

**Carlos Antônio Dornellas**

Análise de Tópicos Relevantes em Programação Linear e Aplicações no  
Ensino de Engenharia

Ilha Solteira

2014

**Carlos Antônio Dornellas**

Análise de Tópicos Relevantes em Programação Linear e Aplicações no  
Ensino de Engenharia

Orientador: Prof. Dr. Rubén Augusto Romero Lázaro

Co-orientadora: Profa. Dra. Marina Lavorato Oliveira

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia -  
UNESP – Câmpus de Ilha Solteira, para obtenção do  
título de doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira

2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

D713a Dornellas, Carlos Antonio.  
Análise de tópicos relevantes em programação linear e aplicações no ensino de engenharia / Carlos Antonio Dornellas. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2014  
136 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2014

Orientador: Rubén Augusto Romero Lázaro

Co-orientador: Marina Lavorato Oliveira

Inclui bibliografia

1. Programação linear. 2. Pontos extremos. 3. Direções extremas.  
4. Primal simplex revisado. 5. Dual simplex. 6. Primal simplex canalizado e dual simplex canalizado.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Análise de Tópicos Relevantes em Programação Linear e Aplicações no Ensino de Engenharia


AUTOR: CARLOS ANTONIO DORNELLAS

ORIENTADOR: Prof. Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

CO-ORIENTADORA: Profa. Dra. MARINA LAVORATO DE OLIVEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. JOSE ROBERTO SANCHES MANTOVANI  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. SERGIO AZEVEDO DE OLIVEIRA  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. CARLOS ROBERTO MENDONÇA DA ROCHA  
Centro de Engenharias e Ciências Exatas / Universidade Estadual do Oeste do Paraná

  
Prof. Dr. LUIS GUSTAVO WESZ DA SILVA  
Câmpus de Itumbiara / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnol. de Goiás

Data da realização: 12 de dezembro de 2014.

À minha esposa **Jurema Mazarelo Silva Dornellas**

Aos meus filhos:

**Carlos Antônio e Breno Fernando**

Aos meus pais:

**Antônio Dornelas e Clarice Sanches Dornelas**

Dedico

Aos meus irmãos:

Júlio César (*in memoriam*), Sonia Maria,  
Maria Cecília e Maria José.

À minha família.

Aos meus amigos e colegas.

Ofereço

A Matemática é o alfabeto com o  
qual Deus escreveu o Universo.  
(Pitágoras)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me apoiaram durante o doutorado. Primeira e principalmente à minha esposa Jurema, que incentivou a retomar os estudos e cuidou do nosso lar em Cuiabá para que fosse possível o meu afastamento para a UNESP.

Aos meus pais Antônio Dornelas e Clarice Sanches Dornelas que com muito entusiasmo me acolheram e motivaram-me nos estudos.

Ao meu orientador, o professor Rubén Augusto Romero Lázaro pela confiança e condução ao perfeito entendimento da nossa pesquisa. Também tive a oportunidade de ser seu aluno nas disciplinas **Programação Inteira e de Grande Porte, Introdução à Metaheurísticas e Otimização Linear de Sistemas.**

À professora Marina Lavorato Oliveira, minha co-orientadora, pela ajuda na confecção do trabalho científico.

Ao professor Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira com o qual tive a oportunidade de ser seu aluno nas disciplinas de **Engenharia de Sistemas de Controle e Sistemas Não Lineares.**

Ao professor José Roberto Sanches Mantovani com o qual tive a oportunidade de ser seu aluno na disciplina **Programação Não Linear.**

Aos demais professores e técnicos do Departamento de Engenharia Elétrica que sempre estiveram à disposição dos alunos da pós-graduação.

Aos colegas Mahdi Pourakbari Kasmaei, pelo assessoramento na língua inglesa; Leonardo Henrique Faria Macedo Possagnolo, pela ajuda nos gráficos e aos demais colegas do LaPSEE que sempre estiveram apoiando-me.

Ao amigo Professor Ricardo Luiz Barros de Freitas pela orientação nas normas e edição do texto.

Aos funcionários da biblioteca João Josué Barbosa, Sandra Maria Clemente de Souza, Isako Mizuno, Cleide Maria da Silva Ferreira, Mariza Ferreira de Lima M. Santos, Marta Satiko Suzuki.

A CAPES e o Departamento de Matemática/ICET/UFMT pelo apoio.

## RESUMO

A presente pesquisa apresenta uma análise teórica de alguns tópicos relevantes de programação linear relacionados ao método simplex. A motivação de analisar esses tópicos é torná-los mais didáticos e incentivar a aplicação dos mesmos na otimização de sistemas de energia elétrica e, em geral, na aplicação na otimização de problemas de engenharia. O método simplex em programação linear (PL) que foi por muito tempo a principal técnica de otimização de problemas de otimização lineares e não lineares (usado após a linearização) ainda é o mais utilizado na otimização de muitos problemas reais na engenharia e particularmente na engenharia elétrica. O método simplex resolve um problema de programação linear usando uma estratégia conceitualmente refinada. Para conhecer todas as versões do método simplex que podem ser usadas para resolver um problema de programação linear e também para dominar a parte conceitual do mesmo é necessário entender o ótimo de um problema de programação linear, quando um problema de programação linear é ilimitado, a lógica de otimização do método primal simplex, as condições nas quais um método simplex precisa de variáveis artificiais, o método primal simplex revisado, a teoria da dualidade em programação linear, a lógica de otimização do método dual simplex, a teoria da análise de sensibilidade e pós-otimização em programação linear, a lógica de otimização do método primal simplex canalizado bem como do método dual simplex canalizado. O produto desta pesquisa consiste em gerar um material didático que ajude de forma mais eficiente aos iniciantes em tópicos de pesquisa operacional. Desta forma, apresenta-se uma análise teórica e a reformulação de alguns tópicos relevantes relacionados com o método simplex na resolução de problemas de PL.

**Palavras-chave:** Programação linear. Pontos extremos. Direções extremas. Primal simplex revisado. Dual simplex. Primal simplex canalizado. Dual simplex canalizado.



## ABSTRACT

This research presents a theoretical analysis of some relevant topics related to linear programming via simplex method. The motivation of analyzing these topics makes them more didactic and easy to understand. As these kinds of methodologies are fast and unequivocal, they are applicable in various real-world engineering problems particularly in the field of power system optimization. In linear programming (LP), the simplex method has been the main technique to optimize the linear problem as well as the linearized problem (a problem with the nonlinear nature). The simplex method solves a linear programming problem using a conceptually refined strategy. In order to understand all of the available versions of the simplex method that can be used to find the solution of a linear programming problem and in order to have a detail study on them, it is necessary to understand: the optimality of such problems, where a linear programming problem is limited, the logic of optimization of the primal simplex method, in which condition a simplex method needs artificial variables, the revised primal simplex method, the duality theory in linear programming, the logic of optimization of the dual simplex methodology, the theory of sensitivity analysis and post-optimization in linear programming, and the logic of the primal or dual simplex for the boundary variables. The output of this research is to prepare a didactic reference and a user manual to help the beginner researchers in operations research. Therefore, a theoretical analysis and reformulation of some relevant topics related to the simplex method for solving LP problems is presented.

Keywords: Linear programming. Extreme points. Extreme directions. Revised primal simplex. Dual simplex. Primal and dual simplex for the boundary variables.

## SUMÁRIO

<b><u>1</u></b>	<b><u>INTRODUÇÃO GERAL .....</u></b>	<b><u>11</u></b>
1.1	O MÉTODO SIMPLEX.....	11
1.2	APLICAÇÕES DO MÉTODO SIMPLEX .....	13
1.3	OS TEMAS ABORDADOS NA TESE.....	14
<b><u>2</u></b>	<b><u>OS TÓPICOS DE OTIMALIDADE DO MÉTODO PRIMAL SIMPLEX .</u></b>	<b><u>15</u></b>
2.1	INTRODUÇÃO .....	15
2.2	DEFINIÇÕES DE ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR..	15
2.2.1	PONTO EXTREMO E SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL.....	15
2.2.2	DIREÇÃO E DIREÇÃO EXTREMA .....	17
2.3	O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO (CASO GERAL) .....	20
2.3.1	FORMA SISTEMÁTICA PARA ENCONTRAR OS PONTOS EXTREMOS DE UM CONJUNTO CONVEXO POLIEDRAL .....	26
2.3.2	METODOLOGIA PARA ENCONTRAR AS DIREÇÕES EXTREMAS DE UM CONJUNTO CONVEXO.....	27
2.4	OS TEOREMAS DE OTIMALIDADE DO MÉTODO PRIMAL SIMPLEX.....	27
2.5	APLICAÇÕES DO TGR (TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO - CASO GERAL) .....	31
2.6	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS .....	32
<b><u>3</u></b>	<b><u>O MÉTODO PRIMAL SIMPLEX REVISADO.....</u></b>	<b><u>38</u></b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	38
3.2	O MÉTODO PRIMAL SIMPLEX REVISADO.....	38
3.3	PROVA DE VALIDADE DO MÉTODO PRIMAL SIMPLEX REVISADO.....	42
3.4	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS.....	44
<b><u>4</u></b>	<b><u>O MÉTODO DUAL SIMPLEX.....</u></b>	<b><u>51</u></b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	51
4.2	DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR .....	51
4.3	O MÉTODO DUAL SIMPLEX (MDS) .....	55
4.4	PROVA DE VALIDADE DO MÉTODO DUAL SIMPLEX .....	61
4.5	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS .....	63

<b><u>5</u></b>	<b><u>O MÉTODO PRIMAL SIMPLEX CANALIZADO</u></b>	<b>69</b>
5.1	INTRODUÇÃO	69
5.2	O MÉTODO DE FASE ÚNICA DO PRIMAL SIMPLEX CANALIZADO	70
5.3	O MÉTODO DAS DUAS FASES DO PRIMAL SIMPLEX CANALIZADO	78
5.4	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS	79
<b><u>6</u></b>	<b><u>O MÉTODO DUAL SIMPLEX CANALIZADO (DSC)</u></b>	<b>84</b>
6.1	INTRODUÇÃO	84
6.2	O QUADRO DE GARFINKEL-NEMHAUSER	84
6.3	O MÉTODO DE FASE ÚNICA DO DUAL SIMPLEX CANALIZADO	89
6.3.1	ALGORITMO DUAL SIMPLEX UTILIZANDO O QUADRO SIMPLEX ALTERNATIVO	89
6.3.2	ALGORITMO DUAL SIMPLEX CANALIZADO	89
6.4	PROVA DE OTIMALIDADE DO QUADRO DUAL SIMPLEX CANALIZADO	97
6.5	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS	103
	<b><u>CONCLUSÕES</u></b>	<b>111</b>
	<b><u>REFERÊNCIAS</u></b>	<b>113</b>
	<b><u>APÊNDICE</u></b>	<b>114</b>
	O TGR E AS CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE DE UM PL	114
	A LÓGICA DA DECOMPOSIÇÃO MATEMÁTICA	115
	A DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG-WOLFE	116
	A FASE I DA DECOMPOSIÇÃO MATEMÁTICA DE DANTZIG-WOLFE	118
	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS DA DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG-WOLFE	119

## 1 Introdução Geral

### 1.1 O Método Simplex

O Método Simplex foi o primeiro algoritmo a ser proposto para a resolução de problemas de otimização lineares, baseia-se nas propriedades dos conjuntos convexos em geral e, dos poliedros em particular (PIRES, 2005).

A história do desenvolvimento do Método Simplex começa em 1826, quando Fourier apresentou uma ideia visando à solução de sistemas de desigualdades lineares. Em 1939, o matemático Leonid V. Kantorovich na União Soviética, já havia modelado e resolvido alguns problemas de otimização ligados ao planejamento econômico e, graças a esses trabalhos, recebeu o prêmio Nobel de Economia em 1975. Em 1947, G. B. Dantzig (DANTZIG, 1963) forneceu os resultados teóricos e computacionais criando o método simplex (MACULAN, 2004).

Em termos geométricos, o método simplex consiste em percorrer os vértices do poliedro  $\{\mathbf{x}: \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ , ao longo das arestas que os ligam, até que seja encontrado o vértice ótimo. O método simplex funciona muito bem na prática. Contudo, ainda não se provou que existe um percurso nesse poliedro que visita, no pior dos casos, um número polinomial de vértices.

A questão de saber se existe um algoritmo que em tempo polinomial resolva qualquer problema de otimização linear foi primeiro resolvida por L. Khachiyan em 1979 que propôs uma variante do método elipsoide da programação não linear que funcionava em tempo polinomial com problemas de programação linear. A consequência desse resultado extravasou as fronteiras da programação linear e teve repercussão na complexidade computacional de problemas de programação combinatória. No entanto, o método veio a revelar-se muito lento na resolução de problemas práticos.

Segundo (SOARES, 2007), N. Karmarkar publicou um artigo revolucionário no qual ele propõe um método de pontos interiores (da programação não linear) que não só funcionava em tempo polinomial como conseguia ser mais rápido do que as melhores implementações do método simplex em alguns problemas particularmente grandes. Hoje em dia, o método simplex continua a ser, em geral, um método eficiente na resolução de problemas práticos, só suplantado pelo método de pontos interiores na resolução de problemas muito grandes.

Um problema de Programação Linear (PL) tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Min } \mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Onde  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\text{posto}(\mathbf{A}) = m$ . Neste contexto  $\mathbf{z}$  é chamado de função objetivo e cada equação do sistema matricial  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , é chamada de restrição. O vetor  $\mathbf{x}$  é vetor das variáveis de decisão (não negativas) do problema de PL.

Um problema de PL é utilizado para distribuir recursos limitados a atividades em competição. Na sua formulação sempre se deve considerar *proporcionalidade*, *aditividade*, *divisibilidade e certeza* (HILLIER; LIEBERMAN, 1988).

*Proporcionalidade* é uma suposição sobre *atividades individuais* consideradas independentes umas das outras (enquanto que a suposição subsequente de *atividade* se refere ao efeito de conduzir atividades *conjuntamente*). Para cada atividade, as quantidades totais de cada insumo e o lucro/custo associado são estritamente proporcionais ao nível de produção, isto é, cada atividade é capaz de expansão ou redução proporcional contínua. Assim, os  $c_j x_j$  e  $a_{ij} x_j$  são quantidades diretamente proporcionais.

Na *aditividade*, supõe-se não existir tal interação entre as atividades, mas refere-se ao efeito de conduzi-las conjuntamente. A suposição de proporcionalidade não é suficiente para garantir que a função objetivo e as restrições sejam lineares. Os termos de produtos cruzados irão ocorrer se houver interação entre algumas das atividades que fossem mudar a medida total de eficácia ou do uso de algum recurso. A aditividade supõe que não existe tal interação entre qualquer das atividades. Por isso, a suposição de aditividade requer que dados quaisquer níveis de atividade, o uso total de cada recurso e a medida total de eficácia resultante sejam iguais à soma das quantidades correspondentes geradas por toda a atividade conduzida pelo recurso. Em outras palavras, dados os níveis de atividade para cada uma das variáveis de decisão, as quantidades totais de cada insumo e o lucro associado são as somas dos insumos e do lucro para cada processo individual.

Às vezes, as variáveis de decisão teriam significação física somente se tivessem valores inteiros. Entretanto, a solução obtida pela PL frequentemente não é inteira. Por isso, a suposição de *divisibilidade* é que as unidades de atividades possam ser divididas em qualquer nível fracional, para que sejam permissíveis valores não inteiros para as variáveis de decisão.

A suposição de *certeza* é que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas. Em problemas reais, esta suposição raramente é precisamente satisfeita. Os modelos de PL usualmente são formulados no sentido de selecionar algum curso de ação futuro. Por isso os parâmetros usados seriam baseados numa predição de condições futuras, as quais introduzem inevitavelmente algum grau de incerteza.

Resolver um problema de PL diz respeito ao problema de encontrar um vector  $n$ -dimensional  $\mathbf{x}$  que satisfaz um dado sistema de desigualdades  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$  e que torna máximo (ou mínimo) o valor de uma dada função linear  $\mathbf{cx}$ . Este é um problema matemático que se aplica a uma grande variedade de situações práticas que ocorrem em gestão e planejamento de operações. O mais célebre algoritmo que o resolve, já descrito acima, é o método simplex, concebido por George Bernard Dantzig em 1947 (MACULAN, 2004).

## 1.2 Aplicações do Método Simplex

As aplicações da PL são comuns em quase todos os setores do cotidiano, por exemplo, nas indústrias, nos transportes, na saúde, na educação, na agricultura, nas finanças, na economia, nas administrações públicas.

Segundo (DANTZIG, 1963), uma série de sistemas de economia industrial, financeiro e militar pode ser modelada (ou razoavelmente aproximadas) pelos sistemas matemáticos de desigualdades e equações lineares dando origem ao desenvolvimento da PL.

A primeira e mais frutífera aplicação foi para a indústria de petróleo, incluindo a extração de petróleo, refino, mistura e distribuição. A seguir, a indústria de processamento de alimentos é talvez o segundo usuário mais ativo. Frigoríficos usam PL para determinar a mistura mais econômica de ingredientes para salsichas e rações para animais. Na indústria de ferro e aço, a PL tem sido utilizada para avaliar vários minérios de ferro. A PL é também usada para decidir quais produtos deve-se produzir, a fim de maximizar o lucro. As fábricas de papel usam PL para diminuir a quantidade de perdas de acabamento. O projeto ótimo de roteamento de mensagens em uma rede de comunicação, o roteamento de aeronaves e navios são outros exemplos onde os métodos de programação linear são aplicados. Mais recentemente, a PL tem sido utilizada em gestão financeira e empresas têm contratado pesquisadores para uma variedade de aplicações, especialmente para análise de concessão e análise de portfólio.

A literatura oferece ainda várias outras aplicações de PL em nossos dias.

### 1.3 Os Temas Abordados na Tese

Neste trabalho são apresentados alguns tópicos especiais, dentre eles:

- Os Tópicos de Otimalidade do Método Primal Simplex (capítulo 2), onde é apresentado um teorema inédito relacionando os pontos extremos e as direções extremas dos conjuntos convexos de pontos factíveis. Também é apresentada uma versão melhorada do teorema da representação – caso geral bem como os conceitos básicos tradicionais de programação linear. Neste capítulo são relacionados os principais teoremas que garantem a otimalidade do Método Primal Simplex;

- O Método Primal Simplex Revisado (capítulo 3), que, sem levar em conta as  $n$  colunas do PL original, atinge a mesma eficiência computacional e a prova de que, no quadro simplex correspondente a uma solução básica factível vinculada a uma nova base vizinha, será um processo válido para qualquer base inicial;

- O Método Dual Simplex (capítulo 4) onde são analisadas as relações entre os problemas primal e dual quanto à otimalidade bem como a resolução do problema dual no quadro simplex, acarretando a solução indireta do problema primal original. A parte mais importante do capítulo será a validação matemática onde são relacionadas as condições de otimalidade do problema primal com um ponto extremo do problema dual;

- O Método Primal Simplex Canalizado (capítulo 5) onde, na sua resolução, considera-se as restrições canalizadas na forma implícita trabalhando com uma base determinada pelo posto da matriz das restrições. São apresentados os algoritmos para fase única e também para duas fases;

- O Método Dual Simplex Canalizado (capítulo 6), onde são apresentados alguns fundamentos que pouco aparecem nos textos didáticos tradicionais. Inicialmente estuda-se o quadro de Garfinkel-Nemhauser que é um quadro alternativo bem reduzido, comparado aos já apresentados. Após este estudo, utiliza-se este quadro para construir o algoritmo dual simplex e, a seguir, o algoritmo do Método Dual Simplex Canalizado.

## 2 Os Tópicos de Otimalidade do Método Primal Simplex

### 2.1 Introdução

A maioria dos textos didáticos sobre o Método Primal Simplex utilizam a Análise Convexa para validar matematicamente todos os passos do algoritmo. Neste trabalho, é apresentada uma síntese da parte da Análise Convexa que é utilizada pelo Método Primal Simplex com suas definições, observações, teoremas, lemas e corolários.

Nessa oportunidade, são explanados vários teoremas que versam sobre otimalidade do Método Primal Simplex selecionados através da pesquisa realizada. Dentre esses, é apresentada uma proposição inédita, o Teorema 4 (que relaciona pontos extremos e direções extremas dos conjuntos convexos de pontos factíveis do problema de PL apresentado). Também é apresentada uma versão melhorada do Teorema da Representação (caso geral) bem como os conceitos básicos tradicionais de programação linear. Neste capítulo são relacionados os teoremas principais que garantem a otimalidade do Método Primal Simplex.

### 2.2 Definições de Alguns Conceitos Básicos de Programação Linear

#### 2.2.1 Ponto Extremo e Solução Básica Factível

**Definição 1:** Seja  $X$  um conjunto convexo, então  $x \in X$  é um **ponto extremo** se ele não pode ser representado como uma combinação convexa de dois pontos distintos de  $X$ . De maneira equivalente, se  $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ , onde  $\lambda \in [0, 1]$  e  $\forall x_1, x_2 \in X$  é um **ponto extremo**  $\Rightarrow x = x_1 = x_2$ .

**Definição 2:** Um **hiperplano**  $H \subset E^n$  é um conjunto convexo que se apresenta na forma  $\{x: px = k\}$  onde  $p \in E^n$ ,  $p \neq 0$  e  $k \in E$ . Se  $x_0 \in H$ , então  $px_0 = k$ ; e como  $px = k$ ,  $\forall x \in H$ , então  $H$  pode ser representado como um conjunto de pontos satisfazendo  $p(x - x_0) = 0$ , onde  $x_0$  é um ponto fixo de  $H$ .

**Observação 1:** Um hiperplano divide  $E^n$  em duas regiões chamadas **semiespaços**.

**Definição 3:** Um **semiespaço** é um conjunto convexo nas formas  $\{x: px \geq k\}$  ou então  $\{x: px \leq k\}$ , onde  $p \in E^n$ ,  $p \neq 0$  e  $k \in E$ .  $\{x: px \geq k\} \cup \{x: px \leq k\} = E^n$ . Tomando um ponto fixo  $x_0 \in H$ , representam-se os semiespaços como  $\{x: p(x-x_0) \geq 0\}$  ou  $\{x: p(x-x_0) \leq 0\}$ .



**Definição 4** – Seja o sistema  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$  onde  $\text{posto}(A, b) = \text{posto}(A) = m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Então escrevemos  $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$  e  $A = [B, N]$  onde  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $B^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $N \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ .  $B$  é chamada **matriz básica** e  $N$ , **matriz não básica**. Assim,  $Ax = b \Rightarrow$

$$[B \ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \quad \Rightarrow \quad Bx_B + Nx_N = b \quad \Rightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N. \text{ Uma}$$

**solução básica** para o sistema inicial é aquela obtida ao se fazer  $x_N = 0$  e obter  $x_B = B^{-1}b$ . Caso tenhamos  $x_B = B^{-1}b \geq 0$  então esta é chamada de **solução básica factível (SBF)**. Chamamos  $x_B$  o vetor das **variáveis básicas** e  $x_N$ , o das **variáveis não básicas**. Se  $x_B > 0$  então temos uma **SBF não degenerada**, mas, se existe pelo menos uma componente de  $x_B$  nula então temos uma **SBF degenerada**.

**Teorema 1** (ROMERO, 2005) – Seja  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ . Então  $x$  pertence a  $n$  hiperplanos **LI**  $\Leftrightarrow x$  é um ponto extremo de  $X$  (ou seja,  $x$  não pode ser escrito como uma combinação convexa de outros dois pontos extremos).

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Seja  $x \in X$  onde  $x$  pertence a  $n$  hiperplanos linearmente independentes de definição de  $X \Rightarrow x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$ ,  $\forall x^1, x^2 \in X$  e  $\lambda \in (0,1)$ . Assim,  $x^1$  e  $x^2$  também pertencem a estes  $n$  hiperplanos **LI** e, como a solução destas  $n$  equações de hiperplanos é única, então  $x^1 = x^2$ , ou seja,  $x$  é um ponto extremo.

( $\Leftarrow$ ) Suponha, por contradição, que o número de hiperplanos ativos linearmente independentes em  $x \in X$  é  $r < n$  (provaremos que a interseção desses hiperplanos não é um ponto extremo). As restrições ativas (hiperplanos) podem ser representadas por  $Gx = g$ , onde  $G$  é uma matriz de dimensão  $r \times n$  e, da mesma forma, seja  $d \neq 0$  uma solução de  $Gd = 0$ . Sabemos que  $d$  existe porque  $r < n$  e é possível escolher valores adequados para alguns elementos de  $d$  ( $Gd = 0$  é um sistema com várias soluções). Então  $\exists \varepsilon > 0 \mid x^1 = x_0 + \varepsilon d$  e  $x^2 = x_0 - \varepsilon d$  pertencem a  $X$ , pois,  $Gx^1 = g$  e  $Gx^2 = g$ , ou seja,  $G(x_0 + \varepsilon d) = Gx_0 + \varepsilon Gd = g$ . As restrições de  $X$  que não estavam ativas em  $x$  permanecem factíveis para  $\varepsilon > 0$  e suficientemente pequeno, Assim, escolhe-se  $x = \frac{x^1 + x^2}{2}$ ,  $\forall x^1, x^2 \in X$  que mostra que  $x$  não é um ponto extremo. Isto é uma contradição. Logo, se  $x$  é um ponto extremo de  $X \Rightarrow x$  pertence a  $n$  hiperplanos **LI**.

**Teorema 2** (Mostra a correspondência entre um ponto extremo e solução básica factível) (ROMERO, 2005) – Seja  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ . O conjunto de pontos extremos é equivalente ao conjunto de soluções básicas factíveis desde que  $X \neq \emptyset$ , ou seja,  $\bar{x} \in X$  é uma solução básica factível  $\Leftrightarrow \bar{x}$  é um ponto extremo de  $X$ .

Prova:

( $\Rightarrow$ ) Se  $\bar{x}$  é solução básica factível de  $X \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ ,  $A = [B \ N]$  e  $x_B = B^{-1}b \geq 0$  e  $x_N = 0$ . Isto implica que em  $\bar{x}$  sempre existem  $n$  hiperplanos ativos linearmente independentes do tipo  $(Ax = b \text{ e } x_N = 0)$  e existe  $B^{-1}$ , portanto, se  $n$  hiperplanos linearmente independentes estão ativos em  $\bar{x} \Rightarrow \bar{x}$  é um ponto extremo de  $X$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\bar{x}$  um ponto extremo de  $X$  então existem  $n$  hiperplanos ativos em  $\bar{x}$ . Como  $Ax = b$  fornece  $m$  hiperplanos ativos linearmente independentes, então do conjunto  $\bar{x} \geq 0$  (que corresponde a  $n$  semiespaços) uma parcela correspondente a  $(n - m)$  hiperplanos linearmente independentes deve estar ativa em  $\bar{x}$  para que existam os  $n$  hiperplanos linearmente independentes que caracterizam  $\bar{x}$  como ponto extremo. Seja  $p = n - m$  esses hiperplanos ativos com  $x_N = 0$ , o que acarreta que o sistema  $\{Ax = b \text{ e } x_N = 0\}$  tem solução única e é igual a  $\bar{x}$ . Agora seja  $N$  a matriz que contém as colunas de  $A$  correspondentes às variáveis em  $x_N$  e  $B$  as colunas restantes de  $A$  associadas às outras variáveis em  $x_B$ .  $Ax = b$  pode ser escrito na forma  $Bx_B + Nx_N = b$  e como  $x_N = 0$ , teremos uma solução igual a  $\bar{x}$ , então  $B$  é invertível e, além disso,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ , pois, se  $x \in S$ ,  $x \geq 0$ . Assim,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \geq 0$  uma vez que é factível (é ponto extremo de  $X$ ). Portanto, como  $\{x_N = 0 \text{ e } x_B = B^{-1}b \geq 0\}$  então  $\bar{x}$  é uma solução básica factível de  $X$ .

### 2.2.2 Direção e Direção Extrema

**Definição 5:** Um **raio** é um conjunto de pontos da forma  $\{x_0 + \lambda d: \lambda \geq 0\}$ , onde  $d$  é um vetor não nulo. Aqui  $x_0$  é chamado o **vértice** do raio, e  $d$  é a **direção do raio**.

**Definição 6:** Dado um conjunto convexo  $X$ , um vetor  $d \neq 0$  é chamado uma **direção** de  $X$ , se  $\{x_0 + \lambda d: \lambda \geq 0\} \subset X, \forall x_0 \in X$ . É evidente que se  $X$  é limitado então não existem direções em  $X$ .

**Definição 7:** Seja  $X = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ . Então um vetor  $d \neq 0$  é uma **direção** de  $X \Leftrightarrow A(x + \lambda d) = b, x + \lambda d \geq 0, \forall \lambda \geq 0, \forall x \in X$ . Se  $x \in X, Ax = b$  então a equação anterior se reduz a  $Ad = 0$ . O fato de  $x + \lambda d \geq 0$  acarreta que  $d \geq 0$ . Resumindo,  $d$  é uma direção de  $X \Leftrightarrow d \geq 0, d \neq 0$  e  $Ad = 0$ . Pode ser mostrado que  $d$  é uma direção de  $X = \{x: Ax \geq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow d \geq 0, d \neq 0$  e  $Ad \geq 0$  bem como  $d$  é uma direção de  $X = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow d \geq 0, d \neq 0$  e  $Ad \leq 0$ .

**Observação 2:** O conjunto de direções é convexo.

**Definição 8:** Uma função  $f$  é **convexa** se:

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \forall \lambda \in [0, 1] \quad (1)$$

**Definição 9:** Uma função  $f$  é **côncava** se  $-f$  é convexa, ou seja:

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \forall \lambda \in [0, 1] \quad (2)$$

**Observação 3:** Existem várias maneiras de mostrar que uma função  $f(x)$  é convexa:

1. Usando a definição apresentada em (1), escolhendo dois vetores genéricos e demonstrando que a mesma é satisfeita;
2. Mostrar que a Hessiana de  $f(x)$ ,  $H(x)$ , é semidefinida positiva.

**Teorema 3** – As funções lineares são côncavas e convexas simultaneamente.

**Prova:** Seja  $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + k, \forall k, \lambda_i \in \mathbb{R}$ . Sejam os pontos  $x^1$  e  $x^2$ . Logo, teremos  $f(x^1) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 + k$  e  $f(x^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + k, \forall k, \lambda_i \in \mathbb{R}$ . Desta forma, temos:  $\alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2) = \alpha (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 + k) + (1 - \alpha) (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\alpha(x_i^1 - x_i^2) + x_i^2] + k = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\alpha x_i^1 + (1 - \alpha)x_i^2] + k = f[\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2], \forall k, \lambda_i \in \mathbb{R}$ . Assim, mostra-se que  $\alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2) = f[\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2]$ , ou seja, as funções lineares podem ser côncavas ou convexas.

**Definição 10:** Um **conjunto poliédrico** é a interseção de um número finito de semiespaços, ou seja,  $\{a^i x \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m\} = \{x: Ax \leq b\}$  onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, a^i \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se tal conjunto é limitado então é chamado de **politopo**.

**Definição 11:** Um **cone poliédrico**  $C$  é a interseção de um número finito de semiespaços, cujos hiperplanos passam pela origem, ou seja,  $C = \{x: Ax \leq 0\}$  onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Observação 4:** As direções de um conjunto poliédrico  $X = \{x: Ax \leq b\}$  são dadas pelos vetores que satisfazem a relação:  $D = \{d: Ad \leq 0; d \geq 0; d \neq 0\}$ . Como  $d_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ , pode-se normalizar o vetor  $d$  considerando  $\sum_{j=1}^n d_j = 1$  e assim, o conjunto de vetores que são direções de  $X$  assume a seguinte forma:  $D = \{d: Ad \leq 0; d \geq 0; d \neq 0; \sum_{j=1}^n d_j = 1\}$ .

**Definição 12:** Uma direção de um conjunto convexo  $X$  que não pode ser representada como uma combinação positiva de duas direções distintas é chamada de **direção extrema** de  $X$ . Um **raio extremo** é qualquer raio de  $X$ , cuja direção é extrema.

**Definição 13:** Um **cone convexo**  $C$  é um conjunto convexo com a propriedade adicional que  $\lambda x \in C, \forall \lambda \geq 0, \forall x \in C$ . Assim,  $C$  contém a origem e também o raio ou semiespaço  $\{\lambda x: \lambda \geq 0\}, \forall x \in C$ . Daí um cone convexo é um conjunto convexo que consiste inteiramente de raios que emanam a partir da origem.

**Observação 5:** Uma vez que um cone convexo  $C$  é formado pelos seus raios, então  $C$  pode ser inteiramente caracterizado por suas direções. De fato, nem todas as direções são necessárias, uma vez que uma direção que não é extrema pode ser representada como uma combinação positiva de direções extremas.

**Definição 14:** **Face própria de  $X$**  é um conjunto de pontos de  $X$  que pertencem a um conjunto não vazio de hiperplanos ativos.

**Definição 15:**  $\text{Dim}(F) = n - r(F)$ , onde  $r(F)$  é o número máximo de hiperplanos **LI** ativos em todos os pontos da **face  $F$** .

**Observação 6:** Cada hiperplano ativo **LI** produz a perda de um grau de liberdade e assim:

(i) Um ponto extremo é uma face própria de dimensão zero porque tem  $n$  hiperplanos ativos **LI**;

(ii) Uma aresta é uma face própria de dimensão 1 porque tem  $(n - 1)$  hiperplanos ativos **LI**. Assim, uma aresta é uma face própria de um grau de liberdade porque tem somente  $(n - 1)$  hiperplanos ativos **LI** (um hiperplano a menos que um ponto extremo). Desta forma, uma aresta é um conjunto de pontos que tem  $(n - 1)$  hiperplanos ativos **LI**, ou seja, em todos os pontos de uma aresta existem  $(n - 1)$  hiperplanos ativos **LI**;

(iii)  $\dim(\mathbf{X}) = n - r(\mathbf{X}) = n - \mathbf{0} = n$ . Neste caso tem-se o conjunto convexo  $\mathbf{X}$  e deve existir pelo menos um ponto no qual nenhum hiperplano está ativo (um ponto interior, por ex.). Assim, o conjunto  $\mathbf{X}$  e  $\emptyset$  são chamados de **faces impróprias de  $\mathbf{X}$** ;

(iv) **Faceta de  $\mathbf{X}$**  é a face própria de maior dimensão, isto é,  $\dim(\mathbf{F}) = \dim(\mathbf{X}) - 1$ ;

(v) **Pontos extremos adjacentes de  $\mathbf{X}$**  – ocorre quando dois pontos extremos de  $\mathbf{X}$  são unidos por uma aresta. Desta forma, os pontos extremos adjacentes têm **(n-1)** hiperplanos ativos **LI** comuns;

### 2.3 O Teorema da Representação (caso geral)

**Teorema 4** – Sejam dados os conjuntos convexos  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  e  $\mathbf{D} = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{d} \leq \mathbf{0}, \mathbf{d} \geq \mathbf{0}, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}, \sum_{j=1}^n d_j = 1\}$  onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;  $\bar{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Então  $\bar{\mathbf{d}}$  é um ponto extremo de  $\mathbf{D} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{d}}$  é uma direção extrema de  $\mathbf{X}$ .

**Prova:**

1ª maneira:

( $\Rightarrow$ ) Seja  $\bar{\mathbf{d}}$  um ponto extremo de  $\mathbf{D} \Rightarrow$  Se tem  $\bar{\mathbf{d}} = \lambda \mathbf{d}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{d}^2$ , onde  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\forall \mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{d}^1 = \mathbf{d}^2$ . Então, como  $\lambda, 1 - \lambda \geq 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{d}}$  é uma combinação positiva de  $\mathbf{d}^1$  e  $\mathbf{d}^2$  onde  $\mathbf{d}^1 = \mathbf{d}^2$ . Logo, como  $\mathbf{d}^1$  e  $\mathbf{d}^2$  são direções de  $\mathbf{X} \Rightarrow \bar{\mathbf{d}}$  é uma **direção extrema** de  $\mathbf{X}$ .

( $\Leftarrow$ )  $\bar{\mathbf{d}}$  é uma **direção extrema** de  $\mathbf{D} \Rightarrow \forall \mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{X}$ , se  $\bar{\mathbf{d}} = \alpha \mathbf{d}^1 + \beta \mathbf{d}^2$ , onde  $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \mathbf{d}^1 = \mathbf{d}^2$ . Supondo  $\beta = 1 - \alpha$  e  $\alpha \in [0, 1] \Rightarrow \bar{\mathbf{d}} = \alpha \mathbf{d}^1 + (1 - \alpha) \mathbf{d}^2$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{d}^1 = \mathbf{d}^2 \Rightarrow \bar{\mathbf{d}}$  é um **ponto extremo** de  $\mathbf{D}$ .

2ª maneira (usando a forma contra positiva para tal demonstração):

( $\Rightarrow$ ) Suponha, por contradição, que  $\bar{\mathbf{d}}$  não é uma **direção extrema** de  $\mathbf{X}$ . Tomando  $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{d}^1 \neq \mathbf{d}^2$ , observa-se que  $\bar{\mathbf{d}} = \alpha \mathbf{d}^1 + \beta \mathbf{d}^2$ ,  $\forall \mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2 \in \mathbf{D}$ ,  $\forall \alpha, \beta \geq 0$ . Então, considerando  $\beta = 1 - \alpha$  e  $\alpha \in [0, 1] \Rightarrow \bar{\mathbf{d}} = \alpha \mathbf{d}^1 + (1 - \alpha) \mathbf{d}^2$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  onde  $\mathbf{d}^1 \neq \mathbf{d}^2 \Rightarrow \bar{\mathbf{d}}$  não é um **ponto extremo** de  $\mathbf{D}$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha, por contradição, que  $\bar{\mathbf{d}}$  não é um **ponto extremo** de  $\mathbf{D} \Rightarrow \exists \mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2 \in \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{d}^1 \neq \mathbf{d}^2$  tal que  $\bar{\mathbf{d}} = \lambda \mathbf{d}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{d}^2$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ . Como  $\lambda, 1 - \lambda \geq 0$  então, fazendo  $\alpha = \lambda$  e  $\beta = 1 - \lambda$ ,  $\bar{\mathbf{d}} = \alpha \mathbf{d}^1 + \beta \mathbf{d}^2$ , ou seja,  $\bar{\mathbf{d}}$  não é uma **direção extrema** de  $\mathbf{X}$ .

Desta forma, está devidamente demonstrado que:

$\bar{\mathbf{d}}$  é um ponto extremo de  $\mathbf{D} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{d}}$  é uma direção extrema de  $\mathbf{X}$ .

**Teorema 5** (Existência de solução ótima) (ROMERO, 2005) – Se  $X \neq \emptyset$  então existe uma solução ótima para o mesmo  $\Leftrightarrow \mathbf{c} \mathbf{d}_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, l$  onde  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_l$  são as direções extremas de  $X$  (caso  $\mathbf{c} \mathbf{d}_j < 0$  então a solução será ilimitada).

**Teorema 6** (Teorema da representação - caso geral) (ROMERO, 2005)

Seja  $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  um conjunto não vazio onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Sejam agora os conjuntos:  $S_p = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$  dos pontos extremos de  $X$  e  $S_d = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_l\}$ , das direções extremas de  $X$ . Então:

i)  $X \neq \emptyset \Rightarrow S_p \neq \emptyset$  e **finito**;

ii)  $X \neq \emptyset$  e **limitado**  $\Leftrightarrow S_d = \emptyset$ ;

iii)  $X$  é **ilimitado**  $\Rightarrow S_d \neq \emptyset$  e **finito**;

iv)  $\bar{\mathbf{x}} \in X \Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^l \mu_i \mathbf{d}_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k; \mu_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, l.$  (3)

**Prova:**

i.1) Será provado que existe pelo menos um ponto extremo, ou seja,  $S_p \neq \emptyset$ .

Será mostrado que  $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 1$ , onde  $k = |S_p|$  (o número de elementos de  $S_p$ ). Para este fim, seja  $\bar{\mathbf{x}} \in X$ . Se  $\bar{\mathbf{x}} \in S_p$  então  $k \geq 1$ , ou seja,  $S_p \neq \emptyset$ . Suponha que  $\bar{\mathbf{x}} \notin S_p$ . Seja  $r$  o número máximo de hiperplanos ativos linearmente independentes em  $\bar{\mathbf{x}}$  e seja  $\bar{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2$ , onde  $\lambda \in (0, 1), \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in X, \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$ . Note que  $r \in [0, n)$ , ou seja, se nenhum hiperplano está ativo em  $\bar{\mathbf{x}}$  (ponto interior) então  $r = 0$  bem como se  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto extremo,  $r = n$ . Seja  $\mathbf{d} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{0}$  e deduzimos que:

$$\mathbf{y}_1 = \bar{\mathbf{x}} - (1 - \lambda) \mathbf{d} \text{ e } \mathbf{y}_2 = \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d} \quad (4)$$

Agora considera-se os deslocamentos de  $\bar{\mathbf{x}}$  nas direções (e sentidos) de  $-\mathbf{d}$  e  $\mathbf{d}$ . Ambos são possíveis e finitos sem sair de  $X$ , pois  $X \subseteq \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ , ou seja, no pior caso, o tamanho do passo é limitado pelos hiperplanos definidos por  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . Assim, sem perda de generalidade, seja  $\bar{\gamma} = \mathbf{Max} \{\gamma: \bar{\mathbf{x}} - \gamma \mathbf{d} \in X\}$  e calcula-se  $\bar{\mathbf{y}}_1 = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\gamma} \mathbf{d}$ . Agora pode-se afirmar que o número máximo de hiperplanos linearmente independentes ativos em  $\bar{\mathbf{y}}_1$  é  $\bar{r} \geq r + 1$  porque todos os hiperplanos ativos em  $\bar{\mathbf{x}}$  continuam ativos em  $\bar{\mathbf{y}}_1$  (porque  $\bar{\mathbf{x}}$  é uma combinação convexa estrita de  $\bar{\mathbf{y}}_1$  e  $\mathbf{y}_2$ ) e, também, pelo menos um hiperplano linearmente independente está ativo em  $\bar{\mathbf{y}}_1$ , ou seja, aquele hiperplano que bloqueia o avanço de  $\gamma$  na direção  $-\mathbf{d}$  para calcular  $\bar{\gamma}$ . Se  $\bar{r} = n$ , então  $\bar{\mathbf{y}}_1 \in S_p$  e, portanto é um ponto extremo, ou seja,  $k \geq 1$ . Se  $\bar{r} < n$

então pode-se substituir  $\bar{x}$  por  $\bar{y}_1$  e repetir este processo até obter  $\bar{r} = \mathbf{n}$ , o qual, claramente, deve ocorrer finitamente porque  $\bar{r}$  aumenta em cada passo por, pelo menos, uma unidade e porque  $\mathbf{n}$  é finito. Portanto,  $k \geq 1$ .

i.2)  $S_p \neq \emptyset$  é **finito**.

