando em conta que supomos um potencial limitado por baixo e que possui três vácuos, podemos relacionar os parâmetros  $a$  e  $\lambda$  com  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $e$ ,  $g$  e  $\kappa$ , via (3.12) da seguinte forma;

$$\lambda a^4 = \left(\frac{\kappa\beta}{2g}\right)^2 + ec_0 > 0, \quad (3.14)$$

$$\lambda a^2 = \frac{1}{4} \left[ -e^2 \pm g\beta + 2\alpha\beta \left(\frac{\kappa}{2g}\right)^2 \right] > 0, \quad (3.15)$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{\kappa\alpha}{2g}\right)^2 \pm g\alpha \right] > 0. \quad (3.16)$$

Essas desigualdades são necessárias para garantir a forma desejada do potencial. Como  $\lambda > 0$  as seguintes condições sobre  $\alpha$  para que o potencial seja sempre positivo devem ser satisfeitas

sinal	$\alpha$
+	$\alpha > 0$
-	$\alpha > 4\frac{g^3}{\kappa^2}$

Claramente foram considerados apenas os valores de  $\alpha$  maiores que zero, uma vez que valores negativos levariam a um campo magnético de Chern-Simons,  $\mathcal{B}$ , inconsistente com a equação

(3.12).

Obtidos os campos magnéticos em termos dos parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $e$ , voltamos nosso foco aos campos elétricos de Maxwell,  $E$ , e Chern-Simons,  $\mathcal{E}$ .

Utilizando a equação de movimento (3.3), e novamente escrevendo a corrente como  $J_i = \pm \varepsilon_{ij} \partial_j |\phi|^2$ , temos;

$$\varepsilon_{ij} \partial_j \mathcal{A}_0 = \mp \varepsilon_{ij} \frac{g}{\kappa} \partial_j |\phi|^2. \quad (3.17)$$

Com isso  $\mathcal{A}_0 = \mp \frac{g}{\kappa} |\phi|^2 + cte$ , porém a constante de integração,  $cte$ , não altera a forma do campo elétrico  $\mathcal{E}_i$ , portanto ela será desconsiderada. O campo elétrico de Chern-Simons possui a forma

$$\mathcal{E}_i = -\partial_i \mathcal{A}_0 = \pm \frac{g}{\kappa} \partial_i |\phi|^2. \quad (3.18)$$

Uma vez obtido  $\mathcal{A}_0$ , é possível obter  $A_0$  a partir da equação de movimento (3.2), como segue:

$$A_0 = \frac{1}{e} \left( \frac{\kappa \mathcal{B}}{2g |\phi|^2} \mp \frac{g^2}{\kappa} |\phi|^2 \right). \quad (3.19)$$

O campo elétrico de Maxwell,  $E$ , é encontrado tomando o gradiente da equação (3.19). Assim

$$E_i = -\frac{1}{e} \partial_i \left( \frac{\kappa \mathcal{B}}{2g |\phi|^2} \mp \frac{g^2}{\kappa} |\phi|^2 \right). \quad (3.20)$$

agora utilizando a forma de  $\mathcal{B}$ , reduzimos a equação acima a

$$E_i = \frac{1}{e} \left( \frac{\kappa \alpha}{2g} \pm \frac{g^2}{\kappa} \right) \partial_i |\phi|^2. \quad (3.21)$$

Uma vez conhecidos  $B$ ,  $\mathcal{B}$  e  $E$ , podemos finalmente analisar a energia do sistema.

### 3.1.1 A energia do sistema

A energia, obtida do mesmo modo que nos modelos anteriores, possui a forma

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2 + |D_0 \phi|^2 + |\vec{D} \phi|^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.22)$$

Por sua vez,

$$|D_0 \phi|^2 = (eA_0 + g\mathcal{A}_0)^2 |\phi|^2,$$

que combinada com a equação (3.2), fornece

$$|D_0\phi|^2 = \frac{\kappa^2}{4g^2} \frac{\mathcal{B}^2}{|\phi|^2}. \quad (3.23)$$

Agora a identidade fundamental é modificada de forma a possuir ambos os campos magnéticos;

$$|\vec{D}\phi|^2 = |D_\pm\phi|^2 \mp \frac{\varepsilon_{ij}}{2} \partial_i J_j \pm (eB + g\mathcal{B})|\phi|^2. \quad (3.24)$$

Já considerando que a integral sobre  $\frac{\varepsilon_{ij}}{2} \partial_i J_j$  vai a zero no infinito, e substituindo (3.23) e (3.24) em (3.22), temos

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{\kappa^2}{4g^2} \frac{\mathcal{B}^2}{|\phi|^2} \pm (eB + g\mathcal{B})|\phi|^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.25)$$

Se a energia for minimizada o integrando restante deve conter termo de  $|\phi|^4$  que é a mais alta ordem do campo magnético de Chern-Simons, cuja integral é proporcional ao fluxo magnético. Como dito, não iremos utilizar aqui o método tradicional do mecanismo de Bogomol'nyi, logo há a necessidade de analisar a integral sobre cada termo separadamente. Assim, pela equação (3.21), tem-se;

$$\frac{1}{2} \int d^2x E^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa}{2g} \left( \alpha \pm \frac{2g^3}{\kappa^2} \right) \right]^2 \int d^2x (\nabla|\phi|^2)^2. \quad (3.26)$$

Como  $\int d^2x (\nabla|\phi|^2)^2 = \int d^2x [\nabla \cdot (|\phi|^2 \nabla|\phi|^2) - |\phi|^2 \nabla^2|\phi|^2]$ , e a integral  $\int d^2x [\nabla \cdot (|\phi|^2 \nabla|\phi|^2)] = 0$ , uma vez considerando que na fronteira  $\phi \rightarrow a$  ou  $\phi \rightarrow 0$ . Por sua vez  $\nabla^2|\phi|^2$ , pode ser facilmente encontrado utilizando a equação (3.4) e a forma do próprio campo elétrico  $E$  (3.21), levando a

$$\nabla^2|\phi|^2 \left( \alpha \pm \frac{2g^3}{\kappa^2} \right) = 2e^2(-\alpha|\phi|^4 + \beta|\phi|^2). \quad (3.27)$$

Assim a integral (3.26) é dada por

$$\frac{1}{2} \int d^2x E^2 = \left( \frac{\kappa}{2ge} \right)^2 \left( \alpha \pm \frac{2g^3}{\kappa^2} \right) \int d^2x (-\alpha|\phi|^6 + \beta|\phi|^4). \quad (3.28)$$