Como o número de maneiras que  $\mathbf{n}$  hiperplanos linearmente independentes podem ser escolhidos a partir de  $(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  hiperplanos é finito, ou seja,  $\binom{m+n}{n}$  é o número máximo de pontos extremos, assim temos também  $k < \infty$ , ou seja,  $S_p$  é finito.

ii)  $X \neq \emptyset$  e **limitado**  $\Leftrightarrow S_d = \emptyset$

( $\Rightarrow$ ) Suponha, por contradição, que se tenha  $S_d \neq \emptyset \Rightarrow \exists \mathbf{x}_0 \in X \mid \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d} \in X$ , onde  $\lambda \geq 0$ ,  $\mathbf{d} \in S_d$ . Considerando que  $\lambda$  pode aumentar indefinidamente então  $X$  será **ilimitado**. O que é um absurdo. Logo, se  $X \neq \emptyset$  e **limitado**  $\Rightarrow S_d = \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha, por contradição, que  $X \neq \emptyset$  é **ilimitado**  $\Rightarrow \forall \mathbf{x}_0 \in X, \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d} \in X$  onde  $\lambda \geq 0$  e  $\mathbf{d} \in S_d \Rightarrow S_d \neq \emptyset$  (ABSURDO). Logo  $S_d = \emptyset \Rightarrow X \neq \emptyset$  e **limitado**.

iii)  $X$  é **ilimitado**  $\Rightarrow S_d \neq \emptyset$  e **finito**;

Sabe-se, por ii), que se  $X$  é limitado então  $S_d = \emptyset$ . Observa-se que  $S_d$  é da mesma forma que  $X$  e que os pontos extremos de  $S_d$  são também as direções extremas de  $X$ . Como o número de direções extremas de  $X$  é finito,  $S_d$  também deve ser finito, então  $l \in [1, \infty)$ .

Outra maneira: suponha, por contradição, que  $S_d = \emptyset$  então, por ii),  $X$  é limitado (CONTRADIÇÃO), logo,  $X$  é **ilimitado**  $\Rightarrow S_d \neq \emptyset$ .

iv)  $\bar{x} \in X \Leftrightarrow \bar{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^l \mu_i \mathbf{d}_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k; \mu_i \geq 0 i = 1, \dots, l$ .

Seja  $\bar{X} = X \cap \{\mathbf{x}: \mathbf{1x} \leq \mathbf{M}\}$  onde  $\mathbf{M}$  é suficientemente grande para que  $\mathbf{1x}_j < \mathbf{M}$ , para  $j = 1, \dots, k$ , e  $\mathbf{1}\bar{x} < \mathbf{M}$ . Note-se que  $\bar{X}$  é limitado e, além disso, os pontos extremos de  $X$  também são pontos extremos de  $\bar{X}$  (ver Teorema 4). Seja  $\bar{S}_p = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_{k+u}\}$  o conjunto dos pontos extremos de  $\bar{X}$ , onde  $0 \leq u \leq \infty$ .

iv.1)  $\bar{x}$  pode ser escrito como uma combinação convexa dos pontos extremos de  $\bar{X}$ , ou seja, por pontos de  $\bar{S}_p$ . Se  $\bar{x} \in \bar{S}_p \Rightarrow \bar{x}$  é um ponto extremo de  $\bar{X}$ .

Se  $\bar{x} \notin \bar{S}_p$  então representamos os hiperplanos ativos de  $\bar{X}$  em  $\bar{x}$  da forma:

$$\mathbf{Gx} = \mathbf{g} \tag{5}$$

Neste caso  $\text{posto}(\mathbf{G}) \leq n - 1$  porque em caso contrário  $\bar{\mathbf{x}}$  seria um ponto extremo de  $\bar{\mathbf{X}}$ . Encontra-se uma solução para o sistema  $\mathbf{G}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$  e calcula-se  $\bar{\gamma}_1 = \text{Max} \{\gamma: \bar{\mathbf{x}} + \gamma\mathbf{d} \in \bar{\mathbf{X}}\}$ . Neste caso  $\mathbf{d}$  é uma direção que tem os mesmos hiperplanos ativos que  $\bar{\mathbf{x}}$ . Note que  $0 < \bar{\gamma}_1 < \infty$  porque  $\mathbf{X}$  é limitado. Seja  $\bar{\mathbf{y}}_1 = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\gamma}_1\mathbf{d}$ . Assim, como  $\bar{\mathbf{y}}_1 \in \bar{\mathbf{X}}$ , tem-se pelo menos um hiperplano linearmente independente adicional de  $\bar{\mathbf{X}}$  ativo em  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Se este novo hiperplano ativo em  $\bar{\mathbf{y}}_1$ , junto com  $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{g}$  produzir um sistema de posto  $n$ , então  $\bar{\mathbf{y}}_1$  é um ponto extremo de  $\bar{\mathbf{X}}$ . Caso contrário, repete-se este processo para a determinação de  $\bar{\mathbf{y}}_1$  até depois de, no máximo,  $(n - \text{posto}(\mathbf{G}))$  vezes, obter-se-á um vértice (ponto extremo) de  $\bar{\mathbf{X}}$ , identificado como um novo ponto  $\bar{\mathbf{y}}_1 \in \bar{\mathbf{X}}$ , de posto  $n$ , que satisfaz  $\mathbf{G}\bar{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{g}$ . Agora, defina:

$$\bar{\gamma}_2 = \text{Max} \{\gamma: \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}_1) \in \bar{\mathbf{X}}\}. \quad (6)$$

Que irá gerar

$$\bar{\mathbf{y}}_2 = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\gamma}_2(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}_1). \quad (7)$$

Note que  $\bar{\gamma}_2 < \infty$  porque  $\bar{\mathbf{X}}$  é limitado e  $\bar{\gamma}_2$  é o máximo permitido. Além disso,  $\bar{\gamma}_2 > 0$  porque  $\mathbf{G}[\bar{\mathbf{x}} + \gamma(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}_1)] = \mathbf{g} \forall \gamma \geq 0$  foi resolvido encontrando-se um  $\bar{\gamma}_2$  que foi limitado por alguma restrição não ativa em  $\bar{\mathbf{x}}$ . Por isso, em particular,  $\mathbf{G}\bar{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{g}$  tem pelo menos um hiperplano linearmente independente adicional ativo em  $\bar{\mathbf{y}}_2$  em relação a  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Assim,  $\bar{\mathbf{y}}_1$  é um ponto extremo de  $\mathbf{X}$  e  $\bar{\mathbf{y}}_2$  tem pelo menos um hiperplano linearmente independente adicional a  $\bar{\mathbf{x}}$ . Também,  $\bar{\mathbf{x}}$  é uma combinação convexa

$$\bar{\mathbf{x}} = \delta\bar{\mathbf{y}}_1 + (1 - \delta)\bar{\mathbf{y}}_2 \text{ de } \bar{\mathbf{y}}_1 \text{ e } \bar{\mathbf{y}}_2, \text{ onde } \delta = \frac{\bar{\gamma}_2}{1 + \bar{\gamma}_2}, \delta \in [0, 1]. \quad (8)$$

Que pode ser facilmente verificado usando (7). Assim,  $\bar{\mathbf{x}}$  foi representado como uma combinação convexa de dois pontos  $\bar{\mathbf{y}}_1$  e  $\bar{\mathbf{y}}_2$  sendo  $\bar{\mathbf{y}}_1 \in \bar{\mathbf{S}}_p$ .

Ainda podem ocorrer dois casos:

a) Se  $\bar{\mathbf{y}}_2 \in \bar{\mathbf{S}}_p$  então consegue-se representar  $\bar{\mathbf{x}}$  como uma combinação convexa de dois pontos extremos  $\bar{\mathbf{y}}_1$  e  $\bar{\mathbf{y}}_2$ .

b) Se  $\bar{\mathbf{y}}_2 \notin \bar{\mathbf{S}}_p$  então  $\bar{\mathbf{y}}_2$  pode ser representado como uma combinação convexa estrita de  $\bar{\mathbf{y}}_3$  e  $\bar{\mathbf{y}}_4$  (repetindo a mesma metodologia para se calcular  $\bar{\mathbf{y}}_1$  e  $\bar{\mathbf{y}}_2$ ), onde um destes pontos é um ponto extremo de  $\mathbf{X}$ , seja  $\bar{\mathbf{y}}_3 \in \bar{\mathbf{S}}_p$  e  $\bar{\mathbf{y}}_4$  tem pelo menos um hiperplano adicional linearmente independente ativo em  $\bar{\mathbf{y}}_1$ . Nesse momento  $\bar{\mathbf{y}}_4$  tem dois hiperplanos linearmente independentes adicionais em relação a  $\bar{\mathbf{x}}$ . Continuando este processo, em cada passo



substituindo um ponto por outros dois onde um deles é um ponto extremo e o outro tem um hiperplano ativo adicional, então num determinado número de passos este segundo ponto terá  $n$  hiperplanos ativos e, portanto, será um ponto extremo de  $\mathbf{X}$ . Termina-se o processo de representação, usando como máximo  $n - \text{posto}(\mathbf{G}) + 1$  pontos extremos de  $\mathbf{X}$  (vértices de  $\bar{\mathbf{S}}_p$ ). Esta representação é dada por:

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{k+u} \delta_j \mathbf{x}_j \text{ onde } \sum_{j=1}^{k+u} \delta_j = 1 \text{ e } \delta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k + u. \quad (9)$$

iv.2) Eliminando o efeito da restrição  $\mathbf{1x} \leq \mathbf{M}$  adicionada, ou seja, (9) é verdadeiro para  $\mathbf{X}$ .

Agora, se  $\delta_j = 0$  para  $j > k$ , então a equação (9) é equivalente à equação (3), ou seja,  $\bar{\mathbf{X}}$  é limitado. Caso contrário, considera-se algum ponto extremo de (9),  $\mathbf{x}_v$  com  $v > k$  e  $\delta_v > 0$ . Note-se que  $\mathbf{x}_v$  é um novo ponto extremo gerado pela restrição  $\mathbf{1x} \leq \mathbf{M}$ , ou seja,  $\sum_{j=1}^k \mathbf{x}_j = \mathbf{M}$  é um dos  $n$  hiperplanos linearmente independentes ativos em  $\mathbf{x}_v$  como ponto extremo de  $\bar{\mathbf{X}}$ . Os outros  $(n - 1)$  hiperplanos ativos pertencem ao conjunto original  $\mathbf{X}$ , e identificam uma nova aresta de  $\mathbf{X}$ . Consequentemente, existe algum ponto extremo  $\mathbf{x}_{i(v)}$  de  $\mathbf{X}$ ,  $1 \leq i(v) \leq k$ , que é o ponto extremo adjacente de  $\mathbf{x}_v$  em  $\bar{\mathbf{X}}$  através desta aresta. Além disso,  $(\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_{i(v)})$  é uma direção de  $\mathbf{X}$  porque não existe outro hiperplano de  $\mathbf{X}$  que pare o movimento nesta direção a partir de  $\mathbf{x}_{i(v)}$ . Mais importante, seja  $\bar{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_{i(v)}}{\theta_v}$ , onde  $\theta_v = \mathbf{1}(\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_{i(v)}) > 0$ . Note que  $\bar{\mathbf{d}} \in \mathbf{S}_d$ . Assim, os  $(n - 1)$  hiperplanos linearmente independentes de  $\mathbf{X}$  que estão ativos em  $\mathbf{x}_v$  também estão ativos no sistema  $\mathbf{A}\mathbf{d} \leq 0, \mathbf{d} \geq 0$ , na definição de  $\bar{\mathbf{d}}$ . Também, esses  $(n - 1)$  hiperplanos que caracterizam  $\mathbf{x}_v$  junto com o hiperplano  $\mathbf{1d} = 1$  produzem o conjunto de  $n$  hiperplanos linearmente independentes ativos a  $\mathbf{S}_d$  em  $\bar{\mathbf{d}}$ . Assim, a direção  $\bar{\mathbf{d}}$  é um ponto extremo de  $\mathbf{S}_d$  e será chamada  $\mathbf{d}_{j(v)}$  que por sua vez é uma direção extrema de  $\mathbf{X}$ . Consequentemente, temos  $\mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{i(v)} + \theta_v \mathbf{d}_{j(v)}$ . Substituindo isto na equação (9) para cada  $v$ , e arbitrariamente deixando,  $i(v) = j(v) = 1$  se  $\delta_v = 0$ , obtém-se:

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^k \delta_j \mathbf{x}_j + \sum_{v=k+1}^{k+u} \delta_v \mathbf{x}_{i(v)} + \sum_{v=k+1}^{k+u} \delta_v \theta_v \mathbf{d}_{j(v)} \quad (10)$$

Que é da forma da equação (3). Isso completa a prova.

iv.3) Se  $\bar{\mathbf{x}}$  pode ser escrito como em (3)  $\Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$ .

Será mostrado que se  $\bar{\mathbf{x}}$  pode ser escrito como em (3) então  $\bar{\mathbf{x}}$  cumpre a seguinte relação:  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}, \bar{\mathbf{x}} \geq 0$

Se  $\bar{\mathbf{x}}$  cumpre com (3) então teremos:

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^l \mu_i \mathbf{d}_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq \text{zero}, j = 1, \dots, k; \mu_i \geq \text{zero}, i = 1, \dots, l. \quad (11)$$

Sabe-se que os  $\mathbf{x}_j$  são pontos extremos de  $\mathbf{X}$  e, portanto, satisfazem:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_j \leq \mathbf{b}, \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0}; j = 1, 2, \dots, k. \quad (12)$$

Sabe-se que os  $\mathbf{d}_i$  são direções extremas de  $\mathbf{X}$  (ou seja, pontos extremos de  $\mathbf{S}_d$ ) e satisfazem:  $\mathbf{A}\mathbf{d}_i \leq \mathbf{0}, \mathbf{d}_i \geq \mathbf{0}; \mathbf{d}_i \neq \text{zero}, i = 1, 2, \dots, l.$  (13)

a) Prova de que  $\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$

$\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ , pois, analisando (11) e (3) verifica-se:

$$\lambda_j \geq \mathbf{0} (\lambda_j \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0} \text{ e } \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0}); \mu_i \geq \mathbf{0} (\mu_i \mathbf{d}_i \geq \mathbf{0} \text{ e } \sum_{i=1}^l \mu_i \mathbf{d}_i \geq \mathbf{0}) \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}.$$

b) Prova de que  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}$

Multiplicando  $\bar{\mathbf{x}}$  em (11) pela matriz  $\mathbf{A}$  pelo lado esquerdo temos:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A} (\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^l \mu_i \mathbf{d}_i) = \lambda_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mu_1 \mathbf{A}\mathbf{d}_1 + \mu_2 \mathbf{A}\mathbf{d}_2 + \dots + \mu_l \mathbf{A}\mathbf{d}_l. \quad (14)$$

Mas na relação anterior temos que:

Em (13),  $\sum_{i=1}^l \mu_i \mathbf{A}\mathbf{d}_i \leq \mathbf{0}$  porque  $\mu_i \geq \mathbf{0}$  e cada  $\mathbf{A}\mathbf{d}_i \leq \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, l.$  Então, tem-se, em (14):

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{A}\mathbf{x}_j. \quad (15)$$

Mas em (15), cada  $\mathbf{x}_j$  é ponto extremo de  $\mathbf{X}$  e, portanto,  $\mathbf{x}_j \in \mathbf{X}$  e para cada  $\mathbf{x}_j$  é verdadeira a seguinte relação:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_j \leq \mathbf{b} \Rightarrow \lambda_j \mathbf{A}\mathbf{x}_j \leq \lambda_j \mathbf{b}, j = 1, 2, \dots, k \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{A}\mathbf{x}_j \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{b} = \mathbf{b}. \quad (16)$$

De (15) e (16), conclui-se que:  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}.$

**Corolário 1** - Qualquer  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$  pode ser representado como na equação (3) usando não mais do que **Min**  $\{(\mathbf{n} + 1), (\mathbf{k} + \mathbf{l})\}$  variáveis positivas  $\lambda_j$  e  $\mu_j$ .

Prova: Dado  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$ , o Teorema 5 afirma que existe uma solução para a equação (13). Seja  $\mathbf{r}$  o posto da matriz dos coeficientes associada ao sistema da equação (3). Portanto,  $\mathbf{r} = \mathbf{Min} \{(\mathbf{n} + 1), (\mathbf{k} + \mathbf{r})\}$ . Além disso, note que o conjunto de  $(\lambda, \mu)$  satisfazendo a equação (3) forma um conjunto poliédrico em  $\mathbf{E}^{k+l}$ , e pelo Teorema 5, este conjunto tem um ponto extremo. Uma vez que podem existir  $(\mathbf{k} + \mathbf{l})$  hiperplanos ativos linearmente independentes em qualquer ponto extremo e o sistema de igualdades fornecer  $\mathbf{r}$  hiperplanos, teremos pelo menos  $(\mathbf{k} + \mathbf{l} - \mathbf{r})$  variáveis adicionais  $\lambda_j$  e  $\mu_j$  iguais a zero num ponto extremo da equação (3). Consequentemente, existe uma representação de  $\bar{\mathbf{x}}$  na equação (3) na qual pelo menos  $\mathbf{r}$  das variáveis  $\lambda_j$  e  $\mu_j$  são positivas. Isso completa a prova.

### 2.3.1 Forma Sistemática para Encontrar os Pontos Extremos de um Conjunto Convexo Poliedral

Uma vez caracterizado um conjunto convexo poliedral  $X$ , então é possível encontrar todos os pontos extremos do conjunto  $X$ . Para isso deve-se montar uma estratégia usando o conceito de ponto extremo encontrado no Teorema 1, isto é, um ponto extremo de um conjunto convexo poliedral  $X$  é qualquer ponto  $x \in X \subset E^n$  (é um ponto factível) e, adicionalmente, nesse ponto devem existir  $n$  hiperplanos ativos linearmente independentes (HALI). A estratégia é muito simples, mas extremamente demorada e assume a seguinte forma:

1. Supor que estamos trabalhando no espaço  $E^n$  e o conjunto convexo poliedral  $X$  tem  $k$  restrições de igualdade (hiperplanos) e  $p$  restrições de desigualdade (subespaços).

Com os valores de  $n$ ,  $k$  e  $p$  encontrar o número máximo de candidatos a ponto extremo usando a seguinte relação:

$$N_{\max} = \binom{p}{n-k} = \frac{p!}{(n-k)!(p+k-n)!}$$

Que é apenas a relação muito conhecida de encontrar o número de combinações existentes em  $p$  elementos tomados em grupos de  $(n-k)$ . Assim, procura-se identificar um ponto  $x$  em que existam  $n$  HALI. Deve-se observar que sempre existem  $k$  HALI relacionados com as restrições de igualdade (hiperplano) e, portanto, deve-se escolher  $(n-k)$  do grupo de  $p$  subespaços

2. Para cada candidato a ponto extremo deve-se fazer o seguinte:

a) Identificar os subespaços que devem ter os hiperplanos ativos (HA), isto é,  $(n-k)$  subespaços devem ter os seus HA. Juntar esses  $(n-k)$  HA com as restrições de igualdade (hiperplanos que sempre se encontram ativos) para formar um sistema algébrico linear de  $n$  equações e  $n$  incógnitas.

b) Resolver este sistema e encontrar a solução  $x'$ .

c) Verificar se  $x'$  não viola alguma das  $p-(n-k)$  restrições de desigualdade não consideradas para montar o conjunto de  $(n-k)$  HA. Em outras palavras, verificar se  $x'$  pertence à interseção dos  $p-(n-k)$  subespaços não considerados na montagem do sistema algébrico linear. Se  $x'$  for factível, isto é, não viola nenhuma restrição de desigualdade (subespaços), então  $x'$  é um ponto extremo e, em caso contrário, não é ponto extremo (é um ponto em que existem  $n$  HALI, mas é infactível).

**Observação importante:** Usar esta estratégia pode ser muito demorado já que para analisar cada candidato a ponto extremo deve-se resolver um sistema algébrico linear de  $n$  equações e  $n$  incógnitas. Assim, a mesma só é utilizada em caráter ilustrativo ou em problemas com número reduzido de variáveis.

### 2.3.2 Metodologia para Encontrar as Direções Extremas de um Conjunto Convexo

Se  $X = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$  então  $d \neq 0$  é direção de  $X \Leftrightarrow d \geq 0, d \neq 0$  e  $Ad = 0$ . De maneira análoga: Se  $X = \{x: Ax \geq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ ,  $d$  é direção de  $X \Leftrightarrow d \geq 0, d \neq 0$  e  $Ad \geq 0$  e se  $X = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ ,  $d$  é uma direção de  $X \Leftrightarrow d \geq 0, d \neq 0$  e  $Ad \leq 0$ .

Pode-se normalizar o vetor  $d$  ( $\sum_{j=1}^n d_j = 1$ ) e assim, o conjunto de direções de  $X$  será dado por  $D = \{d: Ad (=, \geq \text{ ou } \leq) 0; d \geq 0; d \neq 0; \sum_{j=1}^n d_j = 1\}$ .

Tem-se uma **direção extrema** de  $X$  quando a mesma não puder ser representada como uma combinação positiva de outras duas direções distintas.

Desta forma, se  $X = \{x: Ax (=, \geq \text{ ou } \leq) 0; x \geq 0\}$  então encontra-se as direções através de  $D = \{d: Ad (=, \geq \text{ ou } \leq) 0; d \geq 0; d \neq 0; \sum_{j=1}^n d_j = 1\}$ .

## 2.4 Os Teoremas de Otimalidade do Método Primal Simplex

**Lema 1** – Seja  $X \subset E^n$  um conjunto convexo fechado e suponha que  $x \notin X \Rightarrow$  existe um vetor não nulo  $c \in E^n$  e um  $\varepsilon > 0$  tal que  $cx \geq \varepsilon + cy, \forall y \in X$ .

**Prova:** Seja  $y_0 \in X$  o ponto mais próximo de  $x$  (uma vez que  $X$  é fechado, tal ponto existe e é único). Observe que  $\|x - y_0\| > 0$  desde que  $x \notin X$ . Será mostrado primeiro que  $(x - y_0)(y - y_0) \leq 0, \forall y \in X$ . Pela convexidade de  $X, \lambda y + (1 - \lambda)y_0 \in X, \forall \lambda \in (0, 1)$ . Uma vez que  $y_0$  é o ponto de  $X$  mais próximo de  $x$ , então se obtém:  $\|x - y_0\|^2 \leq \|x - \lambda y - (1 - \lambda)y_0\|^2 = \|(x - y_0) + \lambda(y_0 - y)\|^2 = \|x - y_0\|^2 + 2\lambda(x - y_0)(y_0 - y) + \lambda^2\|y_0 - y\|^2$ .

Desta forma, obtém-se:

$$2\lambda(x - y_0)(y_0 - y) + \lambda^2\|y_0 - y\|^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x - y_0)(y_0 - y) + \lambda\|y_0 - y\|^2 \geq 0 (\lambda > 0) \Rightarrow (x - y_0)(y_0 - y) \geq 0 \text{ (fazendo } \lambda \rightarrow 0) \Rightarrow (x - y_0)(y - y_0) \leq 0, \forall y \in X.$$

Seja  $c = x - y_0 \neq 0$ . Agora, para algum  $y \in X$  tem-se:

$$0 \leq (x - y_0)(y_0 - y) = (x - y_0)(x - x + y_0 - y) = (x - y_0)[(x - y) + (y_0 - x)] = (x - y_0)(x - y) + (x - y_0)(y_0 - x) = (x - y_0)(x - y) - (x - y_0)(x - y_0) = cx - cy - \|x - y_0\|^2$$

Portanto,  $cx \geq \|x - y_0\|^2 + cy$ . Fazendo  $\varepsilon = \|x - y_0\|^2 > 0$ , o lema está provado.

**Teorema 7** (Teorema de Farkas) (BAZARAA, 2010) – Sejam  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c, x \in \mathbb{R}^n$  e  $w \in \mathbb{R}^m$ . Então um e somente um dos dois sistemas abaixo tem solução:

$$S_1: Ax \leq 0 \text{ e } cx > 0;$$

$$S_2: wA = c \text{ e } w \geq 0.$$

Outra forma do teorema seria:

$$(1) \text{ “Se } \exists x \mid Ax \leq 0 \text{ e } cx > 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists w \geq 0 \mid wA = c”, \text{ ou então:}$$

$$(2) \text{ “Se } \nexists x \text{ com } Ax \leq 0 \text{ e } cx > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists w \geq 0 \mid wA = c”.$$

Prova:

(1) Suponha, por contradição, que  $S_2$  tem solução  $wA = c$ ,  $w \geq 0$ . Seja  $x \mid Ax \leq 0$ . Então  $cx = wAx \leq 0$ , pois,  $Ax \leq 0$  e  $w \geq 0$ . Isto mostra que  $cx \leq 0$ , ou seja,  $S_1$  não tem solução, pois,  $\nexists x$  com  $Ax \leq 0$  e  $cx > 0$  (CONTRADIÇÃO). Logo, (1) é verdadeiro.

(2) Suponha também, por contradição, que  $S_2$  não tem solução. Isto significa que  $c \notin S = \{wA \mid w \geq 0\}$ . Conclui-se que  $\exists x \mid cx > wAx, \forall w \geq 0$  ao se aplicar o lema 1. Se  $w = 0$ , então  $cx > 0$ . Além disso, desde que  $w$  pode ser escolhido arbitrariamente grande, então pode-se ter  $Ax \leq 0$ . Isto mostra que  $S_1$  tem uma solução e o teorema está provado.

**Observação 7:** Para os próximos teoremas será considerado o problema de programação linear (PL):  $\text{Min } (z = cx)$  sujeito a  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ .

**Corolário 2** – Se existe um  $cd_j < 0, j = 1, 2, \dots, l \Rightarrow$  a solução do PL é **ilimitada**.

**Teorema 8** (Mostra que uma solução ótima é ponto extremo do PL) (ROMERO, 2005) - Se existe solução ótima para um PL  $\Rightarrow$  um ponto extremo do PL é solução ótima do mesmo.

**Observação 8:** O teorema 8 afirma que se um PL tem solução ótima então um ponto extremo é solução ótima do mesmo. Assim, existe também a possibilidade de que se tenha um ótimo que não é ponto extremo.

**Teorema 9** (CARVALHO, 2005) – Seja  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com **posto m**. Então é dito que  $d$  é uma **direção extrema de X**  $\Leftrightarrow$  (após reordenação das componentes de  $d$  e, conseqüentemente, das colunas de  $A$ ):

i)  $A$  admite uma decomposição do tipo  $A = [B, N]$ , onde  $B$  admite sua inversa  $B^{-1}$ ;

ii) Existe pelo menos uma coluna  $a_j$  tal que  $B^{-1}a_j \leq 0$ ;

iii) Com  $\mathbf{e}_{j-m}$  denotando o  $(j - m)$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^{n-m}$ ,  $\mathbf{d}$  é um múltiplo escalar positivo de  $\begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_{j-m} \end{bmatrix}$ .

Prova: ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_k, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{d}_j, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]^T$  ( $\mathbf{d}_i > \mathbf{0}$ , caso  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $\mathbf{d}_i = \mathbf{0}$ , para  $i = j$ ) é uma direção extrema de  $S$ . Suponha, por contradição, que as  $k$  primeiras colunas de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  são linearmente dependentes. Logo, existem  $k$  escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , com pelo menos um deles positivo, tal que  $\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ . Seja  $\mathbf{u} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})^T$  e escolha  $\alpha > \mathbf{0}$ , suficientemente pequeno para que os vetores  $\mathbf{d}^1 = \mathbf{d} + \alpha \mathbf{u}$  e  $\mathbf{d}^2 = \mathbf{d} - \alpha \mathbf{u}$  tenham componentes não negativas.

Nota-se que  $\mathbf{A}\mathbf{d}^1 = \mathbf{A}\mathbf{d} + \alpha \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} = \mathbf{0} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{A}\mathbf{d} - \alpha \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{d}^2$ . Assim,  $\mathbf{d}^1$  e  $\mathbf{d}^2$  são duas direções de  $S$  distintas de  $\mathbf{d}$  e distintas entre si, pois,  $\alpha > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  e a  $j$ -ésima componente, tanto de  $\mathbf{d}^1$  como de  $\mathbf{d}^2$ , são iguais à  $j$ -ésima componente de  $\mathbf{d}$ . Com efeito,  $\mathbf{d}^1 = \tau \mathbf{d}^2$ , com  $\tau > \mathbf{0}$ , é equivalente a  $\mathbf{d} + \alpha \mathbf{u} = \tau(\mathbf{d} - \alpha \mathbf{u}) \Leftrightarrow (\mathbf{1} + \tau)\alpha \mathbf{u} = (\tau - \mathbf{1})\mathbf{d} \Rightarrow$

$(\tau - \mathbf{1})\mathbf{d}_j = \mathbf{0}$  (uma vez que a  $j$ -ésima componente de  $\mathbf{u}$  é nula). Por outro lado, dado que (por hipótese)  $\mathbf{d}_j > \mathbf{0}$ , conclui-se que  $\tau = \mathbf{1}$ . Logo,  $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , o que é absurdo, tendo em conta que  $\alpha > \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . Adicionalmente, pode-se concluir que  $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^2}{2}$ , o que contradiz a suposição de  $\mathbf{d}$  ser uma direção extrema. Assim,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  são colunas de  $\mathbf{A}$  linearmente independentes e uma vez que o posto de  $\mathbf{A}$  é  $m$ , tem-se que  $k \leq m$ . Nestas condições, acrescentando-se as  $m - k$  colunas de  $\mathbf{A}$  que, conjuntamente com  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ , formam uma base para  $\mathbb{R}^n$  e, assim, constituem uma matriz invertível  $\mathbf{B}$ , ao se fazer  $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ , será observado que  $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d}_B + \mathbf{d}_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{d}_B = -\mathbf{d}_j \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$ , pelo que  $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_{j-m} \end{bmatrix}$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j \leq \mathbf{0}$ , então  $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$  e, além disso,  $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , pois,  $\mathbf{d}$  é uma direção de  $S$ . Será demonstrado que é uma direção extrema. Sendo  $\mathbf{d} = \mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^2$ , com  $\mathbf{d}^1$  e  $\mathbf{d}^2$  duas direções de  $X$ , tem-se que  $n - m - 1$  componentes, tanto de  $\mathbf{d}^1$  como de  $\mathbf{d}^2$ , são iguais a zero (uma vez que as correspondentes componentes de  $\mathbf{d}$  são nulas). Nestas condições, tanto  $\mathbf{d}^1$  como  $\mathbf{d}^2$  são da forma: que  $\mathbf{d}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_B^1 \\ \mathbf{d}_j \mathbf{e}_{j-m} \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{d}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_B^2 \\ \mathbf{d}_j \mathbf{e}_{j-m} \end{bmatrix}$ . Dado que  $\mathbf{A}\mathbf{d}^1 = \mathbf{B}\mathbf{d}_B^1 + \mathbf{d}_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{A}\mathbf{d}^2 = \mathbf{B}\mathbf{d}_B^2 + \mathbf{d}_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$  vem que  $\mathbf{d}_B^1 = \mathbf{d}_j [-\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j]$  e  $\mathbf{d}_B^2 = \mathbf{d}_j [-\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j]$ , ou seja,  $\mathbf{d}^1 = \mathbf{d}^2$ . Logo,  $\mathbf{d}$  é uma direção extrema de  $X$ .

**Teorema 10** (O'CONNOR, 1991) – Seja  $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ . Um vetor não nulo  $\mathbf{d}$  é uma direção de  $X \Leftrightarrow \mathbf{d} \in \mathbf{D} = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}, \mathbf{d} \geq \mathbf{0}\}$ .

**Observação 9:** O teorema acima pode ser apresentado de outra forma:  $D \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \neq 0$  é uma **direção de X**  $= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \Leftrightarrow d \in D = \{d \in \mathbb{R}^n \mid Ad \leq 0, d \neq 0, d \geq 0\}$ , ou seja, um vetor não nulo  $d$  é uma **direção de X**  $= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \Leftrightarrow d \in D = \{d \in \mathbb{R}^n \mid Ad \geq 0, d \neq 0, d \geq 0\}$ .

**Corolário 3** – Se  $X \neq \emptyset$  então tem pelo menos um ponto extremo.

**Corolário 4** – Se  $X$  é fechado e limitado (é um poliedro) então todo ponto  $x \in X$  pode ser expresso como uma combinação convexa de seus pontos extremos.

**Definição 16** – Dada  $\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \leq b_i \Rightarrow b_i - \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \geq 0$ . Então, definimos  $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j$  de **variável de folga** (ou de desvio).  $\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$ , com  $x_{n+i} \geq 0$ , ou seja, obtemos uma restrição de igualdade.

**Observação 10:** Caso tenhamos  $\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \geq b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j - b_i \geq 0$ . Faremos  $x_{n+i} = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j - b_i$  e assim,  $\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$ , com  $x_{n+i} \geq 0$ .

**Observação 11:** Algumas considerações a respeito:

i) a cada ponto extremo está associada uma solução básica factível e vice-versa;  
 ii) podem existir várias bases representando um mesmo ponto extremo ou uma solução básica factível. Neste caso existe uma solução básica factível **degenerada** onde mais de  $n$  hiperplanos estão ativos em  $\bar{x}$ . O número adicional de hiperplanos ativos indica o grau de degeneração de  $\bar{x}$ ;

iii) Se existe mais de uma base representando um ponto extremo, então este é **degenerado**, o contrário nem sempre é verdadeiro, ou seja, se um ponto extremo é degenerado, não necessariamente existe mais de uma base representando esse ponto extremo.

**Observação 12:** A correspondência entre solução básica factível e ponto extremo não é, em geral, biunívoca. A cada solução básica factível corresponde um único ponto extremo em  $X$ , mas, pode ocorrer que a cada ponto extremo de  $X$  corresponda a mais de uma solução básica factível.

**Corolário 5** – O número máximo de direções extremas de  $X$  é limitado por  $(n - m)$   $\binom{n}{m}$ , onde  $n - m$  corresponde ao número de possibilidades de escolha de  $a_j$  e  $\binom{n}{m}$  é o número de combinações possíveis de  $A$  na forma  $[B, N]$ .

**Teorema 11** (Existência de uma solução básica factível) (ROMERO, 2005) – Se  $\mathbf{X} \neq \emptyset \Rightarrow$  existe pelo menos uma solução básica factível.

Prova: Se  $\mathbf{X} \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{X}$  tem pelo menos um ponto extremo e como cada ponto extremo está associado a uma solução básica factível  $\Rightarrow \mathbf{X}$  tem pelo menos uma solução básica factível.

**Observação 13:** Considerações sobre pontos extremos e soluções básicas factíveis:

- i) um ponto extremo é uma solução básica factível ótima de um PL se esse ótimo existe;
- ii) os pontos extremos correspondem algebricamente às soluções básicas factíveis;
- iii) as SBF (ou os pontos extremos) são finitas e limitadas por  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

**Observação 14:** Listar todas as soluções básicas factíveis do PL apresenta as seguintes desvantagens:

- i) as soluções básicas factíveis (ou os pontos extremos) são finitas, mas, podem chegar a um número elevado;
- ii) não é possível saber se o PL é **ilimitado**;
- iii) Se  $\mathbf{X} \neq \emptyset$ , esse fato somente é descoberto após analisar todos os candidatos à solução básica factível.

## 2.5 Aplicações do TGR (Teorema da Representação - caso geral)

O TGR é muito importante em várias aplicações de PL e, particularmente, representa a base fundamental do princípio de decomposição matemática de Dantzig-Wolfe.

$$\text{Seja o PL: } \begin{cases} \text{Min } z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (17)$$

Considerando que  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  é o conjunto convexo deste PL, o processo de resolução consiste em separar o mesmo em dois subconjuntos:  $\mathbf{X}_1 = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1\}$  com  $\mathbf{m}_1$  restrições e  $\mathbf{X}_2 = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ , com  $\mathbf{m}_2$  restrições ( $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$ ).

$$\text{Se } \mathbf{x} \in \mathbf{X}_2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

Sendo  $\mathbf{x}_j$  um ponto extremo de  $\mathbf{X}_2$ .



Substituí-se  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_2$  em  $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x}$  e  $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ :

$$\mathbf{z}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{c}\sum_{j=1}^k \mathbf{x}_j\lambda_j = \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}\mathbf{x}_j]\lambda_j$$

$$\mathbf{A}_1\sum_{j=1}^k \mathbf{x}_j\lambda_j = \mathbf{b}_1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k [\mathbf{A}_1\mathbf{x}_j]\lambda_j = \mathbf{b}_1$$

O PL equivalente assume a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^k (\mathbf{c}\mathbf{x}_j)\lambda_j \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k [\mathbf{A}_1\mathbf{x}_j]\lambda_j = \mathbf{b}_1 \quad \rightarrow m_1 \text{ restrições} \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \quad \rightarrow \text{uma restrição} \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k \end{array} \right. \quad (19)$$

Resolvendo o PL equivalente acima encontra-se a solução do mesmo que, obviamente, será a solução do PL original.

## 2.6 Exemplos Ilustrativos

**Exemplo 1:-** Encontre os pontos extremos do seguinte conjunto convexo poliedral não vazio  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}: -3\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \leq -2; -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \leq 2; -\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 \leq 8; -\mathbf{x}_2 \leq -2; \mathbf{x}_1 \geq 0\}$ .

Analisando o conjunto dado, temos cinco restrições ( $\mathbf{p} = 5$ ), duas variáveis ( $\mathbf{n} = 2$ ) e nenhuma restrição de igualdade ( $\mathbf{k} = 0$ ). Desta forma o número máximo de pontos extremos será:  $\mathbf{N}_{\max} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ .

Existem cinco subespaços facilmente identificados e os dez candidatos serão os seguintes:

1. Quando as restrições 1 e 2 estão ativas, o ponto de interseção é  $(2, 4)$  que não viola as outras restrições  $\Rightarrow$  é um ponto extremo;
2. Quando as restrições 1 e 3 estão ativas, o ponto de interseção é  $(\frac{12}{5}, \frac{26}{5})$  que viola a restrição 2  $\Rightarrow$  não é um ponto extremo;
3. Quando as restrições 1 e 4 estão ativas, o ponto de interseção é  $(\frac{4}{3}, 2)$  que não viola as outras restrições  $\Rightarrow$  é um ponto extremo;
4. Quando as restrições 1 e 5 estão ativas, o ponto de interseção é  $(0, -2)$  que viola a restrição 4  $\Rightarrow$  não é um ponto extremo;
5. Quando as restrições 2 e 3 estão ativas, o ponto de interseção é  $(4, 6)$  que não viola as outras restrições  $\Rightarrow$  é um ponto extremo;

6. Quando as restrições 2 e 4 estão ativas, o ponto de interseção é  $(0, 2)$  que viola a restrição 1  $\Rightarrow$  não é um ponto extremo;

7. Quando as restrições 2 e 5 estão ativas, o ponto de interseção é  $(0, 2)$  que viola a restrição 1  $\Rightarrow$  não é um ponto extremo;

8. Quando as restrições 3 e 4 estão ativas, o ponto de interseção é  $(-4, 2)$  que viola as restrições 1, 2 e 5  $\Rightarrow$  não é um ponto extremo;

9. Quando as restrições 3 e 5 estão ativas, o ponto de interseção é  $(0, 4)$  que viola as restrições 1 e 2  $\Rightarrow$  não é um ponto extremo;

10. Quando as restrições 4 e 5 estão ativas, o ponto de interseção é  $(0, 2)$  que viola a restrição 1  $\Rightarrow$  não é um ponto extremo.

O quadro abaixo resume a busca dos pontos extremos:

Ordem	Restrições ativas	Ponto de interseção	Restrições violadas	Ponto Extremo
1	1 e 2	$(2, 4)$	Nenhuma	SIM
2	1 e 3	$(\frac{12}{5}, \frac{26}{5})$	2	NÃO
3	1 e 4	$(\frac{4}{3}, 2)$	Nenhuma	SIM
4	1 e 5	$(0, -2)$	4	NÃO
5	2 e 3	$(4, 6)$	Nenhuma	SIM
6	2 e 4	$(0, 2)$	1	NÃO
7	2 e 5	$(0, 2)$	1	NÃO
8	3 e 4	$(-4, 2)$	1, 2 e 5	NÃO
9	3 e 5	$(0, 4)$	1 e 2	NÃO
10	4 e 5	$(0, 2)$	1	NÃO

Em  $X$  existem 3 pontos extremos:  $(2, 4)$ ,  $(\frac{4}{3}, 2)$  e  $(4, 6)$ .

**Exemplo 2:-** Seja o problema de programação linear minimizar  $cx$  sujeito a  $X = \{x: x_1 - 3x_2 \leq 4; -x_1 + x_2 \leq 2; -x_1 + 2x_2 \leq 6; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0\}$ , verificar se existem soluções para os seguintes valores de  $c$ :

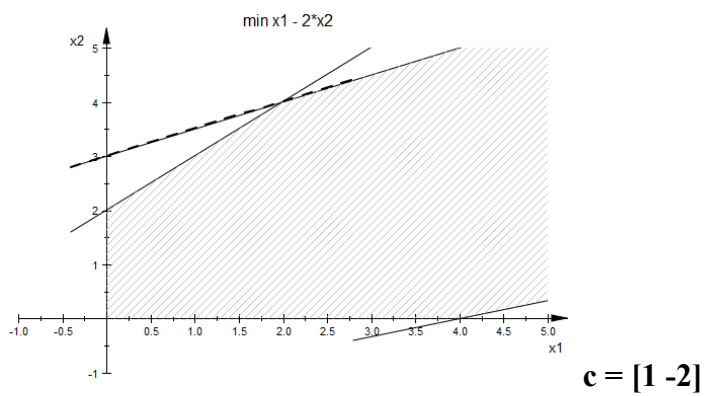
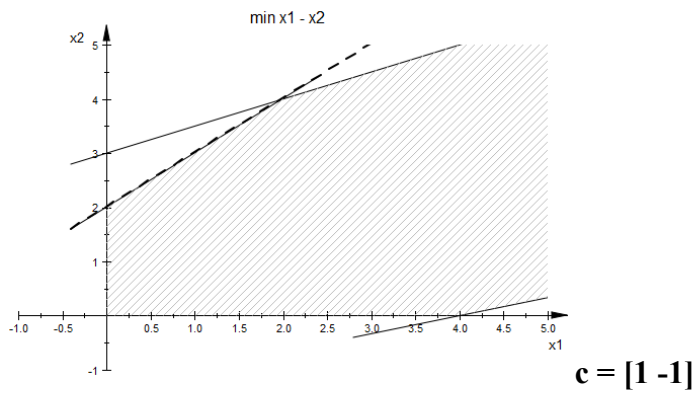
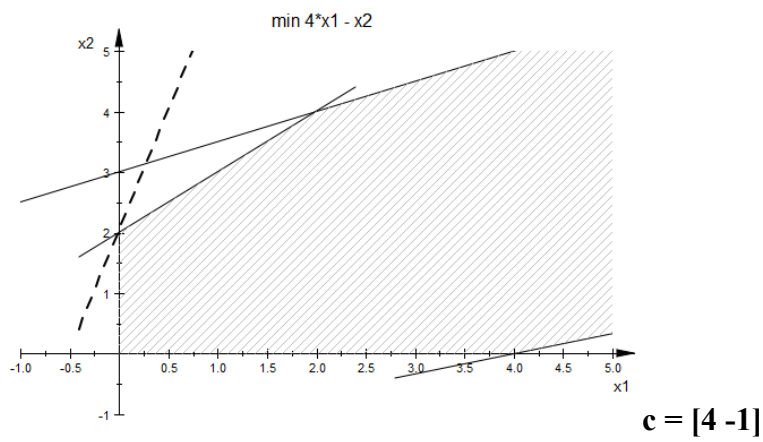
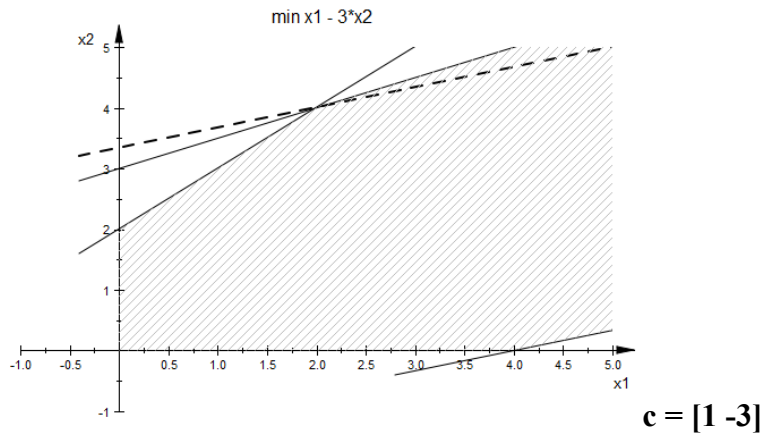
i)  $c = [1 \ -3]$

ii)  $c = [4 \ -1]$

iii)  $c = [1 \ -1]$

iv)  $c = [1 \ -2]$

**Figura 1** – Soluções gráficas de i), ii), iii) e iv).



**Fonte:** Autoria própria.

$\mathbf{X}$  tem os seguintes pontos extremos:  $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{x}^4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ; bem como as direções extremas:  $\mathbf{d}^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{d}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

Portanto, de acordo com o Teorema 6, qualquer ponto factível do problema pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2 + \lambda_3 \mathbf{x}^3 + \lambda_4 \mathbf{x}^4 + \mu_1 \mathbf{d}^1 + \mu_2 \mathbf{d}^2, \text{ ou seja,}$$

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Agora verificaremos a situação para cada um dos valores de  $\mathbf{c}$ :

i)  $\mathbf{c} = [1 \ -3]$

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^1 = 0, \mathbf{c}\mathbf{x}^2 = -6, \mathbf{c}\mathbf{x}^3 = -10, \mathbf{c}\mathbf{x}^4 = 4, \mathbf{c}\mathbf{d}^1 = 0 \text{ e } \mathbf{c}\mathbf{d}^2 = -\frac{1}{3},$$

$$\text{Assim, se tem o seguinte PL equivalente: } \begin{cases} \text{Min } 0\lambda_1 - 6\lambda_2 - 10\lambda_3 + 4\lambda_4 - \frac{1}{3}\mu_2 \\ \text{Sujeito a} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Como  $\mathbf{c}\mathbf{d}^2 = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow$  **Solução Ilimitada!**

ii)  $\mathbf{c} = [4 \ -1]$

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^1 = 0, \mathbf{c}\mathbf{x}^2 = -2, \mathbf{c}\mathbf{x}^3 = 4, \mathbf{c}\mathbf{x}^4 = 16, \mathbf{c}\mathbf{d}^1 = \frac{11}{4} \text{ e } \mathbf{c}\mathbf{d}^2 = \frac{7}{3},$$

$$\text{Assim, se tem o seguinte PL equivalente: } \begin{cases} \text{min } 0\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 16\lambda_4 + \frac{11}{4}\mu_1 + \frac{7}{3}\mu_2 \\ \text{Sujeito a} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Temos uma solução ótima, pois,  $\mathbf{c}\mathbf{d}^j > 0, j = 1, 2$ . Assim, o ótimo ocorre quando  $\mu_1 = \mu_2 = 0, \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$  e a solução ótima será  $\mathbf{c}\mathbf{x}^2 = -2$  e o ponto ótimo  $\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

iii)  $\mathbf{c} = [1 \ -1]$

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^1 = 0, \mathbf{c}\mathbf{x}^2 = -2, \mathbf{c}\mathbf{x}^3 = -2, \mathbf{c}\mathbf{x}^4 = 4, \mathbf{c}\mathbf{d}^1 = \frac{1}{2} \text{ e } \mathbf{c}\mathbf{d}^2 = \frac{1}{3},$$

$$\text{Assim, tem-se o seguinte PL equivalente: } \begin{cases} \text{Min } 0\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + 4\lambda_4 + \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 \\ \text{Sujeito a} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

A solução ótima exige que  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$  ( $x_2$  é um ponto extremo ótimo), mas, também poderíamos ter  $\lambda_3 = 1$  ( $x_3$  também é um ponto extremo ótimo). Para tal, representaremos o conjunto das soluções ótimas como:

$$\lambda_2 = \alpha, \lambda_3 = 1 - \alpha \text{ e } \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_2 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_3, \text{ com } \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{iv) } \mathbf{c} = [1 \ -2]$$

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^1 = 0, \mathbf{c}\mathbf{x}^2 = -4, \mathbf{c}\mathbf{x}^3 = -6, \mathbf{c}\mathbf{x}^4 = 4, \mathbf{c}\mathbf{d}^1 = \frac{1}{4} \text{ e } \mathbf{c}\mathbf{d}^2 = 0,$$

$$\text{Assim, se tem o seguinte PL equivalente: } \begin{cases} \text{Min } 0\lambda_1 - 4\lambda_2 - 6\lambda_3 + 4\lambda_4 + \frac{1}{4}\mu_1 + 0\mu_2 \\ \text{Sujeito a} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

A solução ótima exige que  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$  e  $\lambda_3 = 1$  ( $x^3$  é um ponto extremo ótimo), mas, qualquer ponto definido por  $x_3$  e  $\mathbf{d}^2$  também é um ponto ótimo neste caso. Pode-se verificar que se  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^3 + \alpha \mathbf{d}^2$ ,  $\alpha \geq 0$  então teremos  $\mathbf{c}\mathbf{x}' = \mathbf{c}\mathbf{x}^3 + \alpha \mathbf{c}\mathbf{d}^2 = -6 + 0\alpha = -6 \Rightarrow \mathbf{x}'$  é solução ótima do problema.

**Exemplo 3:-** Encontrar as soluções básicas factíveis do seguinte problema de programação linear:  $\begin{cases} \min \mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{X} = \{\mathbf{x}: -x_1 + x_2 \leq 2; -x_1 + 2x_2 \leq 6; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0\} \end{cases}$ . Pode-se escrever:

$$\begin{cases} \min \mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{X} = \{\mathbf{x}: -x_1 + x_2 + x_3 = 2; -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4\} \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}. \text{ As primeiras duas equações são hiperplanos e o resto, semiespaços.}$$

Pode-se verificar que  $\text{posto}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{posto}(\mathbf{A}) = \mathbf{m} = 2$ . Assim, o número máximo de bases será:  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$ . Analisaremos cada base.

$$1. \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}. \text{ Desta forma se obtém: } \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \text{ e}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \text{ é uma Solução Básica Factível.}$$

$$2. \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim,  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$ . Desta forma se obtém:  $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} < \mathbf{0}$   
e  $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $\therefore$  **NÃO** é uma **Solução Básica Factível**.

$$3. \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Desta forma se obtém:  $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \not\geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $\therefore$  **NÃO** é uma **Solução Básica Factível**.

$$4. \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Desta forma, se obtém:  $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \not\geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $\therefore$  **NÃO** é uma **Solução Básica Factível**.

$$5. \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Desta forma, se obtém:  $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$  e  
 $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $\therefore$  é uma **Solução Básica Factível**.

$$6. \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathbf{I}_2.$$

Assim,  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ . Logo, se obtém  $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $\therefore$   
é uma **Solução Básica Factível**.

Existem apenas três soluções básicas factíveis. Logo, em  $\mathbf{E}^4$  as soluções são:

$\mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{x}'_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Em  $\mathbf{E}^2$  seriam  $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ , e  $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ; ou seja,

estes pontos extremos do PL.

### 3 O Método Primal Simplex Revisado

#### 3.1 Introdução

Após a análise e estruturação do método simplex na forma de um quadro, apesar da praticidade, trabalhou-se com uma equação matricial contendo  $m + 1$  linhas e com, no máximo,  $m + n$  colunas. Desta forma, usando uma estrutura que garante a mesma eficiência computacional, foi desenvolvido o Método Simplex Revisado (MSR), onde a dimensão da equação matricial diminui consideravelmente. Assim, a equação matricial conterá  $m + 1$  linhas e  $m + 2$  colunas.

#### 3.2 O Método Primal Simplex Revisado

Lembremos o Algoritmo Simplex para um problema de minimização para construirmos o Algoritmo Simplex Revisado:

Passo inicial: Encontrar uma SBF inicial ( $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ , sendo  $\mathbf{B}$  invertível).

Passo principal:

1. Calcular:  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}$ ,  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{z} = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ .

2.1 Resolver o sistema  $\mathbf{w}\mathbf{B} = \mathbf{c}_B$ , ou seja, calcular  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$  (vetor multiplicador simplex);

2.2 Calcular o vetor  $\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N = \mathbf{w}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N$ , ou seja, os coeficientes de custo relativo  $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j, \forall j \in \mathbf{R}$  onde  $\mathbf{R} = \{\text{conjunto de índices das variáveis não básicas}\}$ ;

2.3 Seja  $\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k = \mathbf{Max} \{\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j, \forall j \in \mathbf{R}\}$ . Se  $\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k \leq \mathbf{0}$ , a SBF atual é ótima. Caso contrário, ir ao passo 3, sendo  $\mathbf{x}_k$  a candidata a entrar na base;

3. Calcular  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$

3.1 Se  $\mathbf{y}_k \leq \mathbf{0}$  o problema é **ilimitado** através do raio  $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{y}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \geq \mathbf{0}$ ;

3.2 Se  $\mathbf{y}_k > \mathbf{0}$  ir ao passo 4;

4.  $\mathbf{x}_k$  entra na base no lugar de  $\mathbf{x}_{B_r}$ , dada por:  $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0, i = 1, 2, \dots, m \right\}$ .

Atualizar a base  $\mathbf{B}$  (onde  $\mathbf{a}_k$  entra no lugar de  $\mathbf{a}_{B_r}$ ) e o conjunto  $\mathbf{R}$ , regressando ao passo 1.

Utilizando os passos anteriores monta-se o seguinte quadro:

Base Inversa	RHS
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

Em que  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$  e  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ .

Como utilizar o quadro simplex revisado:

1. Dispondo dos valores de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , toda a informação necessária aparece no quadro;
2. Como  $\mathbf{w}$  é conhecido e,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{c}_N$  representam, respectivamente, as colunas e os preços das variáveis não básicas, pode-se calcular os custos relativos das mesmas, ou seja,  $\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N = \mathbf{w} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N$ .
3. Considerando que  $\mathbf{B}^{-1}$  está no quadro e que  $\mathbf{a}_k$  é a coluna original da variável não básica  $\mathbf{x}_k$  na matriz  $\mathbf{A}$ , pode-se calcular  $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k$ . Assim, ao realizar a mudança de base, a pivotagem é realizada apenas no quadro reduzido:

Base Inversa	RHS	$\mathbf{x}_k$	$\leftarrow$ (Variável não básica que entra na base)
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$	$(z_k - c_k)$	
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}_1$	$y_{1k}$	
	$\bar{\mathbf{b}}_2$	$y_{2k}$	
	$\vdots$	$\vdots$	
	$\bar{\mathbf{b}}_r$	$y_{rk}$	$\leftarrow$ (elemento pivô)
	$\vdots$	$\vdots$	
	$\bar{\mathbf{b}}_m$	$y_{mk}$	

Baseado no fato de que  $\mathbf{B}^{-1}$  e  $\mathbf{w}$  aparecem sempre abaixo das mesmas colunas do quadro acima, o quadro pivotado mantém a estrutura dos mesmos para a nova base.

Quanto às operações realizadas, por iterações, observa-se que apenas as adições do simplex revisado são maiores que a do simplex:

Método	Adições	Multiplicações
Simplex Revisado	$m(n + 1)$	$m(n - m) + (m + 1)^2$
Simplex	$m(n - m + 1)$	$m(n - m) + (n + 1)$

Como  $n \geq m > 0 \Rightarrow n - m \geq 0$ . Desta forma:

$$\begin{aligned} \text{Adições} \rightarrow m(n + 1) &\geq m(n - m + 1) \Rightarrow m(n + 1) \geq m(n + 1) - m^2 \Rightarrow \\ 0 &\geq -m^2 \Rightarrow m^2 \geq 0 \text{ (que é verdade, pois, } m > 0\text{)}. \end{aligned}$$



Quanto às multiplicações nada pode-se afirmar a respeito, bem como se considerado o total de operações.

Simplex Revisado	$(m + 1)^2 + m(2n - m + 1)$
Simplex	$2m(n - m) + m + n + 1$

**Observação 15:-** Se a matriz  $A$  é esparsa e de elevada dimensão, o Simplex Revisado apresenta as seguintes vantagens:

- i) o número de operações para se calcular  $\bar{c}_N$  e  $y_k$  é reduzido;
- ii) como utiliza-se os valores originais para o cálculo de  $\bar{c}_N$  e  $y_k$  comete-se um menor erro de arredondamento. Desta forma, tais erros só poderão ocorrer no processo de pivotagem.

### Algoritmo do Método Simplex Revisado

Passo inicial:

Encontrar uma SBF inicial com base  $B$  e inversa  $B^{-1}$ .

Calcular  $w = c_B B^{-1}$ ,  $wb = c_B B^{-1}b$ ,  $\bar{b} = B^{-1}b$  e implementar o quadro revisado:

Base Inversa	RHS
$w$	$c_B \bar{b}$
$B^{-1}$	$\bar{b}$

Se não existir SBF inicial, implementar a Fase I do simplex.

Passo Principal:

1. Calcular os custos relativos das variáveis não básicas:

$\bar{c}_N = c_B B^{-1}N - c_N = wN - c_N \leftarrow (z_j - c_j), \forall j \in R = \{\text{conjunto dos índices das variáveis não básicas}\};$

2. Seja  $z_k - c_k = \text{Max} \{z_j - c_j, j \in R\}$ . Se  $z_k - c_k \leq 0 \rightarrow$  **Solução ótima.**

Caso contrário,  $x_k$  é candidata a entrar na base. Ir ao passo 3;

3. Calcular  $y_k = B^{-1}a_k$ . Se  $y_k \leq 0 \rightarrow$  o Problema é **Ilimitado**. Caso contrário, colocar a coluna  $\begin{bmatrix} z_k - c_k \\ y_k \end{bmatrix}$  no lado direito do quadro simplex revisado, da seguinte maneira:

Base Inversa	RHS	$x_k$
$w$	$c_B \bar{b}$	$z_k - c_k$
$B^{-1}$	$\bar{b}$	$y_k$

Encontre o índice  $r$  do pivô através de:  $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}; y_{ik} > 0, i = 1, 2, \dots, m \right\}$ .

Pivotar o quadro simplex revisado com o pivô  $y_{rk}$ , atualizar as variáveis básicas e voltar ao passo 1.

### O Método Primal Simplex Revisado com duas fases

A maneira de resolver é análoga ao algoritmo de duas fases do simplex. Veja no exemplo 9, na página 65.

### O Método Primal Simplex Revisado com duas fases num quadro único

A maneira de resolver é análoga ao algoritmo de duas fases do simplex num quadro único, ou seja, a disposição do mesmo será:

	Base Inversa	RHS
$x_0$	$w'$	$w'b$
$z$	$w$	$wb$
$x_B$	$I$	$B^{-1}b$

Veja o exemplo 4, na página 44.

**Observação 16:-** Pode-se montar o quadro do simplex revisado a partir de qualquer base factível, não necessariamente a identidade.

**Observação 17:-** No caso de existir pontos extremos degenerados, visando evitar a ciclagem, utiliza-se a seguinte estratégia:  $x_k$  que entra na base é determinada através de:

$$I_0 = \{r: \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{Min} \{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}: y_{ik} > 0; i = 1, 2, \dots, m \}$$

Se existe um único elemento então  $x_{B_r}$  sai da base. Caso contrário, determinar:

$$I_1 = \{r: \frac{y_{r1}}{y_{rk}} = \text{Min} \{ \frac{y_{i1}}{y_{ik}}: i \in I_0 \}$$

Se existe um único elemento então  $x_{B_r}$  sai da base. Caso contrário, encontrar um único índice através de:

$$I_j = \{r: \frac{y_{rj}}{y_{rk}} = \text{Min} \{ \frac{y_{ij}}{y_{ik}}: i \in I_{j-1} \}$$

Se existe um único elemento então  $x_{B_r}$  sai da base. Caso contrário, determinar:

$$I_1 = \{r: \frac{y_{r1}}{y_{rk}} = \text{Min} \{ \frac{y_{i1}}{y_{ik}}: i \in I_0 \}.$$

### 3.3 Prova de Validade do Método Primal Simplex Revisado

Considere o seguinte problema de programação linear: 
$$\begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

“Provar que um quadro simplex representado por  $\mathbf{B}^{-1}$  e  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$  correspondente a uma solução básica factível de base  $\mathbf{B}$  permite gerar um novo quadro que representa uma solução básica factível vinculada a uma nova base vizinha. Provar também que esse processo é válido mesmo quando a base inicial não é a matriz identidade”.

Suponha que a matriz invertível  $\mathbf{B}_1 \neq \mathbf{I}$  seja a base do quadro inicial que gera uma solução básica factível.

Calcula-se:

$$\mathbf{w}^1 = \mathbf{c}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}$$

$$z_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$$

$$\mathbf{y}_k^1 = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{a}_k^1 \text{ e}$$

$$\mathbf{b}^1 = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$$

Após os devidos cálculos e análises, onde a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  entrará na base no lugar da variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$ , a nova base será:

$$\mathbf{B}_2 = [\mathbf{a}_{B_1}, \mathbf{a}_{B_2}, \dots, \mathbf{a}_{B_{r-1}}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{B_{r+1}}, \dots, \mathbf{a}_{B_m}] = [\mathbf{B}_1\mathbf{e}_1 \mathbf{B}_1\mathbf{e}_2 \dots \mathbf{B}_1\mathbf{e}_{r-1} \mathbf{B}_1\mathbf{y}_k \mathbf{B}_1\mathbf{e}_{r+1} \dots \mathbf{B}_1\mathbf{e}_m] = \mathbf{B}_1\mathbf{T}$$

$$\text{Onde } \mathbf{T} = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{r-1} \mathbf{y}_k \mathbf{e}_{r+1} \dots \mathbf{e}_m]$$

$$\text{Assim, } \mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{r-1} \mathbf{y}_k^k \mathbf{e}_{r+1} \dots \mathbf{e}_m] = \mathbf{E}_1$$

$$\text{Onde } \mathbf{y}_k^k = \left[ -\frac{\mathbf{y}_{1k}}{\mathbf{y}_{rk}} - \frac{\mathbf{y}_{2k}}{\mathbf{y}_{rk}} \dots - \frac{\mathbf{y}_{r-1,k}}{\mathbf{y}_{rk}} \frac{1}{\mathbf{y}_{rk}} - \frac{\mathbf{y}_{r+1,k}}{\mathbf{y}_{rk}} \dots - \frac{\mathbf{y}_{mk}}{\mathbf{y}_{rk}} \right]^T$$

Desta forma,

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1 \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{B}_2\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{B}_1 \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_1 \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_1^{-1} = \mathbf{B}_2^{-1} \therefore \mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{B}_1^{-1}$$

Continuando o processo, obtém-se:

$$\mathbf{B}_p^{-1} = \mathbf{E}_{p-1}\mathbf{E}_{p-2} \dots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{B}_1^{-1}, p > 1$$

Calcula-se agora:

$$\mathbf{w}^2 = \mathbf{c}_{B_2}\mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{c}_{B_2}\mathbf{E}_1\mathbf{B}_1^{-1}$$

$$z_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{w}^2\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_2}\mathbf{E}_1\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$$

$$\mathbf{y}_k^2 = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{a}_k^2 = \mathbf{E}_1\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{a}_k^2 \text{ e}$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b}^1 = \mathbf{E}_1\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{E}_1[\mathbf{B}_1^{-1}]^2\mathbf{b}$$

Após os devidos cálculos e análises, onde a variável não básica  $x_k^2$  entrará na base no lugar da variável básica  $x_{B_r}^2$ , a nova base será:

$$\mathbf{B}_3 = [\mathbf{a}_{B_1}, \mathbf{a}_{B_2}, \dots, \mathbf{a}_{B_{r-1}}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{B_{r+1}}, \dots, \mathbf{a}_{B_m}] = [\mathbf{B}_2 \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{e}_{r-1} \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_k \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{e}_{r+1} \quad \dots \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{e}_m] = \mathbf{B}_2 \mathbf{E}_2^{-1} = \mathbf{B}_1 \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2^{-1}$$

$$\text{Onde } \mathbf{E}_2^{-1} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_{r-1} \quad \mathbf{y}_k \quad \mathbf{e}_{r+1} \quad \dots \quad \mathbf{e}_m]$$

Desta forma,

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_2 \mathbf{E}_2^{-1} = \mathbf{B}_1 \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_3^{-1} = \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1}$$

Calcula-se agora:

$$\mathbf{w}^3 = \mathbf{c}_{B_3} \mathbf{B}_3^{-1} = \mathbf{c}_{B_3} \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1}$$

$$z_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{w}^3 \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_3} \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_3} \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$$

$$\mathbf{y}_k^3 = \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{a}_k^3 = \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_k^3 \text{ e}$$

$$\mathbf{b}^3 = \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{b}^2 = \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{E}_1 [\mathbf{B}_1^{-1}]^2 \mathbf{b} = \mathbf{E}_2 (\mathbf{E}_1)^2 [\mathbf{B}_1^{-1}]^3 \mathbf{b}$$

Verificando as fórmulas:

$$\mathbf{w}^1 = \mathbf{c}_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1}$$

$$\mathbf{w}^2 = \mathbf{c}_{B_2} \mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{c}_{B_2} \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1}$$

$$\mathbf{w}^3 = \mathbf{c}_{B_3} \mathbf{B}_3^{-1} = \mathbf{c}_{B_3} \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1}$$

.....

$$\mathbf{w}^p = \mathbf{c}_{B_p} \mathbf{B}_p^{-1} = \mathbf{c}_{B_p} \mathbf{E}_{p-1} \mathbf{E}_{p-2} \dots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1}$$

$$z_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{w}^1 \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$$

$$z_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{w}^2 \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_2} \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$$

$$z_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{w}^3 \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_3} \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_3} \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$$

.....

$$z_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{w}^p \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_p} \mathbf{B}_p^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{B_p} \mathbf{E}_{p-1} \mathbf{E}_{p-2} \dots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$$

$$y_k^1 = B_1^{-1} a_k^1$$

$$y_k^2 = B_2^{-1} a_k^2 = E_1 B_1^{-1} a_k^2$$

$$y_k^3 = B_3^{-1} a_k^3 = E_2 E_1 B_1^{-1} a_k^3$$

$$\dots$$

$$y_k^p = B_p^{-1} a_k^p = E_{p-1} E_{p-2} \dots E_2 E_1 B_1^{-1} a_k^p$$

$$b^1 = B_1^{-1} b$$

$$b^2 = B_2^{-1} b^1 = E_1 B_1^{-1} B_1^{-1} b = E_1 (B_1^{-1})^2 b$$

$$b^3 = B_3^{-1} b^2 = E_2 E_1 B_1^{-1} E_1 (B_1^{-1})^2 b = E_2 (E_1)^2 (B_1^{-1})^3 b$$

$$\dots$$

$$b^p = B_p^{-1} b^{p-1} = E_{p-1} E_{p-2} \dots E_2 E_1 (B_1^{-1}) E_{p-2} (E_{p-3})^2 (E_{p-4})^3 \dots (E_2)^{p-3} (E_1)^{p-2} [B_1^{-1}]^{p-1} b =$$

$$= E_{p-1} (E_{p-2})^2 (E_{p-3})^3 \dots (E_2)^{p-2} (E_1)^{p-1} [B_1^{-1}]^p b$$

### 3.4 Exemplos ilustrativos

**Exemplo 4:-** Seja o problema de PL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{array} \right. , \text{ que pode ser escrito da seguinte maneira:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{Min } x_0 = x_7 + x_8 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_6 + x_8 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 8 \end{array} \right.$$

$$\text{Assim, considerando } B = [a_4 \ a_7 \ a_8] = I = B^{-1}, N = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_5 \ a_6] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$c_B = [0 \ 0 \ 0], c_N = [-2 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0], c'_B = [0 \ 1 \ 1], c'_N = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], w' = c'_B B^{-1} = [0 \ 1 \ 1], \bar{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$x_0 = c'_B B^{-1} b = w' b = [0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 6$$

## 1. Montagem do quadro

	Base Inversa			RHS		x1
x0	0	1	1	6	pivô →	6
x4	1	0	0	8		2
x7	0	1	0	2		4
x8	0	0	1	4		2

x7 sai da base

1ª iteração –  $\mathbf{c}_B = [0 \ 0 \ 0]$  e  $\mathbf{c}'_B = [0 \ 1 \ 1]$

## 1.1 Calcular os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas e verificação

da otimalidade:  $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}'_N = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}'_N = \mathbf{w}' \mathbf{N} - \mathbf{c}'_N = [0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} -$

$[0 \ 0 \ 0 \ 0] = [6 \ 2 \ 1 \ -1 \ -1]$ .

1.2 O quadro não é ótimo então  $x_1$  entra na base.

## 1.3 Atualizar a coluna da variável que entra na base e pivotar:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \therefore x_7 \text{ sai da base.}$$

## 2. Montagem do quadro

	Base Inversa			RHS		x2
x0	0	$-\frac{1}{2}$	1	3	pivô →	$\frac{7}{2}$
x4	1	$-\frac{1}{2}$	0	7		$\frac{3}{2}$
x1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$
x8	0	$-\frac{1}{2}$	1	3		$\frac{7}{2}$

x8 sai da base

2ª iteração –  $\mathbf{c}_B = [0 \ -2 \ 0]$

## 2.1 Calcular os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas e verificação da otimalidade:

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{c}}'_N = [0 \ -\frac{1}{2} \ 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - [00001] = [\frac{7}{2} \ -2 \ \frac{1}{2} \ -1 \ -\frac{3}{2}].$$

2.2 O quadro não é ótimo então  $x_2$  entra na base.

2.3 Atualizar a coluna da variável que entra na base e pivotar:

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \therefore x_8 \text{ sai da base.}$$

3. Montagem do quadro

	Base Inversa			RHS
<b>x0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>x4</b>	<b>1</b>	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{40}{7}$
<b>x1</b>	<b>0</b>	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{7}$
<b>x2</b>	<b>0</b>	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{7}$

Fim da Fase I

3ª iteração –  $c_B = [0 \ -2 \ 1]$

$$\text{Fase II – Temos } w = c_B B^{-1} = [0 \ -2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = [0 \ -\frac{4}{7} \ \frac{1}{7}], \quad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\text{assim, teremos } wb = [0 \ -\frac{4}{7} \ \frac{1}{7}] \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{4}{7}.$$

$$3.1 \quad \bar{c}_N = c_B B^{-1}N - c_N = wN - c_N = [0 \ -\frac{4}{7} \ \frac{1}{7}] \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [-1 \ 0 \ 0] = [-\frac{2}{7} \ \frac{4}{7} \ -\frac{1}{7}].$$

3.2 O quadro não é ótimo  $\therefore x_5$  entra na base

$$3.3 \quad y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} \therefore x_2 \text{ sai da base.}$$

4. Montagem do quadro

	Base Inversa			RHS
<b>z</b>	<b>0</b>	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
<b>x4</b>	<b>1</b>	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{40}{7}$
<b>x1</b>	<b>0</b>	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{7}$
<b>x2</b>	<b>0</b>	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{7}$

pivô  $\rightarrow$

<b>x5</b>
$\frac{4}{7}$
$\frac{2}{7}$
$-\frac{3}{14}$
$\frac{1}{7}$

$x_2$  sai da base

$$4^{\text{a}} \text{ iteração} - \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_6 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_N = [1 \ -1 \ 0]$$

$$4.1 \ \bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{w}_N - \mathbf{c}_N = [0 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} - [1 \ -1 \ 0] = [-4 \ 2 \ 1].$$

4.2 O quadro não é ótimo  $\therefore x_3$  entra na base

$$4.3 \ \mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -4 \end{bmatrix}. \mathbf{y}_3 \leq \mathbf{0} \Rightarrow \text{ Solução Ilimitada}$$

	Base Inversa			RHS
<b>z</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>-4</b>
<b>x<sub>4</sub></b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>4</b>
<b>x<sub>1</sub></b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	<b>2</b>
<b>x<sub>5</sub></b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>2</b>	<b>6</b>

**Exemplo 5-** Resolver o problema de PL:

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3x_1 - x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 \\ \text{sujeito a} \\ 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 20 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \leq 8 \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 7 \end{cases}, \text{ ou seja:}$$

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3x_1 - x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 \\ \text{sujeito a} \\ 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 20 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 + x_7 = 8 \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 7 \end{cases}$$

$$\text{Assim, } \mathbf{B} = [\mathbf{a}_6 \ \mathbf{a}_7] = \mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{N} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 13 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Para a Fase I: } \mathbf{c}'_B = [1 \ 1], \mathbf{c}'_N = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \mathbf{w}' = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} = [1 \ 1], \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ assim, } \mathbf{x}_0 =$$

$$\mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{w}' \mathbf{b} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 28 \text{ e assim temos } \bar{\mathbf{c}}'_N = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}'_N = \mathbf{w}' \mathbf{N} - \mathbf{c}'_N = [1 \ 1]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 13 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} - [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = [6 \ -5 \ 18 \ -3 \ 2] \therefore x_3 \text{ entra na base.}$$

Para a Fase II:

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B = [0 \ 0], \mathbf{c}_N = [3 \ -1 \ -7 \ 3 \ 1], \mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0 \ 0], \mathbf{z} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{w} \mathbf{b} \\ = [0 \ 0] \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } \bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N = \mathbf{w} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N = [-3 \ 1 \ 7 \ -3 \ -1]$$

1. Montagem do quadro



	Base Inversa		RHS
$x_0$	1	1	28
$z$	0	0	0
$x_6$	1	0	20
$x_7$	0	1	8

pivô →

$x_3$
18
7
13
5

x<sub>6</sub> sai da base

1ª iteração –

1.1 Calcular os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas e verificação da otimalidade:  $\bar{c}'_N = c'_B B^{-1} N - c'_N = w' N - c'_N = [1 \ 1] = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 13 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} - [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = [6 \ -5 \ 18 \ -3 \ 2] \therefore x_3$  entra na base.

1.2 O quadro não é ótimo então  $x_3$  entra na base.

1.3 Atualizar a coluna da variável que entra na base e pivotar:

$$y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix} \therefore x_6 \text{ sai da base.}$$

2. Montagem do quadro

	Base Inversa		RHS
$x_0$	$-\frac{5}{13}$	1	$\frac{4}{13}$
$z$	$-\frac{7}{13}$	0	$-\frac{140}{13}$
$x_3$	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{20}{13}$
$x_7$	$-\frac{5}{13}$	1	$\frac{4}{13}$

pivô →

$x_3$
$\frac{8}{13}$
$-\frac{20}{13}$
$\frac{1}{13}$
$\frac{8}{13}$

x<sub>7</sub> sai da base

2ª iteração –

2.1 Calcular os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas e verificação da otimalidade:  $\bar{c}'_N = [-\frac{5}{13} \ 1] \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] = [-\frac{12}{13} \ \frac{7}{13} \ -\frac{3}{13} \ \frac{8}{13} \ -\frac{18}{13}] \therefore x_5$

entra na base.  $x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$ ,

2.2 O quadro não é ótimo então  $x_2$  entra na base.

2.3 Atualizar a coluna da variável que entra na base e pivotar:

$$y_5 = B^{-1} a_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & 0 \\ -\frac{5}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix} \therefore x_7 \text{ sai da base.}$$

	Base Inversa		RHS
$x_0$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$z$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	<b>-10</b>
$x_3$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
$x_5$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$

Fim da Fase I

## 3. Montagem do quadro

	Base Inversa		RHS	
$z$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	<b>-10</b>	
$x_3$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$	
$x_5$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$	pivô →

$x_2$
$\frac{9}{2}$
$\frac{3}{8}$
$-\frac{7}{8}$

$x_5$  sai da base

3ª iteração –

$$3.1 \quad \mathbf{w} = \left[-\frac{3}{2} \quad \frac{5}{2}\right] \text{ e, assim, teremos } \bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N = \mathbf{w}_N - \mathbf{c}_N =$$

$$\left[-\frac{3}{2} \quad \frac{5}{2}\right] \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - [3 \quad -1 \quad 3] = \left[-8 \quad \frac{9}{2} \quad -\frac{5}{2}\right] \therefore x_2 \text{ entra na base.}$$

3.2 O quadro não é ótimo  $\therefore x_2$  entra na base

$$3.3 \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{13}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{13}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix} \therefore x_5 \text{ sai da base.}$$

	Base Inversa		RHS
$z$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{41}{7}$	$-\frac{88}{7}$
$x_3$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$
$x_2$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{4}{7}$

4ª iteração –

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_N = [3 \quad 3 \quad 1]$$

$$4.1 \quad \bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{w}_N - \mathbf{c}_N = \left[\frac{12}{7} \quad -\frac{41}{7}\right] \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - [3 \quad 3 \quad 1] = \left[-\frac{2}{7} \quad -\frac{4}{7} \quad -\frac{36}{7}\right]$$

4.2 O quadro é ótimo, pois,  $\bar{\mathbf{c}}_N \leq \mathbf{0}$  e assim, a solução será:

$$\mathbf{z} = -\frac{88}{7}, \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 = \frac{4}{7}, \mathbf{x}_3 = \frac{12}{7}, \mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_6 = \mathbf{x}_7 = \mathbf{x}_8 = \mathbf{0}$$

**Exemplo 6:-** Resolver o exemplo 5 considerando  $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ .

Assim  $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [-1 \ -7] \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = [\frac{12}{7} \ -\frac{41}{7}]$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{w} \mathbf{b} = [\frac{12}{7}$

$-\frac{41}{7}] \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = -\frac{88}{7}$  e  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{12}{7} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ . Desta forma:

$\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{w} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N = [\frac{12}{7} \ -\frac{41}{7}] \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - [3 \ 3 \ 1] = [-\frac{2}{7} \ -\frac{4}{7} \ -\frac{36}{7}] \leq \mathbf{0}$ , ou seja,

encontramos o ótimo  $\mathbf{z} = -\frac{88}{7}$ ,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \frac{4}{7}$ ,  $\mathbf{x}_3 = \frac{12}{7}$ ,  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_6 = \mathbf{x}_7 = \mathbf{x}_8 = \mathbf{0}$

	Base Inversa	RHS
<b>z</b>	$\frac{12}{7}$ $-\frac{41}{7}$	$-\frac{88}{7}$
<b>x2</b>	$-\frac{5}{7}$ $\frac{13}{7}$	$\frac{4}{7}$
<b>x3</b>	$-\frac{1}{7}$ $\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$

## 4 O Método Dual Simplex

### 4.1 Introdução

Após a apresentação do Método Simplex e o Método Simplex Revisado, será mostrado o Método Dual Simplex e que a Teoria da Dualidade é um dos mais importantes tópicos da Programação Linear, tanto do ponto de vista teórico como prático. Será mostrado que intrinsecamente associado a cada modelo de PL (denominado Primal) há outro modelo (denominado Dual) com interessantes propriedades.

Desta forma, neste capítulo é apresentado a Dualidade em Programação Linear, as Condições de Otimização de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), o Teorema Fundamental da Dualidade, o Princípio do Supervisor, o Teorema da Folga Complementar, a Análise e Construção do Método Dual Simplex, o Método de Duas Fases do Dual Simplex e uma nova interpretação do método dual simplex. Ao final do mesmo serão apresentados alguns exemplos ilustrativos.

### 4.2 Dualidade em Programação Linear

#### Formulação do Problema Dual

Dado o problema de programação linear original (P), então se define o problema dual (D) da seguinte forma:

$$(P) \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \text{Max } v = \mathbf{w}\mathbf{b} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{Forma Canônica})$$

Ou então,

$$(P) \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \text{Max } v = \mathbf{w}\mathbf{b} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{w} \text{ irrestrito} \end{cases} \quad (\text{Forma Padronizada})$$

Onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;  $\text{posto}(\mathbf{A}) = m$ ;  $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{b}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ . Seja  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  uma base do problema de PL acima.

$\mathbf{B}$  é uma base primal factível (SBFP – solução básica factível primal) se  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  e uma base dual factível (SBFD – solução básica factível dual), como será provado adiante, se  $\mathbf{c}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N \leq \mathbf{0}$ ; e será uma base ótima para o nosso problema se for SBFP e SBFD. Entretanto, na SBFD, algumas das variáveis básicas podem ser negativas (ou seja, o problema primal pode ser infactível com esta base). No Método Primal Simplex já apresentado, iniciava-se com uma SBFP e gerava-se uma sequência de SBFP até chegar ao seu limite – a SBFP ótima.

O Método Dual Simplex – MDS inicia com uma SBFD, porém infactível no primal e desenvolve uma sequência movendo-se através de SBFD adjacentes até chegar à SBFD ótima. Neste contexto, a cada iteração, procura-se reduzir a infactibilidade do primal enquanto desloca-se a um novo ponto extremo de melhor qualidade do problema dual. Na verdade no MDS resolve-se o problema dual, mas sem montá-lo e trabalhando com a estrutura do problema original. Em cada iteração, uma variável básica é substituída por uma variável não básica no quadro simplex (no qual a solução dual não é calculada, mas os coeficientes de custo relativo satisfazem ao critério de otimalidade do problema original – o que significa que o  $w$  que se encontra nesse quadro de forma implícita ou explícita representa um ponto extremo do problema dual). O quadro ótimo é encontrado quando, além da otimalidade do problema primal ocorre também a factibilidade do mesmo. Desta forma, o MDS resolve o problema primal usando as propriedades do problema dual, ou seja, o processo é iniciado com um quadro que representa um ponto extremo para o problema dual (satisfazendo o critério de otimalidade primal) e busca-se a otimalidade do problema dual (isto é, a factibilidade do problema primal).

**Observação 18** - A cada restrição de (P) está vinculada uma variável de (D) e a cada variável de (P) está vinculada uma restrição de (D), ou seja, se (P) tem  $m$  restrições e  $n$  variáveis então (D) terá  $m$  variáveis  $w_i$  e  $n$  restrições cada uma delas identificada por um  $c_i$ .

**Observação 19** - Ambas as formulações são equivalentes.

### Relações entre as funções objetivo

Sejam os seguintes problemas primal (P) e dual (D):

$$(P) \begin{cases} \text{Min } z = cx \\ \text{s. a} \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \text{Max } v = wb \\ \text{s. a} \\ wA \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

**Observação 20** – Se  $\bar{x} \in P$  e  $\bar{w} \in D$  então  $c\bar{x} \geq \bar{w}b$ , pois,

$$\text{Se } \bar{x} \in P \Rightarrow A\bar{x} \geq b \Rightarrow \bar{w}A\bar{x} \geq \bar{w}b (\bar{w} \geq 0)$$

$$\text{Se } \bar{w} \in D \Rightarrow \bar{w}A \leq c \Rightarrow \bar{w}A\bar{x} \leq c\bar{x} (\bar{x} \geq 0)$$

Assim  $c\bar{x} \geq \bar{w}b$  (relação conhecida como *propriedade fraca da dualidade* ou *weak duality*).

**Lema 2** - O valor da função objetivo em qualquer ponto factível de (P) é um limite superior para o valor da função objetivo ótima de (D) e, da mesma forma, o valor da função objetivo de qualquer ponto factível de (D) é um limite inferior para o valor da função objetivo ótima de (P).

**Corolário 6** (Condição de otimalidade de P e D) – Se  $\bar{x} \in \mathbf{P}$  e  $\bar{w} \in \mathbf{D}$  tal que  $c\bar{x} = \bar{w}b$  então  $\bar{x}$  é a solução ótima de (P) e  $\bar{w}$  é a solução ótima de (D).

**Corolário 7** (Consequência de um problema ilimitado) – Se um dos problemas é ilimitado então o outro será infactível.

**Observação 21** – a recíproca não é verdadeira no corolário 7, pois, se um dos problemas é infactível não se garante que o outro seja ilimitado.

### Dualidade e as Condições de Otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

$$\text{Seja (P)} \quad \begin{cases} \text{Min } z = cx \\ \text{s. a} \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Pela condição de otimalidade de KKT, um ponto  $\bar{x}$  cumpre com as condições necessárias e suficientes de otimalidade para (P) se existe um vetor  $\bar{w}$  tal que:

- 1)  $A\bar{x} \geq b, \bar{x} \geq 0$  (Condição de factibilidade do problema primal);
- 2)  $\bar{w}A \leq c, \bar{w} \geq 0$  (Condição de factibilidade do problema dual);
- 3)  $\bar{w} [A\bar{x} - b] = 0; [c - \bar{w}A] \bar{x} = 0$  (Condições de folga complementar);

**Observação 22** – A condição 3) exige que  $c\bar{x} = \bar{w}b$ , uma vez que  $\bar{w}A\bar{x} = \bar{w}b$  e  $\bar{w}A\bar{x} = c\bar{x} \Rightarrow c\bar{x} = \bar{w}b$ . Assim,  $\bar{w}$  é o ótimo para (D).