Para a contribuição da energia do campo magnético de Maxwell (3.11), obtêm-se

$$\frac{1}{2} \int B^2 dx = \frac{e^2}{2} \int d^2x |\phi|^4. \quad (3.29)$$

Por sua vez a contribuição associada ao campo de Chern-Simons (3.13) ao quadrado é

$$\left(\frac{\kappa}{2g}\right)^2 \int d^2x \left(\frac{\mathcal{B}}{|\phi|}\right)^2 = \left(\frac{\kappa}{2g}\right)^2 \int (-\alpha|\phi|^3 + \beta|\phi|)^2. \quad (3.30)$$

E ainda

$$\pm \int (eB + g\mathcal{B})|\phi|^2 d^2x = \pm \int d^2x [(e\beta \mp e^2)|\phi|^4 - g\alpha|\phi|^6]. \quad (3.31)$$

Finalmente, o potencial fornece

$$\int V(\phi)d^2x = \lambda \int d^2x |\phi|^2 (|\phi|^2 - a^2)^2. \quad (3.32)$$

Agora podemos montar novamente o funcional da energia somando todas essas contribuições e notar que o termo  $|\phi|^6$  não vai a zero. Assim

$$H = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \frac{\beta^2 \kappa^2}{2g^2} |\phi|^2 + \frac{1}{2} \left( e^2 - \frac{\alpha\beta\kappa^2}{g^2} \right) |\phi|^4 + \frac{7\alpha(\alpha\kappa^2 \pm 2g^3)}{12g^2} |\phi|^6 \right].$$

Portanto, para minimizar a energia precisamos que

$$\alpha = \mp 2 \frac{g^3}{\kappa^2}, \quad (3.33)$$

o qual é exatamente o mesmo fator global do campo magnético (2.16) do modelo de Chern-Simons-Higgs puro. Entretanto, isso levaria a  $E = 0$  por causa da equação (3.21), forçando  $J_0 = 0$  devido a (3.4), causando uma grande inconsistência nas equações de movimento, uma vez que  $A_0 \neq \mathcal{A}_0 \neq 0$ . Portanto não conseguimos saturar a energia sem causar problemas gravíssimos ao modelo.

### 3.1.2 Buscando por soluções para o campo escalar.

Podemos abandonar a saturação de energia e procurar por soluções não topológicas de energia finita para o campo escalar. Para tanto temos que encontrar as equações diferenciais para  $\phi$  e o nosso ponto de partida é a equação (3.8), que impõe

$$(\partial_i + ieA_i + ig\mathcal{A}_i)\phi = \mp i\varepsilon_{ij}(\partial_j + ieA_j + ig\mathcal{A}_j)\phi. \quad (3.34)$$

Com  $\phi = |\phi|e^{i\omega}$ , verifica-se que

$$(eA_i + g\mathcal{A}_i) = -\partial_i\omega \mp \varepsilon_{ij}\partial_j \ln |\phi|. \quad (3.35)$$

Essa talvez seja a forma mais simples para  $(eA_i + g\mathcal{A}_i)$ , tal que as equações de Bogomol'nyi sejam satisfeitas. Tomando o rotacional da equação (3.35) e considerando (3.11) e (3.13), obtêm-se

$$[(g\beta \mp e^2)|\phi|^2 - g\alpha|\phi|^4] = \mp \nabla^2 \ln |\phi|. \quad (3.36)$$

Assim como nos outros modelos, obtemos uma equação de segunda ordem na derivada para  $\phi$  que não pode ser resolvida analiticamente, cabendo apenas análise numérica. Porém, vimos que  $|\phi|$  obedece a equação (3.27). Combinando (3.36) e (3.27), utilizando  $\nabla^2|\phi|^2 = 2[(\nabla|\phi|)^2 + |\phi|\nabla^2|\phi|]$ , verifica-se que  $|\phi|$  satisfaz

$$(\nabla|\phi|)^2 = C_2|\phi|^2 + C_4|\phi|^4 + C_6|\phi|^6. \quad (3.37)$$

Na qual  $C_2 = \frac{1}{2}\frac{e\beta}{\alpha \mp \frac{2g^3}{\kappa^2}}$ ,  $C_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{e^2\alpha}{\alpha \mp \frac{2g^3}{\kappa^2}} \pm g\beta - e^2\right)$  e  $C_6 = \pm\frac{1}{2}g\alpha$ . Essa equação é uma peculiaridade do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com simetria  $U(1) \times U(1)$ . Ela não é encontrada nos modelos de  $U(1)$  de Maxwell-Higgs e Chern-Simons Higgs e sua existência se deve ao campo elétrico não ser nulo na equação (3.4). A grande importância da equação (3.37) é que ela nos permite obter soluções analíticas para o campo de matéria  $|\phi|$ , desde que  $C_2 > 0$ ,  $C_4 < 0$  e  $C_6 > 0$ , fixando  $\alpha > \frac{2g^3}{\kappa^2}$ . Das soluções apenas as seguintes são reais e bem comportadas em todo domínio;

$$|\phi| = \frac{2\sqrt{C_2}e^{\sqrt{C_2}r}}{\sqrt{2C_4e^{2\sqrt{C_2}r} - 4C_2C_6 + e^{4\sqrt{C_2}r} + C_4^2}} \quad (3.38)$$

$$|\phi| = \frac{2\sqrt{C_2}e^{\sqrt{C_2}r}}{\sqrt{C_4^2e^{4\sqrt{C_2}r} + 2C_4e^{2\sqrt{C_2}r} - 4C_2C_6e^{4\sqrt{C_2}r} + 1}} \quad (3.39)$$

Como  $|\phi|$  vai a zero no infinito em ambos os casos, as soluções se mostram não topológicas. Porém, as soluções (3.38) e (3.39) não são compatíveis com a equação (3.36), logo não podem ser consideradas como soluções válidas.

Em detrimento do fracasso desse modelo em se obter as soluções do tipo vórtice válidas, é possível fazer alterações na densidade de lagrangiana de forma a tentar alcançar tais soluções.