**Lema 3** (Propriedade forte da dualidade) – Se um dos problemas tem ótimo finito então os dois problemas tem o mesmo valor da função objetivo.

**Teorema 12** (Teorema Fundamental da Dualidade) – Em relação aos problemas primal (P) e dual (D), exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- 1) Ambos possuem solução ótima  $\bar{x}$  e  $\bar{w}$  com  $c\bar{x} = \bar{w}b$ ;
- 2) Se um dos problemas tem o valor da função objetivo **ilimitado** então neste caso o outro problema será **infactível**;
- 3) Ambos são **infactíveis**.

**Observação 23** – O teorema 12 mostra-nos que a dualidade não é uma propriedade completamente simétrica. Assim, uma forma equivalente de expressar a propriedade da dualidade é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{(P) tem solução ótima} & \Leftrightarrow \text{(D) tem solução ótima;} \\ \text{P (D) é ilimitado} & \Rightarrow \text{D (P) é infactível;} \\ \text{P (D) é infactível} & \Rightarrow \text{D (P) é ilimitado ou infactível;} \end{aligned}$$

### Folga complementar e o Princípio do Supervisor

$$\text{Seja (P)} \quad \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} .$$

Se  $\bar{\mathbf{x}}$  e  $\bar{\mathbf{w}}$  são as soluções ótimas de (P) e (D), respectivamente, então  $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{w}}\mathbf{b}$  (Princípio do Supervisor). As condições de KKT permitem verificar outra forma equivalente do princípio do supervisor na sua condição de folga complementar. Desta forma:

$$\bar{\mathbf{w}} [\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}] = \mathbf{0} \quad (20)$$

Como  $\bar{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  então cada componente de (20) é nula, isto é, teremos que  $\bar{w}_i (\mathbf{a}^i \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ . Da mesma forma, da outra relação,  $[\mathbf{c} - \bar{\mathbf{w}}\mathbf{A}] \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , obtém-se  $(c_j - \bar{w}_a_j) \bar{x}_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 13** (Teorema da Folga Complementar) – Sejam  $\bar{\mathbf{x}}$  e  $\bar{\mathbf{w}}$  soluções factíveis de (P) e (D), com ambos os problemas na sua forma canônica, respectivamente. Então, essas são, respectivamente, soluções ótimas de (P) e (D) se, e somente se

$$(c_j - \bar{w}_a_j) \bar{x}_j = 0, j = 1, 2, \dots, n \text{ e } \bar{w}_i (\mathbf{a}^i \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (21)$$

Estas fórmulas acarretam as seguintes relações:

$$\begin{cases} \bar{x}_j > 0 & \Rightarrow & \bar{w}_a_j = c_j \\ \bar{w}_a_j < c_j & \Rightarrow & \bar{x}_j = 0 \\ \bar{w}_i > 0 & \Rightarrow & \mathbf{a}^i \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_i \\ \mathbf{a}^i \bar{\mathbf{x}} > \mathbf{b}_i & \Rightarrow & \bar{w}_i = 0 \end{cases} \quad (22)$$

**Observação 24** – Se uma variável em um problema é positiva, então a restrição vinculada à mesma no outro problema se encontra ativa. Da mesma forma, se a restrição de um problema não está ativa então a variável vinculada à mesma deve ser nula.

Finalmente, as variáveis de folga de (P) assumem a seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{n+i} = \mathbf{a}^i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (23)$$

As variáveis de (D) assumem a forma abaixo:

$$\mathbf{w}_{m+j} = \mathbf{c}_j - \mathbf{w} \mathbf{a}_j \geq \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

Substituindo as equações (23) e (24) em (22) se estabelece uma forma equivalente do teorema da folga complementar:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_j \bar{\mathbf{w}}_{m+j} = \mathbf{0}, & j = 1, 2, \dots, n \\ \bar{\mathbf{w}}_i \bar{\mathbf{x}}_{n+i} = \mathbf{0}, & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (25)$$

O sistema (25) vincula a variável de um problema com a variável de folga do outro. Assim,  $\mathbf{x}_j$  e  $\mathbf{w}_{m+j}, \forall j$  são conhecidas como um par de variáveis complementares e, logicamente, o mesmo sucede com as variáveis  $\mathbf{w}_i$  e  $\mathbf{x}_{n+i}, \forall i$ .

### Usando o Dual para resolver o Primal

Utilizando os teoremas 12 e 13 pode-se encontrar a solução do problema primal após a resolução do problema dual. Pode-se aplicar o método simplex para resolver o dual, contudo, as propriedades da dualidade apresentadas anteriormente tem uma aplicação mais significativa e são usadas para justificar outro método de otimização de problemas de PL denominado **Dual Simplex**.

### 4.3 O Método Dual Simplex (MDS)

Sejam os problemas de programação linear original (P) e o problema dual (D):

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c} \mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} & \text{(D)} & \begin{cases} \text{Max } v = \mathbf{w} \mathbf{b} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{w} \mathbf{A} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$$

O Método Dual Simplex (MDS) na verdade resolve (D) usando o quadro simplex de (P) e, a partir daí, (P). Inicia-se o processo a partir de uma SBF para (D) e, em cada iteração, obtém-se uma SBF para (D) de melhor qualidade que a do quadro anterior. Contudo, deve-se notar que não se monta explicitamente (D). O processo termina quando se verifica a otimalidade de (D). Se chega ao quadro ótimo, então se tem um quadro ótimo para (D) bem como para (P). Somente neste último quadro (P) é factível e ótimo.



**Observação 25** – O MDS é um método alternativo para resolver (P) e, de maneira geral, para resolver um problema de PL. Desta forma, o simplex utilizado até então será denominado Método Primal Simplex (MPS).

### Factibilidade de (D) no quadro simplex de (P)

$$\text{Seja o PL: (P) } \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (26)$$

Seja  $\mathbf{B}$  uma base de (P) não necessariamente factível. Desta forma:

i) Se  $\bar{\mathbf{b}}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \Rightarrow$  O quadro de (P) é factível, pois,  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ .

ii) Se  $z_j - c_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, n, n + 1, \dots, n + m$  então temos o ótimo. Em função de  $\mathbf{w} = \mathbf{c}\mathbf{B}^{-1}$ , então pode-se observar que:

1) Se  $z_j - c_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$  (as  $n$  variáveis originais) então:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c} \quad (27)$$

2) Se  $z_j - c_j \leq 0, j = n + 1, n + 2, \dots, n + m$  (as  $m$  variáveis de folga) então, de (P) sabe-se que as colunas das variáveis de folga assumem a forma  $\mathbf{a}_{n+i} = -\mathbf{e}_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$  onde  $\mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, j \neq i \\ 1, j = i \end{cases}$ . Como  $\mathbf{c}_{n+i} = \mathbf{0}$  então se obtém:

$$z_{n+i} - c_{n+i} = \mathbf{w}\mathbf{a}_{n+i} - c_{n+i} = \mathbf{w}(-\mathbf{e}_i) - 0 = -\mathbf{w}_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{Assim, como } \mathbf{w}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (28)$$

De (27) e (28) conclui-se que se o quadro simplex de (P) para uma base  $\mathbf{B}$  em que as condições de otimalidade do problema primal são satisfeitas então  $\mathbf{w} = \mathbf{c}\mathbf{B}^{-1}$  satisfaz o critério de factibilidade de (D), ou seja,  $\mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}$  e  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ . Se tiver uma base  $\mathbf{B}$  para o problema (P), não necessariamente factível do problema primal, mas cumprindo o critério de otimalidade do problema primal, então  $\mathbf{w} = \mathbf{c}\mathbf{B}^{-1}$  é um ponto factível de (D). Contudo, ainda pode-se demonstrar que  $\mathbf{w}$ , além de ser factível, é um ponto extremo (SBF) de (D).

### Análise do Método Dual Simplex

Considere os seguintes problemas:

$$\text{(P) } \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{(D) } \begin{cases} \text{Max } v = \mathbf{w}\mathbf{b} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (29)$$

Em alguns problemas de minimização (ou maximização) é difícil encontrar uma SBF ( $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ) sem o uso de variáveis artificiais. Contudo nestes casos, é mais usual encontrar uma base inicial, não necessariamente factível, que seja um ponto em (D), ou seja,  $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j \leq \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{R}$ . O Método Dual Simplex é mais eficiente em problemas desta forma. Assim, o Método Dual Simplex gera uma série de quadros simplex que buscam a factibilidade do problema primal, passando a um ponto extremo de melhor qualidade do problema dual. O Método Dual Simplex desloca-se através de pontos extremos de (D) até encontrar o seu ponto extremo ótimo que permite identificar o ponto extremo ótimo de (P). Observe que o quadro simplex a ser trabalhado é montado com os dados de (P).

#### Seleção da variável que deve sair da base:

Se o quadro atual é dual factível então  $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j \leq \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{R}$ . Se  $\mathbf{b}_i \geq \mathbf{0}$  o quadro atual é ótimo. Caso contrário, selecciona-se uma variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  para sair da base através de:

$$\mathbf{x}_{B_r} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{b}}_r = \text{Min} \{ \bar{\mathbf{b}}_i, i = 1, 2, \dots, m \} \quad (30)$$

O critério acima não é único e, em geral, pode ser seleccionada qualquer variável básica com  $\bar{\mathbf{b}}_i < \mathbf{0}$  para sair da base. Isto torna positivo o elemento da posição de  $\mathbf{x}_{B_r}$  e o que se pretende é que  $\bar{\mathbf{b}}_r \geq \mathbf{0}$  através de algumas iterações simplex.

#### Seleção da variável que deve entrar na base:

Encontrada a variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  para sair da base então a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  que deverá entrar na base deverá ter  $\mathbf{y}_{rk} < \mathbf{0}$ , pois, assim garante-se que após a pivotagem  $\bar{\mathbf{b}}'_r > \mathbf{0}$ .

Seja  $\mathbf{r}$  a linha que identifica a variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  que deixará a base, então a variável não básica a entrar na base,  $\mathbf{x}_k$ , será determinada através de:

$$\frac{\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k}{\mathbf{y}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j}{\mathbf{y}_{rj}} : \mathbf{y}_{rj} < \mathbf{0} \right\} \quad (31)$$

Verifica-se que o critério acima garante que será encontrado um ponto extremo de melhor qualidade de (D).

Após a pivotagem os novos custos relativos serão os seguintes:

$$(\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j)' = (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) - \frac{\mathbf{y}_{rj}}{\mathbf{y}_{rk}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k) \quad (32)$$

Se  $\mathbf{y}_{rj} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k \leq \mathbf{0}$  então em (32) ter-se-á:

$$- \frac{\mathbf{y}_{rj}}{\mathbf{y}_{rk}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k) \leq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j)' \leq (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \leq \mathbf{0} \quad (\text{factibilidade do dual})$$

Se  $y_{rj} < 0$  de (32), obtém-se:  $\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \leq \frac{z_j - c_j}{y_{rj}}$

Multiplicando a desigualdade acima por  $y_{rj} < 0$ , obtém-se:

$$(z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k) \leq 0 \quad (33)$$

Então, de (32) e (33) conclui-se que:

$$(z_j - c_j)' \leq 0 \quad (34)$$

Desta forma verifica-se que (31) garante que será encontrado um ponto extremo de melhor qualidade de (D), ou seja, no quadro simplex seguinte, os coeficientes de custo relativo continuam sendo não positivos.

### Variação da função objetivo: $z(x) = c\bar{b}$

O novo valor da função objetivo será:  $z(x)' = z(x) - \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} (z_k - c_k)$ .

Como  $\bar{b}_r < 0$ ,  $y_{rk} < 0$  e  $z_k - c_k \leq 0 \Rightarrow -\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} (z_k - c_k) \geq 0 \Rightarrow$

$$z(x)' = z(x) - \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} (z_k - c_k) = z(x) + \Delta z(x) \Rightarrow z(x)' \geq z(x) \quad (35)$$

Desta forma, a função objetivo aumenta e torna-se mais factível para (P). Entretanto, o fato mais relevante é que a função objetivo de (D) aumenta, uma vez que,  $z(x)' = c'_B B^{-1} b = w'b = v(w') \geq z(x) = c_B B^{-1} b = w b = v(w)$  e, portanto, do ponto de vista de (D) foi encontrado um ponto extremo de melhor qualidade.

### Infactibilidade do problema primal

Se  $y_{rj} \geq 0$ ,  $\forall j \in R$  então inexistente variável não básica candidata a entrar na base. Neste caso a linha  $r$  tem a seguinte forma:

$$\sum_{j \in R} y_{rj} x_j = \bar{b}_r \quad (36)$$

Com  $y_{rj} \geq 0$  e  $\bar{b}_r < 0$ , bem como o fato de que  $x_j \geq 0$ , (36) é uma equação matemática impossível. Esta contradição é a garantia de que (P) é **infactível** e, assim, (D) é ilimitado. (P) infactível acarreta que (D) pode ser **ilimitado** ou **infactível**, desta forma, em função de (D) já ser factível no quadro atual, resta-se uma única possibilidade: (D) é **ilimitado**.

### Análise de otimalidade do problema primal (P)

	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	...	X <sub>n</sub>	X <sub>n+1</sub>	...	X <sub>n+m</sub>	RHS
Z	1	Z <sub>1</sub> - C <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub> - C <sub>2</sub>	...	Z <sub>n</sub> - C <sub>n</sub>	Z <sub>n+1</sub> - C <sub>n+1</sub>	...	Z <sub>n+m</sub> - C <sub>n+m</sub>	c <sub>B</sub> $\bar{\mathbf{b}}$
X <sub>B<sub>1</sub></sub>	0	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	...	y <sub>1n</sub>	y <sub>1,n+1</sub>	...	y <sub>1,n+m</sub>	$\bar{\mathbf{b}}_1$
X <sub>B<sub>2</sub></sub>	0	y <sub>21</sub>	y <sub>22</sub>	...	y <sub>2n</sub>	y <sub>2,n+1</sub>	...	y <sub>2,n+m</sub>	$\bar{\mathbf{b}}_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X <sub>B<sub>m</sub></sub>	0	y <sub>m1</sub>	y <sub>m2</sub>	...	y <sub>mn</sub>	y <sub>m,n+1</sub>	...	y <sub>m,n+m</sub>	$\bar{\mathbf{b}}_m$

↑  
Variáveis de Folga

### Quadro dual simplex

	Z	X <sub>1</sub>	...	X <sub>j</sub>	...	↓X <sub>k</sub>	...	X <sub>n</sub>	RHS
Z	1	Z <sub>1</sub> - C <sub>1</sub>	...	Z <sub>j</sub> - C <sub>j</sub>	...	Z <sub>k</sub> - C <sub>k</sub>	...	Z <sub>n</sub> - C <sub>n</sub>	c <sub>B</sub> $\bar{\mathbf{b}}$
X <sub>B<sub>1</sub></sub>	0	y <sub>11</sub>	...	y <sub>1j</sub>	...	y <sub>1k</sub>	...	y <sub>1n</sub>	$\bar{\mathbf{b}}_1$
X <sub>B<sub>2</sub></sub>	0	y <sub>21</sub>	...	y <sub>2j</sub>	...	y <sub>2k</sub>	...	y <sub>2n</sub>	$\bar{\mathbf{b}}_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
←X <sub>B<sub>r</sub></sub>	0	y <sub>r1</sub>	...	y <sub>rj</sub>	...	y <sub>rk</sub>	...	y <sub>rn</sub>	$\bar{\mathbf{b}}_r$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X <sub>B<sub>m</sub></sub>	0	y <sub>m1</sub>	...	y <sub>mj</sub>	...	y <sub>mk</sub>	...	y <sub>mn</sub>	$\bar{\mathbf{b}}_m$

### Algoritmo Dual Simplex

1. Encontrar uma base  $\mathbf{B}$  dual factível, ou seja,  $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j \leq 0, \forall j \in \mathbf{R}$ . Caso não exista uma base, entrar no processo da Fase I do método dual simplex.

2. Se  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0 \Rightarrow$  o ótimo do problema foi encontrado. Caso contrário, selecionar  $\mathbf{x}_{B_r}$ , a variável básica candidata a deixar a base, através de:

$$\bar{\mathbf{b}}_r = \text{Min} \{ \bar{\mathbf{b}}_i, i = 1, 2, \dots, m \}$$

3. Se  $\mathbf{y}_{rj} \geq 0, \forall j \in \mathbf{R} \Rightarrow$  (P) é infactível e (D), ilimitado. Caso contrário, selecionar a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  candidata a entrar na base através de:

$$\frac{\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k}{\mathbf{y}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j}{\mathbf{y}_{rj}}; \mathbf{y}_{rj} < 0, j \in \mathbf{R} \right\}$$

4. Pivotar o quadro, utilizando  $\mathbf{y}_{rk}$  como elemento pivô e voltar ao passo 2.

### O Método Dual Simplex em duas fases

O Algoritmo do Método Dual Simplex não pode ser empregado quando o quadro simplex do problema primal não satisfaz o critério de otimalidade. Neste caso, deve-se construir, de maneira artificial, um quadro que seja dual factível.

	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	...	X <sub>m</sub>	X <sub>m+1</sub>	...	X <sub>n</sub>	RHS
Z	1	0	0	...	0	Z <sub>m+1</sub> - C <sub>m+1</sub>	...	Z <sub>n</sub> - C <sub>n</sub>	c <sub>B</sub> $\bar{b}$
X <sub>1</sub>	0	1	0	...	0	y <sub>1,m+1</sub>	...	y <sub>1,n</sub>	$\bar{b}_1$
X <sub>2</sub>	0	0	1	...	0	y <sub>2,m+1</sub>	...	y <sub>2,n</sub>	$\bar{b}_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X <sub>m</sub>	0	0	0	...	1	y <sub>m,m+1</sub>	...	y <sub>m,n</sub>	$\bar{b}_m$

Como existem alguns  $z_j - c_j$  que são positivos cria-se uma base dual factível artificial adicionando ao quadro a restrição  $\sum_{j \in R} x_j \leq M$ , sendo  $M$  positivo e de elevado valor. O novo quadro apresenta-se da seguinte forma:

	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	...	X <sub>m</sub>	X <sub>m+1</sub>	...	X <sub>n</sub>	X <sub>0</sub>	RHS
Z	1	0	0	...	0	Z <sub>m+1</sub> - C <sub>m+1</sub>	...	Z <sub>n</sub> - C <sub>n</sub>	0	c <sub>B</sub> $\bar{b}$
X <sub>0</sub>	0	0	0	...	0	1	...	1	1	M
X <sub>1</sub>	0	1	0	...	0	y <sub>1,m+1</sub>	...	y <sub>1,n</sub>	1	$\bar{b}_1$
X <sub>2</sub>	0	0	1	...	0	y <sub>2,m+1</sub>	...	y <sub>2,n</sub>	0	$\bar{b}_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X <sub>m</sub>	0	0	0	...	1	y <sub>m,m+1</sub>	...	y <sub>m,n</sub>	0	$\bar{b}_m$

Nota-se que  $x_0$  é a variável de folga da nova restrição adicionada. A restrição anterior é constituída por todas as variáveis não básicas. A fim de se obter um quadro dual factível deve-se pivotar a restrição adicionada com a coluna  $k$  encontrada através de:

$$z_k - c_k = \text{Max} \{z_j - c_j, j \in R\} \quad (37)$$

Desta forma, escolhe-se para a pivotagem a variável não básica  $x_k$  que apresenta o maior custo relativo  $z_k - c_k$ . Assim,  $x_k$  entra e  $x_0$  sai da base.

Após a pivotagem o novo quadro é dual factível, ou seja,  $(z_j - c_j)' \leq 0$ , pois,  $(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - (z_k - c_k) \leq 0$ . Encontrado o quadro dual factível artificial o processo continua da forma padrão e termina com uma das seguintes conclusões:

1. **(D) é ilimitado**  $\Rightarrow$  **(P) é infactível;**
2. Existe um ótimo para **(P)** e **(D)**. Neste caso  $\bar{x}_0 > 0$ ;
3. O problema modificado apresenta uma solução  $\bar{x}_0 = 0$ . Desta forma, existem duas possibilidades:

i)  $z_0 - c_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$  é variável não básica, **(P) é ilimitado** e **(D) infactível;**

ii)  $z_0 - c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad$  **(P)** e **(D)** tem solução ótima.

**Observação 26** (Tipos de convergência) – Analisou-se as conclusões acima da seguinte forma:

1. O problema modificado pode ser **infactível** acarretando que **(D)** seja **ilimitado**. A inclusão da nova restrição não implica na caracterização do problema como sendo infactível;
2. Existe ótimo finito para **(P)** e **(D)**. O ótimo, neste caso, é um ponto extremo (ou SBF) na qual a nova restrição adicionada não deve estar ativa e desta forma,  $\bar{\mathbf{x}}_0 > \mathbf{0}$ ;
3. O problema modificado apresenta uma solução com  $\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ . Neste caso a nova restrição adicionada está ativa e pode ocorrer um dos seguintes casos:

i)  $\mathbf{z}_0 - \mathbf{c}_0 < \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_0$  é uma variável não básica. Sabe-se que:

$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} - \sum_{j \in \mathbf{R}} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{x}_j \quad (38)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{R}} \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_0 = \mathbf{M} \quad (39)$$

O valor específico escolhido para **M** é o que acarreta  $\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ . Desta forma, aumenta-se o valor de **M**,  $\mathbf{x}_0$  será diferente de zero e, de (38), é possível diminuir o valor de **z**. Assim, o valor atual de **z** está sendo retido pelo valor de **M**. Se **M** aumentar indefinidamente, então **z** diminui indefinidamente caracterizando **(P)** **ilimitado**.

ii)  $\mathbf{z}_0 - \mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$ . Neste caso, a solução atual é ótima apesar de que  $\mathbf{x}_0$  seja uma variável não básica, pois, de (38) pode-se verificar que se  $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$  então uma variação de **M** em (39) não modifica a solução ótima.

#### Algoritmo Dual Simplex com duas fases

Organizar a disposição do quadro na sequência do algoritmo de duas fases do Método Simplex com quadro único, seguindo o algoritmo anterior.

#### 4.4 Prova de Validade do Método dual Simplex

**Teorema 14** (Relaciona as condições de otimalidade do primal com um ponto extremo do dual). Sejam os problemas de programação linear abaixo:

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \text{Min } \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{m} \text{ subespaços} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{n} \text{ subespaços} \end{cases} \text{ em } \mathbf{E}^n \quad \text{e} \quad (\mathbf{D}) \begin{cases} \text{Max } \mathbf{v}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\mathbf{b} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{n} \text{ subespaços} \\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{m} \text{ subespaços} \end{cases} \text{ em } \mathbf{E}^m.$$

Onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;  $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{b}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ .

Seja  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , invertível, uma base de **(P)**, não necessariamente factível (ou seja, não necessariamente  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ) e  $\mathbf{R} = \{\text{conjunto de índices das variáveis não básicas}\}$ . Então

tem-se que  $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j \leq \mathbf{0}, \forall j \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$  é uma SBF do problema dual (D). Em outras palavras,  $\mathbf{w}$  é um ponto extremo do problema dual (D).

Prova:

i) Provar-se-á que  $\mathbf{w}$  é factível do problema dual (D).

As restrições do problema primal são transformadas da seguinte forma:

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{Ix}_I = \mathbf{b} \text{ com } \mathbf{x}, \mathbf{x}_I \geq \mathbf{0}$$

onde aparecem  $(\mathbf{n} + \mathbf{m})$  variáveis e  $\mathbf{x}_I$  é o vetor de tamanho  $\mathbf{m}$  que representa as variáveis de folga (ou excesso) adicionadas. Seja  $\mathbf{B}$  uma submatriz da matriz  $\mathbf{A}' = [\mathbf{A} \ -\mathbf{I}]$ . Nesse contexto, encontrou-se os coeficientes de custo relativo de todas as variáveis do problema que se encontram organizados em dois grupos.

Como no ponto identificado pela matriz  $\mathbf{B}$  se cumpre o critério de otimalidade então todos esses coeficientes devem ser menores ou iguais à zero.

Os coeficientes de custo relativo das  $\mathbf{n}$  variáveis originais do problema primal (P) são encontrados da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{c}}_A = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c} = \mathbf{wA} - \mathbf{c} \leq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{wA} \leq \mathbf{c} \quad (40)$$

E das  $\mathbf{m}$  variáveis de folga do problema primal (P) serão:

$$\bar{\mathbf{c}}_I = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} (-\mathbf{I}) - \mathbf{0} = -\mathbf{w} \leq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (41)$$

As equações (40) e (41) provam que  $\mathbf{w}$  é factível no problema dual (D).

ii) Provar-se-á que em  $\mathbf{w}$  no problema dual (D) existem  $\mathbf{m}$  hiperplanos ativos linearmente independentes.

No ponto  $\mathbf{x}$  identificado pela base  $\mathbf{B}$  existem  $\mathbf{n}$  hiperplanos ativos linearmente independentes. Assim, foi suposto que nesse ponto  $\mathbf{x}$  existam  $\mathbf{p}$  hiperplanos ativos linearmente independentes relacionados com  $\mathbf{p}$  subespaços do conjunto  $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ . Portanto, devem existir  $(\mathbf{n} - \mathbf{p})$  hiperplanos ativos linearmente independentes do conjunto  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . Nesse contexto o problema primal (P) pode ser separado da seguinte forma:

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \text{Min } \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}_p \mathbf{x} = \mathbf{b}_p \Rightarrow \mathbf{p} \text{ hiperplanos ativos} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{m}-\mathbf{p}} \mathbf{x} > \mathbf{b}_{\mathbf{m}-\mathbf{p}} \Rightarrow (\mathbf{m} - \mathbf{p}) \text{ subespaços livres} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{n}-\mathbf{p}} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{n} - \mathbf{p}) \text{ hiperplanos ativos} \\ \mathbf{x}_p > \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p} \text{ subespaços livres} \end{cases}$$

Pela propriedade de dualidade sabe-se que se uma restrição de um problema não se encontra ativa, então a variável dual correspondente no outro problema deve ser igual à zero.

Também sabe-se pela mesma propriedade que se uma variável de um problema é diferente de zero, então a restrição correspondente no outro problema deve estar ativa.

Das conclusões anteriores pode-se afirmar que devido a existir  $(m - p)$  restrições não ativas no problema primal (P), então  $(m - p)$  variáveis duais relacionadas com essas restrições e agrupadas em  $w_{m-p}$  devem ser iguais a zero e, desta forma, existirão então  $(m - p)$  variáveis com valores iguais à zero no problema dual (D), isto é,  $w_{m-p} = 0$ . Adicionalmente, pode-se afirmar que por existir  $p$  variáveis com valores positivos no problema primal (P),  $x_p > 0$ , então as restrições correspondentes no problema dual e relacionadas com essas variáveis no problema dual (D) devem estar ativas, isto é, existem  $p$  restrições normais do problema dual que se encontram ativas, isto é,  $wA_p = c_p$ . Portanto, o número de hiperplanos ativos linearmente independentes no ponto  $w$  do problema é igual a  $(m - p) + p = m$ . Desta forma, prova-se que no ponto  $w$  do problema dual existem  $m$  hiperplanos ativos linearmente independentes. Como já foi demonstrado que  $w$  é factível, então foi provado que  $w$  é um ponto extremo do problema dual (D).

No contexto anterior o problema dual (D) assume a seguinte estrutura:

$$(D) \begin{cases} \text{Max } v(w) = wb \\ \text{s. a} \\ wA_{n-p} < c_{n-p} \Rightarrow (n - p) \text{ subespaços livres} \\ wA_p = c_p \Rightarrow p \text{ hiperplanos ativos} \\ w_p > 0 \Rightarrow p \text{ subespaços livres} \\ w_{m-p} = 0 \Rightarrow (m - p) \text{ hiperplanos ativos} \end{cases}$$

Em que  $A_p$  contém as  $p$  primeiras colunas e  $A_{n-p}$ , as colunas restantes da matriz  $A$ .

**Corolário 8** – Se  $x$ , com  $x_N = 0$  e  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ , é um ponto extremo (SBF) de (P) então  $w = c_B B^{-1}$  satisfaz o critério de otimalidade de (D).

**Prova:** Se  $w = c_B B^{-1}$  é um ponto extremo de (D) e se  $x_B = B^{-1}b \geq 0$  com  $x_N = 0$  é SBF de (P)  $\Rightarrow w$  é ótimo de (D) e  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$  é ótimo de (P) e assim, temos  $v = wb = c_B B^{-1}b = c_B \bar{b} = z$ .

#### 4.5 Exemplos Ilustrativos

**Exemplo 7:-** Solucionar o PL: 
$$\begin{cases} \text{Min } z = x_1 + 18x_2 + 8x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Acrescentando as variáveis de folga, obtém-se:



$$\begin{cases} \text{Min } z = x_1 + 18x_2 + 8x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

Assim  $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5] = \mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{c}_N = [1 \ 18 \ 8]$ ,  $\mathbf{c}_B = [0 \ 0]$  e  $\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N = [-1 \ -18 \ -8] \leq \mathbf{0}$  (dual factível). Desta forma, apresentamos o quadro inicial:

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	RHS
Z	1	-1	-18	-8	0	0	0
X4	0	3	-1	-2	1	0	1
X5	0	-2	-3	1	0	1	1

1ª iteração –

$$\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N = [-1 \ -18 \ -8] \leq \mathbf{0} \text{ (dual factível) e } \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \text{ (primal factível)}$$

$\Rightarrow$  Solução ótima  $\therefore z = 0, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , e  $x_4 = x_5 = 1$ .

**Exemplo 8:-** Solucionar o PL: 
$$\begin{cases} \text{Min } z = 5x_1 + 11x_2 \\ \text{sujeito a} \\ 9x_1 + 3x_2 \leq 53 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

Acrescentando as variáveis de folga, obtém-se:

$$\begin{cases} \text{Min } z = 5x_1 + 11x_2 \\ \text{sujeito a} \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 53 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_5 = -4 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}, \text{ e desta forma, } \mathbf{B} = [\mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5] = \mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{N} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] =$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B = [0 \ 0 \ 0], \mathbf{c}_N = [5 \ 11], \bar{\mathbf{c}}_N = [-5 \ -11] \text{ (dual factível)}, \mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0 \ 0 \ 0], \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 53 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

e, finalmente,  $z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = 0$

1. Montagem do quadro

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	RHS
Z	1	-5	-11	0	0	0	0
X3	0	9	3	1	0	0	53
X4	0	-1	2	0	1	0	5
X5	0	-2	-3	0	0	1	-4

1ª iteração –

$$\bar{\mathbf{b}}_r = \text{Min } \{\mathbf{b}_i, i = 1, 2, 3\} = -4 \rightarrow \text{seja } x_5 \text{ sai da base } \therefore r = 3$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{3k}} = \text{Min } \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{3j}}; y_{3j} < 0, j = 1, 2, 3 \right\} = \text{Min } \left\{ \frac{-5}{-2}; \frac{-11}{-3} \right\} = \frac{5}{2} \therefore k = 1, x_1 \text{ entra na base.}$$

	Z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	RHS
Z	1	0	$-\frac{7}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	10
x <sub>3</sub>	0	0	$\frac{21}{2}$	1	0	$-\frac{9}{2}$	35
x <sub>4</sub>	0	0	$\frac{7}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	7
x <sub>1</sub>	0	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	2

2ª iteração –

$$\bar{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = \left[-\frac{7}{2} \quad -\frac{5}{2}\right] \leq 0 \text{ (dual factível)} \text{ e } \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ (primal factível)}$$

⇒ Solução ótima ∴ z = 10, x<sub>1</sub> = 2, x<sub>2</sub> = x<sub>5</sub> = 0, x<sub>3</sub> = 35 e x<sub>4</sub> = 7

Exemplo 9:- Solucionar o problema de PL

$$\begin{cases} \text{Min } z = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Acrescentando as variáveis de folga, obtém-se:

$$\begin{cases} \text{Min } z = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = -2 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_6 = -4 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{cases} \text{ e teremos, se } B = [a_4 \ a_5 \ a_6] = I = B^{-1}, N = [a_1$$

$$a_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, c_B = [0 \ 0 \ 0], c_N = [-2 \ 1 \ -1], \bar{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = [2 \ -1 \ 1].$$

Como existe elemento de  $\bar{c}_N$  que é positivo então o problema apresentado não é factível dual e, desta forma, adicionaremos uma nova restrição:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq M, \text{ ou seja, } x_1 + x_2 + x_3 + x_0 = M.$$

Para x<sub>0</sub> sair da base, x<sub>1</sub> entrará no seu lugar.

1ª iteração –

	Z	↓x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>0</sub>	RHS
Z	1	2	-1	1	0	0	0	0	0
←x <sub>0</sub>	0	1	1	1	0	0	0	1	M
x <sub>4</sub>	0	2	1	-2	1	0	0	0	8
x <sub>5</sub>	0	-4	1	-2	0	1	0	0	-2
x <sub>6</sub>	0	-2	-3	1	0	0	1	0	-4

2ª iteração –

	Z	X1	X2	↓X3	X4	X5	X6	X0	RHS
Z	1	0	-3	-1	0	0	0	-2	-2M
X1	0	1	1	1	0	0	0	1	M
←X4	0	0	-1	-4	1	0	0	-2	8 - 2M
X5	0	0	5	2	0	1	0	4	-2 + 4M
X6	0	0	-1	3	0	0	1	2	-4 + 2M

$$\bar{b}_r = \text{Min} \{b_i, i = 1, 2\} = 8 - 2M \text{ (x}_4 \text{ sai da base)} \rightarrow r = 2$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{2k}} = \text{Min} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{2j}}; y_{2j} < 0, j \in R \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{-3}{-1}, \frac{-1}{-4}, \frac{-2}{-2} \right\} = \frac{1}{4} \therefore k = 3, x_3 \text{ entra na base.}$$

3ª iteração –

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X0	RHS
Z	1	0	$-\frac{11}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-2 - \frac{3}{2}M$
X1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$2 + \frac{M}{2}$
X3	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-2 + \frac{M}{2}$
X5	0	0	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3	$2 + 3M$
X6	0	0	$-\frac{7}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$2 + \frac{M}{2}$

$z_j - c_j \leq 0$  e  $M \geq 4$ , considerando  $M = 4$ , obtém-se a solução:

$$z = -8, x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 14, x_6 = 4 \text{ e } x_0 = 0$$

**Exemplo 10:-** Encontrar a solução do PL

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeito a} \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{array} \right. , \text{ através do}$$

Método Dual Simplex.

Acrescentando as variáveis de folga, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeito a} \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_7 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_8 = 5 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 8 \end{array} \right.$$

Consideraremos a base  $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5 \ \mathbf{a}_6 \ \mathbf{a}_7 \ \mathbf{a}_8] = \mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ ,  $\mathbf{c}_B = [0 \ 0 \ 0]$ ,  $\mathbf{c}_N = [-3 \ -2 \ 4]$  e  $\bar{\mathbf{c}}_N = -\mathbf{c}_N = [3 \ 2 \ -4]$ . Como existe elemento de  $\bar{\mathbf{c}}_N$  que é positivo o problema apresentado não é factível dual e, desta forma, nós então adicionaremos uma nova restrição:  $x_1 + x_2 + x_3 \leq M$ , ou seja,  $x_1 + x_2 + x_3 + x_0 = M$ .

Para  $x_0$  sair da base,  $x_1$  entrará no seu lugar.

1ª iteração –

	Z	↓x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>0</sub>	RHS
Z	1	3	2	-4	0	0	0	0	0	0	0
←x <sub>0</sub>	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	M
x <sub>4</sub>	0	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	3
x <sub>5</sub>	0	2	1	2	0	1	0	0	0	0	4
x <sub>6</sub>	0	1	1	2	0	0	1	0	0	0	2
x <sub>7</sub>	0	-1	-1	-2	0	0	0	1	0	0	1
x <sub>8</sub>	0	-1	-1	3	0	0	0	0	1	0	5

2ª iteração –

	Z	x <sub>1</sub>	↓x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>0</sub>	RHS
Z	1	0	-1	-7	0	0	0	0	0	-3	-3M
x <sub>1</sub>	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	M
x <sub>4</sub>	0	0	2	0	1	0	0	0	0	1	3 + M
←x <sub>5</sub>	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	-2	4 - 2M
x <sub>6</sub>	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	2 - M
x <sub>7</sub>	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	1	1 + M
x <sub>8</sub>	0	0	0	4	0	0	0	0	1	1	5 + M

$$\bar{b}_r = \text{Min} \{b_i, i = 1, 2\} = 4 - 2M \text{ (x}_5 \text{ sai da base)} \rightarrow r = 3$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{3k}} = \text{Min} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{3j}}; y_{3j} < 0, j \in R \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{-1}{-1}; \frac{-3}{-2} \right\} = 1 \therefore k = 2, x_2 \text{ entra na base.}$$

3ª iteração –

	Z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	↓x <sub>0</sub>	RHS
Z	1	0	0	-7	0	-1	0	0	0	-1	-4 - M
x <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	1	0	0	0	-1	4 - M
←x <sub>4</sub>	0	0	0	0	1	2	0	0	0	-3	11 - 3M
x <sub>2</sub>	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	2	-4 + 2M
x <sub>6</sub>	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	2 - M
x <sub>7</sub>	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	1	1 + M
x <sub>8</sub>	0	0	0	4	0	0	0	0	1	1	5 + M

$$\bar{b}_r = \text{Min} \{b_i, i = 1, 2\} = 11 - 3M \text{ (x}_4 \text{ sai da base)} \rightarrow r = 2$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{2k}} = \text{Min} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{2j}}; y_{2j} < 0, j \in R \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{-1}{-3} \right\} = \frac{1}{3} \therefore k = 0, x_0 \text{ retorna à base.}$$

4ª iteração –

	Z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	↓x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>0</sub>	RHS
Z	1	0	0	-7	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{23}{3}$
x <sub>1</sub>	0	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
x <sub>0</sub>	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{11}{3}+M$
x <sub>2</sub>	0	0	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{10}{3}$
←x <sub>6</sub>	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	0	$-\frac{5}{3}$
x <sub>7</sub>	0	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	0	0	$\frac{14}{3}$
x <sub>8</sub>	0	0	0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$\frac{26}{3}$

$$\bar{b}_r = \text{Min} \{b_i, i = 1, 2\} = -\frac{5}{3} \text{ (x}_6 \text{ sai da base)} \quad \rightarrow \quad r = 4$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{4k}} = \text{Min} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{4j}}; y_{4j} < 0, j \in R \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{-1}{-3} \right\} = 1 \therefore k = 4, x_4 \text{ retorna à base.}$$

5ª iteração –

	Z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	x <sub>0</sub>	RHS
Z	1	0	0	-8	0	-1	-1	0	0	0	-6
x <sub>1</sub>	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	2
x <sub>0</sub>	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	-2+M
x <sub>2</sub>	0	0	1	3	0	-1	2	0	0	0	0
x <sub>4</sub>	0	0	0	-3	1	2	-3	0	0	0	5
x <sub>7</sub>	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	3
x <sub>8</sub>	0	0	0	5	0	0	1	0	1	0	7

Como  $z_j - c_j \leq 0$  e  $M \geq 2 \Rightarrow z = -6, x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = x_6 = 0, x_7 = 3, x_8 = 7$  e  $x_0 = 0$  (para  $M = 2$ ). No caso de  $M > 2$ , teremos  $x_0 > 0$ .

## 5 O Método Primal Simplex Canalizado

### 5.1 Introdução

Até o presente momento temos resolvido problemas de minimização de um PL onde  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . Conforme a modelagem matemática efetuada num problema de PL proposto, pode-se ter uma situação onde  $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$ . Neste caso deve-se encontrar uma maneira mais eficiente para a sua solução.

Desta forma, neste capítulo será apresentado o Método de Fase Única do Primal Simplex Canalizado e, em situações onde existe a dificuldade em estabelecer uma base factível, o Método de Duas Fases do Primal Simplex Canalizado. Ao final do mesmo serão apresentados alguns exemplos ilustrativos.

Sendo posto  $(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathbf{m}$ ;  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}$ ;  $\mathbf{c}, \mathbf{l}, \mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ . Seja o PL:

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{cases} \quad (42)$$

A maneira mais simples de resolver o problema acima seria criar variáveis de folga, ou seja,  $\mathbf{x} + \mathbf{x}_u = \mathbf{u}$  ou  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_l = \mathbf{l}$ .

Entretanto, o número de restrições mudaria de  $\mathbf{m}$  para  $\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  e o número de variáveis, de  $\mathbf{n}$  a  $3\mathbf{n}$ .

Existe a possibilidade de se efetuar a substituição  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{l}$ , ou seja,  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{l}$ . Desta forma, obtém-se:

$$\begin{cases} \text{Min } z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\mathbf{l} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{l} = \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \leq \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{u} - \mathbf{l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Min } z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\mathbf{l} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{l} \\ \mathbf{0} \leq \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{u} - \mathbf{l} \end{cases} \quad (43)$$

O tamanho do problema é diminuído ao resolver (43), porém, o mesmo continua complexo.

Desta forma, a maneira mais eficiente de resolver (42) é levar em conta as restrições canalizadas somente na forma implícita, isto é, o tamanho da base é determinado pelo posto de  $\mathbf{A}$ . Assim, as restrições sobre as variáveis  $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$  são consideradas na forma implícita, de modo parecido como são levadas em conta as restrições de não negatividade no simplex tradicional.

## 5.2 O Método de Fase Única do Primal Simplex Canalizado

Seja  $\bar{x}$  uma SBF de (42) com base  $\mathbf{B}$  e com a informação de quais variáveis não básicas estão nos limites inferior e superior. Então:

Sejam  $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2]$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{N}_1 \in \mathbb{R}^{m \times N_1}$ ,  $\mathbf{N}_2 \in \mathbb{R}^{m \times N_2}$ ,  $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x}_{N_1} \in \mathbb{R}^{N_1}$ ,  $\mathbf{x}_{N_2} \in \mathbb{R}^{N_2}$ ,  $N_1 + N_2 = n - m$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_{N_1} \\ \mathbf{x}_{N_2} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B \ \mathbf{c}_{N_1} \ \mathbf{c}_{N_2}]$  bem como  $\mathbf{x}_{N_1}$  (as variáveis que estão em seu limite inferior) e  $\mathbf{x}_{N_2}$  (as variáveis que estão em seu limite superior). Do conjunto de restrições principais do problema tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Bx}_B + \mathbf{N}_1\mathbf{x}_{N_1} + \mathbf{N}_2\mathbf{x}_{N_2} = \mathbf{b} & \quad \Rightarrow \\ \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{x}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{x}_{N_2} & \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_{N_1}\mathbf{x}_{N_1} + \mathbf{c}_{N_2}\mathbf{x}_{N_2} \quad (45)$$

Substituindo (44) em (45) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = \mathbf{c}_B[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{x}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{x}_{N_2}] + \mathbf{c}_{N_1}\mathbf{x}_{N_1} + \mathbf{c}_{N_2}\mathbf{x}_{N_2} & \quad \Rightarrow \\ \mathbf{z} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + [\mathbf{c}_{N_1} - \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1]\mathbf{x}_{N_1} + [\mathbf{c}_{N_2} - \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2]\mathbf{x}_{N_2} & \end{aligned} \quad (46)$$

As relações (44) e (46) proporcionam a construção do quadro simplex:

	$\mathbf{z}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_{N_1}$	$\mathbf{x}_{N_2}$	RHS
$\mathbf{z}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\bar{\mathbf{c}}_{N_1}$	$\bar{\mathbf{c}}_{N_2}$	$\bar{\mathbf{z}}$
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2$	$\bar{\mathbf{b}}$

Onde  $\bar{\mathbf{c}}_{N_1} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 - \mathbf{c}_{N_1}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}_{N_2} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2 - \mathbf{c}_{N_2}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{u}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{u}_{N_2}$  e

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{c}}_{N_1}\mathbf{u}_{N_1} - \bar{\mathbf{c}}_{N_2}\mathbf{u}_{N_2}$$

De (46) observa-se que a função objetivo assume a seguinte forma:

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in \mathbf{R}_1} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j)\mathbf{x}_j - \sum_{j \in \mathbf{R}_2} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j)\mathbf{x}_j \quad (47)$$

Onde  $\mathbf{R}_1 = \{\text{índices das variáveis não básicas que estão em seu limite inferior}\}$  e  $\mathbf{R}_2 = \{\text{índices das variáveis não básicas que estão em seu limite superior}\}$ , ou seja,  $\mathbf{R}_1 = \{1, 2, \dots, N_1\}$  e  $\mathbf{R}_2 = \{1, 2, \dots, N_2\}$ .

Para melhorar o atual valor da função objetivo, no caso de um problema de minimização, é necessário que:

- i) exista algum  $z_j - c_j > 0$  para  $j \in R_1$ , ou
- ii) exista algum  $z_j - c_j < 0$  para  $j \in R_2$ .

Desta forma, é possível melhorar o valor atual de  $z$ , aumentando o valor atual de uma variável não básica que se encontra em seu limite inferior com  $z_j - c_j > 0$  ou diminuindo o valor atual de uma variável não básica que se encontra em seu limite superior com  $z_j - c_j < 0$ .

$$\text{Portanto, se } \begin{cases} z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R_1 \text{ e} \\ z_j - c_j \geq 0, \forall j \in R_2 \end{cases} \quad (48)$$

é impossível melhorar  $z$  e isto identifica uma Solução Ótima. Se a SBF atual não é ótima, então selecionamos uma variável não básica para entrar na base. O critério usual é o de selecionar  $x_k$  determinada pela relação:

$$z_k - c_k = \text{Max} \{z_j - c_j; j \in R_1; -(z_j - c_j); j \in R_2\}. \quad (49)$$

Definida a variável candidata a entrar na base,  $x_k$  pode ser:

Uma variável não básica que está em seu limite inferior ( $L_I$ ) ou uma variável não básica que está em seu limite superior ( $L_S$ ).

**1) Uma variável não básica em seu limite inferior ( $L_I$ ) é candidata a entrar na base.**

$$\text{Seja } x_k \text{ essa variável tal que } k \in R_1 \quad \Rightarrow \quad z_k - c_k > 0.$$

Ao mudar o valor de  $x_k$ , pode ocorrer primeiro que:

- i) Uma variável básica atinge o seu limite superior ( $L_S$ );
- ii) Uma variável básica atinge o seu limite inferior ( $L_I$ );
- iii)  $x_k$  atinge o seu limite superior ( $L_S$ ).

Seja  $\Delta_k$  o aumento máximo possível para  $x_k$ , então  $x_k = l_k + \Delta_k$ ,  $\Delta_k \geq 0$ .



De (44) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{x}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{x}_{N_2} \Rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_k + \Delta_k \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{N_1} \end{bmatrix} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{u}_{N_2} \\
 &\Rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_k \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{N_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \Delta_k \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{u}_{N_2} \\
 &\Rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1[\mathbf{I}_{N_1} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \Delta_k \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}] - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{u}_{N_2} \\
 &\Rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{I}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \Delta_k \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{u}_{N_2} \\
 &\Rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{I}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{u}_{N_2} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k\Delta_k
 \end{aligned}$$

Sendo  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\mathbf{I}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{u}_{N_2}$ , obtém-se:

$$\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_k\Delta_k \quad (50)$$

De (47) se escreve  $\mathbf{z} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in R_1} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{l}_j - \sum_{j \in R_2} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{u}_j - (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k) \Delta_k$ .

Fazendo  $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in R_1} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{l}_j - \sum_{j \in R_2} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{u}_j$  ter-se-á:

$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} - (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k) \Delta_k \quad (51)$$

As relações (50) e (51) representam os novos valores das variáveis básicas e da função objetivo, para uma variação  $\Delta_k$  da variável não básica  $\mathbf{x}_k$  que está em seu  $L_1$ .

As variáveis básicas  $\mathbf{x}_{B_i}$  mudam da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k \quad (52)$$

Serão analisados os três casos que podem ocorrer com os valores das variáveis básicas quando  $\mathbf{x}_k$  aumenta de valor.

1.1 A variável básica pode atingir o seu limite inferior:  $\mathbf{y}_{ik} > \mathbf{0}$ .

De (52) uma variável básica  $\mathbf{x}_{B_i}$  pode atingir o seu limite inferior se  $\mathbf{y}_{ik} > \mathbf{0}$ . Neste caso o valor de  $\Delta_k$  que leva  $\mathbf{x}_{B_i}$  ao seu limite inferior é determinado por:

$$\mathbf{l}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta_k = \frac{\bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{l}_{B_i}}{\mathbf{y}_{ik}} \\ \mathbf{y}_{ik} > \mathbf{0} \end{cases} \quad (53)$$

1.2 A variável básica pode atingir o seu limite superior:  $\mathbf{y}_{ik} < \mathbf{0}$ .

$$\mathbf{u}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta_k = \frac{\mathbf{u}_{B_i} - \bar{\mathbf{b}}_i}{-\mathbf{y}_{ik}} \\ \mathbf{y}_{ik} < \mathbf{0} \end{cases} \quad (54)$$

1.3 A própria variável não básica  $\mathbf{x}_k$  pode atingir o seu limite superior:

$$\Delta_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{l}_k \quad (55)$$

Assim, a variação máxima de  $\Delta_k$  para  $\mathbf{x}_k$  é obtida da seguinte relação:

$$\Delta_k = \text{Min}_{i=1, 2, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{l}_{B_i}}{\mathbf{y}_{ik}}, \mathbf{y}_{ik} > \mathbf{0}; \frac{\mathbf{u}_{B_i} - \bar{\mathbf{b}}_i}{-\mathbf{y}_{ik}}, \mathbf{y}_{ik} < \mathbf{0}; \mathbf{u}_k - \mathbf{l}_k; \infty \right\} \quad (56)$$

**Observação 27:-** Se  $\Delta_k \rightarrow \infty$  então o problema é **ilimitado**. Se  $\Delta_k$  é finito, então de (56) existem três alternativas possíveis:

a) A variável básica atinge o seu  $L_I \rightarrow$  existe mudança de base.

Seja  $\mathbf{r}$  a linha pivô da variável básica selecionada para deixar a base. A linha pivô do quadro simplex é pivotada com  $\mathbf{y}_{rk}$  como elemento pivô. Contudo, a coluna independente é atualizada separadamente empregando (50) e (51), exceto para  $\mathbf{x}_{B_r}$ , onde  $\Delta_k$  é obtido de (53).

A variável  $\mathbf{x}_{B_r}$  sai da base e se transforma em não básica em seu  $L_I$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_1$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, \quad \mathbf{i} \neq \mathbf{r} \\ \mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{l}_k + \Delta_k (\leftarrow \mathbf{x}_k) \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} - (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (57)$$

b) A variável básica atinge o seu  $L_S \rightarrow$  existe mudança de base.

Seja  $\mathbf{r}$  a linha pivô da variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  selecionada para deixar a base. O quadro simplex é pivotado com  $\mathbf{y}_{rk} < \mathbf{0}$  como elemento pivô. Contudo, a coluna independente é atualizada separadamente empregando (50) e (51), e  $\Delta_k$  é obtido de (54). A variável  $\mathbf{x}_{B_r}$  deixa a base e se transforma em não básica em seu  $L_S$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_2$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, \quad \mathbf{i} \neq \mathbf{r} \\ \mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{l}_k + \Delta_k (\leftarrow \mathbf{x}_k) \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} - (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (58)$$

c) A própria variável não básica  $x_k$  atinge o seu  $L_S$ : não existe mudança de base. A base não muda e não existe pivotagem. Contudo, a coluna independente deve ser atualizada usando (50) e (51):

$$\begin{cases} x_{B_i} = \bar{b}_i - y_{ik}\Delta_k, \forall i \\ x_k = u_k = l_k + \Delta_k \\ z = \bar{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \quad (59)$$

**2) Uma variável não básica em seu limite superior ( $L_S$ ) é candidata a entrar na base.**

Seja  $x_k$  essa variável tal que  $k \in R_2 \Rightarrow z_k - c_k < 0$ .

Ao mudar o valor de  $x_k$ , pode ocorrer o seguinte:

- i) Uma variável básica atinge o seu limite superior ( $L_S$ );
- ii) Uma variável básica atinge o seu limite inferior ( $L_I$ );
- iii)  $x_k$  atinge o seu limite inferior ( $L_I$ ).

Seja  $\Delta_k \geq 0$ , a máxima redução possível de  $x_k$ , a partir de seu  $L_S$  então  $x_k = u_k - \Delta_k$ .

De (44) obtém-se:

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N_1x_{N_1} - B^{-1}N_2x_{N_2} && \Rightarrow \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N_1l_{N_1} - B^{-1}N_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k - \Delta_k \\ \vdots \\ u_{N_1} \end{bmatrix} && \Rightarrow \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N_1l_{N_1} - B^{-1}N_2 \left[ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_{N_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right] && \Rightarrow \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N_1l_{N_1} - B^{-1}N_2 \left[ u_{N_2} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right] && \Rightarrow \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N_1l_{N_1} - B^{-1}N_2u_{N_2} + B^{-1}N_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} && \Rightarrow \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N_1l_{N_1} - B^{-1}N_2u_{N_2} + B^{-1}a_k\Delta_k \end{aligned}$$

Sendo  $\bar{b} = B^{-1}b - B^{-1}N_1l_{N_1} - B^{-1}N_2u_{N_2}$ , obtém-se:

$$x_B = \bar{b} + y_k\Delta_k \quad (60)$$

De (45) escreve-se  $\mathbf{z} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in R_1} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{l}_j - \sum_{j \in R_2} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{u}_j + (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k) \Delta_k$ .  
Fazendo  $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in R_1} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{l}_j - \sum_{j \in R_2} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{u}_j$  ter-se-á:

$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k) \Delta_k \quad (61)$$

As relações (60) e (61) representam os novos valores das variáveis básicas e da função objetivo, para uma variação de  $\Delta_k$  da variável não básica  $\mathbf{x}_k$  que está em seu  $L_S$ .

De (60) uma variável básica  $\mathbf{x}_{B_i}$  assume a seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i + y_{ik} \Delta_k \quad (62)$$

Serão analisados os três casos que podem ocorrer com os valores das variáveis básicas quando  $\mathbf{x}_k$  diminui de valor.

2.1 A variável básica pode atingir o seu limite superior:  $y_{ik} > 0$ .

De (62) obtém-se que:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i + y_{ik} \Delta_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta_k = \frac{u_{B_i} - \bar{\mathbf{b}}_i}{y_{ik}} \\ y_{ik} > 0 \end{cases} \quad (63)$$

2.2 A variável básica pode atingir o seu limite inferior:  $y_{ik} < 0$ .

De (62) uma variável básica  $\mathbf{x}_{B_i}$  pode atingir o seu limite inferior se  $y_{ik} < 0$ . Neste caso o valor de  $\Delta_k$  que leva  $\mathbf{x}_{B_i}$  ao seu limite inferior é determinado por:

$$\mathbf{l}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i + y_{ik} \Delta_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta_k = \frac{\bar{\mathbf{b}}_i - l_{B_i}}{-y_{ik}} \\ y_{ik} < 0 \end{cases} \quad (64)$$

2.3 A própria variável não básica  $\mathbf{x}_k$  pode atingir o seu limite inferior:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{l}_k \quad (65)$$

Assim, a variação máxima de  $\Delta_k$  permitida para  $\mathbf{x}_k$  é obtida da seguinte relação:

$$\Delta_k = \text{Min}_{i=1, 2, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{b}}_i - l_{B_i}}{-y_{ik}}, y_{ik} < 0; \frac{u_{B_i} - \bar{\mathbf{b}}_i}{y_{ik}}, y_{ik} > 0; \mathbf{u}_k - \mathbf{l}_k; \infty \right\} \quad (66)$$

**Observação 28:-** Se  $\Delta_k \rightarrow \infty$  então o problema é **ilimitado**. Se  $\Delta_k$  é finito, então de (66) existem três alternativas possíveis:

a) A variável básica atinge o seu  $L_I \rightarrow$  existe mudança de base.

Seja  $r$  a linha pivô da variável básica selecionada para deixar a base. O quadro simplex é pivotado com  $y_{rk} < 0$  como elemento pivô. Porém, a coluna independente não é pivotada da maneira tradicional e é atualizada usando (60) e (61):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i + y_{ik}\Delta_k, & i \neq r \\ \mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{u}_k - \Delta_k \quad (\leftarrow \mathbf{x}_k) \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (67)$$

b) A variável básica atinge o seu  $L_s \rightarrow$  existe mudança de base.

Seja  $r$  a linha pivô. O quadro simplex é pivotado com  $y_{rk} > 0$  como elemento pivô. Porém, a coluna independente é atualizada empregando (60) e (61):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i + y_{ik}\Delta_k, & i \neq r \\ \mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{u}_k - \Delta_k \quad (\leftarrow \mathbf{x}_k) \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (68)$$

c) A própria variável não básica  $\mathbf{x}_k$  atinge o seu  $L_l$ : não existe mudança de base. Desta forma não existe pivotagem. A coluna independente é atualizada usando (60) e (61):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i + y_{ik}\Delta_k, & \forall i \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{l}_k = \mathbf{u}_k - \Delta_k \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (69)$$

### Algoritmo Primal Simplex Canalizado

Passo inicial:

Encontrar uma SBF inicial (usando variáveis artificiais, se necessário). Obter:

$$\bar{\mathbf{c}}_{N_1} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_1 - \mathbf{c}_{N_1}, \quad \bar{\mathbf{c}}_{N_2} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_2 - \mathbf{c}_{N_2}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_1 \mathbf{l}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_2 \mathbf{u}_{N_2} \text{ bem como}$$

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \bar{\mathbf{c}}_{N_1} \mathbf{l}_{N_1} - \bar{\mathbf{c}}_{N_2} \mathbf{u}_{N_2}.$$

Se não existe uma SBF entrar num processo de fase I do primal simplex canalizado (PSC). O quadro inicial tem a seguinte forma:

	$\mathbf{z}$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_{N_1}$	$\mathbf{x}_{N_2}$	RHS
$\mathbf{z}$	1	0	$\bar{\mathbf{c}}_{N_1}$	$\bar{\mathbf{c}}_{N_2}$	$\bar{\mathbf{z}}$
$\mathbf{x}_B$	0	I	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_1$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_2$	$\bar{\mathbf{b}}$

Passo principal:

1. Verificar a otimalidade. Se  $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R_1$  e  $z_j - c_j \geq 0, \forall j \in R_2$  então a solução ótima foi encontrada. Caso contrário, selecionar a variável não básica  $x_k$  como candidata a entrar na base usando (70). Seja  $x_k$  esta variável.

Se  $k \in R_1 \rightarrow$  vá para o passo 2

Se  $k \in R_2 \rightarrow$  vá para o passo 3

2. Uma variável não básica  $x_k$  que está em seu  $L_1$  é candidata a entrar na base. Encontrar  $\Delta_k$  usando (71). Se  $\Delta_k \rightarrow \infty$  então o problema é **ilimitado**. Caso contrário, verificar se existe mudança de base com a variável  $x_{B_r}$  deixando a base ou se pode ocorrer que  $x_k$  atinge o seu  $L_s$ .

2.1 Se existe mudança de base, implementar pivotagem do quadro simplex exceto a coluna RHS que deve ser atualizada separadamente usando (72). Atualizar  $R_1$  e  $R_2$ .

2.2 Se não existe mudança de base, então não é necessário implementar pivotagem do quadro simplex, mas deve-se atualizar a coluna RHS usando (73). Atualizar  $R_1$  e  $R_2$ .

Voltar ao passo 1

3. Uma variável não básica  $x_k$  que está em seu  $L_s$  é candidata a entrar na base. Encontrar  $\Delta_k$  usando (74). Se  $\Delta_k \rightarrow \infty$  então o problema é **ilimitado**. Caso contrário, verificar se existe mudança de base com a variável  $x_{B_r}$  deixando a base ou se pode ocorrer que  $x_k$  atinge o seu  $L_1$ .

3.1 Se ocorre mudança de base, implementar pivotagem do quadro simplex exceto a coluna RHS que deve ser atualizada através de (75). Atualizar  $R_1$  e  $R_2$ .

3.2 Caso contrário, então não é necessário implementar pivotagem do quadro simplex exceto a coluna RHS que deve ser atualizada através de (76). Atualizar  $R_1$  e  $R_2$ .

Voltar ao passo 1

**Fórmulas:**

$$x_k \rightarrow z_k - c_k = \text{Max} \{z_j - c_j; j \in R_1; -(z_j - c_j); j \in R_2\} \quad (70)$$

$$\Delta_k = \text{Min}_{i=1, 2, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{B_i}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0; \frac{u_{B_i} - \bar{b}_i}{-y_{ik}}, y_{ik} < 0; u_k - l_k; \infty \right\} \quad (71)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, & i \neq r \\ \mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{l}_k + \Delta_k \quad (\leftarrow \mathbf{x}_k) \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} - (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (72)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, & \forall i \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{u}_k = \mathbf{l}_k + \Delta_k \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} - (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (73)$$

$$\Delta_k = \text{Min}_{i=1, 2, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{b}}_i - \mathbf{l}_{B_i}}{-\mathbf{y}_{ik}}, \mathbf{y}_{ik} < 0; \frac{\mathbf{u}_{B_i} - \bar{\mathbf{b}}_i}{\mathbf{y}_{ik}}, \mathbf{y}_{ik} > 0; \mathbf{u}_k - \mathbf{l}_k; \infty \right\} \quad (74)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i + \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, & i \neq r \\ \mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{u}_k - \Delta_k \quad (\leftarrow \mathbf{x}_k) \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (75)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{B_i} = \bar{\mathbf{b}}_i + \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, & \forall i \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{l}_k = \mathbf{u}_k - \Delta_k \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + (\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k)\Delta_k \end{cases} \quad (76)$$

### 5.3 O Método das Duas Fases do Primal Simplex Canalizado

Dado o problema:

$$(P) \begin{cases} \text{Min } \mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{cases} \quad (77)$$

Onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $\mathbf{c}, \mathbf{l}, \mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .

O Método de Fase Única do Primal Simplex Canalizado não pode ser empregado quando o quadro simplex não é factível. Neste caso deve-se implementar o Método das Duas Fases do Primal Simplex Canalizado.

Todas as variáveis originais são escolhidas como não básicas e a sua base inicial é montada apenas com variáveis artificiais na seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Min } \mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{Min } \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_{a_i} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \pm \mathbf{I}\mathbf{x}_a = \mathbf{b} \\ \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{x}_a \leq \infty \end{cases} \quad (78)$$

No sistema anterior precisa-se identificar o coeficiente  $+1$  ou  $-1$  de cada variável artificial. As variáveis  $\mathbf{x}$  são fixadas nos seus limites inferior ou superior usando qualquer critério sendo agrupadas em  $\mathbf{x}_{N_1}$  ou  $\mathbf{x}_{N_2}$ . Calcula-se para cada restrição  $i$  a relação:

$$\rho_i = \mathbf{a}^i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i$$

Se  $\rho_i > 0 \Rightarrow$  o coeficiente de  $\mathbf{x}_{a_i}$  é  $-1$ .

Se  $\rho_i \leq 0 \Rightarrow$  o coeficiente de  $x_{a_i}$  é +1.

Desta forma, uma matriz diagonal  $\mathbf{B}$  (que tem +1 ou -1 como elemento na diagonal principal) será utilizada como matriz básica. A nova matriz  $[\mathbf{A}; \pm\mathbf{I}]$  ao ser pré-multiplicada por  $\mathbf{B} = \pm\mathbf{I}$  torna-se  $[\pm\mathbf{A}; \mathbf{I}]$  e, com estes dados pode-se montar o quadro simplex abaixo:

	z	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_m$	$x_{a_1}$	$x_{a_2}$	...	$x_{a_m}$	RHS	
z	1	0	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_m - c_m$	0	0	...	0	$c_B \bar{b}$	
$x_0$	0	1	$z'_1 - c'_1$	$z'_2 - c'_2$	...	$z'_m - c'_m$	0	0	...	0	$\bar{x}_0$	R <sub>1</sub>
$x_{a_1}$	0	0	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1m}$	1	0	...	0	$\bar{b}_1$	
$x_{a_2}$	0	0	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2m}$	0	1	...	0	$\bar{b}_2$	R <sub>2</sub>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$x_{a_m}$	0	0	$y_{m1}$	$y_{m2}$	...	$y_{mm}$	0	0	...	1	$\bar{b}_m$	

Aplica-se o algoritmo de duas fases do Método Simplex com quadro único já apresentado até encontrar  $x_0 = 0$  e  $z'_j - c'_j \leq 0$  (Fim da Fase I). Após isto, sem a segunda linha e as colunas correspondentes às variáveis artificiais, utilizar o Algoritmo Primal Simplex Canalizado e executar a Fase II. Portanto, a fase I termina com uma das duas situações:

- i) Caso  $x_0 \neq 0$  o problema é **infectível**.
- ii) Caso  $x_0 = 0 \Rightarrow$  foi encontrado um ponto extremo do problema original.

#### 5.4 Exemplos Ilustrativos

**Exemplo 11:-** Seja o problema de PL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = -x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \text{sujeito a} \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ \quad -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 \in [1, 4], x_2 \in [1, 6] \text{ e } x_3 \in [1, 4] \end{array} \right. , \text{ ou seja,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = -x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \text{sujeito a} \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ \quad -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 \in [1, 4], x_2 \in [1, 6], x_3 \in [1, 4] \text{ e } x_4, x_5 \in [0, \infty) \end{array} \right. .$$

Fixando todas as variáveis no seu limite inferior:  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$  e  $x_4 = x_5 = 0$ .

Utilizando estes valores nas equações, obtém-se:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 + 1 + 2 + 0 = 4 > 3 \therefore \text{ o sinal de } x_6 \text{ será negativo;}$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = -1 + 1 + 1 + 0 = 1 < 4 \therefore \text{ o sinal de } x_7 \text{ será positivo;}$$

Assim, nosso problema será apresentado na seguinte forma:



$$\begin{cases} \text{Min } z = -x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \text{Min } x_0 = x_6 + x_7 \\ \text{sujeito a} \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 = 3 \\ \quad -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_7 = 4 \\ x_1 \in [1, 4], x_2 \in [1, 6], x_3 \in [1, 4] \text{ e } x_4, x_5, x_6, x_7 \in [0, \infty) \end{cases}$$

Destas forma, temos os seguintes dados:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_6 \ \mathbf{a}_7] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{N}_1 = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}'_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \mathbf{c}'_{\mathbf{B}} = [1 \ 1],$$

$$\mathbf{c}'_{\mathbf{N}_1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \mathbf{c}_{\mathbf{B}} = [0 \ 0], \mathbf{c}_{\mathbf{N}_1} = [-1 \ -4 \ -2 \ 0 \ 0], \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}}'_{\mathbf{N}_1} = \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 - \mathbf{c}'_{\mathbf{N}_1} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] =$$

$$[-2 \ 0 \ -1 \ -1 \ 1],$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}_1} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 - \mathbf{c}_{\mathbf{N}_1} = [0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [-1 \ -4 \ -2 \ 0 \ 0] = [1 \ 4 \ 2 \ 0 \ 0].$$

Destas forma,  $\mathbf{R}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $\mathbf{R}_2 = \emptyset$ . Calculando  $x_6$ ,  $x_7$ ,  $\bar{x}_0$  e  $\bar{z}$ , obtém-se:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 = 3 \Rightarrow 4 - x_6 = 3 \therefore x_6 = 1;$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_7 = 4 \Rightarrow 1 + x_7 = 4 \therefore x_7 = 3;$$

$$\bar{x}_0 = x_6 + x_7 = 4 \text{ e } \bar{z} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}_1}\mathbf{l}_{\mathbf{N}_1} - \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}_2}\mathbf{u}_{\mathbf{N}_2} = 0 - [1 \ 4 \ 2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$$

	Z	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	RHS
Z	1	0	1	4	2	0	0	0	0	-7
x0	0	1	-2	0	-1	-1	1	1	1	4
x6	0	0	-1	-1	-2	-1	0	1	0	1
x7	0	0	-1	1	1	0	1	0	1	3

$\mathbf{R}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$   
 $\mathbf{R}_2 = \emptyset$

$$1^{\text{a}} \text{ Iteração: } \mathbf{z}'_{\mathbf{k}} - \mathbf{c}'_{\mathbf{k}} = \max \{-2, 0, -1, -1, 1\} = 1 \therefore \mathbf{k} = 5.$$

$$\Delta_5 = \min \left\{ \frac{\bar{b}_1 - l_{B_1}}{y_{15}}, y_{15} > 0; \frac{u_{B_1} - \bar{b}_1}{-y_{15}}, y_{15} < 0; u_5 - l_5, \infty \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_2 - l_{B_2}}{y_{25}}; \infty, \infty \right\} = 3 \therefore \mathbf{r} = 2, \text{ ou seja,}$$

$x_5$  entra na base e  $x_7$  deixa a base em seu limite inferior. Logo,  $\mathbf{R}_1 = \{1, 2, 3, 4, 7\}$  e  $\mathbf{R}_2 = \emptyset$ .

Atualizando RHS, temos:

$$x_{\mathbf{B}_1} = x_6 = \bar{b}_1 - y_{15} \Delta_5 = 1 - 0.3 = 1$$

$$x_{\mathbf{B}_2} = x_5 = l_5 + \Delta_5 = 0 + 3 = 3$$

$$z = \bar{z} - (z_5 - c_5) \Delta_5 = -7 - 0.3 = -7$$

$$x_0 = \bar{x}_0 - (z'_5 - c'_5) \Delta_5 = 4 - 1.3 = 1$$

	Z	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	RHS
Z	1	0	1	4	2	0	0	0	0	-7
X0	0	1	-1	-1	-2	-1	0	1	0	1
X6	0	0	-1	-1	-2	-1	0	1	0	1
X5	0	0	-1	1	1	0	1	0	1	3

$R_1 = \{1, 2, 3, 4, 7\}$   
 $R_2 = \emptyset$

2ª Iteração:  $z'_k - c'_k = \max \{-1, -1, -2, -1, 0\} = -1 \therefore k = 1, 2 \text{ ou } 4$ , seja  $k = 4$ .

$$\Delta_4 = \min \left\{ \frac{u_{B_1} - \bar{b}_1}{-y_{14}}, u_4 - l_4, \infty \right\} = \min \left\{ \frac{4-1}{-(-1)}; \infty, \infty \right\} = 3 \therefore r = 1, \text{ ou seja, } x_4 \text{ entra na base e } x_6$$

deixa a base em seu limite inferior. Logo,  $R_1 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$  e  $R_2 = \emptyset$ .

Atualizando RHS, obtém-se:

$$x_{B_1} = x_4 = l_4 + \Delta_4 = 0 + 3 = 3$$

$$x_{B_2} = x_5 = \bar{b}_2 - y_{24} \Delta_4 = 3 - 0.3 = 3$$

$$z = \bar{z} - (z_4 - c_4) \Delta_4 = -7 - 0.3 = -7$$

$$x_0 = \bar{x}_0 - (z'_4 - c'_4) \Delta_4 = 1 - (-1).3 = 4$$

	Z	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	RHS
Z	1	0	1	4	2	0	0	0	0	-7
X0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
X4	0	0	1	1	2	1	0	-1	0	3
X5	0	0	-1	1	1	0	1	0	1	3

FIM FASE I  
 $R_1 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$   
 $R_2 = \emptyset$

Como  $x_0 = 4 \neq 0$  então o nosso problema é infactível.

**Exemplo 12:-** Seja o problema de PL:

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \text{ ou seja,} \\ -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \in [2, 5] \text{ e } x_2 \in [1, 3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 \in [2, 5], x_2 \in [1, 3], x_3, x_4 \in [0, \infty) \end{cases}$$

Assim tem-se os seguintes dados, considerando as variáveis originais no seu limite inferior:

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0.$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2.(2) + 3.(1) - 0 = 7 > 6 \quad \Rightarrow x_3 \text{ tem como coeficiente } -1.$$

$$-3x_1 + x_2 + x_4 = -3.(2) + 1.(1) + 0 = -5 < 1 \quad \Rightarrow x_4 \text{ tem como coeficiente } +1.$$

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{Min } x_0 = x_5 + x_6 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 \in [2, 5], x_2 \in [1, 3], x_3, x_4, x_5, x_6 \in [0, \infty) \end{cases}$$

Desta forma, tem-se os seguintes dados:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [\mathbf{a}_5 \ \mathbf{a}_6] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{N}_1 = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}'_B = \\ & \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \mathbf{c}'_B = [1 \ 1], \mathbf{c}_{N_1} = [3 \ 4 \ 0 \ 0], \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B = [0 \ 0], \\ \mathbf{c}'_{N_1} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0], \bar{\mathbf{c}}'_{N_1} = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 - \mathbf{c}'_{N_1} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [0 \ 0 \ 0 \ 0] = [-5 \ -2 \ 1 \ 1], \bar{\mathbf{c}}_{N_1} \\ &= \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 - \mathbf{c}_{N_1} = [0 \ 0] \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [3 \ 4 \ 0 \ 0] = [-3 \ -4 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

Desta forma,  $\mathbf{R}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $\mathbf{R}_2 = \emptyset$ . Calculando  $x_5, x_6, \bar{x}_0$  e  $\bar{z}$ , obtém-se:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 6 \quad \Rightarrow \quad 2.(2) + 3.(1) - 0 - x_5 = 6 \quad \therefore x_5 = 1;$$

$$-3x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 1 \quad \Rightarrow \quad -3.(2) + 1.(1) + 0 + x_6 = 1 \quad \therefore x_6 = 6.$$

$$\bar{x}_0 = x_5 + x_6 = 7 \text{ e } \bar{z} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{c}}_{N_1} \mathbf{l}_{N_1} - \bar{\mathbf{c}}_{N_2} \mathbf{u}_{N_2} = 0 - [-3 \ -4 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 10$$

	Z	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
Z	1	0	-3	-4	0	0	0	0	10
x0	0	1	-5	-2	1	1	1	1	7
x5	0	0	-2	-3	1	0	0	1	1
x6	0	0	-3	1	0	1	1	0	6

$\mathbf{R}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$   
 $\mathbf{R}_2 = \emptyset$

1ª Iteração:  $\mathbf{z}'_k - \mathbf{c}'_k = \max \{-5, -2, 1, 1\} = 1 \therefore k = 3$  ou  $4$ . Seja  $k = 4$ .

$$\Delta_4 = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{B_i}}{y_{i4}}, y_{i4} > 0; \frac{u_{B_i} - \bar{b}_i}{-y_{i4}}, y_{i4} < 0; u_4 - l_4, \infty \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_2 - l_{B_2}}{y_{24}}; \infty, \infty \right\} = \min \left\{ \frac{6-0}{1}; \infty, \infty \right\} = 6 \therefore$$

$r = 2$ , ou seja,  $x_4$  entra na base e  $x_6$  sai da base em seu limite inferior. Logo,  $\mathbf{R}_1 = \{1, 2, 3, 6\}$  e  $\mathbf{R}_2 = \emptyset$ .

Atualizando RHS, obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_1} = x_5 = \bar{b}_1 - y_{14}\Delta_4 = 1 - 0.6 = 1$$

$$\mathbf{x}_{B_2} = x_4 = l_4 + \Delta_4 = 0 + 6 = 6$$

$$z = \bar{z} - (z_4 - c_4)\Delta_4 = 10 - 0.6 = 10$$

$$x_0 = \bar{x}_0 - (z'_4 - c'_4)\Delta_4 = 7 - 1.6 = 1$$

	Z	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	RHS
Z	1	0	-3	-4	0	0	0	0	10
x <sub>0</sub>	0	1	-2	-3	1	0	0	1	1
x <sub>5</sub>	0	0	-2	-3	1	0	0	1	1
x <sub>4</sub>	0	0	-3	1	0	1	1	0	6

R<sub>1</sub> = {1, 2, 3, 6}  
R<sub>2</sub> = ∅

2ª Iteração:  $z'_k - c'_k = \max \{-2, -3, 1, 1\} = 1 \therefore k = 3$ .

$$\Delta_3 = \min \left\{ \frac{\bar{b}_1 - l_{B_1}}{y_{13}}, y_{13} > 0; \frac{u_{B_1} - \bar{b}_1}{-y_{13}}, y_{13} < 0; u_3 - l_3, \infty \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_1 - l_{B_1}}{y_{13}}; \infty, \infty \right\} = \min \left\{ \frac{1-0}{1}; \infty, \infty \right\} = 1$$

$\therefore r = 1$ , ou seja,  $x_3$  entra na base e  $x_5$  sai da base em seu limite inferior. Logo,  $R_1 = \{1, 2, 5, 6\}$  e  $R_2 = \emptyset$ .

Atualizando RHS, obtém-se:

$$x_{B_1} = x_3 = l_3 + \Delta_3 = 0 + 1 = 1$$

$$x_{B_2} = x_4 = \bar{b}_2 - y_{23}\Delta_3 = 6 - 0.1 = 6$$

$$z = \bar{z} - (z_3 - c_3)\Delta_3 = 10 - 0.1 = 10$$

$$x_0 = \bar{x}_0 - (z'_3 - c'_3)\Delta_3 = 1 - 1.1 = 0$$

	Z	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	RHS
Z	1	0	-3	-4	0	0	0	0	10
x <sub>0</sub>	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x <sub>3</sub>	0	0	-2	-3	1	0	0	1	1
x <sub>4</sub>	0	0	-3	1	0	1	1	0	6

FIM FASE I  
R<sub>1</sub> = {1, 2, 5, 6}  
R<sub>2</sub> = ∅

A nova tabela para a fase II será:

	Z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	RHS
Z	1	-3	-4	0	0	10
x <sub>3</sub>	0	-2	-3	1	0	1
x <sub>4</sub>	0	-3	1	0	1	6

R<sub>1</sub> = {1, 2}  
R<sub>2</sub> = ∅

Como  $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R_1$  e  $z_j - c_j \geq 0, \forall j \in R_2$  então foi encontrada a solução ótima:

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 6 \text{ e } z = 10.$$

## 6 O Método Dual Simplex Canalizado (DSC)

### 6.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, após conhecer os métodos de solução do problema primal de um PL, observou-se aspectos interessantes com a apresentação do Método Dual Simplex. Também se estudou o Método Primal Simplex Canalizado, sua análise e construção. Agora será apresentado o caso onde um problema dual apresenta uma situação onde  $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$ .

Desta forma, neste capítulo será apresentado o inovador Quadro de Garfinkel-Nemhauser para resolver um PL, a análise e construção do Método de Fase Única do Dual Simplex Canalizado e a Prova de Otimalidade do Quadro Dual Simplex Canalizado. Ao final do mesmo serão mostrados alguns exemplos ilustrativos.

### 6.2 O Quadro de Garfinkel-Nemhauser

A fim de facilitar a implementação de um algoritmo para o DSC será analisado o quadro de **Garfinkel-Nemhauser (G-N)**.

Considerando  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;  $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Seja o PL:

$$(P) \begin{cases} \text{Min } x_0 = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (79)$$

Se  $\mathbf{B}$  é a base de uma SBF então  $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \mathbf{N}]$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B \ \mathbf{c}_N)$ . Assim:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{c}\mathbf{x} = (\mathbf{c}_B \ \mathbf{c}_N) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N \quad (80)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{B} \ \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \quad (81)$$

Substituindo (81) em (80), obtém-se:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{c}_B [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N] + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - [\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N] \mathbf{x}_N \quad (82)$$

Associando (81) e (82), pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{x}_N \quad (83)$$

Utilizaremos uma nova notação:  $\mathbf{R} = \{\mathbf{j}: \mathbf{x}_j \text{ é uma variável não básica (VNB)}\}$ ,

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{B_0}, \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{B_1} \\ \mathbf{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{B_m} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{00} \\ \mathbf{y}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{m0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (84)$$

Desta forma,  $y_{00}$  identifica a função objetivo e os  $y_{i0}$ , os valores da coluna RHS, ou seja, os valores das variáveis básicas (VB) para a base  $\mathbf{B}$ . Então, para cada  $j \in \mathbf{N}$ , nós

$$\text{definimos } y_j = \begin{bmatrix} y_{0j} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{ij} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \\ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j \end{bmatrix}.$$

Com as notações anteriores (81) assume a seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j \in \mathbf{R}} y_{ij} x_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (85)$$

Suponha que (83) não representa uma SBF ótima. Assim, vamos supor que existe um  $y_{0j} > 0, j \in \mathbf{R}$ . Fazemos  $j = k \Rightarrow x_k$  é uma variável não básica com maior coeficiente de custo relativo positivo.

Desta forma,

i) Se  $x_k$  aumenta de valor (do seu atual valor nulo) então a função objetivo diminui (melhora)

$$x_0 = \mathbf{x}_{B_0} = y_{00} - y_{0k} x_k < y_{00} \quad (86)$$

ii) Se  $x_k$  aumenta de valor então diminui o valor atual daquelas variáveis básicas com  $y_{ik} > 0$ . Desta forma, uma variável básica  $\mathbf{x}_{B_i}$ , com  $y_{ik} > 0$  atinge o valor nulo quando  $x_k$  assume um valor que será chamado de  $\theta_{ik}$ :

$$\mathbf{x}_{B_i} = y_{i0} - y_{ik} \theta_{ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{ik} = \frac{y_{i0}}{y_{ik}} \quad (87)$$

Seja  $\mathbf{x}_{B_r}$  a variável básica que atinge primeiro o valor zero com o aumento de  $x_k$ , então temos:

$$0 < \theta_{rk} = \text{Min}_{i=1,2,\dots,m} \left\{ \theta_{ik} = \frac{y_{i0}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\} \quad (88)$$

Portanto, mantidas todas as variáveis não básicas no valor zero, exceto  $x_k$ , os novos valores das variáveis básicas serão:

$$\begin{cases} x_k = \theta_{rk} \\ \mathbf{x}_{B_i} = y_{i0} - y_{ik} \theta_{rk}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (89)$$

$x_k = \theta_{rk} > 0, \mathbf{x}_{B_r} = 0$  e  $x_0 = \mathbf{x}_{B_0} = y_{00} - y_{0k} \theta_{rk} < y_{00}$  (o valor da função objetivo diminui).

Encontrar a nova SBF com a entrada de  $\mathbf{x}_k$  e a saída de  $\mathbf{x}_{B_r}$  da base equivale a incluir (89) em (85). Isto quer dizer que se deve usar a  $r$ -ésima equação de (89) para colocar em evidência  $\mathbf{x}_k$  no lado esquerdo da equação e substituir esta relação em todas as outras equações de (85) para eliminar  $\mathbf{x}_k$  dessas equações, assim teremos um novo sistema em que  $\mathbf{x}_k$  aparece como VB e  $\mathbf{x}_{B_r}$ , como VNB. Desta forma, (85) é reescrita como se observa a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{B_0} = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} \mathbf{x}_j = y_{m0} - \sum_{j \in R - \{k\}} y_{ij} \mathbf{x}_j - y_{0k} \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j \in R} y_{ij} \mathbf{x}_j = y_{i0} - \sum_{j \in R - \{k\}} y_{ij} \mathbf{x}_j - y_{ik} \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{B_r} = y_{r0} - \sum_{j \in R} y_{rj} \mathbf{x}_j = y_{r0} - \sum_{j \in R - \{k\}} y_{rj} \mathbf{x}_j - y_{rk} \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{B_m} = y_{m0} - \sum_{j \in R} y_{mj} \mathbf{x}_j = y_{m0} - \sum_{j \in R - \{k\}} y_{mj} \mathbf{x}_j - y_{mk} \mathbf{x}_k \end{array} \right. \quad (90)$$

Da  $i$ -ésima equação de (83) teremos que:

$$\mathbf{x}_k = \frac{y_{r0}}{y_{rk}} - \sum_{j \in R - \{k\}} \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \mathbf{x}_j - \frac{1}{y_{rk}} \mathbf{x}_{B_r} \quad (91)$$

Para  $i = 0, 1, 2, \dots, m; i \neq r$ , substituindo (91) em cada uma das outras equações de (90), obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j \in R - \{k\}} y_{ij} \mathbf{x}_j - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{r0} + \sum_{j \in R - \{k\}} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \mathbf{x}_j - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \mathbf{x}_{B_r}$$

Assim, teremos o novo conjunto de equações básicas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{B_i} = y_{i0} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{r0} - \sum_{j \in R - \{k\}} (y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}) \mathbf{x}_j + \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \mathbf{x}_{B_r} \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, m; i \neq r \\ \mathbf{x}_k = \frac{y_{r0}}{y_{rk}} - \sum_{j \in R - \{k\}} \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \mathbf{x}_j - \frac{1}{y_{rk}} \mathbf{x}_{B_r} \quad \leftarrow \text{passa a ocupar a linha } r \end{array} \right. \quad (92)$$

O sistema acima, (92), representa as equações correspondentes à nova base após  $\mathbf{x}_k$  entrar e  $\mathbf{x}_{B_r}$  deixar a base. Pode-se verificar que em (89)  $\mathbf{x}_{B_r}$  aparece como variável não básica e  $\mathbf{x}_k$ , como variável básica. Este conjunto de operações de mudança de base para passar de (83) a (91) é conhecido como pivotagem.