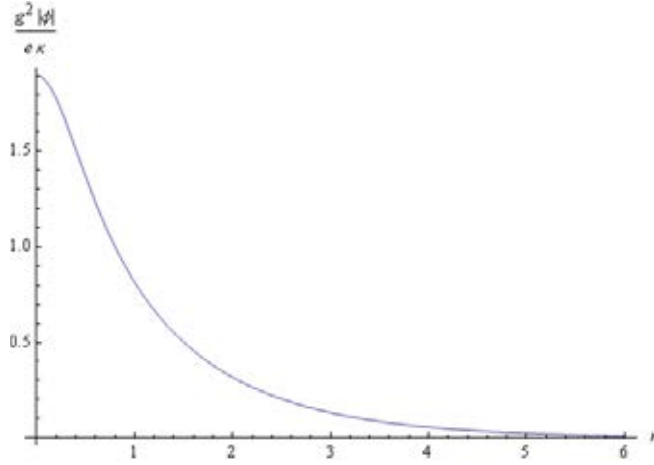


Figura 3.2: A forma de  $\phi$  sugere caráter não-topológico

## 3.2 Modificando o modelo com dois campos de gauge

A fim de tentar contornar os problemas encontrados na saturação da energia, iremos acrescentar

$$\mathcal{L}_{mix} = -\kappa_2 \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \mathcal{A}_\mu \partial_\nu A_\alpha \quad (3.40)$$

à densidade de lagrangiana original (3.1) e fazendo  $\kappa \rightarrow -\kappa_1$ , nesta última. Chamaremos esse novo termo de Chern-Simons misto.

As equações de movimento para os campos de gauge ficam, no limite estático,

$$\kappa_1 \mathcal{B} + \kappa_2 B = gJ_0, \quad (3.41)$$

$$\partial_i E_i + \kappa_2 \mathcal{B} = eJ_0, \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_{ij} (\kappa_1 \mathcal{E}_j + \kappa_2 E_j) = -gJ_i, \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_{ij} (\partial_j B + \kappa_2 \mathcal{E}_j) = -eJ_i. \quad (3.44)$$

Nas quais fazemos  $J_0 = -2(eA_0 + g\mathcal{A}_0)$  e  $J_j = -i[\phi(D_j\phi)^* - \phi^*(D_j\phi)]$ , novamente.

Por meio da equação autodual

$$D_i \phi = \mp i \varepsilon_{ij} D_j \phi, \quad (3.45)$$

obtêm-se

$$J_i = \pm \varepsilon_{ij} \partial_j |\phi|^2. \quad (3.46)$$



A equação de movimento para  $\phi$  fica da seguinte forma

$$\mp(g\mathcal{B} + eB) + (eA_0 + g\mathcal{A}_0)^2 = \lambda(|\phi|^2 - a^2)(3|\phi|^2 - a^2). \quad (3.47)$$

Usando (3.44) em (3.46), e como  $\mathcal{E}_j = -\partial_j\mathcal{A}_0$ , encontra-se

$$B + \kappa_2\mathcal{A}_0 = \mp e|\phi|^2 + C_1, \quad (3.48)$$

na qual  $C_1$  é a constante de integração. Podemos escolher  $\mathcal{A}_0 = -\frac{C_1}{\kappa_2}$ , tal que

$$B = \mp e|\phi|^2 \quad (3.49)$$

e  $\mathcal{E}_j = 0$ . Esta forma de  $B$  é baseada na forma obtida no caso anterior e também na escolha que vamos fazer para  $\mathcal{B}$ , ou seja

$$\mathcal{B} = \alpha|\phi|^4 + \beta|\phi|^2. \quad (3.50)$$

De fato, a equação (3.47) pode ser reescrita como

$$\mp(g\mathcal{B} + eB) + \left(\frac{\kappa_1\mathcal{B} + \kappa_2B}{2g|\phi|^2}\right)^2 = \lambda(|\phi|^2 - a^2)(3|\phi|^2 - a^2). \quad (3.51)$$

Assim, com  $\mathcal{B}$  dado por (3.50), teríamos uma inconsistência se  $B$  carregasse uma constante. Isso induz novamente a não termos espaço para soluções topológicas, pois estas exibem o comportamento  $|\phi| = a$ , para  $r \rightarrow \infty$ , acarretando em fluxo infinito para  $B$ , conseqüentemente, a energia, no limite de Bogomol'nyi, também iria para o infinito.

Com  $\mathcal{E}_j = 0$ , a equação (3.43) em conjunto com a corrente (3.46), e lembrando que  $E_j = -\partial_j A_0$ , temos

$$A_0 = \pm \frac{g}{\kappa_2}|\phi|^2 + C_2. \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) e  $\mathcal{A}_0$  em  $J_0$ , encontra-se

$$J_0 = \mp \frac{2ge}{\kappa_2}|\phi|^4 + \left(eC_2 - \frac{C_1}{\kappa_2}g\right)|\phi|^2. \quad (3.53)$$

Por sua vez substituindo (3.49), (3.50) e a expressão acima em (3.41), tem-se

$$\kappa_1\alpha|\phi|^4 + (\kappa_1\beta \mp \kappa_2e)|\phi|^2 = \mp \frac{2g^2e}{\kappa_2}|\phi|^4 + g\left(eC_2 - \frac{C_1}{\kappa_2}g\right). \quad (3.54)$$

Levando a

$$\alpha = \mp 2 \frac{g^2 e}{\kappa_1 \kappa_2}, \quad (3.55)$$

e

$$\left( eC_2 - \frac{C_1}{\kappa_2} g \right) = \frac{(\kappa_1 \beta \mp \kappa_2 e)}{g}. \quad (3.56)$$

Enquanto (3.55) fixa  $\alpha$  totalmente, a (3.56) fixa as constantes  $C_1$  e  $C_2$  em termos de  $\beta$  que ainda deve ser encontrado.

Substituindo (3.50), (3.52) e  $J_0$  em (3.42), tem-se

$$\mp \frac{g}{\kappa_2} \nabla^2 |\phi|^2 = \pm \left( \frac{g}{\kappa_1} - \frac{e}{\kappa_2} \right) |\phi|^4 + \left[ (e\kappa_1 - g\kappa_2)\beta \mp \frac{\kappa_2 e^2}{g} \right] |\phi|^2. \quad (3.57)$$

Notemos que se fizermos  $e\kappa_1 = g\kappa_2$ , a equação acima fica

$$\nabla^2 |\phi|^2 = \left( \frac{e\kappa_2}{g} \right)^2 |\phi|^2 \quad (3.58)$$

e  $\alpha$  pode ser reescrita como  $\alpha = \mp \frac{2g^3}{\kappa_1^2}$ , que é o mesmo valor de  $\alpha$  que anulava o campo elétrico de Maxwell e eliminava o termo  $|\phi|^6$  na densidade de energia para o modelo anterior. Em coordenadas cilíndricas a equação (3.58), fica

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} |\phi|^2 + \frac{d^2}{dr^2} |\phi|^2 = \left( \frac{e\kappa_2}{g} \right)^2 |\phi|^2. \quad (3.59)$$

Soluções topológicas com  $|\phi|^2 \rightarrow a^2$  para  $r \rightarrow \infty$ , não são possíveis se  $|\phi|^2$  satisfaz (3.58), uma vez que o lado direito da equação seria proporcional a  $a^2$ , enquanto o lado esquerdo iria a zero. Não obstante vamos considerar  $e\kappa_1 = g\kappa_2$ .

Para fixar  $\beta$  devemos lançar mão de (3.47). Ela fornece

$$\lambda = \frac{g^4}{\kappa_1^2}, \quad (3.60)$$

$$a^2 \lambda = \pm \frac{1}{2} (g\beta \mp e^2), \quad (3.61)$$

$$a^4 \lambda = \left( \frac{\kappa_1 \beta \mp \kappa_2 e}{2g} \right). \quad (3.62)$$

Por sua vez a (3.61) fixa  $\beta$  como

$$\beta = \pm \frac{(2a^2 g^2 + \kappa_2^2)g}{\kappa_1^2}, \quad (3.63)$$

que é compatível com a (3.62). Além de simplificar a forma de  $\beta$ , a identidade  $e\kappa_1 = g\kappa_2$  leva à (3.58), que por sua vez implica na ausência de termos  $|\phi|^6$  na densidade de energia.

### 3.2.1 A energia do sistema

Vamos analisar a energia exatamente da mesma forma que fizemos na seção anterior, ou seja, analisando as contribuições separadamente.

Agora, a contribuição do campo elétrico ao quadrado é mais simples

$$\frac{1}{2} \int E^2 d^2x = -\frac{e^2}{2} \int |\phi|^4 d^2x. \quad (3.64)$$

Por sua vez, o campo magnético de Maxwell ao quadrado,  $B^2$ , contribui com

$$\frac{1}{2} \int B^2 d^2x = \frac{e^2}{2} \int |\phi|^4 d^2x. \quad (3.65)$$

Enquanto que

$$\int \left( \frac{\kappa_1 \mathcal{B} + \kappa_2 B}{2g|\phi|^2} \right)^2 d^2x = \int \left[ \left( \frac{\kappa_1 \alpha}{2g} \right)^2 |\phi|^6 + \frac{\kappa_1 \alpha (\kappa_1 \beta \mp e\kappa_2)}{2g^2} |\phi|^4 + \left( \frac{\kappa_1 \beta \mp \kappa_2 e}{2g} \right)^2 |\phi|^2 \right].$$

E também

$$\pm \int (g\mathcal{B} + eB) |\phi|^2 d^2x = \pm \int [g\alpha |\phi|^2 + (g\beta \mp e^2)] |\phi|^2 d^2x. \quad (3.66)$$

Por último, o potencial contribui com

$$\int d^2x V = \lambda \int (|\phi|^2 - a^2)^2 |\phi|^2 d^2x. \quad (3.67)$$

Agora analisaremos separadamente os coeficientes que multiplicam as potências de  $|\phi|$  a fim de averiguarmos com mais facilidade o cancelamento do termo  $|\phi|^6$ .

Os coeficientes do termo  $|\phi|^6$  são

$$\lambda \pm g\alpha + \left( \frac{\kappa_1 \alpha}{2g} \right)^2 = 0, \quad (3.68)$$

como  $\lambda = \frac{g^4}{\kappa_1^2}$  e  $\alpha = \mp \frac{2g^3}{\kappa_2^2}$ , eliminamos o termo  $|\phi|^6$ , como desejado.

Por sua vez, os coeficientes do termo  $|\phi|^4$  são

$$2a\lambda \pm (g\beta \mp e^2) + \frac{\kappa_1\alpha(\kappa_1\beta \mp e\kappa_2)}{2g} = \mp(g\beta \mp e^2). \quad (3.69)$$

Já para o termo  $|\phi|^2$ ;

$$a^2\lambda + \left(\frac{\kappa_1\beta \mp \kappa_2e}{2g}\right)^2 = 2\left(\frac{\kappa_1\beta \mp \kappa_2e}{2g}\right)^2. \quad (3.70)$$

Finalmente a energia fica escrita como

$$\begin{aligned} H &= \pm a \int [g\alpha|\phi|^4 + g\beta|\phi|^2 \mp e^2|\phi|^2] d^2x \\ &= \pm a \int (eB + g\mathcal{B}) d^2x = \pm a\Phi_{total}. \end{aligned}$$

Assim a energia foi devidamente saturada.

### 3.2.2 Buscando por soluções para as equações autoduais

Agora que a saturação da energia foi obtida, é oportuno buscar por soluções para o campo escalar  $\phi$ . Assim como anteriormente, temos

$$eA_i + g\mathcal{A}_i = -\partial_i\omega \mp \varepsilon_{ij}\partial_j \ln|\phi|, \quad (3.71)$$

Tomando seu rotacional e utilizando as formas de  $B$  e  $\mathcal{B}$ , obtemos

$$\nabla^2 \ln|\phi| = 2\lambda(|\phi|^2 - a^2)|\phi|^2. \quad (3.72)$$

Combinando (3.58) e (3.72) encontra-se

$$(\nabla|\phi|)^2 = \left(\frac{g^2}{\kappa_1}\right)^2 (-|\phi|^2 + a^2)|\phi|^4 + \left(\frac{e\kappa_2}{2g}\right)^2 |\phi|^2 \quad (3.73)$$

$$\nabla^2|\phi| = \left(\frac{g^2}{\kappa_1}\right)^2 (|\phi|^2 - a^2)|\phi|^3 + 2\left(\frac{e\kappa_2}{2g}\right)^2 |\phi|. \quad (3.74)$$

Assim,  $|\phi|$  deve ser solução de (3.73) e (3.74) simultaneamente ou de qualquer par das equações (3.58), (3.72), (3.73) e (3.74). Entretanto não foi possível encontrar soluções do tipo

vórtice, uma vez que a equação (3.58), que pode ser resolvida analiticamente, leva a solução

$$\exp\left(\int_1^r \frac{i\sqrt{3}Y_1(-i\sqrt{3}K) - i\sqrt{3}c_1J_1(i\sqrt{3}K)}{2(c_1J_0(i\sqrt{3}K) + Y_0(-i\sqrt{3}K))} dK\right). \quad (3.75)$$

Na qual  $Y_1$  e  $J_1$  são funções de Bessel. Para obter soluções reais a constante  $c_1$  deve ser nula, com isso a solução para  $|\phi|$  diverge para  $r \rightarrow \infty$ .