Pode-se alocar (90) num quadro simplex alternativo da seguinte forma:

	RHS	Variáveis não básicas			
		$-\mathbf{x}_j$	$\dots$	$-\mathbf{x}_k$	$\dots$
$\mathbf{x}_0$	$y_{00}$	$y_{0j}$	$\dots$	$y_{0k}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$\mathbf{x}_{B_i}$	$y_{i0}$	$y_{ij}$	$\dots$	$y_{ik}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$\mathbf{x}_{B_r}$	$y_{r0}$	$y_{rj}$	$\dots$	$y_{rk}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$\mathbf{x}_{B_m}$	$y_{m0}$	$y_{mj}$	$\dots$	$y_{mk}$	$\dots$

Após a pivotagem pode-se obter as equações (92) que colocamos numa estrutura de quadro simplex que assume a seguinte forma:

		Variáveis não básicas			
	RHS	- $x_j$	...	- $x_{B_r}$	...
$x_0$	$y_{00} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{r0}$	$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj}$	...	$-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
$x_{B_i}$	$y_{i0} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{r0}$	$y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}$	...	$-\frac{y_{ik}}{y_{rk}}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
$x_{B_r}$	$\frac{y_{r0}}{y_{rk}}$	$\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	...	$\frac{1}{y_{rk}}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
$x_{B_m}$	$y_{m0} - \frac{y_{mk}}{y_{rk}} y_{r0}$	$y_{mj} - \frac{y_{mk}}{y_{rk}} y_{rj}$	...	$-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$	...

(93)

**Observação 29:**

a) cada linha do quadro simplex alternativo representa uma equação de (90). Assim, a linha  $i$  do quadro representa a equação abaixo que é a  $i$ -ésima equação:

$$x_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j \in R} y_{ij} x_j$$

b) o quadro simplex alternativo é de tamanho reduzido ao ser comparado com o utilizado em Bazaraa (BAZARAA, 2010). Na verdade eliminaram-se do quadro as colunas das VB que formam a matriz identidade e facilita a pivotagem.

c) Na pivotagem, todas as colunas do quadro são pivotadas da maneira tradicional exceto a coluna do  $x_k$  (que agora entra no lugar de  $x_{B_r}$ ) que deve ser pivotada da maneira mostrada em (89). Após a pivotagem, monta-se a coluna do  $x_{B_r}$  (para o novo quadro) na mesma coluna que era ocupada por  $x_k$ .

Desta forma, a pivotagem deve ser realizada da seguinte maneira:

c<sub>1</sub>: Dividir a linha  $r$  pelo elemento pivô  $y_{rk} \rightarrow \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$ ;

c<sub>2</sub>: Multiplicar a nova linha por  $y_{ik}$  e subtrair da linha  $i$ :

$$y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m; \quad i \neq r$$

c<sub>3</sub>: Multiplicar a coluna  $k$  pela seguinte relação  $\begin{cases} -\frac{y_{ik}}{y_{rk}}, & \text{para } i \neq r \\ \frac{1}{y_{rk}}, & \text{para } i = r \end{cases}$ .

Nesta estratégia é melhor montar primeiro a coluna  $k$  (passo c<sub>3</sub>) e depois o resto do quadro na forma tradicional de pivotagem.



No texto didático de Bazaraa (BAZARAA, 2010) observa-se que as relações algébricas utilizadas para montar o quadro simplex têm a seguinte forma:

$$\begin{cases} z + (c_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - c_N) x_N = c_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B + (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) x_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{cases}$$

Entretanto as relações algébricas que **Garfinkel-Nemhauser (G-N)** utiliza são:

$$\begin{cases} x_0 = c_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - (c_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - c_N) x_N \\ \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) x_N \end{cases}$$

Portanto, o quadro é o mesmo em relação às colunas das VNB. No quadro simplex alternativo de **G-N** as VNB  $x_j$  estão com sinal negativo.

d) Segundo a lógica de Bazaraa (BAZARAA, 2010) o quadro simplex alternativo assume a seguinte forma:

	RHS	- $x_N$ (VNB)
$x_0$	$c_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$	$c_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - c_N$
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$

### Algoritmo Simplex (G-N)

Passo 1 (Inicialização): iniciar o processo com uma SBF conhecida e montar o quadro inicial (se não existe SBF inicial, entrar no processo de Fase I). Ir ao Passo 2;

Passo 2 (Prova de Otimalidade): se  $y_{0j} \leq 0, \forall j \in \mathbf{R}$  então PARE. A atual SBF é ótima. Caso contrário ir ao Passo 3;

Passo 3 (Selecionar a variável não básica  $x_k$  candidata a entrar na base): selecionar  $x_k, k \in \mathbf{R}$  e  $y_{0k} > 0$  com a propriedade  $y_{0k} = \mathbf{Max} \{y_{0j}, j \in \mathbf{R}\}$  e ir ao Passo 4;

Passo 4 (Selecionar a variável básica  $x_{B_r}$  candidata a deixar a base): selecionar  $x_{B_r}$  através da relação  $\theta_{rk} = \mathbf{Min}_{i=1,2,\dots,m} \{\theta_{ik} = \frac{y_{i0}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0\}$ . Se  $y_{ik} \leq 0$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, m$  então o problema é **ilimitado**, PARE. Escolher arbitrariamente em caso de empate. Ir ao Passo 5;

Passo 5 (Pivotagem): pivotar conforme indicado em (94) ou nas observações e regressar ao Passo 2.

### Método das duas fases no quadro simplex alternativo

Neste caso continuam válidos todos os critérios do quadro simplex de Bazaraa, tendo em conta simplesmente o seguinte:

- i) a função objetivo da Fase I é identificada pela variável  $z_0$ ;
- ii) usamos as duas linhas de função objetivo desde o início do processo;
- iii) não é necessário gerar as colunas das variáveis artificiais que são retiradas da base, isto é, cada vez que uma variável artificial é retirada da base é eliminada do processo de resolução.

### 6.3 O Método de Fase Única do Dual Simplex Canalizado

#### 6.3.1 Algoritmo Dual Simplex utilizando o quadro simplex alternativo

$$\text{Seja o PL (P) } \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Passo 1 (Início): Montar o quadro inicial usando a base  $\mathbf{B}$  tal que  $y_{0j} \leq 0, \forall j \in \mathbf{R}$ . Se a otimalidade não é satisfeita ( $y_{0j} > 0$ , para algum  $j \in \mathbf{R}$ ) então entrar na Fase I do Método Dual Simplex. Ir ao passo 2;

Passo 2 (Prova de Otimalidade): Se  $y_{i0} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$  então o quadro é factível e, portanto, é ótimo, PARE. Caso contrário, ir ao passo 3;

Passo 3 (Selecione a variável básica candidata a sair da base): Selecione  $\mathbf{x}_{B_r}$  para deixar a base, através de:  $y_{r0} = \text{Min } \{y_{i0}, i = 1, 2, \dots, m\}$  com  $y_{r0} < 0$ . Ir ao passo 4;

Passo 4 (Selecione a variável não básica candidata a entrar na base): Selecione  $\mathbf{x}_k$  para entrar na base, através de:  $\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \text{Min } \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} < 0, j \in \mathbf{R} \right\}$ . Caso haja empate, decida arbitrariamente. Se  $y_{rj} \geq 0, \forall j \in \mathbf{R}$  então o problema é **infactível**, PARE. Caso contrário, ir ao passo 5;

Passo 5 (Pivotagem): Pivotar o quadro, mudando as variáveis  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{x}_{B_r}$ . Ir ao passo 2.

#### 6.3.2 Algoritmo Dual Simplex Canalizado

O algoritmo Dual Simplex Canalizado (DSC) é o mais adequado para re-otimizar subproblemas de PL gerados pelo algoritmo de *Branch and Bound* (BB) na solução de um problema de Programação Linear Inteira (PLI). No BB cada problema (PL) é diferente do seu antecessor numa restrição adicional da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_j \geq \mathbf{k} + 1, \mathbf{k} \in \mathbf{N} \quad (95)$$

ou

$$\mathbf{x}_j \leq \mathbf{k}, \mathbf{k} \in \mathbf{N} \quad (96)$$

Apesar de que as restrições do tipo (95) ou (96) possam ser adicionadas como uma restrição padrão e usar um algoritmo dual simplex padrão, essa estratégia aumentaria

desnecessariamente o tamanho do quadro e da base. Como as restrições (95) e (96) são sobre uma única variável então a melhor saída é empregar um DSC que considera esses tipos de restrições somente de maneira implícita.

$$\text{Seja o PL (P)} \quad \begin{cases} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{cases}$$

Para uma base  $\mathbf{B}$ , o sistema de equações  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{c}\mathbf{x}$  assume a seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{y}_{i0} - \sum_{j \in R_2} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{x}_j - \sum_{j \in R_1} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (97)$$

Em que  $R_1 = \{\text{índices das variáveis não básicas que estão no seu limite inferior}\}$  e  $R_2 = \{\text{índices das variáveis não básicas que estão no seu limite superior}\}$ .

### 6.3.2.1 Análise da variável básica candidata a sair da base

Seja  $z_{i0}$  o valor atual da variável básica  $i$  no quadro dual simplex canalizado, então de (47) teremos:

$$z_{i0} = \mathbf{y}_{i0} - \sum_{j \in R_2} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{u}_j - \sum_{j \in R_1} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{l}_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (98)$$

a) Quando  $z_{r0} > \mathbf{u}_r$ : a variável básica tem seu limite superior violado

a.1) Quando a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  candidata a entrar na base está no seu limite superior. Neste caso o novo valor de  $\mathbf{x}_k$  deve ser:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{u}_k - \Delta_k \quad (99)$$

Usando (99) em (97) e (98), obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{y}_{i0} - \sum_{j \in R_2, j \neq k} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{x}_j - \sum_{j \in R_1} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{x}_j - \mathbf{y}_{ik} \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{y}_{i0} - \sum_{j \in R_2, j \neq k} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{x}_j - \sum_{j \in R_1} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{x}_j - \mathbf{y}_{ik} (\mathbf{u}_k - \Delta_k)$$

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{y}_{i0} - \sum_{j \in R_2} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{x}_j - \sum_{j \in R_1} \mathbf{y}_{ij} \mathbf{x}_j + \mathbf{y}_{ik} \Delta_k$$

Desta forma, sendo  $z_{i0}$  o valor atual da variável com índice  $i$ , obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_i} = z_{i0} + \mathbf{y}_{ik} \Delta_k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (100)$$

Para a variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  que tem o limite superior violado e usando a equação (100), obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{z}_{r0} + \mathbf{y}_{rk}\Delta_k \quad (101)$$

O valor da variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$ , que deve sair da base, será conduzido a seu limite superior factível, então de (101) obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{z}_{r0} + \mathbf{y}_{rk}\Delta_k = \mathbf{u}_r \Rightarrow \Delta_k = \frac{\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0}}{\mathbf{y}_{rk}} \quad (102)$$

A nova variável básica  $\mathbf{x}_k$  assume o seguinte valor:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{u}_k - \Delta_k = \mathbf{u}_k - \frac{\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0}}{\mathbf{y}_{rk}} = \mathbf{u}_k + \frac{1}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{u}_r) \quad (103)$$

E, para as outras variáveis básicas com  $\mathbf{i} \neq \mathbf{r}$  teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{B_i} &= \mathbf{z}_{i0} + \mathbf{y}_{ik}\Delta_k = \mathbf{z}_{i0} + \mathbf{y}_{ik}\left(\frac{\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0}}{\mathbf{y}_{rk}}\right) \Rightarrow \\ \mathbf{x}_{B_i} &= \mathbf{z}_{i0} + \frac{\mathbf{y}_{ik}}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0}), i = 1, 2, \dots, m; i \neq r \end{aligned} \quad (104)$$

Substituindo  $(\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0})$  de (103) em (104), obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{z}_{i0} + \mathbf{y}_{ik}(\mathbf{u}_k - \mathbf{x}_k), i = 1, 2, \dots, m; i \neq r \quad (105)$$

Acrescenta-se que em (105) utilizamos o valor atualizado de  $\mathbf{x}_k$ .

a.2) Quando a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  candidata a entrar na base está no seu limite inferior. Neste caso o novo valor de  $\mathbf{x}_k$  deve ser:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{l}_k + \Delta_k \quad (106)$$

Substituindo (106) em (97) e (98), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{B_i} &= \mathbf{y}_{i0} - \sum_{j \in R_1, j \neq k} \mathbf{y}_{ij}\mathbf{x}_j - \sum_{j \in R_2} \mathbf{y}_{ij}\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_{ik}\mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{B_i} &= \mathbf{y}_{i0} - \sum_{j \in R_1, j \neq k} \mathbf{y}_{ij}\mathbf{x}_j - \sum_{j \in R_2} \mathbf{y}_{ij}\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_{ik}(\mathbf{l}_k + \Delta_k) \\ \mathbf{x}_{B_i} &= \mathbf{y}_{i0} - \sum_{j \in R_1} \mathbf{y}_{ij}\mathbf{x}_j - \sum_{j \in R_2} \mathbf{y}_{ij}\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k \end{aligned}$$

Desta forma, sendo  $\mathbf{z}_{i0}$  o valor atual da variável com índice  $\mathbf{i}$ , obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{z}_{i0} - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (107)$$

Para a variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  que tem o limite superior violado e que deve deixar a base, teremos que:

$$\mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{z}_{r0} - \mathbf{y}_{rk}\Delta_k \quad (108)$$

O valor da variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$ , que deve sair da base, será conduzido a seu limite superior factível, então de (108) obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{z}_{r0} - \mathbf{y}_{rk}\Delta_k = \mathbf{u}_r \Rightarrow \Delta_k = \frac{\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{u}_r}{\mathbf{y}_{rk}} \quad (109)$$

A nova variável básica  $\mathbf{x}_k$  assume o seguinte valor:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{l}_k + \Delta_k = \mathbf{l}_k + \frac{\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{u}_r}{\mathbf{y}_{rk}} = \mathbf{l}_k + \frac{1}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{u}_r) \quad (110)$$

E, para as outras variáveis básicas com  $i \neq r$  teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{B_i} &= \mathbf{z}_{i0} - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k = \mathbf{z}_{i0} - \mathbf{y}_{ik}\left(\frac{\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{u}_r}{\mathbf{y}_{rk}}\right) \Rightarrow \\ \mathbf{x}_{B_i} &= \mathbf{z}_{i0} + \frac{\mathbf{y}_{ik}}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0}), i = 1, 2, \dots, m; i \neq r \end{aligned} \quad (111)$$

Substituindo  $(\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0})$  de (110) em (111), obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{z}_{i0} + \mathbf{y}_{ik}(\mathbf{l}_k - \mathbf{x}_k), i = 1, 2, \dots, m; i \neq r \quad (112)$$

Acrescenta-se que em (112) utilizamos o valor atualizado de  $\mathbf{x}_k$  encontrado em (110).

b) Quando  $\mathbf{z}_{r0} < \mathbf{l}_r$ : a variável básica tem seu limite inferior violado

b.1) Quando a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  candidata a entrar na base está no seu limite superior. Neste caso o novo valor de  $\mathbf{x}_k$  deve ser:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{u}_k - \Delta_k \quad (113)$$

Neste caso a equação (100) continua válida em que  $\mathbf{z}_{i0}$  é o valor atual da variável básica  $\mathbf{x}_{B_i}$ :

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{z}_{i0} + \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (114)$$

Utilizando (114) para a variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  que tem o seu limite superior violado e deve deixar a base, obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{z}_{r0} + \mathbf{y}_{rk}\Delta_k \quad (115)$$

O valor da variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$ , que deve sair da base, será conduzido a seu limite inferior factível, então de (115) obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{z}_{r0} + \mathbf{y}_{rk}\Delta_k = \mathbf{l}_r \Rightarrow \Delta_k = \frac{\mathbf{l}_r - \mathbf{z}_{r0}}{\mathbf{y}_{rk}} \quad (116)$$

A nova variável básica  $\mathbf{x}_k$  assume o seguinte valor:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{u}_k - \Delta_k = \mathbf{u}_k - \frac{\mathbf{l}_r - \mathbf{z}_{r0}}{\mathbf{y}_{rk}} = \mathbf{u}_k + \frac{1}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{l}_r) \quad (117)$$

E, para as outras variáveis básicas com  $\mathbf{i} \neq \mathbf{r}$ , através de (114), teremos:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{z}_{i0} + \frac{\mathbf{y}_{ik}}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{l}_r - \mathbf{z}_{r0}), i = 1, 2, \dots, m; i \neq r \quad (118)$$

Usando (117) onde foi encontrado o novo valor de  $\mathbf{x}_k$ , escrevemos (118) na seguinte forma equivalente:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_r - \mathbf{z}_{r0} &= \mathbf{y}_{rk}(\mathbf{u}_k - \mathbf{x}_k) && \Rightarrow \\ \mathbf{x}_{B_i} &= \mathbf{z}_{i0} + \mathbf{y}_{ik}(\mathbf{u}_k - \mathbf{x}_k), i = 1, 2, \dots, m; i \neq r \end{aligned} \quad (119)$$

Acrescenta-se que em (116) utilizamos o valor atualizado de  $\mathbf{x}_k$ .

b.2) Quando a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  candidata a entrar na base está no seu limite inferior. Neste caso o novo valor de  $\mathbf{x}_k$  deve ser:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{l}_k + \Delta_k \quad (120)$$

Neste caso a equação (107) continua válida. Desta forma, sendo  $\mathbf{z}_{i0}$  o valor atual da variável com índice  $\mathbf{i}$ , obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{z}_{i0} - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k, i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (121)$$

Para a variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  que tem o limite inferior violado e que deve deixar a base, teremos que:

$$\mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{z}_{r0} - \mathbf{y}_{rk}\Delta_k \quad (122)$$

O valor da variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$ , que deve sair da base, será conduzido a seu limite inferior factível, então de (122) obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_r} = \mathbf{z}_{r0} - \mathbf{y}_{rk}\Delta_k = \mathbf{l}_r \Rightarrow \Delta_k = \frac{\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{l}_r}{\mathbf{y}_{rk}} \quad (123)$$

A nova variável básica  $\mathbf{x}_k$  assume o seguinte valor:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{l}_k + \Delta_k = \mathbf{l}_k + \frac{\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{l}_r}{\mathbf{y}_{rk}} = \mathbf{l}_k + \frac{1}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{l}_r) \quad (124)$$

E, para as outras variáveis básicas com  $\mathbf{i} \neq \mathbf{r}$  assumem a seguinte forma de (121):

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{z}_{i0} - \mathbf{y}_{ik}\Delta_k = \mathbf{z}_{i0} + \frac{\mathbf{y}_{ik}}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{l}_r - \mathbf{z}_{r0}), i = 1, 2, \dots, m; i \neq r \quad (125)$$

Substituindo (124) em (125), obtém-se:

$$\mathbf{x}_{B_i} = \mathbf{z}_{i0} + \mathbf{y}_{ik}(\mathbf{l}_k - \mathbf{x}_k), i = 1, 2, \dots, m; i \neq r \quad (126)$$

Acrescenta-se que em (126) utilizamos o valor atualizado de  $\mathbf{x}_k$  encontrado em (124).

As relações encontradas devem ser compactadas com a finalidade de colocar num algoritmo dual simplex canalizado que seja fácil de manipular.

### 6.3.2.2 Análise da variável não básica que deve entrar na base

a) Quando  $\mathbf{z}_{r0} > \mathbf{u}_r$ : a variável básica tem seu limite superior violado.

A pivotagem deve produzir uma melhoria na função objetivo (um aumento de valor no caso do problema de minimização) que torna o problema menos infactível.

a.1) Quando uma variável não básica  $\mathbf{x}_k$  candidata a entrar na base está no seu limite superior, ou seja,  $\mathbf{x}_k, \mathbf{k} \in \mathbf{R}_2$ . Desta forma,  $\mathbf{y}_{0k} \geq \mathbf{0}$ .

De (111) a função objetivo assume a seguinte forma após a pivotagem:

$$\tilde{\mathbf{z}}_{00} = \mathbf{z}_{00} + \frac{\mathbf{y}_{0k}}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0}) \text{ com } \mathbf{y}_{0k} \geq \mathbf{0}; \mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0} \leq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}_{rk} < \mathbf{0}, \text{ pois,}$$

$$\frac{\mathbf{y}_{0k}}{\mathbf{y}_{rk}}(\mathbf{u}_r - \mathbf{z}_{r0}) \geq \mathbf{0} \text{ para que exista uma melhoria na função objetivo.}$$

Desta forma, serão candidatas todas as variáveis  $\mathbf{x}_j, \mathbf{j} \in \mathbf{R}_2$  tal que  $\mathbf{y}_{rj} < \mathbf{0}$ .

Da linha de custos relativos,  $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{R}_2$ , obtém-se:

$$\mathbf{y}_{0j} - \frac{\mathbf{y}_{0k}}{\mathbf{y}_{rk}}\mathbf{y}_{rj} \geq \mathbf{0} \text{ (os novos custos relativos devem continuar não negativos)}$$

$$\mathbf{y}_{0j} \geq \frac{\mathbf{y}_{0k}}{\mathbf{y}_{rk}}\mathbf{y}_{rj} \Rightarrow \frac{\mathbf{y}_{0j}}{\mathbf{y}_{rj}} \leq \frac{\mathbf{y}_{0k}}{\mathbf{y}_{rk}}, \text{ pois, } \mathbf{y}_{rj} < \mathbf{0}$$

Assim, a  $\mathbf{x}_k$  selecionada é aquela com  $\mathbf{k} \in \mathbf{R}_2$  tal que:

$$\frac{\mathbf{y}_{0k}}{\mathbf{y}_{rk}} = \max \left\{ \frac{\mathbf{y}_{0j}}{\mathbf{y}_{rj}}, \mathbf{y}_{rj} < \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{u}_j \right\} \quad (127)$$

Como  $\mathbf{y}_{0j} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{y}_{rj} < \mathbf{0}$ , o coeficiente  $\frac{\mathbf{y}_{0k}}{\mathbf{y}_{rk}} < \mathbf{0}$ .

a.2)  $\mathbf{x}_k, \mathbf{k} \in \mathbf{R}_1$  (a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  candidata a entrar na base está no seu limite inferior)  $\Rightarrow \mathbf{y}_{0k} \leq \mathbf{0}$ .

De (111) a função objetivo assume a seguinte forma após a pivotagem:

$\tilde{z}_{00} = z_{00} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} (z_{r0} - u_r)$  como  $y_{0k} \leq 0$ ;  $u_r - z_{r0} \leq 0 \Rightarrow y_{rk} > 0$ , pois,  
 $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} (z_{r0} - u_r) \geq 0$  para produzir um aumento na função objetivo. Desta forma, serão candidatas todas as variáveis não básicas  $x_j$ ,  $j \in R_1$  tal que  $y_{rj} > 0$ .

Da linha de custos relativos,  $\forall j \in R_1$ , obtém-se:

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \leq 0$$

Onde os novos custos relativos devem continuar não positivos após a pivotagem, ou seja,  $\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \leq \frac{y_{0k}}{y_{rk}}$ , pois,  $y_{rj} > 0$

Assim, a  $x_k$  selecionada é aquela com  $k \in R_1$  tal que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \max \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = l_j \right\} \quad (128)$$

De (127) e (128) conclui-se que a  $x_k$  a entrar na base deve ser obtida através de:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \max \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = u_j) \text{ ou } (y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = l_j) \right\}$$

Ou, de maneira equivalente:

$$-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min \left\{ -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = u_j) \text{ ou } (y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = l_j) \right\} \quad (129)$$

b) Quando  $z_{r0} < l_r$  (a variável básica tem seu limite inferior violado).

A pivotagem deve produzir uma melhora na função objetivo (um aumento no caso do problema de minimização).

b.1) Quando uma variável não básica  $x_k$  candidata a entrar na base está no seu limite superior, ou seja,  $x_k$ ,  $k \in R_2$ . Desta forma,  $y_{0k} \geq 0$ .

De (117) a função objetivo assume a seguinte forma após a pivotagem:

$\tilde{z}_{00} = z_{00} + \frac{y_{0k}}{y_{rk}} (l_r - z_{r0})$  como  $y_{0k} \geq 0$ ;  $l_r - z_{r0} > 0 \Rightarrow y_{rk} > 0$  para garantir que  $\frac{y_{0k}}{y_{rk}} (l_r - z_{r0}) \geq 0$  para que exista uma melhoria na função objetivo.

Desta forma, serão candidatas todas as variáveis  $x_j$ ,  $j \in R_2$  tal que  $y_{rj} > 0$ .



Da linha de custos relativos,  $\forall j \in \mathbf{R}_2$  e considerando que os novos custos relativos devem continuar não negativos, obtém-se:

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y_{0j} \geq \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq \frac{y_{0j}}{y_{rj}}, \text{ pois, } y_{rj} > 0$$

Assim, a  $x_k$  selecionada é aquela com  $k \in \mathbf{R}_2$  tal que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \max \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = u_j \right\} \quad (130)$$

b.2)  $x_k$ ,  $k \in \mathbf{R}_1$  (a variável não básica  $x_k$  candidata a entrar na base está no seu limite inferior)  $\Rightarrow y_{0k} \leq 0$ .

De (125) a função objetivo assume a seguinte forma após a pivotagem:

$$\tilde{z}_{00} = z_{00} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} (z_{r0} - l_r) \text{ como } y_{0k} \leq 0; l_r - z_{r0} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y_{rk} < 0, \text{ pois, } -\frac{y_{0k}}{y_{rk}} (z_{r0} - l_r) \geq 0 \text{ para produzir um aumento na função objetivo. Desta forma, serão candidatas todas as variáveis não básicas } x_j, j \in \mathbf{R}_1 \text{ tal que } y_{rj} < 0.$$

Da linha de custos relativos,  $\forall j \in \mathbf{R}_1$ , obtém-se:

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \leq 0$$

Em que os novos custos relativos devem continuar não positivos após a pivotagem, ou seja,  $\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \geq \frac{y_{0k}}{y_{rk}}$ , pois,  $y_{rj} < 0$

Assim, a  $x_k$  selecionada é aquela com  $k \in \mathbf{R}_1$  tal que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = l_j \right\} \quad (131)$$

De (130) e (131) conclui-se que  $x_k$  a entrar na base deve ser obtida através de:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = u_j) \text{ ou } (y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = l_j) \right\} \quad (132)$$

Resumo

Se a variável básica  $x_{B_r}$  viola o limite superior:

$$x_k \rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min \left\{ -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = u_j) \text{ ou } (y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = l_j) \right\} \quad (129)$$

ii) Se a variável básica  $x_{B_r}$  viola o limite inferior:

$$x_k \rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = u_j) \text{ ou } (y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = l_j) \right\} \quad (132)$$

#### 6.4 Prova de Otimalidade do Quadro Dual Simplex Canalizado

Ainda não foi provado que (129) e (132) garantem que o novo quadro DSC necessariamente satisfaz à otimalidade.

**Teorema 15** – Se a seleção da variável não básica que deve entrar na base, no quadro DSC foi realizada utilizando (129) e (132) então o novo quadro satisfaz à factibilidade do dual e à otimalidade do primal, isto é, no novo quadro deve ocorrer o seguinte:

$$y_{0j} \leq 0, \forall j \in R_1 \text{ e } y_{0j} \geq 0, \forall j \in R_2 \quad (133)$$

Prova: Deve-se provar que se  $x_{B_r}$  é a variável básica que deixará a base então se  $x_k$  é selecionada utilizando:

$$i) z_{r0} > u_r \quad \Rightarrow$$

$$x_k \rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min \left\{ -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = u_j) \text{ ou } (y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = l_j) \right\} \text{ ou}$$

$$ii) z_{r0} < l_r \quad \Rightarrow$$

$$x_k \rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} > 0 \text{ e } x_j = u_j) \text{ ou } (y_{rj} < 0 \text{ e } x_j = l_j) \right\}$$

Então o novo quadro satisfaz a otimalidade, isto é, (133).

#### Prova 1

a) Quando  $z_{r0} > u_r$ : após a pivotagem todos os custos relativos devem satisfazer à otimalidade, isto é,  $\bar{y}_{0j} \leq 0, \forall j \in R_1$  e  $\bar{y}_{0j} \geq 0, \forall j \in R_2$ .

$$a.1) \text{ suponha que foi selecionada } x_k, k \in R_1 \quad \Rightarrow \quad y_{0k} < 0 \text{ e } y_{rk} > 0.$$

Provaremos que:

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \leq 0, \forall j \in R_1 \quad (134)$$

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \geq 0, \forall j \in R_2 \quad (135)$$

Prova de (134):

$$i) \text{ Se } y_{rj} > 0, j \in R_1 \text{ então } 0 < -\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \text{ de (129). Multiplicando a desigualdade por } y_{rj} > 0 \quad \Rightarrow \quad y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \leq 0.$$

Assim, foi provado que os custos relativos das variáveis não básicas com  $y_{rj} > 0$ ,  $\forall j \in R_1$ , são não positivos.

ii)  $y_{rj} < 0$ ,  $j \in R_1$  então  $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0$ , pois,  $y_{0k} < 0$ ,  $y_{rk} > 0$  e  $y_{rj} < 0 \Rightarrow$

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq y_{0j} \leq 0$$

Neste caso, foi provado que os custos relativos das variáveis não básicas com  $y_{rj} < 0$ ,  $\forall j \in R_1$ , são não positivos.

Prova de (135):

i) Se  $y_{rj} > 0$ ,  $j \in R_2 \Rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0$ , pois,  $y_{0k} \leq 0$ ,  $y_{rk} > 0$  e  $y_{rj} > 0 \Rightarrow$

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq y_{0j} \geq 0$$

Assim, foi provado que os custos relativos das variáveis não básicas com  $y_{rj} > 0$ ,  $\forall j \in R_2$ , são não negativos.

ii)  $y_{rj} < 0$ ,  $j \in R_2$  então de (129) temos  $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq -\frac{y_{0j}}{y_{rj}}$ . Multiplicando a desigualdade por  $y_{rj} < 0$ , obtém-se  $y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0$ .

Assim, foi provado que os custos relativos das variáveis não básicas com  $y_{rj} < 0$ ,  $\forall j \in R_2$ , são não negativos.

a.2) suponha que foi selecionada  $x_k$ ,  $k \in R_2 \Rightarrow y_{0k} > 0$  e  $y_{rk} < 0$ .

Provaremos que:

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0, \forall j \in R_1 \quad (136)$$

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0, \forall j \in R_2 \quad (137)$$

Prova de (136):

i) Se  $y_{rj} > 0$ ,  $j \in R_1$  então, de (129),  $0 < -\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq -\frac{y_{0j}}{y_{rj}}$ . Multiplicando a desigualdade por  $y_{rj} > 0$ , obtém-se:  $y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0$ .

Assim, foi provado que os custos relativos das variáveis não básicas com  $y_{rj} > 0$ ,  $\forall j \in R_2$ , são não positivos.

ii)  $y_{rj} < 0$ ,  $j \in R_1$  então  $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq 0$ , pois,  $y_{0k} > 0$ ,  $y_{rk} > 0$  e  $y_{rj} < 0 \Rightarrow$

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \leq y_{0j} \leq 0$$

Assim, foi provado que os custos relativos das variáveis não básicas com  $y_{rj} < 0$ ,  $\forall j \in R_1$ , são não positivos.

Prova de (137):

i) Se  $y_{rj} > 0$ ,  $j \in R_2 \Rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0$ , pois,  $y_{0k} \geq 0$ ,  $y_{rk} < 0$  e  $y_{rj} > 0$

$$\Rightarrow y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq y_{0j} \geq 0$$

Assim, foi provado que os custos relativos das variáveis não básicas com  $y_{rj} > 0$ ,  $\forall j \in R_2$ , são não negativos.

ii)  $y_{rj} < 0$ ,  $j \in R_2$  então de (129) temos  $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq -\frac{y_{0j}}{y_{rj}}$ . Multiplicando a desigualdade por  $y_{rj} < 0$ , obtém-se  $y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0$ .

Assim, foi provado que os custos relativos das variáveis não básicas com  $y_{rj} < 0$ ,  $\forall j \in R_2$ , são não negativos.

## Prova 2

b) Quando  $z_{r0} < I_r$  (a VB tem seu limite inferior violado), a pivotagem deve produzir uma melhora na função objetivo (um aumento no caso de um problema de minimização).

b.1) suponha que foi selecionada a variável não básica  $x_k$ ,  $k \in R_2$  candidata a entrar na base ( $y_{0k} \geq 0$ ).

De (118) temos que a função objetivo após a pivotagem assume a seguinte forma:

$\tilde{z}_{00} = z_{00} + \frac{y_{0k}}{y_{rk}}(I_r - z_{r0})$ . Como  $y_{0k} \geq 0$ ;  $I_r - z_{r0} > 0 \Rightarrow y_{rk} > 0$  para garantir que  $\frac{y_{0k}}{y_{rk}}(I_r - z_{r0}) \geq 0$  para que exista uma melhoria na função objetivo.

Desta forma, serão candidatas todas as variáveis  $x_j$ ,  $j \in R_2$  tal que  $y_{rj} > 0$ .

Da linha de custos relativos,  $\forall j \in R_2$  e considerando que os novos custos relativos devem continuar não negativos, obtém-se:

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \geq 0 \Rightarrow y_{0j} \geq \frac{y_{0k}}{y_{rk}}y_{rj} \Rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}} \leq \frac{y_{0j}}{y_{rj}}, \text{ pois, } y_{rj} > 0$$

Assim, a  $\mathbf{x}_k$  selecionada é aquela com  $\mathbf{k} \in \mathbf{R}_2$  tal que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \max\left\{\frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} > \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{u}_j\right\} \quad (138)$$

b.2)  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbf{R}_1$  (a variável não básica  $\mathbf{x}_k$  candidata a entrar na base está no seu limite inferior)  $\Rightarrow y_{0k} \leq \mathbf{0}$ .

De (125) a função objetivo assume a seguinte forma após a pivotagem:

$\tilde{\mathbf{z}}_{00} = \mathbf{z}_{00} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} (\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{l}_r)$  como  $y_{0k} \leq \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{l}_r - \mathbf{z}_{r0} \geq \mathbf{0} \Rightarrow y_{rk} < \mathbf{0}$ , pois,  $-\frac{y_{0k}}{y_{rk}} (\mathbf{z}_{r0} - \mathbf{l}_r) \geq \mathbf{0}$  para produzir um aumento na função objetivo. Desta forma, serão candidatas todas as variáveis não básicas  $\mathbf{x}_j$ ,  $\mathbf{j} \in \mathbf{R}_1$  tal que  $y_{rj} < \mathbf{0}$ .

Da linha de custos relativos,  $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{R}_1$ , obtém-se:

$$y_{0j} - \frac{y_{0k}}{y_{rk}} y_{rj} \leq \mathbf{0}$$

Onde os novos custos relativos devem continuar não positivos após a pivotagem, ou seja,  $\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \geq \frac{y_{0k}}{y_{rk}}$ , pois,  $y_{rj} < \mathbf{0}$

Assim, a  $\mathbf{x}_k$  selecionada é aquela com  $\mathbf{k} \in \mathbf{R}_1$  tal que:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} < \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{l}_j\right\} \quad (139)$$

De (130) e (131) conclui-se que  $\mathbf{x}_k$  a entrar na base deve ser obtida através de:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{y_{0j}}{y_{rj}}: (y_{rj} > \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{u}_j) \text{ ou } (y_{rj} < \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{l}_j)\right\} \quad (140)$$

## Resumo

Se a variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  viola o limite inferior:

$$\mathbf{x}_k \rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min\left\{-\frac{y_{0j}}{y_{rj}}: (y_{rj} < \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{u}_j) \text{ ou } (y_{rj} > \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{l}_j)\right\} \quad (129)$$

ii) Se a variável básica  $\mathbf{x}_{B_r}$  viola o limite superior:

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{y_{0j}}{y_{rj}}: (y_{rj} > \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{u}_j) \text{ ou } (y_{rj} < \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x}_j = \mathbf{l}_j)\right\} \quad (132)$$

### Resumo das fórmulas matemáticas para pivotagem

a)  $z_{r0} > u_r$

$$\begin{aligned} \text{a.1) } x_k, k \in R_2 & \Rightarrow y_{rk} < 0 \Rightarrow x_k = u_k - \Delta_k, \Delta_k = -\frac{z_{r0} - u_r}{y_{rk}} > 0 \\ \Rightarrow x_k = u_k + \frac{1}{y_{rk}} (z_{r0} - u_r) & \text{ e } x_{B_i} = z_{i0} + \frac{y_{ik}}{y_{rk}} (u_r - z_{r0}) = z_{i0} + y_{ik} (u_k - \\ x_k) = z_{i0} + y_{ik} \Delta_k, i \neq r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a.2) } x_k, k \in R_1 & \Rightarrow y_{rk} > 0 \Rightarrow x_k = l_k + \Delta_k, \Delta_k = \frac{z_{r0} - u_r}{y_{rk}} > 0 \\ \Rightarrow x_k = l_k + \frac{1}{y_{rk}} (z_{r0} - u_r) & \text{ e } x_{B_i} = z_{i0} + \frac{y_{ik}}{y_{rk}} (u_r - z_{r0}) = z_{i0} + y_{ik} (l_k - \\ x_k) = z_{i0} - y_{ik} \Delta_k, i \neq r \end{aligned}$$

b)  $z_{r0} < l_r$

$$\begin{aligned} \text{b.1) } x_k, k \in R_2 & \Rightarrow y_{rk} > 0 \Rightarrow x_k = u_k - \Delta_k, \Delta_k = \frac{l_r - z_{r0}}{y_{rk}} > 0 \Rightarrow \\ x_k = u_k - \frac{1}{y_{rk}} (l_r - z_{r0}) & \text{ e } x_{B_i} = z_{i0} + \frac{y_{ik}}{y_{rk}} (l_r - z_{r0}) = z_{i0} + y_{ik} (u_k - \\ x_k) = z_{i0} + y_{ik} \Delta_k, i \neq r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.2) } x_k, k \in R_1 & \Rightarrow y_{rk} < 0 \Rightarrow x_k = l_k + \Delta_k, \Delta_k = -\frac{l_r - z_{r0}}{y_{rk}} > 0 \\ \Rightarrow x_k = l_k + \frac{1}{y_{rk}} (z_{r0} - l_r) & \text{ e } x_{B_i} = z_{i0} + \frac{y_{ik}}{y_{rk}} (l_r - z_{r0}) = z_{i0} + y_{ik} (l_k - x_k) = z_{i0} - \\ y_{ik} \Delta_k, i \neq r \end{aligned}$$

**Observação 30:-** Durante a nossa pesquisa sempre observamos que na literatura existente não se prevê a possibilidade de não existir a mudança de base no método dual simplex canalizado. Desta forma, incluímos esta possibilidade nos cálculos das fórmulas de (141) a (146).

Fórmulas:

$$\mathbf{x}_k \rightarrow -\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \text{Min} \left\{ -\frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} < 0 \wedge x_j = u_j) \vee (y_{rj} > 0 \wedge x_j = l_j) \right\} \quad (141)$$

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{rj}} : (y_{rj} > 0 \wedge x_j = u_j) \vee (y_{rj} < 0 \wedge x_j = l_j) \right\} \quad (142)$$

$$\left. \begin{array}{l} z_{r0} > u_r \Rightarrow \mathbf{x}_k, \mathbf{k} \in \mathbf{R}_2 \Rightarrow y_{rk} < 0 \\ \Delta_k = \min \left\{ \frac{u_r - z_{r0}}{y_{rk}}, u_k - l_k \right\} \\ \mathbf{x}_k = u_k - \Delta_k \rightarrow \tilde{z}_{r0} \\ \mathbf{x}_{B_i} = z_{i0} - y_{ik} \Delta_k \rightarrow \tilde{z}_{i0} \end{array} \right\} \quad (143)$$

$$\left. \begin{array}{l} z_{r0} > u_r \Rightarrow \mathbf{x}_k, \mathbf{k} \in \mathbf{R}_1 \Rightarrow y_{rk} > 0 \\ \Delta_k = \min \left\{ \frac{u_r - z_{r0}}{-y_{rk}}, u_k - l_k \right\} \\ \mathbf{x}_k = l_k + \Delta_k \rightarrow \tilde{z}_{r0} \\ \mathbf{x}_{B_i} = z_{i0} - y_{ik} \Delta_k \rightarrow \tilde{z}_{i0} \end{array} \right\} \quad (144)$$

$$\left. \begin{array}{l} z_{r0} < l_r \Rightarrow \mathbf{x}_k, \mathbf{k} \in \mathbf{R}_2 \Rightarrow y_{rk} > 0 \\ \Delta_k = \min \left\{ \frac{l_r - z_{r0}}{y_{rk}}, u_k - l_k \right\} \\ \mathbf{x}_k = u_k - \Delta_k \rightarrow \tilde{z}_{r0} \\ \mathbf{x}_{B_i} = z_{i0} + y_{ik} \Delta_k \rightarrow \tilde{z}_{i0} \end{array} \right\} \quad (145)$$

$$\left. \begin{array}{l} z_{r0} < l_r \Rightarrow \mathbf{x}_k, \mathbf{k} \in \mathbf{R}_1 \Rightarrow y_{rk} < 0 \\ \Delta_k = \min \left\{ \frac{l_r - z_{r0}}{-y_{rk}}, u_k - l_k \right\} \\ \mathbf{x}_k = l_k + \Delta_k \rightarrow \tilde{z}_{r0} \\ \mathbf{x}_{B_i} = z_{i0} - y_{ik} \Delta_k \rightarrow \tilde{z}_{i0} \end{array} \right\} \quad (146)$$

**Algoritmo Dual Simplex Canalizado**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{array} \right.$$

Passo inicial:

1. Calcular  $\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N$ , escolhendo as variáveis que estão no seu limite inferior ( $\mathbf{x}_k, \mathbf{k} \in \mathbf{R}_1$ ) ou em seu limite superior ( $\mathbf{x}_k, \mathbf{k} \in \mathbf{R}_2$ ). A seguir calcular:

$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \bar{\mathbf{c}}_{N_1} \mathbf{l}_{N_1} - \bar{\mathbf{c}}_{N_2} \mathbf{u}_{N_2}$  e  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_1 \mathbf{l}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_2 \mathbf{u}_{N_2}$ , onde  $\bar{\mathbf{c}}_{N_1} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_1 - \mathbf{c}_{N_1}$  e  $\bar{\mathbf{c}}_{N_2} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}_2 - \mathbf{c}_{N_2}$  e assim montar o quadro dual simplex inicial que satisfaça à **ótimalidade** ( $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in \mathbf{R}_1$  e  $z_j - c_j \geq 0, \forall j \in \mathbf{R}_2$ );

2. Se tal quadro é **factível** para  $l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, m$ ; então PARE (Solução ótima); Caso contrário ir para 3;

3. Seleccionar  $\mathbf{x}_{B_r}$  (a  $\mathbf{x}_{B_i}$  que tem o limite mais violado);

4. Escolher  $x_k$ . Se  $z_{r0} > u_r$  (utilizar 141). Se  $z_{r0} < l_r$  (utilizar 142). Se não for possível escolher  $x_k$  então o problema é **infectível**. PARE;

5. Pivotamento (da forma padrão), atualizar RHS através de:

$$z_{r0} > u_r \quad (x_{B_r} \rightarrow 141 \quad \text{e } x_k, k \in R_2 \rightarrow (143))$$

$$z_{r0} > u_r \quad (x_{B_r} \rightarrow 141 \quad \text{e } x_k, k \in R_1 \rightarrow (144))$$

$$z_{r0} < l_r \quad (x_{B_r} \rightarrow 142 \quad \text{e } x_k, k \in R_2 \rightarrow (145))$$

$$z_{r0} < l_r \quad (x_{B_r} \rightarrow 142 \quad \text{e } x_k, k \in R_1 \rightarrow (146))$$

Voltar para 2.