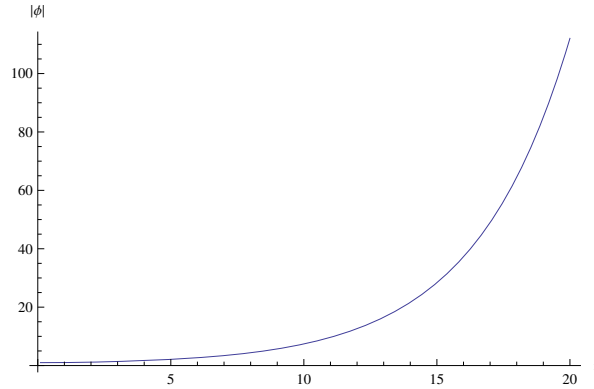


Figura 3.3: Solução para  $\phi$  a partir da equação (3.58)

Por sua vez, a equação (3.72) tem solução apenas numérica e, assim como a solução da (3.58), diverge e é descontínua em  $r = 0$ , sendo também não válida.

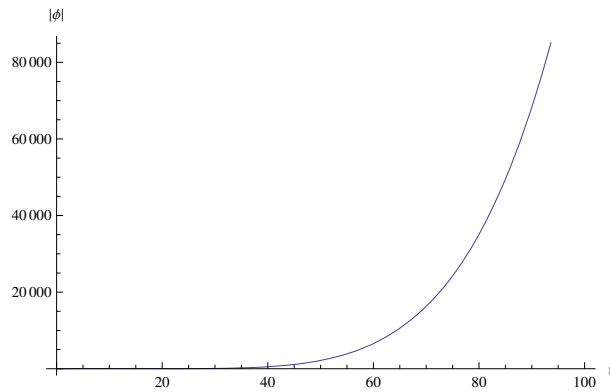


Figura 3.4: Solução para  $\phi$  a partir da equação (3.72)

A partir desses resultados, podemos afirmar que o modelo não suporta soluções do tipo vórtice, uma vez que as soluções encontradas eram descontínuas em  $r = 0$  e divergem para  $r \rightarrow \infty$ .

Apesar do belo modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs parecer suportar soluções do tipo vórtice baseado em sua topologia  $U(1) \times U(1)$  e na experiência com modelos semelhantes, não conseguimos atingir essa meta até o presente momento. Pois no primeiro modelo a energia

não era minimizada devido ao campo elétrico, além de que suas soluções para o campo escalar aparentemente do tipo vórtice não-topológico, não eram consistentes com as demais equações de segunda ordem nas derivadas para  $\phi$ . Por sua vez, no modelo alterado com um termo misto de Chern-Simons na densidade lagrangiana, a energia é minimizada e, como esperamos, proporcional ao fluxo magnético total. Porém, as soluções reais das equações de segunda ordem nas derivadas obtidas não eram do tipo vórtice, uma vez que tendiam ao infinito quando  $r \rightarrow \infty$  e eram descontínuas em  $r = 0$ . Infelizmente nosso trabalho se mostrou infrutífero na busca por soluções do tipo vórtice nesses modelos citados. Portanto, tomaremos uma última alteração no modelo. Procedendo da mesma forma que na seção 2.3, iremos acrescentar um campo escalar real  $\mathcal{N}$ , alterar seu potencial e buscar por soluções do tipo vórtice.

### 3.3 Alterando o modelo com a inserção de um campo auxiliar escalar real

Embora nossa busca por soluções do tipo vórtice tenha sido infrutífera nos dois modelos abordados anteriormente nesse capítulo, é possível ainda utilizar um campo escalar  $\mathcal{N}$  para saturar a contribuição da energia advinda do campo elétrico, assim como abordado na Seção 2.3. A nova densidade de lagrangiana é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 + \frac{1}{4}\kappa\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}\mathcal{A}_\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\mu\mathcal{N})^2 - V(\phi, \mathcal{N}).$$

Na qual o potencial autodual, agora carregando um termo de  $\mathcal{N}$ , é dado por

$$V(\phi, \mathcal{N}) = \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - a^2)^2 + \frac{g^4}{\kappa^2}|\phi|^2 \left( |\phi|^2 - \frac{e\kappa}{g^2}\mathcal{N} - a^2 \right)^2. \quad (3.76)$$

Cabe mencionar que, diferente dos outros dois casos abordados nesse capítulo, esse potencial não foi imposto, mas surgiu naturalmente da saturação da energia que será explicitada mais abaixo. Ainda, pode-se notar que esse potencial tem a particularidade de possuir um termo semelhante ao potencial usado no modelo de Maxwell-Higgs (subseção 1.1.2) desacoplado de um segundo termo que, por sua vez, é semelhante ao potencial de Chern-Simons-Higgs, porém com um termo extra associado ao campo escalar real  $\mathcal{N}$ . Como herança do potencial de quarta

ordem usado no modelo de Maxwell-Higgs, esse potencial possui vácuo apenas em

$$|\phi| \rightarrow a; \quad (3.77)$$

$$\mathcal{N} = 0, \quad (3.78)$$

quando  $r \rightarrow \infty$ . Assim o modelo não suportaria soluções não topológicas, uma vez que  $|\phi| = 0$  não é vácuo do potencial (3.76).

### 3.3.1 Equações de movimento

Uma vez que os termos de Maxwell e de Chern-Simons permanecem os mesmo na densidade de lagrangiana, as equações de movimento não se alteram para os potenciais  $\mathcal{A}_\mu$  e  $A_\mu$ , sendo elas

$$\kappa \mathcal{B} = -gJ_0, \quad (3.79)$$

$$\kappa \varepsilon_{ij} \mathcal{E}_j = gJ_i, \quad (3.80)$$

$$\partial_j E_j = eJ_0, \quad (3.81)$$

$$\varepsilon_{ij} \partial_j B = -eJ_i. \quad (3.82)$$

Nas quais assumimos as correntes  $J_0 = -2|\phi|^2(eA_0 + g\mathcal{A}_0)$  e  $J_i = i[\phi^*(D_i\phi) - \phi(D_i\phi)^*]$ , como anteriormente.

As diferenças nas equações de movimento se mostram no aumento de uma equação, que é aquela para o campo  $\mathcal{N}$  e, por sua vez a equação para  $\phi$  se altera em detrimento da mudança na forma do potencial, como segue

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi &= -e^2(|\phi|^2 - a^2)\phi - \frac{g^4}{\kappa^2}\phi \left( |\phi|^2 - \frac{e\kappa}{g^2}\mathcal{N} - a^2 \right), \\ \partial_\mu \partial^\mu \mathcal{N} &= 2\frac{eg^2}{\kappa}|\phi|^2 \left( |\phi|^2 - \frac{e\kappa}{g^2}\mathcal{N} - a^2 \right). \end{aligned}$$

Uma vez que temos as equações de movimento, vamos analisar a energia do sistema.

### 3.3.2 A energia do sistema

O funcional da energia, agora, é muito semelhante ao obtido no modelo abordado na seção 2.3,

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2 + |D_0\phi|^2 + |\vec{D}\phi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_0\mathcal{N})^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\mathcal{N})^2 + V \right]. \quad (3.83)$$

Sendo  $\partial_0\mathcal{N} = 0$  no limite estático, utilizamos o mecanismo de Bogomol'nyi como segue,

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2}(\vec{E}_i \mp \partial_i\mathcal{N})^2 \mp \mathcal{N}\nabla \cdot \vec{E} + \frac{1}{2}B^2 + (iA_0\phi)(-iA_0\phi^*) + |(D_i \pm i\varepsilon_{ij}D_j)\phi|^2 \pm B|\phi| + V \right]. \quad (3.84)$$

Pela equação de movimento (3.82), temos que  $\mathcal{N}\nabla \cdot E_i = \mathcal{N}J_0$ . E considerando que  $\int d^2x(eB + g\mathcal{B}) = \Phi_{total}$ , chegamos a

$$\begin{aligned} H &= a\Phi_{total} + \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}[E_i \pm \partial_i\mathcal{N}]^2 + \frac{1}{2}[B \pm e(|\phi|^2 - a^2)]^2 + \right. \\ &+ |(D_i \pm i\varepsilon_{ij}D_j)\phi|^2 + \frac{\kappa^2}{4g^2|\phi|^2} \left[ \mathcal{B} \pm \frac{2g^3}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - \frac{e\kappa}{g^2}\mathcal{N} - a^2) \right]^2 + \\ &+ \left. V - \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - a^2)^2 - \frac{g^4}{\kappa^2}|\phi|^2 \left( |\phi|^2 - \frac{e\kappa}{g^2}\mathcal{N} - a^2 \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Na qual escolhemos o sinal superior do fluxo magnético. Assim a energia é minimizada para as equações autoduais;

$$E_i = \mp \partial_i\mathcal{N} \quad (3.85)$$

$$B = \mp e(|\phi|^2 - a^2), \quad (3.86)$$

$$\mathcal{B} = \mp \frac{2g^3}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - \frac{e\kappa}{g^2}\mathcal{N} - a^2), \quad (3.87)$$

que são consistentes com as equações de movimento e, como obtido no modelo da seção 2.3,  $A_0 = \pm\mathcal{N} + cte$ . Claramente, o campo magnético de Maxwell, (3.86), é exatamente o mesmo obtido em (1.76). Por sua vez, o campo magnético de Chern-Simons, (3.87), é similar ao campo magnético obtido no modelo CSH, (2.16), porém com um termo associado ao campo escalar  $\mathcal{N}$ .



### 3.3.3 Buscando por soluções para os campos escalares

Nesse caso a equação (3.36) se modifica para

$$\nabla^2 \ln |\phi| = [e^2(|\phi|^2 - a^2) + \frac{2g^4}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - \frac{e\kappa}{g^2}\mathcal{N} - a^2)], \quad (3.88)$$

e agora, também temos uma equação de segunda ordem para  $\mathcal{N}$ ;

$$\nabla^2 \mathcal{N} = -2\frac{eg^2}{\kappa}|\phi|^2 \left( |\phi|^2 - \frac{e\kappa}{g^2}\mathcal{N} - a^2 \right). \quad (3.89)$$

Claramente essas equações não possuem soluções analíticas, portanto, para buscar por soluções numéricas faremos uso do ansatz:

$$\begin{aligned} \phi &= af(r)e^{i(n+m)\theta}, \\ A_r &= 0; \quad A_\theta = -\frac{v(r) - n}{er}, \\ \mathcal{A}_r &= 0; \quad \mathcal{A}_\theta = -\frac{u(r) - m}{gr}. \end{aligned}$$

Note, como o modelo possui dois campos de gauge, o ansatz para  $\phi$  irá possuir duas vorticidades, a  $n$  que está associada a  $A_\mu$  e  $m$  que está associada a  $\mathcal{A}_\mu$ . Contudo os ansatz para  $A_\mu$  e  $\mathcal{A}_\mu$  são usuais. Assim fixamos os comportamentos em  $r = 0$ , como

$$\begin{aligned} f(r) &= F_{nm}r^{n+m} + \dots \\ v(r) &= n - \frac{e^2a^2}{2}r^2 + \frac{e^2a^2(F_{nm})^2}{2(n+m+1)}r^{2(n+m+1)} + \dots \\ u(r) &= m + \frac{g^2a^2(e\kappa\omega_0 - g^2a^2)(F_{nm})^2}{(n+m+1)\kappa^2}r^{2(n+m+1)} + \dots \\ A_0(r) &= \omega_0 + \frac{e^2a^2(e\kappa\omega_0 - g^2a^2)(F_{nm})^2}{2(n+m+1)\kappa}r^{2(n+m+1)} \end{aligned}$$

Sendo  $F_{mn}$  e  $\omega_0 = A(0)$  parâmetros livres. Por sua vez, os comportamentos para  $r \rightarrow \infty$ , são vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen;

$$\begin{aligned} 1 - f(r) &\simeq r^{-1/2} e^{-\beta r}, \\ n + v(r) &\simeq r^{1/2} e^{-\beta r}, \\ m - u(r) &\simeq r^{1/2} e^{-\beta r}, \\ A_0(r) &= r^{1/2} e^{-\beta r}. \end{aligned}$$

Na qual  $\beta$  é a massa associada a ambos os campos de gauge;

$$\beta = \frac{g^2 a^2}{\kappa} + \frac{a^2 g^2}{\kappa} \sqrt{1 + \frac{2e^2 \kappa^2}{g^4 a^2}}. \quad (3.90)$$

Antes de partirmos para soluções numéricas, assumimos as condições de contorno:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & v(0) &= n, & u(0) &= m, \\ f(\infty) &= 1, & v(\infty) &= -n, & u(\infty) &= m. \end{aligned}$$

Com isso, a solução numérica para  $f(x)$  nos fornece o comportamento dado na Figura (3.5).

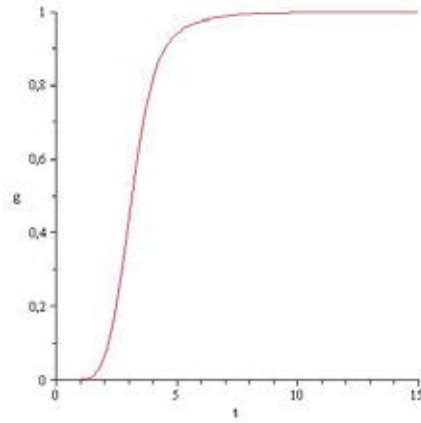


Figura 3.5: Gráfico de  $f(r) \times r$ , com  $m = n = 1$

Tal solução é o que se espera de uma solução topológica para  $\phi$ , uma vez que  $f(x)$  parte de zero em  $r = 0$  e vai para 1 quando  $r \rightarrow \infty$ . Por sua vez a solução numérica para  $v(r)$  nos fornece o comportamento dado na Figura (3.6).