## 6.5 Exemplos Ilustrativos

**Exemplo 13:-** Resolver o PL abaixo usando o método primal simplex e o quadro reduzido Garfinkel-Nemhauser:

$$\begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solução: Podemos escrever  $\begin{cases} \text{Min } x_0 = -z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$ , ou então

$$\begin{cases} \text{Min } x_0 = -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 10 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases} \text{ . Assim temos os seguintes dados:}$$

$$B = [a_3 \ a_4 \ a_5] = I = B^{-1}, \quad N = [a_1 \ a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad c_B = [0 \ 0 \ 0],$$

$$w = c_B B^{-1} = c_B = [0 \ 0 \ 0], \quad c_N = [-1 \ -2], \quad \bar{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = wN - c_N = -c_N = [1 \ 2],$$

$$x_0 = wb = 0 \text{ e } \bar{b} = B^{-1}b = b \geq 0.$$

1ª Iteração:

$$y_{0k} = \text{Max } \{y_{0j}, j \in R\} = \text{Max } \{y_{01}, y_{02}\} = \text{Max } \{1, 2\} = 2 \therefore k = 2, \text{ ou seja, } x_2 \text{ entra na base.}$$



$$\theta_{r2} = \text{Min} \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{i2}}, y_{i2} > 0 \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{3}{1}, \frac{10}{3} \right\} = 3 \therefore r = 2, \text{ ou seja, } x_3 \text{ sai da base.}$$

	RHS	-x1	-x2
x0	0	1	2
x3	3	1	1
x4	0	1	-1
x5	10	1	3

2ª Iteração:

	RHS	-x1	-x3
x0	-6	-1	-2
x2	3	1	1
x4	3	2	1
x5	1	-2	-3

$y_{0j} \leq 0, \forall j \in \mathbf{R} \therefore$  A SBF é ótima.  $x_0 = -6, x_1 = x_3 = 0, x_2 = 3, x_4 = 3$  e  $x_5 = 1$ .

**Exemplo 14:-** Resolver o seguinte PL usando o método primal simplex de duas fases

e o quadro reduzido de Nemhauser-Garfinkel. 
$$\begin{cases} \text{Min } x_0 = 3x_1 + 10x_3 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Acrescentando as variáveis de folga, obtém-se: 
$$\begin{cases} \text{Min } x_0 = 3x_1 + 10x_3 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

A seguir, acrescentando variáveis artificiais, obtém-se: 
$$\begin{cases} \text{Min } z_0 = x_6 + x_7 \\ \text{Min } x_0 = 3x_1 + 10x_3 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 + x_7 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7 \end{cases}$$

Desta forma temos os seguintes dados:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [\mathbf{a}_6 \ \mathbf{a}_7] = \mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1} \text{ e temos } \mathbf{N} =$$

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Custos relativos da função objetivo da Fase I:

$$\mathbf{c}'_B = [1 \ 1], \mathbf{c}'_N = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \bar{\mathbf{c}}'_N = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}'_N = \mathbf{w}'_N - \mathbf{c}'_N = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = [2 \ 0 \ 4 \ -1 \ -1]$$

Custos relativos da função objetivo da Fase II:

$$\mathbf{c}_B = [0 \ 0], \mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{c}_B = [0 \ 0], \mathbf{c}_N = [3 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0] \text{ então obtemos } \bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N = \mathbf{w}_N - \mathbf{c}_N = -\mathbf{c}_N = [-3 \ 0 \ -10 \ 0 \ 0].$$

$$\text{Função objetivo da Fase I: } \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}'_B \mathbf{b} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3.$$

$$\text{Função objetivo da Fase II: } \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B \mathbf{b} = 0.$$

$$\text{Colunas não básicas e RHS: } \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1ª Iteração:

	RHS	-x <sub>1</sub>	-x <sub>2</sub>	-x <sub>3</sub>	-x <sub>4</sub>	-x <sub>5</sub>
z <sub>0</sub>	3	2	0	4	-1	-1
x <sub>0</sub>	0	-3	0	-10	0	0
x <sub>6</sub>	1	1	1	1	-1	0
x <sub>7</sub>	2	1	-1	3	0	-1

$\mathbf{y}'_{0k} = \text{Max } \{\mathbf{y}'_{0j}, j \in \mathbf{R}\} = \text{Max } \{\mathbf{y}'_{01}, \mathbf{y}'_{02}, \mathbf{y}'_{03}, \mathbf{y}'_{04}, \mathbf{y}'_{05}\} = \text{Max } \{2, 0, 4, -1, -1\} = 4 \therefore k = 3$ , ou seja, x<sub>3</sub> entra na base.

$$\theta'_{r3} = \text{Min } \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{i3}}, y_{i3} > 0 \right\} = \text{Min } \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3} \therefore r = 2, \text{ ou seja, } x_7 \text{ sai da base.}$$

2ª Iteração:

	RHS	-x <sub>1</sub>	-x <sub>2</sub>	-x <sub>7</sub>	-x <sub>4</sub>	-x <sub>5</sub>
z <sub>0</sub>	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
x <sub>0</sub>	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$
x <sub>6</sub>	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
x <sub>3</sub>	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

$\mathbf{y}'_{0k} = \text{Max } \{\mathbf{y}'_{0j}, j \in \mathbf{R}\} = \text{Max } \{\mathbf{y}'_{01}, \mathbf{y}'_{02}, \mathbf{y}'_{03}, \mathbf{y}'_{04}, \mathbf{y}'_{05}\} = \text{Max } \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{7}{3} \right\} = \frac{4}{3} \therefore k = 2$ , ou seja, x<sub>2</sub> entra na base.

$$\theta'_{r2} = \text{Min } \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{i2}}, y_{i2} > 0 \right\} = \text{Min } \left\{ \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right\} = \frac{1}{3} \therefore r = 1, \text{ ou seja, } x_6 \text{ sai da base.}$$

3ª Iteração:

	RHS	-x1	-x6	-x7	-x4	-x5	
z0	0	0	-1	-1	0	0	Fim da Fase I
x0	$\frac{15}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	
x2	1	1	3	1	3	1	
	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	
x3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

O quadro da Fase II será:

	RHS	-x1	-x4	-x5
x0	$\frac{15}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
x2	1	1	3	1
	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$
x3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$y_{0k} = \text{Max } \{y_{0j}, j \in \mathbf{R}\} = \text{Max } \{y_{01}, y_{04}, y_{05}\} = \text{Max } \{2, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\} = 2 \therefore k = 1$ , ou seja,  $x_1$  entra na base.

$\theta_{r1} = \text{Min } \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{i1}}, y_{i1} > 0 \right\} = \text{Min } \left\{ \frac{1/4}{1/2}, \frac{3/4}{1/2} \right\} = \frac{1}{2} \therefore r = 1$ , ou seja,  $x_2$  sai da base.

4ª Iteração:

	RHS	-x2	-x4	-x5
x0	$\frac{13}{2}$	-4	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
x1	1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{2}{2}$		$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$
x3	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$y_{0k} = \text{Max } \{y_{0j}, j \in \mathbf{R}\} = \text{Max } \{y_{02}, y_{04}, y_{05}\} = \text{Max } \{-4, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\} = \frac{1}{2} \therefore k = 4$ , ou seja,  $x_4$  entra na base.

$\theta_{r4} = \text{Min } \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{i4}}, y_{i4} > 0 \right\} = \text{Min } \left\{ \frac{1/2}{1/2} \right\} = 1 \therefore r = 2$ , ou seja,  $x_3$  sai da base.

5ª Iteração:

	RHS	-x2	-x3	-x5
x0	6	-3	-1	-3
x1	2	-1	3	-1
x4	1	-2	2	-1

Considerando que  $y_{0j} \leq 0, \forall j \in \mathbf{R}$  então encontramos a solução ótima, ou seja,  $x_0 = 6, x_1 = 2, x_4 = 1, x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$ .

**Exemplo 15:-** Resolver o seguinte PL usando o método dual simplex e o quadro reduzido de

$$\text{Nemhauser-Garfinkel: } \begin{cases} \text{Min } x_0 = 8x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Acrescentando as variáveis de folga, obtém-se: } \begin{cases} \text{Min } x_0 = 8x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_5 = -8 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = -2 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$

$$\text{Assim, temos os seguintes dados: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = [a_4 \ a_5 \ a_6] = I = B^{-1} \text{ e } B^{-1}N = [a_1 \ a_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = b = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}, w = c_B B^{-1} = c_B = [0 \ 0 \ 0], c_N = [8 \ 8 \ 9], x_0 = c_B B^{-1}b = wb = 0.$$

Assim, obtemos  $\bar{c}_N = c_B B^{-1}N - c_N = wN - c_N = -c_N = [-8 \ -8 \ -9]$ . A otimalidade do problema dual é satisfeita, porém, o mesmo não ocorre com a factibilidade do primal.

1ª Iteração:

$$y_{r0} = \text{Min } \{y_{i0}, i = 1, 2, 3\} = \text{Min } \{1, -8, -2\} = -8 \therefore r = 2, \text{ ou seja, } x_5 \text{ deixa a base.}$$

$$\frac{y_{0k}}{y_{2k}} = \text{Min } \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{2j}}, y_{2j} < 0, j \in R \right\} = \text{Min } \left\{ \frac{-8}{-2}, \frac{-8}{-4}, \frac{-9}{-1} \right\} = 2 \therefore k = 2, \text{ ou seja, } x_2 \text{ entra na base.}$$

	RHS	-x <sub>1</sub>	-x <sub>2</sub> ↓	-x <sub>3</sub>
x <sub>0</sub>	0	-8	-8	-9
x <sub>4</sub>	1	1	1	1
←x <sub>5</sub>	-8	-2	-4	-1
x <sub>6</sub>	-2	-1	1	1

2ª Iteração:

	RHS	-x <sub>1</sub> ↓	-x <sub>5</sub>	-x <sub>3</sub>
x <sub>0</sub>	16	-4	-2	-7
x <sub>4</sub>	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x <sub>2</sub>	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
←x <sub>6</sub>	-4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$y_{r0} = \text{Min } \{y_{i0}, i = 1,2,3\} = \text{Min } \{-1, 2, -4\} = -4 \therefore r = 3$ , ou seja,  $x_6$  deixa a base.

$\frac{y_{0k}}{y_{3k}} = \text{Min } \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{3j}}, y_{3j} < 0, j \in R \right\} = \text{Min } \left\{ \frac{-4}{-3/2} \right\} = -\frac{8}{3} \therefore k = 1$ , ou seja,  $x_1$  entra na base.

3ª Iteração:

	RHS	-x6	-x5	-x3
x0	$\frac{80}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$	-9
←x4	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
x2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
x1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$

$y_{r0} = \text{Min } \{y_{i0}, i = 1,2,3\} = \text{Min } \left\{ -\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3} \right\} = -\frac{7}{3} \therefore r = 1$ , ou seja,  $x_4$  deixa a base.

Como  $y_{rj} > 0, \forall j \in R \Rightarrow$  **O PL é infactível.**

**Exemplo 16:-** A base  $B = [a_4 \ a_5 \ a_6]$  e com as variáveis não básicas distribuídas na forma  $N_1 = [a_1]$  e  $N_2 = [a_3 \ a_4]$  identificam uma base adequada para resolver o PL usando o método dual simplex canalizado. Usando essa informação resolver o PL usando o método

$$\text{dual simplex canalizado} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } x_0 = x_1 - 8x_2 - 2x_3 \\ \text{sujeito a} \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 8 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 9 \\ x_1 \in [1, 3], x_2 \in [2, 7] \text{ e } x_3 \in [1, 5] \end{array} \right.$$

$$\text{Acrescentando as variáveis de folga:} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } x_0 = x_1 - 8x_2 - 2x_3 \\ \text{sujeito a} \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 9 \\ x_1 \in [1, 3], x_2 \in [2, 7], x_3 \in [1, 5] \text{ e } x_4, x_5, x_6 \in [0, \infty) \end{array} \right. \text{ Assim}$$

$$\text{temos os seguintes dados: } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B =$$

$$[a_4 \ a_5 \ a_6] = I = B^{-1}, B^{-1}N = N = [a_1 \ a_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{b} = B^{-1}b = b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, w = c_B B^{-1} =$$

$c_B = [0 \ 0 \ 0], c_N = [1 \ -8 \ -2], x_0 = c_B B^{-1}b = wb = 0$ . Assim, obtemos  $\bar{c}_N = c_B B^{-1}N - c_N = wN - c_N = -c_N = [-1 \ 8 \ 2]$ . Considerando  $R_1 = \{1\}$  e  $R_2 = \{2, 3\}$ , onde  $c_{N_1} = 1, c_{N_2} = [-8, -2], N_1 = [a_1]$ ,

$N_2 = [a_2 \ a_3]$ ,  $l_{N_1} = 1$ ,  $u_{N_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ , obtemos:  $\bar{c}_{N_1} = c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1} = w N_1 - c_{N_1} = -c_{N_1} = -1$  e  $\bar{c}_{N_2} = c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2} = w N_2 - c_{N_2} = -c_{N_2} = [8, 2]$ , que satisfazem a otimalidade dual. Também temos:

$$\bar{b} = B^{-1}b - B^{-1}N_1 l_{N_1} - B^{-1}N_2 u_{N_2} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -14 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (\nexists \text{ factibilidade primal})$$

$\bar{z} = c_B B^{-1}b - \bar{c}_{N_1} l_{N_1} - \bar{c}_{N_2} u_{N_2} = 0 - (-1).1 - [8 \ 2] \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = -65$ . A otimalidade do problema dual é satisfeita, porém, o mesmo não ocorre com a factibilidade do primal.

1ª Iteração:

	RHS	-x <sub>1</sub>	-x <sub>2</sub>	-x <sub>3</sub>	
x <sub>0</sub>	-65	-1	8	2	R <sub>1</sub> = {1}
x <sub>4</sub>	0	-1	2	-1	
←x <sub>5</sub>	-14	-1	4	-1	
x <sub>6</sub>	8	-1	1	-1	R <sub>2</sub> = {2, 3}

$x_5 = -14 < 0 = l_5$  tem o limite inferior violado  $\therefore r = 2$  e assim:

$$\frac{y_{0k}}{y_{2k}} = \text{Min} \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{2j}}, (y_{2j} > 0 \wedge x_j = u_j) \vee y_{2j} < 0 \wedge x_j = l_j \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{8}{4} \right\} = 1 \therefore k = 1.$$

$\Delta_1 = \min \left\{ \frac{l_2 - z_{20}}{-y_{21}}, u_1 - l_1 \right\} = \min \left\{ \frac{0 - (-14)}{-(-1)}, 2 \right\} = 2$ , ou seja,  $\nexists$  pivoteamento. Desta forma, obtém-se:

$$x_1 = l_1 + \Delta_1 = 1 + 23 = 3 \quad (1 \in R_2) \quad // \quad x_{B0} = z_{00} - y_{01}\Delta_1 = -65 - (-1).2 = -63 \quad // \quad x_4 = x_{B1} = z_{10} - y_{11}\Delta_1 = 0 - (-1).2 = 2 \quad // \quad x_5 = x_{B2} = z_{20} - y_{21}\Delta_1 = -14 - (-1).2 = -12 \quad // \quad x_6 = x_{B3} = z_{30} - y_{31}\Delta_1 = 8 - (-1).2 = 10$$

2ª Iteração:

	RHS	-x <sub>1</sub>	-x <sub>2</sub> ↓	-x <sub>3</sub>	
x <sub>0</sub>	-63	-1	8	2	R <sub>1</sub> = {∅}
x <sub>4</sub>	2	-1	2	-1	
←x <sub>5</sub>	-12	-1	4	-1	
x <sub>6</sub>	10	-1	1	-1	R <sub>2</sub> = {1, 2, 3}

$x_5 = -12 < 0 = l_5$  tem o limite inferior violado  $\therefore r = 2$  e assim:

$$\frac{y_{0k}}{y_{2k}} = \text{Min} \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{2j}}, (y_{2j} > 0 \wedge x_j = u_j) \vee y_{2j} < 0 \wedge x_j = l_j \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{8}{4} \right\} = 2 \therefore k = 2.$$

$\Delta_2 = \min \left\{ \frac{l_2 - z_{20}}{y_{22}}, u_2 - l_2 \right\} = \min \left\{ \frac{0 - (-12)}{4}, 5 \right\} = 3$ , ou seja,  $x_2$  entra e  $x_5$  deixa a base. Desta forma,

$$\text{obtem-se: } x_2 = u_2 - \Delta_2 = 7 - 3 = 4 \quad // \quad x_{B0} = z_{00} + y_{02}\Delta_2 = -63 + 8.3 = -39 \quad // \quad x_4 = x_{B1} = z_{10} - y_{12}\Delta_2 = 2 + 2.3 = 8 \quad // \quad x_6 = x_{B3} = z_{30} - y_{32}\Delta_2 = 10 + 1.3 = 13 \text{ e assim, } R_1 = \{5\} \text{ e } R_2 = \{1, 3\}$$

3ª Iteração:

	<b>RHS</b>	<b>-x<sub>1</sub></b>	<b>-x<sub>5</sub></b>	<b>-x<sub>3</sub></b>	
<b>x<sub>0</sub></b>	<b>-39</b>	<b>1</b>	<b>-2</b>	<b>4</b>	
<b>x<sub>4</sub></b>	<b>8</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>R<sub>1</sub> = {5}</b>
		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
<b>x<sub>2</sub></b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
		$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	
<b>x<sub>6</sub></b>	<b>13</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>R<sub>2</sub> = {1, 3}</b>
		$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	

Como se observa na tabela acima, ocorre a factibilidade primal na coluna RHS e a otimalidade dual é satisfeita. Desta forma, a solução ótima será:

**x<sub>0</sub> = -39, x<sub>1</sub> = 3, x<sub>2</sub> = 4, x<sub>3</sub> = 5, x<sub>4</sub> = 8, x<sub>5</sub> = 0 e x<sub>6</sub> = 13.**

## Conclusões

O Método Primal Simplex, desenvolvido por G. B. Dantzig existe há quase 70 anos e continua a ser um método eficiente na resolução de problemas práticos, apesar das pesquisas de Khachiyan (aonde o método veio a revelar-se muito lento) e Karmarkar (que funciona em tempo polinomial e consegue ser mais rápido do que as melhores implementações do método simplex em alguns problemas particularmente grandes).

Através da Análise Convexa, a validação matemática do método simplex é garantida com inúmeros teoremas que relacionam pontos extremos e direções extremas com as soluções básicas factíveis ótimas. Além dos teoremas tradicionais que são encontrados na literatura, baseado na importância dos aspectos geométricos do método simplex, foi criado o Teorema 4 que muito contribuirá na demonstração de outros teoremas. Desta forma, o capítulo 2 nos proporcionou: Encontrar pontos extremos e direções extremas; Provar teoremas sobre a solução factível ótima ou ilimitada de um PL e Provar de forma trivial de que o ótimo factível é um ponto extremo.

Para o Método Primal Simplex Revisado foi provado que um quadro simplex com uma solução básica factível gera um novo quadro que representa uma solução básica factível identificada com a nova base vizinha. Da mesma forma, foi provado que este processo é válido mesmo quando a base inicial não é a matriz identidade.

Para o Método Dual Simplex, foi mostrado a sutileza de se utilizar um quadro com os dados do problema primal, deslocando-se pelos pontos extremos do problema dual, cada vez de melhor qualidade até encontrar a solução ótima do problema dual e, simultaneamente, a do problema primal. Aqui foi provado que as condições de otimalidade do primal estabelecem uma relação com um ponto extremo do problema dual que é uma solução básica factível do mesmo. Foi visto que o Teorema 14 é inovador, muda a lógica de abordagem do método dual simplex e que pode ser usado para generalizar propriedades do método dual simplex canalizado.

Para o Método Primal Simplex Canalizado foi mostrado que a maneira mais eficiente para a sua resolução consiste em considerar as restrições canalizadas somente na forma implícita, mantendo o posto da matriz dos coeficientes. Como o Método Primal Simplex Canalizado não pode ser empregado quando o quadro simplex inicial não é factível então foi



implementado o Método das duas Fases do Primal Simplex Canalizado. A inovação constante neste capítulo foi a criação da matriz básica artificial no Método das duas fases do Primal Simplex Canalizado que é uma matriz diagonal onde seus elementos são 1 ou -1.

Para o Método Dual Simplex Canalizado apresentou-se o quadro de Garfinkel-Nemhauser onde eliminam-se do quadro as colunas das variáveis básicas que formam a matriz identidade no quadro original e facilita a pivotagem do mesmo. Mostrou-se que a escolha da variável não básica a entrar na base deve acarretar um novo quadro que satisfaz a otimalidade do problema. Desta forma, no capítulo 4 foi conhecido o inovador Garfinkel-Nemhauser para resolver um PL, o seu uso para o algoritmo do dual simplex, a análise/construção do Método de Fase Única do Dual Simplex Canalizado e a Prova de Otimalidade do Quadro Dual Simplex Canalizado. No Método de Fase Única do Dual Simplex Canalizado foi incluída a possibilidade de existir a mudança de base nos cálculos das fórmulas apresentadas.

Após esta pesquisa espera-se que haja continuidade no desenvolvimento de materiais didáticos de melhor qualidade para o ensino de Pesquisa Operacional nos cursos de pós-graduação que proporcionarão o aprimoramento do método simplex ou então uma ferramenta que o supere.

## Referências

- BAZARAA, M. J. *Linear programming and network flows*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.
- CARVALHO, D. M. *Optimização linear*. Aveiro: Universidade de Aveiro, 2005.
- DANTZIG, G. B. *Linear programming and extensions*. Princeton: Princeton University Press, 1963.
- HILLIER, F.; LIEBERMAN, G. *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: Editora da USP, 1988.
- KARMAKAR, N.; ADLER I.; RESENDE, M. G. C.; VEIGA, G.. An implementation of karmarkat's algorithm for linear programming. *mathematical programming*, 1989.
- MACULAN, N. *Otimização linear*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2004.
- MEZIAT, R. *Introducción al análisis convexo y los fundamentos de la programación matemática/Texto guia: curso análisis convexo*. Bogotá: Universidad de los Andes, 2005.
- O'CONNOR, J. L. *Solución de sistemas de ecuaciones, programación lineal y entera*. Madrid: Sección de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Madrid, 1991.
- PIRES, M. *Programação matemática*. Algarve: Universidade do Algarve, 2005.
- SOARES, J. *Optimização linear*. Coimbra: Universidade de Coimbra, 2007.
- ROMERO, R. *Optimización em sistemas eléctricos I*. Pereira-Risaralda: Taller de publicaciones de la Universidad Tecnológica de Pereira, 2005.

## Apêndice

O Teorema da Representação – caso geral (TGR) é muito importante em várias aplicações de PL e, particularmente, representa a base fundamental do princípio de decomposição matemática de Dantzig-Wolfe. Deve-se observar apenas que  $\mathbf{X}$  é um conjunto convexo poliedral como os que aparecem em problemas de PL.

### O TGR e as condições de otimalidade de um PL

$$\text{Seja o PL: } \begin{cases} \text{Min } z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (147)$$

$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  é o conjunto convexo para se usar o TGR, supondo conhecidos os seus pontos extremos  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \dots, \mathbf{x}_k\}$  bem como suas direções extremas  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_l\}$ . Então, utilizando o TGR de (3), teremos o seguinte PL equivalente:

$$\begin{cases} \text{Min } z(\lambda, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^k (\mathbf{c}\mathbf{x}_j)\lambda_j + \sum_{i=1}^l (\mathbf{c}\mathbf{d}_i)\mathbf{u}_i \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \\ \mathbf{u}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (148)$$

#### Observação 31:

i) (148) pode ser resolvido facilmente se há o conhecimento dos pontos extremos e direções extremas de  $\mathbf{X}$ . Se  $\mathbf{c}\mathbf{d}_j < 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ ; constata-se que esse PL é **ilimitado**, pois, neste caso,  $z(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ . Assim, se  $\mathbf{c}\mathbf{d}_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ ; pode-se mostrar que o PL equivalente (148) e, por sua vez, (147) tem ótimo finito. Para o caso (148) tem-se ótimo finito e um ponto extremo necessariamente deve ser a solução do PL. Pode-se verificar que se  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$  tendo  $\lambda_j \geq 0$  deve-se fazer  $\lambda_k = 1$  para a variável  $\lambda_j$  com menor coeficiente na função objetivo e  $\lambda_j = 0$ , caso  $j \neq k$ . Significa que  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_j)\lambda_j = \mathbf{x}_k$  é a solução que representa o  $k$ -ésimo ponto extremo.

ii) (148) é utilizado apenas para provar os critérios de otimalidade de um problema de PL. O mesmo é inadequado para resolver (147), pois, o trabalho de encontrar os pontos extremos e direções extremas é muito complexo. Por outro lado, esse fundamento pode ser utilizado no desenvolvimento de novas técnicas de otimização tal como o da Decomposição de Dantzig-Wolfe cujo princípio baseia-se em separar  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  em vários subconjuntos convexos, aproveitando a estrutura especial do mesmo.

### A lógica da decomposição matemática

$$\text{Seja o PL: } \begin{cases} \text{Min } z(x) = cx \\ \text{s. a} \\ \text{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow m \text{ restrições} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (149)$$

O conjunto  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  pode ser separado da seguinte forma:

$\mathbf{X}_1 = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1\}$  com  $\mathbf{m}_1$  restrições e  $\mathbf{X}_2 = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  com  $\mathbf{m}_2$  restrições, sendo  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$ . Desta forma, em  $\mathbf{X}_2$  permanece apenas um subconjunto de restrições do tipo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

#### Observação 32:

i) Se  $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}$  e  $\mathbf{m}_1 = \mathbf{0}$  então  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}$ . Se nesse contexto são encontrados os pontos extremos de  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}$  e se realiza a substituição de  $\mathbf{x}$  na função objetivo então encontra-se o PL equivalente (148) utilizado para provar a otimalidade de um problema de PL.

ii) Se  $\mathbf{m}_2 = \mathbf{0}$  então não existe possibilidade de encontrar um PL equivalente;

iii) Se  $\mathbf{0} < \mathbf{m}_2 < \mathbf{m}$  então pode-se encontrar todos os pontos extremos de  $\mathbf{X}_2$  e substituir a variável  $\mathbf{x}$  na função objetivo e nas restrições  $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ . Desta forma, encontra-se um PL equivalente com  $(\mathbf{m}_1 + \mathbf{1})$  restrições além das restrições  $\lambda_j \geq \mathbf{0}$ . Portanto, encontraremos um número elevado de problemas de PL equivalentes ao PL (148) dependendo do valor de  $\mathbf{m}_2$ , onde  $(\mathbf{0} < \mathbf{m}_2 \leq \mathbf{m})$  e da separação das restrições nos conjuntos  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ . Assim, para um mesmo valor de  $\mathbf{m}_2$  existem muitos problemas de PL equivalentes a (148) dependendo se uma restrição pertence a  $\mathbf{X}_1$  ou  $\mathbf{X}_2$ .

iv) Em todo o raciocínio considera-se que não existam direções extremas em  $\mathbf{X}$ . Por outro lado, pode-se utilizar esse raciocínio caso existam as direções extremas em  $\mathbf{X}$ .

v) A ideia básica do princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe é realizar a separação de (149) de forma eficiente. Nessa proposta, as chamadas restrições de acoplamento devem fazer parte de  $\mathbf{X}_1$  e as restrições bloco angulares, de  $\mathbf{X}_2$ . Nas restrições de acoplamento geralmente aparecem todas as variáveis do problema. Entretanto, nas bloco angulares existem poucas variáveis formando parte de um conjunto de restrições e se encontram separadas dos outros conjuntos de restrições. Por exemplo, num problema com quatro variáveis iniciais, a restrição  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40$  é uma restrição de acoplamento e as restrições  $x_1 + 3x_2 \leq 30$  e  $2x_1 + x_2 \leq 20$  bem como  $x_3 \leq 10$ ,  $x_4 \leq 10$  e  $x_3 + x_4 \leq 15$  formam um bloco angular.

### A Decomposição de Dantzig-Wolfe

O princípio básico da Decomposição de Dantzig-Wolfe pode ser resumido da seguinte forma:

i) Pretende-se resolver o PL original de forma indireta resolvendo o PL equivalente. Desta forma deve-se primeiro realizar a separação, ou seja, montar os subconjuntos  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ ;

ii) Para resolver o PL equivalente não é necessário montá-lo de forma explícita, ou seja, não há necessidade de se encontrar de forma explícita os pontos extremos de  $\mathbf{X}_2$ ;

iii) Montar inicialmente apenas  $(\mathbf{m}_1 + 1)$  colunas do PL equivalente. Deve-se conhecer os coeficientes da função objetivo de  $(\mathbf{m}_1 + 1)$  variáveis básicas, assim como os coeficientes dessas variáveis básicas em cada uma das  $(\mathbf{m}_1 + 1)$  restrições. Deve ser lembrado que o PL equivalente tem  $(\mathbf{m}_1 + 1)$  restrições e, assim, há necessidade dos dados completos de  $(\mathbf{m}_1 + 1)$  variáveis do PL equivalente. Adicionalmente, deve-se ter certeza de que essas variáveis representam uma SBF e, assim, pode-se montar o quadro simplex reduzido do PL equivalente.

iv) A seguir deve-se verificar a otimalidade desta SBF. Deve se observado que cada variável (coluna) do PL equivalente é um ponto extremo do conjunto  $\mathbf{X}_2$ . A estratégia fundamental da Decomposição de Dantzig-Wolfe é que analisando o conjunto  $\mathbf{X}_2$  e com uma função objetivo adequada será provado que a SBF corrente é ótima ou, em caso contrário, nos permite-se encontrar o ponto extremo de  $\mathbf{X}_2$  relacionado com a variável  $\lambda_j$  do problema de PL equivalente com o maior coeficiente de custo relativo.

#### Encontrando a variável com maior coeficiente de custo relativo

Seja o PL equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z(\lambda) = \sum_{j=1}^k (c x_j) \lambda_j \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k (A_1 x_j) \lambda_j = \mathbf{b}_1 \rightarrow m_1 \text{ restrições} \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \rightarrow \text{uma restrição} \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{array} \right. \quad (150)$$

Assim, o PL equivalente (150) assume a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z(\lambda) = \sum_{j=1}^k f_j \lambda_j \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k P_j \lambda_j = \mathbf{b}_1 \rightarrow \mathbf{w} \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \rightarrow w_0 \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{array} \right. \quad (151)$$

Onde o vetor  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_{m_1}]$  e  $w_0$  são as variáveis do problema dual de (150),  $f_j$  é um escalar e  $P_j$  é um vetor de tamanho  $\mathbf{m}_1$ .

Supor que existe uma SBF de (150) ou (151) com seu respectivo quadro simplex revisado e, portanto, com  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{w}_0$  conhecidos. Obviamente,  $\mathbf{w}$  é um vetor de dimensão  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{w}_0$  é um escalar. Nesse contexto, pretende-se verificar a otimalidade dessa SBF. Desta forma, deve-se calcular os coeficientes de custo relativo das variáveis não básicas de (151) no quadro simplex revisado corrente. O coeficiente de custo relativo da variável não básica  $\lambda_j$  assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{f}_j &= \mathbf{w} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_j \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} - f_j \Rightarrow \quad \bar{c}_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j \text{ (BAZARAA, 2010)} \\ \bar{f}_j &= [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \cdots \ \mathbf{w}_{\mathbf{m}_1} | \mathbf{w}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_j \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} - \mathbf{c}\mathbf{x}_j = \mathbf{w}\mathbf{P}_j + \mathbf{w}_0 - \mathbf{c}\mathbf{x}_j \\ \bar{f}_j &= \mathbf{w}[\mathbf{A}_1\mathbf{x}_j] - \mathbf{c}\mathbf{x}_j + \mathbf{w}_0 = [\mathbf{w}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}] \mathbf{x}_j + \mathbf{w}_0\end{aligned}\tag{152}$$

Onde  $\bar{f}_j$  é o coeficiente de custo relativo da variável não básica em (151),  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{w}_0$  são conhecidos e  $\mathbf{x}_j$  é um ponto extremo de  $\mathbf{X}_2$  relacionado com a variável não básica  $\lambda_j$ .

**Observação 33:**

i) A relação (152) permite encontrar ou identificar o coeficiente de custo relativo da variável não básica  $\lambda_j$  do problema de PL equivalente (151). Assim, para que seja possível calcular o coeficiente de custo relativo de  $\lambda_j$  necessitamos a disponibilidade do ponto extremo  $\mathbf{x}_j$  do conjunto  $\mathbf{X}_2$  associado com  $\lambda_j$ .

ii) Em (152),  $[\mathbf{w}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}]$  e  $\mathbf{w}_0$  são conhecidos e são os mesmos para todas as variáveis não básicas  $\lambda_j$ .

iii) precisa-se identificar a variável não básica  $\lambda_j$  que tem o maior coeficiente de custo relativo  $[\bar{f}_j]$  e que identifica o ponto extremo associado com  $\lambda_j$ , uma vez identificadas  $\mathbf{x}_j$  e  $\bar{f}_j$  então estes valores podem ser utilizados para introduzir  $\lambda_j$  na base quando resolvemos o PL equivalente (151) usando o método primal simplex revisado.

iv) Entre todas as variáveis não básicas  $\lambda_j$  do problema (151), deve-se identificar aquela  $\lambda_j$  que tem o maior coeficiente de custo relativo  $\bar{f}_j$ . Em outras palavras, busca-se identificar o ponto extremo  $\mathbf{x}_j$  do conjunto  $\mathbf{X}_2$  que produz o maior valor de  $\bar{f}_j$ . Isso acontece quando resolve-se o PL:

$$\begin{cases} \text{Max } v(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c})\mathbf{x} + \mathbf{w}_0 \\ \text{s. a} \\ \mathbf{X}_2 = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \end{cases}\tag{153}$$

Observa-se que em (153)  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_2$ . Porém, a solução ótima de (153) sempre é um ponto extremo (se tem ótimo finito). Desta forma, quando resolve-se (153) encontra-se o ponto extremo de  $\mathbf{X}_2$  que maximiza a relação  $v(\mathbf{x}) = [\mathbf{w}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}]\mathbf{x} + \mathbf{w}_0$  onde  $\mathbf{x}$  sempre é um ponto

extremo. Após resolver (153) será conhecido o ponto extremo  $\mathbf{x}_j$  que produz o maior coeficiente de custo relativo na variável não básica  $\lambda_j$  associada com ele em (153). Desta forma, resolvendo (153) obtém-se  $\bar{\mathbf{f}}_j = [\mathbf{wA}_1 - \mathbf{c}] \mathbf{x}_j + \mathbf{w}_0$ .

v) Se, após resolver (153), é verificado que é válida a relação:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{f}}_j = [\mathbf{wA}_1 - \mathbf{c}] \mathbf{x}_j + \mathbf{w}_0 \leq \mathbf{0} \quad (154)$$

Então o quadro simplex revisado corrente do PL equivalente é ótimo, pois prova-se que os coeficientes de custo relativo de todas as variáveis não básicas são não positivos.

vi) Se  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$  então a variável não básica  $\lambda_j$  associada ao ponto extremo  $\mathbf{x}_j$  fornecida pela solução de (153) deve entrar na base e é mudado a mesma no quadro simplex revisado. A coluna da variável não básica  $\lambda_j$  que deve entrar na base deve ser adequadamente atualizada para a base corrente: a) o coeficiente de custo relativo de  $\lambda_j$  é  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  e já se encontra calculado após resolver (153); b) os coeficientes das restrições de  $\lambda_j$  serão chamados de  $\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_j \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_j \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ , onde  $\mathbf{x}_j$  é o ponto extremo identificado pela solução de (153). A coluna atualizada de  $\mathbf{a}_j$  é  $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$  e a coluna de  $\lambda_j$  adequadamente atualizada é  $\begin{bmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}_j \end{bmatrix}$ .

### A Fase I da Decomposição Matemática de Dantzig-Wolfe

Para a Fase I será mostrado o tipo de PL equivalente que pretende-se resolver, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z(\lambda) = \sum_{j=1}^k (\mathbf{c}\mathbf{x}_j)\lambda_j \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_j)\lambda_j = \mathbf{b}_1 \rightarrow m_1 \text{ restrições} \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \rightarrow \text{uma restrição} \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{array} \right. \quad (155)$$

Caso não exista uma SBF inicial para iniciar o processo de resolução de (155) então deve-se implementar a Fase I de (155) utilizando a mesma estratégia empregada na fase I de qualquer problema de PL. Desta forma, o problema de Fase I para resolver (155) será:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } x_0 = \sum_{i=1}^{m_1+1} \mathbf{s}_i \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_j)\lambda_j + \mathbf{I}\mathbf{s}_{m_1} = \mathbf{b}_1 \rightarrow m_1 \text{ restrições} \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \rightarrow \text{uma restrição} \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{array} \right. \quad (156)$$

Onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz quadrada de ordem  $m_1$  e  $\mathbf{s}_i$ 's são variáveis artificiais da Fase I.

Seja  $\lambda'_B$  o vetor das variáveis básicas da Fase I. Desta forma, para iniciar a mesma temos a seguinte SBF artificial inicial:

$$\lambda'_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{m_1+1} \end{bmatrix}, \lambda'_N = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{m_1+1} \end{bmatrix} \text{ e } w'' = [w' \ w'_0] \text{ onde não se conhece as variáveis não}$$

básicas  $\lambda_j$ , a dimensão de  $\lambda'_N$ , isto é, não se sabe o valor de  $k$ . O vetor de coeficientes de custo relativo da função objetivo da Fase I será:

$$c' = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1], \text{ ou seja, } c_j = \begin{cases} 0, & j=1, 2, \dots, k \\ 1, & j=k+1, k+2, \dots, m_1+1 \end{cases}$$

Agora é encontrada a forma matemática do coeficiente de custo relativo de uma variável não básica  $\lambda_j$  para a SBF (inicial) corrente:

$$\begin{aligned} \bar{c}'_j &= w''a_j - c'_j = [w'_1 \ w'_2 \ \dots \ w'_m \ w'_0] \begin{bmatrix} A_1 x_j \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = [w'_1 \ w'_2 \ \dots \ w'_m \ w'_0] \begin{bmatrix} P_j \\ 1 \end{bmatrix} = w'P_j + w'_0 \quad \Rightarrow \\ \bar{c}'_j &= w'A_1 x_j + w'_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{c}'_j = [w'A_1]x_j + w'_0 \end{aligned} \quad (157)$$

Conhecida a SBF corrente então se conhece  $w$  e  $w_0$  bem como  $A_1$  é conhecida. Assim, a relação (157) permite encontrar o coeficiente de custo relativo de cada variável não básica do PL (155), apesar de não se conhecer cada ponto extremo  $x_j$  relacionado com cada variável  $\lambda_j$ . O que pretende-se identificar é aquela variável não básica com o maior valor de  $\bar{c}'_j$ . O PL abaixo fornece a resposta:

$$\begin{cases} \text{Max } v'(x) = (w'A_1)x + w'_0 \\ \text{s. a} \\ X_2 = \{x: A_2 x = b_2, \ x \geq 0\} \end{cases} \quad (158)$$

Observa-se que (158) é muito parecido com (153).

## Exemplos ilustrativos da Decomposição de Dantzig-Wolfe

**Exemplo 17:** Resolver o seguinte PL usando o TGR:

$$\begin{cases} \text{Min } z(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (159)$$

Esse problema tem  $N_c$  candidatos a pontos extremos:  $N_c = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$



Isto é, pretende-se encontrar pontos factíveis com quatro hiperplanos ativos (HA). Após analisar todos esses candidatos encontramos os seguintes pontos extremos:

$(0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 10, 0)$ ,  $(0, 0, 10, 5)$ ,  $(0, 0, 5, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 10)$ ,  $(10, 0, 0, 0)$ ,  
 $(10, 0, 10, 0)$ ,  $(10, 0, 10, 5)$ ,  $(10, 0, 5, 10)$ ,  $(10, 0, 0, 10)$ ,  $(0, 10, 0, 0)$ ,  $(0, 10, 0, 10)$ ,  
 $(6, 8, 0, 0)$ ,  $(6, 8, 0, 10)$ ,  $(6, 8, 9, 0)$ ,  $(0, 10, 10, 0)$ ,  $(0, 10, 5, 0)$ ,  $(0, 10, 5, 10)$ ,  
 $(\frac{25}{3}, \frac{10}{3}, 10, 5)$ ,  $(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}, 10, 0)$ ,  $(0, \frac{15}{2}, 10, 5)$  e  $(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}, 5, 10)$ . Ou seja, **22** pontos extremos.