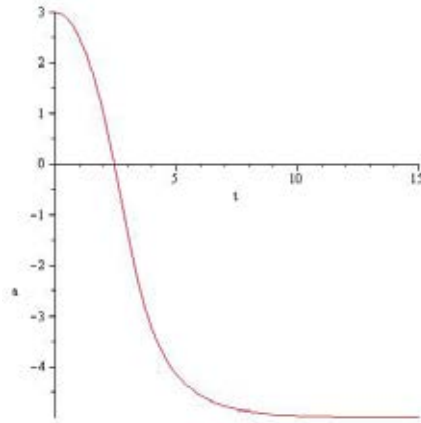


Figura 3.6: Gráfico de  $v(r) \times r$ , com  $m = n = 1$

Apesar do comportamento inusual de  $v(r)$ , sua solução possui caráter topológico, uma vez que para  $r \rightarrow \infty$ ,  $v(r)$  tende a um número inteiro. Já a solução para  $u(r)$ , tem seu comportamento expresso na Figura (3.7).

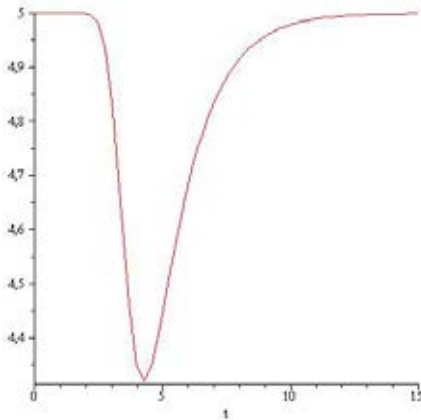


Figura 3.7: Gráfico de  $u(r) \times r$ , com  $m = n = 1$

Dessa forma podemos afirmar que esse modelo, usando um campo auxiliar real  $\mathcal{N}$ , possui soluções do tipo vórtice topológico.

A título de conclusão, cabe uma análise sobre os campos magnéticos  $B$  e  $\mathcal{B}$ . Plotando a forma do campo magnético de Maxwell  $B$  (Figura (3.8)), vemos que ele possui comportamento usual do campo magnético obtido no modelo de Maxwell-Higgs. Porém o comportamento do campo magnético de Chern-Simons,  $\mathcal{B}$ , é não usual (Figura (3.9)), levando a um fluxo magnético nulo associado a  $\mathcal{B}$ , com isso  $\Phi_{total} = e \int B d^2x$ . Além disso, a forma de  $\mathcal{B}$  expõe que a carga no centro do vórtice carregado possui sinal oposto ao sinal da carga em sua extremidade, o que é um comportamento não visto na literatura para vórtices em modelos de Maxwell-Chern-Simons-Higgs.

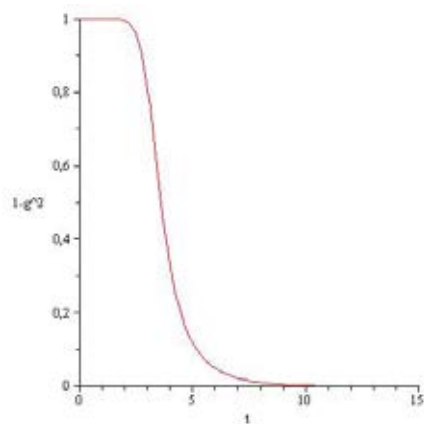


Figura 3.8: Gráfico de  $B(r) \times r$ , com  $m = n = 1$

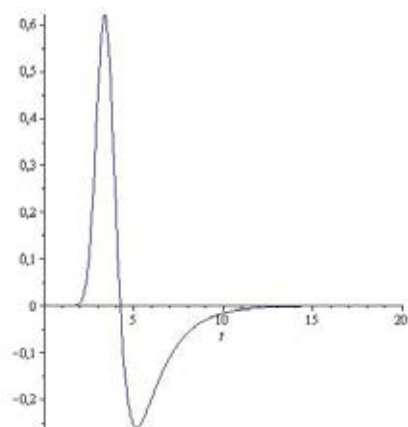


Figura 3.9: Gráfico de  $\mathcal{B}(r) \times r$ , com  $m = n = 1$

Finalmente, a meta de se obter soluções do tipo vórtice de energia finita foi atingida utilizando um modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com campos de gauge distintos fazendo uso de um campo auxiliar real  $\mathcal{N}$ .

# Conclusões

No desenvolver dessa dissertação, estudamos soluções do tipo vórtice advindas de modelos abelianos, relativísticos com simetria  $U(1)$  local. Foi visto como a topologia dessas soluções assegurava sua estabilidade e existência, além de garantir que a energia do sistema fosse finita.

Foi demonstrado o mecanismo de Bogomol'nyi, que além de fixar a energia mínima do sistema proporcional ao fluxo magnético, fornecia equações de primeira ordem nas derivadas consistentes com as equações de movimento, cabendo lembrar que introduzimos uma forma não ortodoxa do mesmo mecanismo, na qual não havia necessidade de se completar quadrado diretamente e o limite de Bradlow surgia de forma mais natural.

Estudamos ainda diferentes modelos nos quais era possível obter soluções do tipo vórtice topológico e não-topológico. Dentre eles, o de Chern-Simons-Higgs (Seção 2.1), que diferente do modelo de Maxwell-Higgs Abeliano, vinculava a carga elétrica do sistema ao fluxo magnético, tal fato foi herdado por todos os modelos que faziam uso do termo  $\frac{1}{4}\kappa A_\mu F_{\mu\nu}$ , como nos casos de vórtices carregados.

Por sua vez, os modelos ditos carregados possuíam densidade de lagrangiana que continha tanto os termos associados a Maxwell quanto a Chern-Simons, e apresentavam o intrigante fato de seu campo elétrico,  $E$ , associado ao termo de Maxwell não ser nulo e contribuir para a energia. Tais modelos podem dar origem a eletrodinâmicas massivas em  $(2 + 1)D$ , e neles foi possível obter soluções do tipo vórtice topológico e não-topológico, servindo de motivação na construção de um modelo mais complexo com dois campos de gauge distintos, no qual um deles,  $A_\mu$ , tinha sua dinâmica governada pelo termo de Maxwell e outro,  $\mathcal{A}_\mu$ , tinha sua dinâmica governada pelo termo de Chern-Simons, e utilizando um potencial adequado de sexta ordem que suportava quebra de simetria para  $r \rightarrow \infty$ .