Para cada ponto extremo, sabendo que  $c = [-1 \ -1 \ -2 \ -1]$ , deve-se calcular  $[cx_j]$ . Esses valores são os seguintes:

$$\begin{aligned} cx_1 &= 0, \quad cx_2 = -20, \quad cx_3 = -25, \quad cx_4 = -10, \quad cx_5 = -10, \quad cx_6 = -10, \quad cx_7 = -30, \quad cx_8 = -35, \\ cx_9 &= -30, \quad cx_{10} = -20, \quad cx_{11} = -10, \quad cx_{12} = -20, \quad cx_{13} = -14, \quad cx_{14} = -24, \quad cx_{15} = -32, \\ cx_{16} &= -30, \quad cx_{17} = -20, \quad cx_{18} = -30, \quad cx_{19} = -\frac{110}{3}, \quad cx_{20} = -\frac{100}{3}, \quad cx_{21} = -\frac{65}{3} \text{ e } cx_{22} = -\frac{100}{3}. \end{aligned}$$

O PL equivalente será:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z(\lambda) = 0\lambda_1 - 20\lambda_2 - 25\lambda_3 - 10\lambda_4 - 10\lambda_5 - 10\lambda_6 - 30\lambda_7 - 35\lambda_8 - 30\lambda_9 - 20\lambda_{10} - 10\lambda_{11} - 20\lambda_{12} + \\ \quad - 14\lambda_{13} - 24\lambda_{14} - 32\lambda_{15} - 30\lambda_{16} - 20\lambda_{17} - 30\lambda_{18} - \frac{110}{3}\lambda_{19} - \frac{100}{3}\lambda_{20} - \frac{65}{3}\lambda_{21} - \frac{100}{3}\lambda_{22} \\ \text{s. a} \\ \quad \sum_{j=1}^{22} \lambda_j = 1 \\ \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 22 \end{array} \right. \quad (160)$$

Também, qualquer ponto factível do problema original pode ser representado da seguinte forma:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \lambda_3 + \dots + \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \lambda_{19} + \dots + \begin{bmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \lambda_{22} \quad (161)$$

Por inspeção, é encontrada a solução ótima do PL (160). Assim, a solução ótima é:

$$\lambda_{19} = 1 \text{ e } \lambda_j = 0, \quad j \neq 19, \quad j = 1, 2, \dots, 22 \quad \Rightarrow \quad z(\lambda) = -\frac{110}{3}, \quad x = x_{19} = x = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e}$$

assim,  $x_1 = \frac{25}{3}$ ,  $x_2 = \frac{10}{3}$ ,  $x_3 = 10$  e  $x_4 = 5$ .

Assim, verifica-se que o ponto extremo ótimo é  $x_{19}$ . Obviamente, a solução do PL (159) é a mesma do PL (160), pois, são PL's equivalentes.

**Exemplo 18:** No seguinte PL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \quad (162)$$

Separe o problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x: x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40\} \\ X_2 &= \left\{ x: \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \end{array} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \right\} \end{aligned} \quad (163)$$

Encontre o PL equivalente e resolva esse problema equivalente:

Seja o problema de PL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = cx \\ \text{s. a} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (164)$$

Fazer a seguinte separação:

$$X_1 = \{x: A_1x = b_1\} \text{ e } X_2 = \{x: A_2x = b_2\}.$$

$$\text{Se } x \in X_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0 \end{array} \right. \quad (165)$$

Onde  $x_j$  é um ponto extremo de  $X_2$ .

Agora substituimos  $x \in X_2$  em  $z(x) = cx$  e  $A_1x = b_1$ :

$$z(\lambda) = c \sum_{j=1}^k x_j \lambda_j = \sum_{j=1}^k (cx_j) \lambda_j$$

$$A_1 \sum_{j=1}^k x_j \lambda_j = b_1 \Rightarrow \sum_{j=1}^k [A_1 x_j] \lambda_j = b_1$$

Portanto, o PL equivalente assume a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z(\lambda) = \sum_{j=1}^k (cx_j) \lambda_j \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k (A_1 x_j) \lambda_j = b_1 \quad \rightarrow m_1 \text{ restrições} \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \quad \rightarrow \text{uma restrição} \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k \end{array} \right. \quad (166)$$

Agora montando o PL equivalente (166) para o Exemplo 18. Inicialmente, precisa-se encontrar os pontos extremos de  $X_2$ :

$$\mathbf{X}_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 & \leq 30 & (\alpha_1) \\ 2x_1 + x_2 & \leq 20 & (\alpha_2) \\ & x_3 & \leq 10 & (\alpha_3) \\ & & x_4 & \leq 10 & (\alpha_4) \\ & x_3 + x_4 & \leq 15 & (\alpha_5) \\ x_1 & & & \geq 0 & (\alpha_6) \\ & x_2 & & \geq 0 & (\alpha_7) \\ & & x_3 & \geq 0 & (\alpha_8) \\ & & & x_4 & \geq 0 & (\alpha_9) \end{cases} \quad (167)$$

O número de candidatos a ponto extremo  $N_c$  assume a seguinte forma:

$$N_c = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Os pontos extremos são os seguintes:

$(0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 10, 0)$ ,  $(0, 0, 10, 5)$ ,  $(0, 0, 5, 10)$ ,  $(0, 0, 0, 10)$ ,  $(10, 0, 0, 0)$ ,  
 $(10, 0, 10, 0)$ ,  $(10, 0, 10, 5)$ ,  $(10, 0, 5, 10)$ ,  $(10, 0, 0, 10)$ ,  $(0, 10, 0, 0)$ ,  $(0, 10, 10, 0)$ ,  
 $(0, 10, 10, 5)$ ,  $(0, 10, 5, 10)$ ,  $(0, 10, 0, 10)$ ,  $(6, 8, 0, 0)$ ,  $(6, 8, 10, 0)$ ,  $(6, 8, 10, 5)$ ,  
 $(6, 8, 5, 10)$ ,  $(6, 8, 0, 10)$ , ou seja, existem **20** pontos extremos.

Encontremos os valores de  $[c x_j]$  sabendo que  $c = [-1 \ -1 \ -2 \ -1]$ :

$c x_1 = 0$ ,  $c x_2 = -20$ ,  $c x_3 = -25$ ,  $c x_4 = -20$ ,  $c x_5 = -10$ ,  $c x_6 = -10$ ,  $c x_7 = -30$ ,  $c x_8 = -35$ ,  
 $c x_9 = -30$ ,  $c x_{10} = -20$ ,  $c x_{11} = -10$ ,  $c x_{12} = -30$ ,  $c x_{13} = -35$ ,  $c x_{14} = -30$ ,  $c x_{15} = -20$ ,  
 $c x_{16} = -14$ ,  $c x_{17} = -34$ ,  $c x_{18} = -39$ ,  $c x_{19} = -34$  e  $c x_{20} = -24$ .

A matriz  $A_1$  assume a seguinte forma:  $A_1 = [1 \ 2 \ 2 \ 1]$ .  $A_1 x_j$  será:

$A_1 x_1 = 0$ ,  $A_1 x_2 = 20$ ,  $A_1 x_3 = 25$ ,  $A_1 x_4 = 20$ ,  $A_1 x_5 = 10$ ,  $A_1 x_6 = 10$ ,  $A_1 x_7 = 30$ ,  
 $A_1 x_8 = 35$ ,  $A_1 x_9 = 30$ ,  $A_1 x_{10} = 20$ ,  $A_1 x_{11} = 20$ ,  $A_1 x_{12} = 40$ ,  $A_1 x_{13} = 45$ ,  $A_1 x_{14} = 40$ ,  
 $A_1 x_{15} = 30$ ,  $A_1 x_{16} = 22$ ,  $A_1 x_{17} = 42$ ,  $A_1 x_{18} = 47$ ,  $A_1 x_{19} = 42$  e  $A_1 x_{20} = 32$ .

Assim, o PL equivalente assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Min } z(\lambda) = 0\lambda_1 - 20\lambda_2 - 25\lambda_3 - 20\lambda_4 - 10\lambda_5 - 10\lambda_6 - 30\lambda_7 - 35\lambda_8 - 30\lambda_9 - 20\lambda_{10} + \\ \quad - 10\lambda_{11} - 30\lambda_{12} - 35\lambda_{13} - 30\lambda_{14} - 20\lambda_{15} - 14\lambda_{16} - 34\lambda_{17} - 39\lambda_{18} - 34\lambda_{19} - 24\lambda_{20} \\ \text{s. a} \\ 0\lambda_1 + 20\lambda_2 + 25\lambda_3 + 20\lambda_4 + 10\lambda_5 + 10\lambda_6 + 30\lambda_7 + 35\lambda_8 + 30\lambda_9 + 20\lambda_{10} + 20\lambda_{11} + \\ + 40\lambda_{12} + 45\lambda_{13} + 40\lambda_{14} + 30\lambda_{15} + 22\lambda_{16} + 42\lambda_{17} + 47\lambda_{18} + 42\lambda_{19} + 32\lambda_{20} \leq 40 \\ \sum_{j=1}^{20} \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 20 \end{cases} \quad (168)$$

O problema (166) tem duas restrições e resolvemos esse problema usando o método simplex revisado. Previamente adicionamos a variável de folga  $s$  na restrição de desigualdade.

O problema (166) tem a seguinte SBF trivial:

$$\lambda_B = x = \begin{bmatrix} s \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 = B^{-1}, \quad c_B = [0 \ 0] \quad \Rightarrow \quad w = c_B B^{-1} = [0 \ 0]$$

$$z(x) = c_B B^{-1} b = w b = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_B = B^{-1} b = b = x = \begin{bmatrix} 40 \\ 1 \end{bmatrix}$$

	Base Inversa		RHS	
<b>z</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	pivô →
<b>s</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>40</b>	
<b>λ<sub>1</sub></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	

λ <sub>18</sub>
39
47
1

Verificamos a otimalidade do quadro:

$$\bar{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = w_N - c_N = [0 \ 0] N - c_N = -c_N \therefore$$

$\bar{c}_N = [20 \ 25 \ 20 \ 10 \ 10 \ 30 \ 35 \ 30 \ 20 \ 10 \ 30 \ 35 \ 30 \ 20 \ 14 \ 34 \ 39 \ 34 \ 24]$ ,  $\lambda_{18}$  é a variável não básica com maior coeficiente de custo relativo e deve entrar na base. Atualizemos a coluna de  $\lambda_{18}$ :  $y_{18} = B^{-1} a_{18} = a_{18} = \begin{bmatrix} 47 \\ 1 \end{bmatrix}$

Fazemos pivotagem no quadro:

	Base Inversa		RHS	
<b>z</b>	$-\frac{39}{47}$	<b>0</b>	$-\frac{1560}{47}$	pivô →
<b>λ<sub>18</sub></b>	$\frac{1}{47}$	<b>0</b>	$\frac{40}{47}$	
<b>λ<sub>1</sub></b>	$-\frac{1}{47}$	<b>1</b>	$\frac{7}{47}$	

λ <sub>8</sub>
$\frac{280}{47}$
$\frac{35}{47}$
$\frac{12}{47}$

Verificamos a otimalidade do quadro:

$$\bar{c}_N = w_N - c_N = \left[-\frac{39}{47} \ 0\right].$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 25 & 20 & 10 & 10 & 30 & 35 & 30 & 20 & 20 & 40 & 45 & 40 & 30 & 22 & 42 & 42 & 32 & 1 \\ 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 1 \end{bmatrix} \\ - [-20 \ -25 \ -20 \ -10 \ -10 \ -30 \ -35 \ -30 \ -20 \ -10 \ -30 \ -35 \ -30 \ -20 \ -14 \ -34 \ -34 \ -24 \ 0] =$$

$$\bar{c}_N = \left[ \frac{160}{47} \ \frac{200}{47} \ \frac{160}{47} \ \frac{80}{47} \ \frac{80}{47} \ \frac{240}{47} \ \frac{280}{47} \ \frac{240}{47} \ \frac{160}{47} \ -\frac{310}{47} \ -\frac{150}{47} \ -\frac{110}{47} \ -\frac{150}{47} \ -\frac{230}{47} \ -\frac{200}{47} \ -\frac{40}{47} \ -\frac{40}{47} \ -\frac{120}{47} \ -\frac{39}{47} \right].$$

$\lambda_8$  é a variável não básica com maior coeficiente de custo relativo e deve entrar na base. Atualizemos a coluna de  $\lambda_8$ :

$$y_8 = B^{-1} a_8 = \begin{bmatrix} \frac{1}{47} & 0 \\ -\frac{1}{47} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{47} \\ \frac{12}{47} \end{bmatrix}$$

Fazemos pivotagem no quadro revisado:

	Base Inversa		RHS
<b>z</b>	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{70}{3}$	$-\frac{110}{3}$
<b>λ<sub>18</sub></b>	$\frac{1}{12}$	$-\frac{35}{12}$	$\frac{5}{12}$
<b>λ<sub>8</sub></b>	$-\frac{1}{12}$	$\frac{47}{12}$	$\frac{7}{12}$

Verificamos a otimalidade do quadro:

$$\bar{c}_N = wN - c_N = \left[-\frac{1}{3} - \frac{70}{3}\right].$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 22 & 25 & 20 & 10 & 10 & 30 & 30 & 20 & 20 & 40 & 45 & 40 & 30 & 22 & 42 & 42 & 32 & 1 \\ 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 01 & 1 \end{bmatrix} \\ - [0 \ -20 \ -25 \ -20 \ -10 \ -10 \ -30 \ -30 \ -20 \ -10 \ -30 \ -35 \ -30 \ -20 \ -14 \ -34 \ -34 \ -24 \ 0] =$$

$$\bar{c}_N = \left[-\frac{70}{3} \ -10 \ -\frac{20}{3} \ -10 \ -\frac{50}{3} \ -\frac{50}{3} \ -\frac{10}{3} \ -\frac{10}{3} \ -10 \ -20 \ -\frac{20}{3} \ -\frac{10}{3} \ -\frac{20}{3} \ -\frac{40}{3} \ -\frac{50}{3} \ -\frac{10}{3} \ -\frac{10}{3} \ -10 \ -\frac{71}{3}\right].$$

$$\bar{c}_N \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{A base atual é ótima.}$$

A solução ótima do PL é a seguinte:

$$\lambda_8 = \frac{7}{12}, \lambda_{18} = \frac{5}{12}, z(\lambda) = -\frac{110}{3} \text{ e } \lambda_j = 0, j \neq 8, 18, j = 1, 2, \dots, 20 \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{7}{12} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} + \frac{5}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, a solução do problema original:}$$

$$x_1 = \frac{25}{3}, x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = 10 \text{ e } x_4 = 5 \text{ e } z(\lambda) = -\frac{110}{3}.$$

**Exemplo 19:** Resolver o exemplo 18 usando a ideia da decomposição matemática de Dantzig-Wolfe.

Estrutura geral do PL equivalente:

$$\begin{cases} \text{Min } z(\lambda) = \sum_{j=1}^k (c x_j) \lambda_j \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k (A_1 x_j) \lambda_j = b_1 \quad \rightarrow w \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \quad \rightarrow w_0 \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (169)$$

No exemplo 18 o conjunto  $X_1 = \{x: x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40\} \Rightarrow X_1 = \{x: x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + s = 40, s \geq 0\}$ . Assim (169), para o exemplo 18, assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Min } z(\lambda) = \sum_{j=1}^k (c x_j) \lambda_j \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k (A_1 x_j) \lambda_j + s = 40 \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \\ s \geq 0, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (170)$$

Assim, para iniciar o processo de solução do problema (170) usando um algoritmo primal simplex revisado precisa-se de uma SBF inicial. Uma estratégia geral para montar uma SBF inicial para qualquer problema é analisada separadamente.

Para este exemplo pode-se gerar uma SBF inicial formada por uma  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$  levando em conta os seguintes fatos:

i) Observando o conjunto  $\mathbf{X}_2$  para o exemplo 19 temos o seguinte:

$$\mathbf{X}_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \end{array} \middle| x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \right\}$$

Vemos que de forma trivial pode-se verificar que o ponto  $(0 \ 0 \ 0 \ 0)$  é um ponto extremo de  $\mathbf{X}_2$ . Assim, associado com esse ponto temos a variável  $\lambda_1$  cuja estrutura é:

Ponto extremo:  $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \leftarrow x_1 \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_1 x_1 = [1 \ 2 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

Portanto, a coluna de  $\lambda_1$  no PL equivalente é a seguinte:  $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

ii) A coluna da variável de folga  $s$  no PL equivalente é a seguinte:  $s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Portanto, um candidato natural a SBF inicial é o seguinte:

$$\lambda_B = \begin{bmatrix} s \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} = \mathbf{B}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 40 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Falta verificar que  $\bar{\lambda}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 40 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$ , o que prova que  $\lambda_B = \begin{bmatrix} s \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$  é uma SBF

inicial e agora pode-se montar o quadro simplex revisado inicial.

	Base Inversa		RHS
<b>z</b>	<b>w</b>	<b>w<sub>0</sub></b>	<b>w'b</b>
<b>s</b>	<b>B<sup>-1</sup></b>		<b>B<sup>-1</sup>b</b>
<b>λ<sub>1</sub></b>			

O coeficiente de  $\lambda_1$  na função objetivo é  $\mathbf{c}x_1 = [-1 \ -1 \ -2 \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$  e o coeficiente de  $s$  na função objetivo é zero. Assim, temos:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0 \ 0] \mathbf{I} = [0 \ 0], \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{w}' \mathbf{b} = [0 \ 0] \begin{bmatrix} 40 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 40 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

	Base Inversa		RHS	
<b>z</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	pivô →
<b>s</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>40</b>	
<b>λ<sub>1</sub></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
				<b>39</b>
				<b>47</b>
				<b>1</b>

Agora precisa-se verificar a otimalidade do quadro corrente, isto é, encontrar os coeficientes de custo relativo de todas as variáveis não básicas e, a partir daí, identificar a variável não básica  $\lambda_j$  que tem o maior coeficiente de custo relativo e o valor deste coeficiente e, caso esse valor seja positivo, então também precisa-se conhecer os elementos da coluna  $\lambda_j$ . Essa informação encontramos resolvendo o PL (168), onde deve-se observar que  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = 0$

no quadro simplex revisado do PL equivalente. Temos  $A_1 = [1 \ 2 \ 2 \ 1]$ ,  $c = [-1 \ -1 \ -2 \ -1]$  e também  $wA_1 - c = 0 \ [1 \ 2 \ 2 \ 1] - [-1 \ -1 \ -2 \ -1] = [1 \ 1 \ 2 \ 1]$ . Assim, o problema (168) assume a seguinte forma:

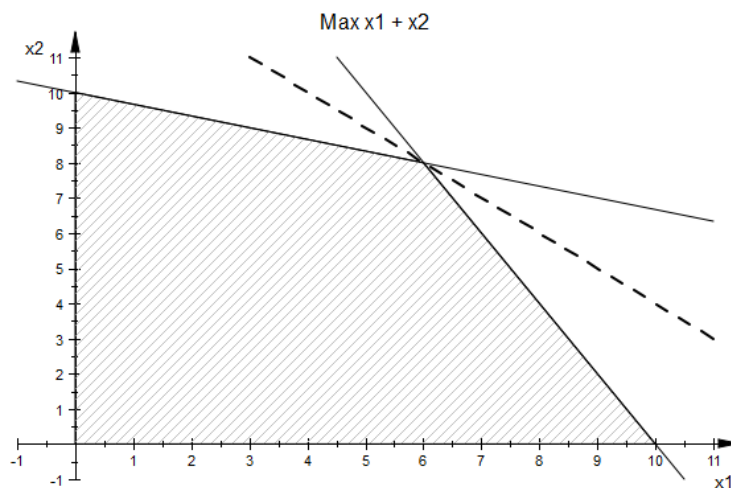
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 0 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Como existe a estrutura bloco-angular então o PL anterior pode ser separado em dois PL's independentes.

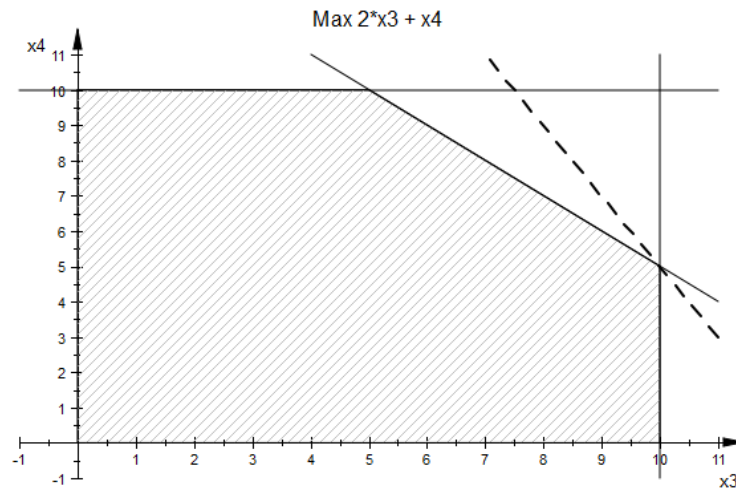
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v_1(x) = x_1 + x_2 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v_2(x) = 2x_3 + x_4 \\ \text{s. a} \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

$v(x) = v_1(x) + v_2(x) + 0(w_0)$  é a solução do PL equivalente a (168). Resolvemos, por simplicidade, esses dois subproblemas de PL usando o método gráfico:

**Figura 2** – Soluções gráficas



Fonte: Autoria própria.



Fonte: Autoria própria.

Graficamente encontramos a solução ótima:

$$x_1 = 6, x_2 = 8 \text{ e } v_1(x) = 14 \quad \text{e} \quad x_3 = 10, x_4 = 5 \text{ e } v_2(x) = 25$$

$$\text{Ponto extremo encontrado: } (6, 8, 10, 5) \quad \leftarrow \lambda_2$$

Associado com esse ponto extremo temos a variável não básica  $\lambda_2$  cujo coeficiente de custo relativo é  $\bar{f}_2 = v_1(x) + v_2(x) + w_0 = 14 + 25 + 0 = 39$ .

Assim, no quadro simplex corrente do PL equivalente pode-se concluir que o quadro simplex não é ótimo e existe uma variável não básica ( $\lambda_2$  neste caso) com o maior coeficiente de custo relativo. Veja que essa  $\lambda_2$  neste caso corresponde ao  $\lambda_{18}$  na página 123. Agora precisa-se encontrar a coluna de  $\lambda_2$  no PL equivalente, ou seja,

$$P_2 = A_1 x_2 = [1 \ 2 \ 2 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = 47$$

Assim, a coluna de  $\lambda_2$  é  $a_2 = \begin{bmatrix} P_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Atualizamos  $a_2$  para a base corrente:  $y_2 = B^{-1}a_2 = I a_2 = a_2 = \begin{bmatrix} 47 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Como o coeficiente de custo relativo  $\bar{f}_2$  já se encontra atualizado então já temos a coluna de  $\lambda_2$  para ser incorporada no quadro simplex revisado. Pivotamos o quadro simplex do PL equivalente, com  $w_0 = 0$  e  $w = -\frac{39}{47}$ :

	Base	Inversa	RHS
$z$	$-\frac{39}{47}$	$0$	$-\frac{1560}{47}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{47}$	$0$	$\frac{40}{47}$
$\lambda_1$	$-\frac{1}{47}$	$1$	$\frac{7}{47}$

pivô →

$\lambda_3$
$\frac{280}{47}$
$\frac{35}{47}$
$\frac{12}{47}$



Segunda iteração:

Montamos os novos subproblemas

$$wA_1 - c = -\frac{39}{47}[1 \ 2 \ 2 \ 1] - [-1 \ -1 \ -2 \ -1] = \left[\frac{8}{47}, -\frac{31}{47}, \frac{16}{47}, \frac{8}{47}\right] \Rightarrow$$

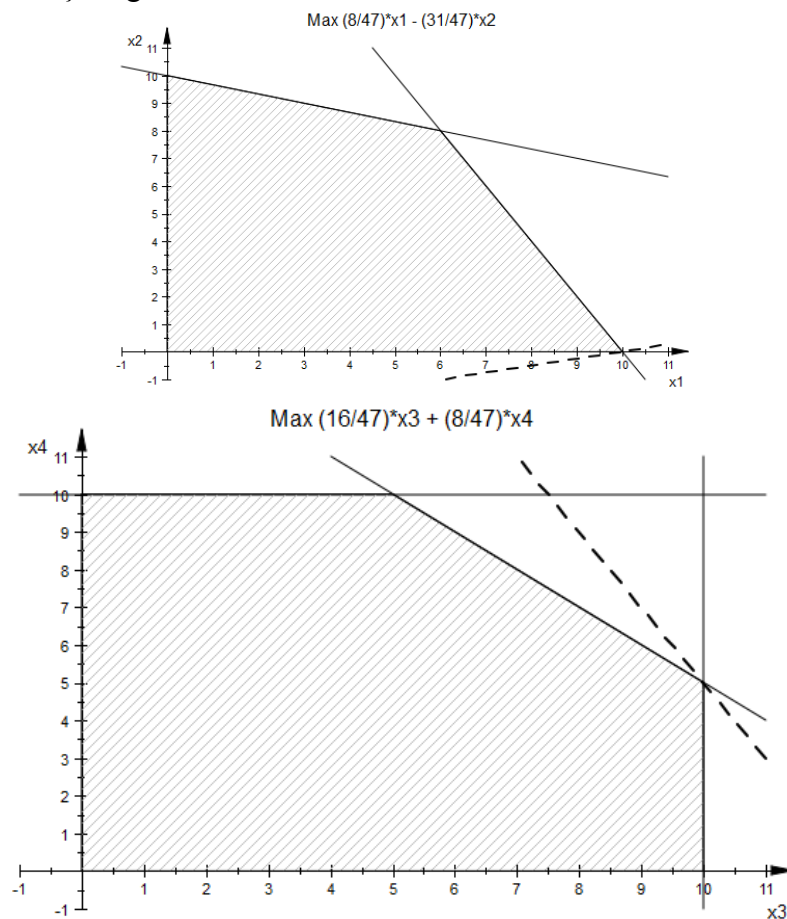
$$\text{Max } v(x) = \frac{8}{47}x_1 - \frac{31}{47}x_2 + \frac{16}{47}x_3 + \frac{8}{47}x_4 + 0.$$

Os subproblemas assumem a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{max } v_1(x) = \frac{8}{47}x_1 - \frac{31}{47}x_2 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{max } v_2(x) = \frac{16}{47}x_3 + \frac{8}{47}x_4 \\ \text{s. a} \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Graficamente encontramos as soluções ótimas:

**Figura 3** – Soluções gráficas



Fonte: Autoria própria.

$$x_1 = 10, x_2 = 0 \text{ e } v_1(x) = \frac{80}{47} \text{ e } \quad x_3 = 10, x_4 = 5 \text{ e } v_2(x) = \frac{200}{47}$$

$$\text{Ponto extremo} \quad \Rightarrow \quad (10, 0, 10, 5) \quad \leftarrow \lambda_3$$

Associado com esse ponto extremo temos a variável não básica  $\lambda_3$  cujo coeficiente de custo relativo é  $\bar{f}_3 = v_1(x) + v_2(x) + w_0 = \frac{80}{47} + \frac{200}{47} + 0 = \frac{280}{47}$  que corresponde ao coeficiente de custo relativo de  $\lambda_3$  na página 123.

Agora precisa-se encontrar a coluna de  $\lambda_3$  no PL equivalente.

$$P_3 = A_1 x_3 = [1 \ 2 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = 35 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \begin{bmatrix} 35 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Atualizamos  $a_3$  para a base corrente  $y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{47} & 0 \\ -\frac{1}{47} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{47} \\ \frac{12}{47} \end{bmatrix}$  e a coluna de  $\lambda_3$

adequadamente atualizada será  $\begin{bmatrix} 280 \\ 47 \\ 35 \\ 47 \\ 12 \\ 47 \end{bmatrix}$ . Com a coluna de  $\lambda_3$  pivotamos o quadro simplex revisado, com  $w_0 = -\frac{1}{3}$  e  $w = -\frac{70}{3}$ :

	Base	Inversa	RHS
$z$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{70}{3}$	$-\frac{110}{3}$
$\lambda_2$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{35}{12}$	$\frac{5}{12}$
$\lambda_1$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{47}{12}$	$\frac{7}{12}$

Terceira iteração:

Montamos os novos subproblemas

$$wA_1 - c = -\frac{1}{3}[1 \ 2 \ 2 \ 1] - [-1 \ -1 \ -2 \ -1] = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\text{Max } v(x) = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{70}{3}.$$

Os subproblemas assumem a seguinte forma:

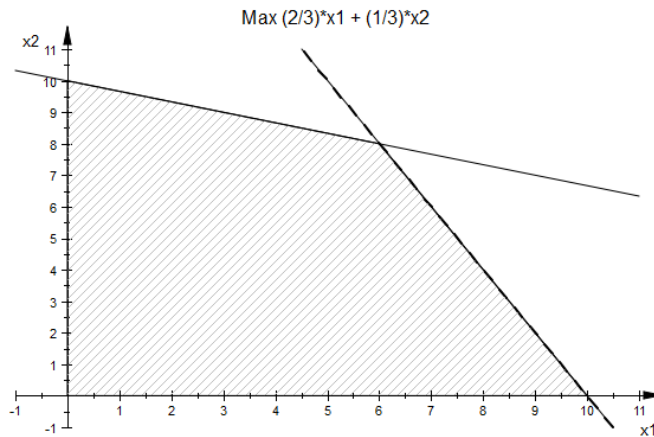
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{max } v_1(x) = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{max } v_2(x) = \frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ \text{s. a} \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Graficamente encontramos as soluções ótimas:

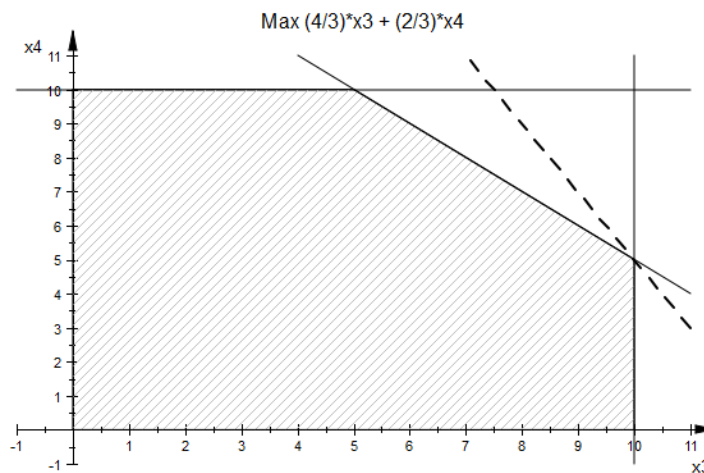
$$x_1 = 6, x_2 = 8 \text{ e } v_1(x) = \frac{20}{3} \quad \text{e} \quad x_3 = 10, x_4 = 5 \text{ e } v_2(x) = \frac{50}{3}$$

$$\text{Ponto extremo} \quad \Rightarrow \quad (6, 8, 10, 5) \quad \leftarrow \lambda_4$$

**Figura 4 – Soluções gráficas.**



Fonte: Autoria própria.



Fonte: Autoria própria.

Veja que este ponto já foi encontrado anteriormente e estava associado com a variável  $\lambda_2$  que é uma variável básica no quadro simplex corrente. Conceitualmente, isso significa que o coeficiente de custo relativo das variáveis  $\lambda_j$  do PL equivalente com maior valor é igual a zero e essa variável é básica e, portanto, os coeficientes de custo relativo de todas as variáveis não básicas são ( $\leq 0$ ) e, portanto, o quadro simplex corrente é ótimo.

Verificamos esse fato encontrando  $v(\mathbf{x})$ :

$$v(\mathbf{x}) = v_1(\mathbf{x}) + v_2(\mathbf{x}) + w_0 = \frac{20}{3} + \frac{50}{3} - \frac{70}{3} = 0 \leq 0.$$

Assim, o processo de solução foi terminado e a solução ótima será:

$$z(\lambda) = -\frac{110}{3}, \lambda_2 = \frac{5}{12}, \lambda_3 = \frac{7}{12} \text{ e } \lambda_j = 0 \text{ para } j \neq 2 \text{ e } j \neq 3.$$

Em função das variáveis originais:

$$\mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \frac{5}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ \mathbf{08} \\ \mathbf{10} \\ 5 \end{bmatrix} + \frac{7}{12} \begin{bmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{10} \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \mathbf{10} \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } x_1 = \frac{25}{3}, x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = 10, x_4 = 5 \text{ e}$$

$$z(\mathbf{x}) = -\frac{110}{3}.$$

**Exemplo 20:** Resolver o exemplo 19 usando o método das duas fases. O problema de fase I assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Min } x_0 = s_1 + s_2 & \rightarrow \text{Fase I} \\ \text{Min } z(\lambda) = \sum_{j=1}^k (c x_j) \lambda_j & \rightarrow \text{Fase II} \\ \text{s. a} \\ \sum_{j=1}^k (A_1 x_j) \lambda_j + s + s_1 = 40 & \rightarrow w' \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j + s_2 = 1 & \rightarrow w'_0 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k \\ s, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases} \quad (171)$$

Observa-se que  $s$  é uma variável de folga original. O problema (171) tem a seguinte

$$\text{SBF trivial e artificial: } \lambda'_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \lambda'_N = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ s \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{c}'_B = [\mathbf{1} \ \mathbf{1}] \text{ e aí } \mathbf{w}'' = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{c}'_B \\ = [\mathbf{1} \ \mathbf{1}] = [\mathbf{w}' \ \mathbf{w}'_0] \Rightarrow \mathbf{w}' = \mathbf{1} \text{ e } \mathbf{w}'_0 = \mathbf{1}$$

$$\bar{x}_0 = \mathbf{w}'' \mathbf{b} = [\mathbf{1} \ \mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{40} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{41} \text{ e } \lambda'_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{40} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

Assim, pode-se montar o quadro simplex revisado inicial:

	Base Inversa		RHS		$\lambda_1$
$x_0$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{41}$	pivô $\rightarrow$	$\mathbf{48}$
$s_2$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{40}$		$\mathbf{47}$
$s_2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$		$\mathbf{1}$

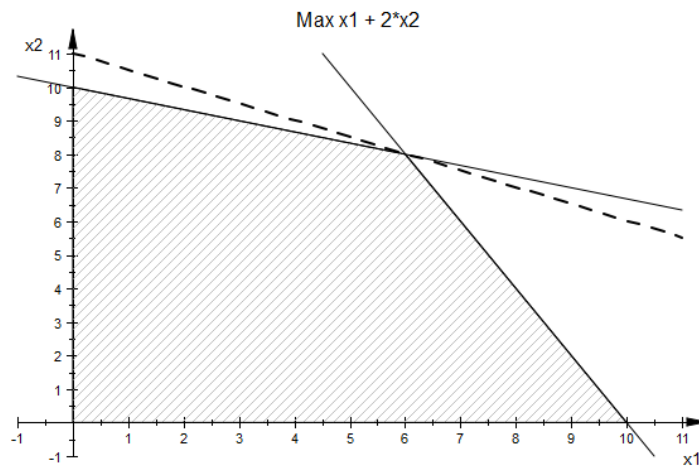
Agora precisa-se verificar a otimalidade do quadro simplex corrente. Para isso identificamos a variável não básica  $\lambda_j$  de maior coeficiente de custo relativo resolvendo os subproblemas.

$$\mathbf{w}' \mathbf{A}_1 = (\mathbf{1}) [\mathbf{1} \ \mathbf{2} \ \mathbf{2} \ \mathbf{1}] = [\mathbf{1} \ \mathbf{2} \ \mathbf{2} \ \mathbf{1}], \mathbf{w}_0 = \mathbf{1}$$

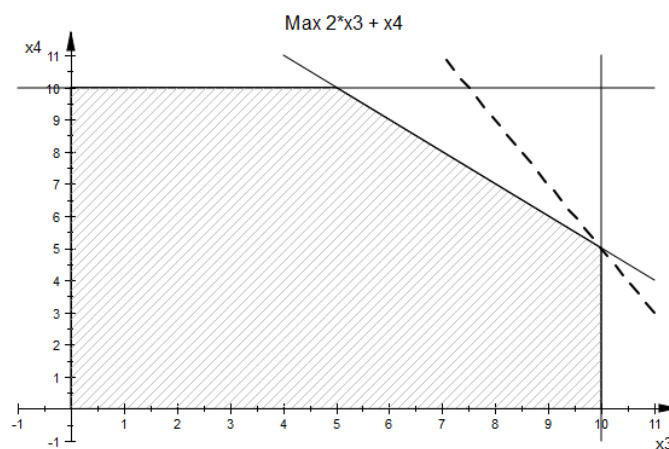
Assim, os subproblemas assumem a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v'_1(x) = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v'_2(x) = 2x_3 + x_4 \\ \text{s. a} \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

**Figura 5** – Soluções gráficas.



Fonte: Autoria própria.



Fonte: Autoria própria.

Graficamente encontramos a seguinte solução:

$$x_1 = 6, x_2 = 8 \text{ e } v'_1(x) = 22 \quad \text{e} \quad x_3 = 10, x_4 = 5 \text{ e } v'_2(x) = 25$$

Ponto extremo encontrado:  $x_1 = (6, 8, 10, 5)$

$$v'(x) = v'_1(x) + v'_2(x) + w'_0 = 22 + 25 + 1 = 48 \quad \leftarrow \lambda_1$$

Assim, a variável  $\lambda_1$  tem o maior coeficiente de custo relativo e atualizamos a coluna de  $\lambda_1$ :

$$P_1 = A_1 x_1 = [1 \ 2 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = 47 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \begin{bmatrix} 47 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ pois, } y_1 = B^{-1} a_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 47 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A coluna de  $\lambda_1$  é  $\begin{bmatrix} 48 \\ 47 \\ 1 \end{bmatrix}$  e agora se pode pivotar o quadro simplex.

Note que também se deve calcular o coeficiente de custo relativo da variável de folga

$$s, \text{ ou seja, } \bar{c}'_s = w'' a_s - c'_s = w'' a_s - 0 = w'' a_s = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Como é menor que o coeficiente de custo relativo de  $\lambda_1$  então não existe problemas.

$$w' = -\frac{1}{47} \text{ e } w'_0 = 1$$

	Base Inversa		RHS	
$x_0$	$-\frac{1}{47}$	<b>1</b>	$-\frac{7}{47}$	$\lambda_2$
$\lambda_1$	$\frac{1}{47}$	<b>0</b>	$\frac{40}{47}$	<b>1</b>
$s_2$	$-\frac{1}{47}$	<b>1</b>	$\frac{7}{47}$	<b>0</b>
				<b>1</b>

pivô →

Agora verificamos a otimalidade do quadro simplex.

$$w' A_1 = -\frac{1}{47} [1 \ 2 \ 2 \ 1] = \left[-\frac{1}{47} \ -\frac{2}{47} \ -\frac{2}{47} \ -\frac{1}{47}\right]$$

Resolveremos os dois subproblemas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v'_1(x) = -\frac{1}{47}x_1 - \frac{2}{47}x_2 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v'_2(x) = -\frac{2}{47}x_3 - \frac{1}{47}x_4 \\ \text{s. a} \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

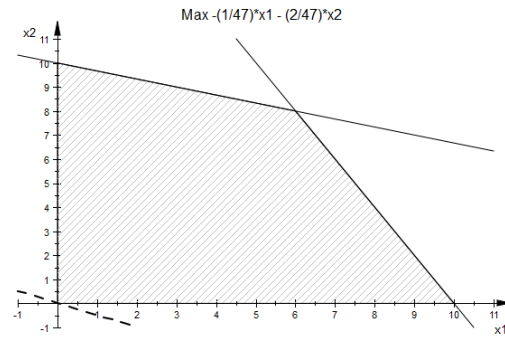
Graficamente encontramos a seguinte solução:

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ e } v'_1(x) = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = 0, x_4 = 0 \text{ e } v'_2(x) = 0$$

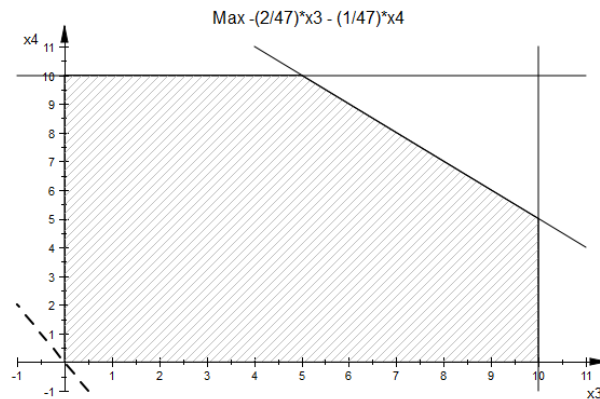
Ponto extremo encontrado:  $(0, 0, 0, 0)$

$$v'(x) = v'_1(x) + v'_2(x) + w'_0 = 0 + 0 + 1 = 1 \quad \leftarrow \lambda_2$$

**Figura 6 – Soluções gráficas.**



Fonte: Autoria própria.



Fonte: Autoria própria.

Encontramos também o coeficiente de custo relativo de  $s$ :

$$\bar{c}_s' = w''a_s - c_s' = w''a_s - 0 = w''a_s = \left[-\frac{1}{47} \ 1\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{47} < 0 \text{ (OK).}$$

Assim, a variável não básica  $\lambda_2$  tem coeficiente de custo relativo  $v'(x) = 1 > 0$  e deve entrar na base. Atualizamos a coluna de  $\lambda_2$ :

$$P_2 = A_1 x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{47} & 0 \\ -\frac{1}{47} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A coluna de  $\lambda_2$  adequadamente atualizada é a seguinte:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Assim pode-se fazer pivotagem no quadro simplex revisado.

	Base Inversa		RHS
$x_0$	$0$	$0$	$0$
$\lambda_1$	$\frac{1}{47}$	$0$	$\frac{40}{47}$
$\lambda_2$	$-\frac{1}{47}$	$1$	$\frac{7}{47}$

A Fase I terminou porque  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Agora se precisa substituir a coluna da função objetivo com os dados atualizados da função objetivo original, ver (171). Lembremos o seguinte (relação entre  $\lambda_j$  e o respectivo ponto extremo).

$$\lambda_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} ( ) \quad \lambda_2 \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ( )$$

Assim, precisa-se encontrar  $\mathbf{w}^c$  da base atual para a função objetivo da Fase II e o valor objetivo  $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x})$ .

$$\mathbf{c}\mathbf{x}_1 = [-1 \ -1 \ -2 \ -1] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = -39 \text{ (coeficiente de } \lambda_1)$$

$$\mathbf{c}\mathbf{x}_2 = [-1 \ -1 \ -2 \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ (coeficiente de } \lambda_2)$$

$$\mathbf{w}^c = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [-39 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{47} & 0 \\ -\frac{1}{47} & 1 \end{bmatrix} = [-\frac{39}{47} \ 0]$$

$$\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^c \mathbf{b} = [-\frac{39}{47} \ 0] \begin{bmatrix} 40 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1560}{47}.$$

Portanto, o quadro simplex para continuar a Fase II do processo de solução assume a seguinte forma:

	Base Inversa		RHS
$\mathbf{z}(\mathbf{x})$	$-\frac{39}{47}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{1560}{47}$
$\lambda_1$	$\frac{1}{47}$	$\mathbf{0}$	$\frac{40}{47}$
$\lambda_2$	$-\frac{1}{47}$	$\mathbf{1}$	$\frac{7}{47}$

O quadro anterior é o mesmo da página 122 e, portanto, o restante do processo é o mesmo da resolução do exemplo 18.