Tal modelo recebeu o nome de *Maxwell-Chern-Simons-Higgs com campos de gauge distintos* e foi estudado no Capítulo 3. Ele apresentou uma interessante equação de primeira ordem nas derivadas para  $\phi$ , com solução exata, a qual não era consistente com a equação de segunda

ordem, sendo portanto inválida. Além disso não era possível minimizar a energia, pois a contribuição do campo elétrico associado ao termo de Maxwell não poderia ser eliminada sem causar inconsistências nas equações de movimento.

Para tentar contornar o problema, foi introduzido um novo termo de Chern-Simons, misto, composto pelos dois campos  $A_\mu$  e  $\mathcal{A}_\mu$ . Nesse contexto a energia pôde ser minimizada sem causar problemas às equações de movimento, porém ainda não foi possível obter soluções do tipo vórtice, uma vez que as soluções para  $\phi$  encontradas divergiam. Ainda, foi tomada uma última alternativa, a de se acrescentar um campo auxiliar neutro,  $\mathcal{N}$ , no modelo da seção 3.1. Nesse caso o potencial utilizado era também de sexta ordem, porém, diferente dos outros dois casos, ele não foi imposto, mas surgiu naturalmente da saturação da energia via mecanismo de Bogomol'nyi. As soluções obtidas são de vórtices topológicos, como desejado, e o campo magnético de Chern-Simons,  $\mathcal{B}$ , possui comportamento diferente dos demais obtidos em modelos de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Com isso, a proposta de obter soluções de vórtice para um modelo abeliano de Maxwell-Chern-Simons-Higgs foi finalmente cumprida.

Por fim, cabe ressaltar que os modelos vistos nessa dissertação representam um panorama muito limitado dentro do espectro total de soluções do tipo vórtice. Uma vez que modelos não abelianos e/ou não relativísticos não puderam ser abordados devido à complexidade e extensão do assunto. No entanto, esse trabalho busca sua riqueza de forma singela, na apresentação de uma forma diferente de se abordar o mecanismo de Bogomol'nyi, bem como mostrar que o modelo de MCSH estudado no capítulo 3, possui soluções do tipo vórtice topológico com energia finita. Esperamos com isso ter deixado uma contribuição ao entendimento desses modelos, bem como uma abordagem, quiçá, didática à um assunto tão rico.

# Bibliografia

- [1] A. Vilenkin e E. S. Shellard, “Cosmic strings and other topological defects”. Cambridge University Press, 1994. Cambridge, UK;
- [2] R. Rajaraman, “Solitons and Instantons”. Elsevier Science Publisher 1987. Amsterdam, Holanda;
- [3] M. Shifman, “Advanced Topics in Quantum Field Theory”. Pg. 90-100. Cambridge University Press, 2012. New York, USA;
- [4] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP 5 (1957), 1174–1182
- [5] V. L. Ginzburg e L. D. Landau, “On the theory of superconductivity. In Collected papers of L. D. Landau”. Pg. 546–568. D. Ter Haar press 1965. New York, USA;
- [6] J. Ambjorn e P. Olesen, Phys. Lett. B 214 (1988), 565–569;
- [7] L.H. Ryder, “Quantum Field Theory”, segunda edição. Pg. 390-425. Cambridge University Press, 1996. New York, USA;
- [8] T. Vachaspati, “Kinks and domain walls”. Cambridge University Press, 2006. New York, USA;
- [9] G. H. Derrick, J. Mathematical Phys. 5 (1964), 1252–1254;
- [10] Bazeia, D. et al. Phys.Rev.Lett. 91 (2003), 241601
- [11] H. B. Nielsen e P. Olesen, Nucl. Physics B 61 (1973), 45;
- [12] V.L. Ginzburg and L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20 (1950), 1064;
- [13] E. B. Bogomol’nyi, Sov. J. Nucl. Physics. 24 (1976), 449;
- [14] R. Casana et al., Phys. Rev. D 86 (2012), 125033 ;

- [15] C. Miller, R. Casana, M. M. Ferreira Jr., and E. da Hora, *Phys. Rev. D* 86 (2012), 065011;
- [16] C. H. C Villalobos, J. M. Hoff da Silva & M. B. Hott, *Eur. Phys. J. C* 74 (2014), 2799;
- [17] V. Rubakov, “Classical Theory of Gauge Fields”.Pg. 155-165. Princeton University Press, 2002. New Jersey, USA;
- [18] P. A. Horvathy e P. Zhang, “Vortices in (Abelian) Chern-Simons Gauge Theory”. *Phys. Rep.* 481 (2009) 83-142;
- [19] C. H. Taubes, *Commun. Math. Phys.* 75 (1980), 207;
- [20] G. V. Dunne, “Aspects of Chern-Simons Theory”.arXiv:hep-th/9902115 v1 (1999);
- [21] C. H. C Villalobos, “Vórtices semi-locais”, 2013, 82f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2013;
- [22] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev. D* 11 (1975), 2227;
- [23] S. Chern e J. Simons, *Ann. of Math.* 99 (1974), 48;
- [24] J. R. *Angew. Math.* 646 (2010), 135;
- [25] R. Jackiw e E. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990), 2234 ;
- [26] R. Jackiw, K. Lee e E. Weinberg, *Phys. Rev. D.* 42 (1990), 3466;
- [27] J.M. Hoff da Silva, “Soluções do Tipo Vórtex em Teorias de Gauge Chern-Symons-Maxwell-Higgs”, 2005, f96. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física Teórica, Universidade Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2005;
- [28] S. K. Paul e A. Khare , *Phys. Lett. B* 174 (1986), 420;
- [29] R. Ming Chen, Y. Guo, D. SPirn, et al. *Proc. R. Soc. A* 465 (2009), 3489–3516;
- [30] C. Lee, K. Lee e H Min, *Physics Letters B* 252 (1990), 79-83;
- [31] J. Fröhlich e P. A. Marchetti, *Commun. Math. Phys.* . 121 (1989), 177–223;
- [32] G. V. Dunne, “Self-Dual Chern-Simons Theories”. Pg. 113-118, Springer press, 1995, Heidelberg, Ge;



- [33] R. Pisarki e S. Rao, Phys. Rev. D 32 (1985), 2081;
- [34] Y. Yang, "Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis" . Pg. 157-255, Springer press, 2001. New York, USA;
- [35] D. Jatkar e A. Khare, Phys. Lett. B 236 (1990) 283.